

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

UNE FAMILLE D'ALGORITHMES À BALAYAGE  
CIRCULAIRE POUR LE CALCUL DE DIAGRAMMES DE  
VORONOÏ DE POINTS OU DE CERCLES PONDÉRÉS

THÈSE

PRÉSENTÉE

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

PAR

AXEL PAVILLET

AOÛT 2004

## REMERCIEMENTS

La présente thèse a été soutenue le 23 août 2004 à l'UQÀM. Les membres du jury d'évaluation étaient :

- Monsieur Timothy R. Walsh, professeur au Département d'informatique de l'Université du Québec à Montréal,
- Madame Anne Bergeron, professeure au Département d'informatique de l'Université du Québec à Montréal,
- Madame Hazel Everett, professeure et chercheure, UFR de Mathématiques et Informatique de l'Université de Nancy 2,
- Madame Louise Laforest, professeure au Département d'informatique de l'Université du Québec à Montréal.

Présidente du jury : Madame Louise Laforest.

Représentant du doyen : Monsieur Pierre Leroux, Professeur au Département de Mathématiques de l'Université du Québec à Montréal.

À l'issue de ses délibérations, le jury a attribué à la thèse la mention excellent. L'auteur a alors remercié les membres du jury, Madame Everett, venue de France et qui avait déjà été membre de son jury de maîtrise, Mesdames Laforest et Bergeron qui ont aussi été ses professeures et il a très chaleureusement remercié son Directeur de Recherche Timothy Walsh pour son aide et son soutien pendant les six années passées à l'UQÀM et qui ont rendu son succès possible tant à la maîtrise qu'au doctorat.

## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX . . . . .	x
RÉSUMÉ . . . . .	xi
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE I	
DÉFINITIONS ET RECHERCHES BIBLIOGRAPHIQUES . . . . .	2
1.1 Définitions . . . . .	2
1.2 Les diagrammes de Voronoï généralisés . . . . .	4
1.3 Propriétés des diagrammes de points . . . . .	5
1.3.1 Bissecteur, arête et sommet . . . . .	5
1.3.2 Enveloppe convexe . . . . .	6
1.3.3 Graphe planaire . . . . .	7
1.4 Triangulation de Delaunay . . . . .	8
1.5 Construction des diagrammes de Voronoï . . . . .	10
1.5.1 Algorithmes incrémentaux . . . . .	10
1.5.2 Algorithmes « diviser pour régner » . . . . .	11
1.5.3 Algorithmes à balayage . . . . .	11
1.6 L'usage des cercles dans les diagrammes de Voronoï . . . . .	13
1.6.1 Les diagrammes à base de cercles . . . . .	14
1.6.2 Les algorithmes à base de cercles . . . . .	16
1.6.3 Le balayage par cercles . . . . .	17
1.7 Présentation du document . . . . .	17
<b>I Diagrammes de Voronoï de points ou de cercles pondérés</b>	<b>21</b>
CHAPITRE II	
LES DIAGRAMMES DE VORONOÏ DE POINTS PONDÉRÉS . . . . .	22
2.1 Les diagrammes de points pondérés par soustraction . . . . .	22

2.1.1	Bissecteurs . . . . .	22
2.1.2	Domination . . . . .	23
2.1.3	Connexité . . . . .	24
2.1.4	Pondération . . . . .	25
2.1.5	Interprétation par cônes . . . . .	27
2.1.6	Interprétation par cycles . . . . .	27
2.2	Les diagrammes de points à pondération multiplicative . . . . .	29
2.3	Les diagrammes de points à pondération composite . . . . .	31
2.3.1	Un diagramme de cercles pondérés . . . . .	31
2.3.2	Nature des bissecteurs . . . . .	32
2.3.3	La ponctuation de la projection horizontale . . . . .	35
2.4	Complexité . . . . .	41
2.5	Conclusion . . . . .	42
<b>CHAPITRE III</b>		
	<b>LES DIAGRAMMES DE VORONOÏ DE CERCLES . . . . .</b>	44
3.1	Les bissecteurs hyperboliques et elliptiques . . . . .	44
3.2	Le cas des sommets « dégénérés normaux » . . . . .	46
3.3	Connexité . . . . .	52
3.4	L'interprétation par cônes . . . . .	53
3.5	Diagramme de Voronoï en géométrie hyperbolique . . . . .	60
3.5.1	La première représentation de Poincaré . . . . .	60
3.5.2	Propriétés des diagrammes hyperboliques . . . . .	62
3.5.3	Sommet à distance infini . . . . .	63
<b>CHAPITRE IV</b>		
	<b>DIAGRAMMES DE PUISSANCE ET DIAGRAMMES DE MÖBIUS . . . . .</b>	64
4.1	Représentation par une surface composite . . . . .	64
4.2	Les diagrammes de puissance . . . . .	65
4.3	Les diagrammes de Möbius . . . . .	67
4.4	Complexité . . . . .	70
4.5	Conclusion . . . . .	72

<b>CHAPITRE V</b>	
LES DIAGRAMMES DE VORONOÏ EN GÉOMÉTRIE PROJECTIVE . . . . .	75
5.1 Définitions . . . . .	75
5.2 Immersion dans un plan projectif . . . . .	77
5.3 Distances et conditions de contact . . . . .	81
5.4 Parallèle avec la géométrie hyperbolique . . . . .	83
5.5 Conclusion . . . . .	83
<b>CHAPITRE VI</b>	
LES DIAGRAMMES DE VORONOÏ SANS SOMMET . . . . .	85
6.1 Diagramme de Voronoï de points et de cercles pondérés . . . . .	86
6.2 Diagramme de Voronoï de cercles avec distance euclidienne . . . . .	87
6.3 Diagramme de Voronoï en géométrie hyperbolique . . . . .	89
6.4 Diagramme de Voronoï de points pondérés multiplicativement . . . . .	90
6.5 Diagramme de Voronoï de cercles pondérés multiplicativement . . . . .	90
6.6 Diagrammes de Möbius et diagrammes de puissance . . . . .	92
6.7 Algorithmes pour diagramme de Voronoï sans sommets . . . . .	92
6.7.1 Diagramme de Voronoï avec <i>peu</i> de sommets . . . . .	93
<b>II Algorithmes à balayage circulaire</b>	<b>95</b>
<b>CHAPITRE VII</b>	
DÉFINITIONS ET THÉORÈMES GÉNÉRAUX . . . . .	96
7.1 Notations et définitions . . . . .	96
7.1.1 Structure de données . . . . .	97
7.2 Condition de contact . . . . .	99
7.3 La condition de Casey . . . . .	101
7.4 Élimination des solutions parasites . . . . .	103
7.5 Typologie des événements . . . . .	105
7.5.1 événement site . . . . .	105
7.5.2 événement sommet . . . . .	106
7.5.3 événement stérile . . . . .	106

7.5.4 événement morituri . . . . .	106
7.5.5 événement mort-né . . . . .	107
7.5.6 événement viable . . . . .	108
7.5.7 événement non-viable . . . . .	108
<b>CHAPITRE VIII</b>	
<b>ALGORITHME EN CONTRACTION . . . . .</b>	<b>109</b>
8.1 Le principe du cercle en contraction . . . . .	109
8.2 Le choix des paramètres de balayage . . . . .	110
8.3 Les trois types d'événements . . . . .	111
8.3.1 Les événements de type-1 . . . . .	111
8.3.2 Les événements de type-2 . . . . .	112
8.3.3 Les événements de type-3 . . . . .	114
8.3.4 L'algorithme en contraction dans le plan projectif . . . . .	117
8.3.5 Le balayage par droite en cas limite . . . . .	117
8.4 Le test des cercles inclus . . . . .	121
8.5 Pseudo-code de l'algorithme . . . . .	122
8.6 Un balayage par cône . . . . .	124
<b>CHAPITRE IX</b>	
<b>ALGORITHME POUR LES DIAGRAMMES DE VORONOÏ DE CERCLES . . .</b>	<b>126</b>
9.1 Définition du problème . . . . .	126
9.2 Le type de balayage . . . . .	126
9.3 Balayage par cône . . . . .	128
9.4 Le choix du centre de balayage . . . . .	129
9.5 Arêtes virtuelles . . . . .	129
9.6 Les trois situations des cercles $D, S, I$ . . . . .	131
9.7 Les règles de composition du front d'onde . . . . .	131
9.8 L'adaptation de la DCEL . . . . .	136
9.9 Les quatre fonctionnalités du front d'onde . . . . .	136
9.9.1 Découverte et tracé des sites . . . . .	136
9.9.2 Suivi des événements sommets Casey . . . . .	139

9.9.3	Suivi des intersections des cercles sites . . . . .	140
9.9.4	Suivi des différentes couches du diagramme de Voronoï . . . . .	145
9.10	Fin de l'algorithme . . . . .	147
9.11	Pseudo-code de l'algorithme . . . . .	148
9.12	Analyse de complexité . . . . .	153
9.12.1	Analyse dans le cas général . . . . .	153
9.12.2	Application à différents cas . . . . .	154
9.13	Images de l'algorithme . . . . .	155
<b>CHAPITRE X</b>		
	<b>APPLICATION À LA GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE . . . . .</b>	158
10.1	Définition du problème . . . . .	158
10.2	Transformation d'un diagramme euclidien en diagramme hyperbolique . . . . .	158
10.3	Interprétation projective et géométrie hyperbolique . . . . .	159
10.4	Choix de l'algorithme à balayage . . . . .	159
10.5	La nature du diagramme de Voronoï obtenu . . . . .	162
10.6	L'isomorphisme des deux graphes . . . . .	162
10.7	Application à la construction de la médiatrice d'un segment . . . . .	166
10.8	La transformation de la DCEL . . . . .	169
10.9	Conclusion . . . . .	169
<b>CHAPITRE XI</b>		
	<b>INTERSECTION DE CÔNES DE RÉVOLUTION À AXES PARALLÈLES . . . . .</b>	172
11.1	Le cercle des quatre points . . . . .	174
11.2	Le balayage auxiliaire . . . . .	178
11.3	Tangente commune à trois cônes . . . . .	180
11.4	Le paramétrage par fonctions elliptiques . . . . .	183
11.4.1	Position relative de deux demi-cônes . . . . .	184
11.4.2	Cône conjugué . . . . .	184
11.4.3	Les quatre cônes du faisceau . . . . .	185
11.4.4	Le changement d'axe . . . . .	187
11.4.5	Le paramétrage elliptique . . . . .	188

11.4.6 Calcul des points d'intersection de trois cônes . . . . .	191
11.4.7 Étude de la courbe paramétrique . . . . .	192
11.4.8 Le calcul des points sextuples . . . . .	195
<b>CHAPITRE XII</b>	
<b>ALGORITHME À BALAYAGE PAR CÔNE DE RÉVOLUTION . . . . .</b>	<b>197</b>
12.1 Le concept de balayage par cône . . . . .	197
12.2 Les deux types de contact . . . . .	199
12.3 Le choix du centre de balayage . . . . .	201
12.4 Le fonctionnement avec deux sites . . . . .	202
12.5 Le fonctionnement avec trois sites . . . . .	209
12.5.1 Domination absolue . . . . .	210
12.5.2 Suite du contact à l'infini . . . . .	210
12.6 Théorèmes pour les événements masqués . . . . .	210
12.6.1 Détermination du masquage d'un événement . . . . .	212
12.6.2 Traitement du masquage d'un événement d'entrée de site . . . . .	213
12.6.3 Événement sommet de type 1-2 . . . . .	215
12.6.4 Traitement du masquage d'un événement sommet . . . . .	218
12.7 Suivi des extrémités des arêtes . . . . .	222
12.8 Entrée et sortie du site majoritaire . . . . .	225
12.9 Composantes connexes . . . . .	225
12.10 Pseudo-code de l'algorithme . . . . .	226
12.11 Analyse de complexité . . . . .	232
12.11.1 Diagramme sans sommet . . . . .	232
12.12 Diagramme de points à pondération multiplicative . . . . .	234
12.13 Images de l'algorithme . . . . .	235
CONCLUSION . . . . .	238
<b>APPENDICE A</b>	
NOTATIONS ET FORMULES . . . . .	239
A.1 Cercles . . . . .	239
A.2 Cônes . . . . .	243

A.2.1 Théorème du balayage auxiliaire . . . . .	243
A.2.2 Rayon de la sphère support . . . . .	245
APPENDICE B	
LISTE DES PARAGRAPHES REPRIS DU MÉMOIRE DE MATRISE . . . . .	246
APPENDICE C	
RÔLE ET RÉALISATION DES FIGURES . . . . .	247
APPENDICE D	
TABLE GRAPHIQUE DES FIGURES . . . . .	254
APPENDICE E	
CODE SOURCE . . . . .	261
RÉFÉRENCES . . . . .	296

## **LISTE DES TABLEAUX**

2.1	Diagrammes de Voronoï de points pondérés . . . . .	43
4.1	Représentation des Diagrammes de Voronoï par des surfaces composites . . . . .	73
7.1	Liste d'arêtes doublement chaînée . . . . .	99

## RÉSUMÉ

Le diagramme de Voronoï d'un ensemble de sites dans le plan est une structure de géométrie discrète qui partage l'espace en différentes régions, une par site, appelées secteurs de Voronoï. Le secteur de Voronoï d'un site est l'ensemble des points du plan qui sont plus proches de ce site que de tout autre. Une arête de Voronoï est l'ensemble des points équidistants d'exactement deux sites et plus proches de ces deux sites que de tout autre. Un sommet de Voronoï est un point équidistant d'au moins trois sites distincts. Une des méthodes les plus efficaces pour calculer ce type de diagramme est celle des algorithmes à balayages, qui consiste à parcourir le plan en suivant une ligne de balayage et à calculer, pas à pas, le diagramme. Chaque pas de calcul est appelé événement et à chaque algorithme correspond une typologie spécifique d'événements : événements sites, événements sommets,...

La première partie de la thèse propose une généralisation de l'interprétation par cônes de révolution d'axes parallèles des diagrammes de Voronoï de points pondérés par soustraction ( $\rho_i - r_i$ ). Cette généralisation s'applique aux diagrammes de points pondérés par multiplication ( $\frac{\rho_i}{s_i}$ ), aux diagrammes de points à pondération composite de la forme ( $\frac{\rho_i - r_i}{s_i}$ ) et même aux diagrammes de Voronoï de cercles avec la distance euclidienne ( $|\rho_i - r_i|$ ) en introduisant une structure particulière appelée *volcan*. L'interprétation par surfaces de révolution est aussi étendue aux diagrammes de Möbius. Enfin on étudie le cas particulier des diagrammes de Voronoï sans sommet dont la complexité en  $\mathcal{O}(n)$  peut être différente de la complexité du même type de diagramme dans le pire cas.

La seconde partie propose une famille d'algorithmes basée sur cette interprétation et qui possède des caractéristiques communes. La première est qu'en plus d'être circulaire, ils utilisent tous un principe de *masquage naturel* qui permet de découvrir progressivement les sites à étudier. La seconde est que le front d'onde qui est le secteur de Voronoï du site de balayage est toujours connexe alors même que le diagramme final ne l'est pas nécessairement. Les bissecteurs qui sont les courbes algébriques équidistantes de deux sites et qui portent les arêtes du diagramme sont de même nature qu'on les prenne entre deux sites fixes ou entre un site fixe et le site de balayage. Enfin, si l'on arrête le calcul à n'importe quelle étape de l'algorithme, on a toujours un résultat exploitable sous la forme d'un diagramme de Voronoï partiel des sites déjà traités et du site de balayage, et lorsque le calcul se termine, le front d'onde et la pile d'événements à traiter disparaissent simultanément.

Les algorithmes traités concernent les diagrammes de points pondérés (repris du mémoire de maîtrise car c'est un sous-ensemble de l'algorithme suivant) et les dia-

grammes de cercle. Un exemple d'application de cet algorithme est donné en utilisant le cas particulier d'un diagramme de points dans un cercle pour développer un algorithme de diagramme de Voronoï de points en géométrie hyperbolique.

Le dernier algorithme de la série concerne les diagrammes de points à pondération composite. Cet algorithme a la particularité d'être développé directement dans  $\mathbb{R}^3$  pour obtenir des résultats dans  $\mathbb{R}^2$  en utilisant les principes de la géométrie descriptive à l'envers. Il y a déjà d'autres algorithmes basés sur une projection de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$ , mais c'est sans doute le premier de ce type qui soit à balayage par cône.

Un chapitre entier de la thèse a dû être consacré à l'étude des propriétés géométriques particulières des intersections de cônes de révolution à axes parallèles et à la méthode pratique de calcul des événements qui utilise exclusivement des fonctions elliptiques. Les résultats obtenus ne sont pas dans la nombreuse littérature consultée, il est néanmoins très difficile d'affirmer à coup sûr qu'ils sont tous originaux puisque les résultats de géométrie classique sont pour la plupart antérieurs aux années 1950 et difficiles à trouver en ligne. À l'inverse le fait que ces résultats soient très liés à la mécanique particulière de l'algorithme plaide pour leur originalité.

Les résultats obtenus avec ces algorithmes ne sont pas toujours optimaux, mais sont satisfaisants dans la mesure où l'on obtient une complexité de  $\mathcal{O}(n^2 \log n)$  pour un optimum de  $\mathcal{O}(n^2)$ . De plus on constate que la complexité de l'algorithme pour cercles en distance euclidienne s'adapte bien à la complexité du diagramme sans sommet, ce qui n'est plus le cas pour les diagrammes de cercles pondérés.

## INTRODUCTION

Le diagramme de Voronoï d'un ensemble de sites dans le plan partage l'espace en une mosaïque de régions, une par site, appelées secteurs de Voronoï. Le secteur de Voronoï d'un site est l'ensemble des points du plan qui sont plus proches de ce site que de tout autre.

Les diagrammes de Voronoï sont des structures de géométrie discrète qui se rencontrent dans beaucoup de domaines d'études, de la sociologie à l'astronomie en passant par la biologie. Cette grande dispersion, ajoutée au fait que dans chacun de ces domaines ils ne sont que des outils, explique sans doute pourquoi les diagrammes de Voronoï ne bénéficient pas de leur domaine d'études propre. La bibliographie reflète cet état des choses puisqu'on n'y trouve qu'un seul livre traitant des diagrammes de Voronoï en tant que sujet unique, c'est le livre de A. Okabe, B. Boots et K. Sugihara "Spatial tessellations : concepts and applications of Voronoï diagrams" (Okabe, 1992). Un excellent article de F. Aurenhammer : "Voronoï diagrams - A survey of a fundamental geometric data structure" de 1991 fait aussi une synthèse globale du sujet (Aurenhammer, 1991).

# CHAPITRE I

## DÉFINITIONS ET RECHERCHES BIBLIOGRAPHIQUES

### 1.1 DÉFINITIONS

La définition la plus élémentaire des diagrammes de Voronoï est basée sur un ensemble  $S$  de  $n$  points de  $\mathbb{R}^2$  appelés *sites* ou générateurs et la distance euclidienne (de Berg, 1997). On définit tout d'abord pour deux sites  $p$  et  $q$  la région de l'espace où  $p$  domine  $q$  comme l'ensemble des points plus proches de  $p$  que de  $q$  :

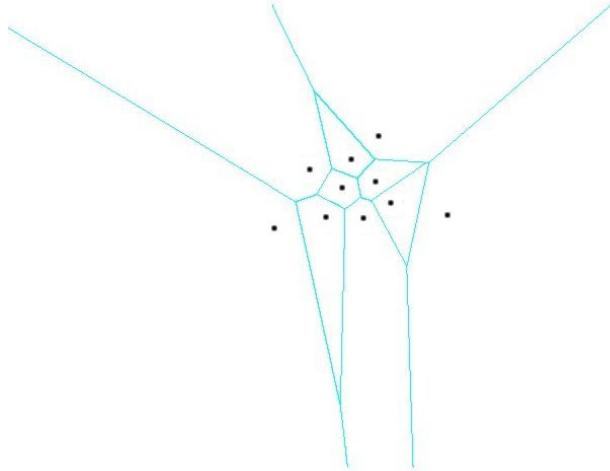
$$\text{dom}(p, q) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, p) < d(x, q)\}. \quad (1.1)$$

Pour  $n$  sites appartenant à l'ensemble  $S$  on définit le *secteur de Voronoï* généré par le site  $p$  comme :  $V(p) = \bigcap_{q \in S \setminus \{p\}} \text{dom}(p, q)$ . Ceci revient à définir  $V(p)$  comme la région du plan dont les points sont plus proches de  $p$  que de n'importe quel autre site  $q$ , c'est-à-dire celle où  $p$ , le site générateur du secteur, domine tous les autres sites.

Pour deux sites on définit aussi le *bissecteur* de  $p$  et  $q$  comme le lieu des points équidistants de  $p$  et  $q$ . Si  $\overline{\text{dom}(p, q)}$  désigne la fermeture de  $\text{dom}(p, q)$ , c'est alors une droite définie par :

$$\mathcal{B}(p, q) = \overline{\text{dom}(p, q)} \cap \overline{\text{dom}(q, p)}.$$

Pour le cas de plusieurs sites, la frontière de  $V(p)$  se note  $\partial(V(p))$ , et on définit l'*arête de*



**Figure 1.1**

Voronoi  $\mathcal{A}(p, q)$  comme la partie de la frontière de  $V(p)$  supportée par le même bisection. Cette arête est donc définie par :  $\mathcal{A}(p, q) = \partial(V(p)) \cap \partial(V(q))$  si  $\partial(V(p)) \cap \partial(V(q))$  est un segment de droite de longueur non nulle. Sinon on se trouve dans le cas de l'intersection de deux arêtes ou plus qui, lorsqu'elle existe, est un point équidistant de trois sites ou plus  $(p, q, r)$  qui s'appelle un *sommet de Voronoï*.

Dans ces conditions, les secteurs de Voronoï, les arêtes et les sommets de Voronoï forment une partition du plan et  $\text{Vor}(S) = \{\overline{V(p)} \mid p \in S\}$  s'appelle le *diagramme de Voronoï* des sites  $S$ .

La figure (Fig. 1.1) montre le type le plus élémentaire de diagramme de Voronoï de sites ponctuels en géométrie euclidienne, mais la diversité des diagrammes de Voronoï est importante, car, partant de la définition précédente, on peut faire de nombreuses variations soit sur le type de distance ou plutôt de mesure utilisé, soit sur l'espace, soit sur le type des sites qui ne sont pas nécessairement ponctuels, soit enfin sur toute combinaison possible de ces paramètres.

Avant de montrer plus précisément ce que sont ces différents diagrammes, donnons un

exemple vraiment pratique : un diagramme de Voronoï peut servir à appliquer la loi du moindre effort à la recherche d'un hamburger n'importe où sur le globe, le produit étant tellement standard qu'il suffit d'aller au vendeur le plus proche. Cela revient donc à construire le diagramme de Voronoï des restaurations rapides du globe et à chercher le site générateur du secteur de Voronoï dans lequel on se trouve. Si l'on est sur l'océan, un diagramme euclidien avec les ports comme sites générateurs suffit, si l'on est à New-York un diagramme réalisé avec la distance de Manhattan  $L_1$  sera bien sûr plus adapté (Lee, 1980). À Moscou, il vaudra mieux utiliser un diagramme réalisé avec l'originale distance de Moscou (Klein, 1988b). Bien entendu, si l'on préfère Burger King à McDonald, on voudra pondérer le diagramme pour tenir compte de cette préférence, ce qui a pour conséquence de déformer les secteurs et les bissecteurs et traduit le fait que l'on est prêt à parcourir une distance un peu plus grande pour aller chez l'un plutôt que chez l'autre. (cf. Aurenhammer, 1984 ou Sharir, 1985).

## 1.2 LES DIAGRAMMES DE VORONOÏ GÉNÉRALISÉS

Comme le montre l'exemple ci-dessus, dès lors que l'on veut traiter un problème de proximité on peut utiliser un diagramme de Voronoï, mais tous les auteurs ont essayé d'adapter ce type de diagramme au problème qu'ils avaient à traiter : accès disque, croissance des arbres, marketing, politique, . . . . Donnons-en quelques exemples tirés de l'abondante bibliographie qui existe sur le sujet.

- Diagramme de Voronoï de lignes : les sites sont formés par des droites, segments de droite, des cercles, des courbes ou des polygones (Lee, 1981). On utilise une distance euclidienne, mais il y a de multiples manières de définir la distance au site.

Les exemples qui suivent ne seront pas abordés ici, mais sont donnés à titre d'indication de la richesse du sujet.

- Diagramme de Voronoï défini avec des distances différentes de la distance euclidienne, comme la métrique de Minkowsky  $L_p$  :  $d_p(M, N) = \sqrt[p]{|n_x - m_x|^p + |n_y - m_y|^p}$  ( $p = 1$  donnant la distance de Manhattan et  $p = 2$  la distance euclidienne) (Lee,

1980).

- Diagramme d'ordre- $k$  : on cherche les points du plan les plus proches non d'un seul site, mais de  $k$  sites parmi  $n$  simultanément. Si  $k = n - 1$  on cherche en fait les points les plus éloignés d'un site donné (Rappaport, 1988 ou Rosenberger, 1991).
- Diagramme de Voronoï abstrait : ce type de diagramme ne se base plus sur la notion de distance mais sur celle de bissecteur et sur le fait qu'il doit partager le plan en deux parties non bornées (Klein, 1989 et Klein, 1990).

Enfin bien des combinaisons de ces différentes variations en dimensions 2, 3 ou  $n$  ont été étudiées du point de vue géométrique, algorithmique ou des deux comme les diagrammes pondérés d'ordre  $k$ .

### 1.3 Propriétés géométriques des diagrammes de points dans $\mathbb{R}^2$

Pour ne pas alourdir le texte, il n'a pas été jugé utile de reprendre en détail toutes les propriétés géométriques bien connues des diagrammes de Voronoï (sur ce sujet, voir de Berg, 1997, chap. 7, p. 146-148 ou Aurenhammer, 1984) mais on rappelle ci-dessous les propriétés géométriques essentielles des diagrammes de Voronoï dans  $\mathbb{R}^2$ .

#### 1.3.1 Bissecteur, arête et sommet

Si l'on considère deux et seulement deux sites, leur bissecteur est le lieu géométrique des points équidistants de ces deux sites. Ce lieu est aussi, trivialement, un sous-ensemble du lieu des centres des cercles tangents aux deux sites. Dans un diagramme de Voronoï généralisé dont les sites seraient des courbes algébriques et avec une distance euclidienne c'est une courbe algébrique d'un degré qui peut être très élevé si l'on considère des sites formés de courbes algébriques de degré deux autres que des cercles. Ainsi entre deux points (courbes de degré 0) le bissecteur est une droite (degré 1), entre un point et une droite c'est une parabole (degré 2), entre deux cercles c'est encore une conique (cf. ch. 3), alors qu'entre deux ellipses, le degré est de vingt-huit ! Les courbes algébriques ayant cette propriété ont été étudiées, dans une optique d'ailleurs très différente, par Chasles

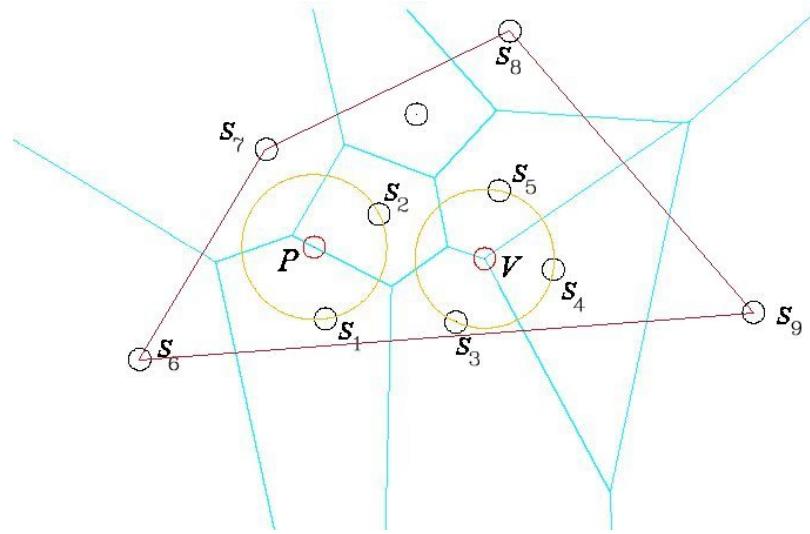
(Chasles, 1875) et beaucoup d'autres. Brocard donne un très bon résumé de ces études et appelle ces courbes des courbes "équidistantes" (Brocard, 1967, T.2, p.137).

En distance euclidienne de nouveau, un point situé sur le bissecteur de deux sites est sur une arête de Voronoï si et seulement si le cercle centré sur ce point et passant par les deux sites ne contient aucun autre site. Les arêtes sont donc portées par les bissecteurs (c'est le cas du cercle centré en  $P$  et passant par les sites  $S_1$  et  $S_2$  sur la figure 1.2)

Un point est un sommet de Voronoï si et seulement s'il est à l'intersection de deux arêtes ou plus. Il est alors le centre d'un cercle, vide de sites, et contenant trois sites ou plus sur sa circonférence ( cercle centré en  $V$  passant par les sites  $S_3$ ,  $S_4$  et  $S_5$  sur la figure 1.2). Si un cercle, vide de sites, a trois sites sur sa circonférence, son centre, équidistant de ces trois sites, est bien à l'intersection de leurs trois bissecteurs. Comme il est vide de sites, c'est qu'il n'y a pas de sites plus proches que ces trois sites, donc c'est un sommet de Voronoï. Réciproquement, si c'est un sommet de Voronoï, il est équidistant de trois sites et si le cercle dont il est le centre et passant par ces trois sites contenait un site à l'intérieur, alors ce site serait plus proche du centre que les trois autres et donc le centre ne serait pas un sommet de Voronoï.

### 1.3.2 Enveloppe convexe

L'*enveloppe convexe* de  $S$  est la frontière de l'intersection de tous les ensembles convexes contenant  $S$ . Si  $V(p)$  est non borné, alors  $p$  est sur l'enveloppe convexe des sites (O'Rourke, 1993, p. 177). Cela se conçoit facilement si l'on regarde le diagramme de points depuis un point très éloigné dans le plan : il y a nécessairement un des points des sites dont il est le plus proche. Si l'on considère un cercle ayant ces deux points comme extrémité d'un diamètre, il doit être vide de sites. Quand le point d'observation s'éloigne à l'infini en gardant la même direction, le cercle se transforme en une droite passant par le site et on voit qu'il ne peut y avoir d'autres sites dans le demi-plan défini par cette droite et le point distant (polygone  $S_6, S_7, S_8, S_9$  sur la figure 1.2). L'intersection de tous ces demi-plans suffit pour obtenir l'enveloppe convexe définie ci-dessus. Notons



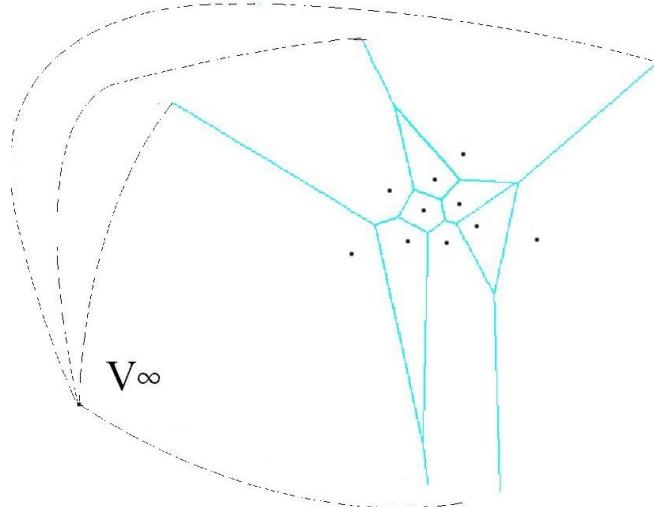
**Figure 1.2**

que cette propriété est donc directement liée au fait que la distance soit euclidienne.

### 1.3.3 Graphe planaire

Aux  $n$  sites pris deux à deux correspondent  $C_n^2$  médiatrices, mais le diagramme de Voronoï est connexe et est en fait presqu'une carte planaire à  $n$  faces. Ce n'est pas une carte planaire à cause des arêtes infinies correspondant aux points situés sur l'enveloppe convexe. Cependant on peut obtenir facilement une carte planaire en rajoutant un point à l'infini au diagramme de Voronoï et en y reliant les arêtes infinies comme le montre la figure (Fig. 1.3). Ce point peut être considéré comme un simple artifice de calcul (de Berg, 1997, p. 147-148) ou, plus rigoureusement, comme le point à l'infini d'un plan complexe étendue (Churchill, 1984, ch. 1, p. 22-23). À ce graphe modifié de  $v + 1$  sommets et  $e$  arêtes on peut alors appliquer la formule d'Euler :  $(v + 1) - e + n = 2$  (ibid.).

Par ailleurs il y a 2 sommets par arête et 3 arêtes ou plus par sommet. On a donc  $2e \geq 3(v + 1)$ . En combinant ces deux équations on obtient les deux formules suivantes :



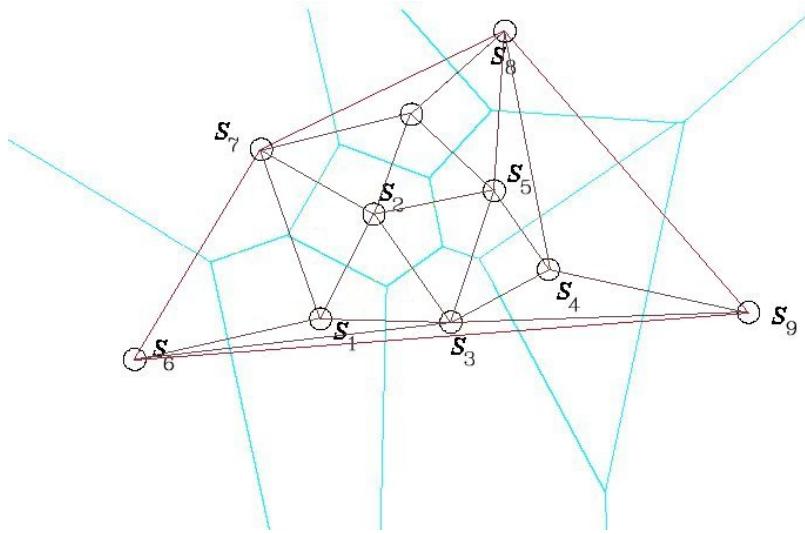
**Figure 1.3**

$$\begin{cases} v \leq 2n - 5 \\ e \leq 3n - 6 \end{cases}$$

On voit ainsi que la borne  $n^2$  pour  $v$  et  $e$  n'est pas stricte puisqu'ils sont asymptotiquement bornés par  $n$ . Remarquons que les auteurs emploient plus souvent l'expression "graphe planaire" que "carte planaire" car cette expression reste valide pour certains diagrammes de Voronoï généralisés qui ne sont pas nécessairement connexes comme c'est le cas pour certains des diagrammes qui seront traités ici.

#### 1.4 Triangulation de Delaunay

Il y a plusieurs définitions possibles de cette triangulation. La plus intéressante ici est celle donnée dans le livre de O'Rourke (O'Rourke, 1993, §5.3 p. 175). On la définit comme une triangulation de l'ensemble des points que forment les sites, telle que le graphe planaire que forme cette triangulation soit le dual du graphe planaire que forme le diagramme de Voronoï (Fig. 1.4). Les deux structures sont donc équivalentes, la connaissance de l'une donnant l'autre. La propriété essentielle de la triangulation de



**Figure 1.4**

Delaunay est celle de maximiser l'angle minimum de la triangulation obtenue. Une autre propriété est que le centre du cercle circonscrit à un triangle d'une triangulation de Delaunay est un sommet de Voronoï et donc il n'y a pas d'autre site dans un tel cercle.

Bien entendu, dès que l'on passe à des diagrammes de Voronoï généralisés, notamment les diagrammes de points pondérés, la notion de dualité entre diagramme de Voronoï et triangulation de Delaunay n'est plus aussi simple. La triangulation peut donner un multigraphe au lieu d'un graphe lorsque deux sites ont plusieurs arêtes en commun. Certains sites peuvent ne pas avoir de secteurs de Voronoï propres (cf. §2.1.2, p. 23). Enfin certains sites peuvent avoir des secteurs de Voronoï non-connexes comme on le verra plus loin (cf. §2, p. 210).

## 1.5 ALGORITHMES DE CONSTRUCTION DES DIAGRAMMES DE VORONOÏ

Comme on le verra plus loin, la construction d'un tel diagramme consiste à remplir une structure de données permettant une description mathématique de ses différents éléments : arêtes, faces et sommets lorsqu'ils existent. Si on se limite à  $\mathbb{R}^2$  trois types d'algorithmes sont utilisés pour la construction de ces diagrammes.

### 1.5.1 Algorithmes incrémentaux

Conceptuellement ce type d'algorithme est le plus simple, mais sa complexité est en  $\mathcal{O}(n^2)$  (Aurenhammer, 2001 §3.2 ou Ohya, 1984) dans le pire des cas. Toutefois en 1983 Ohya (Ibid.) a montré que l'on pouvait en utilisant une entrée aléatoire des données obtenir un résultat dont le temps moyen est en  $\mathcal{O}(n \log n)$ . La méthode consiste à partir d'un diagramme de trois points puis à ajouter les sites un à un en modifiant à chaque fois, de manière incrémentale, le diagramme déjà calculé. On obtient enfin un algorithme de Las Vegas si l'on divise le plan à l'aide d'un arbre de fouille bidimensionnel et que l'on y classe les sites. Ceci permet de choisir comme incrément, c'est-à-dire comme nouveau site, un plus proche voisin sans avoir à tester tous les sites. Si de plus la distribution des points est uniforme, le temps moyen n'est plus qu'en  $\mathcal{O}(n)$

La même méthode est appliquée par le même auteur aux triangulations de Delaunay. L'avantage mentionné par Aurenhammer dans le texte cité plus haut sur les diagrammes de Voronoï (Aurenhammer, 2001, §3.2) est que les sommets de Voronoï intermédiaires (centres des cercles circonscrits aux triangles) n'ont pas besoin d'être mis en mémoire ou même calculés. De plus l'utilisation de la triangulation de Delaunay supprime bien sûr le problème des points à l'infini du diagramme. Le temps moyen est aussi en  $\mathcal{O}(n \log n)$  ce qui est en pratique la méthode la plus rapide.

### 1.5.2 Algorithmes « diviser pour régner »

Shamos a montré que la construction d'un diagramme de Voronoï en dimension 1 était réductible au problème du tri (Shamos, 1975), ce qui donne une borne inférieure de complexité ( $\Omega(n \log n)$ ) pour la construction des diagrammes de Voronoï. Il est aussi l'auteur du premier algorithme en  $\mathcal{O}(n \log n)$ , donc optimal, pour des sites ponctuels dans  $\mathbb{R}^2$  (Shamos, 1975). Cet algorithme est récursif. Les sites sont divisés en deux ensembles approximativement égaux, la construction du diagramme se faisant récursivement sur chacune de ces moitiés. L'algorithme est en  $\mathcal{O}(n \log n)$  parce que, comme Shamos l'a montré, on peut fusionner deux diagrammes de Voronoï en construisant la frontière qui les sépare en temps linéaire.

### 1.5.3 Algorithmes à balayage

Une des méthodes les plus efficaces pour construire ce type de diagrammes est celle des algorithmes à balayage, qui consiste à parcourir le plan en suivant une ligne de balayage et à calculer, pas à pas, le diagramme. Chaque pas de calcul est appelé *événement* et à chaque algorithme correspond une typologie spécifique d'événements : événements-sites, événements-sommets, ..., qui seront définis plus loin. Le premier algorithme optimal et non-récursif pour la construction des diagrammes de Voronoï est à balayage. Il est dû à Fortune (Fortune, 1987). Au cours du temps il a fait l'objet de différentes variations, interprétations et améliorations. On peut distinguer trois étapes essentielles.

La difficulté de construire un algorithme à balayage par droite pour la construction d'un diagramme de Voronoï vient du fait que lors d'un balayage on a besoin de connaître à l'avance les positions où doit s'arrêter la droite de balayage (appelées événements). Or, comme on l'a vu plus haut ("plus grand cercle vide"), étant donné qu'un sommet de Voronoï se trouve entre trois sites, un balayage classique ne permettrait pas à la droite de trouver le sommet sans être auparavant passée par les trois sites ce qui l'obligerait à revenir en arrière. Pour régler le problème, Fortune, dans une étape initiale en 1987, a donc imaginé une transformation ponctuelle du diagramme de Voronoï dont le but est

de permettre la découverte d'un sommet après les sites auxquels il correspond, mais sa méthode obscurcit un peu la nature géométrique du problème. Dès la publication de son article en 1988, il indique qu'Edelsbrunner lui a suggéré une interprétation géométrique plus facile à appréhender qu'une transformation ponctuelle. Cette interprétation consiste à présenter l'algorithme comme un balayage par des plans inclinés à  $45^\circ$  sur l'horizontal de cônes équilatères d'axes verticaux représentant les sites.

C'est cette présentation, basée sur un article de Guibas et Stolfi (Guibas, 1988), qui se trouve maintenant dans les livres et cours de géométrie algorithmique comme le livre Computational Geometry de de Berg et al. (de Berg, 1997, chap.7). La courbe sur laquelle se trouvent les sommets est appelée la *rive* ("beach line"). Cette interprétation a aussi été utilisée par H. Rosenberger pour calculer un diagramme de Voronoï d'ordre- $k$  pour des sites ponctuels pondérés par addition : "Order- $k$  Voronoï diagrams of sites with additive weights in the plane" (Rosenberger, 1991).

Enfin en 1997 Frank Dehne et Rolf Klein ont publié l'article déjà cité : « "The big sweep" : on the power of the wavefront approach to Voronoï diagrams » (Dehne, 1997). Leur interprétation de l'algorithme est cette fois toute différente puisqu'elle montre qu'on peut éviter les transformations un peu lourdes comme celle de Fortune ou l'interprétation géométrique dans  $\mathbb{R}^3$  en considérant la courbe de balayage comme un des sites du diagramme de Voronoï. On utilise pour ce faire la notion de diagramme de Voronoï de lignes définie précédemment. Bien entendu, les sites ne sont plus alors très homogènes puisque dans le cas de référence du diagramme de Voronoï de points dans un plan euclidien, on ne traite plus seulement un diagramme de  $n$  points, mais des diagrammes de Voronoï généralisés de  $p$  points plus une ligne droite,  $p$  croissant de 1 à  $n$ . Dans cette interprétation la "rive" devient le "front d'onde" et est surtout la frontière  $\partial(V(\Gamma))$  du secteur de Voronoï de la courbe de balayage  $\Gamma$ . C'est cette interprétation, de loin la plus riche, qui sera suivie dans ce texte comme dans le précédent (Pavillet, 2000). (Sur la figure (Fig. 1.5) chaque couleur correspond au secteur de Voronoï de l'un des trois sites  $\mathcal{S}, \mathcal{S}', \Gamma$  pour le demi-plan situé à gauche de la droite  $\Gamma$ ).

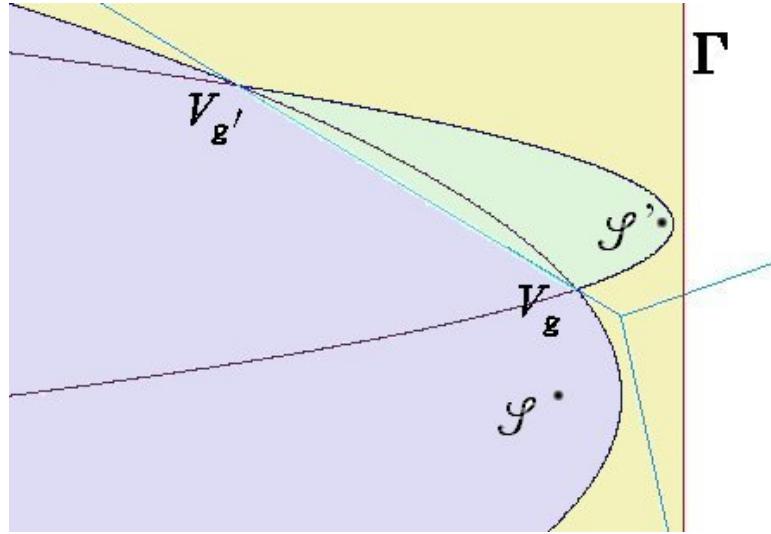


Figure 1.5

## 1.6 L'USAGE DES CERCLES DANS LES DIAGRAMMES DE VORONOÏ

L'idée de traiter des diagrammes de Voronoï dont les sites sont ou des cercles ou assimilables à des cercles avec un algorithme lui-même à base de cercles vient de la lecture de deux articles déjà cités, le premier (Fortune, 1987) étant la référence des algorithmes optimaux à balayage pour diagrammes de Voronoï de Fortune. Cet article traite dans sa dernière partie des diagrammes de Voronoï de points pondérés par addition, la pondération pouvant se représenter comme le rayon d'un cercle centré sur le point pondéré. L'autre article est celui de F. Dehne et R. Klein : « The big sweep ... » (Dehne, 1997), qui suggère dans sa conclusion que la puissance des algorithmes à balayage est telle qu'une des généralisations intéressantes serait de faire un balayage à base de cercles et non plus à base de droites ou de plans.

### 1.6.1 Les diagrammes à base de cercles

Ces diagrammes de Voronoï font, implicitement ou non, intervenir des cercles. Le cercle peut intervenir de deux manières : soit comme site, soit comme bissecteur de 2 sites. Lorsqu'il intervient comme site, c'est dans le cadre d'un diagramme de Voronoï généralisé, suivant en cela la définition qu'en ont donnée pour des segments de droites et des cercles Lee et Drysdale en 1981 : « Generalization of Voronoï diagrams in the plane » (Lee, 1981). Il est à noter que cette généralisation concerne des objets disjoints.

Implicitement les cercles interviennent dans les diagrammes pondérés. En effet, les diagrammes de Voronoï ponctuels peuvent être pondérés pour tenir compte de l'importance des sites les uns par rapport aux autres. Le choix des pondérations possibles est vaste : additives ou soustractives, multiplicatives ou une combinaison des deux (Okabe, 1992). L'une des particularités des études faites est que chaque auteur a utilisé une pondération différente. Sharir (« Intersection and closest pair problem for a set of planar discs » Sharir, 1985) a étudié des diagrammes de Voronoï généralisés dans lesquels les sites sont des points pondérés par soustraction. Ces sites peuvent alors se représenter par des cercles. Il n'exclut pas l'intersection ou l'inclusion de cercles et son algorithme récursif a une complexité de  $\mathcal{O}(n \log^2 n)$ . Comme indiqué ci-dessus, les diagrammes pondérés par addition sont traités par Fortune dans son article de 1987 (Fortune, 1987) comme une extension de son algorithme à balayage par droite à des sites représentés par des cercles. Avec cet algorithme à balayage, le calcul est cette fois optimal en  $\mathcal{O}(n \log n)$ .

On peut citer un dernier cas, celui de la géométrie de Laguerre (Imai, 1985) dans laquelle les points de  $\mathbb{R}^3$ , munis de la distance  $d(P, Q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 - (z_p - z_q)^2}$  sont représentés par des cercles de  $\mathbb{R}^2$ , la distance entre deux points étant la longueur du segment de tangente commune aux deux cercles qui les représente. Les bissecteurs sont alors les axes radicaux des deux cercles puisque la distance d'un point à un cercle peut aussi être considérée comme la puissance de ce point par rapport au cercle, propriété qui a de plus l'avantage d'être plus générale que la tangente commune pour le cas où le point serait à l'intérieur du cercle. On appelle aussi ces diagrammes de Voronoï

des *diagrammes de puissance*. Ils ont été particulièrement étudiés par Aurenhammer (Aurenhammer, 1987), mais le premier algorithme optimal a été publié par Imai et al. dans l'article « Voronoï diagram in the Laguerre geometry and its applications » (Imai, 1985). Leur algorithme est récursif.

Les cercles interviennent comme bissecteurs dans un seul cas, celui des sites ponctuels pondérés par multiplication et traités par F. Aurenhammer dans l'article : « An optimal algorithm for constructing the weighted Voronoï diagram in the plane » (Aurenhammer, 1984). Le bissecteur est alors le cercle d'Apollonius qui partage le segment joignant deux sites dans le rapport des pondérations. Si l'algorithme est optimal, il faut préciser par contre que dans ce cas la complexité intrinsèque du diagramme de Voronoï est en  $\mathcal{O}(n^2)$ . La complexité de l'algorithme s'en suit.

Plus récemment, Boissonnat (Boissonnat, 2003) a donné une généralisation commune de ces deux derniers types de diagrammes, les diagrammes de Möbius. Ils sont basés sur une double pondération, la distance d'un point  $M$ , d'abscisse  $(x)$  à un site  $Q_i$ , d'abscisse  $(q_i)$ , étant donné par  $d(M, Q_i) = \lambda_i(x - q_i)^2 - \mu_i$ . Comme cas particuliers, ils admettent les diagrammes de puissance (si tous les  $\lambda_i$  sont égaux) et les diagrammes à pondération multiplicative (si tous les  $\mu_i$  sont égaux et tous les  $\lambda_i$  positifs). Boissonnat montre que les diagrammes de Möbius dans  $\mathbb{R}^{d-1}$  sont équivalents, dans  $\mathbb{R}^d$ , tant aux diagrammes de points pondérés additivement (par inversion) qu'aux diagrammes de puissance (en relevant les sites sur un paraboloïde de révolution).

En ce qui concerne les diagrammes de Voronoï stricto-sensu, il n'y a pas, semble-t-il, de cas répertorié dans la littérature où l'on ait à la fois des cercles qui interviennent comme bissecteurs et comme sites. Toutefois si l'on considère les diagrammes de Möbius dans  $\mathbb{R}^2$  définis ci-dessus, on va voir au chapitre 4 que l'on peut les considérer comme des diagrammes de Voronoï de cercles utilisant une distance tangentielle pondérée multiplicativement dont les bissecteurs sont des cercles.

### 1.6.2 Les algorithmes à base de cercles

La première référence trouvée dans la littérature (un “extended abstract”) sur le sujet, des mêmes auteurs que l’article sur le “big sweep” est de F. Dehne et R. Klein. L’article de 1988 s’intitule : « A sweepcircle algorithm for Voronoï diagrams » (Dehne, 1988). Il ne s’agit que d’un résumé étendu, l’article ne comporte pas vraiment de démonstration et fait référence à des notes non publiées. Il traite d’un autre cas particulier de diagramme de Voronoï, les diagrammes de Voronoï de points sur la surface d’un cône. De leur analyse il ressort que le balayage par ce moyen permet de traiter les diagrammes de Voronoï ponctuels sur la surface d’un cône dans un temps optimal malgré les difficultés dues au recollement des régions de Voronoï qui sont coupées en deux lorsque l’on développe le cône sur le plan. Il ressort aussi de la lecture de l’article que le principe choisi de balayage par cercle correspond au principe suivi par Fortune dans son algorithme initial, avec une transformation des bissecteurs (l’article est contemporain de celui de Fortune et précède de dix ans leur article sur le “big sweep”). Enfin, le fait que les mêmes auteurs, plusieurs années après, en 1997, mentionnent comme une voie de recherche intéressante le balayage par cercle laisse penser qu’il n’y a pas eu entre temps de grands développements sur le sujet, y compris par eux-mêmes. Pourtant deux références, datant de 1997 et 1998, et concernant des algorithmes à balayage par cercle pour construire des triangulations de Delaunay (Okabe, 1992, ch. 2, p. 72) pour des sites ponctuels ont été trouvées, elles sont ajoutées dans les références à cause de leur pertinence pour le sujet (Adam, 1997 et Adam, 1998). Étant donné la dualité entre le diagramme de Voronoï et la triangulation de Delaunay, l’algorithme proposé par ces auteurs est très similaire à celui proposé ici pour les cercles, à ceci près que, d’une part, il ne traite que de sites ponctuels, c’est-à-dire des cercles de rayons nuls, ce qui en réduit l’intérêt pour les diagrammes de Voronoï de cercles. D’autre part, il ne pourrait de toutes façons pas être utilisé comme un algorithme pour le calcul de diagrammes de Voronoï faute de permettre le traitement des éléments à l’infini du diagramme.

### 1.6.3 Le balayage par cercles

Dans ce balayage il s'agit évidemment de remplacer la ligne ou le plan de balayage par un cercle (éventuellement une sphère ou un cône si l'on utilise une interprétation dans  $\mathbb{R}^3$ ). Il se base sur les idées de F. Dehne et R. Klein de 1997 (Dehne, 1997, §1 p. 19-20) et donc le cercle de balayage est considéré comme un site supplémentaire. De cette remarque découle l'intérêt de traiter les diagrammes de Voronoï à base de cercles avec des cercles : dans ce cas, comme l'on balaye avec des objets de même nature que les objets que l'on veut traiter, on peut penser d'une part que l'on arrivera plus facilement au résultat, d'autre part qu'au niveau de la programmation on aura une "économie d'échelle" due à l'homogénéité des objets.

Même s'il s'agit d'un espace euclidien, la mesure choisie n'est pas nécessairement la distance euclidienne mais, si tel n'est pas le cas, elle doit en être suffisamment proche pour que l'on puisse s'y rapporter. C'est le cas des distances  $\delta(M, C_i) = \frac{1}{s_i}(d(M, C_i) \pm r_i)$  (points à pondération composite). La distance

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 - (z_p - z_q)^2}$$

même lorsqu'on la rapporte à la géométrie de Laguerre, ne peut être traitée de la même manière.

## 1.7 Présentation du document

Après cette présentation générale, la première partie du document traite des aspects géométriques des diagrammes de Voronoï. Ainsi, le second chapitre donne une interprétation géométrique par des cônes de révolution d'axe parallèle dans  $\mathbb{R}^3$ , interprétation valable pour tous les diagrammes de Voronoï de points pondérés et qui généralise celle par des cônes équilatères qui est déjà connue. L'intérêt de ce point de vue est qu'alors que ces diagrammes paraissent au départ de nature très différente puisque les bissecteurs vont du premier degré (diagramme de points non pondérés (Fig. 1.1)) au quatrième de-

gré (diagramme de points à pondération composite) on définit un modèle unique valable pour tous les types de site et une méthode de mesure de la proximité basée sur la distance euclidienne habituelle ; ceci simplifie l'exposition des propriétés communes des différents algorithmes. Le chapitre suivant étudie les propriétés géométriques particulières des diagrammes de cercles en distance euclidienne et étend à ces diagrammes l'interprétation par cônes ; il introduit aussi les diagrammes de Voronoï en géométrie hyperbolique qui leurs sont très liés. On généralise enfin la représentation par surface composite des diagrammes de Voronoï aux diagrammes de Möbius dans le chapitre quatre. Au chapitre cinq on introduit une généralisation des diagrammes de Voronoï de points ou de cercles qui consiste à plonger un diagramme de Voronoï dans un plan projectif. Ce chapitre reprend une partie de ce qui a été fait dans le mémoire de maîtrise dont ce travail est la continuation. Cette partie a néanmoins été substantiellement modifiée pour introduire une notion de distance permettant non seulement le plongement des diagrammes de points, mais encore celui des diagrammes de cercles. Le sixième chapitre étudie la structure particulière des diagrammes de Voronoï sans sommet et montre que cette structure mérite une étude particulière lorsque la complexité intrinsèque du diagramme est en  $\mathcal{O}(n^2)$ .

Les deux chapitres suivants, sept et huit, qui débutent la partie algorithmique, ne font pas vraiment partie de la thèse, mais en accord avec le Directeur de recherche il a paru nécessaire d'inclure un résumé des éléments pertinents du mémoire de maîtrise (Pavillet, 2000). Le document est ainsi auto-suffisant et devrait, en évitant le recours permanent à un autre document, être plus facile à lire tout en étant plus cohérent. En tout état de cause le CD-ROM qui accompagne le document et en fait intégralement partie comprend le texte intégral du mémoire de maîtrise et un appendice particulier indique les parties qui en ont été reprises. Le chapitre sept comprend donc les définitions et les théorèmes généraux qui sont réutilisés dans la thèse. Le huitième chapitre donne le fonctionnement de l'algorithme en contraction pour les points pondérés par soustraction ; notons que l'interprétation en balayage par cône est postérieure à sa rédaction et fait donc l'objet d'un paragraphe additionnel. Cet algorithme est une composante essentielle de l'algo-

rithme pour la construction des diagrammes de cercles avec une distance euclidienne exposé au chapitre huit. Le chapitre suivant donne une application très simple de cet algorithme au diagramme de Voronoï de points en géométrie hyperbolique. Sans être encore un algorithme tout à fait natif, l'intérêt de cette application est de donner un algorithme plus “naturel” pour la géométrie hyperbolique que l'algorithme adapté de l'algorithme classique donné par Boissonnat dans (Boissonnat, 1996) puisqu'il n'utilise pas de points ultra-idéaux.

Le onzième chapitre est un chapitre de géométrie dans l'espace qui est nécessaire à la justification de l'algorithme à balayage par cône présenté dans le dernier chapitre, cette géométrie est évidemment classique mais reste toujours passionnante. L'algorithme qui suit, lui, est le plus nouveau et le plus particulier de la famille. Il présente les spécificités suivantes : le balayage s'effectue dans  $\mathbb{R}^3$ , il est réellement tridimensionnel, et l'on obtient les résultats dans  $\mathbb{R}^2$ . D'une certaine manière c'est de la géométrie descriptive à l'envers et d'ailleurs les démonstrations utilisées pour gérer certains types d'événements en sont directement issues. Une autre particularité de cet algorithme est l'utilisation des fonctions elliptiques pour le calcul des événements. Au départ cette méthode a été choisie plus par curiosité que par nécessité : il n'y a pas de justification particulière à l'usage des fonctions elliptiques pour calculer les points d'intersection de trois cônes. À l'arrivée il n'est pas certain qu'une autre solution aurait donné des résultats nettement meilleurs, la combinaison de l'usage des fonctions elliptiques et du théorème sur le balayage auxiliaire donné dans le chapitre précédent non seulement simplifie grandement le calcul d'un des types d'événement mais encore donne une solution très simple pour résoudre un problème de détermination de l'arête du diagramme pendant le déroulement de l'algorithme.

Malgré ses particularités cet algorithme, comme tous les algorithmes de la famille, retient les principes qui ont servi de base à leur élaboration :

- outre le fait d'être circulaire, il utilise aussi le principe du *masquage naturel* qui sera défini au quatrième chapitre.
- le front d'onde est connexe.

- il retient le fait que même pendant les étapes intermédiaire de l'algorithme on dispose d'un diagramme de Voronoï partiel mais exact.
- il se termine comme les autres par disparition *simultanée* du front d'onde et de la pile d'événements à traiter.
- enfin les bissecteurs site-site et site-courbe de balayage sont de même nature.

On trouve dans le premier appendice certains calculs non essentiels de manière à ne pas ralentir l'exposé des solutions.

Comme on le verra, les figures jouent un rôle essentiel dans cette thèse. Leurs rôles et la manière dont elles ont été réalisées sont expliquées dans le second appendice. Celui-ci est suivi par une table graphique des figures qui permet de retrouver facilement une figure dans le texte.

La partie originale du dernier algorithme, c'est-à-dire le calcul et la gestion des événements a été programmée et le code source en est donné dans le dernier des appendices. Ce code n'a pas été écrit après le développement de l'algorithme pour le vérifier mais pendant son développement pour en permettre la mise au point. Sa forme finale n'est donc pas celle qu'il aurait s'il n'avait été écrit que dans un but de vérification puisqu'il a été modifié de nombreuses fois. Il a été testé sur de nombreuses configurations ne serait-ce que parce que chaque pas de calcul est une configuration différente mais puisque c'est un programme on ne peut bien sûr affirmer avec une totale certitude qu'il est sans bogue. Même sous cette forme et malgré ces réserves il permet cependant de valider expérimentalement les différents théorèmes et les méthodes de calcul donnés dans les chapitres dix et onze. Pour limiter le sujet, le choix a été fait de ne pas aborder les problèmes de robustesse posés par l'algorithme, même s'il a fallu en traiter certains aspects lors de la programmation. Les résultats numériques n'ont pas été imprimés mais les 246 pages de résultats intermédiaires qui peuvent être obtenus à partir d'un jeu d'essai de 16 cônes (tous les cas y sont traités) sont donnés sur un fichier contenu sur le CD-ROM (algobacon.pdf). Ils pourront être utilisés pour mettre au point ou vérifier une nouvelle version de ce logiciel.

## PARTIE I

# Diagrammes de Voronoï de points ou de cercles pondérés

## CHAPITRE II

### LES DIAGRAMMES DE VORONOÏ DE POINTS PONDÉRÉS

Le but de ce chapitre est de donner les principales propriétés géométriques des diagrammes de Voronoï à base de cercles que nous allons considérer mais on insistera surtout sur les propriétés qui leur sont communes ou en tout cas semblables et que l'on va pouvoir utiliser pour leur calcul avec des algorithmes à balayages. On commencera par les diagrammes de points pondérés en rappelant que pour un diagramme de Voronoï de points non pondérés dans le plan euclidien, le bissecteur entre deux sites  $F_1$  et  $F_2$ , la médiatrice du segment  $F_1F_2$ , a pour équation en coordonnées bipolaires, pôles  $F_1$  et  $F_2$  :  $\rho_1 = \rho_2$  si le point courant est  $M$  avec  $d(M, F_i) = \rho_i$ .

#### 2.1 LES DIAGRAMMES DE POINTS PONDÉRÉS PAR SOUSTRACTION

Ces diagrammes sont étudiés en détail dans un article de Sharir (Sharir, 1985).

##### 2.1.1 Bissecteurs

Les pondérations additives algébriques se présentent sous la forme d'une quantité  $r_i \geq 0$  dépendant du site  $F_i$  ajoutée ou retranchée à la distance entre le site et le point courant.  $\delta(M, F_i) = d(M, F_i) \pm r_i$ ,  $r_i > 0$  (Si les  $r_i$  sont de signes différents on se ramène à l'un ou l'autre des deux cas par décalage des pondérations du maximum ou minimum des  $r_i$ ). La distance euclidienne  $d(x, y)$  est alors transformée en une pseudo-distance  $\delta(x, y)$

(qui peut être négative). Mais dans ce cas on voit que cette pseudo-distance entre un point  $M$ , extérieur au cercle, et le site ponctuel  $F_i$  peut être remplacée par la distance euclidienne entre ce point  $M$  et une circonférence  $\mathcal{C}_i$  de centre  $F_i$  et de rayon  $r_i$  (à l'intérieur, le signe change) : on passe donc d'un diagramme de points pondérés à un diagramme de Voronoï généralisé de ligne puisque  $\delta(M, F_i)$  représente une distance euclidienne "algébrique" du point  $M$  à la circonférence  $\mathcal{C}_i$ . Dans ces conditions on voit que le bissecteur de deux sites circulaires est une branche d'hyperbole de foyers  $F_1$  et  $F_2$ , lieu des points dont la différence des distances à ces deux points fixes est constante. Les bissecteurs, définis par  $d(MT_1) = d(MT_2)$ , en sont des branches d'hyperboles données par (Fig. 2.1) :  $d(MF_1) - d(MF_2) = (d(MT_1) + r_1) - (d(MT_2) + r_2) = r_1 - r_2$ . Pour préparer la suite, mentionnons qu'il est assez facile de séparer le bissecteur de l'autre branche de l'hyperbole grâce à cette équation en coordonnées bipolaires. En effet si l'équation de l'hyperbole complète en axes orthonormés est :  $x^2 - y^2 = \frac{(r_1 - r_2 - d)^2}{4}$  (en posant  $d(F_1F_2) = d$ ), l'équation de la branche qui représente le bissecteur, et elle seule, est bien :  $d(MF_1) - d(MF_2) = r_1 - r_2$  qu'on écrira pour la suite :  $\rho_1 - r_1 = \rho_2 - r_2$ . Bien sûr, elle est aussi le lieu des centres des cercles tangents extérieurement à deux cercles donnés,  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_j$ . On la désigne par  $\mathcal{H}_{\mathcal{C}_i\mathcal{C}_j}$  :

$$\delta(M, F_i) = \delta(M, F_j) \equiv d(M, F_i) + r_i = d(M, F_j) + r_j \implies d(M, F_i) - d(M, F_j) = r_j - r_i. \quad (2.1)$$

### 2.1.2 Domination

Une particularité importante de ce type de diagramme est que certains sites peuvent avoir un secteur de Voronoï nul lorsque l'un des cercles sites est inclus dans l'autre. On dit alors que l'un des sites domine l'autre :

$$\mathcal{C}_j \subset \mathcal{C}_i \iff d(F_i, F_j) + r_j < r_i$$

donc :

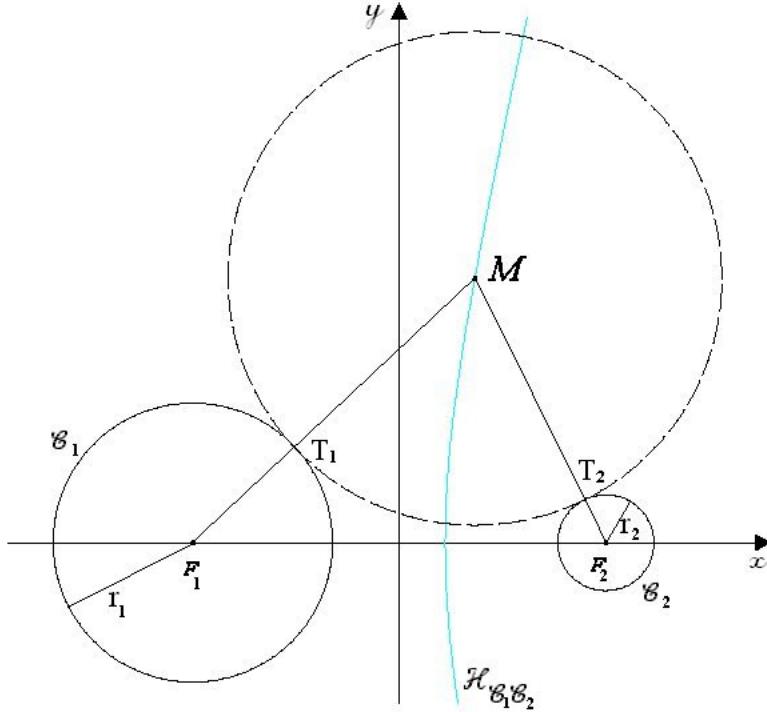


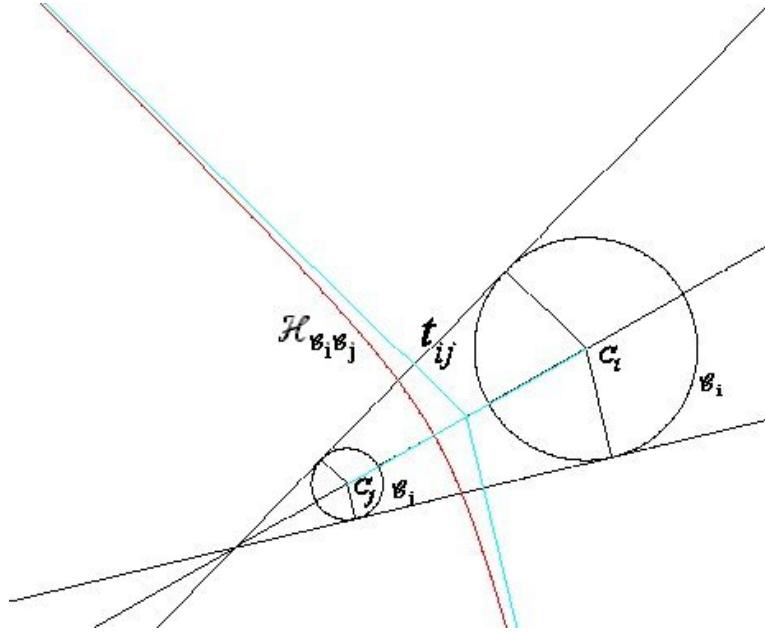
Figure 2.1

$$\delta(M, F_i) = d(M, F_i) - r_i \leq d(M, F_j) + d(F_j, F_i) - r_i < d(M, F_j) - r_j = \delta(M, F_j) \quad \forall M.$$

Ainsi sur la figure 2.3 le site  $\mathcal{C}_3$  est dominé par le site  $\mathcal{C}_1$ .

### 2.1.3 Connexité

Une autre propriété géométrique de ce diagramme (Fig. 2.2) est que le bissecteur, lorsqu'il existe, a une asymptote perpendiculaire au segment de tangente commune  $t_{ij}$  aux deux cercles qui représentent les sites (ce qui donne une justification géométrique à la remarque précédente). Ceci parce que le point à l'infini de l'hyperbole  $\mathcal{H}_{\mathcal{C}_i \mathcal{C}_j}$  est la position limite du centre d'une circonférence  $(t_{ij})$  de rayon infini tangent à  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_j$ . Enfin, la dernière propriété démontrée par Sharir est le fait que le diagramme de Voronoï correspondant n'est pas nécessairement connexe, mais que toute partie connexe du



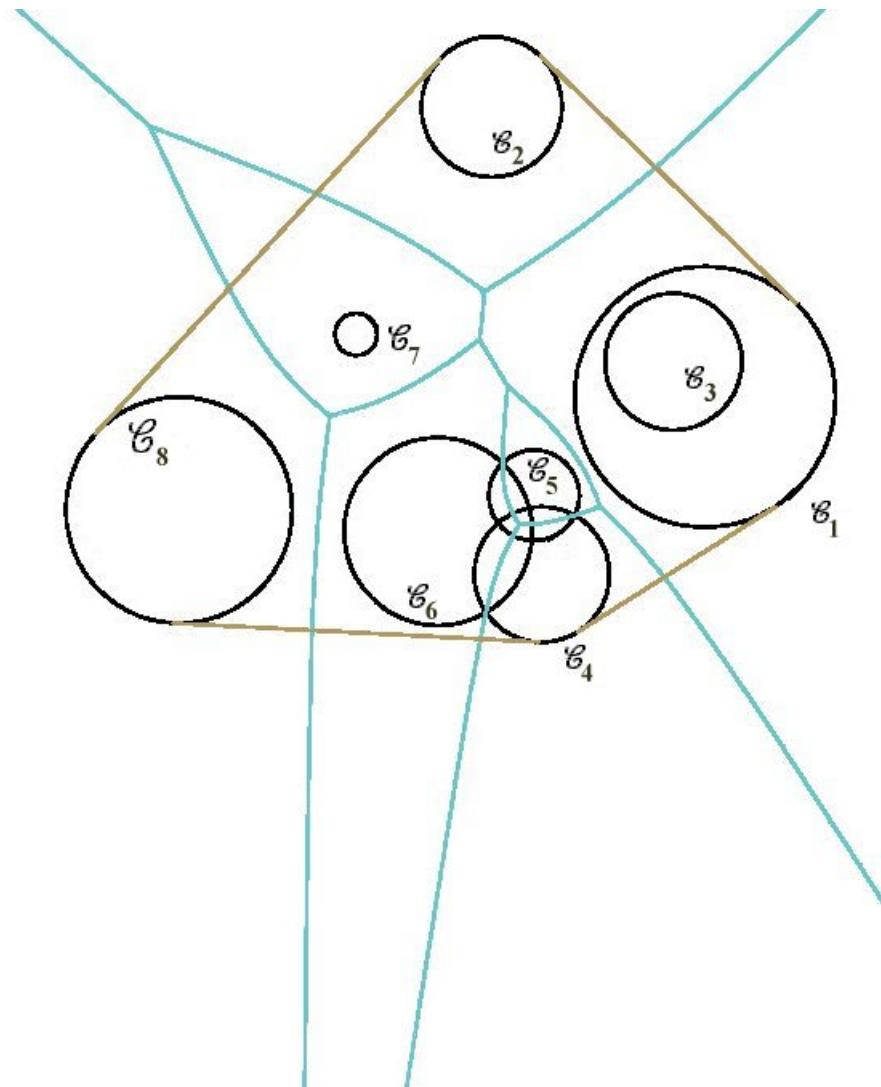
**Figure 2.2**

diagramme est non bornée (Fig. 2.3 : connexe, Fig. 2.4 : non-connexe) (Sharir, 1985, p. 455).

#### 2.1.4 Pondération

Notons que dans tous les cas qui suivent, la pondération adoptée est telle qu'à pondération plus élevée corresponde un secteur de Voronoï plus important. Même si l'on peut faire le contraire, voire varier la géométrie des diagrammes en fonction du cas choisi, c'est un choix plus logique a priori et qui rend les contrôles visuels beaucoup plus faciles. Ici le choix a été fait de pondérer par soustraction parce que d'une part le cercle de plus grand diamètre a le plus grand secteur de Voronoï, c'est-à-dire que la concavité de la branche d'hyperbole est tournée vers le point ayant la plus basse pondération, ce qui est le choix le plus naturel. Entre addition et soustraction on obtient un résultat de même nature à un changement de variable près, dès lors que l'on retranche à tous les sites une quantité constante égale ou supérieure à  $\max\{r_i, i = 1, \dots, n\}$  ceci pour assurer que

les pondérations restent toutes de même signe. Enfin, comme on le verra au chapitre 3, avec ce choix les diagrammes coïncident partiellement, c'est-à-dire à l'extérieur de tous les cercles, avec les diagrammes de Voronoï de cercles.



**Figure 2.3**

### 2.1.5 Interprétation par cônes

Il est utile de rappeler ici que dans l'article de Fortune, il est donné une interprétation géométrique dans  $\mathbb{R}^3$  de ce diagramme en le considérant comme la projection sur le plan horizontal de l'enveloppe inférieure de la surface formée par l'intersection de demi-cônes de révolution, tous équilatères, d'axes verticaux situés au dessus du plan horizontal contenant les sites, la pondération correspondant à la hauteur du sommet.

Si au lieu du point de vue des points pondérés, on prend celui des cercles avec une distance algébrique, on peut faire l'interprétation inverse, d'un cône dirigé vers le bas qui a pour intersection avec le plan horizontal un cercle égal au site considéré. Dans cette interprétation, le centre du cercle correspond au sommet du cône, l'intérieur du site à la partie du cône située au dessus du plan horizontal, l'extérieur du cône correspond donc à la partie inférieure. Le diagramme de Voronoï est alors l'enveloppe supérieure de cette forêt de cônes ou bien en terme de géométrie descriptive c'est la *ponctuation de sa projection horizontale* (Cagnac, 1949, §15, p. 33). C'est ce point de vue qui sera considéré dans toute la suite. Avec cette interprétation géométrique, la notion de domination se traduit simplement par l'inclusion d'un demi-cône dans un autre.

### 2.1.6 Interprétation par cycles

A partir du moment où l'on parle d'interprétation par cône, il faut voir que c'est un abus de langage car il s'agit en fait de demi-cône. Or il existe une bijection très intéressante entre les demi-cônes équilatères et les cycles en géométrie de Laguerre (pour un travail récent sur ce sujet, voir Pottmann, 2001, p. 366-374). On peut donc considérer les sites ponctuels pondérés comme des cycles orientés, tous dans le même sens en fonction de la pondération choisie. Cette interprétation n'apporte rien de nouveau au point de vue algorithmique, mais elle aurait deux avantages : le premier serait de permettre de garder une notion de distance strictement euclidienne puisque la distance au cycle est comptée sur la normale orientée à ce cycle, le second serait de permettre une généralisation à des pondérations de signe variable. Sans développer plus ce sujet, on verra plus loin qu'il

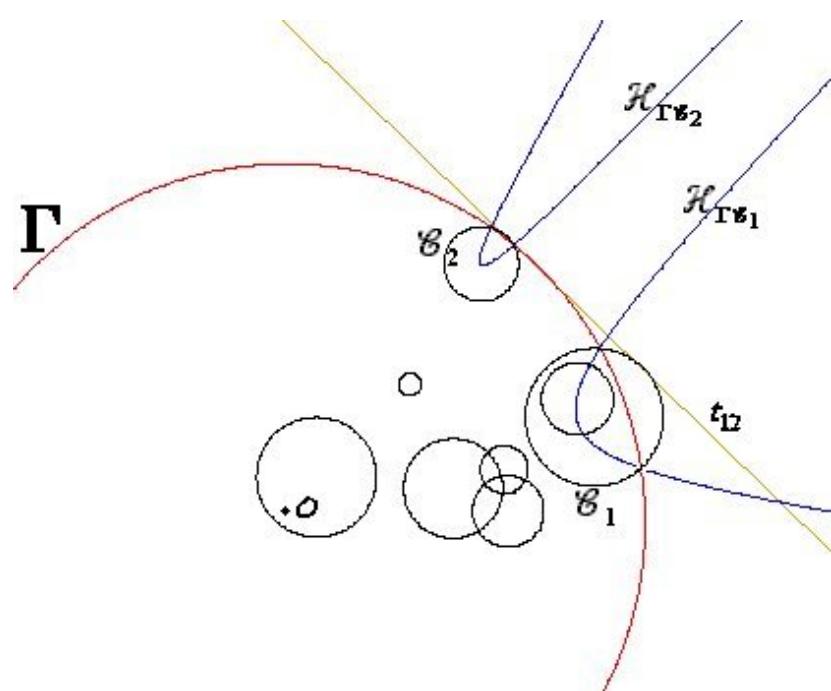


Figure 2.4

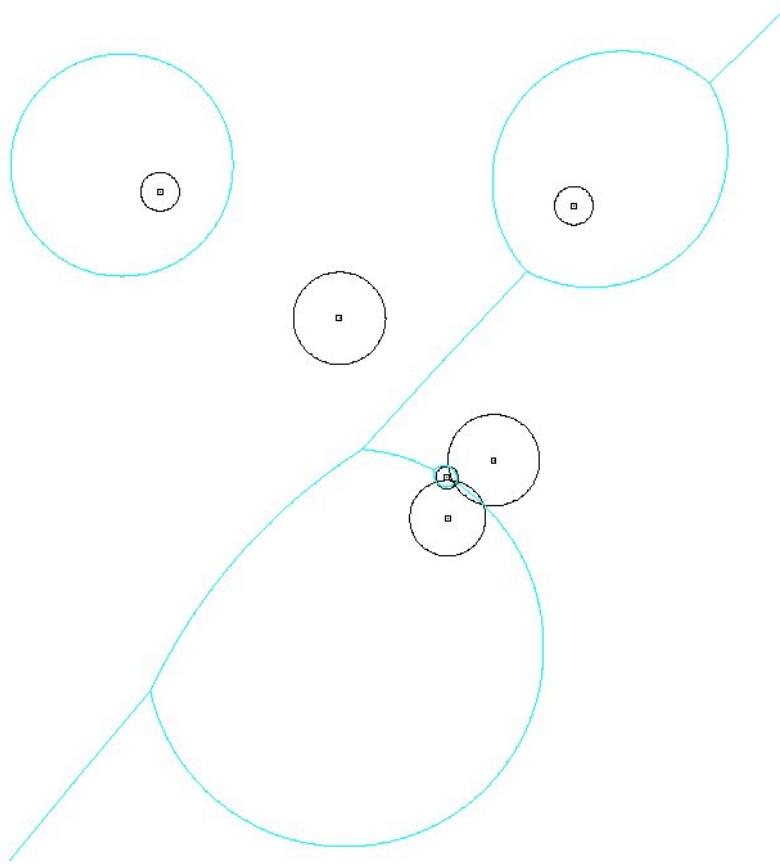
est plus lié à celui des diagrammes de Voronoï de cercles qu'à celui des diagrammes de points.

## 2.2 LES DIAGRAMMES DE POINTS À PONDÉRATION MULTPLICATIVE

Ces diagrammes ont été étudiés par Aurenhammer dans son article « An optimal algorithm for constructing the weighted Voronoï diagram in the plane » (Aurenhammer, 1987) ; ils correspondent, pour deux points  $F_1$  et  $F_2$ , à une pondération du type  $\frac{\rho_1}{s_1} = \frac{\rho_2}{s_2}$  ( $s_i > 0$  est la pondération du site  $F_i$ , à comparer avec la pondération soustractive  $\rho_1 - r_1 = \rho_2 - r_2$ ). Le bissecteur dans ce cas est le cercle d'Apollonius (Brocard, 1967, T. 1, p. 146) qui partage le segment  $F_1F_2$  dans le rapport  $\frac{s_1}{s_2}$ . Le diagramme de Voronoï correspondant a une complexité intrinsèque qui peut atteindre  $\Theta(n^2)$ .

L'interprétation géométrique classique dans  $\mathbb{R}^3$  donnée par Aurenhammer est celle de l'intersection de demi-plans qui définissent un polyèdre pour chaque site. Par inversion on obtient des sphères qui, par intersection avec le plan horizontal, permettent la construction du diagramme.

On peut aussi, pour rester dans le cadre des interprétations précédentes en donner une nouvelle représentation. C'est celle de la projection de l'enveloppe supérieure des intersections de demi-cones de révolution, non équilatères cette fois, mais dont les sommets sont coplanaires dans un plan perpendiculaire à l'axe des cônes. L'intersection de ces cônes se projette comme des cercles qui partagent le segment  $F_1F_2$  dans le rapport  $\frac{s_1}{s_2}$  (Cagnac, 1949, p. 281) et sont donc les bissecteurs des sites considérés comme ceux qui correspondent aux sphères considérées par Aurenhammer. Sur la figure (Fig. 2.5) les sites sont représentés par des points et la pondération par la base du cône centré sur ce point. Comme les cônes ont tous leur sommet à la même hauteur, cela représente bien une mesure proportionnelle à la pondération adoptée.



**Figure 2.5**

## 2.3 LES DIAGRAMMES DE POINTS À PONDÉRATION COMPOSITE

On compose maintenant les deux pondérations précédentes pour obtenir

$$\frac{\rho_1 - r_1}{s_1} = \frac{\rho_2 - r_2}{s_2} \quad (2.2)$$

comme équation du bissecteur entre deux sites. Une référence assez précise sur ce type de diagramme se trouve dans le livre d'Okabe et al. : « Spatial tessellations : concepts and applications of Voronoï diagrams » (Okabe, 1992). Sans mention aucune sur les diagrammes de Voronoï, on trouve aussi mentionné dans le livre de Zwikker : « Advanced Plane Geometry » (Zwikker, 1950, p. 124), le fait que les ovales de Descartes, qui sont, comme on va le voir, les bissecteurs de ce type de diagramme, forment les lignes frontières entre des colonies de bactéries ou des cristaux qui croissent à des vitesses différentes (et en fait débutent leur croissance à des instants différents). Ceci rappelle combien les diagrammes de Voronoï de tous types sont des structures géométriques naturelles sans être nécessairement simples.

### 2.3.1 Un diagramme de cercles pondérés

La pondération peut se voir de deux manières. La première, celle d'Okabe et al. (Okabe, 1992) consiste à considérer un diagramme de Voronoï de points pondérés (site  $F$ ), avec une pondération composée d'une pondération soustractive  $-\frac{r}{s}$  et d'une pondération multiplicative  $\frac{1}{s}$  positive, d'où son nom de pondération composite. Ici, nous allons par contre considérer qu'il s'agit d'une pondération multiplicative sur un site qui est un cercle, la distance au cercle étant donnée par  $\rho - r$ , la pondération du cercle par  $\frac{1}{s}$ . Dans les deux cas bien sûr l'expression mathématique du bissecteur est la même, pour deux sites ponctuels  $F_1$  et  $F_2$ , ou deux cercles de même centre et de rayon  $r_1$  et  $r_2$  :  $\frac{\rho_1 - r_1}{s_1} = \frac{\rho_2 - r_2}{s_2}$ . Cette équation en coordonnées bipolaires donne comme précédemment la nature du bissecteur, mais montre aussi très bien la nature composite du diagramme puisque si  $r_1 = r_2 = 0$ , on retrouve le diagramme multiplicatif comme cas particulier, si  $s_1 = s_2 = 1$ , on retrouve le diagramme soustractif (on peut comparer cette généralisation

à celle de Boissonnat déjà citée (Boissonnat, 2003)). Cela n'entraîne pas nécessairement que l'on pourrait avoir un algorithme unique, efficace, pour traiter tous les cas mais c'est en tout cas une condition nécessaire pour pouvoir essayer. Il faut ajouter que les pondérations étant positives,  $\rho_1 - r_1$  et  $\rho_2 - r_2$  ont toujours le même signe, un bissecteur est donc toujours à l'extérieur des deux sites ou à l'intérieur, mais pas à l'intérieur de l'un et à l'extérieur de l'autre. Ceci signifie que la distance au cercle est choisie algébrique comme dans le diagramme de points pondérés par soustraction et non pas euclidienne comme dans le diagramme de cercle qui suivra. Comme précédemment on pourrait aussi voir ce diagramme comme un diagramme de cycle pondéré, *tous les cycles ayant la même orientation*, mais alors il ne faudrait pas utiliser la bijection cycle-cône équilatère car le site serait sinon représenté par deux cônes de même axe. Cette remarque n'est évidemment pas sans conséquence sur la nature du diagramme et de l'algorithme comme on le verra à la fin.

### 2.3.2 Nature des bissecteurs

Les bissecteurs, dont nous avons déjà l'équation en coordonnées bipolaires, sont alors des courbes algébriques du quatrième degré qui sont des ovales de Descartes : il y a plusieurs démonstrations possibles de cette propriété, et la démonstration choisie ici, due à Chasles (Gomes Teixeira, 1905, cap. 4, p. 170 - §178) n'est pas algébrique mais géométrique et ce pour mieux introduire l'algorithme de balayage par cône qui va suivre.

Pour ce faire on revient à l'interprétation géométrique faite par Edelsbrunner dans l'article de Fortune (Fortune, 1987) : lorsque l'on traite des diagrammes de points, le diagramme de Voronoï est obtenu par une intersection de demi-cônes équilatères d'axes verticaux dont tous les sommets sont à la même hauteur. Les intersections des cônes sont des hyperboles gisant dans des plans verticaux dont la projection horizontale donne les bissecteurs qui sont donc des droites.

Lorsque l'on pondère les points par addition ou soustraction, le diagramme de Voronoï s'obtient encore par intersection de demi-cônes équilatères, mais cette fois les sommets

ne sont plus coplanaires. L'intersection de ces cônes reste une branche d'hyperbole, donc plane, mais cette fois le plan n'est plus vertical et donc la projection des hyperboles sur le plan horizontal donne encore des branches d'hyperboles qui supportent les arêtes du diagramme.

Enfin lorsque l'on choisit une pondération composite, les axes restent verticaux mais on abandonne non seulement le fait que les sommets soient coplanaires, mais encore le fait que les cônes soient équilatères (ou plus exactement que les angles au sommet soient égaux). Dans ce cas, la courbe d'intersection de deux cônes de révolution d'axes parallèles est plus complexe puisque le résultat est une biquadratique sphérique<sup>1</sup> (Cagnac, 1949, p. 284) sa projection donnera donc une quartique bicirculaire<sup>2</sup>.

Les points cycliques du plan horizontal appartenant aux deux cônes, et chaque cône de révolution ayant comme plan tangent le long d'une de ses génératrices isotropes un plan vertical imaginaire contenant cette isotrope, la tangente à la biquadratique aux deux points cycliques, donnée par l'intersection de ces deux plans, est aussi verticale. Ainsi, non seulement la projection de cette biquadratique est une quartique bicirculaire mais encore les points cycliques du plan horizontal en sont des points de rebroussement puisque les tangentes à la courbe initiale sont verticales. La courbe de projection en est donc un ovale de Descartes par définition de cette courbe (Roberts, 1870, p. 106). Comme on travaille avec des demi-cônes, on n'obtient en fait que l'un des deux ovales. La figure (Fig. 2.6) montre les deux demi-cônes  $\mathcal{C}$  (bleu) et  $\mathcal{C}'$  (rouge), la courbe d'intersection appartient aussi à la sphère  $\mathcal{S}$ . La biquadratique complète serait une courbe bipartite,  $\mathcal{O}$  (en vert) se projette suivant l'ovale donné par l'intersection des deux demi-cônes,  $\mathcal{O}'$  (en noir) est l'ovale qui disparaît lorsque l'on ne considère que les demi-cônes. La projection sur un plan parallèle à l'axe des cônes est une parabole (Cagnac, 1949, p. 279).

<sup>1</sup>courbe gauche du quatrième degré s'appuyant sur une sphère.

<sup>2</sup>courbe plane du quatrième degré ayant les points cycliques pour points doubles.

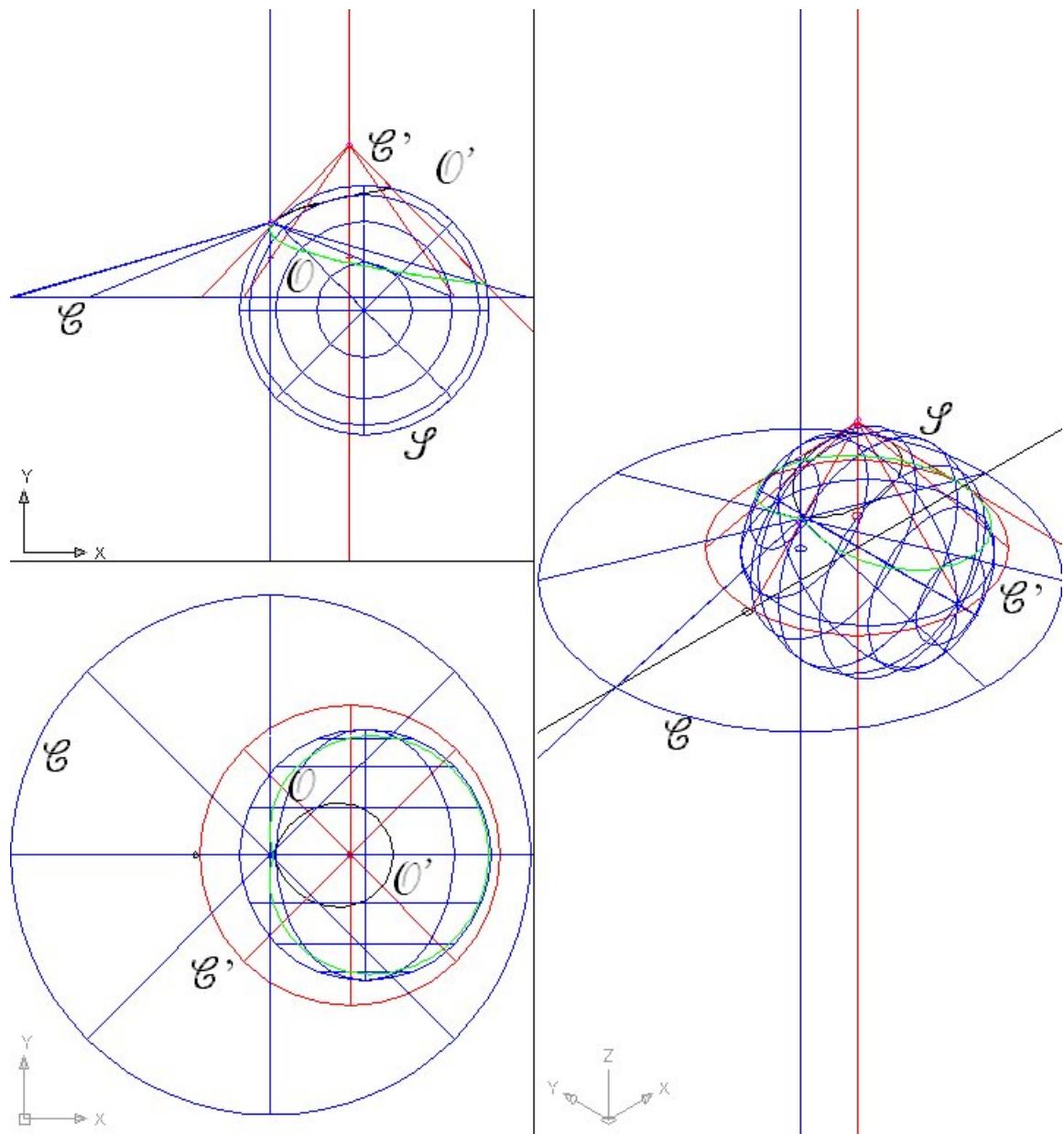


Figure 2.6

### 2.3.3 La ponctuation de la projection horizontale

La ponctuation horizontale ayant le sens qui lui est donné au paragraphe 2.1.5, on démontre maintenant le théorème suivant :

**Théorème 1** : *Les secteurs de Voronoï des points  $F_1$  et  $F_2$  avec une pondération composite correspondent identiquement à la ponctuation de la projection horizontale des cônes qui les représentent.*

*Démonstration* : La démonstration se fait en deux parties, d'une part on démontre que la courbe d'intersection des deux cônes a bien la même équation bipolaire que celle du bissecteur, puis qu'au secteur de Voronoï du site  $F_1$  correspond la partie visible du cône  $\mathcal{C}_1$ .

Pour retrouver l'équation bipolaire dont nous sommes partis, on peut utiliser la construction de Chasles (Chasles, 1837, Note XXI, p. 350) en coupant les deux cônes par un plan passant par les deux sommets  $S_1, S_2$ . En posant  $s_i = \tan \varphi_i = \frac{r_i}{h_i}$  (Fig. 2.7), si l'on appelle  $S_1R$  et  $S_2R$  deux des génératrices des cônes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  situées dans ce plan, on a  $\tan \varphi_1 = \frac{\rho_1}{h_1 - C_1 z_1}$  et de même  $\tan \varphi_2 = \frac{\rho_2}{h_2 - C_2 z_2}$ . Comme au point d'intersection  $C_1 z_1 = C_2 z_2$  on en déduit que  $h_1 - \rho_1 \cot \varphi_1 = h_2 - \rho_2 \cot \varphi_2$  qui est bien la même équation que 2.2. Sur la figure 2.7,  $\Gamma$  est la biquadratique d'intersection des deux cônes, vu comme un arc de parabole  $\gamma'$  sur  $xOz$  et un ovale  $\gamma$  sur  $xOy$ .

Enfin considérons deux points  $Q_1 \in \mathcal{C}_1$  et  $Q_2 \in \mathcal{C}_2$  sur la même verticale, ayant donc les mêmes coordonnées bipolaires  $\varrho_1, \varrho_2$  et les cotes  $z_{q_1}$  et  $z_{q_2}$ . Des égalités :

$$\begin{aligned} Q_1 \in \mathcal{C}_1 \implies \tan \varphi_1 &= \frac{\varrho_1}{h_1 - z_{q_1}} &= \frac{r_1}{h_1} &= s_1 \\ Q_2 \in \mathcal{C}_2 \implies \tan \varphi_2 &= \frac{\varrho_2}{h_2 - z_{q_2}} &= \frac{r_2}{h_2} &= s_2 \end{aligned}$$

on obtient directement :

$$\begin{aligned}-z_{q_1} &= \frac{\varrho_1 - r_1}{s_1} \\ -z_{q_2} &= \frac{\varrho_2 - r_2}{s_2}\end{aligned}$$

Donc si l'on a  $-z_{q_1} < -z_{q_2}$ , on a aussi  $\frac{\varrho_1 - r_1}{s_1} < \frac{\varrho_2 - r_2}{s_2}$  ce qui revient à dire que le point  $q$  projection de  $Q_1$  ou  $Q_2$  sur le plan horizontal appartient au secteur de Voronoï du site  $F_1$  ou  $\mathcal{C}_1$ , mais c'est aussi dire que la cote de  $Q_1$  est plus haute que celle de  $Q_2$  donc que  $Q_1 \in \mathcal{C}_1$  est visible.  $\square$

Cette démonstration s'étend, bien entendu, à un nombre  $n$  de cônes et reste valable si  $s_i = 1 \forall i$  donc dans le cas de pondération par soustraction.

Pour les pondérations par soustraction on a introduit la notion de distance par rapport au cercle. Cette représentation nous est agréable parce que d'une certaine manière nous sommes tellement habitués à la notion de distance euclidienne que nous pouvons nous représenter beaucoup plus facilement le poids des sites et la notion de proximité avec ce diagramme de cercles qu'avec un diagramme de points affectés de coefficients  $(F_i, r_i)$ . Avec la pondération composite ou même multiplicative ce n'est plus possible, le diagramme de point serait tout aussi abstrait avec un coefficient multiplicateur  $(F_i, 1/s_i)$  voire plus avec deux coefficients  $(F_i, r_i, 1/s_i)$ . L'usage d'un cercle pondéré n'est guère plus parlant  $(\mathcal{C}_i, 1/s_i)$ . Mais avec la représentation par cône on introduit de nouveau la notion de distance euclidienne, simplement la distance est maintenant mesurée verticalement depuis le plan horizontal jusqu'à la partie visible de la surface composite formée par l'ensemble des cônes. Si le cône est équilatère, les distances horizontale et verticale sont identiques. En choisissant de mesurer la distance verticalement dans tous les cas et en choisissant un plan horizontal situé au-dessus du sommet du cône le plus élevé, on a la généralisation suivante :

**Corollaire 1** : *Dans tout diagramme de Voronoï de points pondérés ou pas dans  $\mathbb{R}^2$  le secteur de Voronoï d'un point est celui de son site le plus proche quand ce site est représenté par son demi-cône inférieur et quand le plan horizontal n'a aucune intersection*

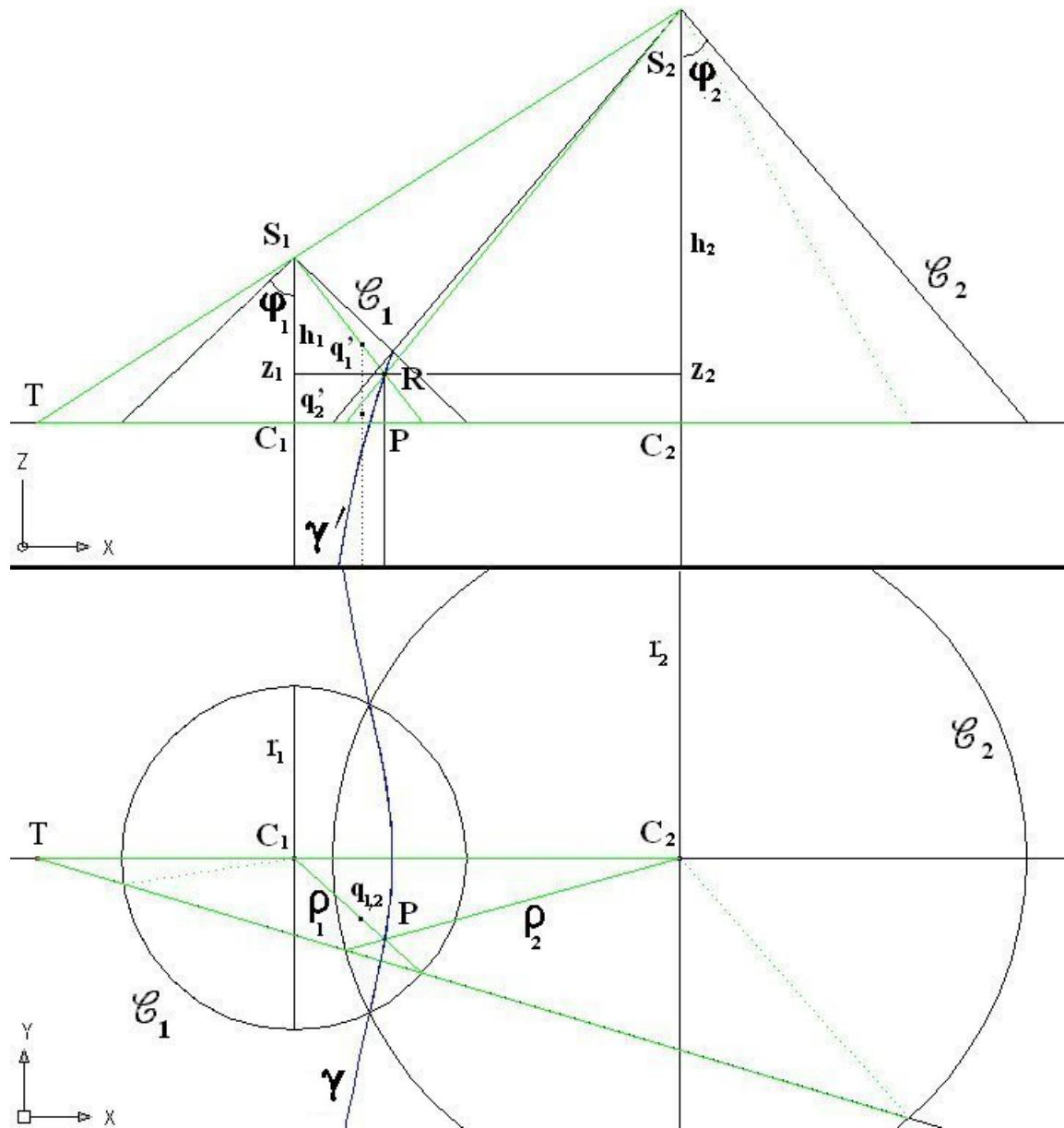


Figure 2.7

*avec ces sites. Les bissecteurs sont les lieux des points équidistants de deux sites et les sommets de trois ou plus.*

L'interprétation par cône a de plus l'avantage de donner directement une propriété essentielle de ces diagrammes que nous allons utiliser plus loin. En effet dans le cas de la pondération additive, on a vu que certains sites n'ont pas de secteur de Voronoï propre car ils sont totalement dominés par les autres, cas qui, géométriquement, se traduisait par le fait qu'un cercle est inclus dans un autre. Cela se traduisait aussi par le fait que le demi-cône qui le représente est aussi inclus dans le demi-cône qui représente le site dominant, mais cela n'apportait rien de plus.

Par contre, lorsque l'on passe à la pondération multiplicative, c'est-à-dire aux cercles pondérés (même de rayon nul), le fait qu'un cercle soit inclus dans un autre n'a pas de signification particulière car tout dépend de la pondération relative de l'un des cercles par rapport à l'autre (Fig. 2.8 (a) et (b)). Ceci étant, pour deux sites, puisqu'un cercle pondéré est représenté par un demi-cône et puisque son secteur de Voronoï est l'enveloppe supérieure de l'intersection de ces deux demi-cônes, le fait que ces deux demi-cônes n'aient pas d'intersection, donc pas de partie commune a de nouveau une signification en terme de diagramme car on a bien un site dominé par un autre. On a donc une condition géométrique simple pour repérer et définir la domination d'un site sur un autre.

Enfin il faut noter que dans les deux derniers cas, pondération multiplicative et composite, le fait que les bissecteurs soient des courbes fermées simples fait que, si toutes les pondérations sont différentes, il existe un site et un seul qui a un secteur de Voronoï non borné. C'est vrai pour deux, puis pour  $n$  de proche en proche. Il faut noter que cela est dû à la partie multiplicative de la pondération qui fait que l'un des sites finit toujours par dominer tous les autres quand la distance tend vers l'infini. Du point de vue géométrique, c'est toujours le cône ayant le plus grand angle au sommet qui l'emporte, et ce quelque soit la hauteur de son sommet. D'où la définition suivante :

**Définition 1 (site majoritaire)** : *Dans un diagramme de Voronoï de points à pondé-*

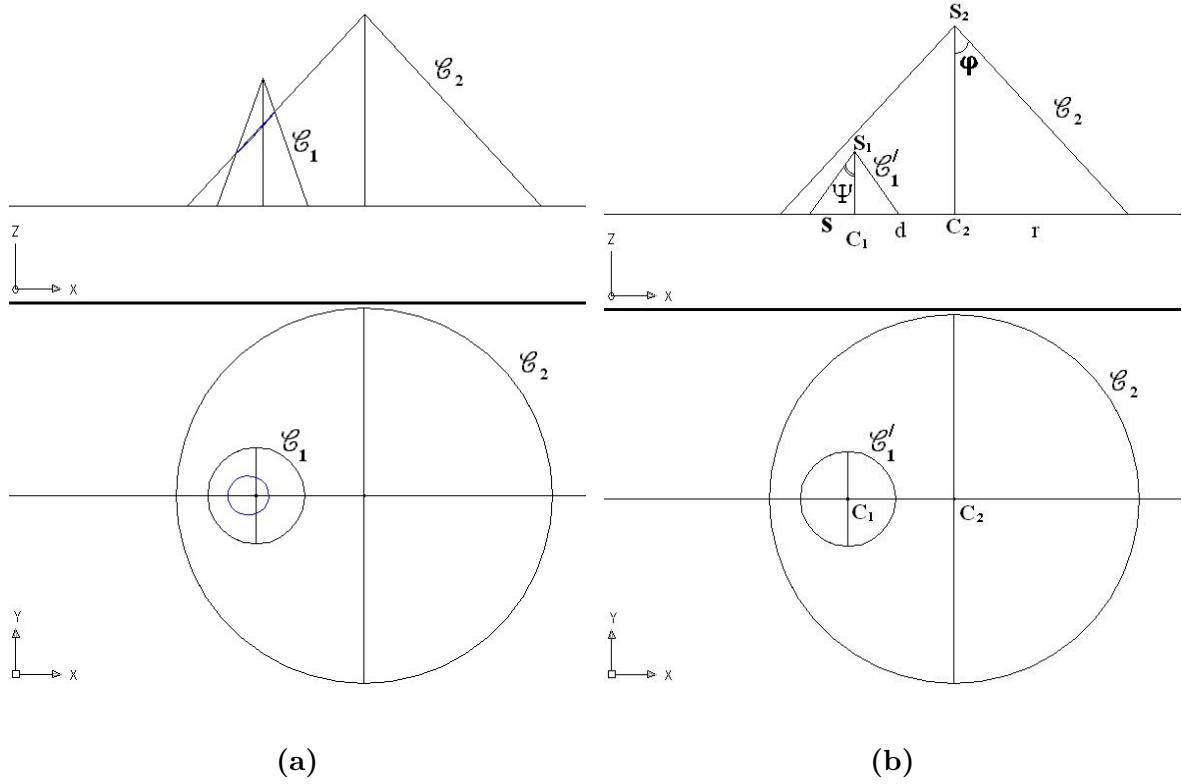


Figure 2.8

*ration multiplicative ou composite, on appelle site majoritaire le site qui est représenté par le demi-cone ayant le plus grand angle au sommet.*

Bien entendu, le plan horizontal est un cas limite de site majoritaire.

Avec le point de vue de la représentation par cônes adopté ici, il n'y a pas de différence de nature entre ce type de diagramme et le précédent, surtout si l'on considère un cercle comme un cas particulier d'ovales de Descartes. Un algorithme à balayage basé sur cette représentation comme celui qui sera donné plus loin traitera donc les deux diagrammes de la même manière.

Il faut encore introduire quelques définitions et faire quelques remarques liées à la visibilité des différents sites.

**Définition 2 (forêt de cônes)** : *Pour simplifier, on appelle forêt de cônes un ensemble de demi-cônes de révolution inférieur d'axe verticaux.*

**Définition 3 (domination)** : *Un site est dominé par un autre si le demi-cône qui le représente n'est pas visible quand on se limite à ces deux sites.*

Cette définition généralise celle donnée en 2.1.2.

**Définition 4 (domination absolue)** : *Un site est absolument dominé s'il est dominé par le site majoritaire.*

**Définition 5 (masquage)** : *Un site est masqué s'il n'est pas visible sans qu'il soit dominé.*

En effet un site peut être masqué par plusieurs sites à la fois sans l'être en totalité par aucun d'entre-eux. Notons qu'il n'y a pas de domination quand tous les sommets sont à la même hauteur, c'est-à-dire pas de pondération ou une pondération multiplicative.

On a enfin cette proposition triviale mais très utile pour la suite :

**Proposition 1** : *Tout ce qui est sous le site majoritaire est masqué.*

Comme on s'intéresse à la vue de dessus de la forêt de cônes, cette proposition est vraie pour tous les cônes, mais spécialement pour celui-ci.

**Remarque 1 (position du plan horizontal de projection)** : *La position du plan horizontal de projection mérite un commentaire. A priori, le diagramme de Voronoï lui-même, projection de la vue de dessus de la surface composite formée par la forêt de cônes, ne dépend pas de la position du plan. Néanmoins si on le place au-dessus du plus haut des sommets on a plutôt la représentation d'un diagramme de Voronoï de*

*points pondérés au sens où seul l'axe des demi-cônes a une intersection avec le plan. Si on le place au-dessous du plus bas sommet, on a la représentation d'un diagramme de cercles qui sont les intersections des demi-cônes inférieurs avec le plan. Entre les deux, le plan horizontal n'a d'intersection qu'avec certains des demi-cônes mais pas tous, le diagramme des sites a moins de sens.*

**Remarque 2 (diagramme de cercles pondérés)** : *On pourrait envisager des diagrammes de cercles pondérés par addition ou soustraction avec, pour une pondération  $p_i$ , des équations du type  $\frac{\rho_i - r_i - p_i}{s_i}$ . Dans la mesure où aucun rayon ne devient négatif on obtiendrait alors un nouveau diagramme différent du précédent mais toujours avec des demi-cônes inférieurs.*

## 2.4 COMPLEXITÉ

Une conséquence du fait que les diagrammes de points pondérés multiplicativement soient un cas particulier des diagrammes de points composites, est que la complexité de la structure de ces derniers peut atteindre ou dépasser  $\mathcal{O}(n^2)$ , puisque les premiers peuvent être en  $\Theta(n^2)$  dans le pire des cas comme l'a montré Aurenhammer (Aurenhammer, 1987, p. 253).

Mais l'interprétation par cônes permet de voir qu'en fait la complexité ne dépasse pas  $\mathcal{O}(n^2)$  de manière très simple. On considère une forêt de cônes composites données par  $\{F_i, \frac{\rho_i - r_i}{s_i}, i = 1, n\}$  dans laquelle les  $r_i$  sont données en ordre croissant, c'est-à-dire que  $F_1$  est le sommet le plus haut,  $F_n$  le sommet le plus bas et  $r_n = \max\{r_i, i = 1, n\}$ . On considère une seconde forêt  $\{F_i, \frac{\rho_i - r_n}{s_i}, i = 1, n\}$  qui est une forêt multiplicative puisque tous les sommets y sont à la même hauteur dans le plan horizontal qui contient  $F_n$ . Partant de cette forêt multiplicative, on peut considérer la nouvelle forêt composite  $\{F_i, \frac{\rho_i - r_{n-1}}{s_i}, i = 1, n-1; F_n, \frac{\rho_n - r_n}{s_n}\}$ , tous les cônes ayant leur sommet au même niveau sauf celui qui est le plus bas d'entre-eux. Puisque l'on a remonté tous les cônes d'un cran sauf un, les points d'intersection visibles des triplets de cônes entre-eux sont moins nombreux dans la seconde forêt que dans la première : certains d'entre-eux peuvent

disparaître par masquage ou domination, aucun n'apparaît puisqu'il s'agit en fait de demi-cônes. En continuant ainsi le processus jusqu'à retrouver la forêt initiale on a le théorème suivant et son corollaire :

**Théorème 2** : *Le nombre de sommets de Voronoï d'un diagramme de points composites  $(\{F_i, \frac{\rho_i - r_i}{s_i}, i = 1, n\})$  est égal ou inférieur à celui du diagramme multiplicatif dont il est issu  $(\{F_i, \frac{\rho_i}{s_i}, i = 1, n\})$ .*

**Corollaire 2** : *La complexité d'un diagramme composite est en  $\mathcal{O}(n^2)$  et atteint  $\Theta(n^2)$  dans le pire des cas.*

## 2.5 CONCLUSION

On voit donc se dessiner une représentation uniforme des diagrammes de Voronoï de points, pondérés ou pas, basée sur la distance verticale à l'enveloppe supérieure d'une forêt de cônes de révolution à axes verticaux. La première application de cette représentation, et qui est faite dans ce texte, est qu'en utilisant un logiciel de conception assistée par ordinateur permettant une modélisation en 3D, on peut générer très facilement des figures de diagramme de Voronoï de points pondérés en créant les intersections des cônes représentatifs des sites et en en prenant la vue de dessus.

On résume cette représentation dans le tableau suivant (Tableau 2.1) en remarquant que dans le cas des pondérations composites, l'angle au sommet le plus grand correspond à la pondération la plus élevée, donc, à rayon égal, le sommet du cône le plus bas.

**Tableau 2.1** Diagrammes de Voronoï de points pondérés

diagramme	bissecteur	équation bipolaire	cônes de révolution à axe vertical
points non pondérés	droite	$\rho_1 = \rho_2$	équilatères - sommets coplanaires (plan horizontal)
points pondérés par soustraction - cercles avec distance algébrique (cycle)	branche d'hyperbole	$\rho_1 - r_1 = \rho_2 - r_2$	équilatères - pondération par la hauteur du sommet
pondération multiplicative	cercle	$\frac{\rho_1}{s_1} = \frac{\rho_2}{s_2}$	sommets coplanaires - (plan horizontal)-pondération par la valeur de l'angle au sommet
pondération composite - cercle avec pondération multiplicative de la distance algébrique au cercle	ovale de Descartes (simple)	$\frac{\rho_1 - r_1}{s_1} = \frac{\rho_2 - r_2}{s_2}.$	quelconque - pondération du <i>cercle de base</i> par la hauteur du sommet

## CHAPITRE III

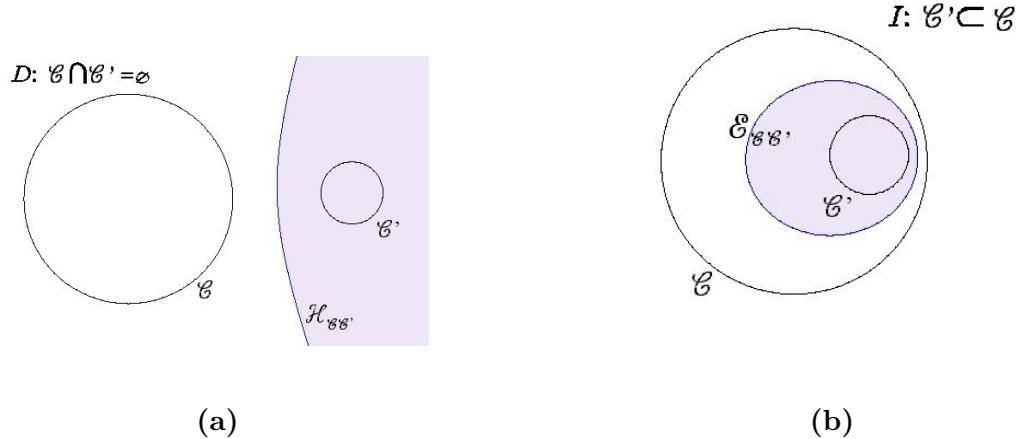
### LES DIAGRAMMES DE VORONOÏ DE CERCLES EN DISTANCE EUCLIDIENNE

Ce type de diagramme est avant tout un diagramme de Voronoï de lignes (Okabe, 1992), c'est-à-dire que le site n'est pas le centre du cercle mais la circonférence, et c'est la distance euclidienne à la circonférence qui détermine le domaine de Voronoï de chaque cercle. La distance choisie est donc la distance euclidienne  $\delta(M, \mathcal{C}) = |d(M, C) - r|$  où  $\mathcal{C}$  est le cercle site,  $C$  son centre, et  $r$  son rayon (par rapport au tableau précédent, 2.1, l'équation bipolaire est :  $|\rho_1 - r_1| = |\rho_2 - r_2|$ ).

#### 3.1 LES BISSECTEURS HYPERBOLIQUES ET ELLIPTIQUES

Les bissecteurs du diagramme de Voronoï de base formé par deux circonférences-sites sont des coniques, pas nécessairement complètes : le bissecteur est formé par *une-demi*, *une* ou *une-et-demi* coniques. C'est une branche d'hyperbole si les circonférences sont disjointes (Fig. 3.1 (a)) et, dans ce cas, le diagramme est le même que pour le diagramme pondéré. C'est une ellipse si l'une des circonférences est incluse dans l'autre (Fig. 3.1 (b)). Si les circonférences sont sécantes (Fig. 3.2) le bissecteur se compose d'une branche d'hyperbole et d'une ellipse. On pourrait avoir des paraboles, lieu des points équidistants d'une droite et d'un cercle, si on acceptait des droites comme cercle de rayon infini ; ce dernier cas est ici exclu.

On remarque le secteur en violet correspond au plus petit des deux sites et que, s'il est



**Figure 3.1**

borné, c'est bien le plus petit des deux secteurs.

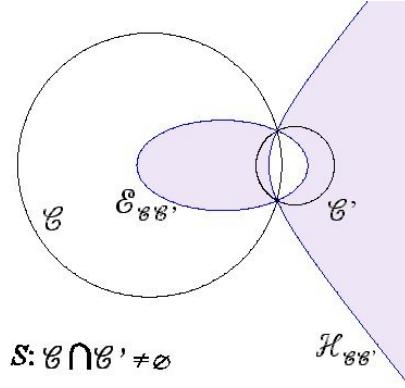
On a la propriété suivante :

**Proposition 2 :** Les bissecteurs d'un diagramme de Voronoï de cercles en distance euclidienne sont donnés par l'ajout des bissecteurs elliptiques aux bissecteurs hyperboliques du diagramme de Voronoï de points pondérés que les cercles représentent. Les arêtes des deux diagrammes ne coïncident qu'à l'extérieur de tous les sites.

*Démonstration :* La démonstration est très simple. Pour deux sites, les bissecteurs sont donnés par les points du plan qui vérifient :  $\delta(M, \mathcal{C}) = |\text{d}(M, C) - r|$ , donc ils vérifient :

$$\delta(M, \mathcal{C}) = \delta(M, \mathcal{C}') \implies d(M, C) - r = d(M, C') - r' \quad \vee \quad d(M, C) - r = r' - d(M, C')$$

Ceux qui vérifient le premier cas appartiennent au diagramme de points pondérés et sont sur des bissecteurs hyperboliques, ceux qui vérifient le second sont sur des bissecteurs elliptiques. À l'extérieur des deux cercles les deux distances sont les mêmes. Ceci reste vrai quelque soit le nombre de cercles-sites. À cause des changements de signes dus aux valeurs absolues, à l'intérieur, c'est faux dès que l'on n'est plus dans le cas trivial de deux



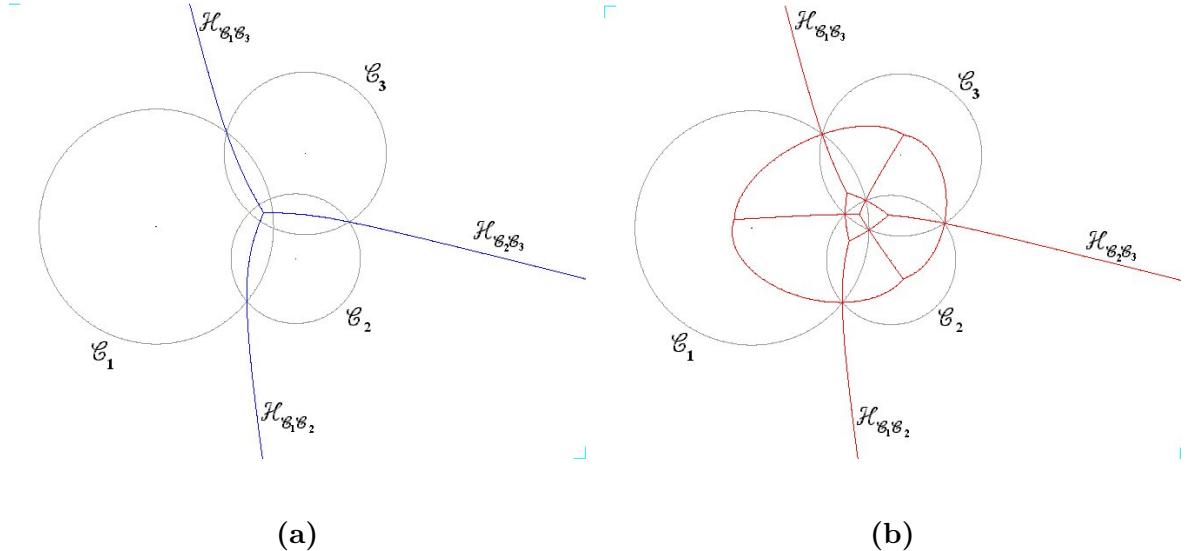
**Figure 3.2**

cercles (sur la figure 3.3 seules les arêtes hyperboliques extérieures  $\mathcal{H}_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2}, \mathcal{H}_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_3}, \mathcal{H}_{\mathcal{C}_2\mathcal{C}_3}$  coïncident).  $\square$

**Remarque 3 (cas général) :** *Suivant en cela les conventions habituelles, pour faciliter l'exposition, on place les sites en position générale ce qui exclut le cas de deux cercles-sites tangents. Ce cas n'est qu'un cas limite dans lequel le bissecteur elliptique se réduit à un segment de droite joignant les centres des cercles. Dans la pratique on peut toujours utiliser la méthode des perturbations symboliques de Yap, (Yap, 1988) qui consisterait ici à rapprocher très légèrement les centres des deux sites tangents extérieurement de manière à recréer une ellipse d'excentricité  $1 - \epsilon$  et qui justifie la convention adoptée (bien sûr, pour deux sites tangents intérieurement, on éloigne les centres). Pour les cas plus complexes, par exemple trois sites tangents en un même point, un extérieurement et un intérieurement, on devra décomposer la perturbation globale en deux perturbations correspondantes aux deux précédentes.*

### 3.2 LE CAS DES SOMMETS « DÉGÉNÉRÉS NORMAUX »

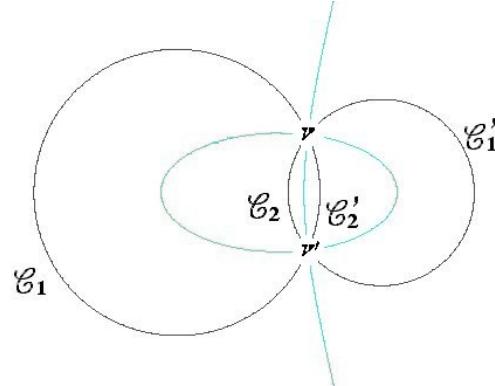
Évidemment on constate sur la figure 3.2 une anomalie qu'il faut expliquer : un diagramme de Voronoï réalisant une partition de l'espace, deux arêtes ne peuvent se couper et le graphe le représentant est donc nécessairement planaire. Or on voit que dans le



**Figure 3.3**

cas où deux circonférences se coupent le bissecteur est une courbe double, ellipse et hyperbole et donc les arêtes du diagramme se coupent aussi.

En effet, puisque le point d'intersection de deux circonférences est bien équidistant de ces deux circonférences, il se doit d'appartenir au bissecteur qui sépare ces deux sites. Mieux encore, les secteurs de Voronoï de chaque site ne sont pas convexes. Ils sont certes connexes mais il suffit d'enlever les deux points d'intersection des deux cercles pour obtenir un diagramme non-connexe. Si l'on ne veut pas en plus avoir à considérer le bissecteur qui sépare les deux sites comme une quartique dégénérée (ellipse et hyperbole), on peut choisir de traiter les deux circonférences-sites comme quatre arcs de cercles-sites contigus. Dans ce cas on a une bien meilleure interprétation de la figure en terme de diagramme de Voronoï. Le graphe est bien un graphe planaire, les secteurs restent connexes même si l'on leur enlève un nombre fini de points, les arêtes sont supportées par des bissecteurs qui sont toujours des coniques. En échange, on voit que les points d'intersections des deux cercles, ou plutôt les points de contact des quatre sites et des cinq arêtes deviennent des sommets de Voronoï, dégénérés puisque d'ordre quatre (les points  $V$  et  $V'$  sur la figure (Fig. 3.4)) (c'est en enlevant ces sommets dégénérés que



**Figure 3.4**

les secteurs de Voronoï des cercles-sites deviendraient non-connexes).

Bien sûr, il est usuel dans les études sur les diagrammes de Voronoï de laisser de côté les cas dits dégénérés où le sommet de Voronoï est d'ordre 4 ou plus. Mais, ici, on voit que ce cas est un cas normal d'un diagramme de Voronoï de circonférences en distance euclidienne dans la mesure où l'on ne spécifie rien sur les intersections des cercles entre eux. Pour la suite, c'est donc cette interprétation que l'on va suivre.

En terme de complexité il n'y a pas de changement car la connaissance du diagramme de Voronoï des sites suppose implicitement la connaissance de leurs points d'intersection. Ceux-ci n'étant pas connus à l'origine, ils interviendront nécessairement dans le calcul avec leur ordre de complexité. En tout état de cause, la complexité d'un diagramme de Voronoï de ce type (sommets normaux plus sommets dégénérés) est liée au nombre de sites et donc au nombre d'arcs de circonférences (noté  $2p$  dans la suite) et non pas au nombre  $n$  de circonférences.

Dans la suite on distinguera donc deux types de sommets : les sommets normaux, appelés *sommets Casey*<sup>1</sup>, centre d'un cercle vide de points de sites de rayon non nul tangents à trois sites ou plus et les sommets dégénérés appelés : *sommets intersection*

---

<sup>1</sup>Le nom vient de la méthode de calcul utilisée et sera justifié au chapitre 7.

ou intersections s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Notons quand même que la complexité propre des sommets Casey dépend aussi de  $p$  et non de  $n$ . Si l'on prend  $n$  cercles mutuellement sécants, on y dénombrera  $n(n - 1)$  points d'intersections. Le nombre d'arcs est donné par la formule de récurrence :  $A_n = A_{n-1} + 2(n - 1) + 2(n - 1)$  (la  $n^{\text{ième}}$  circonference découpe en deux deux des arcs des  $n - 1$  précédentes, et est elle-même découpée en  $2(n - 1)$  arcs par ces circonférences)  $A_2 = 4$ , d'où

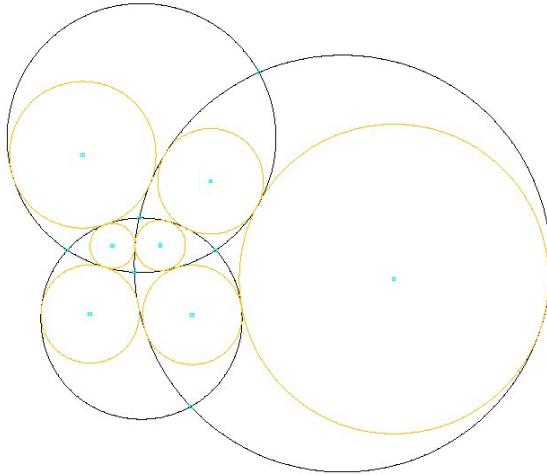
$$A_n = 2n(n - 1). \quad (3.1)$$

Par construction, le diagramme formé par les arcs est planaire, donc son nombre de faces, ici des polygones curvilignes, d'après la formule d'Euler dépend linéairement du nombre d'arcs. Il est donc en  $\mathcal{O}(n^2)$ . Par inversion, on peut construire un cercle inscrit tangent à trois arcs dans un polygone curviligne. Le nombre de sommets Casey est donc égal ou supérieur au nombre de faces : égal si toutes les faces ont trois côtés, supérieur sinon. La figure (Fig. 3.5) montre le cas de trois cercles-sites, ce qui donne six sommets intersections et les sept cercles, vides de sites, tangents à ces trois cercles dont les sept centres sont des sommets Casey. C'est le cas maximum puisqu'on peut au plus tracer huit cercles tangents à trois cercles donnés (problème d'Apollonius Rouché, 1900, p. 297), mais il y en a toujours un qui entoure les trois cercles donnés et n'est donc pas vide de sites.

S'il y a des intersections de cercles-sites, le graphe planaire formé par un diagramme de Voronoï de cercles en distance euclidienne a donc comme sous-graphe le graphe planaire que forme les seuls cercles dont il est issu. L'exemple précédent montre que si ces cercles-sites ne forment que des triangles curvilignes, il n'y a qu'un sommet Casey par face du sous-graphe et donc la complexité structurelle des deux graphes est identique.

Démontrons que cela reste le cas même si le nombre de côtés des polygones curvilignes est très différent de trois.

Considérons d'abord un polygone curviligne de  $q_i$  côtés *concaves* (Fig. 3.6 (a)). Cela

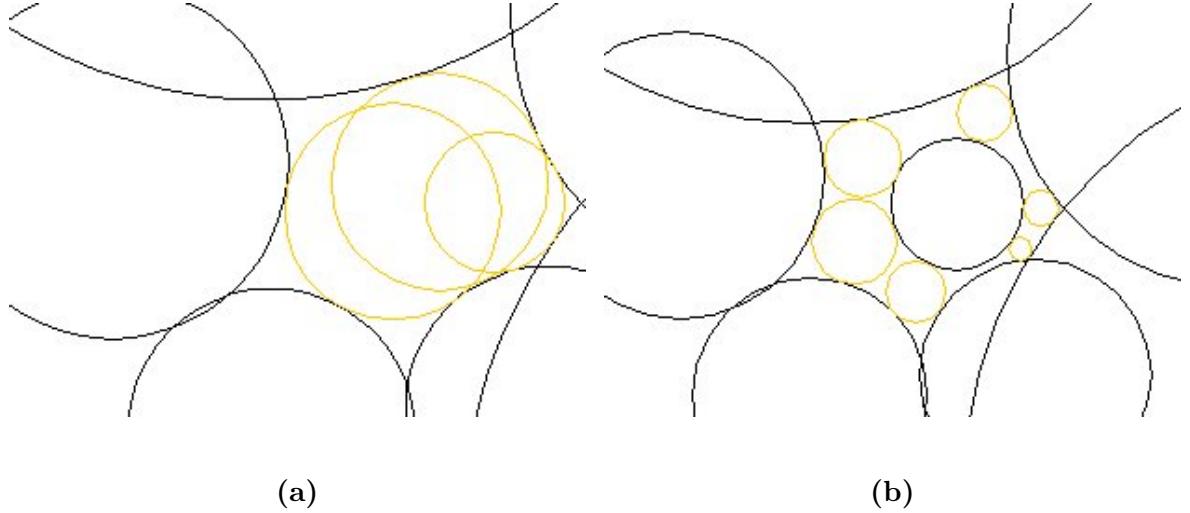


**Figure 3.5**

signifie qu'il est délimité par l'extérieur de ces  $q_i$  cercles. On considère alors le diagramme de Voronoï de points pondérés que forment ces  $q_i$  cercles. Son nombre de sommets dépend linéairement de  $q_i$ ; on sait qu'on peut même le majorer par  $2q_i$  en appliquant la formule d'Euler. Or, comme on le verra plus loin (corollaire 3, p. 58), diagramme pondéré et diagramme euclidien sont identiques à l'extérieur de tous les cercles, donc, puisque les sommets de Voronoï de notre polygone curviligne sont un sous-ensemble des sommets de ce diagramme, leur nombre est plus petit que  $2q_i$ .

La démonstration reste valable si le polygone comporte un ou des trous formés par des cercles (Fig. 3.6 (b)) puisque c'est la partie concave de ces cercles qui délimitera le ou les trous.

On étend maintenant cette démonstration à tous les types de polygones curvilignes par inversion. On utilise deux propriétés de cette transformation : la première est le fait que l'inversion conserve les angles, un cercle vide de sites tangents à trois sites aura donc son inverse vide de site et tangent aux inverses de ces mêmes trois sites. La deuxième propriété que l'on utilise est le fait que dans une inversion, l'intérieur d'un cercle se



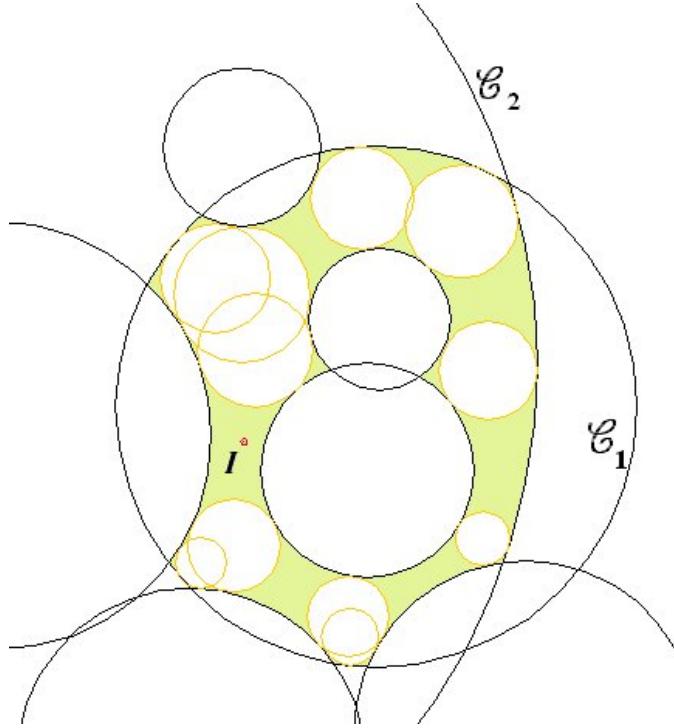
**Figure 3.6**

transforme en l'intérieur d'un cercle si ce cercle ne contient pas le centre d'inversion et en l'extérieur s'il le contient. On utilise cette dernière propriété pour inverser la convexité des côtés du polygone curviligne de manière à se ramener au cas précédent. Ainsi sur la figure 3.7, on considère le polygone curviligne dont l'intérieur est vert, et partiellement recouvert avec des cercles vides oranges d'intérieur blanc. Si on prend la précaution de choisir le centre d'inversion  $I$  extérieur aux cercles vides, la figure inverse, même si elle comporte un trou comme sur la figure, ne sera délimitée que par des extérieurs de cercles puisque l'intérieur de  $\mathcal{C}_1$  et de  $\mathcal{C}_2$  deviendra l'extérieur de leur inverse tandis que les autres intérieurs seront maintenus. En se ramenant au diagramme de points pondérés, on aura encore un nombre de sommets de Voronoï plus petit que  $2q_i$ .

Finalement si  $p$  est le nombre d'arcs de cercles du diagramme initial, chaque face du diagramme étant un polygone curviligne (à l'exception de l'extérieur de tous les cercles qui répond à la même inégalité) de  $q_i$  côtés, on a  $\sum q_i = 2p$  et donc le nombre de sommets Casey est plus petit que  $4p$ .

On résume ce qui précède dans le théorème suivant :

**Théorème 3** : *Un ensemble de  $n$  cercles se découvant en  $p$  arcs forme un graphe pla-*



**Figure 3.7**

naire de complexité structurelle  $\mathcal{O}(p)$ . Ce graphe est un sous-graphe du diagramme de Voronoï euclidien de ces cercles qui a la même complexité structurelle ; le nombre d’arcs,  $p$ , a une complexité de  $\mathcal{O}(n^2)$ .

### 3.3 CONNEXITÉ

Lorsque des circonférences-sites sont incluses les unes dans les autres sans intersection, le diagramme de Voronoï global est un diagramme composé de différents diagrammes de Voronoï non-connexes. Le graphe reste un graphe planaire, mais comporte un graphe principal et des sous-graphes disjoints. La figure 3.8 montre un exemple avec trois diagrammes non connexes : le premier, un diagramme de Voronoï de points, considérés comme des cercles de rayons nuls, dans un cercle, le second, un diagramme de Voronoï de cercles dans un cercle, et enfin le diagramme principal des trois cercles disjoints,

diagramme se composant de trois arcs d'hyperboles concourants. De manière récursive on pourrait obtenir ainsi des diagrammes emboîtés sur un nombre arbitraire de niveaux.

On a le théorème suivant :

**Théorème 4 :** *Une condition suffisante pour qu'un diagramme de Voronoï de cercles soit non-connexe est qu'il comporte un cercle-site formé d'un seul arc de cercle dont ni l'intérieur ni l'extérieur ne soient eux-mêmes vides de sites.*

*Démonstration :* En effet, puisque l'on utilise une distance euclidienne, tout point d'un site appartient à son propre secteur de Voronoï. Le secteur de Voronoï d'un cercle-site comprend donc au moins ce site et comme il est formé d'un seul arc il sépare le plan en deux parties. L'intérieur et l'extérieur n'étant pas vides de sites, les diagrammes de Voronoï qui y sont définis sont séparés par le site, et donc le diagramme global est bien non-connexe.  $\square$

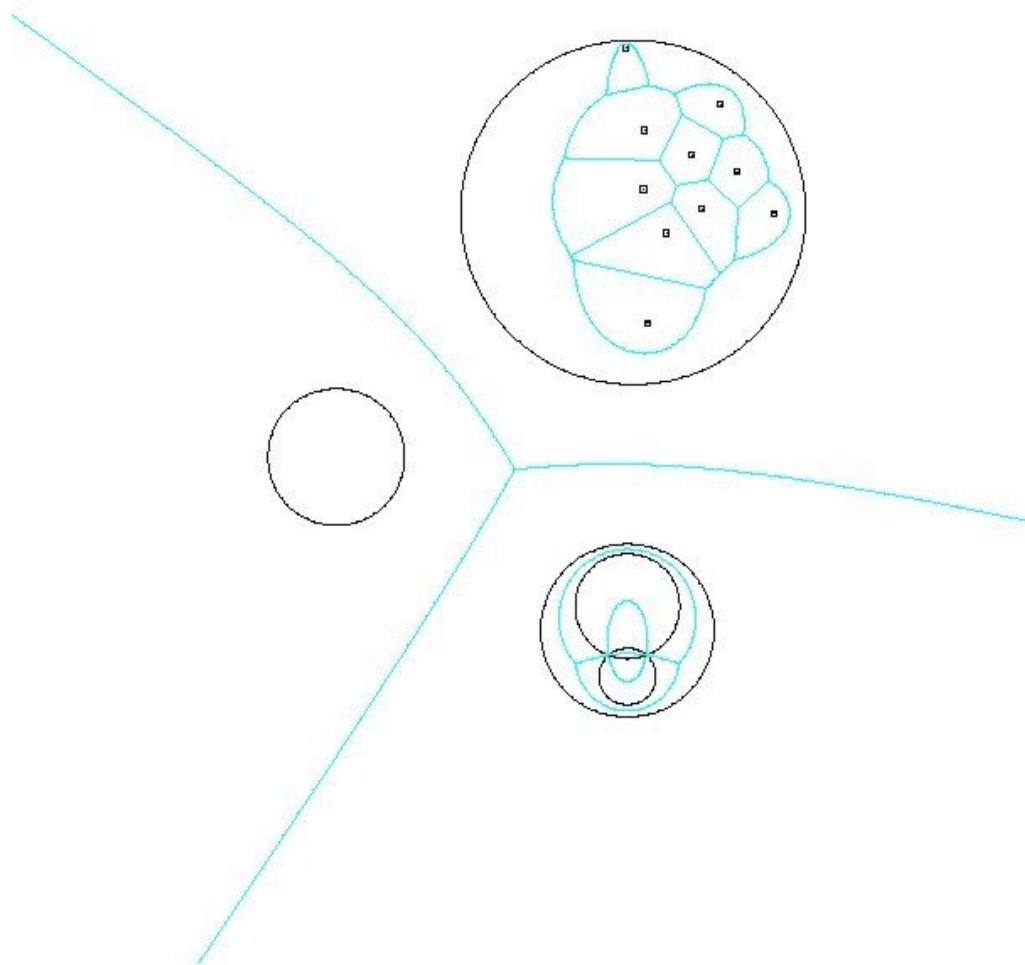
Ce théorème a une contre-partie :

**Théorème 5 :** *Si un ensemble de cercles est connexe, leur diagramme de Voronoï est connexe.*

*Démonstration :* L'ensemble étant connexe, tous les cercles ont au moins deux points d'intersection avec un autre cercle-site et ils appartiennent à leur propre secteur de Voronoï. Donc tous les secteurs de Voronoï ont aussi des intersections non-vides et donc leur frontière qui sont les arêtes du diagramme de même.  $\square$

### 3.4 L'INTERPRÉTATION PAR CÔNES

Enfin, à la suite du chapitre précédent, une question naturelle se pose : peut-on représenter ce diagramme de cercles avec des cônes et une interprétation physique comme dans les diagrammes pondérés ? Il s'agit d'une curiosité mais pas seulement, en effet une représentation graphique intéressante permettrait comme on l'a vu de réaliser plus fa-



**Figure 3.8**

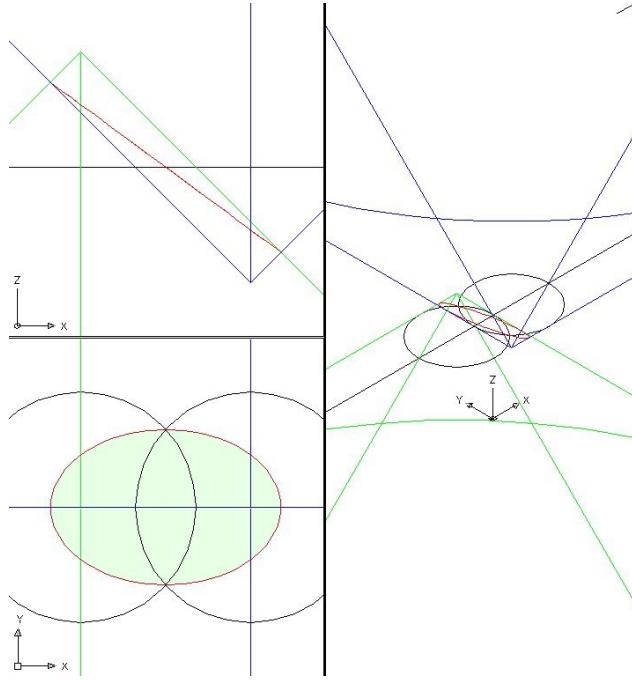
cilement des figures avec un logiciel de dessin assisté par ordinateur et pourrait faciliter grandement les explications pour l'algorithme qui va suivre.

En fait on sait déjà représenter le bissecteur hyperbolique, il reste à représenter le bissecteur elliptique. Or en utilisant le même type de demi-cône équilatère, on peut obtenir l'ellipse cherchée facilement, en renversant l'un des demi-cônes (Baudoin, 1938, p. 139). La figure 3.9 montre deux demi-cônes renversés, l'ellipse d'intersection dans l'espace et sa projection suivant une ellipse sur le plan horizontal et suivant un segment de droite dans le plan vertical parallèle aux axes des cônes. Notons que cette projection peut aussi s'interpréter comme le diagramme de Voronoï de deux cycles d'orientations opposées (§2.1.6). Bien entendu cette remarque n'est pas suffisante pour nous assurer une représentation en terme de diagramme de Voronoï mais, en considérant un cercle comme la réunion de deux cycles ayant même centre, même rayon et d'orientation opposée, cela montre la piste à suivre. On veut non seulement générer les arêtes du diagramme et rien que les arêtes, mais la représentation sera vraiment intéressante si l'on peut comme précédemment "voir" le diagramme grâce à une vue de dessus des surfaces représentatives. En partant de la représentation géométrique qui précède on va donc considérer que chaque cercle-site va être représenté par la surface qui suit, la description en étant plus difficile que la surface elle-même.

Partant du cercle-site situé sur le plan horizontal, on considère le demi-cône équilatère vertical, orienté vers le bas qui s'appuie sur ce cercle. De ce demi-cône, on retranche une première fois la partie supérieure qui dépasse du plan horizontal et on en retranche une deuxième fois le symétrique de cette même partie supérieure, en dessous du plan horizontal de manière à créer une forme de volcan le cercle du plan horizontal formant le bord du cratère.

**Définition 6 (volcan)** : *On appelle volcan la surface à base de cône ainsi décrite et représentative d'un cercle-site.*

La notion de chaîne de volcan s'en suit immédiatement en parallèle avec la forêt de



**Figure 3.9**

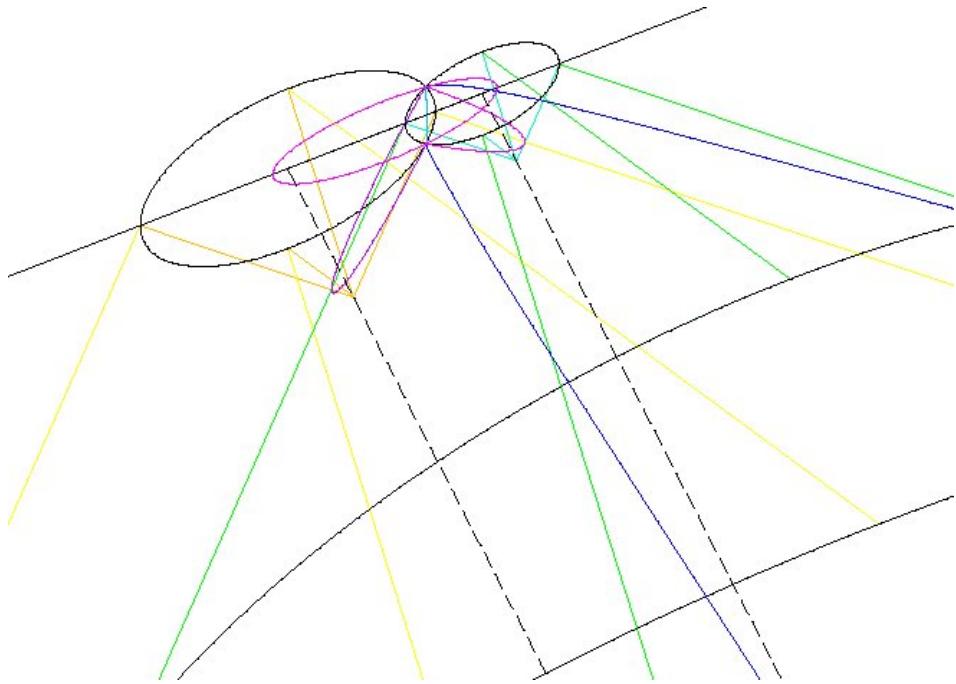
cônes.

**Définition 7 (chaîne de volcans)** : *On appelle chaîne de volcans la surface formée par une réunion de volcans représentatifs de cercles-sites les bords des cratères étant tous situés dans le même plan.*

**Remarque 4** : *Comme tous les cercles sont situés dans le même plan, il n'y a pas de sites dominés (cf. définition 5).*

Chaque site est ainsi représenté par son volcan. Montrons maintenant, en quatre étapes, que la projection sur le plan horizontal de la partie visible de la vue de dessus de cette chaîne de volcans est bien le diagramme de Voronoï de cercles euclidiens que nous cherchons.

Le diagramme de base avec deux sites se compose de cinq arêtes qui sont générées par quatre intersections (Fig. 3.10) (la verticale est en pointillé, et la figure est orientée pour



**Figure 3.10**

en faciliter la lecture).

On sait déjà que l'intersection des deux nappes infinies des demi-cones situés sous le plan horizontal va nous donner les deux arcs d'hyperboles extérieurs aux deux sites, puisque cette partie est identique à celle que l'on obtient pour le diagramme de points.

Il reste alors trois intersections. La première est l'intersection des deux cratères entre eux. Par raison de symétrie, la projection horizontale de cette intersection est évidemment la même que si les deux cratères étaient orientés vers le haut, et donc cette intersection donne l'arc d'hyperbole qui est située à l'intérieur des deux cercles-sites.

De même l'ellipse intérieure aux deux sites est générée en deux arcs différents qui correspondent à l'intersection du cratère de l'un des volcans avec la pente de l'autre, et par symétrie par rapport au plan horizontal on voit, comme dans l'autre cas, que le résultat est le même que celui de la figure précédente (Fig. 3.9) avec deux demi-cones inversés

entiers.

La figure 3.10 représente avec des couleurs différentes les deux volcans et les cinq arcs de coniques (ou cinq arêtes du diagramme) générés par les intersections, ainsi que la projection sur le plan horizontal des deux arcs d'ellipse venant des deux intersections cratère-pente du volcan opposé.

On a donc le théorème suivant dont le corollaire reprend une partie de la propriété 2, p. 45 :

**Théorème 6** : *Un diagramme de Voronoï de cercles peut s'interpréter comme la ponctuation horizontale de la figure formée par la chaîne de volcans représentatifs des cercles-sites.*  $\square$

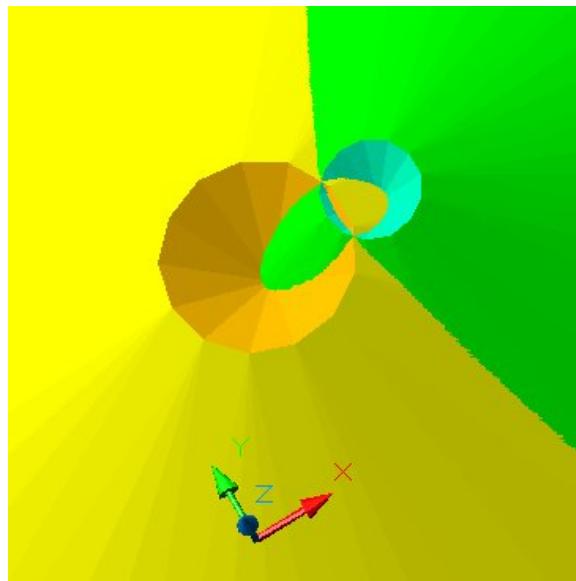
**Corollaire 3** : *Un diagramme de Voronoï de cercles et un diagramme de points pondérés par soustraction sont identiques pour un observateur situé à l'extérieur de tous les sites.*

Les différences entre les deux diagrammes viennent en effet des cratères, dès lors que l'observateur se trouve sur les pentes des volcans, à l'extérieur de tout cratère, il n'a pas de moyen de discerner le type de diagramme. Ceci revient aussi à dire que les ellipses n'ont pas de points à l'infini.

**Remarque 5 (position du plan horizontal)** : *La différence avec les représentations précédentes (cf. remarque 1, p. 40) est que si la position du plan horizontal reste sans importance pour obtenir la projection, elle est fixe en ce qui concerne la représentation des sites, et si l'on veut avoir sur le même plan la représentation des sites et de leur diagrammes de Voronoï, la seule position acceptable pour le plan est au sommet des cratères.*

D'ores et déjà, cette interprétation en surface dans l'espace permet de mieux comprendre la complexité du diagramme et de voir pourquoi le bissecteur hyperbolique qui était généré en une seule fois dans le diagramme de points doit maintenant être considéré comme

deux arêtes différentes ; c'est clairement parce que cela correspond à deux intersections différentes sur la surface représentative. Et ce, alors même que la projection horizontale des arêtes, arcs d'ellipse ou d'hyperbole, est parfaitement continue et semble appartenir au même bissecteur (voir par exemple l'ellipse en violet sur la figure 3.10). C'est d'ailleurs un théorème bien connu en géométrie descriptive que deux courbes de l'espace ayant, en un point commun, des tangentes appartenant à un même plan perpendiculaire au plan de projection donnent un raccordement continu sur ce même plan (Cagnac, 1949, p. 152).



**Figure 3.11**

La figure finale de ce paragraphe (Fig. 3.11) montre, avec une légère perspective pour obtenir un effet de relief, le véritable diagramme obtenu par l'intersection des surfaces représentatives.

### 3.5 DIAGRAMME DE VORONOÏ EN GÉOMÉTRIE HYPERBO LIQUE

Ce type de diagramme est traité ici car ses propriétés dépendent étroitement de celles des diagrammes de Voronoï de cercles en distance euclidienne, même si ce rapport n'est pas immédiatement apparent.

Les diagrammes de Voronoï de points ne font intervenir que les médiatrices entre deux points et aucune notion de parallélisme. En conséquence la notion de diagramme de Voronoï ne nécessite pas l'usage du cinquième postulat d'Euclide sur le parallélisme. Il est donc possible de définir les mêmes diagrammes de points en géométrie hyperbolique. Ils sont définis dans l'article : « Output sensitive construction of the Delaunay triangulation of points lying in two planes » (Boissonnat, 1996). La figure 3.12 réalisée avec le logiciel « noneuclid » de Rice University montre un diagramme de Voronoï réalisé en géométrie hyperbolique en utilisant la première représentation de Poincaré.

#### 3.5.1 La première représentation de Poincaré

Dans cette représentation, les points du plan hyperbolique sont représentés par un disque ouvert. La frontière de ce disque est un cercle, appelé *l'absolu*, qui représente les points à l'infini, lesquels points sont appelés *points idéaux*. Théoriquement, il ne devrait pas y avoir de points au-delà de l'absolu, mais les points qu'on y trouve, n'appartenant donc pas au plan hyperbolique, sont appelés *ultra-idéaux* (Faber, 1983, ch. 5). Les droites de ce plan hyperbolique sont représentées par des cercles orthogonaux à l'absolu ; ceci inclut les diamètres de l'absolu comme cas limite.

Non seulement les droites sont des cercles dans cette représentation, mais encore les cercles hyperboliques sont aussi des cercles : tout cercle euclidien *strictement* inclus dans l'absolu est un cercle hyperbolique (et il n'y en a pas d'autres). Le centre du cercle hyperbolique est par contre différent du centre du cercle euclidien, mais les trois centres hyperbolique, euclidien et le centre de l'absolu sont, dans cet ordre, alignés (Greenberg,

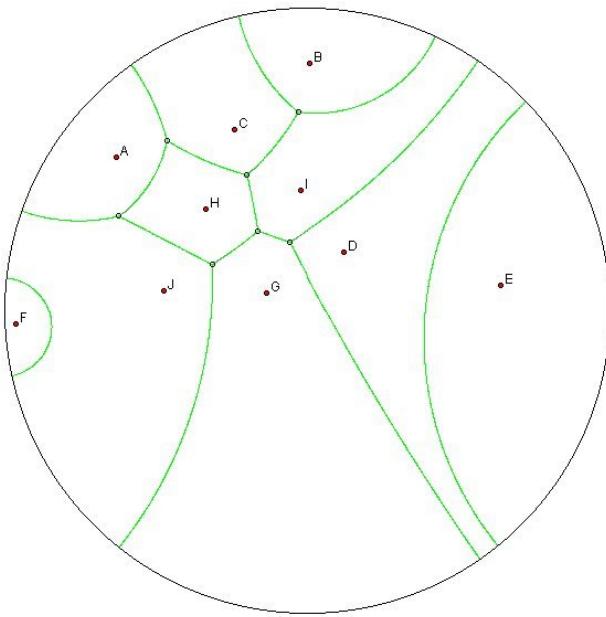


Figure 3.12

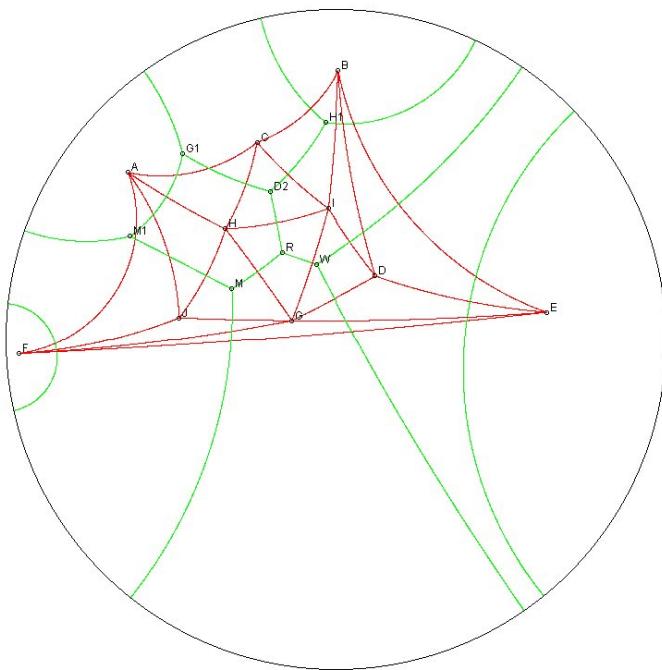


Figure 3.13

1980, p. 227).

En géométrie euclidienne, on sait bien que la limite d'un cercle dont le centre tend vers un point à l'infini est une droite perpendiculaire à la direction définie par ce point à l'infini. En géométrie hyperbolique, ce n'est plus le cas, on appelle *horocycle* la courbe limite d'un tel cercle et par abus de langage on appelle souvent *centre de l'horocycle* le point de contact de l'horocycle avec l'absolu (Greenberg, 1980, p. 325).

Cet horocycle est représenté par un cercle euclidien tangent à l'absolu : c'est donc une courbe ouverte (semblable à une parabole) et son centre hyperbolique est le point de contact de ce cercle avec l'absolu.

### 3.5.2 Propriétés des diagrammes hyperboliques

Les propriétés des arêtes et des sommets de Voronoï de ce diagramme de points sont exactement les mêmes que dans l'espace euclidien, les démonstrations étant identiques, lorsque le parallélisme n'intervient pas.

Ainsi sur la figure 3.12 les arêtes du diagramme présenté sont bien des segments de droites hyperboliques portés par la médiatrice du segment hyperbolique qui joint deux sites : ils sont dessinés comme des arcs de cercles euclidiens orthogonaux à l'absolu.

Une arête (resp. sommet) est donc le lieu des centres des plus grands cercles vides de sites passant par deux (resp. trois) sites ponctuels.

L'important en terme de diagramme de Voronoï est que les cercles soient des cercles car alors un cercle vide euclidien reste un cercle vide hyperbolique et réciproquement.

Lorsque le parallélisme intervient, c'est-à-dire lorsque l'on touche l'absolu, tout change. Ainsi on voit immédiatement sur la figure (Fig. 3.13) que les diagrammes de Voronoï dans les espaces euclidien et hyperbolique sont pourtant différents non seulement à cause de la nature des droites, mais aussi parce que les enveloppes convexes sont différentes : c'est le polygone ABF en géométrie euclidienne et le polygone ACBEF en géométrie

hyperbolique. La topologie des deux graphes est donc essentiellement différente. Un autre exemple existe dans la littérature de diagramme de Voronoï dans lequel un site n'appartenant pas à l'enveloppe convexe euclidienne a néanmoins un secteur de Voronoï non borné : c'est celui des diagrammes de Voronoï dans  $L_1$  donné dans le livre d'Okabe et consort : Spatial tessellations : concepts and applications of Voronoï diagrams (Okabe, 1992, p. 187).

### 3.5.3 SOMMET À DISTANCE INFINI

On va utiliser la définition suivante :

**Définition 8 (sommet à l'infini)** : *On appelle sommet à l'infini ou sommet idéal d'un diagramme de Voronoï de points en géométrie hyperbolique les points d'intersection des arêtes du diagramme avec l'absolu.*

C'est donc le centre des horocycles vides de sites touchant deux sites ponctuels. Il n'est pas possible d'utiliser directement la notion de « plus grand horocycle », le rayon n'ayant pas de sens ici, mais la notion d'inclusion l'un dans l'autre d'horocycle de même centre est suffisante, le sommet de Voronoï à l'infini d'un diagramme hyperbolique aura la propriété d'être le centre de l'horocycle vide tel que tout autre horocycle de même centre dans lequel il serait inclus soit non-vide de sites.

Par convention on va considérer les segments de l'absolu situés entre deux sommets comme des arêtes du diagramme qui devient donc un diagramme toujours connexe (cette affirmation sera justifiée au §6.3) et permet d'utiliser sans problème la structure de données qui sera définie au chapitre 7, (Définition 7.1.1). Cette convention est à comparer bien sûr avec celle faite au paragraphe 1.3.3, p. 7 mais doit aussi être comparée avec ce qui est fait dans le chapitre 5.

## CHAPITRE IV

### REPRÉSENTATION DES DIAGRAMMES DE PUISSANCE ET DES DIAGRAMMES DE MÖBIUS

Dans le texte déjà cité de Boissonnat (Boissonnat, 2003), celui-ci introduit les diagrammes de Möbius dans  $\mathbb{R}^d$  qui généralisent les diagrammes de puissance et les diagrammes de points à pondération multiplicative. On va ici se limiter aux diagrammes dans  $\mathbb{R}^2$  de manière à montrer l'intérêt des coordonnées bipolaires pour étudier les représentations des diagrammes de points pondérés par surfaces de révolution à axes parallèles.

#### 4.1 Représentation par une surface composite

On va auparavant généraliser aux diagrammes de points pondérés par une distance quelconque,  $\delta(\rho)$ , l'usage fait des coordonnées bipolaires pour les ovales de Descartes.

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère deux surfaces de révolution  $\Sigma_1 : z = \varphi \left( \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \right)$  et  $\Sigma_2 : z = \varphi \left( \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \right)$  (Fig. 4.1 (a)) dont les axes, verticaux, se projettent selon  $F_1 = (x_1, y_1, 0)$  et  $F_2 = (x_2, y_2, 0)$  sur le plan horizontal. En éliminant  $z$  entre ces deux équations on obtient :

$$\varphi(\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}) = \varphi(\sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2})$$

qui est l'équation de la projection horizontale  $\mathcal{B}$  de la courbe  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ . Si on utilise des coordonnées cylindriques, sur l'axe  $F_1 z$  on a  $\Sigma_1 : \varphi(\rho_1)$  et sur l'axe  $F_2 z$  on a  $\Sigma_2 : \varphi(\rho_2)$ . L'équation  $\varphi(\rho_i) = \varphi(\rho_j)$  est donc l'équation de  $\mathcal{B}$  en *coordonnées bipolaires*, ayant pour

foyers  $F_1, F_2$ .

Si la fonction  $\varphi$  est égale à la distance pondérée  $\delta$  choisie, on voit que l'on obtient directement l'équation du bissecteur  $\mathcal{B}_{F_1 F_2}$ . On note que cela reste vrai s'il existe une fonction  $g$ , continue, bijective, strictement croissante, avec  $\varphi(\rho) = g(\delta(\rho))$  (par exemple,  $g(x) = x^2$  ou  $g(x) = \sqrt{x}$ ).

On considère maintenant trois points :  $M_1 \in \Sigma_1$  et  $M_2 \in \Sigma_2$  sur la même verticale et leur projection  $m$  sur le plan horizontal. Dans un système mixte bipolaire-cartésien, leurs coordonnées sont :

$$M_1(\rho_1, \rho_2, z_1) = (\rho_1, \rho_2, \varphi(\rho_1)); \quad (4.1)$$

$$M_1(\rho_1, \rho_2, z_2) = (\rho_1, \rho_2, \varphi(\rho_2)); \quad (4.2)$$

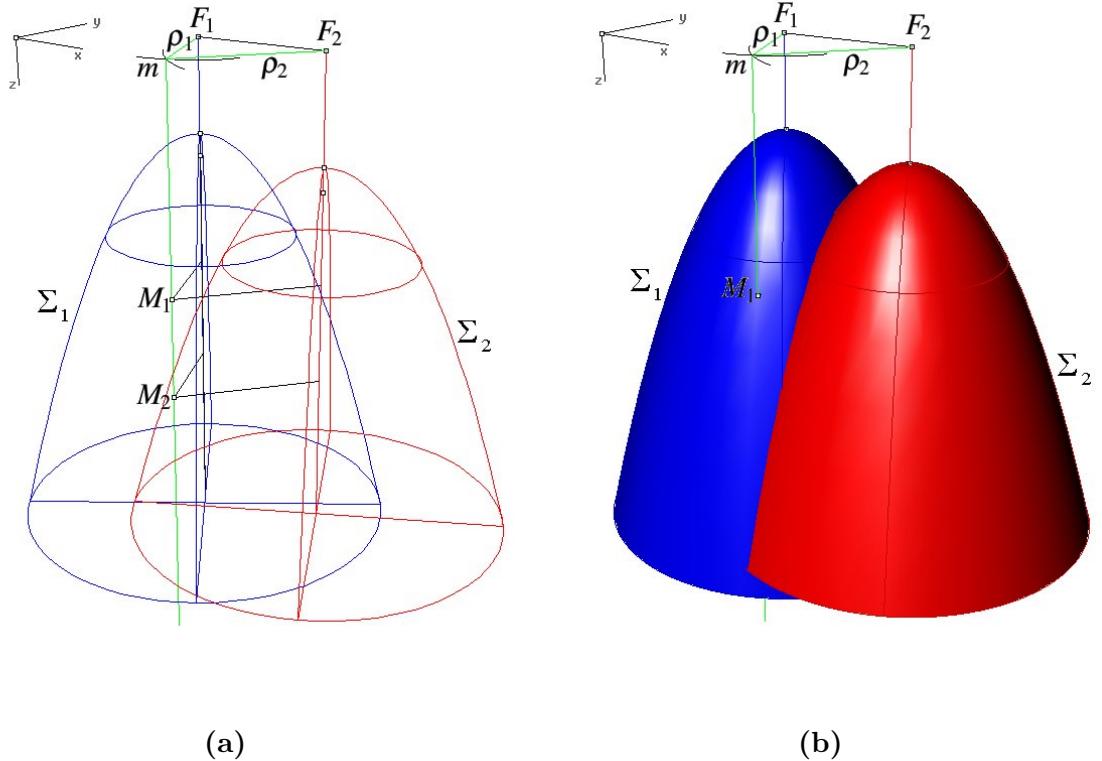
$$m(\rho_1, \rho_2, 0). \quad (4.3)$$

Si  $m$  appartient au secteur de Voronoï de  $F_1$  on a :  $m \in \mathcal{V}(F_1) \Leftrightarrow \delta(\rho_1) < \delta(\rho_2)$  et donc si  $\varphi(\rho) = g(\delta(\rho))$ , la fonction  $g$  vérifiant les conditions fixées plus haut, on obtient :  $\varphi(\rho_1) < \varphi(\rho_2) \Leftrightarrow z_1 < z_2$  ce qui revient à dire que  $M_1$  est visible, alors que  $M_2$  ne l'est pas (Fig 4.1 (b)).

Avant d'appliquer ce principe aux diagrammes de Möbius on remarque que si la fonction  $g$  est égale à l'identité, la distance verticale euclidienne,  $d(mM_1)$  (Fig. 4.1 (a)), représente directement la distance pondérée :  $d(mM_1) = \delta(mF_1)$  et dans ce cas seulement.

## 4.2 Les diagrammes de puissance

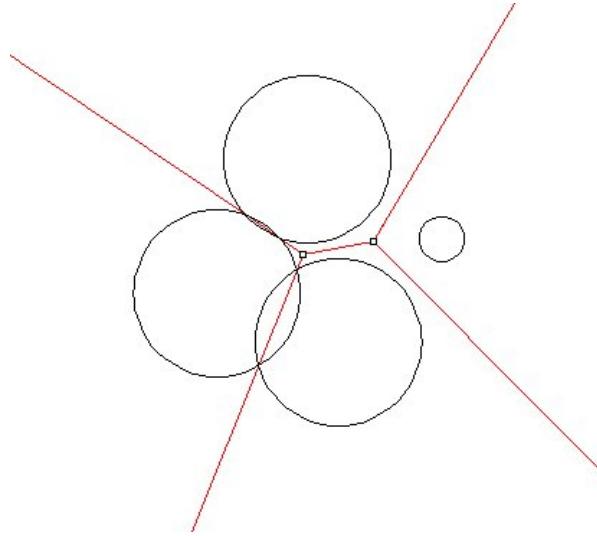
Comme on l'a vu dans l'étude bibliographique (§1.6.1), ces diagrammes sont définis avec une distance que l'on peut exprimer de la manière suivante pour un site ponctuel  $F$ , en coordonnées bipolaires,  $\delta(M, F) = \rho^2 - r^2$ . C'est aussi la distance tangentielle du point courant  $M$  au site circulaire  $\mathcal{C}$  de rayon  $r$  et donc la puissance du point  $M$  par rapport à ce site. Les bissecteurs sont donc les axes radicaux des cercles-sites. La figure 4.2 donne un exemple très simple de ce type de diagramme.



**Figure 4.1**

Aurenhammer a montré que ce type de diagramme pouvait se représenter comme la projection sur le plan horizontal de la figure formée par l'intersection de plans avec un paraboloïde de révolution (Aurenhammer, 1991, p. 381). L'intersection de chaque plan avec le paraboloïde donne une ellipse qui se projette toujours suivant un cercle représentant le cercle-site et l'intersection des plans se projettent suivant des droites qui sont les axes radicaux des cercles et donc les bissecteurs des sites correspondants. Ce type de représentation est d'ailleurs étendu aux diagrammes de Möbius par Boissonnat.

En application de ce qui précède on peut aussi représenter ces diagrammes par une forêt de surfaces de révolution dont les méridiennes ont pour équations cartésiennes  $z = \rho_i^2 - r_i^2$ , c'est à dire des paraboloïdes de révolution de même paramètre et dont le sommet est à une hauteur variable  $r_i$ . L'interprétation en cercles-sites revient bien sûr à déplacer verticalement le plan horizontal de la figure 4.1 plus bas que le plus bas des



**Figure 4.2**

sommets des paraboloïdes.

### 4.3 Les diagrammes de Möbius

Dans  $\mathbb{R}^2$ , la généralisation faite par Boissonnat s'exprime avec les mêmes notations sous la forme :  $\delta(M, F) = \frac{\rho^2 - r^2}{s^2}$ . On se limitera ici à des termes de même signe ce qui ne limitera pas vraiment la généralité du résultat comme on le verra plus loin. Un bissecteur de diagramme de Möbius a pour équation bipolaire :

$$\frac{\rho_1^2 - r_1^2}{s_1^2} = \frac{\rho_2^2 - r_2^2}{s_2^2}, \quad (4.4)$$

qu'on peut écrire sous la forme :  $\frac{\rho_1^2}{s_1^2} - \frac{\rho_2^2}{s_2^2} = \frac{r_1^2}{s_1^2} - \frac{r_2^2}{s_2^2}$ . C'est donc un cercle dont le centre divise le segment  $F_1F_2$  dans le rapport  $\frac{s_1}{s_2}$  (Crofton, 1866).

Les surfaces de révolution ont maintenant pour méridienne  $z = \frac{\rho_1^2 - r_1^2}{s_1^2}$ , ce sont donc des paraboloïdes de révolution quelconques d'axes verticaux.

Si on ne veut pas utiliser la propriété donnée par Crofton on peut aussi utiliser un théorème très classique de géométrie descriptive concernant l'intersection de quadriques

de révolution à axes parallèles (FGM, 1909, théorème 1054 p. 646).

**Théorème 7** *L'intersection de deux quadriques de révolution, à axes parallèles, et dont les centres déterminent une droite perpendiculaire aux axes de rotation, se projette suivant un cercle sur tout plan perpendiculaire aux axes.*

Si les centres sont perpendiculaires aux axes de révolution qu'on choisit verticaux, ils sont au même niveau. On applique ce théorème à nos deux paraboloïdes dont les centres sont à l'infini, donc au même niveau ! Ceci donne une démonstration « dans l'espace » du résultat de Crofton.

La figure 4.3 montre le même diagramme de puissance que sur la figure 4.2 réalisé avec des paraboloïdes de révolution (bien entendu le logiciel ne permet pas d'obtenir des paraboloïdes couvrant tout le plan). La figure 4.4 donne une vue perspective des mêmes paraboloïdes

La dernière page du chapitre montre deux figures analogues aux précédentes pour un diagramme de Möbius ; les sites ponctuels y sont représentés par des carrés blancs. On notera que la précision est moindre.

De manière similaire à ce qui a été vu au paragraphe 2.3.1 (p. 31) on retrouve les diagrammes de puissance avec  $s = 1$  et les diagrammes multiplicatifs avec  $r = 0$ . Les diagrammes de Möbius peuvent s'interpréter comme une pondération composite du carré de la distance euclidienne au site  $F$  : une pondération par soustraction en  $\frac{r^2}{s^2}$  et une pondération multiplicative en  $\frac{1}{s^2}$ . On peut donc aussi les interpréter comme une pondération multiplicative en  $\frac{1}{s^2}$  de la distance tangentielle au site circulaire  $\mathcal{C}$  de rayon  $r$ . Le schéma suivant résume la situation dans  $\mathbb{R}^2$  :

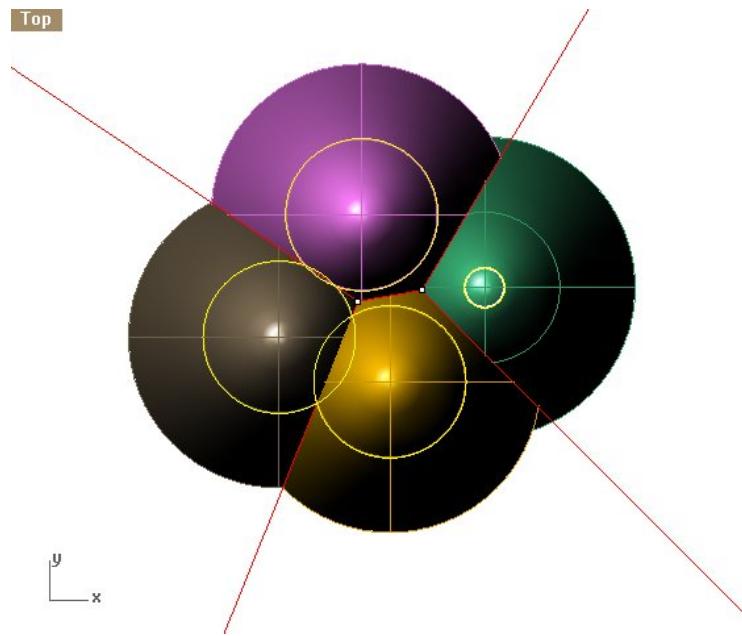


Figure 4.3

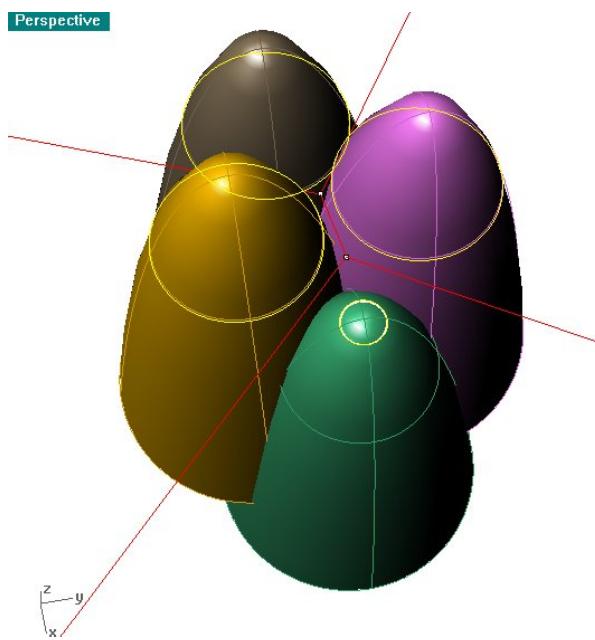
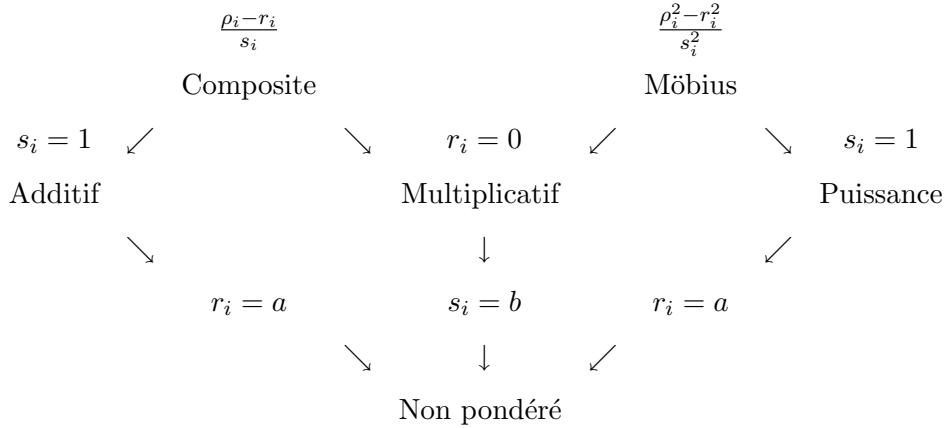


Figure 4.4



**Remarque 6 (Diagramme de points pondérés à trois paramètres)** : La nature du schéma suggère immédiatement de voir s'il serait possible d'avoir un type unique de diagrammes de points englobant les deux principales familles de diagrammes : composites et Möbius. En considérant les diagrammes ponctuelles, il y aurait plusieurs possibilités mais en considérant tous ces diagrammes comme des diagrammes de cercles, la plus intéressante semble être de définir des diagrammes de points utilisant une distance angulaire  $\alpha$  au cercle :  $\delta(MF) = d(MP)$  (Fig. 4.5). La distance pondérée est alors définie par  $\delta(MF) = \frac{-r \sin \alpha + \sqrt{\rho^2 - r^2 \cos^2 \alpha}}{s}$ . Ainsi avec  $\alpha = 0$  on obtient les diagrammes de Möbius :  $\delta(MF) = \frac{\sqrt{\rho^2 - r^2}}{s}$  et avec  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  les diagrammes composites :  $\delta(MF) = \frac{\rho - r}{s}$ .

**Remarque 7** : Le choix fait de prendre les coefficients de même signe n'est pas nécessaire mais simplifie l'exposition des propriétés. Si les coefficients n'étaient pas tous de même signe on serait amené à considérer un équivalent des cycles pour les demi-cones.

#### 4.4 Complexité

La représentation choisie précédemment pour les diagrammes multiplicatifs était celle de cônes de révolution à sommets coplanaires. En utilisant la fonction  $g(x) = x^2$  on voit que l'on peut aussi utiliser une forêt de paraboloïdes de révolution de paramètres quelconques mais de sommets coplanaires dont les méridiennes ont pour équations  $z = \frac{\rho_i^2}{s_i^2}$ . On perd ainsi la mesure directe de la distance suivant  $Oz$ , mais on gagne le fait que l'on a une

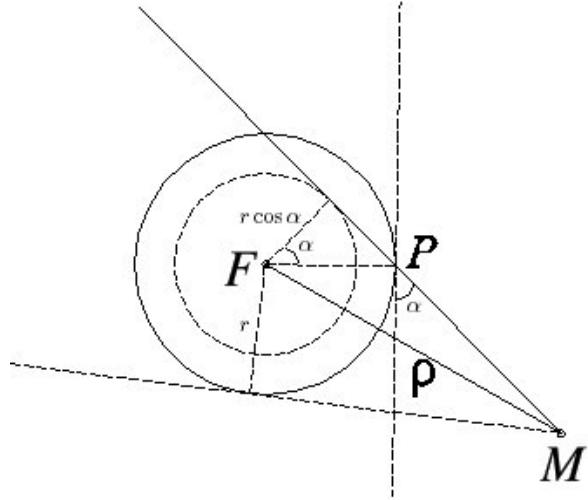


Figure 4.5

représentation cohérente pour traiter les diagrammes de Möbius.

La démonstration du théorème 2 (p. 42) reste valable en remplaçant cône par paraboloïde, on en déduit donc le théorème suivant :

**Théorème 8** : *Le nombre de sommets de Voronoï d'un diagramme de Möbius ( $\{F_i, \frac{\rho_i^2 - r_i^2}{s_i^2}, i = 1, n\}$ ) est égal ou inférieur à celui du diagramme multiplicatif dont il est issu ( $\{F_i, \frac{\rho_i^2}{s_i^2}, i = 1, n\}$ ).*

Son corollaire a déjà été démontré de manière beaucoup plus générale par Boissonnat (Boissonnat, 2003) dans  $\mathbb{R}^d$  :

**Corollaire 4** : *La complexité structurelle d'un diagramme de Möbius dans  $\mathbb{R}^2$  est en  $\mathcal{O}(n^2)$  et atteint  $\Theta(n^2)$  dans le pire des cas.*

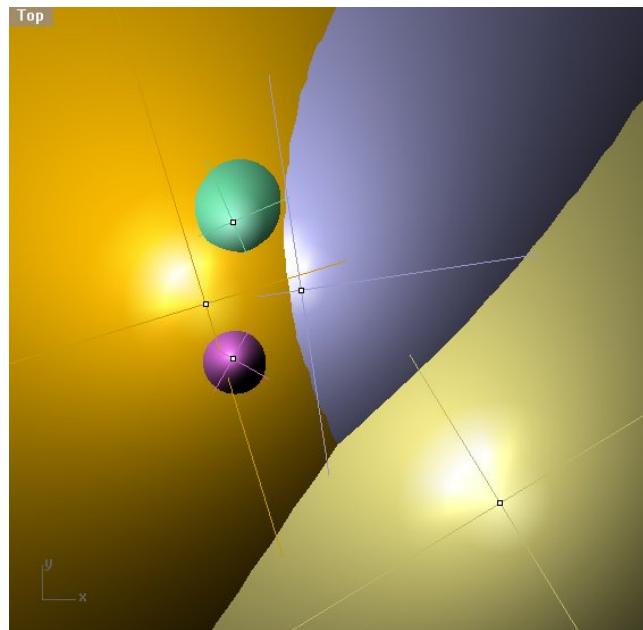
## 4.5 Conclusion

En combinant les représentations données par Fortune (Fortune, 1987), Aurenhammer (Aurenhammer, 1984), Boissonnat (Boissonnat, 2003) et celles qui précédent, on voit la diversité des représentations possibles dans des diagrammes de Voronoï de points ou de cercles pondérés dans  $\mathbb{R}^2$  par des surfaces dans  $\mathbb{R}^3$ . Les diagrammes multiplicatifs, situés au confluent des diagrammes composites et des diagrammes de Möbius, sont particulièrement bien servis à cet égard. Le choix de la représentation dépend bien sûr de l’application ; la représentation par surfaces composites n’est probablement pas la plus facile à manipuler, mais l’algorithme à balayage par cônes qui termine cette thèse montre bien son intérêt. Aucun algorithme pour diagramme de Möbius n’est présenté ici ; toutefois les principes développés dans le chapitre 12 montrent que l’extension aux forêts de paraboloïdes mérite sûrement une étude.

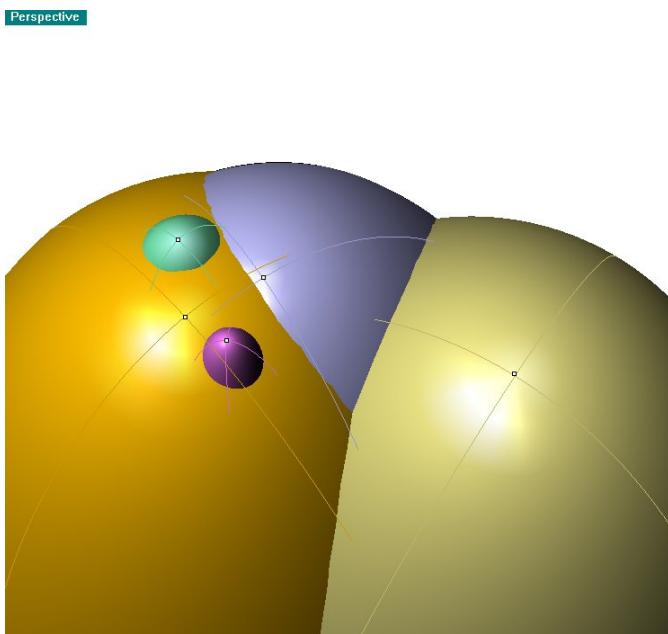
On peut récapituler les divers modes de représentation en coordonnées bipolaires des diagrammes de Voronoï de points ou de cercles pondérés par des surfaces composites formées de cônes ou de paraboloïdes de révolution à axes parallèles dans le tableau de la page suivante. Comme indiqué plus haut, notons que dans ce tableau la fonction  $\varphi(\rho)$  que l’on trouve dans la colonne bissecteur sous la forme  $\varphi(\rho_1) = \varphi(\rho_2)$  représente toujours l’équation de la méridienne de la surface de révolution d’axe vertical utilisée, même pour  $|\rho - r|$ , pas nécessairement la pondération  $\delta(\rho)$ . La représentation des diagrammes de points non-pondérés par des paraboloïdes de révolution de même paramètre à sommets coplanaires est utilisée par Fortune pour une démonstration de convexité (Goodman, 1997, ch.20 p. 379). À part les trois premières, les autres ne semblent pas avoir été utilisées auparavant.

**Tableau 4.1** Représentation des Diagrammes de Voronoï par des surfaces composites

<b>diagramme</b>	<b>bissecteur</b>	<b>équation bipolaire</b>	<b>surface composite</b>
points non pondérés	droite	$\rho_1 = \rho_2$	forêt de cônes équilatères à sommets coplanaires
points non pondérés	droite	$\rho_1^2 = \rho_2^2$	forêt de paraboloïdes de même paramètres à sommets coplanaires
points pondérés par soustraction - cercles avec distance algébrique (cycle)	branche d'hyperbole	$\rho_1 - r_1 = \rho_2 - r_2$	forêt de cônes équilatères
pondération multiplicative	cercle	$\frac{\rho_1}{s_1} = \frac{\rho_2}{s_2}$	forêt de cônes à sommets coplanaires
pondération multiplicative	cercle	$\frac{\rho_1^2}{s_1^2} = \frac{\rho_2^2}{s_2^2}$	forêt de paraboloïdes à sommets coplanaires
pondération composite - cercle avec pondération multiplicative de la distance algébrique au cercle	ovale de Descartes (simple)	$\frac{\rho_1 - r_1}{s_1} = \frac{\rho_2 - r_2}{s_2}$	forêt de cônes
cercles avec distance euclidienne	coniques à centre	$ \rho_1 - r_1  =  \rho_2 - r_2 $	chaîne de volcans
cercles avec distance tangentielle	droite	$\rho_1^2 - r_1^2 = \rho_2^2 - r_2^2$	forêt de paraboloïdes de même paramètre
cercles avec distance tangentielle à pondération multiplicative	cercle	$\frac{\rho_1^2 - r_1^2}{s_1^2} = \frac{\rho_2^2 - r_2^2}{s_2^2}$	forêt de paraboloïdes



**Figure 4.6**



**Figure 4.7**

## CHAPITRE V

# LES DIAGRAMMES DE VORONOÏ EN GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Vouloir faire une interprétation projective d'un algorithme pour calculer un diagramme de Voronoï, surtout avec une distance euclidienne, peut apparaître comme une perte de temps puisque cette structure est métrique par nature alors que la géométrie projective, elle, s'intéresse justement aux aspects non métriques d'une structure. Pourtant on trouve dans la littérature des généralisations non métriques des diagrammes de Voronoï, diagrammes dits abstraits, définis dans le plan par des courbes bissectrices et non par une distance (Klein, 1989). Une généralisation "agressive" du même type aux courbes algébriques en espace projectif pourrait donc se baser sur la notion de courbe équidistante (Brocard, 1967, T.2, p. 137), mais n'est pas vraiment utile ici. Initialement, le problème qui a motivé l'étude était celui des éléments à l'infini du diagramme (événement de type-2), que la géométrie projective ne considère pas comme un cas exceptionnel, mais la curiosité sur ce sujet s'est révélée plus fructueuse que prévue.

### 5.1 DÉFINITIONS

On utilise les définitions suivantes :

**Définition 9 ( cercle )** : *Un cercle est une courbe algébrique de degré deux passant par les points cycliques du plan.*

Il y a donc quatre types de cercles (Fig.5.1) :

- conique non-dégénérée passant par les points cycliques
- point, c'est-à-dire une paire d'isotropes passant par ce point
- une droite du plan euclidien et la droite de l'infini notée  $\infty_\pi$
- la droite de l'infini considérée comme droite (équation  $Z^2 = 0$ )

**Définition 10 (centre d'un cercle) :** *Le centre d'un cercle est défini comme l'enveloppe de ses normales.*

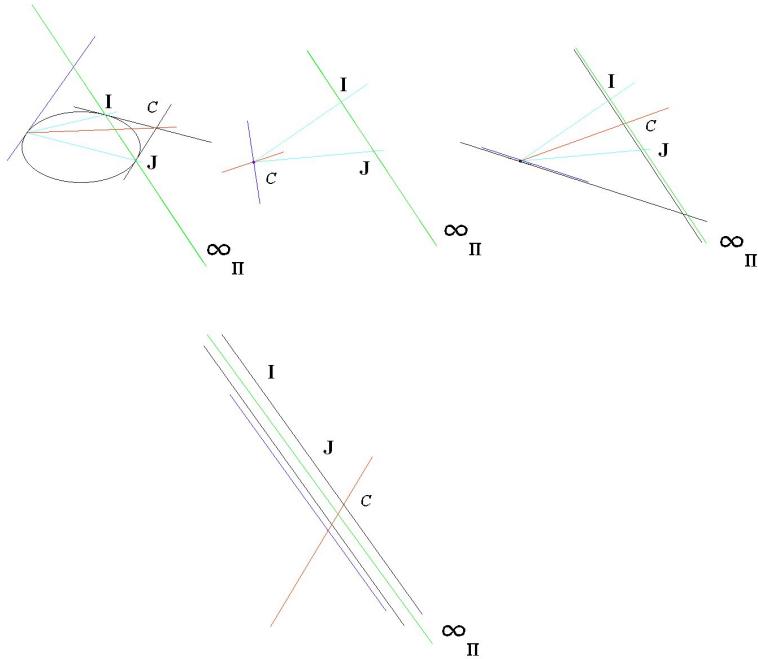
Cette définition a l'avantage d'être unique pour les quatre types de cercles. C'est donc le pôle de la droite de l'infini dans les deux premiers cas et le conjugué harmonique du point d'intersection de l'autre droite avec la droite de l'infini par rapport aux points cycliques dans le troisième cas. On restreint cette enveloppe à tous les points de la droite de l'infini dans le dernier cas.

On va aussi utiliser le fait que l'intérieur d'une conique se définit facilement en espace projectif : un point  $M$  est *intérieur* à une conique si les points d'intersection avec la conique d'une droite issue de  $M$  sont séparés par ceux d'une autre droite issue du même point. Algébriquement, si la conique a pour équation  $F(X, Y, Z) = 0$ , le signe de  $F(M)$  nous donne la position de  $M$  par rapport à la conique. Pour le troisième type de cercle on considère un demi-plan ouvert comme intérieur et il est défini sans ambiguïté par le signe de  $F(M)$ . « L'intérieur » de la droite de l'infini est toujours vide.

On ne considère plus de notion de distance pour définir un bissecteur.

**Définition 11 (bissecteur) :** *Le bissecteur de deux cercles-sites est le lieu du centre d'un cercle propre ou impropre, donc du pôle de la droite de l'infini, tangent à ces deux cercles sites.*

**Définition 12 (arête) :** *L'arête de Voronoï de deux cercles-sites est définie comme les points du bissecteur qui sont centre d'un cercle tangent à ces deux cercles-sites et n'ayant aucun point réel d'un autre cercle-site à l'intérieur ou sur le cercle lui-même.*



**Figure 5.1**

La nature du contact, intérieur ou extérieur, entre le cercle vide et les sites sera définie plus loin.

**Définition 13 (sommet)** : *Un sommet de Voronoï reste défini comme un point appartenant à deux arêtes ou plus.*

## 5.2 IMMERSION D'UN DIAGRAMME DE VORONOÏ DANS UN PLAN PROJECTIF.

On immerge maintenant ce diagramme de Voronoï de points pondérés ou pas dans un plan projectif en considérant ce diagramme comme un diagramme de cercles les rayons étant nuls s'il n'y a pas de pondération. Le point essentiel de cette immersion est qu'on y rajoute un site spécial qui est le cercle du dernier type ( $Z^2 = 0$ ) et on démontre le théorème suivant :

**Théorème 9 (immersion d'un diagramme dans un plan projectif)** *La partie à distance finie d'un diagramme de Voronoï de cercles (éventuellement de rayons nuls) comprenant la droite double de l'infini comme site supplémentaire est identique à celle du diagramme de Voronoï de cercles dans le plan euclidien comprenant les mêmes sites à distance finie.*

*Démonstration :* La démonstration est en deux parties.

Le diagramme de Voronoï du diagramme initial est inclus dans le nouveau diagramme obtenu :

Considérons un cercle vide de sites dans le plan euclidien (comme  $V_{\mathcal{C}\mathcal{C}'\mathcal{C}''}$  sur la figure 5.2). Après immersion dans le plan projectif, ce cercle reste un cercle puisque la conique continue de passer par les points cycliques et reste vide de sites puisque le signe de  $F(M)$  ne change pas, ce qui traduit le fait que les cercles n'ayant pas de points réels à l'infini ne touchent pas le site spécial.

Les éléments supplémentaires, arêtes ou sommets, du nouveau diagramme sont tous à l'infini :

Les éléments supplémentaires de ce diagramme ne peuvent être que les arêtes entre un site à distance finie et le site spécial et les sommets entre deux sites à distance finie et le site spécial puisque c'est le seul nouveau site. Or tout cercle vide tangent à un site à distance finie (rayon nul ou pas) et à ce site spécial ne peut être qu'un cercle du troisième type, et donc son centre ne peut être que sur  $\infty_\pi$ .  $\square$

La définition des sommets et arêtes à l'infini s'en déduit naturellement :

**Définition 14 (sommets et arêtes à l'infini)** : *Les sommets et arêtes à l'infini dans un diagramme de Voronoï en espace projectif incluant le site  $\infty_\pi$  sont les extrémités des droites tangentes à un ou deux sites à distance finie et définissant un demi-plan vide de sites à distance finie.*

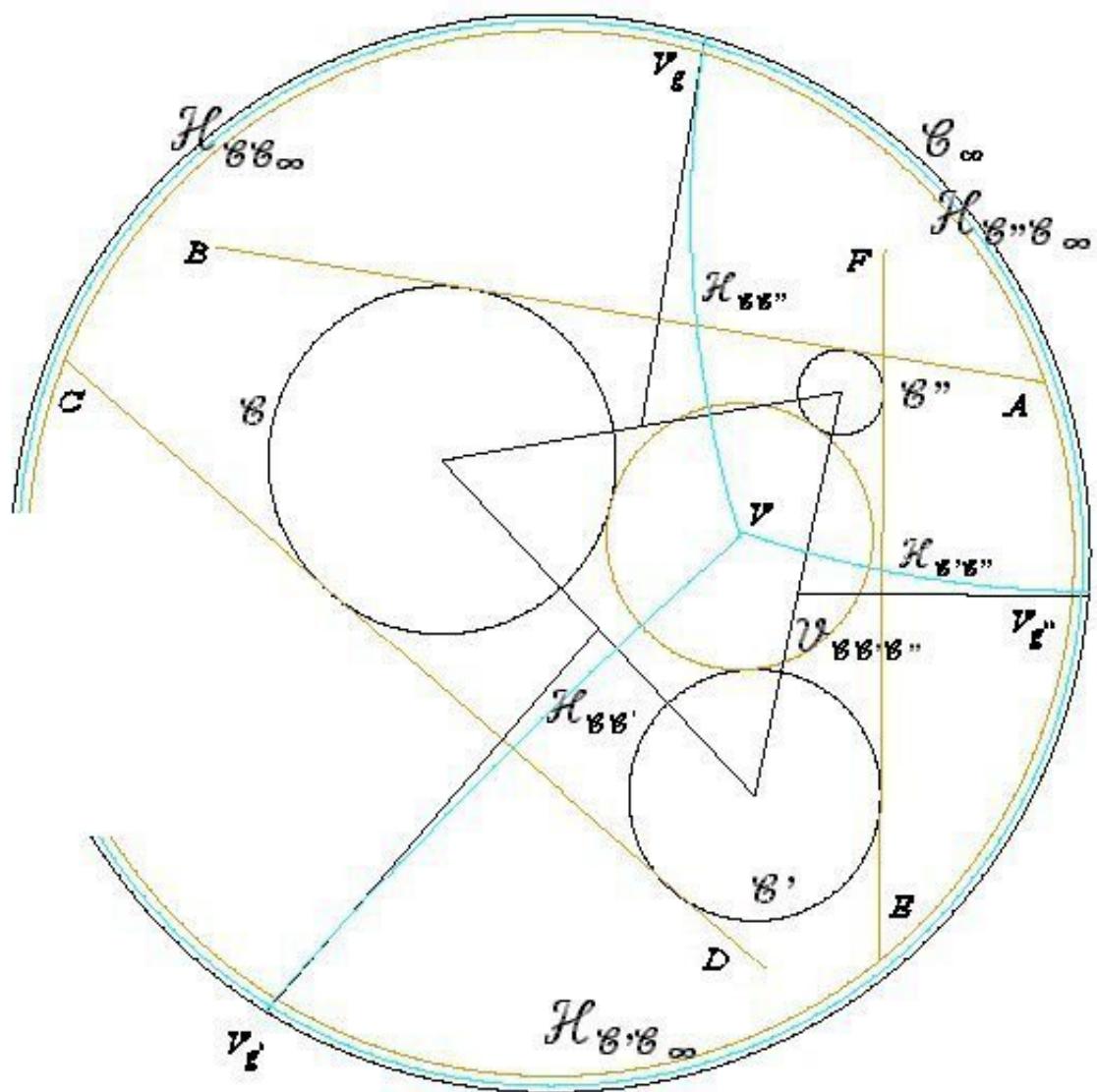


Figure 5.2

Les avantages de cet ajout sont, d'une part de permettre de définir des sommets de Voronoï à l'infini, qui sont, notons-le, les points à l'infini des bissecteurs hyperboliques. D'autre part, puisque de tout point de la droite de l'infini on peut tracer une tangente à un site à distance finie définissant un demi-plan vide de sites tout point de  $\infty_\pi$  appartient à une arête. La droite de l'infini est donc formée d'une ou plusieurs arêtes du diagramme. Or, puisque toute partie connexe du diagramme est non bornée, on a le corollaire suivant :

**Corollaire 5 (connexité)** : *Tout diagramme de Voronoï de cercles dans le plan projectif comprenant le site spécial est connexe.*

Ajoutons que considérer une tangente commune à 2 cercles sites comme une conique dégénérée comprenant la tangente commune et la droite de l'infini est d'ailleurs une généralisation classique (cf : le cercle orthoptique de la parabole Brocard, 1967, T.1, p. 158). Le "centre" de ce cercle est le conjugué harmonique du point à l'infini de la tangente commune par rapport aux points cycliques, c'est-à-dire le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à la tangente commune. La droite support est telle que tous les sites soient dans le même demi plan, sauf le site  $\mathcal{C}_\infty$ , mais le cercle contient aussi la droite de l'infini.

L'ajout du site spécial est un moyen qui permet de séparer facilement les deux parties d'un bissecteur (conique) qui a des points d'intersection réels avec la droite de l'infini (hyperbole).

On voit qu'il n'y a plus de différence de nature entre les sommets à distance finie du diagramme et les points à l'infini des bissecteurs-hyperboles. Ceux-ci (notés  $V_g, V_{g'}, V_{g''}$  sur la figure 5.2) sont bien des sommets de Voronoï du diagramme projectif puisque ce sont les « centres » de plus grand cercle vide (demi-droite) pour trois sites, deux à distance finie et le cercle de l'infini.

De manière détaillée la figure (Fig. 5.2) montre le cas pour trois sites (la droite de l'infini y est représentée par un arc de cercle). On vérifie bien que le diagramme à distance finie

(sommet  $V$ ) ne change pas et l'on voit que la droite de l'infini supporte le site  $\mathcal{C}_\infty$ , les plus grands cercles vides (par exemple  $AB$  et  $\infty_\pi$ ), les bissecteurs et les arêtes de Voronoï à l'infini (par exemple  $V_gV_{g'}$ ).

### 5.3 Distances et conditions de contact

On a passé sous silence jusqu'à présent la nature des contacts des cercles vides avec les cercles sites. Cette définition est importante puisque les centres de ces cercles définissent les arêtes ou les sommets. Il y a en effet trois possibilités pour ce contact : le cercle vide peut être tangent extérieurement à tous les cercles, tangent intérieurement, ou enfin tangent intérieurement à certains et extérieurement à d'autres. Suivant la définition retenue, les arêtes seront différentes et donc le type de diagramme aussi.

En effet, si l'on s'intéresse à un point d'une arête qui est le centre d'un cercle vide tangent intérieurement (Fig. 8.4) ou extérieurement (Fig. 8.3) aux deux cercles en même temps, on obtient, avec les notations de la figure 2.1 :  $d(M, F_1) - d(M, F_2) = (d(M, T_1) + r_1) - (d(M, T_2) + r_2) = r_1 - r_2$ , c'est-à-dire que le bissecteur est une hyperbole.

Si l'on prend maintenant le centre d'un cercle tangent extérieurement à un cercle-site et intérieurement à l'autre, alors avec les mêmes notations que précédemment, s'il est intérieur au cercle de centre  $F_1$  et extérieur au cercle de centre  $F_2$  on a :  $d(M, F_1) + d(M, F_2) = (d(M, T_1) - r_1) + (d(M, T_2) + r_2) = r_2 - r_1$ . Ce point se trouve donc sur une arête elliptique par définition de l'ellipse.

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent (§3.1, p. 44) ce cas correspond à un diagramme de Voronoï de cercles en distance euclidienne. De même on retrouve que les bissecteurs du diagramme de Voronoï de points pondérés, représenté par des cercles, sont inclus dans les bissecteurs du diagramme de Voronoï euclidien de cercles correspondant.

De plus si l'on considère pour une même famille de cercles sites, le diagramme de points pondérés et le diagramme de cercles euclidien, au diagramme de points correspondent

l'ensemble des bissecteurs hyperboliques et pour obtenir le diagramme de cercles avec la distance euclidienne il faut y ajouter les bissecteurs elliptiques. Dans le plan euclidien, c'est la définition de la distance qui sépare les deux types de diagramme, on peut donc les séparer tout aussi facilement dans le plan projectif avec la définition du type de contact des cercles vides puisqu'à l'une des distances correspond un type de contact et un seul. C'est d'ailleurs logique puisque le plongement dans le plan projectif ne modifie que les points à l'infini du diagramme : les ellipses n'ont pas de points réels à l'infini et tous les bissecteurs ayant des points réels à l'infini sont des hyperboles. Ceci nous permet d'énoncer le théorème sur les conditions de contact :

**Théorème 10** : *Si l'on plonge une famille de cercles-sites d'un plan euclidien dans le plan projectif correspondant et qu'on y ajoute le site spécial  $Z^2 = 0$ , le diagramme de Voronoï de ces cercles dans le plan projectif est issu du diagramme de points pondérés si l'on impose des conditions de contact homogènes des cercles vides avec les cercles-sites, c'est-à-dire tangent simultanément intérieurement ou extérieurement aux cercles-sites. Si l'on n'impose pas cette condition, le diagramme de Voronoï obtenu est alors issu du diagramme de cercles avec une distance euclidienne.  $\square$*

On termine par une réciproque du théorème sur la connexité des diagrammes de Voronoï de cercles démontré précédemment (Théorème 4, p. 53).

**Théorème 11** : *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un diagramme de Voronoï de cercles plongé dans le plan projectif soit non-connexe est qu'il comporte un cercle-site formé d'un seul arc de cercle dont l'intérieur ne soit pas vide de sites.*

*Démonstration* : Avec le site spécial, l'extérieur n'est jamais vide et comme le plongement dans le plan projectif ne modifie pas les éléments à distance finie, il reste la condition nécessaire à démontrer.

S'il n'y a pas de cercle-site formé d'un seul arc de cercle, c'est que les cercles-sites forment un ensemble connexe. Dans ce cas d'après le théorème 5, le diagramme à distance finie est connexe. Comme d'autre part il n'y a pas de no man's land tout point du plan

appartient à un secteur de Voronoï; donc par rapport à un centre fixe quelconque, si le rayon polaire de ce point tend vers l'infini, ou bien le point appartient à plus d'un secteur de Voronoï si on fait varier l'angle polaire et donc le diagramme comporte une branche infinie d'où il est connexe ou bien il appartient à un seul secteur de Voronoï quelque soit son angle polaire et dans ce cas il y a bien un cercle-site qui n'a pas d'intersection avec d'autres sites.  $\square$

## 5.4 UN PARALLÈLE AVEC LA GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

On voit qu'avec ce plongement, le diagramme obtenu est d'une certaine manière beaucoup plus proche du diagramme hyperbolique vu précédemment (§3.5.3) que du diagramme euclidien classique. On pourrait refaire le même travail de définition avec l'absolu comme site spécial dans cette géométrie. Ainsi au sommet à l'infini hyperbolique correspondrait le même sommet projectif et à l'horocycle correspondrait la tangente commune.

## 5.5 CONCLUSION

Bien entendu on retrouve dans les deux cas, hyperbolique et projectif, au niveau du graphe, le graphe géométrique augmenté défini dans Klein (Klein, 1989, p. 11) ou dans Okabe (Okabe, 1992, p. 216). La différence est que, pour eux, ce graphe est conçu avec un site virtuel à l'infini qui est plutôt l'image du pôle d'une sphère par inversion. L'avantage de mettre un site circulaire réel à l'infini plutôt qu'un point est qu'il permet de se baser sur une notion beaucoup plus proche des diagrammes de Voronoï abstraits (Klein, 1988a) puisque le bissecteur projectif ne se base pas sur des propriétés métriques, mais bien sur des propriétés intrinsèques des coniques bissectrices. En plus comme on va traiter ces diagrammes avec des algorithmes à balayage par cercle, même pour des sites ponctuels, il n'y a pas d'inconvénient à rajouter un site circulaire supplémentaire, fût-il à l'infini.

Notons quand même qu'il n'est pas possible de relier directement la notion de bissecteurs projectifs à la définition de Klein puisque deux courbes bissectrices quelconques peuvent être confondues si l'on choisit trois sites dont le site de l'infini. De plus comme le montre Sharir, la solution récursive générale de Klein qui permet de calculer un diagramme de Voronoï abstrait en  $\mathcal{O}(n)$  ne peut pas s'appliquer aux sites pondérés par soustraction car le bissecteur entre deux sous-ensembles de sites n'est pas nécessairement acyclique.

## CHAPITRE VI

### LES DIAGRAMMES DE VORONOÏ SANS SOMMET

Les diagrammes de Voronoï sans sommet peuvent paraître une curiosité, car dans le cas des points dans le plan euclidien, le seul exemple possible est trivial. En effet, le plus simple exemple de diagramme de Voronoï sans sommet est celui d'une suite de trois points, ou plus, alignés en géométrie euclidienne. Dans ce cas les bissecteurs sont parallèles et l'on exclut en général ce cas comme celui de points qui ne sont pas en position générale.

On a tout d'abord un théorème très simple :

**Théorème 12 :** *Un diagramme de Voronoï sans sommet de  $n$  sites a au plus  $n - 1$  arêtes.*

*Démonstration :* En effet à chaque arête du diagramme correspond deux sites, s'il n'y a pas de sommet, arête et bissecteur sont confondus et chaque bissecteur partage le plan en deux parties disjointes puisqu'il n'y a pas de no man's land.

Donc si l'on prend un premier bissecteur, et s'il y a  $n$  sites, on a réparti les  $n - 2$  sites restant entre les deux régions, en réitérant dans chaque secteur le raisonnement jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de sites, on voit qu'il y a au plus  $n - 1$  bissecteurs.  $\square$

Notons que l'absence de no man's land est une propriété des diagrammes de Voronoï, s'il y en avait un on créerait une hiérarchie entre les sites de manière à attribuer les parties en litige. On peut voir sur ce sujet (Klein, 1989).

L'intérêt de ce type de diagramme vient donc du fait que la complexité intrinsèque d'un diagramme de Voronoï sans sommet est nécessairement en  $\mathcal{O}(n)$ , même s'il est issu d'un type de diagramme de Voronoï dont la complexité maximum est bien supérieure.

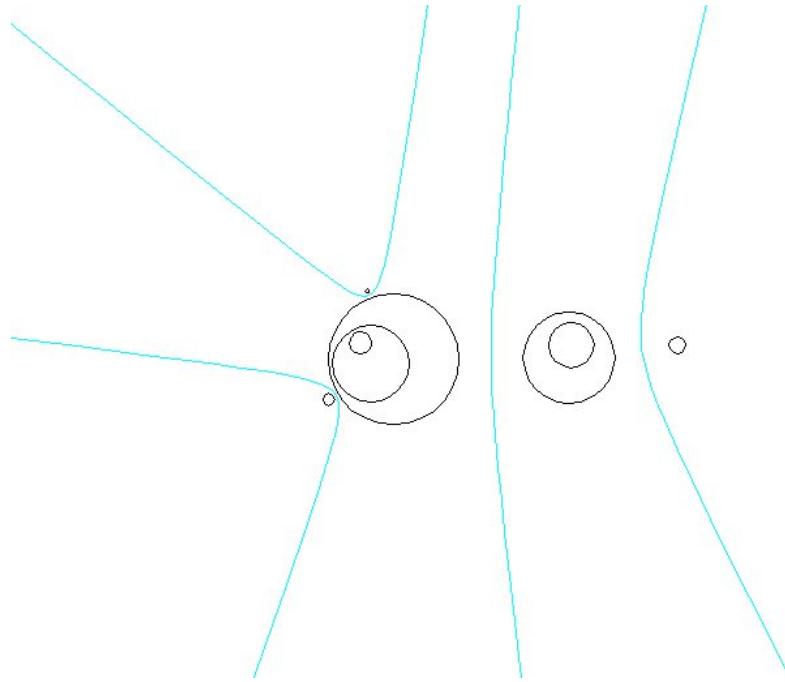
L'existence ou non de diagrammes sans sommet pour un type de diagramme de Voronoï donné est à traiter au cas par cas puisque, si dans le cas du plan le seul cas sans sommet est trivial, sur la sphère, il est certain qu'il ne peut y avoir de diagramme de points sans sommet, deux grands cercles étant toujours sécants.

Enfin, un diagramme sans sommet, avec au moins deux arêtes, est nécessairement non-connexe dans l'espace où on le considère puisqu'il n'y a pas d'intersection entre les bissecteurs.

## 6.1 DIAGRAMME DE VORONOÏ DE POINTS ET DE CERCLES PONDÉRÉS

Le premier véritable exemple de diagramme de Voronoï sans sommet est donné par Sharir dans le texte déjà mentionné (Sharir, 1985). Cependant lui aussi semble l'avoir considéré essentiellement comme un contre-exemple plus que comme une propriété naturelle d'un diagramme de Voronoï, même si on peut construire récursivement sur son principe un diagramme de Voronoï comportant des branches d'hyperboles non sécantes et éventuellement incluses les unes dans les autres. On peut même rajouter des sites dominés et l'on reste ainsi avec un diagramme sans sommet (Fig. 6.1).

Pourtant, un tel diagramme n'est pas vraiment sans sommet, puisque si on le considère comme un diagramme de Voronoï en géométrie projective, on a vu qu'il y a en fait des sommets qui sont les intersections à l'infini des bissecteurs : branches d'hyperboles et droite de l'infini. De même, dans l'exemple du diagramme ponctuel, les arêtes parallèles ont leur point d'intersection à l'infini.

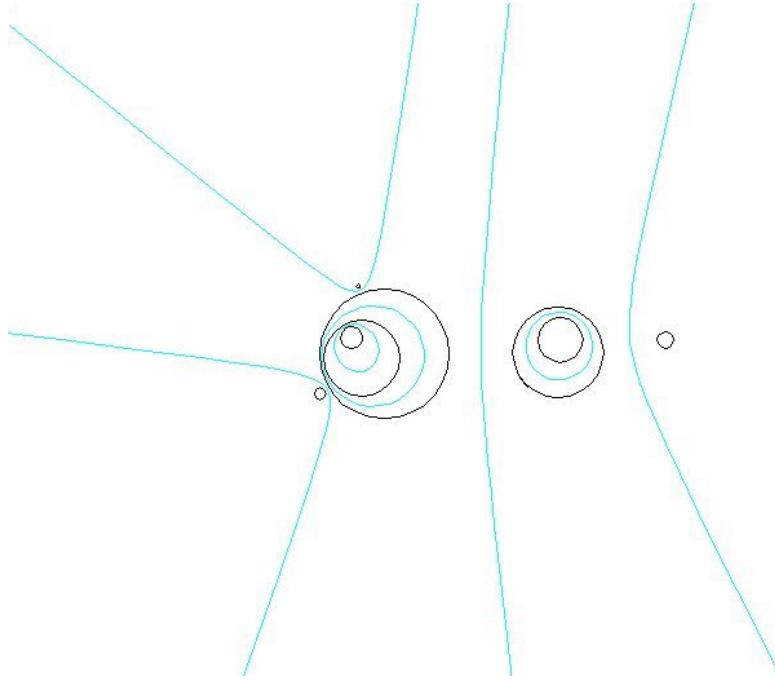


**Figure 6.1**

## 6.2 DIAGRAMME DE VORONOÏ DE CERCLES AVEC DISTANCE EUCLIDIENNE

Lorsque l'on traite le cas des diagrammes de Voronoï de cercles avec la distance euclidienne, on voit apparaître un autre cas, de nature totalement différente, de diagramme de Voronoï sans sommet. En effet, si l'on considère un diagramme de Voronoï de cercles inclus les uns dans les autres comme des poupees gigognes, on obtient un diagramme de Voronoï dans lequel les bissecteurs sont sans aucune intersection, au moins réelle, et donc sans sommet. Ce cas pouvant se combiner avec le précédent, on peut obtenir un diagramme de Voronoï du type de celui qui est sur la figure 6.2.

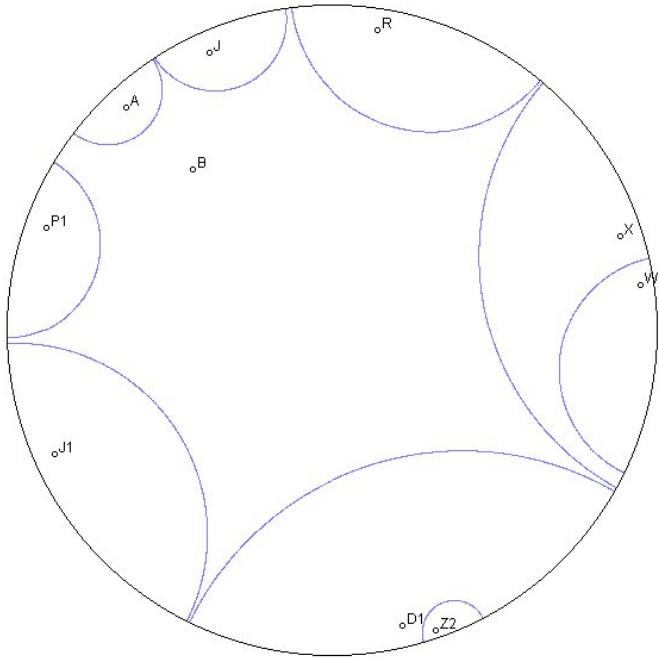
On a étendu la notion d'arêtes et de sommets au plan projectif en considérant des sommets et des arêtes à l'infini. A priori il paraît difficile de faire la même chose pour des points imaginaires qui seraient à l'intersection de deux arêtes elliptiques. Un sommet étant défini comme l'intersection de deux arêtes, si l'on a deux arêtes formées par des



**Figure 6.2**

ellipses complètes, il est certain que leurs quatre points d'intersection, même imaginaires, pourraient être vus comme des sommets. Cependant on ne voit pas bien si les sommets auraient alors une propriété autre que leur simple définition qui rendraient leur étude intéressante : les notions d'équidistance et de cercles vides disparaissent dès que l'on passe dans  $\mathbb{C}$ .

Si donc on n'étend pas les définitions des sommets, on voit qu'il y a deux types différents, éventuellement combinables, pour un diagramme de Voronoï de cercles sans sommet : ou bien le diagramme a malgré tout des arêtes et des sommets à l'infini, ou il n'en a vraiment pas.



**Figure 6.3**

### 6.3 DIAGRAMME DE VORONOÏ EN GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

Dans ce cas aussi, on peut trouver et construire des diagrammes de Voronoï avec des sites ponctuels sans aucun sommet à distance finie et ce quelque soit le nombre de sites. Ce cas est naturellement semblable à celui du diagramme de Voronoï sans sommet donné par Sharir pour des sites pondérés (Fig. 6.3), si ce n'est que tous les sites ponctuels étant équivalents, ce cas est moins artificiel.

L'absence de sommet à distance finie dans un diagramme de Voronoï hyperbolique est aussi la conséquence du fait qu'en géométrie hyperbolique, tout triangle n'a pas nécessairement de cercle circonscrit : s'il reste vrai que le plus grand cercle vide tangent à trois sites a un sommet pour centre, rien ne garantit que l'on puisse en trouver un. La dualité entre un diagramme de Voronoï ponctuel et une triangulation de Delaunay n'est donc plus aussi simple. En fait c'est l'arête qui caractérise les diagrammes de Voronoï,

pas les sommets (d'ailleurs tout point de l'arête reste bien le centre d'un cercle vide de sites et tangent à deux d'entre eux).

La convention qui consiste à rajouter les arêtes de l'absolu au diagramme de Voronoï des sites a bien sûr le même effet que l'ajout du site spécial en géométrie projective : le diagramme devient toujours connexe.

#### **6.4 DIAGRAMME DE VORONOÏ DE POINTS PONDÉRÉS MUL-TIPLICATIVEMENT**

Dans ce cas aussi, on peut avoir des diagrammes de Voronoï sans sommet non triviaux, et le cas est beaucoup plus intéressant car, comme le montre Aurenhammer dans son article déjà cité (Aurenhammer, 1987), la complexité intrinsèque de ce type de diagramme peut atteindre  $\mathcal{O}(n^2)$ . La méthode générale pour les obtenir est la même que celle qui est développée dans le cas plus général des cercles pondérés multiplicativement.

#### **6.5 DIAGRAMME DE VORONOÏ DE CERCLES PONDÉRÉS MUL-TIPLICATIVEMENT**

Il n'y a pas non plus de problème pour voir que l'on peut obtenir un diagramme de Voronoï sans sommet dans ce cas et c'est d'autant plus facile que l'on peut les construire géométriquement assez facilement. On part d'un grand cercle avec une pondération correspondant à un cône peu élevé. Au-dessus de ce grand cône on place des cônes d'angle au sommet plus petit tels qu'aucun d'entre eux ne se rencontre au dessus du plus grand cône. Comme le diagramme de Voronoï correspond à l'enveloppe supérieure de ces cônes, il n'y aura aucun sommet. On peut bien sûr répéter l'opération pour chacun des autres cônes plus étroits et on obtient alors un diagramme de Voronoï sans sommet non trivial. La figure 6.4 montre une vue descriptive d'un tel diagramme, ainsi que la projection sur le plan  $xOz$  des biquadratiques qui sont générées par les intersections utiles.

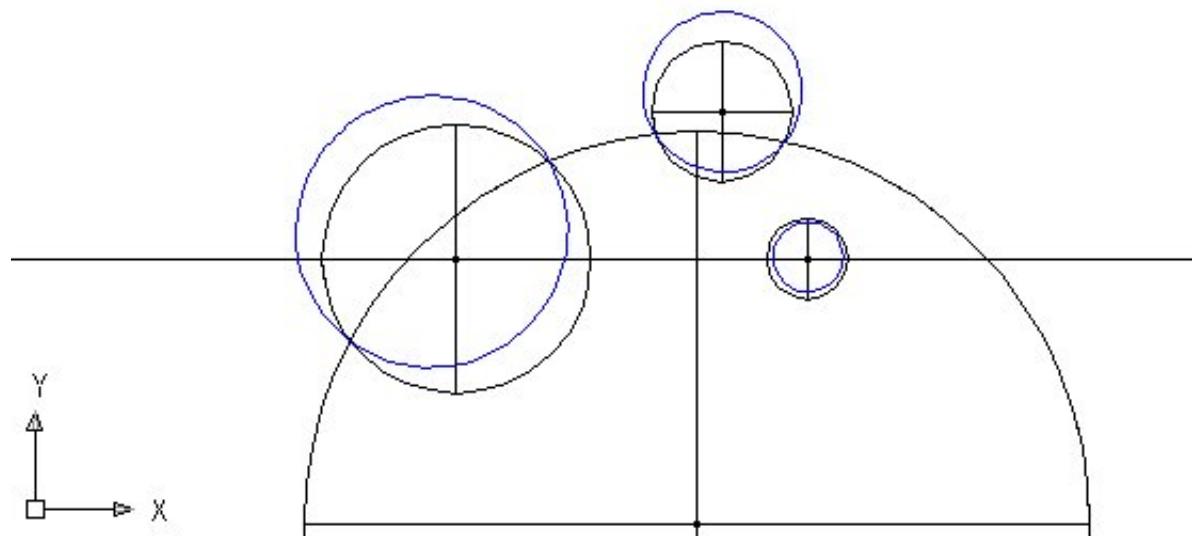
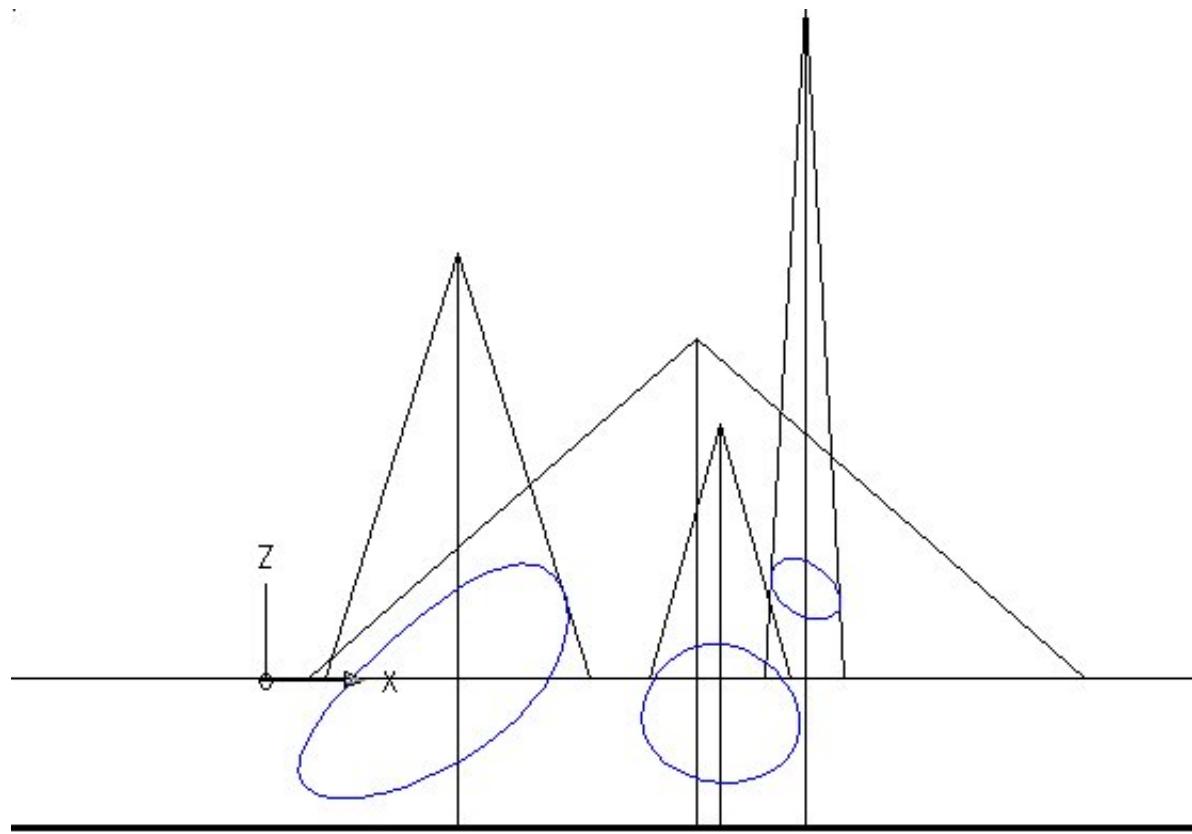


Figure 6.4

## 6.6 DIAGRAMMES DE MÖBIUS ET DIAGRAMMES DE PUISSANCE

Pour les diagrammes de puissance, on est dans la même situation que les diagrammes de points non-pondérés : puisque deux cercles ont toujours un axe radical, une droite, le seul cas qui puisse donner un diagramme sans sommet est celui où les cercles-sites ont leurs centres alignés. Ils ne sont donc pas en position générale car les axes radicaux sont alors tous perpendiculaires à la droite des centres et ne se coupent qu'à l'infini.

Pour les diagrammes de Möbius, la représentation en forêt de paraboloïdes montre que dans ce cas on peut comme pour les diagrammes de points à pondération composite obtenir des diagrammes sans sommet (par juxtaposition ou empilement). De toute manière on peut avoir des diagrammes de points à pondération multiplicative sans sommet et ce sont des diagrammes de Möbius.

## 6.7 ALGORITHMES POUR DIAGRAMME DE VORONOÏ SANS SOMMETS

En matière d'algorithme, on peut remarquer que le cas de diagramme de Voronoï sans sommet étant finalement normal ce serait plutôt le cas de l'existence des sommets qui serait l'exception : un algorithme "centré sur les sommets" devrait donc être considéré comme partiellement inadapté or c'est en général le cas de tous les algorithmes à balayage.

Les cinq exemples de diagrammes de Voronoï sans sommet qui précèdent peuvent être séparés en deux catégories. La première contient les diagrammes à base de points pondérés par soustraction et les diagrammes de points en géométrie hyperbolique. Dans ce cas, la complexité intrinsèque du diagramme est en  $\mathcal{O}(n)$  et donc en aucun cas, le calcul ne pourra se faire en moins de  $\mathcal{O}(n \log n)$  : que le diagramme ait ou pas des sommets, la complexité asymptotique du résultat ne change pas. Hors de tout problème de complexité, si le diagramme est sans sommet, il serait plus élégant d'avoir un algorithme

qui en tient compte que d'avoir un algorithme qui ignore complètement ce fait (Pavillet, 2001). Ce n'est pas le cas de l'algorithme de Fortune pour les points pondérés et on verra que l'algorithme suggéré par Boissonnat et al. (Boissonnat, 1996) pour les diagrammes hyperboliques dans leur article n'en tient pas compte non plus.

Dans les trois autres cas (cercles, pondération multiplicative ou composite) où la complexité intrinsèque des diagrammes de Voronoï peut atteindre  $\mathcal{O}(n^2)$  il y a par contre quelque chose à gagner au niveau complexité. Dans ces cas, un algorithme, même optimal, dont la complexité ne pourrait descendre en dessous de  $\mathcal{O}(n^2)$  ne serait pas vraiment adapté puisque rien ne s'oppose a priori à essayer d'obtenir une complexité de  $\mathcal{O}(n \log n)$  lorsque la complexité du diagramme est en  $\mathcal{O}(n)$  ou *inférieure* à  $\Theta(n \log n)$ .

### 6.7.1 Diagramme de Voronoï avec *peu* de sommets

L'adjectif *peu* n'est bien sûr pas très rigoureux ni très précis mathématiquement parlant, mais on peut quand même s'en servir pour faire la remarque suivante. Supposons que l'on dispose d'un algorithme permettant de calculer des diagrammes de Voronoï issus d'une famille de complexité  $\mathcal{O}(n^2)$  en un temps de  $\omega(n^2)$ . Si le même algorithme permet de plus de calculer un diagramme sans sommet, donc avec  $n - 1$  arêtes en  $\mathcal{O}(n \log n)$  au plus, le fait de rajouter *quelques* sommets va-t-il en augmenter la complexité au point d'atteindre  $\omega(n^2)$  dans le pire des cas ?

Il reste à définir ce que l'on entend par *peu de sommets*. A priori trois valeurs viennent à l'esprit :  $\log n, n, n \log n$ . Pour rester comparable avec les diagrammes de points dans  $\mathbb{R}^2$  qui n'ont jamais plus de  $2n$  sommets ( $2n - 5$  en fait) et peuvent être pris comme référence, on adopte la définition, arbitraire, suivante :

**Définition 15 (diagramme de Voronoï avec peu de sommets) :**

*Parmi les diagrammes de Voronoï dont la complexité naturelle dans le pire des cas est en  $\omega(n)$ , on appelle diagramme de Voronoï avec peu de sommets, un diagramme de Voronoï de  $n$  sites ayant moins de  $2n$  sommets.*

Pour les algorithmes à balayage qui suivent on va donc analyser leur complexité non seulement dans le pire cas mais encore s'ils peuvent avoir, et dans quelle mesure, une complexité adaptative à la taille de la sortie.

## **PARTIE II**

# **Algorithmes à balayage circulaire**

## CHAPITRE VII

### DÉFINITIONS ET THÉORÈMES GÉNÉRAUX

#### 7.1 NOTATIONS ET DÉFINITIONS

On détaille dans cette section les définitions, les notations et les théorèmes généraux qui seront utilisés dans tout le document.

**Définition 16 (bissecteur)** : *On appelle bissecteur de deux sites  $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$  la courbe équidistante de ces deux sites au sens de la distance choisie et on le note  $\mathcal{B}_{\mathcal{S}\mathcal{S}'}$ , ou  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}\mathcal{S}'}$  si l'on sait que le bissecteur est une hyperbole ou  $\mathcal{E}_{\mathcal{S}\mathcal{S}'}$  pour une ellipse.*

**Définition 17 (arête)** : *On appelle arête du diagramme une partie du bissecteur comprise entre deux sommets qui appartient au diagramme de Voronoï. On la note  $\mathcal{A}_{\mathcal{S}\mathcal{S}'}$ .*

Le site de balayage est considéré comme un site (Dehne, 1997).

**Définition 18 (bissecteur et arête de type-1)** : *On appelle bissecteur de type-1 (resp. arête) le bissecteur (resp. arête) déterminé par un site fixe et la courbe de balayage.*

Les bissecteurs et arêtes de type-1 sont des bissecteurs du diagramme de Voronoï temporaire des  $n$  sites plus le site de balayage.

**Définition 19 (bissecteur et arête de type-2)** : *On appelle bissecteur de type-2 (resp. arête) le bissecteur (resp. arête) déterminé par deux sites fixes.*

Les bissecteurs et arêtes de type-1 sont des bissecteurs du diagramme de Voronoï définitifs des  $n$  sites.

On note  $V_{ijk}$  le sommet de Voronoï déterminé par les trois sites  $\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j, \mathcal{S}_k$ . et on appelle *filtrage du front d'onde*, l'opération qui consiste à examiner la partie modifiée du front d'onde après chaque événement pour en déduire les événements nouveaux à introduire dans (ou extraire de) la file de priorité.

On a le théorème suivant cf. (Guibas, 1988, p. 123) :

**Théorème 13** : *Lorsque  $\Gamma$  décrit le plan, les points de rebroussement du front d'onde décrivent les arêtes supportées par les bissecteurs des sites du diagramme de Voronoï cherché.*

$$\mathcal{A}_{\Gamma \text{ site1}} \cap \mathcal{A}_{\Gamma \text{ site2}} \Rightarrow \mathcal{A}_{\text{site1 site2}}$$

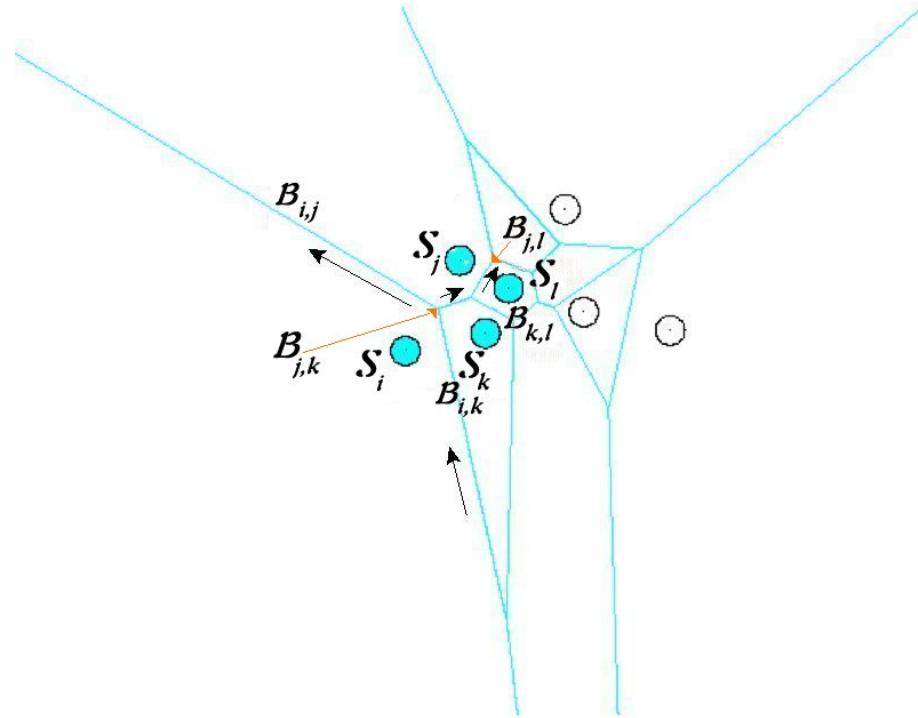
**Définition 20 (fausse alarme)** : *On appelle fausse alarme un événement mis dans la file de priorité et supprimée de celle-ci avant traitement (de Berg, 1997, §7.2, p. 155).*

### 7.1.1 Structure de données

La structure de données permettant de gérer un diagramme de Voronoï est une liste d'arêtes doublement chaînée. On l'appellera *DCEL* (Doubly Connected Edge List) dans la suite.

Cette liste d'arêtes doublement chaînée présente, par rapport aux structures habituellement utilisées pour gérer les graphes planaires, la particularité d'avoir des informations centrées sur les arêtes plutôt que les sommets (de Berg, 1997, ch. 2). Une des particularités des algorithmes à balayage qui suivent est que le site de balayage et les sites à traiter étant de même nature, on peut utiliser les mêmes structures pour gérer les deux types de bissecteurs.

On oriente le graphe, de manière arbitraire. Les faces de ce graphe sont tout naturellement représentées par les sites générateurs. La DCEL est formée de 3 tableaux dont le



**Figure 7.1**

principal est celui représentant les arêtes. Ce tableau a 6 composantes qui sont :

- sommet de départ de l’arête orientée,
- sommet d’arrivée de l’arête orientée,
- face à droite de l’arête orientée,
- face à gauche de l’arête orientée,
- pointeur sur la 1ère arête incidente au sommet de départ (sens trigonométrique),
- pointeur sur la 1ère arête incidente au sommet d’arrivée (sens trigonométrique).

À cette structure on ajoute deux tableaux qui permettent d’initialiser soit la recherche des arêtes incidentes à un sommet, soit l’opération duale c’est-à-dire les arêtes définissant le secteur de Voronoï d’un site donné.

L’exemple, basé sur l’arête centrale  $B_{j,k}$  de la figure 7.1, précise ces points. Il faut ajouter

qu'en ce qui concerne les arêtes liées aux sites on peut éventuellement en avoir besoin de deux, l'une intérieure, l'autre extérieure, si le diagramme de Voronoï n'est pas connexe. On peut noter un dernier point particulier qu'on utilisera dans les algorithmes que l'on va étudier : les coordonnées des sommets temporaires sont des équations paramétriques des arêtes définitives, les équations paramétriques dépendent du paramètre de balayage choisi, soit le rayon polaire soit l'angle au sommet du cône de balayage selon l'algorithme.

**Tableau 7.1** Liste d'arêtes doublement chaînée

$e$	$\mathcal{V}_1$	$\mathcal{V}_2$	$S_1$	$S_2$	$P_1$	$P_2$
...						
$\mathcal{B}_{j,k}$	$\mathcal{V}_{i,j,k}$	$\mathcal{V}_{j,k,l}$	$S_k$	$S_j$	$\mathcal{B}_{i,j}$	$\mathcal{B}_{k,l}$
...						
...						

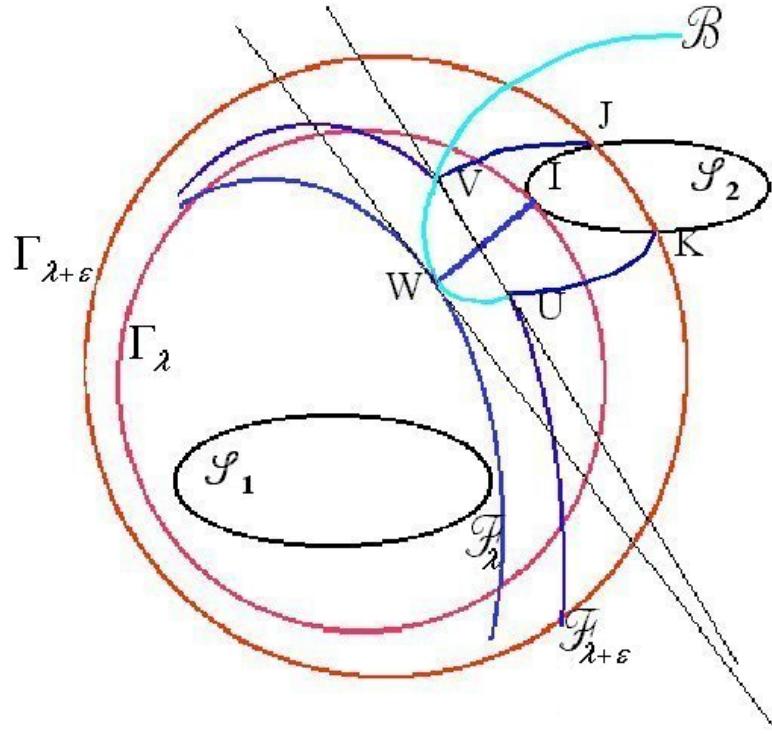
$V$	$e$	$S$	$e\text{-extr.}$	$e\text{-intr.}$
...				
$\mathcal{V}_{i,j,k}$	$\mathcal{B}_{j,k}$	$S_i$	$\mathcal{B}_{i,j}$	
...				
...				

## 7.2 Condition de contact

On utilisera aussi un théorème qui, schématiquement, dit que, en distance euclidienne, lorsque la courbe de balayage est tangente à un site, le front d'onde est tangent à un bissecteur :

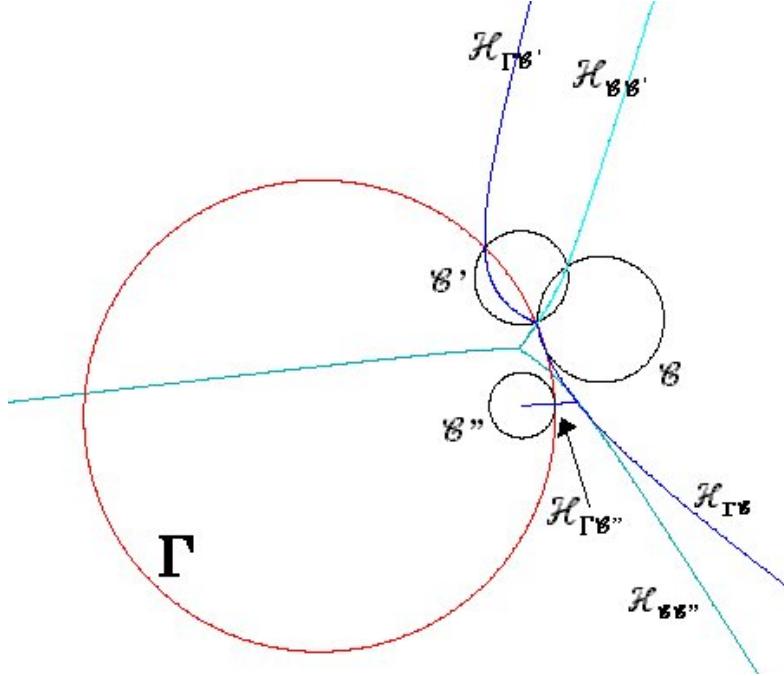
**Théorème 14** : *Le front d'onde est tangent à tout bissecteur défini par deux sites fixes (site1 – site2) au moment où la courbe de balayage découvre le second des sites  $\mathcal{S}_1$  -  $\mathcal{S}_2$  si le point de contact n'est pas un point de rebroussement du front d'onde.*

*Démonstration* : Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  les deux sites et  $\mathcal{S}_2$  le dernier des deux sites découverts. Le point de contact  $W$  est à l'intersection du front d'onde avec la normale à  $\Gamma$  au



**Figure 7.2**

point  $I$  où  $\Gamma$  découvre le site  $\mathcal{S}_2$  (Fig. 7.2). Soient  $\Gamma_\lambda$  la position de  $\Gamma$  à la découverte de  $\mathcal{S}_2$ , ( $\mathcal{S}_1$  ayant déjà été découvert) et  $\Gamma_{\lambda+\varepsilon}$  la position de  $\Gamma$  juste après cette découverte,  $\mathcal{F}_\lambda$ ,  $\mathcal{F}_{\lambda+\varepsilon}$  les fronts d'onde correspondants et  $\mathcal{B}$  le bissecteur défini par  $\mathcal{S}_2$ ,  $\mathcal{S}_1$ .  $\mathcal{F}_\lambda$  passe par  $W$  et  $I$ ,  $WI$  est porté par la normale en  $I$  à  $\mathcal{S}_2$  et  $\mathcal{F}_{\lambda+\varepsilon}$  passe par  $V, J, K, U$ . De plus,  $U, W, V$  appartiennent aussi à  $\mathcal{B}$ . Comme  $U, V$  sont sur  $\mathcal{B}$ , si on effectue le balayage en arrière de  $\Gamma_{\lambda+\varepsilon}$  à  $\mathcal{F}_\lambda$ ,  $U$  et  $V$  tendent vers  $W$ , donc la droite  $UV$  tend vers la tangente en  $W$  à  $\mathcal{B}$ . De la même manière, le front d'onde étant continu et dérivable en  $W$  (si  $W$  est un point de rebroussement de  $\mathcal{F}_\lambda$ , la propriété est évidemment fausse),  $\mathcal{F}_{\lambda+\varepsilon}$  tend vers  $\mathcal{F}_\lambda$  quand  $\Gamma_{\lambda+\varepsilon}$  tend vers  $\Gamma_\lambda$ . Donc comme  $U$  et  $V$  tendent vers  $W$ , la position limite de la droite définie par les deux points  $U$  et  $V$  est aussi tangente en  $W$  à  $\mathcal{F}_\lambda$ .  $\square$



**Figure 7.3**

Un exemple concret de cette situation est donné sur la figure ci-dessus (Fig. 7.3) pour un balayage par cercle en contraction et des points pondérés par soustraction. Lorsque le cercle de balayage  $\Gamma$  découvre le cercle-site  $C''$ ,  $\Gamma$  est tangent à  $C''$ ; au même moment du balayage le bissecteur de type-1  $H_{\Gamma C'}$  est tangent au bissecteur de type-2  $H_{C''C}$ .

### 7.3 LA CONDITION DE CASEY

Les calculs d'événements sommets sont faits en utilisant la condition de Casey. La condition de Casey est une généralisation du théorème de Ptolémée : "lorsqu'un quadrilatère convexe est inscriptible dans un cercle, la somme des produits des côtés opposés est égale au produit des diagonales" (Rouché, 1900, §240-243, T. 1, p. 258). Elle permet de calculer la condition que quatre cercles doivent remplir pour être tangents à un cinquième. La condition de Casey s'exprime de manière similaire,  $t_{12}$  (Fig. 7.4) désignant

la longueur du segment de tangente commune aux cercles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  de rayon  $r_1, r_2$  on a :

$$t_{12}t_{34} + t_{23}t_{41} + t_{13}t_{24} = 0.$$

Elle se démontre par inversion (Rouché, 1900, Livre III, p. 292, §399). La quantité  $\frac{t_{12}}{r_1 r_2}$  est un invariant par inversion des deux cercles. Quand le rayon des quatre cercles est nul, les deux théorèmes sont identiques. Le segment de tangente commune  $t_{ij}$  aux deux cercles  $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j$  est le segment extérieur si les deux cercles sont du même côté du cinquième cercle, le segment intérieur sinon. Si tous les cercles sont du même côté du cinquième cercle, intérieur ou extérieur, alors la formule est uniforme et ne fait intervenir que la différence des rayons des quatre cercles (voir A.1).

La condition de Casey sera utilisée systématiquement dans les algorithmes à balayage par cercle pour calculer, lorsque l'on connaît trois cercles sites, les sommets de Voronoï potentiels. Écrivant de nouveau l'équation avec les notations de l'algorithme on obtient :

$$t_{\Gamma\mathcal{C}_1}t_{\mathcal{C}_2\mathcal{C}_3} \pm t_{\Gamma\mathcal{C}_2}t_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_3} \pm t_{\Gamma\mathcal{C}_3}t_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2} = 0. \quad (7.1)$$

Le centre de balayage étant fixe, la seule inconnue est le rayon de  $\Gamma$ . Sous cette forme on voit que l'intérêt de la formule est de permettre de calculer les conditions pour que  $\Gamma$  soit tangent à  $V_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2\mathcal{C}_3}$  sans avoir à connaître explicitement les coordonnées du plus grand cercle vide et de son centre le sommet de Voronoï. Mais on voit aussi qu'étant du second degré, elle peut donner jusqu'à huit solutions réelles dépendant des conditions sur les signes + ou - (correspondantes aux conditions de contact des quatre cercles avec le cinquième), donc d'une part le calcul algébrique des composantes du plus grand cercle vide, donné par trois conditions de contact, se complique en fonction du type de balayage choisi et d'autre part il faut trouver une solution pour éliminer les solutions parasites réelles. En plus des solutions parasites géométriques correspondantes aux conditions de contact, il faudra aussi tenir compte des solutions parasites introduites par la résolution numérique de la condition de Casey.

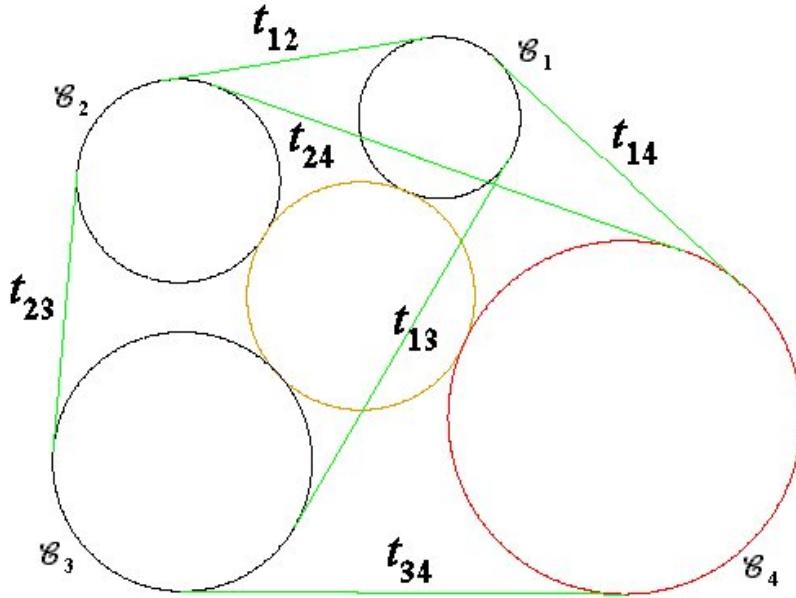


Figure 7.4

#### 7.4 ÉLIMINATION DES SOLUTIONS PARASITES

Les événements sommets sont calculés à partir du front d'onde. C'est le front d'onde qui permet de gérer la proximité : deux sites qui sont mitoyens sur le front d'onde sont mitoyens entre eux puisqu'ils ont une frontière commune. C'est aussi vrai pour trois sites quand on atteint un sommet.

En effet, soient trois sites consécutifs  $\mathcal{C}_i$ ,  $\mathcal{C}_j$  et  $\mathcal{C}_k$  (dans cet ordre) sur le front d'onde,  $V$  le point de rebroussement défini par  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_j$ ,  $V'$  par  $\mathcal{C}_j$  et  $\mathcal{C}_k$  (Fig. 7.5). Comme les sommets  $V$  et  $V'$  du diagramme de Voronoï temporel génèrent les arêtes du diagramme de Voronoï définitif, si ces deux sommets consécutifs du diagramme de Voronoï temporel sont confondus, non seulement on a une arête du diagramme de Voronoï temporel qui est de longueur nulle ( $\mathcal{A}_{\Gamma\mathcal{C}_j}$ ) mais encore on se trouve en un sommet  $W$  du diagramme de Voronoï définitif puisque l'on est à l'intersection de deux arêtes du diagramme de Voronoï définitif :  $\mathcal{A}_{\mathcal{C}_i\mathcal{C}_j}$  et  $\mathcal{A}_{\mathcal{C}_j\mathcal{C}_k}$ . En plus, en ce point, on a une sixième

arête, elle aussi de longueur nulle, qui est la troisième arête du diagramme de Voronoï définitif aboutissant à ce sommet (elle est supportée par le bissecteur  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_k \mathcal{C}_j}$ ). Le site variable  $\Gamma$  est alors tangent au plus grand cercle vide centré sur  $W$  pour les trois sites  $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j$  et  $\mathcal{C}_k$  et  $W$  est équidistant de ces quatre sites.

Réciproquement, on ne peut pas détecter le sommet  $W$  correspondant à trois sites consécutifs  $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j$  et  $\mathcal{C}_k$  sur le front d'onde tant que la longueur de l'arête  $\mathcal{A}_{\Gamma \mathcal{C}_j}$  n'est pas nulle, c'est-à-dire si  $V$  et  $V'$  ne sont pas confondus. En effet,  $W$  ne peut se trouver qu'en un sommet du diagramme de Voronoï temporaire puisque  $W$  est sur au moins une arête du diagramme de Voronoï définitif, donc en un point de rebroussement du front d'onde. Le sommet  $V$  étant sur l'arête  $\mathcal{A}_{\mathcal{C}_i \mathcal{C}_j}$  et uniquement sur celle-là, le plus grand cercle centré sur  $V$  et tangent aux deux sites  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_j$  ne contient aucun point de  $\mathcal{C}_k$  donc  $d(V, \mathcal{C}_i) = d(V, \mathcal{C}_j) > d(V, \mathcal{C}_k)$ . De même, on a :  $d(V', \mathcal{C}_k) = d(V', \mathcal{C}_j) > d(V', \mathcal{C}_i)$ . Donc si  $V$  et  $V'$  ne sont pas confondus,  $W$  ne peut être ni en  $V$  ni en  $V'$ . On peut alors énoncer le théorème suivant qui est en fait indépendant de la nature des sites (points ou cercles) et de la courbe de balayage (droite ou cercle) :

**Théorème 15 (théorème des six arêtes)** : *La courbe de balayage est tangente au plus grand cercle vide centré sur un sommet du diagramme de Voronoï définitif et le front d'onde passe par ce sommet si et seulement si les deux sommets temporaires correspondants sont confondus. Les deux paires de trois arêtes des deux diagrammes sont concourantes en ce sommet si et seulement si l'arête portée par le bissecteur correspondant au sommet opposé au point de contact de ce cercle ( $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j, \mathcal{C}_k, \Gamma$ ) avec la courbe de balayage a une longueur nulle.*

Donc on peut toujours calculer une position d'arrêt de  $\Gamma$  correspondante à un événement sommet potentiel, que les six bissecteurs correspondants soient concourants ou pas, c'est-à-dire que  $\Gamma$  soit ou pas tangent à un cercle tangent à trois sites. Ce sera une fausse-alarme si l'arête devant disparaître n'est pas de longueur nulle puisque, d'après le théorème précédent, on ne trouve un sommet que si et seulement si les deux sommets temporaires sont confondus. En terme algorithmique, il faudra seulement montrer

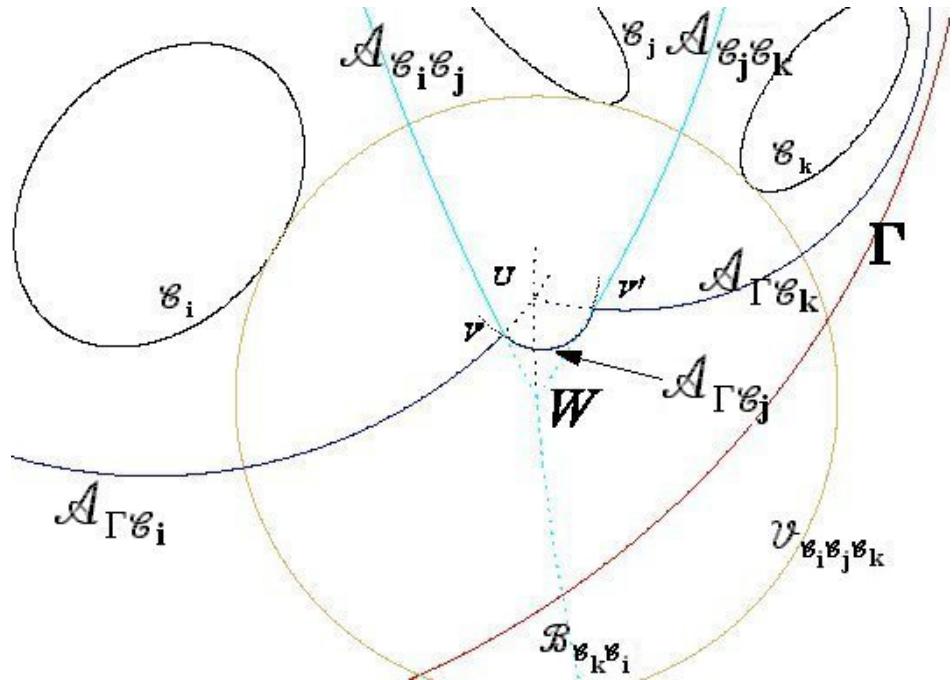


Figure 7.5

que le nombre de ces fausses-alarmes est suffisamment bas pour ne pas compromettre l'optimalité de l'algorithme.

## 7.5 TYPOLOGIE DES ÉVÉNEMENTS

On termine ce chapitre en donnant une typologie détaillée des événements (cette typologie ne concerne pas le balayage par cône) :

### 7.5.1 événement site

On appelle *événement site* le moment du balayage où la courbe de balayage rencontre la frontière du site pour la première fois.

Si les sites ne sont pas ponctuels, les points correspondants sont calculés à l'avance. Un tri initial est toujours nécessaire pour alimenter la file de priorité. La complexité de cet

ensemble est donc en  $\mathcal{O}(n \log n)$ .

### 7.5.2 événement sommet

On appelle *événement sommet* le moment du balayage où un sommet du secteur de Voronoï de la courbe de balayage coïncide avec un sommet de Voronoï des sites.

La complexité de cet ensemble est la complexité du diagramme; si l'on a des sites ponctuels  $v \leq 2n - 5$ , la complexité est en  $\mathcal{O}(n)$ .

### 7.5.3 événement stérile

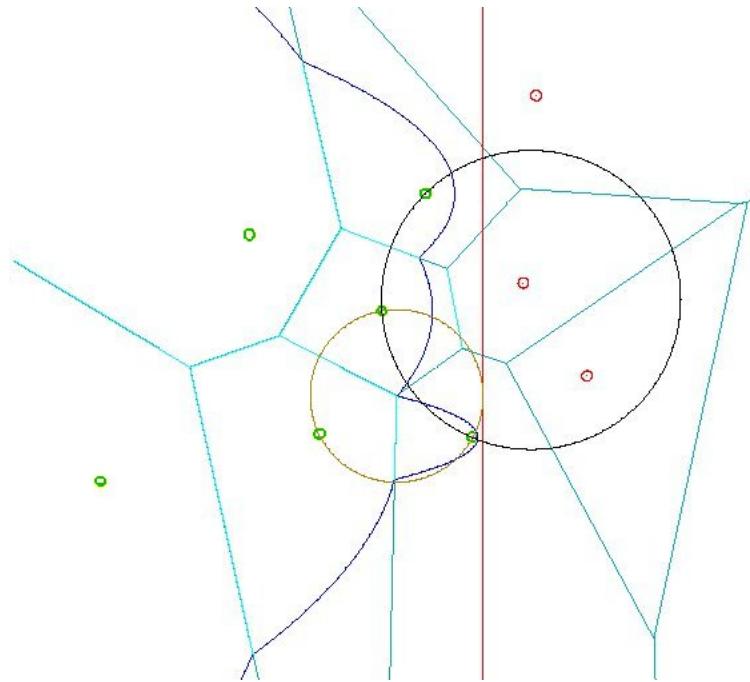
On appelle *événement stérile* le moment du balayage où la courbe de balayage est soit tangente à un cercle tangent extérieurement à 3 sites mitoyens du front d'onde, ce cercle n'étant pas vide de points de sites, soit correspondant à une solution parasite algébrique du calcul d'un événement sommet.

La détection se fait en constatant la non-disparition de l'arête supportée par le bissecteur médian. Le test et donc la détection se font en  $\mathcal{O}(1)$ . Par ailleurs, lors d'un événement stérile, le front d'onde ne change pas, il n'y a donc pas création de nouvel événement. Après chaque événement viable on filtre le front d'onde et on génère au plus quatre nouveaux triplets de bissecteurs consécutifs plus un triplet à remettre à jour. Il y a donc au plus 5 événements stériles par événement viable et donc  $\mathcal{O}(n)$  événements stériles.

### 7.5.4 événement morituri

On appelle *événement morituri* un événement sommet ou stérile introduit dans la file de priorité et qui disparaît du front d'onde avant de pouvoir être traité.

Ce type d'événement peut se produire si, au cours du traitement du front d'onde, le filtrage donne un événement sommet concernant trois sites mitoyens et si le cercle circonscrit à trois sites mitoyens contient des sites. Ce n'est donc pas un "plus grand cercle vide" et ce cercle ne pourra jamais donner lieu à un événement. Mais on ne peut le



**Figure 7.6**

savoir encore puisque ces sites ne sont pas encore découverts. En conséquence l'une des trois arêtes qui a permis de calculer l'événement est promise soit à disparaître, soit à être divisée avant que la courbe de balayage ne devienne tangente au cercle circonscrit aux trois sites que l'on a calculé. La figure 7.6 donne le cas d'un balayage par une droite tangente au petit cercle, le cercle circonscrit étant le plus grand des deux cercles sur la figure.

### 7.5.5 événement mort-né

On appelle *événement mort-né* un événement sommet ou stérile dont le point de contact potentiel avec la courbe de balayage a déjà été passé.

### 7.5.6 événement viable

On appelle *événement viable* un événement de la file de priorité qui donnera lieu à traitement algorithmique.

Les événements sites, les événements sommets et les événements stériles sont viables.

### 7.5.7 événement non-viable

On appelle *événement non-viable* un événement soit qui disparaît de la file de priorité avant de pouvoir donner lieu à traitement (morituri), soit qui n'y est même pas introduit (mort-né).

## CHAPITRE VIII

### ALGORITHME EN CONTRACTION POUR POINTS À PONDÉRATION SOUSTRACTIVE

#### 8.1 LE PRINCIPE DU CERCLE EN CONTRACTION

Lors d'un balayage par droite, la droite de balayage sépare le plan en deux parties, et on ne considère qu'un seul des deux demi-plans ainsi formés, le choix importe peu dans la mesure où les deux demi-plans sont équivalents. Lors d'un balayage par cercle, il y a deux choix possibles pour le sens du balayage : expansion ou contraction. Comme il y a une différence de nature essentielle entre l'intérieur et l'extérieur d'un cercle, certaines des propriétés de l'algorithme pourront donc être différentes selon que l'on traite le cercle en contraction (la partie utile, infinie, est l'extérieur du cercle) ou en expansion (la partie utile, finie, est alors l'intérieur).

Le choix d'un cercle en contraction n'est pas le plus naturel a priori, mais, pour le calcul du diagramme de Voronoï de points pondérés en soustraction, il présente deux avantages essentiels : l'homogénéité bien sûr puisque c'est un diagramme à base de cercles mais aussi le « masquage naturel ».

En effet, avec la mesure choisie ( $O, \gamma$  centre et rayon de  $\Gamma$ ),  $\delta(M, \Gamma) = d(M, O) - \gamma$  est la distance euclidienne de  $M$  à la circonférence quand on est à l'extérieur de celle-ci (la normale au cercle passe par le centre). À l'intérieur  $\delta(M, \Gamma)$  est négatif et sa valeur absolue est égale à la distance euclidienne du point à la circonférence. Ceci entraîne que si  $\mathcal{C}_i$  est un cercle site,  $\text{dom}(\Gamma, \mathcal{C}_i)$  est la totalité du plan quand le cercle  $\mathcal{C}_i$  est

strictement inclus dans le cercle  $\Gamma$ . Ainsi dans ce cas le diagramme de Voronoï des sites est le même que celui des sites non strictement inclus dans  $\Gamma$ . Le cercle de balayage assure ainsi un masquage naturel des cercles qui ne sont pas encore découverts et le diagramme de Voronoï temporaire des sites et de  $\Gamma$  est toujours à jour quelque soit le rayon de  $\Gamma$ . Cet avantage, esthétique au début du balayage, est très utile à la fin car si le centre de balayage a été bien choisi (au centre ou à l'intérieur d'un seul des cercles des sites), le secteur de Voronoï de  $\Gamma$  s'élimine naturellement sans calculs supplémentaires, c'est-à-dire que la pile des événements à traiter et le front d'onde disparaissent en même temps.

## 8.2 LE CHOIX DES PARAMÈTRES DE BALAYAGE

On utilise des coordonnées polaires dont le centre est aussi le centre de balayage. Le paramètre de balayage est le rayon  $t$  de  $\Gamma$  qui varie de  $+\infty$  à 0 (l'ensemble des notations et des formules utilisées sont précisées dans l'appendice A). On considère que, comme on le fait souvent pour les études d'algorithmes du même type, les sites  $\mathcal{C}_i \equiv \{d_i, a_i, r_i\}$  sont donnés en "position générale", en précisant qu'ici cela signifie notamment qu'il n'y a pas deux cercles qui soient découverts en même temps (deux  $d_i + r_i$  identiques), ni surtout deux cercles dont les centres soient alignés avec le centre de balayage (deux  $a_i$  identiques). À défaut on pourrait adapter aux coordonnées polaires les méthodes de perturbations symboliques qui permettent de ramener tous les sites en position générale (Yap, 1988).

On choisit le centre de manière à ce que la perturbation apportée par le balayage s'élimine naturellement une fois le balayage terminé. Pour profiter de cette facilité, la solution la plus simple est bien entendu de prendre le centre de balayage, d'une part à l'intérieur de l'un des cercles et d'autre part ailleurs que sur l'enveloppe convexe des cercles comme on le verra plus loin (on peut trouver une étude précise de l'enveloppe convexe de disques dans l'étude de Rappaport (Rappaport, 1992, p. 173)).

Il faut de plus vérifier que ce centre de balayage est à l'intérieur d'un et d'un seul des

cercles sites, si l'on traite des sites avec des cercles, ou confondu avec un des sites, si l'on ne traite que des points. Si le centre de balayage était à l'intérieur d'un cercle site, lui-même inclus dans un autre, alors il serait dominé par le plus grand d'entre eux avant d'avoir découvert le plus petit et donc on ne pourrait terminer l'opération correctement.

On considère que les cercles sont donnés, en coordonnées polaires, de manière quelconque à la fois quant à leur rayon et quant à la position de leur centre par rapport à une origine quelconque. Il est très facile de vérifier que le centre n'est inclus que dans un seul des cercles sites. Si tel n'était pas le cas, on commencerait par les trier par rapport à cette origine initiale en  $d_i + r_i$ . On choisirait alors un point situé à l'intérieur de la circonférence qui a son extrémité la plus éloignée du centre tout en étant plus éloigné du centre que le point le plus éloigné de la circonférence qui vient juste après dans le tri en  $d_i + r_i$ . On peut supposer cette distance non nulle. On peut donc trouver un tel point au coût de  $\mathcal{O}(n \log n)$ .

### 8.3 LES TROIS TYPES D'ÉVÉNEMENTS

On va commencer par décrire le fonctionnement de l'algorithme, la justification détaillée se faisant ensuite grâce à son interprétation projective. Il y a trois types d'événements, qui font intervenir un, deux ou trois des cercles fixes.

#### 8.3.1 Les événements de type-1

Ils font intervenir un seul cercle-site. Au moment où le cercle de balayage découvre le cercle-site celui-ci est tangent intérieurement à  $\Gamma$  puisque le balayage est en contraction. La branche d'hyperbole, bissecteur de type-1 entre le site fixe que l'on découvre et le cercle de balayage, se réduit en une demi-droite portée par la normale aux deux cercles en leur point de contact partant du centre du cercle découvert. Par construction de l'algorithme le premier événement est nécessairement de type-1, de même que le second comme dans le balayage par droite. Par contre les situations diffèrent dès la découverte du second cercle. On a vu que si l'un des cercles domine l'autre (et le dominant passe

toujours avant le dominé) il n'a pas de secteur de Voronoï. La première opération à faire après la découverte d'un cercle est donc de tester s'il n'est pas inclus dans un autre. Comme cette opération est en fait indépendante du reste de l'algorithme, on va la traiter à part et donc supposer pour la suite qu'il n'y a pas de cercle inclus (voir §8.4). La deuxième différence essentielle vient du fait qu'une branche d'hyperbole ne couvre pas tout le plan mais seulement le secteur angulaire de l'angle des asymptotes. Il y a donc deux cas de figure qui se présentent selon que la normale intercepte ou pas les secteurs angulaires couverts par le front d'onde. Le premier cas est le même que celui du balayage par droite mais dans le second cas le front d'onde sera discontinu. Dans ce dernier cas en effet l'arête correspondante au front d'onde portée par la normale n'est pas un segment de droite allant du centre du cercle à l'arête du front d'onde qu'elle intercepte, mais bien la demi-droite tout entière puisqu'aucune arête n'est interceptée (dans le cas du balayage par ligne, ce cas ne se produisait que lors de la découverte du premier site ; ici il peut se produire pour tous les sites sans exception). Les figures 8.1 et 8.2 montrent les deux cas possibles lors d'un balayage en contraction :  $\mathcal{H}_{\Gamma \mathcal{C}_2}$ , demi-droite (Fig. 8.1),  $\mathcal{H}_{\Gamma \mathcal{C}_4}$  segment de droite interceptant  $\mathcal{H}_{\Gamma \mathcal{C}_1}$  (Fig. 8.2).

Le phénomène ne doit pas étonner puisque le diagramme temporaire et le diagramme définitif sont de même nature, or on a rappelé au chapitre 2, §2.1.3 que, parmi les propriétés générales de ces diagrammes de Voronoï, démontrées par Sharir (Sharir, 1985), ces diagrammes n'étaient pas nécessairement connexes et que les parties connexes étaient non bornées.

### 8.3.2 Les événements de type-2

Supposons le front d'onde discontinu à la découverte du second cercle. Cela signifie que deux branches d'hyperboles dont l'une est réduite à une demi-droite normale à  $\Gamma$  ne se coupent pas. Cependant, puisque le rayon de  $\Gamma$  va en se réduisant, les angles d'ouverture des asymptotes des hyperboles vont en augmentant. Ainsi on constate que les deux branches peuvent se raccorder. Pour assurer une bonne gestion du front d'onde il faut donc gérer cet événement. Comme indiqué plus haut cela se produit lorsque le

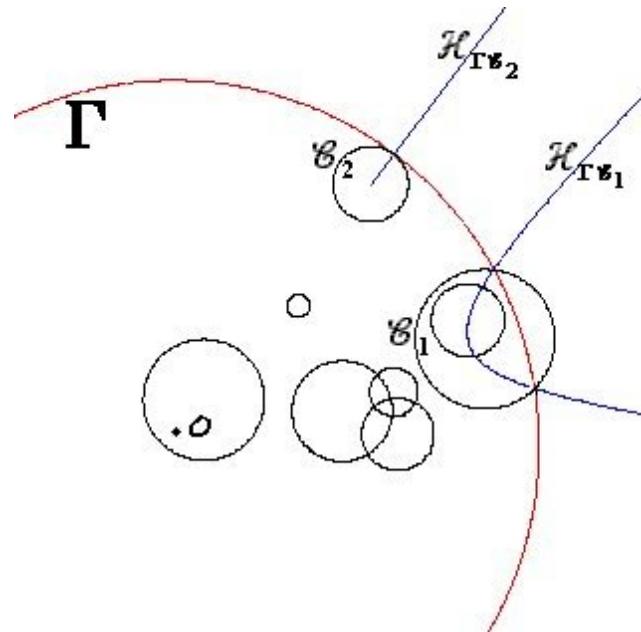


Figure 8.1

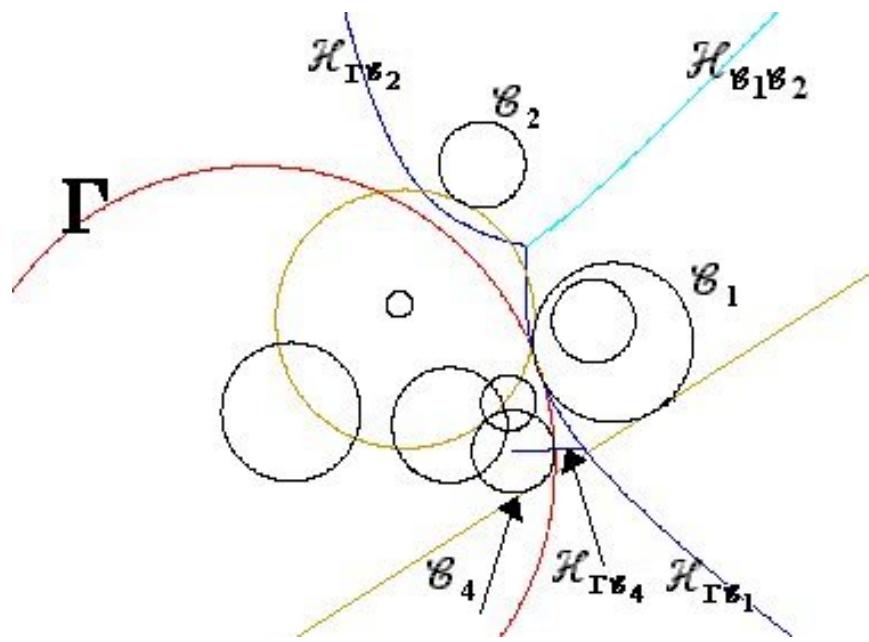


Figure 8.2

cercle de balayage et les deux cercles sont tangents à la même droite ; dans ce cas les deux branches des hyperboles  $\mathcal{H}_{\Gamma\mathcal{C}_1}$  et  $\mathcal{H}_{\Gamma\mathcal{C}_2}$  se coupent alors sur la droite de l'infini et ont une asymptote commune (Fig. 2.4, p. 28). Cette droite est la tangente extérieure commune aux deux cercles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  dont on peut remarquer qu'elle est toujours plus proche du centre de balayage que chacun des deux cercles. Cet événement intervient donc toujours après leur découverte. Pour l'événement de type 2 montré par la figure 2.4 le point d'intersection à l'infini de  $\mathcal{H}_{\Gamma\mathcal{C}_1}$  et  $\mathcal{H}_{\Gamma\mathcal{C}_2}$  est, à cet instant, le seul point du diagramme de Voronoï définitif déjà généré par le balayage. Le calcul de cet événement ne pose pas de difficulté particulière (voir appendice A) en coordonnées polaires (on utilisera bien sûr l'équation de la tangente commune sous sa forme normale :  $x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$ ), si ce n'est que, bien sûr, il y a quatre solutions algébriques à ce problème. Deux de ces solutions, qu'elles soient réelles ou imaginaires, peuvent être facilement éliminées analytiquement car, comme on le voit dans l'appendice A.1, les tangentes extérieures et les tangentes intérieures se distinguent par le fait que les premières ne dépendent que de la valeur  $|r - r'|$  tandis que les dernières ne dépendent que de  $|r + r'|$ . Le problème se pose donc d'éliminer la solution parasite restante avec une méthode qui soit acceptable du point de vue de la programmation : la notion de solution stérile s'appliquera aussi dans ce cas comme on le justifiera plus loin. On introduira donc les deux solutions dans la file de priorité comme des événements de type-2, et on les gérera à leur tour, avec un calcul analytique adapté pour la solution correcte ou l'élimination pour la solution stérile. Remarquons que si l'on stocke à part les rayons de  $\Gamma$  lors de ces événements on obtient directement l'enveloppe convexe de cette famille de cercles, problème qui a été traité directement par Rappaport sous la forme récursive (Rappaport, 1992).

Chaque discontinuité du front d'onde sera traitée de la même manière.

### 8.3.3 Les événements de type-3

Ils font intervenir trois cercles et permettent la découverte d'un sommet de Voronoï. Comme on l'a vu, on utilise la condition de Casey pour le calcul algébrique du rayon de  $\Gamma$ , toujours en coordonnées polaires, de cet événement. On applique cette condition en

prenant pour les quatre cercles trois cercles sites  $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j, \mathcal{C}_k$  et le cercle de balayage  $\Gamma$ , et comme cinquième cercle le plus grand cercle vide centré sur le sommet de Voronoï. Il n'y a que deux cas possibles pour la disposition des quatre premiers cercles par rapport au cinquième : ils y sont tous soit tangents intérieurement soit tangents extérieurement. Il n'y a pas d'autre configuration. En effet, en ce qui concerne trois cercles sites, leur sommet de Voronoï est équidistant des trois cercles et la pseudo-distance n'a pas le même signe entre l'intérieur et l'extérieur du site. Le sommet ne peut donc être qu'en la même position relative par rapport aux trois cercles. En ce qui concerne le cercle de balayage, comme on applique la condition de Casey avec des segments de tangentes communes extérieures, le calcul donnera pour résultat une valeur pour laquelle le cercle de balayage est dans la même position relative par rapport au plus grand cercle vide que les trois premiers. (De toute façon, lors d'un événement sommet un sommet permanent et un sommet temporaire sont confondus donc ce sommet est en même position relative par rapport à ces quatre cercles). Les figures montrent un événement sommet avec contact extérieur (Fig. 8.3) basé sur les cercles  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_7$  avec détection du sommet  $V_{127}$ , et un événement avec un contact intérieur (Fig. 8.4) basé sur les cercles  $\mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6$  et le sommet qu'ils définissent. En tout état de cause il n'y a pas de différence de traitement en fonction de la condition de contact. Lors d'un événement sommet  $(i, j, k)$  avec disparition de l'arête  $j$ , les points de contact sur le plus grand cercle vide sont toujours disposés dans l'ordre  $(i, j, k, \gamma)$  ce qui permet d'éliminer certaines des solutions parasites géométriques de la condition de Casey. En effet, par continuité on devrait obtenir le théorème de Ptolémée lorsque le rayon des quatre cercles tend vers zéro. La condition de Casey s'écrit donc :

$$t_{\Gamma C_i} t_{C_j C_k} + t_{\Gamma C_k} t_{C_i C_j} - t_{\Gamma C_j} t_{C_i C_k} = 0. \quad (8.1)$$

Seules les solutions réelles positives parmi les quatre solutions algébriques restantes sont mises en file de priorité ; les solutions stériles s'élimineront d'elles-mêmes par application du théorème des six arêtes (Théorème 2.4.1). Il faut noter que les algorithmes de ce type se heurteraient à une impossibilité pratique si l'on ne disposait pas de ce théorème, parce que, non seulement la programmation mais même l'inventaire de tous les cas et sous-cas

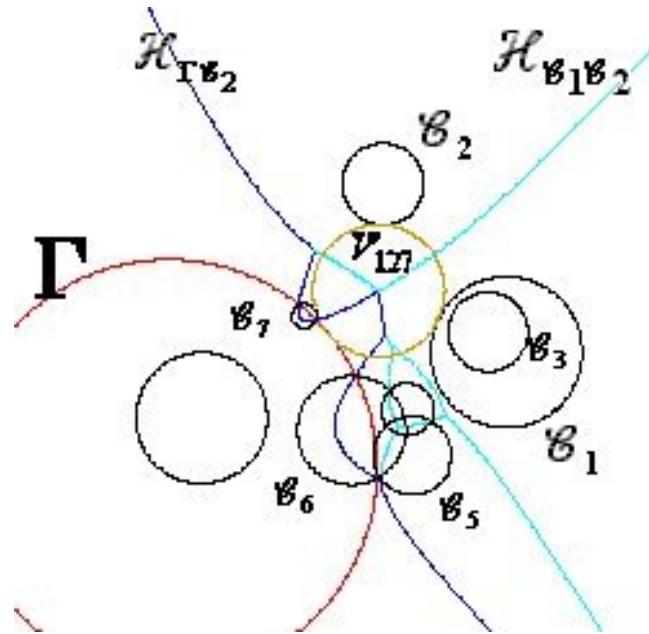


Figure 8.3

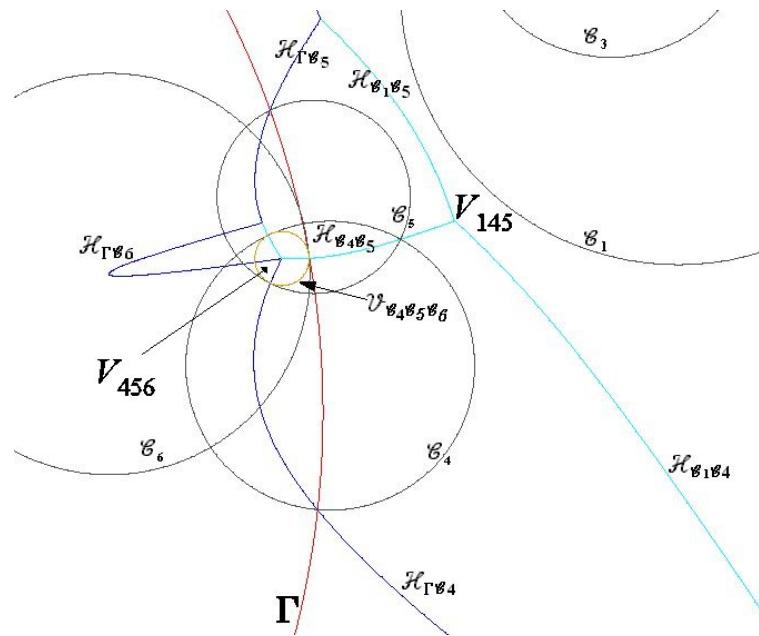


Figure 8.4

de figure paraît extrêmement laborieux.

### 8.3.4 L'algorithme en contraction dans le plan projectif

On immerge maintenant le diagramme dans le plan projectif et il est évidemment beaucoup plus facile d'y justifier l'algorithme, puisque, grâce à ce plongement, le front d'onde, qui est formé d'arêtes de bissecteurs du diagramme de Voronoï temporelle, n'est pas discontinu dans le plan projectif, les parties manquantes sont des arêtes portées par le bissecteur à l'infini. Les événements de type-2 sont alors la découverte des événements sommets à l'infini et l'on avait déjà remarqué que cela correspondait à l'enveloppe convexe. Du point de vue du calcul algébrique il y aura une différence mais pas du point de vue algorithmique.

La gestion du front d'onde et de l'arbre binaire de recherche est grandement facilitée dans la version projective : en désignant par  $\mathcal{H}_\infty$  ce bissecteur particulier, on l'introduit tant dans le front d'onde que dans l'arbre binaire de recherche et le reste se déroule comme dans le cas d'un balayage par ligne (si ce n'est que le traitement est fait en coordonnées polaires). Sur les figures 8.5 à 8.8 on montre les quatre premières étapes d'un balayage projectif, front d'onde et arbre de recherche inclus (non équilibré pour faciliter la lecture).

### 8.3.5 Le balayage par droite en cas limite

Enfin remarquons que, d'une part, le balayage par droite dans le plan projectif peut s'interpréter de deux manières, soit comme un balayage par droite, soit comme un balayage par une conique dégénérée et il est donc de même nature que le balayage par cercle. Dans ce cas le centre de balayage étant sur la droite de l'infini (sur la figure 8.9, il serait "à droite" de  $\Gamma$ ), le comportement de l'algorithme est identique à celui d'un balayage par cercle dont le centre serait choisi, non pas sur la périphérie d'un site, mais en son centre (puisque le centre du cercle est le pôle de la droite de l'infini, dans le cas de la droite double à l'infini, le centre est aussi sur la périphérie). Ceci explique qu'à la fin de

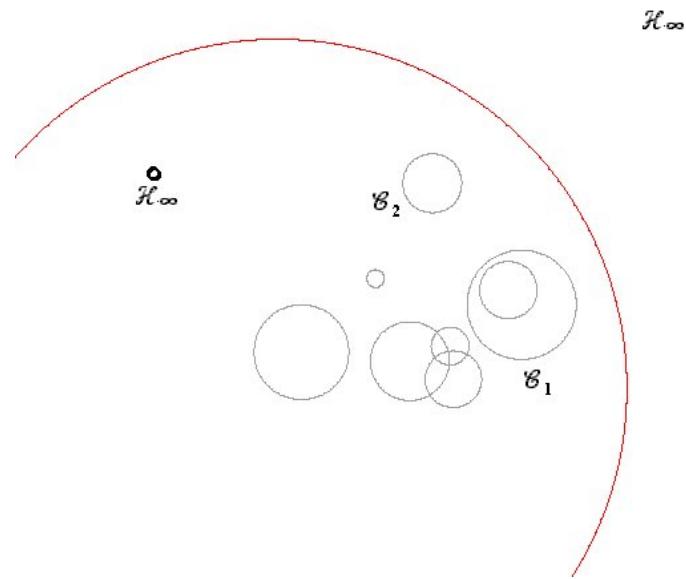


Figure 8.5

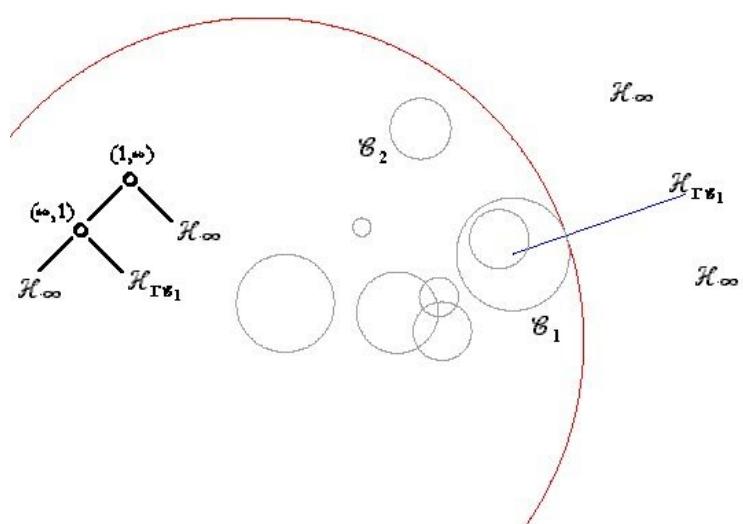


Figure 8.6

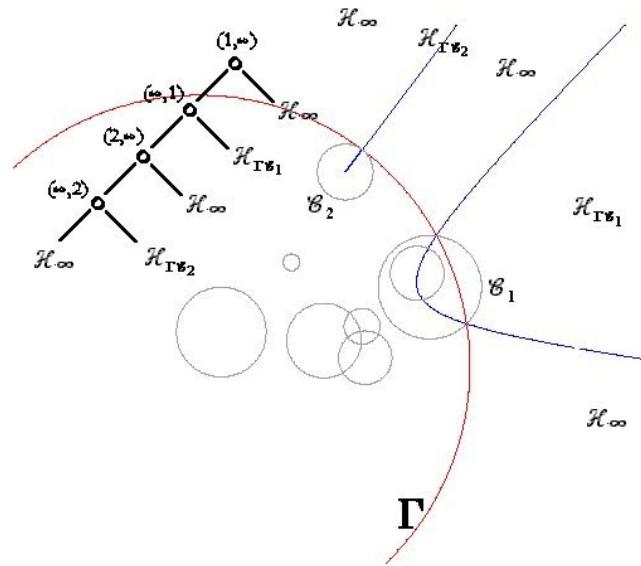


Figure 8.7

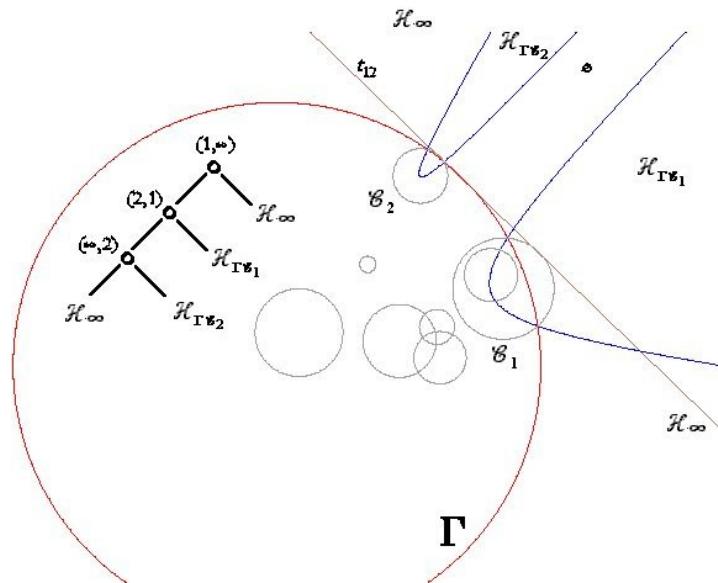
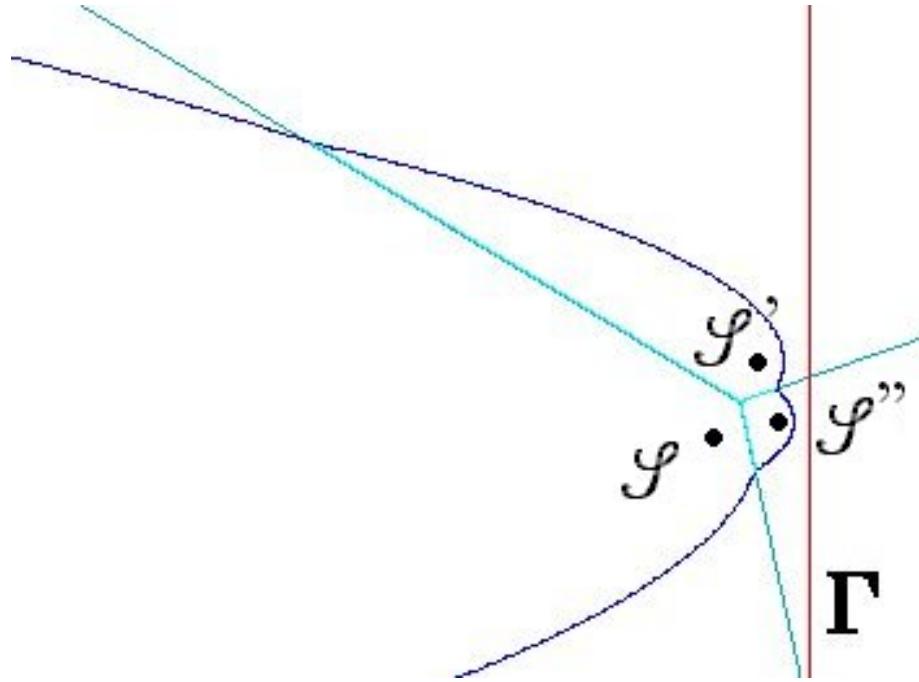


Figure 8.8



**Figure 8.9**

l'algorithme de balayage par droite l'ensemble des sommets à l'infini, qui correspondent au secteur de Voronoï de la droite de l'infini et qui sont les points de rebroussements résiduels du front d'onde, soient découverts en une seule fois ce qui explique que le front d'onde ne disparaît pas à la fin du traitement comme pour le balayage par cercle (Fig. 8.9 : après avoir traité les trois sites et l'événement sommet, le front d'onde reste avec des discontinuités).

Du point de vue de la complexité algorithmique les deux algorithmes sont donc équivalents.

Une dernière remarque est que l'interprétation projective du balayage par droite ne tient que parce que la limite du cercle euclidien, lorsque son centre tend vers l'infini, est une droite : il n'en serait pas de même en géométrie hyperbolique.

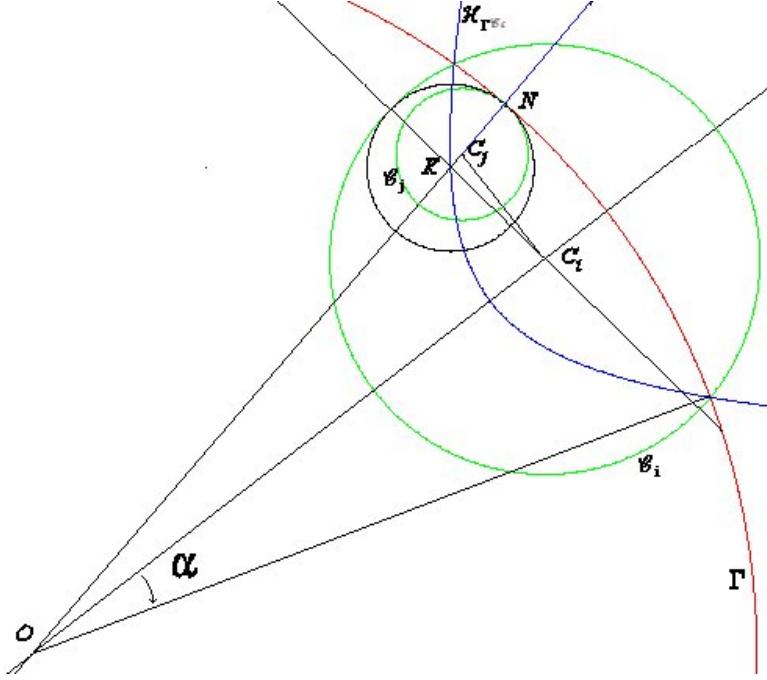


Figure 8.10

#### 8.4 Le test des cercles inclus

Une des conditions pour que l'algorithme soit optimum est que l'on puisse tester la condition de domination d'un cercle par un autre pendant le balayage sans augmenter la complexité. Or, le front d'onde étant connu, il est très facile de vérifier qu'un cercle site que l'on vient de découvrir est ou non inclus dans un autre cercle site, grâce à la définition géométrique élémentaire des coniques (Fig. 8.10).

Soient  $\mathcal{C}_j$  le cercle découvert par  $\Gamma$ ,  $\mathcal{H}_{\Gamma\mathcal{C}_i}$  l'hyperbole du front d'onde (générée par les sites  $\Gamma$  et  $\mathcal{C}_i$ ) interceptée par la normale  $\overline{ON}$  à  $\mathcal{C}_j$ , et  $K = OC_j \cap \mathcal{H}_{\Gamma\mathcal{C}_i}$ .

$K$  est le centre d'un cercle tangent à  $\Gamma$  et à  $\mathcal{C}_i$  puisque  $K$  appartient à  $\mathcal{H}_{\Gamma\mathcal{C}_i}$ , mais comme  $\Gamma$  est aussi tangent à  $\mathcal{C}_j$  en  $N$  ce cercle est aussi tangent à  $\mathcal{C}_j$  en  $N$ . On a donc :  $OK - KC_i = \rho - r_i$ .

Si on suppose que  $\mathcal{C}_j$  est inclus dans  $\mathcal{C}_i$ , on a  $C_iC_j < r_i - r_j$  d'où  $\rho - C_iC_j > \rho - r_i + r_j$

et donc  $OC_j - C_i C_j > \rho - r_i$  qui traduit le fait que  $C_j$  est à l'intérieur de l'hyperbole  $\mathcal{H}_{\Gamma \mathcal{C}_i}$ .

Comme on fait le test au moment où on découvre le cercle, le centre du cercle se trouve à l'intérieur de  $\Gamma$  et donc si le cercle découvert est inclus dans un autre, ce ne peut être que si son centre se trouve dans le secteur angulaire  $\pm\alpha$  centré sur le cercle intercepté et entre  $\Gamma$  et  $\mathcal{H}_{\Gamma \mathcal{C}_i}$ .

Si on utilise une équation algébrique de l'hyperbole, on sait que l'on peut tester le signe de  $\mathcal{H}_{\Gamma \mathcal{C}_i}(x_{C_j}, y_{C_j})$ , qui est une équation du second degré qu'on la considère dans le plan euclidien ou projectif  $(\mathcal{H}_{\Gamma \mathcal{C}_i}(X_{C_j}, Y_{C_j}, Z_{C_j}))$ . En fait, ici, le calcul étant fait en coordonnées polaires, il suffit de tester le signe de  $d_j - \rho_{\mathcal{H}_{\Gamma \mathcal{C}_i}}(\alpha_j)$  ce qui est encore plus simple et se fait bien sûr en  $\mathcal{O}(1)$ .

## 8.5 PSEUDO-CODE DE L'ALGORITHME

On donne maintenant le pseudo-code de l'algorithme, ne serait-ce que pour montrer qu'il n'est pas différent de celui de l'algorithme de Fortune puisqu'il n'y a pas besoin de distinguer les deux types d'événement sommets.

La dernière ligne du programme principal entre (`% %`) est en général ajoutée parce qu'elle répond à la nécessité de transformer la structure de données en graphe planaire à cause des arêtes infinies, elle ne s'applique qu'au cas du balayage par droite.

Le calcul des événements sommets, noté sous la forme « 4 cas  $(k, l, j, i, j, m, n)$  », s'interprète de la façon suivante :  $(k, l, j, i, j, m, n)$  désigne les arêtes consécutives sur la partie modifiée du front d'onde après traitement de l'événement. On recherche les nouveaux triplets de la forme  $(k, l, j)$  correspondants à trois sites tous différents pour avoir les événements nouveaux ou à modifier : ici il y a quatre cas.

## ALGORITHME VORONOÏ DE POINTS PONDÉRÉS

Lire les données d'entrée et calculer les événements sites ;  
 Les trier par rapport au rayon polaire et initialiser la file de priorité ;  
**Tant que** la file de priorité est non vide **Faire**  
     Traiter l'événement en tête de file ;  
     Mettre à jour la file de priorité en supprimant l'événement traité  
**Fin Tant que** ;  
 % Compléter, si nécessaire, la structure de données du graphe planaire. %

### TRAITEMENT\_D\_ÉVÉNEMENT

**Si** événement site **Alors**  
     Traiter **ÉVÉNEMENT\_SITE** ( $i$ )  
**Sinon**  
     Traiter **ÉVÉNEMENT\_SOMMET** ( $i, j, k$ )  
**Fin si.**

#### ÉVÉNEMENT\_SITE ( $i$ )

Chercher dans l'arbre binaire du front d'onde la feuille  $\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_j}$  intersectée par la normale au point de contact du site  $\mathcal{C}_i$  ;

Enlever tous les événements sommet-Casey correspondants au triplet  $(\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_l}, \mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_j}, \mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_m})$  de la file de priorité ;

Remplacer la feuille  $\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_j}$  par un sous-arbre à 3 feuilles  $(\mathcal{H}_{\Gamma\mathcal{C}_j}, \mathcal{H}_{\Gamma\mathcal{C}_i}, \mathcal{H}_{\Gamma\mathcal{C}_j})$  ;

Rééquilibrer l'arbre ;

Créer les 3 nouvelles arêtes temporaires correspondantes dans la DCEL ;

Créer la nouvelle arête définitive  $\mathcal{H}_{\mathcal{C}_i\mathcal{C}_j}$  dans la DCEL ;

Filtrer le front d'onde :

    calculer les événements sommets 4 cas ( $k, l, j, i, j, m, n$ ) ;

Mettre à jour la file de priorité en y insérant les événements sommets s'ils sont nouveaux et non mort-nés.

### **ÉVÉNEMENT\_SOMMET( $i, j, k$ )**

Chercher dans l'arbre du front d'onde la feuille correspondant au bisseateur  $\mathcal{H}_{\Gamma \mathcal{C}_j}$ ;

**Si** l'arête n'est pas de longueur nulle **Alors**

passer à l'événement suivant

**Sinon**

Dans la DCEL mettre leur sommet définitif aux arêtes  $\mathcal{H}_{\mathcal{C}_i \mathcal{C}_j}, \mathcal{H}_{\mathcal{C}_j \mathcal{C}_k}$ ;

Enlever tous les événements sommets, correspondants au triplet  $(\mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_i}, \mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_j}, \mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_k})$  de la file de priorité ;

Enlever la feuille  $\mathcal{H}_{\Gamma \mathcal{C}_j}$  de l'arbre ; mettre à jour les noeuds correspondants ;

Rééquilibrer l'arbre ;

Ajouter la nouvelle arête définitive  $\mathcal{H}_{\mathcal{C}_i \mathcal{C}_k}$  à la DCEL ;

Filtrer le front d'onde :

calculer les événements sommets : 2 cas ( $l, i, k, m$ ) ;

Mettre à jour les pointeurs entre les événements de la file de priorité et les feuilles de l'arbre binaire du front d'onde

**Fin si.**

## 8.6 UN BALAYAGE PAR CÔNE

L'algorithme a été défini et calculé dans le plan comme un balayage par cercle, mais on voit tout de suite que l'on pourrait l'interpréter comme un balayage par un demi-cône équilatère dont le sommet serait initialement situé en un point très au-dessus du centre de balayage (pour dominer et donc masquer la totalité des sites) et qui descendrait ensuite le long de la verticale pour faire apparaître successivement les différents sites.

Le masquage naturel s'interprète tout naturellement avec la représentation par cônes. On voit alors que le site de balayage étant un demi-cône comme un autre, on a ajouté un site supplémentaire à la forêt de cônes et donc la ponctuation horizontale de cette

forêt est toujours un diagramme de Voronoï quelque soit la position du sommet du cône de balayage.

On retrouve tout aussi facilement les résultats précédents, par exemple le fait que tous les demi-cônes aient le même angle au sommet a pour conséquence qu'un événement site qui est le premier contact entre un demi-cône site et le demi-cône de balayage se traduise par un contact le long d'une génératrice dont on ne peut voir que tout (Fig. 8.1) ou partie (Fig. 8.2) suivant la position des autres demi-cônes sites.

## CHAPITRE IX

### ALGORITHME POUR LE CALCUL DES DIAGRAMMES DE VORONOÏ DE CERCLES EN DISTANCE EUCLIDIENNE

#### 9.1 DÉFINITION DU PROBLÈME

On cherche à calculer le diagramme de Voronoï d'un ensemble de circonférences-sites données aléatoirement par leur centre et leur rayon. On ignore donc a priori la nature des intersections mutuelles de ces sites ainsi que leurs positions relatives, c'est-à-dire on ignore s'ils sont totalement disjoints, sécants ou inclus l'un dans l'autre.

De plus, comme on l'a vu précédemment, ce type de diagramme peut bien sûr être obtenu "sans sommet" (cf. Fig. 6.2). La structure de données pour gérer ce graphe devra donc être traitée un petit peu différemment comme suggéré par (de Berg, 1997) p. 32 (nouvelle DCEL partielle) ou p. 33 (Dummy edges).

#### 9.2 LE TYPE DE BALAYAGE

On va calculer ces diagrammes de Voronoï grâce à un algorithme à balayage par cercle. À la différence de diagramme de Voronoï de points pondérés, le balayage peut être cette fois en expansion ou en contraction. En fonction du choix fait on ne considérera pendant le balayage que l'intérieur (expansion) ou l'extérieur (contraction) du cercle.

Le choix est possible parce que dans le cas précédent le balayage en contraction trouvait sa justification dans le fait qu'il y avait une domination des sites non encore décou-

vert par le site de balayage. Ici, comme on l'a vu il n'y a pas de domination (cf. Remarque 4, p. 56) et il est loisible de partir de l'origine du balayage et d'effectuer un balayage en expansion si l'on ne s'intéresse, comme souvent dans les balayages par cercle, qu'à une partie finie du diagramme, une fenêtre circulaire en fait. La partie utile sera alors l'intérieur de  $\Gamma$ .

À l'inverse, deux cas peuvent justifier un balayage en contraction. Le premier cas se produit si l'on sait que tous les sites sont inclus dans une seule circonférence, alors on pourrait aussi utiliser un balayage en contraction en partant de la circonférence périphérique. Cette méthode qui sera utilisée dans le calcul du diagramme de Voronoï de points en géométrie hyperbolique ne présente pas de différence de nature avec l'algorithme en expansion car il n'y a aucun point à l'infini dans le diagramme.

Le second cas est celui où l'on veut obtenir la totalité du diagramme dans le plan, surtout si celui-ci est un diagramme sans sommet. Dans ce cas il y a les événements de type-2 (cf. §8.3.2, p. 112) qui mettent en jeu seulement deux des sites donnés au lieu de trois parce que l'on traite les sommets à l'infini du diagramme et l'on sait qu'il vaut mieux les traiter au cours du balayage plutôt qu'après. Avec la même disposition des sites, que la distance soit la distance algébrique ou la distance euclidienne, on a déjà remarqué que le diagramme à l'infini est le même (Corollaire 3, p. 58). Donc le comportement de l'algorithme pour les sommets à l'infini sera le même, puisque son code sera identique.

C'est donc un simple problème de commodité qui justifie le choix du sens de balayage. Si l'on a choisi ici de présenter un balayage en expansion c'est simplement pour éviter de retraiter le cas des sommets à l'infini qui est déjà traité dans le chapitre 8. On va donc considérer un balayage en expansion pour la construction du diagramme et l'on arrêtera conventionnellement le balayage avant que le cercle de balayage "n'atteigne" l'infini, mais bien sûr seulement après avoir couvert tous les sites.

### 9.3 BALAYAGE PAR CÔNE

Il est intéressant de se demander si on peut donner une interprétation physique de ce qui précède grâce à la représentation par cônes et volcans. On veut balayer des cercles-sites avec des sites de même nature mais dans l'interprétation que l'on va faire maintenant, on ne va pas totalement respecter cette convention qui nous amènerait d'une certaine manière à balayer des volcans avec un volcan, ce qui n'est pas nécessaire.

En fait, du cercle de balayage, on n'utilise que l'un des côtés, intérieur, balayage en expansion, ou extérieur, en contraction, mais cela revient à considérer que la partie non utile du cercle est dans le secteur de Voronoï du cercle. Partons donc du plan horizontal qui contient les cercles-sites, donc le haut des cratères des volcans. Au dessus de ce plan on met un demi-cône équilatéral qui entoure tous les cratères et domine tous les volcans, c'est-à-dire que ce demi-cône a son sommet situé assez haut pour ne pas avoir d'intersection avec les pentes des volcans. Si le cône est opaque en vue de dessus on ne voit donc rien que le cône de balayage.

Le balayage par cercle en contraction consiste simplement à faire descendre le demi-cône de balayage le long d'une verticale passant par son sommet et à prendre à chaque étape la ponctuation horizontale de cette surface. Les intersections avec les différents volcans-sites commencent toujours par les pentes (donc on commence par une génératrice Fig. 8.2, p. 113) et se feront au fur et à mesure de la descente du cône de balayage. Le tracé du diagramme de Voronoï sera terminé lorsque le cône sera suffisamment bas pour être caché par tous les volcans-sites.

Avant même de débuter formellement la description de l'algorithme, on a ainsi une très bonne représentation de celui-ci et on voit que, puisque l'on suit les points de rebroussements du diagramme, on va devoir non seulement tracer les arêtes du diagramme mais aussi tracer les cercles-sites puisque les bords des cratères seront toujours des points de rebroussement du diagramme temporaire. Cette présentation confirme aussi qu'il faudra décomposer les arêtes à chaque intersection de cercles-sites puisque l'on est obligé de

s'arrêter sur le bord de chaque cratère pour tracer un autre bissecteur en passant de la pente du volcan à l'intérieur du cratère ou l'inverse.

Bien entendu si l'on prend un balayage en expansion, le demi-cône doit être renversé avec son sommet sur le plan horizontal (c'est le centre de balayage), on regarde l'intérieur du demi-cône, il crève le plan horizontal suivant le cercle de balayage et fait apparaître le diagramme de Voronoï au fur et à mesure que les événements se déroulent. On voit qu'en fait on balaye avec un cratère et on voit aussi pourquoi on peut alors arrêter le balayage avant la fin tout en ayant une très bonne approximation du diagramme de Voronoï que l'on cherche puisque le diagramme obtenu est correct jusqu'à la frontière du secteur de Voronoï du cratère de balayage. Cette approximation peut être poussée aussi loin que l'on veut.

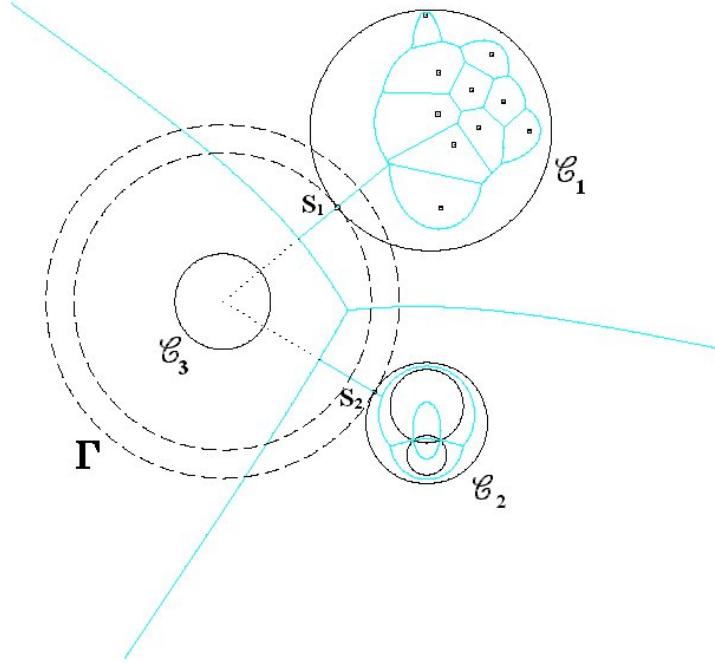
#### 9.4 LE CHOIX DU CENTRE DE BALAYAGE

A l'inverse de l'algorithme en contraction, on va choisir cette fois un centre de balayage extérieur à tous les cercles ; cela assure que le premier site découvert est un site qui n'est pas inclus dans un autre et donc que la première arête du diagramme de Voronoï à construire fait partie du graphe principal et non pas d'un sous-graphe inclus.

En tout état de cause, puisqu'il faut de toute manière, comme pour tous les algorithmes de ce type, trier les sites par rapport à un pôle donné pour assurer l'initialisation de la file de priorité des événements, il suffit de prendre un nouveau pôle à une distance de l'ancien qui soit supérieure à la somme de la plus grande distance des centres des sites ( $d_i$ ) et du plus grand des rayons des cercles-sites ( $r_i$ ), cela assure que le pôle de balayage sera extérieur à tous les sites et que l'opération se fera en  $\mathcal{O}(n \log n)$ , donc sans conséquence sur la complexité finale de l'algorithme.

#### 9.5 ARÈTES VIRTUELLES

Pour relier entre eux ces différents diagrammes, on choisit donc d'utiliser des arêtes virtuelles, dites "dummy edges" qui permettent de passer de l'un à l'autre de ces dia-



**Figure 9.1**

grammes, à défaut, il faudrait gérer plusieurs DCEL séparées, en gardant à part l'information d'inclusion des différents diagrammes. Non seulement les arêtes virtuelles facilitent une gestion globale du diagramme, mais ici, elles ont une interprétation géométrique simple en terme de diagrammes de Voronoï. En effet, on peut créer des "dummy edges" facilement en mettant des sites virtuels qui sont des cercles de rayons nuls sur les cercles sites aux points où le cercle de balayage les découvre ou les quitte (ce qui ne modifiera pas la complexité).

Ainsi si l'on effectue un balayage en contraction dont le centre est au centre du cercle isolé  $\mathcal{C}_3$  (Fig. 9.1) on peut mettre deux sites ponctuels en  $S_1$  et  $S_2$ , qui sont les points de contact du cercle de balayage  $\Gamma$  avec  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . Le diagramme de la figure précédente (Fig. 9.1) est alors modifié comme on le voit sur la figure par addition de deux arêtes virtuelles, portées par les normales en  $S_1$  et  $S_2$  à  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  passant par le centre de balayage, dont le seul rôle est de relier entre eux les trois diagrammes pour les rendre

connexes.

On voit que ce sont aussi des demi-cônes équilatères dont les sommets se trouvent en  $S_1$  et  $S_2$  c'est-à-dire au ras du cratère. Pour chacun d'eux seule une portion de génératrice en est visible.

## 9.6 LES TROIS SITUATIONS DES CERCLES $D, S, I$

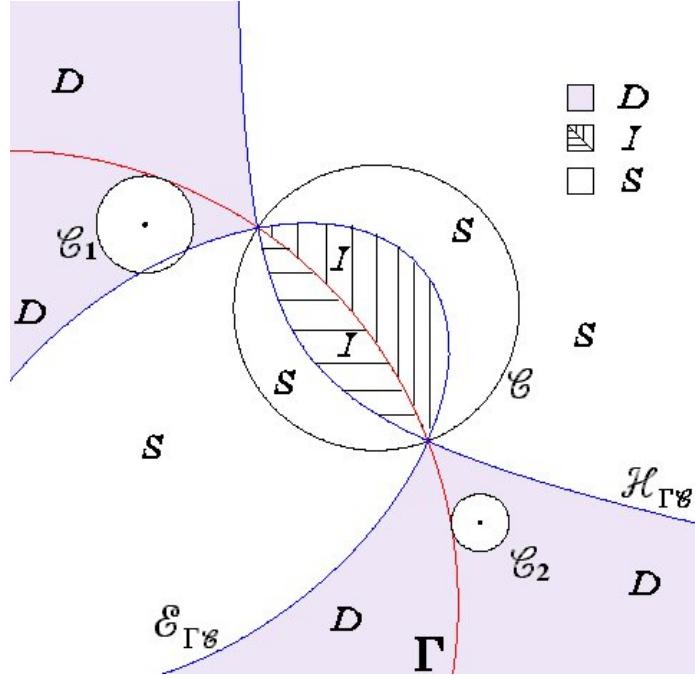
On généralise simplement le test fait au paragraphe §8.4, p.121. La démonstration est identique. Il y a trois positions relatives de deux cercles  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}_1$  l'un par rapport à l'autre (Fig. 9.2). Ils peuvent être soit disjoints ( $D$ ), soit sécants ( $S$ ), soit inclus ( $I$ ). On peut détecter facilement cette position au cours du balayage au moment où  $\Gamma$ , coupant  $\mathcal{C}$ , est tangent à  $\mathcal{C}_1$  en testant la position du centre de  $\mathcal{C}_1$  par rapport aux coniques du front d'onde. Remarquons que ce test très simple et en  $\mathcal{O}(1)$  peut être fait quelque soit le type de balayage, contraction ou expansion, et quelque soit le moment, découverte de  $\mathcal{C}_1$  ou fin du balayage de  $\mathcal{C}_1$  par  $\Gamma$ .

## 9.7 LES RÈGLES DE COMPOSITION DU FRONT D'ONDE

Puisque l'on traite un balayage en expansion, sans même avoir à utiliser l'interprétation projective, le front d'onde intérieur au cercle de balayage est toujours circulaire et connexe et se compose d'arcs d'ellipses et/ou d'arcs d'hyperboles selon la nature de l'intersection avec le cercle de balayage. La figure (Fig. 9.3) montre le secteur de Voronoï de  $\Gamma$  qui comprend, à l'intérieur de la partie utile ( $PU$ ), l'extérieur du front d'onde et tout l'extérieur de  $PU$ , les arcs de cercle extérieurs à  $\Gamma$  devant être considérés comme neutralisés tant qu'ils ne sont pas découverts. Sa forme paraît toujours assez complexe, néanmoins on a la garantie qu'il est toujours circulaire et donc connexe.

**Théorème 16 :** *Le front d'onde est toujours connexe pendant le balayage.*

*Démonstration :* Le front d'onde représente toujours la frontière du secteur de Voronoï du cercle-site de balayage. Ce secteur de Voronoï du cercle de balayage est formé par la



**Figure 9.2**

réunion des secteurs de Voronoï des arcs de cercles découpés dans la courbe de balayage  $\Gamma$  par les cercles-sites, eux-même découpés en arc-de-cercles-sites par la circonference  $\Gamma$ . Comme le cercle est connexe, son secteur de Voronoï l'est aussi, ainsi que sa frontière.  $\square$

Se basant sur le test de la position relative d'un cercle par rapport à un autre, le théorème suivant sera utilisé pour la gestion du front d'onde :

**Théorème 17 :** *Le front d'onde est composée d'arc de coniques qui répondent aux règles de composition suivantes dans lesquels le signe égal signifie que l'intersection des deux courbes de gauche engendre la courbe de droite quand le cercle balaye le plan (Fig. 9.4) :*

- (D)- Si  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont disjoints, on a  $\mathcal{E}_{\Gamma\mathcal{C}} \cap \mathcal{E}_{\Gamma\mathcal{C}'} = \mathcal{H}_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$ , où  $\mathcal{H}_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$  est l'arc d'hyperbole du diagramme définitif engendré par l'intersection des deux arcs front d'onde.
- (I) - Si  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$  on a :  $\mathcal{E}_{\Gamma\mathcal{C}'} \cap \mathcal{H}_{\Gamma\mathcal{C}} = \mathcal{E}_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$ , où  $\mathcal{E}_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$  est l'arc d'ellipse du diagramme définitif engendré par l'intersection des deux arcs front d'onde.

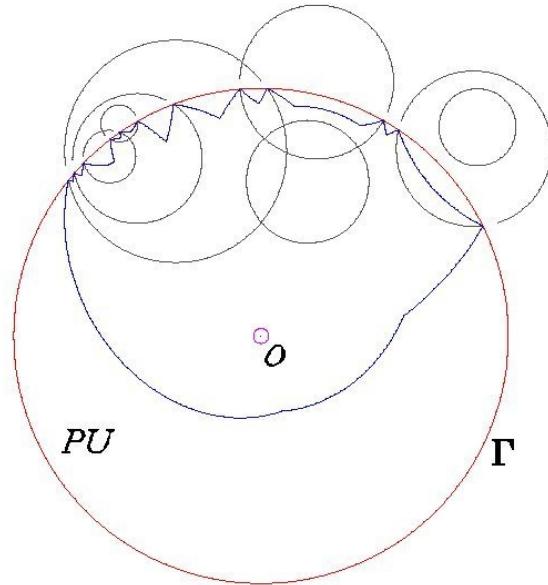


Figure 9.3

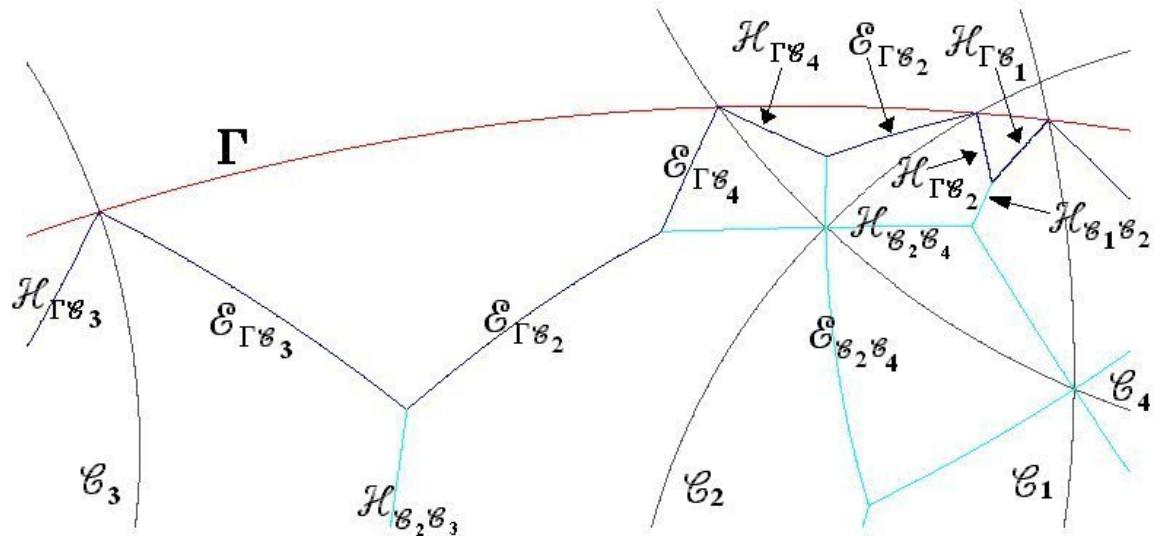


Figure 9.4

- (S) - Enfin si  $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \neq \emptyset$ , on a, à l'intérieur de  $\Gamma$  :
  1. mais à l'extérieur de  $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$  :  $\mathcal{E}_{\Gamma\mathcal{C}} \cap \mathcal{E}_{\Gamma\mathcal{C}'} = \mathcal{H}_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$
  2. alors qu'à l'intérieur de  $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ , la même branche d'hyperbole est engendrée par l'intersection de  $\mathcal{H}_{\Gamma\mathcal{C}} \cap \mathcal{H}_{\Gamma\mathcal{C}'} = \mathcal{H}_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$ .
- (C) Remarquons finalement que comme indiqué plus haut :  $\mathcal{E}_{\Gamma\mathcal{C}} \cap \mathcal{H}_{\Gamma\mathcal{C}} = \mathcal{C}$  (ce qui revient à dire que le front d'onde trace aussi les sites).

*Démonstration :* Tous les cas se démontrent, très simplement, de la même manière aux signes près. Puisque l'on a adopté deux points de vue différents pour la visualisation de l'algorithme l'un plan, l'autre dans l'espace, on va démontrer seulement deux cas un avec chacun des deux points de vue ; le choix des cas est arbitraire.

Cas (S) – 2 (notations de la Fig. 9.5) Soit  $V_\rho$  le sommet de Voronoï déterminé par les trois cercles-sites  $\Gamma, \mathcal{C}, \mathcal{C}'$  de centre  $O, F, F'$  et de rayon  $\rho, r, r'$  on a par définition du sommet trois équations semblables à l'équation 2.1 déjà trouvée (p. 23) :

$$V_\rho P = V_\rho R \implies V_\rho O - \rho = V_\rho F - r \implies V_\rho \in \mathcal{H}_{\Gamma\mathcal{C}} \quad (9.1)$$

$$V_\rho P = V_\rho S \implies V_\rho O - \rho = V_\rho F' - r' \implies V_\rho \in \mathcal{H}_{\Gamma\mathcal{C}'} \quad (9.2)$$

$$V_\rho R = V_\rho S \implies V_\rho F' - r' = V_\rho F - r \implies V_\rho \in \mathcal{H}_{\mathcal{C}'\mathcal{C}} \quad (9.3)$$

Sur la figure 9.4 ce cas correspond aux cercles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ .

La deuxième démonstration est tout aussi facile mais utilise le point de vue des cônes. Prenons le cas (D) (cercles  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$  sur la figure 9.4) :

Le balayage est en contraction, donc avec un cratère, l'intersection d'un cratère avec la pente d'un volcan donne une ellipse (cf Fig. 3.9, p. 56), donc le cratère de balayage et la pente des deux volcans  $\mathcal{C}_3$  et  $\mathcal{C}_2$  donne deux ellipses :  $\mathcal{E}_{\Gamma\mathcal{C}_3}$  et  $\mathcal{E}_{\Gamma\mathcal{C}_2}$ , mais l'intersection des pentes de deux volcans donne une hyperbole :  $\mathcal{H}_{\mathcal{C}_2\mathcal{C}_3}$  puisque cela correspond à deux demi-cônes de même orientation. Enfin le sommet étant sur le cratère de balayage et sur la pente des deux volcans, la démonstration est terminée.

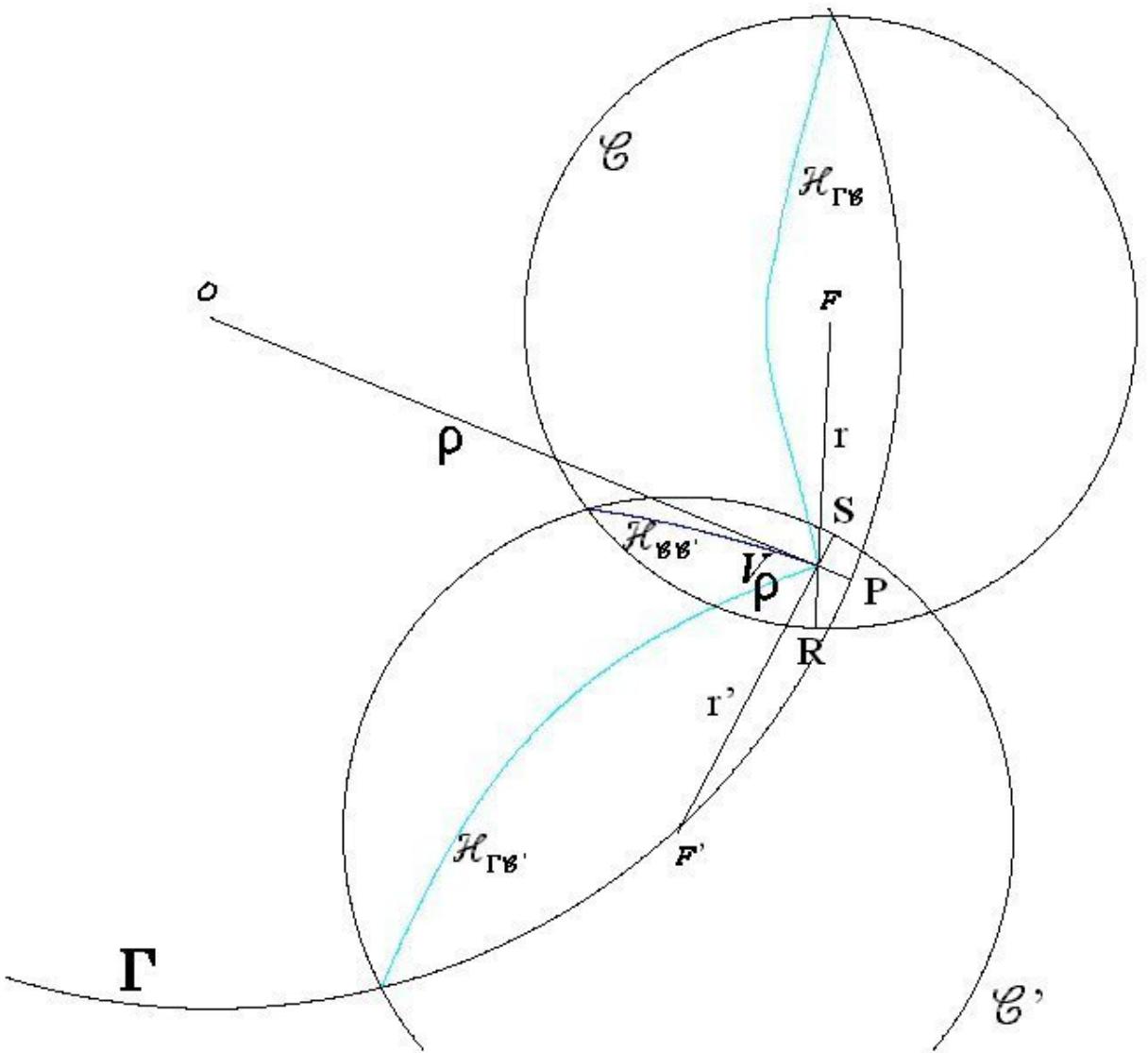


Figure 9.5

Pour les autres cas, il suffit de changer les signes de  $r$  et/ou de  $r'$  dans les équations (9.1 à 9.3) ou de permutez pentes et cratères pour obtenir des ellipses là où il y avait des hyperboles ou réciproquement.  $\square$

En se référant à l'appendice (A : notations et formules) on voit que les équations des deux types de coniques étant similaires, l'hyperbole étant donnée avec  $\varepsilon = +1$ , l'ellipse avec  $\varepsilon = -1$ , le produit des epsilon de deux arcs de coniques consécutifs et correspondants à deux sites distincts du front d'onde donne l'epsilon de la conique qui supporte l'arête du diagramme engendrée par leur intersection.

## 9.8 L'ADAPTATION DE LA DCEL

On adapte la DCEL en ajoutant une nouvelle colonne, donnant la nature de l'arc de bissecteur propre ou impropre, c'est-à-dire indiquant la nature de la courbe, ellipse ou hyperbole (bissecteur propre) ou cercle (impropre) puisque, comme on l'a vu, la DCEL contient non seulement les arêtes du diagramme, mais du fait que le front d'onde trace les sites, elle contient aussi les arcs de cercles qui les forment. Ceci n'est pas un inconvénient, au contraire, car grâce à ce fait il est possible de "s'orienter" dans le diagramme puisque si on se donne un point quelconque sur un arc de site qui ne soit pas un sommet, on peut en déduire grâce au code habituel son secteur de Voronoï, et de manière duale, si on se donne un point d'intersection des arcs de cercles, on peut en déduire toutes les arêtes qui en sont issues, arêtes ou arcs de sites (cf. Okabe, 1992, p. 220-221).

## 9.9 LES QUATRE FONCTIONNALITÉS DU FRONT D'ONDE

Par rapport à l'algorithme à balayage en contraction, le front d'onde a maintenant quatre fonctionnalités que l'on présente ci-dessous :

### 9.9.1 Découverte et tracé des sites

C'est la fonctionnalité de base, identique pour tous les algorithmes à balayage. Pourtant, même si cet événement ne fait intervenir que le site de balayage et un cercle-site, il y a

une différence essentielle par rapport au cas de l'algorithme pour points pondérés.

Lors de la découverte du premier site  $\mathcal{C}$ , comme dans le cas précédent, le cercle de balayage  $\Gamma$  (Fig. 9.6) ne connaît qu'un point du site et donc le lieu des points équidistants du cercle de balayage et de ce point, le front d'onde, se réduit au rayon du cercle normal à ce site.

Du point de vue algorithmique, ce rayon est en fait plus complexe, en effet, dès que le rayon du cercle de balayage augmentera de  $\varepsilon$ , le front d'onde se modifiera pour donner un arc d'ellipse  $\mathcal{E}_{\Gamma\mathcal{C}}$  et un arc d'hyperbole  $\mathcal{H}_{\Gamma\mathcal{C}}$ . Ceci est logique puisque le front d'onde est circulaire par nature.

Les deux conséquences de ce fait sont d'une part que le *rayon* de départ doit être mis dans la DCEL sous la forme de deux arêtes ( $\mathcal{E}_{\Gamma\mathcal{C}}$  et  $\mathcal{H}_{\Gamma\mathcal{C}}$ ), et non pas d'une seule, d'autre part que, dès le premier site, le front d'onde a deux points de rebroussement  $C_1$  et  $C'_1$ . Là non plus ce n'est pas une surprise, puisque l'on a vu plus haut que le front d'onde allait tracer les sites ; on en déduit aussitôt que la DCEL va contenir les "arcs de cercles sites". Ces deux arêtes impropre du diagramme de Voronoï seront intégrées dans la DCEL à la découverte du site comme des arêtes définitives, là aussi dès le premier événement (alors que dans un balayage classique, on ne trouve d'arête définitive qu'au second). Cette inclusion des "arcs de cercles-sites" est une nécessité, car si les sites circulaires sont donnés, leurs intersections ne le sont pas et cela va donc permettre de connaître les sites sous la forme de leurs composants élémentaires s'il y en a.

En terme de complexité spatiale, il n'y a pas de conséquence asymptotique puisqu'on a vu que le diagramme était de complexité  $\mathcal{O}(p)$ , où  $p$  est le nombre d'intersections, et non pas  $\mathcal{O}(n)$ . La DCEL va donc servir à décrire non pas le simple diagramme de Voronoï, mais en fait le diagramme planaire complet formé par le diagramme de Voronoï et les arcs de cercles-sites. Si l'on veut n'avoir que le pur diagramme de Voronoï (mais il est en fait sans intérêt si l'on ignore les points d'intersection des cercles-sites), il faudra faire un traitement a posteriori pour séparer les deux graphes ; on verra que la séparation des deux types d'arêtes ne pose pas de problèmes.

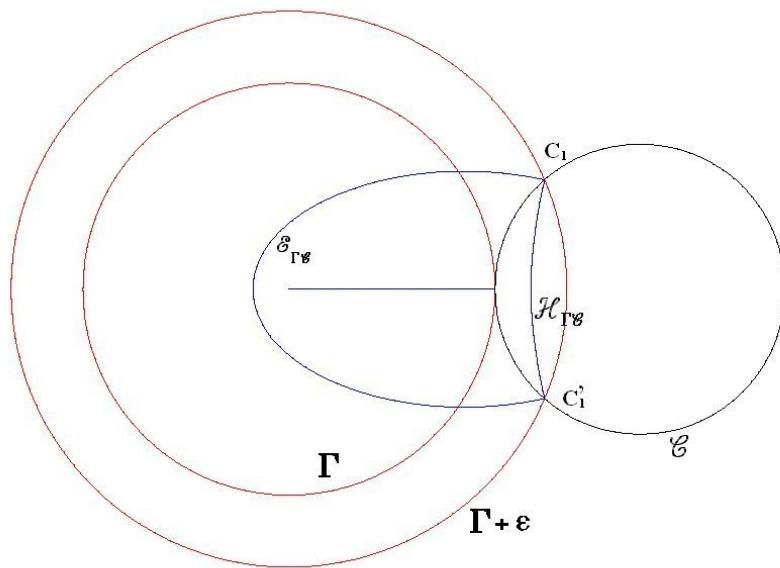


Figure 9.6

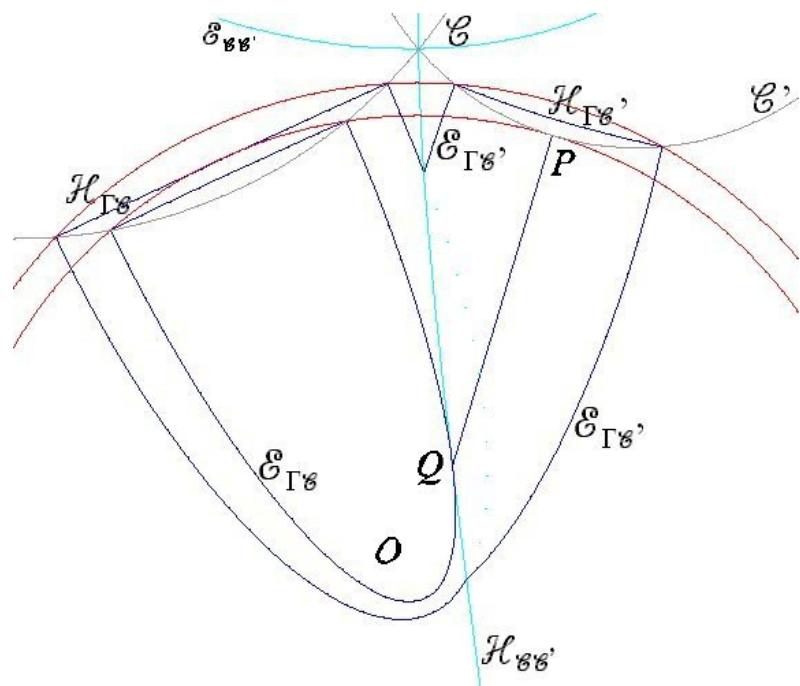


Figure 9.7

La modification de l'arbre binaire des points de rebroussement lors d'un événement-site est donc plus importante que ce qui se fait dans l'algorithme de points pondérés (Fig. 9.8 (a)). Le front d'onde est modifié par ajout de trois nouveaux arcs auxquels il faut ajouter l'arc initial divisé en deux parties, au lieu d'un nouvel arc plus l'arc intercepté divisé en deux. Pour un balayage en expansion, avec le centre de balayage choisi conformément au paragraphe §9.4, ceux-ci sont nécessairement de la forme arc d'ellipse, arc d'hyperbole, arc d'ellipse en application du théorème 17 sur les règles de composition des arcs indiquées plus haut. De plus il y a quatre points de rebroussement et l'on crée deux nouvelles arêtes définitives, l'une propre ( $\mathcal{H}_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$ ) et l'autre impropre ( $\mathcal{C}'$ ) (Fig. 9.8 (b)).

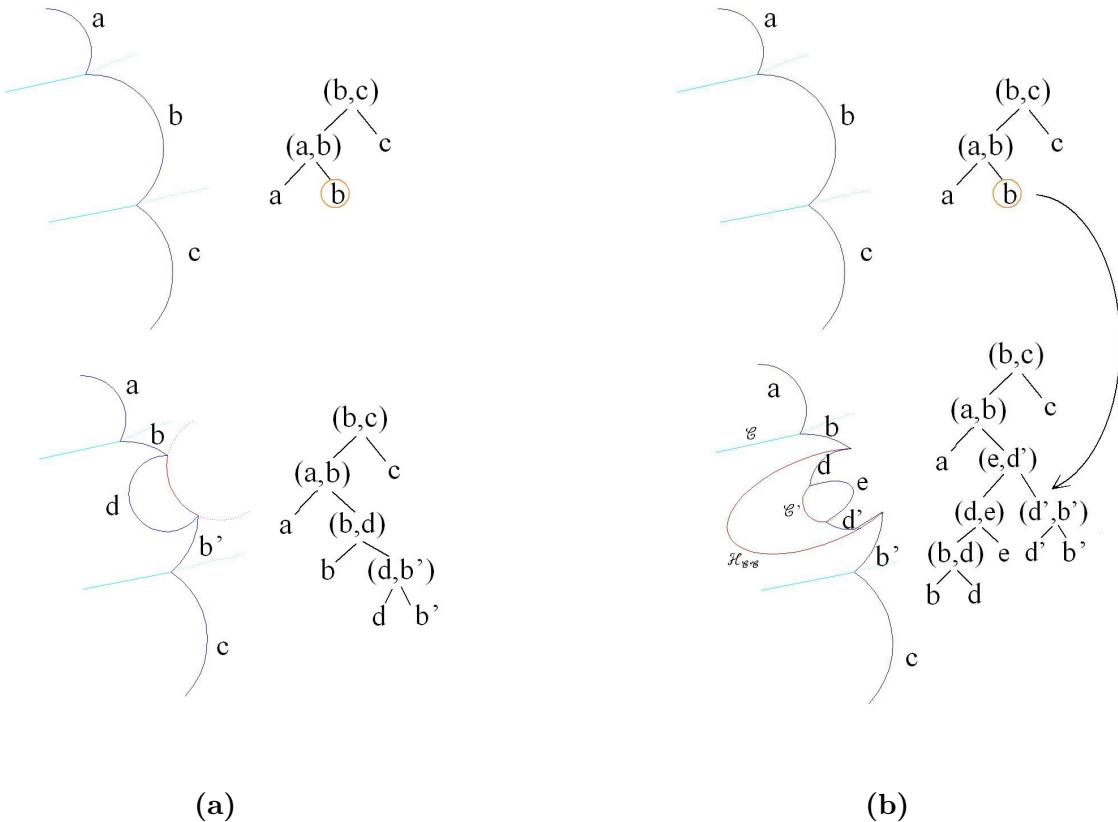
Enfin, on a les deux remarques suivantes :

**Remarque 8** : *En application du théorème 14, p. 99, le cercle de balayage étant tangent à  $\mathcal{C}'$  en  $P$ , l'arc  $\mathcal{E}_{\Gamma\mathcal{C}}$  du front d'onde est tangent en  $Q$  au bissecteur  $\mathcal{H}_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$  (Fig. 9.7).*

**Remarque 9** : *Lorsque la courbe de balayage découvre un site, puisque l'on ignore tout ce qui est extérieur à la courbe de balayage, la seule chose que l'on connaisse du site à cet instant du balayage est un arc de cercle qui se limite à un point ( $P$ ), et donc à un cercle de rayon nul, comme le diagramme de Voronoï est exact à tout instant du balayage, l'arête  $PQ$  du front d'onde est alors équivalente à une arête virtuelle utilisée pour assurer la connexité du diagramme.*

### 9.9.2 Suivi des événements sommets Casey

C'est le rôle de base de la courbe de balayage. Les événements sommets Casey sont de type-3 ; il n'y aura pas d'événement de type-2 vu le choix fait plus haut de choisir un balayage en expansion et d'arrêter avant la fin. À la fin de l'algorithme, le cercle de balayage englobe nécessairement toute la figure. Les arêtes infinies que l'on trace, si l'on en trace, sont donc des hyperboles et sont générées par un front d'onde qui n'est plus formé que par des arcs d'ellipses (Théorème 17, cas (D)).



**Figure 9.8**

Les événements sommets sont calculés uniquement grâce à la condition de Casey donnée au paragraphe 8.3.3, p. 114, la seule différence avec l'algorithme précédent venant du fait qu'on utilise tous les signes dans l'équation (7.1), p. 102 et non pas la version donnée par l'équation (A.11), p. 242.

### 9.9.3 Suivi des intersections des cercles sites

C'est évidemment la fonctionnalité spécifique de cet algorithme qui le distingue le plus de l'algorithme pour les points pondérés. Il y aurait plusieurs méthodes pour traiter le passage des intersections, mais la méthode choisie est économique au sens où elle utilise les outils dont on dispose déjà, le but étant d'augmenter la modularité de la programmation pour en réduire la complication.

Si les intersections éventuelles des cercles ne sont pas connues à l'avance elles peuvent néanmoins être détectées grâce au front d'onde. On utilise pour cela le fait que les discontinuités du front d'onde tracent non seulement les bissecteurs mais aussi les sites. Puisqu'il s'agit en fait de sommets dégénérés, les événements correspondants sont gérés par le front d'onde dans les mêmes conditions que des sommets normaux, avec mise dans la file de priorité de l'intersection potentielle des cercles riverains sur le front d'onde. La différence est que ce front d'onde étant filtré sur deux arcs au lieu de trois, le filtrage du front d'onde se réduit à un seul cas puisqu'il n'y a qu'un cercle nouveau à prendre en compte à chaque étape.

Cette opération de filtrage est même plus simple que la recherche des sommets puisqu'elle consiste simplement à considérer les arêtes du front d'onde, deux cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  ayant une possibilité d'intersection si et seulement si le front d'onde a deux arêtes consécutives de types  $\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}}, \mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}'}$  avant l'intersection. Après ce filtrage on introduit, si elles existent, leurs deux intersections potentielles dans la file de priorité puis on met à jour comme dans les événements normaux.

Les événements sommets intersections correspondants ne sont traités que si l'intersection des 2 cercles sites est réelle. À la différence des événements Casey, on est certain qu'ils ne disparaissent pas de la file avant traitement comme une fausse alarme de type morituri. Une fois calculés, ils peuvent rester dans la file sans qu'on ait besoin de les enlever, puisque s'ils étaient amenés à disparaître, on sait qu'ils réapparaîtraient sur le front d'onde au plus tard juste avant que  $\Gamma$  n'atteigne la valeur d'intersection.

On vérifie aussi grâce à cette remarque que puisque l'on trace les sites et que l'on s'arrête à chaque discontinuité du front d'onde que la complexité de l'algorithme va dépendre étroitement du nombre d'intersections.

La modification du front d'onde lors d'un sommet intersection se fait conformément à la figure 9.9 la nature des bissecteurs, hyperboliques ou elliptiques, dépendant des conditions d'arrivée sur l'événement sommet.

Si on désigne par  $\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}}$  un bissecteur, on va noter  $\overline{\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}}}$  le bissecteur conjugué, c'est-à-dire le bissecteur correspondant au cas (C) du théorème 17, donc si  $\mathcal{B}$  est une hyperbole,  $\overline{\mathcal{B}}$  est une ellipse et réciproquement.

Juste avant l'événement sommet intersection, le front d'onde a la forme :

$$\dots, \overline{\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}}}, \mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}}, \mathcal{B}'_{\Gamma\mathcal{C}'}, \overline{\mathcal{B}'_{\Gamma\mathcal{C}'}, \dots} \quad (9.4)$$

On démontre maintenant la propriété suivante :

**Proposition 3** : *Si le front d'onde a la forme indiquée par l'équation 9.4 avant l'intersection, à la sortie de l'événement sommet intersection, le front d'onde aura la forme :*

$$\dots, \overline{\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}}}, \mathcal{B}'_{\Gamma\mathcal{C}'}, \overline{\mathcal{B}'_{\Gamma\mathcal{C}'}, \mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}}}, \overline{\mathcal{B}'_{\Gamma\mathcal{C}'}, \dots} \quad (9.5)$$

*Démonstration* : Avant l'événement sommet intersection, le point de rebroussement généré par l'intersection de  $\overline{\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}}}, \mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}}$  trace  $\mathcal{C}$  et celui de  $\mathcal{B}'_{\Gamma\mathcal{C}'}, \overline{\mathcal{B}'_{\Gamma\mathcal{C}'}}$  trace  $\mathcal{C}'$ . Donc au moment de l'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ , les deux arêtes  $\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}}, \mathcal{B}'_{\Gamma\mathcal{C}'}$  ont une longueur nulle (juste avant un événement sommet régulier dans un algorithme à balayage, une seule des arêtes a une longueur nulle (Théorème 7.5, p. 105)).

Au moment de l'intersection trois arêtes se terminent simultanément. Cela vient du fait que si deux arêtes temporaires mitoyennes ont une longueur nulle, il y a trois points de rebroussement qui coïncident, et donc les trois arêtes définitives qu'ils généraient se terminent (cf. Définition 19 et Théorème 13). Ces trois arêtes sont bien sûr les deux arcs de cercles de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ , d'une part, l'arête  $\mathcal{B}''_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$  générée par les arêtes temporaires  $\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}}, \mathcal{B}'_{\Gamma\mathcal{C}'}$  d'autre part,  $\mathcal{B}''$  étant fonction de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  suivant la loi de composition du théorème 17.

Après l'intersection, *dans le voisinage immédiat du sommet*, on connaît non plus deux mais quatre sites qui sont les quatre arcs de cercles supportés par  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ . C'est ici que l'on voit le mieux la double nature site-arête de ces arcs de cercle. D'une part ce sont des sites, deux sont maintenant fixes et totalement connus, les deux arcs qui sont

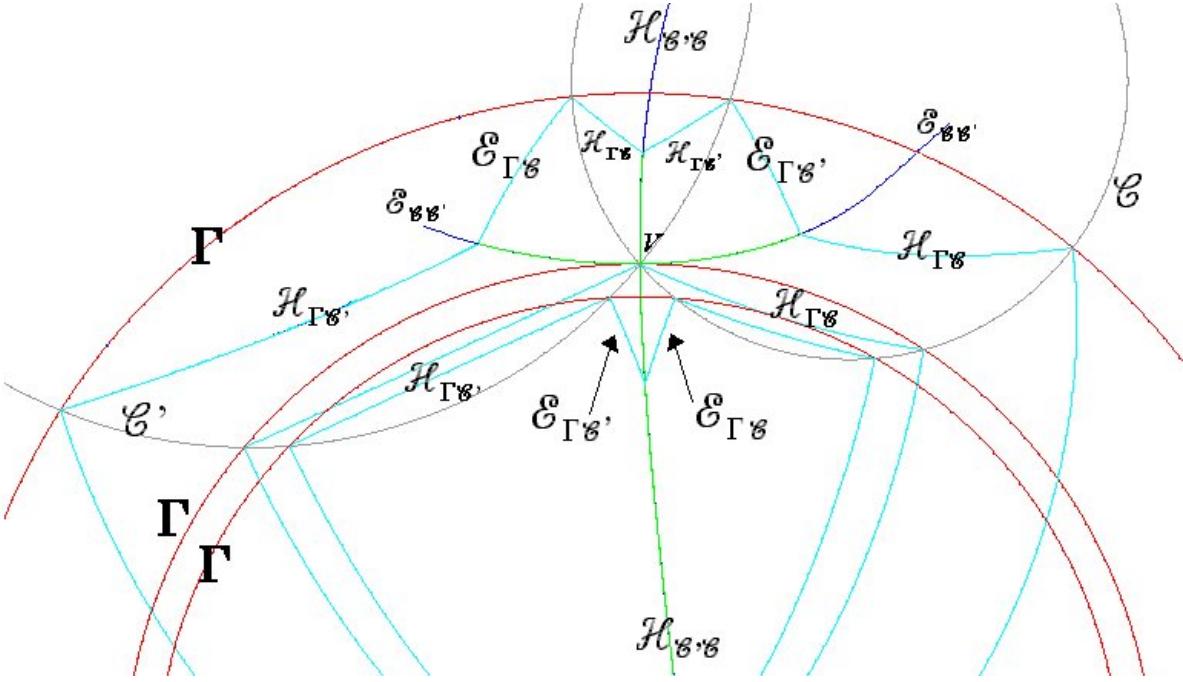
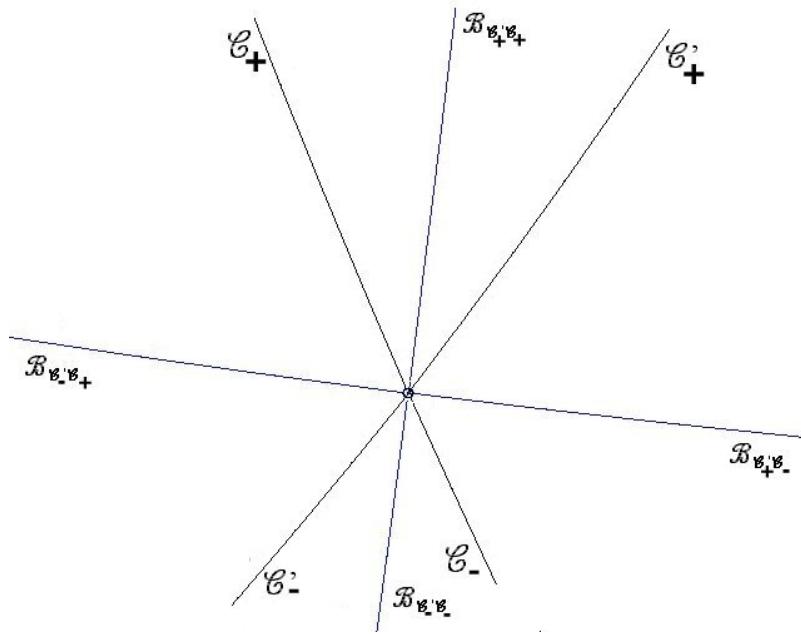


Figure 9.9

terminés et deux sont variables puisque l'on est en train de les tracer et en ce sens ce sont des arêtes. D'une certaine manière on construit les sites en même temps que les arêtes.

Ce qui est essentiel ici c'est de voir que le fait que deux des arcs ne soient que partiellement connus puisque l'on est en train de les tracer, n'a pas d'importance pour le déroulement de l'algorithme ; en effet la partie des arcs de cercles-sites que l'on ignore encore est à l'extérieur de  $\Gamma$ , donc masquée par le cratère du site de balayage : tout point extérieur à  $\Gamma$  appartient au secteur de Voronoï de  $\Gamma$ .

En conséquence quand le rayon de  $\Gamma$  va croître, on va tracer le diagramme de Voronoï de ces quatre sites, plus les deux arcs de cercles-sites, que l'on va désigner maintenant par  $\mathcal{C}_-, \mathcal{C}'_-$  pour les arcs de cercles qui sont terminés et  $\mathcal{C}_+, \mathcal{C}'_+$  pour les nouveaux. Les quatre sites ont toujours une forme en croix. Il y a donc quatre arêtes à considérer. L'arête  $B_{\mathcal{C}_-\mathcal{C}'_-}$  (nommée  $B''_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$  dans les paragraphes précédents) a été terminée juste au



**Figure 9.10**

moment de l'intersection, il reste donc (Fig. 9.10) trois arêtes ( $B_{C'_- C_+}$ ,  $B_{C'_+ C_+}$ ,  $B_{C'_+ C'_-}$ ) et les deux arcs de cercles-sites ( $C_+$ ,  $C'_+$ ) à tracer ce qui représente donc cinq points de rebroussement dans le front d'onde.

Comme les deux extrémités  $\overline{B_{\Gamma C}}$  et  $\overline{B'_{\Gamma C'}}$  (en fait  $\overline{B_{\Gamma C_-}}$ ,  $\overline{B'_{\Gamma C'_-}}$ ) de la partie du front d'onde que nous considérons sont inchangées par l'événement, et comme de plus l'arête  $B_{C'_+ C_+}$  se trouve nécessairement entre les deux arcs de cercle, il ne reste plus que la configuration de l'équation (9.5) qui permette de satisfaire ces contraintes.  $\square$

Au niveau de la gestion du front d'onde et de l'arbre binaire les opérations sont évidemment plus nombreuses que dans un événement sommet régulier, mais elles sont de même nature : insertion, suppression, rééquilibrage éventuel et surtout leur nombre est fixe. Le détail de ces opérations suit (Fig. 9.11).

On remplace dans la DCEL les sommets temporaires des trois arêtes définitives qui se

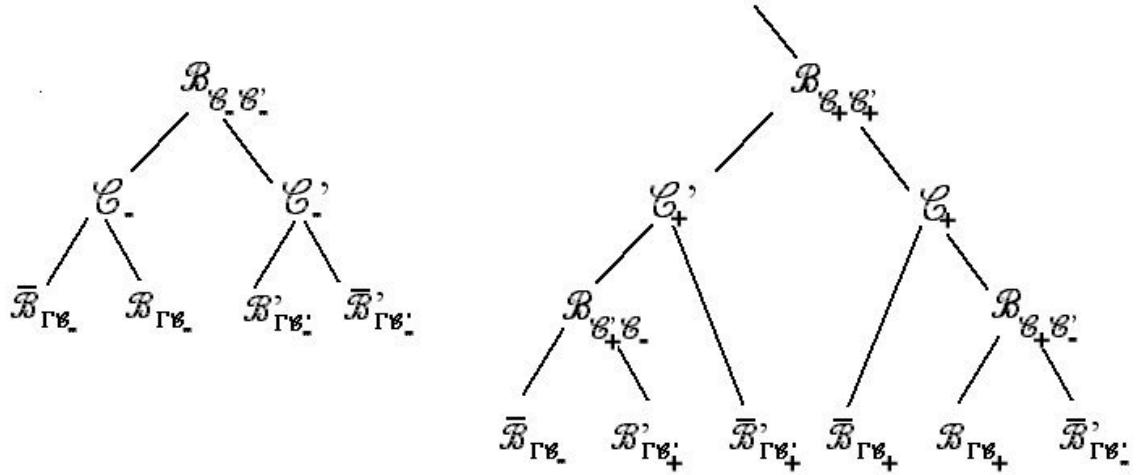


Figure 9.11

terminent par leur sommet définitif (deux arcs de cercle-site  $\mathcal{C}_-$ ,  $\mathcal{C}'_-$ , et un bissecteur  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_-\mathcal{C}'_-}$ ). Puis on supprime de l'arbre de recherche les deux arêtes de longueur nulle ( $\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_-}$ ,  $\mathcal{B}'_{\Gamma\mathcal{C}'_-}$ ) et donc les deux noeuds  $\mathcal{C}_-$ ,  $\mathcal{C}'_-$ . On crée dans la DCEL les quatre nouvelles arêtes temporaires :  $\mathcal{B}'_{\Gamma\mathcal{C}'_+}$ ,  $\overline{\mathcal{B}'_{\Gamma\mathcal{C}'_+}}$ ,  $\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_+}$ ,  $\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}'_+}$  et on insère ces nouvelles feuilles dans l'arbre de recherche. On crée aussi les cinq nouvelles arêtes définitives, trois bissecteurs ( $\mathcal{B}_{\mathcal{C}'_+\mathcal{C}_-}$ ,  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_+\mathcal{C}'_-}$ ,  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_+\mathcal{C}'_+}$ ) et deux arcs de cercles ( $\mathcal{C}_+$ ,  $\mathcal{C}'_+$ ). Enfin, après filtrage, on remet à jour les pointeurs entre les nouvelles arêtes de la DCEL, la file de priorité et l'arbre de recherche comme dans un événement sommet classique. L'ensemble de l'opération consiste schématiquement à remplacer le premier arbre de la figure 9.11 par le second.

#### 9.9.4 Suivi des différentes couches du diagramme de Voronoï

À la sortie du site, c'est-à-dire lorsque le cercle de balayage est tangent intérieurement à l'extérieur du cercle-site, il reste un certain nombre d'opérations à mener.

D'une part puisque l'on trace les sites en les sectionnant en deux arcs lorsqu'on les découvre (dont un, extérieur à  $\Gamma$ , que l'on ignore), il faudrait rattacher les deux extrémités de l'arc visible pour en faire une boucle lorsque l'on sort du site si (et seulement si) le cercle-site qui supporte l'arc tracé n'a pas d'intersection avec un autre cercle-site. S'il y a eu des intersections, on a alors deux arêtes disjointes et il faut raccorder leurs deux extrémités. En effet, lorsque le cercle de balayage quitte un site on sait, parce que l'on a traité tous les sommets intersections précédents, si ce site est ou non sécant avec un autre. L'information sur l'intersection d'un cercle par un autre est donc gardée dans une table qui est initialisée au début de l'algorithme en supposant que le diagramme est sans sommet.

La même information sert de plus à gérer les différentes couches du diagramme de Voronoï. Le front d'onde sert de pont entre les différentes couches, et assure le long du cercle de balayage et du front d'onde la connexité temporaire du diagramme. On veut que cette connexité devienne permanente en utilisant comme on l'a vu les arêtes virtuelles qui sont naturellement générées par des sites de rayon nul situés sur les points de sorties des sites qui sont alignés avec le centre de balayage et le centre du site. On gère cette fonctionnalité sans problème particulier à la sortie du site en remarquant que :

- la nature du front d'onde à la sortie nous donne la situation de l'intérieur du cercle : s'il a la forme :  $\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_i}, \overline{\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_i}}, \mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_i}$ , dans lequel  $\overline{\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_i}}$  est de fait réduit à un segment de droite, l'intérieur est vide.

À l'inverse s'il a la forme :  $\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_i}, \overline{\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_i}}, \mathcal{B}'_{\Gamma\mathcal{C}_j}, \overline{\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_i}}, \mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_i}$ , dans lequel  $\overline{\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_i}}$  est toujours réduit au même segment de droite ( $S_3V_{\Gamma'23}$  Fig. 9.12) alors que  $\mathcal{B}'_{\Gamma\mathcal{C}_j}$  est réduit à un point, l'intérieur du cercle est non-vide puisqu'il contient le site  $\mathcal{C}_j$  (sur la figure 9.12 on voit la situation à la sortie du site  $\mathcal{C}_3$ , point de contact en  $S_3$ , pour deux positions très voisines du front d'onde,  $\Gamma$  avant la sortie,  $\Gamma'$  au moment du contact). L'ellipse  $\mathcal{E}_{\Gamma'\mathcal{C}_2}$  se réduit au sommet de Voronoï du diagramme temporaire  $V_{\Gamma'23}$ ).

- c'est la table des intersections qui nous donne l'autre information dont on a besoin sur la situation du site : cercle entier ou arc de cercle.

Puisque l'on a choisi le centre de balayage à l'extérieur de tous les sites, si le site est

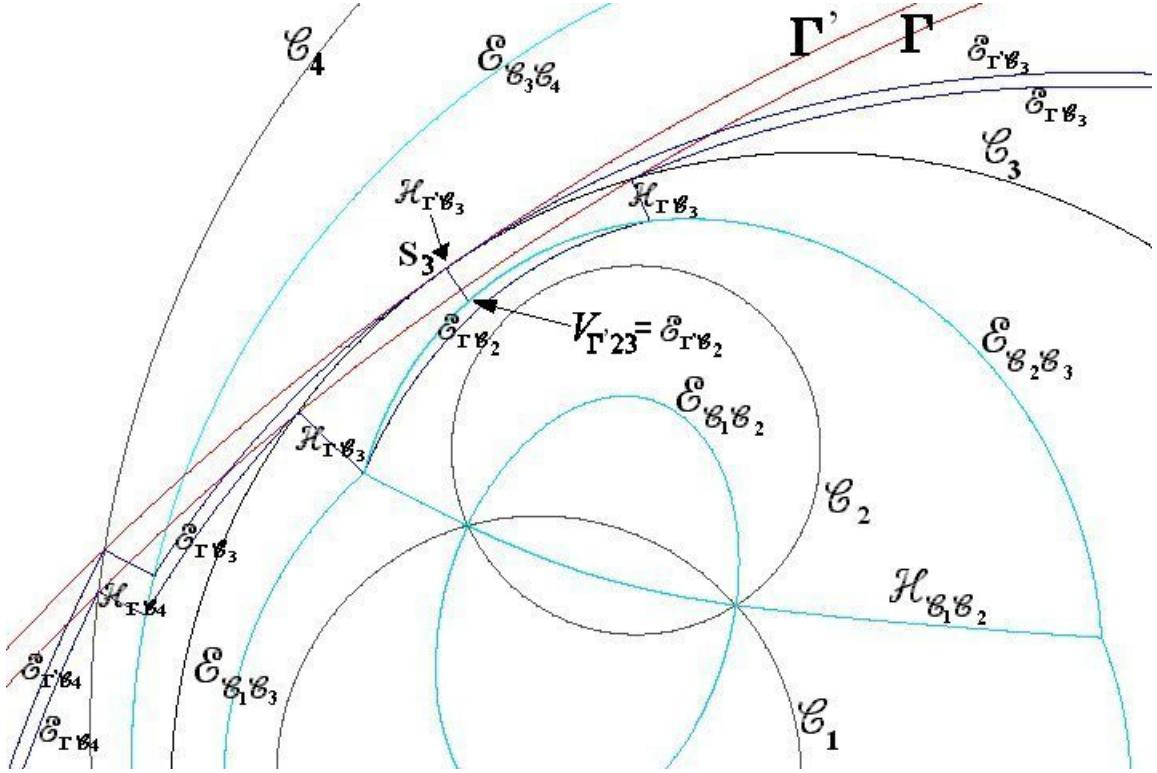


Figure 9.12

un cercle entier avec un intérieur non vide, on sait alors (Théorème 11, p. 82) que le diagramme est non-connexe. On crée donc dans ce cas le site virtuel, cercle de rayon nul, au point de sortie pour que les arêtes intérieures soient reliées au reste du diagramme, (§9.5, p. 129).

Remarquons finalement que, si lors de la découverte d'un site, le front d'onde est tangent à une arête du diagramme définitif, à la sortie le cas est similaire si ce n'est que l'arête du front d'onde tangente au diagramme se réduit à un point (cf. Théorème 14, p. 99).

## 9.10 FIN DE L'ALGORITHME

Comme indiqué on va arrêter le calcul lorsque le rayon de  $\Gamma$  est suffisamment grand, c'est-à-dire lorsqu'il est beaucoup plus grand que le plus grand des cercles-sites, il n'y

aurait donc pas d'élimination naturelle du cercle de balayage, celle-ci ne pouvant se faire que lorsque le rayon du cercle de balayage atteint l'infini (son secteur de Voronoï est alors aussi à l'infini). On conservera par contre toujours un diagramme de Voronoï connexe s'il n'y a pas de cercles inclus, le lien entre les arêtes infinies étant assuré par la périphérie du front d'onde, les arêtes de ce secteur assurant le rôle des arêtes du site spécial en géométrie projective, ou celui des arêtes de l'absolu en géométrie hyperbolique.

On en a maintenant assez pour donner un pseudo-code de l'algorithme.

### 9.11 PSEUDO-CODE DE L'ALGORITHME

Le pseudo-code de l'algorithme résume ce qui a été dit plus haut et est bien sûr un peu plus lourd que pour l'algorithme en contraction des diagrammes de Voronoï pondérés. Le pseudo-code est donné ici pour l'algorithme en expansion. Les noms des différentes procédures et sous-procédures sont en caractères italiques, gras (comme ***ENTREE\_SITE***(*i*)). En titre il s'agit de la procédure elle-même, dans le corps du texte il s'agit d'un appel à la dite procédure. S'agissant de pseudo-code et non d'un langage spécifique, on peut considérer que, classiquement, la passage des paramètres se fait par valeur en entrée, par référence en sortie.

#### ALGORITHME VORONOÏ DE CIRCONFÉRENCES

Lire les données d'entrée et calculer les événements sites ;

Les trier par rapport au rayon polaire et initialiser la file de priorité ;

Créer la table d'intersection des cercles (ordonnée de 1 à *n* et initialisée à 0  $\forall i \in \{1, n\}$ ) ;

Créer une table vide des sites virtuels ;

**Tant que** la file de priorité est non vide **Faire**

Traiter l'événement en tête de file ;

Mettre à jour la file de priorité en supprimant l'événement traité

**Fin Tant que.**

## ***TRAITEMENT\_D\_ÉVÉNEMENT***

**Si** événement site **Alors**

**Si** événement *entrée* de site **Alors**

Traiter ***ENTREE\_SITE***(*i*)

**Si** événement *sortie* de site **Alors**

Traiter ***SORTIE\_SITE***(*i*)

**Fin si** ;

**Si** événement sommet **Alors**

**Si** événement sommet *Casey* **Alors**

Traiter ***SOMMET\_CASEY***(*i, j, k*)

**Si** événement sommet *Intersection* **Alors**

Traiter ***SOMMET\_INTERSECTION***(*i, j*)

**Fin si.**

### ***ENTREE\_SITE***(*i*)

Chercher dans l'arbre binaire du front d'onde la feuille  $\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_j}$  intersectée par la normale au point de contact du site  $\mathcal{C}_i$  ;

Enlever tous les événements sommet-Casey correspondants au triplet  $(\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_l}, \mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_j}, \mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_m})$  de la file de priorité ;

Remplacer la feuille  $\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_j}$  par un sous-arbre à 5 feuilles  $(\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_j}, \mathcal{E}_{\Gamma\mathcal{C}_i}, \mathcal{H}_{\Gamma\mathcal{C}_i}, \mathcal{E}_{\Gamma\mathcal{C}_i}, \mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_j})$  ;

Rééquilibrer l'arbre ;

Créer les 5 nouvelles arêtes temporaires correspondantes dans la DCEL ;

Créer les nouvelles arêtes définitives  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_i\mathcal{C}_j}, \mathcal{C}_i$  dans la DCEL ;

Filtrer le front d'onde :

calculer les événements sommet-Casey : 4 cas (*k, l, j, i, j, m, n*) ;

**Si**  $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j \neq \emptyset$  **Alors**

calculer l'événement ***SOMMET\_INTERSECTION***(*i, j*) ;

mettre à jour les sites  $i$  et  $j$  dans la table des sites sécants ;

**Fin si** ;

Mettre à jour la file de priorité en y insérant les événements sommets-Casey et sommets-intersection s'ils sont nouveaux et non mort-nés ;

Mettre à jour les pointeurs entre les événements de la file de priorité et les feuilles de l'arbre binaire du front d'onde.

### *SOMMET\_CASEY*( $i, j, k$ )

Chercher dans l'arbre du front d'onde la feuille correspondant au bissecreur  $\mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_j}$  ;

**Si** l'arête n'est pas de longueur nulle **Alors**

passer à l'événement suivant

**Sinon**

Dans la DCEL mettre leur sommet définitif aux arêtes  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_i \mathcal{C}_j}, \mathcal{B}_{\mathcal{C}_j \mathcal{C}_k}$  ;

Enlever tous les événements sommet-Casey correspondants au triplet  $(\mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_i}, \mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_j}, \mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_k})$  de la file de priorité ;

Enlever la feuille  $\mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_j}$  de l'arbre, mettre à jour les noeuds correspondants ;

Rééquilibrer l'arbre ;

Ajouter la nouvelle arête définitive  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_i \mathcal{C}_k}$  à la DCEL ;

Filtrer le front d'onde :

calculer les événements sommet-Casey : 2 cas ( $l, i, k, m$ ) ;

**Si**  $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_k \neq \emptyset$  **Alors**

calculer l'événement **SOMMET\_INTERSECTION**( $i, k$ ) ;

mettre à jour les sites  $i$  et  $k$  dans la table des sites sécants ;

**Fin si** ;

Mettre à jour la file de priorité en y insérant les événements sommets-Casey et sommets-intersection s'ils sont nouveaux et non mort-nés ;

Mettre à jour les pointeurs entre les événements de la file de priorité et les feuilles de l'arbre binaire du front d'onde ;

**Fin si.**

### *SOMMET\_INTERSECTION(i, j)*

Chercher dans l'arbre du front d'onde la feuille correspondant au bissexteur  $\mathcal{C}_i$  ;

Dans la DCEL mettre leur sommet définitif aux arêtes  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_i \mathcal{C}_j}, \mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j$  ;

Enlever les deux feuilles  $\mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_i}, \mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_j}$  de l'arbre ;

Mettre à jour les noeuds correspondants ;

Ajouter à l'arbre les 4 nouvelles feuilles  $\mathcal{B}'_{\Gamma \mathcal{C}'_+}, \overline{\mathcal{B}'_{\Gamma \mathcal{C}'_+}}, \overline{\mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}'_+}}, \mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}'_+}$  ;

Rééquilibrer l'arbre ;

Créer les 4 nouvelles arêtes temporaires  $\mathcal{B}'_{\Gamma \mathcal{C}'_+}, \overline{\mathcal{B}'_{\Gamma \mathcal{C}'_+}}, \overline{\mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}'_+}}, \mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}'_+}$  dans la DCEL ;

Créer les 5 nouvelles arêtes définitives  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}'_+ \mathcal{C}_-}, \mathcal{B}_{\mathcal{C}_+ \mathcal{C}'_-}, \mathcal{B}_{\mathcal{C}_+ \mathcal{C}'_+}, \mathcal{C}_+, \mathcal{C}'_+$  dans la DCEL ;

Filtrer le front d'onde :

calculer les événements sommet-Casey : 2 cas (*l, i, j, j, i, i, j, m*) ;

Mettre à jour la file de priorité en y insérant les événements sommets-Casey s'ils sont nouveaux et non mort-nés ;

Mettre à jour les pointeurs entre les événements de la file de priorité et les feuilles de l'arbre binaire du front d'onde.

### *SORTIE\_SITE(i)*

Chercher dans l'arbre binaire du front d'onde l'arête  $\mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_i}$  intersectée par la normale au point de contact du site  $\mathcal{C}_i$  ;

**Si** le front d'onde a la forme  $\mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_i}, \overline{\mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_i}}, \mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_i}$  **Alors**

Dans la DCEL mettre les coordonnées du point de contact comme sommet définitif des *deux* extrémités de l'arête  $\mathcal{C}_i$  ;

Enlever la feuille médiane  $\overline{\mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_i}}$  des trois feuilles  $\mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_i}, \overline{\mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_i}}, \mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_i}$  de l'arbre ;

Fusionner les deux autres ;

Mettre à jour les noeuds correspondants ;

Rééquilibrer l'arbre ;

**Sinon** {le front d'onde a la forme  $\mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_i}, \overline{\mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_i}}, \mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_j}, \overline{\mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_i}}, \mathcal{B}_{\Gamma \mathcal{C}_i}$ }

Lire la table d'intersection des cercles pour voir si le site  $\mathcal{C}_i$  est un vrai cercle ou seulement un arc de cercle ;

**Si c'est un vrai cercle Alors**

Dans la DCEL mettre les coordonnées du point de contact comme sommet définitif des *deux* extrémités de l'arête  $\mathcal{C}_i$  ;

Créer un site virtuel et mettre à jour la table des sites virtuels ;

Enlever les deux feuilles  $\overline{\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_i}}$  de l'arbre et transformer l'arête et la feuille  $\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_j}$  en une arête et une feuille  $\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_v}$  où  $v$  est l'indice du site virtuel ;

Mettre à jour les noeuds correspondants ;

Filtrer le front d'onde :

calculer les événements sommet-Casey : 2 cas ( $l, i, v, i, m$ ) ;

Mettre à jour la file de priorité en y insérant les événements sommets-Casey s'ils sont nouveaux et non mort-nés ;

Mettre à jour les pointeurs entre les événements de la file de priorité et les feuilles de l'arbre binaire du front d'onde

**Sinon**

Dans la DCEL fusionner les deux arêtes des arcs de cercle de  $\mathcal{C}_i$  ;

Enlever les trois feuilles  $\overline{\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_i}}, \mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_i}, \overline{\mathcal{B}_{\Gamma\mathcal{C}_i}}$  de l'arbre ;

Mettre à jour les noeuds correspondants ;

Rééquilibrer l'arbre ;

Filtrer le front d'onde :

calculer les événements sommet-Casey : 1 cas ( $l, i, m$ ) ;

Mettre à jour la file de priorité en y insérant les événements sommets-Casey s'ils sont nouveaux et non mort-nés ;

Mettre à jour les pointeurs entre les événements de la file de priorité et les feuilles de l'arbre binaire du front d'onde

**Fin si ;**

**Fin si.**

## 9.12 ANALYSE DE COMPLEXITÉ

### 9.12.1 Analyse dans le cas général

On va analyser la complexité en fonction du nombre d'arcs de cercle-site noté  $p$ .

On a d'abord un théorème concernant la complexité de la taille du front d'onde qui est l'équivalent de celui qui est utilisé pour le diagramme de point.

**Théorème 18** : *La complexité du front d'onde est en  $\mathcal{O}(p)$ .*

*Démonstration* : Il y a quatre types d'événements, seuls deux d'entre eux font augmenter le nombre d'arcs du front d'onde : **entrée de site** et **sommet intersection**. Suivant le pseudo-code, on voit que le premier ajoute cinq arêtes au front d'onde et en enlève une tandis que le second en enlève deux en ajoute quatre. Donc à chaque événement on n'ajoute jamais plus de quatre arêtes au front d'onde. Au départ le front d'onde a deux arêtes donc après  $\nu$  événements le front d'onde n'a jamais plus de  $4\nu - 2$  arcs.

Le nombre d'événements maintenant est en  $\mathcal{O}(p)$  puisque l'on a  $2n$  événements sites et on a vu (§3.2, p. 46) qu'événements sommets-Casey et événements sommets-intersection avaient la même complexité  $\mathcal{O}(p)$ . Ceci nous donne de plus la taille maximum de la file de priorité qui est donc aussi en  $\mathcal{O}(p)$ .  $\square$

La complexité dépend du nombre d'événements et de la complexité de chaque module. De la même manière que pour l'algorithme initial de Fortune pour chaque module il y a des opérations qui sont en nombre fixe et en temps constant : calcul, filtrage, création des arêtes, accès aux tables, donc donnent une complexité en  $\mathcal{O}(1)$ , la complexité vient de la taille de la file de priorité, pour laquelle les opérations d'insertion et d'extraction se feront en  $\mathcal{O}(\log p)$  et longueur du front d'onde pour lesquels si l'on utilise un arbre binaire et équilibré les opérations dépendent de la hauteur de l'arbre et se feront aussi en  $\mathcal{O}(\log p)$ .

Donc les différents modules de l'algorithme sont en :

- initialisation :  $\mathcal{O}(n \log n)$
- boucle principale :  $\mathcal{O}(p)$
- événement entrée\_site :  $\mathcal{O}(\log p)$
- événement sommet\_Casey :  $\mathcal{O}(\log p)$
- événement sommet\_intersection :  $\mathcal{O}(\log p)$
- événement sortie\_site :  $\mathcal{O}(\log p)$

et on a donc le théorème suivant :

**Théorème 19** : *La complexité globale de l'algorithme à balayage par cercle pour le calcul du diagramme de Voronoï de  $n$  cercles en distance euclidienne est donc en  $\mathcal{O}(p \log p)$  où  $p$  est le nombre d'arcs de cercle du diagramme.*  $\square$

### 9.12.2 Application à différents cas

On remarque que l'algorithme traite  $n$  cercles, mais en fait se comporte comme un algorithme optimum traitant les  $p$  sites formés par les arcs de cercle plutôt que les cercles eux-mêmes.

Donc dans le pire des cas, si tous les cercles ont une intersection mutuelle, puisque  $\mathcal{O}(p) = \mathcal{O}(n^2)$  (équation 3.1, p. 49), la complexité de l'algorithme est en  $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ . La complexité minimum accessible est bien sûr de  $\mathcal{O}(n^2)$ , mais la remarque précédente, ainsi que la propriété 2, p. 45 laissent planer un doute sur l'accessibilité de cette limite.

Le meilleur cas est celui du diagramme sans sommet, dans ce cas on a  $p = n$  et donc on atteint bien l'optimum.

Enfin on peut considérer le cas de cercles n'ayant que  $2n$  intersections. Leur diagramme de Voronoï aura nécessairement plus de sommets qu'un diagramme ayant peu de sommets (il faut ajouter les sommets Casey aux  $2n$  sommets intersection) et l'algorithme reste optimum jusqu'à ce nombre maximum d'intersections.

### 9.13 IMAGES DE L'ALGORITHME

Les figures qui terminent le chapitre sont celles de la figure qui a servi de jeu d'essai pour l'algorithme. On a le diagramme de Voronoï dans le plan de la famille de cercles (Fig. 9.13), la construction du diagramme pendant le déroulement de l'algorithme (Fig. 9.14), et enfin le même diagramme présenté en chaîne de volcan (Fig. 9.15).

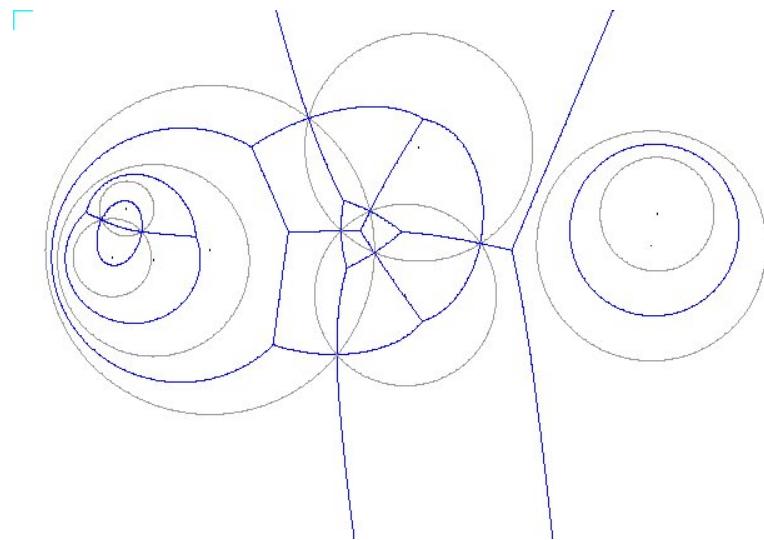


Figure 9.13

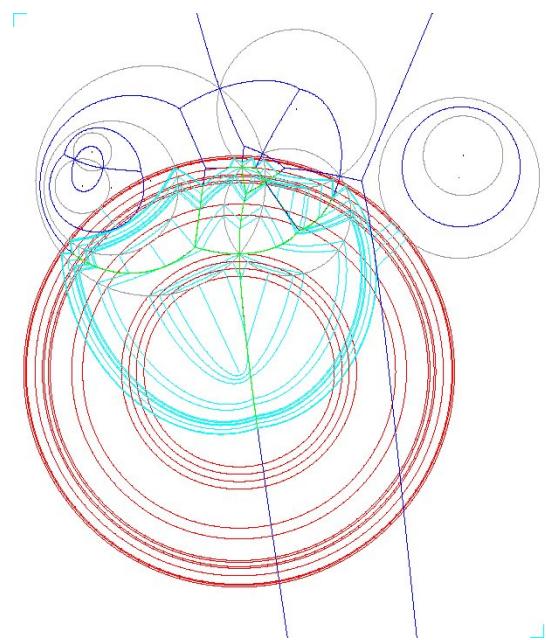


Figure 9.14

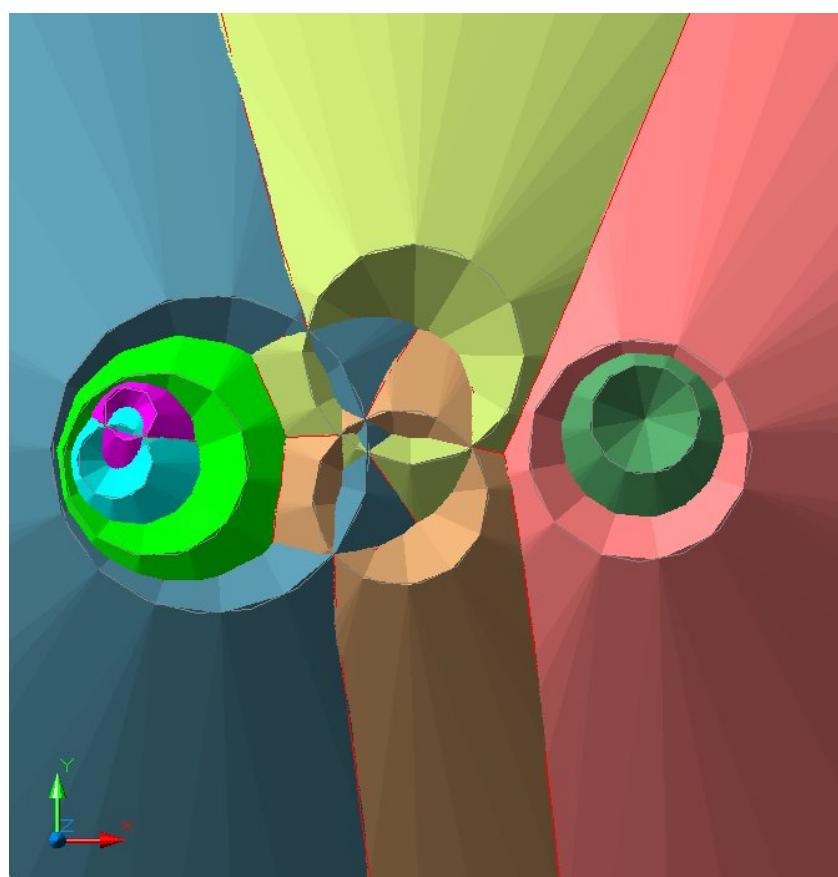


Figure 9.15

## CHAPITRE X

# APPLICATION AUX DIAGRAMMES DE VORONOÏ EN GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

### 10.1 DÉFINITION DU PROBLÈME

On se donne  $n$  sites ponctuels dans un plan hyperbolique et on cherche un algorithme optimum pour calculer leur diagramme de Voronoï (avec ou sans sommet). Pour ce faire on utilise la représentation de Poincaré, avec l'absolu représenté par un cercle, puisque le passage aux autres représentations se fera en  $\mathcal{O}(n)$  à cause de l'isomorphisme de toutes ces représentations (Greenberg, 1980, p. 189-190). On peut même, sans limiter la généralité, choisir un des  $n$  points comme centre de l'absolu.

### 10.2 TRANSFORMATION D'UN DIAGRAMME EUCLIDIEN EN DIAGRAMME HYPERBOLIQUE

Le passage entre un diagramme euclidien et un diagramme hyperbolique se fait par une transformation extrêmement simple définie dans l'article déjà cité de Boissonnat et al (Boissonnat, 1996). De là vient d'ailleurs l'algorithme optimum suggéré par Boissonnat dans son article. Il consiste, à partir des coordonnées hyperboliques des sites, à porter ces points dans la représentation de Poincaré. Dans cette représentation, on va prendre leurs coordonnées euclidiennes et calculer le diagramme de Voronoï de points correspondant dans  $\mathbb{R}^2$ . Ensuite on utilise le fait que les plus grands cercles vides le sont dans les deux représentations pour faire la transformation inverse et calculer les centres, hyper-

boliques cette fois, des cercles trouvés. Ces centres sont donc des sommets de Voronoï du diagramme. Le problème de cet algorithme est qu'il oblige à un travail de nettoyage du diagramme puisque comme on le voit sur la figure 10.1 où les deux diagrammes ont été superposés, certains des sommets euclidiens sont des points ultra-idéaux (demi-droites dont les points d'intersection seront hors du cercle).

### 10.3 INTERPRÉTATION PROJECTIVE ET GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

Si l'on reprend la figure de l'interprétation projective de la rive dans l'algorithme en contraction (Fig. 5.2, p. 79), on voit que si, au lieu de considérer le site spécial comme une droite double à l'infini coupée par une droite en deux points confondus, on considérait un cercle à l'infini coupé par une droite en deux points différents, on aurait alors un cercle à l'infini qui pourrait servir d'absolu de la géométrie hyperbolique. On va utiliser cette remarque pour faire une *demi-transformation* et calculer le diagramme de Voronoï en calculant tout d'abord le diagramme de Voronoï de cercles euclidien de  $n + 1$  sites :  $n$  cercles de rayon nul inclus dans un cercle-site à distance finie. Ensuite on verra comment transformer le diagramme obtenu en considérant le cercle-site comme l'absolu.

Il faut bien remarquer que la transposition de l'algorithme de Fortune en géométrie hyperbolique obligerait à considérer la notion d'un algorithme à balayage par cercle dont le centre de balayage serait variable sur une droite et le rayon variable, les deux étant liés par une relation algébrique traduisant l'orthogonalité du cercle de balayage à l'absolu : cela paraît inutilement compliqué.

### 10.4 CHOIX DE L'ALGORITHME À BALAYAGE

Dans la suite, puisqu'il n'y a qu'un seul cercle de rayon non nul dans le diagramme définitif, celui qui contient les sites ponctuels du diagramme hyperbolique à calculer ; il sera désigné par « l'absolu » quelle que soit la géométrie utilisée.

On peut, comme on l'a vu dans le chapitre précédent, utiliser l'algorithme en expansion à

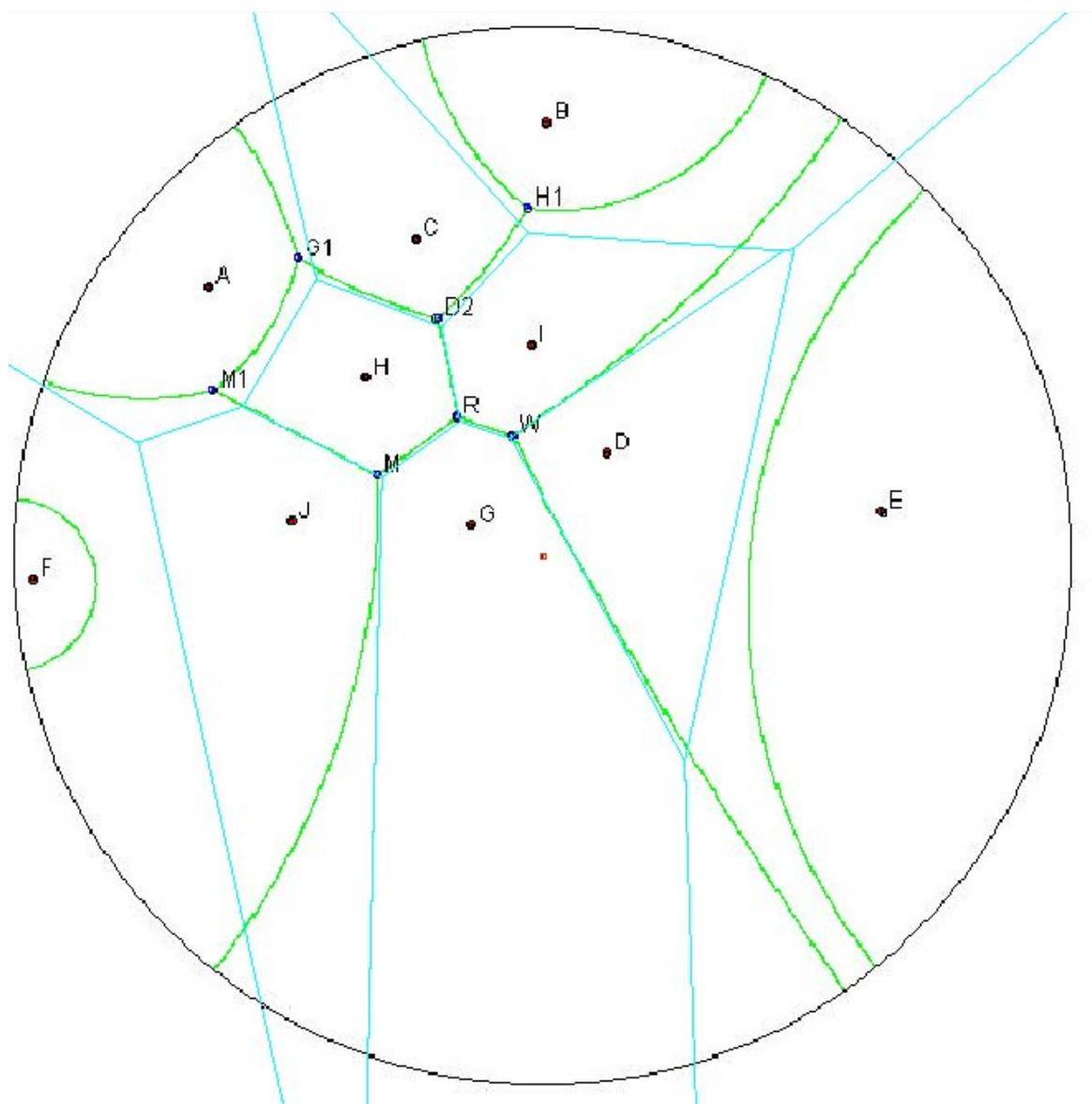
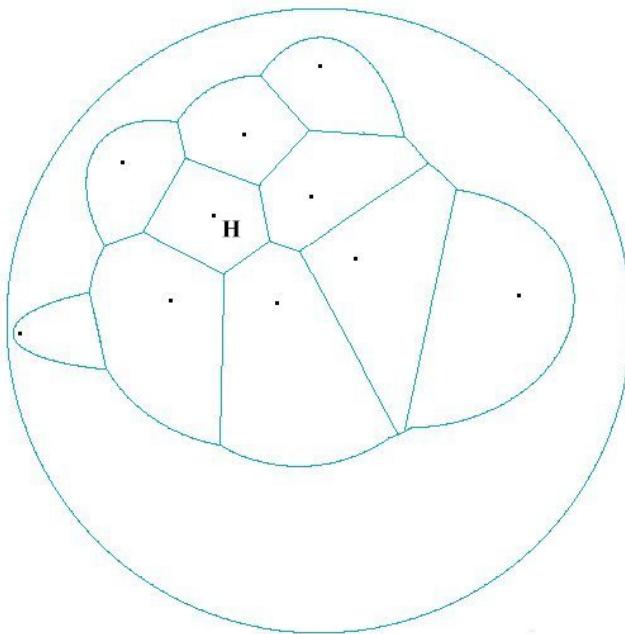


Figure 10.1



**Figure 10.2**

partir d'un point extérieur au cercle-site pour calculer le diagramme de Voronoï euclidien de ces  $n + 1$  sites. Le défaut est que le centre de balayage étant extérieur à l'absolu est considéré en géométrie hyperbolique comme un point *ultra-idéal*, n'appartenant pas vraiment au plan hyperbolique. Il vaut donc mieux utiliser l'algorithme en contraction, avec le centre de balayage confondu avec le site choisi pour centre de l'absolu. Cet algorithme est analogue à l'algorithme en expansion, mais on prendra comme partie utile l'extérieur du cercle de balayage. On partira de l'absolu, donc la partie utile est la couronne comprise entre l'absolu et le cercle de balayage et il n'y a pas d'événement de type-2. L'avantage supplémentaire d'utiliser un algorithme de ce type est qu'à la fin du balayage le cercle  $\Gamma$  a un rayon nul. Son centre coïncide avec le site centre de l'absolu, donc le travail est achevé sans opération supplémentaire. La complexité est bien entendu la même qu'avec un balayage en expansion.

## 10.5 LA NATURE DU DIAGRAMME DE VORONOÏ OBTENU

Le diagramme de Voronoï de cercles dans  $\mathbb{R}^2$  obtenu est assez particulier puisque qu'il va comporter deux types d'arêtes (Fig. 10.2) : des arêtes rectilignes portées par les bissecteurs sites-sites, c'est-à-dire la médiatrice de deux sites ponctuels et d'autres qui sont elliptiques, portées par les bissecteurs sites-absolu, c'est-à-dire des ellipses ayant pour foyers le centre de l'absolu et chaque site ponctuel. Les sommets de Voronoï sont donc aussi de deux types : ceux qui sont à l'intersection de trois arêtes rectilignes et ceux qui sont à l'intersection d'une arête rectiligne et deux arêtes elliptiques.

Ceux qui sont à l'intersection de trois arêtes rectilignes sont centres d'un cercle tangent à trois sites ponctuels, le cercle circonscrit au triangle que forment les trois sites.

De surcroît chaque site ponctuel génère un bissecteur elliptique au plus. Celui-ci est du type  $\mathcal{E}_{\mathcal{AC}_i}$ . Il peut même n'en avoir aucun s'il se trouve *en position centrale*, si l'on peut dire, du graphe (c'est le cas du site  $H$  sur la figure 10.2).

Les sommets du second type sont alors à l'intersection de deux arêtes elliptiques et d'une arête rectiligne correspondant aux combinaisons possibles des arêtes générées par deux des trois sites choisis parmi deux sites ponctuels et l'absolu.

Comme il n'y a qu'un absolu et que les autres sites sont tous des sites ponctuels situés à l'intérieur de la circonférence, il n'y a aucun autre type de bissecteur possible, donc pas d'hyperbole.

## 10.6 L'ISOMORPHISME DES DEUX GRAPHES

Le diagramme de Voronoï se présente comme un graphe à la fois en géométrie euclidienne et en géométrie hyperbolique. On va démontrer que le graphe obtenu par le calcul du diagramme de Voronoï de cercles en géométrie euclidienne et celui que l'on recherche en géométrie hyperbolique sont isomorphes (les deux diagrammes sont superposés sur la figure 10.4, l'hyperbolique en vert, l'euclidien en bleu).

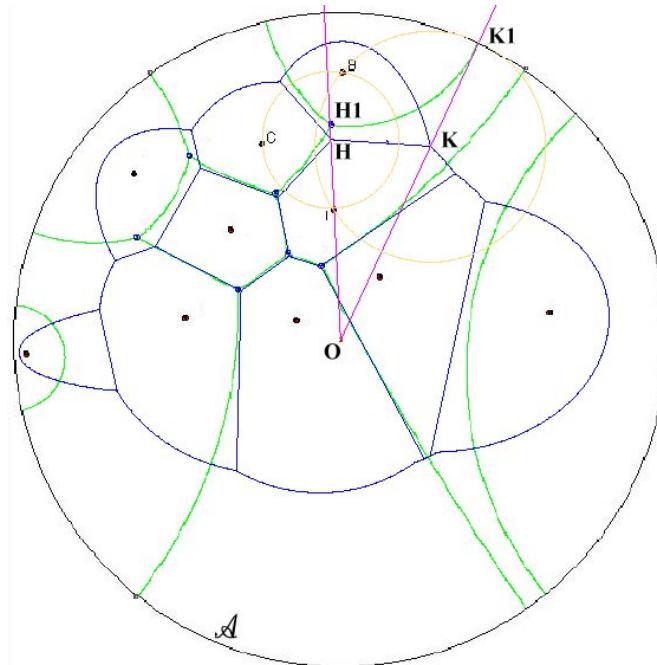


Figure 10.3

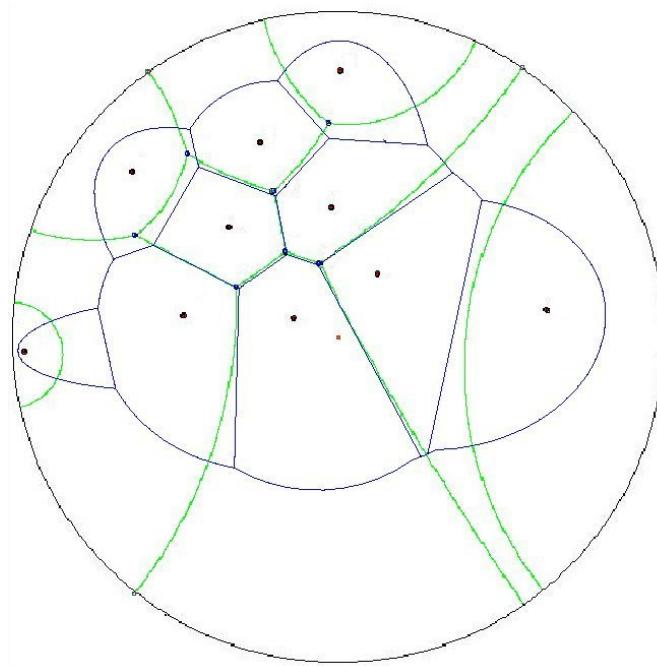


Figure 10.4

L'isomorphisme direct des deux graphes est la différence essentielle avec l'algorithme décrit précédemment (cf. Fig. 10.1) car on a vu que certains sommets euclidiens étaient des points ultra-idéaux et vont donc disparaître du diagramme hyperbolique.

**Théorème 20 :** *Le graphe du diagramme de Voronoï de cercle dans  $\mathbb{R}^2$  de n points inclus dans un cercle est isomorphe au graphe ponctuel de n points dans le plan hyperbolique si l'on tient compte des sommets idéaux.*

*Démonstration :*

Comme dans le cas projectif, on va devoir considérer le cas limite des sommets idéaux qui vont être faciles à distinguer dans ce diagramme et qui permettent, comme dans les algorithmes en contraction, de rendre le diagramme connexe s'il ne l'était pas. La démonstration repose sur le fait que les cercles vides du système euclidien inclus dans l'absolu ou qui y sont tangents sont les mêmes que les cercles ou horocycles vides du système hyperbolique.

– Sommets à distance finie :

On considère tout d'abord le cas des cercles vides du premier diagramme qui touchent trois sites ponctuels. Ces cercles vides ne touchent donc pas l'absolu si l'on prend les sites en position générale, c'est-à-dire sans sommet d'ordre quatre ou plus. Puisque ces cercles sont les mêmes dans les deux cas, vides de sites en géométrie euclidienne, ils sont vides de sites en géométrie hyperbolique et réciproquement. Les centres hyperboliques de ces cercles sont donc bien des sommets de Voronoï du diagramme de Voronoï hyperbolique. De plus, comme le centre d'un cercle est unique dans les deux géométries, ces centres sont en bijection. On en conclut que les sommets de Voronoï à distance finie du diagramme hyperbolique sont en bijection avec les sommets du type site-site du diagramme de cercles euclidien.

– Sommets idéaux :

Dans le diagramme euclidien, les sommets situés sur deux arêtes elliptiques sont les centres de cercles vides tangents à l'absolu et touchant deux sites ponctuels. Comme

l'image de ces cercles dans la représentation de Poincaré est un horocycle vide de sites tangent à deux sites, il y a donc une bijection entre les cercles euclidiens vides de sites tangent à l'absolu et les horocycles hyperboliques vides de sites. L'unicité des centres des deux objets fait qu'ils sont aussi en bijection, donc les sommets correspondants sont en bijection.

Les sommets euclidiens et hyperboliques du premier type sont différents mais sont dans les mêmes cercles et alignés avec le centre de l'absolu (Greenberg, 1980, ch.7, p. 227). On peut noter aussi que cette propriété s'étend aux sommets du deuxième type, le centre de l'absolu, le sommet du second type du diagramme euclidien et le sommet à l'infini correspondant du diagramme hyperbolique sont alignés (*ibid.*). Sur la figure 10.3, p. 163, le sommet hyperbolique  $H_1$ , le sommet euclidien  $H$  et le centre  $O$  de l'absolu  $\mathcal{A}$  sont alignés : ils sont les deux centres, l'un hyperbolique, l'autre euclidien, du même cercle circonscrit aux trois sites  $B, C, I$ . De même  $K_1, K$  et  $O$  sont alignés :  $K$  est le centre du cercle euclidien passant par  $B, I$  et tangent à l'absolu,  $K_1$  est le centre de l'horocycle passant par  $B$  et  $I$ .

Les arêtes des deux graphes sont aussi en bijection.

On considère une arête du premier type reliant deux sommets. Tout point de cette arête est aussi le centre d'un cercle vide de sites tangent à deux sites qui a la même image hyperbolique, donc le centre hyperbolique appartient aussi à une arête du diagramme hyperbolique et réciproquement. Il en est de même pour les arêtes elliptiques du deuxième type qui se transforment elles en segments de l'absolu reliant les sommets idéaux (ce sont les équivalents des bissecteurs à l'infini du diagramme projectif). On passe donc du diagramme euclidien au diagramme hyperbolique (ou l'inverse) par une simple dilatation non uniforme (ou contraction) des sommets du graphe issue du centre de l'absolu. Les deux figures sont en fait homéomorphes puisque l'on peut passer de l'une à l'autre par une déformation continue.  $\square$

## 10.7 Application de cet isomorphisme à la construction de la médiatrice d'un segment

En géométrie, le diagramme de Voronoï est d'une certaine manière un utilisateur final puisque, si ses propriétés géométriques sont étudiées à l'aide des théorèmes usuels de la géométrie, elles ne sont pas ensuite réutilisées pour obtenir de nouvelles propriétés strictement géométriques. L'exemple qui suit est donc original au sens où il utilise le théorème précédent (Théorème 20) pour donner une nouvelle méthode de construction de la médiatrice d'un segment en géométrie hyperbolique (première représentation de Poincaré), une construction strictement géométrique.

De plus l'exemple qui suit donne un exemple spectaculaire de l'efficacité de l'usage d'un compas elliptique, fût-il logiciel, dans la réalisation des constructions géométriques avec les logiciels modernes de conception et de dessin assisté par ordinateur. Ce point sera développé plus loin dans l'appendice sur la réalisation des figures (Appendice C).

La méthode classique pour construire, à la règle et au compas, la médiatrice d'un segment en géométrie euclidienne consiste à tracer l'axe radical de deux cercles d'intersection réelle et de rayon égal centré sur les deux extrémités du segment.

En géométrie hyperbolique on peut calquer cette construction, mais le rayon ne peut plus être arbitraire : il faut le choisir égal à la longueur du segment. On est donc ramené à la construction suivante :

- construire un cercle inclus dans l'absolu ayant pour centre (hyperbolique) l'une des extrémités du segment et passant par l'autre extrémité.
- recommencer l'opération en permutant les extrémités.
- enfin construire la médiatrice elle-même qui est le cercle orthogonal à l'absolu appartenant au faisceau des deux précédents.

Cette construction se fait à la règle et au compas mais est extrêmement lourde ; elle ne nécessite pas moins de trois inversions. Elle est par ailleurs extrêmement imprécise dès

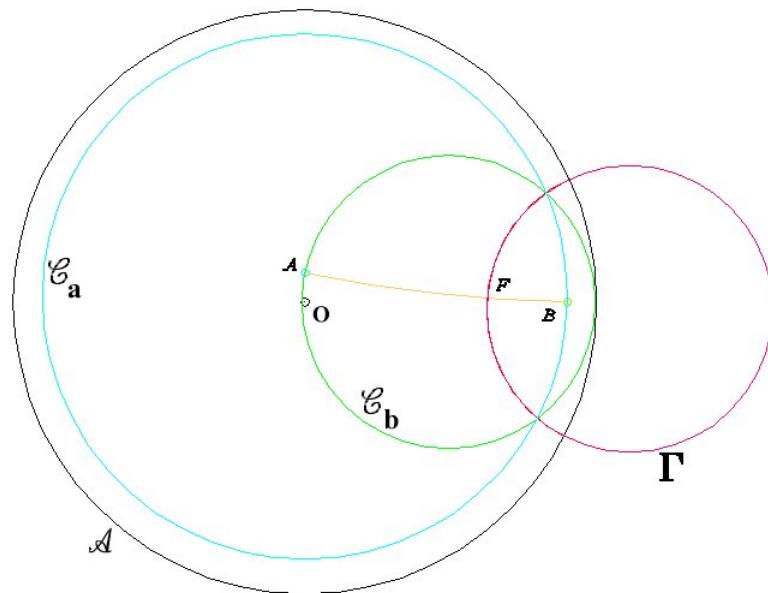


Figure 10.5

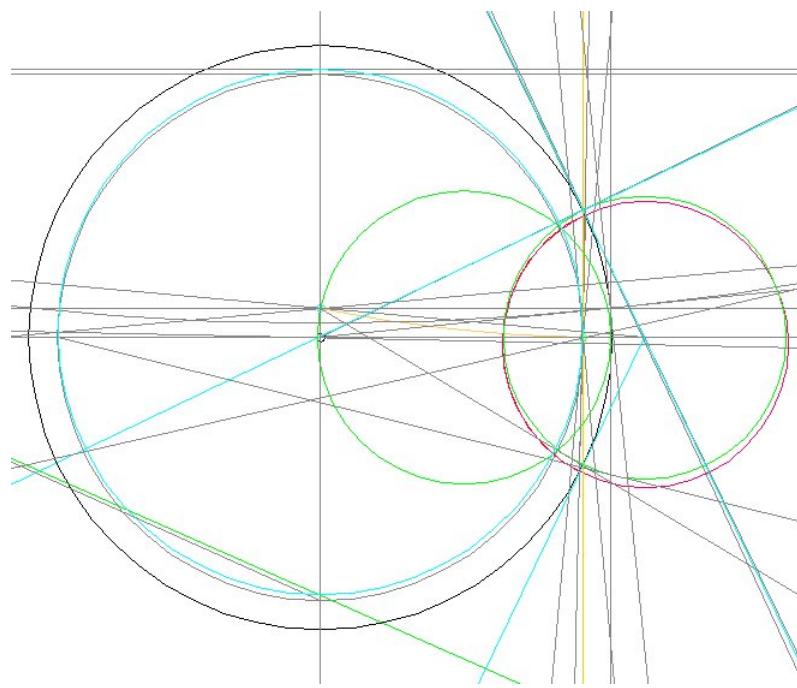


Figure 10.6

lors que l'une des extrémités du segment est proche de l'absolu. La figure (Fig. 10.5) montre la médiatrice  $\Gamma$  du segment  $AB$  construit avec l'aide des cercles  $\mathcal{C}_a$  ( cercle de centre  $A$  passant par  $B$ ) et  $\mathcal{C}_b$ ; la figure suivante (Fig. 10.6) donne sans commentaire ni indication la même figure sur laquelle ont été laissés la plupart (seulement la plupart!) des traits de construction.

En utilisant le théorème précédent on peut envisager une nouvelle construction partant cette fois du diagramme de Voronoï euclidien des trois sites  $A, B$  et  $\mathcal{A}$ . Ce diagramme a la forme donnée par la figure 10.7(a) : deux arcs d'ellipse correspondants aux bissecteurs  $\mathcal{E}_{AA}$  et  $\mathcal{E}_{AB}$ , plus un segment de droite  $\mathcal{S}_{AB}$  porté par la médiatrice de  $AB$ .

L'intérêt du diagramme de Voronoï de trois sites que l'on vient de considérer est que, grâce à l'isomorphisme précédent, l'absolu disparaît dans la transformation ; le diagramme de Voronoï que l'on obtient dans le plan hyperbolique est trivialement la médiatrice du segment  $AB$ .

On en déduit donc la construction suivante (Fig. 10.7(b)) :

- on trace la médiatrice euclidienne du segment  $AB$
- on trace l'ellipse de foyers  $O$  (centre de l'absolu) et l'un des points  $A$  ou  $B$ , passant par le milieu  $C$  du segment  $BD$ , ( $D$  étant l'intersection de  $OB$  avec  $\mathcal{A}$ )
- on projette (Fig. 10.8), à partir de  $O$ , les deux points d'intersection de la médiatrice avec l'ellipse sur  $\mathcal{A}$
- le cercle cherché passe par ces deux projections et a pour centre l'intersection des deux tangentes à l'absolu en ces deux points.

L'utilisation du compas elliptique fourni par les logiciels modernes rend les tracés simples et rapides. On peut ainsi dessiner facilement un diagramme de Voronoï de quelques points dans le plan hyperbolique sans effectuer le moindre calcul. On peut noter toutefois que, même sans compas elliptique, la construction reste intéressante puisque le diamètre du cercle directeur de l'ellipse est connu (c'est le rayon de l'absolu). On peut donc, en utilisant une construction classique par affinité (Rouché, 1900, problème 1061, p. 339),

obtenir les deux points d'intersection de la médiatrice avec l'ellipse sans avoir à la tracer.

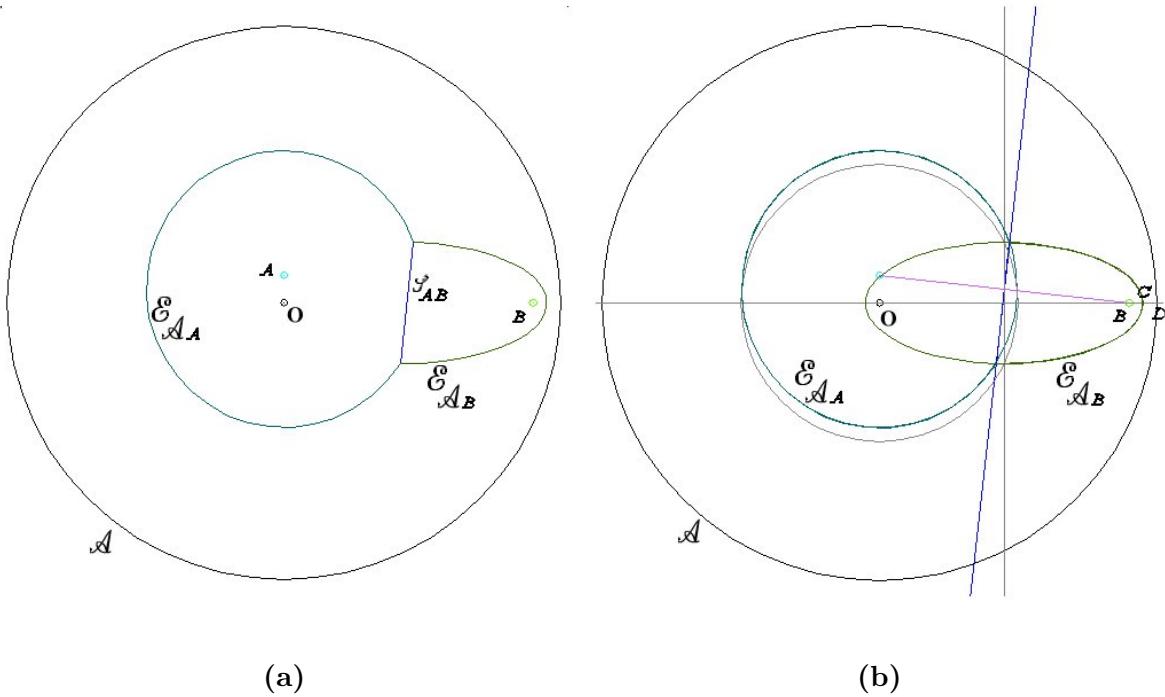
## 10.8 LA TRANSFORMATION DE LA DCEL

Par rapport à l'algorithme euclidien, on peut simplifier la DCEL pour l'algorithme en expansion en supprimant le traçage des sites puisque l'on sait dès le départ que les cercles ayant un rayon nul sauf l'absolu, ne peuvent avoir d'intersection. Une fois le résultat obtenu il reste à transformer la DCEL de l'espace euclidien dans l'espace hyperbolique. En effet l'isomorphisme des deux graphes planaires fait que les relations de position entre les arêtes sont identiques, seules les coordonnées des sommets doivent être modifiées. La nature du bissecteur n'est plus pertinente, car il est toujours représenté par des arcs de cercle dans le diagramme hyperbolique (la distinction cercle-horocycle se fait par les sites : point-point ou point-absolu). La transformation se fait en  $\mathcal{O}(n)$  qui est la complexité de la DCEL, l'algorithme est donc optimum.

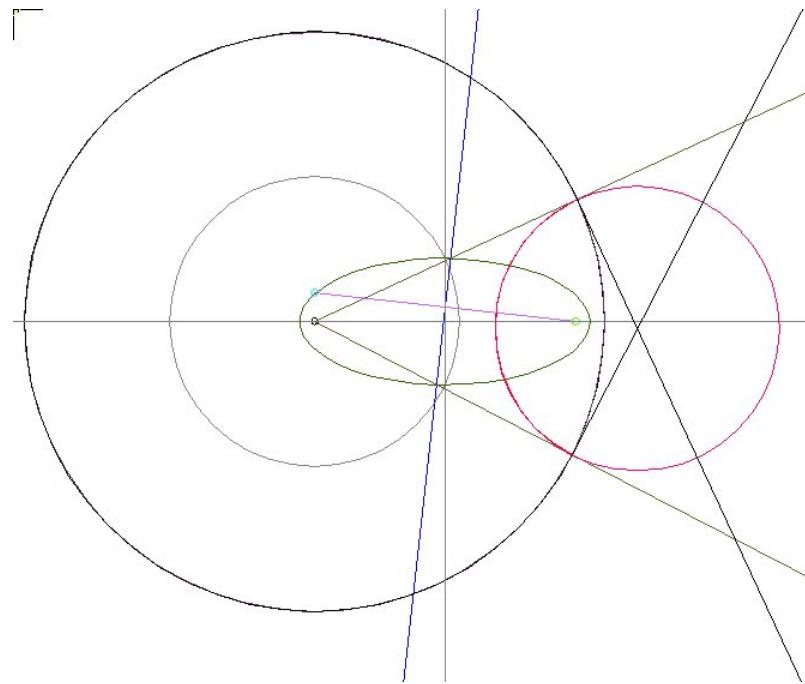
## 10.9 CONCLUSION

L'algorithme proposé est optimum : comme l'on ne traite que des points à l'intérieur d'un disque ouvert il n'y a pas d'intersection de cercles, la complexité du diagramme est donc en  $\mathcal{O}(n)$  et l'algorithme va tourner en  $\mathcal{O}(n \log n)$  d'après le théorème 19, p. 154. Dans la mesure où l'on dispose de l'algorithme à balayage pour les cercles, il est aussi plus satisfaisant que celui qui est suggéré par Boissonnat et al. puisque, en respectant par principe l'absolu, il évite d'introduire dans le diagramme des sommets ultra-idéaux qu'il faut ensuite éliminer. Cela permet de traiter avec la même complexité les diagrammes de Voronoï en géométrie hyperbolique pour la deuxième représentation de Poincaré à base de demi-plan ainsi que pour la représentation de Klein Beltrami puisque l'on peut passer de l'une à l'autre par des transformations simples.

Une autre représentation intéressante de la géométrie hyperbolique est celle qui est faite sur l'une des nappes d'un hyperboloïde à 2 nappes (Faber, 1983, ch.7) : en passant par cet artifice on peut revenir à la géométrie euclidienne et donc le calcul fait est un calcul



**Figure 10.7**



**Figure 10.8**

optimal de diagramme de Voronoï sur cette nappe d'hyperboloïde. Cette représentation n'est malheureusement pas isométrique et donc le diagramme obtenu n'est pas un diagramme euclidien, ce qui en réduit fortement l'intérêt.

Par contre pour la dernière représentation de la géométrie hyperbolique, la représentation sur une pseudo-sphère, la méthode n'est pas suffisante même si la représentation est cette fois isométrique. En effet seule une partie du disque de Poincaré est transférable sur la pseudo-sphère (une partie comprise entre deux diamètres d'un horocycle), celle-ci y étant développée un peu comme un cône sur un plan. La connaissance du diagramme de Voronoï sur le disque n'implique pas directement la connaissance de celui sur la pseudo-sphère puisqu'il faudra recoller les arêtes de la pseudo-sphère et donc les secteurs de Voronoï le long de ces deux arêtes avec une méthode similaire à celle suivie par Frank Dehne et Rolf Klein dans leur article de 1988 : « A sweepcircle algorithm for Voronoï diagrams » (Dehne, 1988) pour un cône.

## CHAPITRE XI

### GÉOMÉTRIE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DE L'INTERSECTION DE TROIS CÔNES DE RÉVOLUTION OU PLUS À AXES PARALLÈLES

La conception d'un algorithme à balayage basé sur des cônes de révolution à axes parallèles suppose de bien connaître les propriétés géométriques de l'intersection de trois et quatre sites, l'équivalent de ce qui a été vu pour les deux algorithmes à balayage par cercle du problème d'Apollonius pour trois cercles et de la condition de Casey pour quatre. Les recherches bibliographiques et documentaires sur ce sujet sont extrêmement fructueuses en ce qui concerne l'intersection de deux cônes de révolution d'axes parallèles. On a déjà cité Chasles (Chasles, 1837), Quêtelet (Baudoin, 1938, chap. 9) et Gomes Teixeira (Gomes Teixeira, 1905) pour la géométrie, on peut rajouter Salmon pour la géométrie analytique (Salmon, 1927) et Duval (Du Val, 1973) pour les fonctions elliptiques.

Par contre dès lors que l'on s'intéresse à l'intersection de trois cônes, on ne trouve plus rien dans la littérature. Est-ce à dire que rien n'a été fait sur le sujet ? Non. D'une part il y a sûrement des résultats que des spécialistes pourraient déduire de leurs connaissances sur les réseaux de quadriques ou de la géométrie algébrique mais il n'y a aucune espèce d'application directe au cas de trois cônes. De plus le fait que les cônes auxquels on s'intéresse soient tous de révolution et d'axes parallèles (on les supposera verticaux) apporte probablement des propriétés particulières plus riches que celles que l'on pourrait déduire des théorèmes généraux. D'autre part les sources de géométrie classique sont

finalement assez rares ou en tout cas difficilement accessibles faute d'être répertoriées sur une base de données. Ainsi la meilleure bibliographie trouvée sur les ovales de Descartes est de 1882 (Liguine, 1882) ; une autre faite par Brocard en 1896 est mentionnée dans (Gomes Teixeira, 1905, §167, p.158) mais n'était pas accessible. Enfin il est possible aussi que le fait que l'intersection de trois cônes ne soient finalement formée que de points entraîne un intérêt moindre des chercheurs pour le sujet. En tout état de cause, il serait présomptueux de prétendre que les théorèmes donnés ici sont nouveaux, notamment le théorème sur le cercle des quatre points, si simple qu'il doit bien exister quelque part. Il n'en reste pas moins que l'étude faite ici comporte sûrement quelques éléments nouveaux, démonstrations ou méthode de calcul, ne serait-ce qu'à cause de son point de vue axé sur le balayage de deux des cônes par le troisième, balayage qui est intrinsèquement lié au mécanisme propre de l'algorithme.

Cette absence de source explique en tout cas pourquoi il a paru nécessaire de donner des démonstrations de géométrie dans l'espace classique qui peut-être existent déjà. Par contre lorsque les sources existent le résultat est justifié par la source.

Pour motiver l'étude qui suit, précisons simplement que le balayage par cône va opérer de la manière qui suit, manière qui est différente de celle décrite au §8.6. On considère deux demi-cônes inférieurs d'angles au sommet différents représentant deux sites. Pour tracer leur courbe d'intersection on va utiliser un troisième demi-cône inférieur d'angle au sommet variable qui sera le cône de balayage. Ce demi-cône va initialement dominer, au sens de la définition 3, p. 40, les deux demi-cônes fixes. L'angle au sommet se réduisant on verra apparaître progressivement les deux demi-cônes fixes et les points d'intersection des trois demi-cônes vont décrire la courbe d'intersection des deux demi-cônes fixes. On s'intéresse donc non seulement aux propriétés des points d'intersections des trois cônes qui les supportent, mais aussi aux cas où ces points d'intersections sont des points doubles algébriques car ils correspondent au début et à la fin du tracé de la courbe d'intersection par le cône de balayage (en terme d'événement ce sont des événements du même type que ceux rencontrés dans l'algorithme précédent).

## 11.1 LE CERCLE DES QUATRE POINTS

On a déjà vu au chapitre sur les diagrammes de points pondérés (chap. 2) que l’intersection de deux cônes d’axes parallèles était une biquadratique, sphérique, ayant une tangente parallèle à l’axe aux points cycliques. Comme on le verra ce résultat sert de base pour tout les calculs faits avec les fonctions elliptiques.

On considère ici une configuration arbitraire de trois cônes de révolution d’axes verticaux et un plan horizontal fixe quelconque.

**Définition 21 (sphère support)** : *On appellera sphère support la sphère qui supporte la courbe d’intersection de deux cônes de révolution d’axes parallèles*

Les cônes de révolution sont des quadriques, surfaces du second degré et donc trois cônes de révolution ont  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$  points d’intersection. Sur ces huit points, si les axes des cônes sont parallèles, nous en connaissons déjà deux qui sont les points cycliques du plan perpendiculaire à la direction des axes, puisque ces deux points sont communs à tous les cônes de révolution ayant la même direction d’axe. De plus, les points d’intersection de ces trois cônes sont aussi les points d’intersection de n’importe quelle paire des trois biquadratiques que ces cônes déterminent entre eux deux à deux. Or comme l’on sait que ces biquadratiques passent toutes par les points cycliques du plan horizontal avec une tangente verticale, donc commune, c’est que les points cycliques sont des points doubles de l’intersection des trois cônes (Cagnac, 1949, p. 281).

Il reste donc quatre points seulement à déterminer. Les biquadratiques sont sphériques, chacune des trois biquadratiques appartenant à la sphère support déterminée par deux des trois cônes. Par suite l’intersection de deux des biquadratiques appartient à l’intersection des deux sphères qui les supportent. Donc les points d’intersection de ces deux biquadratiques appartiennent au cercle commun aux deux sphères, d’où le théorème suivant (voir Fig. 11.1) :

**Théorème 21 (théorème du cercle des quatre points)** : *Les quatre points d’in-*

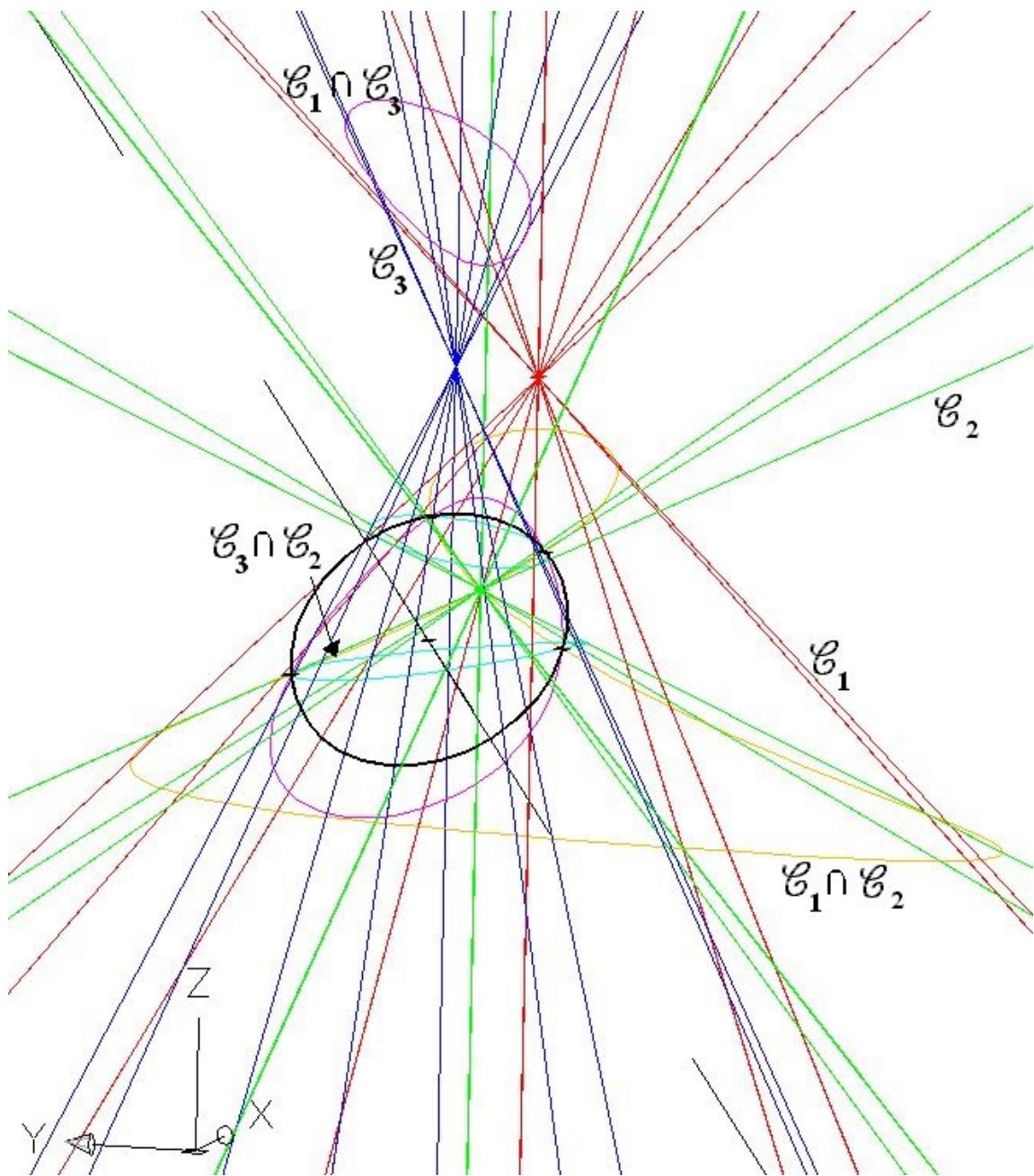


Figure 11.1

*tersection à distance finie de trois cônes de révolution d'axes parallèles sont situés sur un même cercle.*  $\square$

Comme les trois sphères supports générées par les trois cônes pris deux à deux ont alors ce cercle en commun, on en déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 6** : *Les trois sphères supports générées par les trois cônes pris deux à deux appartiennent à un même faisceau de sphères ayant le plan du cercle des quatre points comme plan radical.*

Enfin, puisque le plan horizontal coupe les trois biquadratiques aux points cycliques qui en sont des points doubles, il ne peut, d'après le théorème de Bezout, avoir d'autres points d'intersection à distance finie avec ces courbes. On a donc la remarque suivante :

**Remarque 10** : *Dans le cas général, le plan du cercle des quatre points ne peut être horizontal.*

On peut préciser l'origine et le rôle de ce faisceau de sphères (vue de profil sur la figure 11.2). Chaque cône  $\mathcal{C}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) étant de révolution coupe le plan horizontal suivant un cercle. On considère la sphère  $\mathcal{S}_i$  bitangente au cône au niveau de ce cercle.

**Définition 22 (sphère dérivée)** : *On appelle cette sphère la sphère dérivée du cône de révolution par rapport au plan horizontal.*

On sait alors que la sphère support  $\mathcal{S}_{ij}$  appartient à un faisceau de sphères défini par les deux sphères dérivées (Cagnac, 1949, p. 284) et (Rouché, 1900, p. 279). Ainsi chaque sphère support  $\mathcal{S}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) est définie à partir d'une paire de sphères dérivées  $\mathcal{S}_i$  et  $\mathcal{S}_j$  et on a vu plus haut qu'ayant le cercle des quatre points en commun elles forment un quatrième faisceau dont le plan radical contient les points d'intersections des trois cônes.

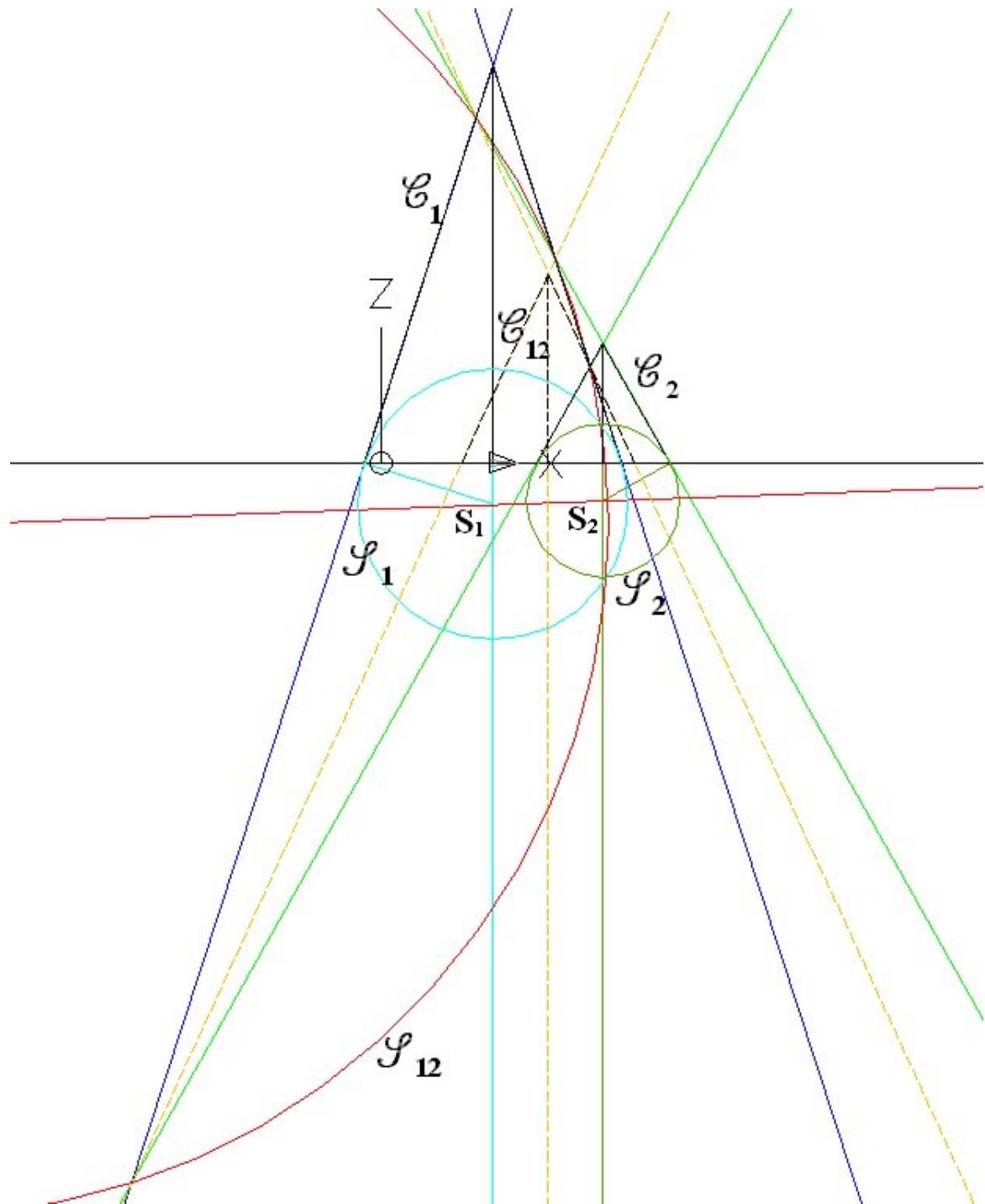


Figure 11.2

## 11.2 LE BALAYAGE AUXILIAIRE

On démontre maintenant le théorème suivant qui est essentiel pour le fonctionnement de l'algorithme (et qui est peut-être original).

**Théorème 22 (théorème du balayage auxiliaire)** : *Lorsque l'angle au sommet du cône de balayage varie, le plan des quatre points (cocycliques) d'intersection de ce cône avec les deux cônes fixes appartient à un faisceau linéaire de plan.*

*Démonstration :* On commence par le lemme suivant :

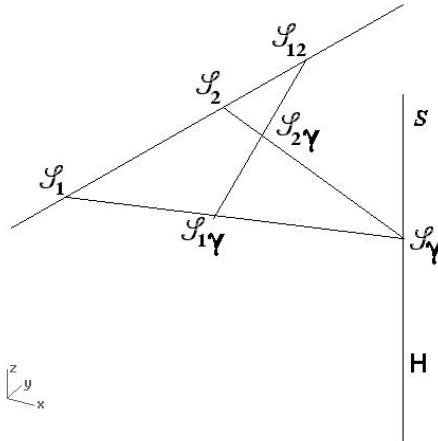
**Lemme 1** : *Quand l'angle au sommet du cône de balayage varie, la sphère dérivée de ce cône appartient à un faisceau de sphère du second genre dont les points limites sont le sommet du cône de balayage et sa projection sur le plan horizontal.*

*Démonstration :* On considère la verticale joignant le sommet  $\Gamma$  du cône de balayage, sa projection  $H$  sur le plan horizontal et le centre de la sphère dérivée. Par définition de la sphère dérivée, le plan horizontal est le plan polaire du centre de balayage par rapport à la sphère dérivée. Donc quand l'angle de balayage varie, les deux points d'intersection de la sphère dérivée avec cette verticale sont toujours en division harmonique avec le centre de balayage et sa projection sur le plan horizontal. Le fait que ces deux points soient fixes achève la démonstration du lemme.

On considère maintenant les sphères  $\mathcal{S}_1$ , dérivée de  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$ , dérivée de  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{S}_\gamma$ , dérivée de  $\Gamma$ , cône de balayage et les trois sphères supports qu'elles définissent :  $\mathcal{S}_{12}$ ,  $\mathcal{S}_{1\gamma}$ ,  $\mathcal{S}_{2\gamma}$ .

On utilise la bijection entre les sphères de  $\mathbb{R}^3$  et les points de  $\mathbb{R}^4$  (Coolidge, 1971, p. 248-253) et les propriétés générales des réseaux de sphères qu'on peut trouver dans (Court, 1964, chap. 7).

Les points  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$ ,  $\mathcal{S}_{12}$  sont alignés (les sphères appartiennent au même faisceau), il en est de même pour  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_\gamma$ ,  $\mathcal{S}_{1\gamma}$  et  $\mathcal{S}_2$ ,  $\mathcal{S}_\gamma$ ,  $\mathcal{S}_{2\gamma}$ .



**Figure 11.3**

Mais d'après le lemme  $\mathcal{S}_\gamma$  est aussi alignée avec deux points fixes  $S$  et  $H$  qui sont les sphères de rayon nul correspondants au centre de balayage et à sa projection sur le plan horizontal.

Donc toutes les sphères considérées appartiennent au même hyperplan fixe de  $\mathbb{R}^4$  défini par les quatre sphères fixes :  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$ ,  $S$  et  $H$  qu'on peut représenter par la figure suivante de  $\mathbb{R}^3$  (Fig. 11.3).

Quand l'angle de balayage varie,  $\mathcal{S}_\gamma$  décrit  $HS$  et  $\mathcal{S}_{12}$  étant fixe, la droite  $\mathcal{S}_{12}\mathcal{S}_{1\gamma}$  décrit un cône de sommet  $\mathcal{S}_{12}$ . Mais l'intersection de ce cône avec la droite  $\mathcal{S}_\gamma\mathcal{S}_2$  doit être unique sinon il y aurait deux sphères différentes du faisceau qui supporteraient la même courbe sphérique gauche. Donc la droite  $\mathcal{S}_{12}\mathcal{S}_{1\gamma}$  décrit un plan quand l'angle de balayage varie, ce qui revient à dire que les sphères  $\mathcal{S}_{12}, \mathcal{S}_{1\gamma}, \mathcal{S}_{2\gamma}$  appartiennent au même réseau.

Leurs centres sont donc dans un plan fixe contenant  $\mathcal{S}_{12}$  et le plan radical de tout faisceau extrait de ce réseau, tel que celui du faisceau  $\mathcal{S}_{12}\mathcal{S}_{1\gamma}\mathcal{S}_{2\gamma}$  qui est justement le plan du cercle des quatre points, contient l'axe radical, fixe, de ce réseau de sphère.  $\square$

Aussi rapide soit la démonstration géométrique, elle ne donne pas la formule exacte de la dépendance entre l'angle de balayage et les deux cônes fixes ; une démonstration de géométrie analytique est donc donnée dans l'appendice A. On obtient une formule du type  $\mathcal{P} + \tan^2 \gamma \mathcal{P}'$ , où  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont les équations de deux plans, mais la forme la plus intéressante est la suivante :

Si  $\mathcal{C}_1$  est l'équation de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  celle de  $\mathcal{C}_2$ , les demi-angles au sommet de ces cônes étant  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ ,  $\Gamma(\gamma)$  le cône de balayage avec son demi-angle au sommet  $\gamma$ , PC4 désignant le plan du cercle des quatre points, on a

$$PC4 \equiv (\tan^2 \gamma - \tan^2 \alpha_2)(\mathcal{C}_1 - \Gamma(\alpha_1)) - (\tan^2 \gamma - \tan^2 \alpha_1)(\mathcal{C}_2 - \Gamma(\alpha_2)). \quad (11.1)$$

Cette formule traduit le fait que dès lors que l'on sait que le plan du cercle des quatre points appartient à un faisceau de plan, on peut obtenir très facilement l'axe de ce faisceau en utilisant des cas limites. Ici on peut le construire dans l'espace comme l'intersection des deux plans contenant la conique d'intersection du cône de balayage avec chacun des deux cônes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , lorsque l'angle de balayage vaut soit  $\alpha_1$  soit  $\alpha_2$ . Ces plans sont en fait les « sphères » supports  $\mathcal{S}_{1\gamma=\alpha_1}, \mathcal{S}_{2\gamma=\alpha_2}$ . De plus cette construction est plus facile à faire avec un logiciel de CAO que celle de l'axe radical du réseau de sphères et la plupart des figures ont été faites de cette manière.

### 11.3 TANGENTE COMMUNE À TROIS CÔNES

Cela n'est pas encore suffisant : on voit bien qu'il va falloir déterminer le début et la fin du tracé du bissecteur quand le cône de balayage varie comme on l'a fait pour le diagramme de Voronoï de cercles avec distance euclidienne.

**Définition 23 (point sextuple) :** *On appelle points sextuples les points en lesquels le cône de balayage commence ou termine le tracé d'une biquadratique d'intersection de deux cônes fixes.*

Dans ce cas limite, deux points d'intersection viennent se confondre et la droite qui les joint devient tangente à la biquadratique d'intersection, donc aux deux premiers cônes, mais comme on peut en principe prendre n'importe lequel des trois cônes comme cône de balayage pour obtenir ce point double, la tangente est commune aux trois biquadratiques et aux trois cônes. En ce triple point double, les plans tangents aux trois cônes ont donc une droite commune.

Le problème consiste à déterminer pour quelle valeur de  $\gamma$  cette condition se produit.

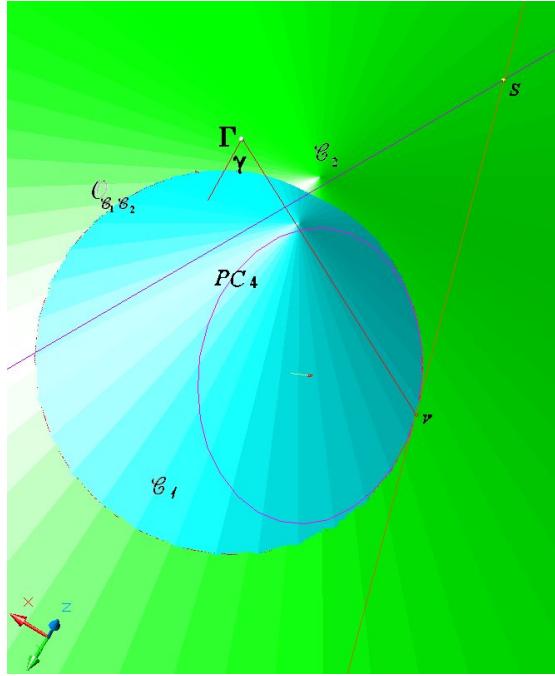
Ce problème est résolu en utilisant la théorie des invariants des quadriques dans le cas général par Salmon dans Analytic Geometry of three dimensions (Salmon, 1927, §237, p. 245). Cependant la complication des calculs est assez décourageante ; Salmon précise que l'équation dépend des coefficients au seizième degré et ne donne pas de détail. On va donc utiliser le théorème précédent pour accéder plus facilement au résultat.

**Théorème 23 :** *Lorsque le cône de balayage et les deux cônes fixes ont une tangente commune, celle-ci s'appuie sur l'axe du faisceau des plans des cercles des quatre points.*

*Démonstration :* On raisonne par passage à la limite sur la droite joignant deux points d'intersection infiniment voisins communs aux trois cônes  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  et  $\Gamma$ . Ces points sont sur la biquadratique fixe définie par les cônes  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  et la droite qui les joint appartient donc au plan du cercle des quatre points défini par  $\Gamma$  à cet instant. Quand l'angle de balayage varie et donc quand le cône de balayage atteint le point sextuple, la droite devient non seulement tangente à la biquadratique, mais aussi tangente au cercle des quatre points. Comme elle est toujours dans le plan du cercle elle coupe bien l'axe du faisceau (sur la figure 11.4, le cône de balayage n'est représenté que par sa génératrice  $TV$ , le point triple est en  $V$  et la tangente coupe l'axe du faisceau en  $S$ ).  $\square$

C'est le corollaire suivant qui nous intéresse :

**Corollaire 7 :** *On peut déterminer les points sextuples en prenant l'intersection de la surface développable qui a la biquadratique fixe comme arête de rebroussement avec l'axe*



**Figure 11.4**

*du faisceau des plans des cercles des quatre points.*

Le corollaire est trivial, mais ce qui est intéressant c'est que le degré de cette surface n'est plus que du huitième degré (Salmon, 1927, §218, p. 223). La manière dont on utilise ce corollaire est traité au paragraphe suivant.

Ceci termine les propriétés géométriques qui sont directement utilisées dans l'algorithme. Il faut noter que ces propriétés sont extrêmement riches, par exemple on a un parallèle très surprenant entre les propriétés de la sphère de similitude de deux sphères et celle de la sphère support de deux sphères dérivées, qui s'étend au cas de trois et quatre sphères. Il reste une dernière propriété qui a été utilisée pour vérifier les figures :

**Proposition 4** : *Le plan des centres du réseau des sphères supports passe par le centre de balayage.*

*Démonstration :* Dans le faisceau de plan  $\mathcal{P} + \lambda\mathcal{P}'$ , on prend le plan donné par  $\lambda = -1$ . Ceci revient à considérer le cas où  $\tan^2 \gamma = -1$ , le cône de balayage est alors un cône isotrope qui se confond avec sa sphère dérivée (on ne cherche pas pour autant à définir l'angle au sommet du cône isotrope qui vaudrait ici  $i\infty!$ ). Le rayon de  $\mathcal{S}_\gamma$  étant nul,  $\mathcal{S}_{12}$  et  $\mathcal{S}_\gamma$  définissent un faisceau à point limites et la sphère support qu'ils définissent est aussi  $\mathcal{S}_\gamma$  puisque c'est la seule sphère passant par les quatre points d'intersections (qui sont bien sûr imaginaires).  $\square$

On en déduit, puisque le sommet du cône de balayage est une sphère de rayon nul du réseau des sphères supports, que ce réseau est un réseau avec un cercle limite passant par le centre de balayage : l'axe du faisceau de plan des cercles des quatre points ne rencontre jamais les sphères supports.

Pour être complet, on peut ajouter à ce théorème le corollaire suivant, qui ne nécessite pas de démonstration (Rouché, 1900, Livre VII, p. 282 - voir aussi la figure C.2, p. 250) :

**Corollaire 8 :** *Les cercles des quatre points tracés sur la sphère  $\mathcal{S}_{12}$  y forment un faisceau à points limites quand  $\gamma$  varie.*

On peut de plus construire facilement deux autres points du plan des centres du réseau des sphères supports en considérant aussi le cas  $\gamma = 0$ .

#### 11.4 LE PARAMÉTRAGE PAR FONCTIONS ELLIPTIQUES

Quand on effectue une recherche documentaire sur les ovales de Descartes, on trouve qu'elles forment un réseau de courbes orthogonales et peuvent être utilisées pour des transformations conformes dans (Lawden, 1989, §4.6, p. 107 et §7.1, p. 186) et il y a une étude directe de certaines propriétés géométriques des biquadratiques sphériques et de leur projection dans (Du Val, 1973, chap. 13). Cela suggère d'au moins regarder ce que ces fonctions peuvent apporter à la logistique de l'algorithme. Malheureusement avant de pouvoir appliquer certaines de ces notions il y a un travail important de mise en forme qui est résumé ci-dessous. Si la rigueur n'en souffre pas, chaque fois que possible, le choix

1	2	3	4	5	6
$\alpha > \gamma > \delta$	$\alpha > \delta > \gamma$	$\delta > \alpha > \gamma$	$\delta > \gamma > \alpha$	$\gamma > \delta > \alpha$	$\gamma > \alpha > \delta$

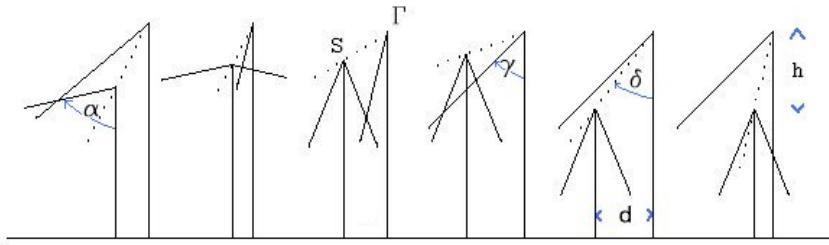


Figure 11.5

est fait de vérifier les formules plutôt que de montrer de manière détaillée comment on les obtient.

#### 11.4.1 Position relative de deux demi-cônes

On définit la position relative de demi-cône de la manière suivante. On appelle  $\Gamma$  le sommet du demi-cône le plus haut,  $S$  le sommet du second,  $\gamma$  et  $\alpha$  leur demi-angle au sommet. On introduit de plus l'angle auxiliaire  $\delta$  défini par  $\tan \delta = \frac{d}{h}$  avec  $d$  distance horizontale entre  $S$  et  $\Gamma$ ,  $h$  leur distance verticale. Avec ces paramètres on distingue six cas différents suivant les valeurs de  $\alpha, \delta, \gamma$  (Fig. 11.5).

#### 11.4.2 Cône conjugué

On donne une nouvelle définition pour simplifier l'exposé :

**Définition 24 (cône conjugué) :** *On appelle cône conjugué de deux cônes de révolution d'axes parallèles, le troisième cône de révolution du réseau de quadriques que ces deux cônes définissent entre eux.*

Le cône conjugué des cônes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sera noté  $\mathcal{C}_{12}$ . On n'utilisera pas la sphère dérivée de  $\mathcal{C}_{12}$  et il faut éviter la confusion avec la sphère support  $\mathcal{S}_{12}$  (Fig. 11.2).

Les propriétés de ce cône sont les suivantes. Les deux cônes principaux sont des quadriques et définissent donc un réseau de quadriques qui passent par leur biquadratique d'intersection. Ce réseau comprend quatre cônes (Michel, 1926, p. 173). L'un de ces cônes est un cylindre parabolique (Cagnac, 1949, p. 280). Le cône conjugué est le dernier des quatre, il a son axe dans le plan des deux premiers. Ses génératrices dans ce plan sont deux des diagonales du quadrilatère complet que forment les génératrices des deux premiers (Silvester, 1866) et la projection de son sommet sur le plan horizontal donne le troisième foyer de l'ovale de Descartes obtenu en projetant l'intersection des deux cônes. (FGM, 1909, problème 640, p. 1120).

On note que les trois cônes ne jouent pas des rôles totalement symétriques parce que sur les trois foyers de l'ovale l'un d'entre eux est entre les deux autres. Or comme c'est la projection des sommets qui donne les trois foyers (Théorème de Quêtelet, ibid.), quand on considère deux cônes, on ne sait pas a priori à quel foyer leur sommet correspond. De la même manière, l'un des sommets est plus haut que les deux autres : c'est la raison pour laquelle on sera amené à distinguer différents cas lors des calculs et lors de la programmation de l'algorithme.

#### 11.4.3 Les quatre cônes du faisceau

On prend un repère situé au sommet du cône le plus haut, avec un axe  $Oz$  orienté vers le bas, on a alors en coordonnées projectives  $(x, y, z, w)$  pour  $\Gamma$  et  $\mathcal{C}$  les équations suivantes<sup>1</sup> :

<sup>1</sup>Les notations adoptées ici sont les notations traditionnelles notamment pour les fonctions de Jacobi ; pour les calculs pratiques il vaut mieux prendre directement les formules du code joint dans l'appendice E.

$$\Gamma \equiv x^2 + y^2 - \tan^2 \gamma z^2; \quad (11.2)$$

$$\mathcal{C} \equiv (x - dw)^2 + y^2 - \tan^2 \alpha (z + hw)^2. \quad (11.3)$$

Après avoir posé  $\delta = \arctan \frac{d}{h}$ , on introduit les nouveaux paramètres :

$$t_1 = \tan^2 \alpha - \tan^2 \delta; \quad (11.4)$$

$$t_2 = \tan^2 \delta - \tan^2 \gamma; \quad (11.5)$$

$$t = \tan^2 \alpha - \tan^2 \gamma; \quad (11.6)$$

$$m = \frac{\tan^2 \gamma t_1}{\tan^2 \delta t}; \quad (11.7)$$

$$n = \frac{\tan^2 \alpha t_2}{\tan^2 \delta t}; \quad (11.8)$$

$$a = \arctan \left( \frac{\tan \alpha \tan \gamma}{\tan \delta} \right); \quad (11.9)$$

$$h_a = mh \frac{\tan^2 \delta}{\tan^2 \gamma} = h \frac{t_1}{t}. \quad (11.10)$$

Avec ces notations on voit que :  $t = t_1 + t_2$ ,  $m + n = 1$  et on va montrer que  $h_a$  et  $a$  sont respectivement la cote du sommet du cône conjugué et son demi-angle au sommet.

On considère alors les équations :

$$\mathcal{C} - \Gamma \equiv (-d^2 + h^2 \tan^2 \alpha)w^2 + 2dwx + 2hwz \tan^2 \alpha + z^2(\tan^2 \alpha - \tan^2 \gamma); \quad (11.11)$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \gamma \Gamma - \cos^2 \alpha \mathcal{C} \equiv \\ (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma) - 2dwx \cos^2 \alpha - 2hwz \sin^2 \alpha + w^2(d^2 \cos^2 \alpha - h^2 \sin^2 \alpha); \end{aligned} \quad (11.12)$$

$$\begin{aligned} m\mathcal{C} + n\Gamma \equiv x^2 + y^2 - 2hmzw \tan^2 \alpha - 2dmwx + w^2(d^2m - h^2m \tan^2 \alpha) - z^2(t + \tan^2 \gamma) \\ \equiv (x - dmw)^2 + y^2 - \tan^2 a(z + h_a w)^2. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Ces trois équations représentent par construction des quadriques du faisceau défini par  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma$ . La première,  $\mathcal{P} = \mathcal{C} - \Gamma$  (11.11), en  $z^2$ ,  $x$  et sans terme en  $y$  est bien un cylindre

parabolique, donc c'est le troisième cône du faisceau. La seconde,  $\mathcal{S} = \cos^2 \gamma \Gamma - \cos^2 \alpha \mathcal{C}$  (11.12), est une sphère et comme il n'y a qu'une seule sphère (ou rien que des sphères) dans un faisceau de quadrique, c'est nécessairement la sphère support. La dernière de ces équations,  $\mathcal{C}' = m\mathcal{C} + n\Gamma$  (11.13) est de la même forme que  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma$ , donc c'est un cône de révolution d'axe vertical et comme il n'y a que quatre cônes dans un faisceau de quadriques, connaissant les trois premiers, on a bien l'équation du cône conjugué. De plus, avec la dernière forme, on voit que les paramètres de ce cône sont :  $dm, h_a, a$  lorsque les paramètres de  $\mathcal{C}$  sont  $d, h, \alpha$ .

#### 11.4.4 Le changement d'axe

On va faire un changement d'axe en coordonnées projectives suivant la méthode préconisée dans (Du Val, 1973, chap. 13). Du Val suggère d'utiliser comme nouveau tétraèdre de référence le tétraèdre formé par les sommets des quatre cônes du faisceau. Dans ce cas la matrice de changement de base  $\mathbf{B}$  sera donnée par les coordonnées projectives des sommets des cônes dans l'ancien repère. On obtient donc, si les sommets des quatre cônes sont désignés par  $\Gamma, C, C', P$  :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \Gamma & C & C' & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d & md & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & -h & -h_a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne les formules pour le changement de variable :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = dY + mdZ \\ y = dW \\ z = -hY - h_aZ = -h(Y + \frac{t_1}{t} Z) \\ w = X + Y + Z \end{cases} .$$

Pour définir la biquadratique sphérique qui sert de base au faisceau de quadriques on peut choisir deux des cinq surfaces dont nous disposons, c'est-à-dire quatre cônes et la

sphère support ; on choisit les deux premières et avec les nouvelles variables les équations des deux cônes deviennent :

$$\Gamma \equiv -m \frac{t_1 t_2}{t} Z^2 + \tan^2 \delta W^2 + t_2 Y^2 \quad (11.14)$$

$$\mathcal{C} \equiv n \frac{t_2 t_1}{t} Z^2 + \tan^2 \delta W^2 - t_1 X^2 \quad (11.15)$$

(pour le second, il faut substituer directement :

$$x - dw = -d(X + nZ) \text{ et } z + hw = h(X + \frac{t_2}{t} Z) \quad ).$$

#### 11.4.5 Le paramétrage elliptique

On utilise les fonctions originales de Jacobi de paramètres  $m$  (et donc le paramètre complémentaire est  $n$  d'après la formule (11.8)), d'argument  $u$  :  $\text{sn}(u|m)$ ,  $\text{cn}(u|m)$ ,  $\text{dn}(u|m)$  et les neufs autres fonctions obtenus en prenant leurs quotients ou leurs inverses définis par Glaisher (Du Val, 1973, chap. 4, §31). On identifie les identités du type  $\text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = 1$  et  $\text{dn}^2 u + m \text{sn}^2 u = 1$  ou  $\text{dn}^2 u - m \text{cn}^2 u = n$  avec les deux équations précédentes. L'identification n'est pas toujours directe, puisque l'on n'a pas systématiquement  $m \in [0, 1]$  ; en effet, comme on l'a vu il y a six différents cas à traiter. De plus sur les six, les quatre premiers seulement nous intéressent, car les deux derniers correspondent à la domination d'un des demi-cônes par l'autre, il n'y a donc pas d'intersection réelle dans ce cas.

Le paramétrage avec les nouvelles variables donne par exemple dans l'un des cas :

$$\begin{cases} X = 1 \\ Y = \sqrt{m \frac{t_2}{t_1}} \text{sd } u \\ Z = \sqrt{\frac{t}{t_2}} \text{nd } u \\ W = \sqrt{mt_1} \cot \delta \text{cd } u \end{cases} .$$

On repasse ensuite dans les anciennes coordonnées et on utilise les transformations réelles ou imaginaires de Jacobi (Hancock, 1958, chap. 11) pour que les courbes considérées soient toutes paramétrées par une seule série de fonctions (la série originale  $\text{sn}, \text{cn}, \text{dn}$ ) et une valeur réelle de l'argument :  $u \in [0, 4K]$ . On donne ici les résultats pour les quatre

cas qui nous intéressent. On n'amoindrit pas la rigueur si, à partir de ces résultats on vérifie qu'en substituant les résultats obtenus dans les deux équations 11.2, 11.3 on obtient bien un résultat nul. La vérification ne sera de plus faite que dans un seul des cas, puisqu'ils sont tous similaires.

1. cas 1 :  $\alpha > \gamma > \delta$  la transformation est basée sur  $m \rightarrow \frac{1}{m}$

$$\begin{cases} x(u) = (d/h)(1 + \sqrt{\frac{1}{m} \frac{t}{t_1}} \operatorname{sn}(u|m)) \\ y(u) = \sqrt{-t_2} \operatorname{cn}(u|m) \\ z(u) = -(1 + \sqrt{m \frac{t_1}{t}} \operatorname{sn}(u|m)) \\ w(u) = \frac{1}{h}(1 - \sqrt{-\frac{t_2}{t_1}} \operatorname{dn}(u|m) + \sqrt{m \frac{t}{t_1}} \operatorname{sn}(u|m)) \end{cases} \quad (11.16)$$

2. cas 2 :  $\alpha > \delta > \gamma$  la transformation est basée sur  $m \rightarrow m$

$$\begin{cases} x(u) = (d/h)(m + \sqrt{m \frac{t_1}{t}} \operatorname{sn}(u|m)) \\ y(u) = \sqrt{m \frac{t_1 t_2}{t}} \operatorname{cn}(u|m) \\ z(u) = -(\frac{t_1}{t} + \sqrt{m \frac{t_1}{t}} \operatorname{sn}(u|m)) \\ w(u) = \frac{1}{h}(1 - \sqrt{\frac{t_2}{t}} \operatorname{dn}(u|m) + \sqrt{m \frac{t_1}{t}} \operatorname{sn}(u|m)) \end{cases} \quad (11.17)$$

3. cas 3 :  $\delta > \alpha > \gamma$  la transformation est basée sur  $m \rightarrow \frac{-m}{1-m}$

$$\begin{cases} x(u) = (d/h)(\sqrt{m \frac{t}{t_1}} + \operatorname{cn}(u|m)) \\ y(u) = -\sqrt{t_2} \operatorname{sn}(u|m) \\ z(u) = -(\sqrt{\frac{1}{m} \frac{t_1}{t}} + \operatorname{cn}(u|m)) \\ w(u) = \frac{1}{h}(\sqrt{\frac{1}{m} \frac{t}{t_1}} + \operatorname{cn}(u|m) + \sqrt{\frac{t_2}{t_1} \frac{m-1}{m}} \operatorname{dn}(u|m)) \end{cases} \quad (11.18)$$

4. cas 4 :  $\delta > \gamma > \alpha$  la transformation est basée sur  $m \rightarrow \frac{m-1}{m}$

$$\begin{cases} x(u) = (d/h)(m + \sqrt{\frac{1}{1-m} \frac{t}{t_1}} \operatorname{dn}(u|m)) \\ y(u) = \sqrt{t_2 \frac{m}{1-m}} \operatorname{cn}(u|m) \\ z(u) = -(1 + \sqrt{\frac{t_1}{t}} \operatorname{dn}(u|m)) \\ w(u) = \frac{1}{h}(1 - \sqrt{m \frac{-t_2}{t_1}} \operatorname{sn}(u|m) + \sqrt{\frac{t}{t_1}} \operatorname{dn}(u|m)) \end{cases} \quad (11.19)$$

Remarquons que géométriquement ces changements de variable reviennent à échanger l'un des cônes avec le cône conjugué.

On vérifie la validité du paramétrage pour le premier cas en remplaçant les formules trouvées d'une part dans l'équation de  $\Gamma$  puis dans celle de  $\mathcal{C}$ . Pour  $\Gamma$  on trouve facilement :

$$\tan^2 \delta (1 + \sqrt{\frac{t}{mt_1}} \operatorname{sn} u)^2 - t_2^2 \operatorname{cn}^2 u - \tan^2 \gamma (1 + \sqrt{\frac{mt_1}{t}} \operatorname{sn} u)^2.$$

Il y a deux termes en  $\operatorname{sn} u$  qui sont (à un facteur 2 près) :

$$\tan^2 \delta \sqrt{\frac{t}{mt_1}} - \tan^2 \gamma \sqrt{\frac{mt_1}{t}},$$

une expression qui vaut  $\tan \delta \tan \gamma - \tan \gamma \tan \delta$  en remplaçant  $m$  par *l'inverse* de sa valeur extraite de la formule (11.7) (à cause de la transformation utilisée ; elle correspond d'ailleurs toujours à l'une des six valeurs possibles d'un birapport).

Les termes constants valent  $\tan^2 \delta - \tan^2 \gamma = t_2$ , le terme en  $\operatorname{cn}^2 u$  vaut  $-t_2$  et le facteur de  $\operatorname{sn}^2 u$  donne  $\tan^2 \delta \frac{t}{t_1 m} - \tan^2 \gamma m \frac{t_1}{t}$  soit la même chose et donc finalement on a obtenu  $t_2(1 - \operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u)$  qui est toujours nul.

Pour  $\mathcal{C}$  on évalue d'abord  $x - dw$  et  $z + hw$  avant de remplacer et on utilise l'identité :  $\tan^2 \gamma t_1 - \tan^2 \delta t = -\tan^2 \alpha t_2$  et toutes celles qu'on obtient par permutation.

$$x - dw = \tan \delta \left( \sqrt{\frac{t}{mt_1}} - \sqrt{\frac{mt}{t_1}} \right) \operatorname{sn} u + \tan \delta \sqrt{-\frac{t_2}{t_1}} \operatorname{dn} u \quad (11.20)$$

$$= -\frac{\tan^2 \alpha t_2}{\tan \gamma t_1} \operatorname{sn} u + \tan \delta \sqrt{-\frac{t_2}{t_1}} \operatorname{dn} u; \quad (11.21)$$

$$z + hw = \left( \sqrt{\frac{mt}{t_1}} - \sqrt{\frac{mt_1}{t}} \right) \operatorname{sn} u - \sqrt{-\frac{t_2}{t_1}} \operatorname{dn} u \quad (11.22)$$

$$= \frac{\tan \delta t_2}{\tan \gamma t_1} \operatorname{sn} u - \sqrt{-\frac{t_2}{t_1}} \operatorname{dn} u. \quad (11.23)$$

En reportant dans  $\mathcal{C}$  et en développant, on obtient un terme en  $\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$  qui est  $-\frac{\tan^2 \alpha t_2}{\tan \gamma t_1} \tan \delta \sqrt{-\frac{t_2}{t_1}} + \tan^2 \alpha \frac{\tan \delta t_2}{\tan \gamma t_1} \sqrt{-\frac{t_2}{t_1}}$  et donc s'annule. Le terme en  $\operatorname{cn}^2 u$  vaut  $-t_2 \operatorname{cn}^2 u$  et le terme en  $\operatorname{dn}^2 u$  vaut  $-\tan^2 \delta \frac{t_2}{t_1} + \tan^2 \alpha \frac{t_2}{t_1}$  soit  $t_2 \operatorname{dn}^2 u$ . Enfin le dernier terme en  $\operatorname{sn}^2 u$  donne  $\frac{t_2^2 \tan^2 \alpha}{t_1^2 \tan^2 \gamma} (\tan^2 \alpha - \tan^2 \delta) \operatorname{sn}^2 u$ , soit  $\frac{t_2^2 \tan^2 \alpha}{t_1 \tan^2 \gamma} \operatorname{sn}^2 u$ . Finalement on obtient l'équation :

$$-t_2 \operatorname{cn}^2 u + t_2 \operatorname{dn}^2 u + \frac{t_2^2 \tan^2 \alpha}{t_1 \tan^2 \gamma} \operatorname{sn}^2 u$$

qui est identiquement nul tenant compte du paramètre de la fonction elliptique qui est, vu la transformation utilisée,  $m = \frac{t \tan^2 \delta}{t_1 \tan^2 \gamma}$ .

Ceci valide donc le paramétrage choisi pour la courbe d'intersection de deux cônes dans le repère considéré.

#### 11.4.6 Calcul des points d'intersection de trois cônes

La méthode qui suit est une application de ce qui précède ; il est évident qu'il n'y a pas besoin de tout cet outillage pour obtenir le résultat mais d'une certaine manière ce serait dommage de ne pas la donner puisqu'elle se présente naturellement comme une conséquence des théorèmes 21 et 22. De plus elle a été testée dans le code joint en appendice et le travail de programmation de cette partie a été somme toute marginal puisqu'il fallait de toute façon tout développer pour obtenir les points sextuples.

On a paramétrisé la courbe d'intersection de deux cônes ; avec trois cônes on pourrait penser refaire la même chose avec le premier et le troisième cône, par exemple, puis prendre l'intersection des deux courbes, mais cela obligerait à résoudre des équations avec des fonctions elliptiques de paramètres différents. Cependant il y a une application classique du paramétrage des biquadratiques par des fonctions elliptiques qu'on trouve par exemple dans (Appell, 1922, §117, p. 171) ; c'est la recherche d'une condition pour que quatre points d'une telle courbe soit dans un même plan. Le paramétrage étant connu, la condition est que si les arguments des quatre points sont  $u_1, u_2, u_3, u_4$  on ait :

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 4pK + 4q\mathbf{i}K'.$$

La démonstration se base sur le fait que si un plan a pour équation  $Ax + By + Cz + Dw = 0$ , alors la fonction elliptique obtenue en remplaçant dans cette équation  $x, y, z, w$  par les fonctions obtenues plus haut est aussi une fonction elliptique de même ordre et de même période puisqu'elle s'écrit sous la forme :

$$\nu_s \operatorname{sn} u + \nu_c \operatorname{cn} u + \nu_d \operatorname{dn} u + \nu_n = 0. \quad (11.24)$$

Mais l'équation (11.24) est facile à résoudre, d'où l'idée d'utiliser le plan du cercle des

quatre points pour trouver les points d'intersection.

La méthode théorique utilisée est donc la suivante :

- On choisit deux des cônes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  pour obtenir le paramétrage elliptique de leur courbe d'intersection comme vu au paragraphe précédent.
- On calcule leur sphère support  $\mathcal{S}_{12}$  (équation 11.12).
- On calcule l'une des deux autres sphères supports,  $\mathcal{S}_{13}$  ou  $\mathcal{S}_{32}$ .
- On obtient le plan du cercle des quatre points en prenant le plan radical de ces deux sphères donné par l'équation :  $\mathcal{S}_{12} \cdot \mathcal{S}_{13}$ .
- On substitue le paramétrage elliptique dans l'équation du plan.
- On résout l'équation du type 11.24 trouvée.

On élimine les termes en  $\operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$  par deux élévations au carré et on résout l'équation (11.24) comme une équation algébrique du quatrième degré en  $\operatorname{sn} u$ , et il est intéressant de remarquer que le calcul des sommets des algorithmes précédents repose lui sur la solution de l'équation  $a \cos \theta + b \sin \theta - c = 0$  (cf. appendice A, p. 240).

La méthode mise en oeuvre choisit, pour origine des coordonnées, le cône qui a le sommet le plus haut des deux premiers cônes, calcule lequel des six cas doit être traité puis applique la méthode. De cette manière il n'est pas nécessaire de programmer les deux derniers cas puisqu'alors il y a domination d'un des cônes par un autre et donc pas de racines (voir procédure `coneV[n1, n2, n3, nk]` dans le code). Les solutions parasites introduites par les élévations au carré sont éliminées par test de l'appartenance des points trouvés à deux des demi-cônes et au plan PC4.

#### 11.4.7 Étude de la courbe paramétrique

On utilise aussi ce qui précède pour préciser quelques propriétés de la courbe décrite par ces équations et qui seront utilisées dans l'algorithme.

### Séparation des deux ovales conjugués

Le nom de la courbe projetée « ovales de Descartes » est au pluriel car on sait que la courbe est en fait formée de deux ovales conjugués. L'étude la plus détaillée et la plus simple sur ce sujet se trouve dans (Baudoin, 1938, chap. 2). Le fait est d'ailleurs intuitif si l'on considère l'intersection de deux cônes d'angle au sommet différents.

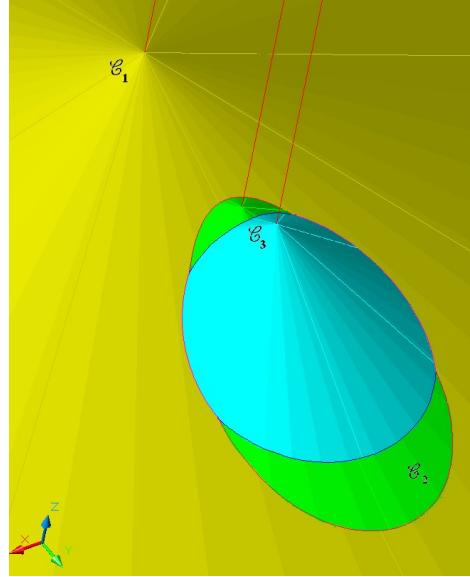
**Théorème 24 :** *Les équations paramétriques 11.16 à 11.19 représentent, dans  $\mathbb{R}$ , une boucle qui se projette comme un ovale entier et un seul.*

*Démonstration :* Il n'y a pas de points à l'infini puisque la courbe est sphérique (d'ailleurs on vérifie facilement que  $w(u)$  n'est jamais nul pour une valeur réelle de  $u$ ). Les quatre fonctions  $x(u), y(u), z(u), w(u)$  de (11.16) ou les similaires sont des fonctions partout continues et dérивables sur  $\mathbb{R}$ . De plus elles sont périodiques de période commune  $4K$ . Donc la courbe représentative dans  $\mathbb{R}^3$  décrit une courbe fermée et une seule.  $\square$

**Corollaire 9 :** *La boucle étant fermée, elle n'a qu'un nombre pair de points d'intersection avec un plan et donc il n'y a que 0, 2 ou 4 points d'intersection.*

**Remarque 11 :** *Il faut noter que l'on ne peut pas généraliser la propriété des demi-cônes équilatères (Pottmann, 2001, §6.3.7, p. 369) concernant le nombre de leurs points d'intersection qui est limité à deux. On peut avoir quatre intersections avec trois demi-cônes inférieurs, alors que l'on pourrait penser que lorsqu'il y en a quatre, ceux-ci se répartissent entre les deux boucles. L'exemple de la figure 11.6 avec trois demi-cônes inférieurs montre qu'il n'en est rien. Cependant il y a un cas de figure où cette idée est exacte et on démontrera au prochain chapitre cette propriété plus faible qui sera utilisée pour l'algorithme.*

**Remarque 12 :** *On note que l'autre boucle est obtenue à partir de la première en prenant les valeurs de  $u$  dans l'intervalle  $[0+2iK', 4K+2iK']$  qu'on peut toujours ramener*



**Figure 11.6**

à une forme réelle sur  $[0, 4K]$  par simple translation (Hancock, 1958, formulaire, p. 464-465) : cela revient simplement à changer le signe des coefficients de  $\text{dn } u$  et  $\text{cn } u$ , puisque  $2iK'$  est une période de  $\text{sn } u$  alors que  $\text{dn}(u + 2iK') = -\text{dn } u$  et  $\text{cn}(u + 2iK') = -\text{cn } u$ .

### Sommets de la courbe

Les sommets de la courbe sont obtenus pour les valeurs  $0, K, 2K, 3K$  de l'argument (Appell, 1922, §118, p. 173) et donc, vu que  $y(u)$  est proportionnel à  $\text{cn}(u)$  (cas 1, 2, 4) ou  $\text{sn}(u)$  (cas 3), on obtient les sommets situées dans le plan de symétrie pour  $u = 0$  et  $u = 2K$  pour le cas 3 et pour  $u = K$  et  $u = 3K$  pour les trois autres cas.

On voit donc que les équations algébriques de la courbe donnée comme intersection des surfaces  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$  ne permettent pas d'en séparer les deux boucles. Les coordonnées bipolaires utilisées au chapitre 2 permettent elles de séparer les deux boucles, mais ne permettent pas de séparer les deux côtés de la même boucle ce que permet l'argument de la fonction elliptique. Ce point est évidemment essentiel pour la programmation de l'algorithme puisqu'une arête n'est qu'une partie arbitraire de la boucle.

### 11.4.8 Le calcul des points sextuples

On aborde maintenant le calcul des points sextuples suivant la méthode définie par le corollaire 7. Puisque l'on dispose des équations  $\overrightarrow{OM}(u)$  la solution la plus directe paraît être de calculer les tangentes à la courbe  $\overrightarrow{OM}(u) + \lambda \frac{d\overrightarrow{M}}{du}(u)$  et de chercher les valeurs de  $u$  pour lesquelles cette tangente touche l'axe du balayage auxiliaire. Cette solution a de plus l'avantage de permettre de tracer directement les figures avec un logiciel comme Mathematica. À l'usage elle présente l'inconvénient d'obliger à résoudre des équations transcendantes pour lesquelles se sont posés des problèmes de stabilité numérique. Les résultats obtenus n'auraient sans doute pas permis de développer complètement l'algorithme.

En fait on va utiliser une méthode beaucoup plus simple basée sur le fait que le plan tangent à un cône est facile à calculer. De fait la tangente à la courbe est définie comme l'intersection de ces deux plans. Par ailleurs on a vu avec l'équation (11.1) que l'axe du balayage auxiliaire était donné par l'intersection de deux plans très faciles à obtenir. On voit donc (Corollaire 7) que lorsque la tangente est en un point sextuple ces quatre plans ont un point commun. Cette condition est très facile à vérifier par l'annulation du déterminant d'ordre quatre des coordonnées des quatre plans. Soit  $\Gamma, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  les trois cônes. Les deux plans qui définissent l'axe sont :

$$\mathcal{C}_1 - \Gamma(\alpha_1) ; \quad \mathcal{C}_2 - \Gamma(\alpha_2)$$

et les plans tangents à  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont obtenus en prenant la forme polaire de leur équation :

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= x \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{C}_1(x_0, y_0, z_0, w_0) + y \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{C}_1(x_0, y_0, z_0, w_0) + z \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{C}_1(x_0, y_0, z_0, w_0) + w \frac{\partial}{\partial w} \mathcal{C}_1(x_0, y_0, z_0, w_0); \\ \Pi_2 &= x \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{C}_2(x_0, y_0, z_0, w_0) + y \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{C}_2(x_0, y_0, z_0, w_0) + z \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{C}_2(x_0, y_0, z_0, w_0) + w \frac{\partial}{\partial w} \mathcal{C}_2(x_0, y_0, z_0, w_0). \end{aligned}$$

On calcule alors le déterminant  $|\mathcal{C}_1 - \Gamma(\alpha_1) \quad \mathcal{C}_2 - \Gamma(\alpha_2) \quad \Pi_1 \quad \Pi_2|$  et on y substitue les équations paramétriques en  $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ . Après élimination de  $\operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$  par élévarions au carré, le résultat est une équation algébrique du huitième degré en  $\operatorname{sn} u$  dont on ne retient que les points appartenant aux deux premiers cônes et au plan PC4 et parmi

ceux-ci on ne garde que deux solutions réelles qui correspondent aux deux angles au sommet extrêmes : l'un maximum donnant le début du tracé, l'autre minimum donnant la fin.

Il est probable que l'on puisse faire mieux puisque lorsque l'on regarde les figures on voit qu'il n'y a jamais que quatre points sextuples réels et donc les solutions sont toujours sous la forme de quatre solutions réelles plus deux paires de solutions imaginaires conjuguées.

## CHAPITRE XII

### ALGORITHME À BALAYAGE PAR CÔNE DE RÉVOLUTION

Avec les deux algorithmes vus jusqu'à présent, on avait le choix de l'interprétation géométrique : balayage par cercle ou balayage par demi-cône (dans la suite *cône* remplacera *demi-cône inférieur* lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté). Pour le premier algorithme cela n'apporte pas beaucoup, si ce n'est de pouvoir faire le parallèle avec le balayage par plan fait dans l'algorithme de Fortune, le plongement dans le plan projectif apporte beaucoup plus. Pour le second c'est déjà plus intéressant car la notion de volcan avec la discontinuité qu'introduit le cratère montre bien la marche à suivre pour développer et interpréter un algorithme satisfaisant. À partir des diagrammes de points composites, on tombe sur une nouvelle difficulté : on a vu que la distance au point ou même au cercle pondéré n'a pas d'interprétation satisfaisante dans  $\mathbb{R}^2$  car le cercle ne représente pas toute l'information pour définir le site et sa pondération. Balayer par cercle dans un tel cas suppose que la pondération du cercle de balayage soit bien définie en fonction de son rayon.

#### 12.1 LE CONCEPT DE BALAYAGE PAR CÔNE

Puisqu'en se plaçant dans  $\mathbb{R}^3$  on a une façon très simple d'interpréter les sites, leur pondération et la distance aux sites, on voit qu'il serait sans doute plus facile de définir l'algorithme directement dans  $\mathbb{R}^3$ .

En même temps on va essayer de garder les caractéristiques des algorithmes précédents :

- masquage naturel, car il donne une solution très élégante qu'il serait bon de conserver ;
- connexité du front d'onde, car la gestion d'un front d'onde non-connexe compliquerait singulièrement l'algorithme ;
- même nature des bissecteurs de type-1 et de type-2 pour obtenir des économies d'échelle lors de la programmation ;
- disparition simultanée du front d'onde et de la pile des événements à traiter, pour la même raison ;
- possibilité d'obtenir un diagramme de Voronoï partiel mais exact à tout instant du balayage, ce qui permet d'arrêter les calculs avant la fin tout en ayant un résultat exploitable.

Dans l'algorithme en contraction c'est la domination d'un site par un autre (un cercle inclus dans un autre) qui assure le masquage naturel des sites non encore découverts, l'extension de cette propriété au nouvel algorithme va se faire en utilisant la définition 3, p. 40.

La « philosophie » des diagrammes de Voronoï est que plus le site est important, plus son secteur de Voronoï est important. On a en plus choisi les pondérations pour obtenir le résultat visuel correspondant. Donc puisqu'à l'angle au sommet le plus élevé correspond la plus grande pondération composite, et puisque l'on veut un masquage naturel, on va au départ choisir le site de balayage comme site majoritaire (Définition 1, p. 38) des  $n + 1$  sites dominant tous les sites fixes et avec une pondération composite plus grande que toutes les autres. Le paramètre de balayage sera donc la valeur de l'angle au sommet de ce cône, de sommet fixe.

**Définition 25 (centre de balayage)** : *On appelle centre de balayage, dans  $\mathbb{R}^3$ , le sommet fixe du cône de balayage*

Le balayage s'effectuera en contraction. L'angle au sommet du cône de balayage se réduisant, le secteur de Voronoï de son site, correspondant au départ tout le plan et incluant la droite de l'infini, partagera ensuite cet espace avec le premier site rencontré

qui sera donc le site majoritaire des  $n$  sites fixes donnés.

On satisfait ainsi à la contrainte du masquage naturel et à la découverte progressive des sites, mais ce n'est pas la seule ; on veut aussi la connexité du front d'onde, or lorsque le cône de balayage se resserre pour découvrir un cône, le premier contact avec un cône-site fixe, hors les points cycliques du plan horizontal qui sont communs à tous les cônes, peut se faire, si l'on n'y prend pas garde, de deux manières : par le sommet ou à l'infini.

## 12.2 LES DEUX TYPES DE CONTACT

Le *contact* entre deux cônes a ici un double sens. D'une part il doit être pris ici au sens large de contact entre deux surfaces, c'est-à-dire qu'il y a contact entre deux cônes si les deux cônes ont un point commun multiple, sans qu'ils soient nécessairement tangents. D'autre part il doit être pris au sens courant de premier contact lorsque l'un des cônes dominant l'autre on réduit son angle au sommet de manière à avoir un point commun aux deux cônes : ce point est alors visible, fût-il à l'infini.

Plutôt qu'une longue explication, les deux figures (Fig. 12.1) montrent, grâce à une section des deux cônes dans le plan de leurs axes, les deux types de contact :

- le contact par le sommet, (Fig. 12.1 (a)) lorsque le sommet du demi-cône dominant ( $\mathcal{C}_1$ ) est extérieur au demi-cône supérieur du cône dominé ( $\mathcal{C}_2$ ). Dans ce cas, lorsque l'angle au sommet décroît, la génératrice du cône de balayage touche initialement le cône dominé par son sommet avec  $\theta > \varphi$ .
- le contact à l'infini (Fig. 12.1 (b)) lorsque le sommet  $C_1$  est intérieur au demi-cône supérieur de ( $\mathcal{C}_2$ ). Dans ce cas la génératrice du cône de balayage est parallèle à une génératrice du cône dominé et donc le contact initial se fait à l'infini avec  $\theta = \varphi$ .

On veut, ne serait-ce que pour simplifier, n'avoir qu'un seul type de contact. Entre les deux types possibles, le contact par le sommet présente un inconvénient majeur : on est alors certain que le front d'onde ne sera pas connexe puisque si la forêt de cônes est bien choisie, on aura au début du balayage un diagramme de Voronoï sans sommet (voir par

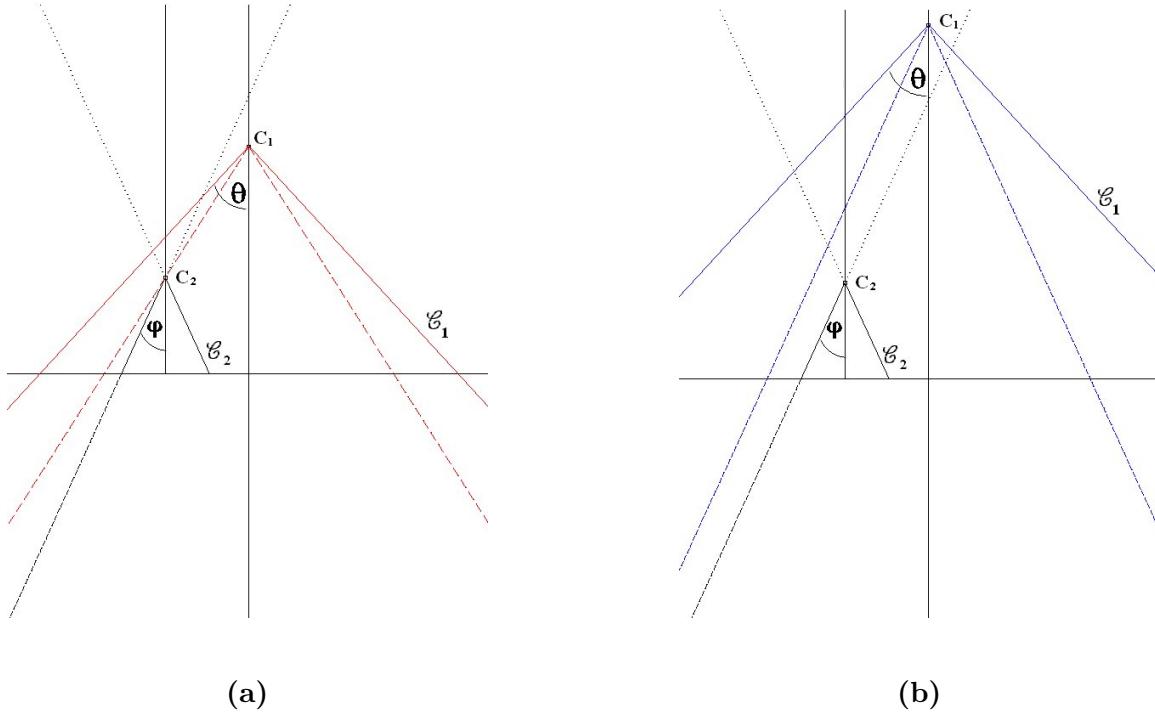


Figure 12.1

exemple la figure 6.4, p. 91). On démontrera plus loin que le contact à l'infini, lui assure la connexité du front d'onde.

**Théorème 25 :** *Une condition nécessaire et suffisante pour que le premier contact entre le cône de balayage et un cône-site soit un contact à l'infini est que le centre de balayage se trouve dans le demi-cône supérieur de ce cône site.*

*Démonstration :* Si tel est le cas lorsque  $\theta = \varphi$ , les deux cônes ont deux génératrices parallèles dans le plan de leur axe. Ces deux génératrices ont le point à l'infini dans cette direction commun. Si ce n'est pas le cas le premier contact se produit lorsque le sommet du second cône appartient au premier.  $\square$

### 12.3 LE CHOIX DU CENTRE DE BALAYAGE

Donc, comme dans les algorithmes précédents, le choix du centre de balayage, c'est-à-dire du sommet du cône de balayage n'est pas totalement arbitraire.

Pour obtenir que le premier contact entre le cône de balayage et les cône-sites soit toujours un contact à l'infini, le sommet du cône de balayage devra respecter la condition fixée par le théorème 25 vis-à-vis de chaque site, c'est-à-dire être dans l'intersection de tous les symétriques des demi-cônes sites par rapport à leur sommet.

On note que cette partie commune n'est jamais vide puisque les axes des cônes étant parallèles, ils ont le point à l'infini dans cette direction en commun et donc il suffit de prendre un point assez haut sur un axe vertical pour satisfaire cette condition.

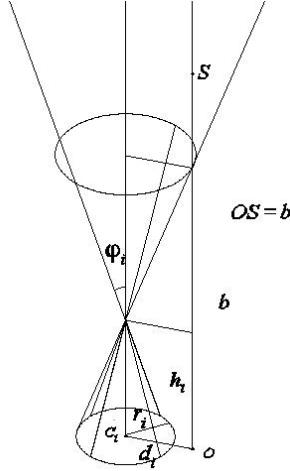
Le choix du centre de balayage se fait donc de la manière suivante :

- on trie les cône-sites par leur angle au sommet, ce qui nous donne le site majoritaire et son angle au sommet  $\varphi_M$  ;
- on travaille en coordonnées cylindriques et on choisit l'origine des coordonnées en la projection du sommet du cône majoritaire sur un plan horizontal tel que tous les sommets des cône-sites aient une cote positive par rapport à ce plan ;
- tout point de l'axe du cône majoritaire de cote supérieure à celle du sommet de ce cône remplit la condition pour le cône majoritaire ;
- on suppose que les cône-sites  $\mathcal{C}_i$  sont donnés par rapport à ce pôle avec leurs coordonnées  $(d_i, a_i, r_i, s_i, h_i, \varphi_i)$  dans lequel  $d_i$  est le rayon polaire du centre du cercle-site,  $a_i$  son angle polaire,  $r_i$  son rayon,  $s_i$  sa pondération et  $h_i$  la cote du sommet du cône-site et  $\phi_i$  son demi-angle au sommet (donc  $s_i = \tan \varphi_i = \frac{r_i}{h_i}$ ) ;
- Si  $b$  est la cote du centre de balayage cherché, il suffit alors de choisir (Fig. 12.2) :

$$b > h_i + d_i \cot \varphi_i \quad \forall i.$$

On a les deux remarques suivantes :

**Remarque 13 :** *Le choix du centre de balayage au point à l'infini de la verticale*



**Figure 12.2**

$(z = +\infty)$  n'est pas exclu a priori; cela donne un balayage par cylindre mais n'apporte pas d'avantage particulier à l'algorithme (on traite toujours une biquadratique) et a plutôt l'inconvénient de prévoir un cas spécial dans les calculs et dans la présentation de l'algorithme.

**Remarque 14 :** Le choix du centre de balayage au-dessus du sommet du cône majoritaire n'est pas fondamental pour l'algorithme mais le simplifie s'il n'y a pas d'empilement de cônes.

Enfin le coût de cette procédure est celui du tri initial en  $\mathcal{O}(n \log n)$ .

## 12.4 LE FONCTIONNEMENT AVEC DEUX SITES

Dans les explications qui vont suivre, on ne détaillera pas les parties de l'algorithme qui sont semblables aux algorithmes précédents (filtrage, arbre de recherche, etc ...) et on s'attardera au contraire sur ce qui les différencie.

On commence par essayer l'algorithme sur deux sites seulement, et dans ce cas on sait que l'on est dans le cas d'un diagramme sans sommet trivial puisqu'il n'y a qu'un

bissecteur. Mais l'absence de sommet permet de séparer les difficultés, la seule ici étant de tracer le bissecteur (cf. Définition 7.1.1, p. 97).

Le centre de balayage sera choisi dans les conditions fixées par le théorème 25, mais pas au-dessus du cône majoritaire de manière à pouvoir traiter simultanément le cas des empilements de cônes sur plusieurs niveaux.

Dans ce cas très simple l'algorithme aura quatre événements à traiter : le contact avec le premier site, qui est le site majoritaire, le contact avec le second, la découverte du bissecteur, et la fin de son traçage. On démarre avec, dans la file d'attente des événements, les demi-angles au sommet des deux cône-sites fixes triés par ordre décroissant, ces événements ayant été calculés lors de la recherche de la position du centre de balayage.

### **Étape initiale**

Au départ le cône de balayage  $\Gamma$  (bleu) est, provisoirement, majoritaire. Il domine tous les sites  $\mathcal{C}_1$  (vert),  $\mathcal{C}_2$  (violet) et son secteur de Voronoï est tout le plan (Fig. 12.3 (a)).

### **Contact avec le premier site**

L'angle au sommet se réduisant, il devient égal à celui du premier site, qui est le site majoritaire des sites fixes, et, puisque le sommet du cône  $\Gamma$  est choisi comme centre de balayage, le contact avec ce cône-site se fait à l'infini, le secteur de Voronoï du cône de balayage est inchangé (géométriquement, vu de dessus, on ne voit toujours qu'un cône  $\Gamma$ ) (Fig. 12.3 (b)).

### **Étape intermédiaire**

Le plan est séparé en deux secteurs de Voronoï, le site découvert est (re)devenu le site majoritaire, et son secteur de Voronoï est infini.

Le site de balayage dont l'angle au sommet est compris entre celui de  $\mathcal{C}_1$  et celui de  $\mathcal{C}_2$ , domine par contre le deuxième site fixe. Le diagramme de Voronoï ne comprend

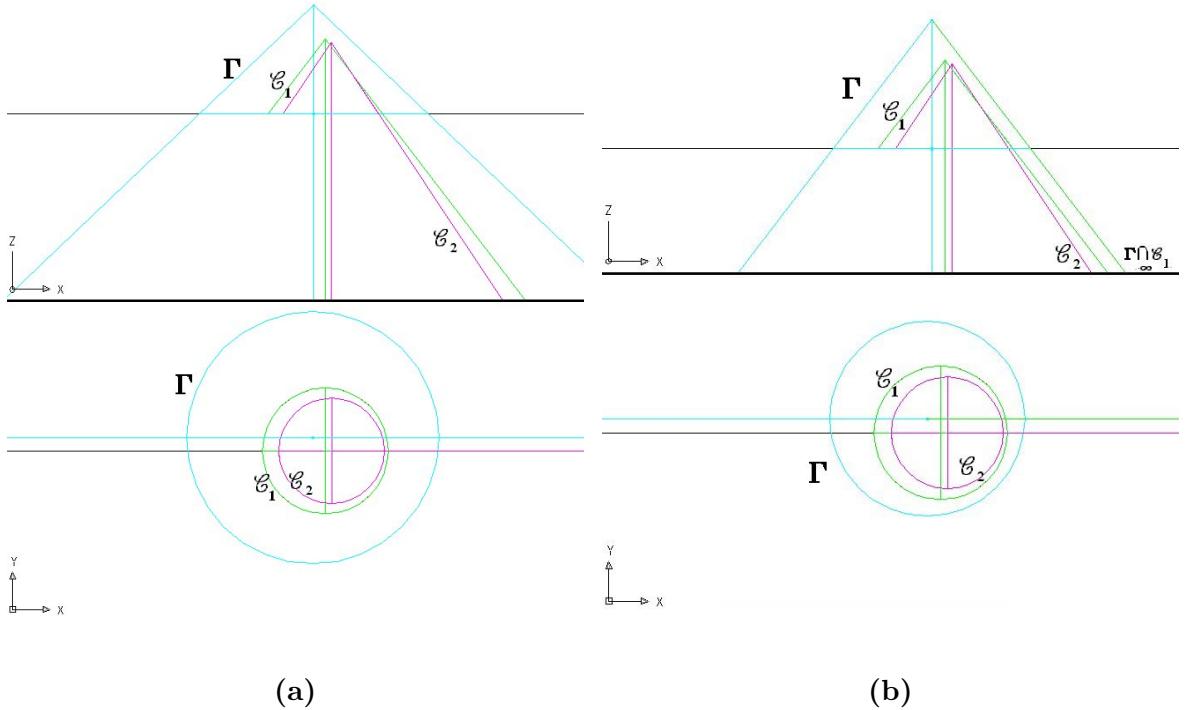


Figure 12.3

que deux sites : le site de balayage et le site majoritaire avec un ovale qui les sépare (géométriquement, vu de dessus, on voit deux demi-cones  $\Gamma$ ,  $\mathcal{C}_1$  et un ovale  $\Gamma \cap \mathcal{C}_1$ , c'est-à-dire la partie inférieure de la biquadratique d'intersection - Fig. 12.4). Sur la vue de dessus de la figure, le haut du cône de balayage a été supprimé pour que l'on voit le cône  $\mathcal{C}_2$ , mais ce cône reste invisible pour l'instant.

### Contact avec le second site

On touche le second site, toujours à l'infini. Géométriquement, il ne se passe rien, mais ce contact avec le second site permet de calculer un nouvel événement qui sera le nouveau point d'arrêt du balayage à partir duquel débutera le traçage du bissecteur. C'est le moment où le second site sera réellement découvert. Ce calcul se fait conformément au corollaire 7 et à la méthode exposée au paragraphe 11.4.8, p. 195. Les deux va-

leurs obtenues, correspondantes au début et à la fin du tracé du bissecteur, sont donc mises dans la liste des événements pour être traitée comme ***ENTREE\_SITE(2,1)*** et ***SORTIE\_SITE(2,1)***.

### Étape intermédiaire

Géométriquement, vu de dessus, le diagramme de Voronoï a toujours la même forme qu'aux deux étapes précédentes : on voit deux cônes  $\Gamma$ ,  $\mathcal{C}_1$  et un ovale  $\Gamma \cap \mathcal{C}_1$  (Fig. 12.5). Ce qui a changé, c'est que le cône de balayage a maintenant une intersection avec les deux cônes (ovales  $\Gamma \cap \mathcal{C}_1$  et  $\Gamma \cap \mathcal{C}_2$ ) et non avec un seul, mais les points d'intersection des trois cônes sont imaginaires. Sur la figure l'ovale  $\Gamma \cap \mathcal{C}_2$  (orange) est invisible car il se trouve sous le cône majoritaire (cf. Proposition 1, p. 40), et n'est donc pas visible en vue de dessus (la partie supérieure de  $\Gamma$  a encore été supprimée pour que l'on puisse voir  $\mathcal{C}_2$ ).

### Découverte du bissecteur

On traite le premier événement ***ENTREE\_SITE(2,1)***. À ce moment, on ne voit du cône  $\mathcal{C}_2$  qu'un point qui est son secteur de Voronoï. Les trois cônes ont une intersection qui est conforme à ce qui est décrit dans le paragraphe 11.3, p. 180 sur les intersections de trois cônes (trois biquadratiques et un cercle tangents à une même droite dans l'espace et donc trois ovales de Descartes et une ellipse tangente en un même point sur le plan horizontal) (Fig. 12.6).

Ajoutons que l'angle  $(\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oC_i})$  est l'angle polaire du contact à l'infini du cône de balayage avec le cône  $\mathcal{C}_i$  puisque ce contact a lieu dans le plan des axes.

Or, sur la projection horizontale de la figure, on remarque que l'angle  $(\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oS})$  est différent de l'angle  $(\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oC_2})$ . Ce ne serait pas le cas si le cône de balayage était au-dessus du cône majoritaire, car la figure aurait alors un plan de symétrie et on aurait :  $(\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oS}) = (\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oC_2})$  (il suffit en fait que les axes des trois cônes soient alignés pour obtenir ce résultat ; ici deux d'entre eux sont confondus). En fait cette différence angulaire

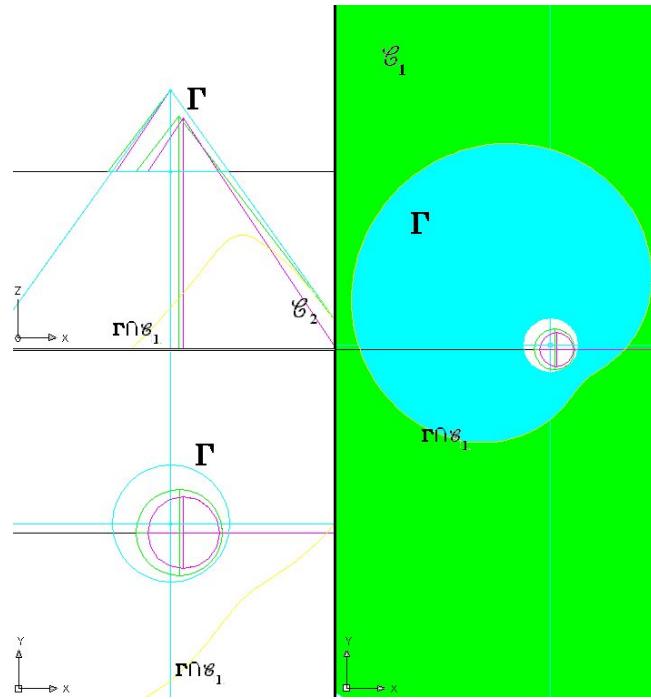


Figure 12.4

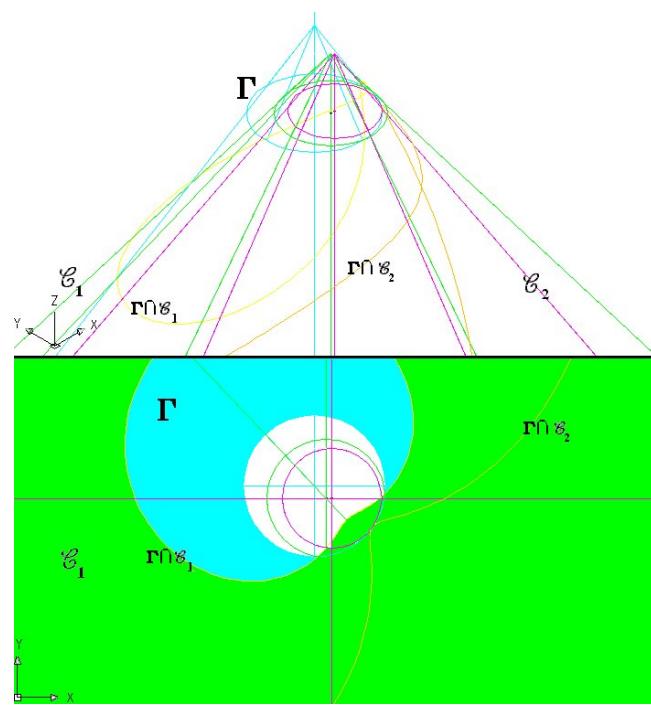


Figure 12.5

vient du retard entre la détection du cône-site et le début du tracé du bissecteur, d'où la définition suivante, le mot étant emprunté à la théorie du traitement du signal :

**Définition 26 (déphasage)** : *Quand on trace le bissecteur de deux cônes  $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j$  avec un cône de balayage,  $\mathcal{C}_i$  étant le cône majoritaire de ces deux cônes, on appelle déphasage la différence entre l'angle polaire du contact à l'infini du cône non-majoritaire,  $\mathcal{C}_j$ , et l'angle polaire du point sextuple.*

### Étape intermédiaire

Au cours de cette étape, on trace physiquement le bissecteur, et on se trouve dans la situation classique des algorithmes à balayage si ce n'est que l'on trace sur un cône plutôt que sur un plan (Fig. 12.7, le front d'onde est en trait plein sur la projection horizontale).

### Fin du tracé du bissecteur

On traite enfin **SORTIE\_SITE(2,1)**. Les trois cônes, à cette étape, n'ont plus qu'un point (double) commun et de nouveau toutes les courbes sont tangentes en ce point. On raccorde le bissecteur tracé pour en faire une courbe fermée.

### Étape finale. Disparition du site de balayage

Le front d'onde n'a plus de discontinuité, quand l'angle au sommet du cône de balayage est ramené à zéro, il ne reste qu'un point visible.

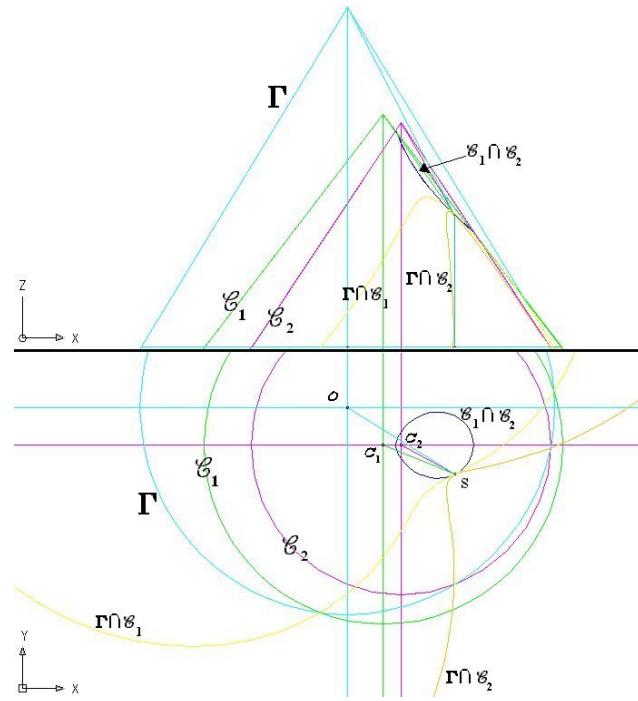


Figure 12.6

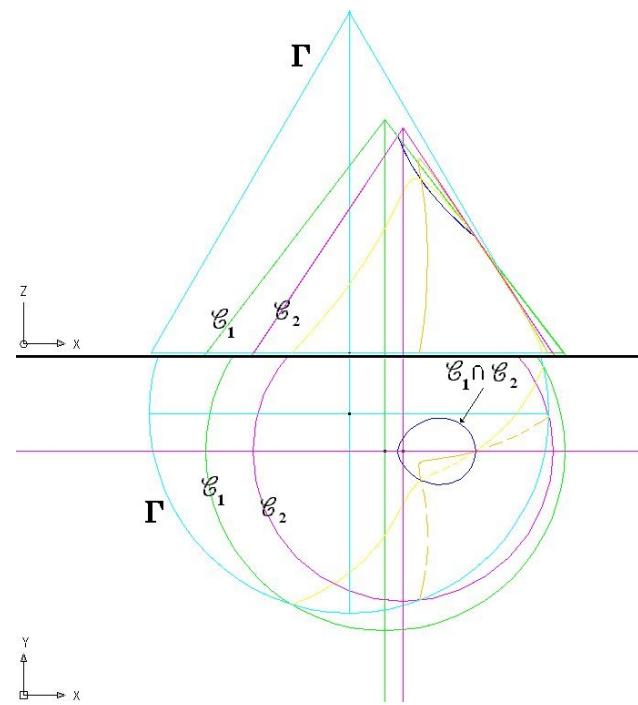


Figure 12.7

## Conclusion

La conclusion provisoire de cette première partie, très simple, est que l'on peut essayer de développer le concept de balayage par cône, avec masquage naturel de sites non encore découverts, au prix d'une dissociation des événements "découverte du site" et "début et fin de tracé du bissecteur". On voit que lorsque l'on trace le bissecteur de deux cônes ceux-ci sont découverts dans l'ordre de leur angle au sommet, le plus grand puis le plus petit et que le contact à l'infini est utilisé comme un événement permettant la détermination du début et de la fin du tracé qui *n'utilise pas* le système de filtrage du front d'onde.

Les difficultés commencent avec trois cône-sites.

### 12.5 LE FONCTIONNEMENT AVEC TROIS SITES

Le but de ce paragraphe n'est pas de refaire un balayage complet mais de montrer de nouvelles dissemblances avec un algorithme à balayage conventionnel dans  $\mathbb{R}^2$ .

Si trois cône-sites sont donnés, on va les trier par angle au sommet, déterminer le cône majoritaire (supposons :  $\widehat{\mathcal{C}}_1 > \widehat{\mathcal{C}}_2 > \widehat{\mathcal{C}}_3$  où  $\widehat{\mathcal{C}}_i$  désigne le demi-angle au sommet du cône  $\mathcal{C}_i$ ), trouver la position du centre de balayage, ici sur l'axe du cône majoritaire, enfin initialiser la pile des événements avec les trois demi-angles au sommet pour obtenir le contact à l'infini entre le cône de balayage et les cône-sites. Les deux premiers contacts à l'infini se déroulent comme précédemment. Le troisième sera traité à son tour parmi les événements ***ENTREE\_SITE(2,1)*** et ***SORTIE\_SITE(2,1)***. Bien sûr si l'on a terminé de tracer le bissecteur  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$  avant d'avoir le contact à l'infini avec le troisième site, il n'y a pas de problème ; il n'y en a pas non plus si l'angle de balayage au moment du début du tracé du bissecteur  $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$  est plus petit que l'angle de balayage au moment de la fin du tracé du bissecteur  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ . Enfin il n'y en a pas si l'événement ***ENTREE\_SITE(3,1)***, déterminé après contact à l'infini est visible, c'est-à-dire s'il n'est pas masqué par  $\mathcal{C}_2$  (ici c'est bien sûr le seul cas possible). Dans ce cas on aura,

sur le cône  $\mathcal{C}_1$ , une suite d'événements identiques à ce qu'on obtient lors d'un balayage dans  $\mathbb{R}^2$  puisque le front d'onde aura la forme  $\{\mathcal{O}_{\Gamma\mathcal{C}_1}, \mathcal{O}_{\Gamma\mathcal{C}_2}, \mathcal{O}_{\Gamma\mathcal{C}_3}\}$ , ce qui permet après filtrage de déterminer un éventuel point commun  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$  (Fig. 12.8).

### 12.5.1 Domination absolue

De fait après la découverte d'un cône-site  $\mathcal{C}_i$  qui se passe à l'infini, on a vu qu'il était inutile de tracer le bissecteur  $\mathcal{O}_{\Gamma\mathcal{C}_i}$  tant qu'il était invisible. Or si le site est absolument dominé (Définition 4, p. 40), il n'a pas de secteur de Voronoï. Cette domination peut se déterminer dès le contact à l'infini grâce au test du paragraphe 11.4.1 sur les positions relatives de deux cônes, ici sur le cône majoritaire et le cône  $\mathcal{C}_i$ . Si le résultat du test donne le cas 5 ou 6, le site est directement éliminé.

### 12.5.2 Suite du contact à l'infini

S'il n'y a pas de domination absolue, sans autre information sur le futur du front d'onde, on est malgré tout certain que tant que le site n'est pas au-dessus du cône majoritaire, il ne se passera rien et on peut donc programmer le premier événement où interviendra le site  $\mathcal{C}_i$  comme étant ***ENTREE\_SITE(i,1)*** (cf. Remarque 1, p. 40). Le problème qui se pose est donc de savoir comment traiter un événement ***ENTREE\_SITE(j,i)*** qui serait masqué par un autre cône, et bien sûr de voir d'abord comment on détermine ce masquage. C'est le cas de la figure 12.9 où l'événement ***ENTREE\_SITE(3,1)*** est masqué par  $\mathcal{C}_2$  et est en fait remplacé par l'événement ***ENTREE\_SITE(3,2)***.

Ceci justifie donc l'étude des théorèmes qui vont suivre.

## 12.6 THÉORÈMES POUR LES ÉVÉNEMENTS MASQUÉS

**Lemme 2 (lemme de visibilité) :** *Tout point  $M$  du cône de balayage  $\Gamma$  n'appartenant pas au secteur de Voronoï du cône-site  $\Gamma$  est masqué par le cône du front d'onde intercepté par la génératrice de  $\Gamma$  passant par  $M$ .*

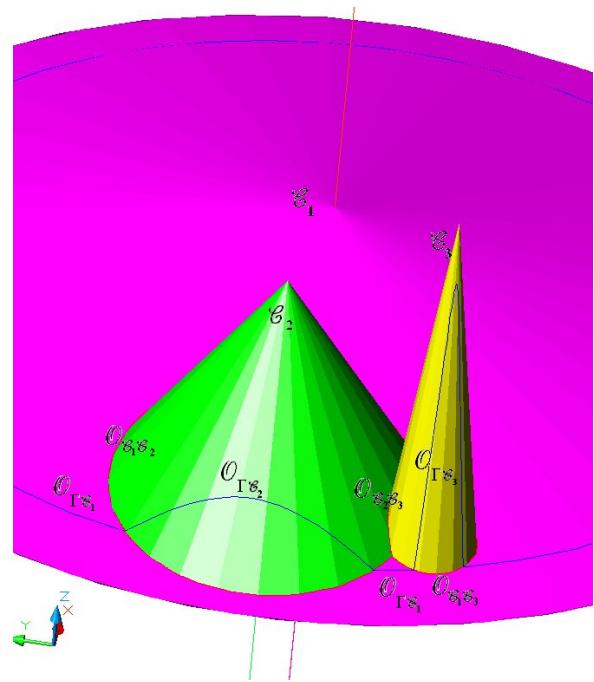


Figure 12.8

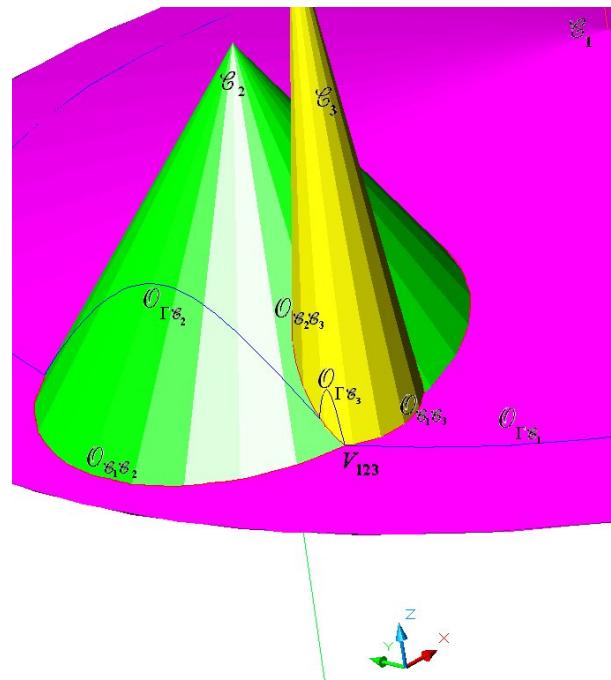


Figure 12.9

*Démonstration :* On considère une droite quelconque issue du sommet de  $\Gamma$ . Elle coupe tous les cônes contenant les demi-cône-sites en deux points puisque ce sont des quadriques. Mais comme le sommet de  $\Gamma$  a été choisi à l'intérieur des demi-cônes supérieurs des cône-sites (Théorème 25), cette droite n'a au plus qu'une seule intersection avec les demi-cônes inférieurs. Cette intersection détermine deux demi-droites dont l'une, contenant le centre de balayage est visible et l'autre est masquée. Or comme le secteur de Voronoï de n'importe lequel des cône-sites, incluant  $\Gamma$ , est leur partie visible (Théorème 1, p. 35), toute partie d'une demi-génératrice issue du sommet de  $\Gamma$ , visible, appartient au secteur de Voronoï de  $\Gamma$  tandis que toute partie invisible n'y appartient pas et peut être masquée par plusieurs cône-sites, mais l'est à coup sûr par le cône-site intercepté par la génératrice.  $\square$

**Corollaire 10 :** *Le secteur de Voronoï du cône balayage et le front d'onde sont connexes.*

Le secteur de Voronoï de  $\Gamma$ , uniquement formé de segments de droites issues du sommet de  $\Gamma$ , est donc connexe, et le front d'onde qui est sa frontière l'est aussi. On justifie ainsi le choix fait pour le centre de balayage, puisque sans la condition fixée par le théorème 25, p. 200, on n'a pas nécessairement un secteur de Voronoï connexe pour les cône-sites (c'est le cas du site correspondant au cône  $\mathcal{C}_2$ , en vert foncé, sur la figure 12.18, p. 236).

### 12.6.1 Détermination du masquage d'un événement

Lorsque l'on met un événement en file d'attente, on ne sait pas si cet événement aura réellement lieu, puisque la prévision est basée sur le front d'onde et que ce front d'onde peut être modifié avant que le paramètre de balayage ait la valeur prévue pour cet événement. Dans les algorithmes précédents on considérait cette prévision comme une fausse alarme et on l'éliminait simplement. Dans d'autres circonstances c'était possible car tous les événements étaient dans le même plan ; ici ce n'est pas le cas et d'ailleurs, le seul contact à l'infini qui ne soit pas masqué est celui du cône majoritaire. Il va falloir tenir compte de l'information apportée par un événement, même s'il est masqué.

Supposons que l'on ait prévu un événement  $\text{ENTREE\_SITE}(j,i)$  pour une valeur donnée du paramètre de balayage. La première chose à faire lorsque le cône de balayage atteint cette valeur est de vérifier qu'un nouveau site découvert entre-temps n'est pas venu masquer cet événement. La procédure à suivre est de fait suggérée par le lemme : si l'événement prévu prévoit que l'on va débuter le tracé du bissecteur  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_i \mathcal{C}_j}$  du cône  $\mathcal{C}_i$  sur le cône  $\mathcal{C}_j$ , il suffit de vérifier que, pour l'angle polaire prévu pour l'événement, la feuille interceptée de l'arbre binaire du front d'onde est bien celle du cône  $\mathcal{C}_j$ . Si c'est le cas, cela signifie que l'événement dont les coordonnées ont été calculées est bien sur le front d'onde, et comme par construction le front d'onde est visible, on peut traiter l'événement comme prévu. Si maintenant la feuille de l'arbre interceptée est celle d'un autre cône-site,  $\mathcal{C}_k$ , c'est que sur la génératrice issue du sommet de  $\Gamma$  l'événement se trouve plus loin du sommet que l'intersection de cette génératrice avec le site  $\mathcal{C}_k$  et donc d'après le lemme le cône  $\mathcal{C}_k$  masque l'événement.

### 12.6.2 Traitement du masquage d'un événement d'entrée de site

Si le test d'appartenance au front d'onde d'un événement  $\text{ENTREE\_SITE}(j,i)$  est négatif, il faut alors déterminer la procédure à suivre. Grâce au test et au lemme de visibilité (Lemme 2) on sait non seulement que l'événement n'est pas sur le front d'onde, mais encore, on sait quel est le cône qui masque l'événement. On commence donc par vérifier que le cône  $\mathcal{C}_j$  n'est pas dominé par le cône  $\mathcal{C}_k$ . S'il l'était le site pourrait être éliminé puisqu'alors on est certain qu'il ne peut être visible. S'il ne l'est pas, il a alors une intersection avec  $\mathcal{C}_k$  et donc il existe deux événements  $\text{ENTREE\_SITE}(j,k)$  et  $\text{SORTIE\_SITE}(j,k)$  que l'on peut calculer.

Ces événements donnent lieu bien sûr à élimination s'ils sont mort-nés (Définition 7.5.5, p. 107). Évidemment  $\text{SORTIE\_SITE}(j,k)$  ne peut l'être mais, à cause du déphasage,  $\text{ENTREE\_SITE}(j,k)$  peut et on constate alors un problème nouveau : si l'événement entrée de site est déjà passé peut-on continuer l'algorithme puisque si le cône a une partie visible il va bien falloir démarrer le tracé des bissecteurs quelque part.

Heureusement, même lorsqu'on les traces en plusieurs morceaux, les arêtes du diagramme définitif ne peuvent démarrer ex-nihilo. Elles ne peuvent que démarrer sur un sommet et arriver sur un sommet ou former une boucle indépendante et dans ce cas être tracé à partir d'un événement d'entrée de sites et se terminer sur une sortie de site. Dans le cas d'un empilement de cônes (Fig. 12.10) par exemple dans un diagramme sans sommet, il n'y aurait pas d'intersection. Un dernier cas, exclu par la position générale des cônes, est une combinaison des deux si l'un des cônes a un secteur de Voronoï réduit à un segment de droite, c'est-à-dire qu'il a une génératrice commune avec un autre cône. Bien entendu même dans ce cas une arête n'aurait pas d'extrémité libre.

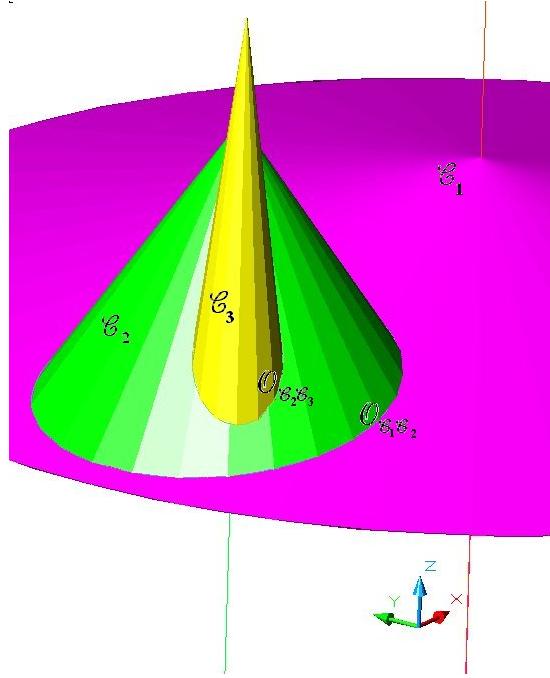
Si donc on ne peut commencer le tracé d'une arête sur un événement entrée de site, il faut la commencer sur un événement sommet. On a la propriété suivante :

**Proposition 5** : *Si un événement entrée de site n'est pas visible, alors qu'une partie de l'arête l'est, au moment de la traversée de la surface composite, il y a un événement sommet.*

*Démonstration* : Soit  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_j \mathcal{C}_k}$  le bissecteur partiellement visible. C'est une courbe fermée continue et donc s'il est masqué sur une partie de sa longueur, c'est par un autre cône  $\mathcal{C}_i$ . Les trois cônes ont donc au moins un point commun au moment de la traversée de la surface composite formée par la forêt de cônes.  $\square$

En application de cette propriété, il nous reste le fait que si  $\mathcal{C}_j$  a une intersection avec le premier site  $\mathcal{C}_i$ , il en a aussi une avec  $\mathcal{C}_k$ . On va donc calculer les événements sommets  $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j \cap \mathcal{C}_k$  et les ajouter à la liste des événements à traiter, mais le sommet correspondant à cet arête va nécessiter un traitement particulier.

Notons que quelle que soit la manière dont on commence le tracé d'une arête, entrée de site ou événement sommet, la fin de son tracé est soit un événement sommet soit une sortie de site. L'événement sommet est donné par le filtrage du front d'onde. À l'exception du cas du site majoritaire, l'événement sortie de site (**SORTIE\_SITE(j,k)**) n'est rajouté à la liste des événements à traiter que lors du début du tracé de l'arête



**Figure 12.10**

car il est inutile de le rajouter tant que l'on n'est pas certain que l'arête est visible. Un nouveau cône, non encore découvert, peut très bien venir masquer cet événement. De plus, comme les autres événements, il est lié par un pointeur à l'arête avec laquelle il a pris naissance et disparaît avec elle, donc il n'y a pas de sorties de site qui soient masquées.

### 12.6.3 Événement sommet de type 1-2

Dans les événements sommets (sommets Casey, mais aussi ceux de l'algorithme de Fortune) rencontrés jusqu'à présent on avait par définition, pour un sommet  $V_{i,j,k}$ , la fin de deux arêtes  $B_{C_i C_j}$  et  $B_{C_j C_k}$  et le début d'une nouvelle  $B_{C_i C_k}$ . Dans l'algorithme à balayage par cône ce type d'événement continue à se produire puisqu'il est la conséquence directe du filtrage du front d'onde. Cependant, lorsque des événements ne sont pas sur le front d'onde les choses se passent différemment.

Supposons comme précédemment que l'événement  $\text{ENTREE\_SITE}(j,i)$  ne soit pas sur le front d'onde et soit masqué par le cône  $\mathcal{C}_k$ , avec l'événement  $\text{ENTREE\_SITE}(j,k)$  mort-né. C'est l'événement  $\text{ÉVÉNEMENT\_SOMMET}(i,j,k)$  qui est introduit dans la liste des événements à traiter. L'événement sommet  $(j,k,i)$  va donc se produire avant que l'on ait commencé à tracer les arêtes  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_i \mathcal{C}_j}$  et  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_j \mathcal{C}_k}$ , donc, puisqu'il y a trois arêtes pour un sommet, le front d'onde aura nécessairement la forme  $\{\dots, \mathcal{O}_{\Gamma \mathcal{C}_j}, \mathcal{O}_{\Gamma \mathcal{C}_k}, \dots\}$  avant d'arriver sur le sommet qui sera d'une certaine manière abordé à l'envers.

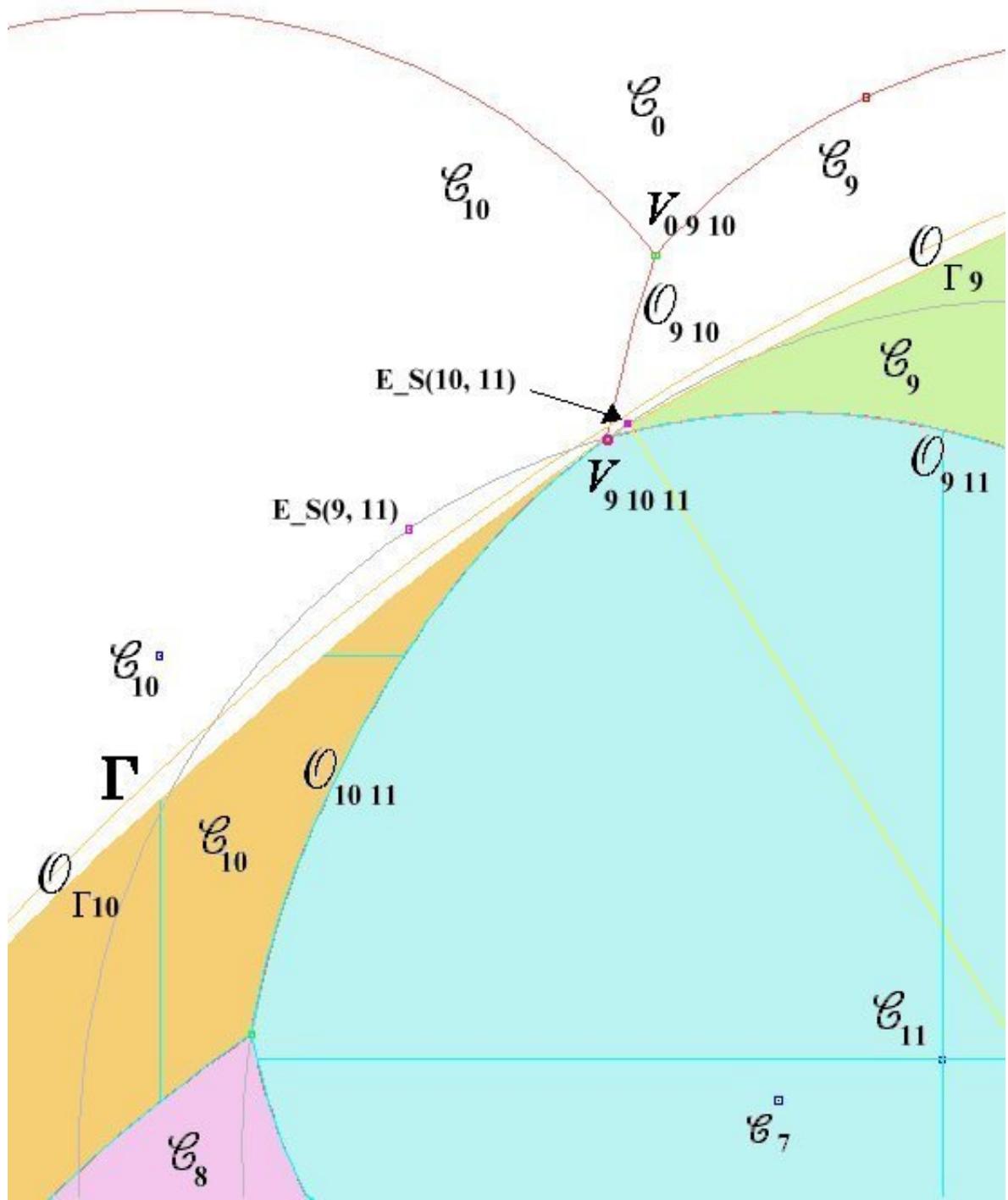
Par opposition à un événement sommet ordinaire noté 2-1, on donne la définition suivante :

**Définition 27 (Événement sommet de type 1-2) :** *On appelle événement sommet de type 1-2 un événement sommet dans lequel une arête se termine et deux commencent.*

La détection d'un tel événement ne pose pas de problème puisque dans cet algorithme, il n'y a pas à proprement parler de fausse-alarme ; si un événement intersection de trois cônes est sur le front d'onde, donc visible, c'est bien un sommet. Dans ce cas si *lors du traitement d'un événement appartenant au front d'onde* on détecte une arête de longueur nulle, on a affaire à un événement sommet de type 2-1, sinon c'est un événement de type 1-2.

Ici les figures sont plus difficiles à suivre car les événements sous le front d'onde ne sont pas visibles, mais plusieurs exemples sont donnés dans le fichier qui contient les résultats chiffrés. On peut par exemple regarder sur ce fichier<sup>1</sup> les pas n°24 qui traite  $\text{ENTREE\_SITE}(11,10)$  et n°25 qui traite  $\text{ÉVÉNEMENT\_SOMMET}(9,10,11)$ . Ils correspondent à la figure 12.11. Sur cette figure les arêtes déjà connues sont en rouge, les parties des sites  $\mathcal{C}_9, \mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{11}$  non encore balayés sont coloriés.  $\text{ENTREE\_SITE}(11,10)$  est sur  $\mathcal{O}_{10 \ 11}$ , mais sous  $\mathcal{O}_{\Gamma 9}$ , le calcul de  $\text{ENTREE\_SITE}(9,10)$  donne une valeur sur  $\mathcal{O}_{9 \ 11}$  déjà dépassée, on calcule donc  $V_{9 \ 10 \ 11}$  (très proche en fait) qui sera un évé-

<sup>1</sup>Il s'agit du fichier "algobacon.pdf" sur le CD-ROM. Le traitement de ce pas se trouve en p. 67 du fichier. Le pas n°25 se trouve aussi sur la figure 12.12, p. 219.



**Figure 12.11**

nement de type 2-1. Sur la même figure, à la fin du calcul on constatera que le site  $\mathcal{C}_7$  est masqué (Définition 5, p. 40).  $\mathcal{C}_0$  est le site majoritaire.

La structure du front d'onde après l'événement fait alors apparaître une arête nouvelle de longueur nulle. Sur la figure 12.12<sup>2</sup>, correspondant à l'événement de la figure 12.11, le point de rebroussement n°5 après la contraction du cône de balayage est transformé en deux points de rebroussement de même angle polaire (colonne  $\theta$ ), donc l'arête entre les deux a bien une longueur nulle. Le front d'onde qui se lit verticalement sur la colonne  $fw$  est de la forme :  $\{\dots, 1, 9, 10, 1, \dots\}$  avant l'événement, après celui-ci il est de la forme  $\{\dots, 1, 9, 11, 10, 1, \dots\}$ .

C'est une situation exactement inverse à celle de l'événement de type 2-1. Sur la figure suivante 12.13, on a l'événement sommet  $V_{0,9,10}$  de la même figure 12.11 qui est un événement 2-1, après la contraction, les points de rebroussement 4 et 5 du front d'onde ont le même angle polaire, l'arête entre les deux a bien une longueur nulle. Après l'événement sommet, il reste un seul point de rebroussement ayant cet angle polaire. Le front d'onde avant l'événement est :  $\{\dots, 0, 9, 0, 10, 1, \dots\}$  et après il est de la forme  $\{\dots, 0, 9, 10, 1, \dots\}$

#### 12.6.4 Traitement du masquage d'un événement sommet

Sur les mêmes principes, on traite le cas d'un événement sommet masqué.

On a la propriété élémentaire suivante :

**Proposition 6** : *Lorsque trois demi-cônes inférieurs ont des points d'intersection réels, deux ou quatre, ils sont tous visibles.*

*Démonstration* : Si on se limite à deux des cônes, par exemple  $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j$ , leur biquadratique d'intersection,  $\mathcal{O}_{i,j}$ , est visible dans sa totalité. Si on rajoute le troisième cône, qu'il ait

<sup>2</sup>Seules les colonnes utiles sont imprimées, si l'on veut voir la totalité des informations disponibles, il faut se reporter au fichier "algobacon.pdf".

Traitemet du Pas n°: 25 ; cônes : (11,9,10) ; type d'événement: (3,2)

évenement traité : (61, 2.13702, -4359.26, 6857.85, -171547., 0.047334, 11, 9, 10, 3, 2, -0.473501, 5.23484)

angle de balayage : 0.047334rd = 2.71204°

ik : 7 pas n°: 25 – front d'onde après contraction :

evnt	$\theta$	x	y	z	$\phi$	fw	c2	c3	ty	pe	arg1	arg2	
1	19	0.258355	7867.52	2079.08	-171790.	0.047334	12	0	15	1	-0.909079	4.53026	
2	19	1.34273	1839.89	7926.87	-171790.	0.047334	0	12	15	1	4.53026	-0.909079	
3	52	1.83524	-2126.93	7854.72	-171790.	0.047334	1	0	15	3	1	-0.282263	3.43723
4	52	1.85605	-2289.94	7808.68	-171789.	0.047334	9	1	15	3	0	4.19133	-0.806185
5	47	2.13702	-4359.26	6857.85	-171547.	0.047334	10	9	15	3	1	-0.598349	3.63732
6	41	2.48828	-6460.28	4945.01	-171748.	0.047334	1	10	15	3	0	1.32643	-1.50681
7	15	4.44795	-2126.93	-7854.72	-171790.	0.047334	0	1	15	1	1	3.43723	-0.282263

front d'onde : 12 0 1 9 10 1 0  
0.258355 1.34273 1.83524 1.85605 2.13702 2.48828 4.44795

évenement sommet de type 1–2 :

arêtes du front d'onde : 10 ; 9

arête nouvelle evt(1,7) : 11

pas n°: 25 – front d'onde après événement sommet – modification : 1

----->

evnt	$\theta$	x	y	z	$\phi$	fw	c2	c3	ty	pe	arg1	arg2	
1	19	0.258355	7867.52	2079.08	-171790.	0.047334	12	0	15	1	-0.909079	4.53026	
2	19	1.34273	1839.89	7926.87	-171790.	0.047334	0	12	15	1	4.53026	-0.909079	
3	52	1.83524	-2126.93	7854.72	-171790.	0.047334	1	0	15	3	1	-0.282263	3.43723
4	52	1.85605	-2289.94	7808.68	-171789.	0.047334	9	1	15	3	0	4.19133	-0.806185
5	61	2.13702	-4359.26	6857.85	-171547.	0.047334	11	9	15	3	1	-0.473501	-1.00206
6	61	2.13702	-4359.26	6857.85	-171547.	0.047334	10	11	15	3	0	3.4963	3.61207
7	41	2.48828	-6460.28	4945.01	-171748.	0.047334	1	10	15	3	0	1.32643	-1.50681
8	15	4.44795	-2126.93	-7854.72	-171790.	0.047334	0	1	15	1	1	3.43723	-0.282263

Figure 12.12

Traitemet du Pas n°: 20 ; cônes : (0,9,10) ; type d'événement : (3,1)

événement traité : (47, 2.09385, -4232.43, 7340.02, -171793., 0.0492801, 0, 9, 10, 3, 1, -1.27684, -0.0738099)

angle de balayage : 0.0492801rd = 2.82354°

ik +1= 5

ik : 7 pas n°: 20 – front d'onde après contraction :

evnt	$\theta$	x	y	z	$\phi$	fw	c2	c3	ty	pe	arg1	arg2
1	19	0.295983	8104.43	2471.37	-171793.	0.0492801	12	0	15	1	-0.989816	4.61099
2	19	1.3051	2224.83	8175.55	-171793.	0.0492801	0	12	15	1	4.61099	-0.989816
3	31	1.93215	-2995.5	7925.68	-171793.	0.0492801	9	0	15	1	4.4696	-1.27684
4	31	2.09385	-4232.43	7340.02	-171793.	0.0492801	0	9	15	1	-1.27684	4.4696
5	23	2.09385	-4232.43	7340.02	-171793.	0.0492801	10	0	15	1	3.3125	-0.143293
6	41	2.49107	-6741.71	5130.66	-171775.	0.0492801	1	10	15	3	0	1.53513
7	15	4.10602	-4828.56	-6962.36	-171793.	0.0492801	0	1	15	1	1	3.77915

front d'onde : 12 0 9 0 10 1 0  
0.295983 1.3051 1.93215 2.09385 2.09385 2.49107 4.10602

événement sommet de type 2-1 ;

arêtes supprimées :

{31, 2.09385, -4232.43, 7340.02, -171793., 0.0492801, 0, 9, 15, 1, 1, -1.27684, 4.4696, 1.59638, 10};  
{23, 2.09385, -4232.43, 7340.02, -171793., 0.0492801, 10, 0, 15, 1, 1, 3.3125, -0.143293, 1.5846, 6}

arête créée :

evt(1) {47, 2.09385, -4232.43, 7340.02, -171793., 0.0492801, 10, 9, 15, 3, 1, -0.990281, 3.7402, 1.59592, 19}

pas n°: 20 – front d'onde après événement sommet – modification : - 1 ----->

evnt	$\theta$	x	y	z	$\phi$	fw	c2	c3	ty	pe	arg1	arg2
1	19	0.295983	8104.43	2471.37	-171793.	0.0492801	12	0	15	1	-0.989816	4.61099
2	19	1.3051	2224.83	8175.55	-171793.	0.0492801	0	12	15	1	4.61099	-0.989816
3	31	1.93215	-2995.5	7925.68	-171793.	0.0492801	9	0	15	1	4.4696	-1.27684
4	47	2.09385	-4232.43	7340.02	-171793.	0.0492801	10	9	15	3	1	-0.990281
5	41	2.49107	-6741.71	5130.66	-171775.	0.0492801	1	10	15	3	0	1.53513
6	15	4.10602	-4828.56	-6962.36	-171793.	0.0492801	0	1	15	1	1	3.77915

Figure 12.13

deux ou quatre points d'intersection avec les deux premiers, ces points sont sur  $\mathcal{O}_{i,j}$ , donc visibles.  $\square$

**Proposition 7** Soit un événement sommet  $V_{\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j, \mathcal{C}_k}$ , intersection des trois cônes  $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j, \mathcal{C}_k$  masqué par un cône du front d'onde  $\mathcal{C}_l$ . Si au moins deux de ces trois cônes ne sont pas dominés par le cône masquant du front d'onde  $\mathcal{C}_l$ , ils définissent avec lui de nouveaux événements sommets. Si aucun des trois cônes n'est masqué ces événements sont :  $V_{\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j, \mathcal{C}_l}, V_{\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_l, \mathcal{C}_k}, V_{\mathcal{C}_l, \mathcal{C}_j, \mathcal{C}_k}$ .

*Démonstration :* Supposons que l'un de ces points soit masqué par un quatrième cône  $\mathcal{C}_l$ .

Si  $\mathcal{C}_l$  domine les trois cônes, on ne voit plus qu'un cône donc il n'y a plus de sommet à considérer. S'il en domine deux, il n'en reste que deux visibles, donc une seule biquadratique d'intersection et pas de sommet. S'il ne domine ni  $\mathcal{C}_i$  ni  $\mathcal{C}_j$ , alors il a des points d'intersections réels avec ces deux cônes et ces points sont visibles d'après ce qui précède.  $\square$

On voit que lorsqu'un événement sommet est programmé c'est parce qu'il est visible. Donc les deux arêtes qui doivent se terminer sont visibles et les trois cônes qui les supportent aussi. Si un nouveau cône vient les masquer, le bissecteur qui supporte les arêtes doit traverser la surface composite de la forêt de cônes, ce qui ne peut se faire qu'au prix d'événements sommets.

En ce qui concerne la domination, il n'est pas nécessaire de la tester directement. Le calcul des points d'intersection suppose le calcul préalable du paramètre de la fonction elliptique  $m$  qui correspond à l'un des 6 cas possibles des positions relatives de deux cônes. La domination s'en suit directement.

En tout état de cause on élimine toujours de la liste des événements à traiter ceux qui sont mort-nés, mais aussi les événements sommets qui sont sous le cône majoritaire car on sait que sur les bissecteurs qui les supportent il y aura un événement sommet au plus

tard à la traversée de ce cône.

Le test pour vérifier qu'un événement sommet se trouve sous le cône majoritaire d'équation  $\mathcal{C}_m(M)$ , de sommet  $C_m$  est positif lorsque l'événement sommet  $S(x_s, y_s, z_s)$  satisfait :

$$\mathcal{C}_m(S) < 0 \quad \wedge \quad z_s < z_{C_m}.$$

## 12.7 SUIVI DES EXTRÉMITÉS DES ARÈTES

Il reste un dernier point à préciser avant de donner le pseudo-code de l'algorithme qui est celui du suivi des extrémités des arêtes du diagramme. Le problème se pose parce que les bissecteurs supportant les arêtes sont des courbes fermées. Lorsque l'on commence une arête par un événement sommet, ce sont les coordonnées du sommet qui sont connues, mais on en déduit ensuite les arguments des fonctions elliptiques correspondants aux deux nouveaux arcs créés. Lorsque l'on calcule les nouvelles valeurs des points de rebroussement du front d'onde après la contraction, on obtient de nouvelles valeurs pour l'argument de la fonction elliptique, et il faut choisir celle qui correspond à l'arête du diagramme définitif que l'on a tracé.

Avant d'exposer la méthode il faut démontrer une propriété annoncée précédemment concernant le nombre de points d'intersection de la biquadratique avec un plan.

**Lemme 3 :** *Lorsque le sommet du cône de balayage vérifie les conditions du théorème 25, c'est-à-dire se trouve à l'intérieur des demi-cônes supérieurs, ce demi-cône et les deux demi-cônes inférieurs fixes n'ont que deux points d'intersection au plus.*

*Démonstration :* On démontre tout d'abord que dans ce cas l'axe du faisceau de plan des cercles des quatre points rencontre toujours les deux demi-cônes fixes supérieurs.

Supposons tout d'abord que le balayage soit cylindrique. Dans ce cas l'axe est obtenu par intersection de deux plans qui sont verticaux comme on le voit par passage à la limite du sommet du cône de balayage, le plan du cercle des quatre points est donc lui

aussi vertical. Lorsque ce plan coupe deux demi-cônes inférieurs, qui ont eux aussi un axe vertical, il détermine sur chaque cône une branche d'hyperbole d'axes parallèles. Ces deux branches n'ont donc que deux points d'intersection au plus : deux si les deux cônes sont visibles, zéro si l'un domine l'autre. On redescend maintenant le centre de balayage le long de la verticale et on prend comme position limite le point où le sommet est sur la surface du premier des deux demi-cônes supérieurs rencontrés : c'est la position limite pour un balayage.

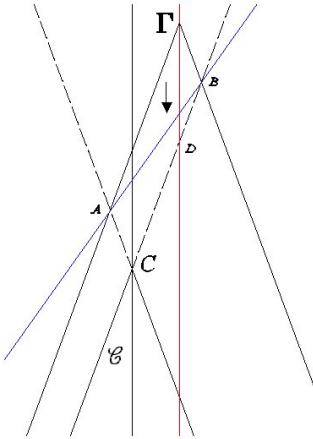
On sait que l'axe du balayage auxiliaire se trouve à l'intersection de deux plans qui sont donnés par l'équation (11.1), p. 180. Ces plans sont les positions limites des sphères supports lorsque l'angle de balayage est égal au demi-angle au sommet des cônes fixes. La position limite de cette position limite est donc un plan tangent au premier demi-cône supérieur rencontré par le sommet lorsqu'il descend le long de l'axe du cône de balayage (Fig. 12.14).

La figure étant prise dans le plan des axes des deux cônes, lorsque  $\Gamma$  descend le long de la demi-droite  $\Gamma D$ , le plan  $\mathcal{C} - \Gamma(\alpha)$  contenant  $AD$  et perpendiculaire à la figure devient tangent au cône  $\mathcal{C}$  le long de la génératrice  $BC$  de  $\mathcal{C}$ .

L'axe rencontre les deux demi-cônes supérieurs lorsque  $\Gamma$  est à  $+\infty$  sur  $\Gamma D$ , donc cette propriété se conserve lorsque sa cote décroît de manière continue et monotone le long de  $\Gamma D$ . On voit que lorsque  $\Gamma$  atteint sa position limite, l'axe qui est toujours dans le plan  $\mathcal{C} - \Gamma(\alpha)$  est tangent à  $\mathcal{C}$ .

Pour le second cône la propriété reste vraie sans même passage à la limite puisque l'on doit s'arrêter au premier cône rencontré pour satisfaire les conditions de balayage.

Maintenant si l'axe rencontre les deux demi-cônes supérieurs, c'est que le plan du cercle des quatre points coupe  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  suivant des hyperboles dont les axes sont parallèles à l'intersection du plan avec le plan vertical orthogonal au plan du cercle lorsqu'il coupe aussi les demi-cônes inférieurs.



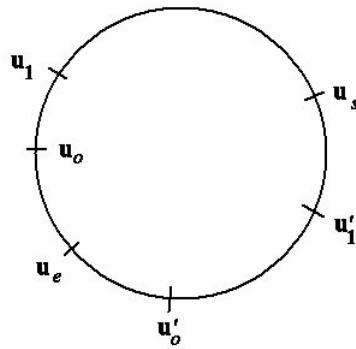
**Figure 12.14**

Il n'y a donc bien que deux points d'intersection pour les branches inférieures des hyperboles.  $\square$

**Corollaire 11 :** *Lorsque l'on calcule la nouvelle position d'une extrémité d'une arête du front d'onde, il n'y a à choisir qu'entre deux solutions possibles.*

Ce lemme simplifie le travail de suivi des extrémités, bien entendu la méthode qui suit pourrait se généraliser à quatre solutions mais ce serait plus lourd.

Le bissecteur est une courbe fermée (Fig. 12.15), les valeurs de l'argument pour l'entrée ( $u_e$ ) et la sortie ( $u_s$ ) du site sont connues sans ambiguïté. Il en est de même pour la valeur de l'argument du sommet ( $u_0$ ) avant la contraction du front d'onde. À cette valeur correspond une valeur complémentaire qui est celle de la deuxième solution non retenue ( $u'_0$ ). Après contraction on obtient deux nouvelles valeurs possibles pour la nouvelle extrémité de l'arête :  $u_1, u'_1$ . Pour déterminer laquelle choisir, le programme va garder en mémoire, à chaque étape, la valeur complémentaire  $u'$  (voir la colonne *arg2* sur les figures 12.12, p. 219 et 12.13, p. 220) ; puis, dans l'intervalle contenant les deux nouvelles valeurs  $u_1, u'_1$  choisira la valeur  $u_1$  la plus proche de  $u_0$  entre  $u_0$  et  $u'_0$  (modulo  $4K$ ).



**Figure 12.15**

## 12.8 ENTRÉE ET SORTIE DU SITE MAJORITAIRE

En ce qui concerne le site majoritaire les procédures sont simplifiées puisqu'il n'y a pas de déphasage ; les points d'entrée et de sortie sont obtenus en utilisant les valeurs 0,  $K$ ,  $2K$ ,  $3K$  de l'argument suivant le cas traité. De plus, on note que ce n'est qu'après l'événement sortie de site majoritaire d'un site que l'on peut conclure en ce qui concerne le masquage (Définition 5, p. 40) d'un cône-site. Le masquage se produit si aucun événement concernant ce site n'a appartenu au front d'onde et cela ne peut être que *constaté* et seulement à la sortie du site majoritaire. Contrairement à l'événement sortie de site (cf. p. 215), l'événement sortie de site majoritaire n'est pas lié à une arête puisqu'il fait partie des événements qui servent à initialiser la file de priorité, il ne disparaît donc pas de la file de priorité avant traitement.

## 12.9 COMPOSANTES CONNEXES

Le suivi des composantes connexes peut se faire en remarquant que seuls les événements d'entrée de sites non masqués donnent lieu à la création d'une nouvelle composante connexe. Pour un site donné, il n'y a jamais plus d'une seule entrée-site programmée

à la fois et elle disparaît la première fois qu'elle est visible. Il y a donc au plus  $n - 1$  composantes connexes et si le maximum est atteint, le diagramme est sans sommet. Les événements sommets 1-2 et sorties de site ne change rien à la situation. Enfin, il peut y avoir union de deux composantes lors d'un événement sommet 2-1, opération qui peut être enregistrée et traitée à la fin de l'algorithme.

### 12.10 PSEUDO-CODE DE L'ALGORITHME

On peut maintenant donner le pseudo-code de l'algorithme en précisant les différences avec le code joint dans l'appendice E. D'une part il ne traite pas de la circularité du front d'onde qui compliquerait sans profit l'exposition (c'est d'ailleurs le même cas pour les algorithmes précédents). À l'inverse le code joint en annexe, s'il traite le problème de la circularité, ne traite que la partie originale de l'algorithme, c'est-à-dire la gestion des événements et du front d'onde. La partie classique de l'algorithme, mise en oeuvre et gestion de la DCEL, n'a pas été développée. Ce code étant essentiellement destiné à la mise au point, il donne plus d'information que strictement nécessaire et dans ce but ne suit pas complètement ce pseudo-code : le front d'onde notamment est recalculé en entier à chaque pas.

Dans ce qui suit  $m$  désigne l'indice du site majoritaire.

### ALGORITHME VORONOÏ DE CIRCONFÉRENCES PONDÉRÉES

Lire les données d'entrée ;

Les trier par rapport à l'angle au sommet et déterminer le cône majoritaire ;

Initialiser la file de priorité pour les contacts à l'infini avec les angles au sommet des cône-sites ;

Créer une table pour l'union des composantes connexes ;

**Tant que** la file de priorité est non vide **Faire**

Traiter l'événement en tête de file ;

Mettre à jour la file de priorité en supprimant l'événement traité ;

**Fin Tant que** ;

Faire l'union des composantes connexes si nécessaire ;

### ***TRAITEMENT\_D\_ÉVÉNEMENT***

**Si** événement site **Alors**

**Si** événement *contact*

Traiter ***CONTACT\_INFINI***(*i*)

**Fin si** ;

**Si** événement *entrée* de site

**Si** *j* = *m*

Traiter ***ENTREE\_SITE\_MAJORITAIRE***(*i*)

**sinon**

Traiter ***ENTREE\_SITE***(*i, j*)

**Fin si** ;

**Fin si** ;

**Si** événement *sortie* de site

**Si** *j* ≠ *m*

Traiter ***SORTIE\_SITE***(*i, j*)

**sinon**

Traiter ***SORTIE\_SITE\_MAJORITAIRE***(*i*)

**Fin si** ;

**Fin si** ;

**Fin si** ;

**Si** événement *sommet* **Alors**

Traiter ***EVENEMENT\_SOMMET***(*i, j, k*)

**Fin si.**

### ***CONTACT\_INFINI(i)***

Calculer l'événement entrée sur le site majoritaire correspondant ;

Déterminer la situation des sites par rapport au site majoritaire (cas 1 à 6) ;

**Si**  $cas = 5 \vee cas = 6$  **Alors**

Éliminer le site absolument dominé

**Sinon**

Calculer les événements d'entrée et de sortie du site majoritaire

**Fin si** ;

Mettre à jour la file de priorité en y insérant les événements entrée et sortie de site majoritaire  $(i, m)$ .

### ***ENTREE\_SITE\_MAJORITAIRE(i)***

Chercher dans l'arbre binaire du front d'onde la feuille intersectée par la génératrice du cône de balayage  $\mathcal{O}_{\Gamma \mathcal{C}_j}$  ;

**Si**  $j = m$  le point est sur le front d'onde **Alors**

Traiter ***INSERER(i, m)*** ;

Mettre à jour la file de priorité en y insérant les événements sommets s'ils sont nouveaux et non mort-nés

**Sinon**  $\{j \neq m ;$  le point n'est pas sur le front d'onde $\}$

**Si** l'événement est mort-né **Alors**

Calculer les événements sommets  $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_m \cap \mathcal{C}_j$  ;

Mettre à jour la file de priorité en y insérant les événements sommets s'ils sont nouveaux et non mort-nés

**Sinon**

Mettre à jour la file de priorité en y insérant l'événement entrée de site  $(i, j)$

**Fin si**

**Fin si** ;

Mettre à jour les pointeurs entre les événements de la file de priorité et les feuilles de l'arbre binaire du front d'onde.

***ENTREE\_SITE*( $i, j$ )**

Chercher dans l'arbre binaire du front d'onde la feuille intersectée par la génératrice du cône de balayage  $\mathcal{O}_{\Gamma \mathcal{C}_k}$  ;

**Si**  $j = k$  {le point est sur le front d'onde} **Alors**

Traiter ***INSERER***( $i, j$ ) ;

Mettre à jour la file de priorité en y insérant l'événement sortie de site  $(i, j)$  et les événements sommets s'ils sont nouveaux et non mort-nés

**Sinon**  $\{j \neq k : \text{le point n'est pas sur le front d'onde}\}$

Calculer le point sextuple correspondant au site  $\mathcal{C}_i$  et au cône masquant du front d'onde  $\mathcal{C}_k$  ;

**Si** l'événement est mort-né **Alors**

Calculer les événements sommets  $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j \cap \mathcal{C}_k$  ;

Mettre à jour la file de priorité en y insérant les événements sommets s'ils sont nouveaux et non mort-nés

**Sinon**

Mettre à jour la file de priorité en y insérant l'événement entrée de site  $(j, k)$

**Fin si**

**Fin si** ;

Mettre à jour les pointeurs entre les événements de la file de priorité et les feuilles de l'arbre binaire du front d'onde.

***EVENEMENT\_SOMMET*( $i, j, k$ )**

Chercher dans l'arbre binaire du front d'onde la feuille intersectée par la génératrice du cône de balayage  $\mathcal{O}_{\Gamma \mathcal{C}_l}$  ;

**Si**  $j = l$  le point est sur le front d'onde **Alors**

**Si** l'arête n'est pas de longueur nulle **Alors**

Traiter ***EVENEMENT\_SOMMET\_1-2***( $i, j, k$ )

**Sinon**

Traiter ***EVENEMENT\_SOMMET\_2-1***( $i, j, k$ )

**Fin Si ;**

Mettre à jour la file de priorité en y insérant les événements sommets s'ils sont nouveaux et non mort-nés ainsi que les événements sortie de site pour la ou les nouvelles arêtes définitives

**Sinon**  $\{j \neq l : \text{le point n'est pas sur le front d'onde}\}$

Calculer les événements sommets correspondants au cône masquant du front d'onde  $\mathcal{C}_l$  :  $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j \cap \mathcal{C}_l$ ,  $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_l \cap \mathcal{C}_k$ , et  $\mathcal{C}_l \cap \mathcal{C}_j \cap \mathcal{C}_k$ ;

Éliminer les cônes dominés si nécessaire ;

Mettre à jour la file de priorité en y insérant les événements sommets s'ils sont nouveaux et non mort-nés

**Fin si ;**

Mettre à jour les pointeurs entre les événements de la file de priorité et les feuilles de l'arbre binaire du front d'onde.

***SORTIE\_SITE***( $i, j$ )

Chercher dans l'arbre binaire du front d'onde la feuille intersectée par la génératrice du cône de balayage  $\mathcal{O}_{\Gamma \mathcal{C}_i}$  ;

Traiter ***ÔTER***( $i, j$ ).

***SORTIE\_SITE\_MAJORITAIRE***( $i$ )

Chercher dans l'arbre binaire du front d'onde la feuille intersectée par la génératrice du cône de balayage  $\mathcal{O}_{\Gamma \mathcal{C}_j}$  ;

**Si**  $j = i$  le point est sur le front d'onde **Alors**

Traiter ***ÔTER***( $i, m$ )

**Sinon**  $\{j \neq i \text{ le point n'est pas sur le front d'onde}\}$

Voir si le site est masqué

**Fin si.**

***INSERER(i, j)***

Enlever tous les événements sommets correspondants à la feuille  $\mathcal{O}_{\Gamma\mathcal{C}_j}$  de la file de priorité ;

Remplacer la feuille  $\mathcal{O}_{\Gamma\mathcal{C}_j}$  par un sous-arbre à 3 feuilles  $(\mathcal{O}_{\Gamma\mathcal{C}_j}, \mathcal{O}_{\Gamma\mathcal{C}_i}, \mathcal{O}_{\Gamma\mathcal{C}_j})$  ;

Rééquilibrer l'arbre ;

Créer les 3 nouvelles arêtes temporaires correspondantes dans la DCEL ;

Créer la nouvelle arête définitive  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_i\mathcal{C}_j}$  dans la DCEL ;

Filtrer le front d'onde :

calculer les événements sommets : 4 cas ( $k, l, j, i, j, p, n$ ).

***EVENEMENT\_SOMMET\_1-2(i, j, k)***

Dans la DCEL mettre un sommet définitif à l'arête  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_i\mathcal{C}_k}$  ;

Ajouter la feuille  $\mathcal{O}_{\Gamma\mathcal{C}_j}$  à l'arbre, mettre à jour les noeuds correspondants ;

Rééquilibrer l'arbre ;

Ajouter les nouvelles arêtes définitives  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_i\mathcal{C}_j}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}_j\mathcal{C}_k}$  à la DCEL ;

Filtrer le front d'onde :

calculer les événements sommets : 3 cas ( $l, i, j, k, p$ ).

***EVENEMENT\_SOMMET\_2-1(i, j, k)***

Enlever tous les événements sommets correspondants au triplet  $(\mathcal{O}_{\Gamma\mathcal{C}_i}, \mathcal{O}_{\Gamma\mathcal{C}_j}, \mathcal{O}_{\Gamma\mathcal{C}_k})$  de la file de priorité ;

Dans la DCEL mettre leur sommet définitif aux arêtes  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_i\mathcal{C}_j}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}_j\mathcal{C}_k}$  ;

Mettre à jour la table d'union des composantes connexes si elles sont différentes ;

Enlever la feuille  $\mathcal{O}_{\Gamma\mathcal{C}_j}$  de l'arbre, mettre à jour les noeuds correspondants ;

Rééquilibrer l'arbre ;

Ajouter la nouvelle arête définitive  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_i\mathcal{C}_k}$  à la DCEL ;

Filtrer le front d'onde :

calculer les événements sommets : 2 cas ( $l, i, k, m$ ).

$\hat{O}TER(i, j)$

**Si** les deux sommets définitifs que l'on obtient appartiennent à la même arête **Alors**

Mettre la même valeur dans les deux sommets de l'arête

**Sinon**

Fusionner les deux arêtes et supprimer l'une d'entre elle du diagramme définitif

**Fin si ;**

Supprimer la feuille  $\mathcal{O}_{\Gamma_{\mathcal{C}_i}}$  de l'arbre.

## 12.11 ANAYSE DE COMPLEXITÉ

Comme pour tous les algorithmes à balayage, la complexité de l'algorithme dans le pire des cas est essentiellement liée au nombre d'événements masqués ou pas. Il y a au plus  $\mathcal{O}(n^2)$  événements de chaque type. On n'insère jamais plus de trois arêtes à chaque étape, et donc le front d'onde est aussi en  $\mathcal{O}(n^2)$  (cf. Théorème 18, p. 153). Le nombre d'opérations par module est fixe et chacune se fait en  $\mathcal{O}(1)$  sauf la recherche dans l'arbre et le rééquilibrage qui se font en  $\mathcal{O}(\log n)$ . L'opération d'union des composantes connexes peut se faire en  $\mathcal{O}(n^2)$  au plus puisqu'il y a un maximum de  $n$  composantes connexes. La complexité de l'algorithme est donc comme le précédent de  $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ .

Le diagramme de Voronoï de cercles pondérés à une complexité structurelle de  $\mathcal{O}(n^2)$  puisque c'est un diagramme planaire d'au plus  $\mathcal{O}(n^2)$  sommets. L'algorithme n'est donc pas optimum : le principe du balayage ne permet d'ailleurs pas de faire mieux sur ce type de diagramme puisque la complexité de l'algorithme fait toujours intervenir la hauteur de l'arbre comme facteur.

### 12.11.1 Diagramme sans sommet

Supposons maintenant le diagramme sans sommet, comme on l'a vu au cours de l'étude. Il y a en fait deux familles de diagramme sans sommet. Le premier cas, le plus simple,

a lieu si tous les cônes sont juxtaposés sur le site majoritaire : le diagramme est formé d'une famille d'ovales sans intersection et sans inclusion. Le second cas est celui de cônes superposés les uns sur les autres ce qui nous donne un diagramme de bissecteurs inclus les uns dans les autres. On peut bien sûr avoir toute combinaison des deux familles mais on va étudier les deux cas extrêmes de cônes juxtaposés ou superposés.

Dans le premier cas il n'y a jamais d'événement masqué puisque tous les événements programmés par les contacts à l'infini sont visibles. L'algorithme se comporte presque comme un algorithme à balayage classique. Il y a  $n$  événements contact à l'infini,  $n$  événements entrée de site et autant de sortie, et l'algorithme est le même que l'algorithme pour les cercles euclidiens sans sommet une fois passé les événements contact à l'infini. La complexité est donc optimale. Sans que l'on donne une limite précise, il est certain que la complexité de l'algorithme devrait suivre la complexité du diagramme si le diagramme a peu de sommets. En fait le balayage sur un plan ou sur le cône majoritaire sont pratiquement équivalents.

Le cas plus intéressant est celui d'un empilement de cônes (cf. Fig 12.10), car cette fois-ci il y a des événements masqués. Dans ce cas on ne peut malheureusement plus conclure que la complexité reste en  $\mathcal{O}(n \log n)$  car on peut avoir un empilement de cônes tel qu'il faille  $p - 1$  événements masqués pour pouvoir commencer à tracer le  $p$ -ième bissecteur.

Pour construire un tel exemple, on prend le plan horizontal comme cône majoritaire, puis  $n$  cônes *d'axes coplanaires* ce qui permet de tracer une figure de profil. On peut ensuite passer au cas général par une petite perturbation (Yap, 1988). La figure (Fig. 12.16) montre le cas de quatre cônes : les événements visibles y sont en rouge, les événements masqués en vert. Si  $E_{n,p}$  désigne le point d'intersection entre les génératrices des cônes  $n$  et  $p$ , on peut toujours tracer une droite joignant un point arbitraire pris entre  $E_{n-1,0}$  et  $E_{2,1}$  à un autre point arbitraire pris sur la génératrice  $n - 1$  au dessus de  $E_{n-1,n-2}$  ; cette droite coupera les  $n - 1$  précédentes et peut être choisie comme génératrice du  $n$ -ième cône.

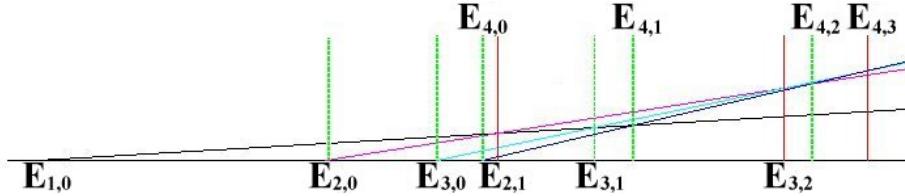


Figure 12.16

Donc dans le pire du meilleur cas, pour les points à pondération composite, on ne peut faire mieux que  $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ , même pour un diagramme sans sommet ce qui n'était pas le cas dans le diagramme de cercle, même pour un diagramme dans lequel les  $n$  bissecteurs seraient emboîtés. On peut se demander si la différence de performance qu'on trouve entre les diagrammes superposés et les diagrammes juxtaposés est due à une faiblesse de l'algorithme ou à une différence de nature de la complexité propre des deux types de diagramme puisque si l'on fixe un nombre maximum de cônes superposés, alors on retrouve un algorithme optimal. De fait avec l'exemple donné, le sommet du  $n$ -ième cône tend vers l'infini ; si par contre on en limitait la hauteur, son secteur de Voronoï tendrait vers zéro quand le nombre de cônes tendrait vers l'infini.

## 12.12 DIAGRAMME DE POINTS À PONDÉRATION MULTIPLICATIVE

Dans ce cas tous les cône-sites ont leur sommet au même niveau, ce diagramme comme on l'a vu est en  $\mathcal{O}(n^2)$ . Le seul cône-site qui n'aura pas son sommet au même niveau que les autres sera le cône de balayage. Pour le reste l'algorithme fonctionnerait comme indiqué avec les quelques simplifications suivantes :

- a) Les bissecteurs restent des biquadratiques, mais on va tracer des cercles et non pas des ovales.
- b) Le paramétrage des cercles utilisera des fonctions trigonométriques et non pas des fonctions elliptiques.
- c) Le cas de domination d'un site par un autre ne peut exister.

Ce cas particulier présente de fait peu d'intérêt puisque l'algorithme d'Aurenhammer déjà mentionné (Aurenhammer, 1984) est lui optimal en  $\mathcal{O}(n^2)$ .

### 12.13 IMAGES DE L'ALGORITHME

Les figures qui suivent donnent l'image du jeu d'essai dont les résultats sont sur le fichier joint au texte, une vue du diagramme de cercles pondérés tout d'abord (Fig. 12.18) et la vue perspective des cônes correspondants ( le site majoritaire  $\mathcal{C}_0$ , le site  $\mathcal{C}_8$  et l'axe de balayage sont dans le même plan de profil) (Fig. 12.17). Les deux dernières figures sont extraites du balayage et doivent être interprétées de la manière suivante : la surface donnée initialement est celle de la figure 12.17; elle est détruite par le cône  $\Gamma$  au fur et à mesure du balayage laissant place au diagramme calculé. La figure 12.19 donne l'événement sommet 1-2  $V_{9,10,11}$  détaillé au paragraphe 12.6.3, p. 215. La figure suivante donne l'événement sommet  $V_{2,3,6}$  qui est le pas n°53 sur le fichier joint.

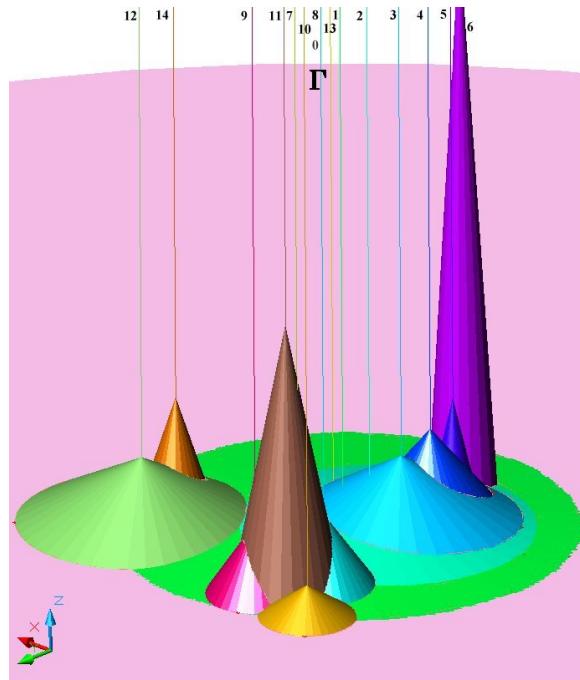


Figure 12.17

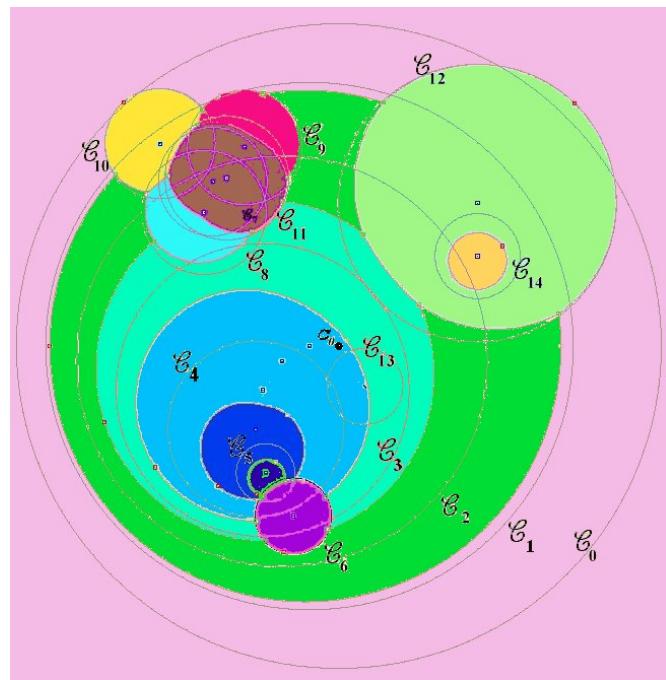


Figure 12.18

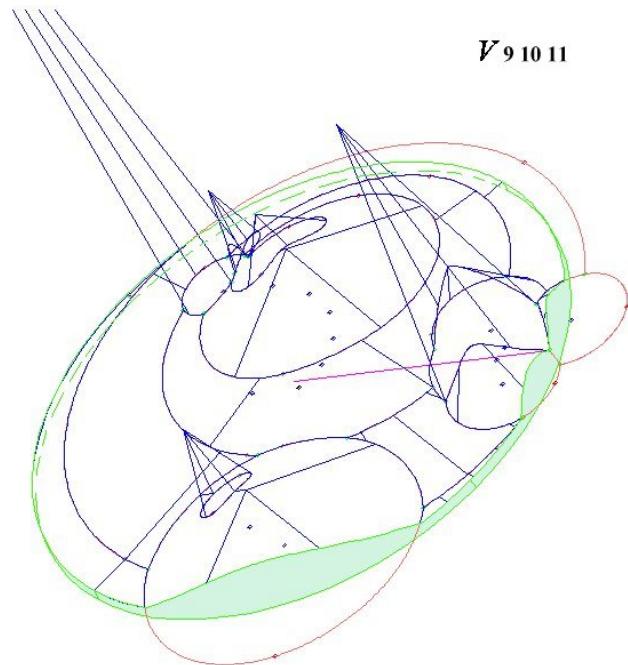


Figure 12.19



Figure 12.20

## CONCLUSION

À partir d'une représentation unique d'une famille de diagrammes de Voronoï qui généralise l'interprétation initiale par cône donnée dans l'algorithme de Fortune (Fortune, 1987), on a donc développé une famille d'algorithmes à balayage circulaire qui permet le calcul des diagrammes de Voronoï de points ou cercles pondérés de la forme  $(\frac{\rho_i - r_i}{s_i})$  ou  $(|\rho_i - r_i|)$ .

Pour généraliser un peu plus on voit que la structure de volcan pourrait être étendue au cas de volcans non équilatères, qui correspondraient à des diagrammes de la forme  $(\frac{|\rho_i - r_i|}{s_i})$ . L'extension des principes du balayage par cône ne serait sûrement pas simple mais donne au moins une voie possible.

La généralisation aux diagrammes de Möbius de la représentation par surface composite grâce à une forêt de paraboloïdes montre aussi que l'étude d'un algorithme à balayage par paraboloïde de révolution, plutôt que par cône, pour ces diagrammes, pour difficile qu'elle soit, mérite d'être tentée.

Au niveau de la complexité, les deux algorithmes ne sont pas optimaux mais, surtout pour le dernier, le gain à venir entre  $\mathcal{O}(n^2 \log n)$  et  $\mathcal{O}(n^2)$  est moins important que le gain entre  $\mathcal{O}(n^4)$  et  $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ ,  $\mathcal{O}(n^4)$  correspondant au simple calcul des points d'intersection visibles des triplets de cônes de la forêt par force brute :  $\mathcal{O}(n^3)$  pour calculer les intersections, et pour chaque intersection  $\mathcal{O}(n)$  pour avoir sa visibilité (Cagnac, 1949, p.33) .

Enfin on a vu que l'algorithme pour cercles avec distance euclidienne a une complexité qui s'adapte à la complexité du diagramme ce qui n'est plus le cas de l'algorithme pour cercles pondérés.

## APPENDICE A

### NOTATIONS ET FORMULES

#### A.1 CERCLES

Les cercles-sites sont désignés par  $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$  ou  $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j, \mathcal{C}_k$ , leur centre étant  $C, C', C''$  ou  $C_i, C_j, C_k$  et leur rayon  $r, r', r''$  ou  $r_i, r_j, r_k$ , sauf le cercle de balayage noté  $\Gamma$  de rayon  $\tau$  et de centre  $O$ , origine des coordonnées polaires. Tous les angles sont pris dans l'intervalle  $]-\pi, +\pi]$ . Par ailleurs les coordonnées polaires du centre d'un cercle-site sont :  $(d, a), (e, b)$  ou  $(d_i, a_i) \dots$

#### Équations des coniques

Le point  $M$  courant du plan ayant pour coordonnées  $M(\theta, \rho)$  (Fig. A.1), un cercle-site a pour équation polaire :

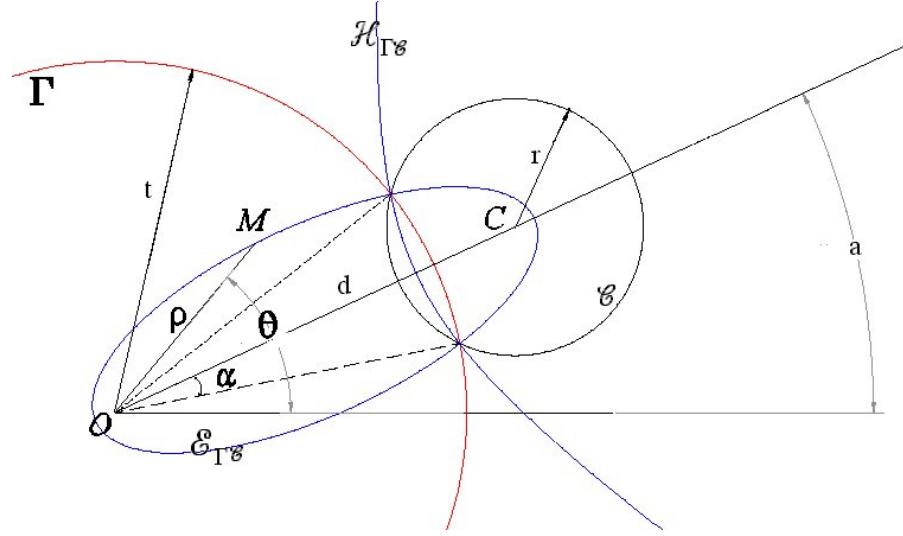
$$\mathcal{C} : \rho^2 + d^2 - 2\rho d \cos(\theta - a) = r^2. \quad (\text{A.1})$$

L'ellipse définie entre  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma$  a pour équation :

$$\mathcal{E}_{\Gamma C} : \rho = \frac{d^2 - (t+r)^2}{2(d \cos(\theta - a) - (t+r))} \quad (\text{A.2})$$

et l'hyperbole entre  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma$  a pour équation :

$$\mathcal{H}_{\Gamma C} : \rho = \frac{d^2 - (t-r)^2}{2(d \cos(\theta - a) - (t-r))}, \quad (\text{A.3})$$

**Figure A.1**

avec  $\rho > 0$ . On peut donc écrire l'équation des coniques générées par les 2 cercles sous la forme :

$$\rho = \frac{d^2 - (t - \varepsilon r)^2}{2(d \cos(\theta - a) - (t - \varepsilon r))} \quad (\text{A.4})$$

dans laquelle  $\varepsilon = -1$  pour un arc d'ellipse et  $+1$  pour un arc d'hyperbole.

Et l'on a :

$$\alpha = a \pm \arccos \frac{d^2 + t^2 - r^2}{2td} \quad (\text{A.5})$$

Les valeurs de alpha sont utilisées lors du test d'inclusion d'un cercle dans un autre.

### Solution de l'équation $a \cos \theta + b \sin \theta - c = 0$

Cette équation sert de base pour l'ensemble des calculs d'intersection des coniques en polaire. Ses solutions trigonométriques standards, qui font l'objet d'une fonction unique, sont :

$$\theta_\varepsilon = \operatorname{sgn}(b) \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \varepsilon \arccos \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\text{A.6})$$

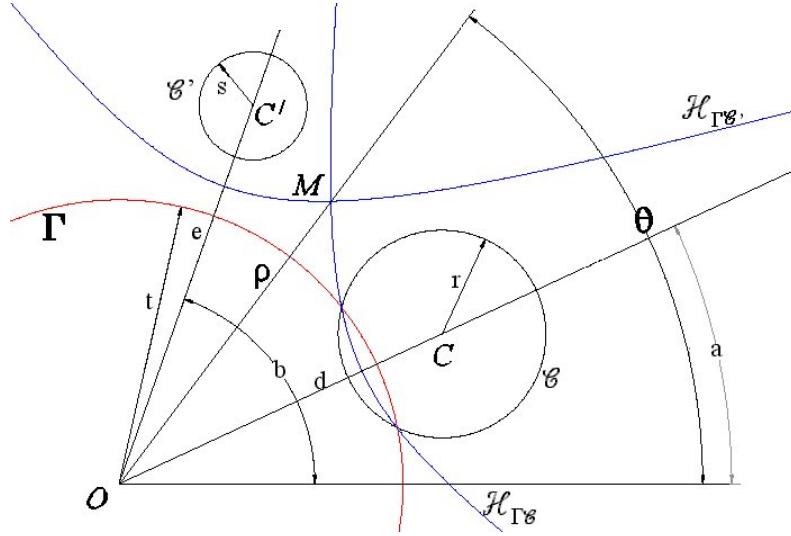


Figure A.2

avec  $\varepsilon = \pm 1$  et  $\text{sgn}(b) = \begin{cases} +1 & \text{si } b > 0 \\ 0 & \text{si } b = 0 \\ -1 & \text{si } b < 0 \end{cases}$

### Intersection de deux coniques de balayage

On cherche les coordonnées du point  $M$  d'intersection des deux coniques (Fig. A.2) qui ont pour équation :

$$\mathcal{H}_{\Gamma C} : \rho = \frac{d^2 - (t - r)^2}{2(d \cos(\theta - a) - (t - r))}, \quad (\text{A.7})$$

et

$$\mathcal{H}_{\Gamma C'} : \rho = \frac{e^2 - (t - s)^2}{2(e \cos(\theta - b) - (t - s))}. \quad (\text{A.8})$$

En posant  $m = d^2 - (t - r)^2$ ,  $n = e^2 - (t - s)^2$  et  $u = r - t$ ,  $v = s - t$ , l'angle polaire du point d'intersection est alors donné par la formule :

$$(me \cos b - nd \cos a) \cos \theta + (me \sin b - nd \sin a) \sin \theta - (nu - mv) = 0 \quad (\text{A.9})$$

qui se résout comme indiqué plus haut. Comme il y a deux solutions à cette équation, les

deux branches d'hyperboles ont au plus deux points d'intersections. Ces valeurs sont les angles polaires des points de rebroussement du front d'onde. Seules les valeurs donnant  $\rho > 0$  sont prises en compte.

### Enveloppe convexe

Avec les mêmes notations que précédemment, les angles polaires des normales aux tangentes communes extérieures sont égaux à :

$$\theta(\varepsilon) = \pi + \operatorname{sgn}(e \sin b - d \sin a) \arccos\left(\frac{e \cos b - d \cos a}{CC'}\right) + \varepsilon \arccos\left(\frac{s - r}{CC'}\right) \quad (\text{A.10})$$

avec  $s < r$ ,  $CC' = \sqrt{e^2 + d^2 - 2ed \cos(a - b)}$  et  $\varepsilon = \pm 1$ . Sur l'axe orienté par cet angle le pied de la perpendiculaire issue de l'origine a pour mesure :  $\bar{p}_\varepsilon = d \cos(\theta(\varepsilon) - a) + r$  et la valeur mise en file de priorité est  $|p_\varepsilon|$ .

### Condition de Casey

Le segment de tangente commune entre 2 cercles sites a pour équation

$$t_{C'C} = \sqrt{C'C^2 - (r - s)^2}$$

et entre le cercle de balayage et un cercle site

$$t_{\Gamma C} = \sqrt{d^2 - (t - r)^2}.$$

Si l'arête qui disparaît correspond au cercle  $C'$ , la condition de Casey s'écrit :

$$t_{\Gamma C} t_{C'C''} + t_{\Gamma C''} t_{CC'} - t_{\Gamma C'} t_{CC''} = 0. \quad (\text{A.11})$$

Après substitution, la condition de Casey est alors résolue directement en tant qu'équation en  $t$  par Mathematica.

L'algorithme ne fait finalement intervenir directement que quatre fonctions ou équations seulement :

- $\text{Casey}(C, C', C'', t) = 0$  pour obtenir les événements de type 3 ;
- $p = \text{tangente\_commune}(C, C', t)$  pour obtenir les événements de type 2 ;
- $\theta = \text{intersection\_hyperboles\_de\_balayage}(C, C', t)$  pour obtenir les points de rebroussements du front d'onde et les angles polaires des sommets de Voronoï ;
- $\rho = \text{rayon\_polaire\_d'une\_hyperbole\_de\_balayage}(C, \theta, t)$  pour obtenir le rayon polaire des sommets de Voronoï et permettre l'élimination des cercles inclus.

Si l'on désire visualiser le diagramme, ainsi que les étapes de sa construction, il en faut bien sûr un peu plus, notamment pour pouvoir tracer l'hyperbole du front d'onde réduite à une demi-droite ou à un segment de droite lors d'un événement-site.

## A.2 CÔNES

### A.2.1 Théorème du balayage auxiliaire

On donne ici une démonstration de géométrie analytique du théorème du balayage auxiliaire.

Si  $\mathcal{C}$  est l'équation d'un cône de révolution de demi-angle au sommet  $\alpha$ ,  $\mathcal{H}$ , l'équation d'un plan perpendiculaire à l'axe du cône, alors l'équation de la sphère dérivée de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\mathcal{H}$  s'écrit (Salmon, 1927, T.1, §140) :

$$\mathcal{S} = \mathcal{C} - \frac{\mathcal{H}^2}{\cos^2 \alpha} \quad (\text{A.12})$$

La sphère support de  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$  a pour équation soit l'équation 11.12 soit :

$$\mathcal{S}_{12} = \cos^2 \alpha_1 \mathcal{S}_1 - \cos^2 \alpha_2 \mathcal{S}_2 \quad (\text{A.13})$$

De même la sphère dérivée ( $\Sigma$ ) du cône de balayage s'exprime par :  $\Sigma = \Gamma - \frac{\mathcal{H}^2}{\cos^2 \gamma}$ .

Les deux autres sphères supports s'expriment donc sous la forme :

$$\mathcal{S}_{1\gamma} = \cos^2 \alpha_1 \mathcal{S}_1 - \cos^2 \gamma \Sigma \quad (\text{A.14})$$

$$\mathcal{S}_{2\gamma} = \cos^2 \alpha_2 \mathcal{S}_2 - \cos^2 \gamma \Sigma \quad (\text{A.15})$$

et le plan du cercle des quatre points étant le plan radical de ces sphères s'exprime donc par :

$$PC4 \equiv \frac{\cos^2 \alpha_1 \mathcal{S}_1 - \cos^2 \gamma \Sigma}{\cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \gamma} - \frac{\cos^2 \alpha_2 \mathcal{S}_2 - \cos^2 \gamma \Sigma}{\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \gamma} \quad (\text{A.16})$$

ou ce qui revient au même par :

$$PC4 \equiv \frac{\cos^2 \alpha_1 \mathcal{C}_1 - \cos^2 \gamma \Gamma}{\cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \gamma} - \frac{\cos^2 \alpha_2 \mathcal{C}_2 - \cos^2 \gamma \Gamma}{\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \gamma} \quad (\text{A.17})$$

Si  $\lambda$  est la hauteur de la projection du sommet de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{H}$ , en prenant l'origine au sommet de  $\Gamma$  on a  $\Gamma \equiv x^2 + y^2 - \tan^2 \gamma z^2$  et donc  $\Sigma \equiv x^2 + y^2 - \tan^2 \gamma z^2 - \frac{(z-\lambda)^2}{\cos^2 \gamma}$ , qui peut se mettre sous la forme :

$$\Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2\lambda}{\cos^2 \gamma} (z - \frac{\lambda}{2}) = O_b + \frac{\lambda}{\cos^2 \gamma} \mathcal{H}' \quad (\text{A.18})$$

qui est bien une combinaison linéaire d'un plan  $\mathcal{H}'$  et d'une sphère de rayon nul notée  $O_b$ . D'où :

$$\begin{aligned} PC4 &\equiv (\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \gamma)(\cos^2 \alpha_1 \mathcal{S}_1 - \cos^2 \gamma O_b - \lambda \sin^2 \gamma \mathcal{H}') \\ &\quad - (\cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \gamma)(\cos^2 \alpha_2 \mathcal{S}_2 - \cos^2 \gamma O_b - \lambda \sin^2 \gamma \mathcal{H}') \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Après simplification on trouve :

$$\begin{aligned} PC4 &\equiv \tan^2 \gamma (\lambda(\cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2) \mathcal{H}' + \cos^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_1 (\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2)) \\ &\quad + \cos^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_1 (\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2) + (\cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2) O_b \\ &\quad + \cos^2 \alpha_2 \mathcal{S}_2 - \cos^2 \alpha_1 \mathcal{S}_1 \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

et puisque l'on peut poser, comme dans l'équation (A.18),  $\mathcal{S}_1 = O_b + \mathcal{H}_1$  (de même pour  $\mathcal{S}_2$ ) équations dans lesquelles  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  représentent des plans, on obtient en substituant dans (A.20) :

$$\begin{aligned} PC4 &\equiv \tan^2 \gamma (\lambda(\cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2) \mathcal{H}' + \cos^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_1 (\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2)) \\ &\quad + \cos^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_1 (\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2) + \cos^2 \alpha_2 \mathcal{H}_2 - \cos^2 \alpha_1 \mathcal{H}_1 \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

qui est bien une équation de la forme  $\tan^2 \gamma \mathcal{P} + \mathcal{P}'$  avec

$$\mathcal{P} \equiv (\lambda \mathcal{H}'(\tan^2 \alpha_2 - \tan^2 \alpha_1) + \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2) \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 \quad (\text{A.22})$$

$$\mathcal{P}' \equiv (\mathcal{H}_2 \tan^2 \alpha_1 - \mathcal{H}_1 \tan^2 \alpha_2) \cos^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_1 \quad (\text{A.23})$$

et enfin si  $\Sigma(\alpha)$  désigne l'équation de la sphère dérivée du cône de balayage de demi-angle au sommet  $\alpha$ , on a, par élimination de  $O_b$  :  $\mathcal{S}_1 - \Sigma(\alpha_1) \equiv \mathcal{H}_1 - \lambda \tan^2 \alpha_1 \mathcal{H}'$ , ainsi que  $\mathcal{S}_2 - \Sigma(\alpha_2) \equiv \mathcal{H}_2 - \lambda \tan^2 \alpha_2 \mathcal{H}'$  qui, en éliminant  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  entre les trois équations donne le résultat :

$$PC4 \equiv (\tan^2 \gamma - \tan^2 \alpha_2)(\mathcal{S}_1 - \Sigma(\alpha_1)) - (\tan^2 \gamma - \tan^2 \alpha_1)(\mathcal{S}_2 - \Sigma(\alpha_2)) \quad (\text{A.24})$$

qui n'est autre que l'équation 11.1, p. 180 puisque d'une manière générale :

$$\mathcal{S} - \Sigma(\alpha) = \mathcal{C} - \Gamma(\alpha).$$

### A.2.2 Rayon de la sphère support

Le rayon de la sphère support ne sera pas utilisé mais il a la valeur suivante.

Partant des équations des deux cônes (équations 11.2, 11.3) :

$$\Gamma \equiv x^2 + y^2 - \tan^2 \gamma z^2 \quad (\text{A.25})$$

$$\mathcal{C} \equiv (x - dw)^2 + y^2 - \tan^2 \alpha (z + hw)^2 \quad (\text{A.26})$$

La sphère dérivée de  $\mathcal{C}$  a pour rayon

$$r_{\mathcal{C}} = h \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{r}{\cos \alpha}.$$

Si on note  $\eta$  l'angle au sommet du cône conjugué de  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma$  et en utilisant la notation :  $t = \tan^2 \alpha - \tan^2 \gamma$ , la sphère support a pour rayon :

$$R_{\mathcal{C}\Gamma} = \frac{h \tan \delta}{t \cos \alpha \cos \gamma \cos \eta}.$$

La quantité  $\frac{d}{t}$  est donc invariante par permutation sur les trois cônes  $\mathcal{C}, \Gamma$  et leur cône conjugué ( $\frac{d}{t} = \frac{dm}{ta}$ ).

## **APPENDICE B**

### **LISTE DES PARAGRAPHES REPRIS DU MÉMOIRE DE MAÎTRISE**

Source : Calcul optimum d'un diagramme de Voronoï à base de cercles avec un algorithme à balayage par cercle (Pavillet, 2000).

1.1, 1.2, 1.5, 1.6.1, 1.6.3

7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5

8.1, 8.2, 8.3 à 8.3.4, 8.4, 8.5

A.1

## APPENDICE C

### RÔLE ET RÉALISATION DES FIGURES

La géométrie algorithmique comprend par définition une part importante de géométrie. Qui dit géométrie ne dit pas nécessairement figures puisque la géométrie est avec le temps devenue de plus en plus abstraite. Certains font même de l'absence de figures une nécessité pédagogique : « *Quant aux figures, nous les avons peu multipliées, nous conformant ainsi aux vues de Chasles lui-même et convaincu que des notations convenablement choisies permettent généralement de suivre une démonstration mieux qu'une figure qui détourne forcément l'attention.* » (Duporcq, 1912, préface).

Heureusement on trouve aussi le point de vue inverse, par exemple dans l'introduction de son livre de géométrie, Berger écrit : « *Donner ensuite des figures ; la plupart du temps nous avons surtout au début de l'ouvrage, fait une figure pour chaque raisonnement géométrique.* » (Berger, 1990 p. 13). Il cite enfin Lebesgue : « *La géométrie devenait une étude des équations algébriques, différentielles ou aux dérivées partielles ; elle perdait ainsi tout le charme qu'elle doit au fait d'être un art, et presque un art plastique.* » (ibid. p. 17).

C'est ce dernier point de vue qui est adopté ici.

De plus, si l'on peut raisonner juste sur une figure fausse ou approximative, il est certain, surtout en géométrie dans l'espace, que la vue d'une figure exacte en trois dimensions donne bien plus de renseignements sur les propriétés géométriques de la figure considérée. Si des points ou des droites apparaissent coplanaires sur une figure exacte, on peut

toujours vérifier si la propriété est due au hasard ou pas, même si l'on n'en avait pas soupçonnée l'existence. C'est ainsi que le fait que le centre balayage appartienne au plan des centres du réseau des sphères supports a été remarqué (Proposition 4, p. 182). Encore plus intéressant, sur la figure (Fig. C.1) on voit la sphère support  $\mathcal{S}_{12}$  (Définition 21, p. 174) de deux cônes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  avec leur courbe d'intersection (en rouge)  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2}$  (les deux boucles correspondent aux parties supérieures et inférieures des cônes). Sur cette sphère ont été construits les cercles des quatre points d'intersection avec un troisième cône de balayage et correspondants à différentes valeurs de l'angle au sommet de ce cône de balayage (rose et bleu). Comme la figure est exacte, les positions relatives des cercles sur la sphère suggèrent immédiatement de vérifier que les cercles appartiennent à un faisceau à points limites. La construction des intersections des plans des quatre cercles donnant la même droite  $\Delta$  confirme cette hypothèse (Fig. C.2)<sup>1</sup>. Il reste à en faire une démonstration, mais la figure dans l'espace est beaucoup plus parlante que le résultat du calcul en géométrie analytique, qu'il soit fait à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique comme Mathematica ou Maple ou même manuellement. Graphiquement, on peut obtenir des résultats équivalents avec Mathematica (Fig. C.3, une biquadratique avec ses tangentes aux sommets), mais on ne trouvera le plus souvent sur la figure tracée que ce que l'on y aura directement programmé ; les objets obtenus sont enfin beaucoup moins faciles à manipuler.

Les figures qui précèdent permettent donc non seulement de faciliter l'exposition de la thèse mais encore leurs versions 3D ont été un élément important de son élaboration.

Ainsi, ces figures ayant été un préalable aux développements des algorithmes, leur réalisation a posé deux problèmes particuliers. Le premier, mineur, est celui de la *construction* rapide d'exemples des différents diagrammes de Voronoï étudiés dans  $\mathbb{R}^2$ . Ce problème se résout par lui-même dès lors que l'on applique les représentations dans  $\mathbb{R}^3$  des volumes

<sup>1</sup>Sur cette figure, on ne considère plus que quatre positions successives du cône de balayage avec ces deux cônes. Les points d'intersection sont sur quatre cercles, en bleu, tangents à la biquadratique et donc correspondent aux points sextuples.

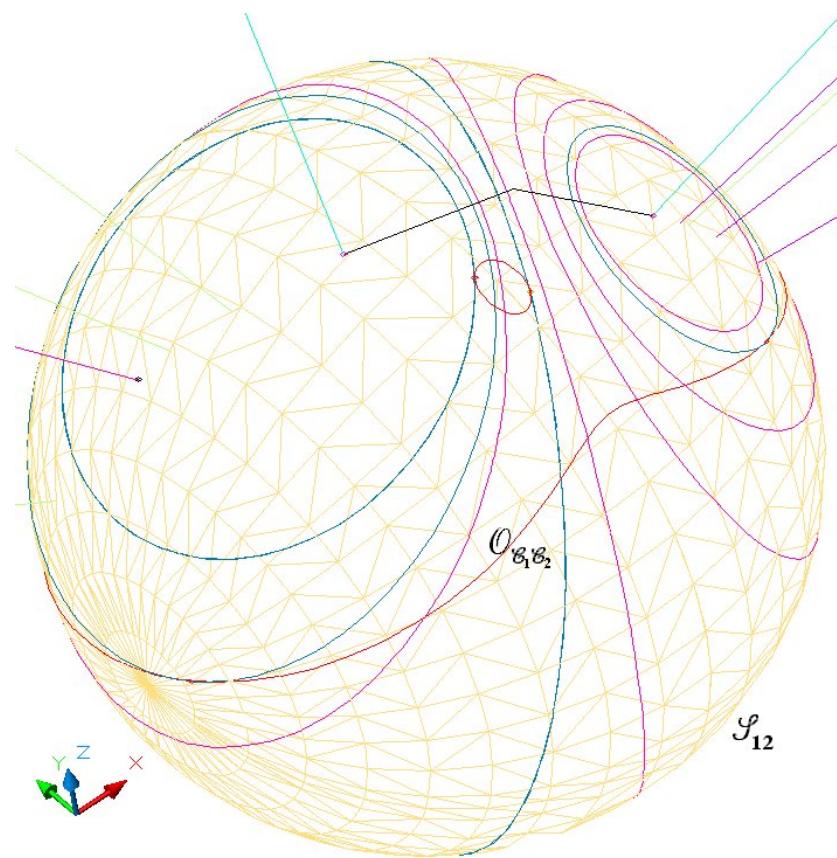


Figure C.1

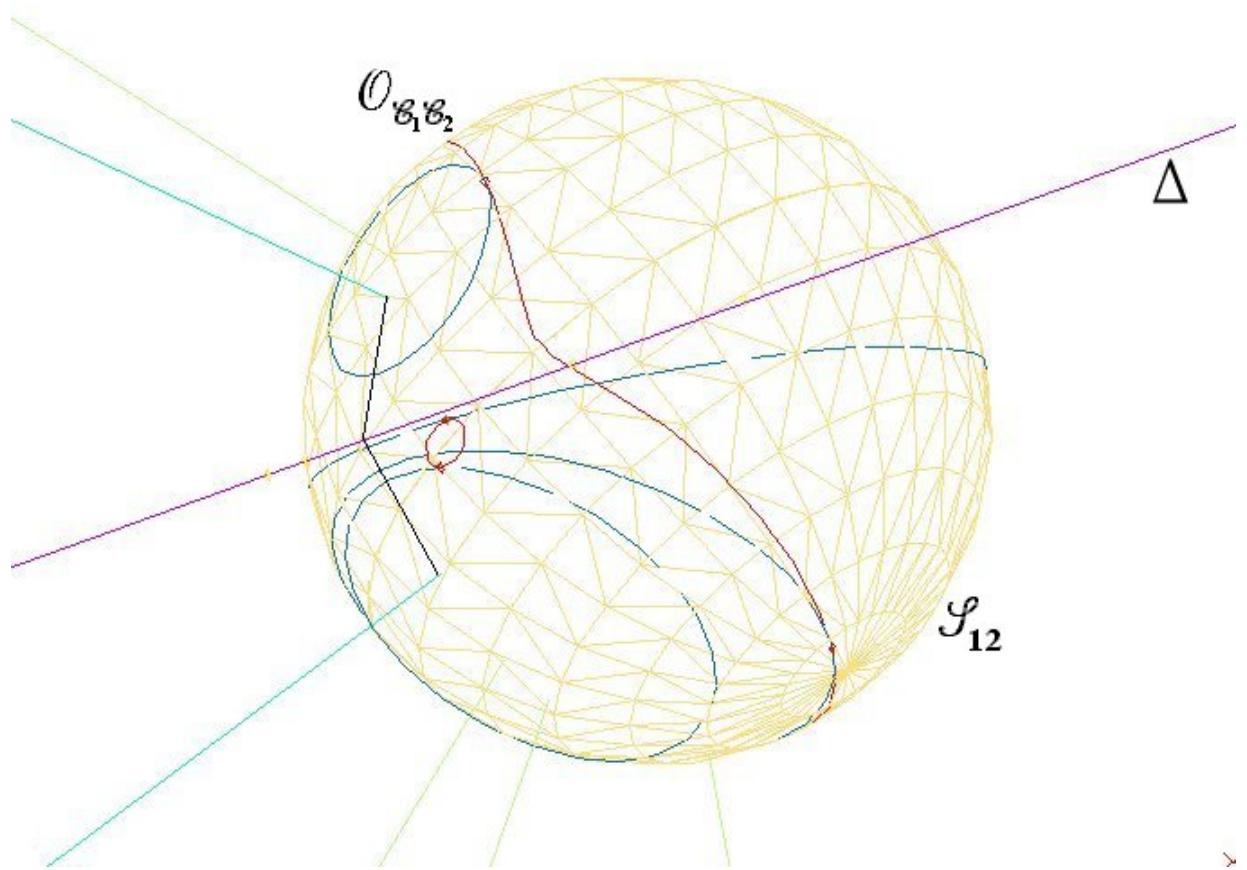
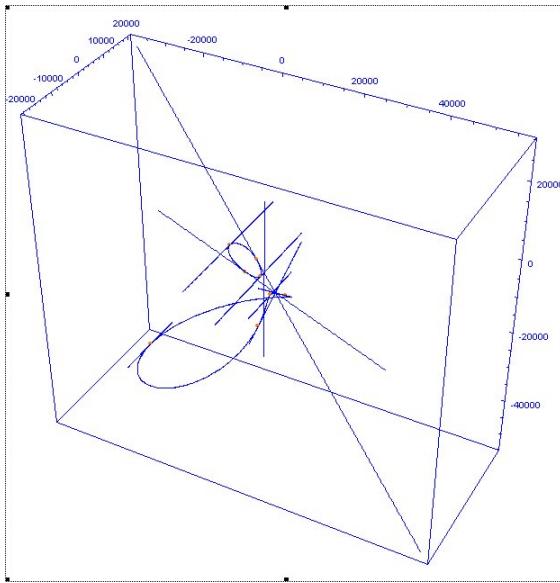


Figure C.2



**Figure C.3**

et surfaces enveloppes correspondants aux diagrammes (Tableau 2.5, p. 43 et Définition 7, p. 56). Dans le cas de la géométrie hyperbolique on a utilisé le logiciel de Rice University et la méthode exposée au paragraphe 10.7, avec la version « light » d'AutoCAD ; les figures sont planes. Dans tous les autres cas on a utilisé les logiciels AutoCAD 2002 ou Rhino 3D conçus pour la manipulation directe d'objets géométriques dans l'espace, et la vue de dessus s'obtient ensuite automatiquement. Il faut noter qu'en ce qui concerne les diagrammes de Möbius, réalisés avec le logiciel Rhino3D qui permet la manipulation directe de paraboloïdes de révolution, on atteint les limites du logiciel dans la mesure où l'opération d'intersection booléenne des surfaces met quelquefois le logiciel en échec ; la précision des images s'en ressent.

C'est d'autant plus important que, si l'on peut utiliser une construction plane pour construire les diagrammes de Voronoï de points pondérés ou de cercles euclidiens, en ce qui concerne les cercles pondérés, il n'y a pas de logiciels existants permettant d'utiliser l'équivalent d'un compas elliptique pour construire dans le plan des ovales de Descartes. De fait aucune des figures représentant les ovales de Descartes n'est plane : l'utilisation

intensive du théorème de Quetelet (Baudoin, 1938, chap. 9) a permis de résoudre le problème posé par l'absence de primitive graphique pour générer des ovales de Descartes. Pour obtenir un diagramme de Voronoï précis, les biquadratiques sont obtenues par intersections de volumes (cônes ou sphères) qui sont ensuite décomposés en surfaces, puis les surfaces elles-mêmes sont décomposées pour en extraire les courbes. Le diagramme final est alors obtenu en ne gardant que les parties visibles des courbes, ce qui est relativement facile avec les instructions du logiciel.

Pour les figures correspondantes aux propriétés géométriques aucun calcul n'est fait. On a opéré uniquement par des constructions géométriques, même pour la construction d'un point sextuple (en opérant à l'envers, c'est-à-dire en construisant un cône de révolution d'axe parallèle aux deux premiers et ayant avec eux une tangente commune - cf. Fig. 12.6). Ces constructions, faites en géométrie dans l'espace, utilisent l'équivalent de la règle et du compas dans le plan, c'est-à-dire, règle, générateur de plan, générateur de sphère, mais on n'a pas hésité à utiliser aussi le compas elliptique pour augmenter la productivité du dessin comme on l'a vu dans le cas de la construction de la médiatrice d'un segment dans le plan hyperbolique (§10.7, p. 166).

La complication des figures est extrêmement importante dès lors que l'on dépasse trois sites mais on peut gérer cette complication de manière satisfaisante en utilisant les couleurs, en répartissant les éléments géométriques sur plusieurs couches et en gérant judicieusement l'allumage ou l'extinction. Sans ces possibilités les figures deviendraient rapidement illisibles. L'usage de tous ces outils logiciels est développé dans l'article « *Replacing De(ad)scriptive Geometry* » (Pavillet, 2004) qui, entre autre, tire les leçons de la partie graphique de cette thèse.

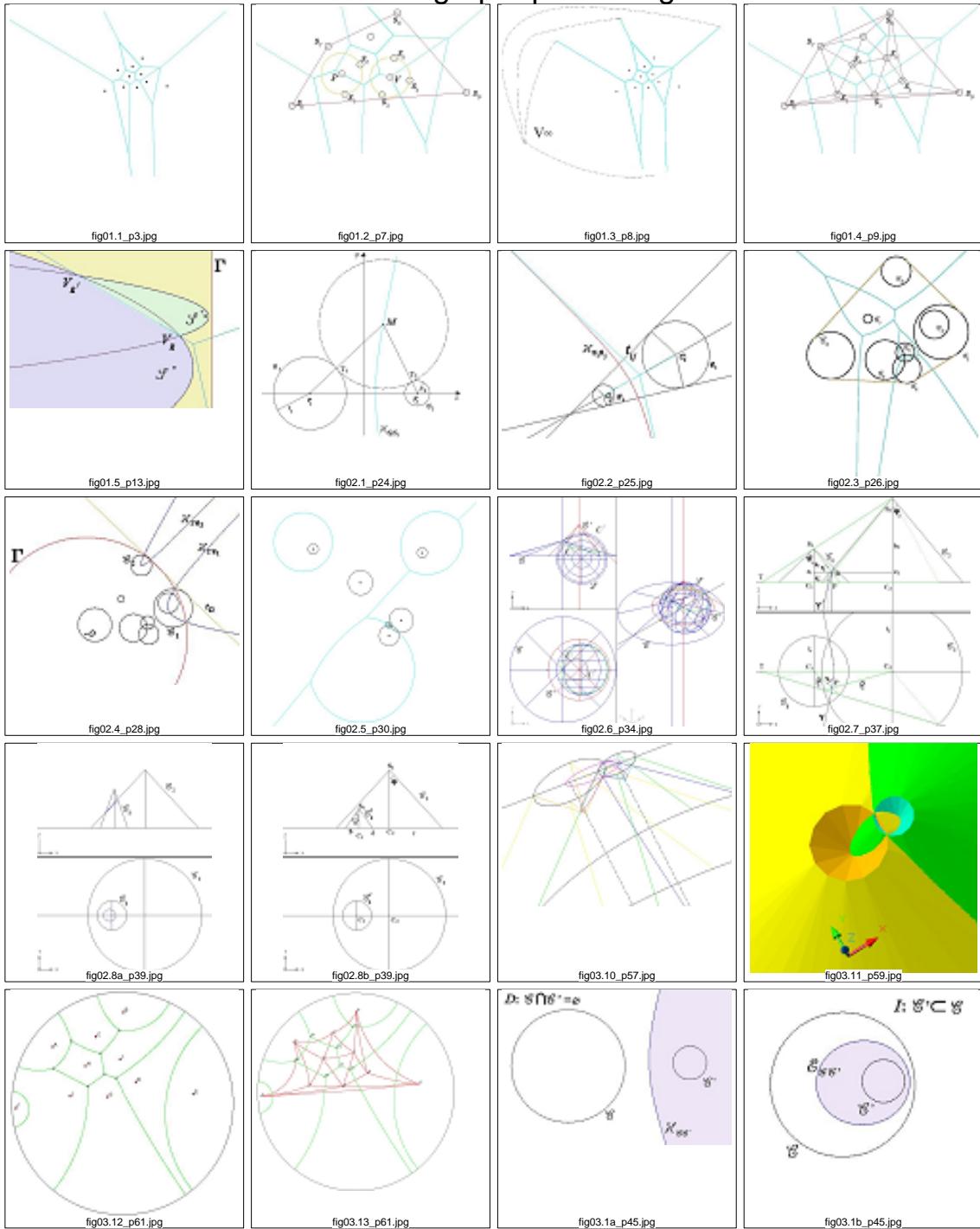
En ce qui concerne le jeu d'essai de l'algorithme à balayage par cône, on a d'abord construit le volume correspondant à la surface composite dont la ponctuation horizontale donne le diagramme de Voronoï à construire (Fig. 12.17, p. 236), puis après avoir calculé un pas de l'algorithme, on construit le cône de balayage ayant l'angle au sommet correspondant à ce pas ; enfin on fait la différence des deux volumes. Cette solution a

deux avantages. D'une part le tracé du front d'onde est automatique : la productivité est très bonne. D'autre part cela a permis de vérifier le calcul du front d'onde par le programme de manière indépendante.

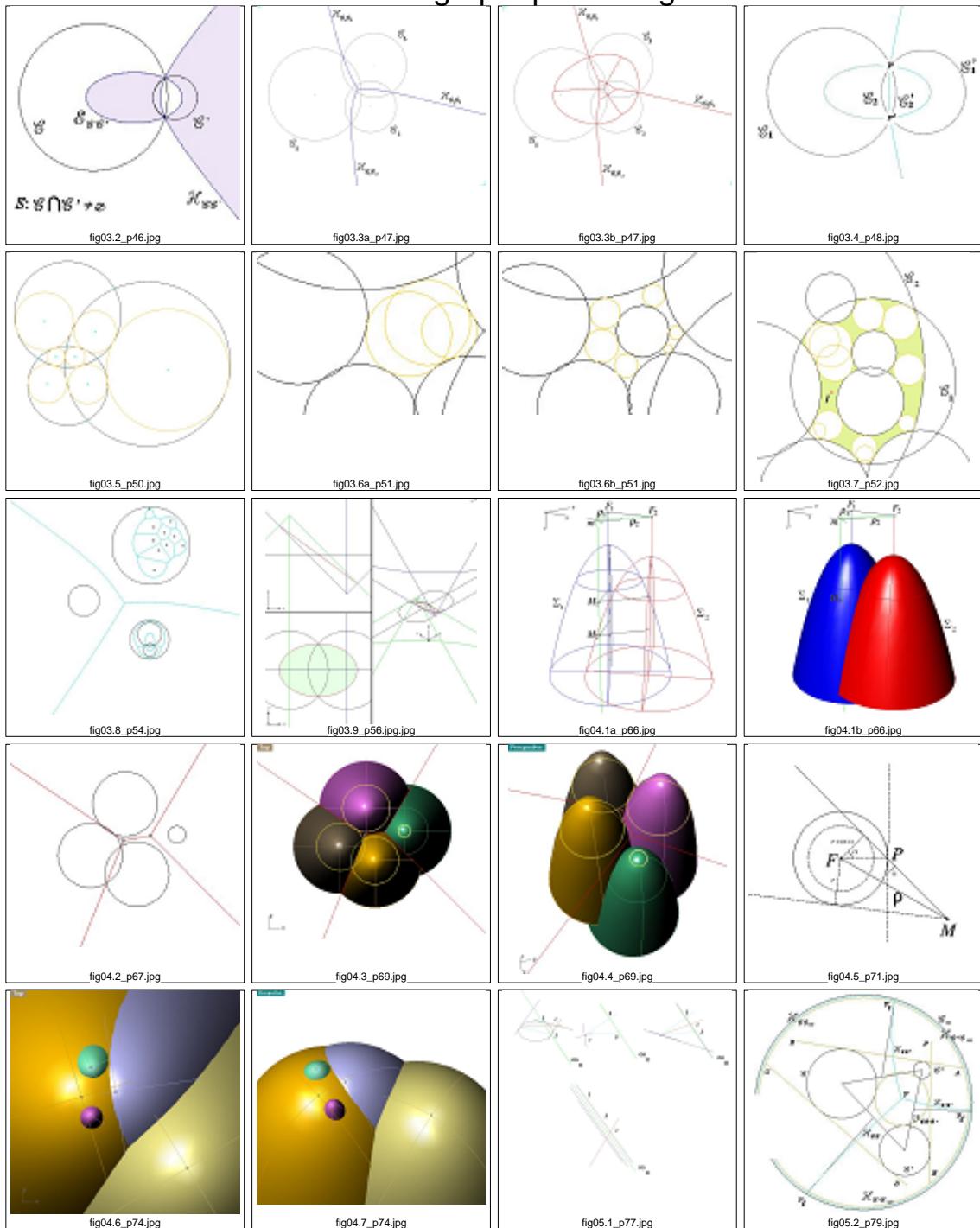
## **APPENDICE D**

### **TABLE GRAPHIQUE DES FIGURES**

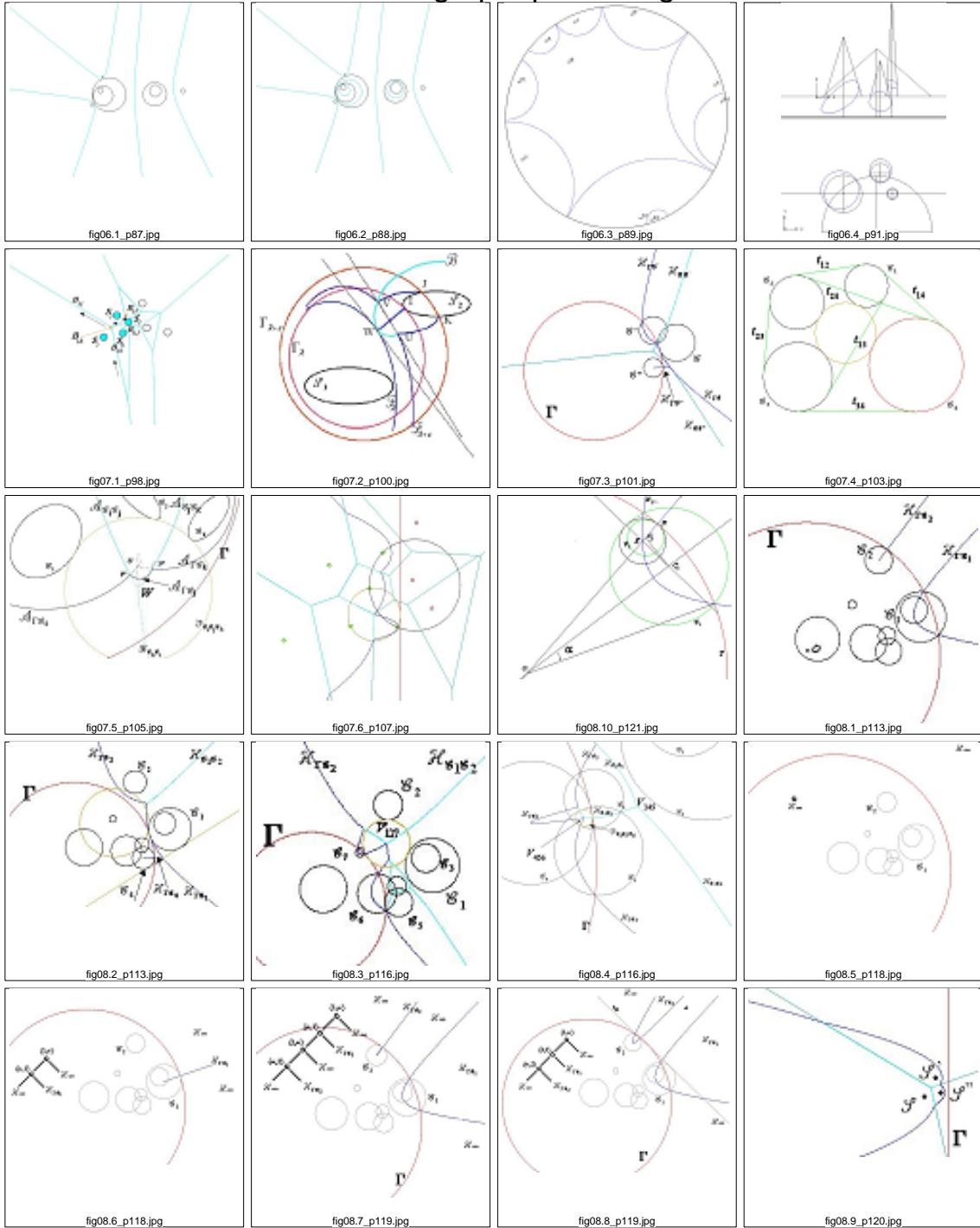
**- Table graphique des figures -**



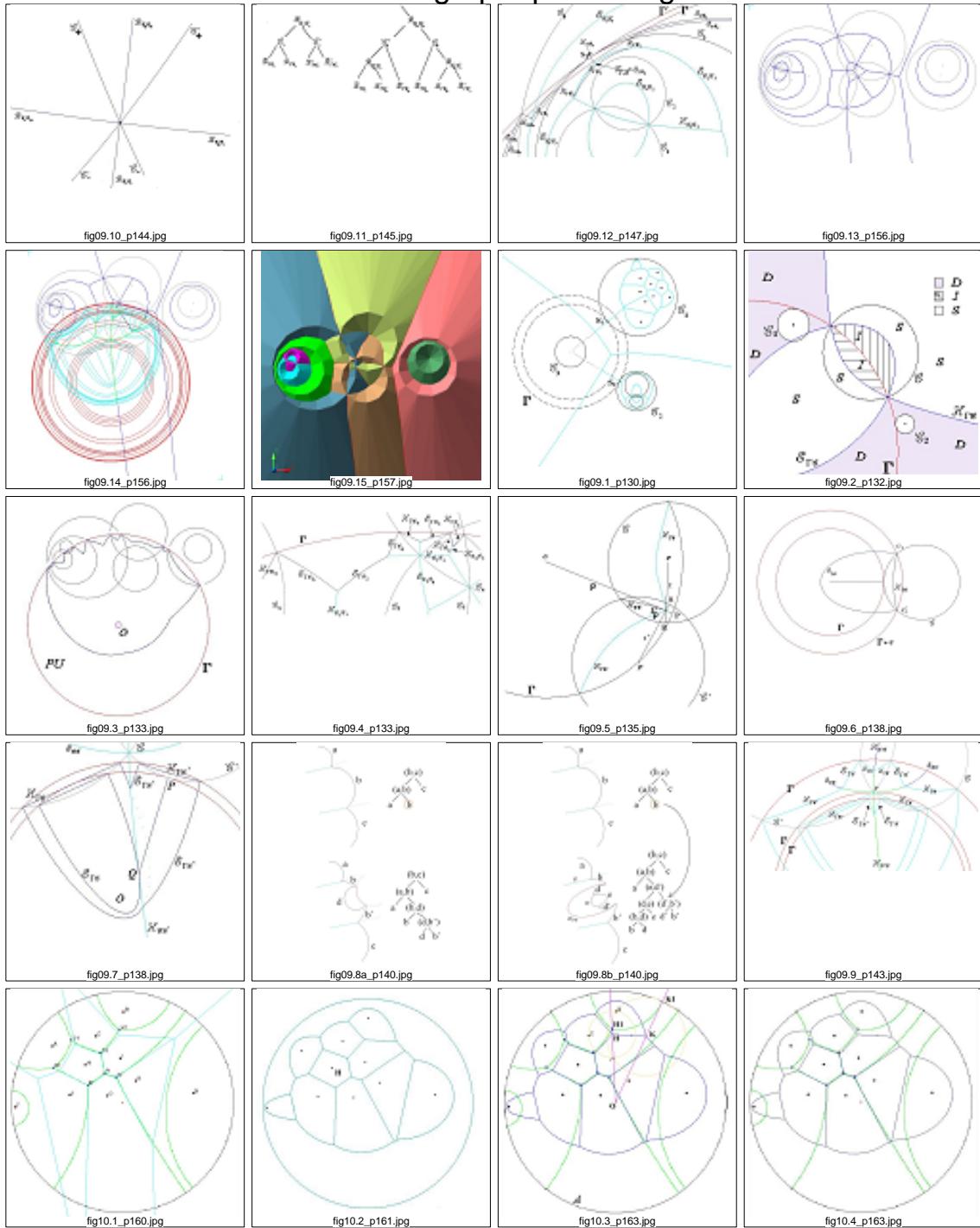
**- Table graphique des figures -**



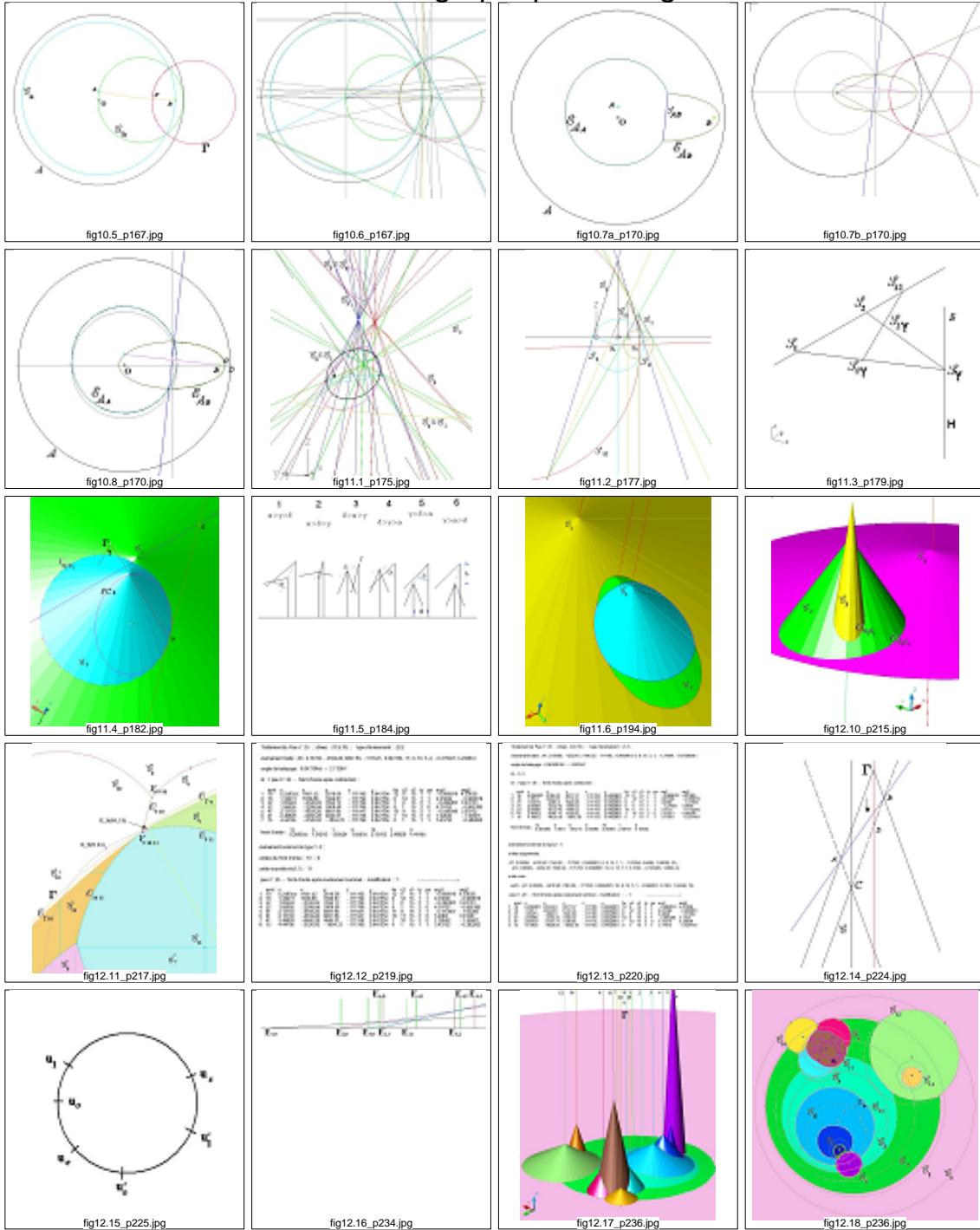
## - Table graphique des figures -



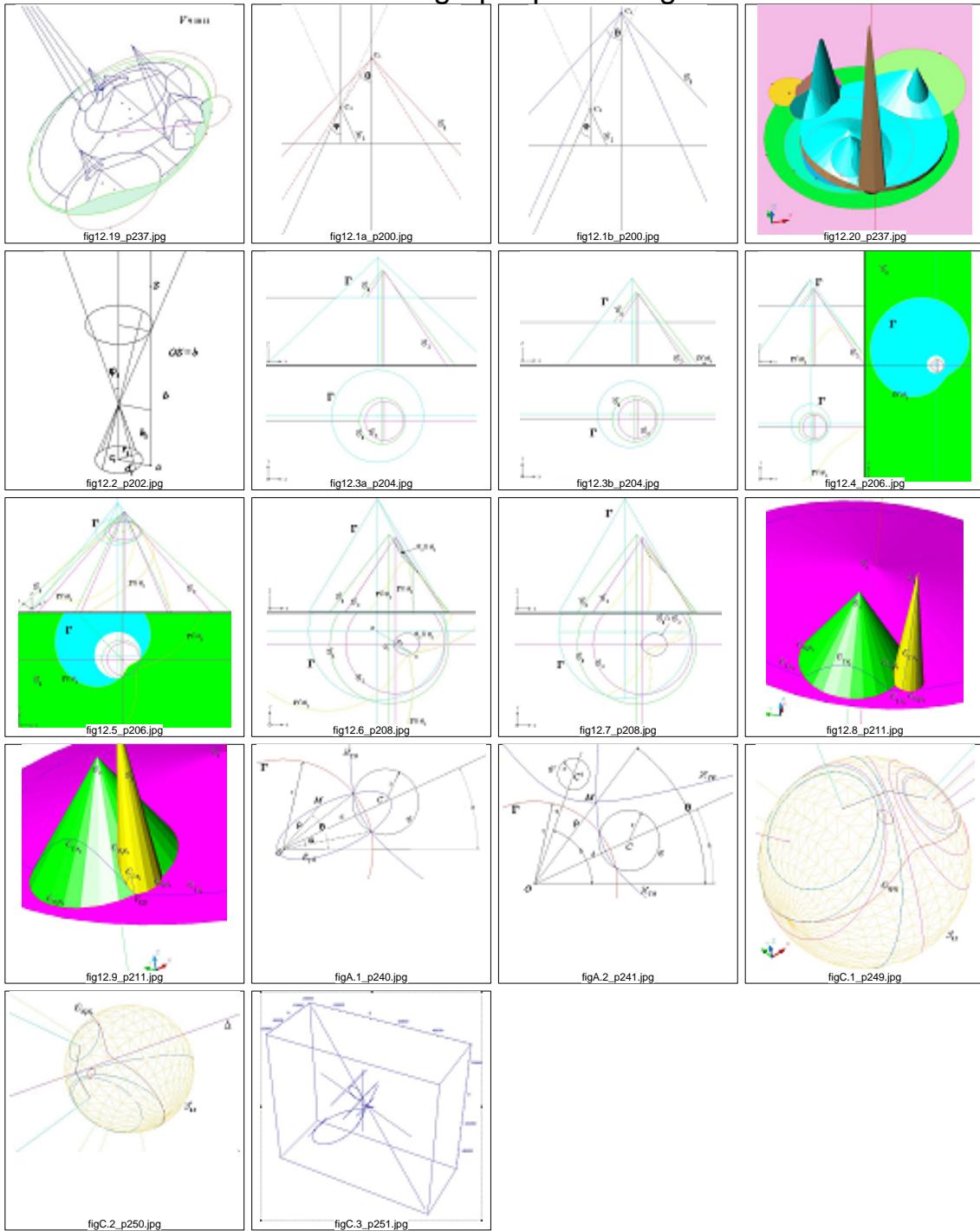
## - Table graphique des figures -



## - Table graphique des figures -



**- Table graphique des figures -**



## **APPENDICE E**

### **CODE SOURCE**

Algorithme à balayage par cône pour diagramme de Voronoï de points à pondération composite. Copyright (C) 2004 Axel Pavillet

This program is free software ; you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation ; either version 2 of the License, or (at your option) any later version.

This program is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY ; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for more details.

La dernière version peut être demandée par courriel à : [axel.pavillet@polytechnique.org](mailto:axel.pavillet@polytechnique.org).

# (\* Calcul et gestion des évènements de l'algorithme à balayage par cône à l'aide des fonctions elliptiques V1.5\*)

(\* fichier eventspalestrina.dwg \*)

```
In[1]:= Off[General::spell]
Needs["Graphics`Master`"]
<< Graphics`Shapes`
<< Calculus`VectorAnalysis`
<< Graphics`ParametricPlot3D`
<< NumericalMath`InterpolateRoot`
<< DiscreteMath`Tree`
```

```
In[8]:= (* conversion en radian *)
rdn[list_] := ReplacePart[list, list[[4]] Degree, 4]
(* Equation générale des cônes *)
cg[cx_, cy_, ch_, ct_] := (x - cx*w)^2 + (y - cy*w)^2 - Tan[ct]^2 * (z + ch*w)^2
gb[x_, y_, z_, w_, β_] := (x - a*w)^2 + (y - b*w)^2 - Tan[β]^2 * (z + k*w)^2
(* Equation du cône 1, cone de base *)
Γ[x_, y_, z_, γ_] := x^2 + y^2 - Tan[γ]^2 * z^2
```

```

(* Equation du cône 2, cone définissant la biquadratique *)
f[x_, y_, z_, w_] := (x - d * w)2 + y2 - Tan[α]2 * (z + h * w)2
(* Equation du cône 3, cone définissant le plan d'intersection *)
g[x_, y_, z_, w_] := (x - a * w)2 + (y - b * w)2 - Tan[β]2 * (z + k * w)2

(* formules de changement d'axes – origine sur le cône de base, axe Ox dans le plan des sommets*)
nx[cux_, cuy_, cdx_, cdy_] := (x - cux) * Cos[ArcTan[(cdy - cuy)/(cdx - cux)]] + (y - cuy) * Sin[ArcTan[(cdy - cuy)/(cdx - cux)]]]
ny[cux_, cuy_, cdx_, cdy_] := -(x - cux) * Sin[ArcTan[(cdy - cuy)/(cdx - cux)]] + (y - cuy) * Cos[ArcTan[(cdy - cuy)/(cdx - cux)]]]
nz[ch_] := z + ch

(* formules réciproques *)
ox[cx_, cy_, ca_] := (x - cx) * Cos[ca] + (y - cy) * Sin[ca]
oy[cx_, cy_, ca_] := -(x - cx) * Sin[ca] + (y - cy) * Cos[ca]
oz[ch_] := z - ch

(* calcul des angles polaires entre 0 (inclus) et 2 Pi (exclus) *)
angt[x_, y_] := Which[x == 0 ∧ y == 0, 0, x == 0, Pi - Pi * Abs[y]/y/2,
                      x > 0 && y >= 0, ArcTan[y/x], x > 0 && y < 0, 2 * Pi + ArcTan[y/x], x < 0 && y == 0, Pi, x < 0, ArcTan[y/x] + Pi]

(* fonction d'intervalle pour les angles polaires *)
fints[uv1_, uv2_, wv_] :=
  intsp = Interval[{uv1, uv2}];
  intsm = Min[intsp];
  boul = IntervalMemberQ[intsp, wv];
  If[(boul == True && uv1 == intsm) ∨ (boul == False && uv2 == intsm), ifcas = 1, ifcas = 2];
  If[vrc == 1, Print["fonction fints. uv1 : ", uv1, " ; uv2 : ", uv2, " ; intsp : ", intsp, " ; wv : ", wv, " - boul : ", boul],];
)

(* fonctions de tris sur les coordonnées angulaires *)
adrSort[rec1_, rec2_] := rec1[[4]] < rec2[[4]];
adsSort[rec1_, rec2_] := rec1[[4]] > rec2[[4]];
adtSort[rec1_, rec2_] := rec1[[5]] < rec2[[5]];
adpSort[rec1_, rec2_] := rec1[[2]] < rec2[[2]];
adaSort[rec1_, rec2_] := rec1[[6]] > rec2[[6]];
mincon[evt_] := Which[Min[dav[[evt[[7]] + 1, 6]], dav[[evt[[8]] + 1, 6]]] == dav[[evt[[7]] + 1, 6]],
)

```

---

```

evt[7] + 1, Min[dav[[evt[7]] + 1, 6]], dav[[evt[8]] + 1, 6]] == dav[[evt[8]] + 1, 6]], evt[8] + 1];
maxcon[evt_] := Which[Max[dav[[evt[7]] + 1, 6]], dav[[evt[8]] + 1, 6]] == dav[[evt[7]] + 1, 6]],
  evt[7] + 1, Max[dav[[evt[7]] + 1, 6]], dav[[evt[8]] + 1, 6]] == dav[[evt[8]] + 1, 6]], evt[8] + 1];

(* pour choisir le cône ayant le plus petit angle au sommet parmi deux événements ou cônes standards *)
choixcones[ev1_, ev2_] := (
  Which[Min[dav[[ev1[[7]] + 1, 6]], dav[[ev2[[7]] + 1, 6]]] == dav[[ev1[[7]] + 1, 6]],
    ncon = ev1[[7]] + 1, Min[dav[[ev1[[7]] + 1, 6]], dav[[ev2[[7]] + 1, 6]]] == dav[[ev2[[7]] + 1, 6]], ncon = ev2[[7]] + 1];
    If[vre == 1, Print["plus petit des 2 cônes : ncon = ", ncon - 1],];
  Which[Max[dav[[ev1[[7]] + 1, 6]], dav[[ev2[[7]] + 1, 6]]] == dav[[ev1[[7]] + 1, 6]],
    mcon = ev1[[7]] + 1, Max[dav[[ev1[[7]] + 1, 6]], dav[[ev2[[7]] + 1, 6]]] == dav[[ev2[[7]] + 1, 6]], mcon = ev2[[7]] + 1];
    If[vre == 1, Print["plus grand des 2 cônes : mcon = ", mcon - 1],];
  )
)

(* distance des sommets *)
dc[cux_, cuy_, cdx_, cdy_] :=  $\sqrt{(cux - cdx)^2 + (cuy - cdy)^2}$ 

(* paramétrage du cas 1 paramètre réel *)
(*  $u \in [0, 4*\text{EllipticK}(1/m)]$  *)
xl1[u_] := (d/h) * (1 +  $\sqrt{(t/m)/t1} \text{JacobiSN}[u, m]$ )
yl1[u_] :=  $\sqrt{(-t2)} \text{JacobiCN}[u, m]$ 
zl1[u_] := -(1 +  $\sqrt{(t1 m/t)} \text{JacobiSN}[u, m]$ )
wl1[u_] := (1/h) * (1 -  $\sqrt{(-t2/t1)} \text{JacobiDN}[u, m] + \sqrt{(t m/t1)} \text{JacobiSN}[u, m]$ )

(* paramétrage du cas 2 – paramètre réel *)
(*  $u \in [0, 4*\text{EllipticK}(m)]$  *)
xl2[u_] := (d/h) * (m +  $\sqrt{m*t1/t} \text{JacobiSN}[u, m]$ )
yl2[u_] := - $\sqrt{m*t1*t2/t} \text{JacobiCN}[u, m]$ 
zl2[u_] := -(t1/t +  $\sqrt{m*t1/t} \text{JacobiSN}[u, m]$ )

```

```

wl2[u_] := (1/h) * (1 - sqrt[t2/t] JacobiDN[u, m] + sqrt[m*t1/t] JacobiSN[u, m])

(* parametrage du cas 3 parametre reel *)
(* u ∈ [0, 4*EllipticK(-m/(1-m))] *)
xI3[u_] := (d/h) * JacobiCN[u, m] + Tan[γ]
yI3[u_] := -sqrt[t2] * JacobiSN[u, m]
zI3[u_] := -JacobiCN[u, m] - d/(h * Tan[γ])
wl3[u_] := (1/h) * ((d*t/(h*Tan[γ]*t1)) + JacobiCN[u, m] - (Tan[α]*t2/(Tan[γ]*t1))*JacobiDN[u, m])

(* paramétrage du cas 4 – parametre reel *)
(* u ∈ [0, 4*EllipticK(m-1/m)] *)
xI4[u_] := (d/h) * (1 + sqrt(t/t1)/(1 - m) JacobiDN[u, m])
yI4[u_] := sqrt[t2*m/(1 - m)] JacobiCN[u, m]
zI4[u_] := -(1 + sqrt(t1/t) JacobiDN[u, m])
wl4[u_] := (1/h) * (1 + sqrt[-t2*m/t1] JacobiSN[u, m] + sqrt(t/t1) JacobiDN[u, m])

(* fonction d' intervalles pour la détermination des côtés des biquadratiques *)
fintr[uv0_, uv1_, uva_, uvb_, pK_] := (
  If[vrc == 1, Print["période 4 K : ", 4*pK],];
  deb = 0;
  um0 = Mod[uv0, 4*pK];
  um1 = Mod[uv1, 4*pK];
  uma = Mod[uva, 4*pK];
  umb = Mod[uvb, 4*pK];
  ints0 = Interval[{um0, um1}];
  If[vrc == 1, Print["intervalle de départ avant contraction – ints0 : ", ints0],];
  If[um0 == Min[ints0], kval = 0, kval = 1];
  intsa = Interval[{uma, umb}];
  If[vrc == 1, Print["intervalle d'arrivée après contraction – intsa : ", intsa],];
  ints = IntervallIntersection[ints0, intsa];
  If[vrc == 1, Print["intersection des 2 intervalles – ints : ", ints],];
)

```

```

If[vrc == 1, Print[" intervalles : uv0 = ", uv0, " ; um0 = ", um0, " ; uv1 = ", uv1,
" ; um1 = ", um1, " ; uva = ", uva, " ; uma = ", uma, " ; uvb = ", uvb, " ; umb = ", umb, " ; deb = ", deb],];
If[ints == ints0, deb = 1; If[vrc == 1, Print["intersection des 2 intervalles - ints : ", ints0, " ; deb = ", deb],,];
If[ints == intsa, deb = 2; If[vrc == 1, Print["intersection des 2 intervalles - ints : ", intsa, " ; deb = ", deb],,];
If[Min[ints0] > Max[intsa] || Min[intsa] > Max[ints0], deb = 3;
  If[vrc == 1, Print["Max(ints) = ", Max[ints], " Min(ints) = ", Min[ints], " deb = ", deb, " ; kval = ", kval],,];
  Which[deb == 1 || deb == 2, If[kval == 0, rum = Min[intsa], rum = Max[intsa]],
    deb == 3, If[kval == 1, rum = Min[intsa], rum = Max[intsa]], deb == 0, Print["deb = ", deb]; Abort[]];
  Which[rum == uma, ruv = uva, rum == umb, ruv = uvb, True, ruv = 0];
  If[vrc == 1, Print["rum = ", rum, " ; ruv = ", ruv],];
]
(* fonctions pour la sélection dans l' arbre *)
sl[s_, l_] := If[s == 0, l, s];
slm1[s_, l_] := If[s == 1, l, s - 1];
slm2[s_, l_] := Which[s == 1, l - 1, s == 2, l, True, s - 2];
slp1[s_, l_] := If[s == l, 1, s + 1];
slp2[s_, l_] := Which[s == l, 2, s == l - 1, 1, True, s + 2];

(* Equation du quatrième degré en sn(x) : as sn(x) + ac cn(x) + ad dn(x) + an = 0 *)
sn4[as_, ac_, ad_, an_, m_, x_] := ((as * x + an)^2 - ac^2 * (1 - x^2) - ad^2 * (1 - m * x^2))^2 - 4 * ac^2 * ad^2 * (1 - x^2) * (1 - m * x^2)
(* Equation du huitième degré en sn(x) : bsc sn(x) cn(x)+bcd cn(x) dn(x)++bds dn(x) sn(x)+bs sn(x) + bc cn(x) + bd dn(x) + bn = 0 *)
sn8[bsc_, bcd_, bds_, bs_, bc_, bd_, bn_, m_, x_] := ((bn + bs x)^2 + (1 - x^2) (bc + bsc x)^2 - (1 - m x^2) (bd + bds x)^2 - (1 - m x^2) (1 - x^2) bcd^2)^2 -
  4 (1 - x^2) ((bn + bs x) (bc + bsc x) - bcd (1 - m x^2) (bd + bds x))^2

(* calcul des solutions réelles *)
solr[xid_, yid_, zid_, wid_] := (
  T2beta = ((xid - a * wid)^2 + (yid - b * wid)^2) / (zid + k * wid)^2
  If[Head[T2beta] == Real, β = ArcTan[Sqrt[T2beta]],]
  If[(Head[xid] == Real ∧ Head[yid] == Real ∧ Head[zid] == Real ∧ Chop[f[xid, yid, zid, wid], tol] == 0 ∧
  Chop[T[xid, yid, zid, γ], tol] == 0 ∧
  Chop[pl4b[xid, yid, zid, wid, β], tol] == 0),

```

```

smt = Append[smt, {Chop[xid/wid], Chop[yid/wid], Chop[zid/wid], β, uv}];
If[vrc == 1, Print["solution trouvée : ----->, " x = ", xid/wid, " y = ", yid/wid, " z = ", zid/wid, " ; uv= ", uv,]];
If[vrc == 1, Print["evaluation: f[xid,yid,zid,wid] = ", f[xid, yid, zid, wid],
" ; Γ[xid,yid,zid,γ] = ", Γ[xid, yid, zid, γ], " ; pl4[xid,yid,zid,wid] = ", pl4b[xid, yid, zid, wid, β],];
smt = Sort[smt, adrSort];
)

tricones[] := (Module[{liste = sliste},
c1x = liste[[1, 3]]; c1y = liste[[1, 4]]; c1h = liste[[1, 5]]; c1t = liste[[1, 6]];
c2x = liste[[2, 3]]; c2y = liste[[2, 4]]; c2h = liste[[2, 5]]; c2t = liste[[2, 6]];
c3x = liste[[3, 3]]; c3y = liste[[3, 4]]; c3h = liste[[3, 5]]; c3t = liste[[3, 6]];
d = dc[c1x, c1y, c2x, c2y];
h = Abs[c1h - c2h];
β = c3t;
sgn = 1;
If[c1h - c2h < 0,
α = c2t;
γ = c1t;
dx = nx[c1x, c1y, c2x, c2y] /. {x -> c2x, y -> c2y};
dy = ny[c1x, c1y, c2x, c2y] /. {x -> c2x, y -> c2y};
orx = nx[c1x, c1y, c2x, c2y] /. {x -> 0, y -> 0};
ory = ny[c1x, c1y, c2x, c2y] /. {x -> 0, y -> 0};
ora = -ArcTan[(c2y - c1y)/(c2x - c1x)];
och = c1h;
a = nx[c1x, c1y, c2x, c2y] /. {x -> c3x, y -> c3y};
b = ny[c1x, c1y, c2x, c2y] /. {x -> c3x, y -> c3y};
If[dx < 0, sgn = -1; dx = -dx; a = -a; orx = -orx; ora = -ora,];
k = c3h - c1h;
α = c1t;
γ = c2t;
dx = nx[c2x, c2y, c1x, c1y] /. {x -> c1x, y -> c1y};
dy = ny[c2x, c2y, c1x, c1y] /. {x -> c1x, y -> c1y};

```

```

orx = nx[c2x, c2y, c1x, c1y] /. {x -> 0, y -> 0} ;
ory = ny[c2x, c2y, c1x, c1y] /. {x -> 0, y -> 0} ;
ora = -ArcTan[(c1y - c2y)/(c1x - c2x)];
och = c2h;
a = nx[c2x, c2y, c1x, c1y] /. {x -> c3x, y -> c3y} ;
b = ny[c2x, c2y, c1x, c1y] /. {x -> c3x, y -> c3y} ;
If[dx < 0, sgn = -1; dx = -dx; a = -a; orx = -orx; ora = -ora,];
k = c3h - c2h ];
If[vrc == 1, Print["module tricones - signe : ", sgn, "(-1 en cas de symétrie)"],];
] ;)

casfe[] := (
t = Tan[\alpha]^2 - Tan[\gamma]^2 ;
t1 = Tan[\alpha]^2 - (d/h)^2 ;
t2 = -Tan[\gamma]^2 + (d/h)^2;
tb = Tan[\beta]^2 - Tan[\gamma]^2;
δ = ArcTan[d/h]/Degree;
n = (Tan[\alpha]^2*t2)/((d/h)^2*t);
m = (Tan[\gamma]^2*t1)/((d/h)^2*t);
Which[t > 0 \wedge t1 > 0 \wedge t2 < 0, cas = 1; m = 1/m, t > 0 \wedge t1 > 0 \wedge t2 > 0, cas = 2, t > 0 \wedge t1 < 0 \wedge t2 > 0, cas = 3;
m = -m/(1 - m), t < 0 \wedge t1 < 0 \wedge t2 > 0, cas = 4; m = (m - 1)/m, t < 0 \wedge t1 < 0 \wedge t2 < 0, cas = 5, t < 0 \wedge t1 > 0 \wedge t2 < 0, cas = 6];
pK = EllipticK[m];
qK = EllipticK[1 - m];
bref = β;
If[vrc == 1, Print["module casfe :"]];
Print[ "valeurs numériques : "];
Print[ "cône de base S : γ = ", γ/Degree, "°"];
Print[ "cône 1 définissant la biquadratique avec S : α = ", α/Degree, "° ; d = ", d, " ; h = ", h];
Print[ "1/2 angle au sommet du cône auxiliaire δ = ", δ, "°"];
Print[ "distance horizontale entre les 2 premiers sommets : d = ", d, " ; dx = ", dx, " ; dy = ", dy];
Print[ "cône 2 définissant le plan d'intersection (coordonnées dans le repère local) : "];
Print[ "β = ", β/Degree, "° ; a = ", a, " ; b = ", b, " ; k = ", k];
Print[ "calcul des tangentes : "];
)

```

```

Print[ "tg( $\alpha$ )= ", Tan[ $\alpha$ ], " ; tg( $\beta$ )= ", Tan[ $\beta$ ], " ; tg( $\gamma$ )= ", Tan[ $\gamma$ ], " ; tg( $\delta$ )= ", d/h];
Print[ "t = ", t, " ; t1 = ", t1, " ; t2 = ", t2];
Print[ "paramètre : m = ", m, " ; paramètre initial : mi = ", 1 - n];
Print[ "Quart de période K = ", pK];
Print[ "Quart de période K' = ", qK];
Print[ "paramètre pour le changement d'axe retour"];
Print[ "orx = ", orx, " ; ory = ", ory, " ; ora = ", ora];
Print[ "cas = ", cas];
Print[ " $\alpha$ =",  $\alpha$ ];
Print[ " $\beta$ =",  $\beta$ ];
Print[ " $\gamma$ =",  $\gamma$ ];
Print[ "d=", d];
Print[ "h=", h];
Print[ "a=", a];
Print[ "b=", b];
Print[ "k=", k];
)
(* ----- *)
(* calcul des evenements entrée et sortie de sites par la methode du determinant *)
detcd[] := (
(* procedure pour eliminer les facteurs en 10n avant elevations au carre*)
Which[cas == 1, normax = Max[Abs[k1pbs], Abs[k1pbc], Abs[k1pbds], Abs[k1pbcd], Abs[k1pbds]];
tpbs = k1pbs/normax;
tpbc = k1pbc/normax;
tpbd = k1pbds/normax;
tpbsc = k1pbcd/normax;
tpbcd = k1pbcd/normax;
tpbds = k1pbds/normax;
tpbn = k1pbns/normax;
cas == 2, normax = Max[Abs[k2pbs], Abs[k2pbc], Abs[k2pbds], Abs[k2pbcd], Abs[k2pbds]];
tpbs = k2pbs/normax;
tpbc = k2pbc/normax;

```

```

tpbd = k2pbd/normax;
tpbsc = k2pbsc/normax;
tpbcd = k2pbcd/normax;
tpbds = k2pbds/normax;
tpbn = k2pbn/normax;;
cas == 3, normax = Max[Abs[k3pbs], Abs[k3pbc], Abs[k3pbds], Abs[k3pbcd], Abs[k3pb], Abs[k3pb]];
tpbs = k3pbs/normax;
tpbc = k3pbc/normax;
tpbd = k3pbd/normax;
tpbsc = k3pbsc/normax;
tpbcd = k3pbcd/normax;
tpbds = k3pbds/normax;
tpbn = k3pbn/normax;;
cas == 4, normax = Max[Abs[k4pbs], Abs[k4pbc], Abs[k4pbds], Abs[k4pbcd], Abs[k4pb], Abs[k4pb]];
tpbs = k4pbs/normax;
tpbc = k4pbc/normax;
tpbd = k4pbd/normax ;
tpbsc = k4pbsc/normax;
tpbcd = k4pbcd/normax;
tpbds = k4pbds/normax;
tpbn = k4pbn/normax];
(* retour au programme *)

eqsn8 = Expand[sn8[tpbsc, tpbcd, tpbds, tpbs, tpbc, tpbd, tpbn, m, x]];
solm = NSolve[eqsn8 == 0, x];
sol = {};
eqsn8 /. solm;
For [j = 1, j < 9,
solc = Chop[Part[Part[solm[[j]]], 1, 2], tol];
If[vrc == 1, Print["module detcd"]; Print ["solc : ", solc,];
If[Head[solc] == Real, sol = Append[sol, solc,]; j++];
If[vrc == 1, Print["module detcd"]; Print ["solutions réelles : ", sol,];
smt = {};

```

```

For[j = 1, j <= Length[sol],
uv = InverseJacobiSN[sol[[j]], m];
If[Head[uv] == Real,
Which[cas == 1, solr[xl1[uv], yl1[uv], xl1[uv], wl1[uv]], cas == 2, solr[xl2[uv], yl2[uv], xl2[uv], wl2[uv]],
cas == 3, solr[xl3[uv], yl3[uv], xl3[uv], wl3[uv]], cas == 4, solr[xl4[uv], yl4[uv], xl4[uv], wl4[uv]] ,];
If[Head[uv] == Real,
uv = -InverseJacobiSN[sol[[j]], m] + 2 * Re[pK] ;
Which[cas == 1, solr[xl1[uv], yl1[uv], xl1[uv], wl1[uv]], cas == 2, solr[xl2[uv], yl2[uv], xl2[uv], wl2[uv]],
cas == 3, solr[xl3[uv], yl3[uv], xl3[uv], wl3[uv]], cas == 4, solr[xl4[uv], yl4[uv], xl4[uv], wl4[uv]] ,];
j++]

(* on ne retient que les 2 valeurs extremes pour l' angle au sommet qui sont les deux seules solutions interessantes *)
If[vre == 1, Print["module detcdi - smt : ", smt,];
smu = Sort[smt, adrSort];
smv = {smu[[1]], smu[[Length[smu]]]};
If[vre == 1, Print["module detcdi - smv : ", smv,];
(* coordonnées des sommets dans le repère initial *)
vrtx = {};
For[j = 1, j <= Length[smv], vx = {};
nvx = sgn*ox[orx, ory, ora] /. {x -> smv[[j, 1]], y -> smv[[j, 2]]}; vx = Append[vx, nvx];
nvy = oy[orx, ory, ora] /. {x -> smv[[j, 1]], y -> smv[[j, 2]]}; vx = Append[vx, nvy];
nvz = oz[och] /. {z -> smv[[j, 3]]}; vx = Append[vx, nvz];
vx = Append[vx, smv[[j, 4]]]; vx = Append[vx, sliste[[1, 7]]]; vx = Append[vx, sliste[[2, 7]]]; vx = Append[vx, sliste[[3, 7]]];
vx = Append[vx, sliste[[4]]]; vx = Append[vx, j - 1]; tita = angt[vx[[1]], vx[[2]]]; vx = Prepend[vx, tita // N]; vx = Prepend[vx, 0];
vx = Append[vx, smt[[j, 5]]]; vx = Append[vx, 0]; vx = Append[vx, pK]; vx = Append[vx, 0]; vrtx = Append[vrtx, vx]; j++];
; If[Length[vrtx] > 0, vrtx[[1, 13]] = vrtx[[2, 12]]; vrtx[[2, 13]] = vrtx[[1, 12]],];
If[vrc == 1, Print["moduledetcd - nombre de solutions : ", Length[vrtx]]; Print[vrtx,];
Return
)

```

```

(* -----*)
(* calcul des evenements de types lmi *)
(* calcul des solutions extremes *)
sols[xid_, yid_, zid_, wid_] :=
  T2beta = ((xid - a * wid)^2 + (yid - b * wid)^2) / (zid + k * wid)^2
  β = ArcTan[ $\sqrt{T2beta}$ ];
  smt = Append[smt, {Chop[xid/wid], Chop[yid/wid], Chop[zid/wid], β, j*pK}];
  )

evimi[] := (
  smt = {};
  For[j = 0, j < 4, Which[cas == 1, sols[xl1[j*pK], yl1[j*pK], xl1[j*pK], wl1[j*pK]], cas == 2, sols[xl2[j*pK], yl2[j*pK], xl2[j*pK], wl2[j*pK]], cas == 3, sols[xl3[j*pK], yl3[j*pK], xl3[j*pK], wl3[j*pK]], cas == 4, sols[xl4[j*pK], yl4[j*pK], xl4[j*pK], wl4[j*pK]]]; j++];
  (* on ne retient que les 2 valeurs extremes pour l'angle au sommet qui sont les deux seules solutions interessantes *)
  If[vre == 1, Print["module imi - smt : ", smt, "];
  smu = Sort[smt, adrSort];
  smv = {smu[[1]], smu[[Length[smu]]]};
  If[vre == 1, Print["module imi - smv : ", smv, "];
  (* coordonnées des sommets dans le repère initial *)
  vrtx = {};
  For[j = 1, j <= Length[smv], vx = {};
    nvx = sgn * ox[orx, ory, ora] /. {x -> smv[[j, 1]], y -> smv[[j, 2]]}; vx = Append[vx, nvx];
    nvy = oy[orx, ory, ora] /. {x -> smv[[j, 1]], y -> smv[[j, 2]]}; vx = Append[vx, nvy];
    nvz = oz[och] /. {z -> smv[[j, 3]]}; vx = Append[vx, nvz]; vx = Append[vx, smv[[j, 4]]];
    vx = Append[vx, sliste[[1, 7]]]; vx = Append[vx, sliste[[2, 7]]]; vx = Append[vx, sliste[[3, 7]]]; vx = Append[vx, sliste[[4]]];
    vx = Append[vx, j - 1]; tita = Chop[angt[vx[[1]], vx[[2]]]]; vx = Prepend[vx, tita // N]; vx = Prepend[vx, 0];
    vx = Append[vx, smv[[j, 5]]]; vx = Append[vx, 0]; vx = Append[vx, pK]; vx = Append[vx, 0]; vrtx = Append[vrtx, vx]; j++];
  ; If[Length[vrtx] > 0, vrtx[[1, 13]] = vrtx[[2, 12]]; vrtx[[2, 13]] = vrtx[[1, 12]],];
  If[vre == 1, Print["module imi - nombre de solutions : ", Length[vrtx]]; Print[vrtx, "];
  Return
  )

```

```
(* -----*)

(* Procedure finale avec l' équation en sn (u), cn (u),
dn (u) donnant les points d' intersection de la biquadratique avec le plan du cercle des quatre points *)
procd[] := (
Which[
cas == 1, equk = Collect[pc4 /. {x -> xl1[u], y -> yl1[u], z -> zl1[u], w -> wl1[u]}, {JacobiSN[u, m], JacobiCN[u, m], JacobiDN[u, m]}],
cas == 2, equk = Collect[pc4 /. {x -> xl2[u], y -> yl2[u], z -> zl2[u], w -> wl2[u]}, {JacobiSN[u, m], JacobiCN[u, m], JacobiDN[u, m]}],
cas == 3, equk = Collect[pc4 /. {x -> xl3[u], y -> yl3[u], z -> zl3[u], w -> wl3[u]}, {JacobiSN[u, mm], JacobiCN[u, mm], JacobiDN[u, mm]}],
cas == 4, equk = Collect[pc4 /. {x -> xl4[u], y -> yl4[u], z -> zl4[u], w -> wl4[u]}, {JacobiSN[u, m], JacobiCN[u, m], JacobiDN[u, m]}]];
equsn = equk /. {JacobiSN[u, m] -> xt, JacobiCN[u, m] -> xt2, JacobiDN[u, m] -> mxt2};
coefls = Coefficient[equsn, {xt, xt2, mxt2}];
coefct = Coefficient[equsn /. {xt2 -> xt, mxt2 -> xt}, xt, 0];
coeflst = Append[coefls, coefct];

(* procedure pour eliminer les facteurs en 10n avant elevations au carre *)
abscoef = Map[Abs, coeflst];
maxil = Max[abscoef];
zf[x_] := If[x == 0, maxil, x];
eqcoef = Map[zf, abscoef];
minil = Min[eqcoef];
divmin[x_] := x / minil;
coeflst = Map[divmin, coeflst];
(* retour au programme *)

(* On élimine les termes en cn (u) et dn (u) en éllevant deux fois au carré *)
eqsn4 = sn4[coeflst[[1]], coeflst[[2]], coeflst[[3]], coeflst[[4]], m, snx];
(* équation du quatrième degré en sn (u) *)
eqsn4n = eqsn4 // N;
(* solutions de l' équation algébrique en sn (u) *)
solu = NSolve[eqsn4n == 0, snx];
If[vrc == 1, Print["module procd - solu :", solu, "];
```

```

sol = {};
For[j = 1, j < 5,
solc = Chop[Part[Part[solu[[j]]], 1, 2], tol];
If[vrc == 1, Print["module procd"]; Print["solc : ", solc],];
If[Head[solc] == Real, sol = Append[sol, solc],]; j++];
If[vrc == 1, Print["module procd"]; Print["solutions réelles : ", sol],];

(* élimination des racines doubles - *)
If[Length[sol] > 2, Union[sol];
  If[Chop[sol[[1]] - sol[[2]], tol] == 0, sol = Delete[sol, 2]; If[Chop[sol[[2]] - sol[[3]], tol] == 0, sol = Delete[sol, 3]],
   If[Chop[sol[[3]] - sol[[4]], tol] == 0, sol = Delete[sol, 4]; Print["élimination de racines doubles dans module procd"],];
smt = {};
  If[Length[sol] > 0, For[j = 1, j <= Length[sol],
uv = InverseJacobiSN[sol[[j]], m];
Which[cas == 1, solr[xl1[uv], yl1[uv], xl1[uv], wl1[uv]], cas == 2, solr[xl2[uv], yl2[uv], xl2[uv], wl2[uv]],
cas == 3, solr[xl3[uv], yl3[uv], xl3[uv], wl3[uv]], cas == 4, solr[xl4[uv], yl4[uv], xl4[uv], wl4[uv]]];
uv = -InverseJacobiSN[sol[[j]], m] + 2 * Re[pK];
Which[cas == 1, solr[xl1[uv], yl1[uv], xl1[uv], wl1[uv]], cas == 2, solr[xl2[uv], yl2[uv], xl2[uv], wl2[uv]],
cas == 3, solr[xl3[uv], yl3[uv], xl3[uv], wl3[uv]], cas == 4, solr[xl4[uv], yl4[uv], xl4[uv], wl4[uv]]];
j++],];
  If[vrc == 1, Print["module procd - calcul des coordonnées dans le repère initial "],];

(* coordonnées des sommets dans le repère initial *)
cont = -1;
vrtx = {};
For[j = 1, j <= Length[smt], vx = {};
  If[Abs[smt[[j, 4]] - bref] < tol/100, cont = cont + 1;
  nvx = sgn * ox[orx, ory, ora] /. {x -> smt[[j, 1]], y -> smt[[j, 2]]}; vx = Append[vx, nvx];
  nvy = oy[orx, ory, ora] /. {x -> smt[[j, 1]], y -> smt[[j, 2]]}; vx = Append[vx, nvy];
  nvz = oz[och] /. {z -> smt[[j, 3]]}; vx = Append[vx, nvz]; vx = Append[vx, ArcTan[Sqrt[(nvx^2 + nvy^2)/nvz^2]]];
  vx = Append[vx, sliste[[1, 7]]]; vx = Append[vx, sliste[[2, 7]]]; vx = Append[vx, sliste[[3, 7]]]; vx = Append[vx, sliste[[4]]];
  vx = Append[vx, cont]; tit = angt[vx[[1]], vx[[2]]]; vx = Prepend[vx, tit // N]; vx = Prepend[vx, 0];
];

```

```

vx = Append[vx, smt[[j, 5]]]; vx = Append[vx, 0]; vx = Append[vx, pK]; vx = Append[vx, 0]; vrtx = Append[vrtx, vx];,] j++];
If[Length[vrtx] > 1, vrtx[[1, 13]] = vrtx[[2, 12]]; vrtx[[2, 13]] = vrtx[[1, 12]],];
If[vrc == 1, Print["module procđ - nombre de solutions : ", Length[vrtx]]; Print[vrtx], ];
(* reconstitution d'une racine double si on n'a qu'une seule racine *)
If[Length[vrtx] == 1, vrtx = Append[vrtx, vrtx[[1]]]; vrtx[[1, 13]] = vrtx[[1, 12]]; vrtx[[2, 12]] = vrtx[[1, 12]]; vrtx[[2, 13]] = vrtx[[1, 13]],];

Clear[equuk, equusn, coefls, coefct, coeflist, eqsn4, eqsn4n, solu, sol, xt, xt2, mxt2]
)

(* calcul d'événements sur trois cônes *)
coneV[n1_, n2_, n3_, nk_] := (
If[vre == 1, Print["_____"],];
If[n1 == n2, Print["erreur sur les cônes : ", n1 - 1, " ; ", n2 - 1, " ; ", n3 - 1]; Abort[]];
If[n1 == n3 || n2 == n3, Print["erreur sur les cônes : ", n1 - 1, " ; ", n2 - 1, " ; ", n3 - 1]; Abort[]];
sliste = {dav[[n1]], dav[[n2]], dav[[n3]], nk}; If[vre == 1, Print["module coneV. sliste :", sliste],];
tricones[]; casfe[];
If[cas == 5 || cas == 6, consom = Min[sliste[[1, 6]], sliste[[2, 6]], sliste[[3, 6]]]; Which[consom == sliste[[1, 6]],
    condom = sliste[[1, 7]], consom == sliste[[2, 6]], condom = sliste[[2, 7]], consom == sliste[[3, 6]], condom = sliste[[3, 7]]];
    Print["cône dominé : ", condom, " ; cas : ", cas], Which[nk == 1, evimi[], nk == 2, detcd[], nk == 3, procđ[]]];
vrtx = Sort[vrtx, adaSort]; If[vre == 1, Print["module coneV - vrtx trié sur l'angle au sommet : ", vrtx],];
If[vre == 1, Print["_____"],];
)

(* procđure pour le traitement du contact à l'infini *)
profwi[] := (
evtn = {};
coneV[evt[[1, 7]] + 1, cmj, cbl, 1];
For[j = 1, j < Length[vrtx] + 1, contev = contev + 1; vrtx[[j, 1]] = contev; vrtx[[j, 15]] = conpas; evtn = Append[evtn, vrtx[[j]]]; j++];
Print["contact à l'infini : module profwi - événements nouveaux :"];
Print[evtn];
)

```

```
(* procédure pour le traitement de l'entrée ou de la sortie d'un cône *)
profwe[] := (
    evtn = {};
    selec = 0;
    lfo = If;
    If[vre == 1, Print["procédure pour le traitement de l'entrée ou de la sortie d'un cône : module profwe - ", compas];
        If[vrc == 1, Print["front d'onde avant contraction :"]; Print[TableForm[fwv, TableSpacing -> {0, 1}, TableHeadings ->
            {Automatic, {"evnt", "\u03b8", "x", "y", "z", "\u03c6", "fw", "c2", "c3", "ty", "pe", "arg1", "arg2", "pK", "pas"}}], , , ];
    If[lf > 1,
        calfw[];
        fwa = {};
        fwb = {};
        fwch = 0;
        (* ne pas oublier de mettre l'autre cas pour la ligne de changement de date *)
        If[fwv[[Length[fwv], 2]] < fwv[[Length[fwv] - 1, 2]],
            If[vre == 1, Print["avant ligne de changement de date :", fwv, ,]; fwv = Prepend[fwv, fwv[[Length[fwv]]]];
            fwv = Delete[fwv, Length[fwv]]; If[vre == 1, Print["après ligne de changement de date :", fwv, ,];
            For[ind = 1, ind < lf + 1, fwa = Append[fwa, fwv[[ind, 2]]]; fwb = Append[fwb, fwv[[ind, 7]]]; ind++];
        If[vre == 1, Print["front d'onde avant événement - fwv : "]; Print[TableForm[fwv, TableSpacing -> {0, 1}, TableHeadings ->
            {Automatic, {"evnt", "\u03b8", "x", "y", "z", "\u03c6", "fw", "c2", "c3", "ty", "pe", "arg1", "arg2", "pK", "pas"}}], , , ];
            If[vre == 1, Print["front d'onde : ", TableForm[{fwa, fwb}, TableSpacing -> {0, 1}], ,];
            three = MakeTree[fwa];
            selec = TreeFind[three, evt[[1, 2]]];
            If[vrb == 1, Print["selec= ", selec, ,]; selec = si[selec, lf]; If[vrb == 1, Print["selec mod= ", selec, ,]; corselec[],];
            Which[evt[[1, 11]] == 1, entre[], evt[[1, 11]] == 0, sorti[]];
            fwa = {};
            fwb = {};
            For[ind = 1, ind < lf + 1, fwa = Append[fwa, fwv[[ind, 2]]]; fwb = Append[fwb, fwv[[ind, 7]]]; ind++];
            Print[" pas n\u00b0: ", compas, " - front d'onde apr\u00e8s \u00e9v\u00e9nement entre ou sortie de c\u00f4ne - modification : ",
                If - lfo, "----->"]; Print[TableForm[fwv, TableSpacing -> {0, 1}, TableHeadings ->
                    {Automatic, {"evnt", "\u03b8", "x", "y", "z", "\u03c6", "fw", "c2", "c3", "ty", "pe", "arg1", "arg2", "pK", "pas"}}], , , ];
            If[vrb == 1, Print["front d'onde : ", TableForm[{fwa, fwb}, TableSpacing -> {0, 1}], ,];
            If [lf > 3 && fwch == 1, fltr[], Print["fwv<3 ou pas de modification; pas de sommets \u00e0 filtrer"]];
        
```

```

)
entre[] := (
Which[If == 0, fwv = Insert[fwv, evt[[1]], 1]; fwv = Insert[fwv, evt[[1]], 1]; If = 2; fwch = 1;
fwv[[2, 7]] = fwv[[1, 8]]; fwv[[2, 8]] = fwv[[1, 7]], evt[[1, 10]] == 1  $\wedge$  evt[[1, 11]] == 1,
If[evt[[1, 8]] != fwv[[selec, 7]],
Print["cône prévu : ", evt[[1, 8]], " ; cône front d'onde : ", fwv[[selec, 7]], " ; module profwe : le point n'est pas sur le front d'onde"];
evisa = fwv[[selec]]; evisb = evt[[1]]; choixcones[evisa, evisb]; cone[ncon, mcon, cbl, 2];
For[j = 1, j < Length[vrtx] + 1, contev = contev + 1; vrtx[[j, 1]] = contev; vrtx[[j, 15]] = conpas; evtn = Append[evtn, vrtx[[j]]]; j++];
Print["point sextuple : module profwe – événements nouveaux :"];
Print[evtn], fwv = Insert[fwv, evt[[1]], selec + 1]; fwv = Insert[fwv, evt[[1]], selec + 1]; If = Length[fwv]; fwch = 1;
fwv[[selec + 2, 7]] = fwv[[selec + 1, 8]]; fwv[[selec + 2, 8]] = fwv[[selec + 1, 7]]]];
)
sorti[] := (
If[evt[[1, 7]] != fwv[[selec, 7]], Print["cône prévu : ", evt[[1, 7]], " ; cône front d'onde : ", fwv[[selec, 7]],
" ; module profwe : le point n'est pas sur le front d'onde et le traitement du cône n° ", evt[[1, 7]], " est définitivement terminé"],
Print["sortie du cône n° : "]; Which[Max[selec, slm1[selec, If]] == selec, fwv = Delete[fwv, selec]; fwv = Delete[fwv, slm1[selec, If]],
Max[selec, slm1[selec, If]] == slm1[selec, If], fwv = Delete[fwv, slm1[selec, If]]; fwv = Delete[fwv, selec]]; If = Length[fwv]; fwch = 1];
)
(* correction en cas de sélection incorrecte dans l' arbre <= *)
corselec[] := (
If[Chop[evt[[1, 2]] - fwv[[slp2[selec, If], 2]], tol] == 0,
selec = slp2[selec, If], If[Chop[evt[[1, 2]] - fwv[[slp1[selec, If], 2]], tol] == 0, selec = slp1[selec, If]]];
If[vre == 1, Print["selec = ", selec];
Print["selec corrigé = ", selec, " ; slm2[selec,If] = ", slm2[selec, If], " ; slm1[selec,If] = ", slm1[selec, If]];
Print["arêtes après correction : ", fwv[[slm1[selec, If]]], " ; ", fwv[[selec]], " ; ", evt[[1]], ];
)
(* procédure pour le traitement des points sextuples *)

```

```

profwt[] := ( evtn = {};
    selec = 0;
    fwch = 0;
    If[vre == 1, Print["procédure pour le traitement des points sextuples : module profwt - ", conpas];
        If[vrc == 1, Print["front d'onde avant contraction :"]; Print[fwv], , ];
        (* le traitement est sensiblement le même que dans profwi, mais ici le front d' onde a toujours une longueur >2 *)
        calfw[];
        fwa = {};
        fwb = {};
        If[fwv[[Length[fwv], 2]] < fwv[[Length[fwv] - 1, 2]], 
            If[vre == 1, Print["avant ligne de changement de date :", fwv], ]; fwv = Prepend[fwv, fwv[[Length[fwv]]]];
            fwv = Delete[fwv, Length[fwv]]; If[vre == 1, Print["après ligne de changement de date :", fwv], ];
            For[ind = 1, ind < If + 1, fwa = Append[fwa, fwv[[ind, 2]]]; fwb = Append[fwb, fwv[[ind, 7]]]; ind++];
            If[vre == 1, Print["front d'onde avant événement - fwv :"]; Print[TableForm[fwv, TableSpacing -> {0, 1}, TableHeadings ->
                {Automatic, {"evnt", "\u03b8", "x", "y", "z", "\u03c6", "fw", "c2", "c3", "ty", "pe", "arg1", "arg2", "pK", "pas"}}]], ];
            If[vrb == 1, Print["front d'onde : ", TableForm[{fwb, fwa}, TableSpacing -> {0, 1}], ];
            three = MakeTree[fwa];
            selec = TreeFind[three, evt[[1, 2]]];
            If[vrb == 1, Print["selec= ", selec], ]; selec = sl[selec, If]; If[vrb == 1, Print["selec mod= ", selec], ];
            If[vre == 1, Print["selec mod non corrigé= ", selec]; Print["selec mod +2 : ", selec + 2, " ; slm2 : ", slm2[selec, If]];
                Print["arêtes avant correction : fwv[[slm1[selec,If]]] = ", ,
                    fwv[[slm1[selec, If]]], " ; fwv(selec) = ", fwv[[selec]], " ; evt[[1]] = ", evt[[1]], , ];
                corselec[];
                Which[evt[[1, 10]] == 2 \u2227 evt[[1, 11]] == 1, prodeb[], evt[[1, 10]] == 2 \u2227 evt[[1, 11]] == 0, profin[]]; fwa = {};
                fwb = {};
                For[ind = 1, ind < If + 1, fwa = Append[fwa, fwv[[ind, 2]]]; fwb = Append[fwb, fwv[[ind, 7]]]; ind++];
                Print[" pas n\u00b0: ", conpas, " - front d'onde apr\u00e8s \u00e9v\u00e9nement point sextuple - modification : ", fwch, " ----->";
                    If[Length[fwv] > 1, Print[TableForm[fwv, TableSpacing -> {0, 1}, TableHeadings ->
                        {Automatic, {"evnt", "\u03b8", "x", "y", "z", "\u03c6", "fw", "c2", "c3", "ty", "pe", "arg1", "arg2", "pK", "pas"}}]], ];
                    Print["front d'onde : ", fwv, " - c'est fini :-)]; Return[]];
                If[vrb == 1, Print["front d'onde : ", TableForm[{fwb, fwa}, TableSpacing -> {0, 1}], ];
                If [If > 3 \u2227 fwch == 1, fltr[], Print["fwv<3 ou pas de modification; pas de sommets \u00e0 filtrer"]];
            )
        )
    )
)

```

```

(* début de tracé sur un cône *)
prodeb[] := (
If[evt[[1, 8]] != fwv[[selec, 7]], Print["cône prévu : ", evt[[1, 8]], " ; cône front d'onde : ", fwv[[selec, 7]],
" ; module profwt : le point n'est pas sur le front d'onde"]; evita = fwv[[selec]]; evitb = evt[[1]]; choixcones[evita, evitb];
coneve[ncon, mcon, cbl, 2]; If[vrtx[[1, 6]] >= bang, coneve[ncon, mcon, evt[[1, 8]] + 1, 3], ]; For[j = 1, j < Length[vrtx] + 1,
contev = contev + 1; vrtx[[j, 1]] = contev; vrtx[[j, 11]] = 2; vrtx[[j, 15]] = compas; evtn = Append[evtn, vrtx[[j]]]; j++];
Print[" pas n°: ", compas, " – point sextuple : module profwt + prodeb– événements nouveaux :"];
Print[evtn], fwv = Insert[fwv, evt[[1]], selec + 1]; fwv = Insert[fwv, evt[[1]], selec + 1]; If = Length[fwv]; fwch = 1;
fwv[[selec + 2, 7]] = fwv[[selec + 1, 8]]; fwv[[selec + 2, 8]] = fwv[[selec + 1, 7]]];
)

(*fin de tracé sur un cône *)
profin[] := (
If[vre == 1, Print ["procedure profin"],];
If[evt[[1, 7]] != fwv[[selec, 7]] && evt[[1, 7]] != fwv[[selec, 8]], Print["cône prévu : ", evt[[1, 7]], " ; cône front d'onde : ", fwv[[selec, 7]]];
Print[" – module profin : le point n'est pas sur le front d'onde"], Print["sortie du cône n° : ", evt[[1, 8]]];
Which[Max[selec, slm1[selec, If]] == selec, fwv = Delete[fwv, selec]; fwv = Delete[fwv, slm1[selec, If]],
Max[selec, slm1[selec, If]] == slm1[selec, If], fwv = Delete[fwv, slm1[selec, If]]; fwv = Delete[fwv, selec]]; If = Length[fwv]; fwch = 1]
)

(* procédure pour le traitement des sommets *)
profws[] := (
If[vre == 1, Print[" procédure pour le traitement des sommets : module profws – ", compas];
Print["front d'onde avant contraction :"]; If[vrb == 1, Print[TableForm[fwv, TableSpacing -> {0, 1}, TableHeadings ->
{Automatic, {"evnt", "\u03b8", "x", "y", "z", "\u03c8", "fw", "c2", "c3", "ty", "pe", "arg1", "arg2", "pK", "pas"}}]], ,];
evtn = {};
lfo = If;
calfw[];
(* génération de l'arbre, du front d'onde et sélection de l'arête à traiter*)
)

```

```

fwa = {};
fbw = {};
If[fwv[[Length[fwv], 2]] < fwv[[Length[fwv] - 1, 2]],
  If[vre == 1, Print["avant ligne de changement de date :", fwv,]; fwv = Prepend[fwv, fwv[[Length[fwv]]]];
  fwv = Delete[fwv, Length[fwv]]; If[vre == 1, Print["après ligne de changement de date :", fwv,];
  For[ind = 1, ind < If + 1, fwa = Append[fwa, fwv[[ind, 2]]]; fwb = Append[fbw, fwv[[ind, 7]]]; ind++];

If[vre == 1, Print[" pas n°: ", conpas, " – front d'onde avant événement – fwv : "];
Print[TableForm[fwv, TableSpacing -> {0, 1}, TableHeadings ->
{Automatic, {"evnt", "\u03b8", "x", "y", "z", "\u03c6", "fw", "c2", "c3", "ty", "pe", "arg1", "arg2", "pK", "pas"}}],];
three = MakeTree[fwa];
selec = TreeFind[three, evt[{1, 2}]];
selec = sl[selec, If];
If[vrb == 1, Print["selec mod= ", selec,];
If[vre == 1, Print["selec mod non corrigé= ", selec];
Print["selec mod +2 : ", selec + 2, " ; slm2 : ", slm2[selec, If]];
Print["arêtes avant correction : fwv[[slm1[selec,If]]] = ",
fwv[[slm1[selec, If]]], " ; fwv(selec) = ", fwv[[selec]], " ; evt[{1}] = ", evt[{1}], ];
corselec[]];
If[vre == 1, Print["evt[{1,11}] :", evt[{1, 11}],];
If[Chop[fwv[[selec, 2]] - fwv[[slm1[selec, If], 2]], tol] == 0, vv21[], vv12[]];
If = Length[fwv];
fwa = {};
fbw = {};
For[ind = 1, ind < If + 1, fwa = Append[fwa, fwv[[ind, 2]]]; fwb = Append[fbw, fwv[[ind, 7]]]; ind++];
Print[" pas n°: ", conpas, " – front d'onde après événement sommet – modification : ", If - lfo, " ----->"];
Print[TableForm[fwv, TableSpacing -> {0, 1}, TableHeadings ->
{Automatic, {"evnt", "\u03b8", "x", "y", "z", "\u03c6", "fw", "c2", "c3", "ty", "pe", "arg1", "arg2", "pK", "pas"}}],];
If[vre == 1, Print["front d'onde : ", TableForm[{fbw, fwa}, TableSpacing -> {0, 1}],];
fltr[]];
)

```

(\* événement sommet de type 2-1 \*)

vv21[] := (

```

arit = Complement[Union[{fwv[[ slm1[selec, If], 7]], fwv[[slm1[selec, If], 8]]}, {fwv[[ selec, 7]], fwv[[selec, 8]]}], 
Intersection[{fwv[[ slm1[selec, If], 7]], fwv[[slm1[selec, If], 8]]}, {fwv[[ selec, 7]], fwv[[selec, 8]]}]];
If[Length[arit] != 2, Print["problèmes sur les arêtes : ", arit]; Abort[],];
If[vre == 1, Print["cônes restants : ", arit,];
aris = Complement[{evt[[1, 7]], evt[[1, 8]], evt[[1, 9]]}, arit];
If[vre == 1, Print["cône terminé : ", aris,];
(* on recalcule la solution avec les éléments de la nouvelle arête pour obtenir les bonnes valeurs des arguments *)
Which[arit[[1]] == fwv[[selec, 7]], If[vrc == 1, Print["recalcul de la solution pour obtenir les bonnes valeurs des arguments (1): ", 
arit[[1]], " ; ", arit[[2]], " ; ", cbl - 1, " "],]; conev[arit[[1]] + 1, arit[[2]] + 1, cbl, 3],
arit[[2]] == fwv[[selec, 7]], If[vrc == 1,
Print["recalcul de la solution pour obtenir les bonnes valeurs des arguments (2): ", arit[[2]], " ; ", arit[[1]], " ; ", cbl - 1, " "],];
conev[arit[[2]] + 1, arit[[1]] + 1, cbl, 3], arit[[1]] == fwv[[slm1[selec, If], 7]], If[vrc == 1,
Print["recalcul de la solution pour obtenir les bonnes valeurs des arguments (3): ", arit[[1]], " ; ", arit[[2]], " ; ", cbl - 1, " "],];
conev[arit[[1]] + 1, arit[[2]] + 1, cbl, 3], arit[[1]] == fwv[[slm1[selec, If], 7]], If[vrc == 1,
Print["recalcul de la solution pour obtenir les bonnes valeurs des arguments (3): ", arit[[1]], " ; ", arit[[2]], " ; ", cbl - 1, " "],];
conev[arit[[1]] + 1, arit[[2]] + 1, cbl, 3]];
(* choix de la solution pour la nouvelle arête *)
Which[Chop[vrtx[[1, 2]] - evt[[1, 2]], tol] == 0, For[fg = 2, fg < 10, evt[[1, fg]] = vrtx[[1, fg]]; fg++];
For[fg = 12, fg < 15, evt[[1, fg]] = vrtx[[1, fg]]; fg++]; If[vrc == 1, Print["nouvelle arête : ", evt[[1]]],],
Chop[vrtx[[2, 2]] - evt[[1, 2]], tol] == 0, For[fg = 2, fg < 10, evt[[2, fg]] = vrtx[[2, fg]]; fg++];
For[fg = 12, fg < 15, evt[[2, fg]] = vrtx[[2, fg]]; fg++]; If[vrc == 1, Print["nouvelle arête : ", evt[[1]]],],
True, Print["module profws – problème sur les angles polaires cas sommet 2–1"]; Abort[]];
If[vrb == 1, Print["événement sommet de type 2–1 ; "]; Print["arêtes supprimées :"];
Print[fwv[[slm1[selec, If]]], " ; ", fwv[[selec]]]; Print["arête créée : "]; Print[ " evt(1 ", evt[[1]], " )"];
fwv = Insert[fwv, evt[[1]], selec + 1]; fwv = Delete[fwv, selec]; fwv = Delete[fwv, slm1[selec, If]];
)
(* événement sommet de type 1–2 *)
vv12[] := (
If[vrb == 1, Print["événement sommet de type 1–2 : "];
If[vrb == 1, Print["arêtes du front d'onde : ", fwv[[selec, 7]], " ; ", fwv[[slm1[selec, If], 7]]],];
Which[evt[[1, 7]] != fwv[[selec, 7]] && evt[[1, 7]] != fwv[[slm1[selec, If], 7]],
Print["arête nouvelle evt(1,7) : ", evt[[1, 7]]]; arset = Union[{fwv[[selec, 7]], fwv[[slm1[selec, If], 7]], evt[[1, 7]]}]];
)

```

```

arseu = Union[{evt[[1, 7]], evt[[1, 8]], evt[[1, 9]]}]; If[vrc == 1, Print["arset ; ",
{fwv[[selec, 7]], fwv[[slm1[selec, If], 7]], evt[[1, 7]]}], " ; ", arset, " ;  arseu : ", {evt[[1, 7]], evt[[1, 8]], evt[[1, 9]]}, " ; ", arseu,];
If[arset == arseu, If[evt[[1, 8]] == fwv[[slm1[selec, If], 7]],
conevevt[[1, 7]] + 1, evt[[1, 8]] + 1, cbl, 3]; prochop[ja, 1]; conevevt[[1, 9]] + 1, evt[[1, 7]] + 1, cbl, 3]; prochoq[jb],
conevevt[[1, 7]] + 1, evt[[1, 9]] + 1, cbl, 3]; prochop[jc, 2]; conevevt[[1, 8]] + 1, evt[[1, 7]] + 1, cbl, 3]; prochoq[jd], ptpfw[]],
evt[[1, 8]] != fwv[[selec, 7]] && evt[[1, 8]] != fwv[[slm1[selec, If], 7]],
Print["arête nouvelle evt(1,8) : ", evt[[1, 8]]]; arset = Union[{fwv[[selec, 7]], fwv[[slm1[selec, If], 7]], evt[[1, 8]]}];
arseu = Union[{evt[[1, 7]], evt[[1, 8]], evt[[1, 9]]}]; If[vrc == 1, Print["arset ; ",
{fwv[[selec, 7]], fwv[[slm1[selec, If], 7]], evt[[1, 8]]}], " ; ", arset, " ;  arseu : ", {evt[[1, 7]], evt[[1, 8]], evt[[1, 9]]}, " ; ", arseu,];
If[arset == arseu, If[evt[[1, 7]] == fwv[[slm1[selec, If], 7]],
conevevt[[1, 8]] + 1, evt[[1, 7]] + 1, cbl, 3]; prochop[je, 1]; conevevt[[1, 9]] + 1, evt[[1, 8]] + 1, cbl, 3]; prochoq[jf],
conevevt[[1, 8]] + 1, evt[[1, 9]] + 1, cbl, 3]; prochop[jc, 2]; conevevt[[1, 7]] + 1, evt[[1, 8]] + 1, cbl, 3]; prochoq[jd], ptpfw[]]];
)

(* choix de la solution et de l'arête après coneve *)
prochop[a_, i_] := (Which[i == 1, in = 1; jn = 2, i == 2, in = 2; jn = 1];
Which[Chop[vrtx[[1, 2]] - evt[[1, 2]], tol] == 0, vrtx[[1, 1]] = evt[[1, 1]]; vrtx[[1, 15]] = evt[[1, 15]],
fwv = Insert[fwv, vrtx[[1]], selec]; If[vrc == 1, Print[" cas ", a, " - fwv apres insert a :", fwv,]; fwv = Delete[fwv, selec + 1];
If[vrc == 1, Print[" cas ", a, " - fwv apres delete :", fwv,], Chop[vrtx[[2, 2]] - evt[[1, 2]], tol] == 0, vrtx[[2, 1]] = evt[[1, 1]];
vrtx[[2, 15]] = evt[[1, 15]]; fwv = Insert[fwv, vrtx[[2]], selec]; If[vrc == 1, Print[" cas ", a, " - fwv apres insert b :", fwv,];
fwv = Delete[fwv, selec + 1]; If[vrc == 1, Print[" cas ", a, " - fwv apres delete b :", fwv,]]]
]
)
prochoq[a_] := (
Which[Chop[vrtx[[1, 2]] - evt[[1, 2]], tol] == 0,
vrtx[[1, 1]] = evt[[1, 1]]; vrtx[[1, 15]] = evt[[1, 15]]; fwv = Insert[fwv, vrtx[[1]], selec + 1]; If = Length[fwv];
If[vrc == 1, Print[" cas ", a, " - fwv apres insert g :", fwv,], Chop[vrtx[[2, 2]] - evt[[1, 2]], tol] == 0, vrtx[[2, 1]] = evt[[1, 1]];
vrtx[[2, 15]] = evt[[1, 15]]; fwv = Insert[fwv, vrtx[[2]], selec + 1]; If[vrc == 1, Print[" cas ", a, " - fwv apres insert h :", fwv,],
True, Print[" cas ", a, " - vérifier la précision - événement sommet type 1-2 (vv12) "; Abort[]]
]
)
ptpfw[] := (Print["le point n'est pas sur le front d'onde "]; Print["événement prévu : {" , evt[[1, 7]], " ; ", evt[[1, 8]], " ; ", evt[[1, 9]], " } ; cône masquant du front d'onde : ", fwv[[selec, 7]] ]; conevevt[[1, 7]] + 1, evt[[1, 8]] + 1, fwv[[selec, 7]] + 1, 3);

```

```

For[j = 1, j < Length[vrtx] + 1, contev = contev + 1; vrtx[[j, 1]] = contev; vrtx[[j, 11]] = 2;
vrtx[[j, 15]] = conpas; evtn = Append[evtn, vrtx[[j]]]; j++]; conevevt[[1, 8]] + 1, evt[[1, 9]] + 1, fwv[[selec, 7]] + 1, 3]; For[j = 1,
j < Length[vrtx] + 1, contev = contev + 1; vrtx[[j, 1]] = contev; vrtx[[j, 11]] = 2; vrtx[[j, 15]] = conpas; evtn = Append[evtn, vrtx[[j]]]; j++];
conevevt[[1, 9]] + 1, evt[[1, 7]] + 1, fwv[[selec, 7]] + 1, 3]; For[j = 1, j < Length[vrtx] + 1, contev = contev + 1; vrtx[[j, 1]] = contev;
vrtx[[j, 11]] = 2; vrtx[[j, 15]] = conpas; evtn = Append[evtn, vrtx[[j]]]; j++]; If[vre == 1, Print["événements nouveaux : ", evtn],];
)

(* calcul des points de rebroussement du front d'onde *)
(* le calcul est refait dans son integralite a chaque etape pour verifier la coherence avec le fichier *.dwg *)
calfw[] := (
For[ik = 0, ik < lf, If[vrc == 1, Print[" "]; Print["arête du front d'onde n° : ", ik + 1];
Print[" -----> fwv : "]; Print[TableForm[fwv, TableSpacing -> {0, 1}, TableHeadings ->
{Automatic, {"evnt", "\u03b8", "x", "y", "z", "\u03c1", "fw", "c2", "c3", "ty", "pe", "arg1", "arg2", "pK", "pas"}}]],];
If[vrc == 1, Print["points de rebroussement des intersections des cônes (calfw) "]; Print["arêtes de fwv : ", Mod[ik, lf] + 1, " ; ";
Mod[ik + 1, lf] + 1, " ; cônes : ", fwv[[Mod[ik, lf] + 1, 7]], " ; ", fwv[[Mod[ik, lf] + 1, 8]], " ; ", cbl - 1, " ik : ", ik,];
conevefwv[[Mod[ik, lf] + 1, 7]] + 1, fwv[[Mod[ik, lf] + 1, 8]] + 1, cbl, 3];
vrtx = Sort[vrtx, adpSort];
If[vrc == 1, Print["vérification des angles polaires : fwv[ ", Mod[ik, lf] + 1, " ] : ", fwv[[Mod[ik, lf] + 1, 2]], " ; fwv[ ", Mod[ik + 1, lf] + 1,
" ] : ", fwv[[Mod[ik + 1, lf] + 1, 2]], " ; différence : ", Chop[fwv[[Mod[ik + 1, lf] + 1, 2]] - fwv[[Mod[ik, lf] + 1, 2]]],];
If[Chop[fwv[[Mod[ik, lf] + 1, 2]] - fwv[[Mod[ik + 1, lf] + 1, 2]]], tol] == 0 &&
(fwv[[Mod[ik, lf] + 1, 10]] == 1 \[And] fwv[[Mod[ik, lf] + 1, 10]] == 2), fint[s[vrtx[[1, 2]], vrtx[[2, 2]], fwv[[Mod[ik, lf] + 1, 2]]]];
Which[ifcas == 1, If[vrc == 1, Print["ifcas : ", ifcas],]; For[fg = 2, fg < 7, fwv[[Mod[ik, lf] + 1, fg]] = vrtx[[1, fg]]; fg++];
For[fg = 12, fg < 15, fwv[[Mod[ik, lf] + 1, fg]] = vrtx[[1, fg]]; fg++]; For[fg = 2, fg < 7, fwv[[Mod[ik + 1, lf] + 1, fg]] = vrtx[[2, fg]]; fg++];
For[fg = 12, fg < 15, fwv[[Mod[ik + 1, lf] + 1, fg]] = vrtx[[2, fg]]; fg++]; ik = ik + 2; If[vrb == 1, Print["ik +1= ", ik + 1]]; Continue[], ifcas == 2,
If[vrc == 1, Print["ifcas : ", ifcas],]; For[fg = 2, fg < 7, fwv[[Mod[ik, lf] + 1, fg]] = vrtx[[2, fg]]; fg++];
For[fg = 12, fg < 15, fwv[[Mod[ik, lf] + 1, fg]] = vrtx[[2, fg]]; fg++]; For[fg = 2, fg < 7, fwv[[Mod[ik + 1, lf] + 1, fg]] = vrtx[[1, fg]]; fg++];
For[fg = 12, fg < 15, fwv[[Mod[ik + 1, lf] + 1, fg]] = vrtx[[1, fg]]; fg++]; ik = ik + 2; If[vrb == 1, Print["ik +1= ", ik + 1]]; Continue[],];
fint[fwv[[Mod[ik, lf] + 1, 12]], fwv[[Mod[ik, lf] + 1, 13]], vrtx[[1, 12]], vrtx[[1, 13]], vrtx[[1, 14]]];
If[vre == 1, Print["ik +1= ", ik + 1, " ; fwv(ik+1,12) : ", fwv[[Mod[ik, lf] + 1, 12]], " ; fwv(ik+1,13) : ", fwv[[Mod[ik, lf] + 1, 13]], " ; vrtx(1,12) : ", vrtx[[1, 12]],
" ; vrtx(1,13) : ", vrtx[[1, 13]], " ; vrtx(1,14) : ", vrtx[[1, 14]], " ; fwv(ik+1,14) : ", fwv[[Mod[ik, lf] + 1, 14]]],];
Which[ruv == vrtx[[1, 12]]]
)

```

```

For[fg = 2, fg < 7, fwv[[Mod[ik, lf] + 1, fg]] = vrtx[[1, fg]]; fg++]; For[fg = 12, fg < 15, fwv[[Mod[ik, lf] + 1, fg]] = vrtx[[1, fg]]; fg++];
ruv == vrtx[[2, 12]], For[fg = 2, fg < 7, fwv[[Mod[ik, lf] + 1, fg]] = vrtx[[2, fg]]; fg++];
For[fg = 12, fg < 15, fwv[[Mod[ik, lf] + 1, fg]] = vrtx[[2, fg]]; fg++];];
ik++];

Print["ik : ", ik, " pas n°: ", coppas, " – front d'onde après contraction :"]; Print[TableForm[fwv, TableSpacing -> {0, 1}, TableHeadings ->
{Automatic, {"evnt", "\u03b8", "x", "y", "z", "\u03c6", "fw", "c2", "c3", "ty", "pe", "arg1", "arg2", "pK", "pas"}}]];
fwa = {};
fbw = {};
For[ind = 1, ind < lf + 1, fwa = Append[fwa, fwv[[ind, 2]]]; fwb = Append[fbw, fwv[[ind, 7]]]; ind++];
If[vrb == 1, Print["front d'onde : ", TableForm[{fbw, fwa}, TableSpacing -> {0, 1}], .];
)

(* filtrage du front d' onde – on devrait bien sur limiter le filtrage à la partie modifiée du front d' onde*)
(* le principe du filtrage des sommets est basé sur le fait
que trois cônes consécutifs du front d' onde se trouvent en ne considérant que DEUX éléments de ce front *)
filtr[] := (
If[vre == 1, Print["filtrage – filtr ; longueur du front d'onde : ", lf],];
potwtx = Join[potvtx, potwtx]; potwty = Join[potvty, potwty]; potvtx = {}; potvty = {};
For[ij = 0, ij < lf, If[vrc == 1, Print["ij = ", ij],];
If[vrc == 1, Print["filtrage : ", {fwv[[Mod[ij, lf] + 1, 7]], fwv[[Mod[ij, lf] + 1, 8]]}, {fwv[[Mod[ij + 1, lf] + 1, 7]], fwv[[Mod[ij + 1, lf] + 1, 8]]}],];
unfltr = Union[{fwv[[Mod[ij, lf] + 1, 7]], fwv[[Mod[ij, lf] + 1, 8]]}, {fwv[[Mod[ij + 1, lf] + 1, 7]], fwv[[Mod[ij + 1, lf] + 1, 8]]}];
If[Length[unfltr] == 3, potvtx = Append[potvtx, unfltr], If[vrc == 1, Print["ij = ", ij, " ; unfltr= ", unfltr],.];
If[Length[unfltr] == 2 && fwv[[Mod[ij, lf] + 1, 7]] == fwv[[Mod[ij + 1, lf] + 1, 8]] && fwv[[Mod[ij, lf] + 1, 8]] == fwv[[Mod[ij + 1, lf] + 1, 7]],
potvty = Append[potvty, unfltr]; If[vrc == 1, Print["ij = ", ij, " ; unfltr= ", unfltr],.] ij++];
potvtx = Union[potvtx]; potvtx = Complement[potvtx, potwtx]; If[vrc == 1, Print["potwtx après filtrage – filtr:", potwtx],];
potvty = Union[potvty]; potvty = Complement[potvty, potwty]; If[vrc == 1, Print["potwty après filtrage – filtr:", potwty],];
If[vre == 1, Print["potvtx après filtrage – filtr:", potvtx],. If[vre == 1, Print["potvty après filtrage – filtr:", potvty],];
For[ij = 1, ij < Length[potvtx] + 1, If[vrc == 1, Print["situation après ", ij, " filtrage(s) des sommets– module filtr"],];
conev[potvtx[[ij, 1]] + 1, potvtx[[ij, 2]] + 1, potvtx[[ij, 3]] + 1, 3];
For[j = 1, j < Length[vrtx] + 1, contev = contev + 1; vrtx[[j, 1]] = contev; vrtx[[j, 15]] = coppas; evtn = Append[evtn, vrtx[[j]]]; j++];
ij++]; For[ij = 1, ij < Length[potvty] + 1, If[vrc == 1, Print["situation après ", ij, " filtrage(s)des sorties – module filtr"],];
If[potvty[[ij, 1]] * potvty[[ij, 2]] != 0, conev[potvty[[ij, 1]] + 1, potvty[[ij, 2]] + 1, cbl, 2],];
For[j = 1, j < Length[vrtx] + 1, contev = contev + 1; vrtx[[j, 1]] = contev; vrtx[[j, 15]] = coppas; evtn = Append[evtn, vrtx[[j]]]; j++];
)

```

```

ij++]
Print[" pas n°: ", conpas, " ; événements nouveaux – après filtrage :"];
Print[evtn];
)

(* mise à jour de la pile*)
pilm[] := (
(* dépilage de l'événement traité *)
If[Length[evt] == 1 && Length[fwv] == 0, Print[" pas n°: ", conpas, " – événements restant à traiter : ", fwv]; Break[],
  evt = Delete[evt, 1];
  evtm = {};
  evtp = {};
  If[vrb == 1, Print[" Module pilm – evtn : ", evtn],];
  (* élimination des événements sommets masqués par le cône majoritaire *)
  evtm = evtn;
  For[conts = 1, conts < Length[evtm] + 1, If[vrc == 1, Print["conts : ", conts, " evtn : ", evtm[[conts]]],];
    If[vrc == 1, Print["conts : ", conts, " Γ(evtn) : ", Γ[evtm[[conts, 3]], evtm[[conts, 4]], evtm[[conts, 5]] + day[[1, 5]], day[[1, 6]]],];
    If[Γ[evtm[[conts, 3]], evtm[[conts, 4]], evtm[[conts, 5]] + day[[1, 5]], day[[1, 6]]] < -10 tol &&
      evtm[[conts, 5]] < -day[[1, 5]] && evtm[[conts, 10]] == 3,
      elimasqu = Append[elimasqu, evtm[[conts]]], evtp = Append[evtp, evtm[[conts]]]]; conts++];
  evtn = evtp;
  If[vrb == 1, Print[" evtn (hors événements sommets masqués) : ", evtn],];
  evt = Join[evt, evtn];
  evt = Sort[evt, adaSort];
  (* élimination des événements déjà traités *)
  contr = 1;
  While[contr > 0, If[Chop[evt[[1, 6]] - bang, tol / 100] >= 0, elimorne = Append[elimorne, evt[[1]]]; evt = Delete[evt, 1], contr = contr - 1]];
  (* élimination "manuelles" des événements multiples *)
For[contu = Length[evt], contu > 1, coniv = Union[{evt[[contu, 7]], evt[[contu, 8]], evt[[contu, 9]]}];
  coniw = Union[{evt[[contu - 1, 7]], evt[[contu - 1, 8]], evt[[contu - 1, 9]]}]; If[vre == 1, Print["coniv = ", coniv, " ; coniw = ", coniw],];
  If[coniv == coniw && Chop[evt[[contu, 2]] - evt[[contu - 1, 2]], tol] == 0 && Chop[evt[[contu, 3]] - evt[[contu - 1, 3]], tol] == 0,
    evtdble = Append[evtdble, evt[[contu]]], evt = Delete[evt, contu], contu = contu - 1];
]

```

```

Print["Liste des évènements triés par angle décroissant du cône de balayage"];
Print[" pas n°: ", conpas, " - nombre d'événements restant à traiter : ", Length[evt]];
Print[TableForm[evt, TableSpacing -> {0, 1}, TableHeadings ->
{Automatic, {"evnt", "\[Theta]", "x", "y", "z", "\[Phi]", "fw", "c2", "c3", "ty", "pe", "arg1", "arg2", "pK", "pas"}}]];
)

In[68]:= (* équations de l'axe du faisceau de plans du cercle des quatre points obtenu par le balayage et du plan lui-même*)
apc = Simplify[Expand[f[x, y, z, w] - gb[x, y, z, w, \[Alpha]]/w]];
bpc = Simplify[Expand[\[Gamma][x, y, z, \[Gamma]] - gb[x, y, z, w, \[Gamma]]/w]];
pc4b = Apply[Plus, MonomialList[(Tan[\[Gamma]]^2 - Tan[\[Beta]]^2)*(f[x, y, z, w] - gb[x, y, z, w, \[Alpha]])/w -
(Tan[\[Alpha]]^2 - Tan[\[Beta]]^2)*(\[Gamma][x, y, z, \[Gamma]] - gb[x, y, z, w, \[Gamma]])/w, {x, y, z, w}, CoefficientDomain -> RationalFunctions]];
(* plan tangent aux cones f et \[Gamma] *)
ptf = x*D[f[x0, y0, z0, w0], x0]/2 + y*D[f[x0, y0, z0, w0], y0]/2 + z*D[f[x0, y0, z0, w0], z0]/2 + w*D[f[x0, y0, z0, w0], w0]/2;
ptg = x*D[\[Gamma][x0, y0, z0, \[Gamma]], x0]/2 + y*D[\[Gamma][x0, y0, z0, \[Gamma]], y0]/2 + z*D[\[Gamma][x0, y0, z0, \[Gamma]], z0]/2;
apc = Collect[apc, {x, y, z, w}];
apc = Collect[apc, {x, y, z, w}];
(* conditions pour que les 4 plans aient un point commun *)
matpl = {{Coefficient[apc, x], Coefficient[apc, y], Coefficient[apc, z], FullSimplify[Coefficient[apc, w]]},
{Coefficient[bpc, x], Coefficient[bpc, y], Coefficient[bpc, z], Coefficient[bpc, w]},
{Coefficient[ptg, x], Coefficient[ptg, y], Coefficient[ptg, z], Coefficient[ptg, w]},
{Coefficient[ptf, x], Coefficient[ptf, y], Coefficient[ptf, z], FullSimplify[Coefficient[ptf, w]]}} /. {x0 -> x, y0 -> y, z0 -> z, w0 -> w};
matpl // MatrixForm
dtmat = Det[matpl];
dtmas = Apply[Plus, MonomialList[dtmat, {x, y, z, w}, CoefficientDomain -> RationalFunctions]];
dtmasx2 = Coefficient[dtmas, x^2];
Print["-----"]

(* Equation du plan du cercle des quatre points *)
qc4uy = -2 b t;
qc4ux = -2 a t + 2 d (Tan[\[Beta]]^2 - Tan[\[Gamma]]^2);
qc4uz = 2 h (Tan[\[Beta]]^2 - Tan[\[Gamma]]^2) Tan[\[Alpha]]^2 - 2 k t Tan[\[Beta]]^2;

```

```

qc4uw = (a2 + b2) t - k2 t Tan[β]2 + (h2 - d2) (Tan[β]2 - Tan[γ]2) Tan[α]2;
pl4b[x_, y_, z_, w_, β_] := (-2 a t + 2 d (Tan[β]2 - Tan[γ]2)) x - 2 b t y +
(2 h (Tan[β]2 - Tan[γ]2) Tan[α]2 - 2 k t Tan[β]2) z + ((a2 + b2) t - k2 t Tan[β]2 + h2 (Tan[β]2 - Tan[γ]2) Tan[α]2 - d2 (Tan[β]2 - Tan[γ]2)) w

(* équation du plan du cercle des quatre points obtenu par le balayage *)
pc4 = Apply[Plus, MonomialList[(Tan[γ]2 - Tan[β]2) * (f[x, y, z, w] - Γ[x, y, z, α]) / w -
(Tan[γ]2 - Tan[α]2) * (g[x, y, z, w] - Γ[x, y, z, β]) / w, {x, y, z, w}, CoefficientDomain -> RationalFunctions]]

(* équation paramétrique de l'axe du faisceau de plan *)
apc = apc /. w -> 1
bpc = bpc /. w -> 1
equax = Solve[{apc == 0, bpc == 0}, {x, z}];
apt = Collect[Part[Part[Part[equax, 1], 1], 2], y];
bpt = Collect[Part[Part[Part[equax, 1], 2], 2], y];
ap1 = Coefficient[apt, y];
ap0 = Coefficient[apt, y, 0];
bp1 = Coefficient[bpt, y];
bp0 = Coefficient[bpt, y, 0];
apx[y_] := y * ap1 + ap0
bpx[y_] := y * bp1 + bp0

```

$$\begin{pmatrix}
2a - 2d & 2b & 2(-h+k) \tan[\alpha]^2 & -a^2 - b^2 + d^2 + (-h^2 + k^2) \tan[\alpha]^2 \\
2a & 2b & 2k \tan[\gamma]^2 & -a^2 - b^2 + k^2 \tan[\gamma]^2 \\
x & y & -z \tan[\gamma]^2 & 0 \\
-dw + x & y & -(hw + z) \tan[\alpha]^2 & d(dw - x) - h(hw + z) \tan[\alpha]^2
\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Out[71] = & y(-2b \operatorname{Tan}[\alpha]^2 + 2b \operatorname{Tan}[\gamma]^2) + x(-2a \operatorname{Tan}[\alpha]^2 + 2d \operatorname{Tan}[\beta]^2 + 2a \operatorname{Tan}[\gamma]^2 - 2d \operatorname{Tan}[\gamma]^2) + \\ & z(2h \operatorname{Tan}[\alpha]^2 \operatorname{Tan}[\beta]^2 - 2k \operatorname{Tan}[\alpha]^2 \operatorname{Tan}[\beta]^2 - 2h \operatorname{Tan}[\alpha]^2 \operatorname{Tan}[\gamma]^2 + 2k \operatorname{Tan}[\beta]^2 \operatorname{Tan}[\gamma]^2) + w(a^2 \operatorname{Tan}[\alpha]^2 + b^2 \operatorname{Tan}[\alpha]^2 - d^2 \operatorname{Tan}[\beta]^2 + \\ & h^2 \operatorname{Tan}[\alpha]^2 \operatorname{Tan}[\beta]^2 - k^2 \operatorname{Tan}[\alpha]^2 \operatorname{Tan}[\beta]^2 - a^2 \operatorname{Tan}[\gamma]^2 - b^2 \operatorname{Tan}[\gamma]^2 + d^2 \operatorname{Tan}[\gamma]^2 - h^2 \operatorname{Tan}[\alpha]^2 \operatorname{Tan}[\gamma]^2 + k^2 \operatorname{Tan}[\beta]^2 \operatorname{Tan}[\gamma]^2) \end{aligned}$$

$$Out[72] = -a^2 - b^2 + d^2 + (2a - 2d)x + 2by + h(-h + k)\operatorname{Tan}[\alpha]^2 + k(-h + k)\operatorname{Tan}[\alpha]^2 + 2(-h + k)z\operatorname{Tan}[\alpha]^2$$

$$Out[73] = -a^2 + 2ax + b(-b + 2y) + k(k + 2z)\operatorname{Tan}[\gamma]^2$$

```
In[76]:= dtmas = Apply[Plus, MonomialList[dtmat, {x, y, z, w}, CoefficientDomain -> RationalFunctions]];
dtmasz2 = Expand[Coefficient[dtmas, z^2]/2];
dtmasx2 = Expand[Coefficient[dtmas, x^2]/2];
dtmasxy = Expand[Coefficient[dtmas, x y]/2];
dtmaswy = Expand[Coefficient[dtmas, w y]/2];
dtmaswx = Expand[Coefficient[dtmas, w x]/2];
dtmasxz = Expand[Coefficient[dtmas, x z]/2];
dtmasyz = Expand[Coefficient[dtmas, y z]/2];
dtmaswz = Expand[Coefficient[dtmas, w z]/2];

ptmasz2 = dtmasz2;
ptmasx2 = 2 b d k t - 2 b d h Tan[\alpha]^2;
ptmasxy = 2 (a d (h - k) Tan[\alpha]^2 + d k Tan[\gamma]^2 (a - d));
ptmaswy = -(a^2 + b^2) d k t - d k h^2 t1 Tan[\gamma]^2 + a h (h^2 t1 + k^2 t) Tan[\alpha]^2 - 2 a k h^2 t1 t;
ptmaswx = -b h (h^2 t1 + k^2 t) Tan[\alpha]^2 + 2 b k h^2 t1 t1;
ptmasxz = -b (Tan[\alpha]^2 + Tan[\gamma]^2) (d^2 + h^2 Tan[\alpha]^2) - b k^2 t^2 + 2 b h k t Tan[\alpha]^2;
ptmasyz = -(a^2 + b^2) d t + a d^2 t + a h^2 Tan[\alpha]^2 (Tan[\alpha]^2 + Tan[\gamma]^2) + k (k t - 2 h Tan[\alpha]^2) (a t + d Tan[\gamma]^2);
ptmaswz = -b d (h^2 t1 + k^2 t) Tan[\gamma]^2;

ptmat = Expand[
  2 (ptmasz2 * z^2 + ptmasx2 * x^2 + ptmasxy * x * y + ptmaswy * w * y + ptmaswx * w * x + ptmasxz * x * z + ptmasyz * y * z + ptmaswz * w * z)]
```

```
Out[76]= 4 b h^2 k t1 w x + 4 b d k t x^2 - 2 a^2 d k t w y - 2 b^2 d k t w y - 4 a h^2 k t t1 w y - 2 b k^2 t^2 x z - 2 a^2 d t y z - 2 b^2 d t y z +
2 a d^2 t y z + 2 a k^2 t^2 y z - 2 b h k^2 t w x Tan[\alpha]^2 - 2 b h^3 t1 w x Tan[\alpha]^2 - 4 b d h x^2 Tan[\alpha]^2 + 2 a h k^2 t w y Tan[\alpha]^2 + 2 a h^3 t1 w y Tan[\alpha]^2 +
4 a d h x y Tan[\alpha]^2 - 4 a d k x y Tan[\alpha]^2 - 2 b d^2 x z Tan[\alpha]^2 + 4 b h k t x z Tan[\alpha]^2 - 4 a h k t y z Tan[\alpha]^2 - 2 b h^2 x z Tan[\alpha]^4 + 2 a h^2 y z Tan[\alpha]^4 -
2 d h^2 k t1 w y Tan[\gamma]^2 + 4 a d k x y Tan[\gamma]^2 - 4 d^2 k x y Tan[\gamma]^2 - 2 b d k^2 t w z Tan[\gamma]^2 - 2 b d h^2 t1 w z Tan[\gamma]^2 - 2 b d^2 x z Tan[\gamma]^2 +
2 d k^2 t y z Tan[\gamma]^2 - 2 b h^2 x z Tan[\alpha]^2 Tan[\gamma]^2 + 2 a h^2 y z Tan[\alpha]^2 Tan[\gamma]^2 - 4 d h k y z Tan[\alpha]^2 Tan[\gamma]^2 - 4 b d h z^2 Tan[\alpha]^2 Tan[\gamma]^2
```

In[77]:=

In[78]:=  
cas = 1

```

ptmau = Expand[ptmat /. {x -> xl1[u], y -> yl1[u], z -> zl1[u], w -> wl1[u]}];
ptmav = Expand[ptmau /. {JacobiSN[u, m] -> snx, JacobiCN[u, m] -> cnx, JacobiDN[u, m] -> dnx}];
ptmam = Apply[Plus, MonomialList[ptmav, {snx, cnx, dnx}, CoefficientDomain -> RationalFunctions]];
ptmac = ptmav /. {snx cnx -> scx, cnx dnx -> cdx, dnx snx -> dsx};
k1pbs = Coefficient[ptmac, snx];
k1pbc = Coefficient[ptmac, cnx];
k1pbd = Coefficient[ptmac, dnx];
k1pbsc = Coefficient[ptmac, scx];
k1pbcd = Coefficient[ptmac, cdx];
k1pbds = Coefficient[ptmac, dsx];
ptmad = ptmac /. {snx -> x, cnx -> x, dnx -> x, scx -> x, cdx -> x, dsx -> x};
k1pbn = Coefficient[ptmad, x, 0];

cas = 2
ptmau = Expand[ptmat /. {x -> xl2[u], y -> yl2[u], z -> zl2[u], w -> wl2[u]}];
ptmav = Expand[ptmau /. {JacobiSN[u, m] -> snx, JacobiCN[u, m] -> cnx, JacobiDN[u, m] -> dnx}];
ptmam = Apply[Plus, MonomialList[ptmav, {snx, cnx, dnx}, CoefficientDomain -> RationalFunctions]];
ptmac = ptmav /. {snx cnx -> scx, cnx dnx -> cdx, dnx snx -> dsx};
k2pbs = Coefficient[ptmac, snx];
k2pbc = Coefficient[ptmac, cnx];
k2pbd = Coefficient[ptmac, dnx];
k2pbsc = Coefficient[ptmac, scx];
k2pbcd = Coefficient[ptmac, cdx];
k2pbds = Coefficient[ptmac, dsx];
ptmad = ptmac /. {snx -> x, cnx -> x, dnx -> x, scx -> x, cdx -> x, dsx -> x};
k2pbn = Coefficient[ptmad, x, 0];

cas = 3
ptmau = Expand[ptmat /. {x -> xl3[u], y -> yl3[u], z -> zl3[u], w -> wl3[u]}];
ptmav = Expand[ptmau /. {JacobiSN[u, m] -> snx, JacobiCN[u, m] -> cnx, JacobiDN[u, m] -> dnx}];
ptmam = Apply[Plus, MonomialList[ptmav, {snx, cnx, dnx}, CoefficientDomain -> RationalFunctions]];
ptmac = ptmav /. {snx cnx -> scx, cnx dnx -> cdx, dnx snx -> dsx};
k3pbs = Coefficient[ptmac, snx];

```

---

```

k3pbc = Coefficient[ptmac, cnx];
k3pbd = Coefficient[ptmac, dnx];
k3pbsc = Coefficient[ptmac, scx];
k3pbcd = Coefficient[ptmac, cdx];
k3pbds = Coefficient[ptmac, dsx];
ptmad = ptmac /. {snx -> x, cnx -> x, dnx -> x, scx -> x, cdx -> x, dsx -> x};
k3pbn = Coefficient[ptmad, x, 0];

cas = 4
ptmau = Expand[ptmat /. {x -> xl4[u], y -> yl4[u], z -> zl4[u], w -> wl4[u]}];
ptmav = Expand[ptmau /. {JacobiSN[u, m] -> snx, JacobiCN[u, m] -> cnx, JacobiDN[u, m] -> dnx}];
ptmam = Apply[Plus, MonomialList[ptmav, {snx, cnx, dnx}, CoefficientDomain -> RationalFunctions]];
ptmac = ptmav /. {snx cnx -> scx, cnx dnx -> cdx, dnx snx -> dsx};
k4pbs = Coefficient[ptmac, snx];
k4pbc = Coefficient[ptmac, cnx];
k4pbd = Coefficient[ptmac, dnx];
k4pbsc = Coefficient[ptmac, scx];
k4pbcd = Coefficient[ptmac, cdx];
k4pbds = Coefficient[ptmac, dsx];
ptmad = ptmac /. {snx -> x, cnx -> x, dnx -> x, scx -> x, cdx -> x, dsx -> x};
k4pbn = Coefficient[ptmad, x, 0];

Print["OK to start"];
Print["_____"];
Print["_____"];

```

*Out[78]= 1*  
*Out[79]= 2*  
*Out[80]= 3*  
*Out[81]= 4*

OK to start

---



---

*In[99]:=*

```
(* données numériques – ici le site majoritaire est le cône (0 *)
(* Le dernier cone (15) est le cone de balayage *)
(* les cones correspondent aux dernières figures du chapitre 11*)
daw = {{- 909.09090909, 0, 171145.74970018, 85.36547855, 1},
       {-1756.22877507, -470.580082, 170482.49443524, 78.22521391, 2}, {-2361.88746487, -1363.63636364, 169155.98390536, 59.72940208, 3},
       {-2571.29738613, -2571.29738613, 168492.72864042, 39.43353969, 4},
       {-2272.72727273, -3936.47910811, 167829.47337549, 12.86793679, 5},
       {-1411.74024601, -5268.68632521, 151551.03079046, 3.32779559, 6}, {0, 0, 171709.00496512, 89.4290613, 0},
       {-3907.1022, 5104.4927, 170094.7126, 44.50972421, 7}, {-4172.7367, 4143.9182, 169074.8211, 35.09702689, 8},
       {-2917.4182, 6161.7156, 169150.0017, 33.74107648, 9}, {-5545.4402, 6281.3160, 170663.4025, 56.17866478, 10},
       {-3472.7126, 5213.2814, 161968.3416, 11.03686793, 11}, {4301.3585, 4433.6386, 169458.9822, 61.38747332, 12},
       {810.5479, -1250.3941, 171767.1206, 87.96733108, 13}, {4303.1265, 2788.7171, 167721.8551, 17.87725392, 14}, {0, 0, 0, 0, 15});
(* _____ *)
(* début du programme principal *)
(* on ne teste pas directement la pile vide car on veut pouvoir tester pas à pas*)
totpas = 104;
dav = Sort[daw, adtSort];
(* conversion en radian *)
dav = Map[rdn, dav];
day = Sort[daw, adsSort];
(* conversion en radian *)
day = Map[rdn, day];
(* compteur d'événement *)
contev = -1;
```

```

Print["cônes triés par n° :"];
For[cc = 1, cc < Length[daw] + 1, titc = angt[dav[[cc, 1]], dav[[cc, 2]]]; dav[[cc]] = Prepend[dav[[cc]], titc];
  dav[[cc]] = Prepend[dav[[cc]], cc - 1]; dav[[cc]] = Append[dav[[cc]], dav[[cc, 7]]]; dav[[cc]] = Append[dav[[cc]], dav[[cc, 7]]];
  dav[[cc]] = Append[dav[[cc]], 0]; dav[[cc]] = Append[dav[[cc]], 0]; dav[[cc]] = Append[dav[[cc]], 0];
  dav[[cc]] = Append[dav[[cc]], 0]; dav[[cc]] = Append[dav[[cc]], 0]; dav[[cc]] = Append[dav[[cc]], 0]; Print[dav[[cc]]]; cc++];
Print["cônes triés par angle au sommet formattés pour contact à l'infini :"];
For[cc = 1, cc < Length[daw] + 1, titc = angt[day[[cc, 1]], contev = contev + 1; day[[cc, 2]]]; day[[cc]] = Prepend[day[[cc]], titc];
  day[[cc]] = Prepend[day[[cc]], contev]; day[[cc]] = Append[day[[cc]], day[[cc, 7]]]; day[[cc]] = Append[day[[cc]], day[[cc, 7]]];
  day[[cc]] = Append[day[[cc]], 0]; day[[cc]] = Append[day[[cc]], 0]; day[[cc]] = Append[day[[cc]], 0];
  day[[cc]] = Append[day[[cc]], 0]; day[[cc]] = Append[day[[cc]], 0]; day[[cc]] = Append[day[[cc]], 0]; Print[day[[cc]]]; cc++];
(* rang du cône de balayage *)
cbl = Length[daw];
Print["nombre de cônes : ", cbl];

(* initialisation de la liste des événements *)
evt = Delete[day, 1];
Print["liste des événements initiaux (contact à l'infini) :"]
evt = Delete[evt, Length[evt]];
For[cc = 1, cc < Length[evt] + 1, evt[[cc, 9]] = cbl - 1; Print[evt[[cc]]]; cc++];
contev = contev - 1;
(* angle de balayage *)
bang = day[[1, 6]];
(* compteur de pas *)
conpas = 0;
(* rang du cône majoritaire *)
cmj = day[[1, 7]] + 1;
(* front d' onde *)
fwv = {};
If = Length[fwv];
fwvi0 = 1;
potvtx = {};
potwtx = {};
potvty = {};

```

```

potwty = {};
elimasqu = {};
elimorne = {};
evtraite = {};
evtdble = {};

(* Version muette résultats seulement *)
(* lightly verbose – mettre vrb à 1*)
vrb = 1;
(* very verbose – mettre vrc à 1*)
vrc = 0;
(* overbose – mettre tout à 1 *)
vre = 0;
(* mise au point détaillé sur le dernier événement traité mettre le nombre de pas voulu plus haut *)
vmp = 0;
tol = 10-5;
For[jx = 1, jx < totpas + 1, If[vmp == 1, If[jx == totpas, vre = 1; vrc = 1,],];
    conpas = conpas + 1;
    Print["_____"];
    Print["Traitement du Pas n°: ", conpas, " ; cônes : ";
        evt[[1, 7]], ", ", evt[[1, 8]], ", ", evt[[1, 9]], "} ; type d'événement : {", evt[[1, 10]], ", ", evt[[1, 11]], "}";
        Print["événement traité : ", evt[[1]]]; evtraite = Append[evtraite, evt[[1]]];
    bang = evt[[1, 6]];
    day[[Length[day], 6]] = bang;
    dav[[Length[day], 6]] = bang;
    Print["angle de balayage : ", bang, "rd = ", bang / Degree, "°"];
    vrtx = {};
    Which[evt[[1, 10]] == 0, profwi[]; pilm[], evt[[1, 10]] == 1,
        profwe[]; pilm[], evt[[1, 10]] == 2, profwt[]; pilm[], evt[[1, 10]] == 3, profws[]; Label[bouclepals]; pilm[]];
    jx++;
    Print["_____"];
    Print["nombre et liste des événements traités : ", Length[evtraite]];
]

```

```

TableForm[evtraite, TableSpacing -> {0, 1}, TableHeadings ->
{Automatic, {"evnt", "\u03b8", "x", "y", "z", "\u03c6", "fw", "c2", "c3", "ty", "pe", "arg1", "arg2", "pK", "pas"}}
Print["_____"]
Print["nombre et liste des \u00e9v\u00e9nements morts-n\u00e9s : ", Length[elimorne]];
TableForm[elimorne, TableSpacing -> {0, 1}, TableHeadings ->
{Automatic, {"evnt", "\u03b8", "x", "y", "z", "\u03c6", "fw", "c2", "c3", "ty", "pe", "arg1", "arg2", "pK", "pas"}}
Print["_____"]
Print["nombre et liste des \u00e9v\u00e9nements sommets masqu\u00e9s par le c\u00f4ne majoritaire : ", Length[elimasqu]];
TableForm[elimasqu, TableSpacing -> {0, 1}, TableHeadings ->
{Automatic, {"evnt", "\u03b8", "x", "y", "z", "\u03c6", "fw", "c2", "c3", "ty", "pe", "arg1", "arg2", "pK", "pas"}}
Print["_____"]
Print["nombre et liste des \u00e9v\u00e9nements multiples supprim\u00e9s : ", Length[evtdble]];
TableForm[evtdble, TableSpacing -> {0, 1}, TableHeadings ->
{Automatic, {"evnt", "\u03b8", "x", "y", "z", "\u03c6", "fw", "c2", "c3", "ty", "pe", "arg1", "arg2", "pK", "pas"}}
c\u00f4nes tri\u00e9s par n\u00b0 :
{0, 0, 0, 171709.00496512, 1.56083, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{1, \u03c0, -909.09090909, 0, 171145.74970018, 1.48991, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0}
{2, 3.40339, -1756.22877507, -470.580082, 170482.49443524, 1.36529, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0}
{3, 3.66519, -2361.88746487, -1363.63636364, 169155.98390536, 1.04247, 3, 3, 3, 0, 0, 0, 0, 0}
{4, 3.92699, -2571.29738613, -2571.29738613, 168492.72864042, 0.688245, 4, 4, 4, 0, 0, 0, 0, 0}
{5, 4.18879, -2272.72727273, -3936.47910811, 167829.47337549, 0.224588, 5, 5, 5, 0, 0, 0, 0, 0}
{6, 4.45059, -1411.74024601, -5268.68632521, 151551.03079046, 0.058081, 6, 6, 6, 0, 0, 0, 0, 0}
{7, 2.2241, -3907.1022, 5104.4927, 170094.7126, 0.776841, 7, 7, 7, 0, 0, 0, 0, 0}
{8, 2.35966, -4172.7367, 4143.9182, 169074.8211, 0.612559, 8, 8, 8, 0, 0, 0, 0, 0}

```

## RÉFÉRENCES

Adam, 1997 - Adam, B. ; Kauffmann P. ; Schmitt, D. ; Spehner J.-C. ; « An increasing-circle sweep-algorithm to construct the Delaunay diagram. » In *Proceedings of the Canadian Conference on Computational Geometry - CCCG '97*.

We present a new way to compute the Delaunay diagram of a planar set  $S$  of  $n$  sites in  $\mathcal{O}(n \log n)$  time by using a plane sweep technique. We sweep the plane by a circle whose center is a fixed point in the convex hull of  $S$  and whose radius increases from 0 to  $\infty$ . This method is interesting notably when the diagram has to be constructed locally around a given point. We do not know of any method to reduce the sweep circle algorithm to a sweep line algorithm. Keywords : Planar site Delaunay diagram, plane sweep algorithm.

Adam, 1998 - Adam, B. ; Kauffmann P. ; Schmitt, D. ; Spehner J.-C. ; « A shrinking-circle sweep-algorithm to construct the farthest site Delaunay diagram in the plane. » In *Proceedings of the Canadian Conference on Computational Geometry - CCCG '98*.

We present a new way to compute the farthest site Delaunay diagram of a planar set  $S$  of  $n$  sites in  $\mathcal{O}(n \log n)$  time by using a sweep technique. We sweep the plane by a circle whose center is a fixed point in the convex hull of  $S$  and whose radius decreases from  $+\infty$  to 0.

Appell, 1922 - Appell, Paul ; *Principes de la theorie des fonctions elliptiques et applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1922.

Aurenhammer, 1984 - Aurenhammer, Franz ; Edelsbrunner, Herbert ; *An optimal algorithm for constructing the weighted Voronoï diagram in the plane*. Pattern Recognition 17 (1984), no. 2, 251–257.

Abstract : Let  $S$  denote a set of  $n$  points in the plane such that each point  $p$  has assigned a positive weight  $w(p)$  which expresses its capability to influence its neighbourhood. In this sense, the weighted distance of an arbitrary point  $x$  from  $p$  is given by  $d_e(x, p)/w(p)$  where  $d_e$  denotes the Euclidean distance function. The weighted Voronoï diagram for  $S$  is a subdivision of the plane such that each point  $p$  in  $S$  is associated with a region consisting of all points  $x$  in the plane for which  $p$  is a weighted nearest point of  $S$ . An algorithm which constructs the weighted Voronoï diagram for  $S$  in  $\mathcal{O}(n^2)$  time is outlined in this paper. The method is optimal as the diagram can consist of  $\times(n^2)$  faces, edges and vertices.

Aurenhammer, 1987 - Aurenhammer, Franz ; *Power Diagrams : Properties, Algorithms and Applications*. SIAM J. COMPUT. Vol. 16 (1987) n° 1, p. 78-96.

Abstract : The power  $\text{pow}(x, s)$  of a point  $x$  with respect to a sphere  $s$  in Euclidean  $d$ -space  $E^d$  is given by  $d^2(x, z) - r^2$ , where  $d$  denotes the Euclidean distance function, and  $z$  and  $r$  are the center and the radius of  $s$ . The power diagram of a finite set  $S$  of spheres in  $E^d$  is a cell complex that associates each  $s \in S$  with the convex domain  $\{x \in E^d \mid \text{pow}(x, s) < \text{pow}(x, t), \forall t \in S \setminus \{s\}\}$ . The close relationship to convex hulls and arrangements of hyperplanes is investigated and exploited. Efficient algorithms that compute the power diagram and its order- $k$  modifications are obtained. Among the applications of these results are algorithms for detecting  $k$ -sets, for union and intersection problems for cones and paraboloids, and for constructing weighted Voronoï diagrams and Voronoï diagrams for spheres. Upper space bounds for these geometric problems are derived.

Aurenhammer, 1991 - Aurenhammer, Franz ; *Voronoi diagrams - A survey of a fundamental geometric data structure*. ACM Computing Surveys, 23 (1991) n°3, p. 345-405.

This paper presents a survey of the Voronoi diagram, one of the most fundamental data structures in computational geometry. It demonstrates the importance and usefulness of the Voronoi diagram in a wide variety of fields inside and outside computer science and surveys the history of its development. The paper puts particular emphasis on the unified exposition of its mathematical and algorithmic properties. Finally, the paper provides the first comprehensive bibliography on Voronoi diagrams and related structures.

Aurenhammer, 2001 - Aurenhammer, Franz ; Klein, Rolf ; *Voronoi Diagrams*. fichier acrobat disponible sur Internet <http://wwwpi6.fernuni-hagen.de/publ/tr198.pdf> ou <http://www3.informatik.uni-wuerzburg.de/TR/tr198.pdf>.

Baudoin, 1938 - Baudoin, Paul ; *Les ovales de Descartes et le limaçon de Pascal*. Vuibert, Paris, 1938.

Berger, 1990 - Berger, Marcel ; *Géométrie*. T. 1. Nathan, Paris, 1990.

Boissonnat, 2003 - Boissonnat Jean-Daniel ; Karavelas Menelaos I. ; *On the combinatorial complexity of Euclidean Voronoi cells and convex hulls of  $d$ -dimensional spheres*.

Abstract : In this paper we show an equivalence relationship between additively weighted Voronoi cells in  $\mathbb{R}^d$ , power diagrams in  $\mathbb{R}^d$  and convex hulls of spheres in

$\mathbb{R}^d$ . An immediate consequence of this equivalence relationship is a tight bound on the complexity of : (1) a single additively weighted Voronoi cell in dimension  $d$ ; (2) the convex hull of a set of  $d$ -dimensional spheres. In particular, given a set of  $n$  spheres in dimension  $d$ , we show that the worst case complexity of both a single additively weighted Voronoi cell and the convex hull of the set of spheres is  $\Theta(n^{\lceil d/2 \rceil})$ . The equivalence between additively weighted Voronoi cells and convex hulls of spheres permits us to compute a single additively weighted Voronoi cell in dimension  $d$  in worst case optimal time  $\mathcal{O}(n \log n + n^{\lceil d/2 \rceil})$ .

Boissonnat, 1996 - Boissonnat Jean-Daniel ; Cérézo, A. ; Devillers, O. ; Teillaud, M. ; *Output sensitive construction of the Delaunay triangulation of points lying in two planes.*

Abstract : In this paper, we propose an algorithm to compute the Delaunay triangulation of a set  $S$  of  $n$  points in 3-dimensional space when the points lie in 2 planes. The algorithm is output-sensitive and optimal with respect to the input and the output sizes. Its time complexity is  $\mathcal{O}(n \log(n + t))$ , where  $t$  is the size of the output, and the extra storage is  $\mathcal{O}(n)$ .

Brocard, 1967 - Brocard, H., Lemoyne, T. ; *Courbes géométriques remarquables*. T. 1 et 2. Blanchard, Paris, 1967.

Cagnac, 1949 - Cagnac G., Commissaire H. ; *Cours de mathématiques spéciales*. T. V Géométrie descriptive - fascicule I Polyèdres - sphères - cônes - cylindre. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1949.

Chasles, 1864 - Chasles, Michel ; *Construction des coniques qui satisfont à cinq conditions. Nombre des solutions dans chaque question*. Compte-Rendu des Séances de l'Académie des Sciences, 1864 1er semestre t. 58, N° 7 p. 297-308.

Chasles, 1875 - Chasles, Michel ; *Théorèmes dans lesquels se trouve une condition d'égalité de deux segments pris sur des normales et des tangentes des courbes d'ordre et de classe quelconques*. Compte-Rendu des Séances de l'Académie des Sciences, 1875 2ième semestre t. 81, N° 22 p. 993-999.

Chasles, 1837 - Chasles, Michel ; *Aperçu Historique des Méthodes en Géométrie*. Hayez, Imprimeur de l'Académie royale, Bruxelles, 1837.

Churchill, 1984 - Churchill, Ruel V. ; Brown, James Ward ; *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill, New-York, 1984.

Coolidge, 1971 - Coolidge J.L. ; *A treatise on the circle and the sphere*. Chelsea Publishing Company, New York, 1971 - [reprint Oxford, 1917].

Court, 1964 - Altshiller-Court, Nathan ; *Modern pure solid geometry*. Chelsea Publishing Company, New-York, 1964.

Crofton, 1866 - Crofton, M. W. *On certains properties of the Cartesian Ovals, treated by the method of vectorial coordinates*. Proceedings of the London Mathematical Society, T. 1.

de Berg, 1997 - de Berg, Mark ; van Kreveld, Marc ; Overmars, Mark ; Schwarzkopf, Otfried ; *Computational geometry - Algorithms and applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

Dehne, 1988 - Dehne, Frank ; Klein, Rolf ; *A sweepcircle algorithm for Voronoï diagrams*. (Extended Abstract) Lecture Notes in Comput. Sci., 314, Springer Verlag, Berlin, 1988.

Abstract : The Voronoï diagram of  $n$  sites on the surface of a cone has a combinatorial structure rather different from the planar one. We present a sweepcircle algorithm that enables its computation within optimal time  $\mathcal{O}(n \log n)$ , using linear storage.

Dehne, 1997 - Dehne, Frank ; Klein, Rolf ; "The big sweep" : on the power of the wavefront approach to Voronoï diagrams. Algorithmica 17 (1997) n° 1, p. 19-32.

Summary : "We show that the wavefront approach to Voronoï diagrams (a deterministic line-sweep algorithm that does not use geometric transforms) can be generalized to distance measures more general than the Euclidean metric. In fact, we provide the first worst-case optimal  $\mathcal{O}(n \log n)$  time,  $\mathcal{O}(n)$  space algorithm that is valid for the full class of what have been called nice metrics in the plane. This also solves the previously open problem of providing an  $\mathcal{O}(n \log n)$ -time plane-sweep algorithm for arbitrary  $L_k$ -metrics. Nice metrics include all convex distance functions, as well as distance measures such as the Moscow metric, and composed metrics. The algorithm is conceptually simple, but it copes with all possible deformations of the diagram."

Duporcq, 1912 - Duporcq, Ernest *Premiers principes de géométrie moderne*. Gauthier-Villars, Paris, 1912.

Du Val, 1973 - Du Val Patrick ; *Elliptic functions and elliptic curves*. Cambridge Uni-

versity Press, London, 1973.

Faber, 1983 - Faber, Richard ; *Fundamental of Euclidean and non-Euclidean geometry*. M. Dekker, New York, 1983.

FGM, 1909 - FGM ; *Exercices de Géométrie Descriptive*. A. Mame et C. Poussielgue, Paris, 1909.

Fortune, 1987 - Fortune, Steven ; *A sweepline algorithm for Voronoï diagrams*. Algorithmica 2 (1987), n° 2, p. 153-174.

Summary : "We introduce a geometric transformation that allows Voronoï diagrams to be computed using a sweep line technique. The transformation is used to obtain simple algorithms for computing the Voronoï diagram of point sites, of line segment sites, and of weighted point sites. All algorithms have  $\mathcal{O}(n \log n)$  worst-case running time and use  $\mathcal{O}(n)$  space."

Goodman, 1997 - Goodman, Jacob E. ; Joseph O'Rourke ; *Handbook of discrete and computational geometry*. CRC Press, Boca Raton, 1997.

Gomes Teixeira, 1905 - Gomes Teixeira, F. ; *Tratados de las curvas especiales notables*. Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de Madrid - Tomo XXII , Madrid, 1905.

Greenberg, 1980 - Greenberg, Marvin J. ; *Euclidean and non-Euclidean geometry*. W.H. Freeman, New York, 1980.

Guibas, 1988 - Guibas, Leonidas J. ; Stolfi, Jorge ; *Ruler, Compass and Computer - The Design and Analysis of Geometric Algorithms*. In R.A. Earnshaw, editor, Theoretical foundations of computer graphics and CAD. NATO series F vol 40, p. 111-165 Springer-Verlag, Berlin, 1988.

Hancock, 1958 - Hancock, Harris ; *Lectures on the Theory of Elliptic Functions* Dover Publications, Inc., New-York, 1958.

Imai, 1985 - Imai, Hiroshi ; Iri, Masao ; Murota, Kazuo ; *Voronoï diagram in the Laguerre geometry and its applications*. SIAM J. Comput. 14 (1985), n° 1, p. 93-105.

Summary : "We extend the concept of Voronoï diagram in the ordinary Euclidean geometry for  $n$  points to one in the Laguerre geometry for  $n$  circles in the plane, where the distance between a circle and a point is defined by the length of the

tangent line, and show that there is an  $\mathcal{O}(n \log n)$  algorithm for this extended case. The Voronoï diagram in the Laguerre geometry may be applied to solving effectively a number of geometrical problems such as those of determining whether or not a point belongs to the union of  $n$  circles, of finding the connected components of  $n$  circles, and of finding the contour of the union of  $n$  circles. As in the case with ordinary Voronoï diagrams, the algorithms proposed here for those problems are optimal to within a constant factor. Some extensions of the problem and the algorithm from different viewpoints are also suggested."

Jordan, 1959 - Jordan Camille; *Cours d'analyse de l'école polytechnique* Gauthier-Villars, Paris, 1959.

Klein, 1988a - Klein, Rolf; *Abstract Voronoï diagrams and their applications* (extended abstract). Lecture Notes in Comput. Sci., 333, p. 148-157, Springer-Verlag, New York, 1988.

Given a set  $S$  of  $n$  points in the plane, and for every two of them a separating Jordan curve, the abstract Voronoï diagram  $V(S)$  can be defined, provided that the regions obtained as the intersections of all the "halfplanes" containing a fixed point of  $S$  are path-connected sets and together form an exhaustive partition of the plane. This definition does not involve any notion of distance. The underlying planar graph,  $\hat{V}(S)$ , turns out to have  $\mathcal{O}(n)$  edges and vertices. If  $S = L \cup R$  is such that the set of edges separating  $L$ -faces from  $R$ -faces in  $V(S)$  does not contain loops then  $\hat{V}(L)$  and  $\hat{V}(R)$  can be merged within  $\mathcal{O}(n)$  steps giving  $\hat{V}(S)$ . This result implies that for a large class of metrics  $d$  in the plane the  $d$ -Voronoï diagram of  $n$  points can be computed within optimal  $\mathcal{O}(n \log n)$  time. Among these metrics are, for example, the symmetric convex distance functions as well as the metric defined by the city layout of Moscow or Karlsruhe.

Klein, 1988b - Klein, Rolf; *Voronoi Diagrams in the Moscow Metric* (Extended Abstract). Lecture Notes in Comput. Sci., 344, p. 434-441, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

**Abstract :** Most of the streets of Moscow are either radii emanating from the Kremlin, or pieces of circles around it. We show that Voronoï diagrams for  $n$  points based on this metric can be computed in optimal  $\mathcal{O}(n \log n)$  time and linear space. To this end, we prove a general theorem stating that bisectors of suitably separated point sets do not contain loops if, beside other properties, there are no holes in the circles of the underlying metric. Then the Voronoï diagrams can be computed within  $\mathcal{O}(n \log n)$  steps, using a divide-and-conquer algorithm. Our theorem not only applies to the Moscow metric but to a large class of metrics including the symmetric convex distance functions and all composite metrics obtained by assigning the  $L_1$  or the  $L_2$  metric to the regions of a planar map.

Klein, 1989 - Klein, Rolf; *Concrete and abstract Voronoï diagrams*. Lecture Notes in Computer Science, 400. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

Klein, 1990 - Klein, Rolf; Mehlhorn, K.; Meiser, S.; *On the construction of abstract Voronoï diagrams. II*. Lecture Notes in Comput. Sci., 450, p. 138-154, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

Summary : "Abstract Voronoï diagrams are defined by a system of bisecting curves in the plane, rather than by the concept of distance. Klein showed how to construct such diagrams in time  $\mathcal{O}(n \log n)$  by a randomized algorithm if the bisecting curves are in general position. In this paper we drop the general position assumption. Moreover, we show that the only geometric operation in the algorithm is the construction of a Voronoï diagram for five sites. Using this operation, abstract Voronoï diagrams can be constructed in a purely combinatorial manner. This has the following advantages : On the one hand, the construction of a five-site-diagram is the only operation depending on the particular type of bisecting curves and we can therefore apply the algorithm to all concrete diagrams by simply replacing this operation. On the other hand, this is the only operation computing intersection points ; thus, problems arising from unstable numerical computations can occur only there."

Lawden, 1989 - Lawden, Derek F.; *Elliptic Functions and Applications* Springer-Verlag, New-York, 1989.

Lee, 1980 - Lee, Der T.; Wongt, C. K. *Voronoï diagrams in  $L_1$  (  $L_\infty$  ) metrics with 2-dimensional storage applications*. SIAM J. Comput. 9 (1980) n° 1, p. 200-211.

Abstract. In this paper we study the problem of scheduling the read/write head movement to handle a batch of  $n$  I/O requests in a 2-dimensional secondary storage device in minimum time. Two models of storage systems are assumed in which the access time of a record (being proportional to the "distance" between the position of the record and that of the read/write head) is measured in terms of  $L_1$  and  $L_\infty$  metrics, respectively. The scheduling problem, referred to as the Open Path Problem (OPP) is equivalent to finding a shortest Hamiltonian path with a specified end point in a complete graph with  $n$  vertices. We first show in this paper that there exists a natural isometry between the  $L_1$  and  $L_\infty$  metrics. Consequently, the existence of a polynomial time algorithm for the OPP in one metric implies the existence of a polynomial time algorithm for the same problem in the other metric. Based on a result by Garey, Graham and Johnson, it is easy to show that the OPP in  $L_1$  (hence in  $L_\infty$  ) metric is  $NP$ -complete. A heuristic to solve the OPP is therefore presented. It is based on a geometric structure called the Voronoï diagram in  $L_1$  metric. An optimal (worst-case) algorithm of time complexity  $\mathcal{O}(n \log n)$  for constructing the diagram for a set of  $n$  points

in a plane is described. Using this diagram one can build a near-optimal path through each point either by constructing a minimum spanning tree or by the closest insertion method. Both algorithms are shown to take  $\mathcal{O}(n \log n)$  time which is the time for the construction of the diagram and yield an approximate solution within a factor of 2. The bound is also shown to be tight in the worse case. For the average case, simulation results show that the minimum spanning tree approach is better than the closest insertion method. As expected, they are far better than the sequential one in which the request is processed one at a time on the first-come-first-served basis.

Lee, 1981 - Lee, Der T. ; Drysdale, R. L., III ; *Generalization of Voronoï diagrams in the plane*. SIAM J. Comput. 10 (1981), n° 1, p. 73-87.

Summary : "In this paper we study the Voronoi diagram for a set of  $n$  line segments and circles in the Euclidean plane. The diagram is a generalization of the Voronoi diagram for a set of points in the plane and has applications in wire layout, facility location, clustering and contouring problems. We present an  $\mathcal{O}(n \log^2 n)$  algorithm for constructing the diagram. It is an improvement of a previous known result which takes  $\mathcal{O}(nc\sqrt{\log n})$  time. The algorithm described in this paper is also shown to be applicable under a more general metric if certain conditions are satisfied."

Liguine, 1882 - Liguine, V. ; *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2ième série T6, p.40-49, 1882.

Michel, 1926 - Michel, Charles ; *Compléments de Géométrie Moderne*. Vuibert, Paris, 1926.

O'Rourke, Joseph ; *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

Ohya, 1984 - Ohya, Takao ; Iri, Masao ; Murota, Kazuo ; *A fast Voronoï diagaram algorithm with quaternary tree bucketing*. Information Processing Letters, 18, p. 227-231, North-Holland, 1984.

Okabe, 1992 - Okabe, Atsuyuki ; Boots, Barry ; Sugihara, Kokichi ; *Spatial tessellations : concepts and applications of Voronoï diagrams*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Applied Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1992.

Pavillet, 2000 - Pavillet, Axel ; « Construction d'un diagramme de Voronoï à base de

cercles grâce à un algorithme optimal à balayage par cercle ». Mémoire présenté comme exigence partielle de la maîtrise en Informatique Université du Québec à Montréal, Montréal, 2000.

Pavillet, 2001 - Pavillet, Axel ; « Voronoï diagrams in projective geometry and sweep circle algorithms for constructing circle-based Voronoï diagrams ». (Extended Abstract) In *Abstracts for the Thirteenth Canadian Conference on Computational Geometry - CCCG '01* University of Waterloo, 2001.

Pavillet, 2004 - Pavillet, Axel ; « Replacing De(ad)scriptive Geometry ... ». In *The inaugural CDEN Design Conference*, McGill University, 2004.

Pottmann, 2001 - Pottmann, Helmut ; Wallner, Johannes ; *Computational Line geometry*. Springer, Berlin, 2001.

Rappaport, 1988 - Rappaport, David ; *Computing the furthest site Voronoï diagram for a set of discs*. Lecture Notes in Comput. Sci., 382, p. 57-66, Springer Verlag, Berlin, 1988.

Abstract. We present an algorithm to compute the furthest site Voronoï diagram for a set of  $n$  circular discs. The algorithm runs in  $\mathcal{O}(n \log n)$  time and uses  $\mathcal{O}(n)$  space. The algorithm is based on the observation that Voronoï vertices correspond to the vertices in the intersection of a set of axis parallel cones.

Rappaport, 1992 - Rappaport, David ; *A convex hull algorithm for discs, and applications*. Comput. Geom. 1 (1992) n° 3, p. 171–187.

Summary : "We show that the convex hull of a set of discs can be determined in  $\Theta(n \log n)$  time. The algorithm is straightforward and simple to implement. We then show that the convex hull can be used to efficiently solve various problems for a set of discs. This includes  $\mathcal{O}(n \log n)$  algorithms for computing the diameter and the minimum spanning circle, computing the furthest site Voronoï diagram, computing the stabbing region, and establishing the region of intersection of the discs."

Roberts, 1870 - Roberts, S. ; « On the ovals of Descartes ». In *Proceedings of the London Mathematical Society*. T.III p.106-126.

Rosenberger, 1991 - Rosenberger, Harald ; *Order-k Voronoï diagrams of sites with additive weights in the plane*. Algorithmica 6 (1991) n° 4, p. 490-521.

Summary : "We show that the order- $k$  Voronoï diagram of  $n$  sites with additive weights in the plane has at most  $(4k - 2)(n - k)$  vertices,  $(6k - 3)(n - 3)$  edges,

and  $(2k - 1)(n - k) + 1$  regions. These bounds are approximately the same as the ones known for unweighted order- $k$  Voronoï diagrams. Furthermore, tight upper bounds on the number of edges and vertices are given for the case that every weighted site has a nonempty region in the order-1 diagram. The proof is based on a new algorithm for the construction of these diagrams which generalizes a plane-sweep algorithm for order-1 diagrams developed by Steven Fortune. The new algorithm has time-complexity  $\mathcal{O}(k^2 n \log n)$  and space-complexity  $\mathcal{O}(kn)$ . It is the only nontrivial algorithm known for constructing order- $k$  Voronoï diagrams of sites with additive weights. It is fairly simple and of practical interest also in the special case of unweighted sites."

Rouché, 1900 - Rouché E., de Comberousse, C. ; *Traité de Géométrie*. Gauthier-Villars, Paris, 1900.

Salmon, 1927 - Salmon, George ; *A treatise on the analytic geometry of three dimensions*. Chelsea Publishing Company, New York, 1971 - [reprint Dublin, 1927].

Schaudt, 1991 - Schaudt, Barry F., Drysdale, R.L. ; « Multiplicatively weighted crystal growth Voronoi diagrams ». In *Proceedings of the seventh annual symposium on Computational Geometry*. p. 214-223, ACM Press, 1991.

Shamos, 1975 - Shamos, Michael Ian ; Hoey, Dan ; « Closest-point problems ». In *Sixteenth Annual IEEE Symposium of foundations of computer science*, October 1975.

Abstract : A number of seemingly unrelated problems involving the proximity of  $n$  points in the plane are studied, such as finding a Euclidean minimum spanning tree, the smallest circle enclosing the set,  $k$ -nearest and farthest neighbors, the two closest points, and a proper straight-line triangulation. For most of the problems considered a lower bound of  $\mathcal{O}(n \log n)$  is shown. For all of them the best currently-known upper bound is  $\mathcal{O}(n^2)$  or worse. The purpose of this paper is to introduce a single geometric structure, called the Voronoï diagram, which can be constructed rapidly and contains all of the relevant proximity information in only linear space. The Voronoï diagram is used to obtain  $\mathcal{O}(n \log n)$  algorithms for all of the problems.

Sharir, 1985 - Sharir, Micha ; *Intersection and closest-pair problems for a set of planar discs*. SIAM J. Comput. 14 (1985) n° 2, p. 448-468.

Summary : "Efficient algorithms for detecting intersections and computing closest neighbors in a set of circular discs are presented and analyzed. They adapt known techniques for solving these problems for sets of points or of line segments. The main portion of the paper contains the construction of a generalized Voronoï

diagram for a set of  $n$  (possibly intersecting) circular discs in time  $\mathcal{O}(n \log^2 n)$ , and its applications.”

Silvester, 1866 - Silvester, James Joseph ; « Astronomical Prolusions » In Philosophical Magazine XXXI, London, 1866.

Yap, 1988 - Yap, Chee-Keng ; « A Geometric Consistency Theorem for a Symbolic Perturbation Scheme. » In *Proceedings of the fourth annual symposium on Computational Geometry.*, p. 134-142. ACM Press, 1988.

Abstract : In a previous paper, we introduced a generic solution to the problem of data degeneracy in geometric algorithms. The scheme is simple to use : algorithms qualifying under our requirements just have to use a prescribed blackbox for polynomial evaluation in order to achieve a symbolic perturbation of data. In this paper, we introduce the concept of an infinitesimal perturbation and show that our method is consistent relative to such perturbations.

Zwikker, 1950 - Zwikker, Cornelis ; *Advanced Plane Geometry*. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1950.