

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ESPÈCES DE STRUCTURES ET APPLICATIONS AU  
DÉNOMBREMENT DE CARTES ET DE CACTUS PLANAIRES

THÈSE  
PRÉSENTÉE  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

PAR  
MICHEL BOUSQUET

FÉVRIER 1999

|

|

|

|

## TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ . . . . .	iv
INTRODUCTION . . . . .	vi
CHAPITRE I	
ESPÈCES DE STRUCTURES . . . . .	5
1.1 Espèces . . . . .	5
1.2 Séries formelles associées . . . . .	9
1.2.1 Série génératrice . . . . .	9
1.2.2 Série génératrice des types . . . . .	10
1.2.3 Série indicatrice des cycles . . . . .	11
1.3 Isomorphisme d'espèces . . . . .	14
1.4 Opérations sur les espèces . . . . .	15
1.4.1 Addition . . . . .	15
1.4.2 Multiplication . . . . .	16
1.4.3 Composition partitionnelle . . . . .	18
1.4.4 Dérivation . . . . .	22
1.4.5 Pointage . . . . .	23
1.5 Espèces asymétriques . . . . .	24
1.6 Espèces pondérées . . . . .	25
1.7 Espèces multisortes . . . . .	29
CHAPITRE II	
ESPÈCES QUOTIENTS . . . . .	33
2.1 Actions de groupes . . . . .	33
2.2 Espèces quotients . . . . .	39
2.2.1 Série génératrice . . . . .	40
2.2.2 Série génératrice des types d'isomorphie . . . . .	41
2.2.3 Série indicatrice des cycles . . . . .	42

CHAPITRE III	
DÉNOMBREMENT DE CARTES PLANAIRES . . . . .	45
3.1 Cartes planes . . . . .	45
3.1.1 Cartes planes à deux faces . . . . .	46
3.1.2 Cartes planes étiquetées à deux faces . . . . .	49
3.1.3 Cartes planes non étiquetées à deux faces . . . . .	50
3.1.4 Cartes planes étiquetées à deux faces pondérés selon les degrés des sommets . . . . .	51
3.1.5 Cartes planes non étiquetées à deux faces pondérées selon les degrés des sommets . . . . .	56
3.1.6 Cartes planes étiquetées à deux faces selon la distribution des degrés des faces . . . . .	57
3.1.7 Cartes planes non étiquetées à deux faces selon la distribution des degrés des faces . . . . .	59
3.1.8 Cartes planes étiquetées à deux faces selon les distributions conjointes des degrés des sommets et des faces . . . . .	59
3.1.9 Cartes planes non étiquetées à deux faces selon les distributions conjointes des degrés des sommets et des faces . . . . .	64
3.2 Cartes sphériques . . . . .	65
3.2.1 Cartes sphériques étiquetées à deux faces . . . . .	67
3.2.2 Cartes sphériques non étiquetées à deux faces selon le nombre de sommets: première méthode . . . . .	69
3.2.3 Cartes sphériques non étiquetées à deux faces selon le nombre de sommets: deuxième méthode . . . . .	85
3.2.4 Cartes sphériques non étiquetées à deux faces selon la distribution des degrés des sommets. . . . .	90
3.2.5 Cartes sphériques non étiquetées à deux faces selon la distribution des degrés des faces. . . . .	95
3.2.6 Cartes sphériques non étiquetées à deux faces selon les distributions conjointes des degrés des sommets et des faces. . . . .	96
CHAPITRE IV	
DÉNOMBREMENT DE CACTUS . . . . .	99
4.1 Cactus $m$ -aires enracinés et non étiquetés . . . . .	99

4.2	Une bijection avec les arborescences ordonnées $m$ -aires . . . . .	104
4.3	Cactus $m$ -aires non enracinés non étiquetés . . . . .	108
4.4	Cactus $m$ -aires enracinés non étiquetés selon la distribution des sommets de chaque couleur . . . . .	114
4.5	Cactus $m$ -aires non enracinés non étiquetés selon la distribution des sommets de chaque couleur . . . . .	122
4.6	Cactus $m$ -aires enracinés non étiquetés selon la distribution des degrés des sommets . . . . .	124
4.7	Cactus $m$ -aires non enracinés non étiquetés selon la distribution des degrés . . . . .	126
	CONCLUSION . . . . .	129
	BIBLIOGRAPHIE . . . . .	131



## RÉSUMÉ

Nous présentons dans cette thèse, des résultats reliés au dénombrement de cartes planaires et de cactus  $m$ -aires. Nous utilisons, comme principal outil de calcul, la théorie combinatoire des espèces de structures. Le premier chapitre consiste à donner un bref exposé des diverses notions relatives à la théorie des espèces qui seront utilisées dans les chapitres ultérieurs. Nous rappelons le concept d'espèce de structures, ainsi que les séries formelles associées. Nous présentons certaines opérations sur les espèces notamment, l'addition, la multiplication, la composition partitionnelle, la dérivation ainsi que le pointage. Nous généralisons ensuite aux concepts d'espèces pondérées et multisortes.

Le deuxième chapitre porte sur les espèces quotients. On fait d'abord quelques rappels sur les actions de groupes. On passe ensuite à la notion d'espèce quotient et on détermine les trois principales séries formelles associées. Bien que le concept d'espèce quotient soit abordé ailleurs, nos résultats sur les séries associées sont inédits.

Le troisième chapitre est consacré au dénombrement de cartes planaires. On traite d'abord des cartes planes à deux faces, c'est-à-dire, des cartes à deux faces plongées dans le plan. On y dénombre les cartes planes à deux faces, étiquetées aux sommets ou non, selon le nombre de sommets, selon la distribution des degrés des sommets, selon la distribution des degrés des faces, et finalement, selon les distributions conjointes. Nous passons ensuite à l'étude de ces mêmes statistiques, dans le cas des cartes planaires (ou sphériques) à deux faces, c'est-à-dire, plongées sur la sphère.

Le quatrième chapitre est consacré au dénombrement de cactus  $m$ -aires. On détermine d'abord le nombre de cactus  $m$ -aires enracinés selon le nombre de polygones. On établit ensuite une bijection avec les arborescences  $m$ -aires. On passe ensuite à l'énumération des cactus  $m$ -aires (étiquetés aux polygones ou non) selon la distribution des sommets de chaque couleur, puis selon la distribution des degrés des sommets.



## INTRODUCTION

L'un des principaux sujets abordés dans cette thèse est le dénombrement de cartes. Une carte peut être définie topologiquement comme une décomposition cellulaire d'une surface orientée de genre  $g$  en sommets (0-cellules), arêtes (1-cellules) et faces (2-cellules). Une carte  $\mathcal{C}$  peut également être combinatoirement définie comme étant la donnée d'un couple  $(\sigma, \alpha)$  où  $\sigma$  est une permutation  $\sigma \in \mathbb{S}_{2n}$  et  $\alpha$  est une involution sans point fixe dans  $\mathbb{S}_{2n}$  tel que l'action du sous-groupe  $\langle \sigma, \alpha \rangle$  engendré par  $\sigma$  et  $\alpha$  sur l'ensemble des "brins" soit transitive.

Un troisième point de vue considère une carte comme un graphe discret plongé sur une surface et ayant un ensemble de sommets, un ensemble d'arcs ou d'arêtes et un ensemble de faces. En considérant les réétiquetages possibles de ces ensembles le long de bijections, on ouvre la possibilité de parler d'espèces de structures constituées de classes de cartes fermées sous les réétiquetages. L'étude des cartes est un sujet très riche et est étroitement liée à d'autres sujets, notamment à la théorie de Galois, à la théorie des nombres algébriques et à la théorie des surfaces de Riemann. Voir ([1]) et ([28]).

Notre travail sur les cartes a été principalement motivé par la classification topologique des fonctions de Belyi, qui sont en correspondance avec les (hyper)-cartes planaires. Voir ([22]), ([25]) et ([28]). Nous allons ici étudier le cas particulier des cartes planaires à deux faces, qui correspondent à une classe particulière de fonctions de Belyi. Nous dénombrons ces cartes dans les situations suivantes: étiquetées (aux sommets) ou non, selon le nombre de sommets, puis selon la distribution des degrés des sommets, des faces et, finalement, selon les distributions conjointes. Dans notre approche, nous allons considérer les cartes comme regroupées en classes formant des espèce de structures.

L'autre sujet principal abordé dans cette thèse est le dénombrement des cactus  $m$ -aires. En particulier, nous prolongeons un travail de G. Labelle et P. Leroux sur le dénombrement des arbres plans bicolorés ([17]) qui sont en fait des cactus binaires, i.e. avec  $m = 2$ . L'étude des cactus  $m$ -aires est motivée, quant à elle, par la classification topologique des polynômes complexes ayant au plus  $m$  valeurs critiques ([9]). Les cactus sont également appelés "arbres de Husimi" et leur définition a été donnée dans ([34]) ([26]) d'après un article de Husimi ([13]) concernant certains problèmes d'intégration dans la théorie de la condensation en mécanique statistique, pouvant se modéliser au moyen de graphes connexes et de cactus.

Le chapitre 1 présente un bref exposé de la théorie des espèces de structures. Son but est de familiariser le lecteur avec les concepts et méthodes de calcul relatifs à cette théorie, ce qui permettra une lecture plus aisée des chapitres subséquents. Cette présentation ne prétend pas être exhaustive mais elle sera néanmoins suffisante pour la matière qui sera traitée dans cette thèse. Le lecteur intéressé à en connaître d'avantage sur cette théorie peut se référer à ([4]).

On rappelle d'abord ce qu'est une espèce de structures  $F$ . À chaque espèce  $F$ , sont associées principalement trois séries formelles, à savoir la série génératrice  $F(x)$ , qui permet le dénombrement des  $F$ -structures étiquetées, la série génératrice  $\tilde{F}(x)$  des types d'isomorphie, qui donne le dénombrement des  $F$ -structures non étiquetées, et la série  $Z_F$ , indicatrice des cycles, qu'on utilise comme outil général d'énumération.

On aborde ensuite la notion d'isomorphisme d'espèces, qui nous sert d'égalité combinatoire. Cette notion nous permet d'écrire des expressions comme  $A_L = XL(A_L)$ , qui exprime le fait qu'une arborescence ordonnée (une  $A_L$ -structure) peut être considérée comme un singleton (une  $X$ -structure), auquel est attachée une liste (une  $L$ -structure) d'arborescences ordonnées. Ce type d'identité combinatoire donne lieu, au niveau des séries formelles, à des équations fonctionnelles pouvant être résolues au moyen de diverses techniques, notamment l'inversion de Lagrange.

On note que l'expression  $A_L = XL(A_L)$  comporte des opérations algébriques, à savoir la multiplication et la composition. Il sera donc utile de bien rappeler les définitions de telles opérations au niveau des espèces. Nous étudierons l'addition, la multiplication, la composition partitionnelle, la dérivation et le pointage d'espèces. On verra comment se comportent les séries formelles associées, relativement à ces opérations.

On présentera finalement la généralisation aux concepts d'espèces pondérées ainsi qu'aux espèces multisortes. La notion d'espèce pondérée est utile pour obtenir un dénombrement plus fin des structures. Elle nous permettra, par exemple, de dénombrer les cartes à deux faces en fonction de la distribution des degrés des sommets. La notion d'espèce multisorte nous servira à établir des équations fonctionnelles faisant intervenir plusieurs variables, notamment pour l'étude des cactus  $m$ -aires. Ces équations pourront être résolues au moyen de techniques relatives à l'inversion de Lagrange multidimensionnelle.

Le chapitre 2 traite des espèces quotients. La motivation de cette étude provient ici du fait que l'espèce  $\mathcal{M}$  des cartes sphériques à deux faces se présente naturellement comme étant le quotient de l'espèce  $M$  des cartes planes à deux faces par un certain groupe  $G$ , isomorphe à  $\mathbb{Z}_2$ .

On fait d'abord quelques rappels sur les actions de groupes. On montre ensuite, étant donnée une action d'un groupe fini  $G$  sur une espèce pondérée  $F = F_w$ , comment la série génératrice  $(F/G)_w(x)$ , la série génératrice des types d'isomorphie  $\widetilde{F/G}(x)$ , ainsi que  $Z_{(F/G)_w}(x_1, x_2, x_3, \dots)$ , la série indicatrice de cycles de l'espèce quotient  $F/G$  peuvent être exprimées en fonction des séries correspondantes de l'espèce  $F$ . Il s'agit là d'un résultat inédit bien que le concept d'espèce quotient se retrouve dans ([18]), ([15]), et ([4]).

Le chapitre 3 est consacré au dénombrement des cartes planaires à deux faces. On étudie d'abord l'espèce  $M$  des cartes *planes* à deux faces, c'est-à-dire des cartes planaires à deux faces munies d'une face distinguée. Dans notre cas, par convention, la face distinguée sera celle qui contient le pôle nord. Par une projection stéréographique, on obtient un plongement d'une carte planaire sur le plan, la face distinguée devenant alors la face (infinie) extérieure. Le dénombrement de ces cartes (étiquetées aux sommets ou non) se fera d'abord en fonction du nombre de sommets, ensuite en fonction de la distribution des degrés des sommets, puis en fonction de la distribution des degrés des faces et, finalement, en fonction des distributions conjointes des degrés des sommets et des faces.

On passe ensuite à l'étude de l'espèce  $M$  des cartes planaires (ou sphériques) à deux faces. Nous verrons que l'espèce  $M$  peut être vue comme étant l'espèce  $M$  quotientée par le groupe  $\mathbb{Z}_2 \cong \{\text{Id}, \tau\}$ , c'est-à-dire  $M = M/\mathbb{Z}_2$ , où  $\tau$ , désigné sous le nom d'involution antipodale, représente une rotation d'angle  $\pi$  autour d'un axe passant par le centre de la sphère et l'équateur.

On étudie d'abord le cas étiqueté, en fonction du nombre de sommets, et des distributions des degrés des sommets et/ou des faces. Ceci s'avèrera particulièrement aisés puisqu'il n'y a que deux cartes planaires étiquetées, à savoir l'unicycle (1) et le 2-cycle (12), qui comportent une symétrie sous l'action de l'involution antipodale  $\tau$ .

Le plus difficile sera d'étudier ces mêmes statistiques dans le cas non étiqueté. La principale difficulté sera de dénombrer les cartes non étiquetées possédant une symétrie antipodale. Pour le dénombrement de telles cartes en fonction du nombre de sommets, nous utiliserons d'abord une première approche, faisant appel à la notion de carte quotient, telle que décrite dans ([20]), puis, à une seconde approche, faisant appel à la notion d'espèce quotient. Par la suite, le dénombrement des cartes planaires non étiquetées à deux faces selon la distribution des degrés des sommets et/ou des faces se fera principalement en utilisant la méthode de Liskovets qui, dans ce cas précis, s'avère particulièrement efficace.

Enfin, le chapitre 4 est consacré à l'étude des cactus  $m$ -aires. Nous dénombrons d'abord les cactus  $m$ -aires non étiquetés, enracinés en un  $m$ -gone. Par une bijection simple avec l'espèce des arbres plans bicolores dont tous les

sommets noirs sont de degré  $m$ , et munis d'une arête distinguée, on montrera que le nombre  $|\tilde{\mathcal{K}}_{m,p}^\diamond|$  de cactus  $m$ -aires non étiquetés, enracinés et comportant  $p$  polygones est donné par

$$|\tilde{\mathcal{K}}_{m,p}^\diamond| = \frac{1}{(m-1)p+1} \binom{mp}{p}.$$

Il est bien connu que cette dernière formule coïncide avec le nombre d'arborescences ordonnées  $m$ -aires comportant  $p$  sommets ([4]), exercice 3.2.1.10. Ceci nous motive à établir, dans la deuxième section, une bijection entre ces types de cactus et d'arborescences. Viendra ensuite le dénombrement des cactus  $m$ -aires non étiquetés et non enracinés en fonction du nombre de polygones. Pour y parvenir, nous utiliserons une adaptation de la méthode de Liskovets au dénombrement de cactus  $m$ -aires. On dénombre ensuite les cactus  $m$ -aires en fonction du nombre de sommets de chaque couleur. Pour le cas enraciné, on fera appel à une généralisation de la formule de Chottin, qui nous permettra de résoudre une famille d'équations fonctionnelles de la forme

$$A_i = x_i \Phi_i(\hat{A}_i),$$

où, pour chaque  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , la série  $A_i = A_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$  est une série à  $m$  variables formelles et où  $\hat{A}_i = A_1 \cdots A_{i-1} A_{i+1} \cdots A_m$ . Ceci nous permettra d'extraire le coefficient approprié dans une expression de la forme

$$\mathcal{K}^\diamond = A_1 A_2 \cdots A_m.$$

Le dénombrement des cactus  $m$ -aires non enracinés selon le nombre de sommets de chaque couleur pourra alors s'exprimer en fonction des cactus enracinés correspondants, en utilisant la même adaptation de la méthode de Liskovets. Pour terminer, nous étudierons les cactus  $m$ -aires en fonction de la distribution des degrés des sommets de chaque couleur. Le cas enraciné a été résolu dans ([11]) tandis que le cas non enraciné sera résolu toujours suivant la méthode de Liskovets.

# CHAPITRE I

## ESPÈCES DE STRUCTURES

Dans ce chapitre, nous présentons les notions de théorie des espèces qui nous seront utiles pour le dénombrement de cartes planaires à deux faces ainsi que pour le dénombrement de cactus  $m$ -aires. On y définit les concepts d'espèce et de séries formelles associées. On se donne ensuite des opérations sur les espèces qui permettent de définir des espèces plus complexes à partir d'espèces plus simples. On passe ensuite à une généralisation aux concepts d'espèces pondérées et multisortes. Notons qu'à moins d'avis contraire, tous les résultats énoncés dans ce chapitre proviennent de ([4]).

### 1.1 Espèces

**Définition 1.1.1** Une *espèce de structures*  $F$  est un foncteur

$$F : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{E}$$

allant de la catégorie  $\mathbb{B}$  des *ensembles finis* et *bijections*, vers la catégorie  $\mathbb{E}$  des *ensembles finis* et *fonctions*.

Si  $U$  est un ensemble fini et  $\sigma : U \longrightarrow V$  est une bijection, l'ensemble  $F[U]$  est appelé l'*ensemble des F-structures* sur l'*ensemble sous-jacent*  $U$  et la fonction  $F[\sigma] : F[U] \longrightarrow F[V]$  est appelée *fonction de transport* de *F-structures* le long de la bijection  $\sigma$ . Cette application doit satisfaire les conditions de *fonctorialité* suivantes:

- Pour toute bijection,  $\sigma : U \longrightarrow V$  et  $\tau : V \longrightarrow W$ , on a

$$F[\tau \circ \sigma] = F[\tau] \circ F[\sigma]. \quad (1.1)$$

- Pour l'application identité,  $\text{Id}_U : U \longrightarrow U$ , on a

$$F[\text{Id}_U] = \text{Id}_{F[U]}. \quad (1.2)$$

**Exemple 1.1.2** Voici quelques exemples d'espèces de structures. Pour les quatre premiers, le transport de structures et la fonctorialité sont évidents.

a) L'espèce  $E$  des *ensembles*, définie comme suit: pour tout ensemble fini  $U$ ,

$$E[U] = \{U\}. \quad (1.3)$$

b) L'espèce vide  $\mathbf{0}$ , définie comme suit: pour tout ensemble fini  $U$

$$\mathbf{0}[U] = \emptyset, \quad (1.4)$$

c) L'espèce  $\mathbf{1}$ , caractéristique de l'ensemble vide, définie par

$$\mathbf{1}[U] = \begin{cases} \{U\}, & \text{si } U = \emptyset, \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.5)$$

d) L'espèce  $X$  des *singltons* (de sorte  $X$ ), définie par

$$X[U] = \begin{cases} \{U\}, & \text{si } |U| = 1, \\ \emptyset, & \text{si } |U| \neq 1. \end{cases}$$

e) L'espèce  $L$  des *listes* ou *ordres totaux*, définie comme suit: pour tout ensemble fini  $U$  tel que  $|U| = n$ ,

$$L[U] = \{\pi : [n] \rightarrow U \mid \pi \text{ est une bijection}\}, \quad (1.6)$$

où  $[n]$  est donné par

$$[n] = \begin{cases} \{1, 2, \dots, n\}, & \text{si } n \geq 1, \\ \emptyset, & \text{si } n = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Si  $\sigma : U \rightarrow V$  est une bijection, on pose

$$L[\sigma](\pi) = \sigma \circ \pi. \quad (1.8)$$

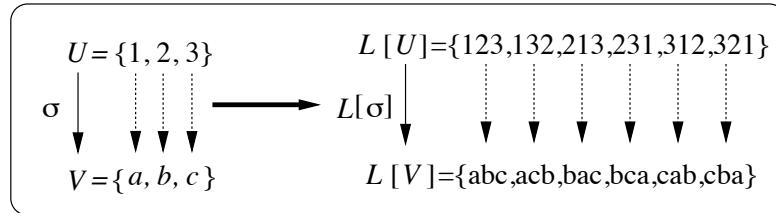
Par exemple, si  $U = \{1, 2, 3\}$ , alors on écrit  $\pi$  sous forme de liste:  $\pi(1)\pi(2)\pi(3)$ . Ainsi, on a

$$L[U] = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}.$$

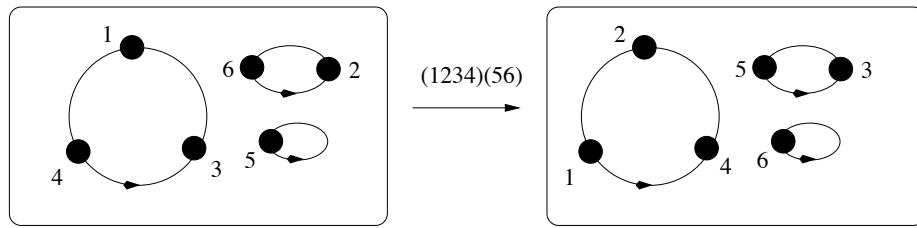
Pour  $U = \{1, 2, 3\}$ ,  $V = \{a, b, c\}$ , et la bijection  $\sigma : U \rightarrow V$ , définie par  $\sigma(1) = a$ ,  $\sigma(2) = b$ ,  $\sigma(3) = c$ , la Figure 1.1 donne une illustration de la fonction de transport  $L[\sigma] : L[U] \rightarrow L[V]$  le long de la bijection  $\sigma$ .

f) L'espèce  $S$  des *permutations*, définie par

$$S[U] = \{\varphi : U \xrightarrow{\sim} U : \varphi \text{ est une bijection}\}. \quad (1.9)$$



**Figure 1.1:** Transport d'une  $L$ -structure le long de  $\sigma$ .



**Figure 1.2:** Réétiquetage d'une  $S$ -structure sur  $[6]$ .

Le transport de structures le long d'une bijection  $\sigma : U \longrightarrow V$  est donné par

$$\mathcal{S}[\sigma](\varphi) = \sigma \circ \varphi \circ \sigma^{-1}. \quad (1.10)$$

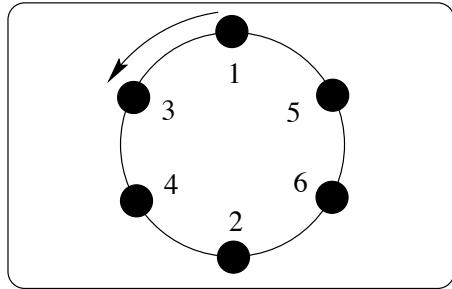
La Figure 1.2 donne un exemple du transport de la  $S$ -structure  $\varphi = (143)(26)(5)$  vers la structure  $\mathcal{S}[\sigma](\varphi) = (142)(35)(6)$  via  $\sigma = (1234)(56)$ . On a  $\mathcal{S}[\sigma](\varphi) = \sigma \varphi \sigma^{-1} = (1234)(56)(143)(26)(4321)(56) = (142)(35)(6)$ . On constate que le transport de la structure  $\varphi$  vers la structure  $\mathcal{S}[\sigma](\varphi)$  via la bijection  $\sigma$  revient à réétiqueter la structure  $\varphi$  suivant la bijection  $\sigma$ .

g) L'espèce  $C$  des *cycles orientés*, (qui sont en fait des permutations n'admettant qu'un seul cycle), dont la Figure 1.3 donne un exemple sur l'ensemble  $U = [6]$ .

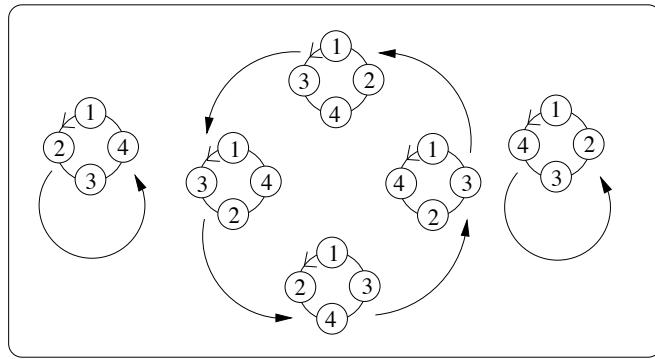
Le transport d'une  $C$ -structure le long d'une bijection est le même que pour l'espèce  $S$ . La Figure 1.4 donne le transport de structures le long de  $\sigma$  dans le cas particulier où  $U = V = \{1, 2, 3, 4\}$  et  $\sigma = (1234)$ .  $\square$

Dans le cas où le transport de structures s'effectue le long d'une bijection  $\sigma : U \longrightarrow U$ , on peut considérer  $\sigma$  comme un élément du groupe symétrique  $\mathbb{S}_U$ . On a alors une *action* du groupe symétrique  $\mathbb{S}_U$  sur l'ensemble  $F[U]$  comme le démontre la proposition suivante.

**Proposition 1.1.3** Soit  $F$  une espèce de structures et  $U$  un ensemble fini.



**Figure 1.3:**  $C$ -structure sur l'ensemble  $[6]$ .



**Figure 1.4:** Transport de  $C$ -structures le long de  $\sigma = (1234)$ .

L'espèce  $F$  induit une action

$$\mathbb{S}_U \times F[U] \longrightarrow F[U]$$

du groupe symétrique  $\mathbb{S}_U$  sur l'ensemble  $F[U]$ .

**Preuve** Pour chaque  $s \in F[U]$  et chaque  $\sigma \in \mathbb{S}_U$ , posons

$$\sigma \cdot s \stackrel{\text{déf}}{=} F[\sigma](s).$$

Par la condition de fonctorialité (1.1), on obtient, pour  $\tau, \sigma \in \mathbb{S}_U$ ,

$$\begin{aligned} \tau \cdot (\sigma \cdot s) &= \tau \cdot (F[\sigma](s)) \\ &= F[\tau](F[\sigma](s)) \\ &= F[\tau \circ \sigma](s) \\ &= (\tau \sigma) \cdot s. \end{aligned}$$

La condition de fonctorialité (1.2) nous donne

$$1 \cdot s = \text{Id}_U \cdot s = F[\text{Id}_U](s) = \text{Id}_{F[U]}(s) = s,$$

et on a bien une action de  $\mathbb{S}_U$  sur  $F[U]$ .  $\square$

**Définition 1.1.4** Soit  $F$  une espèce de structures. Deux  $F$ -structures  $s \in F[U]$  et  $t \in F[V]$  sont dites *isomorphes* s'il existe une bijection  $\sigma : U \rightarrow V$  telle que  $t = F[\sigma](s)$ . Un *automorphisme* d'une  $F$ -structure  $s \in F[U]$  est une bijection  $\sigma : U \rightarrow U$  telle que  $F[\sigma](s) = s$ .

## 1.2 Séries formelles associées

Il y a trois séries principales associées à une espèce  $F$ .

1. La *série génératrice* (exponentielle) de  $F$ , notée par  $F(x)$ , qu'on utilise pour l'énumération de structures étiquetées.
2. La *série génératrice des types* de  $F$ , notée par  $\tilde{F}(x)$ , utilisée pour l'énumération de structures non-étiquetées.
3. La *série indicatrice de cycles* de  $F$ , notée par  $Z_F(x_1, x_2, \dots)$ , qu'on utilise comme outil général d'énumération.

Pour une espèce de structures donnée  $F$ , l'ensemble des  $F$ -structures sur  $[n]$  sera noté par  $F[n]$  au lieu de  $F[[n]]$ .

### 1.2.1 Série génératrice

**Définition 1.2.1** Soit  $F$  une espèce de structures. La *série génératrice*  $F(x)$  associée à  $F$  est la série formelle

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |F[n]| \frac{x^n}{n!}, \quad (1.11)$$

où  $|F[n]|$  est le nombre de  $F$ -structures (étiquetées) sur l'ensemble  $[n]$ . Cette série est également appelée la *série génératrice exponentielle* de  $F$ .

**Exemple 1.2.2** Pour les espèces **0**, **1**,  $X$ ,  $E$ ,  $L$ ,  $\mathcal{S}$  et  $C$  définies à l'Exemple 1.1.2, on a  $\mathbf{0}(x) = 0$ ,  $\mathbf{1}(x) = 1$ ,  $X(x) = x$ , et sachant que  $|E[n]| = 1$ ,  $|L[n]| = |\mathcal{S}[n]| = n!$  et  $|C[n]| = (n - 1)!$ ,

$$E(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x. \quad (1.12)$$

$$L(x) = \mathcal{S}(x) = \sum_{n \geq 0} n! \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1-x}, \quad (1.13)$$

et

$$C(x) = \sum_{n \geq 1} (n-1)! \frac{x^n}{n!} = \log \left( \frac{1}{1-x} \right), \quad (1.14)$$

où  $\log = \log_e$  désigne le logarithme naturel, qu'on définit formellement par

$$\log \left( \frac{1}{1-x} \right) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}. \quad (1.15)$$

### 1.2.2 Série génératrice des types

**Définition 1.2.3** Soit  $F$  une espèce de structures. La *série génératrice de types*  $\tilde{F}(x)$ , associée à  $F$ , est la série formelle

$$\tilde{F}(x) = \sum_{n \geq 0} |F[n]/\sim| x^n, \quad (1.16)$$

où  $|F[n]/\sim|$  désigne l'ensemble des classes d'équivalence de l'ensemble  $F[n]$  sous la relation d'isomorphie, notée par  $\sim$ . Ainsi, pour toutes  $F$ -structures  $s, t \in F[n]$ , on a  $s \sim t$  s'il existe une bijection  $\sigma : [n] \rightarrow [n]$  telle que  $s = F[\sigma](t)$ . Chaque classe d'équivalence sous la relation sera appelée une  $F$ -structure *non étiquetée*. Cette terminologie est justifiée par le fait que dans la plupart des exemples concrets, le transport se fait par réétiquetage des structures. La série  $\tilde{F}(x)$  donne donc le dénombrement des  $F$ -structures non étiquetées. Pour simplifier l'écriture, on écrira simplement  $\tilde{F}_n$  au lieu de  $|F[n]/\sim|$ .

**Exemple 1.2.4** Pour les espèces **0**, **1**,  $X$ ,  $E$ ,  $L$ ,  $S$  et  $C$  décrites à l'Exemple 1.1.2, on a  $\tilde{\mathbf{0}}(x) = 0$ ,  $\tilde{\mathbf{1}}(x) = 1$ ,  $\tilde{X}(x) = x$  et, sachant qu'il n'y a qu'une seule  $E$ ,  $L$  ou  $C$ -structure non étiquetée sur  $n$  sommets,

$$\tilde{L}(x) = \tilde{E}(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (1.17)$$

et

$$\tilde{C}(x) = \sum_{n \geq 1} x^n = \frac{x}{1-x}. \quad (1.18)$$

Pour l'espèce  $S$  des permutations, on remarque que la classe d'équivalence d'une permutation  $s \in S[n]$  est complètement déterminée par son type cyclique, qui correspond à un partage de l'entier  $n$ . Ainsi, on a

$$\tilde{S}(x) = \sum_{n \geq 0} p(n)x^n = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1-x^i}, \quad (1.19)$$

où  $p(n)$  désigne le nombre de partages de l'entier  $n$ . On remarque que  $L(x) = S(x)$  mais que  $\tilde{L}(x) \neq \tilde{S}(x)$ .

### 1.2.3 Série indicatrice des cycles

**Définition 1.2.5** Soit  $F$  une espèce de structures. La *série indicatrice de cycles* de  $F$ , notée par  $Z_F(x_1, x_2, \dots)$ , est définie par

$$Z_F(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} |\text{Fix } F[\sigma]| x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots, \quad (1.20)$$

où  $|\text{Fix } F[\sigma]|$  désigne le nombre de  $F$ -structures sur  $[n]$  laissées fixes sous l'action de la bijection  $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ , et où  $\sigma_i$  désigne le nombre de cycles de longueur  $i$  dans  $\sigma$ .

**Remarque 1.2.6** On se convainc facilement que le nombre  $|\text{Fix } F[\sigma]|$  ne dépend que du type cyclique de  $\sigma$ . Puisque le nombre de permutations ayant un type cyclique donné  $(n_1, n_2, \dots)$  est

$$\frac{n!}{1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! 3^{n_3} n_3! \cdots},$$

où  $n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots = n$ ,  $n_i$  désignant le nombre de cycles de longueur  $i$ . On peut alors écrire  $Z_F$ , la série indicatrice de cycles de l'espèce  $F$  sous la forme suivante:

$$Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n_1+2n_2+3n_3+\cdots < \infty} |\text{Fix } F[n_1, n_2, n_3, \dots]| \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \cdots}{1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! 3^{n_3} n_3! \cdots}, \quad (1.21)$$

où  $|\text{Fix } F[n_1, n_2, n_3, \dots]|$  désigne le nombre de  $F$ -structures sur  $[n]$  laissées fixes sous l'action du réétiquetage induit par une permutation  $\sigma$  donnée de type  $(n_1, n_2, n_3, \dots)$ .

**Exemple 1.2.7** Pour les espèces **0**, **1** et  $X$ , on a  $Z_{\mathbf{0}} = 0$ ,  $Z_{\mathbf{1}} = 1$ ,  $Z_X = x_1$ . Pour l'espèce  $E$  des ensembles, en utilisant (1.21) et que  $|\text{Fix } E[n_1, n_2, n_3, \dots]| = 1$ , quel que soit le type cyclique  $(n_1, n_2, n_3, \dots)$ , on obtient

$$\begin{aligned} Z_E(x_1, x_2, \dots) &= \sum_{n_1+2n_2+3n_3+\cdots < \infty} \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \cdots}{1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! 3^{n_3} n_3! \cdots} \\ &= e^{x_1} \cdot e^{\frac{x_2}{2}} \cdot e^{\frac{x_3}{3}} \cdots \\ &= \exp(x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \cdots). \end{aligned} \quad (1.22)$$

**Exemple 1.2.8** Pour l'espèce  $L$  des listes, on utilise plutôt la forme (1.20). On note que seulement  $\sigma = \text{Id}_{S_n}$  est susceptible de laisser une liste fixe. Or, toutes les  $n!$  listes sont laissées fixes sous l'action de cet élément. On obtient alors

$$Z_L(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n \geq 0} x_1^n = \frac{1}{1 - x_1}. \quad (1.23)$$

**Exemple 1.2.9** Pour l'espèce  $\mathcal{S}$  des permutations, on utilise la forme (1.21). On note que

$$|\text{Fix } \mathcal{S}[n_1, n_2, n_3, \dots]| = 1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! 3^{n_3} n_3! \dots \quad (1.24)$$

En effet, considérons une permutation  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  de type cyclique  $(n_1, n_2, \dots)$ . L'expression  $|\text{Fix } \mathcal{S}[n_1, n_2, n_3, \dots]|$  compte le nombre de permutations laissées fixes sous la conjugaison par  $\sigma$ , de sorte que

$$|\text{Fix } \mathcal{S}[n_1, n_2, n_3, \dots]| = |\{\varphi \in \mathcal{S}[n] \mid \sigma\varphi\sigma^{-1} = \varphi\}|. \quad (1.25)$$

Par une manipulation algébrique simple, et en intervertissant les rôles respectifs de  $\mathbb{S}_n$  et  $\mathcal{S}[n]$ , on constate que

$$|\{\varphi \in \mathcal{S}[n] \mid \sigma\varphi\sigma^{-1} = \varphi\}| = |\{\varphi \in \mathbb{S}_n \mid \varphi\sigma\varphi^{-1} = \sigma\}|.$$

Le membre de droite de cette dernière égalité donne le nombre de permutations  $\varphi \in \mathbb{S}_n$  laissant fixe une permutation donnée  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  de type  $(n_1, n_2, n_3, \dots)$ . Or, pour une telle structure, il y a  $n_i!$  façons de permuter les cycles de longueur  $i$  entre eux et chaque cycle de longueur  $i$  peut être permué circulairement de  $i$  façons. En multipliant ces facteurs, on retrouve le membre de droite de l'équation (1.24). Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} Z_{\mathcal{S}}(x_1, x_2, \dots) &= \sum_{n_1+2n_2+3n_3+\dots<\infty} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots \\ &= \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x_i} \end{aligned} \quad (1.26)$$

□

**Exemple 1.2.10** Pour l'espèce  $C$  des cycles, on a

$$\begin{aligned} Z_C(x_1, x_2, \dots) &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} |\text{Fix } C[\sigma]| x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \sum_{\varphi \in C[n]} \chi(C[\sigma](\varphi) = \varphi) x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots, \end{aligned}$$

où  $\chi$  est la fonction de vérité qui vaut 1 si son argument est vrai et 0 sinon. Comme on l'a déjà mentionné, le transport d'une structure  $\varphi \in C[n]$  le long d'une bijection  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  s'effectue par conjugaison de  $\varphi$  par  $\sigma$ . Ainsi, pour  $\varphi \in C[n]$  et  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  donnés, on a

$$C_n[\sigma](\varphi) = \varphi \iff \sigma\varphi\sigma^{-1} = \varphi.$$

On se convainc facilement que  $\sigma\varphi\sigma^{-1} = \varphi$  si et seulement si  $\sigma$  est une puissance de  $\varphi$ , d'où

$$Z_C(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{\varphi \in C[n]} \sum_{k=0}^{n-1} x_1^{(\varphi^k)_1} x_2^{(\varphi^k)_2} x_3^{(\varphi^k)_3} \dots, \quad (1.27)$$

où  $(\varphi^k)_i$  désigne le nombre de cycles de longueur  $i$  dans  $\varphi^k$ . On remarque que la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_1^{(\varphi^k)_1} x_2^{(\varphi^k)_2} x_3^{(\varphi^k)_3} \dots$$

ne dépend pas d'un choix particulier d'une permutation cyclique  $\varphi \in C[n]$ . Comme il y a  $(n-1)!$  permutations cycliques de longueur  $n$ , on obtient alors

$$Z_C(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_1^{(\gamma^k)_1} x_2^{(\gamma^k)_2} x_3^{(\gamma^k)_3} \dots, \quad (1.28)$$

où  $\gamma$  est la permutation cyclique  $\gamma = (1 2 3 \dots n)$ . Il suffit alors d'étudier le type cyclique de chaque puissance  $k$  de  $\gamma$ , pour  $k = 0, \dots, n-1$ . On note que si  $\text{pgcd}(n, k) = d$ , alors le type cyclique de  $\varphi^k$  est  $x_{n/d}^d$ . De plus, pour chaque  $d$ , diviseur de  $n$ , il y a  $\phi(d)$  puissances de  $\varphi$  admettant le type cyclique  $x_{n/d}^d$ , où  $\phi$  est la fonction indicatrice d'Euler, c'est-à-dire

$$\phi(d) = |\{i \mid 1 \leq i \leq d, i \text{ et } d \text{ sont relativement premiers}\}|. \quad (1.29)$$

Il en résulte que

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_1^{(\gamma^k)_1} x_2^{(\gamma^k)_2} x_3^{(\gamma^k)_3} \dots = \sum_{d|n} \phi(n/d) x_{n/d}^d = \sum_{d|n} \phi(d) x_d^{n/d}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} Z_C(x_1, x_2, x_3, \dots) &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) x_d^{n/d} \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{\phi(k)}{k} \sum_{m \geq 1} \frac{x_k^m}{m} \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{\phi(k)}{k} \log \frac{1}{1 - x_k}. \end{aligned}$$

La série indicatrice de cycles de l'espèce  $C$  des cycles est donc donnée par

$$Z_C(x_1, x_2, \dots) = \sum_{k \geq 1} \frac{\phi(k)}{k} \log \frac{1}{1 - x_k}. \quad (1.30)$$

□

Notons que les séries  $F(x)$  et  $\tilde{F}(x)$  peuvent être déterminées à partir de la série indicatrice de cycles  $Z_F$ , comme l'indique la proposition suivante.

**Proposition 1.2.11** Soit  $F$  une espèce de structures. La série génératrice  $F(x)$  et la série génératrice des types  $\tilde{F}(x)$  satisfont

- a)  $F(x) = Z_F(x, 0, 0, \dots)$ ,
  - b)  $\tilde{F}(x) = Z_F(x, x^2, x^3, \dots)$ .
- (1.31)

**Preuve:** Pour établir a), on substitue  $x$  à  $x_1$  et  $x_i = 0$  pour tout  $i \geq 2$  dans l'équation (1.20). On trouve

$$Z_F(x, 0, 0, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left( \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} |\text{Fix } F[\sigma]| x^{\sigma_1} 0^{\sigma_2} 0^{\sigma_3} \dots \right).$$

Or, pour chaque valeur de  $n \geq 0$  fixée,  $x^{\sigma_1} 0^{\sigma_2} 0^{\sigma_3} \dots = 0$ , sauf si  $\sigma_1 = n$  et  $\sigma_i = 0$  pour  $i \geq 2$ . En d'autres termes, seule la permutation identité  $\text{Id}_{\mathbb{S}_n}$  contribue à la somme. Ainsi

$$\begin{aligned} Z_F(x, 0, 0, \dots) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} |\text{Fix } F[\text{Id}_n]| x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} |F[n]| x^n \\ &= F(x). \end{aligned}$$

L'égalité b) découle simplement de la Proposition 1.1.3 qui affirme en particulier que la donnée d'une espèce  $F$  induit une action du groupe  $\mathbb{S}_n$  sur l'ensemble  $F[n]$ , et du lemme de Burnside (voir Théorème 2.1.3). En effet, on a

$$\begin{aligned} Z_F(x, x^2, x^3, \dots) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} |\text{Fix } F[\sigma]| x^{\sigma_1} x^{2\sigma_2} x^{3\sigma_3} \dots \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} |\text{Fix } F[\sigma]| x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} |F[n]| / \sim |x^n| \\ &= \tilde{F}(x). \end{aligned}$$

□

### 1.3 Isomorphisme d'espèces

**Définition 1.3.1** Soient  $F$  et  $G$  deux espèces de structures. Un *isomorphisme* de  $F$  vers  $G$  est une famille de bijections  $\alpha_U : F[U] \rightarrow G[U]$  satisfaisant la

*condition de naturalité* suivante: pour toute bijection  $\sigma : U \rightarrow V$ , entre deux ensembles finis, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
 & \alpha_U & \\
 F[U] & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & G[U] \\
 F[\sigma] \downarrow & & \downarrow G[\sigma] \\
 F[V] & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & G[V]
 \end{array} \tag{1.32}$$

Autrement dit, pour toute  $F$ -structure  $s \in F[U]$ , on doit avoir

$$G[\sigma](\alpha_U(s)) = \alpha_V(F[\sigma](s)).$$

Les espèces  $F$  et  $G$  sont alors dites *isomorphes* et on écrit  $F \cong G$ . La proposition suivante affirme que deux espèces isomorphes admettent les mêmes séries associées.

**Proposition 1.3.2** *Soient  $F$  et  $G$  deux espèces de structures. On a alors*

$$F \cong G \Rightarrow \begin{cases} F(x) = G(x), \\ \tilde{F}(x) = \tilde{G}(x), \\ Z_F(x_1, x_2, \dots) = Z_G(x_1, x_2, \dots). \end{cases} \tag{1.33}$$

Deux espèces isomorphes possèdent essentiellement les mêmes propriétés combinatoires, on écrira alors simplement  $F = G$  au lieu de  $F \cong G$ . Notons que puisque  $\tilde{L}(x) \neq \tilde{S}(x)$ , alors  $L \neq S$ . On verra plus tard des exemples d'isomorphismes d'espèces.

## 1.4 Opérations sur les espèces

Les opérations sur les espèces permettent de construire des espèces plus complexes à partir d'espèces simples. Nous allons considérer l'addition, la multiplication, la composition (partitionnelle), la dérivation et le pointage.

### 1.4.1 Addition

**Définition 1.4.1** Soient  $F$  et  $G$  deux espèces. L'espèce  $F + G$ , appelée *somme* de  $F$  et  $G$  est définie comme suit: une  $(F + G)$ -structure sur  $U$  est soit une  $F$ -structure sur  $U$ , soit une  $G$ -structure sur  $U$ . Autrement dit, pour tout ensemble fini  $U$ , on a

$$(F + G)[U] = F[U] + G[U] \quad (\text{union disjointe}). \tag{1.34}$$

Le transport de structures le long d'une bijection  $\sigma : U \rightarrow V$  s'effectue comme suit: pour toute  $F + G$ -structure  $s$  sur  $U$ ,

$$(F + G)[\sigma](s) = \begin{cases} F[\sigma](s), & \text{si } s \in F[U], \\ G[\sigma](s), & \text{si } s \in G[U]. \end{cases} \quad (1.35)$$

On a alors le résultat suivant.

**Proposition 1.4.2** *Étant données deux espèces,  $F$  et  $G$ , les séries formelles associées satisfont*

- a)  $(F + G)(x) = F(x) + G(x),$
- b)  $(F + G)^\sim(x) = \tilde{F}(x) + \tilde{G}(x),$
- c)  $Z_{F+G} = Z_F + Z_G.$

□

**Exemple 1.4.3** Toute espèce de structures  $F$  peut être décomposée comme la somme

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + \dots, \quad (1.37)$$

où  $F_n$ , l'espèce  $F$  restreinte à la cardinalité  $n$  est définie comme suit: pour tout ensemble fini  $U$ ,

$$F_n[U] = \begin{cases} F[U], & \text{si } |U| = n \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.38)$$

Par exemple, si  $F = C$ , l'espèce des cycles, on obtient, en vertu de l'Exemple 1.2.10,

$$Z_{C_n}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) x_d^{n/d}. \quad (1.39)$$

□

### 1.4.2 Multiplication

**Définition 1.4.4** Soient  $F$  et  $G$  deux espèces de structures. L'espèce  $F \cdot G$ , aussi notée par  $FG$ , appelée le *produit* de  $F$  et  $G$ , est définie comme suit: une  $(F \cdot G)$ -structure sur  $U$  est un couple  $s = (f, g)$ , où

- a)  $f$  est une  $F$ -structure sur un sous-ensemble  $U_1 \subseteq U$ ;
- b)  $g$  est une  $G$ -structure sur un sous-ensemble  $U_2 \subseteq U$ ;

- c)  $(U_1, U_2)$  est une *décomposition* de  $U$ , i.e.,  $U_1 \cup U_2 = U$  et  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . On écrit  $U = U_1 + U_2$ .

En d'autres termes,

$$(F \cdot G)[U] = \sum_{U_1+U_2=U} F[U_1] \times G[U_2], \quad (1.40)$$

la somme disjointe étant prise sur tous les couples  $(U_1, U_2)$  formant une décomposition de  $U$ . Le transport de structures le long d'une bijection  $\sigma : U \rightarrow V$  s'effectue comme suit: pour chaque  $(F \cdot G)$ -structure  $s = (f, g)$  sur  $U$ ,

$$(F \cdot G)[\sigma](s) = (F[\sigma_1](f), G[\sigma_2](g)), \quad (1.41)$$

où  $\sigma_i = \sigma|_{U_i}$  est la restriction de  $\sigma$  à  $U_i$ ,  $i = 1, 2$ .

**Proposition 1.4.5** *Soient  $F$  et  $G$  deux espèces de structures. Les séries génératrices associées à l'espèce  $F \cdot G$  satisfont les égalités*

- a)  $(F \cdot G)(x) = F(x)G(x),$
- b)  $(F \cdot G)^\sim(x) = \tilde{F}(x)\tilde{G}(x),$  (1.42)
- c)  $Z_{F \cdot G}(x_1, x_2, \dots) = Z_F(x_1, x_2, \dots)Z_G(x_1, x_2, \dots).$

□

**Exemple 1.4.6** Considérons l'espèce  $\text{Der}$  des *dérangements*, c'est-à-dire des permutations sans points fixes. On a l'identité

$$\mathcal{S} = E \cdot \text{Der}, \quad (1.43)$$

tel que décrit à la Figure 1.5. La Proposition 1.4.5 nous permet de déduire la série génératrice  $\text{Der}(x)$  de l'espèce des dérangements. En effet, on a

$$\mathcal{S}(x) = \frac{1}{1-x} = E(x) \cdot \text{Der}(x) = e^x \cdot \text{Der}(x), \quad (1.44)$$

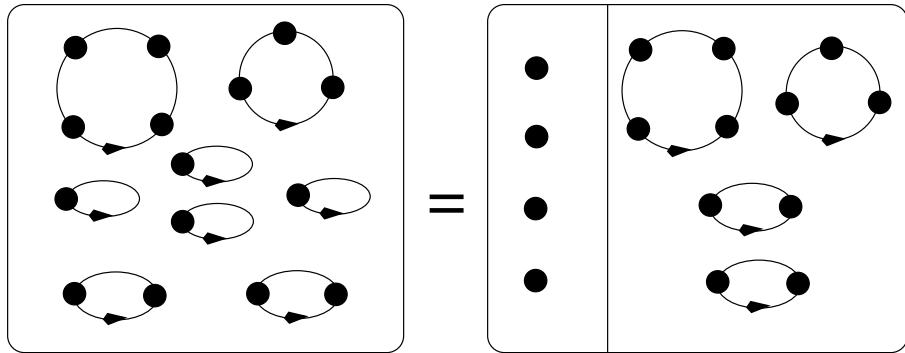
d'où

$$\text{Der}(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}. \quad (1.45)$$

En multipliant les deux séries, on en déduit que le nombre  $|\text{Der}[n]|$  de dérangements sur l'ensemble  $[n]$ , est donné par

$$|\text{Der}[n]| = n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right). \quad (1.46)$$

Remarquons que (1.46) peut également être obtenue en utilisant la méthode d'inclusion-exclusion.



**Figure 1.5:**  $S = E \cdot \text{Der}$

### 1.4.3 Composition partitionnelle

**Définition 1.4.7** Soient  $F$  et  $G$  deux espèces de structures telles que  $G[\emptyset] = \emptyset$  (i.e. l'espèce  $G$  n'admet pas de structure sur l'ensemble vide). L'espèce  $F \circ G$ , également notée par  $F(G)$  et appelée la *composée* (partitionnelle) de  $G$  dans  $F$ , est définie comme suit: une  $F \circ G$ -structure sur  $U$  est un triplet  $(\pi, \varphi, \gamma)$ , où

- a)  $\pi$  est une partition de  $U$ ;
- b)  $\varphi$  est une  $F$ -structure sur les classes de  $\pi$ ;
- c)  $\gamma = (\gamma_p)_{p \in \pi}$ , où pour chaque classe  $p$  de la partition  $\pi$ ,  $\gamma_p$  est une  $G$ -structure sur  $p$ .

Autrement dit, pour chaque ensemble fini  $U$ ,

$$(F \circ G)[U] = \sum_{\pi \text{ partition de } U} F[\pi] \times \prod_{p \in \pi} G[p], \quad (1.47)$$

la somme (disjinte) étant prise sur l'ensemble de partitions  $\pi$  de  $U$ . Le transport de structures le long d'une bijection  $\sigma : U \longrightarrow V$  s'effectue comme suit: pour toute  $(F \circ G)$ -structure  $s = (\pi, \varphi, (\gamma_p)_{p \in \pi})$  sur  $U$ , on pose

$$(F \circ G)[\sigma](s) = (\bar{\pi}, \bar{\varphi}, (\bar{\gamma}_{\bar{p}})_{\bar{p} \in \bar{\pi}}), \quad (1.48)$$

où

- i)  $\bar{\pi}$  est la partition de  $V$  obtenue par le transport de  $\pi$  le long de  $\sigma$ ,
- ii) pour chaque  $\bar{p} = \sigma(p) \in \bar{\pi}$ , la structure  $\bar{\gamma}_{\bar{p}}$  est obtenue de la structure  $\gamma_p$  par le transport de  $G$ -structures le long de  $\sigma|_p$ ,

- iii) la structure  $\bar{\varphi}$  est obtenue de la structure  $\varphi$  par le transport de  $F$ -structures le long de la bijection  $\bar{\sigma} : \pi \longrightarrow \bar{\pi}$  induite par  $\sigma$ .

Le passage de l'espèce  $F \circ G$  aux séries génératrices et indicatrice est plus délicat que dans le cas de l'addition ou la multiplication. En effet, bien que la formule

$$(F \circ G)(x) = F(G(x))$$

soit valide, l'identité correspondante dans le cas non étiqueté, n'est pas valide en général:

$$(F \circ G)^\sim(x) \neq \tilde{F}(\tilde{G}(x)), \quad (1.49)$$

Voilà pourquoi la série  $Z_F$  a été introduite; elle permet entre autres d'obtenir une expression pour  $(F \circ G)^\sim(x)$ , comme l'indique le théorème suivant.

**Théorème 1.4.8** *Soit  $F$  et  $G$  deux espèces de structures telles que  $G[\emptyset] = \emptyset$ . Les séries associées à l'espèce  $F \circ G$  satisfont les égalités*

- a)  $(F \circ G)(x) = F(G(x)),$
- b)  $(F \circ G)^\sim(x) = Z_F(\tilde{G}(x), \tilde{G}(x^2), \tilde{G}(x^3), \dots),$  (1.50)
- c)  $Z_{F \circ G}(x_1, x_2, \dots) = Z_F(Z_G(x_1, x_2, \dots), Z_G(x_2, x_4, \dots), \dots).$

□

La série indicatrice donnée dans la dernière équation du Théorème 1.4.8 est appelée *substitution pléthystique* de  $Z_G$  dans  $Z_F$ , et est notée par  $Z_F \circ Z_G$  (ou  $Z_F(Z_G)$ ).

**Définition 1.4.9** Soit  $f = f(x_1, x_2, x_3, \dots)$  et  $g = g(x_1, x_2, x_3, \dots)$  deux séries formelles. La *substitution pléthystique*  $f \circ g$  est définie par

$$(f \circ g)(x_1, x_2, x_3, \dots) = f(g_1, g_2, g_3, \dots), \quad (1.51)$$

où

$$g_k = g(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \dots), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.52)$$

**Exemple 1.4.10** L'espèce  $\mathcal{S}$  satisfait l'égalité

$$\mathcal{S} = E \circ C. \quad (1.53)$$

Autrement dit, une permutation est un ensemble de cycles. Le Théorème 1.4.8 c) nous permet d'écrire

$$Z_{\mathcal{S}} = Z_E \circ Z_C,$$

ce qui, d'après les équations (1.22) et (1.26), se traduit par

$$\prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x_i} = \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} Z_C(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \dots)\right). \quad (1.54)$$

En prenant le logarithme de chaque membre de l'équation précédente, on obtient

$$\sum_{i \geq 1} \log \frac{1}{1 - x_i} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} Z_C(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \dots). \quad (1.55)$$

On utilise alors le fait suivant: Étant données deux séries  $a = a(x_1, x_2, x_3, \dots)$  et  $b = b(x_1, x_2, x_3, \dots)$ , et en utilisant la convention d'écriture (1.52), on peut montrer que

$$b = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} a_k \iff a = \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} b_k, \quad (1.56)$$

où  $\mu$  est la fonction d'inversion de Moebius. On obtient alors une seconde démonstration de la formule (1.30).

$$\begin{aligned} Z_C(x_1, x_2, x_3, \dots) &= \sum_{m \geq 1} \frac{\mu(m)}{m} \sum_{k \geq 1} \log \frac{1}{1 - x_{km}} \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{d|n} d \mu\left(\frac{n}{d}\right) \log \frac{1}{1 - x_n} \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{\phi(n)}{n} \log \frac{1}{1 - x_n}, \end{aligned} \quad (1.57)$$

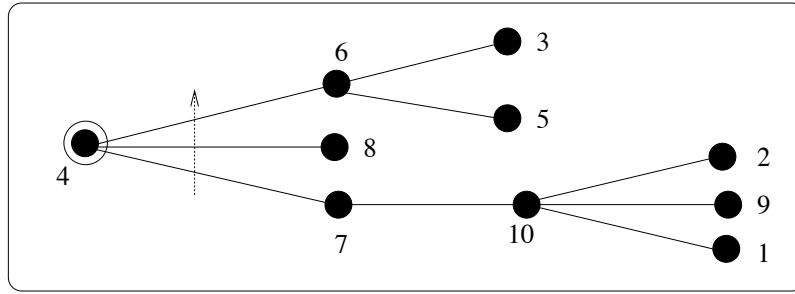
où on a utilisé le fait que  $\phi$ , la fonction d'Euler, définie par l'équation (1.29), satisfait

$$\phi(n) = \sum_{d|n} d \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

**Exemple 1.4.11** L'espèce  $A_L$  des *arborescences ordonnées*, c'est-à-dire des arbres munis d'un sommet distingué (la *racine*) et dont les fils de chaque sommet, (en orientant les arêtes à partir de la racine), sont enrichis d'une structure de liste (ordre total). L'espèce  $A_L$  peut être aussi appelée l'espèce des *arborescences L-enrichies*. La Figure 1.6 illustre une structure d'arborescence ordonnée sur l'ensemble [10]. En examinant cette figure, on voit que l'espèce  $A_L$  satisfait l'égalité

$$A_L = XL(A_L). \quad (1.58)$$

En effet, chaque fils de la racine devient lui-même la racine d'une sous-arborescence qui elle-même, est une arborescence ordonnée. Pour déterminer le nombre d'arborescences ordonnées (étiquetées) sur l'ensemble  $[n]$ , on peut avoir recours à deux techniques.



**Figure 1.6:**  $A_L$ -structure sur l'ensemble [10].

- Équation fonctionnelle

En utilisant la Proposition 1.4.5 et le Théorème 1.4.8, on obtient

$$A_L(x) = xL(A_L(x)) = \frac{x}{1 - A_L(x)}, \quad (1.59)$$

d'où

$$A_L^2(x) - A_L(x) + x = 0, \quad (1.60)$$

qui est de la forme  $ay^2 + by + c = 0$ . La solution est donc donnée par

$$A_L(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2}. \quad (1.61)$$

Pour développer l'expression  $\sqrt{1 - 4x}$ , on utilise la formule générale du binôme:

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n. \quad (1.62)$$

En appliquant cette formule à l'expression  $\sqrt{1 - 4x}$ , on trouve

$$\sqrt{1 - 4x} = 1 - 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \binom{2n - 2}{n - 1} x^n. \quad (1.63)$$

Pour que les choses soient cohérentes, à savoir, que le terme constant soit nul et que les autres coefficients soient positifs, on doit utiliser le signe “-” dans l'expression (1.61). Après simplification, on obtient

$$A_L(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} = \sum_{n \geq 1} c_{n-1} x^n, \quad (1.64)$$

où

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

est le  $n^{\text{ième}}$  *nombre de Catalan*. Finalement, le nombre  $|A_L[n]|$  d'arborescences ordonnées étiquetées sur l'ensemble  $[n]$  est donné par

$$|A_L[n]| = n![x^n]A_L(x) = n!c_{n-1}, \quad (1.65)$$

où  $[x^n]A_L(x)$  désigne le coefficient de  $x^n$  dans  $A_L(x)$ .

- Inversion de Lagrange

Soit une série  $Y = Y(x)$  satisfaisant l'équation fonctionnelle  $Y = xR(Y)$ , où  $R$  est une série donnée et  $F$ , une série quelconque, alors on a

$$[x^n]F(Y(x)) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]F'(t)R^n(t). \quad (1.66)$$

En appliquant la formule (1.66) avec  $Y = A_L$ ,  $R(x) = L(x) = 1/(1-x)$  et  $F(x) = x$ , on trouve

$$[x^n]A_L(x) = \frac{1}{n}[t^{n-1}](1-t)^{-n}. \quad (1.67)$$

Après calculs, on obtient de nouveau

$$[x^n]A_L(x) = c_{n-1}. \quad (1.68)$$

En multipliant chaque membre de l'équation précédente par  $n!$ , on trouve l'équation (1.65) Plus généralement, on trouve

$$[x^n]A_L^\alpha(x) = \frac{\alpha}{n} \binom{2n-\alpha-1}{n-\alpha} = \frac{\alpha}{2n-\alpha} \binom{2n-\alpha}{n}. \quad (1.69)$$

□

#### 1.4.4 Dérivation

**Définition 1.4.12** Soit  $F$  une espèce de structures. L'espèce  $F'$ , aussi notée  $\frac{d}{dX}F(X)$ , appelée la *dérivée* de  $F$ , est définie comme suit: Une  $F'$ -structure sur  $U$  est une  $F$ -structure sur  $U^+ = U \cup \{*\}$ , où  $* = *_U$  est un élément choisi en-dehors de  $U$ . Autrement dit, pour chaque ensemble fini  $U$ , on pose

$$F'[U] = F[U^+], \quad \text{où } U^+ = U + \{*\}. \quad (1.70)$$

Le transport le long d'une bijection  $\sigma : U \longrightarrow V$  est défini comme suit: pour toute  $F'$ -structure  $s$  sur  $U$ ,

$$F'[\sigma](s) = F[\sigma^+](s), \quad (1.71)$$

où  $\sigma^+ : U + \{*\} \longrightarrow V + \{*\}$  est l'extension canonique de  $\sigma$  obtenue en posant

$$\sigma^+(u) = \sigma(u), \quad \text{si } u \in U, \quad \text{et } \sigma^+(*) = *. \quad (1.72)$$

**Proposition 1.4.13** Soit  $F$  une espèce de structure. Les séries associées à l'espèce  $F'$  satisfont

- a)  $F'(x) = \frac{d}{dx} F(x),$
- b)  $\tilde{F}'(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} Z_F\right)(x, x^2, x^3, \dots),$
- c)  $Z_{F'}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \frac{\partial}{\partial x_1} Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots).$

□

**Exemple 1.4.14** L'espèce  $C$  des cycles orientés satisfait l'égalité

$$C' = L, \quad (1.74)$$

illustrée à la Figure 1.7. En effet, l'endroit où se trouve le sommet externe  $*$ , nous indique où couper le cycle, de façon à obtenir une liste. Ceci est cohérent avec ce qui se passe au niveau des séries:

$$C'(x) = \frac{d}{dx} C(x) = \frac{d}{dx} \log \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} = L(x). \quad (1.75)$$

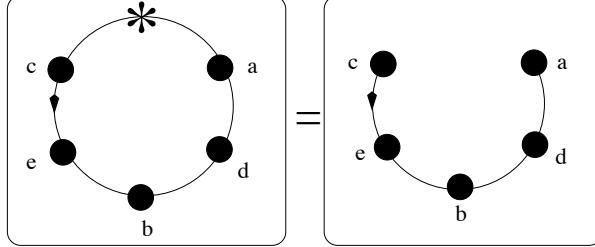


Figure 1.7:  $C' = L$ .

#### 1.4.5 Pointage

**Définition 1.4.15** Soit  $F$  une espèce de structures. L'espèce  $F^\bullet$ , appelée  $F$  point, est définie comme suit: Une  $F^\bullet$ -structure sur  $U$  est une paire  $s = (f, u)$ , où

- i)  $f$  est une  $F$ -structure sur  $U$ ,
- ii)  $u \in U$  (un élément distingué).

La paire  $(f, u)$  est appelée une  $F$ -structure pointée (pointée à l'élément distingué  $u$ ). En d'autres termes, pour tout ensemble fini  $U$ ,

$$F^\bullet[U] = F[U] \times U \quad (\text{produit cartésien d'ensembles}). \quad (1.76)$$

Le transport le long d'une bijection  $\sigma : U \longrightarrow V$  est défini comme suit: pour toute  $F^\bullet$ -structure  $s = (f, u)$  sur  $U$ ,

$$F^\bullet[\sigma](s) = (F[\sigma](f), \sigma(u)), \quad (1.77)$$

**Proposition 1.4.16** *Soit  $F$  une espèce de structures. Alors  $F^\bullet = XF'$ , de sorte que les séries associées à l'espèce  $F^\bullet$  satisfont*

- a)  $F^\bullet(x) = x \frac{d}{dx} F(x),$
- b)  $\tilde{F}^\bullet(x) = x \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Z_F \right) (x, x^2, x^3, \dots),$  (1.78)
- c)  $Z_{F^\bullet}(x_1, x_2, x_3, \dots) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots).$

□

## 1.5 Espèces asymétriques

**Définition 1.5.1** Soit  $F$  une espèce de structures et  $s \in F[U]$ , une  $F$ -structure sur l'ensemble fini  $U$ . La structure  $s$  est dite *asymétrique* si

$$\forall \sigma \in \mathbb{S}_U, F[\sigma](s) = s \implies \sigma = \text{Id}_U. \quad (1.79)$$

Autrement dit, une structure asymétrique  $s \in F[U]$  n'admet aucun automorphisme non trivial. Mentionnons que la notion de structure asymétrique a été étudiée dans ([16]).

**Définition 1.5.2** Soit  $F$  une espèce de structures. La *partie plate* de  $F$  est la sous-espèce  $\overline{F}$  de  $F$  définie comme suit: pour tout ensemble fini  $U$ ,

$$\overline{F}[U] = \{s \in F[U] \mid s \text{ est asymétrique}\}. \quad (1.80)$$

On dit qu'une espèce  $F$  est *asymétrique* si  $\overline{F} = F$ .

**Exemple 1.5.3** Les espèces  $X$ ,  $L$  et  $A_L$  sont asymétriques. En effet, c'est trivial pour l'espèce  $X$ . Pour l'espèce  $L$ , il est clair qu'un réétiquetage non trivial d'une liste revient à changer l'ordre de ses éléments, ce qui donne une liste différente. Quant à l'espèce  $A_L$ , on peut raisonner récursivement: tout automorphisme d'arborescence ordonnée doit préserver la racine. Or, les fils de la racine, étant enrichis d'une structure de liste, doivent donc eux-mêmes rester fixes, car l'espèce  $L$  est asymétrique. On applique alors le même raisonnement à chaque sous-arborescence issue de chacun des fils de la racine.

Le fait qu'une espèce  $F$  soit asymétrique revient à dire que chaque classe d'isomorphie de  $F$ -structures sur  $[n]$  contient exactement  $n!$  structures. Autrement dit,

$$|F[n]| = n! |F[n]/\sim| = n! |\tilde{F}_n|, \quad (1.81)$$

de sorte que

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} |F[n]| \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} n! |\tilde{F}_n| \frac{x^n}{n!} = \tilde{F}(x). \quad (1.82)$$

La réciproque est également vraie, et on a le résultat suivant:

**Proposition 1.5.4** *Soit  $F$  une espèce de structures. Alors  $F$  est asymétrique si et seulement si*

$$F(x) = \tilde{F}(x). \quad (1.83)$$

□

## 1.6 Espèces pondérées

**Définition 1.6.1** Soit  $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ , un domaine d'intégrité et  $\mathcal{A}$  un anneau de séries formelles en un nombre arbitraire de variables à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Un *ensemble  $\mathcal{A}$ -pondéré* est un couple  $(A, w)$ , où  $A$  est un ensemble (fini ou infini) et

$$w : A \longrightarrow \mathcal{A}$$

est une fonction qui, à chaque élément  $a \in A$ , associe un *poids*  $w(a) \in \mathcal{A}$ . Si la somme

$$|A|_w \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{a \in A} w(a)$$

existe, alors on dit que l'ensemble pondéré  $(A, w)$  est *sommable* et  $|A|_w$  est appelée l'*inventaire* (ou le *poids total*) de l'ensemble pondéré  $(A, w)$ .

**Définition 1.6.2** Soient  $(A, w)$  et  $(B, v)$  deux ensembles  $\mathcal{A}$ -pondérés. Un *morphismisme d'ensembles  $\mathcal{A}$ -pondérés*

$$f : (A, w) \longrightarrow (B, v)$$

est une fonction  $f : A \longrightarrow B$  qui préserve les poids, autrement dit, telle que  $w = v \circ f$ . De plus, si  $f$  est une bijection, alors  $f$  est appelée un *isomorphisme* d'ensembles  $\mathcal{A}$ -pondérés et on écrit alors  $(A, w) \simeq (B, v)$ . Observons que

$$(A, w) \simeq (B, v) \implies |A|_w = |B|_v.$$

**Définition 1.6.3** Une espèce pondérée  $F = F_w$  est un foncteur

$$F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_{\mathcal{A}}$$

allant de la catégorie  $\mathbb{B}$  des ensembles finis et bijections vers la catégorie  $\mathbb{E}_{\mathcal{A}}$  des ensembles  $\mathcal{A}$ -pondérés sommables et morphismes d'ensembles  $\mathcal{A}$ -pondérés. Autrement dit, pour chaque ensemble fini  $U$ , on a une fonction de poids

$$\begin{array}{rccc} w_U : & F[U] & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & s & \mapsto & w(s) \end{array}$$

faisant de  $(F[U], w_U)$  un ensemble  $\mathcal{A}$ -pondéré sommable. De plus, pour toute bijection  $\sigma : U \longrightarrow V$ , le transport de structures

$$F[\sigma] : (F[U], w_U) \longrightarrow (F[V], w_V)$$

le long de  $\sigma$  est un morphisme d'ensembles  $\mathcal{A}$ -pondérés.

**Définition 1.6.4** Soit  $F = F_w$  une espèce de structure  $\mathcal{A}$ -pondérée. La *série génératrice* de  $F_w$ , notée  $F_w(x)$  est la série formelle exponentielle à coefficients dans  $\mathcal{A}$ , définie par

$$F_w(x) = \sum_{n \geq 0} |F[n]|_w \frac{x^n}{n!}, \quad (1.84)$$

où  $|F[n]|_w$  désigne le poids total des  $F$ -structures sur  $[n]$ . La *série génératrice des types* de  $F_w$  est définie par

$$\tilde{F}_w(x) = \sum_{n \geq 0} |F[n]/\sim|_w x^n, \quad (1.85)$$

où  $\sim$  est la relation d'isomorphie donnée à la définition 1.2.3. L'expression  $|F[n]/\sim|_w$  nous donne donc le poids total des  $F$ -structures non étiquetées sur  $n$  éléments. La *série indicatrice de cycles* de  $F_w$  est définie par

$$Z_{F_w}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} |\text{Fix } F[\sigma]|_w x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \cdots, \quad (1.86)$$

où  $|\text{Fix } F[\sigma]|_w$  est le poids total des  $F$ -structures laissées fixes sous le transport de structures  $F[\sigma]$ .

### Exemple 1.6.5

a) Considérons l'espèce  $\mathcal{S}_w$  des permutations pondérées par un compteur de cycle. C'est-à-dire que, pour tout ensemble fini  $U$ , on a une fonction

$$w_U : \mathcal{S}[U] \longrightarrow \mathbb{C}[\alpha],$$

défini par  $w(s) = \alpha^{\text{cyc}(s)}$ , où pour  $s \in \mathcal{S}[U]$ ,  $\text{cyc}(s)$  désigne le nombre de cycles de la permutation  $s$ . La Figure 1.8 nous donne un exemple d'une permutation  $s$  sur  $[10]$  de poids  $\alpha^4$ , i.e.  $w(s) = \alpha^4$ . La série génératrice associée,  $\mathcal{S}_w(x)$ , est donnée par

$$\mathcal{S}_w(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n c(n, k) \alpha^k x^n, \quad (1.87)$$

où  $c(n, k)$  est le nombre de permutations de  $[n]$  ayant  $k$  cycles. On a en fait  $c(n, k) = |s(n, k)|$ , où  $s(n, k)$  désigne le nombre de Stirling de première espèce.

Remarquons que si  $s = (f, g)$  est une  $F_w \cdot G_v$ -structure, alors son poids  $w(s)$ , est donné par

$$w(s) = w(f)v(g), \quad (1.88)$$

tandis que si  $s = (\pi, f, (\gamma_p)_{p \in \pi})$  est une  $F_w \circ G_v$ -structure, alors son poids  $w(s)$ , est donné par

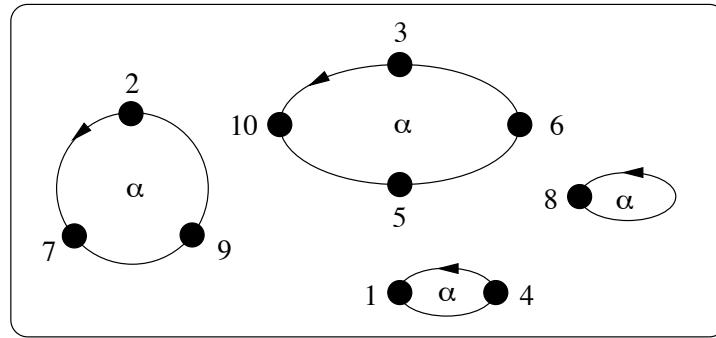
$$w(s) = w(f) \prod_{p \in \pi} v(\gamma_p). \quad (1.89)$$

Une autre façon de voir les choses consiste à considérer l'espèce  $C_\alpha$ , c'est-à-dire des cycles orientés de poids  $\alpha$ . On a alors

$$\mathcal{S}_w = E \circ C_\alpha, \quad (1.90)$$

de sorte qu'au niveau des séries, on obtient une forme alternative pour l'expression de  $\mathcal{S}_w(x)$ .

$$\mathcal{S}_w(x) = \exp \left( \alpha \log \frac{1}{1-x} \right) = (1-x)^{-\alpha}. \quad (1.91)$$



**Figure 1.8:** Permutation  $s$  sur  $[10]$  de poids  $\alpha^4$ .

L'espèce  $\mathcal{S}_w$  admet la série génératrice de types suivante:

$$\tilde{\mathcal{S}}_w(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n p(n, k) \alpha^k x^n, \quad (1.92)$$

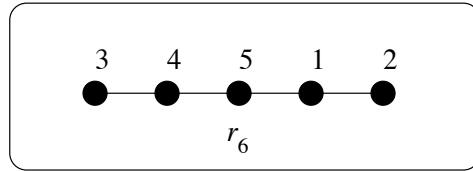
où  $p(n, k)$  désigne le nombre de partages de  $n$  en  $k$  parts.

b) Soit  $(r_1, r_2, r_3, \dots)$  une suite de variables formelles. L'espèce pondérée  $L_{r'}$  associe le poids  $r_{k+1}$  à une liste de longueur  $k$ . Cette espèce intervient dans le dénombrement des arbres plans selon la distribution des degrés des sommets et nous sera également utile ultérieurement pour le dénombrement des cartes. La Figure 1.9 donne un exemple d'une liste de longueur 5 et de poids  $r_6$ . L'espèce  $L_{r'}$  peut être décomposée comme la somme

$$L_{r'} = \mathbf{1}_{r_1} + X_{r_2} + X_{r_3}^2 + \dots, \quad (1.93)$$

où  $X_{r_{n+1}}^n$  dénote l'espèce des listes de longueur  $n$ , de poids  $r_{n+1}$ . L'espèce  $L_{r'}$  est asymétrique, de sorte que

$$L_{r'}(x) = \tilde{L}_{r'}(x) = r_1 + r_2 x + r_3 x^2 + r_4 x^3 + \dots. \quad (1.94)$$



**Figure 1.9:** Liste de longueur 5 et de poids  $r_6$ .

On note que dans le cas d'espèces pondérées, les Propositions 1.4.2 et 1.4.5 sont encore valides: il suffit d'y remplacer les espèces  $F$  et  $G$  respectivement par  $F_w$  par  $G_v$ . Le cas de la substitution d'espèces pondérées est plus délicat. On introduit d'abord la notion de *substitution pléthystique* dans le cas d'espèces pondérées.

**Définition 1.6.6** Soient  $F_w$  et  $G_v$  deux espèces pondérées telles que  $G_v[\emptyset] = \emptyset$ . La *substitution pléthystique* de  $Z_{G_v}$  dans  $Z_{F_w}$ , dénotée par  $Z_{F_w} \circ Z_{G_v}$  (ou  $Z_{F_w}(Z_{G_v})$ ) est définie par

$$Z_{F_w} \circ Z_{G_v} = Z_{F_w}((Z_{G_v})_1, (Z_{G_v})_2, (Z_{G_v})_3, \dots) \quad (1.95)$$

où, pour  $k = 1, 2, 3, \dots$ ,  $(Z_{G_v})_k(x_1, x_2, x_3, \dots) \stackrel{\text{déf}}{=} Z_{G_{vk}}(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \dots)$ , la fonction de poids  $v^k$  étant définie par  $v^k(s) = (v(s))^k$ , pour une  $G$ -structure pondérée  $s \in G[U]$ .

On a alors le théorème suivant.

**Théorème 1.6.7** Soient  $F_w$  et  $G_v$  deux espèces pondérées telles que  $G_v[\emptyset] = \emptyset$ . Alors

- a)  $(F_w \circ G_v)(x) = F_w(G_v(x)),$
- b)  $(F_w \circ G_v)^\sim(x) = Z_{F_w}(\tilde{G}_v(x), \tilde{G}_{v^2}(x^2), \tilde{G}_{v^3}(x^3), \dots),$
- c)  $Z_{F_w \circ G_v} = Z_{F_w} \circ Z_{G_v}.$

□

## 1.7 Espèces multisortes

**Définition 1.7.1** Soit  $k \geq 1$  un entier. Un *multiensemble* (avec  $k$  sortes) d'éléments est un  $k$ -uplet d'ensembles

$$U = (U_1, \dots, U_k).$$

On dit aussi que  $U$  est un  $k$ -ensemble. Un élément  $u \in U_i$  est appelé un élément de  $U$  de *sorte*  $i$ . La *multicardinalité* est le  $k$ -uplet de cardinaux

$$|U| = (|U_1|, |U_2|, \dots, |U_k|).$$

Le *cardinal total* de  $U$  est la somme

$$\|U\| = |U_1| + |U_2| + \dots + |U_k|.$$

**Définition 1.7.2** Une *multifonction*  $f$  de  $(U_1, \dots, U_k)$  dans  $(V_1, \dots, V_k)$ , dénotée par

$$f : (U_1, \dots, U_k) \longrightarrow (V_1, \dots, V_k),$$

est un  $k$ -uplet de fonctions  $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$  tel que  $f_i : U_i \longrightarrow V_i$ , pour  $i = 1, \dots, k$ . La composition de deux multifonctions se fait composante à composante. La multifonction  $f$  est dite *bijective* si chaque fonction  $f_i$  est bijective.

**Définition 1.7.3** Soit  $k \geq 1$  un entier. Une *espèce à  $k$  sortes* est un foncteur  $F$  allant de la catégorie des multiensembles finis et bijections vers la catégorie des ensembles finis et fonctions, c'est-à-dire, une règle  $F$  qui

- i) produit, pour chaque multiensemble fini  $U = (U_1, U_2, \dots, U_k)$ , un ensemble fini

$$F[U_1, \dots, U_k],$$

- ii) produit, pour chaque multifonction bijective

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) : (U_1, U_2, \dots, U_k) \longrightarrow (V_1, V_2, \dots, V_k),$$

une fonction

$$F[\sigma] = F[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k] : F[U_1, \dots, U_k] \longrightarrow F[V_1, \dots, V_k].$$

De plus, les fonctions  $F[\sigma]$  doivent satisfaire les conditions de fonctorialité, c'est-à-dire que, pour toute bijection  $\sigma : U \rightarrow V$  et  $\tau : V \rightarrow W$ , et pour la multifonction identité  $\text{Id}_U : U \rightarrow U$ , on a

- a)  $F[\tau \circ \sigma] = F[\tau] \circ F[\sigma],$
  - b)  $F[\text{Id}_U] = \text{Id}_{F[U]}.$
- (1.97)

Un élément  $s \in F[U_1, \dots, U_k]$  est appelé une *F-structure* sur  $(U_1, \dots, U_k)$ . La fonction  $F[\sigma_1, \dots, \sigma_k]$  est appelée *transport* de *F-structures* le long de  $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ . Si  $t = F[\sigma_1, \dots, \sigma_k](s)$ , alors  $s$  et  $t$  sont dites *isomorphes*. Les classes d'équivalence sous cette relation sont appelées *F-structures non étiquetées*.  $\square$

La prochaine définition concerne les espèces à deux sortes, la généralisation à des espèces à  $k$  sortes étant immédiate.

**Définition 1.7.4** Soit  $F = F(X, Y)$  une espèce à deux sortes. La *série génératrice*  $F(x, y)$ , la *série génératrice des types*  $\tilde{F}(x, y)$  et la série indicatrice de cycles  $Z_F$  sont définies par

$$F(x, y) = \sum_{n,k \geq 0} |F[n, k]| \frac{x^n y^k}{n! k!}, \quad (1.98)$$

où  $|F[n, k]|$  est le nombre de *F-structures* sur  $[n, k] := ([n], [k])$ ,

$$\tilde{F}(x, y) = \sum_{n,k \geq 0} |F[n, k]/ \sim| x^n y^k, \quad (1.99)$$

où  $|F[n, k]/ \sim|$  est le nombre de structures non étiquetées sur  $[n, k]$ , et

$$\begin{aligned} Z_F &= Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots; y_1, y_2, y_3, \dots) \\ &= \sum_{n,k \geq 0} \frac{1}{n! k!} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \tau \in S_k}} |\text{Fix } F[\sigma, \tau]| x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots y_1^{\tau_1} y_2^{\tau_2} \cdots, \end{aligned} \quad (1.100)$$

où  $|\text{Fix } F[\sigma, \tau]|$  est le nombre de *F-structures* sur  $[n, k]$  laissées fixes par le transport le long de  $(\sigma, \tau)$ .

On peut additionner, multiplier, substituer et dériver les espèces multisortes comme dans le cas des fonctions à plusieurs variables ([4]). Nous définissons ici le cas général de la composition partitionnelle pour les espèces multisortes.

**Définition 1.7.5** Soit  $F = F(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$  une espèce à  $m$  sortes,  $(G_j)_{j=1, \dots, m}$  une famille d'espèces à  $k$  sortes. La *composition partitionnelle*  $F(G_1, G_2, \dots, G_m)$  est une espèce à  $k$  sortes définie en posant, pour  $U = (U_1, \dots, U_k)$ ,

$$F(G_1, \dots, G_m)[U] = \sum_{\substack{\pi \in \text{Par}[U] \\ \chi: \pi \rightarrow [m]}} F(\chi^{-1}) \times \prod_{\substack{j \in [m] \\ C \in \chi^{-1}(j)}} G_j[C], \quad (1.101)$$

où, pour chaque fonction  $\chi : \pi \rightarrow [m]$ ,  $\chi^{-1}$  désigne le  $m$ -ensemble

$$(\chi^{-1}(1), \dots, (\chi^{-1}(m))$$

associé à  $\chi$ . En termes plus descriptifs, une  $F(G_1, \dots, G_m)$ -structure est une  $F$ -structure dans laquelle chaque élément de sorte  $Y_j$  a bourgeonné en une cellule contenant une  $G_j$ -structure. La substitution d'espèces à deux sortes se comporte comme suit devant le passage aux séries. La généralisation à plus de deux sortes est immédiate.

**Proposition 1.7.6** *Soient  $F = F(X, Y)$ ,  $G = G(X, Y)$  et  $H = H(X, Y)$  des espèces à deux sortes satisfaisant  $G(0, 0) = 0 = H(0, 0)$ . On a alors*

- a)  $F(G, H)(x, y) = F(G(x, y), H(x, y)),$
- b)  $(F(G, H))^{\sim}(x, y) = Z_F(\tilde{G}(x, y), \tilde{G}(x^2, y^2), \dots; \tilde{H}(x, y), \tilde{H}(x^2, y^2), \dots)$

□



## CHAPITRE II

### ESPÈCES QUOTIENTS

Le but de ce chapitre est de présenter le concept d'espèce quotient et de déterminer les séries formelles associées. Bien que le concept d'espèce quotient soit abordé ailleurs ([15]), ([18]) et ([4]), nos résultats sur les séries associées sont inédits.

#### 2.1 Actions de groupes

**Définition 2.1.1** Soit  $Y$  un ensemble fini pondéré, c'est-à-dire muni d'une fonction de poids

$$w : Y \longrightarrow \mathcal{A},$$

où  $\mathcal{A}$  est un anneau de séries formelles (cf. définition 1.6.1) et  $G$  un groupe fini. Une *action* de  $G$  sur  $Y$  est une fonction

$$\begin{aligned} \alpha_G : G \times Y &\longrightarrow Y \\ (g, y) &\mapsto g \cdot y \end{aligned} \tag{2.1}$$

satisfaisant les deux axiomes suivants: quels que soient  $g, g_1, g_2 \in G$  et  $y \in Y$ ,

1.  $g_1 \cdot (g_2 \cdot y) = (g_1 g_2) \cdot y,$
2.  $1_G \cdot y = y,$  où  $1_G$  est l'élément neutre de  $G.$

De plus, l'action est dite *pondérée* si le troisième axiome suivant est satisfait.

$$3. w(g \cdot y) = w(y). \tag{2.3}$$

□

Pour un élément  $y \in Y$ , l'*orbite* de  $y$  sous l'action de  $G$ , qu'on notera  $G \cdot y$ , ou encore  $\overline{y}$ , est définie par

$$G \cdot y = \{g \cdot y \mid g \in G\}. \tag{2.4}$$

En vertu de l'axiome (2.3), tous les éléments d'une orbite ont le même poids. On peut donc définir le poids d'une orbite comme étant le poids d'un élément quelconque de cette orbite:

$$w(G \cdot y) \stackrel{\text{déf}}{=} w(y). \quad (2.5)$$

L'ensemble des orbites de l'action de  $G$  sur  $Y$ , dénoté par  $Y/G$ , est défini par

$$Y/G = \{G \cdot y \mid y \in Y\}. \quad (2.6)$$

Le *poids total*  $|Y/G|_w$ , ou l'*inventaire*, de l'ensemble des orbites, est donc

$$|Y/G|_w = \sum_{\bar{y} \in Y/G} w(\bar{y}). \quad (2.7)$$

Si la fonction de poids est triviale, i.e. associe le poids 1 à tout élément de  $Y$ , alors l'expression (2.7) est simplement le nombre d'orbites de l'action de  $G$  sur  $Y$ . Pour un élément  $y \in Y$ , le *stabilisateur* de  $y$ , dénoté par  $\text{Stab}_G(y)$  ou simplement par  $G_y$  est défini par

$$G_y = \{g \in G \mid g \cdot y = y\}. \quad (2.8)$$

On vérifie aisément que le stabilisateur de  $y \in Y$  est un sous-groupe de  $G$  et on a le résultat classique suivant.

**Proposition 2.1.2** *Soit  $G$  un groupe agissant sur un ensemble  $Y$ , alors la taille de l'orbite de  $y \in Y$  est donnée par*

$$|G \cdot y| = \frac{|G|}{|G_y|}, \quad (2.9)$$

où  $|G|$  désigne l'ordre du groupe  $G$ .

□

Le Théorème de Cauchy-Frobenius, aussi appelé Lemme de Burnside, nous donne un moyen de déterminer  $|Y/G|_w$ , le poids total des orbites de l'action de  $G$  sur  $Y$ . On peut trouver une démonstration, par exemple, dans ([4]), p. 397).

**Théorème 2.1.3** *Le poids total des orbites de l'action pondérée d'un groupe fini  $G$  sur un ensemble  $\mathcal{A}$ -pondéré  $Y$  est donné par*

$$|Y/G|_w = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_Y(g)|_w, \quad (2.10)$$

où  $\text{Fix}_Y(g)$  désigne l'ensemble des éléments de  $Y$  qui sont laissés fixes sous l'action de  $g \in G$ .

□

Le concept de *polynôme indicateur de cycles* nous sera également utile. Nous en donnons ici une définition formelle.

**Définition 2.1.4** Le *polynôme indicateur de cycles* d'une action d'un groupe fini  $G$  sur un ensemble fini  $Y$  est le polynôme  $P_{G:Y}(y_1, y_2, y_3, \dots)$  en les variables formelles  $y_1, y_2, y_3, \dots$ , défini par

$$P_{G:Y}(y_1, y_2, y_3, \dots) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} y_1^{\phi(g)_1} y_2^{\phi(g)_2} y_3^{\phi(g)_3} \dots, \quad (2.11)$$

où  $\phi(g)_i$  désigne le nombre de cycles de longueur  $i$  dans la permutation de  $Y$  induite par l'action de  $g \in G$ .

L'étude des espèces quotients nous amènera à considérer l'action simultanée de deux groupes finis  $G$  et  $H$  sur un ensemble fini ( $\mathcal{A}$ -pondéré)  $Y$ . On exigera que les actions de  $G$  et  $H$  *commutent*, au sens de la définition suivante.

**Définition 2.1.5** Soient  $G$  et  $H$  deux groupes finis agissant sur un ensemble  $Y$ . On dit que les actions de  $G$  et  $H$  *commutent* si, quels que soient  $g \in G, h \in H$  et  $y \in Y$ ,

$$g \cdot (h \cdot y) = h \cdot (g \cdot y). \quad (2.12)$$

□

**Lemme 2.1.6** ([4]) Soient  $G$  et  $H$  deux groupes finis. La donnée d'une action

$$\alpha : (G \times H) \times Y \longrightarrow Y$$

du produit cartésien  $G \times H$  sur un ensemble fini  $Y$  est équivalente à la donnée de deux actions  $\alpha_G : G \times Y \longrightarrow Y$  et  $\alpha_H : H \times Y \longrightarrow Y$  qui commutent. Le lien entre l'action  $\alpha$  et les deux actions  $\alpha_G$  et  $\alpha_H$  est donnée par

$$(g, h) \cdot y = g \cdot (h \cdot y). \quad (2.13)$$

**Preuve:** Partant de l'action  $\alpha : (G \times H) \times Y \longrightarrow Y$ , on définit

$$\begin{aligned} \alpha_G : G \times Y &\longrightarrow Y, \\ (g, y) &\mapsto g \cdot y, \end{aligned}$$

par  $g \cdot y \stackrel{\text{déf}}{=} (g, 1_H) \cdot y$ . Montrons que  $\alpha_G$  définit bien une action de  $G$  sur  $Y$ . Soient  $g_1, g_2 \in Y$ . On a

$$\begin{aligned} g_1 \cdot (g_2 \cdot y) &= (g_1, 1_H) \cdot ((g_2, 1_H) \cdot y) \\ &= ((g_1, 1_H)(g_2, 1_H)) \cdot y \\ &= (g_1 g_2, 1_H) \cdot y \\ &= (g_1 g_2) \cdot y, \end{aligned}$$

de sorte que  $g_1 \cdot (g_2 \cdot y) = (g_1 g_2) \cdot y$ . De plus, pour  $y \in Y$  quelconque, on a

$$1_G \cdot y = (1_G, 1_H) \cdot y = 1_{G \times H} \cdot y = y,$$

de sorte que  $1_G \cdot y = y$ , et on a bien une action de  $G$  sur  $Y$ . De même, on peut montrer que la fonction  $\alpha_H$ , donnée par

$$\begin{aligned} \alpha_H : H \times Y &\longrightarrow Y, \\ (h, y) &\mapsto h \cdot y, \end{aligned}$$

où  $h \cdot y \stackrel{\text{déf}}{=} (1_G, h) \cdot y$  définit bien une action de  $H$  sur  $Y$ . Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} (g, h) \cdot y &= ((g, 1_H)(1_G, h)) \cdot y \\ &= (g, 1_H) \cdot ((1_G, h) \cdot y) \\ &= (g, 1_H) \cdot (h \cdot y) \\ &= g \cdot (h \cdot y). \end{aligned}$$

On aurait pu également écrire

$$\begin{aligned} (g, h) \cdot y &= ((g, 1_H)(1_G, h)) \cdot y \\ &= ((1_G, h)(g, 1_H)) \cdot y \\ &= (1_G, h) \cdot (g \cdot y) \\ &= h \cdot (g \cdot y), \end{aligned}$$

et les actions de  $G$  et de  $H$  commutent, c'est-à-dire que  $g \cdot (h \cdot y) = h \cdot (g \cdot y)$ .

Réiproquement, considérons deux actions  $\alpha_G : G \times Y \longrightarrow Y$  et  $\alpha_H : H \times Y \longrightarrow Y$  qui commutent. On définit alors

$$\begin{aligned} \alpha : (G \times H) \times Y &\longrightarrow Y, \\ ((g, h), y) &\mapsto (g, h) \cdot y, \end{aligned}$$

par  $(g, h) \cdot y = g \cdot (h \cdot y)$ . Prenons  $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$ . On a alors

$$\begin{aligned} (g_1, h_1) \cdot ((g_2, h_2) \cdot y) &= (g_1, h_1) \cdot (g_2 \cdot (h_2 \cdot y)) \\ &= g_1 \cdot (h_1 \cdot (g_2 \cdot (h_2 \cdot y))) \\ &= g_1 \cdot (g_2 \cdot (h_1 \cdot (h_2 \cdot y))) \\ &= g_1 \cdot (g_2 \cdot ((h_1 h_2) \cdot y)) \\ &= (g_1 g_2) \cdot ((h_1 h_2) \cdot y) \\ &= (g_1 g_2, h_1 h_2) \cdot y \\ &= ((g_1, h_1)(g_2, h_2)) \cdot y. \end{aligned}$$

De plus,

$$1_{G \times H} \cdot y = (1_G, 1_H) \cdot y = 1_G \cdot (1_H \cdot y) = 1_G \cdot y = y,$$

ce qui montre que  $\alpha$  définit bien une action du produit cartésien  $G \times H$  sur  $Y$ , ce qui achève la démonstration puisque (2.13) est vérifiée par définition.  $\square$

**Lemme 2.1.7** Soient  $G$  et  $H$  deux groupes finis agissant sur un ensemble fini  $Y$  et dont les actions commutent. Alors l'action de  $H$  sur  $Y$  induit une action de  $H$  sur  $Y/G$ , l'ensemble des orbites de l'action de  $G$  sur  $Y$ . De même, l'action de  $G$  sur  $Y$  induit une action de  $G$  sur  $Y/H$ .

**Preuve:** On démontre la première assertion; la seconde s'en déduit par symétrie. Soit  $y \in Y$  et  $\bar{y}$ , l'orbite de  $y$  sous l'action de  $G$ . On définit

$$\begin{aligned}\varphi_H : H \times Y/G &\longrightarrow Y/G, \\ (h, \bar{y}) &\mapsto h \cdot \bar{y},\end{aligned}$$

par  $h \cdot \bar{y} = \overline{h \cdot y}$ . Montrons d'abord que  $\varphi_H$  est bien définie, c'est-à-dire que si  $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$ , alors  $\overline{h \cdot y_1} = \overline{h \cdot y_2}$ . Notons que si  $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$ , c'est qu'il existe  $g_0 \in G$  tel que  $y_2 = g_0 \cdot y_1$ . On a alors

$$\begin{aligned}\overline{h \cdot y_2} &= \overline{h \cdot (g_0 \cdot y_1)} \\ &= \overline{g_0 \cdot (h \cdot y_1)} \\ &= \overline{h \cdot y_1},\end{aligned}$$

de sorte que  $\varphi_H$  est bien définie. Reste à voir que  $\varphi_H$  est une action de groupe. Soient  $h_1, h_2 \in H$ . On a

$$\begin{aligned}h_1 \cdot (h_2 \cdot \bar{y}) &= h_1 \cdot (\overline{h_2 \cdot y}) \\ &= \overline{h_1 \cdot (h_2 \cdot y)} \\ &= \overline{(h_1 h_2) \cdot y} \\ &= (h_1 h_2) \cdot \bar{y}.\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}1_H \cdot \bar{y} &= \overline{1_H \cdot y} \\ &= \overline{y},\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.  $\square$

**Lemme 2.1.8** ([10]) et ([4]), exercice A1.9.) Soient  $G$  et  $H$  deux groupes dont les actions pondérées sur un ensemble  $A$ -pondéré  $Y$  commutent. Alors, pour un élément  $h \in H$ , le poids total des éléments de  $Y/G$  laissés fixes sous l'action de  $h$  est donné par

$$|\text{Fix}_{Y/G}(h)|_w = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_Y(g, h)|_w, \quad (2.14)$$

où  $\text{Fix}_Y(g, h)$  désigne l'ensemble des éléments de  $Y$  qui sont laissés fixes sous l'action du couple  $(g, h)$ , donnée par (2.13).

**Preuve:** On va montrer que

$$|G| \left| \text{Fix}_{Y/G}(h) \right|_w = \sum_{g \in G} |\text{Fix}_Y(g, h)|_w.$$

Notons d'abord que pour  $y \in Y$  et  $h \in H$  fixés, s'il existe  $g_0 \in G$  tel que  $h \cdot y = g_0 \cdot y$ , alors

$$g \in G_y \cdot g_0^{-1} \iff g \cdot (h \cdot y) = y, \quad (2.15)$$

où  $G_y$  désigne le stabilisateur de  $y$  sous l'action de  $G$ . En effet,

$$\begin{aligned} g \in G_y \cdot g_0^{-1} &\iff gg_0 \in G_y \\ &\iff (gg_0) \cdot y = y \\ &\iff g \cdot (g_0 \cdot y) = y \\ &\iff g \cdot (h \cdot y) = y. \end{aligned}$$

Notons aussi qu'évidemment,  $|G_y| = |G_y \cdot g_0^{-1}|$ . Par définition, on a

$$\begin{aligned} |G| \left| \text{Fix}_{Y/G}(h) \right|_w &= |G| \sum_{\bar{y} \in \text{Fix}_{Y/G}(h)} w(\bar{y}) \\ &= |G| \sum_{\bar{y} \in Y/G : h \cdot \bar{y} = \bar{y}} w(\bar{y}) \\ &= |G| \sum_{y \in Y : h \cdot y \in \bar{y}} \frac{1}{|\bar{y}|} w(y) \\ &= |G| \sum_{y \in Y : h \cdot y \in \bar{y}} \frac{|G_y|}{|G|} w(y) \quad (\text{Proposition 2.1.2}) \\ &= \sum_{y \in Y : h \cdot y \in \bar{y}} |G_y| w(y) \\ &= \sum_{y \in Y : \exists g_0 : h \cdot y = g_0 \cdot y} w(y) \left| G_y \cdot g_0^{-1} \right| \\ &= \sum_{y \in Y : h \cdot y \in \bar{y}} w(y) \sum_{g \in G} \chi(g \cdot (h \cdot y) = y) \quad (2.15) \\ &= \sum_{g \in G} \sum_{y \in Y : h \cdot y \in \bar{y}} w(y) \chi(g \cdot (h \cdot y) = y) \\ &= \sum_{g \in G} \sum_{y \in Y} w(y) \chi((g, h) \cdot y = y) \\ &= \sum_{g \in G} |\text{Fix}_Y(g, h)|_w. \end{aligned}$$

□

**Corollaire 2.1.9** Soient  $G$  et  $H$  deux groupes finis dont les actions pondérées sur un ensemble  $A$ -pondéré  $Y$  commutent. Alors le poids total des orbites de l'action de  $H$  sur  $Y/G$  (cf. Lemme 2.1.7) est le même que celui des orbites de l'action de  $G$  sur  $Y/H$ , c'est-à-dire que

$$\left| \frac{Y/G}{H} \right|_w = \left| \frac{Y/H}{G} \right|_w. \quad (2.16)$$

**Preuve:** Par le Lemme de Burnside, et le Lemme 2.1.8, on a

$$\left| \frac{Y/G}{H} \right|_w = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} |\text{Fix}_{Y/G}(h)|_w = \frac{1}{|H||G|} \sum_{h \in H} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_Y(g, h)|_w.$$

En inversant les rôles de  $G$  et  $H$ , on trouve également

$$\left| \frac{Y/H}{G} \right|_w = \frac{1}{|G||H|} \sum_{g \in G} \sum_{h \in H} |\text{Fix}_Y(g, h)|_w.$$

□

## 2.2 Espèces quotients

**Définition 2.2.1** ([15]), ([18]). Soit  $F = F_w$ , une espèce de structure pondérée et  $G$ , un groupe fini. Supposons que les deux conditions suivantes soient satisfaites.

1. Pour tout ensemble fini  $U$ , on a une action pondérée

$$\begin{aligned} G \times F[U] &\rightarrow F[U], \\ (g, s) &\mapsto g \cdot s. \end{aligned} \quad (2.17)$$

2. Pour toute bijection  $\sigma : U \rightarrow V$ , le transport de structures le long de  $\sigma$ ,  $F[\sigma] : F[U] \rightarrow F[V]$ , commute avec l'action de  $G$ , c'est-à-dire que, quels que soient  $g \in G$  et  $s \in F[U]$ , on a

$$g \cdot (F[\sigma](s)) = F[\sigma](g \cdot s). \quad (2.18)$$

On dit alors que  $G$  agit de façon naturelle sur  $F$ . Pour un élément  $s \in F[U]$ , on dénotera par  $G \cdot s$  (ou  $\bar{s}$ ) son orbite sous l'action de  $G$ :  $\bar{s} = G \cdot s = \{g \cdot s \mid g \in G\}$ . On définit alors

$$(F/G)[U] \stackrel{\text{def}}{=} F[U]/G = \{G \cdot s \mid s \in F[U]\} \quad (2.19)$$

et

$$(F/G)[\sigma] : (F/G)[U] \rightarrow (F/G)[V], \quad (2.20)$$

par

$$(F/G)[\sigma](G \cdot s) \stackrel{\text{def}}{=} G \cdot F[\sigma](s). \quad (2.21)$$

Autrement dit,  $(F/G)[\sigma](\bar{s}) = \overline{F[\sigma](s)}$ . □

Remarquons que  $(F/G)[U]$  est l'ensemble des orbites de l'action de  $G$  sur  $F[U]$  et que  $(F/G)[\sigma]$  est bien défini. En effet, si  $s_1, s_2 \in F[U]$  sont dans la même orbite sous l'action de  $G$ , i.e  $\overline{s_1} = \overline{s_2}$ , c'est qu'il existe  $g_0 \in G$  tel que  $s_2 = g_0 \cdot s_1$ . On a alors

$$\begin{aligned} (F/G)[\sigma](\overline{s_2}) &= G \cdot F[\sigma](s_2) \\ &= \{g \cdot F[\sigma](s_2) \mid g \in G\} \\ &= \{g \cdot F[\sigma](g_0 \cdot s_1) \mid g \in G\} \\ &= \{g \cdot (g_0 \cdot F[\sigma](s_1)) \mid g \in G\} \\ &= \{(gg_0) \cdot F[\sigma](s_1) \mid g \in G\} \\ &= G \cdot F[\sigma](s_1) \\ &= (F/G)[\sigma](\overline{s_1}), \end{aligned}$$

car  $\{gg_0 \mid g \in G\} = G$ . Ainsi, le résultat ne dépend pas du choix d'un représentant d'une orbite. On a alors le résultat suivant:

**Lemme 2.2.2**  *$F/G$  ainsi définie est une espèce de structures.*

**Preuve:** Il suffit de vérifier que  $F/G$  satisfait les conditions de fonctorialité (1.1) et (1.2). Soit  $\sigma : U \longrightarrow V$  et  $\tau : V \longrightarrow W$ . Fixons  $s \in F[U]$ . On a alors

$$\begin{aligned} (F/G)[\tau \circ \sigma](G \cdot s) &= G \cdot F[\tau \circ \sigma](s) \\ &= G \cdot F[\tau](F[\sigma](s)) \\ &= (F/G)[\tau](G \cdot F[\sigma](s)) \\ &= (F/G)[\tau]((F/G)[\sigma](G \cdot s)) \\ &= ((F/G)[\tau] \circ (F/G)[\sigma])(G \cdot s). \end{aligned}$$

Ainsi,  $(F/G)[\tau \circ \sigma] = (F/G)[\tau] \circ (F/G)[\sigma]$ . D'autre part,

$$\begin{aligned} (F/G)[\text{Id}_U](G \cdot s) &= G \cdot F[\text{Id}_U](s) \\ &= G \cdot s \\ &= \text{Id}_{(F/G)[U]}(G \cdot s). \end{aligned}$$

Ainsi,  $(F/G)[\text{Id}_U] = \text{Id}_{(F/G)[U]}$ . □

On appelle  $F/G$  l'*espèce quotient* de  $F$  par  $G$ . Maintenant qu'on a établi que  $F/G$  est une espèce, on peut déterminer les séries associées.

### 2.2.1 Série génératrice

Considérons  $G$  un groupe fini ayant une action pondérée et naturelle sur une espèce pondérée  $F = F_w$ . Par définition, la série génératrice de l'espèce quotient  $(F/G)$  est donnée par

$$(F/G)(x) = \sum_{n \geq 0} |(F/G)[n]|_w \frac{x^n}{n!}. \quad (2.22)$$

On se souvient que  $|(F/G)[n]|_w$  désigne le poids total des orbites de l'action de  $G$  sur  $F[n]$ . Pour le déterminer, il suffit d'utiliser le Théorème de Cauchy-Frobenius (Théorème 2.1.3). On obtient

$$|(F/G)[n]|_w = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_{F[n]}(g)|_w. \quad (2.23)$$

La proposition suivante découle de la combinaison des équations (2.22) et (2.23).

**Proposition 2.2.3** *Soit  $F = F_w$  une espèce pondérée et  $G$  un groupe fini ayant une action pondérée sur  $F$ . La série génératrice de l'espèce quotient  $F/G$  est donnée par*

$$(F/G)(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{n \geq 0} |\text{Fix}_{F[n]}(g)|_w \frac{x^n}{n!}. \quad (2.24)$$

□

## 2.2.2 Série génératrice des types d'isomorphie

Soit  $F = F_w$  une espèce pondérée. Fixons  $U = [n]$ . On a déjà remarqué à la Proposition 1.1.3, qu'une espèce  $F$  induit une action du groupe symétrique  $\mathbb{S}_n$  sur l'ensemble  $F[n]$ . Considérons maintenant un groupe fini  $G$  agissant de façon naturelle sur l'espèce  $F$ , c'est-à-dire satisfaisant la relation (2.18). Les actions des groupes  $G$  et  $\mathbb{S}_n$  commutent alors entre elles, et on peut appliquer la théorie développée à la section 1 du présent chapitre.

Par définition, la série génératrice de l'espèce quotient  $F/G$  est donnée par

$$(F/G)^\sim(x) = \sum_{n \geq 0} |(F/G)[n]/\sim|_w x^n, \quad (2.25)$$

où  $(F/G)[n]/\sim$  désigne l'ensemble des classes d'équivalences de  $(F/G)[n]$ -structures sous la relation d'isomorphie. Rappelons que par définition,  $(F/G)[n] = F[n]/G$ , autrement dit, une  $F/G$ -structure sur  $[n]$  est une orbite de l'action de  $G$  sur  $F[n]$ . De plus, puisque  $\mathbb{S}_n$  agit également sur  $F[n]$ , et que cette action commute avec celle de  $G$ , en vertu du Lemme 2.1.7, l'action de  $\mathbb{S}_n$  sur  $F[n]$  induit une action de  $\mathbb{S}_n$  sur  $(F/G)[n] = F[n]/G$ , de sorte que  $(F/G)[n]/\sim$  peut être vu comme l'ensemble des orbites de l'action de  $\mathbb{S}_n$  sur  $F[n]/G$ . On peut alors écrire

$$(F/G)^\sim(x) = \sum_{n \geq 0} \left| \frac{F[n]/G}{\mathbb{S}_n} \right|_w x^n. \quad (2.26)$$

Mais en vertu du Corollaire 2.1.9, avec  $H = \mathbb{S}_n$ , on obtient

$$(F/G)^\sim(x) = \sum_{n \geq 0} \left| \frac{F[n]/\mathbb{S}_n}{G} \right|_w x^n. \quad (2.27)$$

L'ensemble  $F[n]/\mathbb{S}_n$  correspond précisément aux  $F$ -structures non étiquetées telles que décrites à la Définition 1.2.3, également dénoté par  $\tilde{F}_n$ . En vertu du Lemme de Burnside, on a

$$|\tilde{F}_n/G|_w = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_{\tilde{F}_n}(g)|_w, \quad (2.28)$$

où  $\text{Fix}_{\tilde{F}_n}(g)$  désigne l'ensemble des  $F$ -structures non étiquetées sur  $[n]$  laissées fixes sous l'action de  $g \in G$ . Il en découle la proposition suivante.

**Proposition 2.2.4** *La série génératrice des types d'isomorphie de l'espèce quotient  $F/G$  est donnée par*

$$(F/G)^\sim(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{n \geq 0} |\text{Fix}_{\tilde{F}_n}(g)|_w x^n, \quad (2.29)$$

où  $\text{Fix}_{\tilde{F}_n}(g)$  désigne l'ensemble des  $F$ -structures non étiquetées sur  $[n]$  laissées fixes sous l'action de  $g \in G$ .  $\square$

### 2.2.3 Série indicatrice des cycles

Considérons une espèce pondérée  $F = F_w$  sur laquelle agit de façon naturelle et pondérée un groupe fini  $G$ . Par définition, on a

$$Z_{F/G} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} |\text{Fix}(F/G)[\sigma]|_w x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots. \quad (2.30)$$

Or,

$$\text{Fix}(F/G)[\sigma] = \{\bar{s} \in (F/G)[n] \mid (F/G)[\sigma](\bar{s}) = \bar{s}\},$$

ce qui, en termes d'action de groupe, se traduit par

$$\text{Fix}(F/G)[\sigma] = \text{Fix}_{F[n]/G}(\sigma) = \{\bar{s} \in F[n]/G \mid \sigma \cdot \bar{s} = \bar{s}\}.$$

En vertu du Lemme 2.1.8, on a

$$|\text{Fix}_{F[n]/G}(\sigma)|_w = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_{F[n]}(g, \sigma)|_w,$$

de sorte qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} Z_{F/G} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} |\text{Fix}_{F[n]}(g, \sigma)|_w x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \sum_{s \in F[n]} w(s) \chi(g \cdot (\sigma \cdot s) = s) x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots \end{aligned}$$

Notons que

$$\sum_{s \in F[n]} w(s) = \sum_{t \in F[n]/\mathbb{S}_n} |\mathbb{S}_n \cdot t| w(t),$$

où la notation  $t \in F[n]/\mathbb{S}_n$  signifie que  $t$  parcourt un ensemble de représentants des orbites de l'action de  $\mathbb{S}_n$  sur  $F[n]$ . Or,  $F[n]/\mathbb{S}_n$  correspond précisément à l'ensemble des  $F$ -structures non étiquetées sur  $n$  éléments, qu'on a dénoté par  $\tilde{F}_n$ . On a alors

$$\begin{aligned} Z_{F/G} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{n \geq 0} \sum_{t \in \tilde{F}_n} \frac{|\mathbb{S}_n \cdot t|}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} w(t) \chi(g \cdot (\sigma \cdot t) = t) x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \cdots \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{n \geq 0} \sum_{t \in \tilde{F}_n} \frac{1}{|\text{Stab}_{\mathbb{S}_n}(t)|} w(t) \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \chi(g \cdot (\sigma \cdot t) = t) x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \cdots, \end{aligned}$$

car on se souvient que le stabilisateur  $\text{Stab}_{\mathbb{S}_n}(t)$  satisfait la relation

$$|\text{Stab}_{\mathbb{S}_n}(t)| = \frac{|\mathbb{S}_n|}{|\mathbb{S}_n \cdot t|} = \frac{n!}{|\mathbb{S}_n \cdot t|}.$$

Posons  $T(F) = \bigcup_{n \geq 0} \tilde{F}_n$ , c'est-à-dire l'ensemble de toutes les  $F$ -structures non étiquetées. Pour un élément  $g \in G$  et une  $F$ -structure  $s \in F[n]$ , posons

$$g\text{-Stab}_{\mathbb{S}_n}(t) = \{\sigma \in \mathbb{S}_n \mid g \cdot (\sigma \cdot t) = t\},$$

qu'on appellera le  *$g$ -stabilisateur de  $s$* . On obtient alors la proposition suivante.

**Proposition 2.2.5** *Soit  $F = F_w$  une espèce de structure pondérée et  $G$  un groupe fini agissant de façon naturelle sur  $F$ . La série indicatrice de cycles de l'espèce quotient  $F/G$  est donnée par*

$$Z_{F/G}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{t \in T(F)} \frac{1}{|\text{Stab}_{\mathbb{S}_n}(t)|} w(t) \sum_{\sigma \in g\text{-Stab}_{\mathbb{S}_n}(t)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \cdots, \quad (2.31)$$

où  $t$  parcourt toutes les  $F$ -structures non étiquetées et où  $\sigma$  parcourt le  $g$ -stabilisateur de  $t$ .  $\square$



## CHAPITRE III

### DÉNOMBREMENT DE CARTES PLANAIRES

L'objet de ce chapitre est de dénombrer les cartes planes et sphériques à deux faces, étiquetées aux sommets ou non, selon le nombre de sommets, selon la distribution des degrés des sommets, selon la distribution des degrés des faces et finalement, selon les distributions conjointes des degrés des sommets et des faces. Il s'agit là de résultats entièrement nouveaux, motivés par la classification des fonctions de Belyi. Voir ([9]).

#### 3.1 Cartes planes

Soit  $\Sigma$  une surface compacte, sans bord, connexe et orientable dans  $\mathbb{R}^3$ . Une *carte*  $\mathbf{m}$  peut être topologiquement définie comme étant une partition de  $\Sigma$  en trois classes finies (voir ([7]) et Tutte ([31])).

1. Un ensemble  $S$  de points: les *sommets*.
2. Un ensemble  $A$  de courbes de Jordan (courbes simples ouvertes homéomorphes à  $]0, 1[$ ) dont les extrémités sont des sommets: les *arêtes*.
3. Un ensemble  $F$  de domaines simplement connexes: les *faces*.

Le *genre*  $g$  d'une carte  $\mathbf{m}$  est le genre de la surface  $\Sigma$ . Il est donné par la formule d'Euler

$$|S| - |A| + |F| = 2 - 2g.$$

Une carte de genre 0 est dite *planaire*. Ceci correspond au cas où  $\Sigma$  est homéomorphe à une sphère orientée. Deux cartes sont dites *équivalentes* s'il existe un homéomorphisme de  $\Sigma$  préservant l'orientation et envoyant l'une sur l'autre. Un *automorphisme* d'une carte est un homéomorphisme de  $\Sigma$ , préservant l'orientation, qui envoie la carte sur elle-même. Du point de vue combinatoire, l'intérêt réside plutôt au niveau des classes d'équivalence de cartes qu'au niveau des cartes elles-mêmes, de sorte que lorsque l'on parle de carte, cela signifiera classe d'équivalence de cartes à homéomorphisme (préservant l'orientation) près.

Une carte *étiquetée aux sommets* est un couple  $(\mathbf{m}, \xi)$ , où  $\mathbf{m}$  est une carte et  $\xi : S(\mathbf{m}) \rightarrow U$  est une bijection de l'ensemble de sommets de  $\mathbf{m}$  vers un ensemble fini  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ . Graphiquement, un étiquetage d'une carte revient à attribuer les étiquettes  $u_1$  à  $u_n$  aux sommets de la carte. On peut également considérer des cartes étiquetées aux arêtes ou encore aux faces.

On définit une carte *plane* comme étant une carte planaire munie d'une face distinguée, la face *extérieure* ou *infinie*. On peut voir une carte plane comme étant une carte planaire avec un plongement spécifique dans le plan orienté (sphère épointée). Pour bien faire la distinction, les cartes planaires usuelles seront appelées *sphériques*.

### 3.1.1 Cartes planes à deux faces

Soit  $U$  un ensemble fini. Désignons par  $M[U]$  l'ensemble des cartes planes à deux faces étiquetées aux sommets par les éléments de  $U$ . Considérons alors une bijection  $\sigma : U \rightarrow V$ . On définit alors la fonction

$$\begin{aligned} M[\sigma] : \quad M[U] &\longrightarrow M[V] \\ (\mathbf{m}, \pi) &\mapsto (\mathbf{m}, \sigma \circ \pi), \end{aligned} \tag{3.1}$$

et on vérifie aisément que les conditions de fonctorialité (1.1) et (1.2) sont satisfaites, de sorte qu'on peut considérer les cartes planes à deux faces comme une espèce de structures. On a alors le résultat suivant.

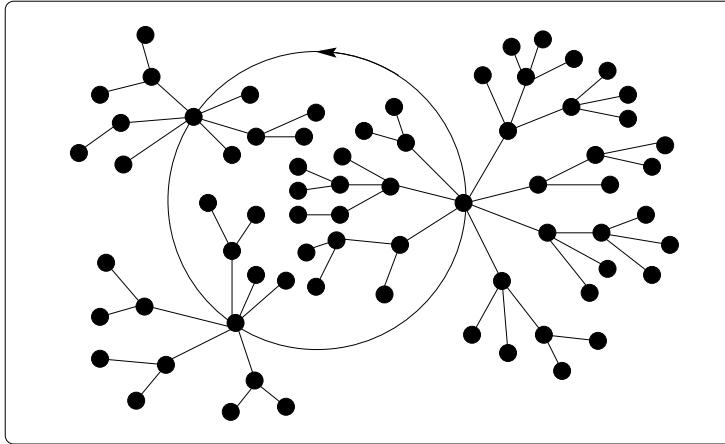
**Proposition 3.1.1** *L'espèce des cartes planes à deux faces, qu'on note par  $M$ , satisfait l'identité combinatoire*

$$M = C(XL^2(A_L)). \tag{3.2}$$

**Preuve:** Rappelons qu'une carte plane est une carte planaire munie d'une face distinguée. La face interne sera considérée comme étant la première face et la face infinie externe comme la deuxième.

En observant la Figure 3.1, qui représente une carte plane à deux faces, on voit qu'il s'agit d'un cycle orienté de structures que l'on peut facilement identifier. Ces structures se décomposent elles-mêmes, tel qu'illustré à la Figure 3.2. Puisque la structure est plongée dans le plan, cela induit un ordre total (une  $L$ -structure) sur les arêtes internes ainsi que sur les arêtes externes de chacun des sommets se trouvant sur le cycle. À l'autre extrémité de chacune de ces arêtes, se trouve un *arbre plan planté*, c'est-à-dire un arbre plan muni d'un sommet distingué auquel est attaché une demi-arête supplémentaire. La figure 3.3 donne un exemple d'arbre plan planté.

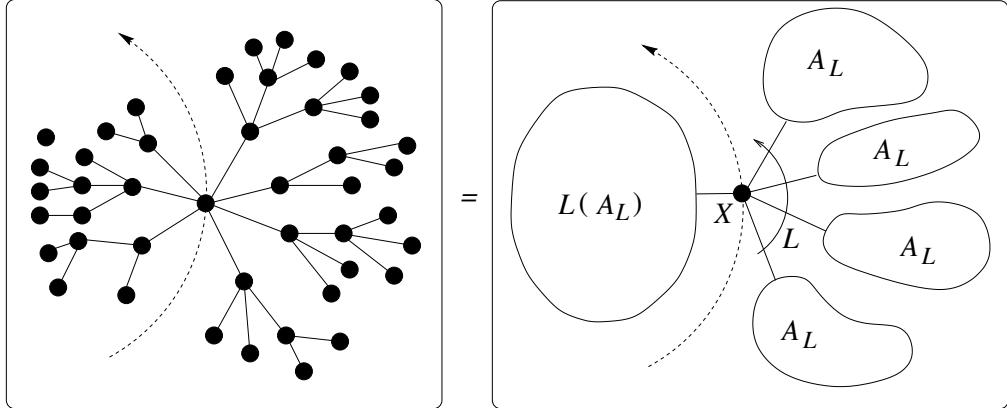
Or, un arbre plan planté n'est rien d'autre qu'une  $A_L$ -structure, telle que décrite à l'exemple 1.4.11. En effet, la demi-arête attachée au sommet distingué



**Figure 3.1:** Carte plane à deux faces.

impose une structure de liste aux fils de ce sommet. Récursivement, la fibre de chaque sommet dans cette structure est enrichie d'une structure de liste. Il s'agit donc d'une  $A_L$ -structure.

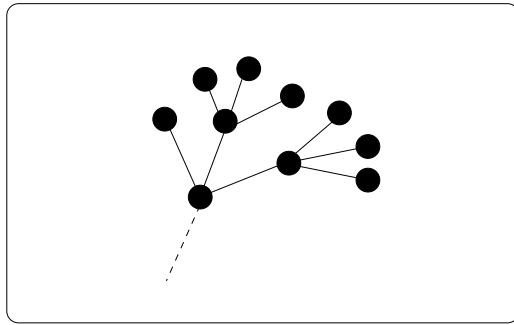
Ainsi, une carte plane à deux faces peut être vue comme un cycle orienté de  $XL^2(A_L)$ -structures, c'est-à-dire  $M = C(XL^2(A_L))$ .  $\square$



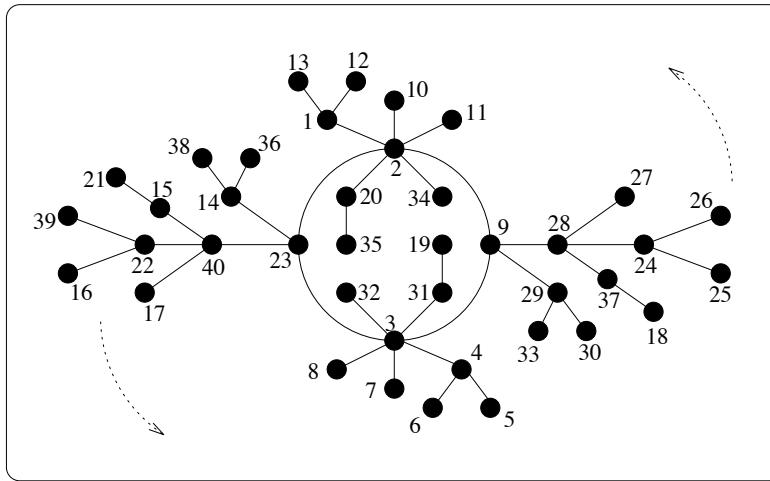
**Figure 3.2:** Une  $XL^2(A_L)$ -structure.

Le lemme suivant nous sera utile pour établir le lien entre un automorphisme d'une carte au sens topologique et un automorphisme d'une carte au sens de  $M$ -structure. Le lecteur peut se référer à ([2]).

**Lemme 3.1.2** *À équivalence topologique près, tout automorphisme périodique non trivial, préservant l'orientation de la sphère peut être représenté par une*



**Figure 3.3:** Un arbre plan *planté*: une  $A_L$ -structure.



**Figure 3.4:** Carte plane à deux faces,  $m$ , présentant un automorphisme d'ordre 2.

*rotation autour d'un axe uniquement défini.*

□

Ceci implique, qu'à équivalence près, tout automorphisme d'une carte (plongée sur la sphère) peut être décrit par une rotation d'angle commensurable avec  $\pi$  autour d'un axe, laissant fixe une paire d'éléments de la carte, chacun de ces éléments pouvant être, soit une face, soit une arête, soit un sommet. Dans le cas des cartes planes à deux faces, cela revient à dire que tout automorphisme d'une telle carte peut être décrit comme une rotation d'angle commensurable avec  $\pi$  autour du centre de la face interne.

Le groupe d'automorphismes d'une carte plane à deux faces doit donc nécessairement être cyclique, et son ordre est un diviseur du nombre de sommets se trouvant sur le cycle. Par exemple, le groupe d'automorphismes  $\text{Aut}(m)$  de

la carte présentée à la Figure 3.4 est constitué de l'identité et d'une rotation d'angle  $\pi$ , d'ordre 2, i.e.  $\text{Aut}(\mathbf{m}) \cong \mathbf{Z}_2$ .

Fixons  $U = [n]$ . Un automorphisme (au sens décrit à la Définition 1.1.4) d'une  $M[n]$ -structure  $\mathbf{m}$ , est une bijection  $\sigma : [n] \rightarrow [n]$  telle que  $M[\sigma](\mathbf{m}) = \mathbf{m}$ . Par exemple la carte illustrée à la Figure 3.4 admet

$$\sigma = (1, 4)(2, 3)(5, 13)(6, 12) \cdots (28, 40)$$

comme automorphisme (au sens de  $M$ -structure). On voit qu'une rotation d'angle  $\pi$  autour du centre de la structure a le même effet que le réétiquetage induit par  $\sigma$ . On peut vérifier que tout automorphisme (au sens de  $M$ -structure) sera toujours exprimé par une permutation *régulière*, c'est-à-dire, ayant tous ses cycles de même longueur. L'effet du réétiquetage induit par une telle permutation sera le même qu'une rotation rigide du plan autour du centre, de sorte qu'on peut identifier automorphisme au sens topologique et automorphisme au sens de  $M$ -structure.

**Définition 3.1.3** Le *degré d'un sommet* est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes. Notons qu'une boucle contribue de deux unités au sommet auquel elle est attachée. Par exemple, le degré du sommet étiqueté 9 dans la carte  $\mathbf{m}$  illustrée à la Figure 3.4 est 4. Le *degré d'une face* est le nombre d'arêtes que l'on rencontre lorsque l'on effectue un parcours complet de la frontière de cette face. Par exemple, le degré de la face interne de la carte  $\mathbf{m}$  de la Figure 3.4 est 16.  $\square$

### 3.1.2 Cartes planes étiquetées à deux faces

Partant de l'équation (3.2), et en utilisant la Proposition 1.4.5a et le Théorème 1.4.8a, on obtient l'expression suivante pour la série génératrice  $M(x)$  de l'espèce des cartes planes à deux faces:

$$M(x) = C(xL^2(A_L(x))) = C(x^2L^2(A_L(x))). \quad (3.3)$$

Comme l'espèce  $A_L$  satisfait  $A_L = XL(A_L)$  (cf. équation 1.58), de sorte que  $A_L(x) = xL(A_L(x))$ , on peut alors écrire

$$M(x) = C\left(\frac{A_L^2(x)}{x}\right). \quad (3.4)$$

Sachant que  $C(x) = \log(1 - x)^{-1} = \sum_{\gamma \geq 1} x^\gamma / \gamma$ , on obtient

$$M(x) = \sum_{\gamma \geq 1} \frac{A_L^{2\gamma}(x)}{\gamma x^\gamma}. \quad (3.5)$$

Par inversion de Lagrange, on trouve

$$A_L^{2\gamma}(x) = \sum_{m>\gamma} \frac{\gamma}{m-\gamma} \binom{2m-2\gamma}{m} x^m, \quad (3.6)$$

et on en déduit que

$$|\mathcal{M}[n]| = (n-1)! \sum_{\gamma=1}^n \binom{2n}{n+\gamma}. \quad (3.7)$$

On peut montrer aisément que

$$\sum_{\gamma=1}^n \binom{2n}{n+\gamma} = \frac{1}{2} \left( 2^{2n} - \binom{2n}{n} \right), \quad (3.8)$$

d'où la proposition suivante.

**Proposition 3.1.4** *Le nombre  $|\mathcal{M}[n]|$  de cartes planes étiquetées à deux faces sur l'ensemble  $[n]$  est donné par*

$$|\mathcal{M}[n]| = \frac{(n-1)!}{2} \left( 2^{2n} - \binom{2n}{n} \right), \quad (3.9)$$

□

Comme corollaire, on a

$$[x^k] \log \left( \frac{A_L^2(x)}{x} \right) = \frac{1}{2k} \left( 2^{2k} - \binom{2k}{k} \right). \quad (3.10)$$

### 3.1.3 Cartes planes non étiquetées à deux faces

Soit  $\tilde{\mathcal{M}}_n$  l'ensemble des cartes planes non étiquetées sur  $n$  sommets. En utilisant l'équation (3.2), et le Théorème 1.4.8 c), et en adoptant la convention d'écriture  $Z_C(x_1, x_2, x_3, \dots) = Z_C(x_m)_{m \geq 1}$ , on obtient

$$\tilde{\mathcal{M}}(x) = Z_C \left( XL^2(A_L)^\sim(x^m) \right)_{m \geq 1}. \quad (3.11)$$

On vérifie aisément que l'espèce  $XL^2(A_L)$  est asymétrique. Ainsi, en vertu de la Proposition 1.5.4, on a

$$(XL^2(A_L))^\sim(x) = (XL^2(A_L))(x). \quad (3.12)$$

En utilisant (1.30), qui donne la série  $Z_C$ , et (3.5), on trouve

$$\tilde{\mathcal{M}}(x) = \sum_{m \geq 1} \frac{\phi(m)}{m} \log \left( \frac{A_L^2(x^m)}{x^m} \right) \quad (3.13)$$

Le nombre  $|\tilde{\mathcal{M}}_n|$  de cartes planes non étiquetées à deux faces admettant  $n$  sommets est alors donné par

$$|\tilde{\mathcal{M}}_n| = [x^n]\tilde{\mathcal{M}}(x).$$

En vertu de (3.10), on trouve

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathcal{M}}_n| &= [x^n] \sum_{m \geq 1} \frac{\phi(m)}{m} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2k} \left( 2^{2k} - \binom{2k}{k} \right) x^{km} \\ &= \sum_{d \mid n} \frac{\phi(n/d)}{n/d} \frac{1}{2d} \left( 2^{2d} - \binom{2d}{d} \right) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{d \mid n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) \left( 2^{2d} - \binom{2d}{d} \right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

d'où la proposition suivante.

**Proposition 3.1.5** *Le nombre  $|\tilde{\mathcal{M}}_n|$  de cartes planes non étiquetées à deux faces sur  $n$  sommets est donné par*

$$|\tilde{\mathcal{M}}_n| = \frac{1}{2n} \sum_{d \mid n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) \left( 2^{2d} - \binom{2d}{d} \right). \quad (3.15)$$

□

### 3.1.4 Cartes planes étiquetées à deux faces pondérés selon les degrés des sommets

Soit  $(r_1, r_2, r_3, \dots)$ , une suite infinie de variables formelles et  $\mathbf{m}$  une carte plane à deux faces. On considère la fonction de poids suivante  $w_s$ , définie sur l'espèce  $\mathcal{M}$ :

$$\begin{aligned} w_s : \mathcal{M} &\rightarrow \mathbf{C}[r_1, r_2, r_3, \dots] \\ \mathbf{m} &\mapsto r_1^{d_1} r_2^{d_2} r_3^{d_3} \dots, \end{aligned} \quad (3.16)$$

où  $d_k$  est le nombre de sommets de degré  $k$  dans  $\mathbf{m}$ . Par exemple, la carte représentée à la Figure 3.4 a le poids  $w(\mathbf{m}) = r_1^{24} r_2^4 r_3^6 r_4^4 r_7^2$ . La distribution des degrés des sommets est donc caractérisée par un vecteur  $d = (d_1, d_2, d_3, \dots)$ . On pose

$$|d| = \sum_k d_k \text{ et } \|d\| = \sum_k k d_k; \quad (3.17)$$

ainsi,  $|d|$  et  $\|d\|$  représentent respectivement le *nombre de sommets* et le *degré total* d'une carte. Notre but est de déterminer le nombre de cartes planes à deux faces ayant une distribution des degrés des sommets donnée. Il est naturel de se demander si, étant donnée une distribution  $d$ , il existe au moins une carte plane à deux faces admettant une telle distribution. Il est bien connu (c.f. ([23]))

qu'il existe un arbre ayant  $d$  comme distribution des degrés des sommets si et seulement si  $\|d\| = 2|d| - 2$ . Comme tout arbre et tout graphe unicyclique peuvent être plongés dans le plan, on en déduit le résultat suivant pour les arbres plans plantés et les cartes planes à deux faces.

**Lemme 3.1.6** *Soit  $d = (d_1, d_2, d_3, \dots) \neq 0$ , avec  $d_i$  entier  $\geq 0$ .*

- a) *Il existe un arbre plan planté (voir Figure 3.3) admettant  $d$  comme distribution des degrés des sommets si et seulement si*

$$\|d\| = 2|d| - 1 \quad (3.18)$$

- b) *Il existe une carte plane à deux faces admettant  $d$  comme distribution des degrés des sommets si et seulement si*

$$\|d\| = 2|d|. \quad (3.19)$$

**Preuve de a):** Considérons un arbre plan planté et soit  $d$ , la distribution des degrés des sommets correspondante. À l'autre extrémité de la demi-arête, on ajoute un sommet, de sorte que la structure obtenue est un arbre plan ayant  $d' = d + \delta_1$  comme distribution des degrés des sommets, où en général  $\delta_k$  désigne le vecteur dont la  $k^{\text{ième}}$  composante est 1 et dont les autres composantes sont nulles. Par le résultat mentionné dans le paragraphe précédent, on a  $\|d'\| = 2|d'| - 2$ . Autrement dit,  $\|d\| + 1 = 2(|d| + 1) - 2$ , et il en résulte que  $\|d\| = 2|d| - 1$ , ce qui établit la nécessité.

Pour la suffisance, considérons un vecteur  $d$  satisfaisant  $\|d\| = 2|d| - 1$ . Considérons alors le vecteur  $d' = d + \delta_1$ . On a alors  $\|d'\| = \|d\| + 1 = (2|d| - 1) + 1 = 2(|d| - 1)$ , et le vecteur  $d'$  satisfait la condition  $\|d'\| = 2|d'| - 2$ . Il existe donc un arbre plan admettant cette distribution des degrés des sommets. Il suffit alors d'y enlever une feuille et de conserver la demi-arête correspondante. La structure obtenue est un arbre plan planté ayant  $d$  comme distribution des degrés des sommets, ce qui établit la suffisance.

**Preuve de b):** Par une démonstration tout à fait semblable à celle faite en a), on montre qu'il existe un arbre plan *biplanté*, c'est-à-dire, planté en deux sommets (pouvant coïncider), si et seulement si la distribution des degrés des sommets  $d$ , satisfait  $\|d\| = 2|d|$ . Il suffit alors de relier les deux demi-arêtes pour obtenir une carte à deux faces.  $\square$

**Lemme 3.1.7** *Soit  $d = (d_1, d_2, d_3, \dots)$ ,  $j = (j_1, j_2, j_3, \dots)$  et  $h = (h_1, h_2, h_3, \dots)$ , trois vecteurs d'entiers  $\geq 0$ , avec  $d \neq 0$ , satisfaisant  $\|d\| = 2|d|$  et  $j + h = d$ . Il existe une carte plane à deux faces admettant  $d$  comme distribution des degrés des sommets et telle que  $j$  corresponde à la distribution des degrés des sommets*

se trouvant sur le cycle et  $h$  correspond à la distribution des degrés des autres sommets si et seulement si

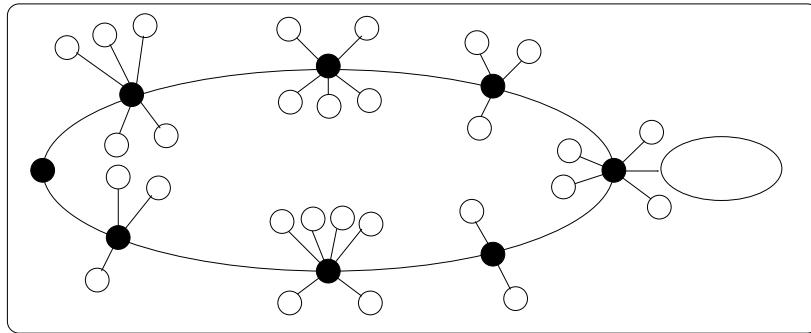
1.  $j \neq 0$ ,
2.  $j_1 = 0$ ,
3.  $\|j\| = 2|j| \Rightarrow h = 0$ .

**Preuve:** La nécessité découle directement de la définition de carte à deux faces. Pour la suffisance, supposons que les conditions 1, 2 et 3 soient satisfaites. Si  $\|j\| = 2|j|$ , alors on a  $j_1 = j_3 + 2j_4 + 3j_5 + \dots$ . Puisque  $j_1 = 0$ , alors  $|j| = j_2 > 0$ . Par hypothèse,  $h = 0$ , de sorte que  $j = d$  et  $|d| = d_2$  et la carte correspondante est un cycle de longueur  $|d|$ . Supposons maintenant que  $\|j\| \neq 2|j|$ . Alors  $h \neq 0$ . Sinon,  $h = 0 \implies d = j$  et  $\|j\| = 2|j|$ . La première étape consiste à construire une carte dont les sommets sur le cycle comprendront  $j_2$  sommets de degré 2,  $j_3$  sommets de degré 3, et ainsi de suite, les autres extrémités d'arêtes étant temporairement occupées par un sommet ouvert (voir Figure 3.5).

Il nous reste à combler les sommets ouverts suivant une distribution des degrés correspondant à  $h$ . On a

$$\begin{aligned} h_1 &= d_1 = d_3 + 2d_4 + 3d_5 + \dots \quad (\text{car } d \text{ satisfait (3.19)}) \\ &\geq j_3 + 2j_4 + 3j_5 + \dots \quad (\text{car } j + h = d) \\ &= \|j\| - 2|j| > 0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

et  $\|j\| - 2|j|$  est le nombre de sommets ouverts.



**Figure 3.5:** Construction d'une carte plane à deux faces.

Considérons le vecteur  $k = (h_1 - \|j\| + 2|j| + 1, h_2, h_3, \dots)$ . Il est facile de vérifier que  $\|k\| = \|d\| - 2\|j\| + 2|j| + 1$  et  $|k| = |d| - \|j\| + |j| + 1$ . Donc  $\|k\| = 2|k| - 1$  et par le Lemme 3.1.6(a), il existe un arbre plan planté dont la distribution des degrés des sommets est  $k$ . Nous comblons un des  $\|j\| - 2|j|$  sommets ouverts

par la racine de l'arbre plan planté avec  $k$  comme distribution des degrés des sommets (la demi-arête devient une arête reliant la racine de l'arbre plan planté à un sommet sur le cycle) et les sommets ouverts restants par des sommets de degré 1. Dans ce cas, la distribution des degrés de sommets n'étant pas sur le cycle sera  $h$  et nous obtenons ainsi une carte plane à deux faces ayant les distributions désirées des degrés des sommets se trouvant sur le cycle et des autres sommets, achevant ainsi la démonstration.  $\square$

La prochaine étape consiste à déterminer l'espèce pondérée  $M_{ws}$  correspondant à la fonction de poids  $w_s$  donnée en (3.16). En fait,  $M_{ws}$  peut être exprimée comme la composition suivante d'espèces pondérées:

$$M_{ws} = C \left( \sum_{m,k \geq 0} X_{r_{m+k+2}} A_{r'}^{m+k} \right), \quad (3.21)$$

où  $X_{r_i}$  dénote l'espèce des singletons de poids  $r_i$  et  $A_{r'}$  est une version pondérée de l'espèce  $A_L$  des arborescences ordonnées. Elle est maintenant définie par

$$A_{r'} = X L_{r'}(A_{r'}), \quad (3.22)$$

où

$$L_{r'} = 1_{r_1} + X_{r_2} + X_{r_3}^2 + X_{r_4}^3 + \dots \quad (3.23)$$

est l'espèce des listes pondérées par  $r_{i+1}$  pour une liste de longueur  $i$ , ou encore par

$$A_{r'} = X_{r_1} + X_{r_2} A_{r'} + X_{r_3} A_{r'}^2 + X_{r_4} A_{r'}^3 + \dots. \quad (3.24)$$

En d'autres termes,  $A_{r'}$  est précisément l'espèce des arbres plans plantés, pondérée par les degrés. Par exemple, le poids de l'arbre plan planté de la Figure 3.3 est  $r_1^7 r_4^3$ .

Soit  $M_d$  l'ensemble des cartes planes étiquetées à deux faces sur l'ensemble  $[n]$ , où  $n = |d|$ , et ayant  $d$  comme distribution des degrés des sommets. On a

$$|M_d| = n! [r^d x^n] M_{ws}(x), \quad (3.25)$$

où

$$r^d = r_1^{d_1} r_2^{d_2} r_3^{d_3} \dots. \quad (3.26)$$

En développant (3.21), on trouve

$$\begin{aligned} M_{ws}(x) &= C(X_{r_2} + 2X_{r_3} A_{r'} + 3X_{r_4} A_{r'}^2 + 4X_{r_5} A_{r'}^3 + \dots)(x) \\ &= \sum_{\gamma \geq 1} \frac{x^\gamma}{\gamma} \left( r_2 + 2r_3 A_{r'}(x) + 3r_4 A_{r'}^2(x) + 4r_5 A_{r'}^3(x) + \dots \right)^\gamma \\ &= \sum_{\substack{\gamma \geq 1 \\ |j|=\gamma}} \frac{x^\gamma}{\gamma} \binom{\gamma}{j_2, j_3, \dots} r_2^{j_2} (2r_3)^{j_3} (3r_4)^{j_4} \dots (A_{r'}(x))^{j_3+2j_4+\dots}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Les nombres  $j_2, j_3, \dots$  correspondent précisément aux nombres de sommets sur le cycle, de degrés 2, 3, … respectivement. On voit que  $j_1$  n'apparaît pas dans cette expression. Il est toujours nul, conformément à la condition 2 du Lemme 3.1.7. De plus,  $|j| = j_2 + j_3 + \dots = \gamma > 0$ , ainsi  $j \neq 0$ , tel que stipulé par la condition 1 du Lemme 3.1.7. On a aussi  $j_3 + 2j_4 + 3j_5 + \dots = \|j\| - 2|j| = \|j\| - 2\gamma$ . On peut alors écrire (3.27) sous la forme

$$\mathbf{M}_{ws}(x) = \sum_{\gamma \geq 1} \frac{x^\gamma}{\gamma} \sum_{\alpha \geq 0} \sum_{\substack{|j|=|\gamma, j_1=0 \\ \|j\|=\alpha+2\gamma}} \binom{\gamma}{j} (2^{j_2} 3^{j_3} \dots) r^j A_{r'}^\alpha(x), \quad (3.28)$$

où

$$\binom{\gamma}{j} = \binom{\gamma}{j_1, j_2, j_3, \dots}. \quad (3.29)$$

Dans cette somme,  $\alpha$  représente le nombre d'arborescences ordonnées se trouvant sur les pourtours interne et externe du cycle. Si  $\alpha = 0$ , tous les sommets sont alors sur le cycle. Dans ce cas, il y a  $(|d| - 1)!$  cartes planes étiquetées à deux faces. On considère le cas où  $\alpha \geq 1$ . Par inversion de Lagrange basée sur (3.22), on trouve

$$A_{r'}^\alpha(x) = \sum_{\beta \geq 1} \frac{\alpha}{\beta} \sum_{\substack{|h|=\beta \\ \|h\|=2\beta-\alpha}} \binom{\beta}{h} r^h x^\beta. \quad (3.30)$$

Ainsi, on a

$$\mathbf{M}_{ws}(x) = \sum_{\gamma, \alpha, \beta, j, h} \frac{\alpha}{\gamma \beta} \binom{\gamma}{j} \binom{\beta}{h} (2^{j_2} 3^{j_3} \dots) r^{j+h} x^{\gamma+\beta}, \quad (3.31)$$

la somme étant prise sur  $\alpha, \beta, \gamma \geq 1, |j| = \gamma, \|j\| = \alpha + 2\gamma, |h| = \beta$  and  $\|h\| = 2\beta - \alpha$ . On peut écrire  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  en fonction de  $j$  et  $h$ , c'est-à-dire

$$\alpha = \|j\| - 2|j|, \beta = |h| \text{ et } \gamma = |j|, \quad (3.32)$$

et on en déduit la proposition suivante.

**Proposition 3.1.8** *Le nombre  $|\mathbf{M}_d|$  de cartes planes étiquetées à deux faces sur l'ensemble  $[|d|]$  et ayant  $d$  comme distribution des degrés des sommets est donné par*

$$|\mathbf{M}_d| = \begin{cases} 0, & \text{si } \|d\| \neq 2|d|, \\ (|d| - 1)!, & \text{si } |d| = d_2, \\ |d|! \sum_{j,h} \frac{\|j\| - 2|j|}{|j||h|} \binom{|j|}{j} \binom{|h|}{h} 2^{j_2} 3^{j_3} \dots, & \text{autrement,} \end{cases} \quad (3.33)$$

la somme étant prise sur tous les couples  $(j, h)$  tels que  $j + h = d, j \neq 0$  et  $j_1 = 0$ .  $\square$

### 3.1.5 Cartes planes non étiquetées à deux faces pondérées selon les degrés des sommets

La fonction de poids  $w_s$  donnée en (3.16) est encore valable dans le cas non étiqueté. Soit  $\tilde{\mathbb{M}}_d$  l'ensemble des cartes planes non étiquetées à deux faces ayant  $d$  comme distribution des degrés des sommets. On a

$$|\tilde{\mathbb{M}}_d| = [r^d x^{|d|}] \tilde{\mathbb{M}}_{w_s}(x). \quad (3.34)$$

Il est évident que

$$|\tilde{\mathbb{M}}_d| = \begin{cases} 0, & \text{si } \|d\| \neq 2|d|, \\ 1, & \text{si } |d| = d_2. \end{cases} \quad (3.35)$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{M}}_{w_s}(x) &= Z_C \left( \sum_{\lambda \geq 1} \lambda X_{r_{\lambda+1}^m}(x^m) A_{(r')^m}^{\lambda-1}(x^m) \right)_{m \geq 1} \\ &= \sum_{m, \gamma \geq 1} \frac{\phi(m)x^{m\gamma}}{m\gamma} \left( \sum_{\lambda \geq 1} \lambda r_{\lambda+1}^m A_{(r')^m}^{\lambda-1}(x^m) \right)^\gamma \\ &= \sum_{m, \gamma, \alpha \geq 1} \frac{\phi(m)x^{m\gamma}}{m\gamma} \sum_{\substack{|j|= \gamma \\ \|j\|=\alpha+2\gamma}} \binom{\gamma}{j} (2^{j_3} 3^{j_4} \dots) r^{mj} A_{(r')^m}^{\alpha}(x^m) \\ &= \sum_{m, \gamma, \alpha, \beta \geq 1} \frac{\phi(m)\alpha}{m\gamma\beta} \sum_{j, h} \binom{\gamma}{j} \binom{\beta}{h} (2^{j_3} 3^{j_4} \dots) r^{m(j+h)} x^{m(\gamma+\beta)}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

où

$$r^{m(j+h)} = r_1^{m(j_1+h_1)} r_2^{m(j_2+h_2)} \dots,$$

la somme étant prise sur tous les couples  $(j, h)$  tels que  $|j| = \gamma$ ,  $\|j\| = \alpha + 2\gamma$ ,  $|h| = \beta$  et  $\|h\| = 2\beta - \alpha$ . On veut extraire le coefficient de  $r^d x^{|d|}$  dans cette expression. Soit  $d = m(j+h)$ . On voit que  $m$  doit diviser toutes les composantes de  $d$ , ce que l'on note par  $m \in \text{Div}(d)$ . On déduit également que  $|d| = m(\gamma + \beta)$ , et le résultat suivant s'ensuit.

**Proposition 3.1.9** *Si  $\|d\| = 2|d|$  et  $|d| \neq d_2$ , alors le nombre  $|\tilde{\mathbb{M}}_d|$  de cartes planes non étiquetées à deux faces ayant  $d$  comme distribution des degrés des sommets est donné par*

$$|\tilde{\mathbb{M}}_d| = \sum_{m, j, h} \frac{\phi(m)(\|j\| - 2|j|)}{m\|j\||h|} \binom{\|j\|}{j} \binom{\|h\|}{h} 2^{j_3} 3^{j_4} 4^{j_5} \dots, \quad (3.37)$$

la somme étant prise sur tous les  $m \in \text{Div}(d)$  et tous les couples  $(j, h)$  tels que  $j + h = d/m$ ,  $j \neq 0$  et  $j_1 = 0$ .  $\square$

### 3.1.6 Cartes planes étiquetées à deux faces selon la distribution des degrés des faces

On considère la fonction de poids  $w_f$  définie sur l'espèce  $M$  des cartes planes à deux faces. Soit  $m$  une telle carte. On définit

$$\begin{aligned} w_f : M &\rightarrow \mathbf{C}[s, t, u] \\ m &\mapsto s^\gamma t^m u^k, \end{aligned}$$

où  $\gamma, m$  et  $k$  dénotent le nombre de sommets se trouvant respectivement *sur*, à *l'extérieur* et à *l'intérieur* du cycle. Par exemple, la carte  $m$  apparaissant à la Figure 3.4 admet le poids  $s^4 t^{30} u^6$ . La distribution des sommets sur, à l'extérieur et à l'intérieur du cycle est caractérisée par un triplet  $(\gamma, m, k)$ .

Soit  $\alpha$  le degré de la face externe et  $\beta$ , le degré de la face interne. La donnée du triplet  $(\gamma, m, k)$  est suffisante pour déterminer le degré de chacune des deux faces. En effet, chaque sommet à l'extérieur du cycle est incident à exactement une arête menant vers le cycle. Cette arête apporte une contribution de deux unités au degré de la face externe puisqu'elle est rencontrée deux fois dans un parcours de la frontière externe. Le même raisonnement s'applique aux sommets internes. Par ailleurs, il y a autant de sommets que d'arêtes sur le cycle. Chaque arête se trouvant sur le cycle apporte une contribution d'une unité au degré de chaque face. On a donc

$$\alpha = \gamma + 2m \text{ et } \beta = \gamma + 2k. \quad (3.38)$$

Ainsi,  $\alpha + \beta = 2(\gamma + k + m) = 2n$ , où  $n$  est le nombre de sommets de la carte. On en déduit que  $\alpha$  et  $\beta$  doivent avoir la même parité. On vérifie aisément que cette condition est également suffisante.

**Lemme 3.1.10** *Soit  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  deux entiers. Il existe une carte plane à deux faces dont les degrés externe et interne sont donnés par  $(\alpha, \beta)$  si et seulement si  $\alpha$  et  $\beta$  ont la même parité.*  $\square$

L'espèce  $M_{w_f}$  correspondant à la fonction de poids  $w_f$  est donnée par

$$M_{w_f} = C(X_s \cdot L(A_L(X_t)) \cdot L(A_L(X_u))), \quad (3.39)$$

où  $X_s$  est l'espèce des singlets de poids  $s$ , et similairement pour  $X_t$  et  $X_u$ . Soit  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ , deux entiers de même parité. Posons  $n = (\alpha + \beta)/2$ . Soit  $M_{(\alpha, \beta)}$  l'ensemble des cartes planes étiquetées à deux faces sur l'ensemble  $[n]$  ayant  $(\alpha, \beta)$  comme distribution des degrés des faces. On a

$$|M_{(\alpha, \beta)}| = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)! \sum_{\gamma, m, k} [s^\gamma t^m u^k x^n] M_{w_f}(x), \quad (3.40)$$

la somme étant prise sur tous les triplets  $(\gamma, m, k)$  tels que  $\gamma + 2m = \alpha$  et  $\gamma + 2k = \beta$ . Notons que

$$A_L(X_t) = X_t L(A_L(X_t)), \quad (3.41)$$

de telle sorte que

$$L(A_L(X_t))(x) = \frac{A_L(xt)}{xt}, \quad (3.42)$$

et similairement pour  $A_L(X_u)$ . On a alors, en utilisant (1.69),

$$\begin{aligned} M_{w_f}(x) &= \sum_{\gamma \geq 1} \frac{s^\gamma}{\gamma(tux)^\gamma} A_L^\gamma(xt) A_L^\gamma(xu) \\ &= \sum_{\gamma, i, j} \frac{1}{\gamma} \frac{\gamma}{2i - \gamma} \binom{2i - \gamma}{i} \frac{\gamma}{2j - \gamma} \binom{2j - \gamma}{j} s^\gamma t^{i-\gamma} u^{j-\gamma} x^{i+j-\gamma}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

la somme étant prise sur tous les  $\gamma \geq 1, i \geq \gamma$  et  $j \geq \gamma$ . Posons  $m = i - \gamma$  et  $k = j - \gamma$ . Ceci donne

$$M_{w_f}(x) = \sum_{\gamma, m, k} \frac{\gamma}{(2m + \gamma)(2k + \gamma)} \binom{2m + \gamma}{m + \gamma} \binom{2k + \gamma}{k + \gamma} s^\gamma t^m u^k x^{\gamma+m+k}. \quad (3.44)$$

Fixons  $(\alpha, \beta)$ . Sachant que  $\alpha = 2m + \gamma$  et  $\beta = 2k + \gamma$ , on obtient

$$M_{w_f}(x) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \frac{\gamma}{\alpha \beta} \binom{\alpha}{\frac{1}{2}(\alpha + \gamma)} \binom{\beta}{\frac{1}{2}(\beta + \gamma)} s^\gamma t^{(\beta - \gamma)/2} u^{(\alpha - \gamma)/2} x^{(\alpha + \beta)/2}, \quad (3.45)$$

la somme étant prise sur tous les  $\alpha, \beta, \gamma$  entiers tels que  $\gamma \geq 1, \alpha \geq \gamma, \beta \geq \gamma, \alpha, \beta$  et  $\gamma$  de même parité. Le résultat suivant s'ensuit.

**Proposition 3.1.11** *Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux entiers strictement positifs ayant même parité. Le nombre  $|M_{(\alpha, \beta)}|$  de cartes planes étiquetées à deux faces avec  $(\alpha, \beta)$  comme distribution des degrés des faces est donné par*

$$|M_{(\alpha, \beta)}| = \frac{(\frac{1}{2}(\alpha + \beta))!}{\alpha \beta} \sum_{\gamma=1}^{\min(\alpha, \beta)} \gamma \cdot \chi_{\text{pair}}(\alpha + \gamma) \binom{\alpha}{\frac{1}{2}(\alpha + \gamma)} \binom{\beta}{\frac{1}{2}(\beta + \gamma)}, \quad (3.46)$$

où la fonction  $\chi_{\text{pair}}$  est donnée par

$$\chi_{\text{pair}}(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.47)$$

□

### 3.1.7 Cartes planes non étiquetées à deux faces selon la distribution des degrés des faces

À partir de l'équation (3.39) et du Théorème 1.6.7, on trouve

$$\begin{aligned}
 & \widetilde{\mathbf{M}}_{wf}(x) \\
 &= Z_C(X_{s\ell}L(A_L(x^\ell t^\ell))L(A_L(x^\ell u^\ell)))_{\ell \geq 1} \\
 &= \sum_{\ell, \gamma \geq 1} \frac{\phi(\ell)s^{\ell\gamma}}{\ell\gamma(xtu)^{\ell\gamma}} A_L^\gamma(X_{t^\ell})(x^\ell) A_L^\gamma(X_{u^\ell})(x^\ell) \\
 &= \sum_{\substack{\ell, \gamma \geq 1 \\ m, k \geq 0}} \frac{\phi(\ell)\gamma}{\ell(2m+\gamma)(2k+\gamma)} \binom{2m+\gamma}{m+\gamma} \binom{2k+\gamma}{k+\gamma} s^{\ell\gamma} t^{\ell m} u^{\ell k} x^{\ell(m+k+\gamma)}. 
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Soit  $\widetilde{\mathbf{M}}_{(\alpha, \beta)}$  l'ensemble des cartes planes non étiquetées à deux faces ayant  $(\alpha, \beta)$  comme distribution des degrés des faces. On a

$$|\widetilde{\mathbf{M}}_{(\alpha, \beta)}| = \sum_{\gamma, m, k} [s^\gamma t^m u^k x^{\gamma+m+k}] \widetilde{\mathbf{M}}_{wf}(x), \tag{3.49}$$

la somme étant prise sur tous les triplets  $(\gamma, m, k)$  satisfaisant  $2m + \gamma = \alpha$  et  $2k + \gamma = \beta$ . À partir de l'équation (3.48), on peut exprimer le tout en fonction de  $\alpha, \beta, \ell$  et  $\gamma$ , d'où la résultat suivant.

**Proposition 3.1.12** *Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux entiers strictement positifs ayant la même parité. Le nombre  $|\widetilde{\mathbf{M}}_{(\alpha, \beta)}|$  de cartes planes non étiquetées à deux faces ayant  $(\alpha, \beta)$  comme distribution des degrés des faces est donné par*

$$|\widetilde{\mathbf{M}}_{(\alpha, \beta)}| = \sum_{\gamma, \ell} \frac{\phi(\ell)\gamma}{\alpha\beta} \binom{\alpha/\ell}{\frac{1}{2\ell}(\alpha+\gamma)} \binom{\beta/\ell}{\frac{1}{2\ell}(\beta+\gamma)}, \tag{3.50}$$

la somme étant prise sur tous les  $\ell, \gamma$  satisfaisant les trois conditions suivantes:

1.  $1 \leq \gamma \leq \min(\alpha, \beta)$ ;
2.  $\ell$  divise  $\gamma, \alpha, \beta$ ;
3.  $2\ell$  divise  $\alpha + \gamma, \beta + \gamma$ .

□

### 3.1.8 Cartes planes étiquetées à deux faces selon les distributions conjointes des degrés des sommets et des faces

Considérons la carte représentée à la Figure 3.4. Les distributions des degrés des sommets et des faces sont données respectivement par

$$d = (24, 4, 6, 4, 0, 0, 2, \dots) \text{ et } (\alpha, \beta) = (64, 16). \tag{3.51}$$

Le vecteur  $d$  se décompose comme la somme de trois vecteurs

$$d = j + h + k,$$

où  $j, h$  et  $k$  représentent les distributions des degrés des sommets se trouvant respectivement sur, à l'extérieur et à l'intérieur du cycle. Dans notre exemple, on a

$$j = (0, 0, 0, 2, 0, 0, 2, 0, \dots), \quad h = (20, 2, 6, 2, 0, \dots) \text{ et } k = (4, 2, 0, \dots).$$

On note que  $2|h| - \|h\| = 10$  et  $2|k| - \|k\| = 4$ . Ces deux nombres correspondent respectivement au nombre d'arborescences ordonnées externes et internes. En effet, supposons qu'il y ait  $\ell$  arborescences ordonnées externes, leurs distributions respectives des degrés des sommets étant  $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(\ell)}$ . Pour  $1 \leq i \leq \ell$ , on a

$$2|h^{(i)}| - \|h^{(i)}\| = 1. \quad (3.52)$$

Il s'ensuit que  $2|h| - \|h\| = \sum_{i=1}^{\ell} (2|h^{(i)}| - \|h^{(i)}\|) = \sum_{i=1}^{\ell} 1 = \ell$ . La même chose s'applique aux arborescences ordonnées internes. Posons

$$\text{res}(h) \stackrel{\text{def}}{=} 2|h| - \|h\|. \quad (3.53)$$

Le terme  $\text{res}(h)$  est appelé *degré résiduel* de  $h$ . Il correspond au nombre d'arborescences ordonnées externes. Il s'ensuit que  $h \neq 0 \Rightarrow \text{res}(h) \geq 1$ . On a alors le résultat suivant:

**Lemme 3.1.13** a) Soient

$$j = (j_1, j_2, j_3, \dots), \quad h = (h_1, h_2, h_3, \dots) \text{ et } k = (k_1, k_2, k_3, \dots)$$

trois vecteurs d'entiers  $\geq 0$  tels que

1.  $\text{res}(j) + \text{res}(h) + \text{res}(k) = 0$ ;
2.  $j_1 = 0$  et  $j \neq 0$ ;
3.  $\text{res}(h) \geq 0$  et  $\text{res}(h) = 0 \Leftrightarrow h = 0$ ;
4.  $\text{res}(k) \geq 0$  et  $\text{res}(k) = 0 \Leftrightarrow k = 0$ .

Alors il existe une carte plane à deux faces ayant respectivement  $j, h$  et  $k$  comme distributions des degrés des sommets sur, à l'extérieur et à l'intérieur du cycle et ayant  $(\alpha, \beta)$  comme distribution des degrés des faces avec  $\alpha = 2|h| + |j|$  et  $\beta = 2|k| + |j|$ .

b) Soit  $d = (d_1, d_2, d_3, \dots) \neq 0$  et  $\alpha > 0, \beta > 0$ . Alors il existe une carte plane à deux faces ayant  $d$  et  $(\alpha, \beta)$  comme distributions conjointes des degrés des sommets et des faces si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites.

1.  $\|d\| = 2|d|$ ;
2. il existe trois vecteurs  $j = (j_1, j_2, j_3, \dots)$ ,  $h = (h_1, h_2, h_3, \dots)$  et  $k = (k_1, k_2, k_3, \dots)$  d'entiers  $\geq 0$  tels que  $d = j + h + k$ ,  $\alpha = 2|h| + |j|$ ,  $\beta = 2|k| + |j|$  et satisfaisant les conditions 2–4 de a).

□

Soit  $s = (s_1, s_2, s_3, \dots)$ ,  $t = (t_1, t_2, t_3, \dots)$  et  $u = (u_1, u_2, u_3, \dots)$  trois suites infinies de variables formelles et  $\mathbf{m}$ , une carte plane à deux faces. On considère la fonction de poids

$$\begin{aligned} w_{sf} : \mathbf{M} &\rightarrow \mathbf{C}[s, t, u] \\ \mathbf{m} &\mapsto s^j t^h u^k, \end{aligned}$$

où

$$s^j = s_1^{j_1} s_2^{j_2} s_3^{j_3} \dots, t^h = t_1^{h_1} t_2^{h_2} t_3^{h_3} \dots, \text{ et } u^k = u_1^{k_1} u_2^{k_2} u_3^{k_3} \dots$$

décrivent respectivement les distributions des degrés des sommets sur, à l'extérieur et à l'intérieur du cycle. Par exemple, la carte représentée à la Figure 3.4 a le poids  $s_4^2 s_7^2 t_1^{20} t_2^6 t_3^6 t_4^2 u_1^4 u_2^2$ . Notons que ce poids est suffisant pour décrire complètement les distributions conjointes des degrés des sommets et des faces puisque

$$d = j + h + k, \alpha = 2|h| + |j|, \text{ et } \beta = 2|k| + |j|.$$

L'espèce correspondant à ce poids est donnée par

$$\mathbf{M}_{w_{sf}} = C \left( \sum_{\ell, m \geq 0} X_{s_{\ell+m+2}} A_{t'}^\ell A_u^m \right). \quad (3.54)$$

Pour simplifier la notation, on pose

$$F_w = \sum_{\ell, m \geq 0} X_{s_{\ell+m+2}} A_{t'}^\ell A_u^m.$$

Notons que  $F_w$  est asymétrique, ce qui sera utile pour l'étude du cas non étiqueté. Fixons  $d$  et  $(\alpha, \beta)$  satisfaisant les conditions 1 et 2 du Lemme 3.1.13. Soit  $\mathbf{M}_{d,(\alpha,\beta)}$  l'ensemble des cartes planes étiquetées sur l'ensemble  $[n]$ , où  $n = |d| = (\alpha + \beta)/2$ , et ayant  $d$  et  $(\alpha, \beta)$  comme distributions conjointes des degrés des sommets et des faces. Soit  $\mathbf{M}_{(j,h,k)}$  l'ensemble des cartes planes étiquetées à deux faces ayant  $(j, h, k)$  comme distributions des degrés des sommets sur, à l'extérieur et à l'intérieur du cycle. On a

$$|\mathbf{M}_{d,(\alpha,\beta)}| = \sum_{j,h,k} |\mathbf{M}_{(j,h,k)}|, \quad (3.55)$$

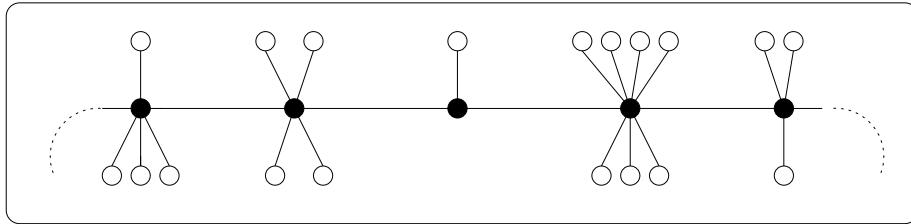
la somme étant prise sur tous les triplets  $(j, h, k)$  satisfaisant les conditions 3, 4, 5 et 6 du Lemme 3.1.13. Le nombre  $|\mathbf{M}_{(j,h,k)}|$  est donné par

$$|\mathbf{M}_{(j,h,k)}| = |d|! [s^j t^h u^k x^{|d|}] \mathbf{M}_{w_{sf}}(x).$$

Fixons maintenant  $j, h$  et  $k$ . Puisqu'il y a  $|j|$  sommets sur le cycle, on a

$$\begin{aligned} |\mathbf{M}_{(j,h,k)}| &= |d|![s^j t^h u^k x^{|d|}] C_{|j|}(F_w)(x) \\ &= |d|![s^j t^h u^k x^{|d|}] \frac{1}{|j|!} (F_w^{|j|})(x). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Il suffit alors de déterminer  $|d|![s^j t^h u^k x^{|d|}] (F_w^{|j|})(x)$ . Notons qu'une  $(F_w^{|j|})$ -structure est une version pondérée d'une  $(XL^2(A_L))^{[j]}$ -structure telle que représentée à la Figure 3.6, où les sommets blancs représentent des arborescences ordonnées, i.e. des  $A_L$ -structures. Le terme  $|d|![s^j t^h u^k x^{|d|}] (F_w^{|j|})(x)$  représente précisément le nombre de  $(XL^2(A_L))^{[j]}$ -structures étiquetées ayant  $j$  comme distribution des degrés des sommets sur la ligne centrale,  $h, k$  comme distributions des degrés des sommets respectivement au-dessus et en-dessous de la ligne. Pour trouver ce nombre, on pourrait utiliser une approche algébrique, mais ceci conduirait à des calculs très fastidieux. Nous allons plutôt adopter une approche plus constructive.



**Figure 3.6:** Une  $(XL^2(A_L))^{[j]}$ -structure.

Pour cela, soit  $\mathcal{U}$  un ensemble de cardinalité  $|d|$ . Dans cet ensemble, on sélectionne  $|j|$  éléments qui seront distribués sur la ligne centrale. Ceci donne le facteur

$$\binom{|d|}{|j|}. \quad (3.57)$$

Il faut ensuite placer ces éléments côté à côté de façon à former une liste, d'où le facteur

$$|j|! \quad (3.58)$$

Parmi les éléments restants, on sélectionne deux ensembles  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{K}$  ayant les cardinalités respectives  $|h|$  et  $|k|$  sur lesquels seront construites les arborescences ordonnées au-dessus et en-dessous de la ligne. Ceci donne le facteur

$$\binom{|d| - |j|}{|h|, |k|}. \quad (3.59)$$

En allant de gauche à droite, on associe un degré à chaque sommet sur la ligne. Ceci revient à compter le nombre de mots de longueur  $|j|$  ayant  $j_2$  occurrences

de la lettre 2,  $j_3$  occurrences de la lettre 3, et ainsi de suite, d'où le facteur multinomial

$$\binom{|j|}{j}. \quad (3.60)$$

Pour chaque sommet sur la ligne, il suffit de déterminer le nombre d'arborescences ordonnées qui lui seront attachées au-dessus de la ligne car le degré de chacun de ces sommets a été établi. Comme on l'a déjà mentionné, ce nombre doit être égal à  $\text{res}(h)$ . Le nombre de possibilités est donné par le facteur

$$[z^{\text{res}(h)}](1+z)^{j_3}(1+z+z^2)^{j_4}(1+z+z^2+z^3)^{j_5}\dots,$$

qui est fonction de  $h$  et  $j$ . On notera ce nombre

$$\Theta(j, h). \quad (3.61)$$

Il n'y a pas de façon simple de calculer ce nombre. On peut toutefois utiliser un logiciel de calcul symbolique comme Maple qui effectue ce genre de calcul en un temps raisonnablement court. Notons que lorsqu'il n'y a pas de restriction sur les distributions extérieures et intérieures des sommets, on obtient simplement le nombre  $2^{j_3}3^{j_4}\dots$ , comme dans l'équation (3.33). Il nous reste à construire les  $\text{res}(h)$  arborescences ordonnées supérieures avec  $h$  comme distribution globale des degrés des sommets. Il y a

$$|h|![t^h x^{|h|}]A_{t'}^{\text{res}(h)}(x)$$

possibilités. D'après (3.30), on a

$$[t^h x^{|h|}]A_{t'}^{\text{res}(h)}(x) = \begin{cases} \frac{\text{res}(h)}{|h|} \binom{|h|}{h}, & \text{si } \text{res}(h) \geq 1, \\ 1, & \text{si } \text{res}(h) = 0. \end{cases}$$

On représente cette expression sous la forme

$$|h|! \Phi(h) \binom{|h|}{h}, \quad (3.62)$$

où

$$\Phi(h) = \begin{cases} \text{res}(h)/|h|, & \text{si } \text{res}(h) \geq 1, \\ 1, & \text{si } h = 0, \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

De façon similaire, le nombre de  $\text{res}(k)$ -listes d'arborescences ordonnées inférieures est donné par

$$|k|! \Phi(k) \binom{|k|}{k}. \quad (3.63)$$

En multipliant les facteurs (3.57) à (3.63), et en divisant par  $|d|!$ , on obtient

$$[s^j t^h u^k x^{|d|}] F_w^{[j]}(x) = \Phi(h)\Phi(k)\Theta(j,h) \binom{|j|}{j} \binom{|h|}{h} \binom{|k|}{k}. \quad (3.64)$$

Ainsi, par l'équation (3.56),

$$|\mathbf{M}_{(j,h,k)}| = \frac{|d|!\Phi(h)\Phi(k)\Theta(j,h)}{|j|} \binom{|j|}{j} \binom{|h|}{h} \binom{|k|}{k}. \quad (3.65)$$

Finalement, par l'équation (3.55), on a

**Proposition 3.1.14** *Soit  $d \neq 0$ ,  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  satisfaisant les conditions 1 et 2 du Lemme 3.1.13. Le nombre  $|\mathbf{M}_{d,(\alpha,\beta)}|$  de cartes planes étiquetées à deux faces ayant  $d$  et  $(\alpha, \beta)$  comme distributions conjointes des degrés des sommets et des faces est donné par*

$$|\mathbf{M}_{d,(\alpha,\beta)}| = |d|! \sum_{j,h,k} \frac{\Phi(h)\Phi(k)\Theta(j,h)}{|j|} \binom{|j|}{j} \binom{|h|}{h} \binom{|k|}{k}, \quad (3.66)$$

la somme étant prise sur tous les  $j, h$  et  $k$  satisfaisant les conditions 3, 4 et 5 du Lemme 3.1.13.  $\square$

### 3.1.9 Cartes planes non étiquetées à deux faces selon les distributions conjointes des degrés des sommets et des faces

Soit  $\tilde{\mathbf{M}}_{d,(\alpha,\beta)}$  l'ensemble des cartes planes non étiquetées à deux faces ayant  $d$  et  $(\alpha, \beta)$  comme distributions conjointes des degrés des sommets et des faces. En supposant que toutes les conditions du Lemme 3.1.13 soient satisfaites, on a

$$|\tilde{\mathbf{M}}_{d,(\alpha,\beta)}| = \sum_{j,h,k} |\tilde{\mathbf{M}}_{j,h,k}|, \quad (3.67)$$

où, pour un triplet fixé  $(j, h, k)$ ,

$$|\tilde{\mathbf{M}}_{(j,h,k)}| = [x^{|d|} s^j t^h u^k] \tilde{\mathbf{M}}_{w_{sf}}(x).$$

Puisque le vecteur  $j$  détermine le nombre de sommets sur le cycle, on a

$$|\tilde{\mathbf{M}}_{j,h,k}| = [x^{|d|} s^j t^h u^k] (C_{|j|}(F_w))^\sim(x). \quad (3.68)$$

En appliquant le Théorème 1.6.7, et le fait que l'espèce  $F_w$  soit asymétrique, on trouve

$$(C_{|j|}(F_w))^\sim(x) = Z_{C_{|j|}}(F_w(x), F_w^2(x^2), F_w^3(x^3), \dots). \quad (3.69)$$

En vertu de l'équation (1.39), on trouve

$$(C_{|j|}(F_w))^\sim(x) = \frac{1}{|j|} \sum_{m \mid |j|} \phi(m) F_w^{|j|/m}(x^m). \quad (3.70)$$

On a

$$[x^{|d|} s^j t^h u^k] F_w^{|j|/m}(x^m) = [x^{|d|/m} s^{j/m} t^{h/m} u^{k/m}] F_w^{|j|/m}(x),$$

où  $j/m = (j_1/m, j_2/m, j_3/m, \dots)$ , et similairement pour  $h/m$  et  $k/m$ . Il s'ensuit que  $m$  doit diviser simultanément chaque composante de  $j, h$  et  $k$ , ce qu'on note par  $m \in \text{Div}(j, h, k)$ . On sait calculer cette dernière expression: elle correspond précisément à l'équation (3.64), et est donnée par

$$\begin{aligned} & [x^{|d|/m} s^{j/m} t^{h/m} u^{k/m}] F_w^{|j|/m}(x) \\ &= \Phi(h/m) \Phi(k/m) \Theta(j/m, h/m) \binom{|j|/m}{j/m} \binom{|h|/m}{h/m} \binom{|k|/m}{k/m}. \end{aligned}$$

En vertu des équations (3.67) et (3.70), on obtient

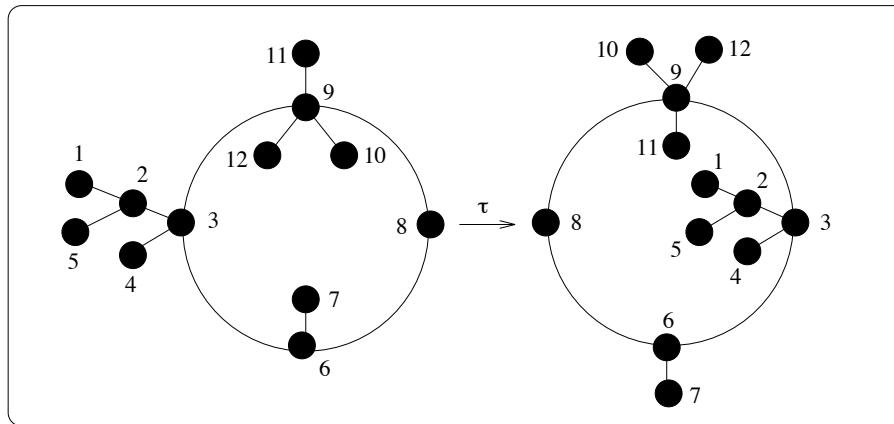
**Proposition 3.1.15** *Soit  $d, \alpha > 0$  et  $\beta > 0$  satisfaisant les conditions 1 et 2 du Lemme 3.1.13. Le nombre  $|\tilde{\mathcal{M}}_{d,(\alpha,\beta)}|$  de cartes planes non étiquetées à deux faces ayant  $d$  et  $(\alpha, \beta)$  comme distributions conjointes des degrés des sommets et des faces est donné par*

$$|\tilde{\mathcal{M}}_{d,(\alpha,\beta)}| = \sum_{m,j,h,k} \frac{\phi(m)\Phi(h')\Phi(k')\Theta(j',h')}{|j|} \binom{|j'|}{j'} \binom{|h'|}{h'} \binom{|k'|}{k'}, \quad (3.71)$$

où  $j' = j/m, h' = h/m$  et  $k' = k/m$ , la somme étant prise sur tous les triplets  $(j, h, k)$  satisfaisant les conditions correspondantes du Lemme 3.1.13 et tous les  $m \in \text{Div}(j, h, k)$ .  $\square$

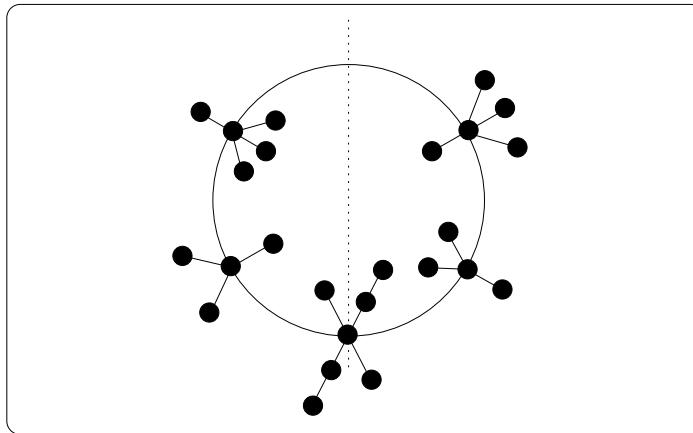
## 3.2 Cartes sphériques

Considérons les deux cartes illustrées à la Figure 3.7. Plongées dans le plan, ces deux cartes sont *distinctes*. Aucun homéomorphisme du plan préservant l'orientation ne peut envoyer l'une sur l'autre. Toutefois, lorsque que nous les considérons plongées sur la sphère orientée, ces deux cartes représentent la *même* carte. Imaginons que le cycle coïncide avec l'équateur de la sphère. La structure de gauche représente une vue de la carte à partir du pôle nord tandis que la structure de droite représente une vue de cette même carte à partir du pôle sud. On observe que le passage de l'une vers l'autre revient essentiellement à interchanger le choix de la face distinguée. De façon équivalente, le passage de l'une à l'autre s'obtient en effectuant une rotation de  $180^\circ$  autour d'un axe passant par l'équateur. Cette transformation est clairement involutive; elle est appelée



**Figure 3.7:** Involution antipodale d'une carte plane.

involution antipodale et est notée par  $\tau$ . On dit qu'une carte plane à deux faces  $m$ , (étiquetée ou non) admet une symétrie antipodale si  $\tau(m) = m$  (voir Figure 3.8). Voir également la Figure 3.9 pour une représentation de cette carte sur la sphère.



**Figure 3.8:** Carte plane admettant une symétrie antipodale.

Considérons le groupe  $\langle \tau \rangle = \{1, \tau\}$ , où  $\tau^2 = 1$ . L'involution antipodale définit une action de ce groupe sur l'espèce  $M$  des cartes planes à deux faces. Plus précisément, on a une famille d'actions: pour chaque ensemble fini  $U$ , la fonction

$$\begin{aligned} \langle \tau \rangle \times M[U] &\rightarrow M[U] \\ (g, m) &\mapsto g \cdot m \end{aligned} \tag{3.72}$$

est une action du groupe  $\langle \tau \rangle$  sur l'ensemble  $M[U]$  des cartes planes à deux faces

étiquetées sur l'ensemble  $U$ . Cette action commute avec tout réétiquetage le long d'une bijection  $\sigma : U \rightarrow V$ . Notons que cette action *préserve* la distribution des degrés des sommets et *inverse* la distribution des degrés des deux faces.

Les cartes *sphériques* à deux faces peuvent donc être considérées comme des *orbites* de l'action de  $\langle\tau\rangle$  sur l'ensemble  $M[U]$ . Ainsi, l'espèce des cartes sphériques à deux faces, notée par  $\mathcal{M}$ , est l'espèce *quotient* de l'espèce  $M$  des cartes planes à deux faces par le groupe  $\langle\tau\rangle$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{M} = M / \langle\tau\rangle. \quad (3.73)$$

Le dénombrement de divers types de cartes sphériques, étiquetées ou non, selon la distribution des degrés des sommets, etc. est donné par le Lemme de Burnside (Théorème 2.1.3): pour toute classe finie  $C$  de cartes planes (étiquetées ou non), fermée sous l'action  $\tau$ , le cardinal de la classe correspondante  $\mathcal{C} = C / \langle\tau\rangle$  de cartes sphériques, est donné par

$$|\mathcal{C}| = |C / \langle\tau\rangle| = \frac{1}{2} (|C| + |\text{Fix}_C \tau|), \quad (3.74)$$

où  $\text{Fix}_C \tau$  est l'ensemble des cartes dans  $C$  ayant une symétrie antipodale. Mentionnons que c'est essentiellement ce qu'expriment les équations (2.24) et (2.29), respectivement dans le cas étiqueté et non étiqueté, pour  $G = \{1, \tau\}$ .

### 3.2.1 Cartes sphériques étiquetées à deux faces

Soit  $\mathcal{M}[n]$  l'ensemble des cartes sphériques étiquetées à deux faces sur  $[n]$ . En appliquant l'équation (3.74) avec  $C = M[n]$  et  $\mathcal{C} = \mathcal{M}[n]$ , et en notant que les seules cartes planes étiquetées à deux faces admettant une symétrie antipodale sont le 1-cycle (1) et le 2-cycle (12), on trouve:

**Proposition 3.2.1** *Le nombre  $|\mathcal{M}[n]|$  de cartes sphériques étiquetées à deux faces sur l'ensemble  $[n]$  est donné par*

$$|\mathcal{M}[n]| = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1, \\ 3, & \text{si } n = 2, \\ \frac{(n-1)!}{4} \left( 2^{2n} - \binom{2n}{n} \right), & \text{autrement.} \end{cases} \quad (3.75)$$

□

Soit  $\mathcal{M}_d$  l'ensemble des cartes sphériques étiquetées à deux faces sur  $[[d]]$  ayant  $d$  comme distribution des degrés des sommets. Supposons que le vecteur  $d$  satisfasse la condition d'existence  $\|d\| = 2|d|$ . L'ensemble  $M_d$  est fermé sous l'action de  $\tau$ , de sorte qu'on peut appliquer l'équation (3.74), d'où le résultat suivant.

**Proposition 3.2.2** *Le nombre  $|\mathcal{M}_d|$  de cartes sphériques étiquetées à deux faces sur  $[[d]]$  ayant  $d$  comme distribution des degrés de sommets, est donné par*

$$|\mathcal{M}_d| = \begin{cases} 1, & \text{si } d = (0, 1) \text{ ou } (0, 2), \\ \frac{1}{2}|\mathcal{M}_d|, & \text{autrement,} \end{cases} \quad (3.76)$$

où  $|\mathcal{M}_d|$  est donné par l'équation (3.33).  $\square$

Soit  $\mathcal{M}_{\{\alpha, \beta\}}$  l'ensemble des cartes sphériques étiquetées à deux faces ayant  $\alpha$  et  $\beta$  comme degrés des faces. On utilise la paire  $\{\alpha, \beta\}$ , avec répétition permise, pour refléter le fait que dans le cas sphérique, l'ordre parmi les deux faces n'est plus significatif. Comme on l'a mentionné plus tôt, l'involution antipodale  $\tau$  a pour effet d'*interchanger* les deux faces, et ainsi, les degrés correspondants. Donc, si  $\alpha \neq \beta$ , alors

$$\tau : \mathcal{M}_{(\alpha, \beta)} \rightarrow \mathcal{M}_{(\beta, \alpha)}$$

établit une bijection entre ces deux ensembles. Ceci induit une bijection entre l'ensemble  $\mathcal{M}_{(\alpha, \beta)}$  et l'ensemble de paires

$$(\mathbf{m}, \tau(\mathbf{m})) \in \mathcal{M}_{(\alpha, \beta)} \times \mathcal{M}_{(\beta, \alpha)}.$$

On note que ces paires correspondent précisément aux cartes sphériques.

Si  $\alpha = \beta$ , alors l'ensemble  $\mathcal{M}_{(\alpha, \alpha)}$  est fermé sous l'action de  $\tau$ , et on peut utiliser l'équation (3.74).

**Proposition 3.2.3** *Étant donnés  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  ayant même parité, alors le nombre  $|\mathcal{M}_{\{\alpha, \beta\}}|$  de cartes sphériques étiquetées à deux faces ayant  $\{\alpha, \beta\}$  comme distribution des degrés des faces est donné par*

$$|\mathcal{M}_{\{\alpha, \beta\}}| = \begin{cases} |\mathcal{M}_{(\alpha, \beta)}|, & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ 1, & \text{si } \alpha = \beta = 1 \text{ ou } 2, \\ \frac{1}{2}|\mathcal{M}_{(\alpha, \alpha)}|, & \text{si } \alpha = \beta > 2, \end{cases} \quad (3.77)$$

le terme  $|\mathcal{M}_{(\alpha, \beta)}|$  étant donné par l'équation (3.46).  $\square$

Considérons  $d = (d_1, d_2, d_3, \dots)$  et  $(\alpha, \beta)$  dénotant respectivement les distributions des degrés des sommets et des faces. On suppose que  $d$  et  $(\alpha, \beta)$  satisfont les conditions 1 et 2 du Lemme 3.1.13, de sorte qu'il existe au moins une carte plane ayant les distributions de degrés correspondants. Soit  $\mathcal{M}_{d, \{\alpha, \beta\}}$  l'ensemble des cartes sphériques étiquetées associées à ces distributions. Si  $\alpha \neq \beta$ , alors il y a une bijection entre les ensembles  $\mathcal{M}_{d, \{\alpha, \beta\}}$  et  $\mathcal{M}_{d, (\alpha, \beta)}$  car l'argument donné pour  $\mathcal{M}_{(\alpha, \beta)}$  est encore applicable si on se restreint à l'ensemble  $\mathcal{M}_{d, (\alpha, \beta)}$ . Si  $\alpha = \beta$ , alors l'ensemble  $\mathcal{M}_{d, (\alpha, \alpha)}$  est clos sous l'action de  $\tau$ , et on peut appliquer (3.74). La prochaine proposition s'ensuit.

**Proposition 3.2.4** *Le nombre  $|\mathcal{M}_{d,\{\alpha,\beta\}}|$  de cartes sphériques étiquetées ayant  $d$  et  $\{\alpha, \beta\}$  comme distributions conjointes des degrés des sommets et des faces est donné par*

$$|\mathcal{M}_{d,\{\alpha,\beta\}}| = \begin{cases} |\mathbb{M}_{d,(\alpha,\beta)}|, & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ 1, & \text{si } \alpha = \beta = 1 \text{ ou } 2, \\ \frac{1}{2}|\mathbb{M}_{d,(\alpha,\alpha)}|, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (3.78)$$

où  $|\mathbb{M}_{d,(\alpha,\beta)}|$  est donné par l'équation (3.66).  $\square$

### 3.2.2 Cartes sphériques non étiquetées à deux faces selon le nombre de sommets: première méthode

Soit  $\widetilde{\mathcal{M}}_n$  l'ensemble des cartes sphériques non étiquetées à deux faces ayant  $n$  sommets. En appliquant l'équation (3.74), on trouve

$$|\widetilde{\mathcal{M}}_n| = \frac{1}{2} (\widetilde{\mathbb{M}}_n + |\text{Fix}_{\widetilde{\mathbb{M}}_n} \tau|). \quad (3.79)$$

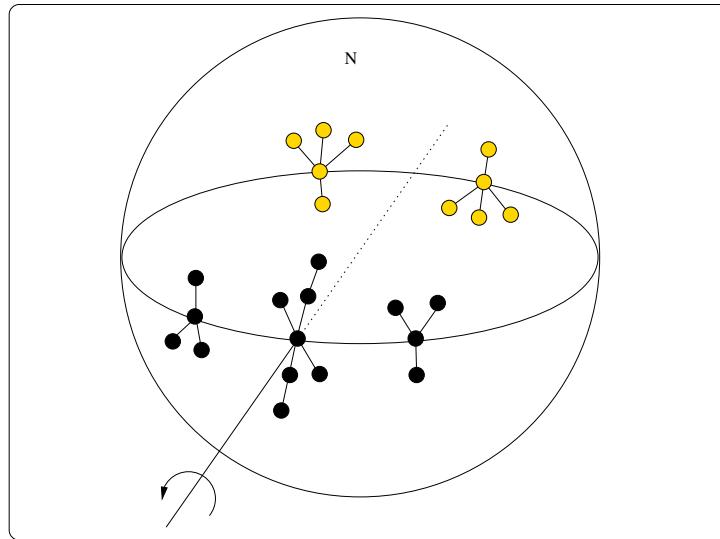
Il reste à calculer  $|\text{Fix}_{\widetilde{\mathbb{M}}_n} \tau|$ , le nombre de cartes planes non étiquetées à deux faces ayant  $n$  sommets et admettant une symétrie antipodale. Contrairement au cas étiqueté, beaucoup de cartes planes non étiquetées admettent une symétrie antipodale. De plus, elles peuvent être identifiées aux cartes sphériques ayant une symétrie antipodale. Ainsi, on a

$$|\text{Fix}_{\widetilde{\mathbb{M}}_n} \tau| = |\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_n} \tau|. \quad (3.80)$$

On se souvient que l'involution antipodale  $\tau$  peut être vue comme une rotation de  $180^\circ$  autour d'un axe passant par le centre de la sphère et intersectant deux points de l'équateur. Par exemple, la carte sphérique représentée à la Figure 3.9 admet une symétrie antipodale: si on effectue une rotation de  $180^\circ$  autour de l'axe indiqué, la carte sera envoyée sur elle-même. Remarquons que la Figure 3.8 donne une représentation plane de la carte illustrée à la Figure 3.9. La première admet une symétrie antipodale en tant que carte plane, la seconde, en tant que carte sphérique. Il y a essentiellement trois types d'axes de symétrie possibles, à savoir

- axes passant par un sommet et une arête: type *SA*;
- axes passant par deux sommets: type *SS*;
- axes passant par deux arêtes: type *AA*.

Désignons par  $\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_n}(\tau, SA)$ ,  $\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_n}(\tau, SS)$  et  $\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_n}(\tau, AA)$ , l'ensemble des cartes sphériques non étiquetées à deux faces sur  $n$  sommets admettant au



**Figure 3.9:** Carte sphérique à deux faces admettant une symétrie antipodale.

moins un axe de symétrie antipodale de type  $SA$ ,  $SS$ , et  $AA$ , respectivement. On a alors évidemment

$$\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_n} \tau = \text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_n}(\tau, SA) \cup \text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_n}(\tau, SS) \cup \text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_n}(\tau, AA)$$

Notons qu'une symétrie antipodale de type  $SA$  laisse fixe l'unique sommet intersectant l'axe, et échange deux à deux tous les autres sommets, de sorte que dans ce cas,  $n$ , le nombre de sommets, doit nécessairement être impair. Une symétrie antipodale de type  $SS$  laisse deux sommets fixes et échange deux à deux tous les autres, tandis qu'une symétrie de type  $AA$  échange deux à deux tous les sommets. Ceci implique que dans le cas  $SS$  ou  $AA$ ,  $n$  doit nécessairement être pair. Une carte ne peut donc pas admettre simultanément une symétrie antipodale de type  $SA$  et une symétrie de type  $SS$  ou  $AA$ , de sorte qu'on peut écrire

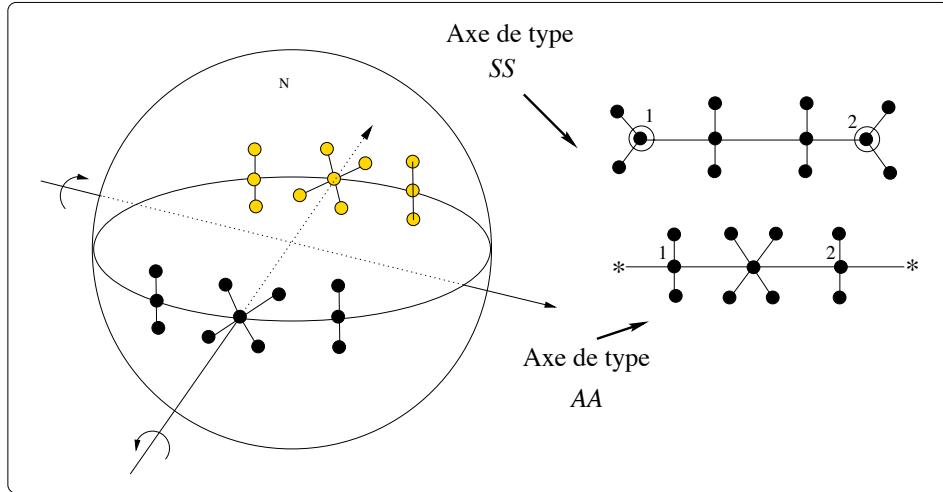
$$|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_n} \tau| = \begin{cases} |\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_n}(\tau, SA)|, & \text{si } n \text{ est impair,} \\ |\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_n}(\tau, SS \cup AA)|, & \text{si } n \text{ est pair,} \end{cases} \quad (3.81)$$

où

$$\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_n}(\tau, SS \cup AA) = \text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_n}(\tau, SS) \cup \text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_n}(\tau, AA).$$

Notons qu'une carte peut admettre simultanément une symétrie de type  $SS$  et  $AA$  tel qu'indiqué à la Figure 3.10.

Pour calculer les divers types de cartes sphériques non étiquetées ayant une symétrie antipodale, on s'inspire d'une méthode de Liskovets, qui utilise le concept de *carte quotient* (voir ([21])). Pour définir la structure quotient, on



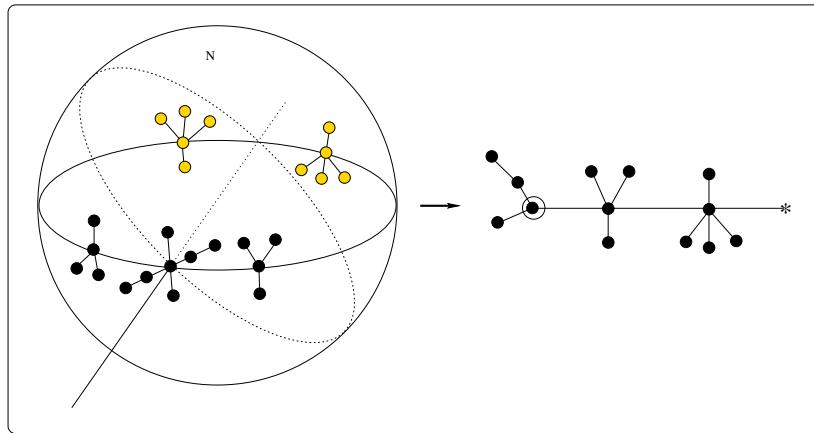
**Figure 3.10:** Carte ayant les deux symétries, de type *SS* and *AA*.

se donne une carte munie d'un axe de symétrie *orienté*. Dans le cas *SA*, cette orientation est canoniquement déterminée en prenant la convention que l'axe *entre* par le sommet intersectant l'axe et *sort* par l'arête se trouvant à l'autre extrémité. Liskovets définit le quotient  $\mathbf{m}/\tau$ , d'une carte sphérique  $\mathbf{m}$  ayant un automorphisme de rotation  $\tau$ , comme étant l'espace quotient de la sphère sous l'action de  $\tau$  et sa décomposition cellulaire induite.

Pour visualiser la carte quotient, on peut choisir une *région fondamentale* de la sphère sous  $\tau$ . Par exemple, pour obtenir la région fondamentale pour la carte représentée à la Figure 3.11, on découpe la sphère le long du cercle oblique pointillé en ne conservant que la moitié du haut. La structure se trouvant à droite dans la Figure 3.11 représente la carte quotient  $\mathbf{m}/\tau$  ainsi obtenue pour le cas *SA*. Elle consiste en un arbre plan contenant un sommet distingué et un sommet *singulier*, de degré 1, représenté par une étoile. Ces deux sommets distingués indiquent quels éléments de la carte intersectent l'axe de symétrie. Ainsi, selon les principes généraux, le relèvement de la carte quotient est uniquement déterminé.

On considère d'abord le cas de symétrie antipodale de type *SA* (voir Figure 3.11). Supposons que la carte originale admette  $n$  sommets et que la carte quotient en admette  $n'$  (en ne comptant pas le sommet-étoile). Comme on l'a vu,  $n$  doit nécessairement être un entier positif impair, et on aura

$$n = 2n' - 1. \quad (3.82)$$



**Figure 3.11:** Carte avec une symétrie antipodale et sa carte quotient.

On peut considérer la carte quotient comme étant un arbre plan non étiqueté, *planté* au sommet voisin du sommet-étoile, et muni d'un sommet distingué. Autrement dit, une  $A_L^\bullet$ -structure non étiquetée. Il faut alors se convaincre que si une carte admet plusieurs axes de symétrie de type  $SA$ , alors la structure quotient obtenue en appliquant l'opération de quotientage sera la même quel que soit l'axe de symétrie choisi. On suppose qu'il y a  $m$  sommets sur le cycle, tous équidistants. Supposons qu'une carte admette une symétrie antipodale autour d'un axe, que nous noterons  $\tau_0$ , et autour d'un autre axe, que nous noterons  $\tau_k$ , l'indice  $k$  reflétant le fait que l'axe  $\tau_k$  fait un angle de  $2\pi(k/m)$  avec l'axe  $\tau_0$ , où  $m$  désigne le nombre de sommets sur le cycle. La Figure 3.12 donne une représentation schématisée de la situation.

Si on identifie les axes  $\tau_0$  et  $\tau_k$  avec les symétries antipodales correspondantes, on obtient

$$\tau_k \circ \tau_0 = \rho_{2k},$$

ce qui signifie que l'application de  $\tau_0$ , suivie de  $\tau_k$ , donne une rotation équatoriale d'angle  $2\pi(2k/m)$ . Il s'ensuit que la carte admet également une symétrie rotationnelle d'angle  $2\pi(2k/m)$ . Il suffit alors de montrer qu'une puissance appropriée de  $\rho_{2k}$  enverra l'axe  $\tau_0$  sur l'axe  $\tau_k$ , autrement dit, il suffit de vérifier qu'il existe un entier  $\ell > 0$  tel que

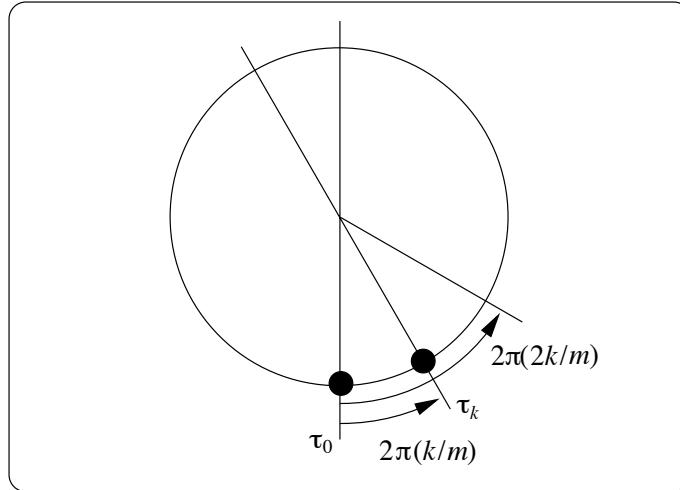
$$\rho_{2k}^\ell = \rho_k.$$

Cette relation sera satisfaite si et seulement si la congruence

$$2k\ell \equiv k \pmod{m} \tag{3.83}$$

admet une solution entière pour  $\ell$ . Or, pour que la congruence (3.83) admette une solution entière pour  $\ell$ , il suffit que la relation de divisibilité

$$m \mid k(2\ell - 1) \tag{3.84}$$



**Figure 3.12:**  $\tau_0 \circ \tau_k = \rho_{2k}$ .

soit satisfaite pour une valeur entière de  $\ell$ . Or  $m$ , qui représente le nombre de sommets sur le cycle, admet la même parité que  $n$ , le nombre total de sommets, qui, en l'occurrence, est impair. Il suffit de poser  $\ell = (m+1)/2$  dans la relation (3.84). Cette valeur de  $\ell$  sera entière puisque  $m$  est impair. Il s'ensuit que la rotation  $\rho_{2k}^{(m+1)/2}$  envoie l'axe  $\tau_0$  sur l'axe  $\tau_k$ , tel que désiré.

On en conclut qu'il y a bijection entre l'ensemble  $\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_n}(\tau, SA)$  et l'ensemble  $\widetilde{A}_{L,n}^\bullet$  des  $A_L^\bullet$ -structures non étiquetées sur  $n'$  sommets, où  $n' = (n+1)/2$ . Sachant que

$$A_L(x) = \sum_{n' \geq 1} \frac{1}{n'} \binom{2(n'-1)}{n'-1} x^{n'}, \quad (3.85)$$

tel que stipulé à l'exemple 1.4.11, et en considérant le fait que l'espèce  $A_L^\bullet$  soit asymétrique, on obtient

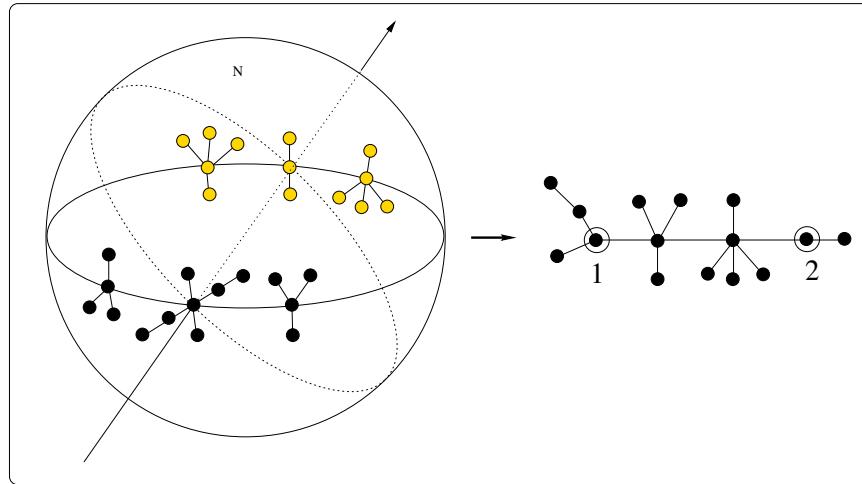
$$\begin{aligned} \widetilde{A}_L^\bullet(x) &= A_L^\bullet(x) \\ &= x \frac{d}{dx} A_L(x) \\ &= x \sum_{n' \geq 1} \binom{2(n'-1)}{n'-1} x^{n'-1} \\ &= \sum_{n' \geq 1} \binom{2(n'-1)}{n'-1} x^{n'}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit, en posant  $n' = (n + 1)/2$ , que

$$|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_n}(\tau, SA)| = |\tilde{A}_{L,n'}^\bullet| = \binom{2 \left( \frac{n+1}{2} - 1 \right)}{\frac{n+1}{2} - 1} = \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}. \quad (3.86)$$

Le cas des cartes sphériques non étiquetées à deux faces admettant une symétrie de type  $SS$  ou  $AA$ , c'est-à-dire, appartenant à l'ensemble  $\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_n}(\tau, SS \cup AA)$  est passablement plus corsé. En effet, comme on l'a déjà mentionné, une carte peut admettre simultanément une symétrie de type  $SS$  et de type  $AA$ . De plus, la structure quotient peut dépendre ou bien de l'orientation d'un axe de symétrie donné, ou bien du choix de l'axe de symétrie lui même. Nous allons d'abord étudier les deux types de structures quotients associées aux cartes admettant une symétrie antipodale de type  $SS$  ou  $AA$ .

Considérons d'abord les cartes ayant (au moins) une symétrie antipodale de type  $SS$ . La Figure 3.13 donne un exemple d'une telle carte, munie d'un axe de symétrie orienté fixé, et de la structure quotient associée. Dans ce cas, la structure quotient est un arbre plan non étiqueté muni d'un couple (ordonné) de sommets pointés distincts. Dénotons l'espèce correspondante par  $\mathcal{P}^{(\bullet,\bullet)}$ , et l'ensemble des  $\mathcal{P}^{(\bullet,\bullet)}$ -structures non étiquetées sur  $n'$  sommets par  $\tilde{\mathcal{P}}_{n'}^{(\bullet,\bullet)}$ .

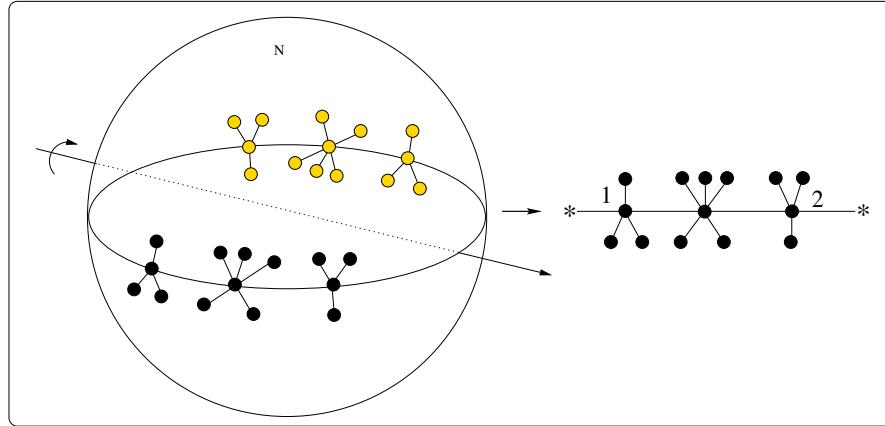


**Figure 3.13:** Carte admettant une symétrie antipodale de type  $SS$ .

Pour déterminer  $|\tilde{\mathcal{P}}_{n'}^{(\bullet,\bullet)}|$ , on choisit un arbre plan étiqueté sur l'ensemble  $[n']$ . Il y a  $(2n' - 3)!/(n' - 1)!$  possibilités (voir ([4]), exemple 3.1.17). On y distingue un couple de sommets distincts. Il y a  $n'(n' - 1)$  possibilités. Comme la structure ainsi obtenue est asymétrique, on peut diviser le tout par  $n'!$ . En

supposant que  $n' \geq 2$ , on trouve

$$|\tilde{\mathcal{P}}_{n'}^{(\bullet,\bullet)}| = \frac{n'(n'-1)(2n'-3)!}{n'!(n'-1)!} = \frac{1}{2} \binom{2n'-2}{n'-1}. \quad (3.87)$$

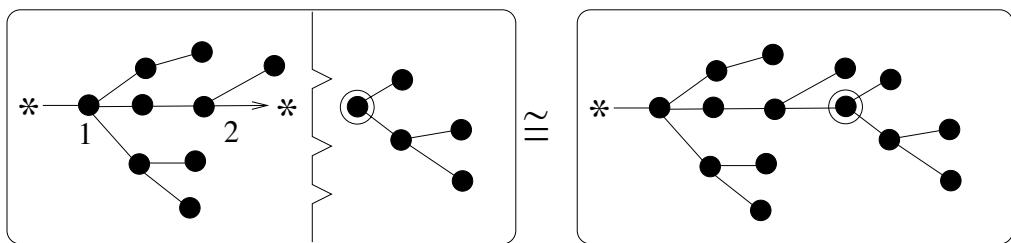


**Figure 3.14:** Carte ayant une symétrie antipodale de type  $AA$ .

Considérons maintenant les cartes admettant au moins une symétrie antipodale de type  $AA$ . La Figure 3.14 donne un exemple d'une telle carte munie, d'un axe de symétrie orienté fixé, et de la structure quotient associée. Dans ce cas, la structure quotient est un arbre plan non étiqueté, muni d'un couple (ordonné) de sommets plantés. Soit  $\mathcal{P}^{(\star,\star)}$  l'espèce correspondante et  $\tilde{\mathcal{P}}_{n''}^{(\star,\star)}$  l'ensemble des  $\mathcal{P}^{(\star,\star)}$ -structures non étiquetées sur  $n''$  sommets. Une simple observation montre que l'espèce  $\mathcal{P}^{(\star,\star)}$  satisfait l'identité combinatoire

$$(\mathcal{P}^{(\star,\star)} + \mathbf{1}) \cdot A_L = A_L^\bullet, \quad (3.88)$$

(voir la Figure 3.15), où  $\mathbf{1}$  dénote l'espèce correspondant au cas dégénéré  $\star \rightarrow \star$ , ne comportant que deux sommets étoilés.



**Figure 3.15:**  $(\mathcal{P}^{(\star,\star)} + \mathbf{1}) \cdot A_L = A_L^\bullet$ .

Comme l'espèce  $\mathcal{P}^{(\star,\star)}$  est asymétrique, on en déduit que

$$\tilde{\mathcal{P}}^{(\star,\star)}(x) + 1 = \frac{A_L^\bullet(x)}{A_L(x)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-4x}} + 1 \right). \quad (3.89)$$

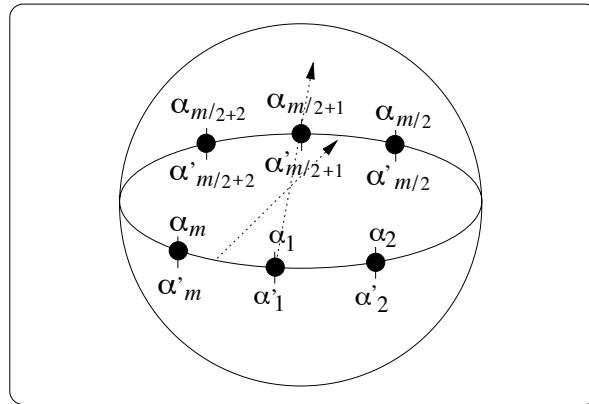
Après calculs, on obtient

$$|\tilde{\mathcal{P}}_{n''}^{(\star,\star)}| = \frac{1}{2} \binom{2n''}{n''}. \quad (3.90)$$

Le point le plus délicat de cette section consiste à démontrer le lemme suivant.

**Lemme 3.2.5** *Une carte sphérique non étiquetée à deux faces admettant une symétrie antipodale de type SS ou AA admet exactement deux axes de symétrie antipodale orientés essentiellement distincts.*

**Preuve.** La Figure 3.16 donne une représentation sphérique d'une carte plane  $\mathcal{C}$  (la face distinguée est celle contenant le pôle nord), non étiquetée à deux faces ayant  $m$  sommets sur le cycle, où  $m$  est pair. Les symboles  $\alpha_i$  et  $\alpha'_i$  représentent des  $L(A_L)$ -structures non étiquetées.



**Figure 3.16:** Représentation sphérique d'une carte plane  $\mathcal{C}$  à deux faces.

Cette carte, prise telle quelle, sans axe, sera exprimée de manière plus compacte, sous forme de mot circulaire

$$\mathcal{C} = \left( \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & \cdots & m/2 & m/2+1 & m/2+2 & \cdots & m \\ 1' & 2' & \cdots & (m/2)' & (m/2+1)' & (m/2+2)' & \cdots & m' \end{array} \right),$$

où, pour alléger la notation, on écrit simplement  $i$  et  $i'$  pour représenter  $\alpha_i$  et  $\alpha'_i$  respectivement. Une carte munie d'un axe orienté fixé sera notée sous forme

d'un couple  $(\mathcal{C}, \uparrow)$ . Si l'axe entre par un sommet et sort par le sommet qui lui est diamétralement opposé, la carte sera représentée sous la forme

$$(\mathcal{C}, \uparrow) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & \cdots & m/2 & m/2+1 & m/2+2 & \cdots & m \\ \mathbf{1}' & 2' & \cdots & (m/2)' & (m/2+1)' & (m/2+2)' & \cdots & m' \end{bmatrix},$$

où les caractères gras **1** et **1'** indiquent que l'axe entre par le sommet situé entre les structures  $\alpha_1$  et  $\alpha'_1$ . Si l'axe entre par un arête et sort par l'arête opposée, on utilisera plutôt la notation

$$(\mathcal{C}, \uparrow) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & m/2 & m/2+1 & m/2+2 & \cdots & m \\ 1' & 2' & \cdots & (m/2)' & (m/2+1)' & (m/2+2)' & \cdots & m' \end{bmatrix},$$

où l'absence de caractères gras indique que l'axe entre par le milieu de l'arête séparant les sommets incidents aux structures  $\alpha_m$  et  $\alpha_1$  (voir Figure 3.16).

Supposons que la carte  $\mathcal{C}$  admette une symétrie antipodale de type *SS* autour d'un axe intersectant le sommet situé entre  $\alpha_1$  et  $\alpha'_1$ . En vertu d'une remarque faite au début de la présente section, on peut alors considérer  $\mathcal{C}$  comme étant sphérique. L'autre extrémité de l'axe devra donc intersecter le sommet situé entre  $\alpha_{m/2+1}$  et  $\alpha'_{m/2+1}$ . Ceci implique les égalités suivantes:

$$\alpha_1 = \alpha'_1, \quad \alpha_{m/2+1} = \alpha'_{m/2+1},$$

et, pour  $i = 2, \dots, m/2$ ,

$$\alpha_i = \alpha'_{m-i+2}, \quad \alpha'_i = \alpha_{m-i+2},$$

ainsi,  $\mathcal{C}$  s'écrit alors sous la forme

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m/2 & m/2+1 & (m/2)' & \cdots & 2' \\ 1 & 2' & \cdots & (m/2)' & m/2+1 & m/2 & \cdots & 2 \end{pmatrix}.$$

Selon l'orientation qu'on donne à cet axe de symétrie, on obtient deux couples  $(\mathcal{C}, \uparrow_1)$  et  $(\mathcal{C}, \uparrow_2)$ . Si l'axe entre par le sommet situé entre  $\alpha_1$  et  $\alpha'_1$ , on obtient

$$(\mathcal{C}, \uparrow_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & m/2 & m/2+1 & (m/2)' & \cdots & 2' \\ 1 & 2' & \cdots & (m/2)' & m/2+1 & m/2 & \cdots & 2 \end{bmatrix}.$$

tandis que s'il en sort, on obtiendra

$$(\mathcal{C}, \uparrow_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{m/2+1} & (m/2)' & \cdots & 2' & 1 & 2 & \cdots & m/2 \\ \mathbf{m/2+1} & m/2 & \cdots & 2 & 1 & 2' & \cdots & (m/2)' \end{bmatrix}.$$

Supposons maintenant que la carte  $\mathcal{C}$  admette une symétrie antipodale de type *AA* passant par l'arête située entre les structure  $\alpha_m$  et  $\alpha_1$ . Pour  $i = 1, \dots, m/2$ , cela implique les égalités

$$\alpha_i = \alpha'_{m-i+1} \text{ et } \alpha'_i = \alpha_{m-i+1},$$

de sorte que la carte  $\mathcal{C}$  s'écrit sous la forme

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & m/2 & (m/2)' & \cdots & 2' & 1' \\ 1' & \cdots & (m/2)' & m/2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si l'orientation qu'on donne à l'axe est telle qu'il entre par l'arête située entre  $\alpha_1$  et  $\alpha'_2$ , on aura

$$(\mathcal{C}, \uparrow_1) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & m/2 & (m/2)' & \cdots & 2' & 1' \\ 1' & \cdots & (m/2)' & m/2 & \cdots & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

tandis que s'il en sort, on aura

$$(\mathcal{C}, \uparrow_2) = \begin{bmatrix} (m/2)' & \cdots & 2' & 1' & 1 & \cdots & m/2 \\ m/2 & \cdots & 2 & 1 & 1' & \cdots & (m/2)' \end{bmatrix},$$

Nous allons décrire un algorithme qu'on désigne sous le nom de **AlgoAA** qui, à une carte  $(\mathcal{C}, \uparrow_1)$ , munie d'un axe de symétrie orienté de type *AA*, associe la même carte  $(\mathcal{C}, \uparrow_2)$ , munie d'un axe de symétrie orienté de type *AA* ou *SS*, et telle que  $(\mathcal{C}, \uparrow_1) \neq (\mathcal{C}, \uparrow_2)$ . Auparavant, nous allons d'abord nous doter d'un opérateur  $\Psi_k$  agissant sur  $(\mathcal{C}, \uparrow_1)$  de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \Psi_k(\mathcal{C}, \uparrow_1) &= \Psi_k \left( \begin{bmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & m/2 & (m/2)' & \cdots & 2' & 1' \\ 1' & \cdots & k' & (k+1)' & \cdots & (m/2)' & m/2 & \cdots & 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} k+1 & \cdots & m/2 & (m/2)' & \cdots & 2' & 1' & 1 & \cdots & k \\ (k+1)' & \cdots & (m/2)' & m/2 & \cdots & 2 & 1 & 1' & \cdots & k' \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

qui consiste à placer le facteur gauche de longueur  $k$  à la fin du mot. D'une façon plus géométrique, cette opération consiste à déplacer l'axe de symétrie orienté d'un angle  $2\pi(k/m)$ . Le pseudocode de l'algorithme **AlgoAA** s'énonce comme suit:

### AlgoAA

**Entrée:** Une carte

$$(\mathcal{C}, \uparrow_1) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & m/2 & (m/2)' & \cdots & 2' \\ 1' & \cdots & (m/2)' & m/2 & \cdots & 2 \end{bmatrix},$$

munie d'un axe de symétrie antipodale orienté de type *AA*.

**Sortie:** La même carte  $(\mathcal{C}, \uparrow_2)$ , munie d'un axe de symétrie antipodale orienté de type *AA* ou *SS*, et telle que  $(\mathcal{C}, \uparrow_2) \neq (\mathcal{C}, \uparrow_1)$ .

### Début

$p :=$  puissance de 2 dans la factorisation de  $m$ :  $m = 2^p q$ , où  $q$  est un entier impair;

```

 $s := 0;$ 
fini:=faux;
Tant que  $s < p$  et fini=faux Faire
   $(\mathcal{C}, \uparrow_2) := \Psi_{m/2^{s+1}}(\mathcal{C}, \uparrow_1);$ 
  Si  $(\mathcal{C}, \uparrow_2) \neq (\mathcal{C}, \uparrow_1)$ 
    fini:=vrai;
  Sinon
     $s := s + 1;$ 
  Fin Si;
Fin Tant que;
Si  $s < p$ 
  Retourner  $(\mathcal{C}, \uparrow_2);$ 
Sinon
   $(\mathcal{C}, \uparrow_2) := \Psi_{(m/2^p-1)/2}(\mathcal{C}, \uparrow_1)$  avec la première colonne en caractères gras;
  Retourner  $(\mathcal{C}, \uparrow_2);$ 
Fin Si;
Fin AlgoAA.

```

Nous illustrons maintenant cet algorithme au moyen d'un exemple, où il y a  $m = 12$  sommets sur le cycle. Notre point de départ est

$$(\mathcal{C}, \uparrow_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6' & 5' & 4' & 3' & 2' & 1' \\ 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

On pose alors  $p := 2$  (car  $12 = 2^2 \cdot 3$ ),  $s := 0$  et fini:=faux. À notre première entrée dans la boucle **Tant que**, on pose

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}, \uparrow_2) &:= \Psi_{m/2^{s+1}}(\mathcal{C}, \uparrow_1) = \Psi_6(\mathcal{C}, \uparrow_1) \\ &= \begin{bmatrix} 6' & 5' & 4' & 3' & 2' & 1' & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si  $(\mathcal{C}, \uparrow_2) \neq (\mathcal{C}, \uparrow_1)$ , alors on a terminé et  $(\mathcal{C}, \uparrow_2)$  est la carte  $\mathcal{C}$  munie d'un axe d'orientation opposée à celle de l'axe de  $(\mathcal{C}, \uparrow_1)$ . Si  $(\mathcal{C}, \uparrow_2) = (\mathcal{C}, \uparrow_1)$ , on pose  $s := s + 1$  et, en prenant compte des égalités que cela implique, on en conclut que  $(\mathcal{C}, \uparrow_1)$  était en fait de la forme

$$(\mathcal{C}, \uparrow_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3' & 2' & 1' & 1 & 2 & 3 & 3' & 2' & 1' \\ 1' & 2' & 3' & 3 & 2 & 1 & 1' & 2' & 3' & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Du point de vue géométrique, le fait que  $(\mathcal{C}, \uparrow_2) = (\mathcal{C}, \uparrow_1)$  implique qu'il y a une symétrie rotationnelle d'angle  $\pi$ . En composant cette symétrie avec la symétrie antipodale de départ, on en conclut l'existence d'une seconde symétrie antipodale faisant un angle de  $\pi/2$  avec la première.

À notre seconde entrée dans la boucle **Tant que**, on pose

$$(\mathcal{C}, \uparrow_2) := \Psi_{m/2^{s+1}}(\mathcal{C}, \uparrow_1) = \Psi_3(\mathcal{C}, \uparrow_1)$$

$$= \begin{bmatrix} 3' & 2' & 1' & 1 & 2 & 3 & 3' & 2' & 1' & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1' & 2' & 3' & 3 & 2 & 1 & 1' & 2' & 3' \end{bmatrix}.$$

Si  $(\mathcal{C}, \uparrow_2) \neq (\mathcal{C}, \uparrow_1)$ , alors on a terminé et  $(\mathcal{C}, \uparrow_2)$  est la carte  $\mathcal{C}$  munie d'un axe orienté faisant un angle de  $\pi/2$  avec celui de  $(\mathcal{C}, \uparrow_1)$ . Si  $(\mathcal{C}, \uparrow_2) = (\mathcal{C}, \uparrow_1)$ , on pose  $s := s + 1 = 2$  et, en prenant compte des égalités que cela implique, on en conclut que  $(\mathcal{C}, \uparrow_1)$  était en fait de la forme

$$(\mathcal{C}, \uparrow_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Du point de vue géométrique, le fait que  $(\mathcal{C}, \uparrow_2) = (\mathcal{C}, \uparrow_1)$  implique qu'il y a une symétrie rotationnelle d'angle  $\pi/2$ . En composant cette symétrie avec la symétrie antipodale de départ, on en conclut l'existence d'une autre symétrie antipodale, cette fois-ci, faisant un angle de  $\pi/4$  avec la première. On remarque que l'axe de cette dernière symétrie doit nécessairement être de type *SS* puisqu'on a épuisé toutes les puissances de 2 dans  $m$ .

À ce stade-ci, il n'est plus possible de retourner dans la boucle **Tant que** car  $s = 2 = p$ . On pose alors

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}, \uparrow_2) &:= \Psi_{(m/2^p-1)/2}(\mathcal{C}, \uparrow_1) = \Psi_1(\mathcal{C}, \uparrow_1) \text{ (avec première colonne en gras)} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On a nécessairement  $(\mathcal{C}, \uparrow_2) \neq (\mathcal{C}, \uparrow_1)$  car l'axe de symétrie de  $(\mathcal{C}, \uparrow_1)$  est de type *AA*, tandis que celui de  $(\mathcal{C}, \uparrow_2)$  est de type *SS*.

Si notre point de départ est une carte munie d'un axe orienté de symétrie antipodale de type *SS*, on utilisera l'algorithme suivant, appelé **AlgoSS**:

### AlgoSS

**Entrée:** Une carte

$$(\mathcal{C}, \uparrow_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & m/2 & m/2+1 & (m/2)' & \cdots & 2' \\ 1 & 2' & \cdots & (m/2)' & m/2+1 & (m/2)' & \cdots & 2 \end{bmatrix}.$$

munie d'un axe de symétrie antipodale orienté de type *SS*.

**Sortie:** La même carte  $(\mathcal{C}, \uparrow_2)$ , munie d'un axe de symétrie antipodale orienté de type *AA* ou *SS* telle que  $(\mathcal{C}, \uparrow_2) \neq (\mathcal{C}, \uparrow_1)$ .

### Début

$p :=$  puissance de 2 dans la factorisation de  $m$ :  $m = 2^p q$ , où  $q$  est un entier impair;

$s := 0$ ;

$\text{fini} := \text{faux}$ ;

```

Tant que  $s < p$  et fini=faux Faire
   $(\mathcal{C}, \uparrow_2) := \Psi_{m/2^{s+1}}(\mathcal{C}, \uparrow_1);$ 
  Si  $(\mathcal{C}, \uparrow_2) \neq (\mathcal{C}, \uparrow_1)$ 
    fini:=vrai;
  Sinon
     $s := s + 1;$ 
    Fin Si;
  Fin Tant que;
  Si  $s < p$ 
    Retourner  $(\mathcal{C}, \uparrow_2);$ 
  Sinon
     $(\mathcal{C}, \uparrow_2) := \Psi_{(m/2^{p+1})/2}(\mathcal{C}, \uparrow_1)$  avec la première colonne sans caractère gras;
    Retourner  $(\mathcal{C}, \uparrow_2);$ 
  Fin Si;
Fin AlgoSS.

```

Notons que si on donne en entrée la carte

$$(\mathcal{C}, \uparrow_1) = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

à l'algorithme **AlgoSS**, celui-ci nous donnera en sortie la carte

$$(\mathcal{C}, \uparrow_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

de sorte que dans ce cas, les deux algorithmes nous fournissent la même paire de cartes. Plus généralement, on vérifie aisément que si l'algorithme **AlgoAA** prend une carte  $(\mathcal{C}, \uparrow_1)$  avec symétrie orientée de type *AA* et sort une carte  $(\mathcal{C}, \uparrow_2)$  avec symétrie orientée de type *SS*, alors si on fournit en entrée la carte  $(\mathcal{C}, \uparrow_2)$  avec axe de type *SS* à l'algorithme **AlgoSS**, la carte retournée sera la carte  $(\mathcal{C}, \uparrow_1)$ .

Il faut maintenant vérifier qu'une carte ayant un symétrie antipodale n'admet pas d'autre axe de symétrie orienté que ceux fourni par **AlgoAA** ou **AlgoSS**. Nous allons démontrer ceci en observant les cartes  $(\mathcal{C}, \uparrow_1)$  et  $(\mathcal{C}, \uparrow_2)$  obtenues à partir de l'algorithme **AlgoAA**, le raisonnement étant parfaitement similaire en étudiant **AlgoSS**. Observons que la valeur de  $s$  obtenue à la sortie de **AlgoAA** indique que le groupe d'automorphismes de la carte admet un sous-groupe de rotation, engendré par une rotation d'angle  $2\pi/2^s$ . On considère alors la carte quotient

$$\mathcal{C}' = \frac{\mathcal{C}}{\mathbb{Z}_{2^s}}.$$

Dans notre exemple, si après application de **AlgoAA**, on a  $s = 1$ , la carte quotient associée à

$$(\mathcal{C}, \uparrow_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3' & 2' & 1' & 1 & 2 & 3 & 3' & 2' & 1' \\ 1' & 2' & 3' & 3 & 2 & 1 & 1' & 2' & 3' & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

sera donnée par

$$\mathcal{C}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3' & 2' & 1' \\ 1' & 2' & 3' & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

possédant les deux axes de symétrie orientés *distincts* de type *AA* suivants:

$$(\mathcal{C}', \uparrow_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3' & 2' & 1' \\ 1' & 2' & 3' & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } (\mathcal{C}', \uparrow_2) = \begin{bmatrix} 3' & 2' & 1' & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1' & 2' & 3' \end{bmatrix}.$$

Si, après application de **AlgoAA**, on a  $s = 2$ , la carte quotient associée à

$$(\mathcal{C}, \uparrow_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

sera donnée par

$$\mathcal{C}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque ici, que le nombre de sommets sur le cycle est impair. Le seul axe de symétrie antipodale étant celui intersectant le sommet situé entre les deux  $\alpha_2$  et l'arête opposée. Le problème se ramène alors à étudier les axes de symétrie antipodale orientés dans les cartes quotients. Il y a deux cas à considérer selon que  $s = p$  ou  $s < p$ . Si  $s = p$ , la carte quotient admettra un nombre impair de sommets. Dans ce cas, on sait déjà qu'une telle carte n'admet à rotation près, essentiellement qu'un axe de symétrie.

Si  $s < p$ , alors la carte quotient admettra un nombre pair de sommets. On peut alors se ramener au cas où les deux axes de symétrie antipodale orientés

$$(\mathcal{C}', \uparrow_1) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & m/2 & (m/2)' & \dots & 2' & 1' \\ 1' & \dots & (m/2)' & m/2 & \dots & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$(\mathcal{C}', \uparrow_2) = \begin{bmatrix} (m/2)' & \dots & 2' & 1' & 1 & \dots & m/2 \\ m/2 & \dots & 2 & 1 & 1' & \dots & (m/2)' \end{bmatrix}$$

sont distincts. Ceci implique que la carte n'admet pas d'automorphisme rotationnel d'angle  $\pi$ . Supposons que la carte admette un axe de symétrie antipodale orienté  $\tau_k$  faisant un angle de  $2\pi(k/m)$  avec l'axe orienté de  $(\mathcal{C}', \uparrow_1)$ . En composant ces deux symétries antipodales, on obtient une symétrie rotationnelle d'angle  $2\pi(2k/m)$ . Désignons par  $\rho_{2k}$  cette rotation. On note que  $\omega$ , l'ordre de

$\rho_{2k}$ , ne peut pas être pair car sinon  $\rho_{2k}^{\omega/2}$  constituerait un automorphisme rotationnel d'angle  $\pi$ , ce qui est contraire à notre hypothèse. Supposons que  $m$ , le nombre de sommets sur le cycle se factorise sous la forme  $m = 2^p q$ . Remarquons que l'ordre  $\omega$  de  $\rho_{2k}$  est donné par

$$\omega = \frac{m}{\text{pgcd}(2k, m)}.$$

Le fait que ce nombre soit impair implique que  $k$  se factorise sous la forme  $k = 2^r q'$ , où  $r \geq p - 1$  et  $q'$  est impair. Il faut vérifier qu'alors la carte admet un automorphisme rotationnel envoyant, ou bien l'axe orienté de  $(C', \uparrow_1)$  sur l'axe  $\tau_k$ , ou bien l'axe orienté de  $(C', \uparrow_2)$  sur  $\tau_k$ .

Considérons le cas où  $r = p - 1$ . Il y aura une symétrie rotationnelle envoyant l'axe de  $(C', \uparrow_2)$  sur  $\tau_k$  s'il existe une solution entière pour  $\ell$  dans la congruence suivante:

$$m/2 + 2k\ell \equiv k \pmod{m},$$

ou, de façon équivalente, dans la congruence

$$m/2 + k(2\ell - 1) \equiv 0 \pmod{m}.$$

Ceci sera réalisé si et seulement si il existe un entier  $\ell$  tel que  $m$  divise  $m/2 + k(2\ell - 1)$ . En tenant compte des hypothèses faites sur la factorisation de  $m$  et  $k$ , il faut trouver  $\ell$  entier tel que

$$2^p q \mid 2^{p-1} q + 2^{p-1} q'(2\ell - 1). \quad (3.91)$$

Il suffit de prendre  $\ell = (q+1)/2$ . Dans ce cas, on aura  $2\ell - 1 = q$ , et la relation (3.91) deviendra

$$2^p q \mid 2^{p-1} (q' + 1) q,$$

cette dernière étant manifestement satisfaite puisque  $q' + 1$  est pair.

Si  $r > p - 1$ , alors dans ce cas, il y aura un automorphisme rotationnel envoyant l'axe de  $(C', \uparrow_1)$  sur  $\tau_k$ . Il suffit de montrer cette fois que la congruence

$$2k\ell \equiv k \pmod{m}$$

admet une solution entière pour  $\ell$ . Par des calculs similaires, ceci revient à montrer qu'il existe  $\ell$  entier tel que

$$2^p q \mid 2^r q'(2\ell - 1). \quad (3.92)$$

Cette dernière relation sera satisfaite si on prend  $\ell = (q+1)/2$  car on a  $2^p \mid 2^r$  car  $r > p - 1$  et manifestement  $q \mid q'q$ . remarquons que  $\ell$  est entier puisque  $q$  est supposé impair. On en conclut donc que toute carte non étiquetée à deux faces admettant une symétrie antipodale de type *AA* ou *SS* admet exactement deux axes de symétrie antipodale orientés essentiellement distincts, ce qui achève la démonstration du lemme 3.2.5.  $\square$

**Corollaire 3.2.6** *Le nombre  $|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_n}(\tau, SS \cup AA)|$  de cartes sphériques non étiquetées à deux faces sur  $n$  sommets et ayant au moins une symétrie antipodale de type AA ou SS est donné par*

$$|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_n}(\tau, SS \cup AA)| = \frac{1}{2} \binom{n}{n/2}. \quad (3.93)$$

**Preuve.** Nous avons vu qu'il y a bijection entre l'ensemble des cartes sphériques non étiquetées à deux faces sur  $n$  sommets et munies d'un axe de symétrie orienté fixé de type SS et l'ensemble  $\tilde{\mathcal{P}}_{n'}^{(\bullet,\bullet)}$ , où  $n' = (n+2)/2$ . En exprimant  $n'$  en fonction de  $n$  dans l'équation (3.87), on obtient également

$$|\tilde{\mathcal{P}}_{(n+2)/2}^{(\bullet,\bullet)}| = \frac{1}{2} \binom{n}{n/2}. \quad (3.94)$$

Par ailleurs, il y a également bijection entre les cartes sphériques non étiquetées à deux faces sur  $n$  sommets et munies d'un axe de symétrie orienté fixé de type AA et l'ensemble  $\tilde{\mathcal{P}}_{n''}^{(\star,\star)}$  où  $n'' = n/2$ . En exprimant  $n''$  en fonction de  $n$  dans l'équation (3.90), on obtient

$$|\tilde{\mathcal{P}}_{n/2}^{(\star,\star)}| = \frac{1}{2} \binom{n}{n/2}. \quad (3.95)$$

En vertu du Lemme 3.2.5, chaque carte admet exactement deux axes de symétrie antipodale orientés. Il s'ensuit que

$$|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_n}(\tau, SS \cup AA)| = \frac{1}{2} (|\tilde{\mathcal{P}}_{(n+2)/2}^{(\bullet,\bullet)}| + |\tilde{\mathcal{P}}_{n/2}^{(\star,\star)}|) = \frac{1}{2} \binom{n}{n/2}. \quad (3.96)$$

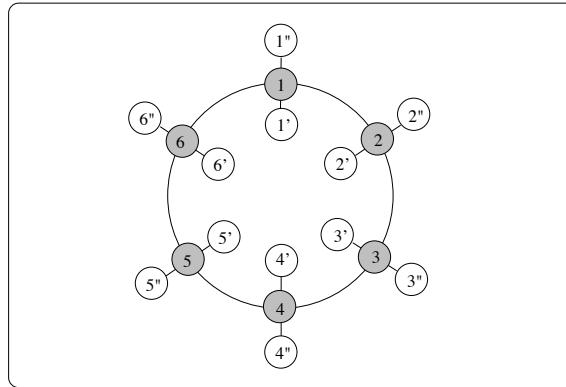
□

La prochaine proposition est obtenue en appliquant les équations (3.79), (3.80), (3.81), (3.86), (3.93) et (3.15).

**Proposition 3.2.7** *Le nombre  $|\widetilde{\mathcal{M}}_n|$  de cartes sphériques non étiquetées à deux faces ayant  $n$  sommets est donnée par*

$$|\widetilde{\mathcal{M}}_n| = \frac{1}{4n} \sum_{d|n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) \left(2^{2d} - \binom{2d}{d}\right) + \begin{cases} \frac{1}{2} \binom{n-1}{(n-1)/2}, & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{1}{4} \binom{n}{n/2}, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.97)$$

□



**Figure 3.17:** Carte à deux faces générique.

### 3.2.3 Cartes sphériques non étiquetées à deux faces selon le nombre de sommets: deuxième méthode

Nous allons d'abord considérer des structures du type indiqué par la Figure 3.17. Il faut imaginer cette structure comme étant une carte sphérique. Une telle structure est construite sur deux sortes de sommets: les sommets de sorte  $X$ , qui sont disposés sur le cycle, et les sommets de sorte  $Y$ , qui sont disposés de part et d'autre du cycle. Pour préciser de quelle espèce de structures il s'agit, la première étape consiste à déterminer son groupe d'automorphismes. Pour ce faire, trouvons ses générateurs. Tout d'abord, il y a la rotation  $\rho$ , décrite par la Figure 3.18, qui induit le réétiquetage

$$\rho_X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

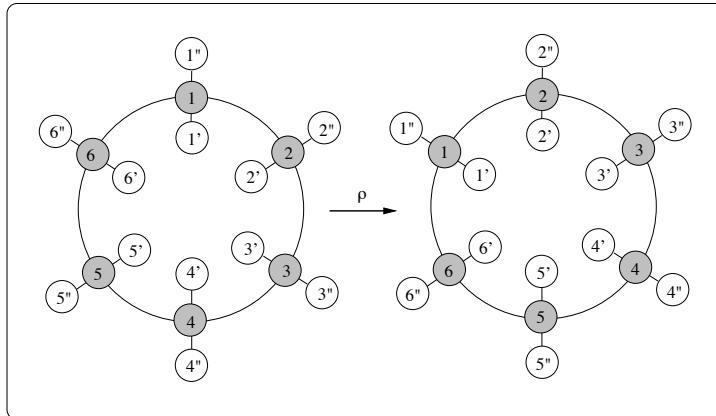
des éléments de sorte  $X$  et le réétiquetage

$$\rho_Y = \begin{pmatrix} 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 1'' & 2'' & 3'' & 4'' & 5'' & 6'' \\ 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 1' & 2'' & 3'' & 4'' & 5'' & 6'' & 1'' \end{pmatrix}$$

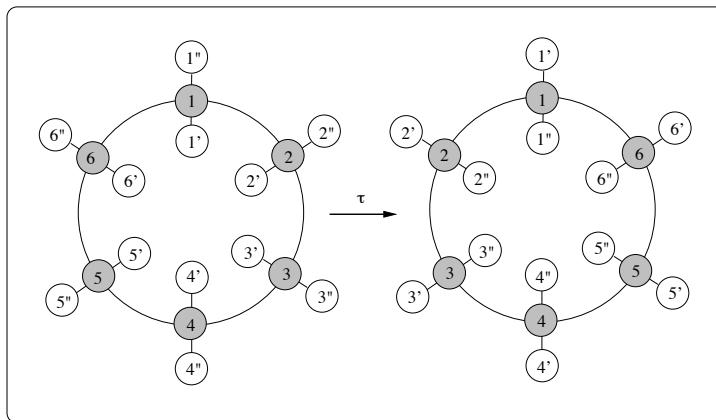
des éléments de sorte  $Y$ .

Le deuxième générateur est l'involution antipodale  $\tau$ . Les parties de gauche et de droite de la Figure 3.19 nous donnent une vue de cette structure avant et après l'application de l'involution antipodale qui consiste en une rotation équatoriale d'ordre 2. Cette transformation induit le réétiquetage

$$\tau_X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$



**Figure 3.18:** Action de la rotation  $\rho$ .



**Figure 3.19:** Action de l'involution antipodale  $\tau$ .

des sommets de sorte  $X$  et le réétiquetage

$$\tau_Y = \begin{pmatrix} 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 1'' & 2'' & 3'' & 4'' & 5'' & 6'' \\ 1'' & 6'' & 5'' & 4'' & 3'' & 2'' & 1' & 6' & 5' & 4' & 3' & 2' \end{pmatrix}$$

des sommets de sorte  $Y$ . On vérifie aisément que

$$(\rho_X)^6 = Id_X, \tau_X^2 = Id_X, \rho_X \tau_X = \tau_X \rho_X^{-1}$$

et

$$(\rho_Y)^6 = Id_Y, \tau_Y^2 = Id_Y, \rho_Y \tau_Y = \tau_Y \rho_Y^{-1}$$

Ceci montre que le groupe d'automorphismes de la structure décrite par la Figure 3.17 est isomorphe au groupe diédral  $D_6$ , défini par

$$D_6 = \langle \rho, \tau; \rho^6 = 1, \tau^2 = 1, \rho\tau = \tau\rho^{-1} \rangle.$$

La prochaine étape consiste à déterminer le polynôme indicateur de cycles de l'action simultanée de  $D_n$ , en général, sur les deux ensembles de sommets de sorte  $X$  et  $Y$  comportant respectivement  $n$  et  $2n$  éléments, pour un  $n \geq 1$  fixé. Ce polynôme est noté par  $P_{D_n:[n]_X;[2n]_Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  et est défini par

$$P_{D_n:[n]_X;[2n]_Y}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{1}{|D_n|} \sum_{\pi \in D_n} x_1^{(\pi_X)_1} x_2^{(\pi_X)_2} \cdots y_1^{(\pi_Y)_1} y_2^{(\pi_Y)_2} \cdots \quad (3.98)$$

où  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont les deux jeux de variables formelles

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \text{ et } \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots),$$

les expressions  $(\pi_X)_i$  et  $(\pi_Y)_i$  désignant le nombre de cycles de longueur  $i$  de l'action de  $\pi$  sur les sommets de sorte  $X$  et  $Y$  respectivement. L'exemple courant ( $n = 6$ ) nous donne

$$P_{D_6:[6]_X;[12]_Y}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{1}{12} \left( \underbrace{x_1^6 y_1^{12} + x_2^3 y_2^6 + 2x_3^2 y_3^4 + 2x_6 y_6^2}_{\text{partie cyclique}} + \underbrace{3y_2^6(x_1^2 x_2^2 + x_2^3)}_{\text{partie antipodale}} \right).$$

Pour obtenir le résultat général, on considère d'abord la partie cyclique de l'action de  $D_n$ : celle correspondant aux rotations  $Id, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}$ . Le polynôme indicateur de cycles de l'action de ces éléments sur les sommets de sorte  $X$  n'est autre que celui de l'action usuelle du groupe cyclique  $C_n$  sur le polygone à  $n$  sommets, qui est donné par

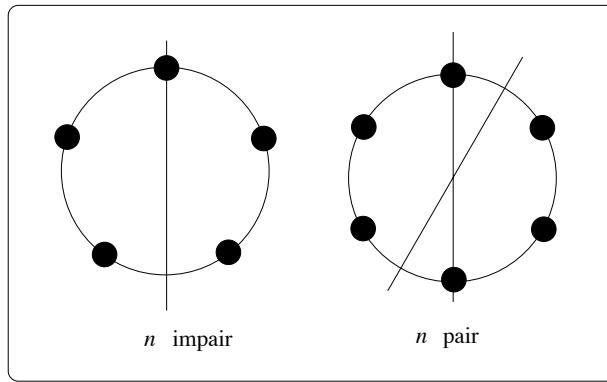
$$P_{C_n:[n]}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{\sigma \in C_n} x_1^{(\sigma_X)_1} x_2^{(\sigma_X)_2} \cdots = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) x_d^{n/d}.$$

Chaque sommet de sorte  $X$  est attaché à deux sommets de sorte  $Y$ . Il s'ensuit que chaque cycle de longueur  $d$  de l'action d'une certaine rotation sur les sommets de sorte  $X$  sera accompagné de deux cycles de longueur  $d$  de l'action de cette même rotation sur les sommets de sorte  $Y$ . Ceci correspond à la substitution  $x_d^k := x_d^k y_d^{2k}$  dans  $P_{C_n:[n]}(\mathbf{x})$ . La partie cyclique du polynôme indicateur de cycles de l'action de  $D_n$  est ainsi donnée par

$$\frac{1}{2} P_{C_n:[n]}(\mathbf{x}) \Big|_{x_i := x_i y_i^2} = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \phi(d) x_d^{n/d} y_d^{2n/d}$$

La partie antipodale de  $D_n$  correspond aux éléments  $\tau, \rho\tau, \dots, \rho^{n-1}\tau$ . Ceux-ci agissent par rotation équatoriale d'ordre 2. Examinons leur action sur les sommets de sorte  $X$ .

Si  $n$  est impair, les  $n$  rotations équatoriales comportent chacune un point fixe et  $(n-1)/2$  cycles de longueur 2. Si  $n$  est pair, il y a deux types possibles d'axes de symétrie, comme l'indique la Figure 3.20. Les  $n/2$  rotations



**Figure 3.20:** Axes de symétrie selon la parité du nombre de sommets sur le cycle.

équatoriales associées aux axes du premier type comportent chacune deux point fixes et  $(n - 2)/2$  cycles de longueur 2, tandis que les  $n/2$  rotations équatoriales associées aux axes du deuxième type comportent chacunes  $n/2$  cycles de longueur 2.

Pour les sommets de sorte  $Y$ , on remarque que, peu importe la parité de  $n$ , il n'y aura jamais de point fixe, car l'action d'une rotation équatoriale quelconque a pour effet d'échanger deux à deux les sommets internes et externes de sorte  $Y$ . Comme ces rotations sont involutives, on aura toujours  $n$  cycles de longueur deux. Pour  $n$  impair, la partie antipodale du polynôme indicateur de cycles de l'action de  $D_n$  est donc donnée par

$$\frac{1}{2n}(nx_1x_2^{(n-1)/2}y_2^n) = \frac{1}{2}x_1x_2^{(n-1)/2}y_2^n.$$

Si  $n$  est pair, elle est donnée par

$$\frac{1}{2n}((n/2)x_1^2x_2^{(n-2)/2}y_2^n + (n/2)x_2^{n/2}y_2^n) = \frac{1}{4}(x_1^2x_2^{(n-2)/2} + x_2^{n/2})y_2^n.$$

Le polynôme indicateur de cycles de l'action de  $D_n$  sur les deux ensembles de sommets est obtenu en additionnant les parties cyclique et antipodale:

$$\begin{aligned} P_{D_n:[n]_X;[2n]_Y}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \phi(d) x_d^{n/d} y_d^{2n/d} \\ &+ \frac{1}{2} y_2^n \begin{cases} x_1x_2^{(n-1)/2}, & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{1}{2}(x_1^2x_2^{(n-2)/2} + x_2^{n/2}), & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

On peut voir les structures ci-haut décrites comme faisant partie de l'espèce  $(XY^2)^n$  quotientée par la relation d'équivalence suivante: deux structures  $s$  et  $t$

sont identifiées s'il existe un élément  $\pi$  de  $D_n$  tel que l'action de  $\pi$  sur  $s$  donne  $t$ . Autrement dit, si  $s$  et  $t$  sont dans la même orbite sous l'action de  $D_n$ . Désignons par  $F_n(X, Y)$  l'espèce correspondante. On écrit alors

$$F_n(X, Y) = \frac{(XY^2)^n}{D_n}.$$

On peut également voir une  $F_n(X, Y)$ -structure comme une classe de l'espèce  $C_n(XY^2)$  quotientée par la relation d'équivalence suivante: deux  $C_n(XY^2)$ -structures sont identifiées s'il existe une involution antipodale qui envoie l'une sur l'autre. On peut alors écrire  $F_n(X, Y)$  comme étant l'espèce quotient

$$F_n(X, Y) = \frac{C_n(XY^2)}{\mathbf{Z}_2}.$$

Pour un  $n$  fixé,  $F_n(X, Y)$  est *moléculaire*, c'est-à-dire qu'elle n'admet qu'un seul type d'isomorphie. Dans ce cas spécial, le calcul de la série indicatrice des cycles de l'espèce

$$F(X, Y) = \sum_{n \geq 1} F_n(X, Y)$$

est particulièrement simple. Il suffit de sommer les polynômes indicateurs de cycles. Après calculs, on obtient alors

$$Z_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{\phi(k)}{k} \log \left( \frac{1}{1 - x_k y_k^2} \right) + \frac{2x_1 y_2 + x_1^2 y_2^2 + x_2 y_2^2}{4(1 - x_2 y_2^2)}.$$

On utilise alors la Proposition 1.7.6, avec  $G(X, Y) = X$  et  $H(X, Y) = L(A_L(X))$ , de sorte qu'après cette substitution, l'espèce  $F$  deviendra à une sorte et la série génératrice des types d'isomorphie de cartes sphériques à deux faces est alors obtenue en substituant  $x^k$  à  $x_k$  et  $1 + L^+(A_L(x^k)) = L(A_L(x^k))$  à  $y_k$  dans la série  $Z_{F(X, Y)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Après calculs, on obtient

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{\phi(k)}{k} \log \left( \frac{1}{1 - x^k L^2(A_L(x^k))} \right) + \frac{1}{2} \frac{A_L(x^2)/x}{1 - A_L(x^2)/x} \\ &= \frac{1}{2} \widetilde{\mathcal{M}}(x) + \frac{1}{2} \frac{A_L(x^2)/x}{1 - A_L(x^2)/x}. \end{aligned} \tag{3.99}$$

Sachant que

$$A_L(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4x}), \tag{3.100}$$

on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{A_L(x^2)/x}{1 - A_L(x^2)/x} = \frac{1}{4} \left( -1 + \frac{1 + 2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} \right). \tag{3.101}$$

Le développement en série de cette dernière expression est aisé. En vertu de l'équation (3.99), on obtient, pour  $n \geq 1$ ,

$$|\widetilde{\mathcal{M}}_n| = \frac{1}{2} |\widetilde{\mathcal{M}}_n| + \begin{cases} \frac{1}{2} \binom{n-1}{(n-1)/2}, & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{1}{4} \binom{n}{n/2}, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.102)$$

ce qui correspond précisément à l'énoncé de la Proposition 3.2.7.

### 3.2.4 Cartes sphériques non étiquetées à deux faces selon la distribution des degrés des sommets.

Soit  $\widetilde{\mathcal{M}}_d$  l'ensemble des cartes sphériques non étiquetées à deux faces ayant  $d = (d_1, d_2, \dots)$  comme distribution des degrés des sommets. Supposons que  $d$  satisfasse  $\|d\| = 2|d|$ . Comme on l'a mentionné plus tôt, les cartes *planes* à deux faces ayant une symétrie antipodale peuvent être identifiées aux cartes *sphériques* correspondantes. Ainsi, en vertu de l'équation (3.74), on a

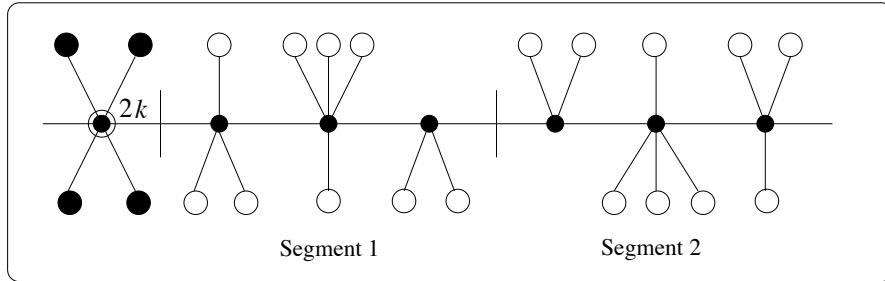
$$|\widetilde{\mathcal{M}}_d| = \frac{1}{2} (|\widetilde{\mathcal{M}}_d| + |\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_d} \tau|). \quad (3.103)$$

La tâche principale est de déterminer  $|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_d} \tau|$ , le nombre de cartes sphériques non étiquetées à deux faces ayant  $d$  comme distribution des degrés des sommets et ayant une symétrie antipodale. On se donne d'abord une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une telle carte.

**Lemme 3.2.8** *Supposons que  $d = (d_1, d_2, \dots)$  satisfasse  $\|d\| = 2|d|$ , alors il existe une carte sphérique non étiquetée à deux faces ayant  $d$  comme distribution des degrés des sommets et ayant une symétrie antipodale si et seulement si*

1. *le vecteur  $d$  admet au plus deux composantes impaires;*
2. *les composantes impaires de  $d$  sont d'indice pair.*

**Preuve:** La nécessité est évidente puisqu'une involution antipodale fixe 0, 1 ou 2 sommets. Pour la suffisance, on traite le cas où  $d$  admet exactement une composante impaire d'indice pair, disons  $d_{2k}$ , où  $k \geq 1$ , les deux autres cas pouvant être traités de façon similaire. On va construire une structure telle qu'illustrée à la Figure 3.21. On place d'abord un sommet de degré  $2k$  à la gauche en laissant l'extrémité gauche libre pour une connexion ultérieure. On y attache ensuite  $2k - 2$  sommets de degré 1, c'est-à-dire  $k - 1$  sommets au-dessus et  $k - 1$  sommets en-dessous. Comme  $2|d| = \|d\|$ , on a  $d_1 \geq 2k - 2$ , de telle sorte qu'il y a au moins  $2k - 2$  sommets de degré 1 disponibles dans  $d$ .



**Figure 3.21:** Construction d'une carte ayant une symétrie antipodale.

Il reste à construire le restant de la chaîne avec les sommets non utilisés, dont la distribution des degrés est donnée par

$$d' = (d_1 - (2k - 2), d_2, d_3, \dots, d_{2k} - 1, \dots). \quad (3.104)$$

On note que toutes les composantes de  $d'$  sont paires. Le restant de la chaîne sera constitué de deux segments, chacun ayant une distribution des degrés donnée par  $d'/2$ . On vérifie aisément que  $2|d'/2| = \|d'/2\|$ , ainsi, selon le Lemme 3.1.6, on peut construire une carte plane non étiquetée à deux faces ayant  $d'/2$  comme distribution des degrés des sommets. Il suffit alors de couper n'importe quelle arête se trouvant sur le cycle de cette carte et de placer la structure ainsi obtenue sur le premier segment. On considère une copie exacte de cette structure, qu'on tourne de  $180^\circ$ , et qu'on vient placer sur le second segment, en laissant libre l'extrémité droite. En collant les deux extrémités libres, on obtient un carte ayant une symétrie antipodale de type *SA* dont l'axe intersecte le sommet de degré  $2k$  qu'on a placé en premier.  $\square$

Pour calculer  $|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_d} \tau|$ , on utilise essentiellement les mêmes idées que dans la section précédente, sauf que maintenant, les cartes quotients auront une distribution des degrés des sommets pré-déterminée et que les sommets distingués dans ces dernières auront un degré donné. Soit  $\tilde{A}_d$  (resp.  $\tilde{A}_d^2$ ) l'ensemble des (resp. couples d') arbres plans plantés non étiquetées ayant  $d$  comme distribution des degrés des sommets.

On considère d'abord le cas où  $d$  admet exactement une composante impaire, d'indice pair, disons  $d_{2k}$ . Ceci correspond au cas de cartes ayant une symétrie de type *SA* (voir Figure 3.11). Étant donnée une telle carte, la carte quotient correspondante est alors un arbre plan planté non étiqueté ayant  $d' = (d'_1, d'_2, \dots)$  comme distribution des degrés des sommets, où

$$d'_i = \begin{cases} (d_i - 1)/2, & \text{si } i = 2k, \\ d_i/2 + 1, & \text{si } i = k, \\ d_i/2, & \text{autrement,} \end{cases} \quad (3.105)$$

et dont le sommet (non singulier) distingué est de degré  $k$ . On a alors

$$|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_d} \tau| = d'_k |\tilde{A}_{d'}|, \quad (3.106)$$

Pour déterminer  $|\tilde{A}_{d'}|$ , on utilise l'équation (3.30). On trouve

$$|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_d} \tau| = \frac{d'_k}{|d'|} \binom{|d'|}{d'} = \frac{d_k/2 + 1}{(|d| + 1)/2} \binom{(|d| + 1)/2}{d_1/2, d_2/2, \dots, d_k/2 + 1, \dots, (d_{2k} - 1)/2},$$

et le résultat suivant s'ensuit.

**Proposition 3.2.9** *Si  $d$  admet exactement une composante impaire  $d_{2k}$ ,  $\|d\| = 2|d|$  et  $|d| \neq d_2$ , alors  $|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_d} \tau|$ , le nombre de cartes sphériques non étiquetées à deux faces ayant  $d$  comme distribution des degrés des sommets et ayant une symétrie antipodale est donné par*

$$|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_d} \tau| = \binom{(|d| - 1)/2}{(d - \delta_{2k})/2}, \quad (3.107)$$

où  $\delta_{2k}$  est le vecteur ayant un 1 à sa  $(2k)^{\text{ème}}$  composante et 0 ailleurs.  $\square$

On considère maintenant le cas où  $d$  admet exactement deux composantes impaires, disons  $d_{2k}$  et  $d_{2\ell}$ , avec  $1 \leq k < \ell$ . Ceci correspond à des cartes ayant une symétrie antipodale de type *SS* (voir Figure 3.13). Dans ce cas, la carte quotient est un arbre plan non étiqueté ayant  $d'$  comme distribution des degrés des sommets et dont un sommet de degré  $k$  et un sommet de degré  $\ell$  sont distingués. Il y a deux cas à considérer. Si  $\ell \neq 2k$ , alors  $d'$  est donné par

$$d'_i = \begin{cases} (d_i - 1)/2, & \text{si } i = 2k \text{ ou } 2\ell, \\ (d_i/2) + 1, & \text{si } i = k \text{ ou } \ell, \\ d_i/2, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (3.108)$$

Si  $\ell = 2k$ , alors

$$d'_i = \begin{cases} (d_i - 1)/2, & \text{si } i = 2\ell, \\ (d_i + 1)/2, & \text{si } i = \ell, \\ (d_i/2) + 1, & \text{si } i = k, \\ d_i/2, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (3.109)$$

On considère d'abord le cas où  $\ell \neq 2k$ . Pour compter le nombre de cartes quotients, on considère l'espèce  $\mathcal{P}$  des arbres plans. Soit  $|\mathcal{P}_{d'}|$ , le nombre de  $\mathcal{P}$ -structures étiquetées ayant  $d'$  comme distribution des degrés des sommets. Ce nombre a été calculé dans ([17]) et aussi dans ([32]). Il est donné par

$$|\mathcal{P}_{d'}| = (n - 2)! \binom{|d'|}{d'} \quad (3.110)$$

Il y a  $d'_k d'_\ell$  façons de sélectionner un sommet de degré  $k$  et un sommet de degré  $\ell$  dans une telle structure. Un fois ce double pointage fait, la structure devient asymétrique, de sorte que pour obtenir le nombre de structures non étiquetées, il suffit de diviser par  $|d'|!$ . On obtient

$$|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_d} \tau| = \frac{d'_k d'_\ell}{|d'|!} \cdot (|d'| - 2)! \binom{|d'|}{d'} \quad (3.111)$$

Si on exprime  $d'$  en fonction de  $d$ , on obtient

$$|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_d} \tau| = \frac{(\frac{d_k}{2} + 1)(\frac{d_\ell}{2} + 1)}{(\frac{|d|}{2} + 1)!} \left( \frac{|d|}{2} - 1 \right)! \left( \dots, \frac{d_k}{2} + 1, \frac{d_\ell}{2} + 1, \frac{d_{2k}-1}{2}, \frac{d_{2\ell}-1}{2} \dots \right) \quad (3.112)$$

Après calculs, on trouve que le résultat suivant est valable pour les deux cas  $\ell \neq 2k$  et  $\ell = 2k$ .

**Proposition 3.2.10** *Si  $d$  admet exactement deux composantes impaires d'indices  $2k$  et  $2\ell$ , avec  $k < \ell$ , et  $\|d\| = 2|d|$ , alors le nombre  $|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_d} \tau|$  de cartes sphériques non étiquetées à deux faces ayant  $d$  comme distribution des degrés des sommets et ayant une symétrie antipodale est donné par*

$$|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_d} \tau| = \binom{|d|/2 - 1}{(d - \delta_{2k} - \delta_{2\ell})/2}. \quad (3.113)$$

□

Considérons maintenant le cas où  $d$  n'admet aucune composante impaire. On se trouve ici en présence de cartes ayant ou bien une symétrie de type  $SS$  dont l'axe intersecte deux sommets de même degré pair, disons  $2k$ , ou bien une symétrie de type  $AA$  dont l'axe intersecte deux arêtes. Dans le premier cas, la structure quotient est un arbre plan non étiqueté ayant  $d'$  comme distribution des degrés des sommets, et munie d'une paire (non ordonnée) de sommets distingués étant tous deux de degré  $k$ , le vecteur  $d'$  étant donné par

$$d'_i = \begin{cases} (d_{2i} - 2)/2, & \text{si } i = 2k, \\ d_i/2 + 2, & \text{si } i = k, \\ d_i/2, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (3.114)$$

Comme on l'a fait dans la section précédente, on introduit un ordre parmi les deux sommets distingués. Fixons  $2k$  et dénotons par  $F_{2k,d'}$  l'ensemble des structures correspondantes. Par un raisonnement similaire à celui qu'on vient de faire, on a

$$|F_{2k,d'}| = \frac{d'_k(d'_k - 1)}{|d'|!} (|d'| - 2)! \binom{|d'|}{d'}. \quad (3.115)$$

En exprimant le tout en fonction de  $d$ , on trouve

$$|F_{2k,d'}| = \frac{(\frac{d_k}{2}+2)(\frac{d_k}{2}+1)}{(\frac{|d|}{2}+1)!} \left( \frac{|d|}{2} - 1 \right)! \binom{\frac{|d|}{2}+1}{\dots, \frac{d_k}{2}+2, \frac{d_{2k}}{2}-1, \dots}. \quad (3.116)$$

Après simplifications, on trouve

$$|F_{2k,d'}| = \frac{d_{2k}}{|d|} \binom{|d|/2}{d/2}. \quad (3.117)$$

Pour le cas de symétries de type *AA*, la carte quotient est un arbre plan non étiqueté et bi-planté (voir Figure 3.14), ayant  $d'$  comme distribution des degrés des sommets, où  $d'$  est donné par

$$d' = d/2. \quad (3.118)$$

Pour dénombrer les cartes quotients, on considère les deux sommets distingués (sommets-étoile) comme étant des sommets réguliers, de degré 1, de telle sorte que la structure correspondante sera un arbre plan non étiqueté ayant

$$d'' = \frac{d}{2} + 2\delta_1, \quad (3.119)$$

comme distribution des degrés des sommets et munis d'une paire (non ordonnée) de sommets distingués de degré 1. Ici, encore, on introduit un ordre parmi ces deux sommets distingués et on considère  $G_{d''}$ , l'ensemble des structures correspondantes. Une fois exprimé en fonction de  $d$ , on obtient

$$|G_{d''}| = \binom{|d/2|}{d/2}. \quad (3.120)$$

L'expression  $|F_{2k,d'}|$  doit être additionnée pour toutes les valeurs de  $k$ , de sorte que

$$|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_d} \tau| = \frac{1}{2} \left( |G_{d''}| + \sum_{k \geq 1} |F_{2k,d'}| \right), \quad (3.121)$$

où le facteur  $1/2$  provient du fait que l'expression  $|G_{d''}| + \sum_{k \geq 1} |F_{2k,d'}|$  compte le nombre de cartes munies d'une symétrie antipodale *orienté* de type *SS* ou *AA*. Il faut donc diviser ce nombre par 2. On obtient alors le résultat suivant.

**Proposition 3.2.11** *Si  $\|d\| = 2|d|$  et  $d$  n'a aucune composante impaire, alors le nombre  $|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_d} \tau|$  de cartes sphériques non étiquetées à deux faces ayant  $d$  comme distribution des degrés des sommets et ayant une symétrie antipodale est donné par*

$$|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_d} \tau| = \frac{1}{2} \binom{|d/2|}{d/2} \left( 1 + \frac{1}{|d|} \sum_{k \geq 1} d_{2k} \right). \quad (3.122)$$

□

$d$	$\tilde{M}_d$	$\widetilde{\mathcal{M}}_d$
(4,2,0,2)	225	117
(2,0,0,1)	3	2
(2,1,0,1)	9	5
(2,1,2)	16	9
(2,2,2)	42	23
(2,2,0,1)	18	10
(3,3,3,1)	70	35
(4,2,2,1)	1652	832

**Tableau 3.1:** Quelques valeurs de  $\tilde{M}_d$  et  $\widetilde{\mathcal{M}}_d$ .

### 3.2.5 Cartes sphériques non étiquetées à deux faces selon la distribution des degrés des faces.

Soit  $\widetilde{\mathcal{M}}_{\{\alpha,\beta\}}$  l'ensemble des cartes sphériques non étiquetées à deux faces ayant  $\{\alpha, \beta\}$  comme distribution des degrés des faces. Si  $\alpha \neq \beta$ , il ne peut y avoir de symétrie antipodale, et on a alors

$$|\widetilde{\mathcal{M}}_{\{\alpha,\beta\}}| = |\tilde{M}_{(\alpha,\beta)}|, \quad (3.123)$$

puisque dans ce cas, on a une bijection entre les cartes sphériques dans  $\widetilde{\mathcal{M}}_{\{\alpha,\beta\}}$  et les paires de cartes planes *distinctes*  $(m, \tau(m))$  dans  $\tilde{M}_{(\alpha,\beta)} \times \tilde{M}_{(\beta,\alpha)}$ .

Si  $\alpha = \beta$ , alors l'ensemble  $\tilde{M}_{(\alpha,\alpha)}$  est clos sous l'action de l'involution antipodale  $\tau$  et on peut appliquer (3.74). En se souvenant que les cartes planes ayant une symétrie antipodale peuvent être identifiées aux cartes sphériques correspondantes, on a

$$|\widetilde{\mathcal{M}}_{\{\alpha,\alpha\}}| = \frac{1}{2} \left( |\tilde{M}_{(\alpha,\alpha)}| + |\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_{\{\alpha,\alpha\}}} \tau| \right). \quad (3.124)$$

Puisque  $\alpha = \beta$ , on a simplement  $n = \alpha$ , où  $n$  est le nombre de sommets dans la carte, et ainsi

$$|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_{\{\alpha,\alpha\}}} \tau| = |\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_n} \tau|. \quad (3.125)$$

Le terme  $|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_n} \tau|$  est déjà connu, et le résultat suivant s'ensuit.

**Proposition 3.2.12** *Si  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  ont même parité, alors le nombre  $|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_{\{\alpha,\beta\}}} \tau|$  de cartes sphériques non étiquetées à deux faces ayant  $\{\alpha, \beta\}$  comme*

distribution des degrés des faces est donné par

$$|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_{\{\alpha, \beta\}}} \tau| = \begin{cases} |\tilde{\mathcal{M}}_{(\alpha, \beta)}|, & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ \frac{1}{2}|\tilde{\mathcal{M}}_{(\alpha, \alpha)}| + \frac{1}{2}\binom{\alpha-1}{(\alpha-1)/2}, & \text{si } \alpha = \beta \text{ est impair,} \\ \frac{1}{2}|\tilde{\mathcal{M}}_{(\alpha, \alpha)}| + \frac{1}{4}\binom{\alpha}{\alpha/2}, & \text{si } \alpha = \beta \text{ est pair,} \end{cases} \quad (3.126)$$

où  $|\tilde{\mathcal{M}}_{(\alpha, \beta)}|$  est donné par l'équation (3.50).  $\square$

### 3.2.6 Cartes sphériques non étiquetées à deux faces selon les distributions conjointes des degrés des sommets et des faces.

Soit  $\widetilde{\mathcal{M}}_{d, \{\alpha, \beta\}}$  l'ensemble des cartes sphériques non étiquetées à deux faces ayant  $d$  et  $\{\alpha, \beta\}$  comme distributions conjointes des degrés des sommets et des faces. Supposons que  $d$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  satisfont les conditions 1 et 2 du Lemme 3.1.13. Si  $\alpha \neq \beta$ , on a

$$|\widetilde{\mathcal{M}}_{d, \{\alpha, \beta\}}| = |\tilde{\mathcal{M}}_{d, (\alpha, \beta)}|, \quad (3.127)$$

et si  $\alpha = \beta$ , on a

$$|\widetilde{\mathcal{M}}_{d, \{\alpha, \alpha\}}| = \frac{1}{2}|\tilde{\mathcal{M}}_{d, (\alpha, \alpha)}| + \frac{1}{2}|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_{d, (\alpha, \alpha)}} \tau|. \quad (3.128)$$

Le seul terme inconnu est  $|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_{d, (\alpha, \alpha)}} \tau|$ . En vertu de la condition 1 du Lemme 3.1.13, on a  $|d| = \alpha$ , ainsi, dans ce cas,  $\alpha$  est complètement déterminé par  $d$ , et on a

$$|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_{d, (\alpha, \alpha)}} \tau| = |\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_d} \tau|, \quad (3.129)$$

et le résultat suivant s'ensuit.

**Proposition 3.2.13** *En supposant que  $d$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  satisfassent les conditions 1 et 2 du Lemme 3.1.13, alors le nombre  $|\widetilde{\mathcal{M}}_{d, \{\alpha, \beta\}}|$  de cartes sphériques non étiquetées à deux faces ayant les distributions conjointes  $d$  et  $\{\alpha, \beta\}$  des degrés des sommets et des faces est donné par*

$$|\widetilde{\mathcal{M}}_{d, \{\alpha, \beta\}}| = \begin{cases} |\tilde{\mathcal{M}}_{d, (\alpha, \beta)}|, & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ \frac{1}{2}|\tilde{\mathcal{M}}_{d, (\alpha, \alpha)}| + \frac{1}{2}|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_d} \tau| & \text{si } \alpha = \beta, \end{cases} \quad (3.130)$$

où  $|\tilde{\mathcal{M}}_{d, (\alpha, \beta)}|$  est donné par l'équation (3.71), et  $|\text{Fix}_{\widetilde{\mathcal{M}}_d} \tau|$  peut être nul, ou donné par (3.107), (3.113) ou (3.122), selon la façon dont les composantes impaires de  $d$  sont distribuées.  $\square$

$\alpha$	$\beta$	$\tilde{M}_{d,(\alpha,\beta)}$	$\tilde{\mathcal{M}}_{d,\{\alpha,\beta\}}$
8	8	13	11
7	9	9	9
6	10	12	12
5	11	11	11
4	12	12	12
3	13	16	16
2	14	16	16
1	15	30	30

**Tableau 3.2:** Valeurs de  $\tilde{M}_{d,(\alpha,\beta)}$  et  $\tilde{\mathcal{M}}_{d,\{\alpha,\beta\}}$  pour  $d = (4, 2, 0, 2)$  et  $(\alpha, \beta)$  tels que  $\alpha \leq \beta$  et  $\alpha + \beta = 16$ .



## CHAPITRE IV

### DÉNOMBREMENT DE CACTUS

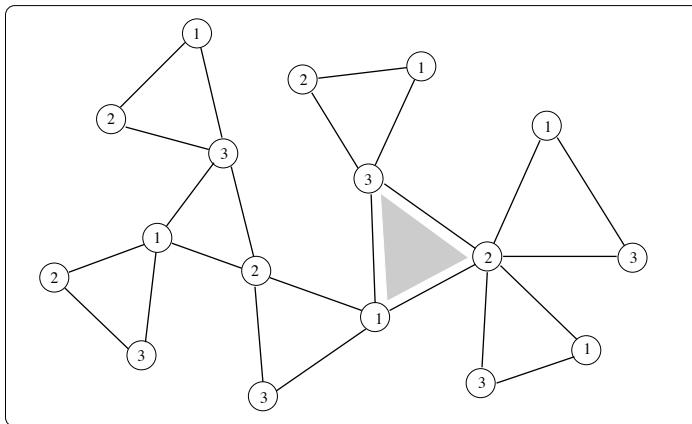
Dans ce chapitre nous dénombrons d'abord les cactus  $m$ -aires enracinés selon le nombre de polygones. Nous établissons ensuite une bijection avec les arborescences ordonnées  $m$ -aires. Puis, par une adaptation d'une méthode de Liskovets ([20]), nous dénombrons ces mêmes cactus dans le cas non enraciné. Nous terminons avec le dénombrement de ces cactus, selon la distribution des sommets de chaque couleur et finalement, selon la distribution des degrés des sommets de chaque couleur. Ce travail étend un résultat de Goulden et Jackson ([11]) sur les cactus  $m$ -aires enracinés et est motivé par la classification topologique des polynômes complexes (voir ([9])).

#### 4.1 Cactus $m$ -aires enracinés et non étiquetés

**Définition 4.1.1** Un *cactus* est un graphe simple connexe dans lequel chaque arête appartient à exactement un cycle élémentaire. De façon équivalente, chaque bloc (composante 2-connexe) d'un cactus est un cycle élémentaire, c'est-à-dire, un polygone. Pour un entier  $m \geq 2$ , un  *$m$ -cactus* est un cactus dans lequel tous les polygones sont des  $m$ -gones, autrement dit, des polygones à  $m$  côtés.

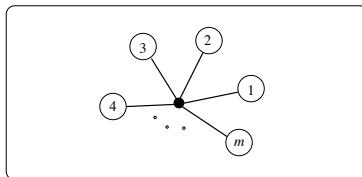
Un  *$m$ -cactus plan* est un plongement d'un  $m$ -cactus dans le plan de telle sorte que chaque arête soit incidente à la région infinie. Un *cactus  $m$ -aire* est un  $m$ -cactus plan tel que les sommets autour d'un  $m$ -gone sont coloriés suivants les couleurs  $1, 2, \dots, m$  dans le sens antihoraire. Pour des raisons techniques, un cactus ne comportant qu'un unique sommet de n'importe laquelle des  $m$  couleurs est considéré comme un cactus  $m$ -aire. Un cactus  $m$ -aire est dit *enraciné* si un de ses polygones est distingué. La Figure 4.1 donne un exemple de cactus ternaire enraciné.  $\square$

Le but de cette section est de dénombrer les cactus  $m$ -aires enracinés comportant  $p$   $m$ -gones. Pour y arriver, nous introduisons d'abord la notion de  *$m$ -étoile*.



**Figure 4.1:** Cactus ternaire enraciné  $\mathcal{C}$  comportant 8 triangles.

**Définition 4.1.2** Une  $m$ -étoile est un graphe plan  $(m+1)$ -coloré constitué d'un sommet noir autour duquel sont attachés  $m$  sommets de couleur 1 jusqu'à  $m$  dans le sens antihoraire. Les couleurs 1 à  $m$  peuvent être considérées comme  $m$  différentes teintes de blanc. La Figure 4.2 illustre une  $m$ -étoile.  $\square$

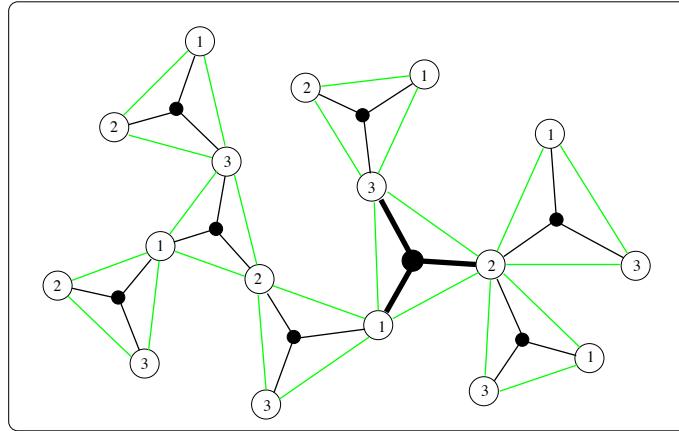


**Figure 4.2:** Une  $m$ -étoile.

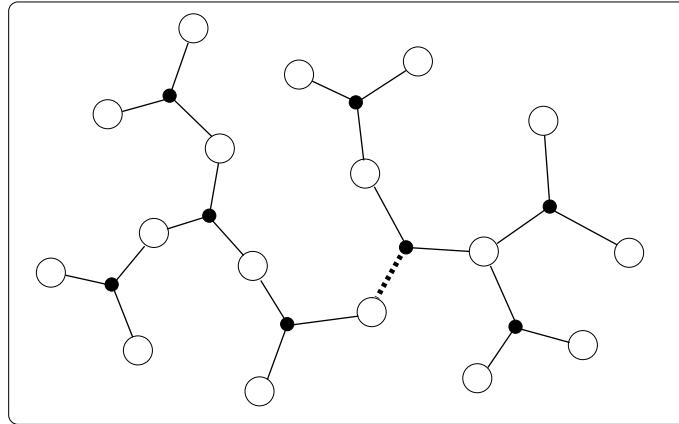
Considérons un cactus  $m$ -aire enraciné dans lequel on remplace chaque  $m$ -gone par une  $m$ -étoile en prenant soin de bien faire correspondre les sommets de couleurs 1 à  $m$ . La Figure 4.3 illustre la structure obtenue en faisant cette substitution à partir du cactus enraciné de la Figure 4.1. On note que le polygone distingué est devenu une étoile distinguée. On convient alors de distinguer l'arête joignant le centre de l'étoile distinguée au sommet de couleur 1. On obtient alors un arbre plan bicoloré dont tous les sommets noirs sont de degré  $m$  et muni d'une arête distinguée, tel qu'illustré à la Figure 4.4.

Ce procédé est clairement réversible. En effet, partant d'un arbre plan bicoloré muni d'une arête distinguée, il suffira de convenir que le sommet blanc incident à cette arête portera la couleur 1. Ceci déterminera automatiquement la couleur de tous les autres sommets blancs. L'autre extrémité de l'arête distinguée correspondra au centre de l'étoile distinguée, et par conséquent, au po-

lygone distingué du cactus  $m$ -aire correspondant.



**Figure 4.3:** Représentation d'un cactus sous forme d'arbre plan bicolore.

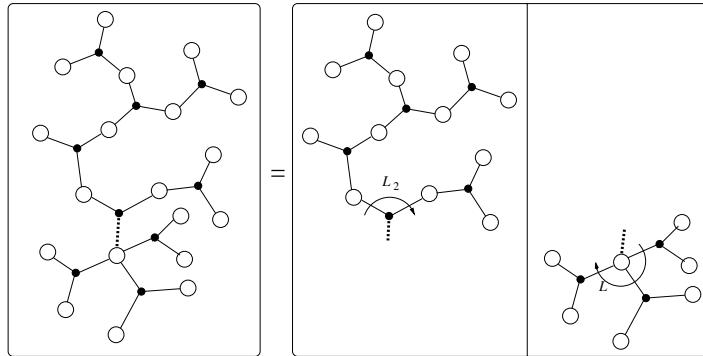


**Figure 4.4:** Arbre plan bicolore muni d'une arête distinguée.

Dénotons par  $\mathbf{a}_{C_m,C} = \mathbf{a}_{C_m,C}(X,Y)$  l'espèce des arbres plans bicolores dont tous les sommets noirs sont de degré  $m$ . Cette notation est justifiée par le fait que dans une telle structure, l'ensemble des voisins d'un sommet noir (de sorte  $X$ ) est enrichi d'une  $C_m$ -structure (cycle de longueur  $m$ ), et l'ensemble des voisins d'un sommet blanc (de sorte  $Y$ ) est enrichi d'une  $C$ -structure. Un sommet blanc isolé est également accepté comme  $\mathbf{a}_{C_m,C}$ -structure. On dénote alors par  $\mathbf{a}_{C_m,C}^{\bullet-\circ}$  l'espèce des  $\mathbf{a}_{C_m,C}$ -structures pointées en une arête. On a alors l'identité combinatoire suivante:

$$\mathbf{a}_{C_m,C}^{\bullet-\circ} = \mathcal{A}_{L_{m-1},L}^{\bullet} \cdot \mathcal{A}_{L_{m-1},L}^{\circ}, \quad (4.1)$$

où  $\mathcal{A}_{L_{m-1},L}^\bullet$  désigne l'espèce des arborescences bicolorées à racine noire, dont la fibre de chaque sommet noir est enrichie d'une  $L_{m-1}$ -structure (liste de longueur  $m - 1$ ), et dont la fibre de chaque sommet blanc est enrichie d'une  $L$ -structure. L'espèce  $\mathcal{A}_{L_{m-1},L}^o$  est définie de manière analogue, en demandant que la racine soit blanche. La Figure 4.5 donne une illustration de l'identité (4.1) pour  $m = 3$ .



**Figure 4.5:**  $a_{Cm,C}^{\bullet-o} = \mathcal{A}_{L_{m-1},L}^\bullet \cdot \mathcal{A}_{L_{m-1},L}^o$ .

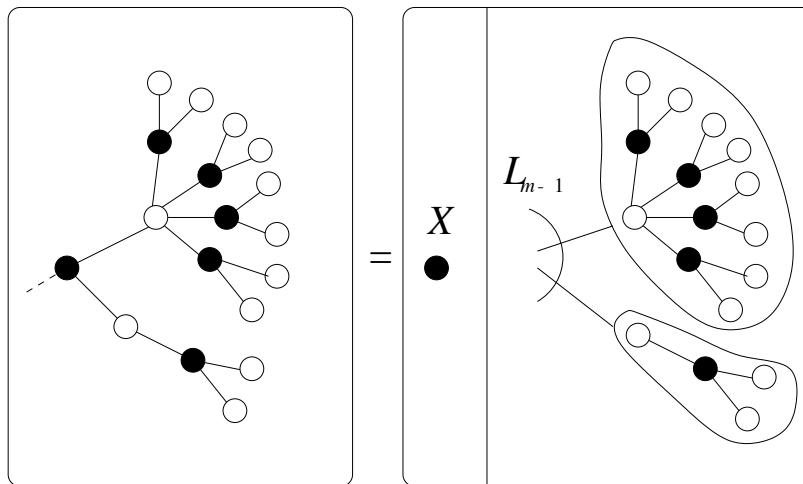
Par ailleurs, on a

$$\mathcal{A}_{L_{m-1},L}^\bullet = X L_{m-1}(\mathcal{A}_{L_{m-1},L}^o) \quad (4.2)$$

et

$$\mathcal{A}_{L_{m-1},L}^o = Y L(\mathcal{A}_{L_{m-1},L}^\bullet). \quad (4.3)$$

La Figure 4.6 illustre l'équation (4.2) dans le cas où  $m = 3$ .



**Figure 4.6:**  $\mathcal{A}_{L_{m-1},L}^\bullet = X L_{m-1}(\mathcal{A}_{L_{m-1},L}^o)$

On remarque qu'une  $\mathbf{a}_{C_m,C}$ -structure comportant  $p$  sommets noirs possède alors  $(m-1)p+1$  sommets blancs. En effet, le nombre total d'arêtes est  $mp$  car les  $p$  sommets noirs sont tous de degré  $m$ . Il y a donc en tout  $mp+1$  sommets (un de plus que le nombre d'arêtes), donc  $(m-1)p+1$  sommets blancs.

Désignons par  $\tilde{\mathcal{K}}_{m,p}^\diamond$  l'ensemble des cactus  $m$ -aires enracinés (non étiquetés) comportant  $p$   $m$ -gones. On a alors

$$|\mathcal{K}_{m,p}^\diamond| = [x^p y^{(m-1)p+1}] (\mathbf{a}_{C_m,C}^{\bullet-\circ})^\sim(x, y). \quad (4.4)$$

L'espèce  $\mathbf{a}_{C_m,C}^{\bullet-\circ}$  est clairement asymétrique, de sorte que

$$(\mathbf{a}_{C_m,C}^{\bullet-\circ})^\sim(x, y) = \mathbf{a}_{C_m,C}^{\bullet-\circ}(x, y). \quad (4.5)$$

En vertu de (4.1), on obtient alors

$$|\mathcal{K}_{m,p}^\diamond| = [x^p y^{(m-1)p+1}] \mathcal{A}_{L_{m-1},L}^\bullet(x, y) \mathcal{A}_{L_{m-1},L}^\circ(x, y). \quad (4.6)$$

En vertu des équations (4.2) et (4.3), on a

$$\mathcal{A}_{L_{m-1},L}^\bullet(x, y) = x (\mathcal{A}_{L_{m-1},L}^\circ(x, y))^{m-1} \quad (4.7)$$

et

$$\mathcal{A}_{L_{m-1},L}^\circ(x, y) = y \left( \frac{1}{1 - \mathcal{A}_{L_{m-1},L}^\bullet(x, y)} \right). \quad (4.8)$$

Pour déterminer le coefficient de  $x^p y^{(m-1)p+1}$  dans (4.6), on utilise la formule d'inversion de Lagrange bidimensionnelle alternée (Formule de Chottin), donnée par la proposition suivante.

**Proposition 4.1.3 FORMULE DE CHOTTIN([6])** *Si deux séries formelles  $A(x, y)$  et  $B(x, y)$  satisfont*

$$A(x, y) = x\varphi(B(x, y)) \quad \text{et} \quad B(x, y) = y\psi(A(x, y)),$$

*alors*

$$[x^n y^k] A^\alpha B^\beta = \left( 1 - \frac{(n-\alpha)(k-\beta)}{kn} \right) [s^{n-\alpha} t^{k-\beta}] \varphi^n(t) \psi^k(s). \quad (4.9)$$

□

Ce résultat est un cas particulier d'un résultat qui sera démontré à la section 4.4 (voir Théorème 4.4.3). Dans notre cas, on a  $A = \mathcal{A}_{L_{m-1},L}^\bullet$ ,  $B = \mathcal{A}_{L_{m-1},L}^\circ$ ,  $\varphi(t) = t^{m-1}$  et  $\psi(t) = (1-t)^{-1}$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} & [x^p y^{(m-1)p+1}] \mathcal{A}_{L_{m-1},L}^\bullet(x, y) \mathcal{A}_{L_{m-1},L}^\circ(x, y) \\ &= \left( 1 - \frac{(p-1)[(m-1)p+1-1]}{p[(m-1)p+1]} \right) [s^{p-1}] (1-s)^{-(m-1)p+1} [t^{(m-1)p}] t^{(m-1)p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m}{((m-1)p+1)} [s^{p-1}] \sum_{j \geq 0} \frac{((m-1)p+1)((m-1)p+2) \cdots ((m-1)p+j)}{j!} s^j \\
&= \frac{m}{((m-1)p+1)} \frac{((m-1)p+1)((m-1)p+2) \cdots ((m-1)p+p-1)}{(p-1)!} \\
&= \frac{m}{((m-1)p+1)} \frac{(mp)!}{mp((m-1)p)!(p-1)!} \\
&= \frac{1}{((m-1)p+1)} \binom{mp}{p}
\end{aligned}$$

**Proposition 4.1.4** *Le nombre  $|\tilde{\mathcal{K}}_{m,p}^\diamond|$  de cactus  $m$ -aires enracinés, non étiquetés, comportant  $p$   $m$ -gones, est donné par*

$$|\tilde{\mathcal{K}}_{m,p}^\diamond| = \frac{1}{(m-1)p+1} \binom{mp}{p}. \quad (4.10)$$

□

Il est bien connu que cette dernière expression compte également le nombre d'arborescences ordonnées  $m$ -aires comportant  $p$  sommets. La prochaine section sera consacrée à relier bijectivement plusieurs objets combinatoires énumérés par cette formule.

## 4.2 Une bijection avec les arborescences ordonnées $m$ -aires

Le but de cette section est de donner une bijection entre les cactus  $m$ -aires enracinés (non étiquetés) ayant  $p$   $m$ -gones et les arborescences  $m$ -aires (non étiquetées) ayant  $p$  sommets. Ces deux ensembles sont également en bijection avec l'ensemble des factorisations  $m$ -aires du  $p$ -cycle  $\gamma_p = (1 2 \cdots p)$ . On donne d'abord une définition plus précise de ces deux nouveaux ensembles d'objets.

**Définition 4.2.1** L'espèce  $\mathcal{T}_m$  des *arborescence  $m$ -aires* est définie récursivement par l'équation fonctionnelle

$$\mathcal{T}_m = X(1 + \mathcal{T}_m)^m \quad (4.11)$$

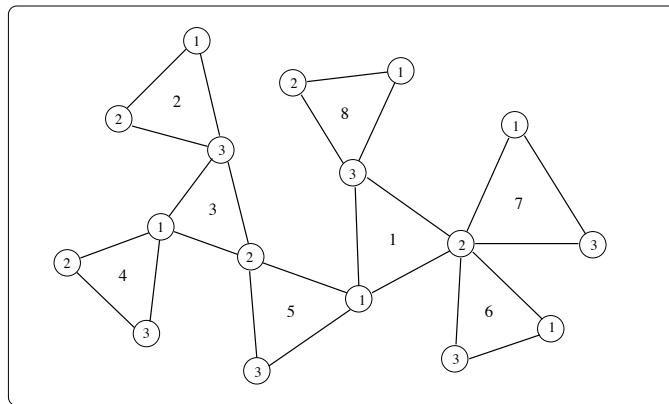
On en déduit qu'à chaque sommet interne, est attaché un  $m$ -uplet constitué de feuilles ou de sommets internes. Voir Figure 4.12.

**Définition 4.2.2** Une *factorisation  $m$ -aire* du  $p$ -cycle  $\gamma_p = (1 2 \cdots p)$  est un  $m$ -uplet  $(g_1, g_2, \dots, g_m)$  de permutations de  $\mathbb{S}_p$  tel que

$$\gamma_p = \prod_{i=1}^m g_i \quad (4.12)$$

□

Goulden et Jackson ont donné une bijection entre l'ensemble des cactus  $m$ -aires enracinés comportant  $p$   $m$ -gones et l'ensemble des factorisations  $m$ -aires du  $p$ -cycle  $\gamma_p$ . La connexion entre ces deux ensembles est obtenue en donnant un étiquetage canonique aux  $m$ -gones d'un cactus  $m$ -aire enraciné. Partant d'un tel cactus, on donne d'abord l'étiquette 1 au polygone distingué. Partant de l'arête incidente à ce polygone dont les deux extrémités sont des sommets de couleurs  $m$  et 1, on effectue un parcours des arêtes en gardant toujours la face infinie à sa droite. Ce faisant, on rencontre successivement des arêtes dont les extrémités sont de couleurs 1 et 2, 2 et 3, 3 et 4, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on tombe à nouveau sur une arête dont les extrémités sont de couleurs  $m$  et 1. On convient de donner l'étiquette 2 au polygone incident à cette arête. On poursuit le processus jusqu'à ce que tous les polygones aient été étiquetés. La Figure 4.7 donne l'étiquetage canonique obtenu à partir du cactus illustré à la Figure 4.1. Pour plus de détails, voir ([11]).



**Figure 4.7:** Étiquetage canonique d'un cactus  $m$ -aire.

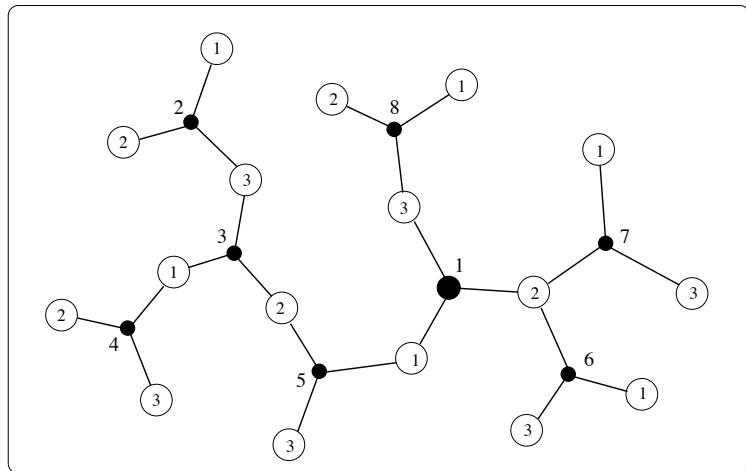
Pour  $i = 1, \dots, m$ , considérons l'ensemble des sommets de couleur  $i$ . On considère l'ordre cyclique antihoraire des étiquettes des polygones autour de chacun de ces sommets. En plaçant ces cycles côté à côté, on obtient la permutation  $g_i$ . Par exemple, le triplet de permutations de  $(g_1, g_2, g_3)$  de  $S_8$  correspondant au cactus illustré à la Figure 4.7 est donné par

$$\begin{aligned} g_1 &= (15)(34), \\ g_2 &= (167)(35), \\ g_3 &= (23)(18). \end{aligned} \tag{4.13}$$

On vérifie aisément que  $g_1 g_2 g_3 = (12345678)$ , le produit étant effectué *de gauche à droite*.

Établissons maintenant une bijection entre les cactus  $m$ -aires enracinés ayant  $p$   $m$ -gones et les arborescences  $m$ -aires ayant  $p$  sommets. Nous illustrons

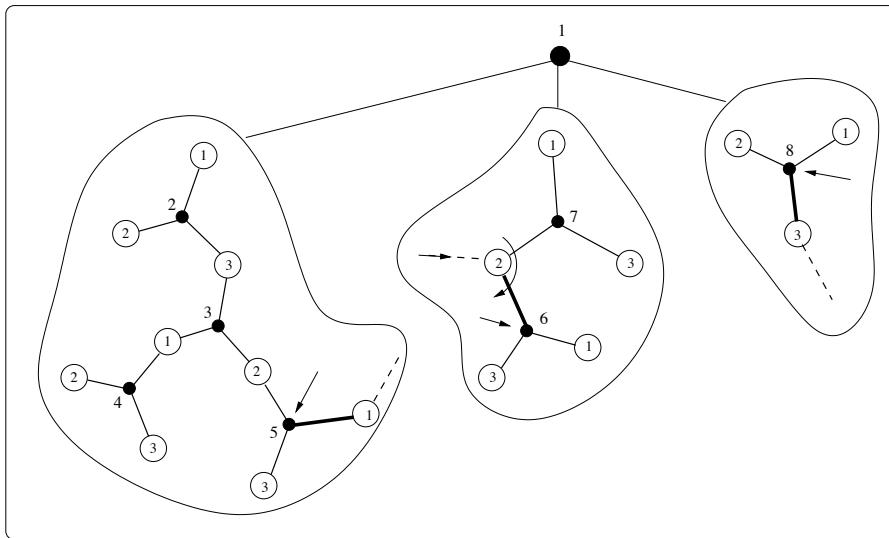
la bijection avec  $m = 3$ , la généralisation à un  $m$  quelconque devrait être claire. Partant du cactus enraciné donné à la Figure 4.1, on considère alors l'étiquetage canonique de ce cactus tel que donné à la Figure 4.7. Comme on l'a vu à la section précédente, on peut remplacer les  $m$ -gones par des  $m$ -étoiles. On obtient l'arbre plan bicoloré canoniquement étiqueté correspondant, tel qu'illustré à la Figure 4.8.



**Figure 4.8:** Arbre plan bicoloré canoniquement étiqueté.

La bijection s'effectue de façon récursive. On distingue d'abord le sommet d'étiquette 1, correspondant à l'étoile (ou le polygone) distingué initial. Ce sommet sera la racine de l'arborescence. Il est adjacent à trois sommets, de couleur 1, 2 et 3 respectivement. Le fils gauche sera la structure attachée au sommet de couleur 1, le fils central sera la structure attachée au sommet de couleur 2 et le fils droit sera la structure attachée au sommet de couleur 3. On obtient alors la structure illustrée à la Figure 4.9.

Pour pouvoir procéder récursivement, chaque sous-structure doit elle-même contenir une étoile distinguée ou encore, ce qui revient au même, un sommet noir distingué. Lorsqu'on arrive dans une sous-structure, par convention, on distinguera le sommet situé le plus à droite. Les sommets noirs distingués sont indiqués par des flèches dans la Figure 4.9. Par exemple, entre le sommet noir d'étiquette 7 et le sommet noir d'étiquette 6, on choisit le sommet noir d'étiquette 6, qui se trouve le plus à droite lorsqu'on arrive par la demi arête pointillée. Ces nouveaux sommets distingués deviendront les sommets-pères pour l'étape suivante de décomposition. Dans notre exemple, il s'agit des sommets noirs d'étiquette 5, 6 et 8 respectivement. La décomposition d'une sous-structure s'arrête lorsque celle-ci n'est plus constituée que d'un sommet blanc isolé. Les Figures 4.10, 4.11 et 4.12 nous donnent respectivement les étapes 2, 3 et 4 de la décomposition. On peut montrer aisément que chaque



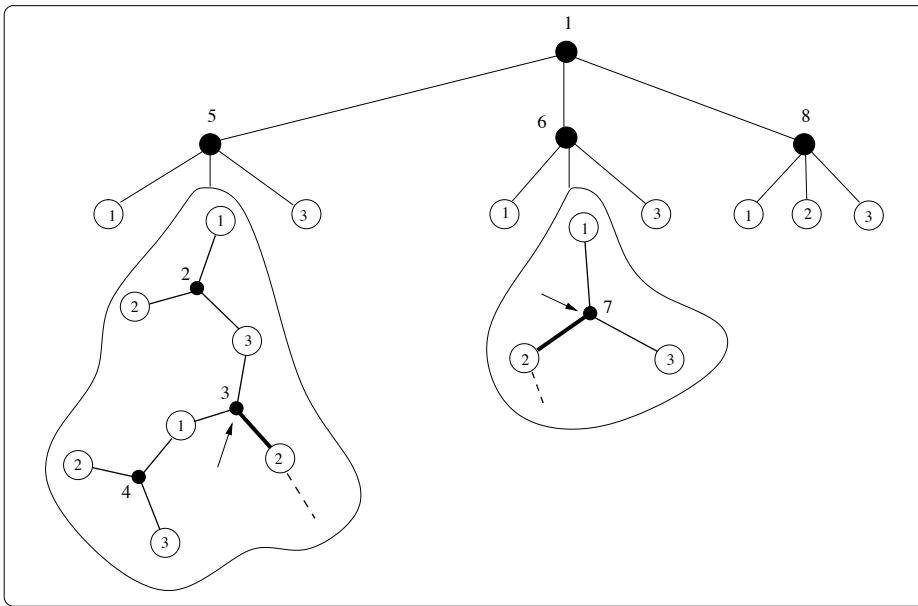
**Figure 4.9:** Première étape de la décomposition.

étape de cette décomposition est réversible, de sorte que, partant l’arborescence donnée à la Figure 4.13, on peut, en procédant à partir des feuilles vers la racine, retrouver le cactus donné à la Figure 4.8.

Notons que les sommets blancs dans la Figure 4.12 constituent les feuilles d’une arborescence ternaire complète et qu’elles admettent les couleurs 1, 2, ou 3 suivant qu’elles sont fils gauche, fils central ou fils droit. On peut donc les omettre sans perte d’information. On obtient alors l’arborescence ternaire illustrée à la Figure 4.13.

Dans une arborescence ternaire, on définit une *chaîne gauche* comme étant une suite de pas sud-ouest de longueur maximale. Les chaînes *centrales* et *droites* sont définies similairement, en termes de pas sud et sud-est respectivement. La *longueur* d’une chaîne est le nombre de sommets qu’elle contient. Par exemple, dans la Figure 4.13, la chaîne centrale  $(1, 6, 7)$  est de longueur 3. Les chaînes de longueur 1 sont admises. Par exemple, le sommet d’étiquette 7 constitue en lui-même à la fois une chaîne gauche ou une chaîne droite de longueur 1, mais pas une chaîne centrale puisqu’il est strictement contenu dans la chaîne  $(1, 6, 7)$ .

On observe alors que l’ensemble des chaînes gauches de l’arborescence ternaire de la Figure 4.13 correspond précisément aux cycles de la permutation  $g_1$  dans (4.13). Il en va de même pour les chaînes centrales et droites qui correspondent respectivement aux cycles de  $g_2$  et  $g_3$ . Rappelons que le point de départ de notre bijection était un cactus *canoniquement* étiqueté. Nous avons transporté cet étiquetage afin de mieux visualiser les étapes de la bijection.



**Figure 4.10:** Deuxième étape de la décomposition.

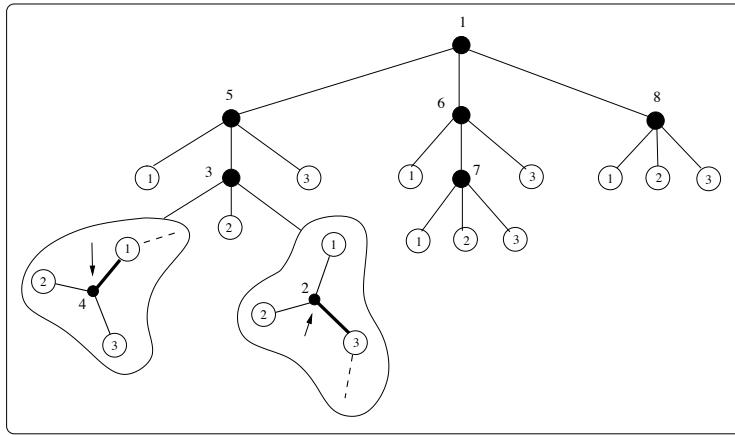
Ainsi, l’arborescence ternaire de la Figure 4.13 est également canoniquement étiquetée. Ainsi, on peut enlever les étiquettes sans perte d’information. Le prochain paragraphe montre comment on peut récupérer cet étiquetage au moyen d’un parcours de l’arborescence.

On donne d’abord l’étiquette 1 à la racine; c’est notre position de départ. On note que chaque sommet repose dans exactement trois chaînes: une gauche, une centrale et une droite, certaines chaînes pouvant être de longueur 1. Appliquer  $g_1$  à la position actuelle revient à effectuer un pas sud-ouest dans la chaîne gauche si son extrémité inférieure n’est pas encore atteinte. Si elle est atteinte, appliquer  $g_1$  nous revoie à l’extrémité nord-est de la chaîne. Si la chaîne gauche dans laquelle on se trouve est de longueur 1, alors appliquer  $g_1$  revient à n’effectuer aucun déplacement.

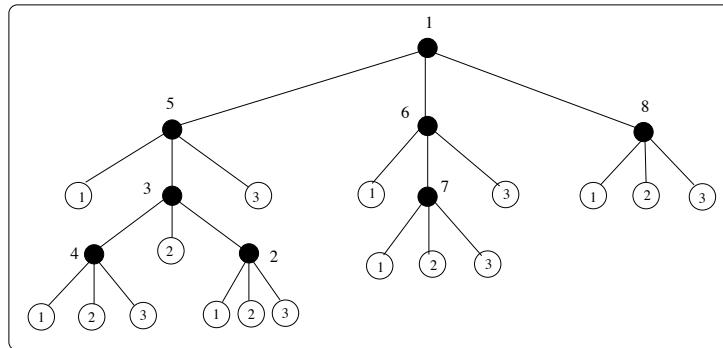
Les applications de  $g_2$  et  $g_3$  sont similaires définitivement relativement à des chaînes respectivement centrales et droites. À chaque fois qu’on a terminé d’appliquer  $g_1, g_2$ , puis  $g_3$ , on pose une nouvelle étiquette. La Figure 4.14 nous indique comment les étiquettes 2 et 3 ont été obtenues.

### 4.3 Cactus $m$ -aires non enracinés non étiquetés

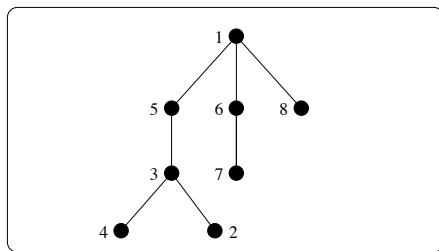
Dans cette section, nous adaptons à l’énumération de cactus une méthode décrite par Liskovets dans un article où l’on utilise le concept de carte quotient



**Figure 4.11:** Troisième étape de la décomposition.

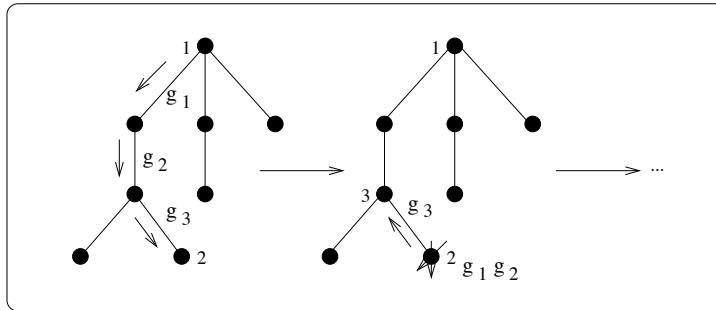


**Figure 4.12:** Quatrième étape de la décomposition.



**Figure 4.13:** Arborescence ternaire canoniquement étiquetée.

pour obtenir le nombre de cartes planaires non enracinées et non étiquetées ([20]). Désignons par  $\mathcal{K}_{m,p}$  et  $\mathcal{K}_{m,p}^\diamond$  l'ensemble des cactus  $m$ -aires étiquetés aux polygones et ayant  $p$   $m$ -gones, respectivement non enracinés et enracinés. On a



**Figure 4.14:** Premières étapes dans l'étiquetage canonique.

alors

$$|\mathcal{K}_{m,p}| = \frac{1}{p} |\mathcal{K}_{m,p}^\diamond|.$$

Étant donné qu'un cactus  $m$ -aire enraciné est asymétrique, il y a  $p!$  cactus  $m$ -aires enracinés et étiquetés pour chaque cactus  $m$ -aire enraciné et non étiqueté, c'est-à-dire

$$|\mathcal{K}_{m,p}^\diamond| = p! |\tilde{\mathcal{K}}_{m,p}^\diamond|,$$

où  $|\tilde{\mathcal{K}}_{m,p}^\diamond|$  est donné par l'équation (4.10). En en conclut que

$$|\mathcal{K}_{m,p}| = \frac{(p-1)!}{(m-1)p+1} \binom{mp}{p}. \quad (4.14)$$

Désignons par  $\tilde{\mathcal{K}}_{m,p}$  l'ensemble des cactus  $m$ -aires non étiquetés ayant  $p$   $m$ -gones. On considère alors l'action du groupe  $\mathbb{S}_p$  sur l'ensemble des cactus  $m$ -aires étiquetés aux polygones, l'action d'un élément  $\sigma \in \mathbb{S}_p$  étant définie par réétiquetage des polygones suivant la permutation  $\sigma$ . Le nombre  $|\tilde{\mathcal{K}}_{m,p}|$  de cactus  $m$ -aires non étiquetés coïncide alors avec le nombre d'orbites de l'action de  $\mathbb{S}_p$  sur l'ensemble  $\mathcal{K}_{m,p}$ . En vertu du Théorème de Cauchy-Frobenius, on peut alors écrire

$$|\tilde{\mathcal{K}}_{m,p}| = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_p} |\text{Fix}_{\mathcal{K}_{m,p}} \sigma|,$$

où  $|\text{Fix}_{\mathcal{K}_{m,p}} \sigma|$  désigne le nombre de cactus  $m$ -aires étiquetés laissés fixes sous le réétiquetage induit par  $\sigma$ . En extrayant le terme correspondant à  $\sigma = \text{Id}_{\mathbb{S}_p}$  de cette somme, on peut écrire, en vertu de (4.14),

$$|\tilde{\mathcal{K}}_{m,p}| = \frac{1}{p!} \left( \frac{(p-1)!}{(m-1)p+1} \binom{mp}{p} + \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_p \setminus \{\text{Id}_{\mathbb{S}_p}\}} |\text{Fix}_{\mathcal{K}_{m,p}} \sigma| \right).$$

On peut, sans changer la nature du problème, considérer un cactus comme étant plongé sur la sphère orientée. On déduit du Lemme 3.1.2 que tout automorphisme (au sens topologique) périodique et non trivial d'un cactus se ramène essentiellement à un rotation autour d'un axe intersectant deux éléments (sommet, face ou arête) du cactus. Puisque tout automorphisme d'un cactus doit préserver les couleurs des sommets, on en déduit que seuls les axes intersectant un sommet et la face correspondant à la face infinie dans le cas plan, sont autorisés. Un tel automorphisme induit une permutation sur les étiquettes des polygones. Par exemple, le cactus donné à la Figure 4.15 admet un automorphisme correspondant à une rotation d'angle  $2\pi/3$ . Cette rotation induit la permutation  $(1, 15, 2)(3, 4, 9)(5, 13, 12)(6, 10, 11)(7, 14, 8)$  sur les polygones. Dans le cas général, tout automorphisme non trivial d'un cactus induira une permutation régulière  $\sigma \in \mathbb{S}_p$ , c'est-à-dire dont le type cyclique, dénoté par  $\lambda(\sigma)$ , est de la forme

$$\lambda(\sigma) = d^{p/d}.$$

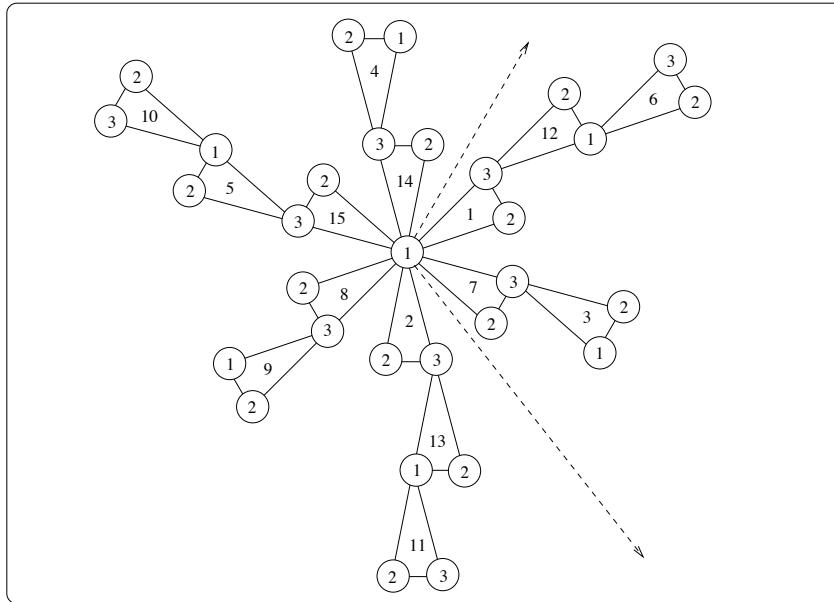
Ceci implique que si  $\sigma$  n'est pas une permutation régulière, alors on aura nécessairement  $|\text{Fix}_{\mathcal{K}_{m,p}} \sigma| = 0$ . Dans notre cas,  $d$  correspond à l'ordre de l'automorphisme. Il est clair que  $d$  doit diviser  $p$ , le nombre de  $m$ -gones. On peut donc écrire

$$|\tilde{\mathcal{K}}_{m,p}| = \frac{1}{p!} \left( \frac{(p-1)!}{(m-1)p+1} \binom{mp}{p} + \sum_{\substack{d \mid p \\ d > 1}} \sum_{\lambda(\sigma)=d^{p/d}} |\text{Fix}_{\mathcal{K}_{m,p}} \sigma| \right)$$

On se convainc facilement que le nombre de cactus  $m$ -aires laissés fixes sous l'action d'une permutation  $\sigma \in \mathbb{S}_p$  ne dépend que du type cyclique de  $\sigma$ . On sait que le nombre de permutations dans  $\mathbb{S}_p$  ayant le type cyclique  $d^{p/d}$  est donné par

$$|\{\sigma \in \mathbb{S}_p \mid \lambda(\sigma) = d^{p/d}\}| = \frac{p!}{d^{p/d} (p/d)!}. \quad (4.15)$$

On considère alors un cactus  $m$ -aire étiqueté ayant un automorphisme correspondant à une permutation  $\sigma$  de type cyclique  $d^{p/d}$ . Appliquer un automorphisme à un cactus revient essentiellement à effectuer une rotation rigide d'angle  $2\pi/d$  du plan autour du sommet intersectant l'axe de symétrie. On découpe alors le plan en  $d$  régions fondamentales, c'est-à-dire un "morceau de tarte" d'angle  $2\pi/d$  dont la pointe coïncide avec le sommet intersectant l'axe de symétrie. Pour le cactus donné à la Figure 4.15, la région fondamentale sélectionnée est le secteur d'angle  $2\pi/3$  compris entre les deux demi-droites indiquées par des tirets. Le cactus quotient est alors obtenu en identifiant les deux demi droites qui sont frontières de la région fondamentale. L'étiquetage des polygones dans la structure quotient est donné par ordre croissant des éléments



**Figure 4.15:** Cactus ternaire étiqueté admettant un automorphisme d'ordre 3.

minimums dans les cycles de  $\sigma$ , comme l'indique le schéma suivant.

$$\sigma = \underbrace{(1, 15, 2)}_1 \underbrace{(3, 4, 9)}_2 \underbrace{(5, 13, 12)}_3 \underbrace{(6, 10, 11)}_4 \underbrace{(7, 14, 8)}_5 \quad (4.16)$$

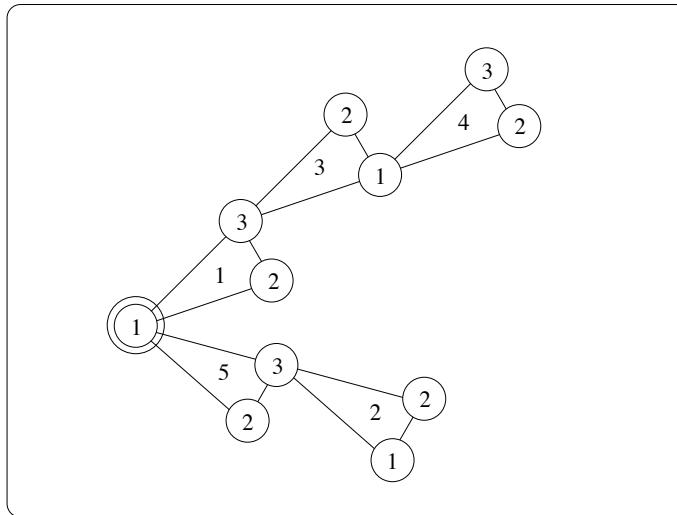
La Figure 4.16 illustre le cactus quotient obtenu à partir de celui donné à la Figure 4.15 ainsi que son étiquetage induit. On note qu'un sommet y a également été distingué; c'est le sommet correspondant à celui intersectant l'axe de symétrie.

Soit  $\mathcal{K}_{m,p/d}^\bullet$  l'ensemble des cactus  $m$ -aires étiquetés et pointés en un sommet et ayant  $p/d$   $m$ -gones. On considère l'application

$$\begin{array}{ccc} \Psi : & \mathbb{S}_p \times \text{Fix}_{\mathcal{K}_{m,p}} \sigma & \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathcal{K}_{m,p/d}^\bullet \\ & (\sigma, \mathcal{C}) & \mapsto (d, \mathcal{C}^\bullet) \end{array}$$

qui, à un couple  $(\sigma, \mathcal{C})$  où sigma est un automorphisme de  $\mathcal{C}$ , associe le couple  $(d, \mathcal{C}^\bullet)$ , où  $d$  est l'ordre de  $\sigma$  et  $\mathcal{C}^\bullet$  le cactus quotient tel que ci-haut décrit. On note que cette application est, en général, loin d'être injective. Il s'agit alors, étant donné un cactus quotient  $\mathcal{C}^\bullet$ , de calculer le nombre de *relèvements* de  $\mathcal{C}^\bullet$ , c'est-à-dire le nombre de cactus  $m$ -aires ayant un automorphisme donné  $\sigma$ , d'ordre  $d$ , partageant le même cactus quotient.

Nous illustrons ce calcul au moyen de l'exemple  $(\sigma, \mathcal{C}^\bullet)$ , où  $\sigma$  est donné par (4.16) et  $\mathcal{C}^\bullet$ , par la Figure 4.16. On considère l'étiquette 1 dans le cactus



**Figure 4.16:** Cactus quotient et son étiquetage induit.

quotient. Il n'y a, à rotation près, qu'une seule façon de placer l'étiquette 1 dans la structure-mère (c'est-à-dire que les trois positions possibles sont équivalentes). On considère ensuite l'image de 1 par  $\sigma$ . Dans notre cas, il s'agit de l'élément 15. Il y a deux endroits possibles où l'on peut placer l'étiquette 15, à savoir (voir Figure 4.15), là où se trouve le 15 ou le 2. De façon générale, si l'automorphisme est d'ordre  $d$ , il y aura  $\phi(d)$  façons de placer l'image de 1 par  $\sigma$  dans la structure-mère. Ceci découle du fait que le nombre de cycles de longueur  $d$  laissés fixes sous l'action d'une permutation cyclique donnée  $\rho$  de longueur  $d$  est  $\phi(d)$ : ce sont les puissances  $\rho^k$ , où  $k$  est relativement premier à  $d$  et  $1 \leq k \leq d$ . Il n'y a ensuite qu'une seule manière de placer les étiquettes correspondant aux autres éléments du cycle contenant le 1 dans  $\sigma$ .

On considère ensuite l'élément 2 dans le cactus quotient. Cet élément correspond au cycle (3 4 9). Dans notre cas, il y a trois choix de position pour l'élément 3. Une fois ce choix fait, les positions des éléments 4 et 9 seront alors automatiquement déterminées. Dans le cas général, il y a  $d$  possibilités. Le même raisonnement s'applique aux éléments 3, 4, ...,  $p/d$  de la structure quotient. Il y a donc en tout

$$\phi(d)d^{p/d-1} \quad (4.17)$$

relèvements possibles. Il ne reste plus qu'à déterminer le nombre de structures quotients possibles. Ce nombre est donné par

$$\left( (m-1)\frac{p}{d} + 1 \right) \frac{((p/d)-1)!}{(m-1)(p/d)+1} \binom{mp/d}{p/d} = ((p/d)-1)! \binom{mp/d}{p/d}, \quad (4.18)$$

qui correspond au nombre de cactus  $m$ -aires étiquetés, pointés en un sommet et

comportant  $p/d$  polygones. En multipliant les facteurs (4.15), (4.17) et (4.18), on obtient

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathcal{K}}_{m,p}| &= \frac{1}{p!} \left( \frac{(p-1)!}{(m-1)p+1} \binom{mp}{p} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{d|p \\ d>1}} \frac{p!}{d^{p/d} (p/d)!} \phi(d) d^{p/d-1} ((p/d)-1)! \binom{mp/d}{p/d} \right). \end{aligned}$$

La proposition suivante s'obtient après simplification de cette dernière expression et échange des rôles de  $d$  et  $p/d$ .

**Proposition 4.3.1** *Le nombre  $|\tilde{\mathcal{K}}_{m,p}|$  de cactus  $m$ -aires non étiquetés ayant  $p$   $m$ -gones est donné par*

$$|\tilde{\mathcal{K}}_{m,p}| = \frac{1}{p} \left( \frac{1}{(m-1)p+1} \binom{mp}{p} + \sum_{\substack{d|p \\ d<p}} \phi(p/d) \binom{md}{d} \right). \quad (4.19)$$

□

#### 4.4 Cactus $m$ -aires enracinés non étiquetés selon la distribution des sommets de chaque couleur

Désignons par  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(X_1, X_2, \dots, X_m)$  l'espèce des cactus  $m$ -aires étiquetés aux sommets. Il s'agit d'une espèce à  $m$  sortes  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , la sorte  $X_i$  représentant les sommets de couleur  $i$ . Désignons également par  $\mathcal{K}^\diamond$  l'espèce des cactus  $m$ -aires enracinés et par  $\mathcal{A}_i$  l'espèce des cactus  $m$ -aires *plantés* en un sommet de couleur  $i$ , c'est-à-dire, munis d'un sommet distingué de couleur  $i$  auquel est attachée une paire de demi arêtes. Les Figures 4.17 et 4.18 représentent respectivement un cactus ternaire enraciné et un cactus ternaire planté.

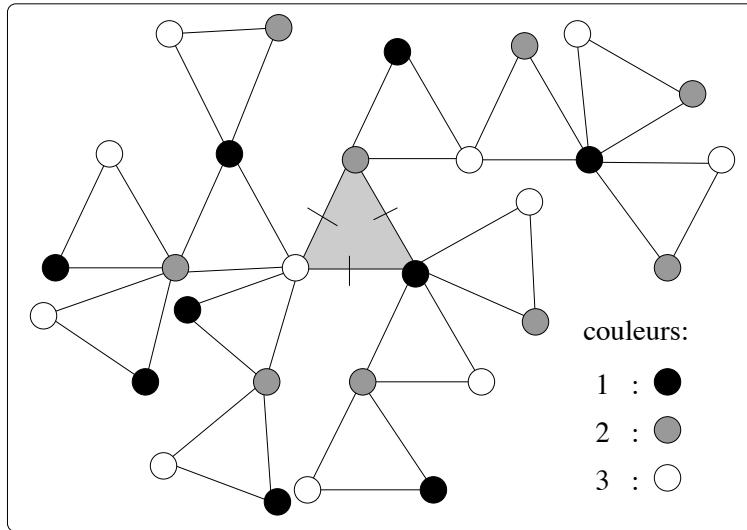
Le résultat suivant est essentiellement dû à Goulden et Jackson ([11]).

**Proposition 4.4.1** *Les espèces  $\mathcal{K}^\diamond$  et  $\mathcal{A}_i$ , pour  $i = 1, \dots, m$ , satisfont les identités combinatoires suivantes*

$$\mathcal{A}_i = X_i L(\hat{\mathcal{A}}_i), \quad (4.20)$$

$$\mathcal{K}^\diamond = \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \cdots \mathcal{A}_m, \quad (4.21)$$

où  $X_i$  désigne l'espèce des singltons de sorte (ou de couleur)  $i$ ,  $\hat{\mathcal{A}}_i := \prod_{j \neq i} \mathcal{A}_j$  désigne le produit de tous les  $\mathcal{A}_j$  sauf  $\mathcal{A}_i$  et  $L$ , l'espèce des listes.



**Figure 4.17:** Cactus ternaire enraciné.

**Preuve:** On remarque que le fait de planter un cactus  $m$ -aire en un sommet a pour effet de briser la symétrie circulaire autour de ce sommet, ce qui détermine un ordre linéaire sur les polygones voisins du sommet pointé. Si ce sommet, disons de couleur 1, est retiré, chacun de ces polygones adjacents peut être décomposé comme le produit de  $m-1$  cactus plantés ayant des racines de couleur  $2, 3, \dots, m$ , d'où l'équation (4.20) (voir la Figure 4.18). L'équation (4.21) est immédiate. Voir Figure 4.17.  $\square$

Afin de calculer la série génératrice associée à l'espèce  $K^\diamond$ , nous ferons appel à un résultat qui constitue à la fois un cas particulier de la formule de Good-Lagrange et une généralisation de la formule de Chottin (voir Proposition 4.1.3).

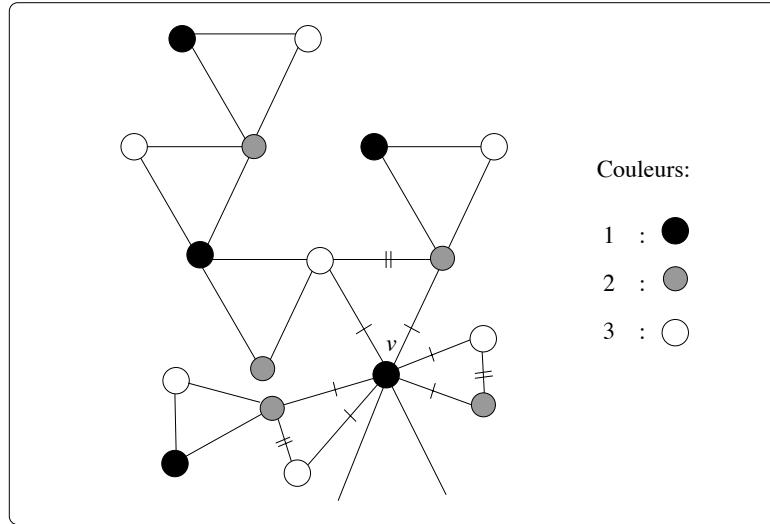
**Théorème 4.4.2 FORMULE D'INVERSION DE GOOD-LAGRANGE.** *Étant donnée  $A_1, A_2, \dots, A_m$  une suite de séries formelles en les variables  $x_1, x_2, \dots, x_m$  satisfaisant les relations  $A_i = x_i R_i(A_1, A_2, \dots, A_m)$  pour  $i = 1, \dots, m$ . Alors, pour toute série formelle  $F(t_1, \dots, t_m)$ , on a:*

$$[\vec{x}^{\vec{n}}]F(A_1(\vec{x}), \dots, A_m(\vec{x})) = [\vec{t}^{\vec{n}}]F(\vec{t})|K(\vec{t})|R_1^{n_1}(\vec{t}) \cdots R_m^{n_m}(\vec{t}), \quad (4.22)$$

où  $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_m)$  et  $K(\vec{t})$  est la matrice  $m \times m$  dont l'entrée  $(i, j)$  est donnée par

$$K(\vec{t})_{ij} = \delta_{ij} - \frac{t_j}{R_i(\vec{t})} \cdot \frac{\partial R_i(\vec{t})}{\partial t_j}. \quad (4.23)$$

$\square$



**Figure 4.18:** Cactus ternaire planté.

**Théorème 4.4.3 FORMULE DE CHOTTIN GÉNÉRALISÉE.** Soient  $A_1, A_2, \dots, A_m$  une suite de séries formelles en les variables  $x_1, x_2, \dots, x_m$  telles que pour tout  $i = 1, \dots, m$ , les relations

$$A_i = x_i \Phi_i(A_1 A_2 \cdots A_{i-1} A_{i+1} \cdots A_m) = x_i \Phi_i(\hat{A}_i) \quad (4.24)$$

sont satisfaites. Soit  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  et  $(n_1, n_2, \dots, n_m)$  deux suites d'entiers  $\geq 0$  telles que les deux conditions de cohérence suivantes sont satisfaites:

1.  $m - 1$  divise  $\sum_{i=1}^m (n_i - \alpha_i)$  (on pose alors  $p = (\sum_{i=1}^m (n_i - \alpha_i))/(m - 1)$ ),
2. Pour  $i = 1, \dots, m$ ,  $\alpha_i \leq n_i \leq \alpha_i + p$ .

Alors on a

$$\left[ \vec{x}^{\vec{n}} \right] A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \cdots A_m^{\alpha_m} = \left( \prod_{i=1}^m \left( 1 + \frac{\beta_i}{n_i} \right) - \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j}{n_j} \prod_{i \neq j} \left( 1 + \frac{\beta_i}{n_i} \right) \right) \left[ \vec{s}^{\vec{\beta}} \right] \prod_{i=1}^m \Phi_i^{n_i}(s_i), \quad (4.25)$$

où

$$\beta_i = p - n_i + \alpha_i.$$

**Preuve.** On utilise le théorème de Good-Lagrange (Théorème 4.4.2), avec

$$F(t_1, t_2, \dots, t_m) = t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \cdots t_m^{\alpha_m}$$

et

$$R_i(A_1, A_2, \dots, A_m) = \Phi_i(\widehat{A}_i),$$

ce qui donne

$$[\vec{x}^{\vec{n}}] A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \cdots A_m^{\alpha_m} = [\vec{t}^{\vec{n}}] \vec{t}^{\vec{\alpha}} |K(\vec{t})| \prod_{i=1}^m \Phi_i^{n_i}(\widehat{t}_i) \quad (4.26)$$

$$= [\vec{t}^{\vec{n}-\vec{\alpha}}] |K(\vec{t})| \prod_{i=1}^m \Phi_i^{n_i}(\widehat{t}_i). \quad (4.27)$$

La principale difficulté, qui consiste à calculer le déterminant  $|K(\vec{t})|$ , a été résolue dans ([11]). Ici, la matrice  $K(\vec{t})$  est donnée par

$$[K(\vec{t})]_{ij} = \delta_{ij} - \frac{t_j}{\Phi_i(\widehat{t}_i)} \cdot \frac{\partial}{\partial t_j} (\Phi_i(\widehat{t}_i)).$$

Puisque  $\Phi_i(\widehat{t}_i)$  est indépendant de  $t_i$ , on a

$$[K(\vec{t})]_{ii} = \delta_{ii} - \frac{t_i}{\Phi_i(\widehat{t}_i)} \cdot \frac{\partial}{\partial t_i} (\Phi_i(\widehat{t}_i)) = 1$$

et, si  $i \neq j$ ,

$$[K(\vec{t})]_{ij} = -\frac{t_j}{\Phi_i(\widehat{t}_i)} \cdot \frac{\partial}{\partial t_j} (\Phi_i(\widehat{t}_i)) = -\frac{\Phi'_i(\widehat{t}_i)}{\Phi_i(\widehat{t}_i)} t_j \frac{\partial}{\partial t_j} (\widehat{t}_i) = -\frac{\widehat{t}_i \Phi'_i(\widehat{t}_i)}{\Phi_i(\widehat{t}_i)},$$

et on voit que cette dernière expression ne dépend pas de  $j$ . Posons  $\Psi_i(\widehat{t}_i) = \widehat{t}_i \Phi'_i(\widehat{t}_i)$ . Pour simplifier, on écrira  $\Phi_i$  et  $\Psi_i$  respectivement au lieu de  $\Phi_i(\widehat{t}_i)$  et  $\Psi_i(\widehat{t}_i)$ . On a alors

$$\begin{aligned} [K(\vec{t})]_{ij} &= \delta_{ij} - (1 - \delta_{ij}) \frac{\Psi_i}{\Phi_i} \\ &= \frac{\delta_{ij}(\Phi_i + \Psi_i) - \Psi_i}{\Phi_i} \\ &= \frac{\Phi_i + \Psi_i}{\Phi_i} \left( \delta_{ij} - \frac{\Psi_i}{\Phi_i + \Psi_i} \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|K(\vec{t})| = \frac{\prod_{i=1}^m (\Phi_i + \Psi_i)}{\prod_{i=1}^m \Phi_i} \cdot \left| \delta_{ij} - \frac{\Psi_i}{\Phi_i + \Psi_i} \right|$$

Posons

$$A = \left[ -\frac{\Psi_i}{\Phi_i + \Psi_i} \right]_{m \times m} \text{ et } M = \left[ \delta_{ij} - \frac{\Psi_i}{\Phi_i + \Psi_i} \right]_{m \times m},$$

alors  $M$  est de la forme

$$M = I + A$$

où le rang de la matrice  $A$  est 1. Par la formule de Sherman-Morrison, ([29]), on a

$$|M| = 1 + \text{trace}(A) = 1 - \sum_{i=1}^m \frac{\Psi_i}{\Phi_i + \Psi_i}.$$

Ainsi,

$$|K(\vec{t})| = \frac{\prod_{i=1}^m (\Phi_i + \Psi_i)}{\prod_{i=1}^m \Phi_i} \cdot \left( 1 - \sum_{i=1}^m \frac{\Psi_i}{\Phi_i + \Psi_i} \right).$$

Il s'ensuit, d'après (4.27), que

$$[\vec{x}^\vec{n}] A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \cdots A_m^{\alpha_m} = [\vec{t}^{\vec{n}-\vec{\alpha}}] \prod_{i=1}^m \Phi_i^{n_i-1} (\Phi_i + \Psi_i) \left( 1 - \sum_{i=1}^m \frac{\Psi_i}{\Phi_i + \Psi_i} \right).$$

Définissons maintenant des coefficients  $c_{i,\beta_i}$  par

$$\Phi_i^{n_i}(\hat{t}_i) = \sum_{\beta_i \geq 0} c_{i,\beta_i} \hat{t}_i^{\beta_i}.$$

En dérivant chaque membre de cette égalité par rapport à  $\hat{t}_i$  et en multipliant par  $\hat{t}_i/n_i$ , on obtient

$$\Phi_i^{n_i-1}(\hat{t}_i) \Psi_i(\hat{t}_i) = \sum_{\beta_i \geq 0} \frac{\beta_i}{n_i} c_{i,\beta_i} \hat{t}_i^{\beta_i}.$$

Posons  $\beta = \sum_{i=1}^m \beta_i$  et  $\bar{t} = t_1 t_2 \cdots t_m$ . On a alors

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^m \Phi_i^{n_i-1} (\Phi_i + \Psi_i) \left( 1 - \sum_{i=1}^m \frac{\Psi_i}{\Phi_i + \Psi_i} \right) \\ &= \prod_{i=1}^m \left( \Phi_i^{n_i} + \Phi_i^{n_i-1} \Psi_i \right) - \sum_{j=1}^m \left( \Phi_j^{n_j-1} \Psi_j \cdot \prod_{i \neq j} \left( \Phi_i^{n_i} + \Phi_i^{n_i-1} \Psi_i \right) \right) \\ &= \prod_{i=1}^m \left( \sum_{\beta_i \geq 0} \left( 1 + \frac{\beta_i}{n_i} \right) c_{i,\beta_i} \hat{t}_i^{\beta_i} \right) \\ &- \sum_{j=1}^m \left( \sum_{\beta_j \geq 0} \frac{\beta_j}{n_j} c_{j,\beta_j} \hat{t}_j^{\beta_j} \right) \cdot \prod_{i \neq j} \left( \sum_{\beta_i \geq 0} \left( 1 + \frac{\beta_i}{n_i} \right) c_{i,\beta_i} \hat{t}_i^{\beta_i} \right) \\ &= \sum_{\beta_1, \dots, \beta_m \geq 0} \left( \prod_{i=1}^m \left( 1 + \frac{\beta_i}{n_i} \right) - \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j}{n_j} \prod_{i \neq j} \left( 1 + \frac{\beta_i}{n_i} \right) \right) \prod_{i=1}^m c_{i,\beta_i} \hat{t}_i^{\beta_i} \\ &= \sum_{\beta_1, \dots, \beta_m \geq 0} \left( \prod_{i=1}^m \left( 1 + \frac{\beta_i}{n_i} \right) - \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j}{n_j} \prod_{i \neq j} \left( 1 + \frac{\beta_i}{n_i} \right) \right) \prod_{i=1}^m c_{i,\beta_i} \frac{\bar{t}^{\beta_i}}{t_i^{\beta_i}} \\ &= \sum_{\beta_1, \dots, \beta_m \geq 0} \left( \prod_{i=1}^m \left( 1 + \frac{\beta_i}{n_i} \right) - \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j}{n_j} \prod_{i \neq j} \left( 1 + \frac{\beta_i}{n_i} \right) \right) \prod_{i=1}^m t_i^{\beta - \beta_i} \prod_{i=1}^m c_{i,\beta_i}. \quad (4.28) \end{aligned}$$

Or, dans cette dernière expression, on cherche le coefficient de  $t_1^{n_1-\alpha_1} \cdots t_m^{n_m-\alpha_m}$ . On en conclut que pour chaque  $i = 1, \dots, m$ , on doit avoir

$$n_i - \alpha_i = \beta - \beta_i. \quad (4.29)$$

En sommant pour  $i = 1, \dots, m$ , on obtient

$$n - \alpha = (m - 1)\beta. \quad (4.30)$$

Or,  $\beta = \sum_{i=1}^m \beta_i$  doit être entier, de sorte que  $m - 1$  doit diviser  $n - \alpha$ . De plus, chaque  $\beta_i$  doit être positif ou nul, de sorte que

$$\beta_i = \beta - n_i + \alpha_i = \frac{n - \alpha}{m - 1} - n_i + \alpha_i \geq 0.$$

Autrement dit,

$$n_i \leq \alpha_i + \frac{n - \alpha}{m - 1}.$$

Finalement, puisque

$$A_i = x_i \Phi_i(\hat{A}_i),$$

on doit nécessairement avoir  $\alpha_i \leq n_i$  pour tout  $i$ . On obtient alors la conclusion à partir de (4.28), (4.29) et (4.30) et du fait que

$$\prod_{i=1}^m c_{i,\beta_i} = [\vec{s}^{\vec{\beta}}] \prod_{i=1}^m \Phi_i^{n_i}(s_i).$$

□

Nous allons maintenant établir une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un cactus  $m$ -aire ayant une distribution donnée des couleurs de ses sommets. Soit  $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m)$  un vecteur d'entiers  $\geq 0$  et posons  $n = \sum_i n_i$ .

**Lemme 4.4.4** *Soit  $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m)$  un vecteur d'entiers  $\geq 0$  et posons  $n = \sum_i n_i$ . Alors il existe un cactus  $m$ -aire (enraciné ou non), ayant  $n_i$  sommets de couleur  $i$  si et seulement si*

1.  $p = (n - 1)/(m - 1)$  est un entier;
2.  $p \geq 1 \Rightarrow n_i \leq p, \forall i = 1, \dots, m$ .

**Preuve.** Les conditions sont clairement nécessaires puisque pour tout cactus  $m$ -aire, on a  $n = (m - 1)p + 1$ , où  $p$  est le nombre de polygones. La suffisance se démontre par récurrence sur  $p$ . Si  $p = 0$ , alors  $n = 1$  et on a un cactus dégénéré en un sommet. Si  $p \geq 1$ , alors toutes les composantes de  $\vec{n}$  sont strictement positives puisque sinon, en supposant par exemple, que  $n_1 = 0$ , on obtient

$$n = \sum_{i=2}^m n_i \leq (m - 1)p = n - 1,$$

une contradiction. Ainsi, on a  $n_i \geq 1$ , pour tout  $i$ . Si  $p = 1$ , alors  $n_i = 1$  pour tout  $i$ , et on a un cactus constitué d'un seul polygone. Si  $p > 1$ , on doit avoir  $n_i < p$  pour un certain  $i$  car sinon,  $n = mp$  et  $n = (m-1)p + 1$  conduit à une contradiction. Supposons, par exemple, que  $n_m < p$ . On définit un nouveau vecteur  $\vec{n}'$  par  $n'_m = n_m$  et  $n'_i = n_i - 1$  pour  $i = 1, \dots, m-1$ . Le vecteur  $\vec{n}'$  satisfait les conditions 1 et 2 avec  $(n'-1)/(m-1) = p-1$  et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour construire un cactus ayant  $\vec{n}'$  comme distribution des sommets de chaque couleur. Il suffit alors d'ajouter un nouveau polygone en l'attachant à n'importe quel sommet de couleur  $m$  pour obtenir un cactus ayant  $\vec{n}$  comme distribution des sommets de chaque couleur.  $\square$

Soit  $\tilde{\mathcal{K}}_{m,\vec{n}}^\diamond$  l'ensemble des cactus  $m$ -aires enracinés non étiquetés dont la distribution des sommets de chaque couleur est donnée par

$$\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m),$$

où  $n_i$  désigne le nombre de sommets de couleur  $i$ . On a vu que l'espèce  $\mathcal{K}^\diamond$  satisfait

$$\mathcal{K}^\diamond = A_1 A_2 \cdots A_m,$$

où chaque  $A_i$  satisfait

$$A_i = X_i L(\hat{A}_i).$$

L'espèce  $\mathcal{K}^\diamond$  est clairement asymétrique, de sorte que

$$\tilde{\mathcal{K}}_{m,\vec{n}}^\diamond(x_1, x_2, \dots, x_m) = \mathcal{K}^\diamond(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

On a donc

$$|\tilde{\mathcal{K}}_{m,\vec{n}}^\diamond| = [x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}] \mathcal{K}^\diamond = [x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}] A_1 A_2 \cdots A_m.$$

Il suffit d'appliquer le Théorème 4.4.3 avec

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 1$$

et

$$\Phi_i(t) = L(t) = (1-t)^{-1}$$

pour tout  $i = 1, \dots, m$ . On remarque que les conditions de cohérence du Théorème 4.4.3, dans ce cas particulier, coïncident précisément celles du lemme 4.4.4. En vertu du Théorème 4.4.3, on a

$$|\tilde{\mathcal{K}}_{m,\vec{n}}^\diamond| = [\vec{x}^{\vec{n}}] A_1 A_2 \cdots A_m \tag{4.32}$$

$$= \left( \prod_{i=1}^m \left( 1 + \frac{\beta_i}{n_i} \right) - \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j}{n_j} \prod_{i \neq j} \left( 1 + \frac{\beta_i}{n_i} \right) \right) [\vec{s}^{\vec{\beta}}] \prod_{i=1}^m L^{n_i}(s_i). \tag{4.33}$$

On calcule d'abord l'expression  $[s_i^{\beta_i}]L^{n_i}(s_i)$ . On a

$$\begin{aligned}[s_i^{\beta_i}]L^{n_i}(s_i) &= [s_i^{\beta_i}](1 - s_i)^{-n_i} \\ &= [s_i^{\beta_i}] \sum_{j \neq 0} \frac{(-n_i)(-n_i - 1) \cdots (-n_i - j + 1)}{j!} (-s_i)^j \\ &= [s_i^{\beta_i}] \sum_{j \neq 0} \frac{n_i(n_i + 1) \cdots (n_i + j - 1)}{j!} (s_i)^j \\ &= \frac{n_i(n_i + 1) \cdots (n_i + \beta_i - 1)}{\beta_i!}.\end{aligned}$$

Or,  $\beta_i = p - n_i$ , de sorte que

$$\begin{aligned}[s_i^{\beta_i}]L^{n_i}(s_i) &= \frac{n_i(n_i + 1) \cdots (n_i + p - n_i - 1)}{(p - n_i)!} \\ &= \frac{n_i}{p} \frac{p!}{n_i!(p - n_i)!} \\ &= \frac{n_i}{p} \binom{p}{n_i},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}[\vec{s}^{\vec{\beta}}] \prod_{i=1}^m L^{n_i}(s_i) &= \prod_{i=1}^m \frac{n_i}{p} \binom{p}{n_i} \\ &= \frac{1}{p^m} \prod_{i=1}^m n_i \binom{p}{n_i}. \tag{4.34}\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^m \left(1 + \frac{\beta_i}{n_i}\right) - \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j}{n_j} \prod_{i \neq j} \left(1 + \frac{\beta_i}{n_i}\right) \\ &= \prod_{i=1}^m \left(1 + \frac{p - n_i}{n_i}\right) - \sum_{j=1}^m \frac{p - n_j}{n_j} \prod_{i \neq j} \left(1 + \frac{p - n_i}{n_i}\right) \\ &= \prod_{i=1}^m \frac{p}{n_i} - \sum_{j=1}^m \frac{p - n_j}{n_j} \prod_{i \neq j} \frac{p}{n_i} \\ &= \frac{p^m}{\prod_{i=1}^m n_i} - \frac{1}{\prod_{i=1}^m n_i} \left( \sum_{j=1}^m (p - n_j) p^{m-1} \right) \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^m n_i} (p^m - mp^m + np^{m-1}) \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^m n_i} p^{m-1} ((1 - m)p + n) \\ &= \frac{p^{m-1}}{\prod_{i=1}^m n_i}, \tag{4.35}\end{aligned}$$

car  $(1 - m)p + n = n - (m - 1)p = n - n + 1 = 1$ . En multipliant (4.34) et (4.35), on obtient

$$|\tilde{K}_{m,\vec{n}}^\diamond| = \frac{p^{m-1}}{\prod_{i=1}^m n_i} \cdot \frac{1}{p^m} \prod_{i=1}^m n_i \binom{p}{n_i}$$

En simplifiant cette dernière expression, on trouve

**Proposition 4.4.5** *Soit  $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m)$  un vecteur satisfaisant les conditions du Lemme 4.4.4. Le nombre  $|\tilde{K}_{m,\vec{n}}^\diamond|$  de cactus  $m$ -aires enracinés, non étiquetés, et ayant  $\vec{n}$  comme distribution des sommets de chaque couleur est donné par*

$$|\tilde{K}_{m,\vec{n}}^\diamond| = \frac{1}{p} \prod_{i=1}^m \binom{p}{n_i}, \quad (4.36)$$

où  $p = (\sum_i n_i - 1)/(m - 1)$  désigne le nombre de polygones dans un tel cactus.

Remarquons que l'ensemble  $\tilde{K}_{m,\vec{n}}^\diamond$  est en bijection avec l'ensemble des factorisations du  $p$ -cycle  $\gamma_p = (1 2 \dots p)$  en un produit de  $m$  permutations  $g_1, g_2, \dots, g_m$  où, pour chaque  $i$ , le nombre de cycles de  $g_i$  est donné par  $n_i$ .

#### 4.5 Cactus $m$ -aires non enracinés non étiquetés selon la distribution des sommets de chaque couleur

Soit  $\mathcal{K}_{m,\vec{n}}$  l'ensemble des cactus  $m$ -aires non enracinés, étiquetés aux polygones, ayant  $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m)$  comme distribution des sommets de chaque couleur, où  $n_i$  désigne le nombre de sommets de couleur  $i$ . Par un raisonnement similaire à celui qu'on a fait au début de la section précédente, on conclut que

$$|\mathcal{K}_{m,\vec{n}}| = (p - 1)! |\tilde{K}_{m,\vec{n}}^\diamond|,$$

où  $|\tilde{K}_{m,\vec{n}}^\diamond|$  est donné par l'équation (4.36). D'où

$$|\mathcal{K}_{m,\vec{n}}| = \frac{(p - 1)!}{p} \prod_{i=1}^m \binom{p}{n_i}. \quad (4.37)$$

Soit  $\tilde{\mathcal{K}}_{m,\vec{n}}$  l'ensemble des cactus  $m$ -aires non enracinés, non étiquetés (ni aux sommets, ni aux polygones), ayant  $\vec{n}$  comme distribution des sommets de chaque couleur. Pour déterminer le cardinal de cet ensemble, on utilise essentiellement la même technique qu'à la section 4.3. On remarque d'abord que le fait de réétiqueter les polygones n'affecte pas la distribution des sommets de chaque couleur, de sorte qu'on peut appliquer le lemme de Burnside:

$$|\tilde{\mathcal{K}}_{m,\vec{n}}| = \left| \frac{\mathcal{K}_{m,\vec{n}}}{\mathbb{S}_p} \right| = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_p} |\text{Fix}_{\mathcal{K}_{m,\vec{n}}} \sigma|.$$

On isole le terme correspondant à  $\sigma = \text{Id}$  qui est donné par l'équation (4.37). On note qu'ici encore, si un cactus admet un automorphisme, celui-ci sera exprimé par une permutation régulière, de sorte qu'on peut écrire

$$|\tilde{\mathcal{K}}_{m,\vec{n}}| = \frac{1}{p!} \left( \frac{(p-1)!}{p} \prod_{i=1}^m \binom{p}{n_i} + \sum_{\substack{d \mid p \\ d > 1}} \sum_{\substack{\sigma \in \mathbb{S}_p \\ \lambda(\sigma) = d^{p/d}}} |\text{Fix}_{\mathcal{K}_{m,\vec{n}}} \sigma| \right).$$

Étant donné qu'on tient compte de la distribution des sommets de chaque couleur, il faut compter séparément, pour chaque  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , les cactus laissés fixes sous  $\sigma$  et tels que l'axe de symétrie intersecte un sommet de couleur  $i$ . Désignons cet ensemble par  $\text{Fix}_{\mathcal{K}_{m,\vec{n}}}(\sigma, i)$ . On a alors

$$|\tilde{\mathcal{K}}_{m,\vec{n}}| = \frac{1}{p!} \left( \frac{(p-1)!}{p} \prod_{i=1}^m \binom{p}{n_i} + \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{d \mid p \\ d > 1}} \sum_{\substack{\sigma \in \mathbb{S}_p \\ \lambda(\sigma) = d^{p/d}}} |\text{Fix}_{\mathcal{K}_{m,\vec{n}}}(\sigma, i)| \right).$$

Nous devons imposer une contrainte supplémentaire sur  $d$ . En effet, si un cactus admet un automorphisme non trivial qui consiste en une rotation autour d'un sommet de couleur  $i$ , alors  $d$  doit diviser simultanément tous les  $n_j$ ,  $j \neq i$  et  $n_i - 1$ , ce qu'on dénotera par  $d|(\vec{n} - \vec{e}_i)$ , où  $\vec{e}_i$  désigne le vecteur de longueur  $m$  admettant un 1 à la  $i^{\text{ème}}$  composante et 0 ailleurs. Par exemple, en examinant le cactus illustré à la Figure 4.15, qui admet un automorphisme d'ordre 3 autour d'un sommet de couleur 1, on a bien  $d|(\vec{n} - \vec{e}_1)$  car pour ce cactus,  $\vec{n} = (7, 15, 9)$ . Puisque  $|\text{Fix}_{\mathcal{K}_{m,\vec{n}}}(\sigma, i)|$  ne dépend que du type cyclique de  $\sigma$ , et qu'il y a  $p!/(d^{p/d}(p/d)!)$  permutations de type  $d^{p/d}$ , alors on peut écrire

$$|\tilde{\mathcal{K}}_{m,\vec{n}}| = \frac{1}{p!} \left( \frac{(p-1)!}{p} \prod_{i=1}^m \binom{p}{n_i} + \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{d \mid (p, \vec{n} - \vec{e}_i) \\ d > 1}} \frac{p!}{d^{p/d}(p/d)!} |\text{Fix}_{\mathcal{K}_{m,\vec{n}}}(\sigma_0, i)| \right), \quad (4.38)$$

où  $\sigma_0$  est une permutation particulière de type  $d^{p/d}$ .

On s'intéresse maintenant à la distribution des sommets de chaque couleur dans le cactus quotient. Supposons qu'un cactus  $\mathcal{C}$  admette un automorphisme d'ordre  $d$  autour d'un sommet de couleur  $i$  et une distribution des sommets de chaque couleur donnée par  $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m)$ , alors la distribution  $\vec{n}' = (n'_1, n'_2, \dots, n'_m)$  des sommets de chaque couleur dans le cactus quotient sera donnée par

$$n'_j = \begin{cases} n_j/d, & \text{si } j \neq i, \\ (n_j - 1)/d + 1, & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Dans notre exemple, on a  $\vec{n} = (7, 15, 9)$  et  $\vec{n}' = (3, 5, 3)$ . Il ne reste plus qu'à calculer  $|\text{Fix}_{\mathcal{K}_{m,\vec{n}}}(\sigma_0, i)|$ . On a

$$|\text{Fix}_{\mathcal{K}_{m,\vec{n}}}(\sigma_0, i)| = (|\mathcal{K}_{m,\vec{n}'}|) \left( \frac{n_i - 1}{d} + 1 \right) \left( \phi(d)d^{(p/d)-1} \right), \quad (4.39)$$

où le produit des deux premiers facteurs indique le nombre de cactus  $m$ -aires étiquetés, ayant  $\vec{n}'$  comme distribution des sommets de chaque couleur et pointés en un sommet de couleur  $i$ , tandis que le dernier facteur indique le nombre de relèvements de ces structures quotients. En combinant les équations (4.38) et (4.39) et après simplification, on obtient la proposition suivante.

**Proposition 4.5.1** *Soit  $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m)$  un vecteur satisfaisant les conditions du Lemme 4.4.4. Le nombre  $|\tilde{\mathcal{K}}_{m,\vec{n}}|$  de cactus  $m$ -aires non enracinés, non étiquetés, et ayant  $\vec{n}$  comme distribution des sommets de chaque couleur est donné par*

$$|\tilde{\mathcal{K}}_{m,\vec{n}}| = \frac{1}{p^2} \left( \prod_{i=1}^m \binom{p}{n_i} + \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{d \mid (n_i - e_i) \\ d > 1}} \phi(d)(p - n_i + 1) \binom{p/d}{(n_i - 1)/d} \prod_{j \neq i} \binom{p/d}{n_j/d} \right) \quad (4.40)$$

où  $p = (\sum_i n_i - 1)/(m - 1)$  désigne le nombre de polygones dans un tel cactus.

$\vec{n}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{m,\vec{n}}^\diamond$	$\tilde{\mathcal{K}}_{m,\vec{n}}$
(1, 3, 3)	1	1
(2, 2, 3)	3	1
(1, 4, 4)	1	1
(2, 3, 4)	6	2
(3, 3, 3)	16	4
(3, 3, 5)	20	4
(1, 3, 3, 3)	1	1
(2, 2, 3, 3)	3	1
(2, 3, 4, 4)	6	2
(4, 4, 4, 4)	125	25
<hr/>		
$\vec{n}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{m,\vec{n}}^\diamond$	$\tilde{\mathcal{K}}_{m,\vec{n}}$
(7, 7)	226512	17424
(5, 6)	5292	536
(6, 6, 7)	28224	3138
(4, 4, 5)	225	39
(5, 6, 8)	10584	1176
(5, 5, 5)	1323	189
(4, 6, 7)	1960	248
(5, 6, 6)	5488	692
(3, 4, 4, 5)	50	10
(6, 6, 6, 7)	21952	2752

**Tableau 4.1:** Cactus non étiquetés, enracinés ou non, selon la distribution des sommets de chaque couleur.

#### 4.6 Cactus $m$ -aires enracinés non étiquetés selon la distribution des degrés des sommets

On s'intéresse maintenant à dénombrer les cactus  $m$ -aires ayant une distribution des degrés des sommets donnée. On définit le *degré* d'un sommet dans un cactus  $m$ -aire comme étant le nombre de polygones qui lui sont incidents. Si  $m > 2$ , c'est en fait la moitié du degré usuel de la théorie des graphes. Par exemple le sommet de couleur 1 situé au centre du cactus donné à Figure 4.15 est de degré 6. Considérons un cactus  $m$ -aire  $\mathcal{C}$ . Pour  $i = 1, \dots, m$ , on pose

$$\vec{k}_i = (k_{i1}, k_{i2}, k_{i3}, \dots)$$

où  $k_{ij}$  désigne le nombre de sommets de couleur  $i$  et de degré  $j$  dans le cactus  $\mathcal{C}$ . Pour simplifier la notation, on introduit la matrice  $K$ , dont les lignes correspondent aux vecteurs  $\vec{k}_i$ . Posons également

$$n = \sum_{ij} k_{ij},$$

et supposons que  $\mathcal{C}$  admette  $p$  polygones. Puisque chaque polygone contient exactement un sommet de couleur  $i$ , alors on a

$$\sum_j jk_{ij} = p, \quad \text{pour tout } i. \quad (4.41)$$

Comme conséquence du Lemme 4.4.4, on a également

$$n = (m - 1)p + 1, \quad (4.42)$$

et évidemment

$$p \geq 1 \Rightarrow k_{i0} = 0 \quad \text{pour tout } i. \quad (4.43)$$

On peut montrer que ces trois conditions sont également suffisantes pour conclure à l'existence d'un cactus  $m$ -aire ayant la matrice  $K$  comme distribution des degrés des sommets. Soit  $\tilde{\mathcal{K}}_{m,K}^\diamond$  l'ensemble des cactus  $m$ -aires enracinés non étiquetés ayant  $k_{ij}$  sommets de couleur  $i$  et de degré  $j$ . Le cardinal de cet ensemble est donné dans ([11]). La démonstration est semblable à celle de la Proposition 4.4.5.

**Théorème 4.6.1 GOULDEN-JACKSON.** *Soit une matrice  $K$  de format  $m \times \infty$ , où  $[K]_{ij} = k_{ij}$  désigne le nombre de sommets de couleurs  $i$  et de degré  $j$ ,  $n = \sum_{ij} k_{ij}$  et  $p = (n - 1)/(m - 1)$ . Supposons que  $K$ ,  $n$  et  $p$  satisfont les conditions de cohérence (4.41), (4.42) et (4.43). Alors le nombre  $|\tilde{\mathcal{K}}_{m,K}^\diamond|$  de cactus  $m$ -aires enracinés non étiquetés ayant  $k_{ij}$  sommets de couleur  $i$  et de degré  $j$  est donné par*

$$|\tilde{\mathcal{K}}_{m,K}^\diamond| = \frac{p^{m-1}}{\prod_{i=1}^m n_i} \cdot \prod_{i=1}^m \binom{n_i}{\vec{k}_i}, \quad (4.44)$$

où  $\vec{k}_i$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $K$  et  $n_i = \sum_j k_{ij}$ .  $\square$

Remarquons que l'ensemble  $\tilde{\mathcal{K}}_{m,K}^\diamond$  est en bijection avec l'ensemble des factorisations du  $p$ -cycle  $\gamma_p = (1\ 2\ \dots\ p)$  en un produit de  $m$  permutations  $g_1, g_2, \dots, g_m$  où, pour chaque  $i$ , le type cyclique de  $g_i$  est donné par  $1^{k_{i1}} 2^{k_{i2}} 3^{k_{i3}} \dots$ , signifiant que la permutation  $g_i$  admet  $k_{ij}$  cycles de longueur  $j$ .

#### 4.7 Cactus $m$ -aires non enracinés non étiquetés selon la distribution des degrés

Désignons par  $\mathcal{K}_{m,K}$  l'ensemble des cactus  $m$ -aires étiquetés aux polygones, dont la distribution des degrés des sommets est donnée par la matrice  $K$ . On a alors

$$|\mathcal{K}_{m,K}| = (p-1)! |\tilde{\mathcal{K}}_{m,K}^\diamond|,$$

où  $|\tilde{\mathcal{K}}_{m,K}^\diamond|$  est donné à l'équation (4.44). On a alors

$$|\mathcal{K}_{m,K}| = \frac{p^{m-1}(p-1)!}{\prod_{i=1}^m n_i} \cdot \prod_{i=1}^m \binom{n_i}{\vec{k}_i}. \quad (4.45)$$

Soit  $\tilde{\mathcal{K}}_{m,K} = \mathcal{K}_{m,K}/\mathbb{S}_p$  l'ensemble des cactus  $m$ -aires non enracinés non étiquetés (ni aux sommets, ni aux polygones) dont la distribution des degrés des sommets est donnée par la matrice  $K$ . Pour calculer le cardinal de cet ensemble, on adopte une approche très similaire à celle qu'on a utilisé à la section 4.5. On obtient alors

$$|\tilde{\mathcal{K}}_{m,K}| = \frac{1}{p!} \left( |\mathcal{K}_{m,K}| + \sum_{i=1}^m \sum_{j \in \text{supp}(\vec{k}_i)} \sum_{\substack{d \mid p \\ d > 1}} \sum_{\substack{\sigma \in \mathbb{S}_p \\ \lambda(\sigma) = d}} |\text{Fix}_{\mathcal{K}_{m,K}}(\sigma, i, j)| \right),$$

où  $\text{supp}(\vec{k}_i)$  désigne le support de  $\vec{k}_i$ , défini par

$$\text{supp}(\vec{k}_i) = \{j \mid k_{ij} \neq 0\}$$

et  $|\text{Fix}_{\mathcal{K}_{m,K}}(\sigma, i, j)|$  désigne le nombre de cactus  $m$ -aires étiquetés aux polygones ayant la matrice  $K$  comme distribution des degrés de chaque couleur, laissés fixes sous  $\sigma$ , et tels que l'axe de rotation intersecte un sommet de couleur  $i$  et de degré  $j$ . Dans ce cas-ci,  $d$  doit diviser tous les  $k_{i'j'}$  avec  $(i', j') \neq (i, j)$  et doit aussi diviser  $k_{ij} - 1$ , ce qu'on notera  $d \in \text{Div}(K - E_{ij})$ , où  $E_{ij}$  désigne la matrice admettant un 1 en position  $ij$  et 0 ailleurs. Puisque le terme  $|\text{Fix}_{\mathcal{K}_{m,K}}(\sigma, i, j)|$  ne dépend que du type cyclique de  $\sigma$ , et qu'il y a  $p!/(d^{p/d}(p/d)!)$  permutations cycliques de type  $d^{p/d}$ , on a alors

$$|\tilde{\mathcal{K}}_{m,K}| = \frac{1}{p!} \left( |\mathcal{K}_{m,K}| + \sum_{(i,j) \in \text{supp}(K)} \sum_{\substack{d \in \text{Div}(p, K - E_{ij}) \\ d > 1}} \frac{p!}{d^{p/d}(p/d)!} |\text{Fix}_{\mathcal{K}_{m,K}}(\sigma_0, i, j)| \right), \quad (4.46)$$

où  $\text{supp}(K)$  est donné par

$$\text{supp}(K) = \{(i, j) \mid k_{ij} \neq 0\},$$

et où  $\sigma_0$  désigne une permutation particulière de type cyclique  $d^{p/d}$ . La prochaine étape consiste à déterminer la matrice  $K'$  correspondant à la distribution des degrés des sommets dans la structure quotient. On constate que

$$K' = \frac{K - E_{ij}}{d} + E_{i,j/d}. \quad (4.47)$$

Par exemple, les distributions des degrés des sommets dans les cactus donnés à la Figure 4.15 et 4.16 satisfont la relation (4.47). On obtient alors

$$|\text{Fix}_{\mathcal{K}_{m,K}}(\sigma_0, i, j)| = (|\mathcal{K}_{m,K'}|) \left( \frac{k_{i,j/d}}{d} + 1 \right) (\phi(d)d^{p/d-1}), \quad (4.48)$$

où le premier facteur donne le nombre de cactus  $m$ -aires étiquetés aux polygones ayant la matrice  $K'$  comme distribution des degrés des sommets, le deuxième facteur indique le nombre de sommets de couleur  $i$  et de degré  $j/d$  dans le cactus quotient et le troisième facteur indique le nombre de relèvements. Dans notre cas, on a

$$|\mathcal{K}_{m,K'}| = \frac{(p/d)^{m-1}(p/d-1)!}{\left(\frac{n_i-1}{d}+1\right) \prod_{\ell \neq i} n_\ell/d} \left( \frac{\frac{n_i-1}{d}+1}{\frac{k_i-\vec{e}_j}{d}+\vec{e}_{j/d}} \right) \prod_{\ell \neq i} \left( \frac{n_\ell/d}{k_\ell/d} \right). \quad (4.49)$$

En combinant les équations (4.45), (4.46), (4.48) et (4.49) et après simplifications, on obtient le résultat suivant.

**Théorème 4.7.1** *Soit la matrice  $K$  de format  $m \times \infty$ , où  $[K]_{ij} = k_{ij}$  représente le nombre de sommets de couleurs  $i$  et de degré  $j$ ,  $n = \sum_{ij} k_{ij}$  et  $p = (n-1)/(m-1)$ . Supposons que  $K$ ,  $n$  et  $p$  satisfont les conditions de cohérence (4.41), (4.42) et (4.43). Alors le nombre  $|\tilde{\mathcal{K}}_{m,K}|$  de cactus  $m$ -aires non étiquetés ayant  $k_{ij}$  sommets de couleur  $i$  et de degré  $j$  est donné par*

$$|\tilde{\mathcal{K}}_{m,K}| = p^{m-2} \left( \prod_{i=1}^m \frac{1}{n_i} \binom{n_i}{k_i} + \sum_{(i,j) \in \text{supp}(K)} \sum_{\substack{d > 1 \\ d \in \text{Div}(K-E_{ij})}} \frac{\phi(d) \binom{\frac{n_i-1}{d}}{\frac{k_i-\vec{e}_j}{d}}}{\prod_{\ell \neq i} \binom{n_\ell/d}{k_\ell/d}} \right),$$

où  $\vec{k}_i$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $K$  et  $\text{supp}(K)$  désigne le support de  $K$ , c'est-à-dire  $\text{supp}(K) = \{(i, j) \mid k_{ij} \neq 0\}$ .  $\square$

$m$	$K$	$\tilde{\mathcal{K}}_{m,K}^\diamond$	$\tilde{\mathcal{K}}_{m,K}$
2	(1 <sup>5</sup> 3 <sup>2</sup> , 2 <sup>7</sup> )	14	1
2	(1 <sup>2</sup> 2 <sup>2</sup> 4 <sup>1</sup> , 1 <sup>2</sup> 2 <sup>4</sup> )	150	16
3	(1 <sup>3</sup> 2 <sup>3</sup> , 1 <sup>3</sup> 2 <sup>3</sup> , 1 <sup>6</sup> 3 <sup>1</sup> )	900	102
3	(1 <sup>2</sup> 2 <sup>1</sup> , 1 <sup>2</sup> 2 <sup>1</sup> , 1 <sup>2</sup> 2 <sup>1</sup> )	16	4
3	(1 <sup>2</sup> 2 <sup>2</sup> , 1 <sup>2</sup> 2 <sup>2</sup> , 1 <sup>4</sup> 2 <sup>1</sup> )	81	15
3	(1 <sup>3</sup> 2 <sup>1</sup> 4 <sup>1</sup> , 1 <sup>3</sup> 2 <sup>3</sup> , 1 <sup>7</sup> 2 <sup>1</sup> )	1080	120
3	(1 <sup>3</sup> 2 <sup>2</sup> , 1 <sup>3</sup> 2 <sup>2</sup> , 1 <sup>3</sup> 2 <sup>2</sup> )	392	56
3	(1 <sup>2</sup> 3 <sup>2</sup> , 1 <sup>4</sup> 2 <sup>2</sup> , 1 <sup>6</sup> 2 <sup>1</sup> )	240	32
3	(2 <sup>4</sup> , 1 <sup>4</sup> 2 <sup>2</sup> , 1 <sup>6</sup> 2 <sup>1</sup> )	40	6
3	(1 <sup>4</sup> 4 <sup>1</sup> , 1 <sup>4</sup> 2 <sup>2</sup> , 1 <sup>4</sup> 2 <sup>2</sup> )	400	52
3	(1 <sup>2</sup> 2 <sup>3</sup> , 1 <sup>4</sup> 2 <sup>2</sup> , 1 <sup>4</sup> 2 <sup>2</sup> )	800	104

**Tableau 4.2:** Quelques valeurs de  $\tilde{\mathcal{K}}_{m,K}^\diamond$  et  $\tilde{\mathcal{K}}_{m,K}$  pour des distributions des degrés des sommets données.

## CONCLUSION

La plupart des résultats exposés dans cette thèse ont été obtenus en utilisant les divers concepts et méthodes de la théorie des espèces de structures. Cette théorie contient tous les outils théoriques pour obtenir le dénombrement de structures non étiquetées. Cependant, nous avons pu constater que la méthode de Liskovets est particulièrement efficace dans le cas des cartes planaires et des cactus  $m$ -aires non enracinés. Ceci laisse présager, plus généralement, que la méthode de Liskovets puisse être utilisée pour le dénombrement de structures non étiquetées plongées sur la sphère ou dans le plan.

L'harmonisation de ces deux approches nous a permis d'obtenir plusieurs résultats nouveaux, notamment tous les résultats concernant les cartes à deux faces, et aussi, le dénombrement de cactus non enracinés, selon la distribution des sommets de chaque couleur et selon la distribution des degrés des sommets de chaque couleur.

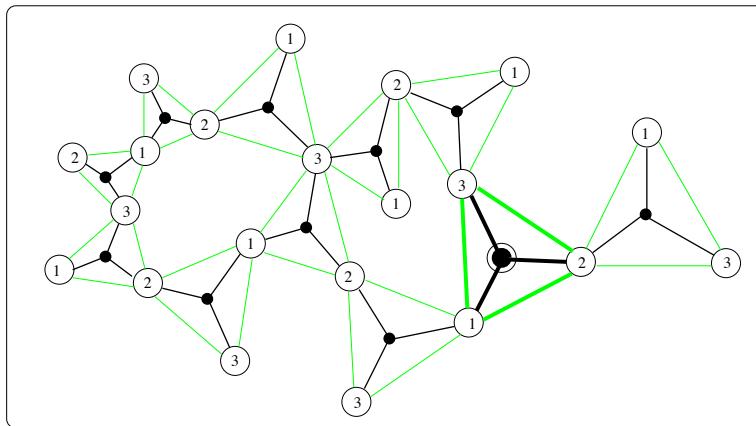
Mentionnons également la bijection entre les cactus  $m$ -aires et les arborescences ordonnées  $m$ -aires.

Les sujets abordés dans cette thèse ouvrent la voie vers plusieurs champs de recherche possibles. On pourrait par exemple, étudier les cartes planaires ayant un nombre prédéterminé de faces. Nous avons obtenu certains résultats dans le cas de trois faces. Une autre avenue possible serait d'étudier les cartes de genre  $g > 0$ . Certains travaux ont été réalisés à ce sujet, notamment ([12]).

Les constellations  $m$ -aires constituent une généralisation des cactus  $m$ -aires. Une constellation  $m$ -aire est définie de manière analogue aux cactus, sauf qu'une constellation peut admettre des cycles. La Figure 4.19 donne un exemple de constellation ternaire enracinée. Dans un article récent ([5]), les auteurs ont démontré entre autres, que le nombre  $|\mathcal{C}_{m,p}^\diamond|$  de constellations enracinées sur  $p$  polygones (ou étoiles) est donné par

$$|\mathcal{C}_{m,p}^\diamond| = \frac{(m+1)m^{p-1}}{((m-1)p+2)((m-1)p+1)} \binom{mp}{p}.$$

Finalement, comme, on l'a mentionné dans l'introduction, les cactus  $m$ -aires sont reliés à des polynômes complexes ayant au plus  $m$  valeurs critiques, une valeur critique étant définie comme étant la valeur du polynôme en un point critique. Pour obtenir une bijection entre les cactus  $m$ -aires et de tels polynômes,



**Figure 4.19:** Une constellation enracinée.

il faut étudier l'action d'un certain groupe de tresses sur les cactus. Cétons à cet effet ([9]). Le principal problème ouvert ici est le dénombrement des orbites de cactus  $m$ -aires sous l'action du groupe des tresses.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. I. ARNOLD. *Topological classification of trigonometric polynomials and combinatorics of graphs with an equal number of vertices and edges*, Functional Analysis and its Applications. **30**, (1996), 1–14.
- [2] L. BABAI, W. IMRICH et L. LOVÁSZ. *Finite homeomorphism groups of the 2-sphere*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, **8**. Topics in Topology, Keszthely, (1972), 61–75.
- [3] E.A. BENDER, E.R. CANFIELD et R.W. ROBINSON. *The enumeration of maps on the torus and the projective plane*, Can. Math. Bulletin. Vol **31** (3), (1988), 257–271.
- [4] F. BERGERON, G. LABELLE, et P. LEROUX. *Combinatorial species and tree-like structures*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Vol **67**, Cambridge University Press, (1997).
- [5] M. BOUSQUET-MÉLOU et G. SCHAEFFER. *Enumeration of planar constellations*, Advances in applied mathematics. (À paraître).
- [6] L. CHOTTIN et R. CORI. *Enumération d’arbres et formules d’inversion de séries formelles*, Journal of combinatorial theory, Series B, **31**, (1981), 23–45.
- [7] R. CORI. *Bijective census of rooted planar maps: A survey*, Proceedings of the fifth conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, (1993).
- [8] R. CORI et A. MACHI. *Maps, hypermaps and their automorphisms: a survey*, I, II, III. Expositiones Mathematicae, vol. **10**, (1992), 403–427, 429–447, 449–467.
- [9] M. EL MARRAKI, N. HANUSSE, J. ZIPPERER, A. ZVONKIN. *Cacti, Braids and Complex Polynomials*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire, (1997), Vol. 37, url address: <http://cartan.u-strasbourg.fr/~slc>.
- [10] I. GESSEL et G. LABELLE. *Lagrange Inversion for Species*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, **72**, (1995), 95–117.
- [11] I. P. GOULDEN et D. M. JACKSON, *The Combinatorial Relationship Between Trees, Cacti and Certain Connection Coefficients for the Symmetric*

- Group*, European J. Comb. **13**, (1992), 357–365.
- [12] A. GOUPIL et G. SCHAEFFER. *Factoring  $n$ -cycles and counting maps of given genus*, Journal Européen de Combinatoire. À paraître.
  - [13] K. HUSIMI. *Note on Mayer's theory of cluster integrals*, J. Chem. Phys, **18**, (1950), 682–684.
  - [14] A. JOYAL. *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Advances in Mathematics, **42**, (1981), 1–82.
  - [15] A. JOYAL. *Foncteurs analytiques et espèces de structures*, Lecture Notes in Mathematics, 1234, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, and New Yory, (1986).
  - [16] G. LABELLE. *On asymmetric structures*, Discrete Mathematics, **99**, (1989), 141–164.
  - [17] G. LABELLE et P. LEROUX. *Enumeration of (uni- or bicolored) plane trees according to their degree distribution*, Disc. Math. **157**, (1996), 227–240.
  - [18] J. LABELLE. *Quelques espèces sur des ensembles de petites cardinalités*, Annales des Sciences Mathématiques du Québec, **11**, (1985), 31–58.
  - [19] V.A. LISKOVENTS et T.R. WALSH. *The enumeration of non-isomorphic 2-connected planar maps*, Canad. J. Math. **35**, (1983), 417–435.
  - [20] V.A. LISKOVENTS. *A census of non-isomorphic planar maps*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai **25**, Algebraic Methods in Graph Th. (1981), 479–494.
  - [21] V.A. LISKOVENTS. *Enumeration of non-isomorphic planar maps*, Selecta Math. Soviet. **4**, (1985), 303–323.
  - [22] N. MAGOT. *Cartes planaires et fonctions de Belyi: Aspects algorithmiques et expérimentaux*, Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux, (1997), 150p.
  - [23] J.W. MOON, *Counting Labelled Trees*, Canadian Mathematical Monographs **1**, Canadian Mathematical Society, 1970.
  - [24] N. MAGOT. *Cartes planaires et fonctions de Belyi*, Mémoire de DEA, Université de Bordeaux, (1994).
  - [25] N. MAGOT et A. ZVONKIN. *Belyi Functions for Archimedean Solids*, Formal power series and algebraic combinatorics, 9th Conference Proceedings, Vol. **3**, (1997), 373–389.
  - [26] R. J. RIDDELL. *Contributions to the theory of condensation*, Dissertation, Univ. of Michigan, Ann Arbor, 1951.

- [27] R.W. ROBINSON. *Enumeration of Non-Separable Graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, **9**, (1970), 327–356.
- [28] G. SHABAT et A. ZVONKIN. *Plane trees and algebraic numbers*, Contemporary Math. **178** (1994), 233–275.
- [29] J. SHERMAN, W. J. MORRISON. *Adjustments of an inverse matrix corresponding to changes in the elements of a given row or a given column of the original matrix*, Ann. Math. Stat., **20** (1949), 621.
- [30] W. T. TUTTE. *A census of Slicings*, Can J. Math. **14** (1962), 708–722.
- [31] W. T. TUTTE. *A census of Planar maps*, Can J. Math. **15** (1963), 249–271.
- [32] W. T. TUTTE. *The number of plane planted trees with a given partition*, Amer. Math. Monthly, **71** (1964), 272–277.
- [33] W. T. TUTTE. *On the enumeration of planar maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 64–74.
- [34] G. E. UHLENBECK, G. W. FORD. *Lectures in Statistical Mechanics*, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1963.