

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

COMBINATOIRE DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS  
DIFFÉRENTIELLES ET AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

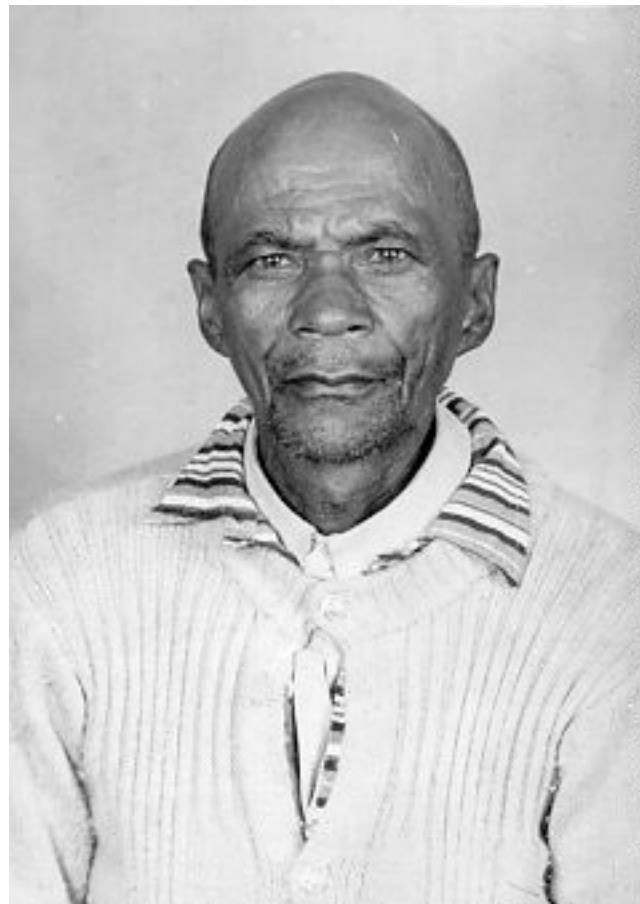
THÈSE  
PRÉSENTÉE  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

PAR  
RANDRIANIRINA BENJAMIN

OCTOBRE 1998

ii

## HOMMAGE À MON PÈRE



**RABOTO Noël (Vers 1916 – 1988)**

— ... petit ... je n'ai ni la force ni le moyen de financer tes études. Mais si tes frères, si les gens acceptent de t'aider, fais-le. Car moi, si je ne sais même pas écrire mon nom, ce n'est pas de ma faute!... Apprends-moi seulement à écrire mon nom! (1973).

— ... Père, j'écris ton Nom pour que le monde entier le sache. Car seule ta parole m'a donné assez de force pour continuer jusqu'au bout. Je suis fier de toi, Père. *Et je te dédie cette thèse, car c'est l'accomplissement de tes rêves, de nos rêves à nous tous* (1998).



## REMERCIEMENTS

*Maintenant donc ces trois-là demeurent, la foi, l'espérance et l'amour, mais l'amour est la plus grande. I Cor.13,13*

Mes sincères remerciements s'adressent

- en premier lieu, à mes deux directeurs Gilbert Labelle et Pierre Leroux, professeurs à l'Université du Québec à Montréal, qui n'ont pas menagé leurs efforts, en n'hésitant pas à travailler pendant les vacances d'été et les fins de semaines pour les mises aux points. Sans leurs encouragements et leurs interventions constantes et hebdomadaires, cette thèse n'aurait sûrement pas vu le jour. Qu'ils trouvent ici l'expression de mes sincères reconnaissances,
- à G. Viennot, de l'Université de Bordeaux I, pour ses conseils et son précieux manuscrit sur les historiographes,
- à la formidable équipe du LACIM dont le dynamisme est très encourageant,
- à ma collègue et amie Mme Camille Ralaibozaka-Ratoandroarilala, de l'Université de Fianarantsoa Madagascar, pour ses encouragements. C'est grâce à son intervention que j'ai pu poursuivre mes études à Montréal. Ainsi qu'à Gérard, Solo Randriamahaleo et les autres,
- à D. Dumont de l'Université de Strasbourg, qui m'a initié à la combinatoire,
- à Manon et Stéphanie du LACIM pour leur servabilité,
- à M. Ugo-Mercier Gouin, du Ministère de l'Éducation du Québec,
- à mes amis, en particulier Vonjy, Fanja et My Binh, qui m'ont encouragé lors du sprint final,
- à tous les membres de ma grande famille y incluant mes beaux parents: “*Ny Tso-drano zava-mahery*”.
- Ainsi qu'à toute personne qui, de près ou de loin, m'ont aidé pendant mon séjour à Montréal.

Je n'oublierai jamais les personnes suivantes:

- Adeline qui a accepté de s'occuper seule de nos trois enfants “NTSOA” pendant trois longues années,
- Nambintsoa, Enintsoa et Liantsoa pour les larmes, les rires et les tendres mots “*Je t'aime Papa*” au téléphone,
- Ma mère Marie Jeanne Ravaofotsy qui, avec feu mon père, a enduré peine, souffrance et pauvreté pour que ses enfants s’instruisent: “*Merci Maman pour tout ce que tu as fait pour nous*”,
- Mon grand frère Jean Martin Rakotozafy qui s'est sacrifié pour ses frères et sa sœur,
- Noël Alphonse Ramarolahy qui a secondé Jean Martin,
- Emile, Martial et Florine pour les longs chemins que nous avons parcourus ensemble dans la pauvreté,

*Restons unis!*

Mon séjour à Montréal a été financé par l'Agence Canadienne de Développement International (ACDI) dans le cadre du Programme Canadien de Bourses pour la Francophonie.

## TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ . . . . .	x
INTRODUCTION . . . . .	xii
CHAPITRE I	
RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR LES $\mathbb{L}$ -ESPÈCES. . . . .	9
1.1 Rappels . . . . .	9
1.2 Notes sur les ensembles $\mathbb{A}$ -pondérés . . . . .	10
1.3 $\mathbb{L}$ -espèces . . . . .	15
1.3.1 Généralités . . . . .	15
1.3.2 Opérations et isomorphismes canoniques . . . . .	18
1.4 Réduction des $\mathbb{L}$ -espèces . . . . .	26
1.4.1 La notion de réduction . . . . .	27
1.4.2 Décomposition canonique des $\mathbb{L}$ -espèces . . . . .	31
1.5 $\mathbb{L}$ -espèces multisortes . . . . .	33
1.5.1 Définitions générales . . . . .	33
1.5.2 Dérivées partielles et isomorphismes canoniques . . . . .	35
1.6 Espèces mixtes . . . . .	37
1.6.1 Définitions générales . . . . .	37
1.6.2 Types par rapport aux $\mathbb{B}$ -sortes . . . . .	39
CHAPITRE II	
Systèmes d'équations différentielles ordinaires, opérateurs différentiels et grammaires . . . . .	45
2.1 Rappels et compléments sur la méthode de Leroux-Viennot pour les systèmes différentiels combinatoires . . . . .	45
2.1.1 Équations différentielles analytiques et équations différentielles combinatoires . . . . .	45
2.1.2 Résolution des équations différentielles combinatoires par la méthode de Leroux-Viennot . . . . .	46

2.1.3	Analyse des conditions initiales . . . . .	48
2.1.4	Exemples . . . . .	50
2.1.5	Les systèmes différentiels . . . . .	54
2.1.6	Cas des systèmes non autonomes . . . . .	62
2.2	Opérateurs différentiels combinatoires . . . . .	62
2.2.1	Généralités . . . . .	62
2.2.2	Opérateurs d'éclosion . . . . .	64
2.2.3	Sur les puissances d'un opérateur différentiel . . . . .	66
2.3	Lien avec les grammaires algébriques . . . . .	67
2.4	Applications aux espèces trigonométriques, elliptiques et hyperelliptiques . . . . .	71
2.4.1	Généralités. . . . .	71
2.4.2	Aspects analytiques . . . . .	73
2.4.3	Notes sur les formules d'additions . . . . .	74
<b>CHAPITRE III</b>		
<b>HISTORIOGRAPHES ET SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES</b>		
	77	
3.1	Généralités sur les Historiographes . . . . .	77
3.2	Historiographes additifs . . . . .	78
3.3	Un exemple: historiographes hyperelliptiques . . . . .	82
3.3.1	Généralités . . . . .	82
3.3.2	Quelques réalisations de l'historiographe de Schett . . . . .	85
3.3.3	Bijections entre les diverses interprétations combinatoires des fonctions elliptiques . . . . .	92
3.4	Les mots de Schett . . . . .	94
3.4.1	Mots de Schett . . . . .	94
3.4.2	Génération des mots de Schett . . . . .	96
3.4.3	Mots de Jacobi et suite associée aux nombres de Catalan . . . . .	97
3.5	La méthode de développement-compression . . . . .	100
3.5.1	Description de la méthode . . . . .	100

3.5.2	Développement-compression pour les nombres de Catalan et la suite associée . . . . .	100
3.5.3	Développement-compression pour les nombres d'Euler . . . . .	101
<b>CHAPITRE IV</b>		
<b>RÉSOLUTION COMBINATOIRE DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.</b> . . . . .		103
4.1	Introduction . . . . .	103
4.2	Résolution des systèmes de deux équations à deux variables . . . . .	104
4.3	Condition d'existence de la solution dans le cas où le nombre de variables est $\geq 3$ . . . . .	109
4.4	Résolution du système différentiel à une inconnue dans le cas où le nombre des variables est $\geq 3$ . . . . .	114
4.4.1	Systèmes cohérents . . . . .	114
4.4.2	Résolution . . . . .	116
4.4.3	Opérateur d'éclosion associé . . . . .	119
4.5	Cas d'un système de plusieurs équations à plusieurs inconnues . . . . .	121
4.5.1	Cas des systèmes autonomes . . . . .	121
4.5.2	Cas des systèmes non autonomes . . . . .	125
4.6	Applications aux polynômes orthogonaux . . . . .	134
4.6.1	Introduction . . . . .	134
4.6.2	Les polynômes d'Hermite . . . . .	135
4.6.3	Les polynômes de Laguerre . . . . .	136
4.6.4	Les polynômes de Tchebichef de 2 <sup>ième</sup> sorte, de Legendre et de Gegenbauer . . . . .	137
4.6.5	Les polynômes de Charlier et de Meixner . . . . .	140
4.6.6	Les polynômes de Bessel et de Jacobi . . . . .	141
<b>APPENDICE A</b> . . . . .		148
<b>APPENDICE B</b> . . . . .		153
<b>BIBLIOGRAPHIE</b> . . . . .		159
<b>INDEX</b> . . . . .		164

x

## RÉSUMÉ

Cette thèse est axée sur les méthodes combinatoires de résolution des systèmes d'équations différentielles et aux dérivées partielles. Elle comprend quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous développons tous les résultats que nous jugeons nécessaires pour une étude complète de ces systèmes. Nous étudions en particulier les problèmes de la pondération des ensembles possiblement infinis et des compléments relatifs à la théorie des  $\mathbb{L}$ -espèces, notre outil de base. Nous traitons notamment du comportement des transformations naturelles et isomorphismes vis-à-vis des opérations élémentaires, du problème de l'équipotence et de la réduction des  $\mathbb{L}$ -espèces. Nous terminons par l'introduction d'une nouvelle variante en théorie des espèces, les *espèces mixtes*.

Le deuxième chapitre est réservé aux équations et systèmes d'équations différentielles combinatoires, leurs liens avec les opérateurs différentiels combinatoires et les grammaires algébriques. Nous y étudions en particulier les équations et systèmes d'équations différentielles avec des conditions initiales qui sont des constantes non-nulles. C'est ici que les espèces mixtes s'avèrent utiles.

Dans le troisième chapitre, nous considérons les historiographes introduits par Viennot et leurs liens avec les systèmes d'équations différentielles. Le cas des historiographes de Schett, liés aux fonctions elliptiques de Jacobi, est étudié en détail.

Dans le chapitre 4, nous travaillons particulièrement sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles. L'un des faits remarquables dans ce cas est l'apparition d'un diagramme commutatif sous forme d'un hexagone d'isomorphismes naturels. Ce diagramme fournit une condition de cohérence assurant l'existence et l'unicité des solutions qui se présentent sous forme d'arborescences croissantes enrichies. Le cas particulier des systèmes non autonomes est appliqué aux polynômes orthogonaux.



## INTRODUCTION

L’interaction entre les systèmes d’équations différentielles et les autres branches de la science (Mathématiques, Physique, Informatique, Économie, etc ...) n’est plus à démontrer. En combinatoire cette interaction se manifeste avant tout par le calcul des fonctions génératrices où les relations de récurrences se transforment souvent en équations différentielles. Et réciproquement, la donnée d’un système différentiel satisfait par une famille de fonctions permet, parfois, de découvrir toute une théorie combinatoire sous-jacente à cette famille. Comme exemple, citons les célèbres fonctions *tangente* et *sécante*, satisfaisant le système

$$Y' = 1 + Y^2, \quad Z' = YZ, \quad Y(0) = 0, \text{ et } Z(0) = 1 \quad (1)$$

et dont les coefficients des séries de Taylor sont les nombres d’Euler. De nombreux travaux ont porté sur l’interprétation combinatoire de ces nombres, induite par le système d’équations différentielles (1), avec comme objectifs une analyse approfondie et des algorithmes de calcul efficaces de ces nombres. Mentionons D. André [cf. (An. 1879)], qui le premier a introduit le concept de permutations alternantes pour interpréter combinatoirement ces nombres et l’article de D. Foata et M.P. Schutzenberger [cf. (Fo-Sc. 73)], dans lequel les auteurs utilisent les équations différentielles satisfaites par  $D(u) = \int_0^u [\tan(t) + \sec(t)]dt$  pour définir les polynômes d’André et entamer une étude combinatoire de ceux-ci. Citons enfin les articles de A. Schett [cf. (Sch. 76) et (Sch. 77)], de Viennot [cf. (Vi.1 80)] et de Dumont [cf. (Dum. 80) et (Dum. 81)] sur les fonctions elliptiques de Jacobi utilisant les systèmes différentiels satisfait par celles-ci.

À partir de ces constatations, on a vu apparaître diverses tentatives de formulation d’une théorie combinatoire des équations et systèmes d’équations différentielles. Citons entre autres les travaux de D. Foata et M. P. Schutzenberger et un manuscrit non publié de Viennot [cf. (Vi.2 80)] sur les historiographes. La naissance de la théorie des espèces de structures de A. Joyal [cf. (Joy. 81)] a permis de donner un souffle nouveau et particulièrement riche à cette démarche. Citons les travaux de:

- J.-F. Gagné [cf. (Ga. 85)] sur les rapports existant entre la théorie des espèces et les équations différentielles.
- G. Labelle, sur les équations différentielles combinatoires [cf. (LaG. 86)] et les éclosions combinatoires [cf. (LaG. 85)], concept lié aux opérateurs différentiels.
- F. Bergeron sur les opérateurs différentiels en liaison avec les algèbres de Lie [cf. (Be. 85)].

- J.-B. Lévesque sur les anneaux pondérateurs [cf. (Lev. 89)]
- A. Longtin qui démontre dans [(Lo. 85)] de manière combinatoire les formules d'addition des fonctions tangente et sécante.
- F. Bergeron et C. Reutenauer sur les séries algébriques différentiellement constructibles [cf. (Be.-Re. 90)].
- N. Baïz sur les équations différentielles de Brenig [cf. (Baïz 95)].

Soulignons plus particulièrement les travaux de P. Leroux et G. Viennot [cf. (Le.-Vi. 1. 86), (Le.-Vi. 2. 88) et (Le.-Vi. 3. 88)], dans lesquels les auteurs donnent une méthode de résolution et développent une théorie combinatoire des systèmes d'équations différentielles fondée sur le concept d'arborescences croissantes, et celui de F. Bergeron et U. Satler [cf. (Be.-Sa 95) et (Sat. 94)] sur les séries algébriques différentiellement constructibles à plusieurs variables, qui laisse entrevoir l'extension de cette théorie aux systèmes d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial Y}{\partial T_i} = F_i(Y), \quad i = 1 \dots n, \quad Y(0, 0, \dots, 0, Z) = Z. \quad (2)$$

Considérons d'abord une équation différentielle combinatoire de la forme  $Y' = F(Y)$ ,  $Y(0, Z) = Z$ , où  $F$  est une espèce donnée et  $Y = Y(T, Z)$  une espèce inconnue. Il s'agit ici de trouver une espèce  $A$  telle que la dérivée  $A'$  soit isomorphe à l'espèce composée  $F(A)$ . La méthode de Leroux-Viennot utilise le concept de  $\mathbb{L}$ -espèce, c'est-à-dire d'espèce de structures sur des ensembles totalement ordonnés [cf. F. Bergeron, G. Labelle et P. Leroux (B.L.L. 94) ou (B.L.L. 98), Chapitre 5]. Dans ce contexte, la solution existe et est “unique” à isomorphisme près; il s'agit de l'espèce, dénotée  $A_F$ , des arborescences croissantes  $F$ -enrichies. À titre d'exemple, l'équation différentielle

$$Y' = 1 + Y^2, \quad Y(0) = 0 \quad (3)$$

admet comme solution l'espèce des arborescences binaires croissantes complètes, isomorphe à celle des permutations alternantes.

Notons que si on se place dans le cadre des  $\mathbb{B}$ -espèces (espèces de structures sur des ensembles généraux non ordonnés) Y. Chiricota et G. Labelle [cf. (Ch.-Lab 93)] ont montré que cette équation n'admet pas de solutions, tandis que d'autres équations de la forme  $Y' = F(X, Y)$  peuvent avoir une infinité (non dénombrable) de solutions [cf. G. Labelle (LaG. 86)]. Ceci montre l'importance de l'ordre sur les ensembles sous-jacents aux structures dans la méthode de Leroux-Viennot.

Indépendamment de ces travaux, W. Chen [cf. (Ch. 91)] a montré que des grammaires formelles algébriques peuvent être utilisées pour étudier des problèmes de nature purement combinatoire. Dans son article [cf. (Dum. 96)] D. Dumont signale l'existence d'un lien entre les grammaires de Chen et les éclosions combinatoires.

Dans cette thèse nous poursuivons les travaux de nos prédécesseurs. Nous nous plaçons dans le cadre de la théorie des  $\mathbb{L}$ -espèces. Dans un premier temps, nous donnons une solution au problème des équations différentielles avec des conditions initiales qui sont des constantes différentes de 0. Dans les travaux de P. Leroux et G. Viennot, cette question n'est pas résolue de manière entièrement satisfaisante. Notons que ces constantes sont des éléments d'un anneau de séries formelles. C'est dire que les espèces que nous considérons sont pondérées. Pour ce faire, nous définissons une nouvelle classe d'espèces, les espèces mixtes, qui sont des  $\mathbb{L}$ -espèces par rapport à une première sorte de points, dénotée  $T$ , et des  $\mathbb{B}$ -espèces par rapport à une deuxième sorte  $Z$ . Pour une espèce mixte  $G = G(T, Z)$ , l'ensemble des types d'isomorphie de  $G$ -structures par rapport à la sorte  $Z$  est défini sur  $[n]$  par  $T_{Z;z}F[n] = \cup_{k \geq 0} \frac{F[n,k]}{\sim}$ , où  $\sim$  est l'équivalence  $s \sim s' \Leftrightarrow$  il existe une bijection  $\sigma : [k] \rightarrow [k]$  telle que  $G[1_{[n]}, \sigma](s) = s'$ . Dans une  $T_{Z;z}G$ -structure, la variable  $z$  est un compteur de points de sorte  $Z$ . Considérons l'équation

$$Y' = F(Y), \quad Y(0) = \alpha \tag{4}$$

où  $F$  est une  $\mathbb{B}$ -espèce. En dénotant  $A_F(T, Z)$  l'espèce mixte, solution de l'équation différentielle  $Y' = F(Y)$ ,  $Y(0) = Z$ , obtenue par la méthode de Leroux-Viennot, nous démontrons que la solution combinatoire de l'équation (4) est l'espèce  $T_{Z;\alpha}A_F(T)$ . Toutefois, cela se traduit au niveau de la série génératrice  $y = T_{Z;\alpha}A_F(t)$  par l'équation  $y' = Z_F(y, \alpha, \alpha^2, \dots)$ ,  $y(0) = \alpha$ ,  $Z_F$  étant la série indicatrice de l'espèce  $F$ . Ces méthodes se généralisent aux systèmes d'équations différentielles.

Deux remarques s'imposent:

- 1) Les ensembles  $(T_{Z;\alpha}A_F)[n]$  des types de  $A_F$ -structures sur  $[n]$  peuvent être infinis. D'où la nécessité de reformuler certains principes fondamentaux de la combinatoire énumérative, démontrés dans le cas des ensembles finis. Nous démontrons en particulier une *version infinie* du principe des involutions de Garsia-Milne [(Ga.-Mi. 81)], qui sera appliquée dans la suite.
- 2) Sous-jacente à une équation différentielle combinatoire, il y a l'équation différentielle analytique satisfaite par les séries génératrices. Réciproquement, soit une équation différentielle analytique  $y' = f(y)$ ,  $f$  étant une série formelle. Sous certaines conditions,  $f$  peut être considérée comme la série génératrice d'une espèce  $F$ . Dans ce cas, nous avons aussi l'équation combinatoire  $Y' = F(Y)$  dont la solution sera un modèle combinatoire de la série, solution de l'équation analytique en question. Notons que le choix de  $F$  n'est pas toujours unique; il peut arriver que les fonctions génératrices de deux espèces  $F$  et  $G$  coïncident même si  $F$  n'est pas isomorphe à  $G$  (on dira que  $F$  et  $G$  sont équipotentes) [cf. remarque 4.6.2]. On aboutira à deux équations différentielles combinatoires différentes, qui nous donneront deux solutions non isomorphes, donc deux modèles combinatoires non isomorphes pour la série solution de  $y' = f(y)$ . Ce phénomène nous amène à l'étude de la notion d'équipotence.

Nous démontrons en particulier que, moyennant des conditions particulières sur la pondération, si  $F$  et  $G$  sont équivalentes, alors il existe des sous-espèces “réduites”, dénotées  $F_{\text{red}}$  et  $G_{\text{red}}$ , uniques à un isomorphisme près, de  $F$  et  $G$  respectivement, qui sont isomorphes. Nous appliquerons ces résultats pour introduire la notion de réduction des  $\mathbb{L}$ -espèces et prouver un théorème de décomposition des  $\mathbb{L}$ -espèces qui est, d'une certaine manière, la décomposition moléculaire des  $\mathbb{L}$ -espèces.

Le prochain sujet que nous abordons est le lien entre les grammaires à la Chen, les systèmes différentiels et les opérateurs différentiels combinatoires. Nous démontrons en particulier que, sous certaines conditions, les données suivantes sont équivalentes

- la donnée d'un système différentiel combinatoire,
- la donnée d'un système différentiel analytique,
- la donnée d'un opérateur différentiel,
- la donnée d'une grammaire.

D'autre part, la donnée d'un historiographe [cf. Chapitre 3], que nous qualifions d'additif, est équivalente à la donnée d'un système différentiel combinatoire de la forme

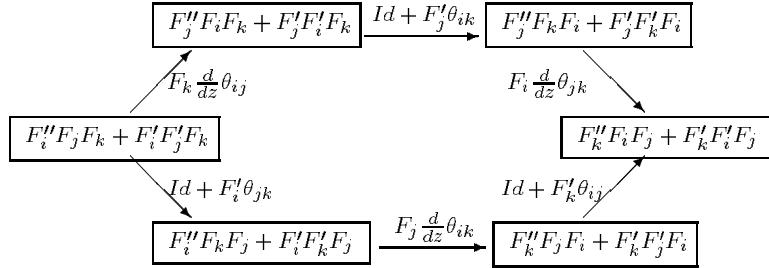
$$\frac{dX_i}{dT} = \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} a_j X_1^{n_{1j}} X_2^{n_{2j}} \dots X_i^{n_{ij}} \dots X_k^{n_{kj}}, \quad X_i(0) = x_i, \quad i = 1 \dots k,$$

où  $\alpha_{ij} \in \mathbb{N}$  et les  $a_j$  sont des variables formelles, donc à la donnée de l'opérateur différentiel associé ou de la grammaire associée à ce système différentiel. Dans ce cas, tous les modèles combinatoires de la série solution du système différentiel analytique sont isomorphes. De plus, les histoires associées à des historiographes initialisés particuliers peuvent servir de tremplin pour construire une bijection entre deux modèles différentes. Notons que la version non commutative des grammaires peut nous amener à des résultats intéressants.

Nous entreprenons ensuite une étude des équations aux *dérivées partielles* de la forme

$$\frac{\partial Y}{\partial T_i} = F_i(Y), \quad i = 1 \dots n, \quad Y(0, \dots, 0, Z) = Z.$$

Dans le cas où  $n = 2$ , moyennant une condition de cohérence dûe à l'égalité  $\frac{\partial^2 Y}{\partial T_1 \partial T_2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial T_2 \partial T_1}$ , la méthode de Leroux-Viennot pour les équations différentielles ordinaires nous donne une solution en termes d'arborescences croissantes  $\vec{F}$ -enrichies où  $\vec{F} = (F_1, F_2)$ . Dans le cas où  $n > 2$ , les dérivées partielles d'ordre 3,  $\frac{\partial^3 Y}{\partial T_i \partial T_j \partial T_k}$ , font apparaître des hexagones commutatifs d'isomorphismes. En les appliquant sur un multiensemble de la forme  $(\emptyset, \dots, \emptyset, U)$ , on obtient des hexagones d'isomorphismes ayant la forme donnée par la figure 0.1, et qui constituent des conditions de cohérence assurant l'existence et l'unicité des solutions



**Figure 0.1:** Hexagone d'isomorphismes

qui sont des arborescences croissantes  $\vec{F}$ -enrichies, où  $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$ . Notons qu'analytiquement, ces isomorphismes se transforment en des égalités. Une étude du comportement des transformations naturelles et en particulier des isomorphismes vis-à-vis des opérations élémentaires est donc nécessaire.

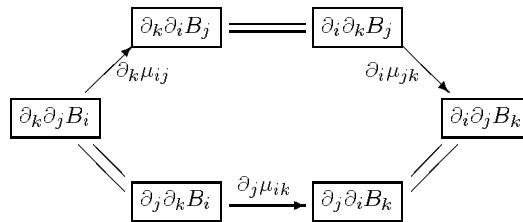
Les résultats obtenus se généralisent facilement au cas des systèmes différentiels plus généraux de la forme

$$\partial_j Y^\rho = F_j^\rho(Y), \quad j=1 \dots n, \quad Y^\rho(0, 0, \dots, 0) = Z^\rho; \quad \rho = 1 \dots r,$$

et aux systèmes non autonomes de la forme

$$\partial_i Y = F_i(T_1, \dots, T_n, Y), \quad Y(0, 0, \dots, 0) = Z, \quad i = 1 \dots n.$$

Le problème de l'intégration multivariée  $\{\partial_i Y = B_i(T_1, \dots, T_n), \quad i = 1 \dots r, \quad Y(0, \dots, 0) = 0\}$  et les systèmes à variables séparables de la forme  $\{\partial_i Y = B_i(T_1, T_2, \dots, T_n)F(Y), \quad Y(0) = Z, \quad 1 \leq i \leq n\}$  sont des cas particuliers importants des systèmes non autonomes. Dans ces cas, les hexagones se réduisent à des triangles de la forme,



Notons que ces cas particuliers contiennent les équations aux dérivées partielles satisfaites par les séries génératrices des polynômes orthogonaux classiques, et permettent de définir des modèles combinatoires de ces polynômes.

Cette thèse comporte donc quatre chapitres.

Le chapitre 1 est à la fois un rappel et un complément à la théorie des  $\mathbb{L}$ -espèces. Après une mise au point [section 2] sur les ensembles pondérés, et sur les

involutions pondérées (en anglais “sign reversing weight preserving involutions”) d’un ensemble pondéré quelconque (possiblement infini), les définitions générales sur les  $\mathbb{L}$ -espèces sont rappelées à la section 3.1. Les opérations élémentaires sont introduites à la section 3.2, et sont suivies de près par l’étude du comportement des transformations naturelles et des isomorphismes. Notons en particulier que l’opérateur de dérivation  $\frac{d}{dT}$  fait apparaître des isomorphismes canoniques qui reflètent les règles de dérivation de la somme, du produit (Formule de Leibniz) et de la dérivation en chaîne. Ces résultats se généralisent facilement au contexte multisorte [section 5]. La notion de réduction des  $\mathbb{L}$ -espèces, abordée dans la section 4, utilise surtout les résultats de la section 2. Nous étudions, en plus du lien entre isomorphisme et équivalence, la décomposition des  $\mathbb{L}$ -espèces et obtenons un théorème équivalent à la décomposition moléculaire dans le cas des  $\mathbb{B}$ -espèces. La section 6 est réservée à l’étude des espèces mixtes. Le résultat principal de cette section est la formule du pléthysme, dans le cas des espèces mixtes, pour le dénombrement des types par rapport à la  $\mathbb{B}$ -sorte  $Z$ .

La section 1 du chapitre 2 débute par une étude du lien entre équation différentielle analytique et équation différentielle combinatoire. Après un rappel de la méthode de Leroux-Viennot pour les équations et systèmes d’équations différentielles combinatoires, une attention particulière est portée à l’étude des conditions initiales du type  $Y(0) = \alpha$ ,  $\alpha$  étant une constante (un élément de l’anneau pondérateur). Les résultats obtenus dans le cas des équations différentielles sont ensuite prolongés au cas des systèmes différentiels. Cette section se termine par une généralisation du théorème de F. Bergeron et C. Reutenauer [cf. (Be.-Re. 90)] qui fournit une majoration des coefficients des solutions d’une équation différentielle, et par une brève étude du cas des équations différentielles non autonomes. Dans la section 2, nous étudions les opérateurs différentiels combinatoires. À ces opérateurs sont associés des opérateurs d’éclosion qui génèrent les solutions combinatoires d’un système d’équations différentielles approprié. Nous donnons, en particulier, une démonstration purement combinatoire et plus simple d’un théorème de Ginocchio [(Gin. 94)] sur les puissances d’un opérateur différentiel à plusieurs variables. La section 3 est réservée à la notion de grammaires de Chen et à ses relations avec les systèmes d’équations différentielles et les opérateurs différentiels. Dans la section 4, nous introduisons, à titre d’application, les espèces hyperelliptiques. Ce sont les solutions du système différentiel  $\{Y'_i = a_i Y_1 \cdots Y_{i-1} Y_{i+1} \cdots Y_n, \quad i = 1 \dots n\}$ . Ici nous posons le problème de l’existence d’une formule d’addition pour ces espèces. Dans le cas où  $n = 2$ , nous établissons combinatoirement cette formule. Pour  $n = 3$ , on connaît les formules d’addition pour les fonctions elliptiques de Jacobi, mais on ne sait pas encore les démontrer combinatoirement.

Le chapitre 3 commence par une introduction aux historiographes de Viennot [cf. (Vi.2 80)] [section 1] et aux historiographes “additifs”. Puis nous étudions le lien entre les historiographes additifs et les systèmes d’équations différentielles

[section 2]. Nous montrons comment les historiographes additifs s'identifient à un système différentiel particulier, donc à un opérateur différentiel ou à une grammaire. Il est à noter que diverses interprétations combinatoires des solutions d'un système différentiel analytique peuvent être des réalisations différentes d'un même historiographe. Elles sont donc isomorphes. Nous étudions le cas des historiographes de Schett [section 3], liés aux fonctions elliptiques de Jacobi. Nous montrons en particulier comment obtenir une bijection entre le modèle de Dumont et le modèle de Viennot, pour les fonctions elliptiques. D'autre part, la génération récursive des mots définis par la grammaire non commutative associée à l'historiographe de Schett, étudiée à la section 4, nous amène à une méthode simple de calcul des nombres de Catalan. De plus, les mots de Jacobi, c'est-à-dire les mots ne contenant pas la variable  $x$ , sont dénombrés par une suite  $(\kappa_n)$  lié aux nombres de Catalan. Selon M. Noy [(Noy 98)],  $\kappa_{2n}$  dénombre les arbres auto-évitants sur  $n$  points et, d'autre part,  $\kappa_{2n-1}$  dénombre les arbres auto-évitants sur  $n$  points et contenant l'arête  $(1, n)$ . Mais nous n'avons pas d'explication bijective à ce résultat. Le chapitre se termine par l'introduction d'une méthode d'engendrement de suites que nous appellons *développement-compression*. Nous appliquons la méthode au cas des nombres de Catalan et de la suite associée, ainsi qu'au cas des nombres d'Euler.

Le chapitre 4 est consacré aux systèmes d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial Y}{\partial T_i} = F_i(Y), \quad i = 1 \dots n, \quad Y(0, 0, \dots, 0, Z) = Z.$$

Dans la section 2, nous étudions le cas des systèmes à deux variables. Tandis que dans la section 3, nous entamons l'étude des conditions de cohérence assurant l'existence et l'unicité des solutions, conditions qui s'expriment par des hexagones commutatifs d'isomorphismes naturels ayant la forme donnée par la figure 0.1. Dans la section 4, nous précisons la notion de solution. En supposant la convention sur l'ordre relatif des éléments des ensembles totalement ordonnés sous-jacents,  $l = l_1 +_o l_2 +_o \dots +_o l_n$ , ces solutions se présentent sous forme d'arborescences croissantes enrichies. Notons qu'on a aussi un concept d'opérateur d'éclosion associé à ces systèmes. Dans la section 5, nous généralisons les résultats des sections 3 et 4 aux cas des systèmes de plusieurs fonctions à plusieurs variables et des systèmes non autonomes. Le cas particulier des systèmes de la forme  $\{\partial_i Y = B_i(T_1, \dots, T_n)F(Y), \quad i = 1 \dots n\}$  est appliqué aux polynômes orthogonaux dans la section 6.

Cette thèse a été écrite sous la direction effective de Gilbert Labelle et Pierre Leroux, professeurs à l'Université du Québec à Montréal. Elle est imprégnée de leurs idées. Mes sincères reconnaissances leur sont adressées.

Nous terminons en souhaitant que cette thèse puisse contribuer à l'avancement des sciences, pour le bonheur de l'Humanité.

|

|

|

|

# CHAPITRE I

## RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR LES $\mathbb{L}$ -ESPÈCES.

Ce chapitre est surtout un complément à la théorie des  $\mathbb{L}$ -espèces de F. Bergeron, G. Labelle et P. Leroux [cf. (B.L.L. 94) ou (B.L.L. 98), Chapitre 5]. Nous développons ici des résultats que nous jugeons nécessaires pour une étude complète des systèmes d'équations différentielles et des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

### 1.1 Rappels

Pour les définitions et concepts de base sur la théorie des catégories, nous renvoyons le lecteur à S. Mac Lane [(McL 71)] ou H. Herrlick et G.E. Strecker [(He-St 73)]. Nous considérons donc la catégorie des ensembles totalement ordonnés finis et applications croissantes . Si aucune confusion n'est à craindre, nous identifions le couple  $(l, \leq)$ , où  $\leq$  est un ordre total sur  $l$ , à l'ensemble  $l$  lui-même. Nous désignons par  $|l|$  le cardinal de l'ensemble totalement ordonné  $l$ .

Un *isomorphisme* d'ensembles totalement ordonnés est une bijection croissante,  $\tau : l_1 \rightarrow l_2$ . Un tel isomorphisme existe si et seulement si  $|l_1| = |l_2|$ ;  $\tau$  est alors unique, et nous le notons  $\tau : l_1 \xrightarrow{\sim} l_2$ . En particulier l'unique automorphisme de  $l$  est l'identité de  $l$ , notée  $1_l$ .

Dans la suite nous considérons la sous-catégorie  $\mathbb{L}$  des ensembles totalement ordonnés finis et isomorphismes.

La *somme ordinaire* des ensembles totalement ordonnés  $l_1, \dots, l_r$ , est notée  $l_1 +_o l_2 +_o \dots +_o l_r$ . En particulier on dénote par  $1 +_o l$  l'ensemble ordonné  $\{0\} \cup l$ , où  $0 \notin l$  et  $0 < x$  pour chaque  $x \in l$ . Le  $r$ -uplet d'ensembles totalement ordonnés  $(l_1, l_2, \dots, l_r)$  peut être identifié au couple  $(l, \chi)$  où  $l = l_1 +_o \dots +_o l_r$  est la somme ordinaire des ensembles  $l_1, \dots, l_r$ , et  $\chi : l \rightarrow [r]$  est défini par  $\chi(x) = i \Leftrightarrow x \in l_i$ . Les  $r$ -uplets  $(l_1, l_2, \dots, l_r) = (l, \chi)$  et  $(l'_1, l'_2, \dots, l'_r) = (l', \chi')$  sont isomorphes si et seulement si pour chaque  $i$  on a un isomorphisme  $\tau_i : l_i \xrightarrow{\sim} l'_i$ . Dans ce cas l'unique isomorphisme  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_r) : (l_1, l_2, \dots, l_r) \xrightarrow{\sim} (l'_1, l'_2, \dots, l'_r)$  s'identifie

à l'isomorphisme  $\tilde{\tau} : l \xrightarrow{\sim} l''$  tel que  $\chi = \chi' \circ \tilde{\tau}$  c'est-à-dire que  $\tilde{\tau}(x) = \tau_i(x)$  si  $\chi(x) = i$ .

Chaque sous-ensemble  $m$  d'un ensemble totalement ordonné  $l$  est muni de l'ordre total induit. D'autre part, étant donné  $\pi$ , une partition de  $l$ , l'ordre des éléments minimums de chaque bloc induit un ordre total sur l'ensemble des blocs. Une partition d'un ensemble totalement ordonné sera toujours munie de cet ordre.

## 1.2 Notes sur les ensembles $\mathbb{A}$ -pondérés

**Définition 1.2.1** Étant donné un anneau topologique  $\mathbb{A}$  [cf. Bourbaki (Bo. 60)], un *ensemble  $\mathbb{A}$ -pondéré* (ou pondéré) est un couple  $(A, v)$  où  $A$  est un ensemble quelconque et  $v : A \rightarrow \mathbb{A}$  est une application. L'ensemble pondéré  $(A, v)$  est dit  *$\mathbb{A}$ -sommable* (ou sommable si aucune confusion n'est à craindre) s'il existe un élément  $s \in \mathbb{A}$  tel que pour tout voisinage  $V$  de 0 dans  $\mathbb{A}$ , il existe une partie finie  $A_0$  de  $A$  telle que pour toute partie finie  $B$  de  $A$  contenant  $A_0$ , on ait  $s - \sum_{x \in B} v(x) \in V$ . L'élément  $s$  est alors appelé *poids total* de  $A$ , et on pose  $|A|_v := s = \sum_{x \in A} v(x)$ . ■

Remarquons que si  $A$  est fini alors  $A$  est  $\mathbb{A}$ -sommable. D'autre part, on vérifie facilement que si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille finie d'ensembles pondérés  $\mathbb{A}$ -sommables, alors la réunion disjointe  $\sum_{i \in I} A_i$  est  $\mathbb{A}$ -sommable. Dans le cas général, nous avons besoin du concept d'anneau pondérateur introduit par Levesque J.B. dans son mémoire [cf. (Lev. 89)].

**Définition 1.2.2** Un *anneau pondérateur* est un anneau topologique  $\mathbb{A}$  pour lequel les deux propriétés suivantes sont vraies:

1. Si  $A$  est  $\mathbb{A}$ -sommable, alors toute partie  $B$  de  $A$  est  $\mathbb{A}$ -sommable.

2. Si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille finie d'ensembles pondérés  $\mathbb{A}$ -sommables, alors le produit cartésien  $\prod_{i \in I} A_i$  est  $\mathbb{A}$ -sommable. ■

Rappelons que la pondération sur  $\prod_{i \in I} A_i$  est définie par  $w((a_i)_{i \in I}) = \prod_{i \in I} v(a_i)$ . Nous avons alors  $|\prod_{i \in I} A_i|_w = \prod_{i \in I} |A_i|_{v_i}$ .

Les exemples d'anneaux pondérateurs incluent le corps des nombres réels  $\mathbb{R}$  ainsi que les anneaux de séries formelles [cf. (Lev. 89)]. *Dans la suite, nous supposerons que l'anneau topologique  $\mathbb{A}$  est un anneau pondérateur.* Généralement  $\mathbb{A}$  sera un anneau de séries formelles  $\mathbb{A} = \mathbb{K}[[X]]$ , où  $X$  est un ensemble de variables formelles, et  $\mathbb{K}$  un anneau intègre de caractéristique nulle. Rappelons que:

- Tout élément de  $\mathbb{K}[[X]]$  s'écrit de manière unique sous la forme  $a = \sum_{\mu \in \text{Mon}(X)} a_\mu \mu$ , où  $a_\mu \in \mathbb{K}$  et  $\text{Mon}(X) = \{\mu = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k} \mid x_i \in X\}$

est l'ensemble des monômes commutatifs finis dont les variables  $x_i$  sont des éléments distincts de  $X$ .

- Un ensemble  $A$  de séries formelles  $\in \mathbb{K}[[X]]$  est sommable si et seulement si pour tout  $\mu \in \text{Mon}(X)$ , l'ensemble  $\{a \in A | a_\mu \neq 0\}$  est fini.

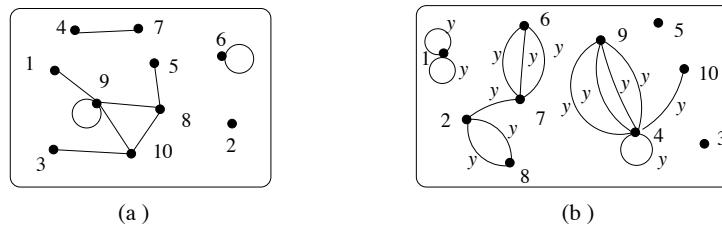
**Définition 1.2.3** Un *morphisme d'ensembles pondérés* est une application  $f : (A, v) \rightarrow (B, w)$  compatible avec les pondérations, c'est-à-dire telle que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow v & \downarrow w \\ & & \mathbb{A} \end{array}$$

On dira aussi que  $f$  préserve le poids. Comme les morphismes d'ensembles pondérés sont stables sous la composition, nous obtenons la catégorie  $\mathcal{E}_{\mathbb{A}, s}$  des ensembles  $\mathbb{A}$ -pondérés sommables. Un *isomorphisme* d'ensembles pondérés est alors un morphisme bijectif.

**Exemple 1.2.4** Étant donné un ensemble fini  $S$ , un graphe  $G$  sur  $S$  est un couple  $(S, A)$  où  $S$  est un ensemble fini et  $A$  un sous-ensemble de l'ensemble  $\mathcal{P}_{\leq 2}(S)$ , des parties de cardinal  $\leq 2$  de  $S$ . Les éléments de  $S$  sont les sommets du graphe et les éléments de  $A$  sont les arêtes. Il est clair que l'ensemble  $\mathcal{G}$  des graphes sur  $S$  est fini.

En prenant plutôt pour  $A$  un multiensemble dont les éléments sont dans  $\mathcal{P}_{\leq 2}(S)$ , on obtient un multigraphe. Il est clair que l'ensemble  $\mathcal{M}_G$  des multigraphes sur un ensemble  $S$  non vide est infini. Si pour chaque multigraphe  $G$ , on pose  $v(G) = y^k$ , où  $k = |A|$ , alors  $(\mathcal{M}_G, v)$  est sommable. De plus si  $|S| = n$ , alors  $|\mathcal{M}_G|_v = \sum_{k \geq 0} \left( \frac{n(n+1)}{2} k + k - 1 \right) y^k = (\frac{1}{1-y})^{\binom{n+1}{2}}$ .



**Figure 1.1:** (a) Un graphe ; (b)Un multigraphe de poids  $y^{14}$

La figure 1.1(a) représente un graphe sur l'ensemble  $[10] = \{1, 2, \dots, 10\}$  et 1.1(b), un multigraphe de poids  $y^{14}$ . ■

**Définition 1.2.5** Une *involution pondérée* d'un ensemble pondéré  $(A, v)$  est une bijection  $\Phi : A \rightarrow A$  telle que

1.  $\Phi \circ \Phi = 1_A$ ,
2. Pour tout  $a \in A$ , si  $a$  n'est pas un point fixe de  $\Phi$ , alors  $v(\Phi(a)) = -v(a)$ .

**Proposition 1.2.6** Soit  $\Phi$  est une involution pondérée de  $A$ . On note  $\text{Fix}(\Phi)$  l'ensemble des points fixes de  $\Phi$ . Si  $A$  est sommable, alors  $\text{Fix}(\Phi)$  est sommable et  $|A|_v = |\text{Fix}(\Phi)|_v$ . ■

**Définition 1.2.7** Un ensemble pondéré  $(A, v)$  est dit réduit si pour tout couple  $(x, y) \in A^2$  tel que  $x \neq y$  on a  $v(x) \neq -v(y)$ . On dira aussi que  $A$  est réduit. ■

**Exemple 1.2.8** Soit  $\mathbb{S}_n$  l'ensemble des permutations de  $[n] = \{1, \dots, n\}$ .

i) Posons  $v(\sigma) = \text{sgn}(\sigma) = (-1)^{n-c(\sigma)}$ , où  $c(\sigma)$  et  $\text{sgn}(\sigma)$  sont respectivement le nombre de cycles et le signe de  $\sigma$ . Si  $A_n$  est le sous-groupe alterné de  $\mathbb{S}_n$ , c'est-à-dire des permutations  $\sigma$  telles que  $\text{sgn}(\sigma) = 1$ , et si  $n \geq 2$ , alors toute bijection  $\epsilon_n : A_n \rightarrow \mathbb{S}_n \setminus A_n$  se prolonge en une involution pondérée  $\Phi_n$  de  $\mathbb{S}_n$  telle que  $\text{Fix}(\Phi_n) = \emptyset$ . On a alors  $|\mathbb{S}_n|_v = 0$ .

ii) Posons maintenant  $v(\sigma) = \text{sgn}(\sigma)t^{c(\sigma)}$ . Alors l'ensemble  $(\mathbb{S}_n, v)$  est réduit, car sinon, il existe  $\sigma$  et  $\sigma'$  telles que  $\sigma \neq \sigma'$  et  $v(\sigma) = -v(\sigma')$ . On a d'une part  $c(\sigma) = c(\sigma')$  et d'autre part,  $\text{sgn}(\sigma) = -\text{sgn}(\sigma')$  c'est-à-dire  $c(\sigma) - c(\sigma') \equiv 1 \pmod{2}$ . Ce qui est une contradiction. ■

**Proposition 1.2.9** Un ensemble pondéré  $(A, v)$  est réduit si et seulement si l'identité est l'unique involution pondérée de  $(A, v)$ .

**Démonstration** La condition est évidemment nécessaire. Si  $(A, v)$  n'est pas réduit, et si  $a$  et  $b$  sont tels que  $a \neq b$  et  $v(a) = -v(b)$ , alors en posant  $\Phi(a) = b$ ,  $\Phi(b) = a$  et  $\Phi(x) = x$  dans les autres cas, on aura une involution pondérée. ■

Soit  $\Phi$  une involution pondérée d'un ensemble pondéré  $(A, v)$ . Il est possible qu'il existe un couple  $(x, y)$  d'éléments de  $\text{Fix}(\Phi)$  tel que  $x \neq y$  et  $v(x) = -v(y)$ . Si  $\text{Fix}(\Phi)$  est réduit, une telle situation ne se produit pas. Dans ce cas  $\Phi$  est un élément maximal de l'ensemble des involutions pondérées de  $(A, v)$  ordonné par  $\Phi \leq \Phi'$  si et seulement si  $\Phi'|_{A \setminus \text{Fix}(\Phi)} = \Phi|_{A \setminus \text{Fix}(\Phi)}$ .

**Définition 1.2.10** Une involution pondérée  $\Phi$  est dite réductrice si l'ensemble  $\text{Fix}(\Phi)$  de ses points fixes est réduit. ■

**Exemple 1.2.11** Soit un entier naturel  $n$ . Notons  $\text{Par}_k[n]$  l'ensemble des partitions de  $[n]$  en  $k$  blocs, et considérons l'ensemble  $\mathcal{S} = \{(\sigma, \pi) | \pi \in \text{Par}_k[n], 1 \leq k \leq n, \sigma \in \mathbb{S}[\pi]\}$  où  $\mathbb{S}[\pi]$  est l'ensemble des permutations sur  $\pi$ . L'ensemble  $\mathcal{S}$ , pondéré par  $v(\sigma, \pi) = (-1)^{n-|\pi|}$ , n'est pas réduit. Soit  $(\sigma, \pi) \in \mathcal{S}$ .

- Si chaque bloc de  $\pi$  est un singleton et si  $\sigma = 1_{[n]}$ , alors on pose  $(\sigma', \pi') = (\sigma, \pi)$ .
- Sinon soit  $i$  le plus petit des chefs des blocs (minimum dans chaque blocs)  $b$  tels que ou bien  $|b| \neq 1$  ou bien  $|b| = 1$  et  $\sigma(b) \neq b$ . Notons  $b_o$  le bloc de  $i$ .
  - Si  $|b_o| \neq 1$ , alors on définit le couple  $(\sigma', \pi')$  de la manière suivante:  $\pi' = \{\{i\}, b'_o\} \cup \{b \in \pi, b \neq b_o\}$ , où  $b'_o = b_o \setminus \{i\}$ ;  $\sigma'(\{i\}) = b'_o$ ,  $\sigma'(b'_o) = \sigma(b_o)$ ,  $\sigma'(\sigma^{-1}(b_o)) = \{i\}$  et  $\sigma'(b) = \sigma(b)$  dans les autres cas.
  - Si  $|b_o| = 1$  et  $\sigma(b_o) \neq b_o$ , alors on définit le couple  $(\sigma', \pi')$  en posant  $\pi' = \{b'_o\} \cup \{b \in \pi, b \neq b_o, \text{ et } b \neq \sigma(b_o)\}$ , où  $b'_o = \sigma(b_o) \cup b_o$ ;  $\sigma'(b'_o) = \sigma(\sigma(b_o))$ ,  $\sigma'(\sigma^{-1}(b_o)) = b'_o$  et  $\sigma'(b) = \sigma(b)$  dans les autres cas.

En posant  $\Phi(\sigma, \pi) = (\sigma', \pi')$ , on vérifie facilement que  $\Phi$  est une involution pondérée telle que  $\text{Fix}(\Phi) = \{(1_{[n]}, \pi_o)\}$ ,  $\pi_o$  étant la partition triviale de  $[n]$  dont chaque bloc est un singleton.

On déduit de ce résultat que  $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k! S(n, k) = 1$ ,  $S(n, k)$  étant le nombre de Stirling de deuxième espèce [cf. L. Comtet (Co. 70)]. ■

**Proposition 1.2.12** *Tout ensemble pondéré  $(A, v)$  admet une involution pondérée réductrice.*

**Démonstration** Considérons l'ensemble  $\mathcal{F}$  des couples  $(B, \Phi_B)$  tel que  $B \subset A$ , et  $\Phi_B$  une involution pondérée réductrice de  $B$  telle que pour tout  $x \in \text{Fix}(\Phi_B)$  et tout  $y \in A \setminus B$ ,  $v(x) \neq -v(y)$ , ordonnée par  $(B, \Phi_B) \leq (B', \Phi_{B'}) \Leftrightarrow B \subseteq B'$  et  $\Phi_B = \Phi_{B'}|_B$ . Il est clair que  $\mathcal{F}$  est non vide car  $(\emptyset, \Phi_\emptyset) \in \mathcal{F}$ . Si  $\mathcal{F}$  admet un élément maximal  $(A_o, \Phi_o)$  alors  $A_o = A$ . Car sinon soit  $x \in A \setminus A_o$ .

i) S'il existe  $y \in A \setminus A_o$  tel que  $v(y) = -v(x)$ , on prolonge  $\Phi_o$  sur  $A_o \cup \{x, y\}$ , en posant  $\Phi_o(x) = y$ .

ii) Sinon, pour tout  $y \in A \setminus A_o$ ,  $v(y) \neq -v(x)$ , et on prolonge  $\Phi_o$  sur  $A_o \cup \{x\}$  en posant  $\Phi_o(x) = x$ .

On obtient ainsi  $(B, \Phi) \in \mathcal{F}$  tel que  $(A_o, \Phi_o) < (B, \Phi)$ . Ce qui contredit la maximalité de  $(A_o, \Phi_o)$ .

D'après le lemme de Zorn [cf. P. Halmos (Ha 74)], il suffit de montrer que  $\mathcal{F}$  est inductif, c'est-à-dire que toute sous-famille totalement ordonnée de  $\mathcal{F}$  est majorée dans  $\mathcal{F}$ . Or, si  $(B_i, \Phi_{B_i})_{i \in I}$  est une sous-famille totalement ordonnée, alors on vérifie facilement que le couple  $(B, \Phi_B)$  défini par  $B = \bigcup_{i \in I} B_i$  et  $\Phi_B(x) = \Phi_{B_i}(x)$  si  $x \in B_i$ , est un élément de  $\mathcal{F}$  et que c'est un majorant de  $(B_i, \Phi_{B_i})_{i \in I}$ . ■

**Proposition 1.2.13** Si  $C$  est une partie réduite de  $A$  telle que pour tout  $x \in C$  et tout  $y \in A \setminus C$ ,  $v(x) \neq -v(y)$ , alors il existe une involution pondérée réductrice  $\Phi$  de  $A$  telle que  $C \subset \text{Fix}(\Phi)$ .

**Démonstration:** Il suffit d'appliquer le même raisonnement à l'ensemble  $\mathcal{G}$  des couples  $(B, \Phi_B)$  tels que  $B \subset A$ ,  $\Phi_B$  une involution pondérée réductrice de  $B$  telle que  $C \subset \text{Fix}(\Phi_B)$  et pour tout  $x \in \text{Fix}(\Phi_B)$ ,  $y \in A \setminus B$ ,  $v(x) \neq -v(y)$ . ■

Nous avons la proposition suivante qui est une variante et une généralisation du principe des involutions de Garsia et Milne [cf. (Ga.-Mi. 81), ou Stanton et White (St.-Wh. 86)].

**Proposition 1.2.14** Soit  $(A, v)$  un ensemble pondéré  $\mathbb{A}$ -sommable n'ayant qu'un nombre fini d'éléments de poids nul. Si  $\Phi$  et  $\Psi$  sont deux involutions pondérées réductrices de  $(A, v)$ , alors il existe un isomorphisme d'ensembles pondérés  $\gamma : \text{Fix}(\Phi) \rightarrow \text{Fix}(\Psi)$ .

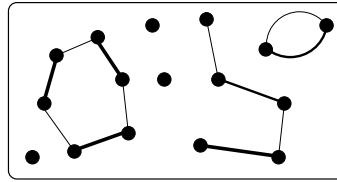


Figure 1.2: Graphe  $\Gamma$

**Démonstration:** Considérons le graphe  $\Gamma$  sur  $A$  formé par la superposition des graphes associés à  $\Phi$  et à  $\Psi$  (figure 1.2). Chaque sommet étant de degré  $\leq 2$ , les composantes connexes de  $\Gamma$  seront soit des points isolés, soit des chaînes, soit des cycles.

- Les points isolés sont des éléments  $x$  de  $\text{Fix}(\Phi) \cap \text{Fix}(\Psi)$ , on pose alors  $\gamma(x) = x$ .
- Toutes les chaînes sont finies et de longueurs paires.

En effet, supposons qu'on aît une chaîne infinie. Soit  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une telle chaîne. Pour chaque  $i$ , on a  $v(x_{i+1}) = -v(x_i)$ . Donc pour tout  $i$ ,  $v(x_i) \neq 0$  car il n'existe qu'un nombre fini de points dont le poids est nul. Alors  $v(x_{2i}) = v(x_0)$ , c'est-à-dire que dans l'anneau  $\mathbb{A}$ , la famille  $(v(x_{2i}))_{i \in \mathbb{N}}$  est une sous-famille non sommable de la famille sommable  $(v(x)_{x \in A})$ . Ce qui est impossible,  $\mathbb{A}$  étant un anneau pondérateur.

Une chaîne de longueur impaire reliera deux points fixes  $x$  et  $y$  de  $\Phi$  (ou de  $\Psi$ ) et alors  $v(x) = -v(y)$ , ce qui est impossible car  $\text{Fix}(\Phi)$  et  $\text{Fix}(\Psi)$  sont réduits. De plus une chaîne de longueur paire relie un point fixe  $x$  de  $\Phi$  à un point fixe  $y$  de  $\Psi$ . On pose alors  $\gamma(x) = y$ .

- Un cycle ne contient aucun point fixe. ■

**Remarque 1.2.15** 1. Si  $A$  contient une infinité d'éléments de poids nuls, il est possible d'avoir une chaîne infinie. Dans ce cas, l'existence d'une bijection conservant le poids n'est plus assurée comme le contre-exemple suivant:

L'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$ , pondéré par  $v(2i+1) = x^i$  et  $v(2i) = 0$  est  $\mathbb{Z}[[x]]$ -sommable. Les applications  $\Phi$  et  $\Psi$  définies par  $\Phi(2i+1) = \Psi(2i+1) = 2i+1$ ,  $\Phi(4i) = 4i+2$ ,  $\Phi(4i+2) = 4i$ ,  $\Psi(0) = 0$ ,  $\Psi(4i+2) = 4(i+1)$  et  $\Psi(4(i+1)) = 4i+2$  sont des involutions pondérées réductrices. De plus,  $\text{Fix}(\Phi) = \{2i+1 \mid i \in \mathbb{N}\}$  et  $\text{Fix}(\Psi) = \{2i+1 \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$  ne sont pas isomorphes.

2. Il en sera de même dans le cas où l'une des involutions, par exemple  $\Phi$ , n'est pas réductrice, car on pourrait avoir  $\text{Fix}(\Phi) = \text{Fix}(\Psi) \cup \{x, y\}$  où  $x \neq y$  et  $v(x) = -v(y)$ . ■

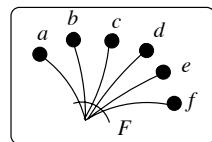
**Proposition 1.2.16** *Si l'ensemble  $X$  des variables formelles est fini et  $\mathbb{A} = \mathbb{K}[[X]]$ , alors tout ensemble  $\mathbb{A}$ -sommable  $A$  ne contenant qu'un nombre fini d'éléments de poids nuls est fini ou dénombrable.* ■

### 1.3 $\mathbb{L}$ -espèces

Considérons la catégorie  $\mathbb{L}$  des ensembles totalement ordonnés finis et isomorphismes. Nous utiliserons la notation  $\tau : l_1 \rightsquigarrow l_2$ , pour dire que  $\tau$  est l'unique bijection croissante de  $l_1$  sur  $l_2$ .

#### 1.3.1 Généralités

**Définition 1.3.1** Une  $\mathbb{L}$ -espèce pondérée  $F$  est un foncteur de la catégorie  $\mathbb{L}$  dans la catégorie  $\mathcal{E}_{\mathbb{A},s}$  des ensembles  $\mathbb{A}$ -pondérés sommables, où  $\mathbb{A}$  est, rappelons-le, supposé être un anneau pondérateur [cf. Définition 1.2.2]. C'est-à-dire que  $F$  est une règle qui permet d'associer à tout ensemble totalement ordonné fini  $l$ , un ensemble pondéré sommable  $F[l]$ , l'ensemble des  $F$ -structures sur  $l$ , et à tout morphisme  $\tau : l \rightsquigarrow l'$  de  $\mathbb{L}$ , un morphisme d'ensembles pondérés  $F[\tau] : F[l] \rightarrow F[l']$ , appelé *transport des structures*, vérifiant  $F[\sigma \circ \tau] = F[\sigma] \circ F[\tau]$  et  $F[1_l] = 1_{F[l]}$ . Nous disons que  $F = F_v$  est *trivialement pondérée* si pour chaque structure  $s$ ,  $v(s) = 1$ . ■



**Figure 1.3:** Une  $F$ -structure générique sur  $l = \{a < b < c < d < e < f\}$

La figure 1.3 représente une  $F$ -structure générique.

**Définition 1.3.2** Un morphisme  $\varphi : F \rightarrow G$  est une transformation naturelle, c'est-à-dire une famille  $\varphi = (\varphi_l)$  de morphismes d'ensembles pondérés,  $\varphi_l : F[l] \rightarrow G[l]$ , telle que pour tout  $\tau : l \rightsquigarrow m$  le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} F[l] & \xrightarrow{\varphi_l} & G[l] \\ F[\tau] \downarrow & & \downarrow G[\tau] \\ F[m] & \xrightarrow{\varphi_m} & G[m] \end{array}$$

Rappelons que si  $F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} H$  sont deux transformations naturelles, alors la composée  $\psi \circ \varphi$ , défini par  $(\psi \circ \varphi)_l = \psi_l \circ \varphi_l$ , est une transformation naturelle. Nous obtenons ainsi la catégorie  $\mathbb{L}_{\mathcal{E}_s}$  des  $\mathbb{L}$ -espèces.

Observons aussi que si  $\varphi$  est un isomorphisme, c'est-à-dire que pour chaque  $l$ ,  $\varphi_l$  est une bijection conservant le poids, alors  $\varphi^{-1} = (\varphi_l^{-1})$  est aussi une transformation naturelle. On dira alors que  $F$  et  $G$  sont isomorphes. ■

- Remarque 1.3.3**
1. Les transports de structures sont en fait des isomorphismes d'ensembles pondérés. Donc le poids total  $|F[l]|_v$  des  $F$ -structures sur  $l$  ne dépend que de  $|l|$ .
  2. Étant donnés  $l$  et  $m$  où  $|l| = |m|$ , le transport des structures s'effectue à l'aide de l'unique bijection croissante  $\tau : l \rightsquigarrow m$ . Souvent, ce transport consiste à remplacer  $i$  par  $\tau(i)$ , autrement dit il s'agit d'un réétiquetage.
  3. Conformément à Bergeron, Labelle et Leroux[(B.L.L. 94), ou (B.L.L. 98)], nous disons que deux structures  $s$  et  $s'$  sur  $l$  et  $l'$  respectivement, sont isomorphes si  $|l| = |l'|$  et  $F[\sigma](s) = s'$ , où  $\sigma$  est l'unique bijection croissante  $l \rightsquigarrow l'$ . Si  $l = l'$  alors  $s$  est isomorphe à  $s'$  si et seulement si  $s = s'$ . Donc la notion de type d'isomorphie est triviale dans le cadre des  $\mathbb{L}$ -espèces. La notion de série indicatrice de cycles n'existe pas dans ce contexte. ■

**Définition 1.3.4** On appelle *série génératrice (exponentielle)* de  $F$  la série  $F(t) = \sum_{n>0} f_n \frac{t^n}{n!}$ , où  $f_n = |F[n]|$  est le poids total des  $F$ -structures sur l'ensemble  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Exemple 1.3.5** 1. Diverses constructions utilisant l'ordre peuvent être considérées. Citons par exemple l'espèce  $\mathcal{A}^\uparrow$  des arborescences croissantes, l'espèce  $\mathcal{B}^\uparrow$  des arborescences binaires croissantes, l'espèce Alt des permutations alternantes, etc. Remarquons que les séries associées sont

$$\mathcal{A}^\uparrow(t) = \log\left(\frac{1}{1-t}\right), \quad \mathcal{B}^\uparrow(t) = \frac{1}{1-t}, \quad \text{Alt}(t) = \operatorname{tg}(t) + \sec(t).$$

2. Rappelons qu'une  $\mathbb{B}$ -espèce est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans la catégorie  $\mathcal{E}_{\mathbb{A},s}$  des ensembles  $\mathbb{A}$ -pondérés sommables [cf.

A. Joyal (Joy. 81) ou (B.L.L. 94) ou (B.L.L. 98)]. Toute  $\mathbb{B}$ -espèce donne lieu à une  $\mathbb{L}$ -espèce. Plus exactement, on a un foncteur  $\lambda : \mathbb{B}_{\mathcal{E}_S} \rightarrow \mathbb{L}_{\mathcal{E}_S}, F \mapsto F^\lambda$ , tel que si  $l = (U, \leq)$ , alors  $F^\lambda[l] = F[U]$  et si  $\tau : l \rightsquigarrow m$  alors  $F^\lambda[\tau] = F[\tau]$ . Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on écrira  $F$  au lieu de  $F^\lambda$ . De cette façon, nous avons les  $\mathbb{L}$ -espèces suivantes:  $\mathbf{0}$ , l'espèce vide;  $\mathbf{1}$ , l'espèce de l'ensemble vide; l'espèce  $E_n$  des ensembles de cardinal  $n$ ; l'espèce  $E$  des ensembles; l'espèce  $T^n$  des listes de longueur  $n$ ; l'espèce  $L$  des listes; l'espèce  $\mathbb{S}$  des permutations; l'espèce  $C$  des cycles; l'espèce  $\mathcal{A}$  des arborescences, etc. En particulier, l'espèce des singletons est dénotée  $T$ . La série génératrice exponentielle de ces  $\mathbb{L}$ -espèces coïncide avec la série génératrice de la  $\mathbb{B}$ -espèce associée. Ainsi on a:  $\mathbf{0}(t) = 0$ ,  $\mathbf{1}(t) = 1$ ,  $E_n(t) = \frac{t^n}{n!}$ ,  $T^n(t) = t^n$ ,  $E(t) = e^t$ ,  $L(t) = \mathbb{S}(t) = \frac{1}{1-t}$ ,  $C(t) = \log(\frac{1}{1-t})$ . [cf. (B.L.L. 94) ou (B.L.L. 98)]. ■

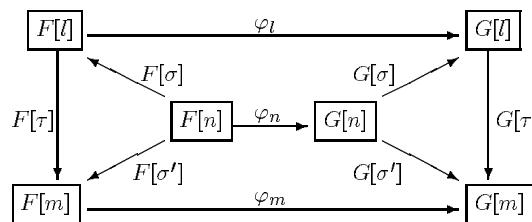
**Remarque 1.3.6** La donnée d'une  $\mathbb{L}$ -espèce  $F$  permet de construire une  $\mathbb{B}$ -espèce  $F^\beta$  en posant:

$$F^\beta[U] = \sum_{\leq \in L[U]} F[(U, \leq)],$$

c'est-à-dire qu'on a un foncteur  $\beta : \mathbb{L}_{\mathcal{E}_S} \rightarrow \mathbb{B}_{\mathcal{E}_S}, F \mapsto F^\beta$ . Et si la série génératrice de  $F$  est  $F(t) = \sum_{n \geq 0} f_n \frac{t^n}{n!}$ , alors la série génératrice exponentielle  $F^\beta(x)$  de  $F_\beta$  est:  $F^\beta(x) = \sum_{n \geq 0} n! f_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} f_n x^n$ . Notons que  $F^\beta$  est une  $\mathbb{B}$ -espèce asymétrique. [cf. (B.L.L. 94) ou (B.L.L. 98) ou (LaG. 85)]. ■

**Théorème 1.3.7** Deux  $\mathbb{L}$ -espèces  $F = F_v$  et  $G = G_w$  sont isomorphes si et seulement si pour chaque  $n$ , il existe un isomorphisme d'ensembles pondérés  $\varphi_n : F[n] \rightarrow G[n]$ . En particulier, deux  $\mathbb{L}$ -espèces trivialement pondérées,  $F$  et  $G$ , sont isomorphes si et seulement si  $F(t) = G(t)$ .

**Démonstration:** La condition est évidemment nécessaire. Si elle est satisfaite alors, pour tout ensemble totalement ordonné  $l$  tel que  $|l| = n$ , on définit  $\varphi_l$  par  $\varphi_l := G[\sigma] \circ \varphi_n \circ F[\sigma]^{-1}$ , où  $\sigma : [n] \rightsquigarrow l$ . La bijection  $\varphi_l$  conserve les poids car  $\varphi_n$  et les transports de structures sont des isomorphismes d'ensembles pondérés. Étant donné  $\tau : l \rightsquigarrow m$  et  $\sigma' : [n] \rightsquigarrow m$ , on a  $\sigma' = \tau \sigma$  par raison d'unicité. Donc  $F[\tau]F[\sigma] = F[\sigma']$  et  $G[\tau]G[\sigma] = G[\sigma']$ , et le diagramme suivant est commutatif:



C'est-à-dire que  $G[\tau]\varphi_l = G[\tau]G[\sigma]\varphi_nF[\sigma]^{-1} = G[\sigma']\varphi_nF[\sigma']^{-1}F[\tau] = \varphi_mF[\tau]$ .

**Exemple 1.3.8 1.**  $L(t) = \mathbb{S}(t) = \frac{1}{1-t}$ . Un isomorphisme  $L \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}$  est défini en associant à la liste  $\sigma : x_1 x_2 \cdots x_n$ , la permutation  $\sigma$  tel que  $\sigma(i) = x_i$ . Un autre isomorphisme est donné par la transformation fondamentale de Foata-Fuchs [cf. (Fo-Fu 70)] que l'on peut décrire de la manière suivante: étant donnée la liste  $\sigma = \underline{9} \ 12 \ 10 \ \underline{7} \ 11 \ \underline{4} \ \underline{1} \ 8 \ 3 \ 2 \ 5 \ 6$ , on lui associe la permutation  $\sigma$  obtenue en prenant comme chefs de cycles, les éléments saillants, c'est-à-dire les minimum relatifs, de gauche à droite (soulignés). Ainsi à notre  $\sigma$ , on peut associer la permutation  $\sigma' = (9 \ 12 \ 10)(7 \ 11)(4)(1 \ 8 \ 3 \ 2 \ 5 \ 6)$ , décomposée en cycles.

De même,  $\mathcal{B}^\uparrow(t) = L(t) = \frac{1}{1-t}$ . Un isomorphisme  $\mathcal{B}^\uparrow \xrightarrow{\sim} L$ , est obtenu en projetant l'arbre binaire sur un axe horizontal.

2.  $\mathcal{A}^\uparrow(t) = \mathcal{C}(t) = \log(\frac{1}{1-t})$ . L'isomorphisme [cf. Burge (Bu. 72)]  $\mathcal{A}^\uparrow \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$  peut être décrit de la manière suivante : étant donnée une arborescence croissante  $A$ , les fils de chaque sommet seront ordonnés de manière décroissante de gauche à droite. La permutation circulaire  $\sigma_A$  associée à  $A$  est alors la permutation obtenue en effectuant un parcours en profondeur sur  $A$  (Voir figure 1.4).

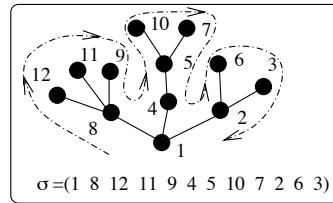


Figure 1.4: Isomorphisme entre  $\mathcal{A}^\uparrow$  et  $\mathcal{C}$

**Définition 1.3.9** Deux  $\mathbb{L}$ -espèces pondérées  $F$  et  $G$  sont dites *équipotentes* si  $F(t) = G(t)$ . ■

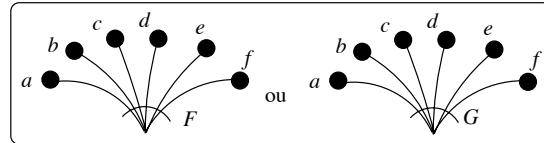
On dénote par  $F \equiv G$  cette relation d'équipotence. Remarquons que si  $F \simeq G$  alors  $F \equiv G$ ; la réciproque étant généralement fausse. Par exemple, l'espèce  $\mathbb{S}_{\geq 2,v}$  des permutations sur des ensembles de cardinal  $\geq 2$ , pondérée par  $v(\sigma) = \text{Sgn}(\sigma)$  est non nulle, alors que  $\mathbb{S}_{\geq 2,v}(t) = 0$ . ■

### 1.3.2 Opérations et isomorphismes canoniques

La classe des  $\mathbb{L}$ -espèces de structures est munie des opérations usuelles, somme, produit, substitution, dérivation, et intégration, compatibles avec le passage aux séries génératrices; c'est-à-dire que si  $*$  est une opération binaire élémentaire, alors  $(F * G)(t) = F(t) * G(t)$ . Soient donc  $F = F_u$  et  $G = G_v$  deux  $\mathbb{L}$ -espèces dont les pondérations sont respectivement  $u$  et  $v$ , et soient  $l$  et  $m$  deux ensembles ordonnés tels que  $|l| = |m|$ , et  $\tau : l \tilde{\rightarrow} m$ .

## Somme

Par définition la somme  $F+G$  est le coproduit de  $F$  et  $G$  dans la catégorie  $\mathbb{L}_{\mathcal{E}_s}$ . Nous avons donc  $(F+G)[l] = F[l] + G[l]$  (réunion disjointe). La pondération est définie par  $w(s) = u(s)$  si  $s \in F[l]$  et  $w(s) = v(s)$  si  $s \in G[l]$ , et le transport des structures par  $(F+G)[\tau](s) = F[\tau](s)$  si  $s \in F[l]$  et  $(F+G)[\tau](s) = G[\tau](s)$  si  $s \in G[l]$ .



**Figure 1.5:** Une  $F+G$ -structure sur  $l = \{a, b, c, d, e, f\}$

La figure 1.5 représente une  $F+G$ -structure typique. ■

Il est facile de vérifier que  $(F+G)(t) = F(t)+G(t)$ . De plus  $F+G = G+F$ ,  $(F+G)+H = F+(G+H)$ , et  $F+\mathbf{0} = \mathbf{0}+F = F$ . D'autre part, les injections canoniques  $F \hookrightarrow F+G$  et  $G \hookrightarrow F+G$  sont des morphismes de  $\mathbb{L}$ -espèces. Et si  $\varphi : F \rightarrow H$  et  $\psi : G \rightarrow K$ , sont deux morphismes de  $\mathbb{L}$ -espèces, la propriété universelle du coproduit  $F+G$  nous permet de définir l'unique morphisme  $\varphi+\psi : F+G \rightarrow H+K$  tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{F} & \hookrightarrow & \boxed{F+G} & \hookleftarrow & \boxed{G} \\ \varphi \downarrow & & \varphi+\psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \boxed{H} & \hookrightarrow & \boxed{H+K} & \hookleftarrow & \boxed{K} \end{array}$$

Il est uniquement déterminé par la relation  $(\varphi+\psi)(s) = \varphi(s)$  si  $s \in F[l]$  et  $(\varphi+\psi)(s) = \psi(s)$  si  $s \in G[l]$ . Et si  $\varphi$  et  $\psi$  sont des isomorphismes, alors  $\varphi+\psi$  en est un également. Nous avons alors la proposition suivante, précisant le comportement de la composition des transformations naturelles introduite plus haut par rapport à la somme.

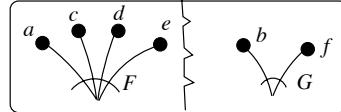
**Proposition 1.3.10** *Étant données des transformations naturelles  $F_i \xrightarrow{\varphi_i} G_i \xrightarrow{\psi_i} H_i$ , ( $i = 1, 2$ ), nous avons  $(\psi_1 + \psi_2) \circ (\varphi_1 + \varphi_2) = (\psi_1 \circ \varphi_1) + (\psi_2 \circ \varphi_2)$ .*

**Démonstration:** Soient  $l$  un ensemble totalement ordonné et  $s \in (F_1 + F_2)[l]$ . Si  $s \in F_1[l]$  alors  $(\varphi_1 + \varphi_2)(s) = \varphi_1(s) \in G_1[l]$ . Donc  $(\psi_1 + \psi_2) \circ (\varphi_1 + \varphi_2)(s) = (\psi_1 + \psi_2)(\varphi_1(s)) = \psi_1(\varphi_1(s))$ . Sinon,  $s \in F_2[l]$ , et on aura  $(\psi_1 + \psi_2) \circ (\varphi_1 + \varphi_2)(s) = \psi_2(\varphi_2(s))$ . ■

**Notation** Si  $\psi : G \rightarrow K$  est un morphisme, nous posons  $F+\psi := 1_F + \psi$  et  $\psi+F := \psi + 1_F$ .

## Produit

Le produit de deux  $\mathbb{L}$ -espèces  $F = F_u$  et  $G = G_v$  est défini par  $(F \cdot G)[l] = \sum_{l_1+l_2=l} F[l_1] \times G[l_2]$ , où la notation  $l_1 + l_2 = l$  veut dire que la somme est prise sur tous les couples  $(l_1, l_2)$  de sous-ensembles totalement ordonnés de  $l$  tels que  $l_1 \cap l_2 = \emptyset$  et  $l_1 \cup l_2 = l$  (Figure 1.6).



**Figure 1.6:** Une  $F \cdot G$ -structure sur  $l = \{a, b, c, d, e, f\}$

Une  $F \cdot G$ -structure est donc un quadruplet  $s = (l_1, l_2, s_1, s_2)$  où  $l_1 + l_2 = l$ ,  $s_1 \in F[l_1]$  et  $s_2 \in G[l_2]$ , la pondération étant définie par  $w(s) = u(s_1)v(s_2)$ , le transport des structures par  $(F \cdot G)[\tau](l_1, l_2, s_1, s_2) = (m_1, m_2, F[\tau_1](s_1), G[\tau_2](s_2))$ , où  $m_i = \tau_i(l_i)$  et  $\tau_i = \tau|_{l_i}$ .

**Proposition 1.3.11** Étant donné des  $\mathbb{L}$ -espèces  $F$  et  $G$ ,  $(F \cdot G)(t) = F(t)G(t)$ .

**Démonstration** On a

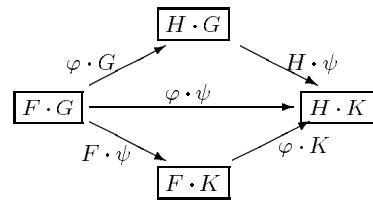
$$\begin{aligned} |F \cdot G[n]|_w &= \sum_{l_1+l_2=[n]} |F[l_1] \times G[l_2]|_w = \sum_{l_1+l_2=[n]} |F[l_1]|_u \cdot |G[l_2]|_v \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |F[k]| \cdot |G[n-k]|_v = n! [t^n] (F(t)G(t)). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Remarquons que cette démonstration utilise la propriété 2 des anneaux pondérateurs [cf. Définition 1.2.2], à savoir que le produit d'ensembles sommables est sommable.

Considérons maintenant  $\varphi : F \rightarrow H$  et  $\psi : G \rightarrow K$  deux transformations naturelles de  $\mathbb{L}$ -espèces. On définit le produit de  $\varphi$  et  $\psi$ ,  $\varphi \cdot \psi : F \cdot G \rightarrow H \cdot K$ , en posant  $(\varphi \cdot \psi)_l = \sum_{l_1+l_2=l} \varphi_{l_1} \times \psi_{l_2}$ , c'est-à-dire que  $(\varphi \cdot \psi)_l(l_1, l_2, s_1, s_2) = (l_1, l_2, \varphi_{l_1}(s_1), \psi_{l_2}(s_2))$ .

**Proposition 1.3.12** a) *Le produit  $\varphi \cdot \psi$  est une transformation naturelle de  $\mathbb{L}$ -espèces.*

b) *Posons  $\varphi \cdot G := \varphi \cdot 1_G$  et  $H \cdot \psi := 1_H \cdot \psi$ . Le diagramme suivant est commutatif:*



c) *Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont des isomorphismes, alors  $\varphi \cdot \psi$  est un isomorphisme.* ■

**Démonstration:** a) Soit  $\tau : l \rightsquigarrow m$ . Il s'agit de montrer que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} (F \cdot G)[l] & \xrightarrow{(\varphi \cdot \psi)_l} & (H \cdot K)[l] \\ (F \cdot G)[\tau] \downarrow & & \downarrow (H \cdot K)[\tau] \\ (F \cdot G)[m] & \xrightarrow{(\varphi \cdot \psi)_m} & (H \cdot K)[m] \end{array}$$

Soit  $s = (l_1, l_2, s_1, s_2) \in (F \cdot G)[l]$ . Posons  $m_i = \tau(l_i)$  et  $\tau_i = \tau|_{l_i}$ . En remarquant que  $\varphi$  et  $\psi$  sont des transformations naturelles, on a

$$\begin{aligned} (H \cdot K)[\tau] \circ (\varphi \cdot \psi)_l(s) &= (H \cdot K)[\tau](l_1, l_2, \varphi_{l_1}(s_1), \psi_{l_2}(s_2)) \\ &= (m_1, m_2, H[\tau_1] \circ \varphi_{l_1}(s_1), K[\tau_2] \circ \psi_{l_2}(s_2)) \\ &= (m_1, m_2, \varphi_{m_1} \circ F[\tau_1](s_1), \psi_{m_2} \circ G[\tau_2](s_2)) \\ &= (\varphi \cdot \psi)_m(m_1, m_2, F[\tau_1](s_1), G[\tau_2](s_2)) \\ &= (\varphi \cdot \psi)_m \circ (F \cdot G)[\tau](s). \end{aligned}$$

b) Montrons que  $(H \cdot \psi) \circ (\varphi \cdot G) = \varphi \cdot \psi$ . Si  $s = (l_1, l_2, s_1, s_2)$ , alors  $(H \cdot \psi)_l \circ (\varphi \cdot G)_l(s) = (H \cdot \psi)_l(l_1, l_2, \varphi_{l_1}(s_1), s_2) = (l_1, l_2, \varphi_{l_1}(s_1), \psi(s_2)) = (\varphi \cdot \psi)(s)$ .

c) Facile à démontrer en utilisant la proposition suivante. ■

**Proposition 1.3.13** Étant données  $F_i \xrightarrow{\varphi_i} G_i \xrightarrow{\psi_i} H_i$ , ( $i = 1, 2$ ), alors

$$(\psi_1 \cdot \psi_2) \circ (\varphi_1 \cdot \varphi_2) = (\psi_1 \circ \varphi_1) \cdot (\psi_2 \circ \varphi_2).$$

**Démonstration:** Nous avons

$$\begin{aligned} (\psi_1 \cdot \psi_2) \circ (\varphi_1 \cdot \varphi_2)(l_1, l_2, s_1, s_2) &= (\psi_1 \cdot \psi_2)(l_1, l_2, \varphi_1(s_1), \varphi_2(s_2)) \\ &= (l_1, l_2, \psi_1(\varphi_1(s_1)), \psi_2(\varphi_2(s_2))). \end{aligned}$$

**Proposition 1.3.14** a) Étant données des  $\mathbb{L}$ -espèces  $F, G, H$  et  $K$ , nous avons  $F \cdot G \simeq G \cdot F$ ,  $F \cdot (G \cdot H) \simeq (F \cdot G) \cdot H$ ,  $F \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot F = F$ , et  $(F+G) \cdot H \simeq F \cdot H + G \cdot H$ .

b) Étant données des transformations naturelles  $\varphi_i : F_i \rightarrow G_i$ , ( $1 \leq i \leq 3$ ), le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} (F_1 + F_2) \cdot F_3 & \longrightarrow & [F_1 \cdot F_3 + F_2 \cdot F_3] \\ (\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \varphi_3 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \cdot \varphi_3 + \varphi_2 \cdot \varphi_3 \\ (G_1 + G_2) \cdot G_3 & \longrightarrow & [G_1 \cdot G_3 + G_2 \cdot G_3] \end{array}$$

**Démonstration:** Il suffit d'utiliser les définitions. ■

### Composition partitionnelle ou Substitution

Soient  $F = F_u$  et  $G = G_v$  des  $\mathbb{L}$ -espèces pondérées, avec  $G(\emptyset) = \emptyset$ . La *composition partitionnelle* ou *substitution* de  $F$  par  $G$  est la  $\mathbb{L}$ -espèce  $F(G)$ , notée aussi  $F \circ G$ , définie par:  $F(G)[l] = \sum_{\pi \in \text{Par}[l]} F[\pi] \times \prod_{p \in \pi} G[p]$ , où  $\text{Par}[l]$  désigne l'ensemble des partitions de  $l$ . Une  $F(G)$ -structure est donc un triplet  $s = (\pi, \alpha, (s_p)_{p \in \pi})$  où  $\pi$  est une partition de  $l$ ,  $\alpha \in F[\pi]$  et  $s_p \in G[p]$  (Figure 1.7). On parle alors d'une  $F$ -assemblée de  $G$ -structures. La pondération est définie par:  $w(s) = u(\alpha) \prod_{p \in \pi} v(s_p)$  si  $s = (\pi, \alpha, (s_p)_{p \in \pi})$ . Pour le transport des structures, remarquons qu'un isomorphisme d'ensembles totalement ordonnés  $\tau : l \xrightarrow{\sim} l'$  transforme chaque partition  $\pi$  de  $l$  en une partition  $\pi'$  de  $l'$ , et induit une bijection  $\tau_\pi : \pi \xrightarrow{\sim} \pi'$ , où pour chaque  $p \in \pi$ ,  $\tau_\pi(p) = \{\tau(x), x \in p\}$ . On pose alors  $F(G)[\tau](s) = (\pi', F[\tau_\pi](\alpha), (G[\tau|_p](s_p))_{p \in \pi})$ . ■

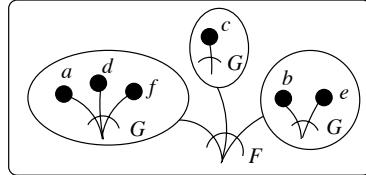


Figure 1.7: Une  $F(G)$ -structure sur  $l = \{a < b < c < d < e < f\}$

**Proposition 1.3.15** Si  $F$  et  $G$  deux  $\mathbb{L}$ -espèces telles que  $G(\emptyset) = \emptyset$ , alors  $F(G)(t) = F(G(t))$ .

**Démonstration:** Posons  $f_n = |F[n]|_u$  et  $g_n = |G[n]|_v$ . Par définition, une  $F(G)$ -structure est un triplet  $(\pi, \alpha, (s_p)_{p \in \pi})$ , où  $\pi$  est une partition de  $[n]$ ,  $\alpha$  une  $F$ -structure sur  $\pi$  et  $s_p$  une  $G$ -structure sur le bloc  $p$ . Choisissons d'abord une partition *ordonnée*  $\pi$ , ayant  $k$  classes non vides de cardinales  $n_1, n_2, \dots, n_k$ . Il est clair que le nombre de façon de choisir une telle partition est  $\binom{n}{n_1 n_2 \dots n_k}$ . Donc le poids total des  $F(G)$ -structure sur  $[n]$  est

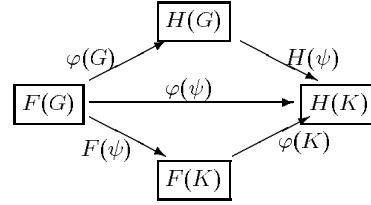
$$|F(G)[n]|_w = \sum_{k=0}^n \sum_{\sum_{j=1}^k n_j = n} \frac{1}{k!} \binom{n}{n_1 n_2 \dots n_k} f_k \prod_{j=1}^k g_{n_j} = n! [t^n] F(G(t)),$$

en remarquant que la division par  $k!$  revient à ignorer l'ordre des blocs. ■

Soit  $\varphi : F \rightarrow H$  et  $\psi : G \rightarrow K$ , deux transformations naturelles de  $\mathbb{L}$ -espèces. Supposons que  $G(\emptyset) = K(\emptyset) = \emptyset$ . Alors la composée partitionnelle  $\varphi(\psi) : F(G) \rightarrow H(K)$  est définie par  $\varphi(\psi)_l = \sum_{\pi \in \text{Par}[l]} \varphi_\pi \times (\prod_{p \in \pi} \psi_p)$ , c'est-à-dire que  $(\varphi(\psi))_l(\pi, \alpha, (s_p)_{p \in \pi}) = (\pi, \varphi_\pi(\alpha), (\psi_p(s_p))_{p \in \pi})$ .

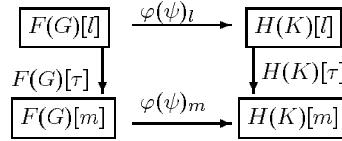
**Proposition 1.3.16** a) La famille  $\varphi(\psi)$  est une transformation naturelle de  $\mathbb{L}$ -espèces.

b) En notant  $\varphi(G) := \varphi(1_G)$  et  $H(\psi) := 1_H(\psi)$ , le diagramme suivant est commutatif:



c) Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont des isomorphismes, alors  $\varphi(\psi)$  est un isomorphisme.

**Démonstration** a) Montrons que si  $\tau : l \rightsquigarrow m$ , alors le diagramme suivant est commutatif:



Soient  $s = (\pi, f, (s_p)_{p \in \pi}) \in F(G)[l]$ ,  $\tau' : \pi \rightsquigarrow \pi'$  la bijection induite par  $\tau$ ,  $\tau_p = \tau|_p$  la restriction de  $\tau$  à  $p$ . En remarquant que  $\varphi$  et  $\psi$  sont des transformations naturelles, on a

$$\begin{aligned}
 H(K)[\tau] \circ \varphi(\psi)_l(s) &= H(K)[\tau](\pi, \varphi_\pi(f), (\psi_p(s_p))_{p \in \pi}) \\
 &= (\pi', H[\tau'](\varphi_\pi(f)), (K[\tau_p](\psi_p(s_p)))_{p \in \pi}) \\
 &= (\pi', \varphi_{\pi'}(F[\tau'](f)), (\psi_p(G[\tau_p](s_p)))_{p \in \pi}) \\
 &= \varphi(\psi)_m \circ F(G)[\tau](s).
 \end{aligned}$$

b)  $H(\psi) \circ \varphi(G)(s) = H(\psi)(\pi, \varphi_\pi(f), (s_p)_{p \in \pi}) = (\pi, \varphi_\pi(f), (\psi_p(s_p))_{p \in \pi})$ .

c) Facile à démontrer en utilisant la proposition suivante. ■

**Proposition 1.3.17** Soient  $F_i \xrightarrow{\varphi_i} G_i \xrightarrow{\psi_i} H_i$ ,  $i = 1, 2$ . Si les substitutions

$$F_1(F_2) \xrightarrow{\varphi_1(\varphi_2)} G_1(G_2) \xrightarrow{\psi_1(\psi_2)} H_1(H_2)$$

sont définies, alors  $(\psi_1 \circ \varphi_1)(\psi_2 \circ \varphi_2)$  est définie et

$$\psi_1(\psi_2) \circ \varphi_1(\varphi_2) = (\psi_1 \circ \varphi_1)(\psi_2 \circ \varphi_2).$$

**Démonstration:** Nous avons

$$\begin{aligned}
 \psi_1(\psi_2) \circ \varphi_1(\varphi_2)(\pi, \alpha, (s_p)_{p \in \pi}) &= \psi_1(\psi_2)(\pi, \varphi_1(\alpha), (\varphi_2(s_p))_{p \in \pi}) \\
 &= (\pi, \psi_1(\varphi_1(\alpha)), (\psi_2(\varphi_2(s_p)))_{p \in \pi}).
 \end{aligned}$$

**Proposition 1.3.18** a) Si  $F$ ,  $G$ , et  $H$  sont des  $\mathbb{L}$ -espèces telles que  $H(0) = 0$ , alors:

- i)  $F(G(H)) \simeq (F(G))(H)$  et  $T(F) = F(T) = F$ ,  $T$  étant l'espèce des singlettes.
- ii)  $(F + G)(H) \simeq F(H) + G(H)$ , et  $(F \cdot G)(H) \simeq F(H) \cdot G(H)$ .

b) Étant données des transformations naturelles  $\varphi_i : F_i \rightarrow G_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , les diagrammes suivants sont commutatifs:

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{(F_1 + F_2)(F_3)} & \longrightarrow & \boxed{F_1(F_3) + F_2(F_3)} \\
 (\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_3) \downarrow & & \downarrow \varphi_1(\varphi_3) + \varphi_2(\varphi_3) \\
 \boxed{(G_1 + G_2)(G_3)} & \longrightarrow & \boxed{G_1(G_3) + G_2(G_3)}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \boxed{(F_1 \cdot F_2)(F_3)} & \longrightarrow & \boxed{F_1(F_3) \cdot F_2(F_3)} \\
 (\varphi_1 \cdot \varphi_2)(\varphi_3) \downarrow & & \downarrow \varphi_1(\varphi_3) \cdot \varphi_2(\varphi_3) \\
 \boxed{(G_1 \cdot G_2)(G_3)} & \longrightarrow & \boxed{G_1(G_3) \cdot G_2(G_3)}
 \end{array}$$

**Démonstration** Cette proposition est évidente en passant par les définitions.

**Remarque 1.3.19** 1. En général  $F(G + H) \not\simeq F(G) + F(H)$ ,  $F(G \cdot H) \not\simeq F(G) \cdot F(H)$ , et  $F(G) \not\simeq G(F)$ .

2. Comme l'espèce  $T$  est neutre pour la composition partitionnelle, on peut écrire  $F = F(T)$ .

### Dérivation

La dérivée  $F'$  de  $F_u$ , aussi dénotée par  $\frac{d}{dT}F$ , est définie par  $F'[l] = F[l']$ , où  $l' = 1 +_o l$ , la pondération étant définie par  $w(s) = u(s)$ , où  $s \in F[1 +_o l]$ , et le transport de structures par  $F'[\tau] = F[\tau']$ , où  $\tau' = 1 +_o \tau : 1 +_o l \xrightarrow{\sim} 1 +_o m$ . La figure 1.8 représente une  $F'$ -structure sur  $\{a, b, c, d, e, f\}$ . Notons aussi que  $(F')(t) = (F(t))'$ .

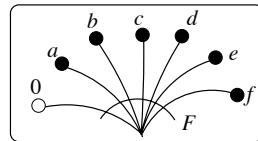


Figure 1.8: Une  $F'$ -structure sur  $l = \{a, b, c, d, e, f\}$

**Proposition 1.3.20** Si  $\varphi : F \rightarrow G$  est une transformation naturelle, alors  $\varphi' : F' \rightarrow G'$  définie par  $\varphi'_l = \varphi_{1+_o l}$  est une transformation naturelle. Si  $\varphi$  est un isomorphisme, alors  $\varphi'$  est un isomorphisme.

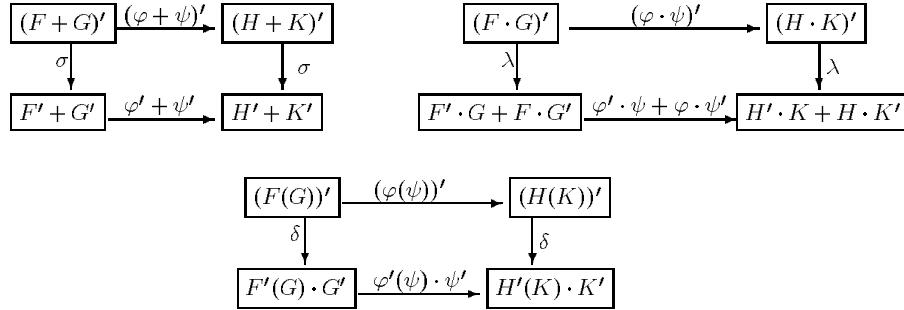
**Démonstration** C'est évident sachant que  $F'[\tau] = F[1 +_o l]$ . ■

Nous obtenons ainsi un opérateur de dérivation  $\frac{d}{dT}$  sur  $\mathbb{L}_{\mathcal{E}_s}$ , qui, à  $F$  associe  $\frac{d}{dT}F := F'$ , et à une transformation naturelle  $\varphi$ , associe  $\frac{d}{dT}\varphi := \varphi'$ .

**Proposition 1.3.21** L'opérateur de dérivation  $\frac{d}{dT}$  induit des isomorphismes:

1.  $\sigma : (F + G)' \xrightarrow{\sim} F' + G'$ ,
2.  $\lambda : (F \cdot G)' \xrightarrow{\sim} F' \cdot G + F \cdot G'$  (Formule de Leibnitz),
3.  $\delta : (F \circ G)' \xrightarrow{\sim} F'(G) \cdot G'$  (Règle de dérivation en chaîne).

De plus, si  $\varphi : F \rightarrow G$  et  $\psi : H \rightarrow K$  sont des morphismes de  $\mathbb{L}_{\mathcal{E}_s}$ , alors les trois diagrammes suivants sont commutatifs:



**Démonstration:** 1. Nous avons  $(F+G)'[l] = (F+G)[1+o l] = F[1+o l] + G[1+o l] = F'[l] + G'[l] = (F'+G')[l]$ . Il suffit alors de poser  $\sigma(s) = s$  si  $s \in (F+G)[1+o l] = F[1+o l] + G[1+o l]$ .

2. On a  $(F \cdot G)'[l] = (F \cdot G)[1+o l] = \sum_{l_1+l_2=1+o l} F[l_1] \times G[l_2]$ . Soit  $s = (l_1, l_2, s_1, s_2) \in (F \cdot G)'[l]$  et posons  $1 = \{0\}$  avec  $0 \notin l$ . Si  $0 \in l_1$ , alors  $l_1 = 1+o l'_1$  avec  $l = l'_1 + o l_2$ , et  $s_1 \in F'[l'_1]$ . Donc  $s \in F'[l'_1] \times G[l_2]$ . On pose alors  $\lambda_l(s) = \lambda_l(l_1, l_2, s_1, s_2) = (l_1, l_2, s_1, s_2) \in (F' \cdot G)[l]$ . De même si  $0 \in l_2$ , alors  $s \in (F[l_1] \times G'[l'_2])$  où  $l_2 = 1+o l'_2$  et  $l = l_1 + o l'_2$ . On pose alors  $\lambda_l(s) = \lambda_l(l_1, l_2, s_1, s_2) = (l_1, l_2, s_1, s_2) \in (F \cdot G')[l]$ . Il est alors facile de vérifier que:

$$\lambda_l(\phi \cdot \psi)'_l = \lambda_l(\phi \cdot \psi)_{1+o l} = \sum_{l_1+l_2=l} (\phi_{1+o l_1}, \psi_{l_2}) + \sum_{l_1+l_2=l} (\phi_{l_1}, \psi_{1+o l_2}) = (\phi' \cdot \psi + \phi \cdot \psi')_l \lambda_l.$$

3. On a  $[F(G)]'[l] = [F(G)][1+o l] = \sum_{\pi \in \text{Par}[1+o l]} F[\pi] \times \Pi_{p \in \pi} G[p]$ . Soit donc  $\pi \in \text{Par}[1+o l]$  et notons  $p_o = 1+o l_2$  le bloc de  $\pi$  contenant le nouvel élément minimum 0, et  $l_1 = l \setminus l_2$ . Alors  $\pi' = \pi \setminus \{p_o\}$  est une partition de  $l_1$ . Sachant que l'ordre de  $\pi$  est l'ordre induit par les éléments minimums, nous avons  $p_o \leq p$  pour tout  $p \in \pi$ . Dans  $\pi$  remplaçons  $p_o$  par un bloc vide supposé inférieur à tous les autres blocs. Par transport de structures, on peut considérer la  $F$ -structure sur  $\pi$  comme une  $F$ -structure sur  $1+o \pi'$ . Nous pouvons écrire:

$$[F(G)]'[l] = \sum_{l_1+l_2=l} \left( \sum_{\pi' \in \text{Par}[l_1]} F[1+o \pi'] \times \left( \prod_{p \in \pi'} G[p] \right) \right) \times G[1+o l_2]$$

Si  $s = (\pi, \alpha, (s_p)_{p \in \pi}) \in [F(G)]'[l] = [F(G)][1+o l]$ , nous posons  $\delta_l(s) = (l_1, p_o, (1+o \pi', \alpha, (s_p)_{p \in \pi'}), s_{p_o})$  où  $1 = \{0\} \subset p_o$ ,  $\pi' = \pi \setminus \{p_o\}$ , et  $l_1 = \cup_{p \in \pi'} p$ .

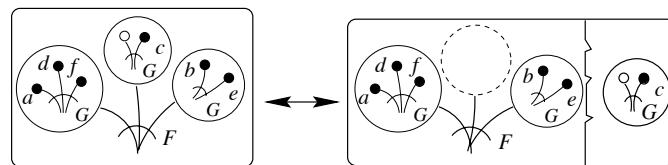
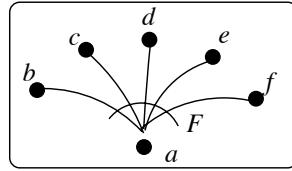


Figure 1.9: Règle de dérivation en chaîne.

D'un point de vue géométrique, on détache la  $G$ -structure contenant l'élément minimum 0 et on la remplace par un bloc vide (Figure 1.9). La commutativité du diagramme en découle immédiatement. ■

### Intégration

L'intégrale  $\int F = \int_0^T F(X) dX$  de  $F = F_v$  est définie par  $(\int F)[\emptyset] = \emptyset$ , et si  $l \neq \emptyset$ ,  $(\int F)[l] = F[l^-]$  où  $l^- = l \setminus \{\min l\}$ . La pondération est définie par  $w(s) = v(s)$  si  $s \in F[l^-]$ , et le transport de structures par  $(\int F)(\tau) = F(\tau^-)$ , si  $\tau : l \rightsquigarrow m$ ,  $l \neq \emptyset$  et  $\tau^- := \tau|_{l^-}$ .



**Figure 1.10:** Une  $\int_0^T F(X) dX$ -structure sur  $l = \{a < b < c < d < e < f\}$

La figure 1.10 représente une  $\int_0^T F(X) dX$ -structure sur  $l = \{a < b < c < d < e < f\}$ . Remarquons que l'élément minimum  $a$  ne fait pas partie de la  $F$ -structure, mais il fait partie de la  $\int_0^T F(X) dX$ -structure.

**Proposition 1.3.22** a) Nous avons  $(\int_0^T F(X) dX)(t) = \int_0^t F(x) dx$ .

b) Si  $\varphi : F \rightarrow G$  est une transformation naturelle, alors  $\int \varphi : \int F \rightarrow \int G$  définie par  $(\int \varphi)_l = \varphi_{l \setminus \min l}$  est une transformation naturelle. Si de plus  $\varphi$  est un isomorphisme, alors  $\int \varphi$  est un isomorphisme.

c)  $\int F' = F_+$  et  $(\int F)' = F$ , où  $F_+$  est défini par  $F_+[l] = F[l]$  si  $l \neq \emptyset$  et  $F_+[\emptyset] = \emptyset$ . En d'autres termes,  $F = F(0) + \int F'$ .

d) Soient  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , et  $K$  des  $\mathbb{L}$ -espèces. Alors

$$\text{i)} \quad \int_0^T (F + G)(X) dX \simeq \int_0^T F(X) dX + \int_0^T G(X) dX.$$

$$\text{ii)} \quad \int_0^T F(G(X)) G'(X) dX \simeq \int_0^{G(T)} F(Y) dY = (\int F)(G), \text{ si } G(0) = 0. \blacksquare$$

### 1.4 Réduction des $\mathbb{L}$ -espèces

Rappelons que si  $F$  et  $G$  sont trivialement pondérées et si  $F$  est équivalent à  $G$  ( $F \equiv G$ ) alors  $F$  est isomorphe à  $G$  ( $F \simeq G$ ) (Prop. 1.3.7). Dans ce qui suit, nous étudions le cas où les pondérations de  $F$  et  $G$  ne sont pas triviales.

### 1.4.1 La notion de réduction

**Définition 1.4.1** Une *involution pondérée* d'une  $\mathbb{L}$ -espèce pondérée  $F$  est une famille  $\Phi = (\Phi_l)$ , d'involutions pondérées  $\Phi_l : F[l] \rightarrow F[l]$ , compatibles avec les transports de structures. L'*involution pondérée*  $\Phi$  est *réductrice* si pour tout  $l$ ,  $\Phi_l$  est réductrice, c'est-à-dire que  $\text{Fix}(\Phi_l)$  est réduit. ■

Rappelons qu'un ensemble pondéré  $(A, v)$  est réduit si pour tout  $x$  et  $y \in A$ , si  $x \neq y$  alors  $v(x) \neq v(y)$  [cf. section 1.2].

**Lemme 1.4.2** *Toute  $\mathbb{L}$ -espèce pondérée admet une involution pondérée réductrice.*

**Démonstration:** Pour tout  $n$ , soit  $\Phi_n : F[n] \rightarrow F[n]$ , l'*involution réductrice* définie par la proposition 1.2.12. En posant, pour tout  $l$ ,  $\Phi_l := F[\sigma_l] \circ \Phi_n \circ F[\sigma_l]^{-1}$ , où  $\sigma_l : [n] \tilde{\rightarrow} l$ , on obtient une *involution pondérée réductrice*, de  $F$ . ■

**Définition 1.4.3** 1. La  $\mathbb{L}$ -espèce  $G$  est dite *une sous-espèce* de  $F$  si pour chaque  $l$ :

- i)  $G[l] \subseteq F[l]$ ;
- ii) Pour tout  $\sigma : l \tilde{\rightarrow} m$ ,  $G[\sigma] := F[\sigma]|_{G[l]}$ .
- iii) Pour chaque  $s \in G[l]$ ,  $w(s) = v(s)$  où  $v$  et  $w$  sont les pondérations respectives de  $F$  et  $G$ .

2. Une  $\mathbb{L}$ -espèce pondérée  $F = F_v$  est dite *réduite* si pour tout  $l$ , l'ensemble pondéré  $F[l]$  est réduit. ■

**Exemple 1.4.4** a) Soient  $F$  et  $G$  des  $\mathbb{L}$ -espèces réduites. Alors  $F'$  et  $\int F$  le sont, mais  $F + G$ ,  $FG$  et  $F(G)$  ne sont pas toujours réduites.

b) L'*espèce*  $S$  des permutations pondérées par  $v(\sigma) = \text{sgn}(\sigma)t^{c(\sigma)}$  est réduite (Exemple 1.2.8).

**Proposition 1.4.5** *Toute espèce pondérée admet une sous-espèce réduite, qui lui est équipotente.*

**Démonstration:** Étant donnée une *involution pondérée réductrice*  $\Phi$  de  $F = F_v$ , la sous-espèce  $F_{\text{red}(\Phi)}$  telle que  $F_{\text{red}(\Phi)}[l] = \text{Fix}(\Phi_l)$  est réduite. De plus  $|F_{\text{red}(\Phi)}[l]|_v = |\text{Fix}(\Phi_l)|_v = |F[l]|_v$  (Prop. 1.2.6). ■

**Proposition 1.4.6** *Soit  $F = F_v$  une  $\mathbb{L}$ -espèce telle que pour chaque entier  $n$ ,  $\{s \in F_v[n] | v(s) = 0\}$  soit finie. Si  $\Phi$  et  $\Psi$  sont deux involutions pondérées réductrices de  $F$ , alors  $F_{\text{red}(\Phi)} \simeq F_{\text{red}(\Psi)}$ .*

**Démonstration:** En effet  $\Phi$  et  $\Psi$  étant réductrice, la proposition 1.2.14 montre que pour chaque  $n$ , il existe un isomorphisme d'ensembles pondérés  $\gamma_n : F_{\text{red}(\Phi)}[n] \rightarrow F_{\text{red}(\Psi)}[n]$ . La proposition 1.3.7 nous donne alors le résultat. ■

Un représentant de cette classe d'isomorphisme sera noté  $F_{\text{red}}$  et sera appelée *la réduite* de  $F$ .

**Définition 1.4.7** 1. La pondération  $v$  d'un ensemble pondéré  $(A, v)$  est dite *monomiale* si pour tout  $s \in A$ ,  $v(s)$  est de la forme  $v(s) = (-1)^{\epsilon(s)}x^{\nu(s)}$ , où  $x = (x_1, \dots, x_k)$  les  $(x_i)$  étant des variables formelles indépendantes,  $\nu(s) = (\nu_1(s), \dots, \nu_k(s)) \in \mathbb{N}^k$ ,  $\epsilon(s) \in \mathbb{N}$  et  $x^{\nu(s)} = x_1^{\nu_1(s)}x_2^{\nu_2(s)} \dots x_k^{\nu_k(s)}$ .

2. On dira que  $F$  est une  $\mathbb{L}$ -espèce monomialement pondérée si pour tout  $l$ , la pondération  $v_l$  de  $F[l]$  est monomiale. ■

Il est clair que la classe des  $\mathbb{L}$ -espèces monomialement pondérées est stable pour les opérations élémentaires: addition, multiplication, composition, dérivation et intégration.

**Théorème 1.4.8** Si  $F = F_v$  et  $G = G_w$  sont deux  $\mathbb{L}$ -espèces monomialement pondérées telles que  $F \equiv G$ , alors  $F_{\text{red}} \simeq G_{\text{red}}$ . En particulier si  $F$  et  $G$  sont monomialement pondérées réduites, alors on a l'équivalence  $F \simeq G \Leftrightarrow F \equiv G$ .

**Démonstration:** Notons d'abord que si  $F$  est monomialement pondérée et si  $s_1$  et  $s_2 \in F_{\text{red}}[l]$ , alors  $\nu(s_1) = \nu(s_2) \Leftrightarrow v(s_1) = v(s_2)$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ , posons  $A_{n,a}(F) = \{s \in F_{\text{red}}[n] \mid \nu(s) = a\}$ . Dans ce cas, si  $s$  et  $s_1 \in A_{n,a}(F)$  alors  $v(s) = v(s_1)$ .

Supposons que  $F \equiv G$ . Alors  $|A_{n,a}(F)| = |A_{n,a}(G)|$  et pour tout  $s \in A_{n,a}(F), s' \in A_{n,a}(G), v(s) = w(s')$ . En effet  $F_{\text{red}}(t) = G_{\text{red}}(t)$ . Donc si  $(-1)^{k(a)}n![x^at^n]F_{\text{red}}(t) = c_{n,a}$  alors  $c_{n,a} = |A_{n,a}(F)| = |A_{n,a}(G)|$ . Soit alors  $\varphi_{n,a} : A_{n,a}(F) \rightarrow A_{n,a}(G)$  une bijection. On peut prolonger les  $(\varphi_{n,a})$  en une bijection  $\varphi_n : F_{\text{red}}[n] \rightarrow G_{\text{red}}[n]$ , conservant le poids. Il suffit d'appliquer la proposition 1.3.7. ■

**Remarque 1.4.9** Le théorème précédent stipule qu'une  $\mathbb{L}$ -espèce monomialement pondérée réduite est caractérisée par sa série génératrice, dans le sens où on a “équipotence  $\Leftrightarrow$  isomorphisme”, dans ce cas. Cette équivalence n'est plus valable si on enlève l'hypothèse de pondération monomiale. En effet, l'espèce  $T_{-a_1x} + T_{-a_2x} + T_{(a_1+a_2)x}$  dont le poids total est nul n'est pas isomorphe à l'espèce vide. ■

**Définition 1.4.10** La pondération  $v$  d'un ensemble  $A$  est dite *admissible* si pour toute partie réduite  $B$  de  $A$ , telle que  $|B|_v = 0$  on a  $B = \emptyset$ .

**Exemple** Les pondérations monomiales sont admissibles.

Supposons donc que les pondérations sont admissibles. La proposition suivante nous montre alors que toute sous-espèce réduite équivalente à  $F$  peut être définie par les points fixes d'une involution réductrice.

**Proposition 1.4.11** *La pondération de  $F$  étant admissible, une sous-espèce réduite  $H$  de  $F$  est équivalente à  $F$  si et seulement si il existe une involution pondérée réductrice  $\Phi$  de  $F$  telle que  $H = F_{\text{red}(\Phi)}$ .*

**Démonstration** La condition est suffisante. Elle est aussi nécessaire. En effet, si  $H \equiv F$ , alors pour chaque  $l$ ,  $|H[l]|_v = |F[l]|_v$ , donc  $|F[l] \setminus H[l]|_v = 0$ . Soit  $\phi_l$  une involution pondérée réductrice de  $F[l] \setminus H[l]$  (prop. 1.2.12). On a  $|\text{Fix}(\phi_l)|_v = 0$ , donc  $\text{Fix}(\phi_l) = \emptyset$ , la pondération de  $F$  étant admissible. Il suffit de prolonger  $\phi_l$  en une involution  $\Phi_l : F[l] \rightarrow F[l]$ , en posant  $\Phi_l(s) = s$  si  $s \in H[l]$ . ■

**Corollaire 1.4.12** *Si la pondération de  $F$  est admissible et si  $H$  et  $K$  sont deux sous-espèces réduites de  $F$ , équivalentes à  $F$ , alors  $H \simeq K$ .*

**Démonstration** La proposition 1.4.11 montre qu'il existe des involutions pondérées réductrices  $\Phi$  et  $\Psi$  telles que  $H = F_{\text{red}(\Phi)}$  et  $K = F_{\text{red}(\Psi)}$ . Il suffit alors d'appliquer la proposition 1.4.6. ■

**Remarque 1.4.13** La condition " $H$  et  $K$  équivalentes à  $F$ " est nécessaire. En effet si  $F = T_x + T_x + T_{2x}$ ,  $H = T_x + T_x$  et  $K = T_{2x}$  alors  $H \equiv K$  mais  $H$  et  $K$  ne sont pas isomorphes. ■

**Proposition 1.4.14** *Soient  $F$  et  $G$  deux  $\mathbb{L}$ -espèces, dont les pondérations sont admissibles. Alors on a les isomorphismes suivants.*

- |   |   |
|---|---|
| 1. $(F')_{\text{red}} \simeq (F_{\text{red}})'$                                 | 2. $(\int F)_{\text{red}} \simeq \int (F_{\text{red}})$                                 |
| 3. $(F_{\text{red}} + G_{\text{red}})_{\text{red}} \simeq (F + G)_{\text{red}}$ | 4. $(F_{\text{red}} \cdot G_{\text{red}})_{\text{red}} \simeq (F \cdot G)_{\text{red}}$ |
| 5. $(F_{\text{red}}(G_{\text{red}}))_{\text{red}} \simeq (F(G))_{\text{red}}$   |   |

**Démonstration:** Soit  $\Phi : F \rightarrow F$  et  $\Psi : G \rightarrow G$  des involutions pondérées réductrices.

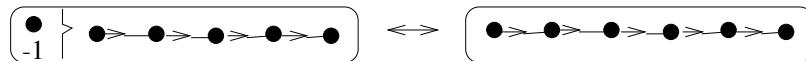
1. On peut définir une involution pondérée réductrice  $\Phi' : F' \rightarrow F'$  en posant  $\Phi'_l := \Phi_{1+o,l}$ , on a alors  $\text{Fix}(\Phi'_l) = \text{Fix}(\Phi_{1+o,l})$ .
2. On définit une involution pondérée réductrice  $(\int \Phi) : \int F \rightarrow \int G$  en posant  $(\int \Phi)_l = \Phi_{l \setminus \min l}$ .
3. Il suffit de remarquer que  $(F_{\text{red}} + G_{\text{red}})_{\text{red}}$  [resp.  $(F_{\text{red}} \cdot G_{\text{red}})_{\text{red}}$ , resp.  $(F_{\text{red}}(G_{\text{red}}))_{\text{red}}$ ] et  $(F + G)_{\text{red}}$  [resp.  $(F \cdot G)_{\text{red}}$ , resp.  $(F(G))_{\text{red}}$ ] sont des sous-espèces réduites de  $F + G$  [resp.  $F \cdot G$ , resp.  $F \circ G$ ], équivalentes à  $F + G$  [resp.  $F \cdot G$ , resp.  $F \circ G$ ]. ■

**Notation** 1. Soient  $\alpha \in \mathbb{A}$  et  $F = F_v$  une  $\mathbb{L}$ -espèce pondérée par  $v$ . On note  $\alpha F$  la  $\mathbb{L}$ -espèce  $F$  pondérée par  $w$  telle que  $w(s) = \alpha v(s)$ , pour chaque structure  $s$ ; c'est-à-dire que  $\alpha F_v = F_{\alpha v}$ . En particulier on écrira  $-F$  pour  $(-1)F$ .

2. Etant donnée une  $\mathbb{L}$ -espèce pondérée  $F$ , nous notons  $F^+$  la  $\mathbb{L}$ -espèce telle que  $F^+[\emptyset] = \emptyset$  et  $F^+[l] = F[l]$  si  $l \neq \emptyset$ . Remarquons alors que  $F = \mathbf{1} + F^+ = \mathbf{1} - (-F^+)$ .

**Exemple 1.4.15** 1. Pour toute  $\mathbb{L}$ -espèce  $F$ ,  $F + (-F) \equiv 0$ . Une involution pondérée réductrice est définie en associant à une structure  $s$ , la même structure dont le poids est multiplié par  $-1$ .

2.  $L$  étant l'espèce des listes, on a  $(\mathbf{1} - T) \cdot L \equiv \mathbf{1}$ . En effet, une involution pondérée sur  $L + (-T)L$ , dont le seul point fixe est la liste vide, est donnée par la figure 1.11. Plus généralement, si  $F$  est une  $\mathbb{L}$ -espèce telle que  $F(0) = \mathbf{1}$  alors, en substituant  $(-F^+)$  dans la relation précédente, on obtient  $F \cdot L(-F^+) \equiv \mathbf{1}$ . Ce résultat nous permet de définir, à équivalence près, *l'inverse multiplicatif* de  $F$  comme étant  $L(-F^+)$ . Remarquons que si  $F$  est monomialement pondérée, alors  $L(-F^+)$  l'est aussi.



**Figure 1.11:** L'équipotence  $(\mathbf{1} - T) \cdot L \equiv \mathbf{1}$ .

Par exemple, si on prend  $F = E$  l'espèce des ensembles, l'équipotence  $F \cdot L(-F^+) \equiv \mathbf{1}$  se traduit analytiquement par  $L(-E^+)(t) = e^{-t}$ . Or une liste d'ensembles non vides pondérés par  $-1$  sur  $[n]$  est un couple formé par une partition de  $[n]$  en  $k$  blocs dont chaque bloc est pondéré par  $-1$ , et d'une permutation de  $[k]$ . Donc  $|L(-E^+)[n]| = \sum_{k=0}^n (-1)^k k! S(n, k)$ . On retrouve l'identité  $\sum_{k=0}^n (-1)^k k! S(n, k) = (-1)^n$  de l'exemple 1.2.11.

3. Etant donnée une arborescence binaire croissante  $b$ , appellons hauteur droite (resp. gauche) d'un sommet  $s \in b$ , le nombre d'arêtes droites (resp. gauches) du chemin reliant  $s$  à la racine, et posons  $v(b) = (-1)^{d_0(b)}$ , où  $d_0(b)$  le nombre de sommets de hauteur droite 0.

La bijection illustrée par la figure 1.12 est une involution pondérée réductrice dont l'ensemble des points fixes est vide si le nombre de points est supérieur ou égal à 2. Remarquons que l'espèce  $B_v^\uparrow$  est isomorphe à l'espèce  $L_{<-1>}$  des listes dont les éléments saillants de gauche à droite sont pondérés par  $-1$  ou à l'espèce  $S_{<-1>}$  des permutations telles que chaque cycle est pondéré  $-1$ . Il correspond donc à l'égalité “ $\exp(-\log(\frac{1}{1-t})) = 1 - t$ ”, ou à l'identité:  $\sum_{k=1}^n (-1)^k c(n, k) = 0$ , si  $n \geq 2$  où  $c(n, k) = (-1)^{n-k} s(n, k)$  est le nombre permutations de  $[n]$  ayant  $k$  cycles,  $s(n, k)$  étant les nombres de Stirling de première espèce [cf. (Co. 70)].

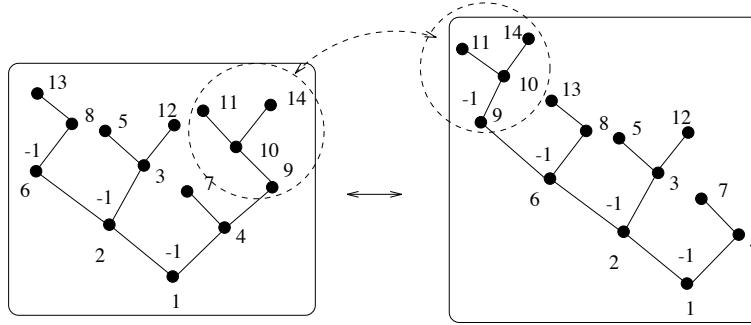


Figure 1.12: L’identité  $\sum_{k=1}^n (-1)^k c(n, k) = 0$ .

### 1.4.2 Décomposition canonique des $\mathbb{L}$ -espèces

Chaque entier naturel  $k$  peut être considérée comme une  $\mathbb{L}$ -espèce  $\mathbf{k}$  en posant  $\mathbf{k} = \mathbf{1} + \mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1}$ , c’est-à-dire qu’on a  $k$  structures sur le vide, que l’on peut noter  $\emptyset_1, \emptyset_2, \dots, \emptyset_k$ .

**Définition 1.4.16** Étant donnés un entier naturel  $k$  et une  $\mathbb{L}$ -espèce  $F = F_v$ , on appelle espèce des  $F$ -structure  $k$ -colorée, et on note  $\mathbf{k} \cdot F$ , le produit de l’espèce  $\mathbf{k}$  par l’espèce  $F$ .

Une  $\mathbf{k} \cdot F$ -structure sur  $l$  est donc un couple  $(\emptyset_j, s)$  où  $1 \leq j \leq k$  et  $s \in F[l]$ , le poids étant défini par  $w(\emptyset_j, s) = v(s)$ , et le transport de structures par  $(\mathbf{k} \cdot F)[\sigma](\emptyset_j, s) = (\emptyset_j, F[\sigma](s))$ . ■

**Proposition 1.4.17** Toute  $\mathbb{L}$ -espèce pondérée dans l’anneau  $\mathbb{A} = \mathbb{Z}[[x]]$ , est équivalente à une somme de  $\mathbb{L}$ -espèces monomialement pondérées réduites. Si de plus  $F$  est une  $\mathbb{L}$ -espèce monomialement pondérée et réduite et si  $|F[n]|_v = \sum_{k \geq 0} (-1)^{\nu(n,k)} a_{nk} x^k$ , alors

$$F \simeq \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} (-1)^{\nu(n,k)} x^k \mathbf{a}_{nk} \cdot E_n.$$

**Démonstration** Il suffit de remarquer que si  $F = F_v$  une  $\mathbb{L}$ -espèce telle que  $F_v(t) = \sum_{n \geq 0} f_n \frac{t^n}{n!}$ , avec  $f_n = |F[n]|_v = \sum_{k \geq 0} (-1)^{\nu(n,k)} a_{nk} x^k \in \mathbb{A}$ , alors  $F \equiv \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} (\mathbf{a}_{nk} \cdot E_n)_\nu$ , chaque élément  $s$  de  $\mathbf{a}_{nk} \cdot E_n$  étant pondéré par  $\nu(s) = (-1)^{\nu(n,k)} x^k$ . ■

Considérons le cas général d’un anneau pondérateur  $\mathbb{A}$  quelconque. Et soient  $F$  une  $\mathbb{L}$ -espèce pondérée,  $\alpha \in \mathbb{A}$ , et  $n \in \mathbb{N}$ . L’ensemble  $\{s \in F_v[n] | v(s) = \alpha\}$  est fini. Posons  $c_{n,\alpha}(F) = |\{s \in F_v[n] | v(s) = \alpha\}|$  et notons  $E_{n,\alpha}$  l’espèce des ensembles de cardinal  $n$ , pondérée par  $\alpha$ . La proposition suivante est un théorème de décomposition des  $\mathbb{L}$ -espèces.

**Théorème 1.4.18** Pour toute  $\mathbb{L}$ -espèce pondérée  $F = F_v$ , on a

$$F \simeq \sum_{n \geq 0} \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} c_{n,\alpha}(F) \cdot E_{n,\alpha}.$$

**Démonstration** Pour chaque couple  $(n, \alpha)$ , soit  $\varphi_{n,\alpha} : \{s \in F_v[n] | v(s) = \alpha\} \rightarrow \mathbf{c}_{n,\alpha}(F) \cdot E_{n,\alpha}[n]$  une bijection. Il est clair que  $\varphi_{n,\alpha}$  conserve le poids, et se prolonge de manière unique en une bijection  $\varphi_n : F_v[n] \rightarrow \sum_{\alpha \in \mathbb{A}[[T]]} \mathbf{c}_{n,\alpha}(F) \cdot E_{n,\alpha}[n]$ , conservant le poids. ■

Notons, d'une part, que  $E_{n,\beta}(\mathbf{m} \cdot T) = \mathbf{m}^n \cdot E_{n,\beta}(T)$  et, d'autre part, qu'une  $E_n(E_m)$ -structure est une partition de  $[mn]$  en  $n$  blocs de taille  $m$ . Donc  $E_{n,\alpha}(E_{m,\beta}) \simeq \mathbf{a}_{mn} \cdot E_{mn,\gamma}$  où  $a_{mn} = \frac{1}{n!} \binom{mn}{m, m, \dots, m}$ , et  $\gamma = \alpha \cdot \beta^n$ .

**Proposition 1.4.19** Soient  $F = F_u$  et  $G = G_v$ , deux  $\mathbb{L}$ -espèces pondérées. Alors

i)  $F \simeq G \Leftrightarrow$  Pour tout couple  $(n, \alpha)$ ,  $c_{n,\alpha}(F) = c_{n,\alpha}(G)$ .

ii)  $c_{n,\alpha}(F + G) = c_{n,\alpha}(F) + c_{n,\alpha}(G)$ .

iii)

$$c_{n,\alpha}(F \cdot G) = \sum_{\mu, \beta = \alpha} \sum_{n_1 + n_2 = n} \binom{n}{n_1, n_2} c_{n_1, \mu}(F) c_{n_2, \beta}(G).$$

iv)

$$c_{n,\alpha}(F(G)) = \sum_{k=1}^n \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_k = n} \sum_{\beta \prod_{i=1}^k \mu_i = \alpha} \frac{1}{k!} \binom{n}{n_1, \dots, n_k} c_{k,\beta}(F) \prod_{i=1}^k c_{n_i, \mu_i}(G)$$

v)  $c_{n,\alpha}(F') = c_{n+1,\alpha}(F)$ , et  $c_{n,\alpha}(\int F) = c_{n-1,\alpha}(F)$ .

**Démonstration** i), ii), et v) sont évidents.

iii) Pour  $l$  et  $\alpha$  donnés, l'ensemle  $C_{l,\alpha}(F) = \{s \in F_v[l] | v(s) = \alpha\}$  est fini. Il est clair que

$$(F \cdot G)[l] = \sum_{l_1 + l_2 = l} \sum_{(\mu, \beta) \in \mathbb{A}^2} C_{l_1, \mu}(F) \times (C_{l_2, \beta}(G)).$$

Soit  $\alpha \in \mathbb{A}$ . Nous avons  $C_{l,\alpha}(F \cdot G) = \sum_{l_1 + l_2 = l} \sum_{\mu, \beta = \alpha} C_{l_1, \mu}(F) \times C_{l_2, \beta}(G)$ . En effet, si  $s = (l_1, l_2, s_1, s_2)$  de  $C_{l,\alpha}(F \cdot G)$  et si  $u(s_1) = \mu$  et  $v(s_2) = \beta$ , alors  $\tilde{s} = (s_1, s_2) \in C_{l_1, \mu}(F) \times (C_{l_2, \beta}(G))$  et  $w(\tilde{s}) = u(s_1)v(s_2) = \mu\beta = \alpha = w(s)$ . Et réciproquement, soient  $l_1, l_2$  tels que  $l_1 + l_2 = l$  et  $\mu, \beta$  tels que  $\mu\beta = \alpha$ , et soit  $\tilde{s} = (s_1, s_2) \in C_{l_1, \mu}(F) \times C_{l_2, \beta}(G)$ . Si  $s = (l_1, l_2, s_1, s_2)$ , alors  $w(s) = u(s_1)v(s_2) = \mu\beta = \alpha$ . Donc  $s = (l_1, l_2, s_1, s_2) \in C_{l,\alpha}(F \cdot G)$ . Le résultat s'en déduit de manière évidente.

iv) De la même manière,

$$F(G)[l] = \sum_{\pi \in \text{Par}[l]} F[\pi] \prod_{p \in \pi} G[p] = \sum_{\pi \in \text{Par}[l]} \left( \sum_{\beta \in \mathbb{A}} C_{\pi, \beta}(F) \right) \prod_{p \in \pi} \left( \sum_{\mu \in \mathbb{A}} C_{p, \mu}(G) \right).$$

Étant donné  $\alpha$ ,  $C_{l, \alpha}(F(G)) = \sum_{\pi \in \text{Par}[l]} \sum_{\beta (\prod_{p \in \pi} \mu_p) = \alpha} C_{\pi, \beta}(F) \prod_{p \in \pi} C_{p, \mu_p}(G)$ . En effet, une  $F(G)$ -structure est un triplet  $s = (\pi, f, (g_p)_{p \in \pi})$  où  $\pi \in \text{Par}[l]$ ,  $f \in F[\pi]$  et  $g_p \in G[p]$ . Si  $u(f) = \beta$  et  $v(s_p) = \mu_p$ , alors  $\tilde{s} = (f, (g_p)_{p \in \pi}) \in C_{\pi, \beta}(F) \prod_{p \in \pi} C_{p, \mu_p}(G)$ . Et réciproquement. ■

**Proposition 1.4.20** Soit  $F = F_v$ , une  $\mathbb{L}$ -espèce pondérée dans un anneau  $\mathbb{A} = \mathbb{K}[[X]]$ . Alors,

- i)  $c_{n, \alpha}(F_{\text{red}}) = \sup\{0, c_{n, \alpha}(F) - c_{n, -\alpha}(F)\}$
- ii)  $F$  est réduite si et seulement si pour tout  $\alpha \in \mathbb{A}$ ,  $c_{n, \alpha}(F)c_{n, -\alpha}(F) = 0$
- iii)  $\text{Mon}(X)$  étant l'ensemble des monômes commutatifs dont les variables sont dans  $X$  et  
 $-\text{Mon}(X) = \{-\mu, \mu \in \text{Mon}(X)\}$ ;  $F$  est monomialement pondérée si et seulement si pour tout  $\alpha$  tel que  $\alpha \notin \text{Mon}(X) \cup (-\text{Mon}(X))$ ,  $c_{n, \alpha}(F) = 0$ .

**Démonstration** i) Soient  $C_{n, \alpha} = \{s \in F[n] | v(s) = \alpha\}$  et  $\Phi$  une involution pondérée réductrice de  $F$ . Pour tout  $s \in C_{n, \alpha}$ , on a  $\Phi_n(s) = s$  ou  $\Phi_n(s) \in C_{n, -\alpha}$ . Comme  $\Phi$  est réductrice, si  $c_{n, \alpha}(F) \leq c_{n, -\alpha}(F)$ , alors  $\text{Fix}(\Phi_n) \cap C_{n, \alpha} = \emptyset$ , donc  $c_{n, \alpha}(F_{\text{red}}) = 0$ ; sinon  $c_{n, \alpha}(F) \geq c_{n, -\alpha}(F)$ , et dans ce cas  $c_{n, \alpha}(F_{\text{red}}) = c_{n, \alpha}(F) - c_{n, -\alpha}(F)$ .

ii) Rappelons que  $F$  est réduite si et seulement si pour tout  $n$ ,  $s, s' \in F[n]$ , si  $s \neq s'$ , alors  $v(s) \neq -v(s')$ . S'il existe  $s \in F[n]$  tel que  $v(s) = \alpha$ , il est clair que pour tout  $s' \in F[n]$ ,  $v(s') \neq -\alpha$ .

iii) Il suffit de se rappeler que la pondération  $v$  de  $F$  est monomiale si et seulement si pour toute  $F$ -structure  $s$ ,  $v(s) = (-1)^{\epsilon(s)} t^{n(s)}$ . ■

## 1.5 $\mathbb{L}$ -espèces multisortes

Une extension à plusieurs variables des résultats précédents est possible.

### 1.5.1 Définitions générales

**Définition 1.5.1** 1. Une  $\mathbb{L}$ -espèce  $F = F_v$  à  $r$  sortes est un foncteur  $F$  de la catégorie produit  $\mathbb{L}^r = \mathbb{L} \times \mathbb{L} \times \cdots \times \mathbb{L}$  ( $r$  facteurs) vers la catégorie  $\mathcal{E}_{\mathbb{A}, s}$ . C'est donc une règle qui permet d'associer:

- à un  $r$ -uplet  $l = (l_1, l_2, \dots, l_r)$  d'ensembles totalement ordonnés, un ensemble pondéré  $\mathbb{A}$ -sommable  $F[l] = F[l_1, l_2, \dots, l_r]$ , qui est l'ensemble des  $F$ -structures sur  $l$ .

- à tout isomorphisme  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r) : l = (l_1, l_2, \dots, l_r) \xrightarrow{\sim} l' = (l'_1, l'_2, \dots, l'_r)$ , un isomorphisme d'ensembles pondérés  $F[\tau] : F[l] \rightarrow F[l']$  de telle sorte que

$$F[\sigma \circ \tau] = F(\sigma) \circ F(\tau) \text{ et } F(1_l) = 1_{F[l]}.$$

2. Un morphisme  $\varphi : F \rightarrow G$  est une transformation naturelle.

3. La série génératrice (exponentielle) de  $F$  est la série:

$$F(t_1, t_2, \dots, t_r) = \sum_{n_1, \dots, n_r \geq 0} a_{n_1, \dots, n_r} \frac{t_1^{n_1} t_2^{n_2} \cdots t_r^{n_r}}{n_1! n_2! \cdots n_r!}, \text{ où } a_{n_1, \dots, n_r} = |F[n_1, \dots, n_r]|.$$

La  $\mathbb{L}$ -espèce  $F$  se note aussi  $F(T_1, \dots, T_r)$  où la variable  $T_i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  sorte de points. ■

En utilisant l'identification  $(l_1, l_2, \dots, l_r) \xrightarrow{\sim} (l, \chi)$  où  $l = l_1 +_o l_2 +_o \cdots +_o l_r$  [cf. section 1.1], on peut étendre facilement les opérations au cas multisorte. Dans la suite, pour simplifier la notation, nous écrivons  $l$  pour  $(l, \chi)$ , et pour tout  $l' \subset l$  nous écrivons  $l'$  pour  $(l', \chi|_{l'})$ .

- La somme  $F + G$  de deux espèces à  $r$  sortes  $F$  et  $G$  vérifie

$$(F + G)[l] = F[l] + G[l].$$

- Le produit de deux espèces à  $r$  sortes  $F$  et  $G$  vérifie

$$(F \cdot G)[l] = \bigcup_{l'+l''=l} F[l'] \times G[l''].$$

- La dérivée de  $F$  par rapport à la sorte  $T_i$ , est l'espèce  $\frac{\partial F}{\partial T_i}$ , définie par

$$\frac{\partial F}{\partial T_i}(l_1, \dots, l_i, \dots, l_r) = F(l_1, \dots, 1 +_o l_i, \dots, l_r).$$

- L'intégrale de  $F$  par rapport à la sorte  $T_i$  est:

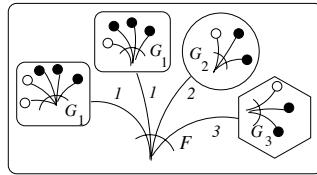
$$\left( \int_0^{T_i} F(T_1, \dots, X_i, \dots, T_r) dX_i \right)[l] = \begin{cases} F[l_1, \dots, l_i \setminus \min l_i, \dots, l_r] & \text{si } l_i \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Si  $F$  est une  $\mathbb{L}$ -espèce à  $r$  sortes, et  $G_1, G_2, \dots, G_r$  sont des  $\mathbb{L}$ -espèces à  $n$  sortes, alors on définit la  $\mathbb{L}$ -espèce composée à  $n$  sortes  $F(G_1, G_2, \dots, G_r)$  comme suit: une  $F(G_1, G_2, \dots, G_r)$ -structure sur  $l = l_1 +_o \cdots +_o l_n$  est un quadruplet  $(\pi, \epsilon, f, \{(g_c)_{c \in \pi}\})$  où:

-  $\pi \in Par[l]$  est une partition de  $l$ ,

-  $\epsilon : \pi \rightarrow \{1, \dots, r\}$  une application qui associe une “couleur” à chaque bloc de  $\pi$ ,

- $g_c \in G_{\epsilon(c)}[c]$ ,
- $f \in F[\epsilon^{-1}]$ , où  $\epsilon^{-1}$  dénote le  $r$ -uplet d'ensembles totalement ordonnés  $(\epsilon^{-1}(1), \dots, \epsilon^{-1}(r))$ , chaque  $\epsilon^{-1}(j)$  étant ordonné par l'ordre des éléments minimum (Figure 1.13).



**Figure 1.13:** Une  $F(G_1, \dots, G_r)$ -structure ( $r = 3, n = 2$ )

Nous pouvons donc écrire

$$F(G_1, G_2, \dots, G_r)[l] = \sum_{\{(\pi, \epsilon), \pi \in \text{Par}[l], \epsilon: \pi \rightarrow [r]\}} F(\epsilon^{-1}) \times \left( \prod_{c \in \pi} G_{\epsilon(c)}[c] \right). \quad (1.1)$$

•  $F, G, G_1, G_2, \dots, G_r, H, K, K_1, K_2, \dots, K_r$  étant des  $\mathbb{L}$ -espèces multisortes,  $\varphi: F \rightarrow H$ ,  $\psi: G \rightarrow K$ , et  $\psi_i: G_i \rightarrow K_i$  des morphismes (resp. isomorphismes) de  $\mathbb{L}$ -espèces multisortes, i.e. des transformations naturelles de foncteurs, alors on a les morphismes (resp. isomorphismes) suivantes:

$\varphi + \psi: F + G \rightarrow H + K$ ;  $\varphi \cdot \psi: F \cdot G \rightarrow H \cdot K$ ;  $\frac{\partial \varphi}{\partial T_i}: \frac{\partial F}{\partial T_i} \rightarrow \frac{\partial H}{\partial T_i}$  et  $\varphi(\psi_1, \dots, \psi_r): F(G_1, \dots, G_r) \rightarrow H(K_1, \dots, K_r)$  tels que  $(\varphi + \psi)_l = \varphi_l + \psi_l$ ;  $(\varphi \cdot \psi)_l = \sum_{l'+l''=l} \varphi_{l'} \times \psi_{l''}$ ;  $(\frac{\partial \varphi}{\partial T_i})(l_1, \dots, l_i, \dots, l_r) = \varphi(l_1, \dots, 1+_{o,i} l_i, \dots, l_r)$ ;

$$\varphi(\psi_1, \dots, \psi_r)_l = \sum_{\{(\pi, \epsilon), \pi \in \text{Par}[l], \epsilon: \pi \rightarrow [r]\}} \varphi_{\epsilon^{-1}} \times \left( \prod_{c \in \pi} \psi_{\epsilon(c)}[c] \right). \quad (1.2)$$

**Notations.** Dorénavant, si aucune ambiguïté n'est à craindre, nous posons  $\partial_i F := \frac{\partial F}{\partial T_i}$  et  $\partial_i \varphi := \frac{\partial \varphi}{\partial T_i}$ . Si  $l = (l_1, \dots, l_i, \dots, l_r)$  est un multiensemble, alors nous posons  $1+_{o,i} l := (l_1, \dots, 1_i +_{o,i} l_i, \dots, l_r)$ , où  $1_i = \{0_i\}$ . Nous obtenons donc l'opérateur,  $\partial_i$ , de dérivation par rapport à la sorte  $T_i$ , défini par  $(\partial_i F)[l] = F[1+_{o,i} l]$ . ■

### 1.5.2 Dérivées partielles et isomorphismes canoniques

La proposition suivante est une réécriture, à plusieurs sortes, de la proposition 1.3.21.

**Proposition 1.5.2** *L'opérateur  $\partial_i$  induit des isomorphismes,*

- i)  $\sigma_i: \partial_i(F + G) \rightarrow (\partial_i F) + (\partial_i G)$ ,
- ii)  $\lambda_i: \partial_i(F \cdot G) \rightarrow \partial_i F \cdot G + F \cdot \partial_i G$  (Formule de Leibnitz),
- iii)  $\delta_i: \partial_i F(G_1, \dots, G_r) \rightarrow \sum_{j=1}^r (\partial_j F)(G_1, \dots, G_r) \cdot \partial_i G_j$  (Règle de dérivation en chaîne),

tels que, si  $\varphi : F \rightarrow H$ ,  $\psi : G \rightarrow K$  et  $\psi_i : G_i \rightarrow K_i$  sont des morphismes,  $\vec{G} = (G_1, \dots, G_r)$ ,  $\vec{K} = (K_1, \dots, K_r)$  et  $\vec{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_r)$ , alors les trois diagrammes suivants sont commutatifs:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c}
 \boxed{\partial_i(F+G)} \xrightarrow{\partial_i(\varphi+\psi)} \boxed{\partial_i(H+K)} \\
 \downarrow \sigma_i \\
 \boxed{\partial_iF + \partial_iG} \xrightarrow{\partial_i\varphi + \partial_i\psi} \boxed{\partial_iH + \partial_iK}
 \end{array} & \quad & 
 \begin{array}{c}
 \boxed{\partial_i(F \cdot G)} \xrightarrow{\partial_i(\varphi \cdot \psi)} \boxed{\partial_i(H \cdot K)} \\
 \downarrow \lambda_i \\
 \boxed{\partial_iF \cdot G + F \cdot \partial_iG} \xrightarrow{\partial_i\varphi \cdot \psi + \varphi \cdot \partial_i\psi} \boxed{\partial_iH \cdot K + H \cdot \partial_iK}
 \end{array} \\
 \\ 
 \begin{array}{c}
 \boxed{\partial_i(F(\vec{G}))} \xrightarrow{\partial_i(\varphi(\vec{\psi}))} \boxed{\partial_i(H(\vec{K}))} \\
 \downarrow \delta_i \\
 \boxed{\sum_j \partial_j F(\vec{G}) \cdot \partial_i G_j} \xrightarrow{\sum_j \partial_j \varphi(\vec{\psi}) \cdot \partial_i \psi_j} \boxed{\sum_j \partial_j H(\vec{K}) \cdot \partial_i K_j}
 \end{array}
 \end{array}$$

Les isomorphismes  $\sigma_i$ ,  $\lambda_i$  et  $\delta_i$  sont définis par

- i) Si  $s \in \partial_i(F+G)[l] = (F+G)[1+_{o,i} l] = F[1+_{o,i} l] + G[1+_{o,i} l]$  alors on pose  $\sigma_i(s) = s$ .
- ii) Soit  $s \in \partial_i(F \cdot G)[l] = (F \cdot G)[1+_{o,i} l]$ . Alors  $s = (l', l'', s_1, s_2)$  où  $l' + l'' = 1+_{o,i} l$ . On pose  $\lambda_i(s) = (1_i +_o l_1, l_2, s_1, s_2)$  si  $l' = 1_i +_o l_1, l'' = l_2$  et  $\lambda_i(s) = (l_1, 1_i +_o l_2, s_1, s_2)$  si  $l' = l_1, l'' = 1_i +_o l_2$ . Dans tous les cas,  $\lambda_i(s) = s$ .
- iii) Si  $s = (\pi, \epsilon, \alpha, (s_c)_{c \in \pi}) \in \partial_i F(\vec{G})[l] = F(\vec{G})[1+_{o,i} l]$ , avec  $\pi \in \text{Par}[1+_{o,i} l]$ ,  $\alpha \in F[\epsilon^{-1}]$ ,  $s_c \in G_{\epsilon(c)}[c]$ , alors  $\delta_i(\pi, \epsilon, \alpha, (s_{\epsilon(c)})_{c \in \pi}) = (l', c_0, (1_j +_{o,i} \pi', \epsilon, \alpha, (s_c)_{c \in \pi'}), s_{c_0})$  où  $1_i = \{0_i\} \subset c_0$ ,  $j = \epsilon(c_0)$ ,  $\pi' = \pi \setminus \{c_0\}$ , et  $l' = \cup_{c \in \pi'} c$ . ■

Nous avons aussi les deux propositions suivantes qui sont démontrées dans l'appendice A.

**Proposition 1.5.3** a) Pour tout couple  $(i, j)$ ,  $\partial_i \partial_j F = \partial_j \partial_i F$ .

b) Soient  $F$  une  $\mathbb{L}$ -espèce à  $r$  sortes,  $B_1, B_2, \dots, B_r$  des  $\mathbb{L}$ -espèces à  $n$  sortes et  $\vec{B} = (B_1, B_2, \dots, B_r)$ . Le diagramme suivant est commutatif, compte tenu de la commutativité (à isomorphisme près) du produit de deux  $\mathbb{L}$ -espèces.

$$\begin{array}{ccccc}
 \boxed{\partial_j [\sum_s (\partial_s F)(\vec{B}) \partial_i B_s]} & \xrightarrow{\lambda_j} & \boxed{\sum_s \partial_j [(\partial_s F)(\vec{B})] \cdot \partial_i B_s} & \xrightarrow{\sum_s \delta_j \cdot \partial_i B_s} & \boxed{\sum_{s,t} (\partial_t \partial_s F)(\vec{B}) \partial_j B_t \partial_i B_s} \\
 \uparrow \partial_j \delta_i & & & & \uparrow \sum_t \delta_i \cdot \partial_j B_t + Id \\
 \boxed{\frac{\partial_j \partial_i F(\vec{B})}{\partial_i \partial_j F(\vec{B})}} & \xrightarrow{\partial_i \delta_j} & \boxed{\partial_i [\sum_t (\partial_t F)(\vec{B}) \partial_j B_t]} & \xrightarrow{\lambda_i} & \boxed{\sum_t \partial_i [(\partial_t F)(\vec{B})] \cdot \partial_j B_t} \\
 & & & & \sum_t (\partial_t F)(\vec{B}) \partial_i \partial_j B_t
 \end{array}$$

En d'autres termes  $(\sum_t \delta_i \cdot \partial_j B_t + Id) \circ \lambda_i \circ \partial_i \delta_j = (\sum_s \delta_j \cdot \partial_i B_s + Id) \circ \lambda_j \circ \partial_j \delta_i$ .

Soient  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , et  $K$  des  $\mathbb{L}$ -espèces à  $r$  sortes,  $B_1, \dots, B_r$  des  $\mathbb{L}$ -espèce à  $n$  sortes,  $\theta : F \cdot G \rightarrow H \cdot K$  une transformation naturelle. Alors l'opérateur de dérivation  $\partial_k$  induit une transformation naturelle  $\frac{\partial_k \theta}{\partial T_k} : \partial_k(F \cdot G) + F \cdot \partial_k G \rightarrow \partial_k(H \cdot K) + H \cdot \partial_k K$  telle que le diagramme suivant soit commutatif, c'est-à-dire que  $\frac{\partial_k \theta}{\partial T_k} = \lambda_k \circ \partial_k \theta \circ \lambda_k^{-1}$ .

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\partial_k(F \cdot G)} & \xrightarrow{\partial_k \theta} & \boxed{\partial_k(H \cdot K)} \\ \downarrow \lambda_k & & \downarrow \lambda_k \\ \boxed{\partial_k F \cdot G + F \cdot \partial_k G} & \xrightarrow{\frac{\partial_k \theta}{\partial T_k}} & \boxed{\partial_k H \cdot K + H \cdot \partial_k K} \end{array}$$

En particulier, si  $\theta = \varphi \cdot \psi$  alors  $\frac{\partial_k \theta}{\partial T_k} = \partial_k \varphi \cdot \psi + \varphi \cdot \partial_k \psi$ .

**Proposition 1.5.4** Pour toute transformation naturelle d'espèces à  $r$  sortes  $\theta : F \cdot G \rightarrow H \cdot K$ , et tout  $\vec{B} = (B_1, B_2, \dots, B_r)$ , le diagramme suivant est commutatif, compte tenu de la commutativité (à isomorphisme près) du produit de deux  $\mathbb{L}$ -espèces.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{\partial_k[H(\vec{B})K(\vec{B})]} & \xrightarrow{\lambda_k} & \boxed{\begin{matrix} \partial_k[H(\vec{B})]K(\vec{B}) \\ + \\ H(\vec{B})\partial_k[K(\vec{B})] \end{matrix}} & \xrightarrow{\delta_k \cdot K(\vec{B}) + H(\vec{B}) \cdot \delta_k} & \boxed{\begin{matrix} \sum_i (\partial_i H)(\vec{B})\partial_k B_i \cdot K(\vec{B}) \\ + \\ H(\vec{B})\sum_i (\partial_i K)(\vec{B})\partial_k B_i \end{matrix}} \\ \uparrow (\partial_k \theta)(\vec{B}) & & & & \uparrow \sum_i (\frac{\partial_i \theta}{\partial T_i})(\vec{B}) \cdot \partial_k B_i \\ \boxed{\partial_k[F(\vec{B})G(\vec{B})]} & \xrightarrow{\lambda_k} & \boxed{\begin{matrix} \partial_k[F(\vec{B})]G(\vec{B}) \\ + \\ F(\vec{B})\partial_k[G(\vec{B})] \end{matrix}} & \xrightarrow{\delta_k \cdot G(\vec{B}) + F(\vec{B}) \cdot \delta_k} & \boxed{\begin{matrix} \sum_i (\partial_i F)(\vec{B})\partial_k B_i \cdot G(\vec{B}) \\ + \\ F(\vec{B})\sum_i (\partial_i G)(\vec{B})\partial_k B_i \end{matrix}} \end{array}$$

En d'autres termes

$$[\sum_i (\frac{\partial_i \theta}{\partial T_i})(\vec{B}) \cdot \partial_k B_i] \circ [\delta_k \cdot G(\vec{B}) + F(\vec{B}) \cdot \delta_k] \circ \lambda_k = [\delta_k \cdot K(\vec{B}) + H(\vec{B}) \cdot \delta_k] \circ \lambda_k \circ \partial_k \theta(\vec{B}).$$

En particulier, si  $\theta = \varphi \cdot \psi$ , alors

$$[\sum_i (\frac{\partial_i \theta}{\partial T_i})(\vec{B}) \cdot \partial_k B_i] = (\sum_i (\frac{\partial_i \varphi}{\partial T_i})(\vec{B}) \cdot \partial_k B_i) \cdot \psi + \varphi \cdot (\sum_i (\frac{\partial_i \psi}{\partial T_i})(\vec{B}) \cdot \partial_k B_i).$$

## 1.6 Espèces mixtes

Dans cette section, nous développons les outils nécessaires pour l'étude des conditions initiales de la forme  $Y(0) = \alpha$ ,  $\alpha$  étant une constante, dans les équations et systèmes différentiels.

### 1.6.1 Définitions générales

La définition d'une espèce mixte est semblable à celle des  $\mathbb{L}$ -espèces.

**Définition 1.6.1**  $\mathbb{B}$  étant la catégorie des ensembles finis et applications, une espèce mixte est un foncteur  $F : \mathbb{L} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{A}, s}$ . C'est donc une règle qui:

- à chaque couple  $(l, U)$ , où  $l$  est un ensemble totalement ordonné fini et  $U$  un ensemble fini quelconque, associe un ensemble pondéré sommable  $F[l, U]$ ,

- à chaque couple  $(\tau, \sigma) : (l, U) \rightarrow (l', U')$ , où  $\tau : l \rightarrow l'$  et  $\sigma : U \rightarrow U'$  est une bijection quelconque, associe un isomorphisme d'ensembles pondérés  $F[\tau, \sigma] : F[l, U] \rightarrow F[l', U']$ , appelé transport des structures et vérifiant  $F[\tau, \sigma]F[\tau', \sigma'] = F[\tau\tau', \sigma\sigma']$  et  $F(1_l, 1_U) = 1_{F[l, U]}$ .

Une espèce mixte  $F$  sera notée aussi  $F(T, Z)$ . Remarquons alors que  $F(0, Z)$  est une  $\mathbb{B}$ -espèce et  $F(T, 0)$  est une  $\mathbb{L}$ -espèce. Les éléments de l'ensemble non ordonné  $U$  sont appelés *points de sorte  $\mathbb{B}$*  et les éléments de  $l$  sont les *points de sorte  $\mathbb{L}$* . ■

Comme dans le cas des espèces multisortes, les opérations usuelles suivantes peuvent être définies: la somme, le produit, la composition partitionnelle, les dérivées par rapport aux deux variables, l'intégrale par rapport à la première variable.

**Définition 1.6.2** Deux structures  $s \in F[l, U]$  et  $t \in F[l, V]$  sont *isomorphes* s'il existe une bijection  $\sigma : U \rightarrow V$  telle que  $t = F[1_l, \sigma](s)$ . On dira aussi que  $s$  et  $t$  ont le même type d'isomorphie, et on note  $s \sim t$ . La classe de  $s$  modulo l'équivalence  $\sim$ , notée  $\tilde{s}$ , est le *type d'isomorphie* de  $s$ . Nous notons  $\frac{F[n, k]}{\sim}$  l'ensemble quotient de  $F[n, k]$  par l'équivalence  $\sim$ . ■

**Définition 1.6.3** Deux espèces mixtes  $F$  et  $G$  sont *isomorphes* s'il existe une famille  $\varphi = (\varphi_{l, U})$  d'isomorphismes d'ensembles pondérés, naturelle; c'est-à-dire telle que pour tout  $(\tau, \sigma) : (l, U) \rightarrow (l', U')$  le diagramme suivant soit commutatif,

$$\begin{array}{ccc} F[l, U] & \xrightarrow{\varphi_{l, U}} & G[l, U] \\ F[\tau, \sigma] \downarrow & & \downarrow G[\tau, \sigma] \\ F[l', U'] & \xrightarrow{\varphi_{l', U'}} & G[l', U'] \end{array}$$

À une espèce mixte  $F = F_v$ , on peut associer les séries suivantes:

- la série génératrice exponentielle

$$F(t, z) = \sum_{n, k \geq 0} f_{n, k} \frac{t^n}{n!} \frac{z^k}{k!}, \quad \text{où } f_{n, k} = |F[n, k]|_v,$$

- la série génératrice des types d'isomorphie

$$\tilde{F}(t, z) = \sum_{n, k \geq 0} \tilde{f}_{n, k} \frac{t^n}{n!} z^k, \quad \text{où } \tilde{f}_{n, k} = |\frac{F[n, k]}{\sim}|_v,$$

- la série indicatrice des cycles

$$Z_F(t; z_1, z_2, \dots) = \sum_{n, k \geq 0} \frac{t^n}{n!} \left( \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} |\text{Fix } F[1, \tau]|_v z_1^{\tau_1} z_2^{\tau_2} \dots \right).$$

**Remarque 1.6.4** Par rapport à la variable  $z$  ces séries se comportent exactement comme les séries correspondantes dans le cas des  $\mathbb{B}$ -espèces [cf.(B.L.L. 94) ou (B.L.L. 98)]. Par exemple, en utilisant le lemme de Burnside, on a

$$\tilde{F}(t, z) = Z_F(t; z, z^2, z^3, \dots). \quad (1.3)$$

On peut aussi vérifier que

$$Z_F(t; z_1, z_2, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{k_1+2k_2+\dots=\infty} |\text{Fix}F[n; k_1, k_2, \dots]|_v \frac{z_1^{k_1}}{1^{k_1} k_1!} \frac{z_2^{k_2}}{2^{k_2} k_2!} \frac{z_3^{k_3}}{3^{k_3} k_3!} \dots,$$

où  $|\text{Fix}F[n; k_1, k_2, \dots]|_v$  est le poids total des  $F$ -structures sur le couple  $([n], [k])$ , avec  $k = \sum_i ik_i$ , laissées fixe par  $(1_{[n]}, \sigma)$ ,  $\sigma$  étant une permutation du type  $(1^{k_1}, 2^{k_2}, 3^{k_3}, \dots)$ . ■

### 1.6.2 Types par rapport aux $\mathbb{B}$ -sortes

Dans cette sous-section, nous allons construire la  $\mathbb{L}$ -espèce des types de  $F$ -structures par rapport à la  $\mathbb{B}$ -sorte.

**Définition 1.6.5** Étant donnés  $s \in F[l, U]$ , le type d'isomorphie  $\tilde{s}$  de  $s$  est aussi appelé *type de  $s$  par rapport aux points de sorte  $\mathbb{B}$*  ou *par rapport à la  $\mathbb{B}$ -sorte  $Z$* . ■

Soit  $l$  un ensemble totalement ordonné. Nous posons

$$T_{Z;z}F[l] := \sum_{k \in \mathbb{N}} (F[l, k]/\sim).$$

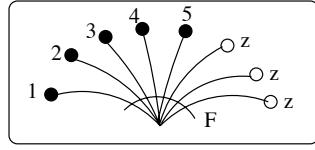
La pondération de  $F$  étant notée  $v$ , soit  $\tilde{s} \in T_{Z;z}F[l]$ , tel que  $s \in F[l, [k]]$ . On pose  $w(\tilde{s}) = v(s)z^k$ . Notons que cette définition est indépendante du représentant  $s$  de la classe  $\tilde{s}$ . En effet si  $\tilde{s} = \tilde{s}_1$  avec  $s_1 \in F[l, U]$ , alors il existe une bijection  $\sigma : [k] \rightarrow U$  tel que  $s_1 = F[1_l, \sigma](s)$ . Donc  $v(s) = v(s_1)$  et  $|U| = k$ .

Soient maintenant  $\tau : l \rightsquigarrow l'$ , et  $s \in F[l, k]$  tel  $F[\tau, 1_{[k]}](s) = s'$ . Posons  $T_{Z;z}F[\tau](\tilde{s}) = \tilde{s}'$ . Notons que si  $\tilde{s} = \tilde{s}_1$  avec  $s_1 \in F[l, U]$ , alors il existe une bijection  $\sigma : [k] \rightarrow U$  tel que  $s_1 = F[1_l, \sigma](s)$ . D'autre part, si  $s'_1 = F[\tau, 1_U](s_1) \in F[l', U]$  alors  $\tilde{s}' = \tilde{s}'_1$ . En effet,  $s'_1 = F[\tau, 1_U](s_1) = F[\tau, 1_U] \circ F[1_l, \sigma](s) = F[\tau, 1_U] \circ F[1_l, \sigma] \circ F[\tau^{-1}, 1_{[k]}](s') = F[\tau \circ 1_l \circ \tau^{-1}, 1_U \circ \sigma \circ 1_{[k]}](s') = F[1_{l'}, \sigma](s')$ . Donc notre définition a un sens. Nous avons alors:

- $T_{Z;z}F[1_l] = 1_{T_{Z;z}F[l]}$ .
- Soient  $l \xrightarrow{\tau_1} l' \xrightarrow{\tau_2} l''$ ,  $k$  un entier et  $s \in F[l, k]$ . Par définition on a  $F[\tau_2 \tau_1, 1_{[k]}](s) = F[\tau_2, 1_{[k]}](F[\tau_1, 1_{[k]}](s))$ . Donc

$$T_{Z;z}F[\tau_2 \tau_1](\tilde{s}) = T_{Z;z}F[\tau_2](T_{Z;z}F[\tau_1](\tilde{s})),$$

c'est-à-dire que  $T_{Z;z}F(\tau_2 \tau_1) = T_{Z;z}F(\tau_2) \circ T_{Z;z}F(\tau_1)$ . ■



**Figure 1.14:** Une  $T_{Z;z}F$ -structure sur  $l = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

**Définition 1.6.6** La  $\mathbb{L}$ -espèce  $T_{Z;z}F$  ainsi obtenue est la  $\mathbb{L}$ -espèce des types par rapport à  $Z$  de  $F$ -structures . ■

La figure 1.14 est une  $T_{Z;z}F$ -structure générique sur  $l = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Notons que dans une  $T_{Z;z}F$ -structure,  $z$  est un compteur de points de sorte  $Z$ . Ces points sont indistinguables.

**Proposition 1.6.7** La série génératrice  $T_{Z;z}F(t)$  vérifie:

$$T_{Z;z}F(t) = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k \geq 0} \tilde{f}_{n,k} z^k \right) \frac{t^n}{n!} = \tilde{F}(t, z) = Z_F(t, z, z^2, z^3, \dots).$$

**Démonstration:** Nous avons, par définition,  $|\frac{F[n,k]}{\sim}|_w = \sum_{\tilde{s} \in \frac{F[n,k]}{\sim}} w(\tilde{s}) = z^k \sum_{\tilde{s} \in \frac{F[n,k]}{\sim}} v(s) = \tilde{f}_{n,k} z^k$ . Donc  $|T_{Z;z}F[n]|_w = \sum_{k \geq 0} |\frac{F[n,k]}{\sim}|_w = \sum_{k \geq 0} \tilde{f}_{n,k} z^k = \tilde{F}(t, z) = Z_F(t, z, z^2, z^3, \dots)$ , en utilisant la relation (1.3). ■

Dans la suite nous allons étudier le comportement de  $T_{Z;z}F$  vis-à-vis des opérations usuelles. Elle nous permettra de considérer des conditions initiales de la forme  $Y(0) = \alpha$  dans les équations différentielles.

**Proposition 1.6.8** Si  $F = F(T, Z)$  et  $G = G(T, Z)$  sont deux espèces mixtes alors:

$$T_{Z;z}(F + G) = T_{Z;z}F + T_{Z;z}G; \quad T_{Z;z}\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right) = (T_{Z;z}F)' \text{ et} \quad T_{Z;z}(F \cdot G) = T_{Z;z}F \cdot T_{Z;z}G.$$

**Démonstration** Soient  $F$  et  $G$ , deux espèces mixtes.

a) Une  $T_{Z;z}(F+G)$ -structure est une classe  $\tilde{s}$  où  $s$  est une  $(F+G)$ -structure. Donc  $\tilde{s}$  est soit une  $T_{Z;z}F$ -structure, soit une  $T_{Z;z}G$ -structure.

$$\text{b) } (T_{Z;z}F)'[l] = (T_{Z;z}F)[1+o l] = \sum_{k \geq 0} (F[1+o l, k]/\sim) = \sum_{k \geq 0} (\frac{\partial F}{\partial T}[l, k]/\sim) = T_{Z;z}\frac{\partial F}{\partial T}[l].$$

c) Remarquons que si  $s = (s_1, s_2) \in (F \cdot G)[l, U]$ , alors  $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$ . En d'autres termes,

$$(F \cdot G)[l, k]/\sim = \sum_{l_1+l_2=l, k_1+k_2=k} (F[l_1, k_1]/\sim) \times (G[l_2, k_2]/\sim). \text{ Donc} \\ T_{Z;z}(F \cdot G)[l] = \sum_{k \geq 0} (F \cdot G)[l, k]/\sim = \sum_{k \geq 0} \sum_{l_1+l_2=l, k_1+k_2=k} (F[l_1, k_1]/\sim) \times$$

$$(G[l_2, k_2]/\sim) = \sum_{l_1+l_2=l} (\sum_{k_1 \geq 0} F[l_1, k_1]/\sim) \times (\sum_{k_2 \geq 0} G[l_2, k_2]/\sim) = \sum_{l_1+l_2=l} T_{Z:z}F[l_1] \times T_{Z:z}G[l_2]. \blacksquare$$

Le cas de la substitution est plus délicat. Soient  $F = F_w$  une espèce mixte telle que  $F(0, 0) = 0$  et  $G = G_v$  une  $\mathbb{B}$ -espèce. Alors  $G(F)$  est une espèce mixte. Nous posons, par définition,

$$G(F)[l, U] = \sum_{\pi \in \text{Par}[l+U]} G[\pi] \times \prod_{c \in \pi} F[l \cap c, U \cap c].$$

Une  $G(F)$ -srtucture sur  $(l, U)$  est donc un triplet  $(\pi, g_\pi, (f_c)_{c \in \pi})$  où  $\pi \in \text{Par}[l+U]$ ,  $g_\pi \in G[\pi]$ , et  $f_c \in F[l \cap c, U \cap c]$ . Le poids d'une telle srtucture est  $t(s) = v(g_\pi) \prod_{c \in \pi} w(f_c)$ . Soient maintenant  $\tau : l_1 \tilde{\rightarrow} l_2$  et  $\sigma : U_1 \rightarrow U_2$ . Alors la bijection  $\tau + \sigma : l_1 + U_1 \rightarrow l_2 + U_2$  induit les bijections  $\text{Par}[\tau + \sigma] : \text{Par}[l_1 + U_1] \rightarrow \text{Par}[l_2 + U_2]$  et  $\overline{\tau + \sigma}^\pi : \pi \rightarrow \pi'$ , où  $\pi' = \text{Par}[\tau + \sigma](\pi)$ . Alors

$$G(F)[\tau, \sigma] = \sum_{\pi \in \text{Par}[l+U]} G[\overline{\tau + \sigma}^\pi] \times \prod_{c \in \pi} F[\tau|_{l_1 \cap c}, \sigma|_{U_1 \cap c}].$$

**Théorème 1.6.9** *Si  $G_v = G_v(Z)$  est une  $\mathbb{B}$ -espèce et  $F_w = F_w(T, Z)$  une espèce mixte, alors*

$$T_{Z:z}G_v(F_w)(t) = Z_{G_v}(T_{Z:z}F_w(t), T_{Z:z^2}F_w(0), T_{Z:z^3}F_w(0), \dots)$$

et plus généralement,

$$\begin{aligned} Z_{G_v(F_w)}(t; z_1, z_2, z_3, \dots) &= \\ Z_{G_v}(Z_{F_w}(t; z_1, z_2, z_3, \dots), Z_{F_w}(0; z_2, z_4, z_6, \dots), Z_{F_w}(0; z_3, z_6, z_9, \dots), \dots). \end{aligned}$$

**Démonstration** La démonstration de ce théorème s'apparente aux démonstrations de la formule du pléthysme [cf. par exemple H. Décoste (De. 90) ou (B.L.L. 94) ou (B.L.L. 98)] et nécessite plusieurs étapes.

À l'espèce mixte  $F_w$  on associe l'espèce mixte auxiliaire  $\widetilde{F}_w$  définie par:  $\widetilde{F}_w[l, U] = \{(s, \tau) | s \in F_w[l, U], \tau \in S[U], \text{ tel que } (1_l, \tau) \text{ soit un automorphisme de } s\}$ , la pondération étant définie par  $w(s, \tau) = w(s)$ , et le transport des structures par  $\widetilde{F}_w[\rho, \beta](s, \tau) = (F_w[\rho, \beta](s), \beta\tau\beta^{-1})$ , si  $\rho : l \tilde{\rightarrow} l'$  et  $\beta : U \rightarrow U'$ ,  $(s, \tau) \in \widetilde{F}_w[l, U]$ . Remarquons que  $(1_{l'}, \beta\tau\beta^{-1})$  est bien un automorphisme de  $F_w[\rho, \beta](s)$  car

$$\begin{aligned} F_w[1_{l'}, \beta\tau\beta^{-1}](F_w[\rho, \beta](s)) &= F_w[1_{l'}\rho, \beta\tau\beta^{-1}\beta](s) = F_w[\rho, \beta\tau](s) \\ &= F_w[\rho, \beta]F[1_l, \tau](s) = F_w[\rho, \beta](s). \end{aligned}$$

**Lemme 1.6.10** *La série génératrice exponentielle de  $\widetilde{F}_w$  vérifie*

$$\widetilde{F}_w(t, z) = (T_{Z:z}F)(t) = Z_{F_w}(t; z, z^2, z^3, \dots).$$

**Démonstration** On définit une opération  $\mathcal{S}_n \times F[k, n] \rightarrow F[k, n]$ , en posant  $\tau \cdot s = F[1_k, \tau](s)$  si  $\tau : [n] \rightarrow [n]$  est une bijection et  $s \in F[k, n]$ . En utilisant le lemme de Burnside nous avons  $|\widetilde{F_w}[k, n]| = |\{(s, \alpha) | \alpha \cdot s = s\}|_w = \sum_{\alpha \in S_n} \{w(s); s \in F_w[k, n], \alpha \cdot s = s\} = n! \frac{|F_w[k, n]|}{n!} = n! \tilde{f}_{k,n}$ . Donc  $\widetilde{F_w}(t, z) = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} \sum_{n \geq 0} |\widetilde{F_w}[k, n]| \frac{z^n}{n!} = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} (\sum_{n \geq 0} \tilde{f}_{k,n} z^n) = (T_{Z:z} F)(t)$ . ■

En définissant la pondération par  $(w \cdot \vec{x})(s, \tau) = w(s) \cdot x_1^{\tau_1} x_2^{\tau_2} x_3^{\tau_3} \cdots$  où  $\tau_i$  est le nombre de cycle de longueur  $i$  dans  $\tau$ , on obtient une espèce pondérée, dénotée  $\widetilde{F_{w \cdot \vec{x}}}$ .

**Lemme 1.6.11** Nous avons  $\widetilde{F_{w \cdot \vec{x}}}(t, z) = Z_{F_w}(t; zx_1, z^2 x_2, z^3 x_3, \dots)$ .

**Démonstration** En effet,

$$\begin{aligned} |\widetilde{F_{w \cdot \vec{x}}}[n, k]| &= \sum_{(s, \sigma) \in F[n, k] \times \mathbb{S}_k, \sigma \cdot s = s} (w \cdot \vec{x})(s, \sigma) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_k} [\sum_{s \in \text{Fix}[1_{[n]}, \sigma]} w(s) x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \cdots] \\ &= \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_k} [\sum_{s \in \text{Fix}[1_{[n]}, \sigma]} w(s)] x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \cdots \\ &= \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_k} |\text{Fix}[1_{[n]}, \sigma]|_w x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \widetilde{F_{w \cdot \vec{x}}}(t, z) &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} (\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_k} |\text{Fix}[1_{[n]}, \sigma]|_w x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \cdots) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_k} |\text{Fix}[1_{[n]}, \sigma]|_w (zx_1)^{\sigma_1} (z^2 x_2)^{\sigma_2} (z^3 x_3)^{\sigma_3} \cdots) \\ &= Z_{F_w}(t; zx_1, z^2 x_2, z^3 x_3, \dots). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Considérons une  $G_v(F_w)$ -structure  $s = (\pi, g_\pi, (f_c)_{c \in \pi})$  sur  $(l, U)$ . Tout automorphisme  $(1_l, \tau)$  de  $s$  induit une bijection  $\tau_\pi : \pi \rightarrow \pi$  qui est un automorphisme de la  $G$ -structure  $g_\pi$ . Notons que si  $c \in \pi$ , alors  $\tau_\pi(c) = \{x | x \in c \cap l\} \cup \{\tau(x) | x \in c \cap U\}$ . Donc si  $c \cap l \neq \emptyset$ , alors  $\tau_\pi(c) \cap c \neq \emptyset$ , c'est-à-dire que  $\tau_\pi(c) = c$  (Figure 1.15(A)).

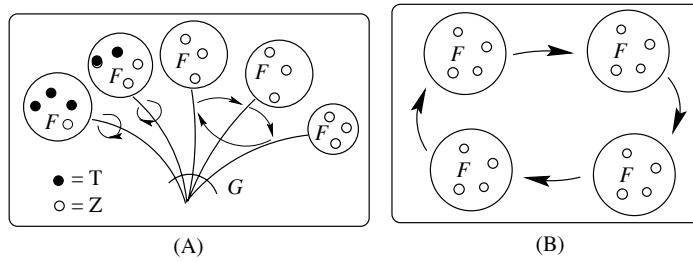
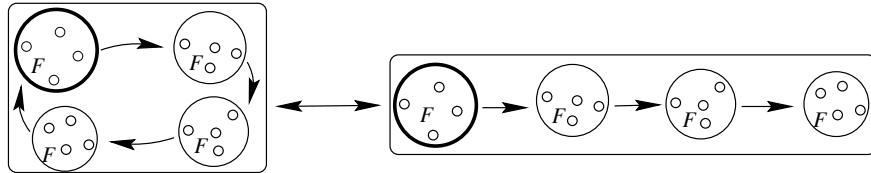


Figure 1.15: (A) Une  $G_v(F_w)$ -structure; (B) Une couronne de  $F_w$ -structure

Soient maintenant  $N = 1^{n_1} 2^{n_2} 3^{n_3} \cdots$  le type cyclique de  $\tau_\pi$ , et  $\widetilde{G_v(F_w)}_N$  la sous-espèce des  $G_v(F_w)$ -structures pour laquelle la permutation  $\tau_\pi$  est de type cyclique  $N$ . Il est clair que  $\widetilde{G_v(F_w)} = \sum_N \widetilde{G_v(F_w)}_N$ . Conformément à A. Joyal [(Joy. 81)] nous appelons *couronne de  $F_w$ -structures* une  $E(F_w)$ -structure dont la permutation  $\tau_\pi$  possède un seul cycle et  $K_m(F_w)$  l'espèce des couronnes de

$F_w$ -structures dont le cycle est de longueur  $m$ . Remarquons qu'une  $\widetilde{E}(F_w)$ -structure est un triplet  $(\pi, (f_c)_{c \in \pi}, \tau)$ , tel que pour chaque  $c \in \pi$ ,  $f_{\tau(\pi(c))} = F[1_c, \tau|_c](f_c)$ . Donc, pour  $m = 1$  une  $K_1(F_w)$ -structure s'identifie à un couple  $(f, \tau)$  tel que  $F[1_l, \tau](f) = f$ . En d'autres termes  $K_1(F_w)[l, U] = \widetilde{F}_w[l, U]$ . et pour  $m \geq 2$ , les  $K_m(F_w)$ -structures sont des structures sur des points de sortes  $Z$  seulement. La figure 1.15(B) représente une  $(K_4 F_w)(0, Z)$ -structure. Soit une couronne  $(\pi, (f_c)_{c \in \pi}, \tau)$  tel que  $\tau_\pi$  est un cycle de longueur  $m \geq 2$ . En pointant un bloc  $c_o$ , on obtient une liste de  $F(0, Z)$ -structures isomorphes  $L = (f_{c_o}, F_w[1, \tau](f_{c_o}), \dots, F_w[1, \tau^{m-1}](f_{c_o}))$  dont le poids total est  $\prod_{c \in \pi} w(f_c) = w^m(f_{c_o})$  (Figure 1.16).



**Figure 1.16:** Isomorphisme entre une couronne pointée et une liste de  $F(0, Z)$ -structure isomorphe.

Notons aussi que  $[1, \tau^m]$  est un automorphisme de  $f_{c_o}$ , et que  $(f_{c_o}, \tau^m)$  est une  $K_1(F(0, Z))$ -structure. D'autre part chaque élément  $x$  de  $(\tau_\pi)^i(c_o)$  est de la forme  $x = \tau^i(x_o)$ ,  $x_o \in c_o$ . Donc  $L$  s'identifie à une  $K_1(F_{w^m})(0, Z^m)$ -structure. Réciproquement, considérons une  $K_1(F_{w^m})(0, Z^m)$ -structure  $((\pi', f, (l_c)_{c \in \pi'}), \rho)$ , avec  $l_c = (x_{1,c}, x_{2,c}, \dots, x_{m,c})$ . Soit  $\pi = \{c_i | c_i = \{x_{i,c} | c \in \pi'\}, 1 \leq i \leq m\}$ . Pour chaque  $i$ , on définit une  $K_1(F_w(0, Z))$ -structure  $(f_{c_i}, \sigma_i)$  sur chaque  $c_i$  en considérant la  $K_1(F_{w^m})(0, Z)$ -structure  $f$  et en remplaçant chaque blocs  $c$  par  $x_{i,c}$ , le poids  $w^m$  par  $w$ , et en posant  $\sigma_i(x_{i,c}) = x_{i,\rho(c)}$ . On obtient ainsi une liste de  $F_w(0, Z)$ -structures qui s'identifie à une  $K_m(F_w)$ -structure pointée. Donc l'espèce des  $K_m(F_w)$ -structures pointées est isomorphe à l'espèce  $K_1(F_{w^m})(0, Z) \circ Z^m$ . On en déduit que  $m K_m(F_w)(0, z) = K_1(F_{w^m})(0, z^m)$ . Nous avons donc le lemme suivant, la deuxième partie étant une conséquence du lemme 1.6.11.

**Lemme 1.6.12** La série génératrice de l'espèce  $K_m(F_w)$  vérifie  $K_1(F_w)(t, z) = \widetilde{F}_w(t, z)$ , et pour  $m \geq 2$ ,  $K_m(F_w)(0, z) = \frac{\widetilde{F}_{w^m}(0, z^m)}{m}$ . De plus, en notant  $K_m(F_{\omega \cdot \vec{x}})$  l'espèce des couronnes de  $F_{\omega \cdot \vec{x}}$ -structures dont le cycle est de longueur  $m$ , on a  $K_1(F_{\omega \cdot \vec{x}})(t, z) = Z_{F_\omega}(t; zx_1, z^2x_2, z^3x_3, \dots)$  et pour  $m \geq 2$ ,  $m K_m(F_{\omega \cdot \vec{x}})(0, z) = Z_{F_{\omega^m}}(0; z^m x_m, z^{2m} x_{2m}, z^{3m} x_{3m}, \dots)$ . ■

**Suite de la démonstration du théorème 1.6.9** Remarquons aussi que pour  $N$  donné une  $\widetilde{G}_v(F_w)_N$ -structure est entièrement déterminée par  $G_v$ -structure laissée fixe par une permutation du type  $N$  et une assemblée de couronnes de

$G_v$ -structures de la forme  $E_{n_1}(K_1(G))E_{n_2}(K_2(G))\dots$ . Donc

$$(\widetilde{G_v(F_w)})_N(t, z) = |\text{Fix } G[N]|_v \frac{(K_1(F_w)(t, z))^{n_1}}{n_1!} \frac{(K_2(F_w)(0, z))^{n_2}}{n_2!} \frac{(K_3(F_w)(0, z))^{n_3}}{n_3!} \dots$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} T_{Z:z} G_v(F_w)(t) &= \widetilde{G_v(F_w)}(t, z) = \sum_N \widetilde{G_v(F_w)}_N(t, z) \\ &= \sum_N |\text{Fix } G[N]|_v \frac{(K_1(F_w)(t, z))^{n_1}}{n_1!} \frac{(K_2(F_w)(0, z))^{n_2}}{n_2!} \frac{(K_3(F_w)(0, z))^{n_3}}{n_3!} \dots \\ &= \sum_N |\text{Fix } G[N]|_v \frac{(\widetilde{F_w}(t, z))^{n_1}}{1^{n_1} n_1!} \frac{(\widetilde{F_w^2}(0, z))^{n_2}}{2^{n_2} n_2!} \frac{(\widetilde{F_w^3}(0, z))^{n_3}}{3^{n_3} n_3!} \dots \\ &= \sum_N |\text{Fix } G[N]|_v \frac{(T_{Z:z} F_w)(t, z))^{n_1}}{1^{n_1} n_1!} \frac{(T_{Z:z^2} F_w^2(0))^{n_2}}{2^{n_2} n_2!} \frac{(T_{Z:z^3} F_w^3(0))^{n_3}}{3^{n_3} n_3!} \dots \\ &= Z_{G_v}((T_{Z:z} F_w)(t, z), T_{Z:z^2} F_w^2(0), T_{Z:z^3} F_w^3(0), \dots). \end{aligned}$$

De la même manière, les lemmes 1.6.11 et 1.6.12 montrent que

$$\begin{aligned} Z_{G_v(F_w)}(t; zx_1, z^2 x_2, z^3 x_3, \dots) &= \widetilde{G_v(F_w \cdot \vec{x})}(t, z) = \sum_N \widetilde{G_v(F_w \cdot \vec{x})}_N(t, z) \\ &= \sum_N |\text{Fix } G[N]|_v \frac{K_1(F_w \cdot \vec{x})(t, z))^{n_1}}{n_1!} \frac{K_2(F_w \cdot \vec{x})(0, z))^{n_2}}{n_2!} \frac{K_3(F_w \cdot \vec{x})(0, z))^{n_3}}{n_3!} \dots \\ &= \sum_N |\text{Fix } G[N]|_v \frac{Z_{F_\omega}(t; zx_1, z^2 x_2, \dots)^{n_1}}{1^{n_1} n_1!} \frac{Z_{F_{\omega^2}}(0; z^2 x_2, z^4 x_4, \dots)^{n_2}}{2^{n_2} n_2!} \frac{Z_{F_{\omega^3}}(0; z^3 x_3, z^6 x_6, \dots)^{n_3}}{3^{n_3} n_3!} \dots \\ &= Z_{G_v}(Z_{F_\omega}(t; zx_1, z^2 x_2, \dots), Z_{F_{\omega^2}}(0; z^2 x_2, z^4 x_4, \dots), Z_{F_{\omega^3}}(0; z^3 x_3, z^6 x_6, \dots), \dots) \end{aligned}$$

En posant  $z_i = z^i x_i$  on obtient le résultat. ■

D'autre part, si  $F(0, Z) = Z$ , alors  $T_{Z:z^k} F_{w^k}(0) = z^k$ . D'où le corollaire suivant.

**Corollaire 1.6.13** *Si  $F = F_w(T, Z)$  est une espèce mixte telle que  $F(0, Z) = Z$  et  $G$  une  $\mathbb{B}$ -espèce, alors*

$$T_{Z:z} G_v(F_w)(t) = Z_{G_v}(T_{Z=z} F_w(t); z^2, z^3, \dots).$$

En particulier, si  $G$  est asymétrique, alors  $T_{Z:z} G(F)(t) = G(T_{Z=z} F(t))$ . ■

## CHAPITRE II

# SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES, OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS ET GRAMMAIRES

Nous développons dans ce chapitre des rappels et des compléments sur les méthodes combinatoires de Leroux-Viennot (Voir (Le.-Vi. 1. 86), (Le.-Vi. 2. 88), (Le.-Vi. 3. 88) (B.L.L. 94) ou (B.L.L. 98)) pour les systèmes d'équations différentielles. Une étude du lien entre les systèmes d'équations différentielles, les opérateurs différentiels et les grammaires est faite aux sections 2.2 et 2.3. Dans ce chapitre le mot *espèce* désigne soit une  $\mathbb{L}$ -espèce, soit une  $\mathbb{B}$ -espèce. Une précision sera donnée lorsque nécessaire.

### 2.1 Rappels et compléments sur la méthode de Leroux-Viennot pour les systèmes différentiels combinatoires

En plus des rappels de la méthode de Leroux-Viennot pour les systèmes d'équations différentielles, nous étudions dans cette section les équations et systèmes d'équations différentielles avec des conditions initiales spéciales du type  $Y(0) = \alpha$ ,  $\alpha$  étant une variable formelle.

#### 2.1.1 Équations différentielles analytiques et équations différentielles combinatoires

Soient  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots)$  une suite de variables formelles,  $t$  une variable formelle distincte des  $x_i$  et  $\mathbb{H}$  la sous-algèbre de  $\mathbb{Q}[[\vec{x}, t]]$  des séries formelles s'exprimant sous la forme  $f(t) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}$ , où  $a_n \in \mathbb{A} = \mathbb{Z}[[\vec{x}]]$ , alors on a le résultat suivant.

**Lemme 2.1.1** *Tout élément de  $\mathbb{H}$  est la série génératrice d'une  $\mathbb{L}$ -espèce pondérée.*

**Démonstration**  $f(t) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}$  avec  $a_n = \sum_{r, \mathbf{k}} (-1)^{\nu(n, \mathbf{k})} a_{n, \mathbf{k}} x_1^{k_1} \cdots x_r^{k_r} \in \mathbb{A}$ , où  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r$  et  $a_{n, \mathbf{k}} \in \mathbb{N}$ , est la série génératrice de la  $\mathbb{L}$ -espèce  $F = \sum_{n \geq 0} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{n, \mathbf{k}} \cdot E_n$ , les  $\mathbf{a}_{n, \mathbf{k}} \cdot E_n$  étant pondérées par  $(-1)^{\nu(n, \mathbf{k})} x_1^{k_1} \cdots x_r^{k_r}$ . ■

En d'autres termes, tout élément  $f(t)$  de  $\mathbb{H}$  admet un relèvement combinatoire (non unique), que nous noterons par  $F(T)$ . Donc, à toute équation analytique  $y' = f(y)$ , où  $f \in \mathbb{H}$ , on peut associer une équation combinatoire  $Y' = F(Y)$ , où  $F = F(T)$  est une espèce dont la série génératrice est  $f(t)$ .

En toute généralité, la donnée d'une  $\mathbb{L}$ -espèce ou d'une  $\mathbb{B}$ -espèce  $F$  quelconque nous permet d'écrire l'équation différentielle combinatoire

$$Y' = F(Y), \quad Y(0) = Z, \quad (2.1)$$

où  $Z$  est une sorte de points représentant la condition initiale. Intuitivement, pour résoudre (2.1), il s'agit de trouver une espèce  $Y = G = G(T, Z)$  vérifiant  $\frac{\partial G}{\partial T} \simeq F(G)$  et  $G(0, Z) = Z$ . En d'autres termes, l'équation (2.1) s'écrit aussi sous la forme

$$\frac{\partial Y}{\partial T} = F(Y(T, Z)), \quad Y(0, Z) = Z. \quad (2.2)$$

La condition initiale  $Y(0) = Z$  dans (2.1) se traduit par  $Y(0, Z) = Z$ , qui signifie que  $Y[\emptyset, U] = Z[U] = \{U\}$  si  $|U| = 1$ , et  $Y[\emptyset, U] = \emptyset$  si  $|U| \neq 1$ .

**Définition 2.1.2** Une solution de l'équation (2.1) (ou de (2.2)), est un couple  $(G, \varphi)$  où

- i)  $G = G(T, Z)$  est une  $\mathbb{L}$ -espèce, si  $F$  est une  $\mathbb{L}$ -espèce, et une espèce mixte, si  $F$  est une  $\mathbb{B}$ -espèce, telle que  $G(0, Z) = Z$ ,
- ii)  $\varphi : \frac{\partial G}{\partial T} \rightarrow F(G)$  est un isomorphisme de  $\mathbb{L}$ -espèces ou d'espèces mixtes suivant le cas.

Notons qu'à l'équation (2.2) est associée l'équation différentielle analytique

$$\frac{\partial y}{\partial t} = F(y(t, z)), \quad y(0, z) = z, \quad (2.3)$$

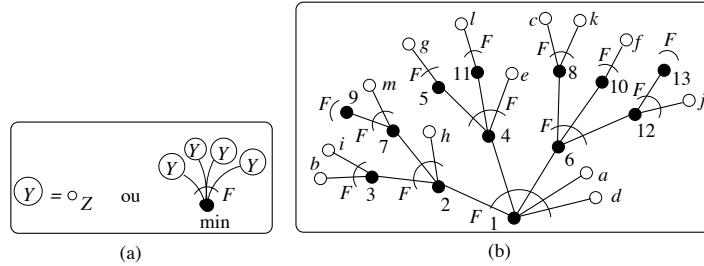
satisfait par la série génératrice  $y = y(t, z)$  de toute solution,  $F(t)$  étant la série génératrice de l'espèce  $F$ .

### 2.1.2 Résolution des équations différentielles combinatoires par la méthode de Leroux-Viennot

Considérons l'équation différentielle combinatoire (2.2). Nous pouvons l'écrire sous la forme intégrale suivante:

$$Y(T, Z) = Z + \int_0^T F(Y(X, Z))dX. \quad (2.4)$$

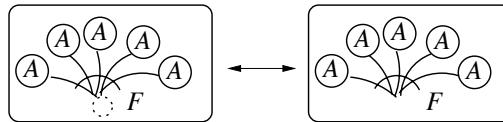
Cette équation intégrale est interprétée par la figure 2.1(a). Pour construire une  $Y$ -structure il nous suffit d'itérer ce processus. On obtient l'espèce  $A_F$  des *arborescences  $F$ -enrichies croissantes*. La figure 2.1(b) représente une arborescence  $F$ -enrichie croissante sur le couple  $(l, U)$  où  $l = [12]$  et  $U = \{a, b, \dots, m\}$ . Notons que la fibre de chaque sommet interne (noir sur la figure) est munie d'un  $F$ -enrichissement, et que les fils de chacun de ces sommets sont placés de gauche



**Figure 2.1:** (a) Équation intégrale, (b) Une arborescence croissante  $F$ -enrichie

à droite par ordre de grandeur. Notons aussi que dans les  $A_F$ -structures, les points de sorte  $Z$  se trouvent aux feuilles.

La fonctorialité de  $A_F$  se démontre par récurrence. Soit  $(\tau, \sigma) : (l, U) \rightarrow (l', U')$  tel que  $\tau : l \xrightarrow{\sim} l'$  et  $\sigma : U \rightarrow U'$  une bijection quelconque. Si  $|l| = |l'| = 0$ , alors  $A_F[l, U]$  et  $A_F[l', U']$  sont non vides si et seulement si  $|U| = |U'| = 1$ . Dans ce cas,  $A_F[\tau, \sigma]$  est défini de manière canonique. Si  $|l| = 1$ , alors un élément de  $A_F(l, U)$  est une arborescence ayant à sa racine l'unique élément de  $l$  dont la fibre est muni d'une  $F$ -structure. Nous posons donc  $A_F[\tau, \sigma] = (\tau, F[\sigma])$  où  $(\tau, F[\sigma])$  est la bijection qui consiste à remplacer l'unique élément  $s$  de  $l$  par l'unique élément  $\tau(s)$  de  $l'$  et la structure  $f$  sur la fibre de  $s$  par  $F[\sigma](f)$ . Il est clair que  $A_F[\tau\tau', \sigma\sigma'] = (\tau\tau', F(\sigma\sigma')) = (\tau\tau', F(\sigma)F(\sigma')) = (\tau, F[\sigma])(\tau', F[\sigma']) = A_F[\tau, \sigma]A_F[\tau', \sigma']$ . Supposons que pour tout  $l$  tel que  $|l| = n - 1$  et tout  $(\tau, \sigma) : (l, U) \rightarrow (l', U')$ , on a  $A_F[\tau, \sigma]$ , et que de plus si  $(\tau', \sigma') : (l'', U'') \rightarrow (l''', U''')$ , alors  $A_F[\tau\tau', \sigma\sigma'] = A_F[\tau, \sigma]A_F[\tau', \sigma']$ . Soit  $l$  tel que  $|l| = n$  et  $(\tau, \sigma) : (l, U) \rightarrow (l', U')$ . Posons  $m$  l'élément maximal de  $l$ . Si  $A$  est une  $A_F$ -structure sur  $(l, U)$ , alors la fibre de  $m$  est munie d'une  $F$ -structure  $f$  sur une partie  $V$  de  $U$ . Dans ce cas  $A$  s'identifie à un couple  $(A', B)$ , où  $A'$  est une  $A_F$ -structure sur  $(l \setminus \{m\}, (U \setminus V) \cup \{*\})$ , avec  $* \notin U$ , et  $B$  est l'arborescence sur  $(\{m\}, V)$  dont la fibre de  $m$  est munie de la même  $F$ -structure  $f$ . En notant  $\tau_1 = \tau|_{l \setminus \{m\}}$ ,  $\tau_2 = \tau|_{\{m\}}$ ,  $\sigma_2 = \sigma|_V$  et  $\sigma_1 : (U \setminus V) \cup \{*\} \rightarrow (U' \setminus V') \cup \{*\}'$  avec  $V' = \sigma(V)$ ,  $\sigma_1(x) = \sigma(x)$  si  $x \in U \setminus V$  et  $\sigma_1(*) = *$ ', nous posons  $A_F[\tau, \sigma] = (A_F[\tau_1, \sigma_1], A_F[\tau_2, \sigma_2])$ . En utilisant l'hypothèse de récurrence, on démontre facilement que  $A_F[\tau\tau', \sigma\sigma'] = A_F[\tau, \sigma]A_F[\tau', \sigma']$ . ■



**Figure 2.2:** L'isomorphisme  $\varphi$

Observons aussi qu'une arborescence  $F$ -enrichie croissante sur un couple  $(l, U)$ , avec  $l \neq \emptyset$ , est constituée du point minimum de  $l$ , auquel est attaché une  $F(A_F)$ -structure. L'isomorphisme  $\varphi : A'_F \rightarrow F(A_F)$  se définit canoniquement

en oubliant la racine, comme il est indiqué sur la figure 2.2. On obtient les deux théorèmes suivants. La démonstration complète du premier est donnée dans [(Le.-Vi. 1. 86)], [(B.L.L. 94)] ou [(B.L.L. 98)], tandis que le deuxième s'en déduit facilement.

**Théorème 2.1.3** *Si  $F$  est une  $\mathbb{L}$ -espèce, alors l'équation (2.1) admet comme solution “canonique”, le couple  $(A_F, \varphi)$ , où  $A_F$  est la  $\mathbb{L}$ -espèce à deux sortes des arborescences croissantes  $F$ -enrichies, et  $\varphi : \frac{dA_F}{dT} \rightarrow F(A_F)$  est l'isomorphisme qui oublie la racine de l'arborescence. De plus, cette solution est unique à isomorphisme près, c'est-à-dire que pour toute solution  $(B, \psi)$  il existe un unique isomorphisme d'espèces  $\Phi : A_F \rightarrow B$  tel le diagramme suivant soit commutatif (où  $A = A_F$ ).*

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{A} & \boxed{\frac{\partial A}{\partial T}} & \xrightarrow{\varphi} & \boxed{F(A)} \\ \downarrow \Phi & \downarrow \frac{\partial \Phi}{\partial T} & & & \downarrow F(\Phi) \\ \boxed{B} & \boxed{\frac{\partial B}{\partial T}} & \xrightarrow{\psi} & \boxed{F(B)} & \end{array}$$

D'autre part, la série génératrice  $y = A_F(t, z)$  est solution de l'équation différentielle (2.3). ■

**Théorème 2.1.4** *Si  $F$  est une  $\mathbb{B}$ -espèce, alors l'équation (2.1) admet comme solution canonique, le couple  $(A_F, \varphi)$ , où  $A_F$  est l'espèce mixte des arborescences croissantes  $F$ -enrichies, et  $\varphi : \frac{dA_F}{dT} \rightarrow F(A_F)$  est l'isomorphisme qui oublie la racine de l'arborescence. De plus cette solution est unique à isomorphisme près.*

### 2.1.3 Analyse des conditions initiales

**i) Condition initiale  $Z=0$ .** Une telle condition initiale correspond à l'équation différentielle combinatoire

$$Y' = F(Y), \quad Y(0) = 0. \quad (2.5)$$

Elle signifie que les arborescences solutions ne contiennent pas de feuilles de sorte  $Z$ . Ici la solution est la  $\mathbb{L}$ -espèce  $A_F(T) = A_F(T, 0)$ . Notons que la série génératrice  $y(t) = A_F(t)$  est solution de l'équation différentielle

$$y' = F(y), \quad y(0) = 0. \quad (2.6)$$

**Remarque 2.1.5** Si  $F(0) = 0$  alors on peut vérifier que l'équation (2.5) n'admet pas d'autre solution que la solution nulle,  $A_F(T, 0) = 0$ .

**ii) Condition initiale  $Z=1_\alpha$ .** Rappelons que  $1_\alpha$  est l'espèce  $\mathbf{1}$  de poids  $\alpha$ . La condition  $Z = 1_\alpha$  correspond analytiquement à une condition initiale du type  $y(0) = \alpha$ . Considérons donc l'équation différentielle combinatoire

$$Y' = F(Y), \quad Y(0) = 1_\alpha. \quad (2.7)$$

Pour interpréter  $A_F(T, \mathbf{1}_\alpha)$  il nous faut d'abord donner une définition générale de  $H(T, \mathbf{1}_\alpha)$ , c'est-à-dire de la substitution de l'espèce  $\mathbf{1}_\alpha$  pour  $Z$  dans une espèce quelconque  $H(T, Z)$  donnée.

1. *Supposons que  $H = H_v$  est une espèce mixte et que  $\alpha$  est une variable formelle.* Dans ce cas nous posons  $H(T, \mathbf{1}_\alpha) = (T_{Z:\alpha}H)(T)$  [voir définition 1.6.6]. Une  $H(T, \mathbf{1}_\alpha)$ -structure est un type d'isomorphie de structures par rapport à la sorte  $Z$ , c'est-à-dire que les points de sorte  $Z$  ont perdu leur étiquette, et la variable  $\alpha$  est un *compteur de points* de sorte  $Z$ . Le poids d'un tel type de structures est par définition le poids de la  $H$ -structure initiale multiplié par  $\alpha^k$  si  $k$  est le nombre de points indistinguables de sorte  $Z$ .

2. *Supposons que  $H = H_v$  est une espèce mixte et que  $\alpha$  est une constante numérique.* Considérons la  $\mathbb{L}$ -espèce  $T_{Z:z}H(T)$  dont la série génératrice s'écrit  $T_{Z:z}H(t) = \sum_{n \geq 0} (\sum_{k \geq 0} \tilde{h}_{n,k} z^k) \frac{t^n}{n!}$ . Si pour entier  $n$ , la somme  $\sum_{k \geq 0} \tilde{h}_{n,k} \alpha^k$  existe, alors la réunion disjointe  $\sum_{k \geq 0} \frac{H[n,k]}{\sim}$  est  $\mathbb{A}$ -sommable pour la pondération  $w$  définie par  $w(s) = \alpha^k v(s)$ , si  $s \in \frac{H[n,k]}{\sim}$ . Nous définissons la nouvelle espèce  $T_{Z:\alpha}H(T)$ , pondérée par  $w$ , en posant  $T_{Z:\alpha}H[l] = T_{Z:z}H[l]|_{z=\alpha}$ .

Notons que si  $H$  est trivialement pondérée, alors la somme  $\sum_{k \geq 0} \tilde{h}_{n,k} \alpha^k$  existe si et seulement si c'est une série convergente. En particulier, si  $\alpha = 1$ , et comme les  $\tilde{h}_{n,k}$  sont des entiers, alors cette série converge si et seulement si ses termes sont nuls à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il existe un entier  $k_o$ , tel que si  $k \geq k_o$ , alors  $\tilde{h}_{n,k} = 0$ . Nécessairement,  $h_{nk} = 0$  à partir du rang  $k_o$ .

**Définition 2.1.6** a) Une espèce  $F$  est dite *polynomiale* si il existe  $k_o \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq k_o$ ,  $F[n] = \emptyset$ .

b) Une espèce mixte  $H = H(T, Z)$  est dite *polynomiale en  $Z$*  si pour tout ensemble totalement ordonné  $l$ , la  $\mathbb{B}$ -espèce  $H[l, -]$  est polynomiale. ■

**Proposition 2.1.7** i) *Si  $H = H(T, Z)$  est trivialement pondérée, alors la  $\mathbb{L}$ -espèce  $T_{Z:1}H(T)$  est définie si et seulement si  $H$  est polynomiale en  $Z$ .*

ii) *Si  $F = F(Z)$  est une  $\mathbb{B}$ -espèce polynomiale, alors l'espèce  $A_F(T, Z)$  est polynomiale en  $Z$ .*

**Démonstration:** i) Sachant que  $\alpha = 1$  et que  $H$  est trivialement pondéré, l'ensemble  $\sum_{k \geq 0} \frac{H[n,k]}{\sim}$  est  $\mathbb{A}$ -sommable si et seulement si il est fini.

ii) Le principe de la démonstration est le même que pour la démonstration de la fonctorialité de  $A_F$ , c'est-à-dire par récurrence sur  $|l|$ . ■

3. *Supposons que  $H$  est une  $\mathbb{L}$ -espèce à deux sortes.* Dans ce cas, la notion de type d'isomorphie n'a aucun sens. En effet les points indistinguables ne pourront plus être ordonnés. Il est donc impossible de donner une interprétation à  $H(T, \mathbf{1}_\alpha)$  dans ce cas.

Supposons donc que dans (2.1),  $F$  est une  $\mathbb{B}$ -espèce. Dans ce cas,  $A_F(T, Z)$  est une espèce mixte. Dans ce qui suit, si  $\alpha \in \mathbb{A}$ , alors nous considérons les deux hypothèses suivantes:

$H_1$ :  $\alpha$  est une variable formelle,

$H_2$ :  $\alpha$  est une constante numérique, auquel cas nous supposons que  $F$  est polynomiale.

Considérons la  $\mathbb{L}$ -espèce  $G = G(T) = (T_{Z:\alpha} A_F)(T)$  des types, par rapport à  $Z$ , de  $A_F$ -structures. Sachant que  $A_F(0, Z) = Z$ , il est clair que  $G(0) = \mathbf{1}_\alpha$ . D'autre part  $G' \simeq F(G)$  car  $G' = \frac{d}{dT}(T_{Z:\alpha} A_F)(T) = T_{Z:\alpha}(\frac{\partial}{\partial T} A_F(T, Z)) \simeq T_{Z:\alpha} F(A_F(T, Z)) \simeq F((T_{Z:\alpha} A_F)(T)) = F(G)$ . Utilisant le corollaire 1.6.13 du théorème 1.6.9, on obtient le théorème suivant.

**Théorème 2.1.8** *Si  $F$  est une  $\mathbb{B}$ -espèce et  $\alpha \in \mathbb{A}$ , alors, moyennant les hypothèses  $H_1$  ou  $H_2$ , l'équation (2.7) admet comme solution la  $\mathbb{L}$ -espèce  $(T_{Z:\alpha} A_F)(T)$ . Dans ce cas, la série génératrice  $y(t) = (T_{Z:\alpha} A_F)(t)$  est solution de l'équation différentielle*

$$y' = Z_F(y, \alpha^2, \alpha^3, \dots), \quad y(0) = \alpha, \quad (2.8)$$

$Z_F$  étant la série indicatrice des cycles de  $F$ . ■

**Remarque 2.1.9** a) Si  $F$  est asymétrique alors  $Z_F(x_1, x_2, x_3 \dots) = F(x_1)$ , et l'équation (2.8) est équivalente à  $y' = F(y)$ ,  $y(0) = \alpha$ .

b) D'autre part, pour toute  $\mathbb{B}$ -espèce  $F$ ,  $Z_F(x, 0, 0 \dots) = F(x)$ . Donc, posant  $\alpha = 0$  dans l'équation (2.8), on retrouve l'équation (2.6). ■

#### 2.1.4 Exemples

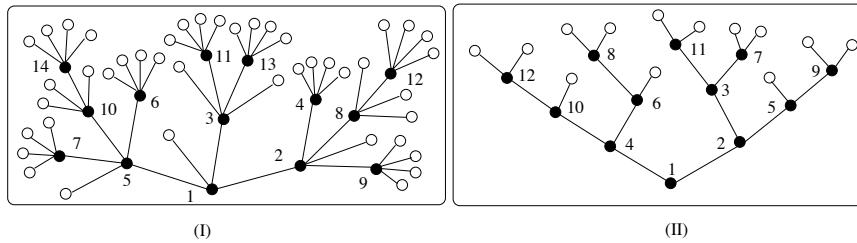
##### Exemple 2.1.10 Arborescences $m$ -aires croissantes

Considérons l'équation différentielle combinatoire

$$Y' = Y^m, \quad Y(0) = 1. \quad (2.9)$$

Dans ce cas,  $F(X) = X^m$  est une  $\mathbb{B}$ -espèce asymétrique et la remarque précédente s'applique. La méthode d'intégration décrite un peu plus haut nous donne comme solution l'espèce  $Y = \mathcal{A}_m^\uparrow$ , des arborescences  $m$ -aires croissantes. La figure 2.3(I) représente une arborescence quaternaire ( $m = 4$ ) croissante. Remarquons que les points blancs sont indistinguables.

En considérant l'équation  $y'(t) = y^m(t)$ ,  $y(0) = 1$ , on obtient la série génératrice,  $\mathcal{A}_m^\uparrow(t) = (1 + (1-m)t)^{\frac{1}{1-m}}$  si  $m > 1$ , et  $\mathcal{A}_1^\uparrow(t) = e^t$ . Donc le nombre  $\alpha_n^{(m)}$  d'arborescences  $m$ -aires croissantes sur  $n$  points s'obtient par extraction des coefficients:



**Figure 2.3:** (I) Une arborescence quaternaire croissante; (II) Une arborescence binaire croissante

$$\begin{aligned}\alpha_n^{(m)} &= |\mathcal{A}_m^\uparrow[n]| = n![t^n](1 + (1-m)t)^{\frac{1}{1-m}} \\ &= 1 \cdot m(2m-1)(3m-2) \cdots ((n-1)m-n+2) = \prod_{k=0}^{n-1} (1+k(m-1))\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où  $m = 2$ , on obtient l'espèce  $B^\uparrow$  des arborescences binaires croissantes (Fig. 2.3 (II)). Par projection sur un axe horizontal, on voit que l'espèce  $B^\uparrow$  est isomorphe à l'espèce  $L$  des listes ou à l'espèce  $S$  des permutations via la transformation fondamentale [cf. exemple 1.3.8].

Par exemple, à l’arborescence de la figure 2.3(II) est associée la permutation  $\sigma = 12\ 10\ 4\ 8\ 6\ 1\ 11\ 3\ 7\ 2\ 5\ 9 = (12)(10)(4\ 8\ 6)(1\ 11\ 3\ 7\ 2\ 5\ 9)$ . On en déduit plus directement que  $B^\uparrow(t) = \frac{1}{1-t}$ .

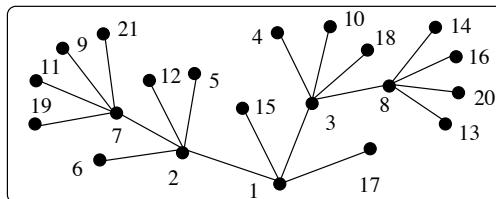
Supposons que dans l'équation (2.9) on ait comme condition initiale  $Y(0) = \emptyset$ , on peut alors vérifier par récurrence sur  $|I|$ , en utilisant l'équation intégrale associée, que  $Y[I] = \emptyset$ . ■

**Exemple 2.1.11** Arborescences  $m$ -aires croissantes complètes

L'espèce  $\mathcal{A}_{m,c}^\uparrow$  des arborescences  $m$ -aires croissantes complètes est la solution canonique de l'équation différentielle combinatoire

$$Y' = 1 + Y^m, \quad Y(0) = 0. \quad (2.10)$$

La figure 2.4 représente une arborescence quaternaire ( $m = 4$ ) croissante complète sur [21]. Notons que cette espèce vit sur des ensembles de cardinal



**Figure 2.4:** Une arborescence quaternaire croissante complète  
 $mk+1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . D'autre part, la série génératrice s'obtient en intégrant l'équation

$y' = 1 + y^m$ ,  $y(0) = 0$ . Les coefficients  $e_{m,n}$  de cette série vérifient la relation de récurrence  $e_{m,1} = 1$ ,  $e_{m,2} = \dots = e_{m,m} = 0$ , et

$$e_{m,n+1} = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_m=n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m} e_{m,n_1} \cdots e_{m,n_m}.$$

Dans le cas particulier où  $m = 2$  on obtient l'espèce des arborescences binaires complètes impaires, isomorphe par projection sur l'axe horizontal à l'espèce des permutations (listes) alternantes sur  $[2n+1]$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). La série génératrice est  $y(t) = \tan(t)$ , solution de l'équation différentielle  $y' = 1 + y^2$ ,  $y(0) = 0$ . Les nombres  $e_{2,n+1} = e_{2n+1}$  sont donc les nombres tangents.

### Exemple 2.1.12 Arborescences 1 – n croissantes

Considérons l'équation  $Y' = E_2(Y)$ ,  $Y(0) = Z$ , où  $E_2$  est la  $\mathbb{B}$ -espèce des ensembles de cardinal 2. La solution canonique est l'espèce  $A_{E_2}^\uparrow(T, Z)$  des arborescences  $E_2$ -enrichies. En remarquant qu'on a une  $E_2$ -structure sur les fils de chaque sommet, nous prendrons comme convention que ces fils seront placés de gauche à droite par ordre de grandeur. Nous obtenons une arborescence ayant la forme donnée par la figure 2.5.

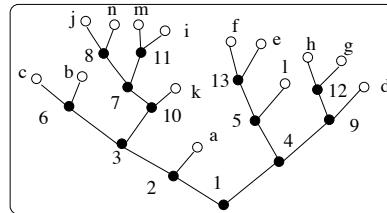


Figure 2.5: Une  $A_{E_2}^\uparrow(T, Z)$ -structure sur  $l_1 = [12]$  et  $U = \{a, b, \dots, m\}$ .

Notons que cette espèce vit sur des couples  $(l, U)$  d'ensembles telles que  $|U| = |l| + 1$ , et que sa série génératrice (exponentielle),  $Y(t, z) = A_{E_2}^\uparrow(t, z)$  solution de l'équation différentielle  $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{2}y^2$ ,  $y(0, z) = z$ , est  $y(t, z) = \frac{2z}{2-zt}$ .

La solution de l'équation similaire  $Y' = E_2(Y)$ ,  $Y(0) = 1$ , obtenue en prenant les types par rapport à  $Z$ ,  $Y = T_{Z:1}A_{E_2}^\uparrow$  (enlever les étiquettes des points blancs), est isomorphe à la  $\mathbb{L}$ -espèce des arborescences 1 – 2 croissantes [cf. Viennot (Vi. 81-82)]. En se rappelant que  $Z_{E_2}(z_1, z_2, \dots) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2)$ , la série génératrice est solution de l'équation  $y'(t) = Z_{E_2}(y(t), 1, 1, \dots) = \frac{y(t)^2+1}{2}$ ,  $y(0) = 1$ , et s'écrit  $y(t) = \operatorname{tg}(\frac{2t+\pi}{4}) = \operatorname{tg}(t) + \sec(t)$ . Les coefficients de cette série sont les nombres d'Euler, ou nombres tangents et sécants.

Plus généralement, les *arborescences 1 – n croissantes* sont les solutions de l'équation

$$Y' = E_n(Y), \quad Y(0) = 1.$$

Chaque sommet de ces arborescences admet au plus  $n$  fils et la série génératrice est la solution de l'équation différentielle  $y' = Z_{E_n}(y, 1, 1, \dots)$ ,  $Y(0) = 1$ . Savant que  $Z_{E_k}(z, z, z, \dots) = \frac{1}{k!}z(z+1)\cdots(z+k-1) = \frac{z^{<k>}}{k!}$  est le polynôme génératrice des permutations  $\sigma \in S_k$  selon le nombre de cycles, nous avons

$$\begin{aligned} Z_{E_n}(z+t, z, z, \dots) &= Z_{E_n}(z_1+t, z_2, z_3, \dots)|_{z_i=z} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} Z_{E_n}(z_1+t, z_2, z_3, \dots)|_{z_i=z, t=0} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} Z_{E_k}(z, z, z, \dots) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \frac{z^{<k>}}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{t^{n-k}}{(n-k)!k!} z(z+1)\cdots(z+k-1). \end{aligned}$$

En prenant  $z = 1$ , nous pouvons déduire que la série génératrice des arborescences  $1 - n$  croissantes est la solution de l'équation différentielle

$$y' = \sum_{k=0}^n \frac{(y-1)^k}{k!}, \quad y(0) = 1, \text{ ou bien, } u' = \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} = E_{\leq n}(u), \quad u(0) = 0,$$

en posant  $u = y - 1$ .

Le calcul qu'on vient de faire se généralise au cas d'une  $\mathbb{B}$ -espèce  $G$  quelconque. Nous notons  $G^{(k)}$  la dérivée  $k$ -ième de  $G$ . En posant  $\beta = y - \alpha$  et en utilisant la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned} Z_G(y, \alpha^2, \alpha^3, \dots) &= Z_G(\alpha + (y - \alpha), \alpha^2, \alpha^3, \dots) \\ &= Z_G(\alpha + \beta, \alpha^2, \alpha^3, \dots) \\ &= \sum \frac{\beta^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k} Z_G(x_1, \alpha^2, \alpha^3, \dots)|_{x_1:=\alpha} \\ &= \sum \frac{\beta^k}{k!} Z_{G^{(k)}}(\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots) \\ &= \sum \frac{\beta^k}{k!} \tilde{G}^{(k)}(\alpha) = \sum_{k \geq 0} \frac{(y-\alpha)^k}{k!} \tilde{G}^{(k)}(\alpha). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc la proposition suivante

**Proposition 2.1.13** *Soit  $G$  une  $\mathbb{B}$ -espèce quelconque. L'équation différentielle*

$$y' = Z_G(y, \alpha^2, \alpha^3, \dots), \quad y(0) = \alpha, \text{ est équivalente à}$$

$$y' = \sum_{k \geq 0} \frac{(y-\alpha)^k}{k!} \tilde{G}^{(k)}(\alpha), \quad y(0) = \alpha. \quad (2.11)$$

*En d'autres termes, la série génératrice de l'espèce  $T_{Z:\alpha}A_F$  solution de l'équation (2.7), est solution de l'équation (2.11).* ■

**Exemple 2.1.14** (a) Si  $G = L$ , l'espèce des listes, on a  $G^{(k)} = k!L^{k+1}$ . Donc  $\tilde{G}^{(k)}(\alpha) = k!\frac{1}{(1-\alpha)^{k+1}}$ . L'équation (2.11) est alors équivalente à

$$y' = \sum_{k \geq 0} \frac{(y - \alpha)^k}{k!} k! \frac{1}{(1 - \alpha)^{k+1}}, \text{ c'est-à-dire à } y' = \frac{1}{1 - y}, \quad y(0) = \alpha.$$

Ce résultat était prévisible puisque l'espèce  $L$  des listes est asymétrique, donc  $Z_G(y, \alpha^2, \alpha^3, \dots) = L(y) = \frac{1}{1-y}$  [Remarque 2.1.9 a)].

(b) Si  $G = C$ , l'espèce des cycles, alors pour  $k \geq 1$ ,  $G^{(k)} = (k-1)!L^k$ , où  $L$  est l'espèce des listes. Donc  $\tilde{G}(\alpha) = \tilde{C}(\alpha) = \frac{\alpha}{1-\alpha}$  et si  $k \geq 1$ ,  $\tilde{G}^{(k)}(\alpha) = (k-1)!\frac{1}{(1-\alpha)^k}$ . L'équation (2.11) prend donc ici la forme

$$y' = \frac{\alpha}{1 - \alpha} + \sum_{k \geq 1} \frac{(y - \alpha)^k}{k(1 - \alpha)^k} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} + \ln\left(\frac{1 - \alpha}{1 - y}\right), \quad y(0) = \alpha.$$

(c) Si  $G = E$ , l'espèce des ensembles, on a  $G^{(k)} = E$  pour tout  $k$ , et  $\tilde{G}^{(k)}(\alpha) = \tilde{E}(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}$ . On obtient l'équation

$$y' = \frac{1}{1 - \alpha} e^{y - \alpha}, \quad y(0) = \alpha.$$

(d) Si  $G = S$ , l'espèce des permutations, on a  $G^{(k)} = k!S \cdot L^k$ . Puisque  $\tilde{S}(\alpha) = \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - \alpha^n}$ , on obtient  $y' = \sum_{k \geq 0} \frac{(y - \alpha)^k}{k!} k! (\prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - \alpha^n}) \frac{1}{(1 - \alpha)^k}$ , qui se simplifie comme suit

$$y' = \frac{1}{1 - y} \left( \prod_{n \geq 2} \frac{1}{1 - \alpha^n} \right), \quad y(0) = \alpha.$$

Ce résultat peut être obtenu directement de la proposition 2.1.8 en remarquant que

$$Z_S(x_1, x_2, x_3, \dots) = \prod_i \frac{1}{1 - x_i} \text{ [Voir (B.L.L. 94) ou (B.L.L. 98)].} \quad \blacksquare$$

### 2.1.5 Les systèmes différentiels

Étant donné des espèces à  $k$  sortes  $F_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) qui sont toutes soit des  $\mathbb{L}$ -espèces, soit des  $\mathbb{B}$ -espèces, et des sortes de points  $Z_i$  représentant les conditions initiales, considérons le système d'équations différentielles combinatoires

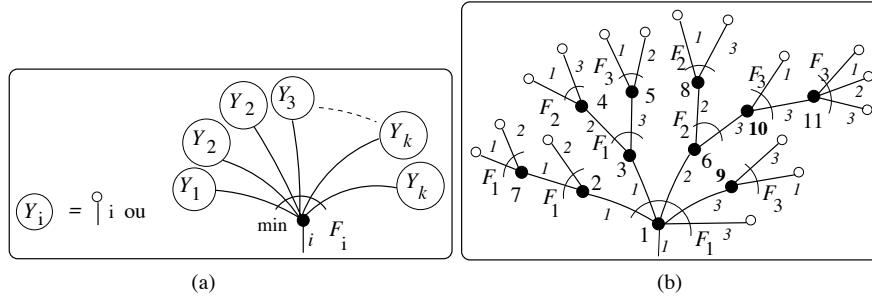
$$Y'_i = F_i(Y_1, Y_2, \dots, Y_k), \quad Y_i(0) = Z_i, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (2.12)$$

**Définition 2.1.15** Une solution du système (2.12) est un couple  $(\vec{A}, \varphi)$  où  $\vec{A} = (A_1, A_2, \dots, A_k)$  est un  $k$ -uplet d'espèces mixtes du type  $\mathbb{L} \times \mathbb{B}^k \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{A}, s}$  si tous les  $F_i$  sont des  $\mathbb{B}$ -espèces, ou de  $\mathbb{L}$ -espèces à  $(k+1)$ -sortes si tous les  $F_i$  sont des  $\mathbb{L}$ -espèces, et  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$  un  $k$ -uplet d'isomorphismes  $\varphi_i : \frac{\partial A_i}{\partial T} \rightarrow F_i(\vec{A})$ . ■

Posons  $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_k)$ ,  $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$  et  $\vec{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_k)$ . Le système 2.12 s'écrit sous forme intégrale

$$Y_i(T, \vec{Z}) = Z_i + \int_0^T F_i(\vec{Y}(X, \vec{Z})) dX, \quad 1 \leq i \leq k \quad (2.13)$$

Une interprétation de ces équations intégrales est donnée par la figure 2.6(a), où l'élément minimum est de couleur  $i$ , et est suivi d'une  $F_i(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ -structure. L'itération de ce processus, pour  $1 \leq i \leq k$ , nous donne l'espèce



**Figure 2.6:** (a) Équation intégrale; (b) Une arborescence  $\vec{F}$ -enrichie croissante des arborescences  $\vec{F}$ -enrichies croissantes du type  $i$ , que nous noterons  $A_{i,\vec{F}} = A_{i,\vec{F}}(T, Z_1, \dots, Z_k)$  [figure 2.6(b)], et qui est caractérisée par le fait que chaque sommet est coloré par  $j \in [k]$ . La fibre d'un sommet interne de couleur  $j$ , vue comme un  $k$ -ensemble, est alors munie d'un  $F_j$ -enrichissement ( $F_i$ -enrichissement pour la racine). Nous avons le théorème suivant, démontré dans [(Le.-Vi. 1. 86) ou (B.L.L. 94) ou (B.L.L. 98)].

**Théorème 2.1.16** *Le système (2.12) admet comme solution canonique le couple  $(\vec{A}_{\vec{F}}, \varphi)$  où  $(\vec{A}_{\vec{F}}$  est le  $k$ -uplet  $\vec{A}_{\vec{F}} = (A_{1,\vec{F}}, A_{2,\vec{F}}, \dots, A_{k,\vec{F}})$  et  $\varphi = (\varphi_i)_{1 \leq i \leq k}$  où  $\varphi_i : A_{i,\vec{F}} \rightarrow F_i(\vec{A}_{\vec{F}})$  est l'isomorphisme canonique qui oublie la racine. De plus, en notant  $\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t))$ , les séries génératrices des  $A_{i,\vec{F}}$ , sont solutions du système différentiel*

$$y'_i = F_i(\vec{y}(t)), \quad y_i(0) = z_i, \quad 1 \leq i \leq k, \quad (2.14)$$

Supposons maintenant que tous les  $F_i$  sont des  $\mathbb{B}$ -espèces. Pour chaque  $i$ , soit  $\alpha_i$  une variable formelle. La proposition 2.1.8 se prolonge comme suit:

**Théorème 2.1.17** *Les  $F_i$  étant des  $\mathbb{B}$ -espèces, le système différentiel  $\{Y'_i = F_i(Y), \quad Y_i(0) = 1_{\alpha_i}, \quad 1 \leq i \leq k\}$  admet comme solution le  $k$ -uplet de  $\mathbb{L}$ -espèces*

$$T_{\vec{Z}:\vec{\alpha}} \vec{A}_{\vec{F}} = (T_{\vec{Z}:\vec{\alpha}} A_{1,\vec{F}}, T_{\vec{Z}:\vec{\alpha}} A_{2,\vec{F}}, \dots, T_{\vec{Z}:\vec{\alpha}} A_{k,\vec{F}}),$$

où  $\vec{Z} : \vec{\alpha}$  signifie que pour tout  $i$ ,  $Z_i : \alpha_i$ . De plus, les séries génératrices des  $T_{\vec{Z}:\vec{\alpha}} A_{i,\vec{F}}$  sont solutions du système

$$y'_i = Z_{F_i}(y_1, \alpha_1^2, \alpha_1^3, \dots; y_2, \alpha_2^2, \alpha_2^3, \dots; \dots; y_k, \alpha_k^2, \alpha_k^3, \dots), \quad y_i(0) = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq k,$$

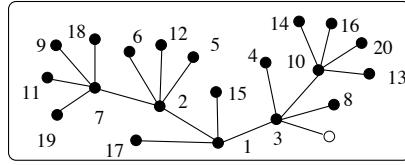
où  $Z_{F_i}(x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots; x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots; \dots; x_{k1}, x_{k2}, x_{k3}, \dots)$  désigne la série indicatrice de la  $\mathbb{B}$ -espèce à  $k$  sortes  $F_i$ . ■

### Exemple 2.1.18 Arborescences $m$ -aires croissantes complètes

Soit  $m \geq 2$  et considérons le système,

$$\begin{aligned} U' &= 1 + U^m, & U(0) &= 0, \\ V' &= U^{m-1}V, & V(0) &= Z. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Il est clair que  $U$  est l'espèce  $\mathcal{A}_{m,c}^\uparrow$  des arborescences  $m$ -aires complètes croissantes de l'exemple 2.1.11. Rappelons qu'elle vit sur un ensemble de cardinal  $mk + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . D'autre part, l'espèce  $V$  vit sur les ensembles de cardinal  $mk$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Nous l'appelons espèce des arborescences  $m$ -aires complètes du deuxième type et la dénotons  $V = \mathcal{B}_{m,c}^\uparrow$ . Une arborescence  $m$ -aire ( $m = 4$ ) complète du deuxième type est donnée par la figure 2.7. L'unique point blanc est un point de sorte  $Z$ .



**Figure 2.7:** Une arborescence quaternaire ( $m = 4$ ) complète du deuxième type

De plus, en posant  $V(t) = \sum_{n \geq 0} f_{m,n} \frac{t^n}{n!}$ , on a

$$f_{m,n+1} = \sum_{n_0+n_1+\dots+n_{m-1}=n} \binom{n}{n_0, n_1, \dots, n_{m-1}} f_{m,n_0} e_{m,n_1} e_{m,n_2} \cdots e_{m,n_{m-1}}.$$

Notons que dans le cas le cas particulier où  $m = 2$ , les solutions du système (2.15) sont les arborescences binaires complètes et semi-complètes, c'est-à-dire que  $f_{2,n} = e_{2n}$ ,  $e_n$  étant le  $n$ -ième nombre d'Euler. Les suites  $e_{m,n}$  de l'exemple 2.1.11 et  $f_{m,n}$  forment donc une généralisation des nombres d'Euler.

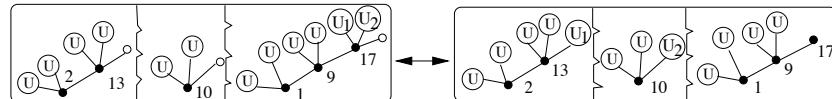
**Proposition 2.1.19** *Les espèces  $U = \mathcal{A}_{m,c}^\uparrow$  et  $V = \mathcal{B}_{m,c}^\uparrow$ , où on a posé  $Z = 1$ , satisfont les équations:*

$$(\mathcal{B}_{m,c}^\uparrow)^m \simeq [1 + (\mathcal{A}_{m,c}^\uparrow)^m] \text{ et } \mathcal{B}_{m,c}^\uparrow \simeq E[\int (\mathcal{A}_{m,c}^\uparrow)^{m-1}].$$

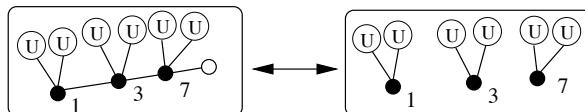
*Donc les solutions du système analytique  $\{y' = 1 + y^m, z' = zy^{m-1}, y(0) = 0, z(0) = 1\}$  satisfont aux identités  $z^m(t) = 1 + y^m(t)$  et  $z(t) = e^{\int y^{m-1}(t)dt}$ .*

**Démonstration** Les isomorphismes sont illustrés par les figures 2.8 et 2.9. Dans le premier cas il s'agit, en partant d'une  $(\mathcal{B}_{m,c}^\uparrow)^m$ -structure, de chercher le plus grand des sommets, disons  $s$ , dont l'un des fils est un point blanc (de

sorte  $Z$ ). En notant  $U_1, \dots, U_{m-1}$  les  $\mathcal{A}_{m,c}^\uparrow$ -structures attachées à ce point, on remplace les points blancs des autres  $\mathcal{B}_{m,c}^\uparrow$ -structures par les  $U_i$ . Pour la réciproque, il suffit de remarquer  $s$  sera alors la plus petite des feuilles situées sur la branche droite principale de chaque  $\mathcal{A}_{m,c}^\uparrow$ -structure, et on peut reconstituer les  $U_i$  en cherchant, sur chacune de ces branches droites, les couples de sommets  $(s_1, s_2)$  tels que  $s_1 < s < s_2$ . Notons que  $\mathcal{B}_{3,c}^\uparrow(0) = 1$  alors que  $\mathcal{A}_{3,c}^\uparrow(0) = 0$ . ■



**Figure 2.8:** Isomorphisme entre  $(\mathcal{B}_{3,c}^\uparrow)^3$  et  $1 + (\mathcal{A}_{3,c}^\uparrow)^3$



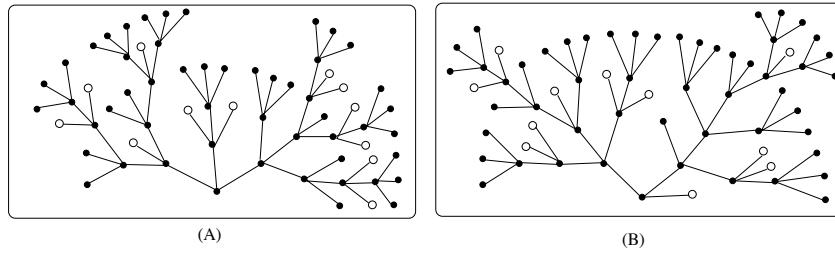
**Figure 2.9:** Isomorphisme entre  $\mathcal{B}_{3,c}^\uparrow$  et  $E[\int (\mathcal{A}_{3,c}^\uparrow)^2]$

### Exemple 2.1.20 $p$ -arborescences de Fermat

Soit  $p$  un entier, et considérons le système différentiel

$$\begin{aligned} X' &= Y^p, & X(0) &= 1, \\ Y' &= X^p, & Y(0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Les solutions combinatoires seront appelées *arborescences de Fermat d'ordre  $p$* .



**Figure 2.10:** (A) Une arborescence de Fermat d'ordre 3 et de type  $X$ ; (B) Une arborescence de Fermat d'ordre 3 et de type  $Y$

Les figures 2.10(A) et (B), où les étiquetages croissantes ont été éliminées par souci de clarté et où les points blancs sont des  $X$ -structures sur le vide, représentent des arborescences de Fermat d'ordre 3. Notons que pour  $p$  donné, ces arborescences sont caractérisées par le fait que pour l'espèce  $X$  (resp. $Y$ ) chaque sommet de hauteur paire (resp. impaire) a exactement  $p$  fils et chaque sommet de hauteur impaire (resp. paire) a au plus  $p$  fils dont les positions sont bien déterminées.

Comme on le verra à la section 2.2, à ce système est associé l'opérateur différentiel  $\mathcal{F}_p = y^p \frac{\partial}{\partial x} + x^p \frac{\partial}{\partial y}$ . Cet opérateur est lié à la recherche d'une paramétrisation  $x(t) = \sum_{n \geq 0} x_n \frac{t^n}{n!}$  et  $y(t) = \sum_{n \geq 0} y_n \frac{t^n}{n!}$  de la courbe de Fermat  $f(x, y) = x^{p+1} - y^{p+1} = 1$ , satisfaisant la condition de Kepler  $xy' - x'y = 1$ . Cette paramétrisation est donnée par  $x(t) = \sum_{n \geq 0} (\mathcal{F}_p^n(x))_{x=1, y=0} \frac{t^n}{n!}$ , et  $y(t) = \sum_{n \geq 0} (\mathcal{F}_p^n(y))_{x=1, y=0} \frac{t^n}{n!}$ . Comme on s'y attend, nous avons la proposition suivante.

**Proposition 2.1.21** *Les arborescences de Fermat d'ordre  $p$  vérifient  $X^{p+1} \simeq 1 + Y^{p+1}$ .*

**Démonstration** L'isomorphisme est illustré par la figure 2.11. ■

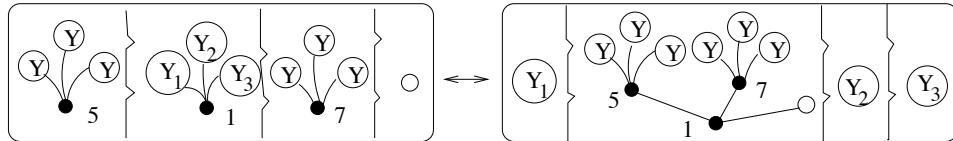


Figure 2.11: Isomorphisme entre  $X^4$  et  $1 + Y^4$ , pour  $p = 3$

### Exemple 2.1.22 Application aux séries $\mathcal{D}$ -finies

Nous montrons dans cette exemple qu'il est possible de définir un modèle combinatoire pour certaines séries  $\mathcal{D}$ -finies, au sens de Stanley [(Sta. 80)]. Notons que ces séries sont des  $\mathcal{CDF}$ -series au sens de [(Be.-Re. 90)] [ Voir aussi U. Sattler (Sat. 94) et Bergeron-Sattler (Be.-Sa 95)]. Rappelons d'abord la définition.

**Définition 2.1.23** [(Sta. 80)] Une série formelle  $y \in \mathbb{C}[[x]]$  est dite différentiablement finie ou  $\mathcal{D}$ -finie si le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}[[x]]$ , considéré comme espace vectoriel sur  $\mathbb{C}[x]$ , engendré par la famille  $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est de dimension finie. En d'autres termes, s'il existe une famille finie de polynômes non tous nuls  $(p_i(x))_{0 \leq i \leq m}$  tel que  $p_m(x)y^{(m)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ . ■

Pour  $0 \leq i \leq m - 1$ , soient  $\alpha_i$  des variables formelles et  $F_i$  des  $\mathbb{L}$ -espèces et soit  $F_m$  une  $\mathbb{L}$ -espèce telle que  $F_m(0) = 1$ . Considérons l'équation différentielle

$$F_m(T)Y^{(m)} = \sum_{i=0}^{m-1} F_i(T)Y^{(i)}; \quad Y^{(i)}(0) = 1_{\alpha_i}. \quad (2.17)$$

Posons  $G_m(T) = L(-F_m^+)(T)$  [cf. exemple 1.4.15] et considérons l'équation

$$Z^{(m)} = \sum_{i=0}^{m-1} G_m(T)F_i(T)Z^{(i)}; \quad Z^{(i)}(0) = 1_{\alpha_i}. \quad (2.18)$$

Il est clair que les solutions  $Y$  et  $Z$  de (2.17) et (2.18) sont équivalentes. Donc, toute solution de (2.18) est un modèle combinatoire de la série génératrice des solutions de (2.17). D'autre part, en posant  $Z_i := Z^{(i)}$  l'équation (2.18) est équivalente au système

$$\begin{cases} Z'_i = Z_{i+1}, \quad Z_i(0) = 1_{\alpha_i}, \quad 0 \leq i \leq m-1, \\ Z_m = \sum_{i=0}^{m-1} G_m(T) F_i(T) Z_i \end{cases} \quad (2.19)$$

Il suffit donc de résoudre (2.19) pour avoir le modèle combinatoire en question. Notons qu'en général, ce modèle n'est pas une solution de (2.17). ■

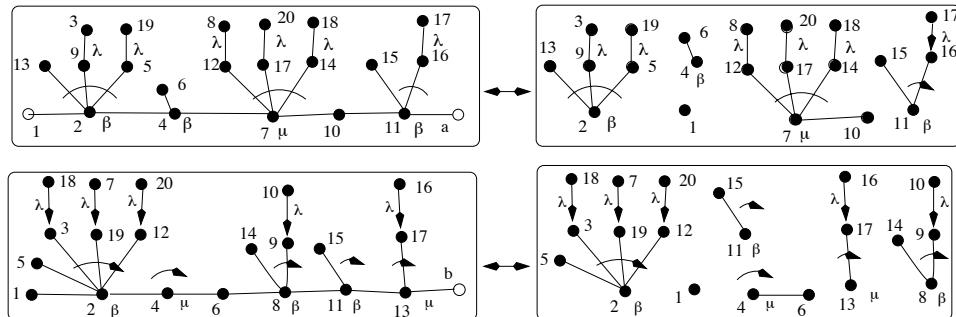
**Exemple 2.1.24** À titre d'exemple, soit la série  $y = y(t)$  définie par l'équation

$$(1 - \lambda t^2)y'' = \beta t y' + \mu y, \quad y'(0) = a \text{ et } y(0) = b, \quad (2.20)$$

$\lambda, \beta, \mu, a$  et  $b$  étant des variables formelles. À cette équation est associée l'équation différentielle combinatoire  $(1 - \lambda T^2)Y'' = \beta T Y' + \mu Y$ ,  $Y'(0) = 1_a$  et  $Y(0) = 1_b$ , dont les solutions sont équivalentes aux solutions de l'équation  $Y'' = \beta TL(\lambda T^2)Y' + \mu L(\lambda T^2)Y$ , donc aux solutions  $Y$  du système

$$Y' = Z, \quad Z' = \beta TL(\lambda T^2)Z + \mu L(\lambda T^2)Y, \quad Z(0) = 1_a \text{ et } Y(0) = 1_b. \quad (2.21)$$

Nous dénotons par  $Y = F_v$ , la  $\mathbb{L}$ -espèce pondérée, solution canonique du système 2.21. Des exemples de  $F_v$ -structures sont donnés par la figure 2.12. Re-



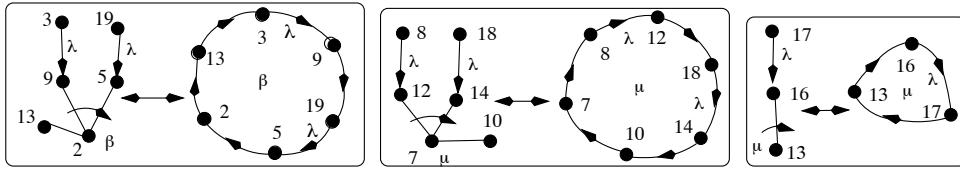
**Figure 2.12:** Deux exemples de  $F_v$ -structures et leurs composantes connexes.

marquons que la dérivée de l'espèce  $F_v$ ,  $F'_v = Z$ , est isomorphe à une sous-espèce de l'espèce des permutations définie comme suit. Pour tout entier  $n$  et toute permutation  $\sigma \in \mathbb{S}_n$ , l'ensemble  $\mathcal{C}(\sigma)$  des cycles de  $\sigma$  est totalement ordonné par l'ordre naturel des éléments minimum de chaque cycle. Fixons  $n$  et dénotons  $P[n-1]$  l'ensemble des permutations  $\sigma$  de  $[n-1]$  dont tous les cycles sont de longueur paire sauf le plus grand élément de  $\mathcal{C}(\sigma)$  qui sera de longueur impaire si  $n$  est pair (donc  $n-1$  impair). Soit  $\sigma \in P[n-1]$  telle que  $\mathcal{C}(\sigma) = \{\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_k\}$ . Posons  $c_i =$  l'élément minimum de  $\sigma_i$  et  $|\sigma_i|$  sa longueur. Il est clair que  $c_i < c_{i+1}$ . Pour  $n$  donné, nous choisissons arbitrairement des éléments de l'ensemble  $\{\sigma_i \in \mathcal{C}(\sigma) \mid |\sigma_i| \text{ paire et } \sigma^{-1}(c_i) < c_{i+1}\}$ , qui seront

pondérés par  $w(\sigma_i) = \mu \lambda^{\frac{|\sigma_i|-2}{2}}$ , les éléments restants dans  $\mathcal{C}(\sigma)$  étant pondérés par  $w(\sigma_i) = \beta \lambda^{\frac{|\sigma_i|-2}{2}}$ , sauf si  $|\sigma_k|$  est impair, auquel cas on pose  $w(\sigma_k) = \mu \lambda^{\frac{|\sigma_k|-1}{2}}$ . On définit ainsi une pondération  $w$  sur  $P[n-1]$  en posant  $w(\sigma) = \prod_i w(\sigma_i)$ . Remarquons qu'en appelant  $\mu$ -cycles (resp.  $\beta$ -cycles) les cycles pondérés par  $\mu$  (resp.  $\beta$ ), alors un  $\mu$ -cycles  $\sigma_i$  est soit de longueur impaire, auquel cas il est unique et  $n-1$  est impaire, soit il vérifie  $\sigma_i^{-1}(c_i) < c_{i+1}$ , tandis que les  $\beta$ -cycles sont quelconques mais toujours de longueur paire.

**Proposition 2.1.25** *Les ensembles pondérés  $F'_v[n]$  et  $P_w[n]$  sont isomorphes.*

**Démonstration** La figure 2.13 illustre un isomorphisme qui permet de transformer chaque composante connexe d'une  $F'_v$ -structure en un cycle  $w$ -pondéré.



**Figure 2.13:** Isomorphisme entre  $F'_v$  et  $P_w$

**Remarque 2.1.26** Notons que l'équation (2.20) contient [cf. Zwilinger (Zw. 92)]

- i) l'équation d'Hermite:  $y'' - ty' + ny = 0$
- ii) l'équation de Gegenbauer:  $(1 - t^2)y'' - (2m + 3)ty' + \lambda y = 0$
- iii) l'équation de Legendre:  $(1 - t^2)y'' - 2ty' + n(n + 1)y = 0$
- iv) l'équation différentielle hypersphérique:  $(1 - t^2)y'' - 2aty' + by = 0$
- v) l'équation différentielle ultrasphérique:  $(1 - t^2)y'' - (2\alpha + 1)ty' + n(n + 2\alpha)y = 0$
- vi) l'équation de Tchebytchef:  $(1 - t^2)Y'' - ty' + n^2y = 0$ .

Considérons maintenant le système différentiel

$$Y'_i = F_i(Y_1, Y_2, \dots, Y_k), \quad Y_i(0) = 0, \quad i = 1 \dots k. \quad (2.22)$$

Supposons que la série génératrice des solutions  $Y_i = A_{i,F}$  s'écrit  $Y_i(t) = A_{i,F}(t) = \sum_{n \geq 0} a_{i,n} \frac{t^n}{n!}$  et que  $F_i(y_1, \dots, y_k) = \sum_{n_1, \dots, n_k} \alpha_{n_1, \dots, n_k}^{(i)} \frac{y_1^{n_1} \dots y_k^{n_k}}{n_1! \dots n_k!}$ , avec  $\alpha_{n_1, \dots, n_k}^{(i)} \in \mathbb{C}$ . Alors nous avons la proposition suivante qui nous fournit une majoration des coefficients  $a_{i,n}$  et généralise le théorème 3(i) de F. Bergeron et C. Reutenauer dans [(Be.-Re. 90)], où les séries  $F_i(y_1, \dots, y_k)$  sont supposées polynomiales.

**Théorème 2.1.27** *S'il existe des constantes  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  telles que pour tout  $i$  et pour tout*

*$(n_1, \dots, n_k)$ ,  $|\alpha_{n_1, \dots, n_k}^{(i)}| \leq \alpha_1^{n_1} \cdots \alpha_k^{n_k} n_1! \cdots n_k!$  où  $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ , alors il existe une constante  $\alpha$  telle que pour tout  $n$  et pour tout  $i$ ,*

$$|a_{i,n}| \leq (k+1)^{n-1} \alpha^{n-1} (n-1)!.$$

**Démonstration** Considérons le système auxiliaire (2.23), dont les solutions combinatoires sont des arborescences obtenues en itérant le processus décrit par la figure 2.14.

$$Z'_i = \prod_{j=1}^k L(\alpha_j Z_j), \quad Z_j(0) = 0, \quad (2.23)$$

où les  $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$ . Et soit  $Z_i(t) = \sum_{n \geq 0} b_{i,n} \frac{t^n}{n!}$  la série génératrice de la  $i$ ème composante de la solution.

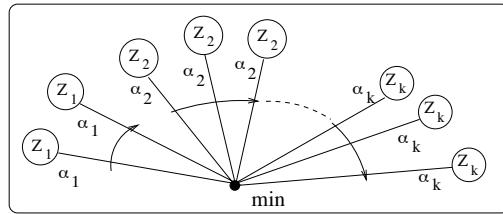


Figure 2.14: Solution combinatoire du système auxiliaire

**Lemme 2.1.28** *Soit  $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$ . Si pour tout  $i$  et pour tout  $(n_1, \dots, n_k)$ ,  $|\alpha_{n_1, \dots, n_k}^{(i)}| \leq \alpha_1^{n_1} \cdots \alpha_k^{n_k} n_1! \cdots n_k!$ , alors, pour tout  $i$  et pour tout  $n$ ,  $|a_{i,n}| \leq b_{i,n}$ .*

En effet, les équations (1.1), (2.22) et (2.23) montrent que nous avons les relations de récurrences suivantes

$$b_{i,n+1} = \sum_{\pi \in \text{Par}[n]} \sum_{c: \pi \rightarrow [k]} |\epsilon^{-1}(1)|! \cdots |\epsilon^{-1}(k)|! \alpha_1^{|\epsilon^{-1}(1)|} \cdots \alpha_k^{|\epsilon^{-1}(k)|} \prod_{j=1}^k \prod_{c \in \epsilon^{-1}(j)} b_{j,|c|},$$

$$a_{i,n+1} = \sum_{\pi \in \text{Par}[n]} \sum_{c: \pi \rightarrow [k]} \alpha_{\epsilon^{-1}(1), \dots, \epsilon^{-1}(k)}^{(i)} \prod_{j=1}^k \prod_{c \in \epsilon^{-1}(j)} a_{j,|c|}.$$

On vérifie facilement par récurrence que  $|a_{i,n}| \leq b_{i,n}$ . ■

**Suite de la démonstration** Il est clair que les solutions de (2.23) vérifient, pour tout  $i, j$ ,  $Z_i = Z_j = Z$ ,  $Z$  étant la solution de l'équation  $Z' = \prod_{j=1}^k L(\alpha_j Z)$ ,  $Z(0) = 0$ . Soit  $\alpha = \max\{\alpha_i, 1 \leq i \leq k\}$  et considérons l'équation  $U' = \prod_{i=1}^k L(\alpha U) = L^k(\alpha U)$ ,  $U(0) = 0$ . Si  $U(t) = \sum_{n \geq 0} u_n \frac{t^n}{n!}$ , alors le lemme 2.1.28 entraîne que pour tout  $n$ ,  $b_{i,n} \leq u_n$ . Comme  $U(t)$  est la solution du système

analytique  $u' = \frac{1}{(1-\alpha u)^k}$ ,  $u(0) = 0$ , alors  $U(t) = \frac{1}{\alpha} [1 - (1 - \alpha(k+1)t)^{\frac{1}{k+1}}]$ . La formule du binôme montre que  $u_n = k(2k+1)(3k+2)\cdots((n-1)k+n-2)\alpha^{n-1}$ . Il suffit alors de remarquer que  $k(2k+1)(3k+2)\cdots((n-1)k+n-2) \leq (k+1)(2k+2)(3k+3)\cdots((n-1)k+n-1) = (k+1)^{n-1}(n-1)!$ . ■

### 2.1.6 Cas des systèmes non autonomes

Remarquons seulement que, comme en analyse classique, la donnée du système non autonome à  $k$  inconnues  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$

$$Y'_i = F_i(T, Y), \quad Y_i(0) = Z_i; \quad 1 \leq i \leq k$$

est équivalente à la donnée du système autonome

$$Y'_i = F_i(U, Y), \quad U' = 1, \quad Y_i(0) = Z_i, \quad U(0) = 0; \quad i = 1 \dots k$$

à  $k+1$  inconnues  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k, U$ . Donc la résolution des système non autonomes se ramène aux cas des systèmes autonome. Voir aussi [(B.L.L. 94) ou (B.L.L. 98)], à ce sujet.

Notons aussi que l'équation  $Y' = H(T)F(Y)$ ,  $Y(0) = Z$  [cf. (Le.-Vi. 3. 88)] admet comme solution l'espèce  $A_F(\int_0^T H(X)dX)$ , où  $A_F$  est l'espèce des arborescences croissantes  $F$ -enrichies, solution de l'équation différentielle  $Y' = F(Y)$ ,  $Y(0) = Z$ . Dans ce cas  $H$  est nécessairement une  $\mathbb{L}$ -espèce.

## 2.2 Opérateurs différentiels combinatoires

Le présent paragraphe a pour but d'étudier le lien entre les systèmes différentiels et les opérateurs différentiels combinatoires.

### 2.2.1 Généralités

**Définition 2.2.1** On appelle *opérateur différentiel combinatoire* tout opérateur  $\mathcal{D}$  défini sur la classe des espèces à  $k$  sortes ( $k \geq 1$ ), qui

(a) à chaque espèce  $F$ , associe une espèce  $\mathcal{D}(F)$ , tel que pour toutes espèces  $F$  et  $G$ ,

$$\mathcal{D}(F + G) \simeq \mathcal{D}(F) + \mathcal{D}(G) \text{ et } \mathcal{D}(F \cdot G) \simeq \mathcal{D}(F) \cdot G + F \cdot \mathcal{D}(G),$$

(b) à chaque morphisme  $\varphi : F \rightarrow G$ , associe un morphisme  $\mathcal{D}(\varphi) : \mathcal{D}(F) \rightarrow \mathcal{D}(G)$ , tel que pour tous morphismes  $\varphi : F \rightarrow G$ ,  $\psi : H \rightarrow K$ ,

$$\mathcal{D}(\varphi + \psi) = \mathcal{D}(\varphi) + \mathcal{D}(\psi), \quad \text{et } \mathcal{D}(\varphi \cdot \psi) = \mathcal{D}(\varphi) \cdot \psi + \varphi \cdot \mathcal{D}(\psi).$$

**Propriétés 2.2.2** Soit  $\mathcal{D}$  un opérateur différentiel combinatoire. Alors

- i)  $\mathcal{D}(1) = 0$ ,

ii) En posant  $\mathcal{D}^n = \mathcal{D} \circ \mathcal{D}^{n-1}$  et  $\mathcal{P}_i[n]$  l'ensemble des parties à  $i$  éléments de  $[n]$ , on a

$$\mathcal{D}^n(F_1 \cdot F_2) = \sum_{i=0}^n \mathcal{P}_i[n] \times (\mathcal{D}^i(F_1) \cdot \mathcal{D}^{n-i}(F_2)).$$

iii) Pour tout scalaire  $\alpha$ ,  $\mathcal{D}(\alpha F) = \alpha \mathcal{D}(F)$ . ■

À tout opérateur différentiel combinatoire  $\mathcal{D}$  est associé canoniquement l'opérateur différentiel  $|\mathcal{D}|$ , appellé *cardinal* de  $\mathcal{D}$  [cf.(Be. 85)], défini sur l'anneau des séries formelles  $\mathbb{A}[[z_1, z_2, \dots]]$ , et tel que pour toute espèce  $F$ , la série génératrice de  $\mathcal{D}(F)$  vérifie  $\mathcal{D}(F)(z_1, z_2, \dots) = |\mathcal{D}|(F(z_1, z_2, \dots))$ .

**Exemple 2.2.3 Opérateur de dérivation** L'opérateur de dérivation  $D = \frac{d}{dT}$  est défini au chapitre 1. Il permet d'associer à une espèce  $F$ , l'espèce dérivée  $D(F) = F'$ , et à tout isomorphisme  $\varphi$ , l'isomorphisme  $D(\varphi) = \varphi'$ . Rappelons qu'on a les isomorphismes  $D(F + G) \simeq D(F) + D(G)$ ,  $D(F \cdot G) \simeq D(F) \cdot G + F \cdot D(G)$ . De plus  $D(F)(x) = F'(x)$ .

**Exemple 2.2.4 Opérateur de pointage** C'est l'opérateur  $TD = T \frac{d}{dT}$ . Pour les  $\mathbb{B}$ -espèces, c'est l'opérateur de pointage usuel tel qu'il est défini dans [(Joy. 81) ou (B.L.L. 94) Chap.2].

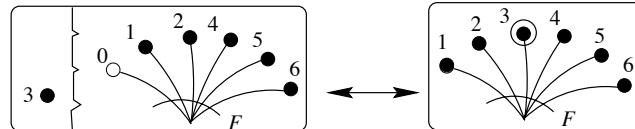


Figure 2.15: Une  $T \frac{d}{dT} F$ -structure

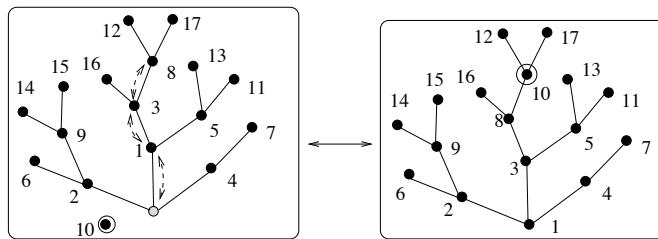


Figure 2.16: Pointage d'une arborescence croissante

Dans le cas des  $\mathbb{L}$ -espèces, pour avoir une  $T \frac{d}{dT}(F)$ -structure sur un ensemble totalement ordonné  $l$ , il faut choisir un élément particulier dans  $l$ , construire une  $F'$ -structure sur les éléments restants, et remplacer l'élément minimum provisoire par l'élément choisi. Dans ce contexte il faut retrouver la bonne position de cet élément, en remplaçant chaque élément  $i$  de  $\{0, 1, \dots, k-1\}$  par  $i+1$ , si l'élément pointé est  $k$ , comme le montre la figure 2.15.

Notons que pour le cas particulier des arborescences croissantes, la figure 2.16 illustre une autre façon de le faire. Ici l'élément pointé est 10. Il suffit

de repositionner 10 à partir de la racine en le comparant successivement au plus petit des fils de chacun des sommets considérés tant que la croissance de l'arborescence n'est pas brisée.

La même méthode s'applique aux arborescences binaires croissantes et aux arborescences binaires croissantes complètes. Notons que  $(T \frac{d}{dT}(F))(t) = tF'(t)$ .

**Exemple 2.2.5  $F$ -pointage:** Étant donnée une  $\mathbb{L}$ -espèce  $F$ , considérons l'opérateur  $F(T) \frac{d}{dT}$ . La construction d'une  $F(T) \frac{d}{dT}(G)$ -structure est similaire à celle du cas précédent. On construit une  $F$ -structure sur une partie  $b$  de l'ensemble considéré et une  $G'$ -structure sur la partie complémentaire. Si  $k$  est l'élément minimum de  $b$ , on remplace chaque élément  $i$  de  $\{0, 1, \dots, k-1\}$  par  $i+1$  comme le montre la figure 2.17. On a  $F(T) \frac{d}{dT}(G)(t) = F(t)G'(t)$ . ■

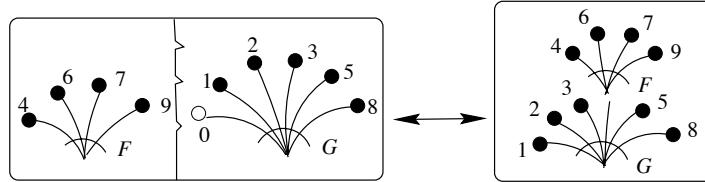


Figure 2.17: Un  $F \frac{d}{dT}(G)$ -structure

Au système différentiel  $\{\frac{\partial Y_i}{\partial T} = F_i(Y_1, \dots, Y_k), \quad Y_i(0, Z) = Z_i, \quad i = 1 \dots k\}$ , est canoniquement associé l'opérateur différentiel  $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^k F_i(Z_1, \dots, Z_k) \frac{\partial}{\partial Z_i}$ , qui à toute espèce à  $k$  sortes,  $G$ , associe  $\mathcal{D}(G) = \sum_{i=1}^k F_i(Z_1, \dots, Z_k) \frac{\partial G}{\partial Z_i}$ , et à tout morphisme,  $\varphi$ , associe  $\mathcal{D}(\varphi) = \sum_{i=1}^k F_i(Z_1, \dots, Z_k) \frac{\partial \varphi}{\partial Z_i}$ . Nous avons alors la proposition suivante.

**Proposition 2.2.6** Si  $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^k F_i(Z_1, \dots, Z_k) \frac{\partial}{\partial Z_i}$ , alors  $|\mathcal{D}| = \sum_{i=1}^k F_i(\vec{z}) \frac{\partial}{\partial z_i}$ , où  $F_i(\vec{z}) = F_i(z_1, z_2, \dots, z_n)$  est la série génératrice de  $F_i$ .

### Démonstration

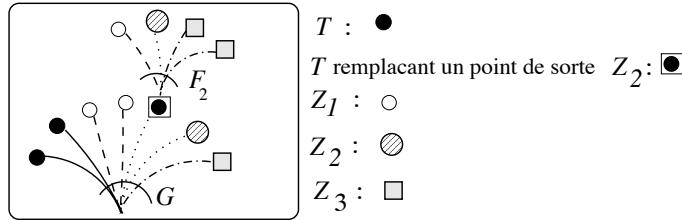
Remarquer que  $\mathcal{D}(G)(z_1, \dots, z_k) = \sum_{i=1}^k F_i(z_1, \dots, z_k) \frac{\partial}{\partial z_i} G(z_1, \dots, z_k)$ .

## 2.2.2 Opérateurs d'éclosion

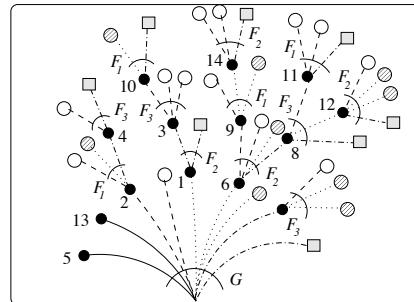
Cette section traite plus particulièrement des opérateurs différentiels combinatoires de la forme

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^k F_i(Z_1, \dots, Z_k) \frac{\partial}{\partial Z_i} \tag{2.24}$$

Étant donnée une espèce multisorte  $G = G(T, Z_1, Z_2, \dots, Z_k)$ , on définit une  $(T\mathcal{D})(G)$ -structure comme la structure obtenue en choisissant un point du sorte  $T$  et en appliquant  $\mathcal{D}$  à  $G$ , comme l'indique la figure 2.18. Ce qui revient à remplacer un point minimum (virtuel) de sorte  $Z_i$  de la  $G$ -structure par un point de sorte  $T$  suivi d'une  $F_i$ -structure. On dira que le point de sorte  $Z_i$  en question a subi une éclosion [cf. (LaG. 85)].



**Figure 2.18:** Une  $G$ -structure ayant subi une éclosion du type  $TF_2(\vec{Z})^{\frac{\partial}{\partial Z_2}}$ .



**Figure 2.19:** Une  $G$ -assemblée d'arborescences croissantes enrichies

Choisissons alors les éléments de sorte  $T$  dans un ensemble  $l$  tel que  $|l| = m = n+k$ . Supposons que la  $G$ -structure initiale contient les  $k$  éléments de sorte  $T$  d'une partie  $l_1$  de  $l$ , et considérons la structure obtenue après  $n$  itérations de l'opérateur  $(T\mathcal{D})$ . Parmi les  $n!$  ordres possibles d'apparition des éléments de  $l_2 = l \setminus l_1$  lors des éclosions successives, il en existe un et un seul qui coïncide avec l'ordre de  $l_2$ . Une division par  $n!$  revient à identifier toutes les  $n!$  structures à cette dernière. On obtient de cette façon une  $(\frac{T^n}{n!}\mathcal{D}^n)(G)$ -structure qui est une  $G$ -assemblée d'arborescences croissantes enrichies par les diverses espèces  $F_i$  (Fig. 2.19). Pour une explication plus détaillée, voir [(B.L.L. 94) ou (B.L.L. 98), Chapitre 5].

**Définition 2.2.7** L'opérateur  $e^{T\mathcal{D}} = \sum_{n \geq 0} \frac{T^n}{n!} \mathcal{D}^n$  est appellé *opérateur d'éclosions multiples* associé à  $\mathcal{D}$ . ■

Nous avons la proposition suivante dont la démonstration est donnée dans [(Le.-Vi. 1. 86), (B.L.L. 94), ou (B.L.L. 98)].

**Proposition 2.2.8** La solution  $Y = A_{\vec{F}} = (A_{\vec{F},1}, A_{\vec{F},2}, \dots, A_{\vec{F},k})$ , du système

$\{Y'_i = F_i(Y_1, \dots, Y_k); Y_i(0) = Z_i, 1 \leq i \leq k\}$ , vérifie

$$A_{\vec{F}} = (A_{\vec{F},1}, A_{\vec{F},2}, \dots, A_{\vec{F},k}) = (e^{T\mathcal{D}}(Z_1), e^{T\mathcal{D}}(Z_2), \dots, e^{T\mathcal{D}}(Z_k)). \quad (2.25)$$

Plus généralement, pour toute espèce  $G = G(Z_1, \dots, Z_k)$ ,

$$e^{T\mathcal{D}}(G(Z_1, \dots, Z_k)) = G(A_{\vec{F}}). \quad (2.26)$$

La donnée d'un système différentiel combinatoire est donc équivalente à la donnée d'un opérateur différentiel combinatoire.

**Proposition 2.2.9** Pour tous scalaires  $\alpha_1, \alpha_2$  et toutes espèces  $G_1, G_2$  on a

$$e^{T\mathcal{D}}(G_1 \cdot G_2) = e^{T\mathcal{D}}(G_1) \cdot e^{T\mathcal{D}}(G_2) \text{ et } e^{T\mathcal{D}}(\alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2) = \alpha_1 e^{T\mathcal{D}}(G_1) + \alpha_2 e^{T\mathcal{D}}(G_2).$$

**Démonstration** Ceci se voit en prenant  $G = G_1 \cdot G_2$  dans l'égalité  $e^{T\mathcal{D}}(G(Z)) = G(A_{\vec{F}})$ . La deuxième partie est évidente et se voit en prenant  $G = \alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2$  dans l'égalité  $e^{T\mathcal{D}}(G(Z)) = G(A_{\vec{F}})$ . ■

### 2.2.3 Sur les puissances d'un opérateur différentiel

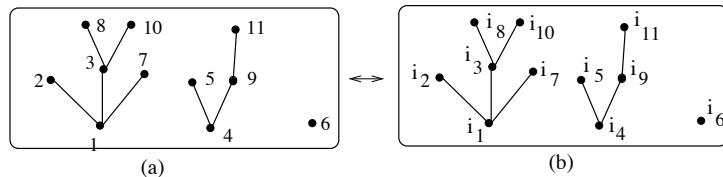
Le théorème 2.2.8 montre que la recherche des solutions combinatoires d'un système d'équations différentielles peut se faire par le calcul des puissances de l'opérateur différentiel associé. Le théorème de Ginocchio [(Gin. 94)] suivant, dont le cas  $n = 1$  a été démontré par F. Bergeron et C. Reutenauer dans [(Be-Re. 87)], nous donne une façon de les calculer.

**Notation.** Pour  $0 \leq r \leq n$ , soit  $\mu_r = (i_1, i_2, \dots, i_r)$  où  $i_j \in [n]$ . On définit  $\partial_{\mu_r} = \frac{\partial^r}{\partial Z_{i_1} \partial Z_{i_2} \cdots \partial Z_{i_r}}$ , et on pose  $F_i^{(\mu_r)} := \partial_{\mu_r} F_i$ .

Soit  $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^k F_i(Z_1, \dots, Z_k) \frac{\partial}{\partial Z_i}$  un opérateur différentiel. Considérons l'ensemble  $\mathcal{F}_n$  des forêts d'arborescences croissantes sur  $[n]$ , et  $\varphi \in \mathcal{F}_n$ . À chaque sommet  $m$  de  $\varphi$ , associons une variable entière  $i_m$  tel que  $1 \leq i_m \leq k$ , et la suite de variables entières  $\mu_{i_m} = (i_{m_1}, i_{m_2}, \dots, i_{m_r})$  où  $m_1, m_2, \dots, m_r$  sont les fils de  $m$  (si  $m$  est une feuille on pose  $\mu_{i_m} = (0)$ ). Le sommet  $m$  sera pondéré par  $F_{i_m}^{(\mu_{i_m})}$ . D'autre part, on pose  $\mu_0 = (i_1, i_{j_2}, \dots, i_{j_s})$  où  $\{1, j_2, \dots, j_s\}$  est l'ensemble des racines des arborescences de la forêt  $\varphi$ . Le poids de la forêt  $\varphi$  est, par définition,

$$\omega(\varphi) = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq k} \prod_{s=1}^n F_{i_s}^{(\mu_{i_s})} \partial_{\mu_0}.$$

Ainsi, en posant  $\mu_{i_1} = (i_2, i_3, i_7)$ ,  $\mu_{i_2} = (0)$ ,  $\mu_{i_3} = (i_8, i_{10}, \dots, i_{11}) = (0)$  et  $\mu_0 = (i_1, i_4, i_6)$ , nous avons  $\omega(\varphi) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{11} \leq k} F_{i_1}^{(\mu_{i_1})} F_{i_2}^{(\mu_{i_2})} \cdots F_{i_{11}}^{(\mu_{i_{11}})} \partial_{\mu_0}$ , pour la forêt  $\varphi$  de la figure 2.20.



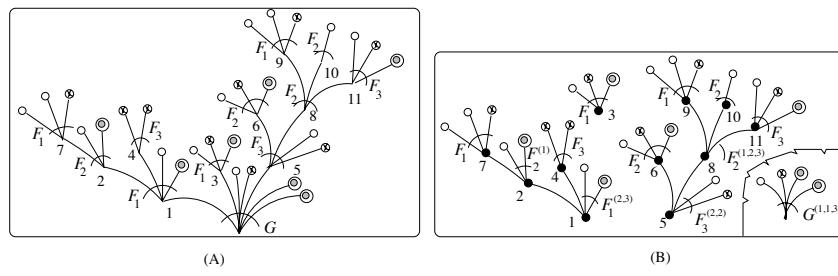
**Figure 2.20:** Pondération des forêts d’arborescences.

**Proposition 2.2.10** [(Gin. 94)] Soit  $\mathcal{F}_n$  l'ensemble de toutes les forêts d'arborescences sur  $[n]$ . Alors  $\mathcal{D}^n = \sum_{\varphi \in \mathcal{F}_n} \omega(\varphi)$ . En particulier si  $k = 1$  et  $\mathcal{D} = F(Z) \frac{d}{dz}$  alors  $\mathcal{D}^n = \sum_{\varphi \in \mathcal{F}_n} \omega(\varphi)$ , où  $\omega(\varphi) = \prod_{i \in [n]} F^{(\alpha(i))} d^m$ , où  $d = \frac{d}{dz}$ ,  $\alpha(i)$  est le nombre de fils du sommet  $i$ , et  $m$  est le nombre d'arborescences constituant la forêt  $\varphi$ .

**Démonstration** Par récurrence sur  $n$ . Supposons que  $\mathcal{D}^n = \sum_{\varphi \in \mathcal{F}_n} \omega(\varphi)$ .

Alors  $\mathcal{D}^{n+1} = \mathcal{D}(\mathcal{D}^n) = \mathcal{D}(\sum_{\varphi \in \mathcal{F}_n} \omega(\varphi)) = \sum_{\varphi \in \mathcal{F}_n} \mathcal{D}(\omega(\varphi))$ . Or une forêt  $\varphi'$  sur  $[n+1]$  est obtenue en prenant une forêt  $\varphi \in \mathcal{F}_n$ , et en plaçant le sommet  $n+1$  correspondant à  $i_{n+1}$ , soit sur un sommet  $k$ , ce qui revient à calculer  $F_{i_{n+1}} \frac{\partial}{\partial Z_{i_{n+1}}} (F_{i_k}^{(\mu_{i_k})})$ , soit en considérant  $n+1$  comme une nouvelle arborescence, ce qui revient à multiplier  $\omega(\varphi)$  par  $F_{i_{n+1}} \partial_{i_{n+1}}$  ce qui nous donnera  $F_{i_{n+1}} \prod_{j=1}^n F_{i_j}^{(\mu_{i_j})} \partial_{\mu'_0}$  où  $\mu'_0 = (\mu_0, i_{n+1})$ . On en déduit, en sommant, que  $\sum_{\varphi \in \mathcal{F}_n} \mathcal{D}(\omega(\varphi)) = \sum_{\varphi \in \mathcal{F}_{n+1}} \omega(\varphi)$ .

Une autre façon de montrer ce résultat est de remarquer que pour tout espace  $G$ , une  $D^n(G)$ -structure (Fig. 2.21(A)) s'identifie canoniquement à un couple formé d'une assemblée d'arborescences dont les sommets sont pondérées par des  $F_i^{(\mu_i)}$ -structures, et d'une  $G^{(\mu_0)}$ -structure (Fig. 2.21(B)).



**Figure 2.21:** Une  $D^{11}(G)$ -srtucture.

### 2.3 Lien avec les grammaires algébriques

Dans [(Ch. 91)], Chen utilise les grammaires formelles pour étudier des problèmes d'énumération. Cette idée a été reprise par Dumont [cf. par exemple (Dum. 96)] et par nous-même dans notre mémoire de D.E.A [cf. (Ran. 93)].

Dans cette section nous allons établir le lien entre grammaire algébrique et opérateur différentiel. Rappelons la définition de grammaire formelle.

**Définition 2.3.1** [G. Lallement (Lal. 79)] Une *grammaire formelle* est un triplet  $\Gamma = (V, A, \pi)$ , où  $V$  est un ensemble fini de lettres,  $A \subset V$  et  $\pi \subset (V \setminus A)^+ \times V^*$ , où  $V^*$  est le monoïde libre engendré par  $V$  et  $(V \setminus A)^+ = (V \setminus A)^* \setminus \{1\}$ . Si  $(u, v) \in \pi$ , alors on note  $u \rightarrow v$ . Une grammaire formelle  $\Gamma$  est *algébrique* (context free) si pour tout  $(u, v) \in \pi$ , on a  $u \in V \setminus A$ , c'est-à-dire que  $u$  est une lettre de  $V \setminus A$ . ■

Notons que cette notion est essentiellement non commutative. Chen l'applique dans un contexte commutatif. Dans le cadre de ce travail, au lieu de considérer  $V^*$ , considérons l'ensemble  $\mathbb{A}[[V]]$  des séries formelles à coefficients dans un anneau commutatif unitaire intègre  $\mathbb{A}$  de caractéristique 0. En d'autres termes, une *grammaire sur  $V$*  est une application  $G : V_0 \rightarrow \mathbb{A}[[V]]$ ,  $V$  étant un alphabet, possiblement infini, de variables formelles qui commutent deux à deux, et  $V_0$  une partie non vide de  $V$ . ■

Supposons que  $V_0 = \{X_1, \dots, X_n\}$ . Alors à la grammaire  $G$ , nous pouvons associer l'opérateur différentiel  $\mathcal{G}$ , défini par  $\mathcal{G} = \sum_{i=1}^n G(X_i) \frac{\partial}{\partial X_i}$  et vérifiant  $\mathcal{G}(X_i) = G(X_i)$ . De plus, soient  $t$  une variable formelle n'appartenant pas à  $V$ , et  $u \in \mathbb{A}[[V]]$ . Posons

$$\text{Gen}(u, t) = \sum_{n \geq 0} \mathcal{G}^n(u) \frac{t^n}{n!} \in \mathbb{A}[[V, t]].$$

**Proposition 2.3.2** [(Ch. 91)prop. 3.2 et 3.4] Pour tout couple de  $(u, v) \in \mathbb{A}[[V]]^2$  nous avons:

$$\text{Gen}(u + v, t) = \text{Gen}(u, t) + \text{Gen}(v, t), \quad \text{Gen}(uv, t) = \text{Gen}(u, t)\text{Gen}(v, t),$$

$$\text{Gen}(\mathcal{G}(u), t) = \frac{\partial}{\partial t} \text{Gen}(u, t).$$

**Remarque 2.3.3** Supposons que  $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$  et que  $V$  est un alphabet représentant des sortes de points. Dans ce cas, un élément  $u \in \mathbb{Z}[[V]]$ , en particulier  $G(X_i)$ , se relève en une  $\mathbb{B}$ -espèce asymétrique, et l'opérateur  $\mathcal{G}$  est un opérateur différentiel combinatoire tel que  $\text{Gen}(u, T) = e^{T\mathcal{G}}(u)$ . Dans ce sens, une grammaire s'identifie à un opérateur différentiel combinatoire. ■

**Remarque 2.3.4** Chen, et par la suite Dumont, considèrent les variables comme des compteurs. Le passage du niveau  $n$  au niveau  $n + 1$ , pour une structure donnée, s'interprète en terme de grammaires sur ces variables, comme on le verra dans les exemples 2.3.7 et 2.3.8 ci-dessous. ■

Dans cette optique, soit  $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  une famille de variables formelles, et pour  $i = 1 \dots n$ , soit  $G_i(\vec{x}) \in \mathbb{C}[[\vec{x}]]$ . Notons  $\mathcal{G} = \sum_{i=1}^n G_i(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}$  l'opérateur différentiel associé à la grammaire définie sur l'alphabet  $\vec{x}$ , par  $G : x_i \rightarrow G_i(\vec{x})$ .

**Proposition 2.3.5** Soit  $\vec{y}(t) = (y_i(t))_{i=1\dots n}$  la solution du système différentiel analytique

$$y'_i = G_i(\vec{y}(t)), \quad y_i(0) = x_i, \quad i = 1 \dots n.$$

Alors pour chaque  $i$ ,  $\text{Gen}(x_i, t) = y_i(t)$ .

**Démonstration** Soit  $h_i(t) = \text{Gen}(x_i, t) = \sum_{n \geq 0} \mathcal{G}^n(x_i) \frac{t^n}{n!}$ ,  $\vec{h}(t) = (h_i(t))_{i=1\dots n}$ .

Il est clair que  $h_i(0) = x_i$ . D'autre part, la proposition 2.3.2 montre que

$$h'_i(t) = \frac{\partial}{\partial t}(\text{Gen}(x_i, t)) = \text{Gen}(\mathcal{G}(x_i), t) = \text{Gen}(G_i(\vec{x}), t) = G_i((\text{Gen}(x_i, t))_{i \in I}) = G_i(\vec{h}(t)). \blacksquare$$

Soit maintenant  $\vec{X} = \{X_i, i = 1 \dots n\}$  un alphabet de variables représentant des sortes de points. À chaque  $X_i$ , associons une variable formelle  $x_i$  qui sera un compteur de sortes de points, et soit  $(G_i(\vec{X}))_{i=1\dots n}$  une famille de  $\mathbb{B}$ -espèces asymétriques, telle que pour chaque  $i$  la série génératrice de  $G_i$  est  $G_i(\vec{x})$  où  $\vec{x} = (x_i)_{i=1\dots n}$ . De plus, considérons l'opérateur différentiel combinatoire  $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^n G_i(\vec{X}) \frac{\partial}{\partial X_i}$  ainsi que l'opérateur différentiel analytique  $\mathcal{G} = \sum_{i \in I} G_i(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}$ , associé à la grammaire  $G : x_i \rightarrow G_i(\vec{x})$ .

**Théorème 2.3.6** Nous avons

1.  $|\mathcal{D}| = \mathcal{G}$ ,
2.  $T_{\vec{X}:\vec{x}}(e^{T\mathcal{D}} X_i)(t) = \text{Gen}(x_i, t)$ , où  $\vec{X} : \vec{x}$  signifie  $X_i : x_i$  pour chaque  $i$ .

En d'autres termes, étant donnée des espèces asymétriques  $(G_i)_{i=1\dots n}$ , les données suivantes sont équivalentes:

i) La donnée du système différentiel combinatoire:

$$Y'_i = G_i(\vec{Y}), \quad Y_i(0) = X_i, \quad i = 1 \dots n,$$

ii) La donnée de l'opérateur différentiel combinatoire

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^n G_i(\vec{X}) \frac{\partial}{\partial X_i},$$

iii) La donnée de la grammaire

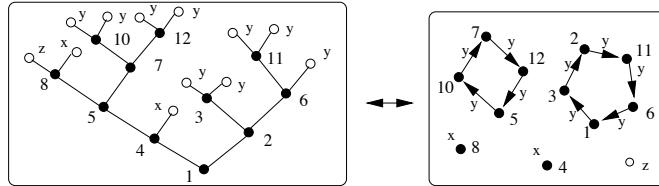
$$G : x_i \rightarrow G_i(\vec{x}), \quad i = 1 \dots n,$$

iv) La donnée du système différentiel analytique

$$y'_i(t) = G_i(\vec{y}(t)), \quad y_i(0) = x_i, \quad i = 1 \dots n.$$

**Démonstration** Notons d'abord que si  $F$  est une  $\mathbb{B}$ -espèce asymétrique, alors  $Z_F(x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots; \dots; z_1, z_2, \dots) = F(x_1, y_1, \dots, z_1)$ . La partie 1 est alors une reformulation du premier point de la proposition 2.2.6. Tandis que la partie 2 est une conséquence des propositions 2.1.16, 2.2.8, 2.2.9 et 2.3.5. Les solutions combinatoires de i) sont  $\vec{Y} = (e^{T\mathcal{D}}(X_i))_{i \in I}$  et les fonctions génératrices sont les solutions  $\vec{y}(t) = (y_i(t))_{i \in I}$  de iv).

**Exemple 2.3.7** [cf. (Ran. 93)] **Dénombrement des permutations suivant le nombre de points fixes.** Rappelons que pour passer de  $\mathcal{S}_n$  à  $\mathcal{S}_{n+1}$  il suffit de considérer une permutation  $\sigma$  et de placer  $n+1$  sur une arête de son graphe sagittal, ou bien de considérer  $n+1$  comme un point fixe. On aura une permutation  $\sigma'$  de  $\mathcal{S}_{n+1}$ . Réciproquement, si on a une permutation  $\sigma'$  de  $\mathcal{S}_{n+1}$ , on restreint  $\sigma'$  en une permutation  $\sigma$  de  $\mathcal{S}_n$  en éliminant  $n+1$  de son cycle. Soit donc  $x$ ,  $y$  et  $z$  des variables formelles énumérant respectivement les points fixes, les arêtes  $(i, \sigma(i))$  avec  $\sigma(i) \neq i$ , et une arête supplémentaire  $\emptyset$ . Pour passer de  $\mathcal{S}_n$  à  $\mathcal{S}_{n+1}$  il suffit de placer  $n+1$  sur une arête. Si cette arête est une boucle (arête du type  $x$ ), on la remplace par deux arêtes du type  $y$ , si c'est une arête du type  $y$  on la remplace par deux arêtes du type  $y$ , s'il s'agit de l'arête du type  $z$  on doit la remplacer par une arête du type  $x$  (boucle) et une arête du type  $z$  ( $\emptyset$ ). On obtient la grammaire  $\{x \rightarrow y^2, y \rightarrow y^2, z \rightarrow xz\}$  qui n'est autre que la grammaire associée au système différentiel combinatoire  $\{U' = V' = V^2, W' = UW, U(0) = X, V(0) = Y, W(0) = Z\}$ .



**Figure 2.22:** Dénombrement des permutations suivant le nombre de points fixes

La figure 2.22 nous donne un exemple de  $W$ -structure. On en déduit d'une part que  $\mathcal{G}^n(z) = z \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x^{\text{fix}(\sigma)} y^{n-\text{fix}(\sigma)}$ , et d'autre part que

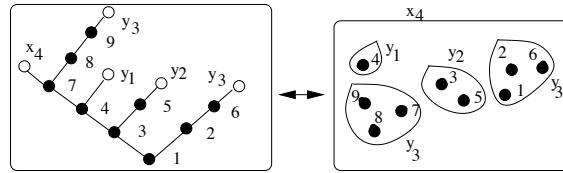
$$W(x, y, z, t) = \text{Gen}(z, t) = z \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x^{\text{fix}(\sigma)} y^{n-\text{fix}(\sigma)} \right) \frac{t^n}{n!} = z \frac{\exp(x-y)t}{1-yt}, \quad (2.27)$$

en résolvant le système analytique  $\{u' = v' = v^2, w' = uw, u(0) = x, v(0) = y, w(0) = z\}$ .

Remarquons aussi qu'on a l'isomorphisme  $W \simeq zE_x \cdot D_y$ , où  $E_x$  est l'espèce des ensembles dont chaque élément est pondéré par  $x$ , et  $D_y$  est l'espèce des permutations sans points fixes ou *dérangements* dont chaque point est pondéré par  $y$ , ce qui permet de retrouver (2.27). ■

**Exemple 2.3.8** [cf. (Ch. 91)] **Dénombrement des partitions suivant le nombre de blocs.** Étant donnée une partition  $\pi$ , chaque bloc  $b$  de cardinal  $i$  sera pondéré par  $y_i$ . On note  $\alpha_i(\pi)$  est le nombre de blocs de cardinal  $i$  dans  $\pi$ , et on pose  $v(\pi) = x_{|\pi|} \prod_{i \in \mathbb{N}} y_i^{\alpha_i(\pi)}$ . Si  $\pi'$  est une partition de  $[n+1]$ , on obtient une partition  $\pi$  de  $[n]$  en éliminant  $n+1$  de son bloc. Réciproquement, si  $\pi$

est une partition de  $[n]$ , on peut prolonger  $\pi$  en une partition  $\pi'$  de  $[n+1]$ , soit en plaçant  $n+1$  dans un bloc de cardinal  $k \geq 1$ , soit en considérant  $\{n+1\}$  comme un bloc à part de cardinal 1. Dans le premier cas en remplaçant  $y_k$  par  $y_{k+1}$  dans  $v(\pi)$ , on obtient  $v(\pi')$ , et dans le second cas il faut remplacer  $x_k$  par  $x_{k+1}y_1$ . Nous obtenons donc la grammaire infinie  $G$  définie sur  $\{x_i, y_{i+1}, i \in \mathbb{N}\}$  par  $\{x_i \rightarrow x_{i+1}y_1, y_i \rightarrow y_{i+1}, i \in \mathbb{N}\}$ . La figure 2.23 (a) nous donne un exemple d'arborescence croissante appartenant à la solution du système différentiel combinatoire associé.



**Figure 2.23:** Dénombrement des partitions suivant le nombre de blocs

**Proposition 2.3.9** [(Ch. 91)] *Étant donnée la grammaire  $G: \{x_i \rightarrow x_{i+1}y_1, y_i \rightarrow y_{i+1}, i \in \mathbb{N}\}$ , on a*

$$\mathcal{G}^n(x_0) = \sum_{k=1}^n x_k B_{nk}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

où les  $B_{nk}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sont les polynômes de Bell. ■

## 2.4 Applications aux espèces trigonométriques, elliptiques et hyperelliptiques

Nous considérons le système

$$Y'_i = a_i Y_1 \cdots Y_{i-1} Y_{i+1} \cdots Y_k; \quad Y_i(0) = Z_i, \quad 1 \leq i \leq k, \quad (2.28)$$

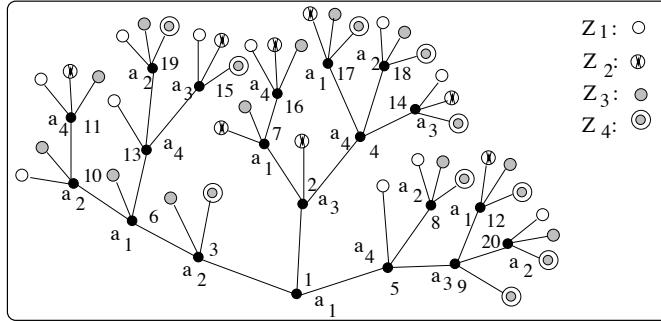
où  $k \geq 2$  est un entier fixé.

### 2.4.1 Généralités.

La solution canonique du système (2.28) est donné par des arborescences  $k$ -1-aires croissantes pondérées,  $(A_{k,i})_{1 \leq i \leq k}$ , telles que la racine de  $A_{k,i}$ , pondérée par  $a_i$ , est de couleur  $i$ . La figure 2.24 est un exemple de  $A_{4,1}$ -structure.

**Définition 2.4.1** Pour un entier  $k \geq 2$  donné, le  $k$ -uplet  $\mathcal{A}^{(k)} = (\mathcal{A}_{k,i})_{1 \leq i \leq k}$ , solution du système 2.28, est appellé *famille d'espèces hyperelliptiques d'ordre  $k$* ,  $\mathcal{A}_{k,i}$  étant la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $\mathcal{A}^{(k)}$ . Les espèces hyperelliptiques d'ordre 2 sont appellées *espèces trigonométriques*, les espèces hyperelliptiques d'ordre 3 sont les *espèces elliptiques de Jacobi*. ■

Notons que si  $k = 3$ , les coefficients  $P_{n,i}^{(3)}(z_1, z_2, z_3)$ , de  $T_{Z_i:z_i} \mathcal{A}_{3,i}(t; z_1, z_2, z_3)$  sont les polynômes de Schett initialisées en  $z_i$  [cf.(Sch. 76) et (Sch. 77)]. De

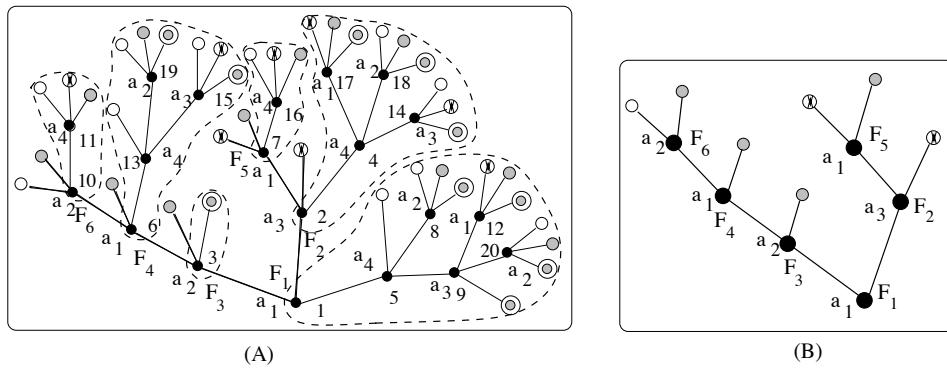


**Figure 2.24:** Une arborescence hyperelliptique d'ordre 4.

plus en posant  $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = -k^2, Z_1 = 0$  et  $Z_2 = Z_3 = 1$  dans (2.28) on obtient les arborescences de Jacobi qui interprètent combinatoirement les fonctions elliptiques de Jacobi [cf. (Vi.1 80)]. Notons aussi que le cas où  $k = 4$  a été étudié par D. Dumont dans [(Dum. 80)]. ■

**Définition 2.4.2** Soit  $\mathcal{A}^{(k)} = (\mathcal{A}_{k,i}), 1 \leq i \leq k$ , la famille d'espèces hyperelliptiques d'ordre  $k$ , et posons  $\vec{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_k)$ . L'intégrale  $\text{Am}_k(T, \vec{Z}) = \int_0^T \mathcal{A}_{k,k}(X, \vec{Z}) dX$  est appellée *amplitude* de  $\mathcal{A}^{(k)}$  ou *amplitude d'ordre*  $k$ .

**Proposition 2.4.3** Pour  $1 \leq i \leq k-1$ , on a  $\mathcal{A}_{k,i}(T, \vec{Z}) = \mathcal{A}_{k-1,i}(\text{Am}_k(T, \vec{Z}), \vec{Z})$ .

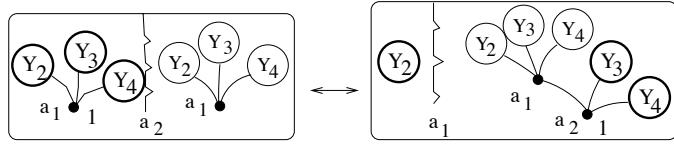


**Figure 2.25:** Décomposition d'une  $\mathcal{A}_{4,1}$ -structure en  $\mathcal{A}_{3,1}(\text{Am}_4(T, \vec{Z}), \vec{Z})$ -structures.

**Démonstration** La figure 2.25(A) nous montre, pour  $k = 4$ , la façon de décomposer une arborescence  $\mathcal{A}_{k,i}$ . Chaque  $F_j$  est alors une  $\text{Am}_k$  structure. La figure 2.25(B) est la  $\mathcal{A}_{k-1,i}$ -structure sur les  $F_i$ , associée à cette arborescence. ■

**Proposition 2.4.4** Étant donné  $k$ , alors pour  $i \neq j$ ,  $a_i Z_j^2 + a_j \mathcal{A}_{k,i}^2 \simeq a_j Z_i^2 + a_i \mathcal{A}_{k,j}^2$ .

**Démonstration** La figure 2.26, où  $k = 4, i = 1, j = 2$ , décrit l'isomorphisme.



**Figure 2.26:** L'isomorphisme  $a_1 Z_2^2 + a_2 \mathcal{A}_{4,1}^2 \simeq a_2 Z_1^2 + a_2 \mathcal{A}_{4,2}^2$

**Corollaire 2.4.5** Pour  $k \geq 2$ , l'amplitude  $\text{Am}_k$  d'ordre  $k$ , est solution de l'équation différentielle:

$$a_k Z_1^2 + a_1 \left( \frac{\partial Y}{\partial T} \right)^2 = a_1 Z_k^2 + a_k \mathcal{A}_{k-1,1}^2(Y); \quad Y(0, Z) = 0 \quad (2.29)$$

**Démonstration** Nous avons  $a_k Z_1^2 + a_1 \mathcal{A}_{k,k}^2 \simeq a_1 Z_k^2 + a_k \mathcal{A}_{k,1}^2$ . D'autre part,  $\mathcal{A}_{k,1}(T, Z) = \mathcal{A}_{k-1,1}(\text{Am}_k(T, Z), Z)$  (Prop. 2.4.3). De plus, en posant  $Y = \text{Am}_k(T, \vec{Z})$ , nous avons  $\frac{\partial Y}{\partial T} = \mathcal{A}_{k,k}(T, \vec{Z})$ , par définition. D'où le résultat. ■

## 2.4.2 Aspects analytiques

Comme nous l'avons vu dans les deux sections précédentes, les fonctions génératrices de ces structures peuvent être obtenues en résolvant le système différentiel

$$y'_i = a_i y_1 \cdots y_{i-1} y_{i+1} \cdots y_k, \quad y_i(0) = z_i, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (2.30)$$

Mais on peut aussi les calculer d'une autre façon. Notons d'abord que si on connaît par exemple  $\mathcal{A}_{k,1}(t, \vec{z})$ , par raison de symétrie on aura tous les  $\mathcal{A}_{k,i}(t, \vec{z})$ .

**Proposition 2.4.6** Soit  $\Psi(u) = a_1^{\frac{k-3}{2}} \int_0^u \frac{dv}{(\prod_{i=2}^k (\omega_{i,1}^2 + a_i v^2)^{\frac{1}{2}})}$ , et posons  $\Psi^{<-1>}$  l'inverse de  $\Psi$  sous l'opération de substitution. Nous avons

$$\mathcal{A}_{k,1}(t, \vec{z}) = \Psi^{<-1>} (t + \Psi(z_1)).$$

**Démonstration** La proposition 2.4.4 montre que pour tout  $i$ ,  $a_1 \mathcal{A}_{k,i}^2(t, \vec{z}) = \omega_{i,1}^2 + a_i \mathcal{A}_{k,1}^2(t, \vec{z})$ , où  $\omega_{i,1}^2 = a_j z_i^2 - a_i z_j^2$ . On en déduit que

$$a_1^{k-1} \prod_{i=2}^k \mathcal{A}_{k,i}^2(t, \vec{z}) = \prod_{i=2}^k (\omega_{i,1}^2 + a_i \mathcal{A}_{k,1}^2(t, \vec{z})).$$

Comme  $(\mathcal{A}_{k,i}(t, \vec{z}))$  sont solution de (2.30), alors  $(\mathcal{A}'_{k,1})^2(t, \vec{z}) = \frac{1}{a_1^{\frac{1}{k-3}}} \prod_{i=2}^k (\omega_{i,1}^2 + a_i \mathcal{A}_{k,1}^2(t, \vec{z}))$ , c'est-à-dire que  $a_1^{\frac{k-3}{2}} \int_0^t \frac{\mathcal{A}'_{k,1}(u) du}{\prod_{i=2}^k (\omega_{i,1}^2 + a_i \mathcal{A}_{k,1}^2(u))^{\frac{1}{2}}} = t + c$ . Donc  $a_1^{\frac{k-3}{2}} \int_0^{\mathcal{A}_{k,1}(t, \vec{z})} \frac{du}{\prod_{i=2}^k (\omega_{i,1}^2 + a_i u^2)^{\frac{1}{2}}} = t + c$ . Posons  $\Psi(u) = a_1^{\frac{k-3}{2}} \int_0^u \frac{dv}{(\prod_{i=2}^k (\omega_{i,1}^2 + a_i v^2)^{\frac{1}{2}})}$ , alors  $\Psi(\mathcal{A}_{k,1}(t, \vec{z})) = t + c$ . En particulier  $\Psi(\mathcal{A}_{k,1}(0, \vec{z})) = \Psi(z_1) = c$ . ■

**Remarque 2.4.7** Les espèces hyperelliptiques sont donc liées aux intégrales hyperelliptiques.

### 2.4.3 Notes sur les formules d'additions

Un problème ouvert concernant les espèces hyperelliptiques est l'existence d'une formule d'addition. À titre d'exemple, nous démontrons une formule d'addition pour les espèces trigonométriques (Prop 2.4.9). Dans le cas des espèces elliptiques, on connaît les formules d'addition pour les fonctions elliptiques de Jacobi ( $z_1 = 0$ ), mais on ne sait pas les démontrer combinatoirement. Si  $X = A_{2,1}, Y = A_{2,2}, Z = A_{2,3}, a = a_1, b = a_2$  et  $c = a_3$ , alors cette formule s'écrit

$$\begin{aligned} & a^2 z_2^2 z_3^2 X(u+v) \\ &= a^2 z_2 z_3 X(u)Y(v)Z(v) + a^2 z_2 z_3 X(v)Y(u)Z(u) + bcX^2(u)X^2(v)X(u+v), \end{aligned}$$

ou, d'une manière équivalente [cf. (Dum. 80)],

$$X(u+v) = \frac{\frac{1}{z_2 z_3} X(u)Y(v)Z(v) + \frac{1}{z_2 z_3} X(v)Y(u)Z(u)}{1 - \frac{bc}{a^2 z_2^2 z_3^2} X^2(u)X^2(v)}.$$

Notons cependant que dans [(Lo. 85)], A. Longtin donne une démonstration combinatoire des formules d'addition des fonctions tangente et sécante, qui sont des spécialisations des fonctions elliptiques de Jacobi sn et cn. ■

Considérons donc les espèces trigonométriques, solutions du système

$$\begin{aligned} Y'_1 &= a_1 Y_2, & Y_1(0) &= Z_1, \\ Y'_2 &= a_2 Y_1, & Y_2(0) &= Z_2. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Deux exemples de structures trigonométriques du type  $Y_1$  sont données par la figure 2.27.

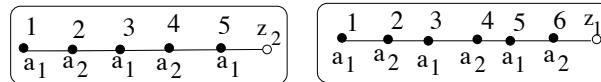


Figure 2.27: Espèces trigonométriques

Une  $Y_2$ -structure s'obtient de la même façon, en échangeant les rôles de  $a_1$  et  $a_2$ , et de  $z_1$  et  $z_2$ .

**Remarque 2.4.8** Les séries génératrices s'écrivent  $Y_1(t) = \frac{1}{2\alpha}[(z_1\alpha + a_1 z_2)e^{\alpha t} + (z_1\alpha - a_1 z_2)e^{-\alpha t}]$  et  $Y_2(t) = \frac{1}{2\alpha}[(z_2\alpha + a_2 z_1)e^{\alpha t} + (z_2\alpha - a_2 z_1)e^{-\alpha t}]$  où  $\alpha = \sqrt{a_1 a_2}$ . En prenant  $a_1 = 1, a_2 = -1, z_1 = 0$  et  $z_2 = 1$  on aura  $Y_1(t) = \frac{1}{2i}[e^{it} - e^{-it}] = \sin t$  et  $Y_2 = \frac{1}{2i}[ie^{it} + ie^{-it}] = \text{cost}$ . Dans ce cas  $Y_1$  (resp.  $Y_2$ ) est l'espèce des ensembles ordonnés de cardinal impair (resp. pair) et dont les termes de rang pair (resp. impair) sont pondérés par  $-1$ . En prenant  $a_1 = a_2 = 1, z_1 = 0$  et

$z_2 = 1$  on aura  $Y_1(t) = \frac{1}{2}[e^t - e^{-t}] = \sinh t$  et  $Y_2 = \frac{1}{2}[e^t + e^{-t}] = \cosh t$ . Dans ce cas  $Y_1$  (resp.  $Y_2$ ) est l'espèce des ensembles ordonnés de cardinal impair (resp. pair).

**Proposition 2.4.9** *Formule d'addition pour les espèces trigonométriques.*

Nous avons les deux isomorphismes suivants:

$$\begin{aligned} a_2 z_1^2 Y_1(T_1 + T_2) + a_1 z_2 [Y_1(T_1)Y_2(T_2) + Y_2(T_1)Y_1(T_2)] \\ \simeq a_1 z_2^2 Y_1(T_1 + T_2) + z_1 [a_2 Y_1(T_1)Y_1(T_2) + a_1 Y_2(T_1)Y_2(T_2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 z_1^2 Y_2(T_1 + T_2) + z_2 [a_2 Y_1(T_1)Y_1(T_2) + a_1 Y_2(T_1)Y_2(T_2)] \\ \simeq a_1 z_2^2 Y_2(T_1 + T_2) + a_2 z_1 [Y_1(T_1)Y_2(T_2) + Y_2(T_1)Y_1(T_2)]. \end{aligned}$$

**Démonstration** Considérons par exemple le cas du premier isomorphisme (Figure 2.28).

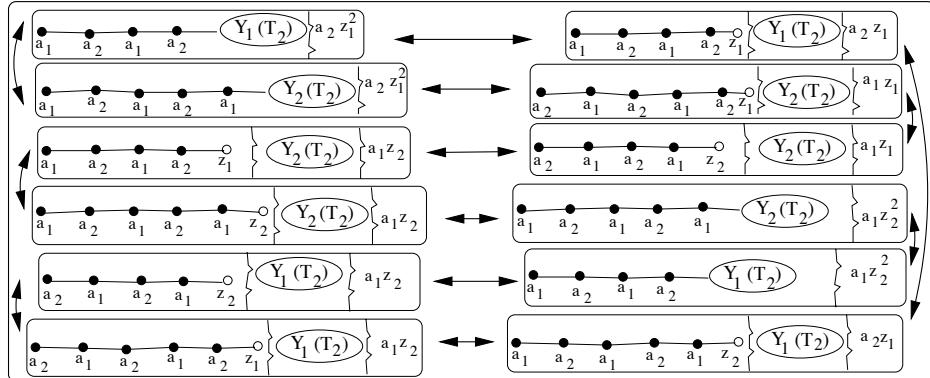


Figure 2.28: Formules d'addition des espèces trigonométriques

Soient  $l_1$  et  $l_2$  deux ensembles ordonnés. Si  $|l_1|$  est pair alors,

- une  $a_2 z_1^2 Y_1(T_1+T_2)$ -structure sur  $l_1 +_o l_2$  est transformée en une  $a_1 z_1 Y_1(T_1)Y_1(T_2)$ -structure,
- une  $a_1 z_2 Y_1(T_1)Y_2(T_2)$ -structure sur  $l_1 +_o l_2$  en une  $a_1 z_1 Y_2(T_1)Y_2(T_2)$ -structure,
- et une  $a_1 z_2 Y_2(T_1)Y_1(T_2)$ -structure sur  $l_1 +_o l_2$  en une  $a_1 z_2^2 Y_1(T_1+T_2)$ -structure.

Si  $|l_1|$  est impair alors,

- une  $a_2 z_1^2 Y_1(T_1+T_2)$ -structure sur  $l_1 +_o l_2$  est transformée en une  $a_1 z_1 Y_2(T_1)Y_2(T_2)$ -structure,

- une  $a_1 z_2 Y_1(T_1)Y_2(T_2)$ -structure sur  $l_1 +_o l_2$  en une  $a_1 z_2^2 Y_1(T_1 + T_2)$ -structure,
- et une  $a_1 z_2 Y_2(T_1)Y_1(T_2)$ -structure sur  $l_1 +_o l_2$  en une  $a_2 z_1 Y_1(T_1)Y_1(T_2)$ -structure.

**Remarque 2.4.10** En posant  $\omega = a_2 z_1^2 - a_1 z_2^2$ , les isomorphismes précédents montrent que

$$\omega Y_2(t_1 + t_2) = a_2 z_1 [Y_1(t_1)Y_2(t_2) + Y_2(t_1)Y_1(t_2)] - z_2 [a_2 Y_1(t_1)Y_1(t_2) + a_1 Y_2(t_1)Y_2(t_2)]$$

$$\omega Y_1(t_1 + t_2) = z_1 [a_2 Y_1(t_1)Y_1(t_2) + a_1 Y_2(t_1)Y_2(t_2)] - a_1 z_2 [Y_1(t_1)Y_2(t_2) + Y_2(t_1)Y_1(t_2)].$$

On en déduit que  $z_2 Y_1(t_1 + t_2) + z_1 Y_2(t_1 + t_2) = Y_1(t_1)Y_2(t_2) + Y_2(t_1)Y_1(t_2)$  et  $a_2 z_1 Y_1(t_1 + t_2) + a_1 z_2 Y_2(t_1 + t_2) = z_2 Y_1(t_1)Y_1(t_2) + z_1 Y_2(t_1)Y_2(t_2)$ , identités qui contiennent les formules d'additions classiques pour les fonctions  $\cos(t)$ ,  $\cosh(t)$ ,  $\sin(t)$  et  $\sinh(t)$ . ■

## CHAPITRE III

# HISTORIOGRAPHES ET SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

La notion d'*historiographe* a été introduite par G.X. Viennot [cf.(Vi.2 80)] pour analyser les solutions combinatoires des systèmes d'équations différentielles et en particulier pour étudier les fonctions elliptiques de Jacobi. Nous montrons comment les historiographes *additifs* sont liés aux systèmes différentiels. Nous appliquons l'aspect grammatical associé à ces problèmes pour obtenir des résultats intéressants. C'est le cas de la méthode du *développement-compression*, pour engendrer des suites, que nous introduisons à la fin de ce chapitre.

### 3.1 Généralités sur les Historiographes

**Définition 3.1.1** [cf.(Vi.2 80)] Un *historiographe* est un triplet  $\mathcal{H} = (k, \mathcal{A}, p)$  où

- $k$  est un entier naturel supérieur à 1,
- $\mathcal{A}$  est un ensemble fini d'applications  $A : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^k$ , appelées *opérations primitives*.
- $p : \mathcal{A} \times \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  est une application, appelée *fonction de possibilités*.

Les éléments de  $\mathbb{N}^k$  sont appelés les *états* et l'ensemble  $D(A) = \{u \in \mathbb{N}^k \mid p(A, u) \neq 0\}$  est le *domaine* de l'opération primitive  $A$ . ■

Le nombre entier  $p(A, u)$  est le nombre de façons de passer de l'état  $u$  à l'état  $v = A(u)$  en utilisant l'opération  $A$ . De plus, ces choix peuvent être numérotés de 1 à  $p(A, u)$ . Ils s'identifient donc à l'ensemble totalement ordonné  $P(A, u) = \{1, 2, \dots, p(A, u)\}$  que nous appellons *ensemble des possibilités*. Notons que si  $u \notin D(A)$  alors  $p(A, u) = 0$  et  $P(A, u) = \emptyset$ .

**Définition 3.1.2** Étant donnée une suite d'états  $u = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ ,  $u_0$  est dit l'état *initial* de  $u$  et  $u_n$  l'état *final*. ■

Soient  $\omega = \omega_1 \cdots \omega_n \in \mathcal{A}^*$  et  $u_0 \in \mathbb{N}^k$ . En posant  $u_i = \omega_i(u_{i-1})$  on peut passer de l'état initial  $u_0$  à un état final  $u_n$  en utilisant le chemin  $c(\omega) = u_0 \xrightarrow{\omega_1} u_1 \xrightarrow{\omega_2} u_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{\omega_n} u_n$ . Le nombre de façon de le faire,  $p(\omega) = \prod_{i=1}^n p(\omega_i, u_{i-1})$ , est non nul si et seulement si pour tout  $i$ ,  $u_{i-1} \in D(\omega_i)$ .

**Définition 3.1.3** Un *historiographe initialisé* est un couple  $(\mathcal{H}, u_0)$  où  $\mathcal{H}$  est un historiographe et  $u_0$  un état initial fixé. Une *histoire*  $h$  de taille  $|h| = n$  de  $(\mathcal{H}, u_0)$  est alors la donnée d'une suite  $h = (\omega, m_1, m_2, \dots, m_n)$  où  $\omega$  est un mot de  $\mathcal{A}^*$  de longueur  $n$  tel que  $p(\omega) \neq 0$ , et  $m_i$  des entiers naturels tels que  $1 \leq m_i \leq p(\omega_i, u_{i-1})$ . ■

Dans la suite, nous posons  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ . À chaque opération primitive  $A_i$ , associons une variable formelle  $a_i$ . Considérons l'application  $\alpha : \mathbb{N}^k \rightarrow \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle^c$  telle que  $\alpha(n_1, n_2, \dots, n_k) = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}, \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle^c$  dénotant l'ensemble des mots commutatifs sur l'ensemble des variables formelles  $\underline{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ .

**Définition 3.1.4** Étant donné un mot  $\omega = \omega_1 \cdots \omega_n \in \mathcal{A}^*$ , nous appelons *image commutative* de  $\omega$  le mot  $\omega^c = c(\omega_1 \cdots \omega_n) = a_1^{\mu_1} a_2^{\mu_2} \cdots a_r^{\mu_r}$  où  $\mu_i = |\{j \mid \omega_j = A_i\}|$ . ■

Posons  $\mathcal{H}_{u_0}[n] =$  l'ensemble des histoires  $h$  de taille  $n$  associées à l'historiographe initialisé  $(\mathcal{H}, u_0)$ . Soit  $h = (\omega, p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathcal{H}_{u_0}[n]$  tel que l'état final de  $h$  soit  $u_n = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ . Le poids de l'histoire  $h$  est, par définition,

$$\pi(h) = \omega^c \alpha(u_n) = a_1^{\mu_1} a_2^{\mu_2} \cdots a_r^{\mu_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}.$$

Soient  $l$  est un ensemble totalement ordonné tel que  $|l| = n$ , et  $\sigma_l : [n] \xrightarrow{\sim} l$  est l'unique bijection croissante. Si  $\omega = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n$  est un mot de longueur  $n$ , alors nous notons  $\sigma_l \omega$  le mot  $\sigma_l \omega = \omega_{\sigma(1)} \omega_{\sigma(2)} \cdots \omega_{\sigma(n)}$  indexé sur  $l$ . Posons  $\mathcal{H}_{u_0}[l] = \{(\sigma_l \omega, p) \mid h \in \mathcal{H}_{u_0}[n]\} = \mathcal{H}_{u_0}[n] \times \{\sigma_l\}$ . De cette façon,  $\mathcal{H}_{u_0}$  est une  $\mathbb{L}$ -espèce pondérée, dont la fonction génératrice est donnée par

$$\mathcal{H}_{u_0}(t; \mathcal{A}, \underline{x}) = \sum_{n \geq 0} \|\mathcal{H}_{u_0}[n]\|_\pi \frac{t^n}{n!},$$

où  $\|\mathcal{H}_{u_0}[n]\|_\pi = \sum_{|h|=n} \omega^c \alpha(u_n(h))$ ,  $\|\mathcal{H}_{u_0}[0]\|_\pi = \alpha(u_0)$ .

**Définition 3.1.5** Une *réalisation* (ou *représentation*, ou *implémentation*) d'un historiographe initialisé  $(\mathcal{H}, u_0)$  est un couple  $(F, \varphi)$  où  $F$  est une  $\mathbb{L}$ -espèce et  $\varphi = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille  $\varphi_n : F[n] \rightarrow \mathcal{H}_{u_0}[n]$  d'isomorphismes d'ensembles pondérés. ■

Notons que  $\mathcal{H}_{u_0}$  est une réalisation de  $(\mathcal{H}, u_0)$ . Nous l'appelons *la réalisation banale*.

### 3.2 Historiographes additifs

**Définition 3.2.1** Un historiographe  $\mathcal{H}$  est dit *additif* si

- Pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , l'élément  $A(u) - u$  de  $\mathbb{Z}^k$  est indépendant de  $u$ ; c'est-à-dire qu'il existe un vecteur  $\vec{n}(A) \in \mathbb{Z}^k$ , appelé *pas*, tel que  $A(u) = u + \vec{n}(A)$ ,
- Pour tous  $u, v \in \mathbb{N}^k$ , et  $A \in \mathcal{A}$ ,  $p(A, u + v) = p(A, u) + p(A, v)$ . ■

**Remarque 3.2.2 i).** Il suit que si  $v = B(u)$  et si  $A \in \mathcal{A}$ , alors  $p(A, v) = p(A, u) + p(A, \vec{n}(B))$ .

ii). L'application  $p_A : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $p_A(u) = p(A, u)$  est donc un homomorphisme de monoïdes commutatifs. Il est donc uniquement déterminé par les  $p_A(e_i)$ , où  $e_i = (\delta_1^i, \delta_2^i, \dots, \delta_k^i)$ . Plus exactement,  $p_A(n_1, \dots, n_k) = \sum_{i=1}^k n_i p_A(e_i)$ . En particulier,  $p_A(0, \dots, 0) = 0$ .

**Lemme 3.2.3** Soient  $\mathcal{H}$  un historiographe additif,  $u$ ,  $u'$  et  $u'' \in \mathbb{N}^k$  tels que  $u = u' + u''$ , alors

$$u \in D(A) \text{ si et seulement si } [u' \in D(A) \text{ ou } u'' \in D(A)].$$

En particulier, pour tout  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $D(A) \neq \emptyset$ , il existe au moins un  $i \in [k]$  tel que  $e_i \in D(A)$ .

**Démonstration** Ce résultat découle immédiatement de la définition. ■

**Lemme 3.2.4** Si  $\vec{n}(A) = (n_1(A), n_2(A), \dots, n_k(A))$  et  $e_i \in D(A)$ , alors  $n_j(A) \geq 0$  si  $j \neq i$ , et  $n_i(A) \geq -1$ . En particulier, s'il existe  $i$  et  $j$  tels que  $i \neq j$  et  $e_i, e_j \in D(A)$  alors pour tout  $s$ ,  $n_s(A) \geq 0$ .

**Démonstration** En effet, si  $e_i \in D(A)$ , alors  $A(e_i) \in \mathbb{N}^k$  et  $\vec{n}(A) = A(e_i) - e_i$ .

**Proposition 3.2.5** Si  $\mathcal{H}$  est un historiographe additif et si  $u_0 = u'_0 + u''_0$ , alors on a l'isomorphisme d'espèces pondérées  $\mathcal{H}_{u_0} \simeq \mathcal{H}_{u'_0} \cdot \mathcal{H}_{u''_0}$ . En d'autres termes l'application  $\varphi : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{L}_{\mathcal{E}_S}$ , telle que  $\varphi(u) = \mathcal{H}_u$ , est un homomorphisme du monoïde additif  $\mathbb{N}^k$  dans le monoïde multiplicatif  $\mathbb{L}_{\mathcal{E}_S}$  des  $\mathbb{L}$ -espèces pondérées.

**Démonstration** Montrons, par récurrence sur  $n$ , qu'il existe un isomorphisme d'ensembles pondérés  $\varphi_n : \mathcal{H}_{u_0}[n] \rightarrow (\mathcal{H}_{u'_0} \cdot \mathcal{H}_{u''_0})[n]$ .

Pour  $n = 0$ , notons que  $\mathcal{H}_{u_0}[0] = \{(u_0)\}$  et que  $(u_0)$  s'identifie au quadruplet  $(\emptyset, \emptyset, (u'_0), (u''_0))$ , unique élément de  $(\mathcal{H}_{u'_0} \cdot \mathcal{H}_{u''_0})[0]$ . Supposons qu'à toute histoire  $h = (\omega, m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathcal{H}_{u_0}[n]$ , on peut associer un quadruplet unique  $(l', l'', h', h'')$  tel que  $l' + l'' = [n]$ ,  $h' = (\omega', m'_1, \dots, m'_s) \in \mathcal{H}_{u'_0}[l']$ ,  $h'' = (\omega'', m''_1, \dots, m''_t) \in \mathcal{H}_{u''_0}[l'']$ , avec  $s = |l'|$ ,  $t = |l''|$ ,  $\omega' = \omega|_{l'}$  et  $\omega'' = \omega|_{l''}$ , et dont les états finaux vérifient  $u_n = u'_s + u''_t$ . Et soit une histoire  $h = (\omega, m_1, m_2, \dots, m_{n+1})$  telle que  $c(\omega) = u_0 \xrightarrow{\omega_1} u_1 \xrightarrow{\omega_2} u_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{\omega_{n+1}} u_{n+1}$ . Notons  $h_{[n]}$  la restriction de  $h$  à  $[n]$ , c'est-à-dire que  $h_{[n]} = (\omega|_{[n]}, m_1, m_2, \dots, m_n)$  où  $c(\omega|_{[n]}) = u_0 \xrightarrow{\omega_1} u_1 \xrightarrow{\omega_2} u_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{\omega_n} u_n$ . L'hypothèse de récurrence montre que  $h_{[n]}$  s'identifie à  $(l'_{[n]}, l''_{[n]}, h'_{[n]}, h''_{[n]})$  où  $l'_{[n]} + l''_{[n]} = [n]$ ,  $h'_{[n]} = (\omega|_{l'_{[n]}}, m'_1, \dots, m'_s) \in \mathcal{H}_{u'_0}[l'_{[n]}]$ ,  $h''_{[n]} = (\omega|_{l''_{[n]}}, m''_1, \dots, m''_t) \in \mathcal{H}_{u''_0}[l''_{[n]}]$ , et  $u'_s + u''_t = u_n$ . Le lemme précédent montre que  $u'_s \in D(\omega_{n+1}, u_n) = p(\omega_{n+1}, u'_s) + p(\omega_{n+1}, u''_t)$ . D'autre part, on sait que  $1 \leq m_{n+1} \leq p(\omega_{n+1}, u_n) = p(\omega_{n+1}, u'_s) + p(\omega_{n+1}, u''_t)$ . Définissons  $(l', l'', h', h'')$  de la façon suivante:

i) Si  $1 \leq m_{n+1} \leq p(\omega_{n+1}, u'_s)$ , alors on pose  $l' = l'_{[n]} \cup \{n+1\}$ ,  $m'_{s+1} = m_{n+1}$ ,  $\omega'_{s+1} = \omega_{n+1}$ ,  $\omega' = \omega|_{l'_{[n]}} \omega'_{s+1}$  (concaténation) et  $h' = (\omega', m'_1, \dots, m'_s, m'_{s+1})$ ,  $l'' = l''_{[n]}$ ,  $h'' = h''_{[n]}$ .

ii) Sinon,  $p(\omega_{n+1}, u'_s) + 1 \leq m_{n+1} \leq p(\omega_{n+1}, u'_s) + p(\omega_1, u''_t)$ , alors on pose  $l'' = l''_{[n]} \cup \{n+1\}$ ,  $m''_{t+1} = m_{n+1} - p(\omega_{n+1}, u'_s)$ ,  $\omega''_{t+1} = \omega_{n+1}$ ,  $\omega'' = \omega|_{l''_{[n]}} \omega''_{t+1}$  et  $h'' = (\omega'', m''_1, \dots, m''_t, m''_{s+1})$ ,  $l' = l'_{[n]}$ ,  $h' = h'_{[n]}$ .

Supposons par exemple que  $m_{n+1} \leq p(\omega_{n+1}, u'_s)$ . Si  $u'_{s+1} = \omega_{n+1}(u'_s)$  alors  $u_{n+1} = u'_{s+1} + u''_t$ . En effet, comme  $\mathcal{H}$  est additif,  $\omega_{n+1}(u_n) - u_n = \omega_{n+1}(u'_s) - u'_s$ , donc  $u_{n+1} - u_n = u'_{s+1} - u'_s$ . C'est donc dire que  $u_{n+1} = u'_{s+1} + u_n - u'_s = u'_{s+1} + u''_t$ . Il suit que  $\pi(h) = \pi(h') \cdot \pi(h'')$ . ■

Notons donc que si l'histoire  $h$  s'identifie à  $(l', l'', h', h'')$ , alors les états finaux  $u_n, u''_s$  et  $u''_t$  de  $h, h'$  et  $h''$  respectivement vérifient  $u_n = u'_s + u''_t$ .

**Corollaire 3.2.6** *Si  $\mathcal{H}$  est un historiographe additif et si  $u_0 = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$ , alors on a l'isomorphisme  $\mathcal{H}_{u_0} \simeq \prod_{i=1}^k \mathcal{H}_{e_i}^{\alpha_i}$ . En d'autres termes, l'ensemble  $\{\mathcal{H}_{u_0}, u_0 \in \mathbb{N}^k\}$  est parfaitement déterminé par la donnée de l'ensemble*

$$\{\mathcal{H}_{e_1}, \mathcal{H}_{e_2}, \dots, \mathcal{H}_{e_k}\}.$$

**Démonstration** En effet,  $u_0 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k$ . ■

**Proposition 3.2.7** *Soit  $\mathcal{H} = (k, \mathcal{A}, p)$  un historiographe additif. Posons  $\mathcal{A}(i) = \{A \in \mathcal{A} \mid e_i \in D(A)\}$  et  $X_i(t) = \mathcal{H}_{e_i, \pi}(t) = \mathcal{H}_{e_i, \pi}(t; \mathcal{A}, \underline{x})$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Alors la famille  $(X_i(t))_{i \in [k]}$  est solution du système différentiel*

$$\frac{\partial}{\partial t} X_i(t) = \sum_{A \in \mathcal{A}(i)} a(A) p(A, e_i) X_i^{n_1(A)}(t) \cdots X_i^{n_i(A)+1}(t) \cdots X_k^{n_k(A)}(t),$$

avec  $X_i(0) = x_i$  ( $i = 1 \dots k$ ).

**Démonstration** Remarquons d'abord qu'une histoire  $h$  de longueur 0 est une histoire telle que le mot  $\omega$  est vide. Dans ce cas,  $h$  est réduit à  $e_i$ . Donc  $\mathcal{H}_{e_i}(0) = \alpha(e_i) = x_i$ . Rappelons aussi qu'à chaque opérateur  $A$  est associée une variable formelle  $a(A)$  [voir définition 3.1.4]. Soit donc  $h = (\omega, m_1, \dots, m_{n+1}) \in \mathcal{H}_{e_i}[n+1]$ . Il est clair que  $\omega_1 \in \mathcal{A}(i)$ . Posons  $u_1 = \omega_1(e_i) = (n_1(\omega_1), \dots, n_i(\omega_1) + 1, \dots, n_k(\omega_1))$ . On définit alors  $h' = (\omega', m'_1, \dots, m'_n) \in \mathcal{H}_{u_1}[n]$  avec  $\omega = \omega_1 \omega'$  et  $m'_i = m_{i+1}$ . Notons qu'au niveau des poids on a  $\pi(h) = \omega_1 \pi(h')$ . Réciproquement soit  $u_1 \in \mathbb{N}^k$  tel que  $u_1 = A(e_i)$  et  $h' = (\omega', m'_1, \dots, m'_n) \in \mathcal{H}_{u_1}[n]$ . Si  $m_1$  est tel que  $1 \leq m_1 \leq p(A, e_i)$ , alors  $h = (\omega, m_1, m'_1, \dots, m'_n)$  tel que  $\omega = A \omega'$  est un élément de  $\mathcal{H}_{e_i}[n+1]$ . En d'autre terme, la donnée d'une histoire  $h \in \mathcal{H}_{e_i}[n+1]$  est parfaitement déterminée par la donnée d'un triplet

$(A, m_1, h')$  où  $A \in \mathcal{A}(i)$ ,  $1 \leq m_1 \leq p(A, e_i)$ , et  $h' \in \mathcal{H}_{A(e_i)}[n]$ . Nous avons alors:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}_{e_i, \pi}(t) &= \sum_{n \geq 0} [\sum_{h \in \mathcal{H}_{e_i}[n+1]} \pi(h)] \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} [\sum_{A \in \mathcal{A}(i)} \sum_{1 \leq m \leq p(A, e_i)} \sum_{h \in \mathcal{H}_{A(e_i)}[n]} a(A) \pi(h)] \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{A \in \mathcal{A}(i)} \sum_{1 \leq m \leq p(A, e_i)} a(A) \sum_{n \geq 0} \sum_{h \in \mathcal{H}_{A(e_i)}[n]} \pi(h) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{A \in \mathcal{A}(i)} a(A) p(A, e_i) \mathcal{H}_{A(e_i), \pi}(t).\end{aligned}$$

Le corollaire 3.2.6 montre alors que  $\mathcal{H}_{A(e_i)} \simeq \mathcal{H}_{e_1}^{n_1(A)} \cdots \mathcal{H}_{e_i}^{n_i(A)+1} \cdots \mathcal{H}_{e_k}^{n_k}$ . D'où le résultat. ■

En d'autres termes, à un historiographe additif  $\mathcal{H}$  est canoniquement associé:

– le système différentiel

$$\frac{\partial}{\partial t} X_i = \sum_{j=1}^r \alpha_{i,j} a_j X_1^{n_{1,j}} X_2^{n_{2,j}} \cdots X_i^{n_{i,j}+1} \cdots X_k^{n_{k,j}}, \quad X_i(0) = x_i, \quad i = 1 \dots k,$$

où  $\alpha_{i,j} \in \mathbb{N}$ , et  $a_j$  une variable formelle,  $n_{i,j} \geq -1$  et si  $r \neq i$ ,  $n_{r,j} \geq 0$ , – ou bien la grammaire

$$\{x_i \rightarrow \sum_j^r \alpha_{i,j} a_j x_1^{n_{1,j}} x_2^{n_{2,j}} \cdots x_i^{n_{i,j}+1} \cdots x_k^{n_{k,j}} \mid i = 1 \dots k; \quad j = 1 \dots r\},$$

– ou bien l'opérateur différentiel

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r \alpha_{i,j} a_j X_1^{n_{1,j}} X_2^{n_{2,j}} \cdots X_i^{n_{i,j}+1} \cdots X_k^{n_{k,j}} \frac{\partial}{\partial X_i}.$$

**Corollaire 3.2.8** Étant donnés des variables formelles  $(a_j)$ , et des entiers naturels  $(n_{ij})$  et  $(\alpha_{ij})$ , où  $1 \leq j \leq r$  et  $1 \leq i \leq k$ , les quatres données suivantes sont équivalentes.

1. Un historiographe additif  $\mathcal{H} = (k, \mathcal{A}, p)$ , où  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$

2. Un système différentiel

$$\frac{\partial X_i}{\partial T} = \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} a_j X_1^{n_{1,j}} X_2^{n_{2,j}} \cdots X_i^{n_{i,j}} \cdots X_k^{n_{k,j}}, \quad X_i(0) = x_i, \quad 1 \leq i \leq k, \quad (3.1)$$

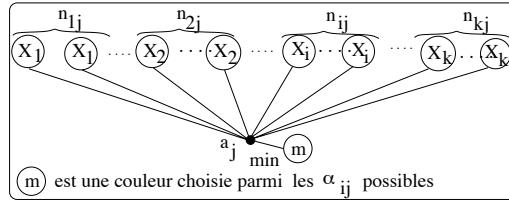
3. Une grammaire

$$x_i \rightarrow \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} a_j x_1^{n_{1,j}} x_2^{n_{2,j}} \cdots x_i^{n_{i,j}} \cdots x_k^{n_{k,j}}, \quad 1 \leq i \leq k, \quad (3.2)$$

4. Un opérateur différentiel

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} a_j X_1^{n_{1,j}} X_2^{n_{2,j}} \cdots X_i^{n_{i,j}} \cdots X_k^{n_{k,j}} \frac{\partial}{\partial X_i}. \quad (3.3)$$

Plus exactement toute solution combinatoire du système différentiel (3.1) est une réalisation de la famille d'historiographes initialisés  $(\mathcal{H}, e_i)_{1 \leq i \leq k}$ , où  $\mathcal{H} = (k, \mathcal{A}, p)$  est défini par  $\mathcal{A} = \{A_j, 1 \leq j \leq r\}$  avec  $A_j(e_i) = (n_{1,j}, \dots, n_{i,j}, \dots, n_{k,j})$  et  $p(A_j, e_i) = \alpha_{ij}$ .



**Figure 3.1:** Solution du système (3.1)

**Démonstration** Il reste à montrer que si on a 2, alors on a 1. On associe canoniquement au système différentiel de 2, l'historiographe  $\mathcal{H} = (k, \mathcal{A}, p)$  défini par  $\mathcal{A} = \{A_j, 1 \leq j \leq r\}$  avec  $A_j(e_i) = (n_{1,j}, \dots, n_{i,j}, \dots, n_{k,j})$  et  $p(A_j, e_i) = \alpha_{ij}$ . Rappelons que si  $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$  alors, linéarité oblige,  $p(A_j, u) = \sum_{i=1}^k u_i \alpha_{ij}$ . Notons alors que la solution canonique du système (3.1) est la famille d'arborescences croissantes enrichies  $(\mathcal{F}_i^\uparrow)_{1 \leq i \leq k}$  obtenue en itérant la procédure donnée par la figure 3.1. Chaque point de ces arborescences est coloré par le choix d'une couleur  $m$  tel que  $1 \leq m \leq \alpha_{sj}$  pour un  $s$  donné. Ces espèces sont donc monomialement pondérées réduites. Il suffit alors de remarquer que  $\mathcal{A}_i^\uparrow(t; a_1, \dots, a_r, x_1, \dots, x_k)$  et  $\mathcal{H}_{e_i}(t; a_1, \dots, a_r, x_1, \dots, x_k)$  sont solutions du système différentiel analytique associé à 2., donc  $\mathcal{A}_i^\uparrow(t; a_1, \dots, a_r, x_1, \dots, x_k) = \mathcal{H}_{e_i}(t; a_1, \dots, a_r, x_1, \dots, x_k)$ . D'où  $\mathcal{A}_i^\uparrow \simeq \mathcal{H}_{e_i}$ . ■

### 3.3 Un exemple: historiographes hyperelliptiques

Dans cette section nous analysons certains historiographes dits hyperelliptiques. En particulier, diverses réalisations des historiographes de Schett sont données.

#### 3.3.1 Généralités

Étant donné un entier  $k \geq 2$ , nous appelons historiographe *hyperelliptique d'ordre k* l'historiographe  $\mathcal{H}^{(k)} = (k, \mathcal{A}, p)$ , où  $\mathcal{A} = \{A_i, 1 \leq i \leq k\}$ , défini par

$$A_i(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \begin{cases} (\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1} + 1, \dots, \alpha_k + 1), & \text{si } \alpha_i > 0, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

et  $p(A_i, u) = \alpha_i$ , si  $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ .

L'historiographe hyperelliptique d'ordre 3 est aussi appellé *historiographe de Schett ou historiographe elliptique*. ■

**Lemme 3.3.1** *Les historiographes hyperelliptiques sont additifs.*

**Démonstration** On a  $A_i(\alpha_1, \dots, \alpha_k) - (\alpha_1, \dots, \alpha_k) = (1, \dots, -1, \dots, 1)$  et si  $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  et  $v = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_k)$ , alors  $p(A_i, u + v) = \alpha_i + \alpha'_i = p(A_i, u) + p(A_i, v)$ . ■

Notons que pour tout  $i, j, e_i \in D(A_j) \Leftrightarrow i = j$ . Considérons alors les initialisations en  $x_i$ , obtenues en prenant comme état initial le vecteur  $e_i$ . Comme  $p(A_i, e_j) = \delta_i^j$ , les séries génératrices  $\mathcal{H}_{e_i}^{(k)}(t; (a_j), (x_j))$ ,  $1 \leq i, j \leq k$ , sont solutions du système différentiel

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = a_i X_1 \cdots X_{i-1} X_{i+1} \cdots X_k, \quad X_i(0) = x_i \quad (3.4)$$

Les espèces hyperelliptiques [cf. section 2.4] sont donc des réalisations de ces historiographes. De plus, à une histoire  $h$  de poids  $\pi(h) = \prod_{i=1}^k a_i^{\mu_i} x_i^{\alpha_i}$  correspond une arborescence ayant  $\mu_i$  sommets de couleurs  $i$  (pondérés par  $a_i$ ) et  $\alpha_i$  feuilles de sortes  $\mu_i$ .

**Remarque 3.3.2** Pour  $1 \leq i \leq k$ , nous appellons *polynômes hyperelliptiques d'ordre  $k$ , initialisés en  $x_i$* , la famille de polynômes  $(X_n^{(k,i)}(\mathcal{A}, \underline{x}))_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $X_n^{(k,i)}(\mathcal{A}, \underline{x}) = n![t^n] \mathcal{H}_{e_i}^{(k)}(t; \mathcal{A}, \underline{x})$ . Ces polynômes vérifient la relation  $X_n^{(k,i)} = \mathcal{D}(X_{n-1}^{(k,i)})$ ,  $X_0^{(k,i)}(0) = x_i$ , où  $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^k a_i x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_k \frac{\partial}{\partial x_i}$  est l'opérateur différentiel associé à  $\mathcal{H}^{(k)}$ . ■

Rappelons que si  $h = (\omega_1 \cdots \omega_n, m_1, \dots, m_n) \in \mathcal{H}_{e_i}^{(k)}[n]$  est une histoire initialisée à  $x_i$  de longueur  $n$ , dont l'état final est  $u_n = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ , alors le poids de  $h$  est  $\pi(h) = \prod_{j=1}^k a_j^{\mu_j} x_j^{\alpha_j}$ , où  $\mu_j = |\{s \mid \omega_s = A_j\}|$ . On a alors les relations suivantes:

**Proposition 3.3.3** *Les entiers  $\mu_s$  et  $\alpha_s$  vérifient les relations*

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \sum_{s=1}^k \mu_s = n & \text{ii)} \sum_{s=1}^k \alpha_s = n(k-2) + 1 \\ \text{iii)} \mu_i + \alpha_i = 1 + \sum_{s=1, s \neq i}^k \mu_s & \text{iv)} \text{ si } j \neq i, \mu_j + \alpha_j = \sum_{s=1, s \neq j}^k \mu_s. \end{array} \quad (3.5)$$

En particulier supposons que  $\alpha_1 = 0$ . Si  $i = 1$  alors  $n$  est impair et  $\mu_1 = \frac{n+1}{2}$  et si  $i \neq 1$  alors  $n$  est pair et  $\mu_1 = \frac{n}{2}$ .

**Démonstration** Nous donnons deux preuves différentes pour les relations iii) et iv).

**Preuve 1** Il est clair que  $\sum_{s=1}^k \mu_s = n$ . Les autres résultats peuvent être démontrés par récurrence sur  $n$ . Soit  $h = (\omega_1 \cdots \omega_n; m_1, \dots, m_n)$  une histoire de longueur  $n$  initialisée en  $e_i$ , telle que  $\pi(h) = \prod_{j=1}^k a_j^{\mu_j} x_j^{\alpha_j}$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $i = 1$ . Donc  $\omega_1 = A_1$  et  $m_1 = 1$ . Soit l'histoire  $h' = (\omega_2 \cdots \omega_n; m_2, \dots, m_n) \in \mathcal{H}_{u_0}[n-1]$ , où  $u_0 = (0, 1, \dots, 1) = A_1(e_1)$ . Il est clair que  $\pi(h') = a_1^{\mu_1-1} x_1^{\alpha_1} \prod_{j=2}^k a_j^{\mu_j} x_j^{\alpha_j}$ . Le corollaire 3.2.6 dit que

$\mathcal{H}_{u_0} \simeq \mathcal{H}_{e_2} \cdots \mathcal{H}_{e_k}$ . Donc  $h'$  s'identifie à  $(l_2, \dots, l_k, h_2, \dots, h_k)$  où  $l_2 + o \cdots + o l_k = [n - 1]$  et  $h_i \in \mathcal{H}_{e_i}[l_i]$  pour  $i, 2 \leq i \leq k$ . Posons  $\pi(h_i) = \prod_{j=1}^k a_j^{\mu_{ij}} x_j^{\alpha_{ij}}$ . Alors  $\mu_1 - 1 = \sum_{i=2}^k \mu_{i,1}$ ,  $\mu_j = \sum_{i=2}^k \mu_{i,j}$  si  $j \geq 2$ , et  $\alpha_j = \sum_{i=2}^k \alpha_{i,j}$  pour tout  $j$ . D'autre part, l'hypothèse de récurrence montre que  $\sum_{j=1}^k \mu_{i,j} = |l_i|$ ,  $\sum_{j=1}^k \alpha_{i,j} = |l_i|(k-2)+1$ ,  $\mu_{i,i} + \alpha_{i,i} = 1 + \sum_{j=1, j \neq i}^k \mu_{i,j}$ , et si  $s \neq i$ ,  $\mu_{i,s} + \alpha_{i,s} = 1 + \sum_{j=1, j \neq s}^k \mu_{i,j}$ . En particulier  $\mu_{i,1} + \alpha_{i,1} = 1 + \sum_{j=2}^k \mu_{i,j}$ . Nous avons alors

$$\text{ii)} \sum_{j=1}^k \alpha_j = \sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^k \alpha_{i,j} = \sum_{i=2}^k (|l_i|(k-2)+1) = (n-1)(k-2)+(k-1) = n(k-2)+1.$$

$$\text{iii)} \mu_1 + \alpha_1 = 1 + \sum_{i=2}^k (\alpha_{i,1} + \mu_{i,1}) = 1 + \sum_{i=2}^k \sum_{j=2}^k \mu_{i,j} = 1 + \sum_{j=2}^k (\sum_{i=2}^k \mu_{i,j}) = 1 + \sum_{j=2}^k \mu_j.$$

$$\begin{aligned} \text{iv)} \text{ Si } s \neq 1, \mu_s + \alpha_s &= \sum_{i=2}^k (\mu_{i,s} + \alpha_{i,s}) = \mu_{s,s} + \alpha_{s,s} + \sum_{i=2, i \neq s}^k (\mu_{i,s} + \alpha_{i,s}) \\ &= 1 + \sum_{j=1, j \neq s}^k \mu_{s,j} + \sum_{i=2, i \neq s}^k \sum_{j=1, j \neq s}^k \mu_{i,j} \\ &= 1 + \sum_{j=1, j \neq s}^k \sum_{i=2}^k \mu_{i,j} \\ &= 1 + \sum_{i=2}^k \mu_{i,1} + \sum_{j=2, j \neq s}^k \sum_{i=2}^k \mu_{i,j} \\ &= 1 + (\mu_1 - 1) + \sum_{j=2, j \neq s}^k \mu_j = \sum_{j=1, j \neq s}^k \mu_j \end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $\alpha_1 = 0$ . Si  $i = 1$  alors  $\mu_1 = 1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k$  et  $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k = n$ .

Et  $\mu_1 = \frac{n+1}{2}$  donc  $n$  est impair. Si  $i > 1$  alors  $\mu_1 = \mu_2 + \cdots + \mu_k$  et  $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k = n$ . Et  $\mu_1 = \frac{n}{2}$  donc  $n$  est pair.

**Preuve 2** La figure 3.2 est une illustration bijective des relations iii) et iv) de (3.5), utilisant les espèces hyperelliptiques, avec  $k = 4, i = 1$  et  $j = 2$ . En

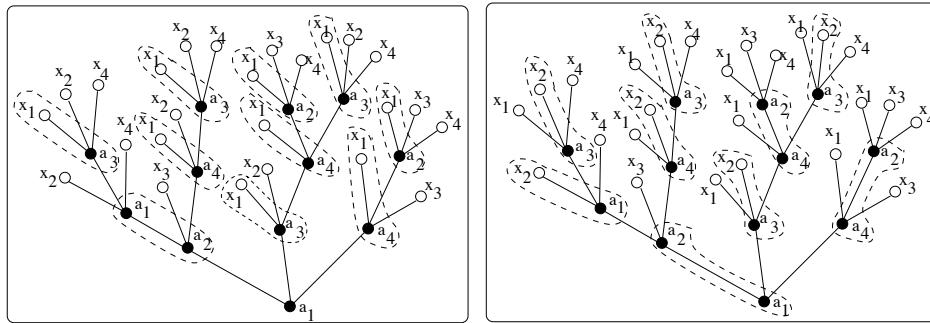


Figure 3.2: Preuve bijective des relations iii) et iv) de (3.5)

effet, dans le premier cas, on associe bijectivement à chaque feuille et chaque sommet interne de couleur 1 (sauf la racine), un sommet interne d'une autre couleur. Dans le deuxième cas, on procède de façon similaire avec les feuilles et les sommets internes de couleur 2. ■

### 3.3.2 Quelques réalisations de l'historiographe de Schett

Le présent paragraphe a pour but de montrer que diverses interprétations combinatoires des solutions analytiques d'un système différentiel peuvent provenir de la façon de réaliser l'historiographe associé à ce système. Nous examinons ici le cas des fonctions elliptiques de Jacobi qui sont essentiellement les solutions du système différentiel (3.6) associé à l'historiographe de Schett  $\mathcal{S}$  (modulo un changement de notation approprié), en prenant  $x = 0$ , c'est-à-dire en considérant les histoires dont l'état final vérifie  $\alpha_1 = 0$ .

$$\begin{cases} X' = aYZ, & X(0) = x, \\ Y' = bXZ, & Y(0) = y, \\ Z' = cXY, & Z(0) = z, \end{cases} \quad (3.6)$$

Ainsi, par spécialisation  $x = 0$ , la première réalisation nous donnera une interprétation combinatoire des fonctions elliptiques de Jacobi en terme d'arborescences de Jacobi, c'est-à-dire les arborescences binaires telles que chaque branche gauche de hauteur droite non nulle est paire; la seconde est une interprétation qui fait intervenir les hauteurs gauches et les hauteurs droites des sommets; la troisième réalisation nous donne aussi une interprétation, en termes d'arborescences de Jacobi, qui est équivalente à l'interprétation donnée par Viennot dans [cf.(Vi.1 80)]; la quatrième nous donnera une interprétation en termes de permutations alternantes et la cinquième, celle de Dumont, en termes de pics de cycles [cf. (Dum. 80)]. Certaines de ces réalisations nous ont été aimablement communiquées par G.X. Viennot [(Vi. 98)].

Notons également que P. Flajolet et J. Françon [cf.(Fl.-Fr. 89)] donnent une autre interprétation combinatoire des fonctions elliptiques de Jacobi, en termes de permutations doublées, en utilisant les fractions continues. Cette interprétation ne semble pas s'insérer dans le contexte des historiographes de Schett.

**Remarque 3.3.4 i)** Étant donné  $h \in \mathcal{S}_{e_i}[n]$  telle que  $\pi(h) = a^{\mu_1} b^{\mu_2} c^{\mu_3} x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3}$ , la proposition 3.3.3 montre que si  $i = 1$  et  $\alpha_1 = 0$ , alors  $n$  est impair et  $\mu_1 = \frac{n+1}{2}, \alpha_2 = 2\mu_3 + 1, \alpha_3 = 2\mu_2 + 1, \mu_2 + \mu_3 = \frac{n-1}{2}$  et que si  $i = 2$  et  $\alpha_1 = 0$  alors  $n$  est pair et  $\mu_1 = \frac{n}{2} = \mu_2 + \mu_3, \alpha_2 = 2\mu_3 + 1, \alpha_3 = 2\mu_2$ . D'autre part,  $X_n = n![t^n]X(t; a, b, c, x, y, z), Y_n = n![t^n]Y(t; a, b, c, x, y, z)$  et  $Z_n = n![t^n]Z(t; a, b, c, x, y, z)$  étant les polynômes elliptiques ou *polynômes de Schett*, il est clair que les coefficients des polynômes  $X_n$  coïncident avec les coefficients des polynômes  $\tilde{X}_n$  définis par  $\tilde{X}_0 = x, \tilde{X}_{n+1} = \mathcal{D}(\tilde{X}_n)$  où  $\mathcal{D} = yz\frac{\partial}{\partial x} + xz\frac{\partial}{\partial y} + xy\frac{\partial}{\partial z}$  (cf. remarque 3.3.2).

ii) Nous avons  $X_n(1, 1, 1, 1, 1, 1) = Y_n(1, 1, 1, 1, 1, 1) = Z_n(1, 1, 1, 1, 1, 1) = n!$ . En effet, en prenant  $a = b = c = x = y = z = 1$  dans le système (3.6), il est clair que ses solutions vérifient  $X(t) = Y(t) = Z(t)$ . Donc ce système est réduit à l'équation  $X' = X^2, X(0) = 1$ , dont la solution de l'équation combinatoire associée est l'espèce des arborescences binaires croissantes [cf. exemple 2.1.10].

On en déduit l'existence une bijection entre  $\mathbb{S}_n$  et l'ensemble des histoires de Schett,  $\mathcal{S}_{e_i}[n], 1 \leq i \leq 3$ .

iii) Rappelons que les fonctions elliptiques de Jacobi  $\text{sn}(t, k)$ ,  $\text{cn}(t, k)$  et  $\text{dn}(t, k)$  sont les solutions de (3.6), avec  $x = 0, a = y = z = 1, b = -1$  et  $c = -k^2$ . La remarque i) ci-haut montre que  $X(t; a, b, c, 0, 1, 1)$  est impaire et que  $a_{2n+1,p} = (-1)^n(2n+1)! [k^{2p} t^{2n+1}] \text{sn}(t, k) = (2n+1)! [a^{n+1} b^{n-p} c^p t^{2n+1}] X(t; a, b, c, 0, 1, 1)$ . De même,  $Y(t; a, b, c, 0, 1, 1)$  est paire, et en posant  $b_{2n,p} = (-1)^n(2n)! [k^{2p} t^{2n}] \text{cn}(t, k)$ , on a  $b_{2n,p} = (2n)! [a^n b^{n-p} c^p t^{2n}] Y(t; a, b, c, 0, 1, 1)$ .

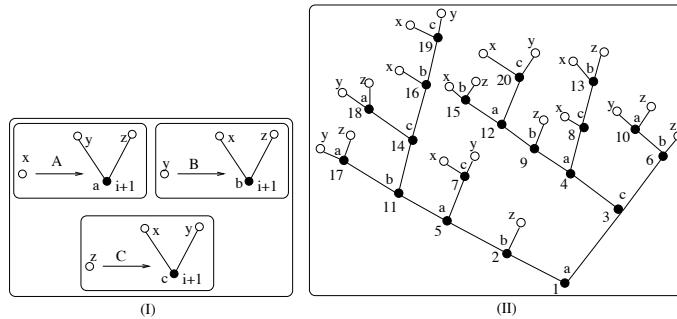
D'autre part  $Z(t; a, b, c, 0, 1, 1) = Y(t; a, c, b, 0, 1, 1)$ . [cf.(Dum. 80)]. Rappelons aussi que  $\sum_p a_{2n+1,p} = e_{2n+1}$  et  $\sum_p b_{2n,p} = e_{2n}$ ,  $e_n$  étant le  $n$ -ième nombre d'Euler [cf.(Dum. 80) ou (Vi.1 80)]. ■

Dans la suite, nous prendrons dans tous les cas, comme exemple de réalisation, celle de l'histoire initialisée en  $x$ :

$$h_0 = (ABCAABCCBABABCBAACC; 1, 1, 2, 2, 1, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 3, 3, 1, 3, 1, 1, 1, 3, 5)$$

### Première réalisation canonique

Une histoire  $h = (\omega_1 \dots \omega_n, m_1, m_2, \dots, m_n)$  de taille  $n$  sera représentée par une arborescence binaire croissante sur  $[n]$  dont les feuilles sont pondérées par  $x, y$ , ou  $z$  et les sommets internes, pondérés par  $a, b$  ou  $c$ . Cette arborescence est construite récursivement de la manière suivante. Supposons qu'on ait l'arborescence associée à l'histoire  $h_i = (\omega_1 \dots \omega_i, m_1, m_2 \dots, m_i)$  dont l'état final est  $u_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ . Dans ce cas,  $p(u_i, A) = \alpha_i$ ,  $p(u_i, B) = \beta_i$  et  $p(u_i, C) = \gamma_i$ . Chaque feuille du type  $x$  (resp.  $y, z$ ) sera alors numérotée de 1 à  $\alpha_i$  (resp.  $\beta_i, \gamma_i$ ) de gauche à droite. Et si  $\omega_{i+1} = A$  alors on remplace la  $m_{i+1}$ -ème feuille du type  $x$  par un sommet  $i+1$  pondéré par  $a$  suivi d'une feuille  $y$  et une feuille  $z$ , et de façon semblable si  $\omega_{i+1} = B$  ou  $C$  (voir Fig. 3.3(I)). La



**Figure 3.3:** Première réalisation canonique

figure 3.3(II) est une réalisation de l'histoire  $h_0$ . Notons que cette réalisation correspond à la grammaire non commutative  $G_1$  définie sur  $\{a, b, c, x, y, z\}$  telle

que

$$G_1(x) = yaz, \quad G_1(y) = xbz \text{ et } G_1(z) = xcy.$$

Et de ce fait, elle reflète le système (3.6). Remarquons aussi que, pour une arborescence binaire croissante, le chemin menant d'une feuille à la racine est une alternance de suites d'arêtes gauches et de suites d'arêtes droites. Soit donc  $s$  une feuille gauche (resp. droite). Supposons que le chemin menant de  $s$  à la racine commence par une suite d'arêtes gauches (resp. droites)  $c_1 = (s, s_1, s_2, \dots, s_k)$ , avec  $s_1 > s_2 > \dots > s_k$ , puis une suite d'arêtes droites (resp. gauche)  $c_2 = (s_k, s_{k+1}, \dots, s_{k+r})$ . Dans ce cas la suite  $c_1 = (s, s_1, s_2, \dots, s_k)$  est appelée *la branche gauche* (resp. *la branche droite*) associée à  $s$ , le sommet  $s_k$  est *la racine de  $c_1$* ; la longueur  $r$  de  $c_2$  est appelée le *bras* de  $c_1$  et est dénotée par  $\beta(c_1)$ . Par exemple, pour l'arborescence de la figure 3.3(II), la branche gauche  $g = (x, 19)$  a pour racine 19 et  $\beta(g) = 3$ , alors que la branche droite  $d = (z, 13, 8, 4)$  a pour racine 4 et  $\beta(d) = 1$ .

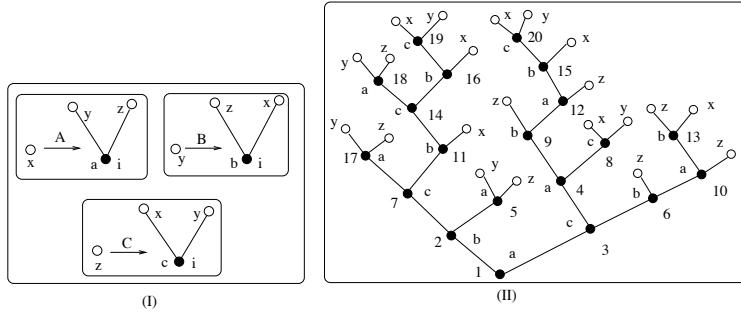
Observons que si l'arborescence  $b$  est la réalisation d'une histoire  $h \in \mathcal{S}_{e_1}[n]$  (resp.  $\mathcal{S}_{e_2}[n]$ ), alors la racine de toute branche gauche  $g$  de  $b$  telle que  $\beta(g)$  soit impaire, est pondérée, au point de branchement  $s_k$ , par  $c$ . Notons aussi que les arborescences ne contenant pas de feuilles de sorte  $x$ , sont les arborescences, appelées *arborescences de Jacobi*, dont tous les branches gauches sont paires, sauf possiblement la branche gauche principale, c'est-à-dire avec  $\beta(g) = 0$ , si  $n$  est impair. À la première réalisation canonique correspond donc l'interprétation combinatoire suivante des fonctions elliptiques en termes d'arborescences de Jacobi, donc de permutations de Jacobi [cf. (Vi.1 80) pour la définition des permutations de Jacobi].

**Proposition 3.3.5** *Le coefficient  $a_{2n+1,p} = (-1)^n (2n+1)! [k^{2p} t^{2n+1}] \operatorname{sn}(t, k)$  (resp.  $b_{2n,p} = (-1)^n (2n)! [k^{2p} t^{2n}] \operatorname{cn}(t, k)$ ) est le nombre d'arborescences de Jacobi sur  $[2n+1]$  (resp.  $[2n]$ ) dont le nombre de branches gauches  $g$  tel que  $\beta(g)$  soit impaire est  $p$ .* ■

## Deuxième réalisation canonique

Cette réalisation est essentiellement la même que la précédente. La seule différence réside dans le fait qu'une feuille du type  $y$  sera remplacé par un sommet pondéré par  $b$  suivi de deux feuilles  $z$  et  $x$ , dans cette ordre (Figure 3.3(I)). La figure 3.4(II) est une réalisation de l'histoire  $h_0$ . Notons qu'à cette réalisation, correspond la grammaire non commutative  $G$  défini sur  $\{a, b, c, x, y, z\}$  telle que  $G(x) = yaz$ ,  $G(y) = zbx$  et  $G(z) = xcy$ . Elle reflète aussi le système différentiel (3.6).

**Lemme 3.3.6** *Soit  $\tau(h)$  l'arborescence correspondant à la deuxième réalisation canonique d'une histoire  $h \in \mathcal{S}_{e_1}[n]$  (resp.  $h \in \mathcal{S}_{e_2}[n]$ ). Si  $s$  est un sommet de  $\tau(h)$ , on note  $h_d(s)$  (resp.  $h_g(s)$ ) la hauteur droite (resp. hauteur gauche), c'est-à-dire le nombre d'arêtes droites (resp. gauches) du chemin reliant  $s$  à la*



**Figure 3.4:** Deuxième réalisation canonique

racine. Alors:

- i)  $s$  est pondéré par  $a$  ou est une feuille de sorte  $x$  si et seulement si  $h_d(s) - h_g(s) \equiv 0 \pmod{3}$  (resp.  $h_d(s) - h_g(s) \equiv 1 \pmod{3}$ ).
- ii)  $s$  est pondéré par  $b$  ou est une feuille de sorte  $y$  si et seulement si  $h_d(s) - h_g(s) \equiv 2 \pmod{3}$  (resp.  $h_d(s) - h_g(s) \equiv 0 \pmod{3}$ ).
- iii)  $s$  est pondéré par  $c$  ou est une feuille de sorte  $z$  si et seulement si  $h_d(s) - h_g(s) \equiv 1 \pmod{3}$  (resp.  $h_d(s) - h_g(s) \equiv 2 \pmod{3}$ ).

**Démonstration** Par récurrence sur  $n$ . Soient  $h'$  une histoire de longueur  $n+1$  et  $h$  la restriction de  $h'$  à  $[n]$ , c'est-à-dire l'histoire obtenue en oubliant  $\omega_{n+1}$ . Il est clair qu'en supprimant le sommet  $s_{n+1}$  de  $\tau(h')$ , on obtient  $\tau(h)$ . Réciproquement,  $\omega_{n+1}$  permet de placer  $n+1$  sur  $\tau(h)$ , pour obtenir  $\tau(h')$ . Notons aussi que toute feuille de  $\tau(h')$  est soit une feuille de  $\tau(h)$  soit une feuille attachée à  $s_{n+1}$ . Si le sommet  $s_{n+1}$  est pondéré par  $a$  alors  $\omega_{n+1} = A$ , et  $s_{n+1}$  a remplacé une feuille  $x$  de  $\tau(h)$  et  $h_d(s_{n+1}) = h_d(x)$  et  $h_g(s_{n+1}) = h_g(x)$ . De plus, il apparaît une feuille  $y$  tel que  $h_d(y) = h_d(x)$  et  $h_g(y) = h_g(x) + 1$  et une feuille  $z$  telle que  $h_d(z) = h_d(x) + 1$  et  $h_g(z) = h_g(x)$ . Alors  $h_d(s_{n+1}) - h_g(s_{n+1}) = h_d(x) - h_g(x) \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $h_d(y) - h_g(y) = h_d(x) - h_g(x) - 1 \equiv 2 \pmod{3}$  et  $h_d(z) - h_g(z) = h_d(x) + 1 - h_g(x) \equiv 1 \pmod{3}$ . Il en sera de même si  $s_{n+1}$  est pondéré par  $b$  ou  $c$ . La réciproque est évidente car si, par exemple,  $h_d(s) - h_g(s) \equiv 0 \pmod{3}$  et  $s$  est pondéré par  $b$ , alors on aura aussi  $h_d(s) - h_g(s) \equiv 2 \pmod{3}$ . ■

La deuxième réalisation canonique nous fournit donc l'interprétation combinatoire suivante, des fonctions elliptiques de Jacobi  $\text{sn}$  et  $\text{cn}$ .

**Proposition 3.3.7** 1. Soit  $\mathcal{B}_{2n+1}$  l'ensemble des arborescences binaires croissantes sur  $[2n+1]$  telles que pour tout sommet  $s$ , si  $h_d(s) - h_g(s) \equiv 1 \pmod{3}$ , alors  $s$  a un fils gauche, et si  $h_d(s) - h_g(s) \equiv 2 \pmod{3}$  alors  $s$  a un fils droit. Alors:

- i) En posant  $a_{2n+1,p} = (-1)^n(2n+1)! [k^{2p} t^{2n+1}] \text{sn}(t, k)$ ,  $a_{2n+1,p}$  est le nombre d'éléments de  $\mathcal{B}_{2n+1}$  dont le nombre de sommets  $s$  tels que  $h_d(s) - h_g(s) \equiv$

$1 \pmod{3}$  est égal à  $p$ .

ii)  $|\mathcal{B}_{2n+1}| = e_{2n+1}$ ,  $e_n$  étant le  $n^{\text{ième}}$  nombre d'Euler.

2. Soit  $\mathcal{B}_{2n}$  l'ensemble des arborescences binaires croissantes sur  $[2n]$  telles que pour tout sommet  $s$ , si  $h_d(s) - h_g(s) \equiv 2 \pmod{3}$ , alors  $s$  a un fils gauche et si  $h_d(s) - h_g(s) \equiv 0 \pmod{3}$ , alors  $s$  a un fils droit. Alors:

i) En posant  $b_{2n,p} = (-1)^n(2n)! [k^{2p}t^{2n}] \text{cn}(t, k)$ ,  $b_{2n,p}$  est le nombre d'éléments de  $\mathcal{B}_{2n}$  dont le nombre de sommets  $s$  tel que  $h_d(s) - h_g(s) \equiv 2 \pmod{3}$  est égal à  $p$ .

ii)  $|\mathcal{B}_{2n}| = e_{2n}$ .

**Démonstration** Les éléments de  $\mathcal{B}_{2n+1}$  (resp.  $\mathcal{B}_{2n}$ ) sont les réalisations des éléments de  $\mathcal{S}_{e_1}[2n+1]$  (resp.  $\mathcal{S}_{e_2}[2n]$ ) ne contenant pas de feuilles de sorte  $x$ . La figure 3.5(II) est une réalisation de l'histoire  $h_0$ . ■

### Réalisation de Viennot

Cette réalisation est une variante des deux précédentes, en suivant le schéma donné par la figure 3.5(I) [cf.(Le.-Vi. 1. 86)]. La figure 3.5(II) est une réalisation de l'histoire  $h_0$ .

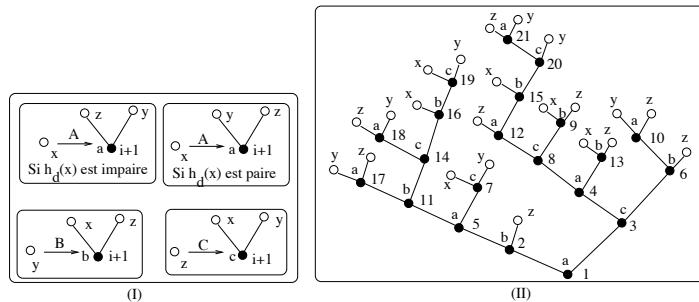


Figure 3.5: Réalisation de Viennot

En faisant  $x = 0$ , on obtient aussi les arborescences de Jacobi et l'interprétation combinatoire suivante des fonctions elliptiques de Jacobi, qui n'est autre qu'une réécriture de celle donnée par G. X. Viennot dans [cf. (Vi.1 80)].

**Proposition 3.3.8** Le coefficient  $a_{2n+1,p} = (-1)^n(2n+1)! [k^{2p}t^{2n+1}] \text{sn}(t, k)$  (resp.  $b_{2n,p} = (-1)^n(2n)! [k^{2p}t^{2n}] \text{cn}(t, k)$ ), est le nombre d'arborescences de Jacobi sur  $[2n+1]$  (resp.  $[2n]$ ) dont le nombre de sommets de hauteur droite impaire est  $2p$ . ■

### Réalisation alternante.

La réalisation est faite de façon qu'en prenant  $x = 0$ ,  $y = z = 1$ , on obtienne une interprétation des fonctions elliptiques de Jacobi en termes d'arborescences

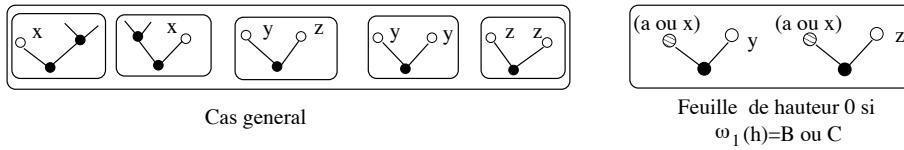


Figure 3.6: Condition d'une réalisation alternante

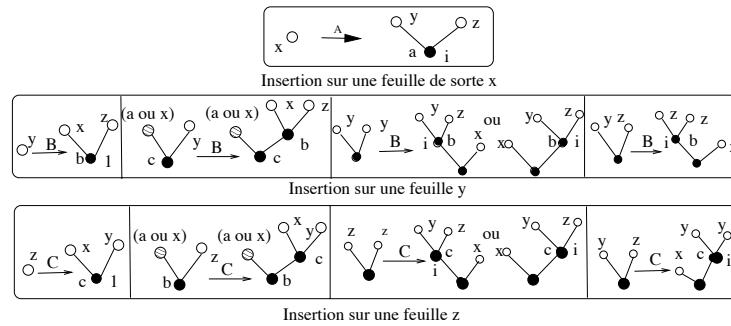
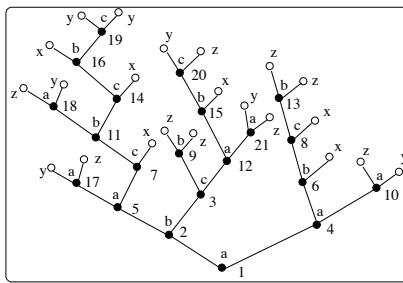


Figure 3.7: Insertion des sommets

Figure 3.8: Réalisation alternante de  $h_0$ 

binaires complètes, donc en termes de permutations alternantes. Les conditions données par la figure 3.6 doivent être remplies.

C'est-à-dire que toute feuille de sorte  $x$ , admet comme frère un sommet interne, et que toute feuille de sorte  $y$  ou  $z$  admet comme sœur, une feuille de sorte  $y$  ou  $z$ , sauf dans le cas de la réalisation d'une histoire  $h \in \mathcal{S}_{e_2}[n]$  (resp.  $h \in \mathcal{S}_{e_3}[n]$ ) où la feuille à l'extrême droite sera toujours une feuille de sorte  $y$  ou de sorte  $z$ , suivant le cas. L'insertion du nouveau sommet  $i$  sera alors effectuée suivant le schéma donné par la figure 3.7. La figure 3.8 est la réalisation de  $h_0$ .

### Réalisation à la Dumont

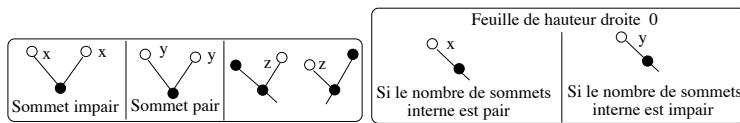
Rappelons que  $i$  est un pics de cycle de  $\sigma$  si  $\sigma^{-1}(i) < i > \sigma(i)$ . Dans [(Dum. 80)], Dumont a démontré que les polynômes de Schett vérifient (voir

remarque 3.3.4):

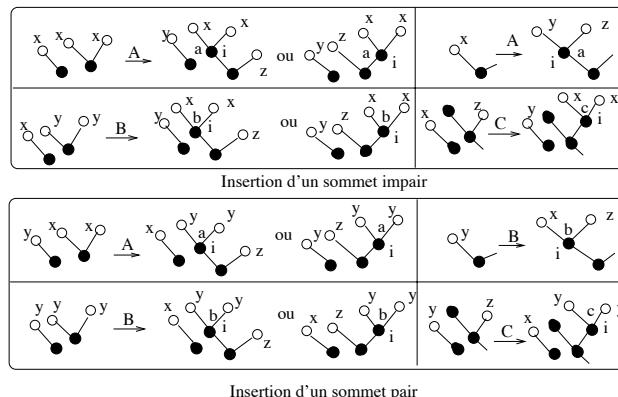
$$X_{2n}(x, y, z) = x \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{2n}} x^{\text{inci}(\sigma)} y^{\text{incp}(\sigma)} z^{b(\sigma)},$$

$$X_{2n+1}(x, y, z) = y \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{2n+1}} x^{\text{inci}(\sigma)} y^{\text{incp}(\sigma)} z^{b(\sigma)},$$

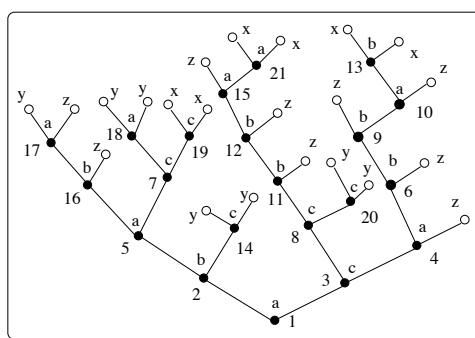
où  $\text{inci}(\sigma)$  (resp  $\text{incp}(\sigma)$ ) est le nombre d'arêtes incidentes à un pic de cycle impair (resp. pair) et  $b(\sigma)$  le nombre d'arêtes non incidente à un pic de cycle.



**Figure 3.9:** Condition de l'insertion pour la réalisation à la Dumont



**Figure 3.10:** Insertion d'un sommet  $i$



**Figure 3.11:** Réalisation de Dumont

Remarquons que sur une arborescence binaire croissante, les pics de cycles correspondent aux feuilles (sauf la feuille de hauteur droite 0 s'il en existe). Les conditions à réaliser sont données par la figure 3.9. Dans ce cas l'insertion d'un élément dépend de la parité de celui-ci (Figure 3.10). La figure 3.11 est une réalisation de  $h_0$ .

### 3.3.3 Bijections entre les diverses interprétations combinatoires des fonctions elliptiques

Rappelons que  $(F, \phi)$  est une réalisation de l'historiographe  $(\mathcal{H}, u_0)$  si et seulement si  $\phi : F \rightarrow \mathcal{H}_{u_0}$  est un isomorphisme de L-espèces (définition 3.1.5).

**Lemme 3.3.9** Si  $(F, \phi)$  et  $(G, \psi)$  sont deux réalisations de l'historiographe  $(\mathcal{H}, u_0)$ , alors  $F$  et  $G$  sont isomorphes.

**Démonstration** Ce lemme est évident car nous avons l'isomorphisme  $\psi^{-1} \circ \phi : F \rightarrow G$ . ■

Ce résultat montre l'équivalence, via les histoires, des diverses interprétations présentées ci-dessus. En particulier, le modèle de Dumont satisfait aussi au système différentiel (3.6). ■

**Exemple 3.3.10** Dans l'exemple suivant, nous allons montrer comment construire une bijection entre le modèle de Dumont et le modèle de Viennot. Cette bijection consiste à:

- reconstituer l'histoire  $\phi(A_\sigma)$ , de l'arborescence  $A_\sigma$  associée à la permutation  $\sigma$ ,
- construire la réalisation de Viennot de  $\phi(A_\sigma)$ .

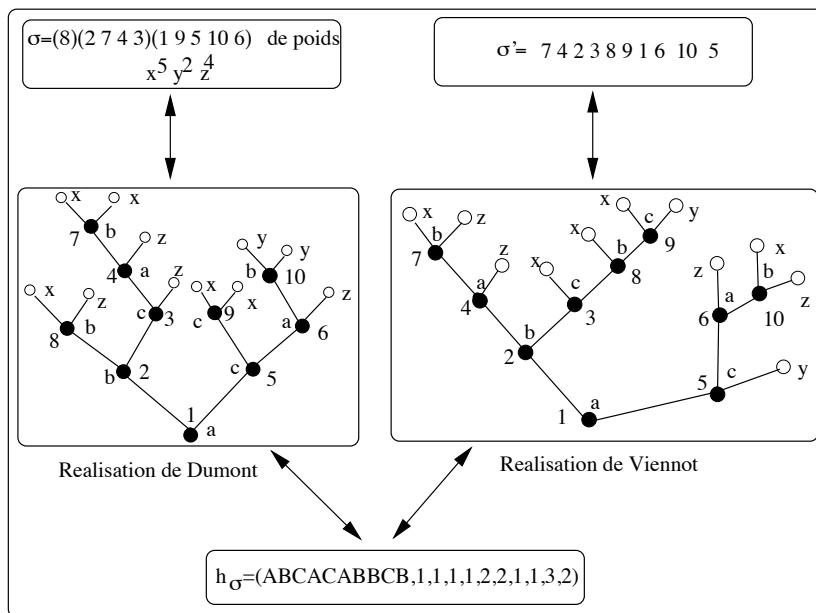


Figure 3.12: La bijection entre modèle de Dumont et modèle de Viennot

Soit  $\sigma = (8)(2\ 7\ 4\ 3)(1\ 9\ 5\ 10\ 6) \in \mathbb{S}_{10}$ . Les pics de cycle impairs sont 7 et 9, tandis que 10 est le seul pic de cycle pair. Donc selon le modèle de

Dumont, le poids de  $\sigma$  est par définition  $x^5y^2z^4$ . En utilisant les relations de la proposition 3.3.3, on démontre que le poids de l'histoire  $h_\sigma$  associée est  $\pi(h_\sigma) = a^3b^4c^3x^5y^2z^4$ . En émondant l'arborescence binaire associée à  $\sigma$  [figure 3.12(1)], on arrive à reconstituer l'histoire  $h$  associée à  $A_\sigma$  [figure 3.12]. Par exemple, en enlevant le sommet 10, on voit, d'une part, que 6 est un pic de cycle pair, auquel est attaché normalement deux feuilles du type  $y$  et d'autre part, que la feuille de hauteur gauche 0 est de sorte  $y$ . Donc le sommet 10 est pondéré  $b$  et a été placé à la deuxième feuille du type  $y$ . Et ainsi de suite... On en déduit que  $h_\sigma = (ABCACABBCB, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 2)$ . Il nous suffit de construire la réalisation de Viennot de  $h_\sigma$ . ■

**Remarque 3.3.11** Pour toute réalisation  $F_v$  de  $\mathcal{S}$ , il existe une pondération  $w$  sur l'espèce  $\mathbb{S}$  des permutations [cf. remarque 3.3.4 ii)] pour que les espèces pondérées  $F_v$  et  $\mathbb{S}_w$  soient isomorphes. Ceci nous permet d'établir une bijection entre les permutations alternantes et les permutations de Jacobi.

**Exemple 3.3.12** Considérons  $\sigma = 11\ 4\ 7\ 6\ 8\ 1\ 3\ 2\ 13\ 10\ 12\ 5\ 9$ , une permutation alternante. En remarquant que  $h_\sigma \in \mathcal{S}_{e_1}[13]$ , c'est-à-dire que le sommet 1 est pondéré par  $a$ , nous pouvons reconstituer l'histoire  $h_\sigma$  associée à  $b$ . Ainsi, nous avons  $h_\sigma = (ACBAACBACAACA, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 2, 1, 5, 1)$ . La réalisation de Viennot de  $h_\sigma$  nous donne l'arborescence de Jacobi dont la permutation de Jacobi associée est  $\sigma' = 11\ 7\ 4\ 8\ 6\ 3\ 1\ 13\ 12\ 10\ 9\ 5\ 2$  (Voir figure 3.13). ■

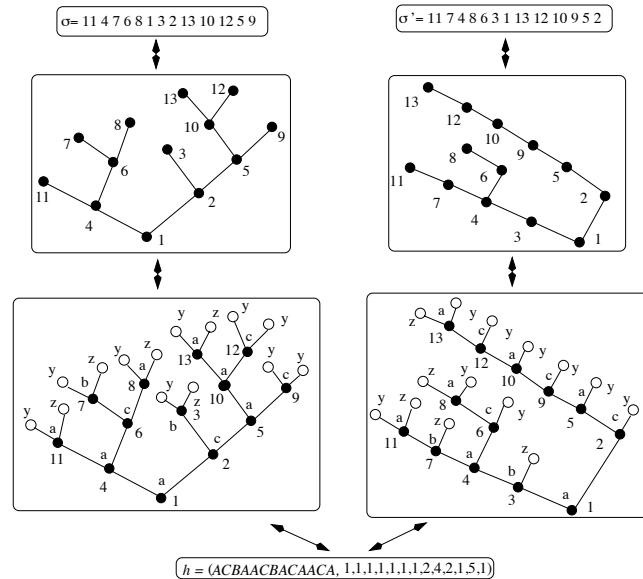


Figure 3.13: Bijection entre permutation alternante et permutation de Jacobi.

### 3.4 Les mots de Schett

Le but de cette section est de définir une méthode de génération des mots non commutatifs engendrés par la grammaire de Schett. De cette génération, on déduit une méthode de calcul des nombres de Catalan (section suivante). Pour l'historiographe de Schett, nous utilisons la première réalisation canonique.

#### 3.4.1 Mots de Schett

Notons  $\mathcal{M}$  l'ensemble de tous les mots non commutatifs de longueur finie sur l'alphabet  $A = \{x, y, z, a, b, c\}$ ,  $\mathcal{P}_f(\mathcal{M})$  l'ensemble des parties finies de  $\mathcal{M}$ , et considérons la grammaire  $G : \{x \mapsto yaz, y \mapsto xbz, z \mapsto xcy\}$ , associée à l'historiographe de Schett. À cette grammaire, nous associons l'application, dénotée  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}_f(\mathcal{M})$  telle que si  $\omega = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n$  et  $\omega' = \alpha'_1\alpha'_2 \cdots \alpha'_{n+2}$ , alors  $\omega' \in \mathcal{G}(\omega)$  si et seulement s'il existe  $i \in [n]$  tel que pour tout  $j < i$ ,  $\alpha'_j = \alpha_j$ ,  $\alpha_i \in \{x, y, z\}$  et  $\alpha'_i\alpha'_{i+1}\alpha'_{i+2} = G(\alpha_i)$ , et pour tout  $j > i + 2$ ,  $\alpha'_j = \alpha_{j-2}$ . En d'autres termes,  $\omega'$  est obtenu de  $\omega$  en remplaçant une lettre  $\alpha_i = x, y$  ou  $z$  par  $G(\alpha_i)$ . ■

Considérons la suite  $C_n(x)$  définie récursivement par  $C_0(x) = \{x\}$ ,  $C_{n+1}(x) = \cup_{\omega \in C_n(x)} \mathcal{G}(\omega)$ , et posons  $C_x = \cup_n C_n(x)$ . On définit de manière analogue les ensembles  $C_n(y)$ ,  $C_y$ ,  $C_n(z)$  et  $C_z$ . Notons que  $C_n(x) \cap C_n(y) = C_n(x) \cap C_n(z) = C_n(y) \cap C_n(z) = \emptyset$ .

Dans la suite, nous écrivons  $C_n$  pour l'un quelconque des ensembles  $C_n(x)$ ,  $C_n(y)$ , et  $C_n(z)$ .

**Définition 3.4.1** Les éléments de  $C_x$  (resp.  $C_y$ , resp.  $C_z$ ) sont appellés *mots de Schett* initialisés en  $x$  (resp. en  $y$ , resp. en  $z$ ).

**Remarque 3.4.2** i) Tout élément de  $C_n$  est de longueur  $2n + 1$ , de plus, si  $\omega = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{2n+1} \in C_n$  alors  $\alpha_{2k+1} \in \{x, y, z\}$ ,  $\alpha_{2k} \in \{a, b, c\}$ .

ii)  $\mathcal{S}$  étant l'historiographe de Schett, si  $h \in \mathcal{S}_{e_1}[n]$ , alors la réalisation de  $h$  est une arborescence binaire croissante ayant  $n$  sommets internes pondérés par un élément de  $\{a, b, c\}$  et  $n + 1$  sommets externes pondérés par un élément de  $\{x, y, z\}$ . En oubliant l'étiquetage de cette arborescence, et en projetant sur un axe horizontal on obtient un mot de Schett. De plus tout mot de Schett peut être construit de cette manière.

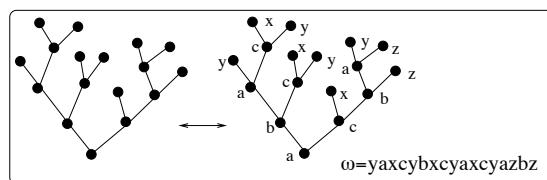


Figure 3.14: Pondération d'une arborescence binaire complète non étiquetée

D'autre part, étant donnée une arborescence binaire complète non étiquetée ayant  $2n+1$  sommets (parmi lesquels  $n$  sont nécessairement des sommets internes et  $n+1$  des feuilles), il existe une seule façon de pondérer les sommets internes par les éléments de  $\{a, b, c\}$  et les feuilles par les éléments de  $\{x, y, z\}$  [Figure 3.14] de façon qu'en l'étiquetant de manière croissante, on obtienne une instance la première réalisation canonique d'une histoire de  $\mathcal{S}_{e_1}[n]$ .

**Proposition 3.4.3** *Pour tout  $n$ ,  $|C_n| = c_n$ ,  $c_n$  étant le  $n$ -ième nombre de Catalan.*

**Démonstration** Rappelons que le nombre d'arborescences binaires non étiquetées  $n$  sommets, qui est égal au nombre d'arborescences binaires complètes non étiquetées ayant  $2n+1$  sommet, est le  $n$ -ième nombre de Catalan  $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ . La remarque 3.4.2 ii) montre qu'il existe une bijection entre les mots de Schett de longueur  $2n+1$  et les arborescences binaires complètes non étiquetées sur  $2n+1$  points.

Une autre façon de le voir est de remarquer que tout mot  $\omega_x \in C_x$  se décompose de manière unique sous la forme  $\omega_x = \omega_y a \omega_z$ , où  $\omega_y \in C_y$  et  $\omega_z \in C_z$ . Donc le nombre des mots de Schett satisfont la récurrence  $d_{n+1} = \sum_{k=0}^n d_k d_{n-k}$ .

**Remarque 3.4.4** i) Si  $G(\alpha) = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ , alors  $\alpha \neq \alpha_i$  pour chaque  $i$ .

ii) Si  $\omega$  et  $\omega'$  deux mots distincts de  $C_{n-1}(x)$ , et  $\omega'' \in C_n(x)$  tels que  $\omega'' \in \mathcal{G}(\omega) \cap \mathcal{G}(\omega')$ , alors il existe un couple  $(i, j)$  tel que  $\omega = \alpha_1 \cdots \alpha_{2i-1} \alpha_{2i} \cdots \alpha_{2j-2} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \alpha_{2j} \cdots \alpha_{2n-3}$ ,  $\omega' = \alpha_1 \cdots \alpha_{2i-2} \beta_1 \beta_2 \beta_3 \alpha_{2i} \cdots \alpha_{2j-1} \cdots \alpha_{2n-3}$  et  $\omega'' = \alpha_1 \cdots \alpha_{2i-2} \beta_1 \beta_2 \beta_3 \alpha_{2i} \cdots \alpha_{2j-2} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \alpha_{2j} \cdots \alpha_{2n-3}$ , où  $\beta_1 \beta_2 \beta_3 = G(\alpha_{2i-1})$  et  $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = G(\alpha_{2j-1})$ . Le couple  $(i, j)$  ainsi défini est unique et on a  $j \geq i+1$ . Notons que si  $j = i+1$ , alors  $\alpha_{2i-1} = z$ ,  $\alpha_{2j-1} = x$ ,  $\omega = \alpha_1 \cdots \alpha_{2i-2} z a z \cdots \alpha_{2n-3}$ ,  $\omega' = \alpha_1 \cdots \alpha_{2i-2} x c x \cdots \alpha_{2n-3}$  et  $\omega'' = \alpha_1 \cdots \alpha_{2i-2} x c y a z \cdots \alpha_{2n-3}$ .

iii) Si  $\omega$  et  $\omega'$  sont deux éléments de  $\mathcal{G}(\overline{\omega})$ , alors  $\mathcal{G}(\omega) \cap \mathcal{G}(\omega') \neq \emptyset$ . En effet, si  $\overline{\omega} = \alpha_1 \cdots \alpha_i \cdots \alpha_j \cdots \alpha_n$ ,  $\omega = \alpha_1 \cdots G(\alpha_i) \cdots \alpha_n$  et  $\omega' = \alpha_1 \cdots G(\alpha_j) \cdots \alpha_n$  et si  $\omega \neq \omega'$  alors  $i \neq j$  et  $\alpha_1 \cdots G(\alpha_i) \cdots G(\alpha_j) \cdots \alpha_n \in \mathcal{G}(\omega) \cap \mathcal{G}(\omega')$ . ■

**Proposition 3.4.5** *Si  $\omega, \omega'$ , sont deux éléments de  $C_{n-1}$  tels que  $\omega \neq \omega'$  alors  $\mathcal{G}(\omega) \cap \mathcal{G}(\omega') = \emptyset$  ou  $|\mathcal{G}(\omega) \cap \mathcal{G}(\omega')| = 1$ .*

**Démonstration** Soient  $\omega, \omega'$ , tels que  $\omega \neq \omega'$  et  $\mathcal{G}(\omega) \cap \mathcal{G}(\omega') \neq \emptyset$  et considérons  $\omega_1''$  et  $\omega_2''$  deux éléments de  $\mathcal{G}(\omega) \cap \mathcal{G}(\omega')$ , ainsi que les couples  $(i, j)$  et  $(k, r)$  définis par la remarque 3.4.4 ii), associés respectivement à  $\omega_1''$  et  $\omega_2''$ . Remarquons que si  $(i, j) = (k, r)$ , alors  $\omega_1'' = \omega_2''$ .

Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que  $i \leq k$ . Posons  $\omega = \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{2n-1}$ ,  $\omega' = \mu'_1 \mu'_2 \cdots \mu'_{2n-1}$ ,  $\omega_1'' = a_1 a_2 \cdots a_{2n+1}$  et  $\omega_2'' = b_1 b_2 \cdots b_{2n+1}$ . Si

$i < k$  alors  $b_{2i-1} = \mu_{2i-1} = \mu'_{2i-1}$  car pour tout  $l < 2k-1$ ,  $b_l = \mu_l = \mu'_l$ . D'autre part,  $a_{2i-1}a_2a_{2i+1} = \mu'_{2i-1}\mu'_{2i}\mu'_{2i+1} = G(\mu_{2i-1})$ . Ce qui est impossible. Donc on doit avoir  $i = k$ . Alors pour tout  $l < \min(2j-1, 2r-1)$ ,  $a_l = b_l$ . Supposons que  $j \leq r$ . Si  $j < r$ , alors d'une part,  $a_{2r+3} = \mu_{2r+1} = \mu'_{2r+1}$  car pour tout  $l > 2j+1$ ,  $a_{l+2} = \mu_l = \mu'_l$ , d'autre part, comme  $\mu_{2r-1}\mu_{2r}\mu_{2r+1} = G(\mu'_{2r-1})$ . Ce qui est impossible. Nécessairement  $j = r$ , c'est-à-dire que  $\omega'' = \omega_2''$ . ■

**Proposition 3.4.6** *Si  $\omega$ ,  $\omega'$ , et  $\omega''$  sont deux à deux distincts dans  $\mathcal{G}(\bar{\omega})$ , alors  $\mathcal{G}(\omega) \cap \mathcal{G}(\omega') \cap \mathcal{G}(\omega'') = \emptyset$ .*

**Démonstration** Soient maintenant  $\omega$ ,  $\omega'$ , et  $\omega''$  trois éléments de  $\mathcal{G}(\bar{\omega})$ . Posons  $\bar{\omega} = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ ,  $\omega = \alpha_1\cdots G(\alpha_i)\cdots\alpha_n$ ,  $\omega' = \alpha_1\cdots G(\alpha_j)\cdots\alpha_n$ , et  $\omega'' = \alpha_1\cdots G(\alpha_k)\cdots\alpha_n$ , et supposons que  $\omega \neq \omega'$  et  $\omega \neq \omega''$ . La remarque 3.4.4 iii) et la proposition précédente montrent que  $|\mathcal{G}(\omega) \cap \mathcal{G}(\omega')| = |\mathcal{G}(\omega) \cap \mathcal{G}(\omega'')| = 1$ . Soient  $\omega_1 \in \mathcal{G}(\omega) \cap \mathcal{G}(\omega')$  et  $\omega_2 \in \mathcal{G}(\omega) \cap \mathcal{G}(\omega'')$ . Alors  $\omega_1 = \alpha_1\cdots G(\alpha_i)\cdots G(\alpha_j)\cdots\alpha_n$  et  $\omega_2 = \alpha_1\cdots G(\alpha_i)\cdots G(\alpha_k)\cdots\alpha_n$ . D'autre part, si  $\mathcal{G}(\omega) \cap \mathcal{G}(\omega') \cap \mathcal{G}(\omega'') \neq \emptyset$ , alors  $\omega^{(1)} = \omega^{(2)}$ . C'est-à-dire que  $j = k$  et  $\omega' = \omega''$ . ■

### 3.4.2 Génération des mots de Schett

Définissons un ordre total sur les ensembles  $C_n(x)$ . Remarquons que si  $\omega = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2n+1} \in C_n(x)$ , alors l'ensemble  $\mathcal{G}(\omega)$  est totalement ordonné par la relation " $\alpha_1\cdots G(\alpha_i)\cdots\alpha_{2n+1} \leq \alpha_1\cdots G(\alpha_j)\cdots\alpha_{2n+1}$  si et seulement si  $i \leq j$ ". Supposons que pour un entier  $n \geq 1$ , il existe un ordre sur  $C_n(x)$ , qui prolonge les ordres des ensembles  $\mathcal{G}(\omega)$ ,  $\omega \in C_{n-1}(x)$ , et que  $C_n(x) = \{\omega_1^n < \omega_2^n < \cdots < \omega_{c_n}^n\}$ . Considérons les ensembles  $\mathbb{D}(\omega_i^n)$ ,  $1 \leq i \leq c_n$ , tels que  $\mathbb{D}(\omega_i^n) = \mathcal{G}(\omega_i^n) \setminus \cup_{j=1}^{i-1} \mathcal{G}(\omega_j^n)$ . Il est clair que les ensembles  $\mathbb{D}(\omega_i^n)$  sont deux à deux disjoints et que  $C_{n+1}(x) = \cup_{i=1}^{c_n} \mathbb{D}(\omega_i^n)$ . On définit alors un ordre sur  $C_{n+1}(x)$  en posant  $C_{n+1}(x) = \mathbb{D}(\omega_1^n) +_o \mathbb{D}(\omega_2^n) +_o \cdots +_o \mathbb{D}(\omega_{c_n}^n)$ . Les ensembles  $C_n(x)$  seront munis de l'ordre total ainsi défini récursivement. D'autre part, posons  $c_{n,i} = |\mathbb{D}(\omega_i^n)|$ .

**Lemme 3.4.7** *Soit  $\omega_i^n = \alpha_1\cdots\alpha_{2n+1} \in C_n(x)$  tel que  $\omega_{i,1}^{n+1} = \alpha_1\cdots G(\alpha_{2s-1})\cdots\alpha_{2n+1} \in C_{n+1}(x)$  est le plus petit élément de  $\mathbb{D}(\omega_i^n)$ . Si  $\omega = \alpha_1\cdots G(\alpha_{2r-1})\cdots\alpha_{2n+1}$  est un élément de  $\mathcal{G}(\omega_i^n)$ , alors  $\omega \in \mathbb{D}(\omega_i^n)$  si et seulement si  $r \geq s$ . En particulier,  $s = n + 2 - c_{n,i}$ .*

**Démonstration** La condition est suffisante. En effet, si  $r < s$ , alors  $\omega < \omega_{i,1}^{n+1}$  dans  $\mathcal{G}(\omega_i^n)$ . Et comme  $\omega_{i,1}^{n+1}$  est le plus petit élément de  $\mathbb{D}(\omega_i^n)$ , alors  $\omega \notin \mathbb{D}(\omega_i^n)$ . Réciproquement, supposons que  $\omega \notin \mathbb{D}(\omega_i^n)$ . Comme  $\omega \in \mathcal{G}(\omega_i^n)$ , alors il existe un  $j < i$  tel que  $\omega \in \mathbb{D}(\omega_j^n)$ . Il est clair que  $\omega < \omega_{i,1}^{n+1}$  dans  $C_{n+1}(x)$ , donc dans  $\mathcal{G}(\omega_i^n)$ , c'est-à-dire que  $r < s$ . ■

Posons  $\mathbb{D}(\omega_i^n) = \{\omega_{i,1}^{n+1} < \cdots < \omega_{i,c_{n,i}}^{n+1}\}$ , avec  $\omega_{i,1}^{n+1} = \alpha_1\cdots G(\alpha_{2s-1})\cdots\alpha_{2n+1}$ . Le lemme précédent montre que pour tout  $0 \leq j \leq c_{n,i} - 1$ , on a  $\omega_{i,j+1}^{n+1} = \alpha_1\cdots G(\alpha_{2(s+j)-1})\cdots\alpha_{2n+1}$ . Soit, de plus,  $G(\alpha_{2(s+j)-1}) = \beta_1^j\beta_2^j\beta_3^j$ .

### Proposition 3.4.8 Génération récursive des mots de Schett

Pour tout  $j$ ,  $0 \leq j \leq c_{n,i}-1$ ,  $\mathbb{D}(\omega_{i,j+1}^{n+1}) = \{\omega = \alpha_1 \cdots \alpha_{2(s+j-1)} \beta_1^j \beta_2^j \beta_3^j \alpha_{2(s+j)} \cdots G(\alpha_{2r+1}) \cdots \alpha_{2n+1}, s+j \leq r \leq n\} \cup \{\omega_{1,j}, \omega_{3,j}\}$ , où  $\omega_{1,j} = \alpha_1 \cdots \alpha_{2(s+j-1)} G(\beta_1^j) \beta_2^j \beta_3^j \alpha_{2(s+j)} \cdots \alpha_{2n+1}$  et  $\omega_{3,j} = \alpha_1 \cdots \alpha_{2(s+j-1)} \beta_1^j \beta_2^j G(\beta_3^j) \alpha_{2(s+j)} \cdots \alpha_{2n+1}$ .

**Démonstration** Il suffit de montrer que  $\omega_{1,j}$  est le plus petit élément de  $\mathbb{D}(\omega_{1,j}^{n+1})$ . Si  $\omega = \alpha_1 \cdots G(\alpha_{2r+1}) \cdots \alpha_{2(s+j-1)} \beta_1^j \beta_2^j \beta_3^j \alpha_{2(s+j)} \cdots \alpha_{2n+1}$ , avec  $1 \leq r \leq s+j-2$ , alors on peut écrire  $\omega = \alpha_1 \cdots G(\alpha_{2r+1}) \cdots \alpha_{2(s+j-1)} G(\alpha_{2(s+j)-1}) \alpha_{2(s+j)} \cdots \alpha_{2n+1}$ . C'est-à-dire que, en posant  $\bar{\omega} = \alpha_1 \cdots G(\alpha_{2r+1}) \cdots \alpha_{2(s+j-1)} \alpha_{2(s+j)-1} \alpha_{2(s+j)} \cdots \alpha_{2n+1}$ , nous avons  $\omega \in G(\bar{\omega})$ . Comme  $r \leq s+j-2$ , alors  $\bar{\omega} < \omega_{i,j}^{n+1}$  dans  $\mathcal{G}(\omega_i^n)$ . D'où il existe  $\bar{\omega}' \in \mathcal{G}(\omega_i^n)$  tel que  $\bar{\omega}' \leq \bar{\omega}$  et  $\omega \in \mathbb{D}(\bar{\omega}')$ . On en déduit que  $\omega \notin \mathbb{D}(\omega_{i,j}^{n+1})$ . ■

La table 1 de l'appendice B nous donne les premiers mots de Schett, construits à l'aide de cette méthode de génération.

**Corollaire 3.4.9** Pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq c_{n,i}$ ,  $|\mathbb{D}(\omega_{i,j}^{n+1})| = c_{n,i} + 2 - j$ , où  $c_{n,i} = |\mathbb{D}(\omega_i^n)|$ . ■

En effet,  $|\mathbb{D}(\omega_{i,j}^n)| = n - (s+j-1) + 2 = n - (n+1 - c_{n,i} + j - 1) + 2 = c_{n,i} - j + 2$ .

### 3.4.3 Mots de Jacobi et suite associée aux nombres de Catalan

Dans cette sous-section, nous introduisons les mots de Jacobi, qui sont les mots de Schett associés aux arborescences de Jacobi non étiquetées, donc aux histoires de Schett dont l'état final est de la forme  $u = (0, \alpha, \beta)$ . Ces mots sont dénombrés par une suite liée aux nombres de Catalan.

**Définition 3.4.10** Nous appelons *mot de Jacobi* tout mot de Schett ne contenant pas la lettre  $x$ . ■

Dans la table 1 de l'appendice B, les mots de Jacobi sont soulignés.

**Proposition 3.4.11** Soit  $\omega = \alpha_1 \cdots \alpha_{2n+1}$ , tel que  $\mathbb{D}(\omega) = \{\omega_1 < \cdots < \omega_r\}$ . Le mot  $\omega$  est de Jacobi si et seulement si pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , l'élément minimum de  $\mathbb{D}(\omega_i)$  est un mot de Jacobi.

**Démonstration** Notons d'abord que si  $\omega$  est de Jacobi, alors pour tout  $\omega' \in \mathcal{G}(\omega)$ ,  $\omega'$  contient une seule occurrence de  $x$ . La condition est alors nécessaire. En effet pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , posons  $\omega_i = \alpha_1 \cdots G(\alpha_{2(s+i)-1}) \cdots \alpha_{2n+1} = \alpha_1 \cdots \alpha_{2(s+i-1)} x \beta_2^i \beta_3^i \cdots \alpha_{2n+1}$ . La proposition 3.4.8 montre alors que l'élément minimum de  $\mathbb{D}(\omega_i)$  est  $\alpha_1 \cdots \alpha_{2(s+i-1)} y a z \beta_2^i \beta_3^i \cdots \alpha_{2n+1}$ . Donc il est de Jacobi. Et réciproquement si l'élément minimum de  $\omega_i = \alpha_1 \cdots G(\alpha_{2(s+i)-1}) \cdots \alpha_{2n+1}$  est de Jacobi, alors  $G(\alpha_{2(s+i)-1}) = x \beta_2^i \beta_3^i$ , c'est-à-dire que  $\alpha_{2(s+i)-1} \neq x$ . D'où  $\omega$  est de Jacobi. ■

**Remarque 3.4.12** 1) Si  $n$  est pair (resp impair), alors tout élément de  $\mathbb{D}_n(x)$  contient un nombre impair (resp pair) d'occurrences de  $x$ , et tout élément de

$\mathbb{D}_n(y)$  contient un nombre pair (resp impair) d'occurrences de  $x$ . En particulier, les mots de Jacobi initialisés en  $x$  (resp.  $y$ ,  $z$ ) sont des éléments de  $\cup_{n \in \mathbb{N}} C_{2n+1}(x)$  (resp.  $\cup_{n \in \mathbb{N}} C_{2n}(y)$ ,  $\cup_{n \in \mathbb{N}} C_{2n}(z)$ ).

2) Pour tout entier  $n$ , posons  $\mathcal{J}_{2n+1}(x) = \{\omega \in C_{2n+1}(x), \text{ tel que } \omega \text{ est de Jacobi}\}$ . On définit de manière analogue les ensembles  $\mathcal{J}_{2n}(y)$  et  $\mathcal{J}_{2n}(z)$ . Et si  $\omega \in \mathcal{J}_{2n-1}(x)$ , posons  $\mathbb{J}(\omega) = \mathcal{J}_{2n+1}(x) \cap (\cup_{\omega_i \in \mathbb{D}(\omega)} \mathbb{D}(\omega_i))$ . La proposition 3.4.11 montre que les ensembles  $\mathcal{J}_{2n+1}(x)$ ,  $\mathcal{J}_{2n}(y)$  et  $\mathcal{J}_{2n}(z)$  sont engendrés par la grammaire  $\mathcal{F} =: \{y \rightarrow yazbz, z \rightarrow yazcy\}$ . Notons aussi que les éléments de  $\mathcal{J}_{2n+1}(x)$  sont de longueur  $4n+3$ .

3) Les ensembles  $\mathcal{J}_{2n-1}(x)$  étant munis de l'ordre induit par l'ordre de  $C_{2n+1}(x)$ , la proposition 3.4.7 montre qu'étant donné  $\omega = \alpha_1 \cdots \alpha_{4n-1} \in \mathcal{J}_{2n-1}(x)$ , si  $\omega' = \alpha_1 \cdots \alpha_{2s} \mathcal{F}(\alpha_{2s-1}) \cdots \alpha_{4n-1}$  est le plus petit élément de  $\mathbb{J}(\omega)$  et  $\overline{\omega} = \alpha_1 \cdots \mathcal{F}(\alpha_{2r-1}) \cdots \alpha_{4n-1}$  est un élément de  $\mathcal{F}(\omega)$ , alors  $\overline{\omega} \in \mathbb{J}(\omega)$  si et seulement si  $r \geq s$ . En particulier  $s = 2n - |\mathbb{J}(\omega)| + 1$ . Donc, en posant  $\mathbb{J}(\omega) = \{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r\}$ , on aura  $\omega^i = \alpha_1 \cdots \mathcal{F}(\alpha_{2(2n-r+i)-1}) \cdots \alpha_{4n-1}$ . Et si on pose  $\mathcal{F}(\alpha_{2(2n-r+i)-1}) = yaz\beta_1^i\beta_2^i$ , alors  $\mathcal{F}(\omega^i) = \{\alpha_1 \cdots \mathcal{F}(\alpha_{2j-1}) \cdots \alpha_{4n-1}, j > 2n + r - i\} \cup \{\omega_1^i, \omega_2^i, \omega_3^i\}$ , où  $\omega_1^i = \alpha_1 \cdots \alpha_{2(2n-r+i)-2} yazbzaz\beta_1^i\beta_2^i \cdots \alpha_{4n-1}$ ,  $\omega_2^i = \alpha_1 \cdots \alpha_{2(2n-r+i)-2} yayazcy\beta_1^i\beta_2^i \cdots \alpha_{4n-1}$  et  $\omega_3^i = \alpha_1 \cdots \alpha_{2(2n-r+i)-2} yaz\beta_1^i\mathcal{F}(\beta_2^i) \cdots \alpha_{4n-1}$ . On en déduit en particulier que  $|\mathcal{F}(\omega^i)| = r - i + 3$ . On a des résultats analogue pour  $\mathcal{J}_{2n}(y)$  et  $\mathcal{J}_{2n}(z)$ . Il existe donc une génération des mots de Jacobi semblable à celle des mots de Catalan (Appendice B tables 2 et 3). ■

Posons  $\kappa_{2n+1} = |\mathcal{J}_{2n+1}(x)|$  et  $\kappa_{2n} = |\mathcal{J}_{2n}(y)|$ . Remarquons que les nombres  $\kappa_n$  dénombrent les arborescences de Jacobi non étiquetées ayant  $n$  sommets.

**Proposition 3.4.13** *La suite  $\kappa_n$  satisfait la récurrence:*

$$\kappa_{2n+2} = \sum_{k=0}^n \kappa_{2k+1} \kappa_{2n-2k}, \text{ et } \kappa_{2n+1} = \sum_{k=0}^n \kappa_{2k} \kappa_{2n-2k}.$$

En d'autres termes, si  $A(t) = \sum_{n \geq 0} \kappa_{2n+1} t^{2n+1}$  et  $B(t) = \sum_{n \geq 0} \kappa_{2n} t^{2n}$ , alors

$$A(t) = tB^2(t), \text{ et } B(t) = 1 + tA(t)B(t). \quad (3.7)$$

**Démonstration** La relation de récurrence vient du fait que tout élément  $\omega_x$  (resp.  $\omega_y$ , resp.  $\omega_z$ ) de  $\mathcal{J}(x)$  (resp.  $\mathcal{J}(y)$ , resp.  $\mathcal{J}(z)$ ) se décompose de manière unique sous la forme  $\omega_x = \omega_y a \omega_z$  (resp.  $\omega_y = \omega_x b \omega_z$ , resp.  $\omega_z = \omega_x c \omega_y$ ) et que  $|\mathcal{J}_{2n}(y)| = |\mathcal{J}_{2n}(z)|$ . D'autre part,

$$A(t) = t \sum_{n \geq 0} \kappa_{2n+1} t^{2n} = t \sum_{n \geq 0} (\sum_{k=0}^n \kappa_{2k} \kappa_{2n-2k}) t^{2n} = tB^2(t),$$

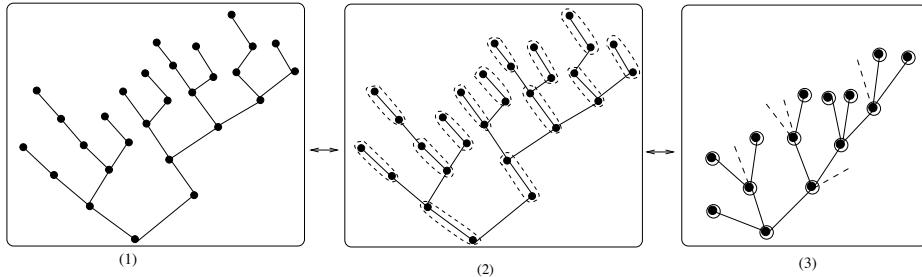
et  $B(t) = 1 + t(\sum_{n \geq 0} \kappa_{2n+2} t^{2n+1}) = 1 + t \sum_{n \geq 0} (\sum_{k=0}^n \kappa_{2k+1} \kappa_{2n-2k}) t^{2n+1} = 1 + tA(t)B(t)$ . ■

**Proposition 3.4.14** *Nous avons  $\kappa_{2n} = \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}$  et  $\kappa_{2n+1} = \frac{1}{3n+2} \binom{3n+2}{n}$ .*

**Démonstration** Utilisons la formule d'inversion de Lagrange [cf. (B.L.L. 94) ou (B.L.L. 98) Chapitre 3]. Nous avons  $B(t) = 1 + t^2 B^3(t)$ . Posons  $C = B - 1$ , alors  $C(0) = 0$  et  $C = t^2(1 + C)^3$ . De plus, pour  $n \geq 1$ ,  $\kappa_{2n} = [t^{2n}]B(t) = [t^{2n}]C(t) = [t^n]\varphi(t)$  où  $\varphi$  est la série telle que  $C(t) = \varphi(t^2)$ . Il est clair que  $\varphi = t(1 + \varphi)^3$ . Si  $R(t) = (1 + t)^3$  alors  $(R(t))^\lambda = (1 + t)^{3\lambda} = \sum_{n \geq 0} r_n(\lambda) \frac{t^n}{n!}$  où  $r_n(\lambda) = n!(\binom{3\lambda}{n})$ . On en déduit qu'en posant  $\varphi(t) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}$ , on a  $a_n = n! \kappa_{2n} = r_n(n-1) = (n-1)! \binom{3\lambda}{n-1}$ . D'où  $\kappa_{2n} = \frac{1}{n} \binom{3n}{n-1} = \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}$ . D'autre part  $\kappa_{2n+1} = [t^{2n}]B^2(t) = [t^{2n}](1+C(t))^2 = [t^n](1+\varphi(t))^2 = [t^n]F(\varphi(t))$  où  $F(t) = (1+t)^2$ . Donc  $\kappa_{2n+1} = \frac{1}{n!} (\frac{d}{dt})^{n-1} [2(1+t)(1+t)^{3n}]|_{t=0} = \frac{2}{n!} (\frac{d}{dt})^{n-1} [(1+t)^{3n+1}]|_{t=0} = \frac{2}{n} [t^{n-1}] (1+t)^{3n+1} = \frac{2}{n} \binom{3n+1}{n-1} = \frac{1}{3n+2} \binom{3n+2}{n}$ . ■

**Remarque 3.4.15** Dans [(Du.-Pe. 91)], S. Dulucq et J.G. Penaud montrent que le nombre d'arborescences ternaires non étiquetées sur  $n$  points est  $\tau_n = \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}$ . Voir aussi P. Hilton et J.Pedersen [(Hi.-Pe. 91)]. La figure 3.15 illustre une bijection entre une arborescence de Jacobi non étiquetée sur  $2n$  points et une arborescence ternaire sur  $n$  points. Elle est obtenue en identifiant chaque couple de points entourés par une courbe pointillée dans la figure du milieu.

Notons aussi que dans [(Noy 98)], M. Noy montre que  $\kappa_{2n}$  est le nombre d'arbres auto-évitants sur  $n$  points et que  $\kappa_{2n-1}$  est le nombre d'arbres auto-évitants sur  $n$  points contenant l'arête  $(1, n)$ . ■



**Figure 3.15:** Bijection entre les arborescences de Jacobi non étiquetées sur  $2n$  points et les arborescences ternaires non étiquetées sur  $n$  points

En utilisant le logiciel GFUN de X-Maple, S. Plouffe [(Pl. 98)] a conjecturé la proposition suivante. Nous la démontrons analytiquement. Bienvenue à toute démonstration combinatoire.

**Proposition 3.4.16** Posons  $f(t) = t \sum_{n \geq 0} \kappa_n t^n$  et  $g(t) = t(1 + t \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} c_n t^n)$ . Alors  $g(f(t)) = t$ .

### Démonstration

Il est clair que  $f(t) = t(A(t) + B(t))$ . Comme  $\sum_{n \geq 0} c_n t^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t}$ , alors  $g(t) = t \frac{3 - \sqrt{1 + 4t(A(t) + B(t))}}{2}$ . Il s'agit donc de montrer que  $(A(t) + B(t)) \frac{3 - \sqrt{1 + 4t(A(t) + B(t))}}{2} = 1$ ,

ou encore

$$1 + 4t(A(t) + B(t)) = 9 - \frac{12}{A(t) + B(t)} + \frac{4}{(A(t) + B(t))^2}. \quad (3.8)$$

La proposition 3.4.13 montre que  $A(t) + B(t) = 1 + tB(t)(A(t) + B(t))$ , donc  $A(t) + B(t) = \frac{1}{1-tB(t)}$ . L'équation (3.8) est alors équivalente à  $1 + \frac{4t}{1-tB(t)} = 9 - 12(1-tB(t)) + 4(1-tB(t))^2$  ou encore à l'équation  $t^2B^3(t) - B(t) + 1 = 0$ , c'est dire que  $B(t) = 1 + t^2B^3(t)$ . ■

### 3.5 La méthode de développement-compression

Nous présentons ici une méthode d'engendrement de suites d'entiers, que nous appliquerons aux nombres de Catalan, aux suites  $\kappa_{2n}$  et  $\kappa_{2n+1}$ , ainsi qu'aux nombres d'Euler.

#### 3.5.1 Description de la méthode

Nous notons  $\mathcal{S}_f(\mathbb{N})$  l'ensembles des suites finies d'entiers naturels.

**Définition 3.5.1** i) Étant donnée une application  $\varphi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathcal{S}_f(\mathbb{N})$ , nous appelons *fonction de développement* associée à  $\varphi$  l'application  $\delta_\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{S}_f(\mathbb{N})$ , définie par  $\delta_\varphi(0) = \varphi(0, 0)$  et si  $\delta_\varphi(n-1) = [s_{n-1,1}, s_{n-1,2}, \dots, s_{n-1,r}]$ , alors  $\delta_\varphi(n) = [\varphi(n, s_{n-1,1}), \varphi(n, s_{n-1,2}), \dots, \varphi(n, s_{n-1,r})]$ , c'est-à-dire que  $\delta_\varphi(n)$  est obtenue en concaténant les suites  $\varphi(n, s_{n-1,i})$ ,  $1 \leq i \leq r$ .

ii) Nous appelons *fonction de compression* toute application  $\gamma : \mathcal{S}_f(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$ . ■

La donnée du couple  $(\varphi, \gamma)$  permet donc de produire la suite d'entiers naturels  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $s_n = \gamma \circ \delta_\varphi(n)$ . Cette suite est dite engendrée par *développement-compression* à partir du couple  $(\varphi, \gamma)$ . Réciproquement, on peut vouloir chercher, pour une suite  $(s_n)$  donnée, un couple  $(\varphi, \gamma)$  tel que  $s_n = \gamma \circ \delta_\varphi(n)$ . Dans ce cas on obtient un algorithme de calcul des éléments de la suite  $s_n$ .

**Remarque 3.5.2** Cette méthode généralise les concepts de *règle de succession* et *d'arbre de génération* introduits par F.R.P. Chung & al. dans [(C.G.H.K. 78)] et repris par E. Barcucci & al. dans [(B.D.P.P. 98)]. Dans ces deux cas la fonction  $\varphi(n, k)$  ne dépend que de  $k$ . Dans l'exemple 3.5.3 qui traite le cas des nombres d'Euler, cette fonction dépend de  $n$  et  $k$ . ■

Dans les exemples suivants la fonction  $\gamma$  est définie par  $\gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ .

#### 3.5.2 Développement-compression pour les nombres de Catalan et la suite associée

Soient  $\varphi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathcal{S}_f(\mathbb{N})$  tel que  $\varphi(0, 0) = \varphi(0, 1) = \varphi(1, 1) = [1]$ ,  $\varphi(2, 1) = [2]$ , et pour tout  $n \geq 3$  et  $2 \leq k < n$ ,  $\varphi(n, k) = [k+1, k, \dots, 2]$ ,  $\varphi(n, k) = \emptyset$  dans les autres cas, et  $\gamma$  définie par  $\gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ .

**Proposition 3.5.3** Pour tout entier  $n$ ,  $\gamma \circ \delta_\varphi(n) = c_n$ ,  $c_n$  étant le  $n$ -ième nombre de Catalan.

**Démonstration** Cette proposition est une conséquence des propositions 3.4.3, 3.4.8 et du corollaire 3.4.9. En effet, moyennant les notations de la proposition 3.4.8, nous avons  $|\mathbb{D}(\bar{\omega}_{i,j+1}^{n+1})| = |\mathbb{D}(\bar{\omega}_{i,j}^{n+1})| - 1$ , d'autre part  $|\mathbb{D}(\bar{\omega}_{i,1}^n)| = |\mathbb{D}(\bar{\omega}_i^n)| + 1$  (Corollaire 3.4.9). Donc en supposant que  $|\mathbb{D}(\bar{\omega}_i^n)| = k$ ,  $\varphi(n+1, k) = (|\mathbb{D}(\bar{\omega}_{i,j}^{(n)})|, 1 \leq i \leq k)$  (Voir table 4 Appendice B). ■

La remarque 3.4.12 montre qu'on peut aussi engendrer la suite  $(\kappa_n)$  par développement-compression.

**Proposition 3.5.4** Considérons les applications  $\varphi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathcal{S}_f(\mathbb{N}$  telles que  $\varphi(0, 0) = \varphi(2, 1) = \varphi(1, 0) = [1]$ ,  $\varphi(3, 1) = [2]$ ,  $\varphi(n, k) = [k+2, k+1, \dots, 3]$  si  $2 \leq k \leq n-3$ , et  $\varphi(n, k) = \emptyset$  dans les autres cas, et  $\gamma$  définie par  $\gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ . Alors  $\gamma \circ \delta_\varphi(n) = \kappa_n$ . ■

### 3.5.3 Développement-compression pour les nombres d'Euler

**Proposition 3.5.5** Soit  $\varphi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathcal{S}_f(\mathbb{N}$  telle que  $\varphi(0, 0) = \varphi(1, 1) = [1]$ ,  $\varphi(2, 1) = [2]$ ,  $\varphi(n, k) = [n, n-1, \dots, n-k+1]$  si  $1 < k < n$  et  $\varphi(n, k) = \emptyset$  dans les autres cas. Alors  $\gamma \circ \delta_\varphi(n) = e_n$ ,  $e_n$  étant le  $n$ -ième nombre d'Euler.

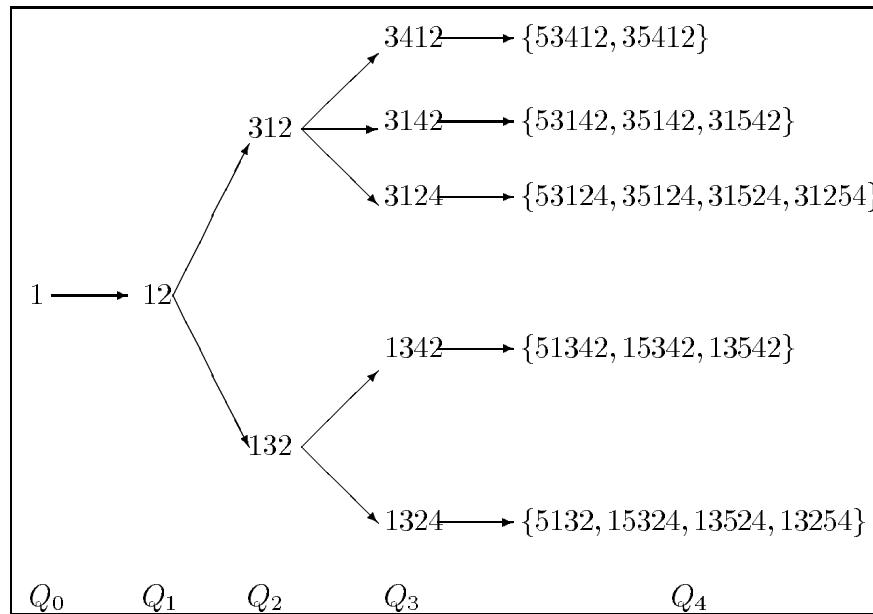
**Démonstration** La démonstration de cette proposition utilise l'algorithme de Viennot [cf. (Vi. 79)] pour engendrer les permutations ayant une forme donnée. Soit  $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \in \mathbb{S}_n$ , rappelons que

- i) Une *montée* (resp. *descente*) de  $\sigma$  est un indice  $i$  tel que  $\sigma_i < \sigma_{i+1}$  (resp.  $\sigma_i > \sigma_{i+1}$ ).
- ii) La *forme (up-down sequence)* de  $\sigma$  est le mot  $f_\sigma = z_1 z_2 \dots z_{n-1}$  tel que  $z_i = +$  si  $i$  est une montée, et  $z_i = -$  sinon.
- iii) Un élément  $x \in [n-1]$  est une *avance* (resp. *recul*) de  $\sigma$  si  $x+1$  est à droite (resp. à gauche) de  $x$ .
- iv) La bijection  $\sigma \rightarrow \sigma^{-1}$  transforme une montée (resp. descente) de  $\sigma$  en une avance (resp. recul) de  $\sigma^{-1}$ .

Pour une forme  $f = z_1 z_2 \dots z_{n-1}$  donnée, l'algorithme de Viennot consiste à placer  $i$  à droite (resp. à gauche) de  $i-1$  si  $z_{i-1} = +$  (resp.  $z_{i-1} = -$ ), dans toutes les positions possibles; ceci pour  $2 \leq i \leq n$ . Ce qui permet de construire toutes les permutations  $\sigma$  de  $\mathbb{S}_n$ , telles que  $f_{\sigma^{-1}} = f$ . En appliquant cette méthode à la forme alternante  $f = + - + - \dots$  (Figure 3.16) de longueur  $n-1$ , on obtient l'ensemble  $Q_n$  des inverses des permutations alternantes sur  $[n]$ . Il est clair que  $\sigma \in Q_n$  si et seulement si pour chaque  $i$ , la lettre  $2i$  est à droite des lettres  $2i-1$  et  $2i+1$ . Soient  $n$  un entier,  $\tilde{\sigma}$  un élément de  $Q_{n-1}$  et  $Q_n(\tilde{\sigma})$ , l'ensemble des prolongements de  $\tilde{\sigma}$  dans  $Q_n$ . Il est clair que  $|Q_n(\tilde{\sigma})| = k$  si et seulement si  $n-1$  occupe la  $k$ -ième position pour  $n-1$  pair et la  $(n-k)$ -ième position pour  $n-1$  est impair. En définissant  $p_n(\sigma)$  comme l'entier  $j$  tel

que  $\sigma_j = n$ , donc la position de  $n$  dans l'écriture de  $\sigma$ , l'ensemble  $Q_n(\tilde{\sigma})$  de ces prolongements sera ordonné par  $\sigma < \sigma'$  si et seulement si  $p_n(\sigma) < p_n(\sigma')$  (resp.  $p_n(\sigma) > p_n(\sigma')$ ) si  $n$  est impair (resp. pair). Posons donc  $Q_n(\tilde{\sigma}) = \{\tilde{\sigma}^1, \tilde{\sigma}^2, \dots, \tilde{\sigma}^k\}$ . Il est clair que si  $n$  est impair (resp. pair) alors  $n$  occupe la  $i$ -ème (resp.  $(n-i+1)$ -ème) position dans  $\tilde{\sigma}^i$  et que par conséquent  $\tilde{\sigma}^i$  admet  $n-i+1$  prolongements. En d'autres termes, la suite  $\varphi(n, k) = [n, n-1, \dots, n-k+1]$  n'est autre que la suite des nombres de prolongements des éléments de l'ensemble ordonné  $Q_n(\tilde{\sigma})$ , où  $\tilde{\sigma}$  est un élément de  $Q_{n-1}$ , admettant  $k$  prolongements. Il est facile de vérifier que  $\delta_\varphi(n)$  est la suite des nombres de prolongements des éléments de l'ensemble  $Q_n$  muni d'un ordre approprié. Donc

$$\gamma \circ \delta_\varphi(n) = \sum_{\sigma \in Q_n} |Q_{n+1}(\sigma)| = e_{n+1}.$$



**Figure 3.16:** Algorithme de Viennot appliqué à la forme  $+ - +-$

Voir Appendice B table 7. ■

## CHAPITRE IV

### RÉSOLUTION COMBINATOIRE DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

#### 4.1 Introduction

On se propose de résoudre le système d'équations aux dérivées partielles combinatoires suivant

$$\frac{\partial Y}{\partial T_j} = F_j(Y); \quad j = 1 \dots n; \quad Y(0, 0, \dots, 0, Z) = Z. \quad (4.1)$$

où  $(F_j)_{1 \leq j \leq n}$  est une famille de  $\mathbb{B}$ -espèces,  $Y = Y(T_1, \dots, T_n, Z)$ . Pour simplifier l'écriture, nous utiliserons la notation compacte  $\partial_j = \frac{\partial}{\partial T_j}$ .

Pour cela, nous généralisons la méthode de Leroux-Viennot [cf. (Le.-Vi. 1. 86)] pour les équations différentielles ordinaires et construisons une solution canonique constituée d'arborescences  $\vec{F}$ -enrichies croissantes, lorsque certaines conditions de cohérence sont satisfaites. Dans le cas particulier où  $n = 2$ , moyennant une condition de cohérence due à l'égalité  $\frac{\partial^2 Y}{\partial T_1 \partial T_2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial T_2 \partial T_1}$ , nous obtenons une solution en termes d'arborescences croissantes  $\vec{F}$ -enrichies où  $\vec{F} = (F_1, F_2)$ . Sous certaines conditions sur la pondération, cette solution s'exprime sous la forme  $A_F(c_1 T_1 + c_2 T_2)$  où  $F$  est une  $\mathbb{L}$ -espèce liée à  $F_1$  et  $F_2$ . Dans le cas où  $n > 2$ , les dérivées partielles d'ordre 3,  $\frac{\partial^3 Y}{\partial T_i \partial T_j \partial T_k}$ , font apparaître des hexagones commutatifs d'isomorphismes qui constituent des conditions de cohérence assurant l'existence et l'unicité des solutions.

Les résultats ainsi obtenus s'étendent aux systèmes d'équations à plusieurs espèces inconnues:

$$\partial_j Y^\rho = F_j^\rho(Y); \quad \rho = 1 \dots r; \quad j = 1 \dots n; \quad Y^\rho(0, 0, \dots, 0, Z) = Z^\rho. \quad (4.2)$$

où  $Y = (Y^1, Y^2, \dots, Y^r)$  et  $Z = (Z^1, \dots, Z^r)$  et les  $F_j^\rho$  sont des espèces à  $r$  sortes.

Remarquons aussi que ce système général contient les systèmes non autonomes de la forme

$$\partial_j Y = F_j(T_1, \dots, T_n, Y); \quad Y(0, \dots, 0, Z) = Z, \quad (4.3)$$

et le cas particulier important  $\{\partial_j Y = B_j(T_1, T_2, \dots, T_n)F(Y), \quad j = 1 \dots n\}$ , incluant l'intégration  $\{\partial_j Y = B_j(T_1, T_2, \dots, T_n), \quad j = 1 \dots n\}$ , et qui s'applique

aux polynômes orthogonaux classiques. Le présent travail fait suite au mémoire d'Ulrike Sattler [(Sat. 94)] [Voir aussi l'article de F. Bergeron et U. Sattler (Be.-Sa 95)] sur les *séries différentiellement algébriques constructibles* à plusieurs variables (*CDF*). Rappelons aussi l'article de F. Bergeron et C. Reutenauer [(Be.-Re. 90)] qui traite le cas où  $n = 1$ .

**Définition 4.1.1** [(Be.-Sa 95)] Une série formelle  $Y \in \mathbb{C}[[t_1, t_2, \dots, t_n]]$  est une série différentiellement algébrique constructible s'il existe une famille de polynômes  $(p_{j,i})_{i=1, \dots, n, 1 \leq j \leq k}$  et  $k$  séries  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  telles que  $Y = Y_1$  et pour tout couple  $(i, j)$ ,  $\frac{\partial}{\partial t_i} Y_j = p_{j,i}(Y_1, \dots, Y_k)$ . ■

Dans ce chapitre nous utilisons les résultats des sections 1.3.2 et 1.5.2 qui traitent du comportement des transformations naturelles et isomorphismes vis-à-vis des opérations élémentaires.

## 4.2 Résolution des systèmes de deux équations à deux variables

Dans cette section, nous utilisons les principes d'intégration des équations différentielles développés dans le chapitre deux. Considérons le système:

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial T_1} = F_1(Y); \\ \frac{\partial Y}{\partial T_2} = F_2(Y); \quad Y(0, 0, Z) = Z. \end{cases} \quad (4.4)$$

où  $F_1$  et  $F_2$  sont des  $\mathcal{B}$ -espèces. Supposons qu'il existe un triplet  $(A, \varphi_1, \varphi_2)$  où  $A = A(T_1, T_2, Z)$  est une espèce mixte du type  $\mathbb{L}^2 \times \mathbb{B} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{A}, s}$  vérifiant  $A(0, 0, Z) = Z$ , et, pour  $j = 1, 2$ ,  $\varphi_j : \frac{\partial A}{\partial T_j} \rightarrow F_j(A)$  est un isomorphisme.

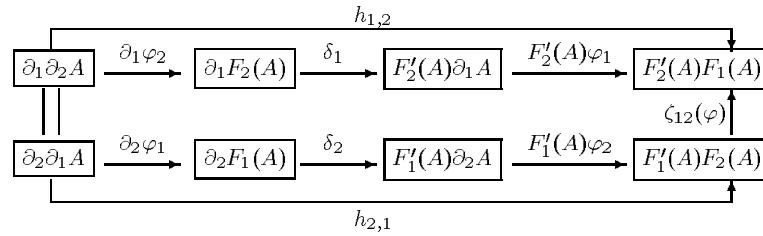


Figure 4.1: L'isomorphisme  $\zeta_{12}(\varphi)$

Posons  $h_{ij} = (F'_j(A)\varphi_i) \circ \delta_i \circ \partial_i \varphi_j : \partial_i \partial_j A \rightarrow F'_j(A)F_i(A)$ , où  $\delta_i$  est l'isomorphisme de la règle de dérivation en chaîne, et définissons l'isomorphisme  $\zeta_{12}(\varphi) := h_{12} \circ h_{21}^{-1} : F'_1(A)F_2(A) \rightarrow F'_2(A)F_1(A)$  [Voir figure 4.1]. Il est clair que  $\zeta_{12}(\varphi)$  est un isomorphisme. En considérant le fait que  $A(0, 0, Z) = Z$ , on obtient l'isomorphisme  $\theta_{12} = \zeta_{12}(\varphi)_\emptyset : F'_1(Z)F_2(Z) \rightarrow F'_2(Z)F_1(Z)$ . ■

**Définition 4.2.1** Le système (4.4) est dit *cohérent* s'il existe un isomorphisme

$$\theta_{12} : F'_1F_2 \rightarrow F'_2F_1.$$

**Proposition 4.2.2 Condition de cohérence.** Soient  $F_1 = F_{1,v_1}$  et  $F_2 = F_{2,v_2}$  deux espèces. Posons  $\nu(F_i) = \min\{n \in \mathbb{N}, |F_i[n]|_{v_i} \neq 0\}$ .

1) Si  $F'_1 \cdot F_2 \simeq F'_2 \cdot F_1$  alors  $\nu(F_1) = \nu(F_2)$ . De plus, si  $\nu(F_i) = k$  et  $f_{ik} = |F_i[k]|_{v_i}$ , alors nous avons  $f_{1k}F_2(t) = f_{2k}F_1(t)$ .

2) D'autre part, si les pondérations de  $F_1$  et de  $F_2$  sont de la forme  $v_i(s) = x^{n_i(s)}$  pour toute  $F_i$ -structure  $s$ , alors on a  $F'_1 \cdot F_2 \simeq F'_2 \cdot F_1$  si et seulement si  $\nu(F_1) = \nu(F_2) = k$  et  $f_{1,k}F_2(t) = f_{2,k}F_1(t)$ .

**Démonstration** 1) Supposons que  $F'_1F_2 \simeq F'_2F_1$ , et posons  $\nu(F_1) = k$ ,  $\nu(F_2) = r$ ,  $F_1(t) = \sum_{n \geq k} f_{1,n} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n \geq k} g_{1,n} t^n$ , et  $F_2(t) = \sum_{n \geq r} f_{2n} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n \geq s} g_{2,n} t^n$ . Nécessairement  $k = r$ . Car, si  $k \geq 1$  et  $r \geq 1$ , alors  $(k+r-1)! [t^{k+r-1}] F'_1(t) F_2(t) = f_{1,k} f_{2,r} \binom{k+r-1}{k-1}$  et  $(k+r-1)! [t^{k+r-1}] F'_2(t) F_1(t) = f_{1,k} f_{2,r} \binom{k+r-1}{r-1}$ . Sachant que  $F'_1(t) F_2(t) = F_1(t) F'_2(t)$ , alors  $\binom{k+r-1}{k-1} = \binom{k+r-1}{r-1}$ , c'est-à-dire que  $k = r$ . D'autre part, si  $k = 0$  alors  $r = 0$ . Sinon, en écrivant  $F_1(t) = f_{1,0} + \sum_{n \geq s} f_{1,n} \frac{t^n}{n!}$ , où  $s \geq 1$  et  $f_{1,s} \neq 0$ , nous avons  $F'_1(t) F_2(t) = f_{1,s} f_{2,r} \binom{s+r-1}{s-1, r} \frac{t^{s+r-1}}{(s+r-1)!} + \dots$ , et  $F'_2(t) F_1(t) = f_{1,0} f_{2,r} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} + \dots$ . Donc  $s+r-1 = r-1$ . Ce qui est impossible.

Il est clair que  $f_{1,k}F_2(t) = f_{2,k}F_1(t)$  si et seulement si pour tout  $r \geq k$ ,  $g_{1,k}g_{2,r} = g_{2,k}g_{1,r}$ . Montrons donc, par récurrence sur  $n$ , que pour tout  $n \geq k$ ,  $g_{1,k}g_{2,n-k+1} = g_{2,k}g_{1,n-k+1}$ . Nous avons  $F'_i(t) F_j(t) = \sum_{m \geq 2k} (\sum_{r,s \geq k; r+s=m} (r+1)g_{i,r+1}g_{j,s}) t^m$ . Comme  $F'_1(t) F_2(t) = F_1(t) F'_2(t)$ , alors pour tout  $m$ ,  $\sum_{r,s \geq k; r+s=m} (r+1)g_{1,r+1}g_{2,s} = \sum_{r,s \geq k; r+s=m} (r+1)g_{2,r+1}g_{1,s}$ , c'est-à-dire que

$$(m-k+1)g_{1,m-k+1}g_{2,k} + (m-k)g_{1,m-k}g_{2,k+1} + \dots + (k+1)g_{1,k+1}g_{2,m-k} = (m-k+1)g_{2,m-k+1}g_{1,k} + (m-k)g_{2,m-k}g_{1,k+1} + \dots + (k+1)g_{2,k+1}g_{1,m-k}. \quad (4.5)$$

En particulier, pour  $m = 2k+1$  on a  $(k+1)g_{1,k+1}g_{2,k} = (k+1)g_{2,k+1}g_{1,k}$ , c'est-à-dire que  $g_{1,k+1}g_{2,k} = g_{2,k+1}g_{1,k}$ . Soit donc  $n > 2k+1$  un entier tel que si  $2k \leq m \leq n-1$ , alors  $g_{1,m-k+1}g_{2,k} = g_{2,m-k+1}g_{1,k}$ . En prenant  $m = n-1$ , nous avons  $g_{1,n-k}g_{2,k} = g_{2,n-k}g_{1,k}$ . Donc  $g_{1,n-k}g_{2,k}g_{2,k+1}g_{1,k} = g_{2,n-k}g_{1,k}g_{2,k+1}g_{1,k} = g_{2,n-k}g_{1,k+1}g_{2,k}$ . D'où  $g_{1,n-k}g_{2,k+1} = g_{2,n-k}g_{1,k+1}$ . De la même manière, on a  $g_{1,n-k-1}g_{2,k+2} = g_{2,n-k-1}g_{1,k+2}, \dots, g_{1,k+1}g_{2,n-k} = g_{2,k+1}g_{1,n-k}$ . De l'équation 4.5, on déduit alors que  $g_{1,n-k+1}g_{2,k} = g_{2,n-k+1}g_{1,k}$ .

2) Il nous reste à montrer que la condition est suffisante. Posons que  $f_{i,k} = \sum_n a_{ik}(n)x^n$  où  $a_{ik}(n) \in \mathbb{N}$ . Alors  $\sum_n a_{1k}(n)x^n F_2(t) = \sum_n a_{2k}(n)x^n F_1(t)$ . En dérivant par rapport à  $t$ , on a aussi  $\sum_n a_{2k}(n)x^n F'_1(t) = \sum_n a_{1k}(n)x^n F'_2(t)$ . En multipliant, on en déduit que  $(\sum_n a_{1k}(n)x^n F_2(t))(\sum_n a_{2k}(n)x^n F'_1(t)) =$

$(\sum_n a_{2k}(n)x^n F_1(t))(\sum_n a_{1k}(n)x^n F'_2(t))$ , c'est-à-dire que

$$(F'_1(t)F_2(t)) \sum_n [\sum_{j=0}^n a_{1k}(j)a_{2k}(n-j)x^n] = (F'_2(t)F_1(t)) \sum_n [\sum_{j=0}^n a_{2k}(j)a_{1k}(n-j)]x^n.$$

Nécessairement  $(F'_1(t)F_2(t)) = (F'_2(t)F_1(t))$ . Si les pondérations de  $F_1$  et de  $F_2$  sont de la forme  $v_i(s) = t^{n_i(s)}$  alors les produits  $F'_1 \cdot F_2$  et  $F'_2 \cdot F_1$  sont monomialement pondérés réduits. D'où  $F'_1 \cdot F_2 \simeq F'_2 \cdot F_1$ . [cf. Prop. 1.4.8]. ■

**Remarque 4.2.3** Moyennant l'hypothèse de la deuxième partie de la proposition précédente 4.2.2, si  $F_1$  et  $F_2$  sont des  $\mathbb{L}$ -espèces, alors nous avons l'équivalence suivante:  $F'_1 \cdot F_2 \simeq F'_2 \cdot F_1 \Leftrightarrow \nu(F_1) = \nu(F_2) = k$  et  $f_{1,k}F_2(t) = f_{2,k}F_1(t) \Leftrightarrow F'_1(t)F_2(t) = F_1(t)F'_2(t)$ .

**Exemple 4.2.4** i) Si  $F_1 = c_1 F$  et  $F_2 = c_2 F$  où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes non nulles, alors  $F'_1 F_2 = c_1 c_2 F' F = F'_2 F_1$ .

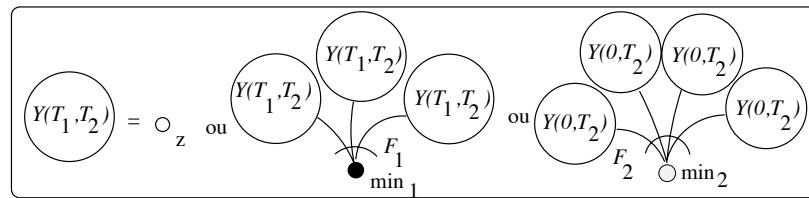
ii) Soient maintenant  $n_1$  et  $n_2$  deux entiers naturels non nuls et  $F$  une  $\mathbb{L}$ -espèce. Soient  $F_1 = \mathbf{n}_1 \cdot F$  et  $F_2 = \mathbf{n}_2 \cdot F$ . Alors  $F'_1 F_2 = (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \cdot F' F$ , et  $F'_2 F_1 = (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_1) \cdot F' F$ . Toute bijection  $\sigma_{12} : \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \rightarrow \mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_1$  permet alors de définir un isomorphisme  $\theta_{12} : F'_1 F_2 \rightarrow F'_2 F_1$ , en posant  $\theta_{12} = \sigma_{12} \cdot 1_{F' F}$ .

iii) Si  $f_{10} = f_{20} = 1$  et si  $F_1$  et  $F_2$  sont des  $\mathbb{L}$ -espèces monomialement pondérées réduites alors  $F'_1 F_2 \simeq F'_2 F_1$  si et seulement si  $F_1 \simeq F_2$ . ■

Supposons maintenant que le système (4.4) est cohérent, avec  $\theta_{12} : F'_1 F_2 \xrightarrow{\sim} F'_2 F_1$ . Nous avons  $Y(T_1, T_2) = \int_0^{T_1} \partial_1 Y(X, T_2) dX + Y(0, T_2)$ . Ce qui nous permet d'écrire l'équation intégrale suivante, en donnant priorité à la première variable, interprétée par la figure 4.2.

$$Y(T_1, T_2) = \int_0^{T_1} F_1(Y(X_1, T_2)) dX_1 + \int_0^{T_2} F_2(Y(0, X_2)) dX_2 + Z \quad (4.6)$$

En partant de cette équation intégrale, et utilisant la cohérence, nous allons effectivement construire une solution canonique  $Y$  du système (4.4).



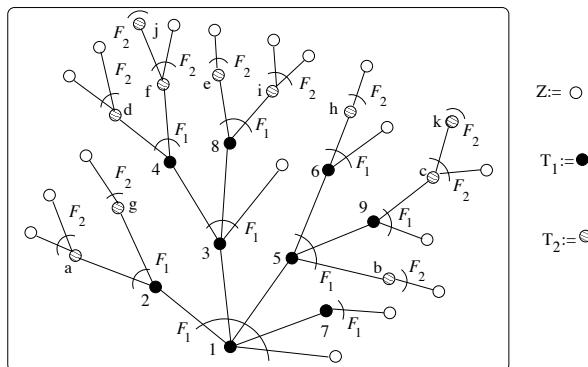
**Figure 4.2:** Équation intégrale

Étant donné un couple d'ensembles ordonnés  $(l_1, l_2)$ , nous l'identifions à la somme ordinaire  $l_1 +_o l_2$ . Nous supposons donc que les points de sorte  $T_1$  sont plus

petits que les points de sorte  $T_2$ . L'équation intégrale (4.6) est alors équivalente au principe itératif suivant:

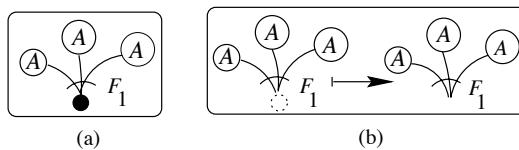
$$\begin{aligned} Y[l_1, l_2] &= F_1(Y)[l_1^-, l_2], \text{ où } l_1^- = l_1 \setminus \min l_1, \text{ si } l_1 \neq \emptyset & \text{(i)} \\ Y[\emptyset, l_2] &= F_2(Y)[\emptyset, l_2^-], \text{ si } l_2 \neq \emptyset & \text{(ii)} \\ Y[\emptyset, \emptyset] &\text{ est un singleton de sorte } Z, & \text{(iii)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Donc “tant qu'il reste des points du type  $T_1$  on itère (4.7)(i), ensuite on passe à (4.7)(ii)”. On obtient ainsi l'espèce des *arborescences croissantes  $\vec{F}$ -enrichies*,



**Figure 4.3:** Une arborescence croissante  $\vec{F}$ -enrichie

où  $\vec{F} = (F_1, F_2)$ , que nous dénoterons par  $A_{\vec{F}}$ . La figure 4.3 illustre une arborescence croissante  $\vec{F}$ -enrichie avec  $l_1 = \{1, 2, \dots, 9\}$  et  $l_2 = \{a, b, c, \dots, k\}$ . Nous allons montrer que l'espèce  $Y = A_{\vec{F}}$  est solution du système d'équations (4.4), c'est-à-dire qu'on a des isomorphismes  $\varphi_1 : \frac{\partial A}{\partial T_1} \xrightarrow{\sim} F_1(A)$  et  $\varphi_2 : \frac{\partial A}{\partial T_2} \xrightarrow{\sim} F_2(A)$ , et que de plus,  $\theta_{12}(A) = \zeta_{12}(\varphi)$ .



**Figure 4.4:** (a) Une  $\frac{\partial A}{\partial T_1}$ -structure, (b) L'isomorphisme  $\varphi_1$

Puisqu'une  $\partial_1 A_{\vec{F}}[l_1, l_2] = A_{\vec{F}}[1 +_o l_1, l_2]$ , une  $\frac{\partial A_{\vec{F}}}{\partial T_1}$ -structure sur un ensemble quelconque a la forme donnée par la figure (4.4)(a), et  $\varphi_1$  est canoniquement défini par oubli de la racine, comme le montre la figure (4.4)(b). La construction de  $\varphi_2$  se fait par récurrence sur  $|l_1|$  où  $l = (l_1, l_2)$ .

Si  $|l_1| = 0$ , alors la définition de  $\varphi_2$  est identique à celle de  $\varphi_1$ , en remplaçant  $F_1$  par  $F_2$ . Sinon soit  $l = (l_1, l_2)$  tel que  $|l_1| > 0$ . Supposons que pour tout  $m = (m_1, m_2)$ , tel que  $|m_1| < |l_1|$ ,  $\varphi_{2,m}$  existe. En remarquant que  $\frac{\partial A}{\partial T_2}[l] = A[l+2] = \frac{\partial^2 A}{\partial T_2 \partial T_1}[l_1]$ , et que  $F_2(A)[l] = \partial_1(F_2(A))[l_1]$ , où  $l+2 = (l_1, 1 +_o l_2)$  et  $l_1 = (l_1 \setminus \{\min l_1\}, l_2)$ , on peut définir  $\varphi_{2,l}$  par le diagramme 1 de la figure 4.5,  $\delta_i$  étant l'isomorphisme dû à la dérivation en chaîne par rapport à  $T_i$ .

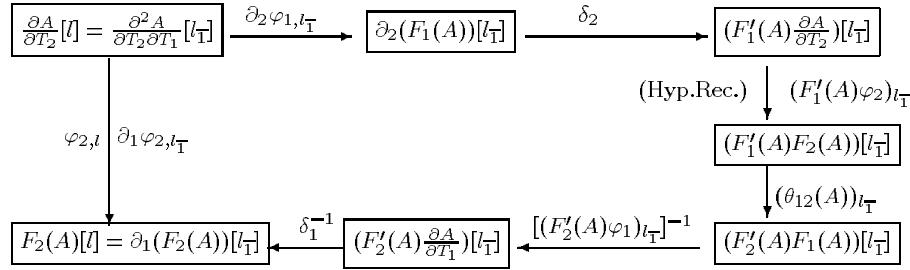
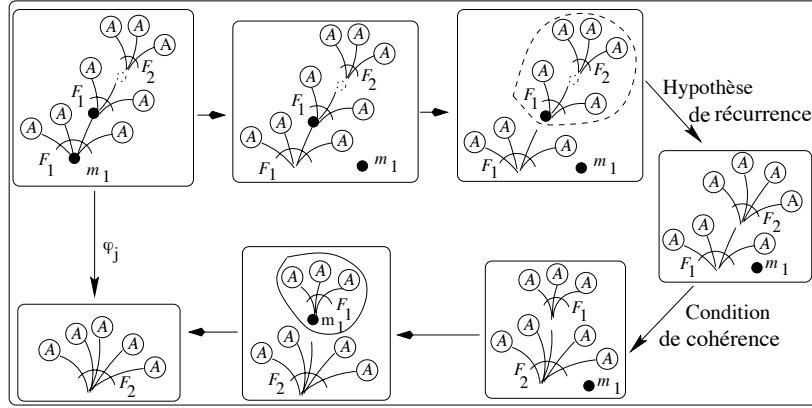


Figure 4.5: Diagramme 1

Figure 4.6: Illustration du diagramme 1 définissant  $\varphi_2$ 

Une illustration de ce diagramme sur une arborescence est donnée par la figure 4.6. De plus, le même diagramme montre que pour tout  $l$ ,  $\zeta_{12}(\varphi)_l = \theta_{12}(A)_l$ . On en déduit donc la proposition suivante:

**Proposition 4.2.5** *Si le système (4.4) est cohérent, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme  $\theta_{12} : F'_1(Z)F_2(Z) \rightarrow F'_2(Z)F_1(Z)$ , alors l'espèce  $A = A_{\vec{F}}$ , des arborescences croissantes  $\vec{F}$ -enrichies est une solution de ce système, dans le sens où l'on a des isomorphismes  $\varphi_i : \frac{\partial A}{\partial T_i} \rightarrow F_i(A)$ ,  $i = 1, 2$ . Cette solution est compatible, c'est-à-dire que  $\zeta_{12}(\varphi) = \theta_{12}(A)$ , et de plus, pour toute solution compatible  $(B, \psi)$ , il existe un unique isomorphisme d'espèces  $\Phi : A_{\vec{F}} \rightarrow B$  tel que, pour  $i = 1, 2$ , le diagramme suivant soit commutatif.*

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\frac{\partial}{\partial T_i} A} & \xrightarrow{\varphi_i} & \boxed{F_i(A)} \\
 \downarrow \frac{\partial}{\partial T_i} \Phi & & \downarrow F_i(\Phi) \\
 \boxed{\frac{\partial}{\partial T_i} B} & \xrightarrow{\psi_i} & \boxed{F_i(B)}
 \end{array}$$

**Démonstration** Il nous reste à montrer l'existence et l'unicité de  $\Phi$ . Pour cela, nous renvoyons le lecteur à la démonstration du théorème 4.4.4, en prenant  $i = 1$  et  $j = 2$ . ■

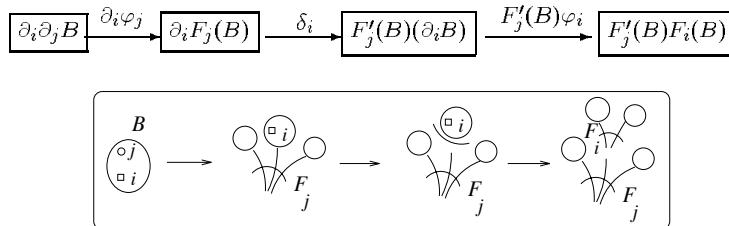
Supposant que  $F_1 = c_1 F$  et  $F_2 = c_2 F$ ,  $c_1$  et  $c_2$  étant des éléments de l'anneau pondérateur, l'exemple 4.2.4 ii) montre que le système (4.4) est cohérent, et il est facile de voir dans ce cas que l'espèce  $A_F(T_1, T_2)$  est en fait isomorphe à l'espèce  $A_F(c_1 T_1 + c_2 T_2)$  des arborescences croissantes  $F$ -enrichies dont chaque point  $T_1$  est pondéré par  $c_1$  et chaque point  $T_2$  par  $c_2$ .

**Corollaire 4.2.6** *Si  $F_1 = c_1 F$  et  $F_2 = c_2 F$ , où  $c_1$  et  $c_2$  sont des éléments de l'anneau pondérateur, alors le système (4.4) admet une solution de la forme  $A_F(c_1 T_1 + c_2 T_2)$ . ■*

### 4.3 Condition d'existence de la solution dans le cas où le nombre de variables est $\geq 3$ .

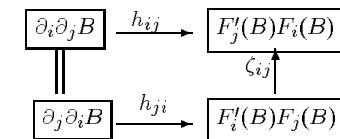
Revenons au système (4.1), avec  $n \geq 3$ . Supposons qu'il existe une espèce mixte  $B = B(T_1, \dots, T_n, Z)$ , du type  $\mathbb{L}^m \times \mathbb{B} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{A}, s}$ , telle que  $B(0, 0, \dots, 0, Z) = Z$ , et une famille  $\varphi = (\varphi_k)$  d'isomorphismes  $\varphi_k : \partial_k B \rightarrow F_k(B)$ ;  $1 \leq k \leq n$ . Pour chaque couple  $(i, j)$  tel que  $i \neq j$  soient

i)  $h_{ij} = [F'_j(B)\varphi_i] \circ \delta_i \circ \partial_i \varphi_j$ ,  $\delta_i$  étant l'isomorphisme défini par la règle de la dérivation en chaîne par rapport à la variable  $T_i$  (Voir figure 4.7 pour une illustration).



**Figure 4.7:** Illustration de l'isomorphisme  $h_{ij}$

ii)  $\zeta_{ij} = \zeta_{ij}(\varphi) : F'_i(B)F_j(B) \rightarrow F'_j(B)F_i(B)$  l'unique isomorphisme rendant commutatif le diagramme 2 (Figure 4.8), c'est-à-dire que  $h_{ij} = \zeta_{ij} \circ h_{ji}$ .



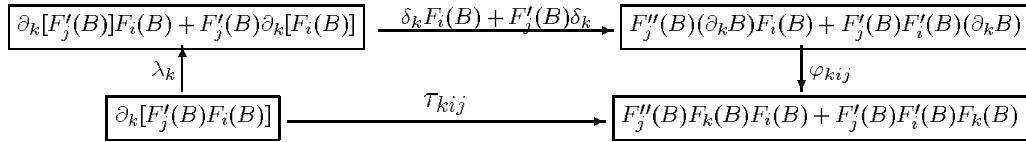
**Figure 4.8:** Diagramme 2

**Remarque 4.3.1** 1)  $\zeta_{ji} = \zeta_{ij}^{-1}$

2)  $(\zeta_{ij})_\emptyset : F'_i(Z)F_j(Z) \rightarrow F'_j(Z)F_i(Z)$  est un isomorphisme. Donc chaque couple  $(F_i, F_j)$  satisfait aux hypothèses de la proposition 4.2.2. ■

Dérivons le diagramme 2 par rapport à  $T_k$ , et posons  $\lambda_k$  l'isomorphisme défini par la formule de Leibnitz,  $\delta_k$  l'isomorphisme défini par la règle de la

dérivation en chaîne par rapport à la variable  $T_k$ ,  $\varphi_{kij} = [F''_j(B)\varphi_k F_i(B)] + [F'_j(B)F'_i(B)\varphi_k]$ ,  $\tau_{kij} = \varphi_{kij} \circ [\delta_k F_i(B) + F'_j(B)\delta_k] \circ \lambda_k$  et  $f_{kij} = \tau_{kij} \circ \partial_k h_{ij}$ .



**Lemme 4.3.2** Les isomorphismes  $\zeta_{ij}$  induisent des isomorphismes  $\zeta_{kij} = \zeta_{kij}(\varphi)$  tels que le diagramme 3 soit commutatif, en d'autres termes,  $f_{kij} = \zeta_{kij} f_{kji}$ .

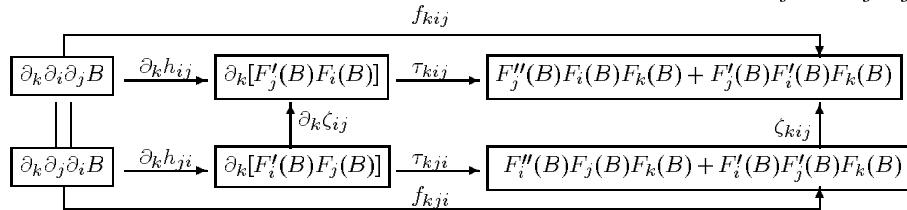


Figure 4.9: Diagramme 3

**Lemme 4.3.3** Le diagramme 4 est commutatif, c'est-à-dire que  $f_{kij} = [Id + F'_j(B)\zeta_{ki}]f_{ikj}$ .

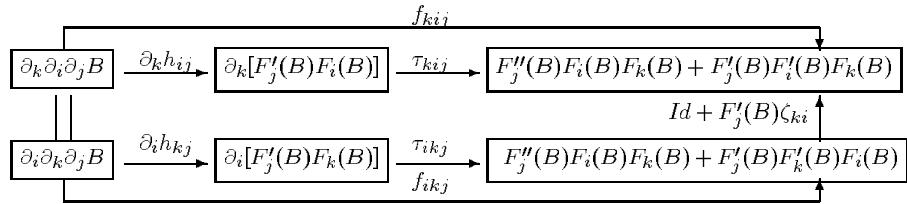
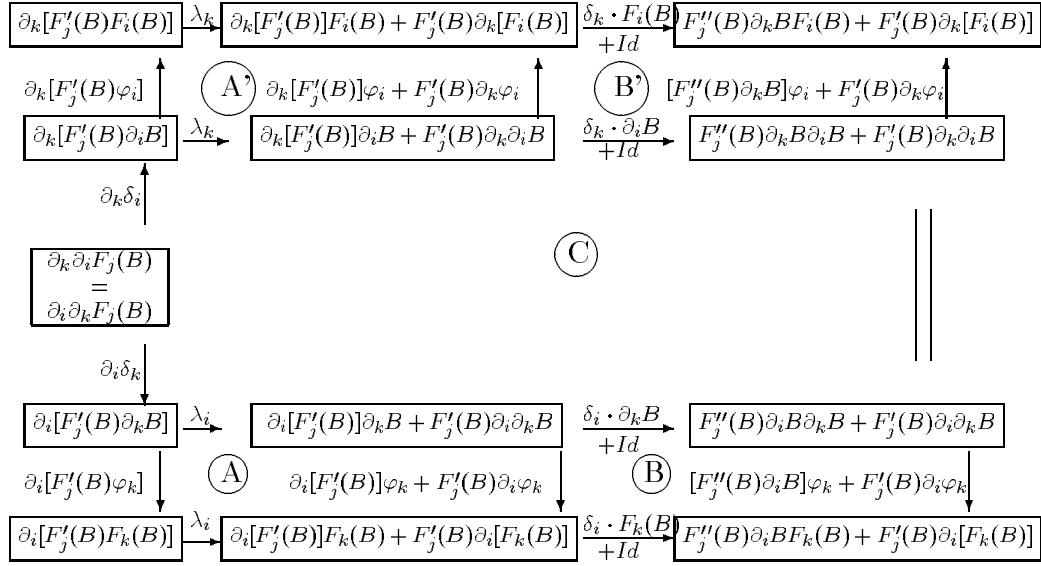
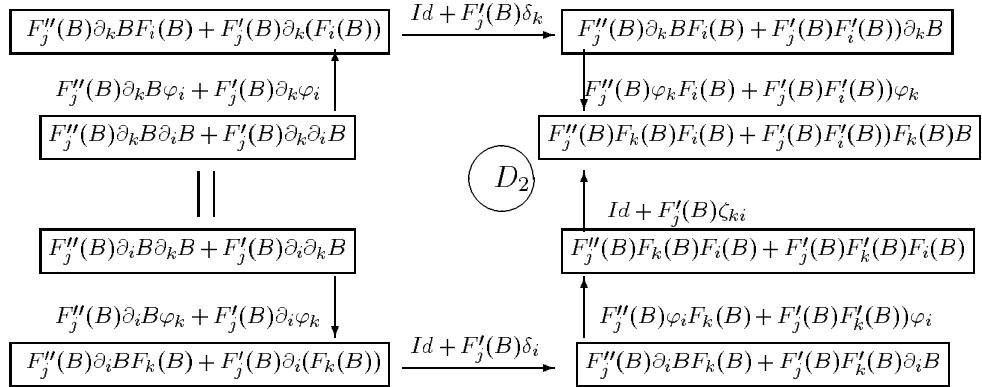


Figure 4.10: Diagramme 4

**Démonstration** Rappelons que  $h_{ij} = [F'_j(B)\varphi_i] \circ \delta_i \circ \partial_i \varphi_j$  et que  $\varphi_{kij} = F''_j(B)\varphi_k F_i(B) + F'_j(B)F'_i(B)\varphi_k$ ,  $\tau_{kij} = \varphi_{kij} \circ [\delta_k F_i(B) + F'_j(B)\delta_k] \circ \lambda_k$  et  $f_{kij} = \tau_{kij} \circ \partial_k h_{ij}$ . Et considérons les deux diagrammes  $(D_1)$  et  $(D_2)$  des figures 4.11 et 4.12. Nous décomposons le premier diagramme  $(D_1)$  en des diagrammes plus petits, (A), (A'), (B), (B') et (C).

La proposition 1.5.2 montre que les diagrammes (A) et (A') sont commutatifs. Les diagrammes (B) et (B') sont chacune la somme de deux diagrammes dont l'un donne, dans le cas de (B),  $[F'_j(B)\partial_i \varphi_k] \circ Id = Id \circ [F'_j(B)\partial_i \varphi_k]$  et l'autre est commutatif d'après la proposition 1.3.12. Tandis que le diagramme (C) est commutatif d'après la proposition 1.5.3. Il s'en suit que le diagramme externe  $(D_1)$  est commutatif.

D'autre part, le diagramme  $(D_2)$  est la somme des deux diagrammes D' et D'' de la figure 4.13. Or, la proposition 1.3.12 montre que le diagramme

Figure 4.11: Diagramme  $D_1$ Figure 4.12: Diagramme  $D_2$ 

$(D')$  est commutatif, tandis que  $(D'')$  n'est autre que le diagramme commutatif définissant  $\zeta_{ki}$ . Donc  $(D_2)$  est commutatif. En plaçant côté à côté les diagrammes  $(D_1)$  et  $(D_2)$ , nous obtenons un diagramme commutatif qui est précisément le diagramme 4.

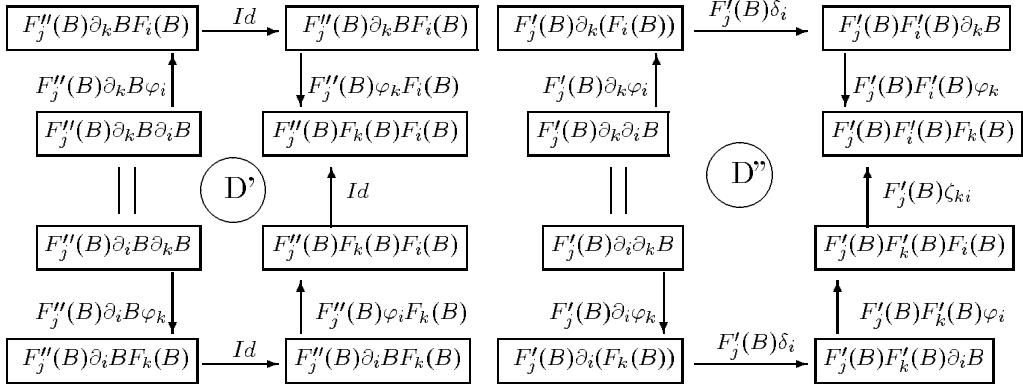


Figure 4.13: Diagrammes D' et D''

**Corollaire 4.3.4** L'hexagone 1 suivant est commutatif.

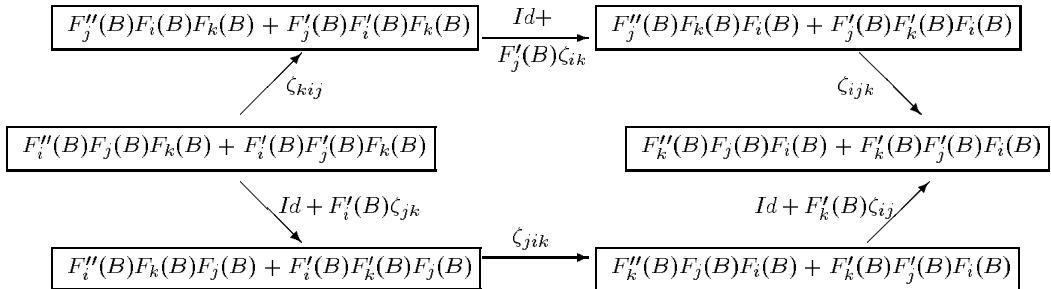
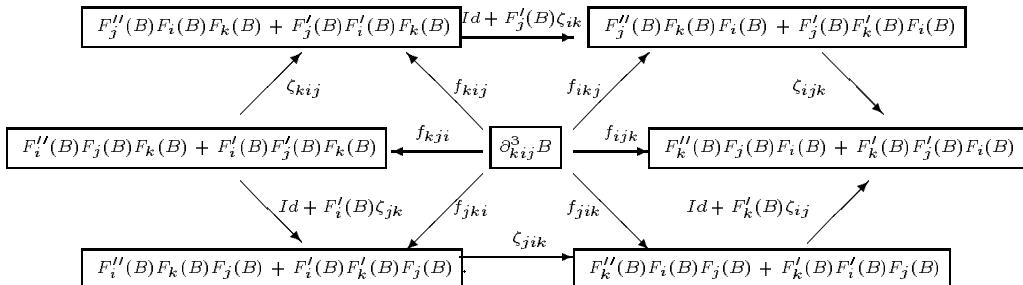


Figure 4.14: Hexagone 1

**Démonstration** Insérons  $\partial_{ijk}^3 B = \partial_i \partial_j \partial_k B$  au centre de l'hexagone, ainsi que les six isomorphismes de la forme  $f_{ijk}$  vers les sommets de l'hexagone.



Une utilisation répétée des lemmes 4.3.2 et 4.3.3 montre que chacun des triangles est commutatif. Il s'en suit que l'hexagone lui-même est commutatif. ■

Puisque  $B(0, \dots, 0, Z) = Z$ , en considérant les  $B$ -structures sur  $\emptyset$ , on obtient l'hexagone commutatif suivant

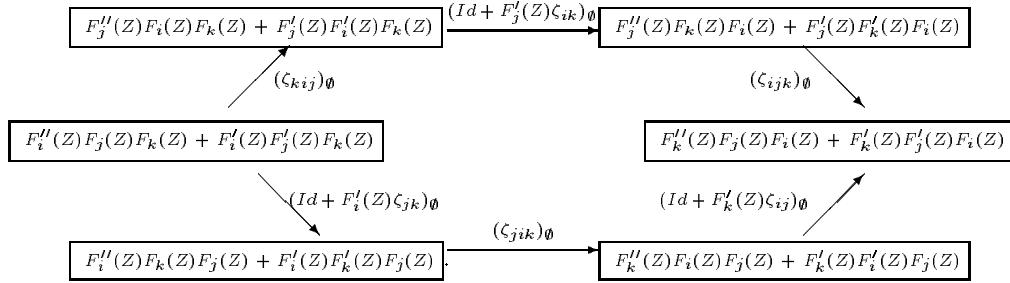


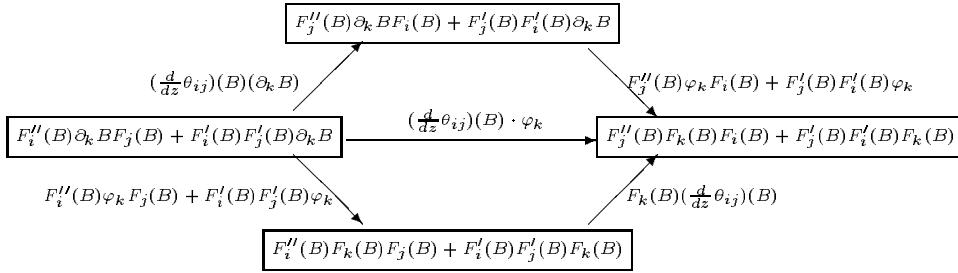
Figure 4.15: Hexagone 2

Posons  $\theta_{ij} = (\zeta_{ij})\emptyset : F'_i F_j \rightarrow F'_j F_i$ , et  $\frac{d}{dz} \theta_{ij} : F''_i F_j + F'_i F'_j \rightarrow F''_j F_i + F'_j F'_i$  l'isomorphisme tel que  $\lambda \circ \theta'_{ij} = \frac{d}{dz} \theta_{ij} \circ \lambda$  [Voir page 29]. Notons aussi que les  $\theta_{ij}$  induisent des isomorphismes  $\theta_{ij}(B) : F'_i(B)F_j(B) \rightarrow F'_j(B)F_i(B)$ . Cependant, il n'est pas du tout assuré que  $\zeta_{ij}(\varphi) = \theta_{ij}(B)$ . Néamoins, nous avons le lemme suivant.

**Lemme 4.3.5** Pour tou  $(i, j)$ , les deux assertions suivantes sont équivalentes:

- i)  $\theta_{ij}(B) = \zeta_{ij}(\varphi)$
- ii) Pour chaque  $i, j, k$ ,  $F_k(B)(\frac{d}{dz} \theta_{ij})(B) = \zeta_{kij}$

**Démonstration** Notons d'abord que  $\theta_{ij}(B) = \zeta_{ij} \Leftrightarrow$  pour tout  $k$ ,  $\partial_k(\theta_{ij}(B)) = \partial_k \zeta_{ij}$ . La proposition 1.3.12 montre que le diagramme suivant est commutatif



Nous avons donc

$$\begin{aligned} F_k(B)(\frac{d}{dz} \theta_{ij})(B) \circ [F''_i(B)\varphi_k F_j(B) + F'_i(B)F'_j(B)\varphi_k] \\ = [F''_j(B)\varphi_k F_i(B) + F'_j(B)F'_i(B)\varphi_k] \circ [(\frac{d}{dz} \theta_{ij})(B)(\partial_k B)]. \end{aligned}$$

D'autre part, la proposition 1.5.4 montre que :

$$[\delta_k \cdot F_i(B) + F'_i(B) \cdot \delta_k] \circ \lambda_k \circ \partial_k \theta_{ij}(B) = (\frac{d}{dz} \theta_{ij})(B)(\partial_k B) \circ [\delta_k \cdot F_j(B) + F'_j(B) \cdot \delta_k] \circ \lambda_k.$$

Alors

$$\begin{aligned} \tau_{kij} \circ \partial_k \theta_{ij}(B) &= [F''_j(B)\varphi_k F_i(B) + F'_j(B)F'_i(B)\varphi_k] \circ [\delta_k \cdot F_i(B) + F'_i(B) \cdot \delta_k] \circ \lambda_k \circ \partial_k \theta_{ij}(B) \\ &= [F''_j(B)\varphi_k F_i(B) + F'_j(B)F'_i(B)\varphi_k] \circ [(\frac{d}{dz} \theta_{ij})(B)(\partial_k B) \circ [\delta_k \cdot F_j(B) + F'_j(B) \cdot \delta_k] \circ \lambda_k] \\ &= F_k(B)(\frac{d}{dz} \theta_{ij})(B) \circ [F''_i(B)\varphi_k F_j(B) + F'_i(B)F'_j(B)\varphi_k] \circ [\delta_k \cdot F_j(B) + F'_j(B) \cdot \delta_k] \circ \lambda_k \\ &= F_k(B)(\frac{d}{dz} \theta_{ij})(B) \circ \tau_{kji}. \end{aligned}$$

Donc si  $\partial_k(\theta_{ij}(B)) = \partial_k\zeta_{ij}$ , alors, d'une part,  $\tau_{kij} \circ \partial_k(\theta_{ij}(B)) = \tau_{kij} \circ \partial_k\zeta_{ij} = \zeta_{kij} \circ \tau_{kji}$ , et d'autre part  $\tau_{kij} \circ \partial_k(\theta_{ij}(B)) = F_k(B)(\frac{d}{dz}\theta_{ij})(B) \circ \tau_{kji}$ . D'où  $F_k(B)(\frac{d}{dz}\theta_{ij})(B) \circ \tau_{kji} = \zeta_{kij} \circ \tau_{kji}$ , c'est-à-dire que  $F_k(B)(\frac{d}{dz}\theta_{ij})(B) = \zeta_{kij}$ . Réciproquement, si  $F_k(B)(\frac{d}{dz}\theta_{ij})(B) = \zeta_{kij}$ , alors  $F_k(B)(\frac{d}{dz}\theta_{ij})(B) \circ \tau_{kji} = \zeta_{kij} \circ \tau_{kji} = \tau_{kij} \circ \partial_k\zeta_{ij}$ . Comme  $F_k(B)(\frac{d}{dz}\theta_{ij})(B) \circ \tau_{kji} = \tau_{kij} \circ \partial_k(\theta_{ij}(B))$  alors  $\partial_k(\theta_{ij}(B)) = \partial_k\zeta_{ij}$ . ■

Notons que si les conditions de ce lemme sont satisfaites, alors les hexagones 2 et 3 des figures 4.15 et 4.16 coïncident.

#### 4.4 Résolution du système différentiel à une inconnue dans le cas où le nombre des variables est $\geq 3$

Les résultats du paragraphe précédent nous obligent à préciser le concept de cohérence défini au paragraphe 2.

##### 4.4.1 Systèmes cohérents

**Définition 4.4.1** Un *système cohérent* est un couple  $((F_j)_{1 \leq j \leq n}, (\theta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n})$ , où les  $F_j$  sont des  $\mathbb{L}$ -espèces, ou des  $\mathbb{B}$ -espèces, déterminant le système d'équations aux dérivées partielles,

$$\frac{\partial Y}{\partial T_j} = F_j(Y), \quad j = 1 \dots n, \quad Y(0, 0, \dots, 0, Z) = Z, \quad (4.8)$$

et les  $\theta_{ij} : F'_i F_j \rightarrow F'_j F_i$  sont des isomorphismes tels que

- 1)  $\theta_{ii} = Id$  et  $\theta_{ji} = \theta_{ij}^{-1}$
- 2) Pour tous  $i, j, k$  distincts, l'hexagone d'isomorphismes (Hexagone 3, figure 4.16) suivant est commutatif. ■

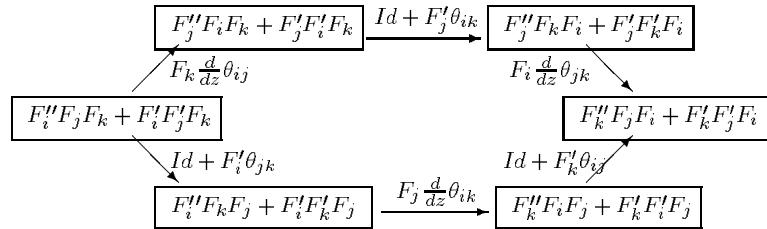


Figure 4.16: Hexagone 3

**Exemple 4.4.2** Soient  $(n_i)_{i=1 \dots n}$  une suite d'entiers naturels,  $F$  une  $\mathbb{L}$ -espèce, et des bijections  $\sigma_{ij} : \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_j \rightarrow \mathbf{n}_j \times \mathbf{n}_i$  telles que  $\sigma_{ij}^{-1} = \sigma_{ji}$ . Posons  $F_i = \mathbf{n}_i \cdot F$ , et pour tout couple  $(i, j)$ , soit  $\theta_{ij} : F'_i F_j = \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_j \cdot F' F \rightarrow F'_j F_i = \mathbf{n}_j \times \mathbf{n}_i \cdot F' F$  la bijection telle que  $\theta_{ij} = \sigma_{ij} \cdot 1_{F' F}$ . D'autre part, notons  $\tau_{ij} : \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_j \rightarrow \mathbf{n}_j \times \mathbf{n}_i$  la transposition définie par  $\tau_{ij}(x, y) = (y, x)$ .

Il est clair que  $F''_i F_j F_k = \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_j \times \mathbf{n}_k \cdot F'' F^2$  et  $F'_i F'_j F_k = \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_j \times \mathbf{n}_k \cdot (F')^2 F$  et  $\frac{d}{dz}\theta_{ij} = \sigma_{ij} \cdot 1_{F'' F + (F')^2} = \sigma_{ij} \cdot 1_{F'' F} + \sigma_{ij} \cdot 1_{(F')^2}$ . Donc  $F_k \frac{d}{dz}\theta_{ij} = \sigma_{ij} \times \mathbf{n}_k \cdot$

$1_{F''F^2} + \sigma_{ij} \times \mathbf{n}_k \cdot 1_{(F')^2F}$ . D'autre part, l'isomorphisme  $Id : F''_j F_i F_k \rightarrow F''_j F_k F_i$ , défini par la commutativité du produit de deux  $\mathbb{L}$ -espèces, s'écrit  $Id = \mathbf{n}_j \times \tau_{ik} \cdot 1_{F''F^2}$ . On en déduit que la famille  $((F_j)_{1 \leq j \leq n}, (\theta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n})$  est cohérent si et seulement si les deux diagrammes de la figure 4.17 sont commutatifs.

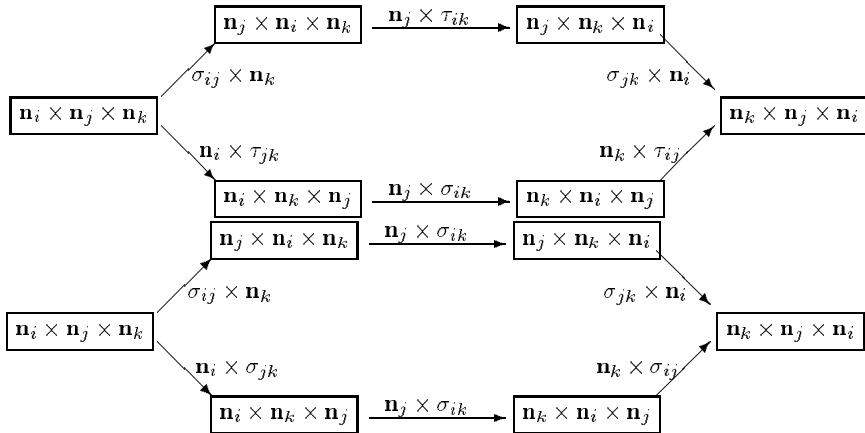


Figure 4.17: Un exemple où l'hexagone est somme de deux autres hexagones

**Contre-exemple** Le système  $((F_i)_{1 \leq i \leq 3}, (\theta_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3})$  tel que  $F_i(Z) \simeq 2Z$  pour tout  $i$ , c'est-à-dire où les  $F_i$ -structures s'identifient à un point ayant deux couleurs distinctes 0 et 1 (figure 4.18), et  $\theta_{ij} = \sigma_{ij} \cdot 1_{F'F}$  avec  $\sigma_{ij}(0,0) = (1,1)$ ,  $\sigma_{ij}(0,1) = (1,0)$  et  $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}^{-1} = \sigma_{ij}$  pour tout  $i,j$  (figure 4.19), n'est pas cohérent.

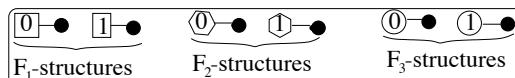


Figure 4.18:  $F_i$ -structure

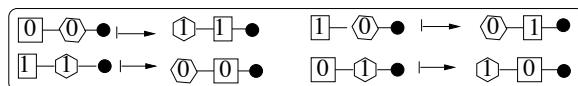


Figure 4.19: L'isomorphisme  $\theta_{ij}$

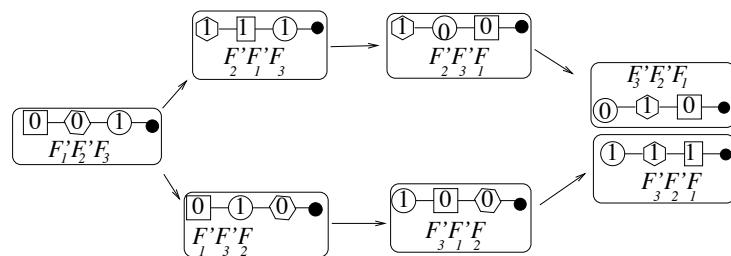


Figure 4.20: Non commutativité

En effet,  $F''_i = 0$ , et le deuxième diagramme n'est pas commutatif, comme le montre la figure 4.20. Par contre, si on définit  $\theta_{ij}$  en conservant les couleurs,

on aura un système cohérent. ■

**Définition 4.4.3** Une *solution* d'un système cohérent est un couple  $(A, (\varphi_i)_{i=1 \dots n})$  où:

- i)  $A = A(T_1, T_2, \dots, T_n, Z)$  est une espèce mixte du type  $\mathbb{L}^n \times \mathbb{B} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{A}, s}$ , vérifiant  $A(0, \dots, 0, Z) = Z$ .
- ii)  $\varphi_i : \frac{\partial}{\partial T_i} A \rightarrow F_i(A)$  sont des isomorphismes.

La solution  $(A, (\varphi_i))$  est dite *compatible* si pour tout  $(i, j)$ ,  $\zeta_{ij}(\varphi) = \theta_{ij}(A)$ . ■

#### 4.4.2 Résolution

Posons  $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ . Le  $n$ -uplet d'ensembles totalement ordonnés  $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$  sera identifié à la somme ordinaire  $l_1 +_o l_2 +_o \dots +_o l_n$ , c'est-à-dire que si  $i < j$ , les éléments de sorte  $i$  sont considérés comme plus petits que les éléments de sorte  $j$ . Dénotons par  $A = A_{\vec{F}} = A_{\vec{F}}(T_1, T_2, \dots, T_n, Z)$ , l'espèce des arborescences croissantes  $\vec{F}$ -enrichies définie sur tout couple  $(l, U)$  où les éléments de  $l$  sont supposés inférieurs à ceux de  $U$ , et où la fibre de tout élément de sorte  $T_i$  est munie d'une  $F_i$ -structure. De plus,  $A_{\vec{F}}[\emptyset, \dots, \emptyset, U] = \{U\}$  si  $|U| = 1$  et  $\emptyset$  sinon. La figure 4.21 nous montre un exemple d'arborescence croissante

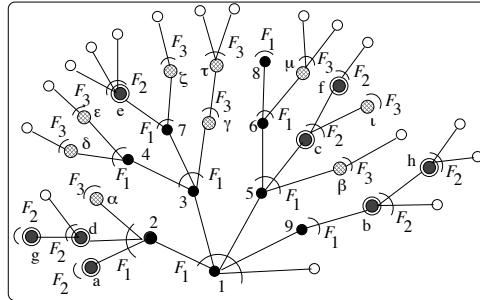


Figure 4.21: Une arborescence croissante  $\vec{F}$ -enrichie

$\vec{F}$ -enrichie, avec  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ,  $l = (l_1, l_2, l_3)$  où  $l_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $l_2 = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$  et  $l_3 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \tau, \mu, \iota\}$  et  $U$  est l'ensemble des feuilles, représentées par des cercles vides (la sorte  $Z$ ), dont on a omis les étiquettes pour plus de clarté.

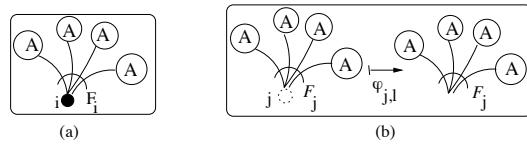


Figure 4.22: (a) Une arborescence sur  $l = (\emptyset, \dots, \emptyset, l_i, \dots, l_n)$ , (b) L'isomorphisme  $\varphi_{j,l}$ , si  $j \leq i$

Nous allons construire les isomorphismes  $\varphi_j$ , par récurrence sur  $|l| = |l_1| + \dots + |l_r|$ , de telle sorte que  $(A_{\vec{F}}, (\varphi_j)_{1 \leq j \leq r})$  soit une solution compatible du système  $(\vec{F}, \theta_{ij})$  (cf. définition 4.4.3). Remarquons que pour tout multiensemble  $l =$

$(\emptyset, \dots, \emptyset, l_i, \dots, l_n)$  tel que  $l_i \neq \emptyset$ , une arborescence  $\vec{F}$ -enrichie sur  $l$  est de la forme donnée par la figure 4.22(a).

Donc, pour tout  $j$ ,  $j \leq i$ , on peut définir une bijection  $\varphi_{j,l} : \partial_j A_{\vec{F}}[l] \rightarrow F_j(A_{\vec{F}})[l]$  canoniquement en oubliant la racine comme le montre la figure 4.22(b). En particulier  $\varphi_{i,\emptyset}$  sera obtenue en remplaçant, dans la figure 4.22(b), les arborescences  $A$  par des points de sorte  $Z$ . Soit  $n \geq 1$ , supposons que pour tout  $(k, m)$  tel que  $|m| \leq n - 1$ , on sait construire  $\varphi_{k,m}$ . Soient  $l$  tel que  $|l| = n$  et  $i$  le plus petit indice tel que  $l_i \neq \emptyset$ . Il est clair que si  $k \leq i$ , alors on sait construire  $\varphi_{k,l}$ . Soit alors  $k > i$  et posons  $\bar{l}_i = l_i \setminus \{\min l_i\}$ ,  $\bar{l}^i = (\emptyset, \dots, \emptyset, l_{\bar{i}}, \dots, l_k, \dots, l_r)$ ,  $1_k +_o \bar{l}^i = (\emptyset, \dots, \emptyset, l_{\bar{i}}, \dots, 1_k +_o l_k, \dots, l_r)$ . Il est clair que  $|\bar{l}^i| = n - 1$  et  $|1_k +_o \bar{l}^i| = n$ . Donc pour tout  $m$  tel que  $m \subset \bar{l}^i$ ,  $\varphi_{k,m}$  est défini (hypothèse de récurrence). D'autre part, nous avons la bijection  $\varphi_{i,1_k +_o \bar{l}^i} : \frac{\partial}{\partial T_i} A[1_k +_o \bar{l}^i] = \frac{\partial A}{\partial T_k}[l] \rightarrow F_i(A)[1_k +_o \bar{l}^i]$ . Alors nous pouvons définir  $\varphi_{k,l}$  de façon que le diagramme 5 de la figure 4.23 soit commutatif.

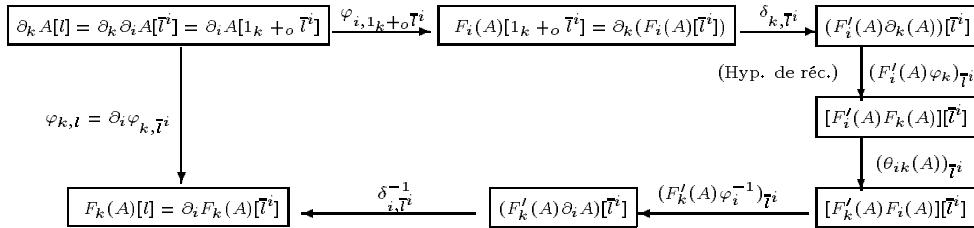
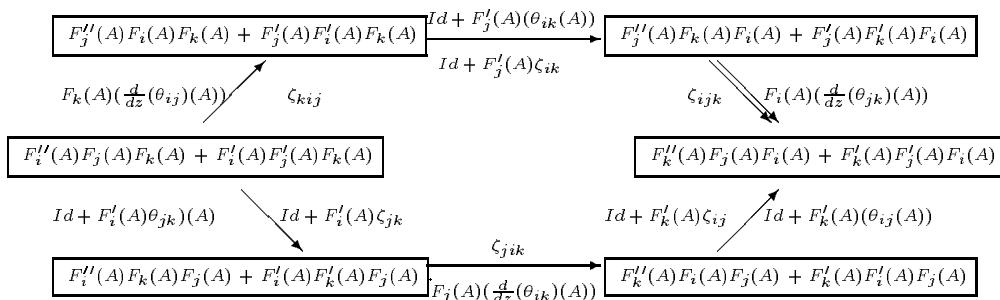


Figure 4.23: Diagramme 5

De cette construction on peut déduire que si  $l$  est un multiensemble et si  $i$  le plus petit indice tel que  $l_i \neq \emptyset$  et  $k > i$ , alors  $(\zeta_{ik})_{\bar{l}^i} = (\theta_{ik}(A))_{\bar{l}^i}$ . Ce qui revient à dire que si  $i$  est tel que pour tout  $r < i$ ,  $l_r = \emptyset$ , alors pour tout  $k > i$ ,  $(\zeta_{ik})_l = (\theta_{ik}(A))_l$  ou plus généralement pour tout  $j, k$  tel que  $j \leq i < k$ ,  $(\zeta_{jk})_l = (\theta_{jk}(A))_l$ . En particulier, pour tout  $j, k$ ,  $\theta_{jk} = \zeta_{jk}(\varphi_{\emptyset})$ . Il nous reste donc à montrer que  $(\zeta_{jk})_l = (\theta_{jk}(A))_l$ , si  $i < j$  et  $i < k$ . Nous allons procéder par récurrence sur  $|l|$ . Puisque  $\theta_{ij} = (\zeta_{ij}(\varphi_{\emptyset}))$ , on peut utiliser le lemme 4.3.5, appliqué à  $B = A$ . On a donc  $(\theta_{jk}(A))_l = (\zeta_{jk})_l \Leftrightarrow (\zeta_{ijk})_{\bar{l}^i} = (F_i(A)(\frac{d}{dz}\theta_{jk})(A))_{\bar{l}^i}$ .



D'une part, l'hexagone 1 montre que

$$(\zeta_{ijk})_{\vec{l}^i} = [Id + F'_k(A)(\zeta_{ij})_{\vec{l}^i}] \circ (\zeta_{jik})_{\vec{l}^i} \circ [Id + F'_i(A)(\zeta_{jk})_{\vec{l}^i}] \circ (\zeta_{kij})_{\vec{l}^i}^{-1} \circ [Id + F'_j(A)(\zeta_{ik})_{\vec{l}^i}^{-1}].$$

Et d'autre part la condition de cohérence (Hexagone 3) dit que

$$F_i(Z) \frac{d}{dz} \theta_{jk} = [Id + F'_k(Z)\theta_{ij}] \circ [F_j(Z)(\frac{d}{dz}\theta_{ik})] \circ [Id + F'_i(Z)(\theta_{jk})] \circ [(F_k(Z) \frac{d}{dz}\theta_{ij})^{-1}] \circ [(Id + F'_j(Z)\theta_{ik})^{-1}]. \text{ Donc}$$

$$\begin{aligned} F_i(A)((\frac{d}{dz}\theta_{jk})(A)) &= [Id + F'_k(A)(\theta_{ij}(A))] \circ [F_j(A)((\frac{d}{dz}\theta_{ik})(A))] \circ \\ &\quad [Id + F'_i(A)(\theta_{jk}(A))] \circ [[F_k(A)((\frac{d}{dz}\theta_{ij})(A))]^{-1}] \circ [[Id + F'_j(A)\theta_{ik}(A)]^{-1}]. \end{aligned}$$

Comme pour tout multiensemble  $m \subset \vec{l}^i$  nous avons  $(\zeta_{ij})_m = (\theta_{ij}(A))_m$ , et  $(\zeta_{ik})_m = (\theta_{ik}(A))_m$ , alors,  $[Id + F'_k(A)\zeta_{ij}]_{\vec{l}^i} = [Id + F'_k(A)\theta_{ij}(A)]_{\vec{l}^i}$ ;  $[F_j(A)(\frac{d}{dz}\theta_{ik})(A)]_{\vec{l}^i} = (\zeta_{jk})_{\vec{l}^i}$ ,  $[F_k(A)(\frac{d}{dz}\theta_{ij}(A))]_{\vec{l}^i} = (\zeta_{ki})_{\vec{l}^i}$  et  $[(Id + F'_j(A)(\theta_{ik})(A))]_{\vec{l}^i} = [Id + F'_j(A)(\zeta_{ik})]_{\vec{l}^i}$ .

De plus, l'hypothèse de récurrence dit que pour tout  $m$  tel que  $|m| \leq n-1$ ,  $(\zeta_{jk})_m = (\theta_{jk}(A))_m$ . Donc  $[Id + F'_i(A)\zeta_{jk}]_{\vec{l}^i} = [Id + F'_i(A)(\theta_{jk})(A)]_{\vec{l}^i}$ . On déduit que  $(\zeta_{ijk})_{\vec{l}^i} = [F_i(A)(\frac{d}{dz}\theta_{jk}(A))]_{\vec{l}^i}$ , c'est-à-dire que  $(\theta_{jk}(A))_l = (\zeta_{jk})_l$ . Nous obtenons le résultat fondamental suivant.

**Théorème 4.4.4** *Le couple  $(A_{\vec{F}}, (\varphi_i))$ , où  $A_{\vec{F}}$  est la  $\mathbb{L}$ -espèce des arborescences  $\vec{F}$ -enrichies croissantes et les  $\varphi_i$  sont les isomorphismes définis précédemment, est une solution, dite canonique, du système  $((F_j)_{1 \leq j \leq n}, (\theta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n})_{n \geq 2}$ . Cette solution est compatible et, de plus, elle est universelle, c'est-à-dire que pour toute autre solution compatible  $(B, (\psi_i))$  il existe un unique isomorphisme  $\Phi : A \rightarrow B$  tel que, pour tout  $i$ , le diagramme suivant soit commutatif.*

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\frac{\partial}{\partial T_i} A} & \xrightarrow{\varphi_i} & \boxed{F_i(A)} \\ \downarrow \frac{\partial}{\partial T_i} \Phi & & \downarrow F_i(\Phi) \\ \boxed{\frac{\partial}{\partial T_i} B} & \xrightarrow{\psi_i} & \boxed{F_i(B)} \end{array}$$

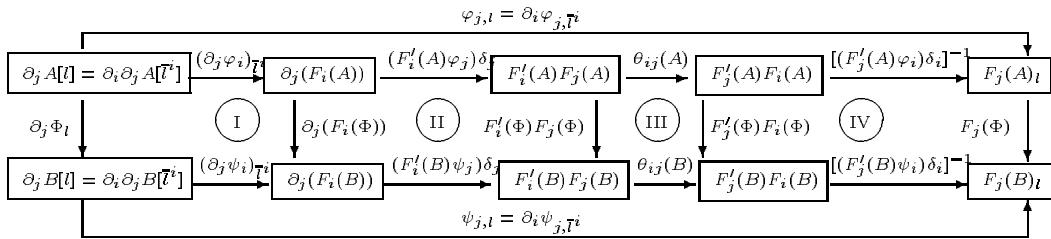
**Démonstration:** Il nous reste à montrer que cette solution est universelle.

Soit donc  $(B, (\psi_i)_{i=1\dots n})$  une autre solution compatible. Montrons qu'il existe un isomorphisme  $\Phi : A_{\vec{F}} \rightarrow B$ , en le construisant par récurrence sur  $|l| = |l_1| + \dots + |l_n|$ . Si  $|l| = 0$ , alors  $A_{\vec{F}}(\emptyset) = B(\emptyset) = Z$ . Donc  $\Phi_\emptyset = Id$ . Sinon, soit  $n \geq 1$  supposons que pour tout  $l'$  tel que  $|l'| \leq n-1$  on ait  $\Phi_{l'} : A_{\vec{F}}[l'] \rightarrow B[l']$ . Et soient  $l$  tel que  $|l| = n$  et  $i$  le plus petit indice tel que  $l_i \neq \emptyset$ . On a  $A_{\vec{F}}[l] = \partial_i A_{\vec{F}}[\vec{l}^i] \xrightarrow{\varphi_{i,\vec{l}^i}} F_i(A_{\vec{F}})[\vec{l}^i]$ . Rappelons qu'un élément de  $F_i(A_{\vec{F}})[\vec{l}^i]$  est un triplet  $(\pi, f_i, (a_p)_{p \in \pi})$  où  $\pi$  est une partition de  $\vec{l}^i$ ,  $f_i$  une  $F_i$ -structure sur  $\pi$  et pour tout  $p \in \pi$ ,  $a_p$  est une  $A_{\vec{F}}$ -structure sur  $p$ . Soit donc  $a \in A_{\vec{F}}[l]$  tel que  $\varphi_{i,\vec{l}^i}(a) = (\pi, f_i, (a_p)_{p \in \pi})$ . Pour tout  $p \in \pi$ ,  $|p| \leq n-1$ , donc  $\Phi_p$  est défini (Hypothèse de récurrence). Posons  $\Phi_p(a_p) = b_p$ . Nous définissons  $\Phi_l$  en posant  $\Phi_l(a) = b$  où  $b = \psi_i^{-1}(\pi, f_i, (b_p)_{p \in \pi})$ . En d'autres termes,  $\Phi_l(a) = (\psi_i^{-1})_{\vec{l}^i} F_i(\Phi)_{\vec{l}^i} \varphi_{i,\vec{l}^i}(a)$ .

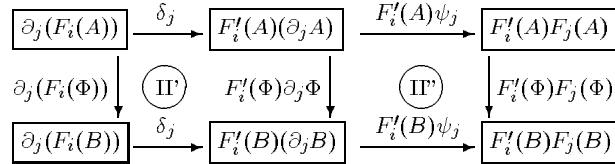
Montrons, par récurrence sur  $|l|$ , que pour tout  $l$  et pour tout  $j$ ,  $\psi_{j,l}(\partial_j \Phi)_l =$

$F_j(\Phi)l\varphi_{j,l}$ .

Si  $l = \emptyset$ , le résultat est évident en utilisant la définition de  $\Phi$ . Sinon, soit  $n \geq 1$  un entier tel que pour tout  $l'$  et pour tout  $j$ , si  $|l'| < n$ , alors  $\psi_{j,l'}(\partial_j\Phi)l' = F_j(\Phi)l'\varphi_{j,l'}$ . Considérons  $l$  tel que  $|l| = n$ , et soit  $i$  le plus petit indice tel que  $l_i \neq \emptyset$ . Si  $j \leq i$ , alors la définition de  $\Phi$  montre que si  $a \in \partial_j A[l] = A[1_j +_o l]$ , alors  $\frac{\partial}{\partial T_j} \Phi_l(a) = \Phi_{1_j +_o l}(a) = \phi_{j,l}^{-1} \circ F_j(\Phi)_l \circ \varphi_{j,l}(a)$ . Supposons que  $j > i$ . Sachant que  $(A_F, \varphi)$  et  $(B, \psi)$  sont des solutions compatibles, nous avons  $\zeta_{ij}(\varphi) = \theta_{ij}(A)$  et  $\zeta_{ij}(\psi) = \theta_{ij}(B)$ . Le diagramme (2) définissant  $\zeta_{ij}$  montre alors que  $\partial_i \varphi_j = \delta_i^{-1} \circ (F'_i(A)\varphi_i)^{-1} \circ \theta_{ij}(A) \circ (F'_i(A)\varphi_j) \circ \delta_j \circ \partial_j \varphi_i$  et  $\partial_i \psi_j = \delta_i^{-1} \circ (F'_i(B)\psi_i)^{-1} \circ \theta_{ij}(B) \circ (F'_i(B)\psi_j) \circ \delta_j \circ \partial_j \psi_i$ . Il suffit donc de montrer que le diagramme suivant est commutatif.



Il est évident que le diagramme (III) est commutatif. Notons que si (II) est commutatif, il en sera de même pour (IV). Le diagramme (II) se décompose en des deux diagrammes (II') et (II'') de la manière suivante.



La proposition 1.3.21 montre que le diagramme (II') est commutatif. D'autre part, le diagramme (II'') est commutatif par hypothèse de récurrence. Il reste à montrer que (I) est commutatif. Notons que  $\partial_j A[l] = A[1_j +_o l] = \partial_i A[1_j +_o \bar{l}^i]$  et que  $1_j +_o l = (\emptyset, \dots, \emptyset, l_i, \dots, 1_j +_o l_j, \dots, l_n)$ . Donc si  $a \in \partial_j A[l] = A[1_j +_o l]$ , alors  $(\partial_j\Phi)_l(a) = \Phi_{1_j +_o l}(a) = (\psi_{i,1_j +_o \bar{l}^i}^{-1})(F_i(\Phi))_{1_j +_o \bar{l}^i}(\varphi_{i,1_j +_o \bar{l}^i})(a) = (\partial_j\psi_i)_{\bar{l}^i}^{-1} \partial_j(F_i(\Phi))_{\bar{l}^i}(\partial_j\varphi_{i,\bar{l}^i})(a)$ . Ce qu'il fallait démontrer.

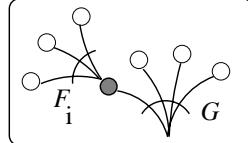
Notons alors que  $\Phi$  est déterminée de manière unique par les relations  $\Phi_\emptyset = \text{Id}$  et  $\Phi_l(a) = (\psi_i^{-1})_{\bar{l}^i} F_i(\Phi)_{\bar{l}^i} \varphi_{i,\bar{l}^i}(a)$ , pour  $a \in A_F[l]$ . ■

#### 4.4.3 Opérateur d'éclosion associé

Considérons le système cohérent suivant:

$$\partial_j Y = F_j(Y); \quad j = 1 \dots n; \quad Y(0, 0, \dots, 0, Z) = Z.$$

Pour chaque  $i$ , posons  $\mathcal{D}_i = F_i(Z) \frac{\partial}{\partial Z}$  et  $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^n T_i \mathcal{D}_i$ . Appliquer  $\mathcal{D}$  à une



**Figure 4.24:** Une  $G$ -structure ayant subi une éclosion de sorte  $i$

$G$ -structure revient à choisir un opérateur  $\mathcal{D}_i$  et appliquer l'opérateur d'éclosion  $T_i \mathcal{D}_i$ . On dira alors que la  $G$ -structure en question a subi une éclosion de sorte  $i$  (Figure 4.24). Posons  $e^{\mathcal{D}} = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \mathcal{D}^m$ .

**Proposition 4.4.5** *Nous avons*

$$e^{\mathcal{D}} = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} (\sum_{i=1}^n T_i \mathcal{D}_i)^m = \sum_{m \geq 0} \sum_{m_1 + \dots + m_n = m} \frac{T_n^{m_n}}{m_n!} \mathcal{D}_n^{m_n} \circ \dots \circ \frac{T_1^{m_1}}{m_1!} \mathcal{D}_1^{m_1}.$$

De plus, l'espèce  $A_{\vec{F}}$ , solution du système cohérent (4.1) vérifie

$$A_{\vec{F}}(T_1, \dots, T_n, Z) = e^{(\sum_{i=1}^n T_i \mathcal{D}_i)}(Z).$$

**Démonstration** Supposons qu'on itère  $m$  fois l'opérateur  $\mathcal{D}$ . À chaque coup on doit choisir un opérateur  $T_i \mathcal{D}_i$ . En d'autres termes,

$$\mathcal{D}^m = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_m)} (T_{i_m} \mathcal{D}_{i_m}) \cdots (T_{i_2} \mathcal{D}_{i_2})(T_{i_1} \mathcal{D}_{i_1}).$$

Notons aussi que, pour toute espèce  $G$ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j(G(Z)) &= F_i(Z) \frac{\partial}{\partial Z} [F_j(Z) \frac{\partial}{\partial Z} (G(Z))] = F_i(Z) \frac{\partial}{\partial Z} [F_j(Z) G'(Z)] \\ &\simeq F_i(Z) [F'_j(Z) G'(Z) + F_j(Z) G''(Z)] \simeq F_i(Z) F'_j(Z) G'(Z) + F_i(Z) F_j(Z) G''(Z). \end{aligned}$$

De la même façon  $\mathcal{D}_j \mathcal{D}_i(G(Z)) \simeq F'_i(Z) F_j(Z) G'(Z) + F_i(Z) F_j(Z) G''(Z)$ . Comme  $F'_i F_j \simeq F'_j F_i$ , alors  $\mathcal{D}_j \mathcal{D}_i(G(Z)) \simeq \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j(G(Z))$  pour tout  $G$ . C'est-à-dire que les opérateurs  $\mathcal{D}_i$  et  $\mathcal{D}_j$  commutent, et nous écrivons  $\mathcal{D}_i \mathcal{D}_j \simeq \mathcal{D}_j \mathcal{D}_i$ . Cette commutation nous permet d'affirmer que pour un entier  $m$  donné, nous avons

$$\mathcal{D}^m = (\sum_{i=1}^n T_i \mathcal{D}_i)^m = \sum_{m_1 + \dots + m_n = m} {}_{(m_1, m_2, \dots, m_n)}^m (T_n^{m_n} \mathcal{D}_n^{m_n}) \cdots (T_1^{m_1} \mathcal{D}_1^{m_1}),$$

le facteur  ${}_{(m_1, m_2, \dots, m_n)}^m$  étant le nombre de façons de choisir une suite  $(i_1, i_2, \dots, i_m)$  dont  $m_1$  éléments sont égaux à 1,  $m_2$  égaux 2, ..., et  $m_n$  égaux à  $n$ .

La dernière partie de cette proposition est tout simplement une reformulation de la proposition 2.2.8. Notons que dans les arborescences  $\vec{F}$ -enrichies croissantes, si  $i \leq j$ , alors les points de sorte  $T_i$  sont plus petits que les points de sorte  $T_j$ . La division par  $m!$  correspond donc à l'unique ordre sur  $l = l_1 + \dots + l_n$ , où  $|l_i| = m_i$ , qui coïncide d'une part avec cet ordre, et d'autre part avec chacun des ordres définis par les  $T_i^{m_i} \mathcal{D}_i^{m_i}$  sur les ensembles  $l_i$  [cf. section 2.2.2]. ■

## 4.5 Cas d'un système de plusieurs équations à plusieurs inconnues

La méthode de résolution combinatoire se généralise aux systèmes de plusieurs équations à plusieurs inconnues.

### 4.5.1 Cas des systèmes autonomes

Considérons le système d'équations aux dérivées partielles suivant, avec  $Y = (Y^1, Y^2, \dots, Y^r)$ ,

$$\{\partial_j Y^\rho = F_j^\rho(Y), j = 1 \dots n, Y^\rho(0, 0, \dots, 0) = Z^\rho; 1 \leq \rho \leq r\}. \quad (4.9)$$

les  $F_j^\rho$  étant des  $\mathbb{B}$ -espèces. La donnée d'une famille de  $\mathbb{L}$ -espèces  $\vec{B} = (B^\rho = B^\rho(T_1, \dots, T_n, Z^\rho))_{1 \leq \rho \leq r}$  et d'une famille  $\varphi = (\varphi_j^\rho)$  d'isomorphismes,  $\varphi_j^\rho : \partial_j B^\rho \rightarrow F_j^\rho(B^1, \dots, B^r)$ , induit, pour  $i \neq j$ , une famille d'isomorphismes  $(\zeta_{ij}^\rho = \zeta_{ij}^\rho(\varphi))$ , rendant commutatif tous les diagrammes d'isomorphismes du type donné par la figure 4.25, où  $h_{ij}^\rho = \sum_{\lambda=1}^r (\partial_\lambda F_j^\rho)(\vec{B}) \varphi_i^\lambda \cdot \delta_{ij}^\rho \cdot \partial_i \varphi_j^\rho$ ,  $\delta_{ij}^\rho$  est l'isomorphisme dû à la dérivation de  $F_j^\rho(\vec{B})$  par rapport à la variable  $T_i$ .

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\partial_i \partial_j B^\rho} & \xrightarrow{h_{ij}^\rho} & \boxed{\sum_{\lambda=1}^r (\partial_\lambda F_j^\rho)(\vec{B}) F_i^\lambda(\vec{B})} \\ \downarrow & & \downarrow \zeta_{ij}^\rho \\ \boxed{\partial_j \partial_i B^\rho} & \xrightarrow{h_{ji}^\rho} & \boxed{\sum_{\lambda=1}^r (\partial_\lambda F_i^\rho)(\vec{B}) F_j^\lambda(\vec{B})} \end{array}$$

Figure 4.25: Diagramme 6

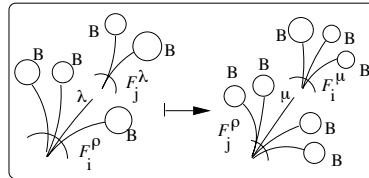


Figure 4.26: L'isomorphisme  $\zeta_{ij}^\rho$ .

Remarquons que pour un  $\lambda$  donné,  $\zeta_{ij}^\rho$  transforme une  $(\partial_\lambda F_i^\rho)(\vec{B}) F_j^\lambda(\vec{B})$ -structure en une  $(\partial_\mu F_j^\rho)(\vec{B}) F_i^\mu(\vec{B})$ -structure, comme le montre la figure 4.26, où  $\mu$  peut être différent de  $\lambda$ .

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\partial_k (\sum_{\lambda=1}^r (\partial_\lambda F_j^\rho)(\vec{B}) F_i^\lambda(\vec{B}))} & \xrightarrow{\tau_{kij}^\rho} & \boxed{\sum_{\lambda,\mu=1}^r [(\partial_\mu \partial_\lambda F_j^\rho)(\vec{B}) F_i^\lambda(\vec{B}) F_k^\mu(\vec{B})] + \sum_{\lambda,\mu=1}^r [(\partial_\lambda F_j^\rho)(\vec{B}) (\partial_\mu F_i^\lambda)(\vec{B}) F_k^\mu(\vec{B})]} \\ \downarrow \partial_k \zeta_{ij}^\rho & & \uparrow \zeta_{kij}^\rho \\ \boxed{\partial_k (\sum_{\lambda=1}^r (\partial_\lambda F_i^\rho)(\vec{B}) F_j^\lambda(\vec{B}))} & \xrightarrow{\tau_{kji}^\rho} & \boxed{\sum_{\lambda,\mu=1}^r [(\partial_\mu \partial_\lambda F_i^\rho)(\vec{B}) F_j^\lambda(\vec{B}) F_k^\mu(\vec{B})] + \sum_{\lambda,\mu=1}^r [(\partial_\lambda F_i^\rho)(\vec{B}) (\partial_\mu F_j^\lambda)(\vec{B}) F_k^\mu(\vec{B})]} \end{array}$$

Figure 4.27: Diagramme 7

Si  $n \geq 3$ , on en déduit d'une part, en considérant la dérivée du diagramme (6) par rapport à  $T_k$ , où  $k \neq i$  et  $k \neq j$ , qu'il existe un isomorphisme  $\zeta_{kij}^\rho = \zeta_{kij}^\rho(\varphi)$

tel que le diagramme 7 de la figure 4.27 soit commutatif,  $\tau_{kij}^\rho$  étant la composée de la règle de dérivation de la somme, du produit, de la dérivation en chaîne et des isomorphismes  $\sum_{\lambda,\mu=1}^r (\partial_\mu \partial_\lambda F_j^\rho)(\vec{B}) \varphi_k^\mu F_i^\lambda(\vec{B}) + \sum_{\lambda,\mu=1}^r (\partial_\lambda F_j^\rho)(\vec{B}) (\partial_\mu F_i^\lambda)(\vec{B}) \varphi_k^\mu$ .

D'autre part, le diagramme 8 de la figure 4.28 est commutatif. Notons que la vérification de la commutativité de ce diagramme est essentiellement la même que celle du lemme 4.3.3. La différence vient du fait que la règle de dérivation en chaîne s'écrit  $\partial_i[F_j^\rho(B)] \xrightarrow{\delta_i} \sum_\lambda \partial_\lambda F_j^\rho(B) \partial_i B^\lambda$ . Donc, par exemple, les diagrammes (A), (A'), (B) et (B') seront des sommes de diagrammes qui seront commutatifs pour les mêmes raisons. D'autre part, le diagramme (C) sera exactement le théorème 1.5.3 b). Le diagramme (D) sera commutatif pour les mêmes raisons.

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\partial_k (\sum_{\lambda=1}^r (\partial_\lambda F_j^\rho)(\vec{B}) F_{i\lambda}(\vec{B}))} & \xrightarrow{\tau_{kij}^\rho} & \boxed{\sum_{\lambda,\mu=1}^r [(\partial_\lambda \partial_\mu F_j^\rho)(\vec{B}) F_k^\lambda(\vec{B}) F_i^\mu(\vec{B})] \\
 & & + \sum_{\lambda,\mu=1}^r [(\partial_\lambda F_j^\rho)(\vec{B}) (\partial_\mu F_k^\lambda)(\vec{B}) F_i^\mu(\vec{B})]} \\
 \downarrow \partial_k h_{ij}^\rho & & \uparrow Id + \sum_{\lambda=1}^r (\partial_\lambda F_j^\rho)(\vec{B}) \zeta_{k\lambda}^\lambda \\
 \boxed{\partial_k \partial_i \partial_j B^\rho = \partial_i \partial_k \partial_j B^\rho} & & \\
 \downarrow \partial_i h_{kj}^\rho & & \\
 \boxed{\partial_i (\sum_{\lambda=1}^r (\partial_\lambda F_j^\rho)(\vec{B}) F_{k\lambda}(\vec{B}))} & \xrightarrow{\tau_{ikj}^\rho} & \boxed{\sum_{\lambda,\mu=1}^r [(\partial_\lambda \partial_\mu F_j^\rho)(\vec{B}) F_i^\lambda(\vec{B}) F_k^\mu(\vec{B})] \\
 & & + \sum_{\lambda,\mu=1}^r [(\partial_\lambda F_j^\rho)(\vec{B}) (\partial_\mu F_i^\lambda)(\vec{B}) F_k^\mu(\vec{B})]}
 \end{array}$$

Figure 4.28: Diagramme 8

Ces deux résultats montrent que l'hexagone (5) ci-dessous, où  $\epsilon_{ijk}^\rho = Id + \sum_{\lambda=1}^r (\partial_\lambda F_i^\rho)(\vec{B}) \zeta_{jk}^\lambda$ , est commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\sum_{\lambda,\mu=1}^r [(\partial_\mu \partial_\lambda F_j^\rho)(\vec{B}) F_k^\mu(\vec{B}) F_i^\lambda(\vec{B})]} & \xrightarrow{\epsilon_{jik}^\rho} & \boxed{\sum_{\lambda,\mu=1}^r [(\partial_\mu \partial_\lambda F_j^\rho)(\vec{B}) F_k^\mu(\vec{B}) F_i^\lambda(\vec{B})] \\
 & & + \sum_{\lambda,\mu=1}^r [(\partial_\lambda F_j^\rho)(\vec{B}) (\partial_\mu F_k^\lambda)(\vec{B}) F_i^\mu(\vec{B})]} \\
 \downarrow \zeta_{kij}^\rho & & \downarrow \zeta_{ijk}^\rho \\
 \boxed{\sum_{\lambda,\mu=1}^r [(\partial_\lambda \partial_\mu F_i^\rho)(\vec{B}) F_k^\mu(\vec{B}) F_j^\lambda(\vec{B})]} & & \boxed{\sum_{\lambda,\mu=1}^r [(\partial_\lambda \partial_\mu F_i^\rho)(\vec{B}) F_j^\lambda(\vec{B}) F_k^\mu(\vec{B})] \\
 & & + \sum_{\lambda,\mu=1}^r [(\partial_\lambda F_i^\rho)(\vec{B}) (\partial_\mu F_k^\lambda)(\vec{B}) F_j^\mu(\vec{B})]} \\
 \downarrow \epsilon_{ijk}^\rho & & \uparrow \epsilon_{kij}^\rho \\
 \boxed{\sum_{\lambda,\mu=1}^r [(\partial_\mu \partial_\lambda F_i^\rho)(\vec{B}) F_k^\mu(\vec{B}) F_j^\lambda(\vec{B})]} & \xrightarrow{\zeta_{jik}^\rho} & \boxed{\sum_{\lambda,\mu=1}^r [(\partial_\mu \partial_\lambda F_i^\rho)(\vec{B}) F_k^\mu(\vec{B}) F_j^\lambda(\vec{B})] \\
 & & + \sum_{\lambda,\mu=1}^r [(\partial_\lambda F_i^\rho)(\vec{B}) (\partial_\mu F_k^\lambda)(\vec{B}) F_j^\mu(\vec{B})]}
 \end{array}$$

Figure 4.29: Hexagone 5

Notons en passant qu'en posant  $\theta_{ij}^\rho = (\zeta_{ij}^\rho)_\emptyset$ , le lemme 4.3.5 prend la forme suivante.

**Lemme 4.5.1** Soit  $\frac{\partial}{\partial Z_\mu} \theta_{ij}^\rho : \sum_{\lambda=1}^r (\partial_\mu \partial_\lambda F_i^\rho) F_j^\lambda + \sum_{\lambda=1}^r \partial_\lambda F_i^\rho \partial_\mu F_j^\lambda \rightarrow \sum_{\lambda=1}^r (\partial_\mu \partial_\lambda F_j^\rho) F_i^\lambda + \sum_{\lambda=1}^r \partial_\lambda F_i^\rho \partial_\mu F_j^\lambda$ ,

l'isomorphisme induit par les règles de dérivation par rapport à la variable  $Z_\mu$ .

Pour tous  $i, j, \rho$ , les deux propositions suivantes sont équivalentes

i)  $\theta_{ij}^\rho(\vec{B}) = \zeta_{ij}^\rho$ .

ii) Pour tout  $k$ ,  $\zeta_{kij}^\rho = \sum_{\mu=1}^r F_k^\mu(\vec{B}) (\frac{\partial}{\partial Z_\mu} \theta_{ij}^\rho)(\vec{B})$ .

**Définition 4.5.2** 1. Le système (4.9), défini par la donnée d'un couple

$((F_j^\rho, \theta_{ij}^\rho))_{1 \leq \rho \leq r, 1 \leq i, j \leq n}$ , où  $F_j^\rho$  sont des espèces, et  $\theta_{ij}^\rho : \sum_{\lambda=1}^r (\partial_\lambda F_i^\rho)(Z) F_j^\lambda(Z) \xrightarrow{\sim} \sum_{\lambda=1}^r (\partial_\lambda F_j^\rho)(Z) F_i^\lambda(Z)$  ( $Z = (Z^1, \dots, Z^r)$ ) des isomorphismes, est *cohérent* si pour tout triplet  $(\rho, i, j)$ ,  $(\theta_{ji}^\rho)^{-1} = \theta_{ij}^\rho$  et pour  $n \geq 3$ , l'hexagone 6 de la figure 4.30 est commutatif, où  $\pi_{ijk}^\rho = Id + \sum_{\lambda=1}^r (\partial_\lambda F_i^\rho)(Z) \theta_{jk}^\lambda$  et  $\alpha_{kij}^\rho = \sum_{\mu=1}^r F_k^\mu \frac{\partial}{\partial Z_\mu} \theta_{ij}^\rho$ , est commutatif.

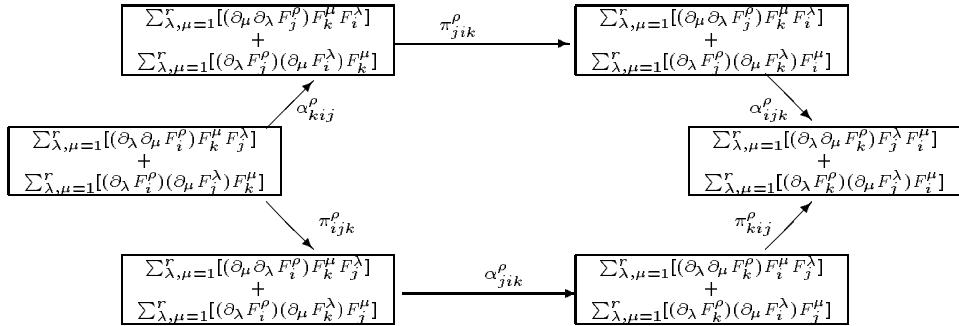


Figure 4.30: Hexagone 6

2. Une *solution* d'un tel système cohérent est alors un couple  $(A, \varphi_j^\rho)_{1 \leq \rho \leq r, j=1 \dots n}$  tel que:

- i)  $A = (A^\rho(T_1, \dots, T_n))_{1 \leq \rho \leq r}$  est une famille de  $\mathbb{L}$ -espèces,
- ii)  $\varphi_j^\rho : \partial_j A^\rho \rightarrow F_j^\rho(A)$  sont des isomorphismes.

De plus, si  $\theta_{ij}^\rho(A) = \zeta_{ij}^\rho$  pour tout triplet  $(\rho, i, j)$ , alors on dit que cette solution est *compatible*. ■

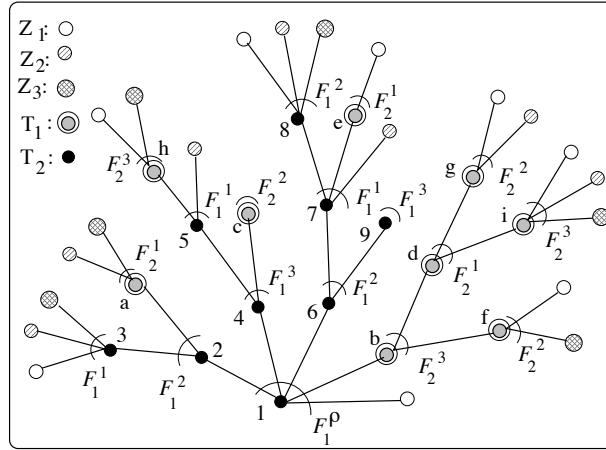
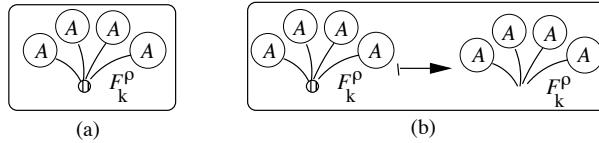


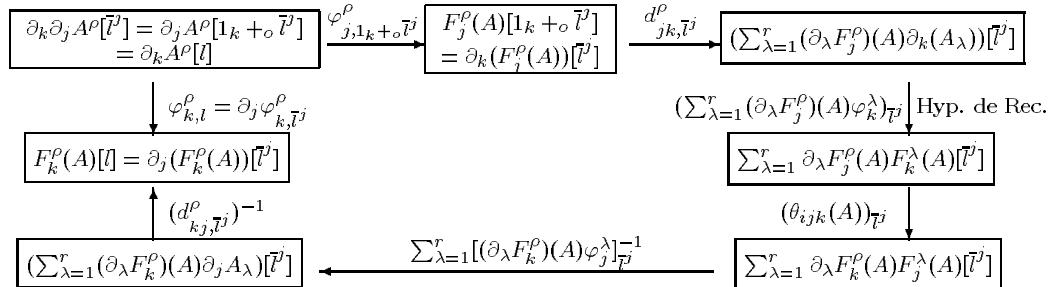
Figure 4.31: Une  $A^\rho$ -structure, avec  $r = 3$  et  $n = 2$ .

Une solution compatible se construit comme dans la section 4.4.2. Le multiensemble  $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$  est identifié à la somme ordinaire  $l = l_1 +_o l_2 +_o \dots +_o l_n$ .

Soit  $\rho$ ,  $1 \leq \rho \leq r$ . Notons  $A_{\vec{F}}^\rho$  l'espèce des arborescences croissantes  $\vec{F}$ -enrichies, avec  $\vec{F} = (F_j^\rho)_{1 \leq \rho \leq r, j=1 \dots n}$ , c'est-à-dire que si  $l = (\emptyset, \dots, \emptyset, l_i, \dots, l_n)$ , avec  $l_i \neq \emptyset$ , alors une  $A^\rho$ -structure sur  $l$  est caractérisée par le fait que “la fibre de tout point de sorte  $T_j$  est munie d'une  $F_j^\lambda$ -structure avec  $1 \leq \lambda \leq r$ , sauf la racine qui est munie d'une  $F_i^\rho$ -structure”. La figure 4.31 est un exemple de  $A^\rho$ , avec  $l_1 = \{1, 2, \dots, 9\}$  et  $l_2 = \{a, b, c, \dots, i\}$ .



**Figure 4.32:** (a) Une  $\frac{\partial A^\rho}{\partial T_k}$ -structure; (b) La bijection  $\varphi_{k,l}^\rho$  si pour tout  $i < k$ ,  $l_i = \emptyset$ .



**Figure 4.33:** Diagramme 9

Les isomorphismes  $\varphi_j^\rho$  peuvent être définis de la manière suivante. Soit  $l$  un multiensemble totalement ordonné, et  $j \in [n]$  tel que, et pour tout  $i < j$ ,  $l_i = \emptyset$ . Pour un  $\rho$  donné et pour tout  $k \leq j$ , une  $\frac{\partial A^\rho}{\partial T_k}$ -structure sur  $l$  est une arborescence ayant à sa racine l'élément minimum de sorte  $k$ , extérieur à  $l$  (figure 4.32(a)). Dans ce cas, la bijection  $\varphi_{k,l}^\rho$  peut être définie en oubliant la racine (figure 4.32(b)). Supposons maintenant que  $j$  est le plus petit indice tel que  $l_j \neq \emptyset$ , et soit  $k > j$ . On a  $\partial_k A^\rho[l] = \partial_j A^\rho[1_k +_o \vec{l}^j] = A^\rho[1_k +_o l]$ . Alors on peut définir  $\varphi_{k,l}^\rho$  par récurrence en utilisant le diagramme 9 de la figure 4.33. Nous obtenons la proposition suivante.

**Proposition 4.5.3** *Moyennant la condition de cohérence, le système (4.9) admet comme solution le couple  $(A_{\vec{F}}, (\varphi_i^\rho))$  où  $A_{\vec{F}} = (A_{\vec{F}}^\rho)_{1 \leq \rho \leq r}$ . De plus, cette solution est compatible, dans le sens où  $\zeta_{ij}^\rho = \theta_{ij}^\rho$ . D'autre part, pour toute solution compatible  $(B, (\psi_i^\rho))$ , où  $B = (B^\rho)$ , il existe une famille unique,  $\Phi = (\Phi^\rho)$ , d'isomorphismes  $\Phi^\rho : A_{\vec{F}}^\rho \rightarrow B^\rho$  tel que, pour tout  $i$ , le diagramme suivant soit commutatif.*

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\frac{\partial}{\partial T_i} A_{\vec{F}}^\rho} & \xrightarrow{\varphi_i^\rho} & \boxed{F_i^\rho(A_{\vec{F}}^\rho)} \\ \downarrow \frac{\partial}{\partial T_i} \Phi^\rho & & \downarrow F_i^\rho(\Phi^\rho) \\ \boxed{\frac{\partial}{\partial T_i} B^\rho} & \xrightarrow{\psi_i^\rho} & \boxed{F_i^\rho(B)} \end{array}$$

### 4.5.2 Cas des systèmes non autonomes

#### Cas général

Considérons le système

$$\partial_i Y = F_i(T_1, \dots, T_n, Y), \quad Y_i(0) = Z, \quad i = 1 \dots n. \quad (4.10)$$

En posant, pour  $i \leq n$ ,  $Y^i = T_i$ ,  $F_i^{n+1} = F_i$ ,  $F_i^i = 1$ ,  $F_i^\rho = 0$  si  $\rho \neq i$  et  $\rho \neq n+1$ , et  $Y^{n+1} = Y$ , il est clair que le système (4.10) est équivalent au système autonome suivant:

$$\partial_i Y^\rho = F_i^\rho(Y^1, Y^2, \dots, Y^{n+1}), \quad Y^\rho(0) = 0 \text{ si } \rho < n+1, \text{ et } Y^{n+1}(0) = Z. \quad (4.11)$$

Notons alors que les isomorphismes  $\theta_{ij}^\rho$  de la définition 4.5.2 sont nuls si  $\rho \neq n+1$  car les dérivées partielles  $\partial_\lambda F_i^\rho$  sont nulles. D'autre part, pour  $i \leq n$ , on a  $F_i^i = 1$  et pour  $\lambda \neq n+1$ , et  $\lambda \neq i$ ,  $F_i^\lambda = 0$ . Alors,  $\sum_{\lambda=1}^{n+1} (\partial_\lambda F_i^{n+1}) F_j^\lambda = (\partial_{n+1} F_i) F_j + (\partial_j F_i)$  et que

$$\sum_{\lambda, \mu=1}^r [(\partial_\lambda \partial_\mu F_i^\rho) F_k^\mu F_j^\lambda] + \sum_{\lambda, \mu=1}^r [(\partial_\lambda F_i^\rho) (\partial_\mu F_j^\lambda) F_k^\mu] = [(\partial_{n+1}^2 F_i) F_k F_j + (\partial_k \partial_{n+1} F_i) F_j + (\partial_{n+1} \partial_j F_i) F_k + (\partial_k \partial_j F_i)] + [(\partial_{n+1} F_i) \partial_{n+1} F_j F_k + (\partial_{n+1} F_i) \partial_k F_j].$$

D'où, en posant  $\theta_{ij}^{n+1} = \theta_{ij} : (\partial_{n+1} F_i) F_j + (\partial_j F_i) \rightarrow (\partial_{n+1} F_j) F_i + (\partial_i F_j)$ ,  $\pi_{kij} = \pi_{kij}^{n+1} = Id + (\partial_{n+1} F_k) \theta_{ij}$ ,  $\alpha_{kij} = \alpha_{kij}^{n+1} = F_k (\partial_{n+1} \theta_{ij}) + (\partial_k \theta_{ij})$  et  $\zeta_{ij} = \zeta_{ij}^{n+1}$ , l'hexagone (6) est réduit à l'hexagone (7), et la définition 4.5.2 est équivalente à la définition 4.5.4 suivante:

**Définition 4.5.4** 1. Un *système non autonome cohérent* est un couple  $((F_i)_{i=1\dots n}, (\theta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n})$ , où les  $F_i$  sont des espèces à  $n+1$  sortes déterminant le système d'équations aux dérivées partielles,

$$\partial_i Y = F_i(T_1, \dots, T_n, Y), \quad Y_i(0) = Z, \quad i = 1 \dots n, \quad (4.12)$$

et  $\theta_{ij} : (\partial_{n+1} F_i) F_j + (\partial_j F_i) \xrightarrow{\sim} (\partial_{n+1} F_j) F_i + (\partial_i F_j)$  des isomorphismes tels que:

- i)  $\theta_{ji}^{-1} = \theta_{ij}$ ,
- ii) si  $n \geq 3$ , l'hexagone 7 de la figure 4.34 est commutatif.

2. Une *solution* d'un système non autonome cohérent est un couple  $(A, (\varphi_i))$  tel que  $A = A(T_1, \dots, T_n, Z)$  est une espèce mixte et  $\varphi_i : \partial_i A \xrightarrow{\sim} F_i(T_1, \dots, T_n, A)$ , des isomorphismes. Cette solution est *compatible* si pour tout  $i, j$ ,  $\theta_{ij}(A) = \zeta_{ij}(\varphi)$ . ■

On définit l'espèce  $A_{\vec{F}(\vec{T}, Y)}$  des arborescences croissantes  $\vec{F}(\vec{T}, Y)$ -enrichies en généralisant la notion d'arborescences croissantes  $F(T, Y)$ -enrichies définies

par Leroux et Viennot dans [(Le.-Vi. 1. 86)], et les isomorphismes  $\varphi_i$ , en posant  $\varphi_i = \varphi_i^{n+1}$  (voir section précédente). La figure 4.35 montre un exemple d'arborescence croissante  $\vec{F}(\vec{T}, Y)$ -enrichie, sur  $l_1 = \{1 < 2 < \dots < 9\}$  et  $l_2 = \{a < b < \dots < k\}$ , avec  $\vec{F} = (F_1, F_2)$ .

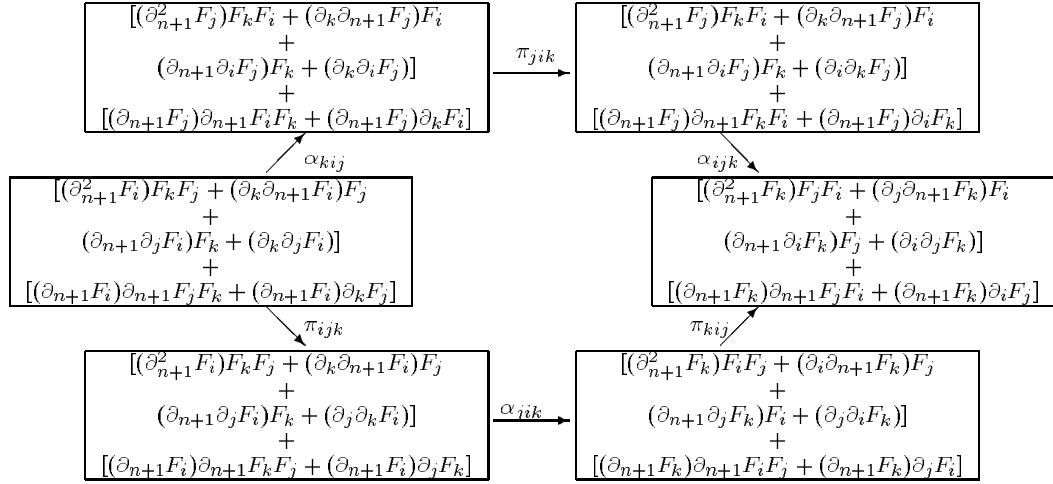
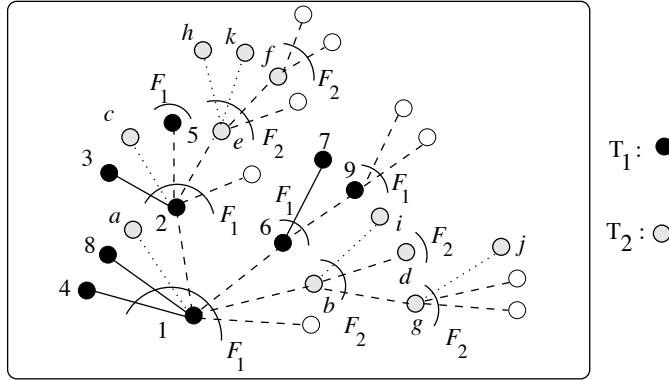


Figure 4.34: Hexagone 7

Figure 4.35: Une arborescence croissante  $\vec{F}(\vec{T}, Y)$ -enrichie.

**Proposition 4.5.5** *Si le système non autonome (4.12) est cohérent, alors il admet comme solution compatible le couple  $(A_{\vec{F}(\vec{T}, Y)}, (\varphi_i))$ . De plus, pour toute solution compatible  $(B, (\psi_i))$ , il existe un unique isomorphisme  $\Phi : A = A_{\vec{F}(\vec{T}, Y)} \rightarrow B$  tel que, pour tout  $i$ , le diagramme suivant soit commutatif:*

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\frac{\partial}{\partial T_i} A_{\vec{F}(\vec{T}, Y)}} & \xrightarrow{\varphi_i} & \boxed{F_i(T_1, \dots, T_n, A_{\vec{F}(\vec{T}, Y)})} \\
 \downarrow \frac{\partial}{\partial T_i} \Phi & & \downarrow F_i(T_1, \dots, T_n, \Phi) \\
 \boxed{\frac{\partial}{\partial T_i} B} & \xrightarrow{\psi_i} & \boxed{F_i(T_1, \dots, T_n, B)}
 \end{array}$$

où  $F_i(T_1, \dots, T_n, \Phi) = F_i(1_{T_1}, \dots, 1_{T_n}, \Phi)$ . ■

### Cas particulier de l'intégration pure:

Considérons le système

$$\partial_i Y = B_i(T_1, \dots, T_n), \quad i = 1 \dots n, \quad Y(0, \dots, 0) = 0. \quad (4.13)$$

Notons que la donnée d'un couple  $(B, (\varphi_i)_{i=1 \dots n})$ , où  $B = B(T_1, T_2, \dots, T_n)$  est une espèce telle que  $B(0, \dots, 0) = 0$  et  $\varphi_i : \partial_i B \rightarrow B_i(T_1, T_2, \dots, T_n)$  des isomorphismes, nous permet de définir un isomorphisme  $\zeta_{ij}(\varphi) : \partial_j B_i \rightarrow \partial_i B_j$ , en posant  $\zeta_{ij}(\varphi) = \partial_i \varphi_j \circ (\partial_j \varphi_i)^{-1}$ .

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\partial_i \partial_j B} & \xrightarrow{\partial_i \varphi_j} & \boxed{\partial_i B_j} \\ \parallel & & \uparrow \zeta_{ij}(\varphi) \\ \boxed{\partial_j \partial_i B} & \xrightarrow{\partial_j \varphi_i} & \boxed{\partial_j B_i} \end{array}$$

Rappelons aussi que dans l'hexagone 7 de la définition 4.5.4,  $\pi_{kij} = Id + (\partial_{n+1} B_k) \theta_{ij}$ ,  $\alpha_{kij} = B_k(\partial_{n+1} \theta_{ij}) + (\partial_k \theta_{ij})$ . D'autre part, les dérivées partielles  $\partial_{n+1} B_i$  sont nulles. Donc le système (4.13) est *cohérent* s'il existe des isomorphismes  $\mu_{ij} : \partial_j B_i \rightarrow \partial_i B_j$  tels que  $\mu_{ji} = \mu_{ij}^{-1}$  et que si  $n \geq 3$ , alors le triangle 1 (Hexagone 7 réduit) de la figure 4.36 soit commutatif, pour tout  $i < j < k$ .

$$\begin{array}{ccccc} & \boxed{\partial_k \partial_i B_j} & = & \boxed{\partial_i \partial_k B_j} & \\ & \downarrow \partial_k \mu_{ij} & & \downarrow \partial_i \mu_{jk} & \\ \boxed{\partial_k \partial_j B_i} & & & & \boxed{\partial_i \partial_j B_k} \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & \boxed{\partial_j \partial_k B_i} & \xrightarrow{\partial_j \mu_{ik}} & \boxed{\partial_j \partial_i B_k} & \end{array}$$

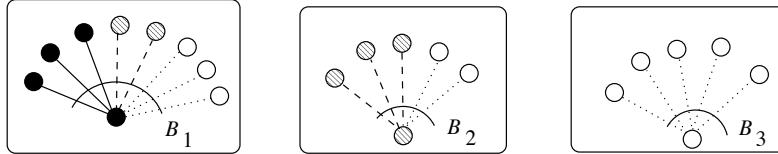
**Figure 4.36:** Triangle 1

Une *solution* de (4.13) est alors un couple  $(B, (\varphi_i)_{i=1 \dots n})$  où les  $\varphi_i : \partial_i B \rightarrow B_i(T_1, T_2, \dots, T_n)$  sont des isomorphismes. Cette solution est *compatible* si  $\mu_{ij} = \zeta_{ij}(\varphi) = \partial_i \varphi_j \circ (\partial_j \varphi_i)^{-1}$ .

**Proposition 4.5.6** *Si le système (4.13),  $\{\partial_i Y = B_i(T_1, \dots, T_n), i = 1 \dots n, Y(0) = 0\}$ , est cohérent, alors il admet comme solution compatible l'espèce*

$$B = \sum_{i=1}^n \int_0^{T_i} B_i(0, \dots, 0, X_i, T_{i+1}, \dots, T_n) dX_i. \quad (4.14)$$

**Démonstration** Supposons que le système (4.13) est cohérent, c'est-à-dire qu'il existe des isomorphismes  $\mu_{ij} : \partial_j B_i \rightarrow \partial_i B_j$  tels que  $\mu_{ji} = \mu_{ij}^{-1}$  et que le triangle 1 soit commutatif. Construisons des isomorphismes  $\varphi_i : \partial_i B \rightarrow B_i(T_1, T_2, \dots, T_n)$ , où  $B$  est donné par (4.14). Remarquons d'abord que si  $l = (\emptyset, \dots, \emptyset, l_i, \dots, l_n)$  est un multiensemble totalement ordonné tel que  $l_i \neq \emptyset$ , alors une  $B$ -structure



**Figure 4.37:** Les  $B$ -structures ( $n = 3$ )

sur  $l$  est un élément de  $(\int_0^{T_i} B_i(0, \dots, 0, X_i, T_{i+1}, \dots, T_n) dX_i)[l]$ , car il est clair que si  $j \neq i$ , alors  $(\int_0^{T_j} B_j(0, \dots, 0, X_j, T_{j+1}, \dots, T_n) dX_j)[l] = \emptyset$ . La figure 4.37 représente les trois types de  $B$ -structures pour  $n = 3$ . Soit maintenant  $l = (\emptyset, \dots, \emptyset, l_i, \dots, l_n)$ , un multiensemble totalement ordonné tel que  $l_i \neq \emptyset$ . Si  $j \leq i$ , alors  $\partial_j B[l] = B[1_j +_o l] = (\int_0^{T_j} B_j(0, \dots, 0, X_j, T_{j+1}, \dots, T_n) dX_j)[1_j +_o l]$ , où pour tout multiensemble  $l = (l_1, \dots, l_n)$ ,  $1_j +_o l = (l_1, \dots, 1_j +_o l_j, \dots, l_n)$ . Donc, par définition,  $\partial_j B[l] = B_j[l]$ . Nous pouvons donc définir  $\varphi_{j,l}$  canoniquement par  $\varphi_{j,l} = \text{Id}_{B_j[l]}$ . En particulier  $\varphi_{j,\emptyset} = \text{Id}_{B_j[\emptyset]}$ . Supposons maintenant que  $j > i$ . Alors  $\partial_j B[l] = B[1_j +_o l] = (\int_0^{T_i} B_i(0, \dots, 0, X_i, T_{i+1}, \dots, T_n) dX_i)[1_j +_o l] = B_i[1_j +_o \bar{l}^i] = \partial_j B_i[\bar{l}^i]$ , où  $\bar{l}^i = (\emptyset, \dots, \emptyset, l_i \setminus \min l_i, \dots, l_n)$ . D'autre part,  $\partial_i B_j[\bar{l}^i] = B_j[l]$  et  $\mu_{ij,\bar{l}^i} : \partial_j B_i[\bar{l}^i] \rightarrow \partial_i B_j[\bar{l}^i]$  est un isomorphisme. Alors nous posons  $\varphi_{j,l} = \mu_{ij,\bar{l}^i}$ .

Montrons maintenant que pour tout couple  $(j, k)$ ,  $\mu_{jk} = \partial_j \varphi_k \circ (\partial_k \varphi_j)^{-1}$ , c'est-à-dire que pour tout multiensemble  $l$ , le triangle suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\partial_k \partial_j B[l]} & \xrightarrow{\partial_k \varphi_{j,l}} & \boxed{\partial_k B_j[l]} \\ \parallel & & \uparrow \mu_{kj,l} \\ \boxed{\partial_j \partial_k B[l]} & \xrightarrow{\partial_j \varphi_{k,l}} & \boxed{\partial_j B_k[l]} \end{array}$$

Soit  $i$  le plus petit indice tel que  $l_i \neq \emptyset$ . Sachant que  $\mu_{jk} = \mu_{kj}^{-1}$ , nous pouvons supposer que  $j < k$ . On a soit  $j \leq i$ , soit  $i < j$ . Supposons que  $j \leq i$ . Alors  $(\partial_k \varphi_j)_l = \varphi_{j,1_k +_o l} = \text{Id}_{B_j[1_k +_o l]}$ . D'autre part,  $(\partial_j \varphi_k)_l = \varphi_{k,1_j +_o l} = \mu_{jk,l}$ . Supposons maintenant que  $i < j$ . Alors  $(\partial_k \varphi_j)_l = \varphi_{j,1_k +_o l} = \mu_{ij,1_k +_o \bar{l}^i} = \partial_k \mu_{ij,\bar{l}^i}$  et  $(\partial_j \varphi_k)_l = \varphi_{k,1_j +_o l} = \mu_{ik,1_j +_o \bar{l}^i} = \partial_j \mu_{ik,\bar{l}^i}$ . Moyennant le triangle 1, nous avons  $\mu_{jk,l} = \partial_i \mu_{jk,\bar{l}^i} = \partial_j \mu_{ik,\bar{l}^i} \circ \partial_k \mu_{ij,\bar{l}^i}^{-1} = (\partial_j \varphi_k)_l \circ (\partial_k \varphi_j)_l^{-1}$ . ■

**Remarque 4.5.7** À titre de comparaison, nous donnons ici la démonstration de la version analytique de ce théorème, avec  $n = 3$ , pour faciliter le calcul. Notons que dans ce cas la condition de cohérence se traduit par des égalités  $\frac{\partial B_i}{\partial t_j}(t_1, t_2, t_3) = \frac{\partial B_j}{\partial t_i}(t_1, t_2, t_3)$ , pour  $1 \leq i, j \leq 3$ .

Il s'agit de montrer que la fonction  $Y = B(t_1, t_2, t_3) = \int_0^{t_1} B_1(x_1, t_2, t_3) dx_1 + \int_0^{t_2} B_2(0, x_2, t_3) dx_2 + \int_0^{t_3} B_3(0, 0, x_3) dx_3$  est solution du système  $\partial_1 Y = B_1(t_1, t_2, t_3)$ ,

$\partial_2 Y = B_2(t_1, t_2, t_3)$ ,  $\partial_3 Y = B_3(t_1, t_2, t_3)$ . On a

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Y}{\partial t_1} &= B_1(t_1, t_2, t_3), \\
 \frac{\partial Y}{\partial t_2} &= \frac{\partial}{\partial t_2} \left( \int_0^{t_1} B_1(x_1, t_2, t_3) dx_1 \right) + B_2(0, t_2, t_3) \\
 &= \int_0^{t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} B_1(x_1, t_2, t_3) dx_1 + B_2(0, t_2, t_3) \\
 &= \int_0^{t_1} \frac{\partial}{\partial t_1} B_2(x_1, t_2, t_3) dx_1 + B_2(0, t_2, t_3), \text{ car } \frac{\partial B_1}{\partial t_2} = \frac{\partial B_2}{\partial t_1} \\
 &= B_2(t_1, t_2, t_3) - B_2(0, t_2, t_3) + B_2(0, t_2, t_3) \\
 &= B_2(t_1, t_2, t_3). \\
 \frac{\partial Y}{\partial t_3} &= \frac{\partial}{\partial t_3} \left( \int_0^{t_1} B_1(x_1, t_2, t_3) dx_1 + \int_0^{t_2} B_2(0, x_2, t_3) dx_2 \right) + B_3(0, 0, t_3) \\
 &= \int_0^{t_1} \frac{\partial}{\partial t_3} B_1(x_1, t_2, t_3) dx_1 + \int_0^{t_2} \frac{\partial}{\partial t_3} B_2(0, x_2, t_3) dx_2 + B_3(0, 0, t_3) \\
 &= \int_0^{t_1} \frac{\partial}{\partial t_1} B_3(x_1, t_2, t_3) dx_1 + \int_0^{t_2} \frac{\partial}{\partial t_2} B_3(0, x_2, t_3) dx_2 + B_3(0, 0, t_3) \\
 &= B_3(T_1, t_2, t_3) - B_3(0, t_2, t_3) + B_3(0, t_2, t_3) - B_3(0, 0, t_3) + B_3(0, 0, t_3) \\
 &= B_3(T_1, t_2, t_3).
 \end{aligned}$$

■

Considérons maintenant le système plus général

$$\partial_i Y = B_i(T_1, T_2, \dots, T_n) F(Y), \quad i = 1 \dots n, \quad Y(0, \dots, 0) = Z. \quad (4.15)$$

Posons  $F_i(Z_1, \dots, Z_{n+1}) = B_i(Z_1, \dots, Z_n) F(Z_{n+1})$ . Alors  $\partial_{n+1} F_i = B_i F'$ ,  $(\partial_{n+1} F_i) F_j + (\partial_j F_i) = B_i B_j F' F + (\partial_j B_i) F$ , et

$$\begin{aligned}
 &[(\partial_{n+1}^2 F_i) F_k F_j + (\partial_k \partial_{n+1} F_i) F_j + (\partial_{n+1} \partial_j F_i) F_k + (\partial_k \partial_j F_i)] + [(\partial_{n+1} F_i) \partial_{n+1} F_j F_k + (\partial_{n+1} F_i) \partial_k F_j] \\
 &= [B_i B_j B_k F'' F^2 + (\partial_k B_i) B_j F' F + (\partial_j B_i) B_k F' F + (\partial_k \partial_j B_i) F] + [B_i B_j B_k (F')^2 F + B_i (\partial_k B_j) F' F]
 \end{aligned}$$

où  $L(i, j, k) = B_i B_j B_k F'' F^2 + (\partial_k B_i) B_j F' F + (\partial_j B_i) B_k F' F + (\partial_k \partial_j B_i) = L(i, k, j)$  et  $M(i, j, k) = B_i B_j B_k (F')^2 F + B_i (\partial_k B_j) F' F$ . Alors (4.15) est cohérent [Déf. (4.5.4)] si et seulement si il existe des isomorphismes  $\theta_{ij} : B_i B_j F' F + (\partial_j B_i) F \rightarrow B_i B_j F' F + (\partial_i B_j) F$ , tel que l'hexagone suivant soit commutatif,

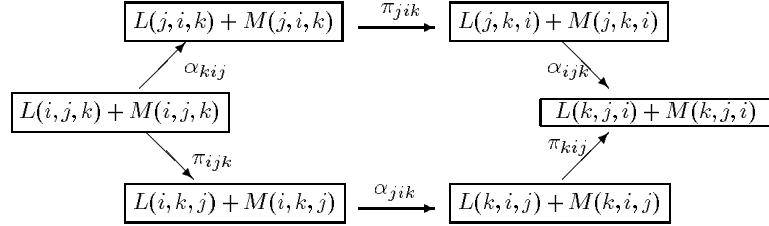


Figure 4.38: Hexagone 8

où  $\pi_{ijk} = L(i, j, k) + B_i F' \theta_{jk}$  et  $\alpha_{kij} = B_k F(\partial_Z \theta_{ij}) + (\partial_k \theta_{ij})$ .

D'autre part, la donnée d'un couple  $(A, (\psi_i)_{1 \leq i \leq n})$  tel que  $\psi_i : \partial_i A \rightarrow B_i F(A)$  soit un isomorphisme, nous permet de définir un isomorphisme  $\zeta_{ij}(\psi)$  tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\partial_i \partial_j A} & \xrightarrow{\partial_i \psi_j} & \boxed{\partial_i [B_j F(A)]} & \xrightarrow{\delta_i \circ \lambda_i} & \boxed{\partial_i B_j F(A) + B_j F'(A) \partial_i A} \\
& \downarrow & & & \xrightarrow{\text{Id} + B_j F'(A) \psi_i} \\
& & \boxed{\partial_j \partial_i A} & \xrightarrow{\partial_j \psi_i} & \boxed{\partial_j [B_i F(A)]} \\
& & & & \xrightarrow{\delta_j \circ \lambda_j} \\
& & & & \boxed{\partial_j B_i F(A) + B_i F'(A) \partial_j A} \\
& & & & \xrightarrow{\text{Id} + B_i F'(A) \psi_j} \\
& & & & \boxed{\partial_i B_j F(A) + B_j F'(A) B_i F(A)} \\
& & & & \zeta_{ij}(\psi) \uparrow \\
& & & & \boxed{\partial_j B_i F(A) + B_i F'(A) B_j F(A)}
\end{array}$$

Donc, si le système (4.15) est cohérent, alors une solution compatible est un couple  $(A, (\psi_i)_{1 \leq i \leq n})$  tel que  $\theta_{ij}(A) = \zeta_{ij}(\psi)$ .

Associons au système (4.15) le problème d'intégration pure, obtenu en posant  $F(Y) = 1$ .

$$\partial_i U = B_i(T_1, T_2, \dots, T_n), \quad i = 1 \dots n, \quad U(0, \dots, 0) = 0. \quad (4.16)$$

**Proposition 4.5.8** *Si le problème d'intégration pure (4.16) est cohérent, alors le système (4.15) est cohérent.*

**Démonstration** Supposons donc que (4.16) est cohérent, c'est-à-dire qu'il existe des isomorphismes  $\mu_{ij} : \partial_j B_i \rightarrow \partial_i B_j$  tels que  $\mu_{ji} = \mu_{ij}^{-1}$  et que le triangle 2 suivant soit commutatif.

Posons  $\theta_{ij} := B_i B_j F' F + F \mu_{ij} : B_i B_j F F' + \partial_j B_i F \rightarrow B_i B_j F F' + \partial_i B_j F$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\pi_{ijk} &= L(i, j, k) + B_i F' \theta_{jk} = L(i, j, k) + B_i B_j B_k (F')^2 F + B_i F' F \mu_{jk}, \\
&= B_i B_j B_k F'' F^2 + (\partial_k B_i) B_j F' F + (\partial_j B_i) B_k F' F + (\partial_k \partial_j B_i) F + B_i B_j B_k (F')^2 F + B_i F' F \mu_{jk} \\
\alpha_{kij} &= B_k (\partial_{n+1} \theta_{ij}) + (\partial_k \theta_{ij}) \\
&= B_i B_j B_k F'' F^2 + B_i B_j B_k (F')^2 F + B_k F' F \mu_{ij} + (\partial_k B_i) B_j F' F + B_i (\partial_k B_j) F' F + F \partial_k \mu_{ij}.
\end{aligned}$$

Examinons les restrictions de chacune des deux transformations  $\alpha_{ijk} \pi_{jik} \alpha_{kij}$  et  $\pi_{kij} \alpha_{jik} \pi_{ijk}$  sur chacune des composantes de  $L(i, j, k) + M(i, j, k)$ . Notons d'abord que  $B_i B_j B_k F'' F^2$  et  $B_i B_j B_k (F')^2 F$  sont invariants par ces deux transformations. Nous avons:

$$\begin{array}{ccccccc}
\begin{array}{c} \alpha_{kij} = \text{Id} \\ \partial_k B_j B_i F' F \end{array} & \xrightarrow{\pi_{jik} = B_i F' F \mu_{jk}} & \begin{array}{c} \partial_k B_j B_i F' F \\ \partial_j B_k B_i F' F \end{array} & \xrightarrow{\alpha_{jik} = \text{Id}} & \begin{array}{c} \partial_k B_j B_i F' F \\ \partial_j B_k B_i F' F \end{array} & \xrightarrow{\alpha_{ijk} = B_i F' F \mu_{jk}} & \begin{array}{c} \partial_j B_k B_i F' F \end{array} \\
\pi_{ijk} = B_i F' F \mu_{jk} & & & & \pi_{kij} = \text{Id} & & \\
\hline
\begin{array}{c} \alpha_{kij} = B_k F' F \mu_{ij} \\ \partial_j B_i B_k F' F \end{array} & \xrightarrow{\pi_{ijk} = \text{Id}} & \begin{array}{c} \partial_i B_j B_k F' F \\ \partial_j B_i B_k F' F \end{array} & \xrightarrow{\alpha_{jik} = \text{Id}} & \begin{array}{c} \partial_i B_j B_k F' F \\ \partial_j B_i B_k F' F \end{array} & \xrightarrow{\alpha_{ijk} = B_k F' F \mu_{ij}} & \begin{array}{c} \partial_i B_j B_k F' F \end{array} \\
\pi_{kij} = \text{Id} & & & & \pi_{kij} = B_k F' F \mu_{ij} & & \\
\hline
\begin{array}{c} \alpha_{kij} = \text{Id} \\ \partial_k B_i B_j F' F \end{array} & \xrightarrow{\pi_{jik} = B_j F' F \mu_{ik}} & \begin{array}{c} \partial_k B_i B_j F' F \\ \partial_k B_i B_j F' F \end{array} & \xrightarrow{\alpha_{jik} = B_j F' F \mu_{ik}} & \begin{array}{c} \partial_i B_k B_j F' F \\ \partial_i B_k B_j F' F \end{array} & \xrightarrow{\alpha_{ijk} = \text{Id}} & \begin{array}{c} \partial_i B_k B_j F' F \end{array} \\
\pi_{ijk} = \text{Id} & & & & \pi_{kij} = \text{Id} & & \\
\hline
\begin{array}{c} \alpha_{kij} = F \partial_k \mu_{ij} \\ \partial_k \partial_j B_i F \end{array} & \xrightarrow{\pi_{ijk} = \text{Id}} & \begin{array}{c} \partial_k \partial_j B_i F \\ \partial_k \partial_j B_i F \end{array} & \xrightarrow{\alpha_{jik} = F \partial_j \mu_{ik}} & \begin{array}{c} \partial_k \partial_j B_i F \\ \partial_j \partial_i B_k F \end{array} & \xrightarrow{\alpha_{ijk} = F \partial_i \mu_{jk}} & \begin{array}{c} \partial_j \partial_i B_k F \end{array} \\
\pi_{kij} = \text{Id} & & & & \pi_{kij} = \text{Id} & & 
\end{array}$$

Dans le dernier cas, la commutation vient du fait le triangle 2 ci-dessus commute. D'où l'Hexagone 8 de la figure 4.38 commute. ■

**Proposition 4.5.9** Si le problème d'intégration pure (4.16),

$$\partial_i U = B_i(T_1, T_2, \dots, T_n), \quad i = 1 \dots r, \quad U(0, \dots, 0) = 0,$$

est cohérent, alors le système (4.15),

$$\partial_i Y = B_i(T_1, \dots, T_n)F(Y), \quad i = 1 \dots r, \quad Y(0, \dots, 0) = Z,$$

admet comme solution compatible l'espèce

$$A = A_F(B, Z), \quad (4.17)$$

où  $B = \sum_{i=1}^n \int_0^{T_i} B_i(0, \dots, 0, X_i, T_{i+1}, \dots, T_n) dX_i, Z$ , et  $A_F$  est l'espèce des arborescences croissantes  $F$ -enrichies, solution de l'équation différentielle  $Y' = F(Y)$ ,  $Y(0) = Z$ . ■

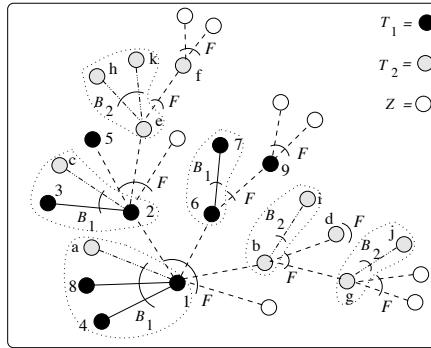


Figure 4.39: Une  $A_F(B, Z)$ -structure.

**Démonstration** Supposons que (4.16) soit cohérent. Soit  $\mu_{ij} : \partial_j B_i \rightarrow \partial_i B_j$  tel que pour tout  $i, j, k$ , on a  $\partial_j \mu_{ik} = \partial_i \mu_{jk} \partial_k \mu_{ij}$ . Et considérons le couple  $(B, (\varphi_i))$  tel que  $B = \sum_{i=1}^n \int_0^{T_i} F_i(0, \dots, 0, X_i, T_{i+1}, \dots, T_n) dX_i$ ,  $\varphi_i : \partial_i B \rightarrow B_i(T_1, \dots, T_n)$  et  $(B, \varphi_i)$  soit solution de (4.16). Rappelons que, dans ce cas,  $\partial_i \varphi_j = \mu_{ij} \circ \partial_j \varphi_i$ . D'autre part, la proposition (4.5.8) montre que le système  $((B_i F), (\theta_{ij}))$ , où  $\theta_{ij} = B_i B_j F' F + F \mu_{ij}$ , est cohérent.

Soit  $\tau : A'_F \rightarrow F(A_F)$  l'isomorphisme tel que  $(A_F, \tau)$  soit solution de l'équation  $Y' = F(Y)$ . Il induit des isomorphismes  $\tau(B) : A'_F(B) \rightarrow F(A_F(B))$ ,  $\tau''(B) : A''_F(B) \rightarrow F'(A_F(B))A'_F(B)$  et  $\tau^{(i)}(B) : A''_F(B) \partial_i B \rightarrow F'(A_F) \partial_i (A_F(B))$  définis par  $\tau^{(i)}(B) = \delta_i \circ \partial_i(\tau(B)) \circ \delta_i^{-1}$ . De plus le diagramme de la figure 4.40 est commutatif, c'est-à-dire que  $F'(A_F(B))\delta_i \circ \tau^{(i)}(B) = \tau''(B)\partial_i B$ .

Posons  $\psi_i := (\tau(B)\varphi_i) \circ \delta_i : \partial_i(A_F(B)) \xrightarrow{\delta_i} A'_F(B) \partial_i B \xrightarrow{\tau^{(B)\varphi_i}} F(A_F(B))B_i$ . L'isomorphisme  $\zeta_{ij}(\psi)$  est défini par le diagramme commutatif (III) ci-dessus (Figure 4.41).

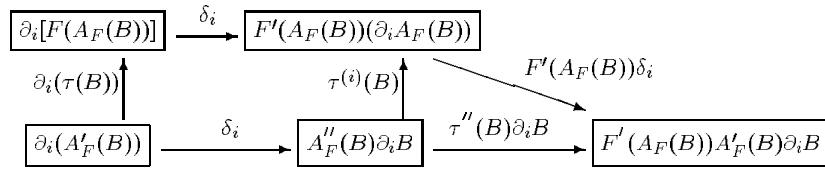
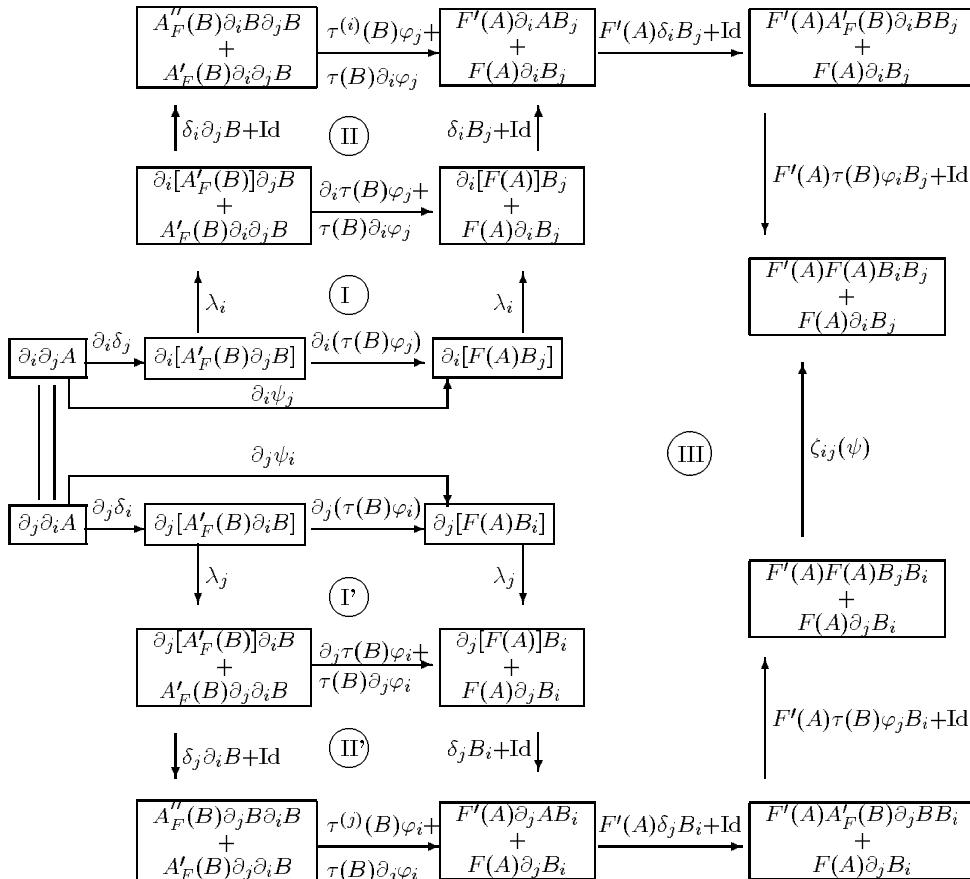
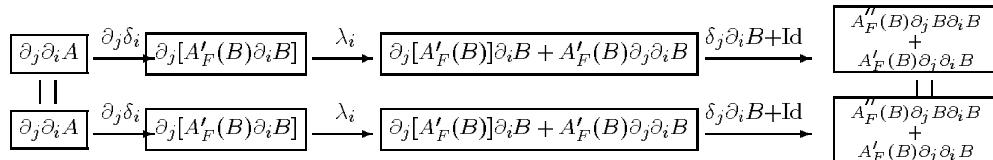


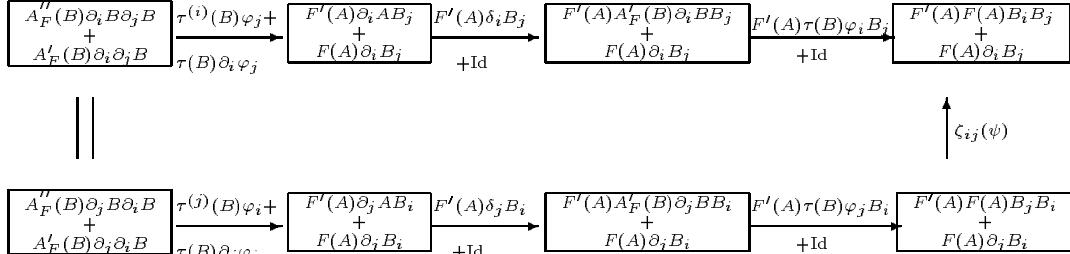
Figure 4.40:

Figure 4.41:  $\zeta_{ij}(\psi)$ 

Il reste à montrer que  $\theta_{ij}(B) = \zeta_{ij}(\psi)$ . D'une part, la proposition 1.5.2 montre que les diagrammes (I), (I'), (II) et (II') sont commutatifs. D'autre part, la proposition 1.5.3 montre que le diagramme suivant est commutatif.



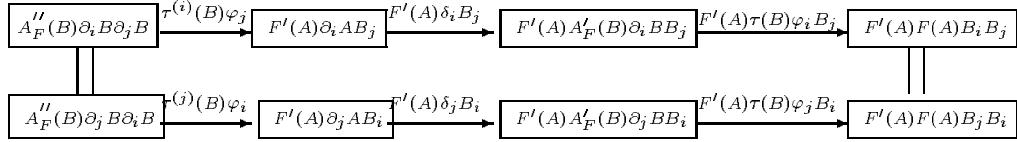
Le diagramme suivant (cf. figure 4.41) est donc commutatif.



C'est-à-dire que

$$\begin{aligned}\zeta_{ij}(\psi) &= [(F'(A)\tau(B)\varphi_i B_j + \text{Id}) \circ (F'(A)\delta_i B_j + \text{Id}) \circ (\tau^{(i)}(B)\varphi_j + \tau(B)\partial_i \varphi_j)] \circ \\ &\quad [(F'(A)\tau(B)\varphi_j B_i + \text{Id}) \circ (F'(A)\delta_j B_i + \text{Id}) \circ (\tau^{(j)}(B)\varphi_i + \tau(B)\partial_j \varphi_i)]^{-1} \\ &= [(F'(A)\tau(B)\varphi_i B_j) \circ (F'(A)\delta_i B_j) \circ (\tau^{(i)}(B)\varphi_j)] \circ \\ &\quad [(F'(A)\tau(B)\varphi_j B_i) \circ (F'(A)\delta_j B_i) \circ (\tau^{(j)}(B)\varphi_i)]^{-1} + [\tau(B)\partial_i \varphi_j] \circ [\tau(B)\partial_j \varphi_i].\end{aligned}$$

Le diagramme suivant est commutatif.



En effet, une application répétée de la proposition 1.3.12 montre que

$$\begin{aligned}(F'(A)\tau(B)\varphi_i B_j) \circ (F'(A)\delta_i B_j) \circ (\tau^{(i)}(B)\varphi_j) &= (F'(A)\tau(B)\varphi_i B_j) \circ (F'(A)\delta_i B_j) \circ [F'(A)\partial_i A \varphi_j \circ \tau^{(i)}(B)\partial_j B] \\ &= (F'(A)\tau(B)\varphi_i B_j) \circ [(F'(A)\delta_i B_j) \circ F'(A)\partial_i A \varphi_j] \circ (\tau^{(i)}(B)\partial_j B) \\ &= (F'(A)\tau(B)\varphi_i B_j) \circ (F'(A)\delta_i \varphi_j) \circ (\tau^{(i)}(B)\partial_j B) \\ &= [F'(A)F(A)\varphi_i \varphi_j] \circ [F'(A)\tau(B)\partial_i B \partial_j B] \circ [F'(A)\delta_i \partial_j B] \circ [\tau^{(i)}(B)\partial_j B]\end{aligned}$$

De la même façon, nous avons

$$(F'(A)\tau(B)\varphi_j B_i) \circ (F'(A)\delta_j B_i) \circ (\tau^{(j)}(B)\varphi_i) = [F'(A)F(A)\varphi_i \varphi_j] \circ [F'(A)\tau(B)\partial_i B \partial_j B] \circ [F'(A)\delta_j \partial_i B] \circ [\tau^{(j)}(B)\partial_i B].$$

Il suffit alors de remarquer que

$$[F'(A)\delta_i \partial_j B] \circ [\tau^{(i)}(B)\partial_j B] = \tau''(B)\partial_i B \partial_j B = [F'(A)\delta_j \partial_i B] \circ [\tau^{(j)}(B)\partial_i B].$$

D'autre part, il est clair que  $F(A_F(B))\mu_{ij} = [\tau(B)\partial_i \varphi_j] \circ [\tau(B)\partial_j \varphi_i]$ . On en déduit que

$$\zeta_{ij}(\varphi) = F'(A_F(B))F(A_F(B))B_i B_j + F(A_F(B))\mu_{ij} = \theta_{ij}(B). \blacksquare$$

Par conséquent, pour résoudre le système (4.15), il suffit trouver les solutions de (4.16) et de l'équation  $Y' = F(Y)$ .

**Corollaire 4.5.10** *Si  $F(Y) = Y^m$ , alors  $A = \mathcal{A}_m^\uparrow(B, Z)$  où  $\mathcal{A}_m^\uparrow$  l'espèce des arborescences  $m$ -aires croissantes. En particulier, si  $m = 1$ , alors  $A = Z \cdot E(B)$ .*

**Définition 4.5.11** Soit  $F$  une  $\mathbb{L}$ -espèce telle que  $F(0) = 0$ , et soit  $G = E(F)$ . On dit que les  $F$ -structures sont *les composantes connexes* des  $G$ -structures, et on écrit  $F = \log(G)$ .

**Remarque 4.5.12** Étant donnée une variable formelle  $\alpha$ , rappelons que si  $F = F_v$  est une  $\mathbb{L}$ -espèce pondérée, alors  $\alpha F = F_{\alpha v}$  est la  $\mathbb{L}$ -espèce  $F$  pondérée par  $w$  telle que  $w = \alpha v$ .

Soit donc  $F$  et  $G$  des  $\mathbb{L}$ -espèces telles que  $F = \log G$ . Alors, les composantes connexes de la  $\mathbb{L}$ -espèce  $H = E(\alpha F)$  sont les  $F$ -structures, et la variable  $\alpha$  est un compteur de composantes connexes. Notons aussi qu'au niveau des séries génératrices, on a  $H(t) = G^\alpha(t)$ .

Réciproquement soit  $F$ ,  $G$  et  $H$  des espèces telles que  $F = \log G$ . Si  $F$  et  $H$  sont monomialement pondérées réduites et si  $H(t) = G^\alpha(t)$ , alors  $H \simeq E(\alpha F) = E(\alpha \log G)$ . En effet,  $H(t) = G^\alpha(t) = \exp(\alpha \log G(t)) = \exp(\alpha F(t))$ . Il suffit d'appliquer la proposition 1.4.8, en remarquant que si  $F$  est pondérée par  $v$ , alors  $E(\alpha F)$  est pondérée par  $w = \alpha v$ . ■

## 4.6 Applications aux polynômes orthogonaux

Dans cette section, nous utilisons les méthodes précédentes pour obtenir des modèles combinatoires des polynômes orthogonaux classiques. Ces polynômes sont définis par leurs séries génératrices [cf. Chihara (Chi. 78) ou J. Labelle (LaJ. 84)] et nous allons analyser les équations aux dérivées partielles satisfaites par ces séries génératrices. Dans la majorité des cas, nous retrouvons les modèles combinatoires traditionnels (Foata (Fo 83), Foata-Strehl (Fo-St. 84), Foata-Labelle (Fo-La. 83), Viennot (Vi. 83), F. Bergeron (Be. 90)).

### 4.6.1 Introduction

Considérons une famille de polynômes orthogonaux  $(Q_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $Q_n(x) = \sum_{k \geq 0} a_{nk} x^k$ , dont la série génératrice  $Q(t, x) = \sum_{n \geq 0} Q_n(x) \frac{t^n}{n!}$  satisfait à un système différentiel de la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} y = B_1(t, x)F(y), \quad \frac{\partial}{\partial x} y = B_2(t, x)F(y). \quad (4.18)$$

Nous lui associons le système différentiel combinatoire

$$\frac{\partial}{\partial T} Y = B_1(T, X)F(Y), \quad \frac{\partial}{\partial X} Y = B_2(T, X)F(Y),$$

où  $B_1$ ,  $B_2$ , et  $F$  sont des espèces dont les séries génératrices sont respectivement  $B_1(t, x)$ ,  $B_2(t, x)$  et  $F(t)$ . Dans ce cas la condition de cohérence se traduit par

l'existence d'un isomorphisme  $\mu : \frac{\partial B_1}{\partial X} \rightarrow \frac{\partial B_2}{\partial T}$  [cf. Définition 4.2.1]. Dans tous les cas étudiés, nous avons  $\frac{\partial B_1}{\partial X} = \frac{\partial B_2}{\partial T}$ . Alors, en appliquant la proposition 4.5.9 ou le corollaire 4.5.10, on obtient une  $\mathbb{L}$ -espèce  $P$  dont la série génératrice  $P(t, x)$  est aussi solution du système (4.18).

Notons que dans tous les cas étudiés ici (niveau 0, 1, et 2 du tableau d'Askey de J. Labelle [cf. (LaJ. 84)]), nous avons, d'une part  $B_2(0, X) = 0$ , donc seul  $\int_0^T B_1(Z, X) dZ$  intervient, et d'autre part,  $B_1(T, X) = mX\alpha(T) + \beta(T)$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des espèces à une sorte, et  $m \in \mathbb{Z}$ . Donc l'ordre des éléments de deuxième sorte n'intervient pas dans le processus de construction des structures. En d'autres termes, étant donnée une structure  $s$ , tout réétiquetage de  $s$  par rapport à la deuxième variable nous donnera une nouvelle structure. Posons alors  $P(t, x) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} p_{nk} \frac{x^k t^n}{k! n!}$ , où  $p_{nk} = |P[l_1, l_2]|$  avec  $|l_1| = n, |l_2| = k$ . Nous avons  $p_{nk} = k! a_{nk}$ . Le facteur  $k!$  correspond au nombre d'étiquetages par rapport aux points de la deuxième sorte. Donc

$a_{nk}$  est le nombre de structures non étiquetées par rapport à la sorte  $X$ .

#### 4.6.2 Les polynômes d'Hermite

Les polynômes d'Hermite peuvent être définis par leur série génératrice exponentielle,

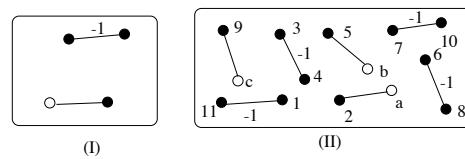
$$H(t, x) = \sum_{n \geq 0} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = \exp\left(xt - \frac{t^2}{2}\right), \quad (4.19)$$

qui est solution du système  $\{\frac{\partial H}{\partial t} = (x-t)H(t, x); \frac{\partial H}{\partial x} = tH(t, x); H(0, 0) = 1\}$ .

Considérons alors le système à deux variables suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial T} = (X - T)Y(T, X) = B_1(T, X)Y(T, X); \\ \frac{\partial Y}{\partial X} = TY(T, X) = B_2(T, X)Y(T, X), \quad Y(0, 0) = 1 \end{cases} \quad (4.20)$$

où  $X$  et  $T$  sont les espèces des singletons associées aux deux sortes de points,  $B_1(T, X) = X - T$ ,  $B_2(T, X) = T$  et  $Y$  l'espèce inconnue. Sachant que



**Figure 4.42:** (I) Composantes connexes; (II) Interprétation des polynômes d'Hermite.

$\frac{\partial B_1}{\partial X} = \frac{\partial B_2}{\partial T} = 1$ , le système est cohérent. En vertu de la proposition 4.5.9, la

solution s'écrit  $Y(T, X) = \text{Her}(T, X) = E(B)$  où  $B(T, X) = \int_0^T B_1(Z, X) dZ + \int_0^X B_2(0, Z) dZ = \int_0^T B_1(Z, X) dZ$  puisque  $B_2(0, Z) = 0$ . En d'autres termes,  $B(T, X) = XT - E_2(T)$ , et  $\text{Her}(T, X) = E(XT - E_2(T))$  (figure 4.42(II)). On retrouve ainsi l'interprétation combinatoire usuelle des polynômes d'Hermite en termes d'involutions [cf. J. Labelle et Y.N. Yeh (La.-Ye. II 89)], les points blancs (de sorte X) étant des compteurs de points fixes.

#### 4.6.3 Les polynômes de Laguerre

Les polynômes de Laguerre sont définis par leur série génératrice:

$$L(t, x) = \sum_{n \geq 0} L_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right), \quad (4.21)$$

qui satisfait au système suivant:

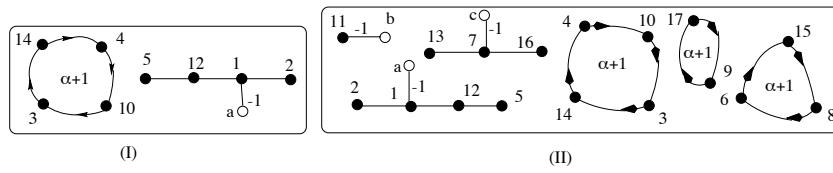
$$\frac{\partial Y}{\partial t} = [\frac{\alpha+1}{1-t} - \frac{-x}{(1-t)^2}]Y(t, x); \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{-t}{1-t}Y(t, x); \quad Y(0, 0) = 1.$$

Considérons donc le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial T} = [L_{(\alpha+1)}(T) + (-X)L^2(T)]Y(T, X) = B_1(T, X)Y(T, X); \\ \frac{\partial Y}{\partial X} = (-T)L(T)Y(T, X) = B_2(T, X)Y(T, X); \quad Y(0, 0) = 1, \end{cases} \quad (4.22)$$

où  $T$  (respectivement  $X$ ) est l'espèce des singletons de sorte  $T$  (respectivement  $X$ ),  $L = L(T)$  l'espèce des listes de points de sorte  $T$ ,  $L_{(\alpha+1)}$  l'espèce des listes pondérées par  $\alpha+1$ ,  $B_1(T, X) = L_{(\alpha+1)}(T) + (-X)L^2(T)$ ,  $B_2(T, X) = (-T)L(T) = -L_+(T)$ ,  $L_+$  étant l'espèce des listes non vides, et  $Y = Y(T, X)$  une espèce inconnue. Puisque  $\frac{\partial B_1}{\partial X} = \frac{\partial B_2}{\partial T} = -L^2(T)$ , le système est cohérent.

En remarquant que  $B_2(0, X) = 0$ , la solution s'écrit  $Y(T, X) = \text{Lag}(T, X) =$



**Figure 4.43:** (I) Composantes connexes ; (II) Une Lag-structure

$E(B(T, X))$  où  $B(T, X) = \int_0^T [L_{(\alpha+1)}(Z) + (-X)L^2(Z)] dZ = C_{(\alpha+1)}(T) + (-X)L_+(T)$  (figure 4.43),  $C_{(\alpha+1)}$  est l'espèce des cycles pondérés par  $\alpha+1$ . On obtient l'interprétation combinatoire usuelle des polynômes de Laguerre due à Foata-Strehl [(Fo-St. 84)][Voir aussi (La.-Ye. II 89) ou (Be. 90)].

#### 4.6.4 Les polynômes de Tchebichef de 2<sup>ième</sup> sorte, de Legendre et de Gegenbauer

Les polynômes de Tchebichef de 2<sup>ième</sup> sorte sont définis par

$$U(t, x) = \sum_{n \geq 0} U_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1 - 2xt + t^2} \quad (4.23)$$

et les polynômes de Gegenbauer, par

$$G_\lambda(t, x) = \sum_{n \geq 0} P_n^\lambda(x) \frac{t^n}{n!} = (1 - 2xt + t^2)^{-\lambda} = U^\lambda(t, x). \quad (4.24)$$

Donc, moyennant la remarque 4.5.12, nous avons  $G_\lambda = E(\lambda \log U)$ .

La série  $U(t, x)$  est solution du système différentiel  $\{\frac{\partial U}{\partial t} = 2(x - t)U^2; \frac{\partial U}{\partial x} = 2tU^2, U(0, 0) = 1\}$ . Rappelons que si  $k$  est un entier naturel et  $F$  une  $\mathbb{L}$ -espèce, alors  $\mathbf{k} \cdot F$  est l'espèce des  $F$ -structures  $k$ -colorées. Considérons alors le système

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial T} = \mathbf{2} \cdot (X - T)Y^2 = B_1(T, X)Y^2, \\ \frac{\partial Y}{\partial X} = \mathbf{2} \cdot TY^2 = B_2(T, X)Y^2, \quad U(0, 0) = \mathbf{1}. \end{cases} \quad (4.25)$$

Comme  $\frac{\partial B_1}{\partial X} = \frac{\partial B_2}{\partial T} = \mathbf{2}$ , le système (4.25) est cohérent. D'une part, le système  $\{\frac{\partial Y}{\partial T} = B_1(T, X), \frac{\partial Y}{\partial X} = B_2(T, X), Y(0, 0) = 0\}$  admet comme solution  $B(T, X) = \int_0^T B_1(Z, X) dZ = \mathbf{2} \cdot XT - T^2$ , car  $B_2(0, X) = 0$ . D'autre part, l'équation  $Y' = Y^2, Y(0) = 1$ , admet comme solution  $Y = \text{Bin}(T) \simeq L(T) \simeq S(T)$  où  $\text{Bin}$  est l'espèce des arborescences binaires croissantes,  $L$  l'espèces des listes et  $S$  l'espèces des permutations [cf. Exemple (1.3.8)].

Donc le système (4.25) admet comme solution

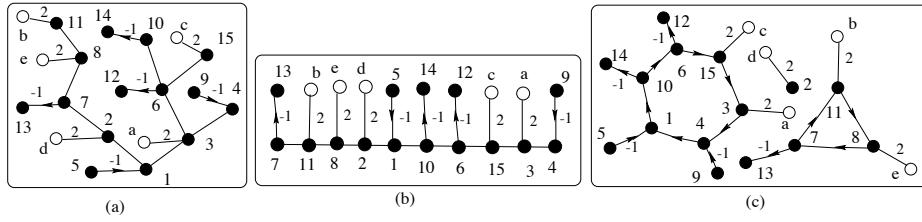
$$U = \text{Bin}(\mathbf{2} \cdot XT - T^2) \simeq L(\mathbf{2} \cdot XT - T^2) \simeq S(\mathbf{2} \cdot XT - T^2).$$

La figure 4.44 nous donne un exemple de  $U$ -structure sur  $l_1 = [15]$  et  $l_2 = \{a, b, c, d, e\}$ . Notons que dans l'arborescence binaire (II), la croissance est prise, par rapport à l'élément minimum de chaque  $T^2$ -structure et chaque  $XT$ -structure (qui est égal au point de sorte  $T$  dans ce cas) conformément à la définition de l'ordre d'une partition d'ensemble (cf. section 1.1).

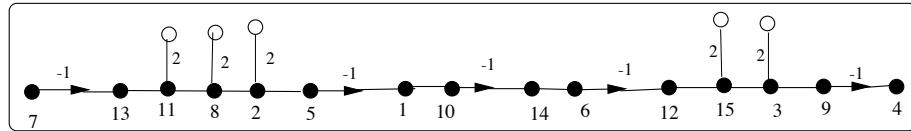
Notons que l'interprétation en termes de listes nous donne l'interprétation combinatoire usuelle des polynômes de Tchebitchef (figure 4.45), en termes de couplages de chaînes.

Sachant que  $S = E(C)$  où  $C$  est l'espèce des cycles, nous avons  $U = E(C(\mathbf{2} \cdot XT - T^2))$ . D'où  $\log U = C(\mathbf{2} \cdot XT - T^2)$  et, par conséquent,

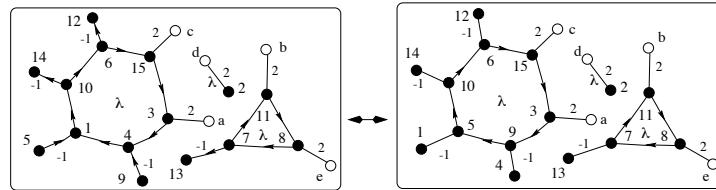
$$G_\lambda = E(C_{<\lambda>}(\mathbf{2} \cdot XT - T^2)) = S_{<\lambda>}(\mathbf{2} \cdot XT - T^2),$$



**Figure 4.44:** Structure de Tchebichef:(a) Arborescence Binaire, (b) Liste, (c) Permutation



**Figure 4.45:** Couplages de chaînes



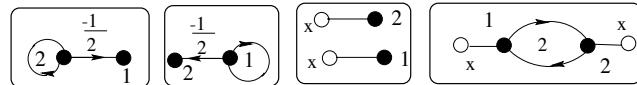
**Figure 4.46:** Pieuvre de Gegenbauer

où  $C_{(\lambda)}$  est l'espèce des cycles pondérés par  $\lambda$ , et  $S_{<\lambda>}$  l'espèce des permutations dont chaque cycle est pondérés par  $\lambda$  (figure 4.46).

Les polynômes de Legendre sont définis par

$$\text{Leg}(t, x) = \sum_{n \geq 0} P_n^{\frac{1}{2}}(x) \frac{t^n}{n!} = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = G_{\frac{1}{2}}(t, x).$$

On obtient donc une interprétation combinatoire, en prenant  $\lambda = \frac{1}{2}$ . La figure 4.47 représente les quatre structures sur  $\{1, 2\}$ , dont le poids total est  $P_2^{\frac{1}{2}}(x) = 3x^2 - 1$ .



**Figure 4.47:** Les quatres structures de Legendre-Gegenbauer sur  $l_1 = \{1, 2\}$ .

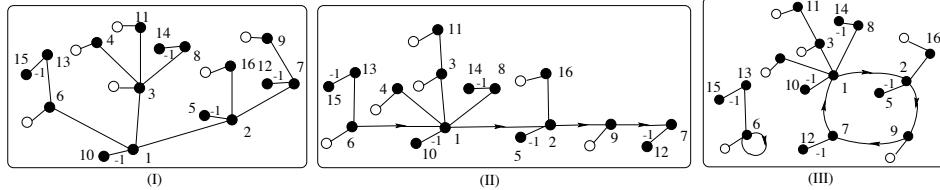
Remarquons que la série  $\text{Leg}(t, x)$  satisfait également le système différentiel

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = (x - t)Y^3, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = tY^3. \quad (4.26)$$

La solution canonique du système combinatoire associé est l'espèce  $\text{Leg}(T, X) = \text{Ter}(XT - E_2(T))$ , où  $\text{Ter}$  est l'espèce des arborescences ternaires croissantes, solution de l'équation différentielle  $Y' = Y^3, Y(0) = 1$ . La figure 4.48(I) représente une  $\text{Ter}(XT - E_2(T))$ -structure sur  $l_1 = [16]$ .

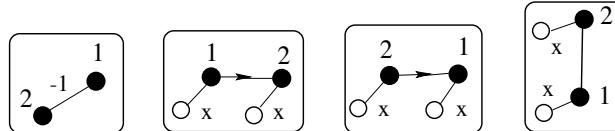
**Lemme 4.6.1** *Soit  $A_L$  l'espèce des arborescences planes croissantes, solution de l'équation  $Y' = L(Y), Y(0) = 1$ . Alors nous avons l'isomorphisme  $\text{Ter} \simeq L(A_L) \simeq S(A_L)$ .*

**Démonstration** Il suffit de remarquer que  $A_L(t) = 1 - \sqrt{1 - 2t}$ . Donc  $A'_L(t) = \text{Ter}(t)$ . Une bijection peut être construite récursivement de la manière suivante. En partant d'une liste d'arborescences planes croissantes, on cherche l'élément minimum 1. En isolant cet élément, on obtient trois listes, la première à gauche, la deuxième au dessus et la troisième à droite. On construit la branche gauche (resp. centrale, resp. droite) en considérant de nouveau la liste à gauche (resp. centrale, resp. droite), et réciproquement. ■



**Figure 4.48:** Structure de Legendre: (I) Arborescence ternaire, (II) Liste d'arborescences planes croissantes, (III) Permutation d'arborescences planes croissantes

Ainsi la figure 4.48(II) nous donne la liste d'arborescences planes associée à l'arborescence ternaire de 4.48(I), et 4.48(III), la permutation.



**Figure 4.49:** Les quatre structures de Legendre sur  $l_1 = \{1, 2\}$ , en termes de liste.

**Remarque 4.6.2** Les structures de Legendre et de Legendre-Gegenbauer ne sont pas isomorphes comme le montre les figures 4.47 et 4.49. Sur l'ensemble  $\{1, 2\}$ , il y a 2 structures de Legendre-Gegenbauer de poids  $\frac{-1}{2}$ , une structure de poids  $x^2$  et une structure de poids  $2x^2$ . D'autre part sur le même ensemble, il y a une structure de Legendre de poids  $-1$ , et trois de poids  $x^2$ , donnant également un poids total  $3x^2 - 1$ . Notons que les structures de Legendre-Gegenbauer ne sont pas monomialement pondérées. Signalons aussi le fait que les structures de Gegenbauer sont obtenues à partir d'un système d'équations de degré 2 en  $Y$  [cf. Système 4.25], alors que le système 4.26 est de degré 3 en  $Y$ . ■

#### 4.6.5 Les polynômes de Charlier et de Meixner

Les polynômes de Charlier sont définis par leur série génératrice  $\text{Ch}(t, x) = \sum_{n \geq 0} C_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} = e^{\alpha t} (1-t)^x$ , qui est solution du système différentiel

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = (\alpha - \frac{x}{1-t})Y, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = -\log(\frac{1}{1-t})Y, \quad Y(0, 0) = 1.$$

Nous lui associons le système différentiel combinatoire

$$\frac{\partial Y}{\partial T} = [\mathbf{1}_\alpha - XL(T)]Y = B_1(T, X)Y, \quad \frac{\partial Y}{\partial X} = -C(T)Y = B_2(T, X)Y, \quad Y(0, 0) = 1, \quad (4.27)$$

où  $C = C(T)$  est l'espèce des cycles. Ce système est cohérent car  $\frac{\partial B_1}{\partial X} = \frac{\partial B_2}{\partial T} = -L(T)$ . Comme  $B_2(0, X) = 0$ , nous obtenons la solution  $Y = \text{Ch}(T, X)$  (Figure 4.50), donnée par

$$\text{Ch}(T, X) = E\left[\int_0^T (\mathbf{1}_\alpha - XL(Z))dZ\right] = E(\alpha T - XC(T)).$$

On retrouve ainsi un résultat de J. Labelle et Y.N. Yeh [(La.-Ye. II 89)].

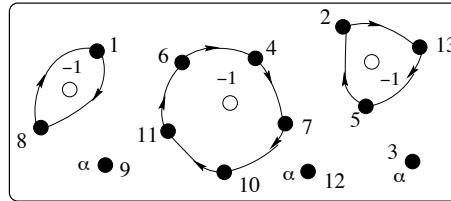


Figure 4.50: Interprétation des polynômes de Charlier

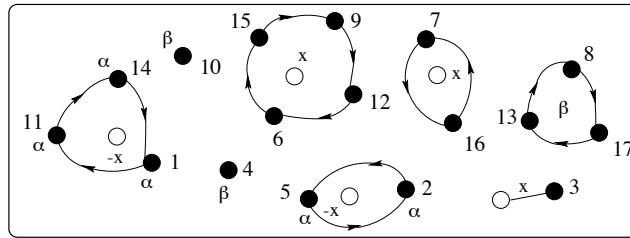


Figure 4.51: Polynômes de Meixner

D'autre part, la fonction génératrice des polynômes de Meixner de première espèce s'écrit  $M(x, t) = \sum_{n \geq 0} m_n(x; \alpha, \beta) \frac{t^n}{n!} = (1-\alpha t)^x (1-t)^{-x-\beta}$ , et est solution du système  $\{\frac{\partial Y}{\partial t} = (\frac{-\alpha x}{1-\alpha t} + \frac{x+\beta}{1-t})Y, \frac{\partial Y}{\partial x} = (-\log \frac{1}{1-\alpha t} + \log \frac{1}{1-t})Y\}$ . Nous lui associons donc le système différentiel combinatoire

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial T} = [-\alpha XL(\alpha T) + (X + \mathbf{1}_\beta)L(T)]Y, \\ \frac{\partial Y}{\partial X} = [-C(\alpha T) + C(T)]Y, \end{cases} \quad Y(0, 0) = 1. \quad (4.28)$$

Sachant que  $\frac{\partial B_1}{\partial X} = \frac{\partial B_2}{\partial T} = -\alpha L(\alpha T) + L(T)$ , le système est cohérent et admet comme solution

$$M(T, X) = E[-XC(\alpha T) + XC(T) + \beta C(T)].$$

La figure 4.51 est un exemple de  $M$ -structure. On retrouve ainsi l'interprétation donnée par D. Foata et J. Labelle [(Fo-La. 83)] [Voir aussi J. Labelle et Y-N. Yeh [(La.-Ye. I 89)].

#### 4.6.6 Les polynômes de Bessel et de Jacobi

Remarquons d'abord que les interprétations combinatoires connues pour ces polynômes sont des structures sur des ensembles non ordonnés, c'est dire que ce sont plutôt des  $\mathbb{B}$ -espèces, et qui utilisent les endofonctions de Jacobi dues à Foata et Leroux [(Fo.-Le. 83)][Voir aussi P. Leroux et V. Strehl (Le.-St. 85)].

##### Les polynômes de Bessel

Les polynômes de Bessel sont définis par

$$\text{Bes}(t, x) = \sum_{n \geq 0} Y_n^\alpha(x) \frac{t^n}{n!} = (1 - 2xt)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2xt}} \right\}^\alpha \exp \left\{ \frac{2t}{1 + \sqrt{1 - 2xt}} \right\}.$$

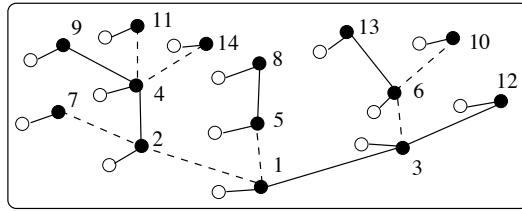
Dans le cas des polynômes de Bessel, la série génératrice du modèle combinatoire connu [(Le.-St. 85)] se décompose sous forme produit de la manière suivante

$$A(t, x) = \left( \frac{1 + \sqrt{1 - 2xt}}{2\sqrt{1 - 2xt}} \right) \left\{ \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2xt}} \right\}^{\alpha+1} \exp \left\{ \frac{2t}{1 + \sqrt{1 - 2xt}} \right\} = \text{Bes}(t, x).$$

Dans ce qui suit, nous donnons deux interprétations possibles, la première utilisant cette décomposition et la seconde utilisant directement la définition. Nous obtenons deux espèces  $A$  et  $B$  équivalentes mais non isomorphes puisque  $A$  ne sera pas monomialement pondérée. Pour éviter la pondération par  $\frac{1}{2}$  de chaque point de sorte  $X$ , nous allons considérer  $A(t, 2x)$  que l'on supposera comme le produit des trois fonctions  $F_1(t, x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4xt}}{2\sqrt{1 - 4xt}}$ ,  $F_2(t, x) = \left( \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4xt}} \right)^{\alpha+1}$  et  $F_3(t, x) = \exp \left( \frac{2t}{1 + \sqrt{1 - 4xt}} \right)$ . Puis nous allons considérer  $\text{Bes}(t, 2x)$  comme le produit des fonctions  $G_1(t, x) = (1 - 4xt)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $G_2(t, x) = \left\{ \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4xt}} \right\}^\alpha$  et  $G_3(t, x) = \exp \left( \frac{2t}{1 + \sqrt{1 - 4xt}} \right)$ .

**Première interprétation.** La fonction  $F_1(t, x)$  est solution du système différentiel  $\left\{ \frac{\partial y}{\partial t} = x(-1 + 2y)^3 = x(1 + 2y_+)^3, \frac{\partial y}{\partial x} = t(-1 + 2y)^3 = t(1 + 2y_+)^3, y(0, 0) = 1 \right\}$ , où  $y_+(t, x) = y(t, x) - y(0, 0)$ . Nous lui associons le système différentiel cohérent suivant

$$\frac{\partial Y}{\partial T} = X(1 + 2Y_+)^3, \quad \frac{\partial Y}{\partial X} = T(1 + 2Y_+)^3, \quad Y(0, 0) = 1 \quad (4.29)$$



**Figure 4.52:** Une  $F_1$ -structure.

dont les solutions sont des arborescences ternaires croissantes sur des  $XT$ -structures et dont les arêtes sont bicolorées (figure 4.52).

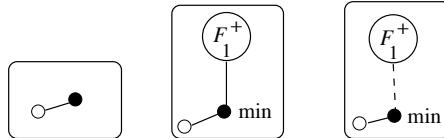
L'espèce  $F_2$  s'écrit  $F_2 = E((\alpha + 1) \log U)$  où  $U$  est telle que  $U(t, x) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4xt}}$ . La fonction  $U(t, x)$  est solution du système

$$\frac{\partial y}{\partial t} = x(-1 + 2F_1(t, x))y^2, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = t(-1 + 2F_1(t, x))y^2, \quad y(0, 0) = 1.$$

Un modèle combinatoire de  $U$  est donc donné par les solutions du système cohérent suivant

$$\frac{\partial Y}{\partial T} = X(1 + 2F_{1,+}(T, X))Y^2, \quad \frac{\partial Y}{\partial X} = T(1 + 2F_{1,+}(T, X))Y^2, \quad Y(0, 0) = 1, \quad (4.30)$$

où  $F_{1,+} = F_1 - 1$ . En posant  $A_1(T, X) = X(1 + 2F_{1,+}(T, X))$ , l'espèce  $\int_0^T A_1(Z, X) dZ$  se présente sous l'une des formes données par la figure 4.53.



**Figure 4.53:** Les trois formes d'une  $\int_0^T A_1(Z, X) dZ$ -structure.

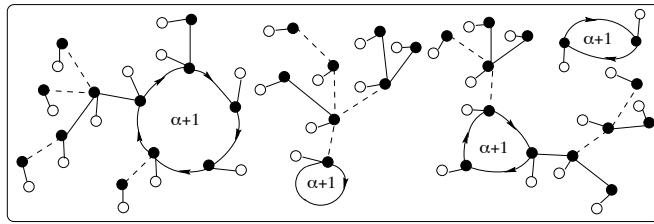
De plus,  $U = \text{Bin}(\int_0^T A_1(Z, X) dZ) \simeq L(\int_0^T A_1(Z, X) dZ) \simeq S(\int_0^T A_1(Z, X) dZ)$ . Les composantes connexes de  $U$  sont donc les cycles de  $\int_0^T A_1(Z, X) dZ$ -structures, c'est-à-dire que  $\log U = C(\int_0^T A_1(Z, X) dZ)$ . D'où

$$F_2(T, Z) = E((\alpha + 1)C(\int_0^T A_1(Z, X) dZ)) = S_{<\alpha+1>}(\int_0^T A_1(Z, X) dZ),$$

où  $S_{<\alpha+1>}$  est l'espèce des permutations dont chaque cycle est pondéré par  $\alpha + 1$ . La figure 4.54 est un exemple de  $F_2$ -structure.

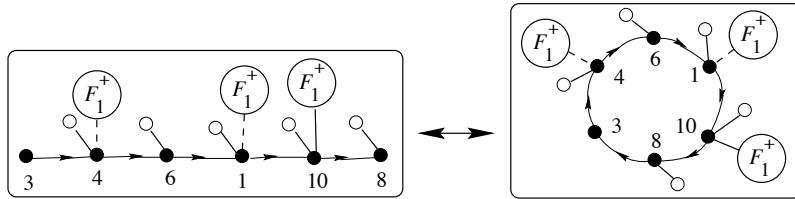
D'autre part, on a  $F_3(t, x) = \exp(tU(t, x))$ . Donc

$$F_3(T, X) = E(TU(T, X)) = E(TL(\int_0^T A_1(Z, X) dZ)).$$



**Figure 4.54:** Une  $F_2$ -structure.

La figure 4.55 montre qu'une  $TL(\int_0^T A_1(Z, X) dZ)$ -structure s'identifie canoniquement à un cycle de structures dont une seule est un singleton de sorte  $T$ , les autres étant des  $\int_0^T A_1(Z, X) dZ$ -structures. Ce sont les composantes connexes des  $F_3(T, X)$ -structures.



**Figure 4.55:** Transformation des  $TL(\int_0^T A_1(Z, X) dZ)$ -structures en cycles.

De ces résultats nous pouvons déduire que l'espèce  $A(T, Z)$  s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} A(T, Z) &= F_1(T, Z)F_2(T, Z)F_3(T, Z) \\ &= F_1(T, Z) \cdot S_{<\alpha+1>}(\int_0^T A_1(Z, X) dZ) \cdot E(TL(\int_0^T A_1(Z, X) dZ)). \end{aligned} \quad (4.31)$$

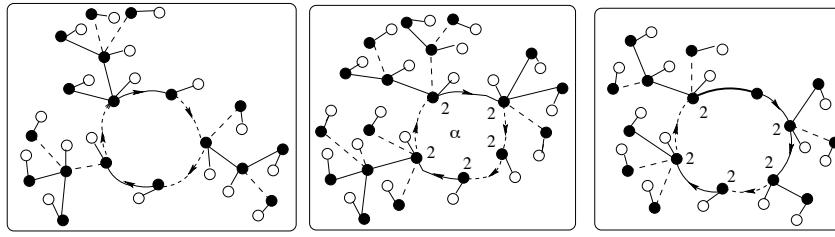
### Deuxième interprétation.

Considérons maintenant les fonctions  $G_1(t, x) = (1 - 4xt)^{-\frac{1}{2}}$  et  $U(t, x) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4xt}}$ . Nous avons

$$\begin{cases} \frac{\partial G_1}{\partial t} = 2xG_1^3; \\ \frac{\partial G_1}{\partial x} = 2tG_1^3, \quad G_1(0, 0) = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = 4xG_1U^2, \\ \frac{\partial U}{\partial x} = 4tG_1U^2, \quad U(0, 0) = 1. \end{cases} \quad (4.32)$$

Le système différentiel  $\{\frac{\partial Y}{\partial T} = \mathbf{2} \cdot XY^3, \quad \frac{\partial Y}{\partial X} = \mathbf{2} \cdot TY^3, \quad Y(0, 0) = 1\}$  est cohérent et admet comme solution  $G_1(T, X) = \text{Ter}(\mathbf{2} \cdot XT) \simeq L(A_L(\mathbf{2} \cdot XT)) \simeq S(A_L(\mathbf{2} \cdot XT))$ .

De plus, le système  $\{\frac{\partial U}{\partial T} = 4 \cdot XG_1U^2 = B_1(T, X)U^2, \quad \frac{\partial U}{\partial X} = 4 \cdot TG_1U^2 = B_2(T, X)U^2, \quad U(0, 0) = 1\}$  est cohérent car  $\frac{\partial B_1}{\partial X} = \frac{\partial B_2}{\partial T} = 4 \cdot G_1 + 4 \cdot XTG_1^3$ .



**Figure 4.56:** Composantes connexes des  $B$ -structures

Donc  $U(T, X) = \text{Bin}[4 \cdot \int_0^T X \text{Ter}(\mathbf{2} \cdot XZ) dZ]$ . Comme  $\text{Ter} \simeq L(A_L) \simeq (A_L)'$ , on a  $U(T, X) = \text{Bin}[\mathbf{2} \cdot A_L(\mathbf{2} \cdot XT)] \simeq L(\mathbf{2} \cdot A_L(\mathbf{2} \cdot XT)) \simeq S(\mathbf{2} \cdot A_L(\mathbf{2} \cdot XT))$ .

On en déduit que  $\log U = C(\mathbf{2} \cdot A_L(\mathbf{2} \cdot XT))$ , donc  $G_2(T, X) = E[\alpha C(\mathbf{2} \cdot A_L(\mathbf{2} \cdot XT))] = S_{<\alpha>}(\mathbf{2} \cdot A_L(\mathbf{2} \cdot XT))$ . D'autre part,  $G(T, Z) = E[TL(\mathbf{2} \cdot A_L(\mathbf{2} \cdot XT))]$ . Dans ce cas,

$$B(T, Z) = S(A_L(\mathbf{2} \cdot XT)) \cdot S_{<\alpha>}(\mathbf{2} \cdot A_L(\mathbf{2} \cdot XT)) \cdot E[TL(\mathbf{2} \cdot A_L(\mathbf{2} \cdot XT))].$$

La figure 4.56 nous donne les trois composantes connexes des  $B$ -structures.

### Les polynômes de Jacobi

Les polynômes de Jacobi,  $(P_n^{(\alpha, \beta)}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ , peuvent être définis par leur fonction génératrice

$$J_{\alpha\beta}(t, x) = \sum_{n \geq 0} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \frac{t^n}{n!} = 2^{\alpha+\beta} (1-t+R^{-1})^{-\alpha} (1+t+R^{-1})^{-\beta} R$$

avec  $R(t, x) = \text{Leg}(t, x) = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}}$ . Nous considérons  $J_{\alpha\beta}(t, x)$  comme produit des trois fonctions  $R$ ,  $F(t, x) = 2^\alpha (1-t+R^{-1})^{-\alpha}$  et  $G(t, x) = 2^\beta (1+t+R^{-1})^{-\beta}$ .

Rappelons que [cf. section 4.6.4]  $R(t, x) = \text{Leg}(t, x)$  est solution du système différentiel  $\{\frac{\partial Y}{\partial t} = (x-t)Y^3, \frac{\partial Y}{\partial x} = tY^3\}$ . La solution du système différentiel combinatoire associé est l'espèce  $\text{Leg}(T, X) = \text{Ter}(XT - E_2(T)) \simeq L(A_L(XT - E_2(T))) \simeq S(A_L(XT - E_2(T)))$  (Figure 4.48).

La fonction  $F_1(t, x) = 2(1-t+R^{-1})^{-1}$  est solution du système différentiel  $\{\frac{\partial Y}{\partial t} = 2(1+(x-t)R)Y^2, \frac{\partial Y}{\partial x} = 2tRY^2, y(0, 0) = 1\}$ . Le système différentiel combinatoire associé,

$$\frac{\partial Y}{\partial T} = \mathbf{2} \cdot (1 + (X-T)R)Y^2 = B_1(T, X)Y^2, \quad \frac{\partial Y}{\partial X} = \mathbf{2} \cdot TRY^2 = B_2(T, X)Y^2, \quad Y(0, 0) = 1,$$

est cohérent car  $\frac{\partial B_1}{\partial X} = \frac{\partial B_2}{\partial T} = \mathbf{2} \cdot R + \mathbf{2} \cdot (X-T)R^3$ . D'autre part,  $\int_0^T B_1(Z, x) dZ = \mathbf{2} \cdot T + \mathbf{2} \cdot \int_0^T (X-Z)L(A_L(XZ - E_2(Z))) dZ = \mathbf{2} \cdot T + \mathbf{2} \cdot A_L(XT - E_2(T))$ . Donc

$F_1(T, X) = B^\dagger[\mathbf{2} \cdot T + \mathbf{2} \cdot A_L(XT - E_2(T))] \simeq L[\mathbf{2} \cdot T + \mathbf{2} \cdot A_L(XT - E_2(T))] \simeq S[\mathbf{2} \cdot T + \mathbf{2} \cdot A_L(XT - E_2(T))]$  et  $\log F_1 = C[\mathbf{2} \cdot T + \mathbf{2} \cdot A_L(XT - E_2(T))]$ . Comme  $F(t, x) = F_1^\alpha(t, x)$ , on a

$$F(T, X) = E(\alpha \log F_1) = S_{<\alpha>}[\mathbf{2} \cdot T + \mathbf{2} \cdot A_L(XT - E_2(T))].$$

La figure 4.57(II) montre une composante connexe d'une  $F$ -structure.

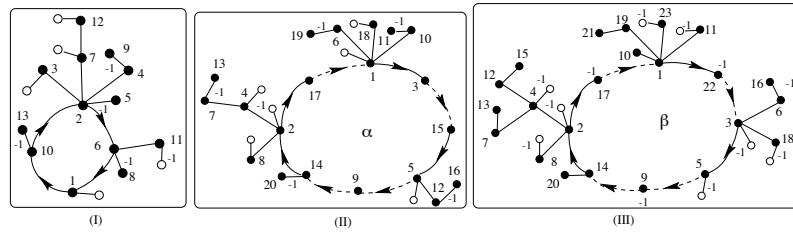


Figure 4.57: Les composantes connexes des structures de Jacobi

D'autre part, la fonction  $G_1(t, x) = 2(1 + t + R^{-1})^{-1}$  satisfait au système différentiel  $\{\frac{\partial Y}{\partial t} = 2(-1 + (t - x)R)Y^2, \frac{\partial Y}{\partial x} = -2tRY^2, y(0, 0) = 1\}$ . Le système différentiel associé,

$$\frac{\partial Y}{\partial T} = \mathbf{2} \cdot (-1 + (T - X)R)Y^2, \quad \frac{\partial Y}{\partial X} = \mathbf{2} \cdot (-TR)Y^2, \quad Y(0, 0) = 1,$$

est cohérent et admet comme solution  $G_1(T, X) = B^\dagger[\mathbf{2} \cdot (-T) + \mathbf{2} \cdot A_L(-XT + E_2(T))] \simeq L[\mathbf{2} \cdot (-T) + \mathbf{2} \cdot A_L(-XT + E_2(T))] \simeq S[\mathbf{2} \cdot (-T) + \mathbf{2} \cdot A_L(-XT + E_2(T))]$ . On en déduit que

$$G(T, X) = E[\beta \log G_1] = S_{<\beta>}[\mathbf{2} \cdot (-T) + \mathbf{2} \cdot A_L(-XT + E_2(T))].$$

La figure 4.57 (III) montre une composante connexe d'une  $G$ -structure.

On en déduit que

$$J_{\alpha\beta}(T, X) = S(A_L(XT - E_2(T)))S_{<\alpha>}[\mathbf{2} \cdot T + \mathbf{2} \cdot A_L(XT - E_2(T))]S_{<\beta>}[\mathbf{2} \cdot (-T) + \mathbf{2} \cdot A_L(-XT + E_2(T))].$$



## CONCLUSION

La première conclusion à tirer de cette thèse est le fait que si nous considérons une équation différentielle combinatoire de la forme

$$Y' = F(Y), \quad Y(0) = Z,$$

nous avons intérêt à considérer  $F$  comme une  $\mathbb{B}$ -espèce, afin de pouvoir passer aux types d'isomorphie et de considérer des équations différentielles avec des conditions initiales qui sont des constantes. D'autre part, si nous considérons une série formelle  $f$  et l'équation différentielle  $y' = f(y)$ , un bon choix de modèle pour  $f$  est nécessaire, afin que la solution de l'équation combinatoire associée reflète les propriétés combinatoires de la série solution de  $y' = f(y)$  (Voir la section 4.6.6).

Les questions suivantes restent ouvertes:

- 1) Existence d'une formule d'addition pour les espèces hyperelliptiques. En particulier, trouver une démonstration combinatoire des fonctions elliptiques de Jacobi.
- 2) Rappelons que  $\kappa_{2n}$  est le nombre d'arbres auto-évitants sur  $n$  points et que  $\kappa_{2n-1}$  est le nombre d'arbres auto-évitants sur  $n$  points contenant l'arête  $(1, n)$  (Remarque 3.4.15). Existe-t-il une explication bijective de ce résultat?
- 3) Nos modèles des polynômes de Bessel et de Jacobi vérifient-ils les relations de récurrences satisfaites par ces polynômes?



## APPENDICE A: DÉRIVÉES PARTIELLES ET ISOMORPHISMES CANONIQUES

Rappelons que l'opérateur de dérivation  $\partial_i$  induit des isomorphismes:

- $\sigma_i : \partial_i(F + G) \rightarrow (\partial_i F) + (\partial_i G)$ ,
- $\lambda_i : \partial_i(F \cdot G) \rightarrow \partial_i F \cdot G + F \cdot \partial_i G$  (Formule de Leibnitz),
- $\delta_i : \partial_i F(G_1, \dots, G_r) \rightarrow \sum_{j=1}^r (\partial_j F)(G_1, \dots, G_r) \cdot \partial_i G_j$  (Règle de dérivation en chaîne).

Nous nous proposons de démontrer les propositions 1.5.3 et 4.6.6.

### Proposition 1.5.3

a) Pour tout couple  $(i, j)$ ,  $\partial_i \partial_j F = \partial_j \partial_i F$ .

b) Soient  $F$  une  $\mathbb{L}$ -espèce à  $r$  sortes et  $B_1, B_2, \dots, B_r$  des  $\mathbb{L}$ -espèces à  $n$  sortes, et  $\vec{B} = (B_1, B_2, \dots, B_r)$ . Le diagramme suivant est commutatif, compte tenu de la commutativité (à isomorphisme près) du produit de deux  $\mathbb{L}$ -espèces.

$$\begin{array}{ccccc}
 \boxed{\partial_j(\sum_u (\partial_u F)(\vec{B}) \partial_i B_u)} & \xrightarrow{\lambda_j} & \boxed{\sum_u \frac{\partial_j[(\partial_u F)(\vec{B})] \cdot \partial_i B_u}{\sum_u (\partial_u F)(\vec{B}) \partial_j \partial_i B_u}} & \xrightarrow{\sum_u \delta_j \cdot \partial_i B_u + \text{Id}} & \boxed{\sum_{u,v} \frac{\partial_v \partial_u F(\vec{B}) \partial_j B_v \partial_i B_u}{\sum_u (\partial_u F)(\vec{B}) \partial_j \partial_i B_u}} \\
 \uparrow \partial_j \delta_i & & & & \uparrow \sum_v \delta_i \cdot \partial_j B_v + \text{Id} \\
 \boxed{\frac{\partial_j \partial_i F(\vec{B})}{\partial_i \partial_j F(\vec{B})}} & \xrightarrow{\partial_i \delta_j} & \boxed{\partial_i(\sum_v (\partial_v F)(\vec{B}) \partial_j B_v)} & \xrightarrow{\lambda_i} & \boxed{\sum_v \frac{\partial_i[(\partial_v F)(\vec{B})] \cdot \partial_j B_v}{\sum_t (\partial_t F)(\vec{B}) \partial_i \partial_j B_v}}
 \end{array}$$

En d'autres termes  $(\sum_t \delta_i \cdot \partial_j B_t + \text{Id}) \circ \lambda_i \circ \partial_i \delta_j = (\sum_s \delta_j \cdot \partial_i B_s + \text{Id}) \circ \lambda_j \circ \partial_j \delta_i$ .

**Démonstration** Soient donc  $1_i = \{0_i\}$  et  $1_j = \{0_j\}$ .

a) Il suffit de remarquer que pour  $i \neq j$   $\partial_i \partial_j F[l] = F[l_1, \dots, 1_i +_o l_i, \dots, 1_j +_o l_j, \dots, l_r] = \partial_j \partial_i F[l]$ .

b) Soit  $\pi$  une partition de  $1_i +_o 1_j +_o l = l_1 +_o \dots +_o (1_i +_o l_i) +_o \dots +_o (1_j +_o l_j) +_o \dots +_o l_r$ , et soient  $c_1, c_2 \in \pi$  tel que  $0_i \in c_1$  et  $0_j \in c_2$ , et  $s = (\pi, \epsilon, f, (s_c)_{c \in \pi}) \in \partial_i \partial_j F(\vec{B})[l] = \partial_j \partial_i F(\vec{B})[l] = F(\vec{B})[l_1 +_o 1_j +_o l]$ . Supposons que  $\epsilon(c_1) = u$  et  $\epsilon(c_2) = v$ , c'est-à-dire que  $s_{c_1} \in B_u[c_1]$  et  $s_{c_2} \in B_v[c_2]$ . Alors  $\partial_i \delta_j(s) = (\tilde{l}, c_2, (1 +_o \tilde{\pi}, \epsilon, f, (s_c)_{c \in \tilde{\pi}}), s_{c_2}) \in \partial_i[\partial_v(F)(\vec{B}) \cdot \partial_j B_v][l]$  et  $\partial_j \delta_i(s) = (\tilde{l}, c_1, (1' +_o \pi', \epsilon, f, (s_c)_{c \in \pi'}), s_{c_1}) \in \partial_j[\partial_u(F)(\vec{B}) \cdot \partial_i B_u][l]$ , où  $1_i +_o 1_j +_o l = \tilde{l} + c_2 = \tilde{l} + c_1$ ,  $1$  (resp.  $1'$ ) un bloc vide remplaçant  $c_2$  (resp.  $c_1$ ) dans  $\pi$ ,  $\tilde{\pi} = \pi \setminus \{c_2\}$  une partition de  $\tilde{l}$  et  $\pi' = \pi \setminus \{c_1\}$  une partition de  $\tilde{l}$ . Deux cas se présentent:

1.  $c_1 \neq c_2$ . Dans ce cas,  $0_i \in \tilde{l}$  et  $0_j \in \bar{l}$ . Supposons que  $\tilde{l} = 1_i +_o l'$  et  $\bar{l} = 1_j +_o l^-$ . Alors

i) D'une part  $(1 +_o \tilde{\pi}, \epsilon, f, (s_c)_{c \in \tilde{\pi}}) \in \partial_i[(\partial_v F)(\vec{B})][l']$ . Donc  $\lambda_i(\tilde{l}, c_2, (1 +_o \tilde{\pi}, \epsilon, f, (s_c)_{c \in \tilde{\pi}}), s_{c2}) = (1_i +_o l', c_2, (1 +_o \tilde{\pi}, \epsilon, f, (s_c)_{c \in \tilde{\pi}}), s_{c2})$  est un élément de  $(\partial_i[\partial_v(F)(\vec{B})] \cdot \partial_j B_v)[l]$ . En posant  $\delta_i(1 +_o \tilde{\pi}, \epsilon, f, (s_c)_{c \in \tilde{\pi}}) = (m, c_1, (1' +_o 1 +_o \tilde{\pi}, \epsilon, f, (s_c)_{c \in \tilde{\pi}}), s_{c1}) \in ((\partial_u \partial_v F)(\vec{B}) \cdot \partial_i B_u)[l \setminus c_2]$  où  $\tilde{\pi} = \tilde{\pi} \setminus \{c_1\}$ ,  $m = \cup_{c \in \tilde{\pi}} c$ , on a  $(\delta_i \cdot \partial_j B_v)(1_i +_o l', c_2, (1 +_o \tilde{\pi}, \epsilon, f, (s_c)_{c \in \tilde{\pi}}), s_{c2}) = (m, c_1, c_2, (1' +_o 1 +_o \tilde{\pi}, \epsilon, f, (s_c)_{c \in \tilde{\pi}}), s_{c1}, s_{c2})$ . On en déduit que  $(\sum_t \delta_i \cdot \partial_j B_v + Id) \circ \lambda_i \circ \partial_i \delta_j(s) = (m, c_1, c_2, (1' +_o 1 +_o \tilde{\pi}, \epsilon, f, (s_c)_{c \in \tilde{\pi}}), s_{c1}, s_{c2})$  est un élément de  $((\partial_u \partial_v F)(\vec{B}) \cdot \partial_i B_u \partial_j B_v)[l]$ .

ii) D'autre part,  $(1 +_o \pi', \epsilon, f, (s_c)_{c \in \pi'}) \in \partial_j[(\partial_u F)(\vec{B})][l^-]$ . Donc  $\lambda_j(\bar{l}, c_1, (1 +_o \pi', \epsilon, f, (s_c)_{c \in \pi'}), s_{c1}) = (1_j +_o l^-, c_1, (1 +_o \pi', \epsilon, f, (s_c)_{c \in \pi'}), s_{c1})$  est un élément de  $(\partial_j[\partial_u(F)(\vec{B})] \cdot \partial_i B_u)[l]$ . Remarquons qu'en posant  $\pi'' = \pi' \setminus \{c_2\}$  on a  $\pi'' = \tilde{\pi}$ ; alors

$\delta_j(1 +_o \pi', \epsilon, f, (s_c)_{c \in \pi'}) = (m, c_2, (1' +_o 1 +_o \pi'', \epsilon, f, (s_c)_{c \in \pi''}), s_{c2}) \in ((\partial_v \partial_u F)(\vec{B}) \cdot \partial_j B_v)[l \setminus c_1]$ . D'où  $(\delta_j \cdot \partial_i B_u)(1_j +_o l^-, c_1, (1 +_o \pi', \epsilon, f, (s_c)_{c \in \pi'}), s_{c1}) = (m, c_2, c_1, (1' +_o 1 +_o \pi'', \epsilon, f, (s_c)_{c \in \pi''}), s_{c2}, s_{c1})$ . On en déduit que

$(\sum_s \delta_j \cdot \partial_i B_u + Id) \circ \lambda_j \circ \partial_j \delta_i(s) = (m, c_2, c_1, (1' +_o 1 +_o \pi'', \epsilon, f, (s_c)_{c \in \pi''}), s_{c2}, s_{c1})$  est un élément de  $((\partial_v \partial_u F)(\vec{B}) \cdot \partial_j B_v \partial_i B_u)[l]$ . En tenant compte de la commutativité du produit et de a) nous pouvons donc écrire  $(\sum_v \delta_i \cdot \partial_j B_v) \circ \lambda_i \circ \partial_i \delta_j(s) = (\sum_u \delta_j \cdot \partial_i B_u) \circ \lambda_j \circ \partial_j \delta_i(s)$ . La Figure 1 est une illustration du calcul que nous venons de faire.

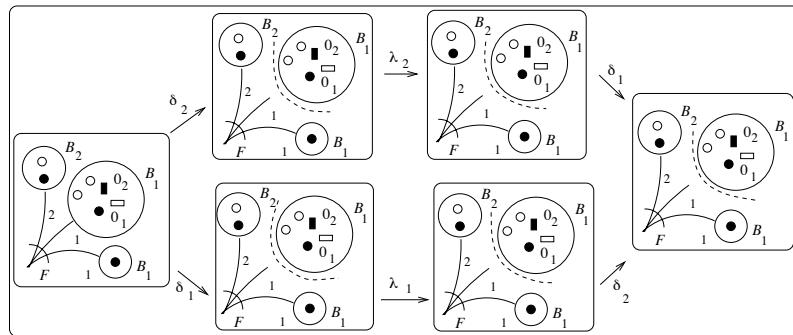


Figure 1

2.  $c_1 = c_2$ . Dans ce cas  $\tilde{l} = \bar{l}$  et  $\tilde{\pi} = \pi'$ . Supposons que  $s_{c1} = s_{c2} \in B_v[c_1] = \partial_i \partial_j B_v[c_1 \setminus \{0_i, 0_j\}]$ . Alors,  $\lambda_i(\tilde{l}, c_1, (1 +_o \tilde{\pi}, \epsilon, f, (s_c)_{c \in \tilde{\pi}}), s_{c1}) = (1_i +_o l', c_1, (1 +_o \tilde{\pi}, \epsilon, f, (s_c)_{c \in \tilde{\pi}}), s_{c1}) = (1_j +_o l^-, c_1, (1 +_o \tilde{\pi}, \epsilon, f, (s_c)_{c \in \tilde{\pi}}), s_{c1}) = \lambda_j(\bar{l}, c_1, (1 +_o \tilde{\pi}, \epsilon, f, (s_c)_{c \in \tilde{\pi}}), s_{c1})$  est un élément de  $(\partial_t(F)(\vec{B}) \cdot \partial_j \partial_i B_t)[l]$ . C'est-à-dire que  $\lambda_i \circ \partial_i \delta_j(s) = \lambda_j \circ \partial_j \delta_i(s)$ . D'où la commutativité du diagramme. ■

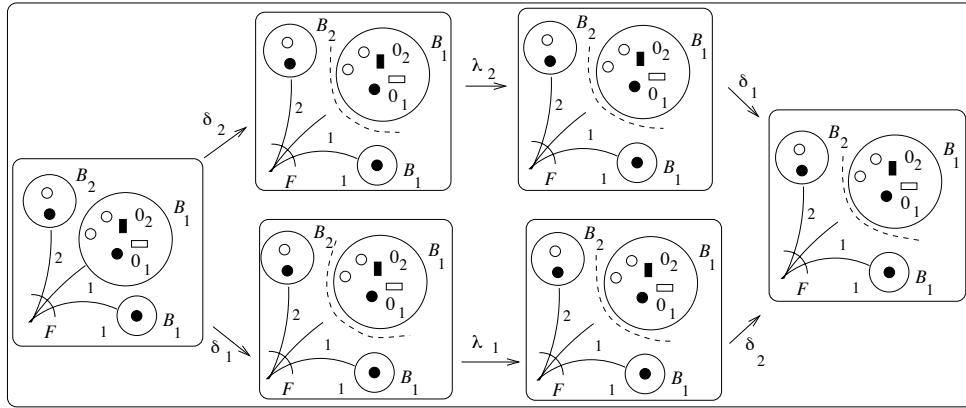


Figure 2

Rappelons aussi que si  $F, G, H$ , et  $K$ , sont des  $\mathbb{L}$ -espèces à  $r$  sortes,  $B_1, \dots, B_r$ , des  $\mathbb{L}$ -espèce à  $n$  sortes,  $\theta : F \cdot G \rightarrow H \cdot K$ , une transformation naturelle, alors l'opérateur de dérivation  $\partial_k$  induit une transformation naturelle  $\frac{\partial_k \theta}{\partial T_k} : \partial_k F \cdot G + F \cdot \partial_k G \rightarrow \partial_k H \cdot K + H \cdot \partial_k K$  telle que le diagramme suivant soit commutatif, c'est-à-dire que  $\frac{\partial_k \theta}{\partial T_k} = \lambda_k \circ \partial_k \theta \circ \lambda_k^{-1}$ .

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\partial_k(F \cdot G)} & \xrightarrow{\partial_k \theta} & \boxed{\partial_k(H \cdot K)} \\ \downarrow \lambda_k & & \downarrow \lambda_k \\ \boxed{\partial_k F \cdot G + F \cdot \partial_k G} & \xrightarrow{\frac{\partial_k \theta}{\partial T_k}} & \boxed{\partial_k H \cdot K + H \cdot \partial_k K} \end{array}$$

**Proposition 1.5.4** Pour toute transformation naturelle d'espèces à  $r$  sortes  $\theta : F \cdot G \rightarrow H \cdot K$ , et tout  $\vec{B} = (B_1, B_2, \dots, B_r)$ , le diagramme suivant est commutatif, compte tenu de la commutativité (à isomorphisme près) du produit de deux  $\mathbb{L}$ -espèces.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{\partial_k[H(\vec{B})K(\vec{B})]} & \xrightarrow{\lambda_k} & \boxed{\begin{matrix} \partial_k[H(\vec{B})]K(\vec{B}) \\ + \\ H(\vec{B})\partial_k[K(\vec{B})] \end{matrix}} & \xrightarrow{\delta_k \cdot K(\vec{B}) + H(\vec{B}) \cdot \delta_k} & \boxed{\begin{matrix} \sum_i (\partial_i H)(\vec{B})\partial_k B_i \cdot K(\vec{B}) \\ + \\ H(\vec{B})\sum_i (\partial_i K)(\vec{B})\partial_k B_i \end{matrix}} \\ \uparrow \partial_k[\theta(\vec{B})] & & & & \uparrow \sum_i \left( \frac{\partial_i}{\partial T_i} \theta \right)(\vec{B}) \cdot \partial_k B_i \\ \boxed{\partial_k[F(\vec{B})G(\vec{B})]} & \xrightarrow{\lambda_k} & \boxed{\begin{matrix} \partial_k[F(\vec{B})]G(\vec{B}) \\ + \\ F(\vec{B})\partial_k[G(\vec{B})] \end{matrix}} & \xrightarrow{\delta_k \cdot G(\vec{B}) + F(\vec{B}) \cdot \delta_k} & \boxed{\begin{matrix} \sum_i (\partial_i F)(\vec{B})\partial_k B_i \cdot G(\vec{B}) \\ + \\ F(\vec{B})\sum_i (\partial_i G)(\vec{B})\partial_k B_i \end{matrix}} \end{array}$$

En d'autres termes:

$$[\sum_i \left( \frac{\partial_i \theta}{\partial T_i} \right)(\vec{B}) \cdot \partial_k B_i] \circ [\delta_k \cdot G(\vec{B}) + F(\vec{B}) \cdot \delta_k] \circ \lambda_k = [\delta_k \cdot K(\vec{B}) + H(\vec{B}) \cdot \delta_k] \circ \lambda_k \circ \partial_k[\theta(\vec{B})].$$

### Démonstration:

Notons d'abord que si  $s = (l_1, l_2, (\pi, \epsilon_f, f, (s_p)_{p \in \pi}), (\pi', \epsilon_g, g, (s_p)_{p \in \pi'})) \in (F(\vec{B}) \cdot$

$G(\vec{B})[l]$  et si  $\theta(\vec{B})(s) = s' = (m_1, m_2, (\mu, \epsilon_h, h, (s_p)_{p \in \mu}), (\mu', \epsilon_k, k, (s_p)_{p \in \mu'}))$ , alors  $\pi \cup \pi' = \mu \cup \mu'$ ,  $\theta(\pi, \pi', f, g) = (\mu, \mu', h, k)$  et  $\{s_p, p \in \pi \cup \pi'\} = \{s_p, p \in \mu \cup \mu'\}$ .

Soit donc  $s = (l_1, l_2, (\pi, \epsilon_f, f, (s_p)_{p \in \pi}), (\pi', \epsilon_g, g, (s_p)_{p \in \pi'}))$ , un élément de  $\partial_k(F(\vec{B}) \cdot G(\vec{B}))[l] = (F(\vec{B}) \cdot G(\vec{B}))[1_k +_o l]$  tel que  $(\partial_k \theta)(\vec{B})(s) = s' = (m_1, m_2, (\mu, \epsilon_h, h, (s_p)_{p \in \mu}), (\mu', \epsilon_k, k, (s_p)_{p \in \mu'}))$ , et soit  $c_o$  le bloc de  $\pi \cup \pi' = \mu \cup \mu'$  contenant le nouvel élément minimum  $0_k$ . Sans perte de généralité nous pouvons supposer que  $c_o \in \pi \cap \mu$ , et  $s_{c_o} \in B_i[c_o]$ . Alors  $0_k \in l_1 \cap m_1$ , c'est-à-dire que  $l_1 = 1_k +_o l'_1$  et  $m_1 = 1_k +_o m'_1$ , et il existe  $i$  tel que  $\epsilon_f(c_o) = \epsilon_h(c_o) = i$ . Donc  $\pi$  (respectivement  $\mu$ ) s'identifie à  $1_i +_o \tilde{\pi}$  (respectivement  $1_i +_o \tilde{\mu}$ ) où  $\tilde{\pi} = \pi \setminus \{c_o\}$  (respectivement  $\tilde{\mu} = \mu \setminus \{c_o\}$ ). D'où  $(\pi, \pi', f, g) \in (\partial_i F \cdot G)[\tilde{\pi} \cup \pi']$  et  $(\partial_i \theta)(\pi, \pi', f, g) = (\mu, \mu', h, k) \in (\partial_i H \cdot K)[\tilde{\mu} \cup \mu']$ .

Nous avons:

$$1. \quad \lambda_k(s) = (1_k +_o l'_1, l_2, (\pi, \epsilon_f, f, (s_p)_{p \in \pi}), (\pi', \epsilon_g, g, (s_p)_{p \in \pi'})) \in (\partial_k[F(\vec{B})] \cdot G(\vec{B}))[l] \text{ et}$$

$$\lambda_k(s') = (1_k +_o m'_1, m_2, (\mu, \epsilon_h, h, (s_p)_{p \in \mu}), (\mu', \epsilon_k, k, (s_p)_{p \in \mu'})) \in (\partial_k[H(\vec{B})] \cdot K(\vec{B}))[l].$$

2. Sachant que  $(\pi, \epsilon_f, f, (s_p)_{p \in \pi})$  est un élément de  $F(\vec{B})[l_1] = \partial_k(F(\vec{B}))[l'_1]$  et  $(\mu, \epsilon_h, h, (s_p)_{p \in \mu})$  est un élément de  $H(\vec{B})[m_1] = \partial_k(H(\vec{B}))[m'_1]$ , on peut écrire  $\delta_k(\pi, \epsilon_f, f, (s_p)_{p \in \pi}) = (\tilde{l}_1, c_o, (1 +_o \tilde{\pi}, \epsilon_f, f, (s_p)_{p \in \tilde{\pi}}), s_{c_o})$  et  $\delta_k(\mu, \epsilon_h, h, (s_p)_{p \in \mu}) = (\tilde{m}_1, c_o, (1 +_o \tilde{\mu}, \epsilon_h, h, (s_p)_{p \in \tilde{\mu}}), s_{c_o})$  où  $\tilde{l}_1 = l_1 \setminus c_o$  (resp.  $\tilde{m}_1 = m_1 \setminus c_o$ ) et  $\tilde{\pi} = \pi \setminus \{c_o\}$  (resp.  $\tilde{\mu} = \mu \setminus \{c_o\}$ ). On en déduit que :

$$\delta_k \cdot G(\vec{B}) \circ \lambda_k(s) = (\tilde{l}_1, c_o, l_2, (1_i +_o \tilde{\pi}, \epsilon_f, f, (s_p)_{p \in \tilde{\pi}}), s_{c_o}, (\pi', \epsilon_g, g, (s_p)_{p \in \pi'}))$$

d'une part, et

$$\delta_k \cdot K(\vec{B}) \circ \lambda_k(s') = (\tilde{m}_1, c_o, m_2, (1_i +_o \tilde{\mu}, \epsilon_h, h, (s_p)_{p \in \tilde{\mu}}), s_{c_o}, (\mu', \epsilon_k, k, (s_p)_{p \in \mu'})),$$

d'autre part,

3. Notons alors que  $\frac{\partial_i \theta}{\partial T_i}(1_i +_o \tilde{\pi}, \pi', f, g) = \frac{\partial_i \theta}{\partial T_i} \circ \lambda_i(\pi, \pi', f, g) = \lambda_i \circ (\partial_i \theta)(\pi, \pi', f, g) = (1_i +_o \tilde{\mu}, \mu', h, k)$ . Nous en déduisons que:

$$(\frac{\partial_i \theta}{\partial T_i})(\vec{B})(\tilde{l}_1, l_2, (1_i +_o \tilde{\pi}, \epsilon_f, f, (s_p)_{p \in \tilde{\pi}}), (\pi', \epsilon_g, g, (s_p)_{p \in \pi'})) =$$

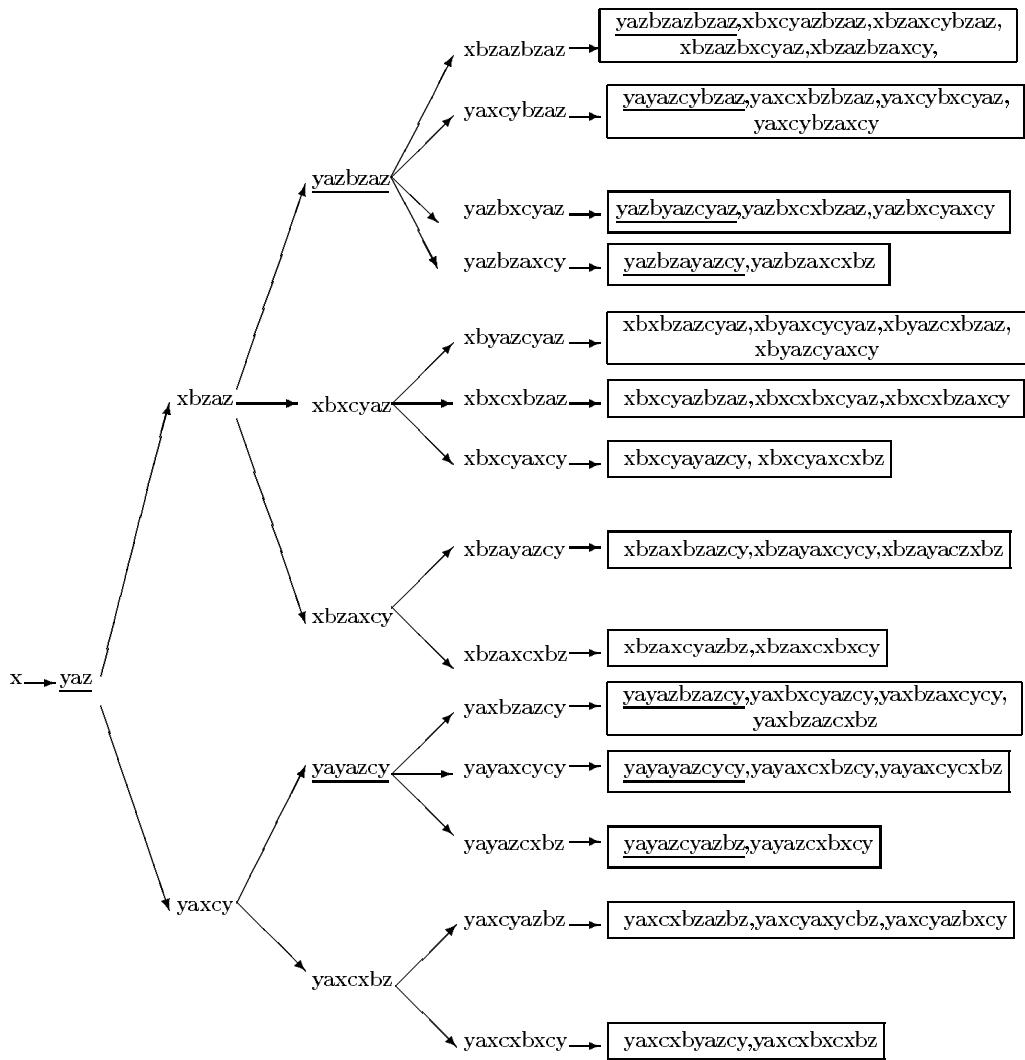
$$(\tilde{m}_1, m_2, (1_i +_o \tilde{\mu}, \epsilon_h, h, (s_p)_{p \in \tilde{\mu}}), (\mu', \epsilon_k, k, (s_p)_{p \in \mu'})).$$

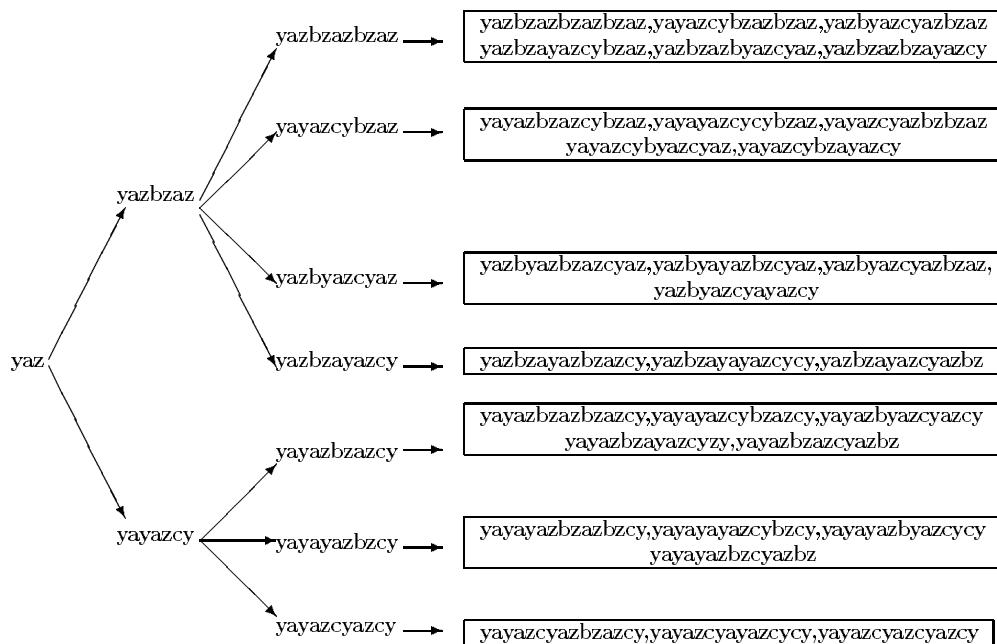
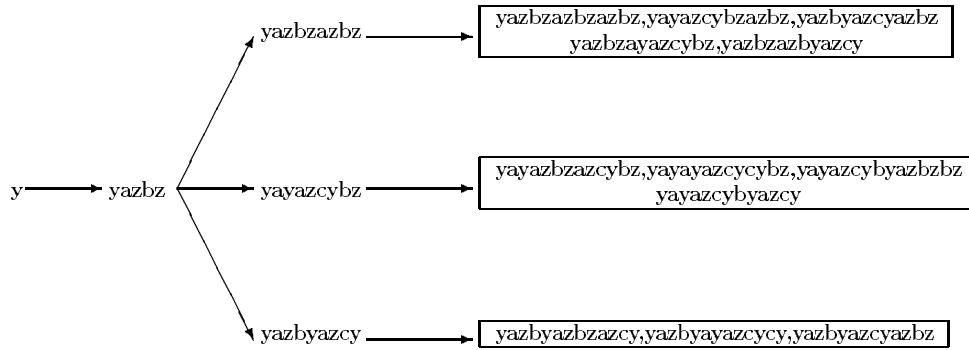
Donc  $(\delta_k \cdot K(\vec{B}) + H(\vec{B}) \cdot \delta_k) \circ \lambda_k \circ (\partial_k \theta)(\vec{B})(s) = ([(\frac{\partial_i \theta}{\partial T_i})](\vec{B}) \cdot \partial_k B_i) \circ (\delta_k \cdot G(\vec{B}) + F(\vec{B}) \cdot \delta_k) \circ \lambda_k(s)$ . La commutativité du diagramme s'en déduit facilement.

■

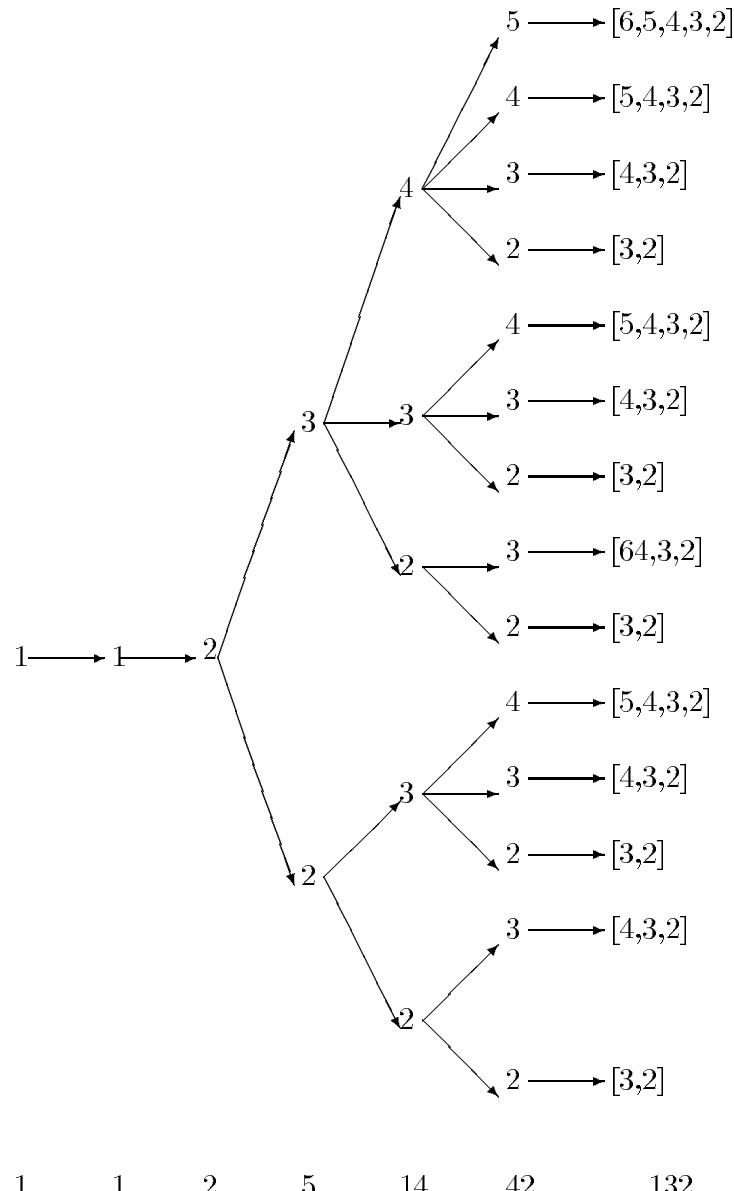
**APPENDICE B: GÉNÉRATION DES MOTS DE SCHETT ET  
DE JACOBI, ET DÉVELOPPEMENT-COMPRESSEION:  
TABLE**

**Table 1:** Arbre de génération des mots de Schett initialisés en  $x$



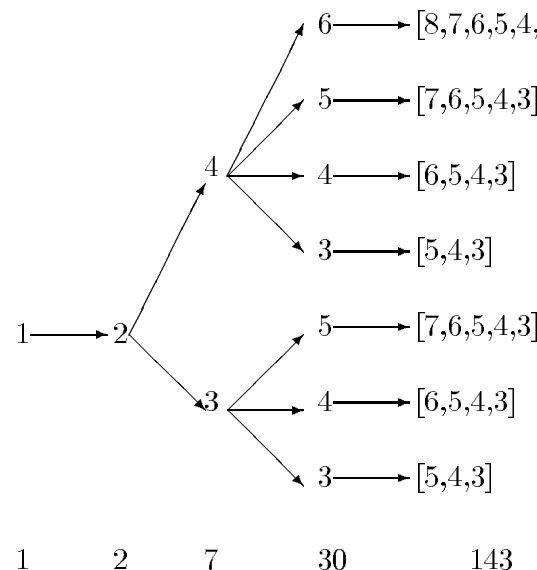
**Table 2:** Arbre de génération des mots de Jacobi initialisés en  $x$ **Table 3:** Arbre de génération des mots de Jacobi initialisés en  $y$ 

**Table 4:** Développement-compression pour les nombres de Catalan



Dans ce tableau on a, par exemple,  $\varphi(5,3) = [4,3,2]$ ,  $\varphi(6,4) = [5,4,3,2]$ .

**Table 5:** Développement-compression pour les nombres associés de rang impair



**Table 6:** Développement-compression pour les nombres associés de rang pair

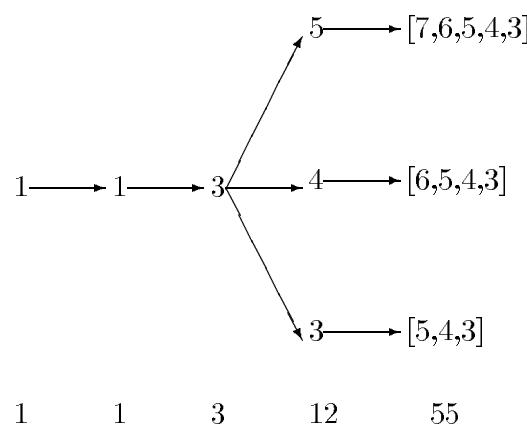
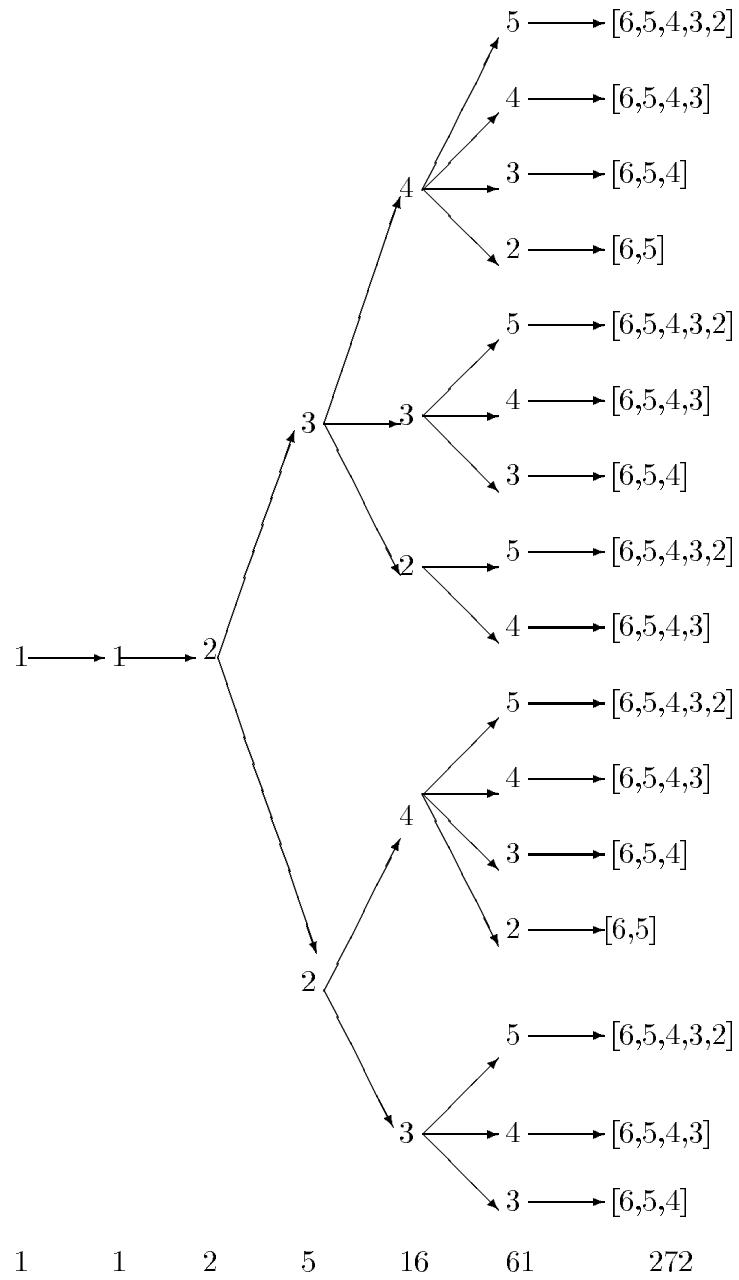


Table 7: Développement-compression pour les nombres d'Euler



Dans ce tableau on a, par exemple,  $\varphi(4, 3) = [4, 3, 2]$ ,  $\varphi(5, 3) = [5, 4, 3]$ .



## BIBLIOGRAPHIE

- [An. 1879] D. André, *Sur les permutations alternées*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 5 (1879) pp 31-46.
- [Baiz 95] N. Baïz, *Une interprétation combinatoire des équations différentielles de Brenig*, Mémoire de Maîtrise. UQÀM 1995.
- [B.D.P.P. 98] E. Barcucci, A. Del Lungo, E. Pergola et R. Pinzani, *From  $C_n$  to  $n!$ : permutations avoiding  $S_j(j+1)(j+2)$* , Actes 10<sup>ème</sup> conférence sur les séries formelles et la combinatoire algébrique, Toronto, SFCA FPSAC '98, Juin 1998 pp 31-41.
- [Be. 85] F. Bergeron, *Combinatorial representations of some Lie groups and some Lie algebras*, Lectures Notes in Mathematics, Springer Verlag, Vol 1234, (1985) pp 34-47.
- [Be. 90] F. Bergeron, *Combinatoire des polynômes orthogonaux classiques, une approche unifiée*, European Journal of Combinatorics, 11, (1990) 393-401.
- [B.L.L. 94] F. Bergeron, G. Labelle, et P. Leroux *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes*, Publication du Lacim, Vol. 19, 1994.
- [B.L.L. 98] F. Bergeron, G. Labelle, et P. Leroux *Combinatorial species and tree-like structures*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 67, Cambridge University Press, 1998.
- [Be.-Re. 86] F. Bergeron et C. Reutenauer, *Une interprétation combinatoire des puissances d'un opérateur différentiel linéaire*, Annales sc. math. Québec, vol. 11, n° 2 (1987) pp. 269-278.
- [Be.-Re. 90] F. Bergeron et C. Reutenauer, *Combinatorial resolution of systems of differential equations III: A special class of differentiably algebraic series*, European Journal of Combinatorics, 11, (1990) 501-512.
- [Be.-Sa 95] F. Bergeron et U. Sattler, *Constructible differentiably finite algebraic series in several variables*, Theoret. Comput. Sci. 149 (1995) no. 1-2, pp. 59-65.
- [Bo. 60] N. Bourbaki *Topologie générale, Livre 2, Chapitre 3* Hermann Paris 1960.

- [Bu. 72] W. H. Burge, *An analysis of a tree sorting method and some properties of a set trees*, First USA-Japan Computer Conference, (1972) 372-379.
- [Ch. 91] W. Chen, *Context-free grammars, differential operators and formal powers series*, Acte Conf. Bordeaux, Labri 1991. Publié dans Theoret. Comput. Sci., 117, (1993), 113-129.
- [Chi. 78] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, New York, (1978).
- [Ch.-Lab 93] Y. Chiricota et G. Labelle, *Familles de solutions combinatoires de l'équation différentielle  $Y' = 1 + Y^2$  et des équations différentielles autonomes*, Discrete Mathematics, 115, pp 77-94 (1993).
- [C.G.H.K. 78] F. R. K. Chung, R. L. Graham, V. E. Hoggatt Jr, et M. Kleiman, *The number of Baxter permutations*, J. Combinatorial Theory, Ser, A, 24, (1978), 382-394.
- [Co. 70] L. Comtet, *Analyse Combinatoire*, Tome 1 et 2. Presses Universitaire de France, 1970.
- [De. 90] H. Décoste, *Séries indicatrices d'espèces pondérées et q-analogues*, Publications du LACIM, Vol. 2, 1990.
- [Du.-Pe. 91] S. Dulucq et J.G. Penaud, *Cordes, arbres et permutations*, Discrete Mathematics 117, (1993) 86-105.
- [Dum. 80] D. Dumont, *Étude combinatoire sur les fonctions elliptiques de Jacobi et sur une extension de celles-ci*, Publications de L'Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg, 1980.
- [Dum. 81] D. Dumont, *Une approche combinatoire des fonctions elliptiques de Jacobi*, Advances in Mathematics, 41 (1981) pp 1-39.
- [Dum. 96] D. Dumont, *Grammaires de William Chen et dérivations dans les arbres et arborescences*, Acte Sémin. Lothar. Combin. vol. 37, (1996).
- [Fl.-Fr. 89] P. Flajolet et J. Françon, *Elliptic functions, continued fractions and doubled permutations*, European J. Combin., 3, (1989) 235-241.
- [Fo 83] D. Foata, *La série génératrice exponentielle dans les problèmes d'énumération*, Université de Montréal, 1974.
- [Fo 83] D. Foata, *Combinatoire des identités sur les polynômes orthogonaux*, Internat. Congress Math. (Varsovie, Pologne) (1983).
- [Fo-Fu 70] D. Foata et A. Fuchs, *Réarrangements de fonctions et dénombrements*, J. Combinatorial Theory, 8 (1970) pp. 361-375.
- [Fo. La. 83] D. Foata et J. Labelle, *Modèles combinatoires pour les polynômes*

- de Meixner*, Europ. J. Combin. 4 (1983) pp. 305-311.
- [Fo.-Le. 83] D. Foata et P. Leroux, *Polynômes de Jacobi, interprétation combinatoire et fonction génératrice*, Amer. Math. Soc. Vol 87, no. 1 (1983) pp. 47-53.
- [Fo-Sc. 73] D. Foata et M.P. Schutzenberger, *Nombres d'Euler et permutations alternantes* In: J.N. Srivastava and Al, Eds, A Survey of combinatorial theory, North Holland Publishing Company 1973, pp. 173-187.
- [Fo-St. 84] D. Foata et V. Strehl, *Combinatorics of the Laguerre polynomials*, Proc. Waterloo Silver Jubilee, 1982, in: D.M. Jackson and S.A. Vanstone eds., Enumeration and Design Academic Press, Toronto, 1984 pp. 123-140
- [Ga. 85] J. F. Gagné, *Rapport existant entre la théorie des espèces et les équations différentielles*, Mémoires de Maîtrise, Université du Québec à Montréal, 1985.
- [Ga.-Mi. 81] A. M. Garsia et S. C. Milne, *Method for constructing bijections for classical partition identities*, Proc. Nat. Acad. Sci U.S.A. 78 no 4 (1981) 2026-2028.
- [Gin. 94] M. Ginocchio *Universal expansion of the powers of a derivation*, Letters in Mathematical Physics vol 34, no 4, (1995) 343-364.,
- [Gr.-Kn. 67] G. Gröbner and H. Knapp, *Contribution to the method of Lie series*, Bibliographishes Institut Mannheim, (1967).
- [Ha. 74] Halmos, P.R. *Naive set theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag 1974.
- [He. St 73] H. Herrlich et G. E. Strecker, *Category theory, an introduction*, Allyn and Bacon series in advanced Mathematics, Allyn and Bacon Inc, Boston-Toronto 1973.
- [Hi.-Pe. 91] P. Hilton, J. Pedersen, *Catalan numbers, their generalization and their uses*, Math. Intelligencer 13, (1991) 64-75.
- [Joy. 81] A. Joyal, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Advances in Mathematics, 42, (1981) 1-82.
- [LaG. 85] G. Labelle, *Eclosions combinatoires appliquées à l'inversion multidimensionnelle des séries formelles*, J. Combin. Theory Ser., A, 39 pp. 52-82, (1985).
- [LaG. 86] G. Labelle, *On combinatorial differential equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 113, (1986) pp. 344-381.
- [LaG. 92] G. Labelle, *On asymmetric structures*, Discrete Mathematics, 99,

(1992) 141-162.

[LaJ. 84] J. Labelle, *Tableau d'Askey, in: Polynômes orthogonaux et applications*, Proc. Bar-le-Duc 1984, (Springer Verlag Lecture Notes no 1171) XXXVI and XXXVII.

[La.-Ye. I 89] J. Labelle et Y. N. Yeh, *Combinatorial proofs of some limit formulas involving orthogonal polynomials*, Discrete Mathematics 79, (1989) 77-93 .

[La.-Ye. II 89] J. Labelle et Y.N. Yeh, *The combinatorics of Laguerre, Charlier and Hermite polynomials*, Studies in Applied Mathematics, 80, (1989) 25-36.

[Lal. 79] G. Lallement, *Semigroups and combinatorial applications*, John Wiley and Sons, Inc. 1979.

[Le.-St. 85] P. Leroux, V. Strehl *Jacobi Polynomials: Combinatorics of the basic identities*, Discrete Mathematics 57 (1985) pp. 167-187.

[Le.-Vi. 1. 86] Leroux, P. and G. X. Viennot, *Combinatorial resolution of systems of differential equations I: Ordinary differential equations*, Lecture Notes in Mathematics, 1234, (1986) pp. 233-253.,

[Le.-Vi. 2. 88] P. Leroux et G. X. Viennot, *Résolution combinatoire des équations différentielles II: Calcul intégral combinatoire*, Annales des Sciences Mathématiques du Québec 12, (1988) 210-245.

[Le.-Vi. 3. 88] P. Leroux et G. X. Viennot, *Combinatorial resolution of systems of differential equations IV: Separation of variables*, Discrete Mathematics, 72, (1988) 237-250.

[Lev. 89] J.B . Lévesque, *Sur la pondération en combinatoire énumérative*, Mémoire de Maîtrise, UQAM 1989.

[Lo. 85] A. Longtin, *Une combinatoire non commutative pour l'étude des nombres sécants*, Lectures Notes in Mathematic,s Springer Verlag, New York, Vol. 1234 (1985) pp 246-266.

[McL 71] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate texts in Mathematics, Springer Verlag, New York 1971.

[Noy 98] M. Noy, *Enumeration of noncrossing trees on a circle*, Discrete Mathematics 180 (1998) 301-313.

[Pl. 98] S. Plouffe, *Communication personnelle*, Mai 1998.

[Ran. 93] B. Randrianirina, *Succession et pics de cycle dans les permutations*, Mémoire de D.E.A. Université de Fianarantsoa, Madagascar (Juil. 1993).

- [Sat. 94] U. Sattler, *Decidable classes of formal power series with nice closure properties*, Diplomarbeit im Fach Informatik, Institut für Mathematische Maschinen und Datenverarbeitung (I) Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, (1994).
- [Sta. 80] R. P. Stanley, *Differentiably finite power series*, Europ. J. Combinatorics 1, (1980) pp. 175-188.
- [St.-Wh. 86] D. Stanton et D. White, *Constructive combinatorics*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1986.
- [Sch. 76] A. Schett, *Properties of the Taylor series expansion coefficients of the Jacobian elliptic functions*, Math.Comp. 30, (1976) 143-147.
- [Sch. 77] A. Schett, *Recurrences formulas of the Taylor series expansion coefficients of the Jacobian elliptic functions*, Math.Comp. 31, (1977) 1003-1005.
- [Vi. 79] G.X. Viennot, *Permutations ayant une forme donnée*, Discrete Math. 26, No 3, (1979) 279-284.
- [Vi.1 80] G.X. Viennot, *Interprétation combinatoire des coefficients du développement des fonctions elliptiques de Jacobi*, J. Comb. Theory, Series A, Vol. 29, 2, (1980) 121-133.
- [Vi.2 80] G.X. Viennot, *Fonctions elliptiques et Histoire de Schett*, Manuscrit non publié, Fev. 1980.
- [Vi. 81-82] G. X. Viennot, *Interprétation combinatoire des nombres d'Euler et de Gennochi*, Séminaire de Théorie des nombres, Publication Université de Bordeaux 1981-1982.
- [Vi. 83] G. X. Viennot, *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux*, Notes de Conférences UQÀM Sept.-Oct. 1983.
- [Vi. 98] G. X. Viennot, *Communication personnelle*, Mars 1998.
- [Wi. 85] S. G. Williamson, *Combinatorics for Computer Sciences*, Computer Sciences Press 1985.
- [Zw. 92] D. Zwillinger, *Handbook of Differential Equations* (Deuxième Edition), Academic Press 1992.

## INDEX

amplitude, 64  
 anneau pondérateur, 2  
 application compatible, 3  
 arborescence  
     1 – 2 croissante, 44  
     1 –  $n$  croissante, 44  
      $\vec{F}$ -enrichie croissante, 47, 99, 107,  
         115  
         du type  $i$ , 47  
      $\vec{F}(\vec{T}, Y)$ -enrichie croissante, 118  
      $m$ -aire croissante, 126  
         complète, 43  
      $m$ -aire croissante, 42  
         complète, 48  
     de Fermat, 49  
     de Jacobi, 79, 90  
     F-enrichie croissante, 38  
     plane croissante, 132  
  
     B-espèce, 8  
     B-espèce asymétrique, 9, 36  
  
     cardinal, 55  
     composante connexe, 127  
     composition partitionnelle, 14  
     compteur de points, 41  
     condition de cohérence, 96  
     couplages de chaînes, 130  
     couronne  
         de  $F_w$ -structures, 34  
         de  $F_{\omega \cdot \vec{x}}$ -structures, 35  
  
     décomposition, 23  
     dérivée  
         d'une L-espèce, 16  
         par rapport à la sorte  $T_i$ , 26  
     développement-compression, 92, 93  
     domaine, 69  
  
     éclosion, 57

ensemble  
     des possibilités, 69  
     pondéré, 2  
     réduit, 4  
 équation différentielle  
     équation différentielle combinatoire, 37  
 équation différentielle  
     analytique, 37  
 espèce  
     elliptique de Jacobi, 63  
     hyperelliptique, 76  
     hyperelliptique d'ordre  $k$ , 63  
     mixte, 29  
         polynomiale, 41  
         polynomiale, 41  
         trigonométrique, 63  
 état, 69  
 état final, 69  
 état initial, 69  
  
      $F$ -enrichissement, 38  
 fonction de  
     compression, 92  
     développement, 92  
     possibilité, 69  
 fonctions elliptiques de Jacobi, 77, 78  
 formule d'addition, 66  
     pour les espèces trigonométriques, 67  
 formule de Leibnitz, 16, 27  
 $F$ -structure  
      $k$ -colorée, 23  
 $F$ -structure, 7  
  
     grammaire, 60, 61, 73  
         algébrique, 60  
         formelle, 60

- hexagone, 103–107, 109, 113, 114, 117, 122
- histoire, 70
  - de taille  $n$ , 70
- historiographe, 69
  - additif, 70–73
  - de Schett, 74, 77, 86
  - elliptique, 74
  - hyperelliptique, 74
  - initialisé, 70
- image commutative, 70
- implémentation, 70
- intégrale, 18, 26
- intégration pure, 120, 123
- inverse multiplicatif, 22
- involution pondérée, 3, 19
  - réductrice, 4–6, 19
- isomorphisme
  - canonique, 10, 27
  - d'ensembles pondérés, 3, 6
  - d'ensembles totalement ordonnés, 1
  - d'espèces mixtes, 30
  - de  $\mathbb{L}$ -espèces, 8, 9
- $\mathbb{L}$ -espèce, 7
- $\mathbb{L}$ -espèce à  $r$  sortes, 25
- $\mathbb{L}$ -espèce monomialement pondérée, 20
- $\mathbb{L}$ -espèce monomialement
  - pondérée réduite, 20, 98
- $\mathbb{L}$ -espèce multisorte, 25
- $\mathbb{L}$ -espèce pondérée, 7
- $\mathbb{L}$ -espèce pondérée réduite, 19
- $\mathbb{L}$ -espèce trivialement pondérée, 7
- $\mathbb{L}$ -espèces équivalentes, 10
- $\mathbb{L}$ -espèces isomorphes, 9
- morphisme, 27
  - d'ensembles pondérés, 3
  - de  $\mathbb{L}$ -espèces, 8
- mots
  - de Jacobi, 89
  - de Schett, 86, 88, 89
- opérateur
  - d'éclosions, 56, 111
  - de dérivation, 16, 27, 55
  - de pointage, 55
  - différentiel, 54, 73
  - différentiel associé à une grammaire, 60
  - différentiel combinatoire, 54, 61
- opération, 10, 26, 30
  - primitive, 69
- poids
  - d'une histoire, 70
  - total, 2
- point de sorte
  - $\mathbb{B}$ , 30
  - $\mathbb{L}$ , 30
- polynômes
  - d'Hermite, 128
  - de Bessel, 134
  - de Charlier, 133
  - de Gegenbauer, 130
  - de Jacobi, 137
  - de Laguerre, 129
  - de Legendre, 131
  - de Meixner, 133
  - de Schett, 77
  - de Tchebichef de 2<sup>ième</sup> sorte, 130
  - hyperelliptiques, 75
- pondération, 10
  - admissible, 20, 21
  - monomiale, 20
- produit, 12, 26
- puissance d'un opérateur différentiel, 58
- réalisation, 70
  - à la Dumont, 82
  - alternante, 81
  - banale, 70
  - canonique, 78, 79
  - de Viennot, 81
- réduction, 19
- réduite d'une  $\mathbb{L}$ -espèce, 20

règle de dérivation en chaîne, 16, 27

relèvement combinatoire, 37

représentation, 70

série

$\mathcal{D}$ -finie, 50

génératrice des types d'isomorphie,  
30

génératrice exponentielle, 8, 26,  
30

indicatrice des cycles, 30

solution, 38, 46, 106, 114, 117, 120

canonique, 40, 47, 109

compatible, 100, 106, 110, 114,  
117, 120, 123

universelle, 110

sommable, 2

somme, 26

de deux espèces, 11

ordinale, 1

sous-espèce, 19

structure

isomorphe, 8, 30

substitution, 14

système

cohérent, 96, 100, 106, 114, 117,  
120, 122

différentiel, 46, 73

analytique, 61

combinatoire, 46, 58, 61

transformation naturelle, 8, 11–16,  
18, 27

transport des structures, 7

type d'isomorphie, 30

type par rapport à la  $\mathbb{B}$ -sorte  $Z$ , 31