

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

**THÈSE
PRÉSENTÉE
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES**

par

PIERRE LALONDE

**CONTRIBUTION À L'ÉTUDE
DES EMPILEMENTS**

JUILLET 1990

Remerciements

J'aimerais remercier ici les personnes dont l'aide a été essentielle pour mener à bien la rédaction de cette thèse.

D'abord mes deux directeurs, André Joyal et Gilbert Labelle. La confiance qu'ils m'ont témoignée a toujours été appréciée. Les idées qu'ils m'ont suggérées me fourniront du matériel de recherche pour de nombreuses années à venir.

Je remercie Christophe Reutenauer et Pierre Leroux pour les discussions que nous avons eues. Ils m'ont permis d'éclaircir plusieurs points importants.

Merci aussi à M. Xavier Viennot, le fondateur de la théorie, pour m'avoir fait découvrir la beauté et la simplicité des empilements par ses écrits et ses conférences lumineuses.

Je redouble d'ailleur mes remerciements à toutes ces personnes pour avoir accepté de constituer le jury.

J'aurais sans doute sombré dans le plus profond désespoir n'eut été de ma compagne Lina Remon qui a accepté de réaliser la typographie de cette thèse¹. Je la remercie encore pour avoir supporté les longues périodes d'absences alors que je voyageais dans les (empilements de) nuages.

¹ En suivant mes caprices de notation. Aussi, je réclame l'entièr responsabilité des erreurs et des fautes de goût qui auraient pu se produire.

Résumé

La théorie des empilements de pièces (dûe à Viennot) permet de superposer une intuition fortement géométrique à la notion de monoïde partiellement commutatif. Cette thèse apporte de nouveaux développements à la théorie. On commence par aborder les concepts fondamentaux: définition des empilements, superposition, empilements triviaux, pyramides, connexité, facteurs gauches et droits,...

Une première question soulevée concerne une généralisation possible des mots de Lyndon au contexte des empilements. On peut voir, en effet, les empilements comme des mots partiellement commutatifs. Deux études préliminaires assurent la réalisation de cet objectif: une théorie de la conjugaison applicable aux empilements et la construction d'un ordre total (analogue à l'ordre lexicographique) sur ceux-ci. Les empilements de Lyndon se définissent alors comme les représentants minimaux des classes de conjugaison d'empilements, définition tout à fait analogue à celle des mots de Lyndon. On explore les propriétés combinatoires qui résultent en se ramenant au cas des mots dans certains alphabets construits à partir des positions. Plusieurs de ces propriétés traduisent directement une propriété similaire des mots de Lyndon, avec parfois une restriction (non sans importance par la suite) sur la connexité de certains empilements. Ainsi, on retrouve différentes caractérisations des empilements de Lyndon, la factorisation des empilements en superposition d'empilements de Lyndon décroissants, la factorisation standard, etc.

La factorisation standard autorise à son tour la construction récursive d'une bijection entre les empilements de Lyndon et une base de l'algèbre de Lie correspondante. On utilise une argumentation similaire à celle qu'on retrouve pour les mots de Lyndon avec une complication supplémentaire qui apparaît à cause de la non-connexité relevée précédemment.

La traduction des propriétés des empilements de Lyndon en terme de séries formelles fournit quelques résultats. En particulier, on obtient l'analogie d'une identité de Witt qui lie le poids des générateurs d'un monoïde d'empilements avec le poids des empilements de Lyndon. Nous déduisons une généralisation des formules classiques de Witt pour le dénombrement des empilements de Lyndon soumis à certaines statistiques.

On aborde ensuite la question de l'interprétation combinatoire des empilements. Un résultat dans cette direction: une nouvelle démonstration de l'égalité de Jacobi reliant un mineur d'une matrice au mineur complémentaire de la matrice inverse. On peut voir cette égalité comme une généralisation de l'inversion matricielle par cofacteurs. Dans ce cas, l'interprétation est simple: d'une part, on a un chemin qui relie deux sommets d'un graphe, d'autre part, on a un empilement de circuits élémentaires surmonté d'un chemin élémentaire qui relie les deux mêmes sommets. La bijection de Dulucq-Viennot démontre alors l'égalité. Pour interpréter l'égalité plus générale de Jacobi, on ajoute, de part et d'autre, des chemins (élémentaires ou non, selon le cas). L'égalité se démontre en appliquant une modification de la bijection de Dulucq-Viennot à un chemin obtenu en collant plusieurs chemins à la file. Tout ceci peut se réaliser en variables non-commutatives ce qui généralise un peu plus l'égalité.

Finalement, la théorie des empilements fait ressortir une dualité entre certaines paires de séries formelles. Souvent, en effet, l'inverse d'une série associée à une famille d'empilements possède une interprétation en terme d'une autre famille; ainsi, le couple empilements généraux-empilements triviaux. Cette dualité s'explique par un transfert de pièces d'un membre d'une des familles à un empilement de l'autre famille. On développe une théorie du transfert de pièces où apparaissent les idéaux du treillis "partiel" des empilements. Les conditions qui expriment la possibilité de transfert se traduisent simplement sur les paires "duales" d'idéaux. On recherche aussi des conditions qui assurent l'inversion des séries associées aux idéaux choisis.

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	iv
Table des matières	vi
Introduction	1
Chapitre 1. Empilements	7
1.1 Monoïdes libres partiellement commutatifs.....	7
1.2 Monoïdes d'empilements	8
Chapitre 2. Empilements de Lyndon	20
2.1 Introduction	20
2.2 Conjugaison.....	21
2.3 Mot standard associé à un empilement	28
2.4 Définition et propriétés des empilements de Lyndon	31
2.5 Superposition d'empilements de Lyndon.....	37
Chapitre 3. Algèbres de Lie libres partiellement commutatives	41
3.1 Algèbre de Lie générée par les positions.....	41
3.2 Factorisation standard.....	43
3.3 Base de l'algèbre de Lie générée par les positions.....	47
Chapitre 4. Séries formelles d'empilements	55
4.1 Séries formelles et poids.....	55
4.2 Inversion combinatoire.....	58
4.3 Transformations somme-produit.....	60
4.4 Relations logarithmiques.....	65
4.5 Formule de Witt.....	68

Chapitre 5. Graphes et empilements.....	71
5.1 Introduction	71
5.2 Chemins dans un graphe.....	72
5.3 Interprétation des déterminants de l'égalité de Jacobi	75
5.4 Bijections de chemins	82
5.5 Involutions de chemins	86
Chapitre 6. Transférabilité.....	96
6.1 Introduction	96
6.2 Ensembles transférables	97
6.3 Idéaux d'empilements.....	100
6.4 Relations de succession.....	105
6.5 Inversion par transfert.....	108
Conclusion	115
Rappel des notations.....	117
Index	121
Bibliographie.....	123

Introduction

A l'origine de la théorie des empilements, on trouve la notion de mots partiellement commutatifs (connus aussi sous le nom de traces). Ils apparaissent dans les travaux de Cartier et Foata [CF] qui les utilisent pour résoudre certains problèmes d'algèbre et de combinatoire liés à des ordres partiels. Ces mots sont définis à certaines commutations près, commutations fixées à l'avance et applicables aux paires de lettres adjacentes.

Bien qu'équivalent au concept de mot partiellement commutatif, le concept d'empilement de pièces (introduit par Viennot [Vi3]) permet une représentation géométrique simultanée de tous les mots d'une même classe de commutation. On remplace les lettres d'un mot par des pièces qui s'empilent, à la manière des briques d'un jeu de construction, soit l'une sur l'autre (si les lettres correspondantes ne commutent pas), soit côte à côte (si les lettres commutent). Cette visualisation permet de comprendre facilement l'idée sous-jacente à une démonstration où les empilements interviennent, même si les détails et les vérifications, comme souvent en combinatoire, sont parfois assez lourds.

Cette thèse reprend l'étude des empilements et apporte quelques prolongements à la théorie (empilements de Lyndon, inversion par transfert) et aux applications (algèbres de Lie, algèbre linéaire).

Le premier chapitre se veut avant tout un rappel des définitions et des propriétés usuelles rattachées aux empilements. Nous utilisons, à la suggestion même de Viennot, une nouvelle définition des empilements qui associe un niveau à chaque pièce. Cette idée rend plus transparente le concept d'empilement tout en permettant de simplifier certaines démonstrations. En particulier, la superposition $E \circ F$ de deux empilements E et F reçoit un traitement plus lié à l'intuition que ne le permet l'ancienne définition. D'ailleurs, on rattache celle-ci à la nouvelle via un ordre partiel qu'on associe à tout empilement. On développe finalement l'idée de connexité dans les empilements et celle de facteur gauche (ou droit), idées qui joueront un rôle crucial dans les chapitres subséquents.

Un mot de Lyndon est le représentant minimal d'une classe de conjugaison (ou de transposition) de mots; deux mots étant conjugués si on peut obtenir l'un par permutation circulaire des lettres de l'autre. Mais on peut voir un mot comme un ordre total sur le multi-ensemble des lettres qui le composent. On peut donc se demander ce qu'il advient si on remplace cet ordre total par un ordre partiel obtenu en permettant à certaines paires de lettres de commuter. Autrement dit, peut-on définir un concept d'empilement de Lyndon adéquat? Le deuxième chapitre apporte une réponse affirmative à cette question.

Pourtant, on se bute dès le départ à deux difficultés. La première, qu'on explore à la section 2.2, consiste à obtenir une théorie de la conjugaison pour les empilements. On doit alors distinguer la transposition de la conjugaison, contrairement au cas des mots. Le concept de transposition pour les empilements généralise, à l'aide des facteurs gauches (ou droits), celui de transposition pour les mots; la conjugaison est la fermeture transitive de la transposition. Cette nécessaire distinction a pour effet de compliquer la théorie. Heureusement, on peut associer à chaque empilement connexe une pyramide conjuguée qui se factorise en pyramides dites élémentaires. Si on considère ces pyramides élémentaires comme les lettres d'un nouvel alphabet, on se ramène alors au cas des mots .

La section 2.3 attaque la deuxième difficulté: définir sur les empilements un ordre total similaire à l'ordre lexicographique sur les mots. La solution proposée consiste à associer à chaque empilement E un mot $St(E)$ dit mot standard associé à E . Il suffit alors de comparer les mots standards. Ceci ne résout pas complètement le problème, puisque la relation $St(E \circ F) = St(E)St(F)$ ne se vérifie pas en général. Si tel était le cas, la théorie des empilements de Lyndon serait identique à la théorie des mots de Lyndon. L'introduction du concept de pyramide admissible permet cependant de trouver des conditions suffisantes pour garantir l'égalité mentionnée dans plusieurs cas.

Cette étude permet de définir les empilements de Lyndon de façon similaire aux mots de Lyndon: les représentants minimaux des classes de conjugaison d'empilements (section 2.4). On remarque ensuite que la plupart des propriétés des mots de Lyndon se relèvent au niveau des empilements, moyennant quelques modifications mineures. Beaucoup de ces résultats s'obtiennent par la fusion des concepts de pyramide élémentaire et de pyramide admissible pour former celui de super-lettre. On montre en effet que tout empilement de Lyndon est un mot de Lyndon dans l'alphabet des super-lettres. Plus loin, on démontre que les empilements de Lyndon sont liés d'une autre façon aux mots: le mot standard associé est un mot de Lyndon, mais sur l'alphabet des positions cette fois. En retour, on peut montrer que tout empilement se factorise de façon unique en superposition d'empilements de Lyndon décroissants.

On s'intéresse ensuite au problème inverse: la superposition d'empilements de Lyndon croissants (section 2.5). Dans le cas des mots, on sait que l'opération correspondante fournit un mot de Lyndon. Un résultat similaire s'obtient pour les empilements mais au prix d'une analyse très technique de la situation. Ceci est dû au fait que la superposition d'empilements modifie complètement la structure sous-jacente des super-lettres.

Le troisième chapitre aborde la question des rapports entre les empilements de Lyndon et les algèbres de Lie libres (partiellement commutatives); rapport bien connu dans le cas des mots. On sait, en effet, que les mots de Lyndon correspondent bijectivement à une base de l'algèbre de Lie libre. L'introduction de relations de commutation complique le problème. On doit, pour commencer, définir une "factorisation standard" des empilements (analogue à la factorisation standard des mots) qui permet de définir récursivement l'élément de Lie associé à un empilement de Lyndon donné. On prouve ensuite facilement l'indépendance de ces éléments par une méthode qui s'inspire de celle employée par Lothaire ([Lo], §5.3) dans le cas des mots. La principale difficulté est de prouver que ces éléments génèrent bien l'algèbre de Lie correspondante. Là encore, la preuve rappelle celle de Lothaire qui opère par induction sur un ordre particulier décrit sur les paires de mots de Lyndon. Comme cet ordre ne fonctionne pas bien pour les empilements, nous devons en construire un autre plus complexe. De plus, comme la superposition de deux empilements de Lyndon croissants ne donne pas nécessairement un empilement de Lyndon, la preuve doit traiter nombreux cas spéciaux.

Au chapitre 4, nous étudions les conséquences de la factorisation en empilements de Lyndon sur les séries génératrices associées aux empilements. Une inversion permet de redécouvrir l'égalité:

$$\sum_{T \in T(P)} (-1)^{|T|} T = \prod_L (I - L)$$

qui relie la série signée des empilements triviaux avec un produit où interviennent les empilements de Lyndon. On démontre cette relation combinatoirement. Après un passage au logarithme et son interprétation en terme de pyramides, on propose divers analogues des formules de Witt pour énumérer les empilements de Lyndon suivant différentes statistiques.

La démonstration combinatoire de l'égalité de Jacobi:

$$\det((I - V)^{-1}[D, F]) = \pm \frac{\det((I - V)[\bar{F}, \bar{D}])}{\det(I - V)}$$

qui lie les mineurs d'une matrice et ceux de son inverse fait l'objet du cinquième chapitre. Même si l'auteur a déjà traité le sujet dans un travail précédent, un remaniement complet de l'argument principal autorise de l'inclure ici. En plus de constituer une belle application des empilements à l'algèbre linéaire, la démonstration de l'égalité de Jacobi réalise la fusion de deux notions: celle d'empilements de circuits élémentaires et celle des "chemins sans intersections" de Gessel-Viennot.

Le membre de droite de l'égalité s'interprète assez facilement en terme de chemins élémentaires et d'empilements de circuits, grâce à un théorème général d'inversion de séries formelles d'empilements. La difficulté consiste à faire disparaître les termes supplémentaires qui apparaissent dans le membre de gauche; c'est ici que le remaniement intervient. Tous ces termes représentent des k-uplets de chemins (les "configurations") qu'on relie à la file par des arcs dit "spéciaux". On passe chaque chemin résultant par la bijection de Dulucq-Viennot qui lui associe un empilement. Si celui-ci ne contient pas d'arcs spéciaux, il représente aussi un des termes du membre de droite. Dans le cas contraire, on peut lui associer de façon involutive un empilement semblable mais de signe contraire par une légère réorganisation des arcs spéciaux. Cette fois, le caractère involutif de la fonction décrite se laisse voir clairement alors que dans la version ancienne, cela demandait une argumentation élaborée. De plus, on traite simultanément autant de chemins par configuration que nécessaire, alors qu'auparavant, il fallait distinguer le cas de 0,1,2 ou plus de 2 chemins par configuration. Une autre récompense due à ce nouveau traitement: on obtient une version non-commutative de l'égalité de Jacobi, version qui généralise l'inversion non-commutative par cofacteurs de Foata.

Au cours des chapitres 4 et 5, nous utilisons souvent la relation:

$$\sum_{E \in \mathcal{H}(P)} E \times \sum_{T \in \mathcal{T}(P)} (-1)^{|T|} T = I$$

qui exprime une inversion de la série formelle des empilements d'une part, et de la série des empilements triviaux d'autre part. On démontre cette relation en transférant une pièce d'un des empilements E ou T vers l'autre. Il se produit alors une gigantesque simplification qui ne laisse survivre que $E = T = \Phi$, c'est-à-dire le neutre I des séries formelles. On sent bien qu'on peut soumettre d'autres couples de séries à cet argument de transfert de pièces. Le chapitre 6 explore systématiquement cette idée; on édifie une théorie de la transférabilité des ensembles constitués de couples d'empilements.

Ensuite, on discute le cas où cet ensemble prend la forme d'un produit cartésien. Dans l'ensemble des empilements se dégage alors une structure de treillis partiel (une des opérations du treillis n'est pas définie partout). Or, si les facteurs du

produit cartésien sont des idéaux du treillis partiel, la théorie se simplifie considérablement. Le résultat principal de ce chapitre relie en effet la transférabilité d'un produit cartésien d'idéaux avec les facteurs (comportant deux pièces) des empilements de chaque idéal. Nous cherchons alors des conditions qui permettent la plus grande simplification possible du produit des séries associées: les deux facteurs correspondent alors à des séries inverses l'une de l'autre. Ces résultats s'apparentent, en la généralisant, à la théorie des "linked sets" de Gessel [Ge].

Quelques mots pour finir sur l'organisation des sujets. L'ordre suggéré par la table des matière n'a rien d'absolu. En fait, de nombreuses sections se lisent indépendamment de celles qui précèdent. Si le lecteur désire effectuer une lecture non-linéaire ou ne s'intéresse qu'à certaines sections, il consultera la figure ci-après. Nous avons aussi inclus un rappel des notations et un index général pour permettre de référer aux définitions et propriétés essentielles à la poursuite d'une lecture que nous souhaitons agréable.

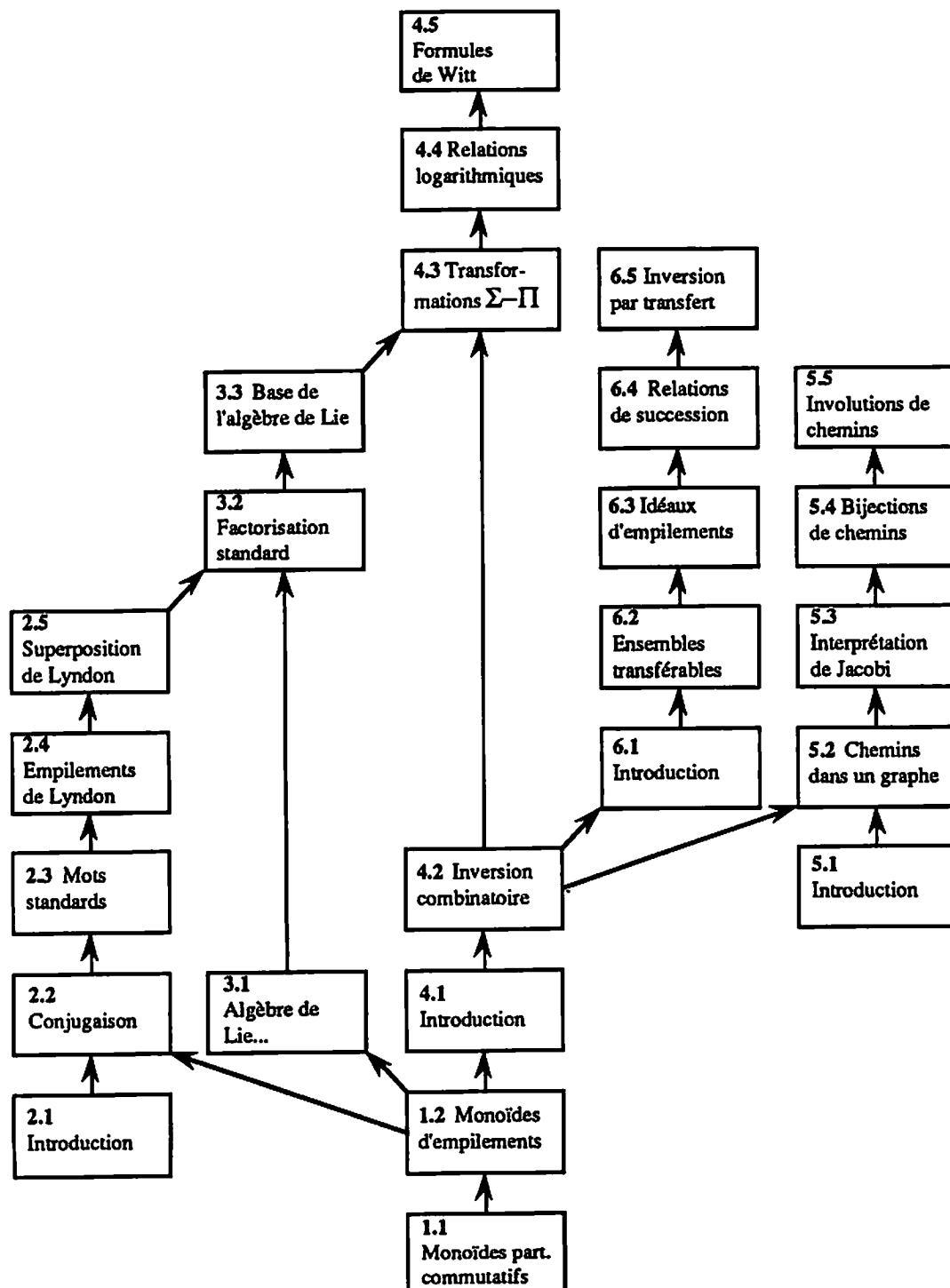


Fig.0 Liens de dépendance entre les différentes sections.

Chapitre 1.

Empilements

§1.1 Monoïdes libres partiellement commutatifs

Étant donné un alphabet A , un *mot* de A est une séquence $w = a_1a_2\dots a_i$ ($i \geq 0$) de lettres $a_j \in A$. Quand $i = 0$, le mot est *vide*, ce qu'on note $w = 1$. Les symboles A^* et A^+ désignent respectivement l'ensemble des mots sur A et l'ensemble des mots non-vides sur A . On définit la *concaténation* de deux mots (de A) $u = a_1\dots a_i$ et $v = b_1\dots b_j$ comme le mot $uv = a_1\dots a_i b_1\dots b_j$. Avec cette opération, A^* devient un monoïde libre.

On adjoint à A une *relation de commutation* C (une relation anti-réflexive et symétrique). Deux lettres $a, b \in A$ *commutent* ssi $(a, b) \in C$, ce qu'on note habituellement $ab \equiv ba$. Ceci génère une relation d'équivalence sur A^* . Deux mots u et v sont *équivalents* ($u \equiv v$) ssi il existe une séquence de mots $u = w_1, w_2, \dots, w_r = v$ telle que pour chaque i , on trouve des mots $x, y \in A^*$ et deux lettres $a, b \in A$ (avec $ab \equiv ba$) pour lesquels $w_i = xaby$ et $w_{i+1} = xbay$.

Exemple. Si $A = \{a, b, c\}$ et $C = \{(a, b), (b, a)\}$, on a: $acbba \equiv acbab \equiv acabb$, d'où $acbba \equiv acabb$.

Clairement, la concaténation de mots est compatible avec l'équivalence. Ainsi, le quotient A^*/\equiv est un monoïde (parfois noté $L(A, C)$) appelé le *monoïde libre partiellement commutatif sur* (A, C) . Cartier et Foata [CF] ont développé la théorie de ces monoïdes et l'ont appliquée, avec succès, à la combinatoire de l'algèbre linéaire. Les monoïdes partiellement commutatifs se rencontrent aussi, dans l'étude du parallélisme en informatique théorique, sous le nom de "langage trace"; une trace étant une classe d'équivalence de mots.

§1.2 Monoïdes d'empilements

Généralités

La théorie des empilements de pièces, développée principalement par Viennot et Dulucq [Vi3], permet de donner une image géométrique des monoïdes libres partiellement commutatifs de Cartier-Foata. Cette image devrait induire chez le lecteur une intuition puissante des idées contenues dans la présente thèse.

Pour passer du monoïde partiellement commutatif aux empilements, on remplace chaque lettre de l'alphabet A par une “position” sur le plan horizontal. On détermine la forme de ces positions de telle sorte que deux positions se recouvrent ssi les lettres correspondantes ne commutent pas. Dans un mot donné, on remplace les lettres par des pièces (des copies de positions) qui occupent alors certains niveaux (qu'on prendra minimums) au-dessus de leurs positions respectives. Le mot s'est transformé en un empilement de pièces.

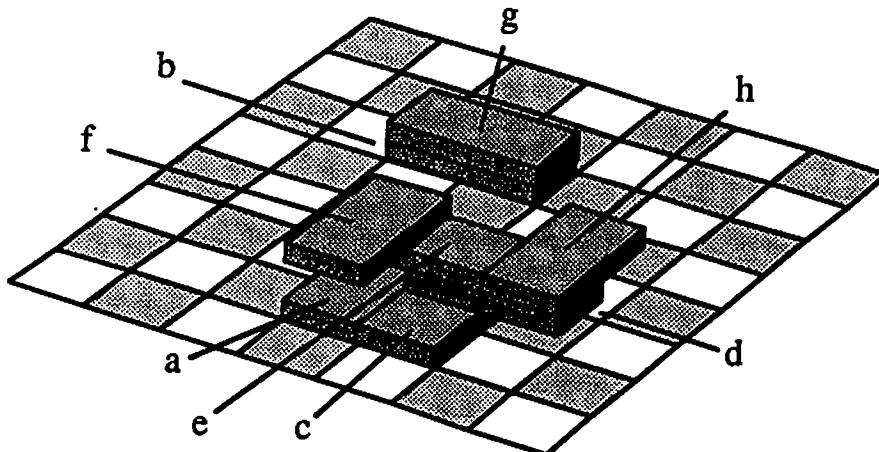


Fig. 1.1 Un empilement dont les pièces sont des dominos recouvrant une partie d'un échiquier. Les positions correspondent à des paires de cases adjacentes (et non aux cases elles-mêmes). Ainsi les pièces a et f occupent la même position (elles se distinguent par leur niveau), de même que b et g.

Plus formellement, on commence par introduire une relation de concurrence (liste des paires de positions qui se recouvrent). On développe ensuite la notion de pré-empilement dont l'utilité apparaîtra dans la définition de la superposition d'empilements. Nous suivrons, en cela, les idées de Viennot.

Définition 1.2.1. Soit P un ensemble (dit l'*ensemble des positions*). Une relation de concurrence ζ sur P est une relation réflexive et symétrique sur P . On note

¶ la relation complémentaire (relation de commutation). On notera aussi $\mathbf{P} = (P, \zeta)$, l'ensemble des positions muni de la relation ζ . ♦

Définition 1.2.2 Un pré-empilement E sur P est un ensemble fini de couples (p,i) appelés pièces de E où $p \in P$ et $i \in \mathbb{P}$ ($= \{1, 2, \dots\}$). Les pièces de E doivent vérifier:

(1) si $(p,i), (q,j) \in E$ avec $p \neq q$ et $p \zeta q$, alors $i \neq j$.

Si $(p,i) \in E$, on note $\pi(p,i) = p$, la position de la pièce (p,i) et $h(p,i) = i$, le niveau de la pièce (p,i) . La hauteur totale de E est $H(E) = \sum_{p \in E} h(p)$; sa hauteur maximale est $h(E) = \max_{p \in E} (h(p))$, avec $h(\emptyset) = 0$. ♦

Nous utiliserons parfois les mêmes notations pour les pièces et pour les positions associées à ces pièces; le contexte permettra alors de distinguer les situations. Ainsi, pour un pré-empilement E , écrire $p \in E$ implique que p est une pièce, alors qu'écrire $p \in \pi(E)$ implique que p est une position.

L'axiome 1 demande que des pièces, qui occupent des positions concurrentes, soient situées à des niveaux différents: les pièces ne peuvent s'interpénétrer. On peut donc voir un pré-empilement comme un ensemble de pièces figées à certaines hauteurs. Nous allons permettre un "flottement" de ces pièces grâce à une relation d'équivalence définie sur l'ensemble des pré-empilements.

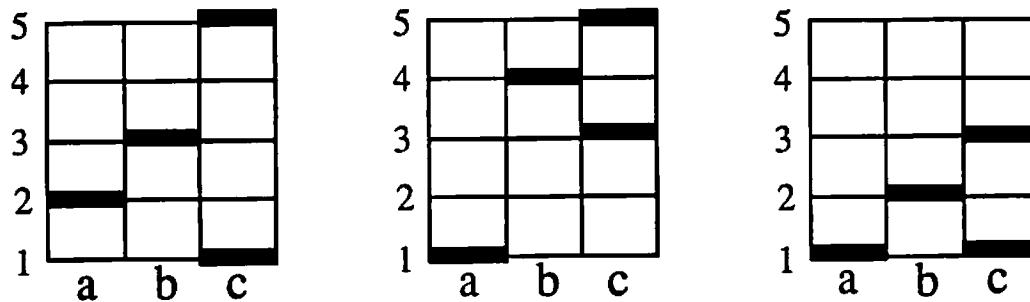


Fig. 1.2 a) Un pré-empilement.

b) Un pré-empilement équivalent.

c) L'empilement correspondant.

Définition 1.2.3. Deux pré-empilements E et F sur P sont équivalentsssi il existe une bijection $\varphi: E \rightarrow F$ préservant les positions et croissante sur les niveaux de pièces concurrentes. ♦

Autrement dit, dans une classe d'équivalence de pré-empilements, les hauteurs sont relatives. La définition 1.2.3 définit bien une relation d'équivalence; pour le voir, considérer la bijection identité sur E (pour la réflexivité), l'inverse de la bijection de E à F (pour la symétrie) et la composition des bijections (pour la transitivité).

Soit E et F deux pré-empilements équivalents. On montre facilement qu'il n'existe qu'une seule bijection d'équivalence φ de E à F . En effet, s'il en existe une deuxième, ψ , alors $\psi^{-1} \circ \varphi$ est une bijection d'équivalence de E vers E . Si $\psi^{-1} \circ \varphi(p,i) \neq (p,i)$ pour une pièce $(p,i) \in E$, on peut supposer que $\psi^{-1} \circ \varphi(p,i) = (p,j)$ avec $i < j$ (ou $i > j$). Réappliquer $\psi^{-1} \circ \varphi$ à (p,j) et aux images successives pour obtenir une suite infinie de pièces situées à des hauteurs croissantes (décroissantes). Ceci est impossible, d'où $\psi = \varphi$. Cette remarque montre qu'une pièce dans un pré-empilement E a un correspondant dans chaque pré-empilement équivalent à E .

Si on introduit ensuite la "gravité", le flottement disparaît; les pièces tombent au plus bas niveau possible.

Définition 1.2.4. *Un empilement sur P est un pré-empilement E sur P vérifiant*

- (2) *soit $(p,i) \in E$ avec $i > 1$,
alors il existe une pièce $(q,i-1) \in E$ telle que $p \leq q$. \diamond*

Proposition 1.2.5. *Chaque classe d'équivalence de pré-empilements contient un unique empilement. Un pré-empilement E est un empilement ssi $H(E)$ est minimal dans la classe d'équivalence de E . \diamond*

Démonstration. Commençons par montrer que si E est un pré-empilement pour lequel $H(E)$ est minimal dans la classe de E , alors E est un empilement. Supposons qu'il existe une pièce $(p,i) \in E$ ne vérifiant pas l'axiome (2) de la définition 1.2.4. On pose:

$$E' = E - \{(p,i)\} \text{ et } F = E' \cup \{(p,i-1)\}.$$

Clairement, F est un pré-empilement qui est équivalent à E (la bijection, qui montre cette équivalence, associe (p,i) à $(p,i-1)$ et est l'identité sur E'). Comme $H(E)$ est minimale, on peut écrire: $H(E) \leq H(F) = H(E)-1$; une contradiction. Remarquer qu'on a montré, en même temps, l'existence d'un empilement dans chaque classe d'équivalence.

Soit E un empilement. Nous allons montrer que $H(E)$ est minimale dans la classe de E . Soit F un pré-empilement équivalent à E pour lequel $H(F)$ est minimal dans la classe de F (ou de E). Comme on l'a vu au paragraphe précédent, F est un empilement. Soit $\varphi: E \rightarrow F$ la bijection qui soutient l'équivalence de E et F .

Si $\varphi(p,i) = (p,i)$ pour toute pièce $(p,i) \in E$, nos problèmes sont réglés: on a alors $E = F$ et $H(E) = H(F)$. Supposons, au contraire, qu'il existe une pièce $(p,i) \in E$ telle que $\varphi(p,i) = (p,j)$ pour une hauteur $j \neq i$. On aura pris soin de choisir l'entier i

minimal. Si $i = 1$, on a $j > i$. D'autre part, si $i > 1$, il existe une pièce $(q, i-1) \in E$ avec $p \zeta q$ (voir fig. 1.3a). Par minimalité de i , on a $\varphi(q, i-1) = (q, i-1)$. Comme φ est croissante, on a $j > i-1$. Puisque $j \neq i$, on a encore $j > i$.

Comme F est un empilement, il existe une pièce $(r, j-1) \in F$ telle que $p \zeta r$. Soit $(r, k) = \varphi^{-1}(r, j-1)$ (voir fig. 1.3b). On a $k < i$ puisque φ^{-1} est croissante sur les hauteurs de pièces concurrentes. Par minimalité de i , on a donc $(r, j-1) = \varphi(r, k) = (r, k)$. D'où $j-1 = k < i$ et $j \leq i$; une contradiction. \diamond

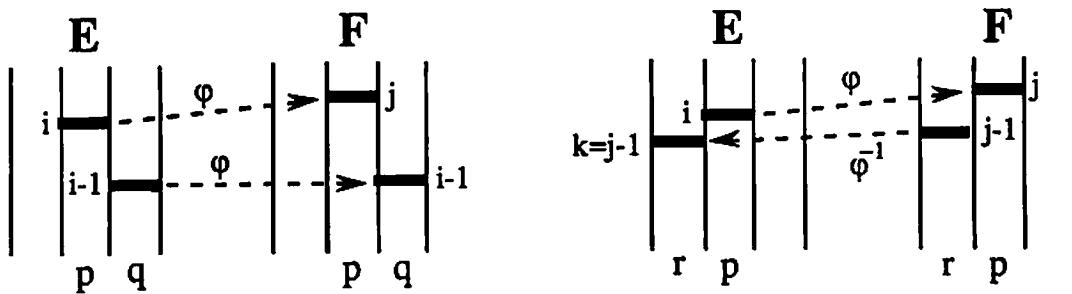


Fig. 1.3 a) Situation de p et q dans E et F .

b) Situation de p et r dans E et F .

Quelques exemples d'empilements

Les mots. L'ensemble des positions P est l'alphabet avec comme relation de concurrence $\zeta = P \times P$ (rien ne commute; on dira que la relation de concurrence est totale). Dans ce contexte, les empilements sont les mots. Le niveau d'une pièce est le rang de la lettre correspondante dans le mot.

Les nombres. P est l'ensemble des nombres premiers avec relation de concurrence triviale (toute paire de premiers distincts commute). L'ensemble \mathbb{P} des entiers positifs correspond à l'ensemble des empilements, via la factorisation des entiers en nombres premiers (fig. 1.4 a).

Empilements de couplages. Prenons un graphe non-orienté G . P est l'ensemble des arêtes de G , deux arêtes étant concurrentes ssi elles ont un sommet commun. Dans plusieurs des exemples qui suivront, on considère G comme un graphe linéaire ce qui est à la fois simple et suffisamment général pour illustrer de nombreux concepts. Parfois, on simplifiera même la représentation de ces exemples en ne dessinant qu'un contour général de l'empilement et en incluant, au besoin, les pièces qui jouent un rôle particulièrement significatif.

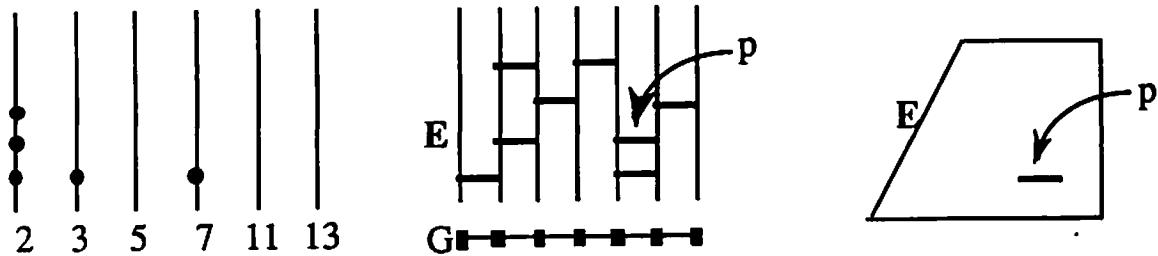


Fig. 1.4 a) L'empilement
 $2^3 \times 3 \times 7 = 168$.

b) Un empilement de
couplages sur un graphe
linéaire.

c) Sa représentation à
l'aide d'un contours.

On introduira plus loin des empilements d'arcs et des empilements de circuits élémentaires (voir le chapitre 5). Pour l'instant, passons à la définition de l'opération principale des empilements: la superposition.

Superposition

Définition 1.2.6 Étant donné deux pré-empilements E et F sur P , on définit la superposition de F sur E comme le pré-empilement

$$E \circ F = E \cup \{(p, h+i) \text{ tel que } (p, i) \in F\}$$

où $h = h(E)$ est le niveau maximum de E . ♦

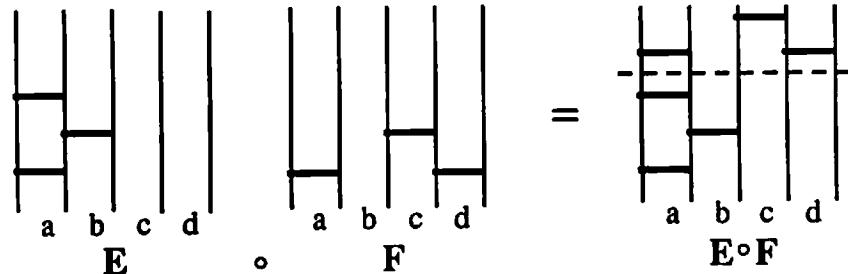


Fig 1.6 La superposition de deux pré-empilements E et F .

On notera $F+h = \{(p, h+i) \text{ tels que } (p, i) \in F\}$. Les pièces de $F+h$ sont toutes d'un niveau supérieur à celles de E ; aussi $E \circ F$ est-il un pré-empilement.

De façon imagée, pour obtenir le pré-empilement $E \circ F$, placer F immédiatement au dessus de E (en respectant les positions) et laisser tout tomber. La superposition jouit de propriétés utiles, comme le démontre le prochain lemme.

Lemme 1.2.7 *La superposition de pré-empilements sur P est associative, simplifiable à gauche et à droite et possède un neutre, le pré-empilement vide Φ (qui, d'ailleurs est un empilement).* \diamond

Démonstration. Soit E, F, G des pré-empilements de niveaux maximaux h, i, j (respectivement). On a $(E \circ F) \circ G = E \cup (F+h) \cup (G+h+i) = E \circ (F \circ G)$.

Supposons que $E \circ F = E \circ G$; on a $E \cup (F+h) = E \cup (G+h)$. L'union étant disjointe, on a aussitôt $F+h = G+h$, d'où $F = G$.

De même, si $E \circ G = F \circ G$, on a $E \cup (G+h) = F \cup (G+i)$. Le niveau maximal de $E \cup (G+h)$ est $h+j$, celui de $F \cup (G+i)$ est $i+j$. On a donc $h = i$. L'union étant disjointe, on trouve $E = F$.

Finalement, l'ensemble vide est un pré-empilement. On a clairement $E \circ \Phi = E = \Phi \circ E$. \diamond

La superposition peut être définie aussi sur les classes d'équivalence de pré-empilements. Il suffit d'admettre le lemme suivant.

Lemme 1.2.8 *La superposition de pré-empilements est compatible avec l'équivalence.* \diamond

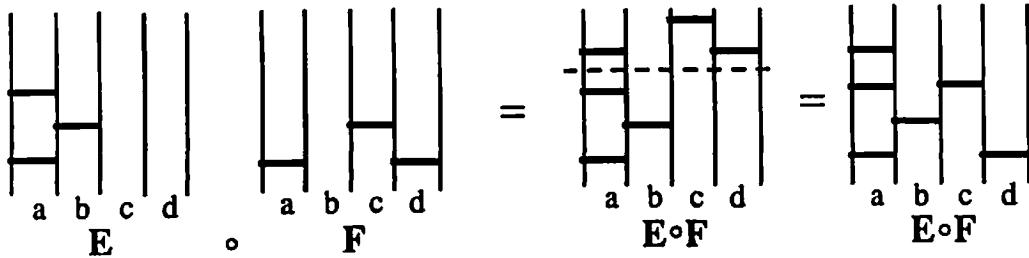
Démonstration. Soit E, E', F, F' des pré-empilements sur P . Soit h (respectivement h') la hauteur maximale de E (respectivement E'). Supposons que E et E' soient équivalents (par une bijection φ_E de même que F et F' (par une bijection φ_F). Nous allons montrer que $E \circ F$ est équivalent à $E' \circ F'$.

Soit φ définie sur $E \cup (F+h)$ par:

$$\begin{aligned} \varphi(p, i) &= \varphi_E(p, i) && \text{si } (p, i) \in E, \\ \varphi(p, i+h) &= \varphi_F(p, i) + h' && \text{si } (p, i+h) \in F+h. \end{aligned}$$

Il est clair que φ est une bijection de $E \circ F$ vers $E' \circ F'$ qui préserve les positions. La restriction de φ à chaque partie E ou $F+h$ est croissante sur les niveaux des pièces concurrentes. Mais comme les pièces de $F+h$ sont à un niveau supérieur à celles de E et comme un énoncé similaire est vrai pour $F'+h'$ et E' , la bijection φ est croissante sur le niveau pour toute paire de pièces concurrentes de $E \circ F$. \diamond

Définition 1.2.9. Soit E et F des empilements sur P . La superposition $E \circ F$ de F sur E est l'unique empilement équivalent au pré-empilement $E \circ F$. \diamond

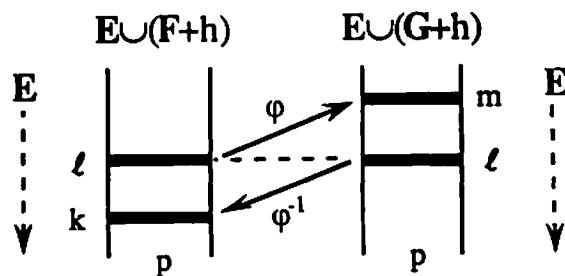
Fig. 1.6 La superposition de deux empilements E et F .

Le lemme 1.2.8 démontre que les empilements forment un ensemble de représentants des classes d'équivalences de pré-empilements et que ce choix de représentants est cohérents avec l'opération de superposition. Les propriétés de la superposition se transmettent à la superposition d'empilements.

Proposition 1.2.10. *La superposition d'empilements sur P est associative, simplifiable à gauche et à droite et possède un neutre, l'empilement vide Φ . \diamond*

Démonstration. Soit E, F, G des empilements de hauteurs maximales respectives h, i, j . Les empilements $E \circ (F \circ G)$ et $(E \circ F) \circ G$ sont équivalents au pré-empilement $E \cup (F+h) \cup (G+h+i)$ et sont donc équivalents entre eux. Mais il n'y a qu'un seul empilement par classe d'équivalence. D'où $E \circ (F \circ G) = (E \circ F) \circ G$.

Supposons que $E \circ F = E \circ G$. Les pré-empilements $E \cup (F+h)$ et $E \cup (G+h)$ sont donc équivalents via une certaine bijection φ . Nous montrons que $\varphi(E) \subseteq E$. Il suffit de vérifier que $h \circ \varphi(p, \ell) \leq \ell$ pour toute pièce $(p, \ell) \in E$. Supposons donc le contraire: prenons $(p, \ell) \in E$ avec ℓ minimal vérifiant $\varphi(p, \ell) = (p, m)$ pour un certain entier $m > \ell$. Remarquons que $(p, m), (p, \ell) \in E \cup (G+h)$. En posant $(p, k) = \varphi^{-1}(p, \ell)$, la croissance de φ^{-1} montre que $k < \ell$. Ceci contredit la minimalité de ℓ puisqu'on a $h \circ \varphi(p, k) = \ell > k$. Ainsi, la restriction de φ à E est une bijection de E dans lui-même. Donc la restriction de φ à $F+h$ est une bijection de $F+h$ vers $G+h$. Les empilements F et G sont donc dans la même classe d'équivalence, d'où $F = G$.

Fig 1.7 Hauteurs associées à la position p dans $E \cup (F+h)$ et $E \cup (G+h)$

Pour la simplification à droite, la preuve est similaire. Comme on l'a vu, le pré-empilement vide Φ est un empilement, qui joue le rôle de neutre pour la superposition. \diamond

L'ensemble des empilements sur P , muni de l'opération de superposition d'empilements, forme donc un monoïde libre partiellement commutatif, noté $\mathcal{H}(P)$. Viennot a montré ([Vi3], section 3) que $\mathcal{H}(P)$ est isomorphe au monoïde libre partiellement commutatif $L(P,C)$ (où C est le complémentaire de ζ) de Cartier-Foata [CF].

Ordre partiel associé à un empilement

Tout pré-empilement recèle un ordre partiel sous-jacent, notion qui jouera un rôle important par la suite.

Définition 1.2.11. Soit E un pré-empilement sur P et soit $(p,i), (q,j)$ deux pièces de E . On écrit: $(p,i) \leq_E (q,j)$ ssi il existe des pièces (p_r,i_r) ($0 \leq r \leq k$) de E telles que:

- 1) $(p_0,i_0) = (p,i)$, $(p_k,i_k) = (q,j)$,
- 2) $p_0 \zeta p_1 \zeta \dots \zeta p_k$ et
- 3) $i_0 < i_1 < \dots < i_k$. \diamond

Lemme 1.2.12. Soit E un pré-empilement sur P . La relation \leq_E définit un ordre partiel sur les pièces de E . \diamond

Démonstration. Il est clair que $(p,i) \leq_E (p,i)$ pour toute pièce $(p,i) \in E$ (prendre $k=0$ dans la définition). Supposons qu'on ait $(p,i) \leq_E (q,j) \leq_E (r,k)$ pour des pièces $(p,i), (q,j), (r,k) \in E$. Alors il existe une suite (p_s,i_s) ($0 \leq s \leq k+\ell$) de pièces de E vérifiant:

- 1) $(p_0,i_0) = (p,i)$, $(p_k,i_k) = (q,j)$, $(p_{k+\ell},i_{k+\ell}) = (r,k)$,
- 2) $p_0 \zeta p_1 \zeta \dots \zeta p_{k+\ell}$,
- 3) $i_0 < i_1 < \dots < i_{k+\ell}$.

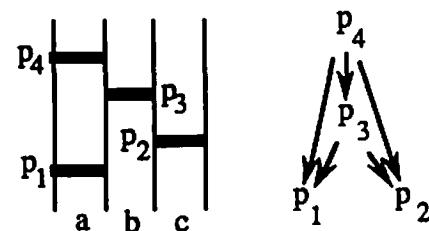


Fig. 1.8 L'ordre associé à un pré-empilement E .

Aussi a-t-on $(p,i) \leq_E (r,k)$. Finalement, dans la même situation, avec $(r,k) = (p,i)$, on a: $i_0 < i_1 < \dots < i_{k+\ell} = i_0$ d'où $k+\ell = 0$ et $k = \ell = 0$. On a donc $(p_0,i_0) = (p_k,i_k)$ ou, si on préfère, $(p,i) = (q,j)$. \diamond

Nous montrons ensuite que cet ordre est commun à tous les pré-empilements d'une même classe d'équivalence.

Proposition 1.2.13. *La bijection φ assurant l'équivalence de deux pré-empilements E et F est un isomorphisme d'ordre partiel pour \leq_E et \leq_F . \diamond*

Démonstration. A toute chaîne $(p_0, i_0), \dots, (p_k, i_k) \in E$ vérifiant $p_0 \zeta \dots \zeta p_k$ et $i_0 < \dots < i_k$, la bijection φ lui associe la chaîne $(p_0, j_0), \dots, (p_k, j_k) \in F$ vérifiant $p_0 \zeta \dots \zeta p_k$ et $j_0 < \dots < j_k$. Ainsi $(p_0, i_0) \leq_E (p_k, i_k)$ ssi $\varphi(p_0, i_0) \leq_F \varphi(p_k, i_k)$. \diamond

Définition 1.2.14. *Étant donné un pré-empilement E sur P , on définit $\min(E)$ (respectivement $\max(E)$) comme le sous-ensemble de E constitué des positions des pièces minimales (respectivement maximale) pour l'ordre \leq_E . On peut leur associer aussi les empilements qu'on note encore $\min(E)$ et $\max(E)$.*

Un empilement T est trivial si $h(T) = \{1\}$. L'ensemble des empilements triviaux sur P se note $\mathcal{T}(P)$.

Pour un pré-empilement E , on note $|E|$ le nombre de pièces de E . Si $p \in P$, on écrit $|E|_p$ pour le nombre de pièces de E en position p . Une pyramide de sommet p est un empilement D vérifiant $\max(D) = \{p\}$. Une pyramide (inversée¹) de base p est un empilement D vérifiant $\min(D) = \{p\}$. L'ensemble des pyramides de sommet p se note $\mathcal{D}^p(P)$; l'ensemble des pyramides de base p , $\mathcal{D}_p(P)$.

Quand un empilement E est réduit à une seule pièce en position p , on le note $E = (p, 1)$, ou mieux, $E = p$. Tout empilement E peut alors s'écrire comme une superposition $E = p_0 \circ \dots \circ p_k$ ($p_i \in P$). Ceci permet de parler de la position p_i , comme de la pièce p_i (dans l'empilement E) en commettant un léger abus de langage. Si on considère l'ensemble des positions P comme un alphabet, on associe au mot $p_1 \dots p_m$ de P^ ($p_i \in P$) un empilement $E = \varphi(p_1 \dots p_m) = p_1 \circ \dots \circ p_m$.*

Si E est un empilement, on note $\zeta(E) = \{p \in P$ telles que $\exists (q, i) \in E$ avec $q \zeta p\}$; c'est l'ensemble des positions concurrentes avec une position occupée par une pièce de E . \diamond

¹ Comme le choix des termes "sommet" et "base" permet de distinguer les pyramides des pyramides inversées, on laissera souvent tomber ce dernier qualificatif.

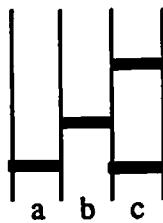
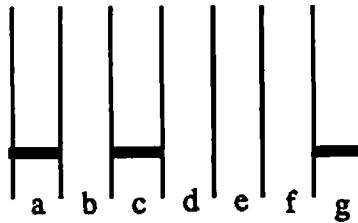


Fig. 1.9 a) Une pyramide de sommet c.



b) Un empilement trivial.

Remarquons qu'un empilement T est trivial si les positions de ses pièces prises deux à deux sont non-concurrentes. On a $T = \min(T) = \max(T)$.

Chaque mot dans l'ensemble $\varphi^{-1}(E)$ correspond à un ordre linéaire (sur les pièces de E) compatible avec l'ordre partiel \leq_E . En fait, on montre que $\varphi^{-1}(E)$ est la classe de commutation de mots que E représente. Autrement dit, on peut définir φ sur le monoïde A^*/\equiv . Dans ce cas $\varphi: A^*/\equiv \rightarrow \mathcal{H}(P)$ est un isomorphisme de monoïde. Consulter Viennot ([Vi3], section 3) à ce sujet.

Renversement

Définition 1.2.15. Soit E un pré-empilement avec $h = h(E)$. On définit $E^t = \{(p, h+1-i) telles que $(p, i) \in E\}$; c'est le renversé de E . $\diamond$$

Le lecteur vérifiera sans peine que E^t est un pré-empilement et que si E et F sont deux pré-empilements équivalents, alors E^t et F^t sont équivalents. On peut donc parler de l'empilement E^t . On voit facilement que $(E^t)^t = E$ et que $(E \circ F)^t = F^t \circ E^t$.

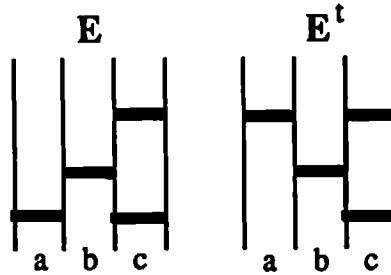


Fig. 1.10 Un empilement et son renversé.

Connectivité

Définition 1.2.16. Soit E et F deux empilements. On dit que E et F sont connectés (l'un à l'autre) s'il existe une position $p \in \pi(E)$ et une position $q \in \pi(F)$ telles que $p \leq q$. Dans le cas contraire, on dira que E et F sont non-connectés.

Un empilement E est connexe si pour toute factorisation $E = U \circ V$, U et V sont connectés (sauf, bien sûr, si $U = \Phi$ ou si $V = \Phi$). \diamond

Si E et F sont non-connectés, il est clair que $E \circ F = F \circ E$.

Facteur gauche, droit.

Définition 1.2.17. Soit $E, U, V \in \mathcal{H}(P)$ tels que $E = U \circ V$, on dit que U (respectivement V) est un facteur gauche (resp. droit) de E . L'empilement U (resp. V) est un facteur gauche (resp. droit) propre de E si, de plus, U et V sont simultanément non-vides.

De même, on dit que V est un facteur de E si on peut écrire $E = U \circ V \circ W$ pour certains empilements U et W . \diamond

Lemme 1.2.18 Soit $E \in \mathcal{H}(P)$, soit S un sous-ensemble de E . Posons

$$U = \{p \in E \text{ tel qu'il existe } q \in S \text{ vérifiant } p \leq_E q\}.$$

Alors U est un facteur gauche de E . \diamond

Démonstration. Montrons que U est un empilement. Comme $U \subseteq E$, l'ensemble U est nécessairement un pré-empilement. Soit $(q,i) \in U$ avec $i > 1$. Comme $(q,i) \in E$, il existe $(p,i-1) \in E$ avec $p \leq q$. Ainsi $(p,i-1) \leq_E (q,i)$ et $(p,i-1) \in U$.

Montrons ensuite que U est un facteur gauche de E . Soit V l'empilement équivalent au pré-empilement $E - U$. Pour montrer que $U \circ V = E$, il suffit de montrer que $U \cup ((E - U) + h)$ est équivalent à E (où $h = h(U)$). Soit $\varphi: U \cup ((E - U) + h) \rightarrow E$ la bijection définie par:

$$\varphi(p,i) = \begin{cases} (p,i) & \text{si } (p,i) \in U, \\ (p,i-h) & \text{si } (p,i) \in (E - U) + h. \end{cases}$$

Elle préserve les positions et est croissante pour des pièces concurrentes sur chacun des ensembles U et $(E - U) + h$. Soit $(p,i) \in U$, $(q,j+h) \in (E - U) + h$ avec $p \leq q$. On a $i < j+h$. Il faut donc montrer que $i < j$. Supposons le contraire; alors $(q,j) \leq_E (p,i)$ et, par définition de U , $(q,j) \in U$. Mais, d'autre part, $\varphi(q,j+h) = (q,j) \in E - U$. \diamond

Définition 1.2.19. Soit $E \in \mathcal{H}(P)$, soit S un sous-ensemble de E . L'ensemble $U = \{p \in E \text{ telles qu'il existe } q \in S \text{ vérifiant } p \leq_E q\}$ est dit le facteur gauche

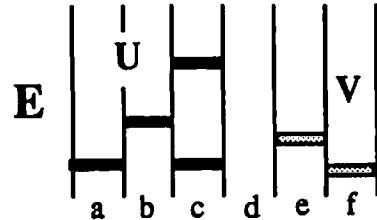


Fig. 1.11 L'empilement $E = U \circ V$ est non-connexe; U et V sont non-connectés.

déterminé par S dans E . On dit aussi que U est le facteur (gauche) de sommet S dans E . Dans le cas où $|S| = 1$, U est une pyramide et on parle alors de la pyramide de sommet S dans E . On a, bien sûr, des définitions analogues pour le facteur droit déterminé par S dans E . \diamond

De façon imagée, on obtient U , le facteur de sommet S dans E , en pesant simultanément sur toutes les pièces de E qui font partie de S , et en prenant tout ce qui s'enfonce. On peut écrire $E = U \circ V$ où $V = \{p \in E \text{ telles que } p \leq_E q \text{ pour tout } q \in S\}$.

Lemme 1.2.20. Si U et V sont des facteurs gauches de l'empilement E , alors $U \cup V$ est un facteur gauche de E . \diamond

Démonstration. Soit W le facteur gauche déterminé par $U \cup V$ dans E . On a $U \cup V \subseteq W$. Soit $p \in W$. Alors il existe $q \in U \cup V$ tel que $p \leq_E q$. Comme U (respectivement V) est le facteur gauche déterminé par U (resp. V) dans E , on a $p \in U$ (resp. V) si $q \in U$ (resp. V). Dans tous les cas, $p \in U \cup V$. Donc $U \cup V = W$ qui est un facteur gauche de E . \diamond

Lemme 1.2.21. Soit $E, F \in \mathcal{H}(P)$ alors il existe $U, V \in \mathcal{H}(P)$ tels que :

- 1) $U \circ V = F$
- 2) $\min(V) \subseteq \zeta(E)$,
- 3) U et E ne sont pas connectés. \diamond

Démonstration. Prendre $S = \{p \in F \text{ tels que } \pi(p) \in \zeta(E)\}$ et V le facteur droit déterminé par S dans F . Écrire $F = U \circ V$. Clairement, $\min(V) \subseteq S \subseteq \zeta(E)$. Si U et E étaient connectés, il existerait une pièce $p \in U$ vérifiant $\pi(p) \in \zeta(E)$; p serait donc une pièce de V et non de U . \diamond

Les conditions du lemme précédent montrent que $E \circ V$ est le facteur droit déterminé par E dans $E \circ F$. Les empilements U et V sont donc déterminés de façon unique.

Définition 1.2.22. Dans le lemme 1.2.21, l'empilement U est la partie de F non-connectée avec E . \diamond

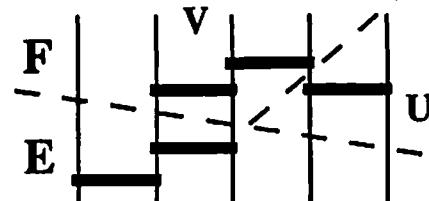


Fig.1.12 La partie de F non-connectée (U) avec E . L'empilement $(E \circ V)$ déterminé par E dans $E \circ F$.

Chapitre 2.

Empilements de Lyndon

§2.1 Introduction

Dans ses articles sur le problème de Burnside, Lyndon ([Ly],[CFL]) a introduit les mots qui portent désormais son nom. On connaît l'intérêt qu'offrent les mots de Lyndon pour la combinatoire et l'algèbre. Nous proposons dans ce chapitre une généralisation de ce concept au contexte des empilements. Comme les mots de Lyndon forment, par définition, un système de représentants des classes de conjugaison de mots, notre première tâche sera d'étudier une généralisation de la conjugaison applicable aux empilements. Pour comprendre les distinctions à apporter lors de ce passage, revoyons la conjugaison dans les mots.

Étant donné deux mots u et v sur un même alphabet, on dit que le mot vu est un *transposé* (ou un *conjugué*) du mot uv . On écrit alors $uv \sim vu$. Chercher les transposés d'un mot revient à le considérer comme une séquence circulaire. Pour les mots, la transposition est une relation d'équivalence; en particulier, si $u \sim v \sim w$ pour des mots u, v, w , on a alors $u \sim w$. Le résultat de deux transpositions consécutives s'obtient par une seule transposition.

A priori, il peut sembler facile de généraliser l'idée de séquence circulaire aux monoïdes d'empilements en remplaçant "mots u , v ou w " par "empilements U, V ou W ". Malheureusement, dans cette situation plus générale, la transposition n'est pas une relation d'équivalence; la transitivité des transpositions n'est pas vérifiée (voir fig. 2.1). De fait, un mot ne peut être transposé de lui-même que d'une seule façon. Plus précisément, la solution de l'équation $uv = vu$ est $u = x^m$, $v = x^n$ pour un mot x et des entiers m et n . On peut transporter cette solution au contexte des empilements. Cependant, il y a au moins une autre type de solutions à l'équation $U \circ V = V \circ U$; les empilements U et V peuvent être non-connectés.

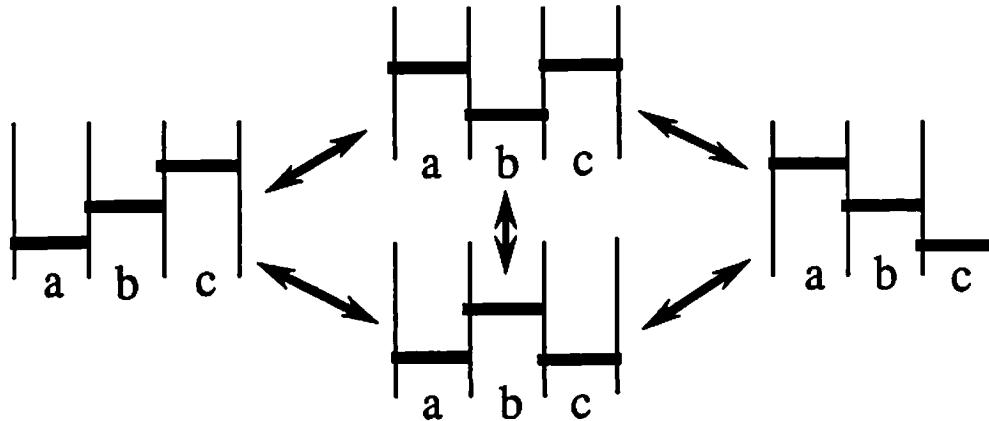


Fig. 2.1 La classe de conjugaison d'un empilement. Chaque flèche représente une transposition.

Nous allons donc étudier un concept d'empilements "circulaires". En analogie avec les mots, l'équation $U \circ V = V \circ U$ apparaîtra comme la clé de cette étude. Duboc ([Db1], [Db2], [Db3]) a étudié la solution de cette équation en terme de traces, et plus généralement, de toute équation à deux inconnues. Les définitions et résultats de ses travaux se traduisent aisément en empilements. On en retrouvera quelques-uns dans ce chapitre avec quelques modifications mineures. Cependant, le traitement donné ici s'inspire de la théorie des empilements et possède donc un esprit différent.

§2.2 Conjugaison

Soit E un empilement. S'il existe un empilement F ($\neq \Phi$) et un entier $k \geq 2$ tels que $E = F^k$, on dit que E est *périodique* (de *racine* F , si k est maximal). Si $E = U \circ V = V \circ U$ implique $U = \Phi$ ou $V = \Phi$, on dit que E est *primitif*¹. Remarquons qu'un empilement primitif est nécessairement connexe et non-périodique.

Si $E = U \circ V$, on dit que $V \circ U$ est un *transposé* de E . Si U et V sont non vides, la transposition est *propre*. Si $|U| = 1$ ou $|V| = 1$, la transposition est *simple*. La fermeture transitive de la relation "transposition" est une relation d'équivalence, la *conjugaison*, notée " \sim ". De façon plus explicite, $E \sim F$ ssi il existe une séquence de transpositions $(U_i \circ V_i, V_i \circ U_i)_{i \in [k]}$ telles que $E = U_1 \circ V_1, F = V_k \circ U_k$ avec $V_i \circ U_i = U_{i+1} \circ V_{i+1}$. On dira alors que cette séquence est une conjugaison de E à F . La conjugaison est *simple* si toutes les transpositions qui la composent sont simples. Toute transposition $(U \circ V, V \circ U)$ se raffine en une conjugaison simple $(p_{i-1} \circ \dots \circ p_1 \circ U \circ p_k \circ \dots \circ p_i, p_i \circ \dots \circ p_1 \circ U \circ p_k \circ \dots \circ p_{i+1})_{i \in [k]}$ (où $V = p_k \circ \dots \circ p_1$ pour certaines

¹ Pour Duboc, "primitif" est "non-périodique". Cependant, en prévision des propriétés des empilements de Lyndon, nous préférons la distinction apportée ici.

positions $p \in P$). Ainsi, en remplaçant chaque transposition d'une conjugaison donnée par une conjugaison simple, on obtient une conjugaison simple. Le lecteur prouvera facilement le prochain lemme en le démontrant d'abord pour des empilements E et F reliés par une transposition simple.

Lemme 2.2.1. Soit $E, F \in \mathcal{H}(P)$ avec $E \sim F$. Alors :

- 1) $E^k \sim F^k$;
- 2) si E est périodique alors F est périodique (avec des racines conjuguées);
- 3) si E est connexe, F est connexe;
- 4) si E est primitif, alors F est primitif. \diamond

Pour pouvoir étudier un peu plus l'effet des transpositions sur un empilement, on définit deux fonctions A_p et A_p^{-1} . Soit E un empilement et soit p une pièce de E . Soit V la pyramide de base p dans E et soit $E = U \circ V$. On définit $A_p(E) = V \circ U$. Clairement $E \sim A_p(E)$ et $\pi(p) \in \min(A_p(E))$.

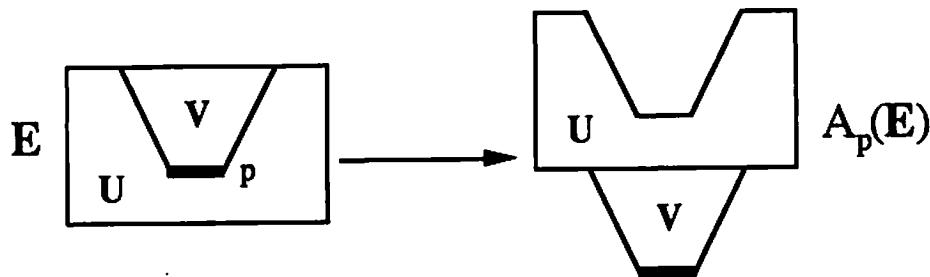


Fig. 2.2 Relations entre E et $A_p(E)$.

Nous aimerais itérer cette fonction. Ceci laisse supposer que $p \in A_p(E)$. Formellement, rien ne peut garantir une telle affirmation. Si, par exemple, la pièce p est au niveau 2, dans E , pourquoi y aurait-il une pièce de même position et même niveau dans $A_p(E)$? On comprendra, qu'en réalité, nous voulons parler de la pièce de $V \circ U$ "correspondante" à la pièce $p \in U \circ V$ parmi toutes celles de même position dans $V \circ U$. Bien que ce point soit intuitivement clair, nous allons, par souci de rigueur, préciser cette correspondance. On peut cependant passer directement au lemme 2.2.2.

Considérons une transposition $(U \circ V, V \circ U)$. Soit h la hauteur maximale de U et k la hauteur maximale de V . On définit une bijection θ de $U \cup (V+h)$ vers $V \cup (U+k)$ par :

$$\begin{aligned}\theta(p,i) &= (p,i+k) \text{ pour } (p,i) \in U, \\ \theta(p,i+h) &= (p,i) \text{ pour } (p,i+h) \in V+h.\end{aligned}$$

On dit alors que $\theta(p,i)$ est la pièce de $V \cup (U+k)$ correspondant à $(p,i) \in U \cup (V+h)$. De même, $\theta^{-1}(p,i)$ est la pièce de $U \cup (V+h)$ correspondant à la pièce (p,i) de $V \cup (U+k)$.

Soit maintenant α l'unique bijection (d'équivalence de pré-empilements) de $U \cup (V+h)$ vers l'empilement $U \circ V$. De même, soit β l'unique bijection (d'équivalence de pré-empilements) de $V \cup (U+k)$ vers $V \circ U$. Soit $\varphi = \beta \circ \theta \circ \alpha^{-1} : U \circ V \rightarrow V \circ U$. Si $p \in U \circ V$, on dira que $\varphi(p)$ est la pièce de $V \circ U$ correspondante à p . Si $q \in V \circ U$, sa pièce correspondante est $\varphi^{-1}(q) \in U \circ V$.

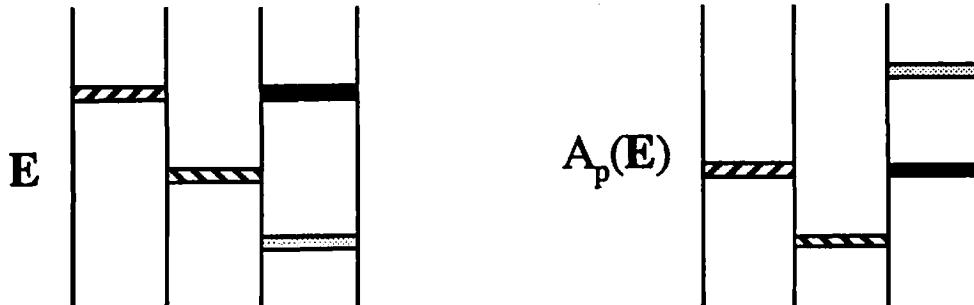


Fig.2.3 La bijection φ entre E et $A_p(E)$ (description par les différentes trames).

A chaque transposition $(U \circ V, V \circ U)$, nous avons donc associé une bijection de $U \circ V$ vers $V \circ U$ qui préserve la position des pièces. Clairement, la bijection associée à la transposition inverse $(V \circ U, U \circ V)$ est φ^{-1} .

Étant donné une conjugaison $(U_i \circ V_i, V_i \circ U_i)_{i \in [k]}$ de E à F , nous lui associons la bijection $\varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \dots \circ \varphi_1 : E \rightarrow F$ où φ_i est la bijection associée à la transposition $(U_i \circ V_i, V_i \circ U_i)$. On peut alors parler de la pièce $\varphi(p) \in F$ correspondante à la pièce $p \in E$ (via la conjugaison $(U_i \circ V_i, V_i \circ U_i)_{i \in [k]}$). Comme plusieurs conjugaisons peuvent relier deux empilements conjugués, nous devrons toujours spécifier la conjugaison utilisée pour pouvoir parler de pièces correspondantes. Remarquons que remplacer une conjugaison donnée par une conjugaison simple qui la raffine ne change pas la bijection associée.

Dans le cas qui nous occupe, on écrira pourtant $A_p^2(E)$, $A_p^3(E), \dots$ au lieu de l'horrible $A_{\varphi_1(p)}(A_p(E))$, $A_{\varphi_2(\varphi_1(p))}(A_{\varphi_1(p)}(A_p(E))), \dots$ tout en restant conscient de commettre un léger (mais salutaire) abus de notation. On posera aussi $A_p^0(E) = E$ et $A_p^1(E) = A_p(E)$, naturellement. De plus, la conjugaison que nous utiliserons pour relier E à $A_p^i(E)$ sera toujours celle produite lors du calcul de $A_p^i(E)$.

Finalement, le lecteur peut facilement montrer qu'alors la pièce correspondante à $\varphi_1(p) \in A_p(E)$ dans $A_p^i(E)$ (pour $i > 1$) est toujours $\varphi_i \circ \varphi_{i-1} \circ \dots \circ \varphi_1(p) = \varphi_1(p)$. En fait $\varphi_i \circ \dots \circ \varphi_1(p)$ est $(\pi(p), 1) \in A_p^i(E)$. Aussi, la discussion possède-t-elle un caractère plutôt académique dans ce cas précis.

Lemme 2.2.2. Soit $E \in \mathcal{H}(P)$ et soit $p \in E$. Alors la séquence $(A_p^i(E))_{i \geq 0}$ est éventuellement stable vers un empilement $A_p^{\sim}(E)$. De plus, si E est connexe, $A_p^{\sim}(E)$ est une pyramide (inversée) dont la pièce minimale correspond à p . \diamond

Démonstration. Définir itérativement V_i comme étant la pyramide dont la base correspond à p dans $A_p^i(E)$ et écrire $A_p^i(E) = U_i \circ V_i$. Ainsi $A_p^{i+1}(E) = U_{i+1} \circ V_{i+1} = V_i \circ U_i$. Observer que V_i est un facteur gauche de V_{i+1} (qui est le facteur droit déterminé par V_i dans $V_i \circ U_i$; voir la figure 2.4). Ainsi $|V_{i+1}| \geq |V_i|$. Comme E est fini, on trouve un entier minimal i tel que $V_{i+1} = V_i$.

À ce moment, $U_{i+1} = U_i$ et $A_p^{i+1}(E) = U_{i+1} \circ V_{i+1} = U_i \circ V_i = A_p^i(E) = A_p^{\sim}(E)$.

Remarquer que $U_{i+1} = U_i$ est la partie de $V_i \circ U_i$ non connectée avec V_i . Donc si E est connexe, $A_p^{\sim}(E)$ l'est aussi, $U_i = \Phi$ et $A_p^{\sim}(E) = V_i$ qui est une pyramide dont la pièce minimale correspond à p . \diamond

Après avoir défini A_p et A_p^{\sim} , nous aimerais montrer que $A_p^{\sim}(E)$ caractérise les classes de conjugaison d'empilements E connexes. Commençons par étudier l'effet d'une transposition simple.

Proposition 2.2.3. Soit E un empilement connexe. Considérons l'empilement $E \circ q$ pour une pièce q telle que $\pi(q) \in \zeta(E)$. Soit $p \in E \circ q$. On a alors $A_{\varphi(p)}^{\sim}(q \circ E) = A_p^{\sim}(E \circ q)$ où φ est la bijection associée à la transposition $(E \circ q, q \circ E)$. \diamond

Démonstration. Si p désigne la même pièce que q dans $E \circ q$, alors $A_p(E \circ q) = q \circ E$ et on a le résultat. Supposons donc que $p \neq q$; ainsi $p \in E$. Soit

$$E = U_1 \circ V_1 \sim V_1 \circ U_1 = U_2 \circ V_2 \sim \dots \sim U_j \circ V_j \sim \dots$$

la conjugaison produite lors du calcul de $A_p^{\sim}(E)$. Soit j l'entier minimal pour lequel $\pi(q) \in \zeta(V_j)$ (utiliser la connexité de E pour démontrer l'existence d'un tel entier). La conjugaison produite lors du calcul de $A_p^{\sim}(E \circ q)$ est alors :

$$E \circ q = U_1 \circ V_1 \circ q = U_1 \circ q \circ V_1 \sim V_1 \circ U_1 \circ q = U_2 \circ V_2 \circ q \sim \dots \sim U_j \circ V_j \circ q \sim V_j \circ q \circ U_j \sim \dots$$

Si α est la bijection associée à la conjugaison reliant $E \circ q$ à $V_j \circ q \circ U_j$, on a :

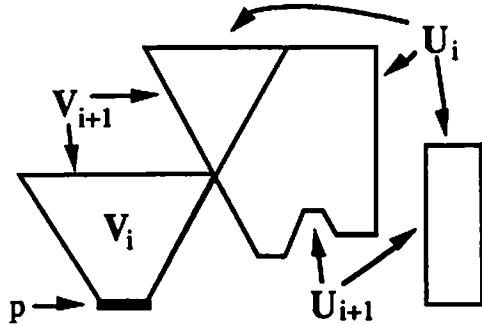


Fig. 2.4 Relation entre les facteurs de $A_p^i(E)$ et de $A_p^{i+1}(E)$.

$$A_p^{\sim}(E \circ q) = A_{\alpha(p)}^{\sim}(V_j \circ q \circ U_j).$$

Remarquons que $\alpha(p) = (\pi(p), 1)$. D'autre part, la conjugaison produite lors du calcul de $A_{\phi(p)}^{\sim}(q \circ E)$ est :

$$q \circ E = q \circ U_1 \circ V_1 \sim V_1 \circ q \circ U_1 = q \circ V_1 \circ U_1 = q \circ U_2 \circ V_2 \sim \dots \sim q \circ U_j \circ V_j \sim V_j \circ q \circ U_j \sim \dots .$$

Si β est la bijection associée à la sous-conjugaison reliant $q \circ E$ à $V_j \circ q \circ U_j$, on a :

$$A_{\phi(p)}^{\sim}(q \circ E) = A_{\beta(\phi(p))}^{\sim}(V_j \circ q \circ U_j).$$

Remarquons que $\beta(\phi(p)) = (\pi(p), 1) = \alpha(p)$. Ce qui prouve le résultat. \diamond

Corollaire 2.2.4. Soit ϕ la bijection associée à une conjugaison reliant deux empilements conjugués E et F . Soit $p \in E$. Alors $A_p^{\sim}(E) = A_{\phi(p)}^{\sim}(F)$. \diamond

Démonstration. Raffiner la conjugaison en une suite de transpositions simples. La bijection associée est la même que celle de la conjugaison originale. Appliquer la proposition 2.2.3 à chaque transposition. \diamond

Corollaire 2.2.5. Si E est un empilement connexe et si $p \in E$, alors $A_p^{\sim}(E)$ est l'unique pyramide inversée conjuguée avec E et dont la pièce minimale correspond à p . \diamond

Démonstration. Soit D une pyramide inversée conjuguée avec E . Soit ϕ la bijection associée à une conjugaison de E à D . Soit p la pièce de E correspondant à la pièce minimale de D . Par le corollaire 2.2.4, on a $A_p^{\sim}(E) = A_{\phi(p)}^{\sim}(D)$. Mais comme D est une pyramide inversée avec $\phi(p)$ comme pièce minimale, on a $D = A_{\phi(p)}(D) = A_p^{\sim}(E)$. \diamond

Les pyramides inversées semblent donc jouer un rôle spécial en tant que représentants des classes de conjugaison d'empilements connexes E . Cependant, plusieurs de ces pyramides pourraient peut-être s'extraire de E . On montre qu'elles sont toutes reliées par une transposition.

Proposition 2.2.6. Soit E un empilement connexe et soit $p, q \in E$ deux pièces de E occupant la même position $\pi(p) = \pi(q)$. Considérons les deux pyramides inversées $D_p = A_p^{\sim}(E)$ et $D_q = A_q^{\sim}(E)$. Il existe une transposition telle que $D_p = V \circ U$ et $D_q = U \circ V$. \diamond

Démonstration. On a $D_p \sim E \sim D_q$. Soit ϕ la bijection associée à une conjugaison de D_p à D_q . Soit p' la pièce minimale de D_p (clairement, $\pi(p') = \pi(p)$). Soit V la pyramide de base $\phi(p')$ dans D_q . Posons $D_q = U \circ V$. L'empilement $V \circ U$ est une

pyramide de base $\varphi(p')$ dans D_q . Posons $D_q = U \circ V$. L'empilement $V \circ U$ est une pyramide dont la pièce minimale correspond à la pièce minimale de D_p . Par le corollaire 2.2.5, on a $V \circ U = A_{p'}^*(D_p) = D_p$. \diamond

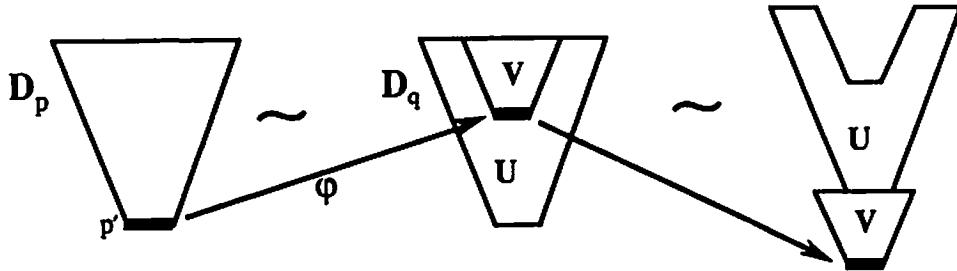


Fig. 2.5 Relations entre D_p , $D_q = U \circ V$ et $V \circ U$.

Une pyramide D de base $p \in P$ est *élémentaire* si la pièce minimale de D est la seule en position p . On écrit $E_p(P)$ ou E_p pour l'ensemble des pyramides élémentaires de base p . On définit :

$$E_p^* = \{D_1 \circ D_2 \circ \dots \circ D_k \text{ tels que } k \geq 0 \text{ et } D_i \in E_p\};$$

$$E_p^+ = \{D_1 \circ \dots \circ D_k \text{ tels que } k \geq 1 \text{ et } D_i \in E_p\}.$$

Les éléments de ces ensembles sont des empilements et non des mots. Mais, dans un certain sens, ils agissent comme des mots, comme nous allons le voir bientôt.

Soit D une pyramide de base p . Soit $k = |D|_p$. Soit p_k la pièce de D en position p , de niveau le plus élevé. La pyramide D_k de base p_k dans D est donc élémentaire. On peut écrire $D = C \circ D_k$. En répétant le procédé sur C on voit que D est une superposition non vide de pyramides élémentaires dont la base est en position p . C'est évidemment la seule factorisation de D en ces termes.

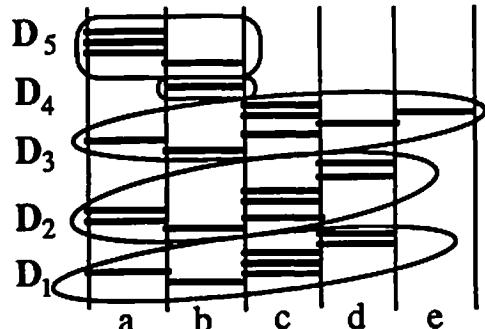


Fig. 2.6 Factorisation d'une pyramide de base b en pyramides élémentaires.

Proposition 2.2.7. $E_p^*(P)$ est un monoïde libre générée par E_p . $E_p^+(P)$ est l'ensemble des pyramides de base p . \diamond

La proposition 2.2.7 nous permet de considérer les pyramides inversées comme des mots non-vides sur l'alphabet des pyramides élémentaires de même base. Aussi, toute équation en pyramides de base p se traduit en une équation en mots de \mathcal{E}_p^* . Les deux prochaines propositions illustrent ce principe.

Proposition 2.2.8. *Soit D une pyramide de base p . Il existe une et une seule pyramide non-périodique D_0 de base p et un unique entier $k \geq 1$ tels que $D = D_0^k$. \diamond*

Démonstration. L'existence de D_0 et de k est claire. La pièce minimale de D_0 doit être en position p . Pour montrer l'unicité, regarder tous les empilements comme des mots dans l'alphabet des pyramides élémentaires de base p . \diamond

Proposition 2.2.9. *Si D est une pyramide, alors D est primitive ssi D est non-périodique. \diamond*

Démonstration. Si D est primitive, on sait déjà qu'elle est non-périodique. Supposons que D ne soit pas primitive. Soit $D = U \circ V = V \circ U$ pour certains empilements non-vides U et V . Ceux-ci doivent donc être des pyramides de même base p que D . L'équation $U \circ V = V \circ U$ est donc une égalité dans \mathcal{E}_p^* . Sa solution est $U = X^m$ et $V = X^n$ avec $m, n \geq 1$ et $X \in \mathcal{E}_p^*$. Ainsi, $D = X^{m+n}$ avec $m+n \geq 2$. \diamond

Cette dernière proposition se généralise à tout empilement.

Proposition 2.2.10. *Un empilement E est connexe et non-périodique ssi E est primitif. \diamond*

Démonstration. L'affirmation est claire si $E = \Phi$. Supposons que $E \neq \Phi$. Soit $p \in E$. Si E est connexe et non-périodique, la pyramide $A_p^*(E)$ est non-périodique, donc primitive. L'empilement E est donc primitif. Si, d'autre part, E est primitif, on sait qu'il est connexe et non-périodique. \diamond

Partant de la proposition 2.2.10, on démontre facilement que la solution de $U \circ V = V \circ U$ est :

$$U = X_1^{i_1} \circ \cdots \circ X_k^{i_k},$$

$$V = X_1^{j_1} \circ \cdots \circ X_k^{j_k};$$

où $k \geq 0$; $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k \geq 0$ et où les X_i sont des empilements primitifs (deux à deux non-connectés). On comparera ce résultat avec le lemme 2.2 de Duboc [Db1].

§2.3 Mot standard associé à un empilement

Soit \leq un ordre total sur l'ensemble P des positions. En considérant P comme un alphabet, P^* est alors totalement ordonné par l'ordre lexicographique induit par \leq . Si u et v sont deux mots de P^* , alors, par définition, $u < v$ ssi on a une des deux conditions suivantes :

- 1) u est un facteur gauche de v ,
- 2) $u = wpw'$, $v = wqw''$ pour certains mots $w, w', w'' \in P^*$ et pour certaines "lettres" $p, q \in P$ telles que $p < q$.

Nous transportons cet ordre sur l'ensemble des empilements grâce à l'inverse de la fonction $\varphi: P^* \rightarrow \mathcal{H}(P)$ qui transforme un mot $p_1 \dots p_k$ en l'empilement $p_1 \circ \dots \circ p_k$. En fait, étant donné un empilement E , on lui associe un mot défini par :

$$St(E) = \max(\varphi^{-1}(E)).$$

Autrement dit, on choisit le mot $p_1 \dots p_k$ maximal (pour l'ordre lexicographique sur P^*) tel que $E = p_1 \circ \dots \circ p_k$. Il s'agit d'une variante de la "forme normale lexicographique" caractérisé par Anisimov et Knuth [AK]. Perrin ([Pe1], [Pe2]) a utilisé cette forme normale pour étudier la reconnaissabilité d'ensembles de traces. Viennot [Vi4] a défini une fonction similaire à $St(\cdot)$ pour démontrer combinatoirement un théorème d'Andrews relié à l'inverse des formules de Rogers-Ramanujan. Ici, nous conviendrons d'appeler $St(E)$ le mot standard associé à E . Un mot $w \in P^*$ est standard s'il existe un empilement $E \in \mathcal{H}(P)$ tel que $w = St(E)$.

La fonction $St(\cdot)$ permet de transporter l'ordre lexicographique \leq à l'ensemble des empilements $\mathcal{H}(P)$ en posant :

$$E \leq F \text{ ssi } St(E) \leq St(F).$$

Ainsi $\mathcal{H}(P)$ est totalement ordonné par \leq . Si nous désirons mettre en évidence cet ordre, on notera $\mathcal{H}(P, \leq)$. Cette notation s'étend bien sûr aux empilements triviaux ($\mathcal{T}(P, \leq)$), aux pyramides, ... Quelques minutes de réflexion suffisent pour vérifier la validité du prochain lemme.

Lemme 2.3.1. Soit $E, F \in \mathcal{H}(P, \leq)$, $w \in P^*$ et $p \in P$. On a :

- | | |
|------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $\varphi(St(E)) = E$, | 5) $St(p) = p$, |
| 2) $St(\varphi(w)) \geq w$, | 6) $St(E \circ F) \geq St(E)St(F)$, |
| 3) $ St(E) _p = E _p$, | 7) $E \circ F \geq E$. \diamond |
| 4) $St(\Phi) = 1$, | |

La définition d'empilement de Lyndon sera basée sur le jeu entre l'ordre partiel \leq_E associé à un empilement E et l'ordre \leq induit de l'ordre lexicographique sur P^* (et défini précédemment). Pour éviter toute confusion entre ces deux ordres, nous conviendrons d'utiliser \min (respectivement \max) en rapport avec l'ordre \leq_E d'un empilement E donné et \inf (respectivement \sup) en rapport avec l'ordre \leq entre les empilements. Ainsi $\inf(E)$ (ou plus proprement $\inf(\pi(E))$) est la position minimale occupée par une pièce de E , tandis que $\min(E)$ est l'ensemble des positions occupées par les pièces de niveau 1 dans E . Si $E \neq \Phi$, $\inf(E)$ est une position.

Comme nous aurons à travailler constamment avec le mot standard associé à la superposition de deux empilements, on peut se demander quelles sont les conditions sur E et F qui produisent l'égalité dans la relation 6) du lemme précédent. Même si elles ne résolvent pas complètement la question, les propositions 2.3.4 et 2.3.5, données plus loin, seront suffisantes pour la plupart des applications.

Lemme 2.3.2. *Tout facteur d'un mot standard de P^* est lui-même un mot standard.* \diamond

Démonstration. Soit $p_1 \dots p_k$ un mot standard de P^* (avec $p_i \in P$). Soit $p_i \dots p_j$ un facteur de $p_1 \dots p_k$ (avec $1 \leq i \leq j \leq k$). On pose $E = \varphi(p_1 \dots p_k)$ et $F = \varphi(p_i \dots p_j)$. On a:

$$p_i \dots p_j \leq St(F) = p_{\sigma(i)} \dots p_{\sigma(j)}$$

pour une certaine permutation σ de l'ensemble $\{i, i+1, \dots, j\}$. Partant de cette inégalité et de la définition de $St(E)$, on trouve :

$$St(E) = p_1 \dots p_k \leq p_1 \dots p_{i-1} p_{\sigma(i)} \dots p_{\sigma(j)} p_{j+1} \dots p_k \leq St(F).$$

Ainsi, $p_1 \dots p_k = p_1 \dots p_{i-1} p_{\sigma(i)} \dots p_{\sigma(j)} p_{j+1} \dots p_k$. En comparant les facteurs, ceci devient : $p_i \dots p_j = p_{\sigma(i)} \dots p_{\sigma(j)} = St(F)$. Donc, le facteur $p_i \dots p_j$ est un mot standard. \diamond

Lemme 2.3.3. *Soit $E \in \mathcal{H}(P, \leq)$ avec $E \neq \Phi$. Soit $p = \sup(\min(E))$. Si $E = p \circ F$ alors $St(E) = p St(F)$.* \diamond

Démonstration. Soit $p_1 \dots p_k = St(E)$ (avec $p_i \in P$). La première lettre p_1 de $St(E)$ doit appartenir à $\min(E)$. Elle doit être aussi la plus grande possible, d'où $p_1 = \sup(\min(E)) = p$. Ainsi $F = p_2 \dots p_k$ et, puisque $p_2 \dots p_k$ est standard, $p_2 \dots p_k = St(F)$. \diamond

Ce lemme donne donc un algorithme pour connaître $St(E)$.

Proposition 2.3.4. *Soit E et F des empilements non-vides. Si $\sup(\min(F)) \leq \inf(E)$ alors $St(E \circ F) = St(E) St(F)$.* \diamond

Démonstration. On écrit $p_1 \dots p_k = St(E)$ (avec $p_i \in P$) et on pose $E_i = p_i \circ \dots \circ p_k$ (pour $1 \leq i \leq k+1$). En vertu des lemmes 2.3.2 et 2.3.3, $St(E_i) = p_i \dots p_k$ et $p_i = \sup(\min(E_i))$. Soit $q = \sup(\min(E_i \circ F))$ pour un entier i fixé. On doit avoir $q \geq p_i$ puisque $p_i \in \min(E_i \circ F)$. Cependant q peut provenir soit de $\min(E_i)$ (d'où $q \leq \sup(\min(E_i)) = p_i$), soit de $\min(F)$ (sous certaines conditions). Dans ce dernier cas, $q \leq \sup(\min(F)) \leq \inf(E) \leq p_i$. De toute façon, on a $q = p_i$. Par le lemme 2.3.3, on a $St(E_i \circ F) = p_i St(E_{i+1} \circ F)$. Une simple induction montre alors le résultat. \diamond

Proposition 2.3.5. Soit $E, F, G \in \mathcal{H}(P, \leq)$ tels que $St(E \circ F) = St(E)St(F)$ et $\min(G) \subseteq \zeta(F)$. On a $St(E \circ F \circ G) = St(E)St(F \circ G)$. \diamond

Démonstration. Simple induction sur $|E|$. Si $E = \Phi$, l'affirmation est évidente. Soit $p = \sup(\min(E))$. L'hypothèse implique clairement que $p = \sup(\min(E \circ F \circ G))$ d'autre part. Écrire $E = p \circ E'$. Ainsi, $p St(E' \circ F) = p St(E') St(F)$. On a donc,

$$St(E \circ F \circ G) = p St(E' \circ F \circ G) = p St(E') St(F \circ G) = St(E) St(F \circ G). \diamond$$

Définition 2.3.6. Un empilement E est admissiblessi $\pi(p) \geq \inf(\min(E))$ pour toute pièce p de E . \diamond

Remarquons qu'une pyramide inversée D est admissiblessi $\min(D) = \inf(D)$. L'importance de ces pyramides inversées admissibles apparaîtra à la section suivante.

Corollaire 2.3.7. Si C et D sont des pyramides inversées admissibles et si la base de D n'est pas supérieure à celle de C , alors $St(C \circ D) = St(C)St(D)$. \diamond

Démonstration. Remarquer que $\sup(\min(D)) = \min(D) \leq \min(C) = \inf(C)$; appliquer la proposition 2.3.4. \diamond

Finalement, nous comparons les termes de la séquence $E, A_p(E), A_p(A_p(E)), \dots$

Proposition 2.3.8. Soit $E \neq \Phi$ un empilement, soit $p = \min(\pi^{-1}(\inf(E)))$. Alors :

$$E \geq A_p(E). \diamond$$

Démonstration. Soit V la pyramide de base p dans E ; écrire $E = U \circ V$ (voir fig. 2.7 a). Ainsi $A_p(E) = V \circ U$. Soit U_1 la partie de U non connectée à V et $V \circ U_2$ la pyramide de base p dans $V \circ U$. On a $U = U_1 \circ U_2$, $E = U_1 \circ U_2 \circ V$ et $A_p(E) = V \circ U_1 \circ U_2 = U_1 \circ V \circ U_2$ (voir fig. 2.7 b). Si $U_2 = \Phi$, la proposition est immédiate. Supposons donc que $U_2 \neq \Phi$. La pyramide $V \circ U_2$ est admissible et (si $U_1 \neq \Phi$) $\sup(\min(V \circ U_2)) = \pi(p) < \inf(U_1)$. Par la proposition 2.3.4, $St(A_p(E)) = St(U_1)St(V \circ U_2)$ (ce qui est valide même si $U_1 = \Phi$). Mais $St(E) \geq St(U_1)St(U_2 \circ V)$. Il suffit donc de comparer

$\text{St}(\mathbf{V} \circ \mathbf{U}_2)$ et $\text{St}(\mathbf{U}_2 \circ \mathbf{V})$. Or, $\sup(\min(\mathbf{V} \circ \mathbf{U}_2)) \leq \pi(p) < \inf(\mathbf{U}) \leq \sup(\min(\mathbf{U}_2 \circ \mathbf{V}))$. La première lettre de $\text{St}(\mathbf{V} \circ \mathbf{U}_2)$ est donc inférieure à la première lettre de $\text{St}(\mathbf{U}_2 \circ \mathbf{V})$. \diamond

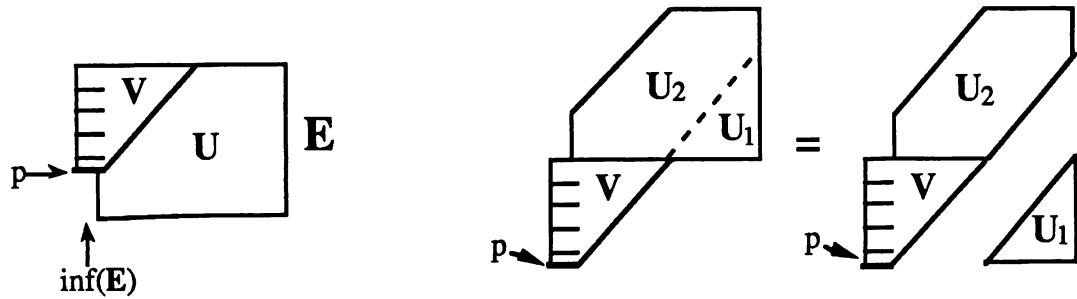


Fig 2.7 a) Construction de la pyramide \mathbf{V} .

b) L'empilement \mathbf{E} après transposition.

§2.4 Définition et propriétés des empilements de Lyndon

Lothaire ([Lo], ch.5) définit les mots de Lyndon comme “les mots primitifs qui sont minimaux dans leur classe de conjugaison”. De façon équivalente, un mot est de Lyndon s'il est strictement inférieur à chacun de ses transposés propres. Pour les empilements, rappelons qu'une conjugaison ne se ramène pas à une seule transposition. Aussi, il semble y avoir deux définitions possibles des empilements de Lyndon. Heureusement, nous verrons que ces deux définitions sont équivalentes.

Un mot sur l'alphabet A étant un empilement de $\mathcal{H}(A)$ pour la relation de concurrence totale $\zeta = A \times A$, les résultats de la théorie des empilements de Lyndon se traduisent tous en résultats de la théorie des mots de Lyndon. Donc, inutile de rappeler ceux-ci qui sont, d'ailleurs, établis indépendamment. Nous supposerons cependant que le lecteur est familier avec la théorie des mots de Lyndon à laquelle nous ferons fréquemment appel.

Définition 2.4.1. Soit $L \in \mathcal{H}(P, \leq)$. L'empilement L est un empilement de Lyndonssi L est un empilement non-vide, primitif et minimal dans sa classe de conjugaison. On écrit $L(P, \leq)$ ou simplement L pour l'ensemble des empilements de Lyndon sur (P, \leq) . \diamond

Exemples.

- 1) Tout empilement réduit à une seule pièce est de Lyndon.
- 2) Un empilement périodique ou non-connexe ne peut être de Lyndon (proposition 2.2.10).

- 3) Soit $P = \{a, b, c, \dots\}$ avec relation de concurrence triviale (tout commute). Les seuls empilements connexes ont la forme p^k pour un certain $p \in P$. Parmi ceux-ci, les seuls qui sont primitifs sont les lettres. Dans ce contexte, les empilements de Lyndon sont donc les lettres.
- 4) $P = \{a, b, c, \dots\}$ avec $\zeta = P \times P$. Les empilements de Lyndon sont les mots de Lyndon sur P .
- 5) Considérez la figure 2.1 avec $a < b < c$. L'empilement $\varphi(abc) = a \circ b \circ c$ est de Lyndon. L'empilement $\varphi(acb) = c \circ a \circ b$ n'est pas de Lyndon (même si acb est un mot de Lyndon).

Proposition 2.4.2. *Si L est un empilement de Lyndon, alors L est une pyramide inversée admissible. \diamond*

Démonstration. Soit $p = \min(\pi^{-1}(\inf(L)))$. Comme L est primitif, il est connexe et $A_p^\infty(L)$ est une pyramide admissible de base $\pi(p)$, conjuguée de L . Donc $A_p^\infty(L) \geq L$. Mais, par la proposition 2.3.8, $L \geq A_p(L) \geq A_p(A_p(L)) \geq \dots \geq A_p^\infty(L)$. Donc $L = A_p^\infty(L)$. \diamond

Nous pouvons donc parler de la base p d'un empilement de Lyndon. On écrit $L_p(P, \leq)$ (ou L_p) pour l'ensemble des empilements de Lyndon de base p . Par le lemme 2.3.3, nous savons que pour tout empilement de Lyndon L , $\sup(\min(L)) = \inf(L)$ est la première lettre de $St(L)$. Aussi, étant donné deux empilements de Lyndon L et M , on a :

- 1) si $L < M$, alors $\inf(L) \leq \inf(M)$;
- 2) si $\inf(L) < \inf(M)$, alors $L < M$.

La perspective d'avoir à rechercher toutes les pyramides inversées admissibles conjuguées d'un empilement donné L n'a rien de réjouissant. On apprécierait grandement de connaître un test plus pratique pour vérifier si l'empilement est de Lyndon ou non.

Proposition 2.4.3. *Soit $L \in \mathcal{H}(P, \leq)$. L'empilement L est de Lyndon ssi*

- 1) $L \neq \Phi$ et
- 2) L est inférieur à chacun de ses transposés propres. \diamond

Démonstration. La définition d'empilement de Lyndon implique clairement les affirmations 1) et 2). Inversement, ces affirmations impliquent que L est un empilement primitif non-vide. Il suffit donc de prouver l'affirmation "si $L (\neq \Phi)$ est inférieur à chacun de ses transposés propres, alors L est minimal dans sa classe de conjugaison."

Supposons donc que L satisfasse 1) et 2). L'empilement L est donc connexe et non-périodique. Soit $p = \min(\pi^{-1}(\inf(L)))$. On a donc $L \geq A_p(L)$. Mais la condition

2) affirme que $L \leq A_p(L)$. Donc $L = A_p(L) = A_p^\infty(L)$. L'empilement L est donc une pyramide admissible de base $\pi(p)$.

Soit L' l'empilement minimal conjugué de L . Comme L est primitif non-vide, on peut en dire autant de L' . Donc L' est de Lyndon; c'est une pyramide admissible de base $\inf(L) = \pi(p)$. Soit $\{q\} = \min(L')$; soit q' la pièce correspondante à q dans L (pour une certaine conjugaison: voir fig. 2.8). On a $\pi(p) = \pi(q')$. En vertu de la proposition 2.2.6, il existe une transposition telle que $L = A_p^\infty(L) = U \circ V$ et $A_{q'}^\infty(L) = V \circ U$. Mais le corollaire 2.2.4 affirme que $L' = A_q^\infty(L') = A_{q'}^\infty(L) = V \circ U$. On a donc $L' \leq L = U \circ V \leq V \circ U = L'$. \diamond

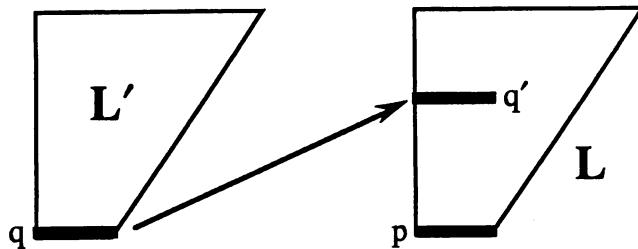


Fig. 2.8

Définition 2.4.4. Une pyramide inversée admissible (de base p) qui est élémentaire est appelée une super-lettre (de base p). L'ensemble des super-lettres (de base p) est noté $\mathcal{A}_p(\mathbf{P}, \leq)$ ou \mathcal{A}_p . \diamond

Si A est une super-lettre de base p , alors $\inf(A) = p = \min(A)$ et $\min(A)$ est un singleton. Une super-lettre de base p est nécessairement un empilement de Lyndon. On peut écrire $\mathcal{A}_p(\mathbf{P}, \leq) = \mathcal{E}_p(\mathbf{P}', \leq)$ où $\mathbf{P}' = \{q \in \mathbf{P} \text{ telles que } q \geq p\}$. La proposition 2.2.7 donne alors l'énoncé suivant.

Proposition 2.4.5. Toute pyramide admissible de base p se factorise de façon unique comme élément de \mathcal{A}_p^* . \diamond

La proposition 2.4.5 permet en ce sens d'identifier les pyramides de base p avec les mots du super-alphabet \mathcal{A}_p . Cet alphabet, infini en général, s'ordonne totalement par la relation \leq définie pour tous les empilements. Mais cet alphabet ordonné induit aussi un ordre lexicographique (que nous noterons \leq^*) sur \mathcal{A}_p^* . Nous pouvons donc définir les mots de Lyndon sur \mathcal{A}_p : ce sont les mots primitifs de \mathcal{A}_p^* qui sont minimaux (relativement à \leq^*) dans leur classe de conjugaison (en tant que mots de \mathcal{A}_p^*). On peut alors se demander si ce nouvel ordre sur les pyramides de base p est le même que l'ordre lexicographique original \leq . Y aurait-il une relation entre les "super"-mots de Lyndon et les empilements de Lyndon?

Proposition 2.4.6. Soit $C, D \in \mathcal{A}_p^*$, alors $C \leq^* D$ ssi $C \leq D$. \diamond

Démonstration. La démonstration explore tous les cas de définition d'ordre lexicographique pour chacun des membres de l'équivalence présumée.

Soit $C = C_1 \circ \dots \circ C_k$ et $D = D_1 \circ \dots \circ D_\ell$, la factorisation de C et de D comme éléments de \mathcal{A}_p^* . Comme les super-lettres $C_1, \dots, C_k, D_1, \dots, D_\ell$ sont des pyramides (inversées) admissibles élémentaires de même base p , on a par le corollaire 2.3.7: $St(C) = St(C_1) \dots St(C_k)$ et $St(D) = St(D_1) \dots St(D_\ell)$.

L'affirmation $C \leq^* D$ équivaut à obtenir l'une des conditions suivantes.

- 1) C est un facteur gauche de D dans \mathcal{A}_p^* :

autrement dit: $k \leq \ell$ et $St(C) = St(D_1) \dots St(D_k)$;

- 2) C est un facteur gauche de D en tant qu'empi-

lement mais pas en tant que mot de \mathcal{A}_p^* :

$k \leq \ell$ et $St(C) = St(D_1) \dots St(D_{k-1}) St(C_k)$ où $St(C_k)$ est un facteur gauche propre de $St(D_k)$;

- 3) la première différence se situe à la $i+1$ ième

super-lettre et à la $j+1$ ième lettre de celle-ci:

$k, \ell \geq i+1$ pour un certain entier i tel que
 $St(C) = St(D_1) \dots St(D_i) St(C_{i+1}) \dots St(C_k)$,
 $St(D) = St(D_1) \dots St(D_i) St(D_{i+1}) \dots St(D_\ell)$, avec
avec $St(C_{i+1}) = p_1 \dots p_j p_{j+1} \dots p_r$
et $St(D_{i+1}) = p_1 \dots p_j q_{j+1} \dots q_s$ où $p_{j+1} < q_{j+1}$;

- 4) la première différence se situe à la $i+1$ ième

super-lettre; celle dans C est un facteur gauche propre de celle de D :

$k \geq i+2, \ell \geq i+1$ pour un certain entier i tel que
 $St(C) = St(D_1) \dots St(D_i) St(C_{i+1}) St(C_{i+2}) \dots St(C_k)$,
 $St(D) = St(D_1) \dots St(D_i) St(D_{i+1}) \dots St(D_\ell)$, avec
 $St(C_{i+1}) = p_1 \dots p_r$, $St(C_{i+2}) = p_1 \dots$, et
 $St(D_{i+1}) = p_1 \dots p_r q_{r+1} \dots$

Dans le premier cas, le super-mot $St(C)$ est un facteur gauche du super-mot $St(D)$. Dans les trois suivants, on a $C \leq^* D$ car la première super-lettre de $St(C)$ différente de la super-lettre correspondante de $St(D)$ est inférieure à celle-ci.

Mais ces cas correspondent exactement aux différents cas comparant $St(C)$ et $St(D)$ en tant que mots de l'alphabet P des positions. Dans les deux premiers, le mot $St(C)$ est un facteur gauche de $St(D)$. Dans les deux derniers, la première lettre de $St(C)$ différente de la lettre correspondante de $St(D)$ est inférieure à celle-ci. \diamond

Proposition 2.4.7. Soit $L \in \mathcal{A}_p^+$ alors L est un mot de Lyndon dans \mathcal{A}_p^+ ssi L est un empilement de Lyndon. \diamond

Démonstration. Soit $L = A_1 \circ \dots \circ A_k$ la factorisation de L dans \mathcal{A}_p^+ . Si $k = 1$, L est une super-lettre et le résultat est immédiat. Supposons que $k \geq 2$. Si $L \in \mathcal{L}$ alors :

$$L = A_1 \circ \dots \circ A_k < A_{i+1} \circ \dots \circ A_k \circ A_1 \circ \dots \circ A_i \quad (\text{pour } 1 \leq i < k)$$

et L est un mot de Lyndon dans \mathcal{A}_p^+ .

Supposons, à l'inverse, que L soit un mot de Lyndon dans \mathcal{A}_p^+ . Soit $L = U \circ V$ avec $U, V \neq \Phi$. Considérons l'ensemble $\min(V)$. Si $\min(V) \neq \{p\}$, alors $\sup(\min(V \circ U)) \geq \sup(\min(V)) > p$ et la première lettre de $\text{St}(U \circ V)$ (qui est p) est inférieure à la première lettre de $\text{St}(V \circ U)$. On a donc $U \circ V < V \circ U$. Si, d'autre part, $\min(V) = \{p\}$ alors $V \in \mathcal{A}_p^+$. On trouve alors un entier $i \in [k-1]$ pour lequel $V = A_{i+1} \circ \dots \circ A_k$ et $U = A_1 \circ \dots \circ A_i$. Ainsi $L = U \circ V < V \circ U$. Dans les deux cas, L est inférieur à chacun de ses transposés propres. \diamond

Proposition 2.4.8. Soit $L \in \mathcal{H}(P, \leq)$ avec $|L| \geq 2$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) $L \in \mathcal{L}$,
- 2) $L < V$ pour tout facteur droit propre V de L . \diamond

Démonstration. Supposons que $L \in \mathcal{L}$. Soit V un facteur droit propre de L . Posons $p = \inf(L)$. Si $\min(V) \neq \{p\}$ alors $\sup(\min(V)) > p$ et $V > L$. Si $\min(V) = \{p\}$ alors, on peut écrire $L = A_1 \circ \dots \circ A_k$ et $V = A_{i+1} \circ \dots \circ A_k$ pour un entier $i \in [k-1]$ où $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}_p$. Comme L est un mot de Lyndon dans \mathcal{A}_p^+ , on a $V > L$.

Inversement, supposons que L satisfasse la condition 2). Écrivons $L = U \circ V$ avec $U, V \neq \Phi$. On a $L = U \circ V < V < V \circ U$, par l'énoncé 7) du lemme 2.3.1. \diamond

En plus de la définition et du concept de mot de Lyndon dans le super-alphabet, nous allons étudier une troisième façon d'être "de Lyndon" en considérant $\text{St}(L)$, le mot standard associé à L , dans l'alphabet P des positions.

Proposition 2.4.9. Soit $L \in \mathcal{H}(P, \leq)$ et soit $w = \text{St}(L)$. $L \in \mathcal{L}$ ssi w est un mot de Lyndon. \diamond

Démonstration. Supposons que $L \in \mathcal{L}_p$. Si $|L| = |w| = 1$, alors w est un mot de Lyndon. Examinons le cas où $|L| = |w| \geq 2$. Écrire $w = uv$ avec $u, v \neq 1$. Comme les mots u et v sont standards, il existe des empilements U et V (non-vides) tels que $\text{St}(U) = u$ et $\text{St}(V) = v$. Ainsi, $\text{St}(L) = w = uv = \text{St}(U)\text{St}(V) = \text{St}(U \circ V)$ et $L = U \circ V$. Mais comme L est un empilement de Lyndon, on a $L < V$ et $w = \text{St}(L) < \text{St}(V) = v$.

Inversement, supposons que w soit un mot de Lyndon. Si $|w| = |L| = 1$, alors L est un empilement de Lyndon. Examinons le cas où $|L| = |w| \geq 2$. On montre d'abord que L est une pyramide admissible. Soit $q = \min(\pi^{-1}(\inf(L)))$ et $L = M \circ N$ où N est la pyramide (inversée) déterminée par q dans L . On a: $w = St(L) = St(M)St(N)$ (puisque ou bien $M = \Phi$, ou bien $\pi(q) = \inf(L) \leq \inf(M)$). Comme w est un mot de Lyndon, on a $St(L) \leq St(N)$. En examinant la première lettre de chacun des deux membres de cette inégalité, on a: $\sup(\pi(\min(L))) \leq \pi(q) = \inf(L)$, ce qui montre que L est une pyramide admissible.

Reste à montrer que L est un empilement de Lyndon. Écrire $L = U \circ V$ avec $U, V \neq \Phi$. Si $\sup(\pi(\min(V))) > \inf(U) = \inf(L)$, alors $V > L$ (argument de première lettre). Si $\sup(\pi(\min(V))) \leq \inf(U)$, alors $w = St(L) = St(U \circ V) = St(U)St(V)$. Comme w est un mot de Lyndon, on a $w = St(L) < St(V)$, d'où $L < V$. \diamond

En conséquence, $\mathcal{L}(P, \leq)$ est en bijection avec l'ensemble des mots de Lyndon standards sur P . Nous utiliserons cette remarque pour montrer que tout empilement se factorise, de façon unique, comme superposition d'empilements de Lyndon décroissants. La proposition correspondante dans le contexte des mots est bien connue.

Proposition 2.4.10. *Soit $E \in \mathcal{H}(P, \leq)$. L'empilement E se factorise de façon unique sous la forme $E = L_1 \circ L_2 \circ \dots \circ L_k$, avec $k \geq 0$, $L_i \in \mathcal{L}$ (pour $1 \leq i \leq k$) et $L_1 \geq \dots \geq L_k$. De plus, $St(E) = St(L_1) \dots St(L_k)$.*

On appelle cette factorisation la factorisation de Lyndon de l'empilement E . \diamond

Démonstration. Le mot $St(E)$ de P^* se factorise sous la forme $St(E) = \ell_1 \ell_2 \dots \ell_k$ où ℓ_1, \dots, ℓ_k sont des mots de Lyndon standards de P^* vérifiant $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \dots \geq \ell_k$. Par la proposition 2.4.9, $L_i = \varphi(\ell_i)$ est un empilement de Lyndon. On peut donc écrire $E = L_1 \circ L_2 \circ \dots \circ L_k$ avec $k \geq 0$, $L_i \in \mathcal{L}$ (pour $1 \leq i \leq k$) et $L_1 \geq \dots \geq L_k$ (puisque $St(L_i) = \ell_i$). Les factorisations de Lyndon existent donc.

Pour toute factorisation de Lyndon de E , on a nécessairement $\inf(L_i) = \min(L_i) \geq \min(L_{i+1}) = \sup(\min(L_{i+1}))$. Ainsi, par la proposition 2.3.4, on a $St(E) = St(L_1) \dots St(L_k)$.

Supposons que $E = L_1 \circ \dots \circ L_k = L'_1 \circ \dots \circ L'_m$ soient deux factorisations de Lyndon de E ; alors $St(L_1) \dots St(L_k) = St(L'_1) \dots St(L'_m)$ donne deux factorisations de $St(E)$ en mots de Lyndon de P^* . L'unicité de la factorisation de Lyndon des mots implique que $k = m$ et que $St(L_i) = St(L'_i)$. La factorisation de Lyndon d'empilements est donc unique. \diamond

La proposition 2.4.10 permet d'utiliser les algorithmes de Duval [Dv] appliqués aux mots standards pour trouver la factorisation de Lyndon d'un empilement.

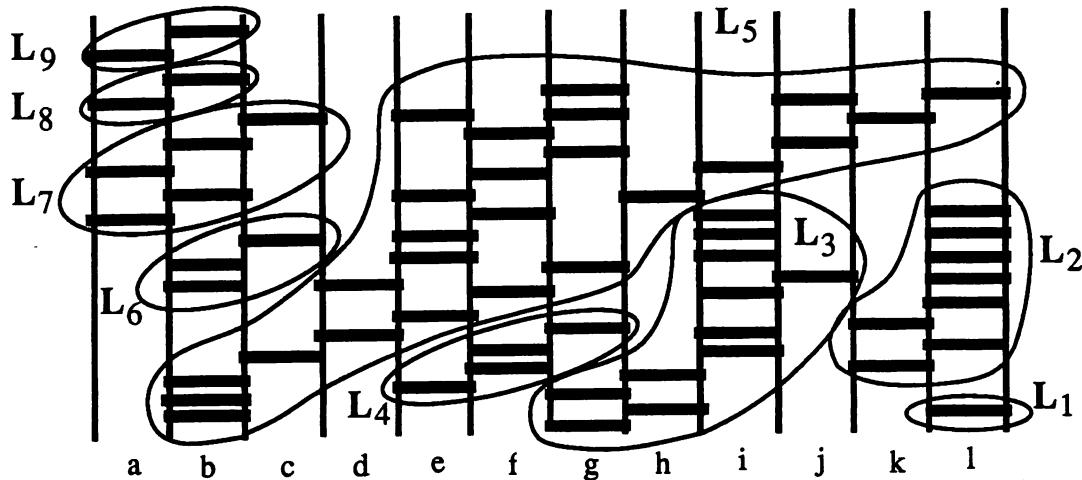


Fig. 2.9 La factorisation de Lyndon d'un empilement sur un graphe linéaire.

§2.5 Superposition d'empilements de Lyndon

Si ℓ et m (avec $\ell < m$) sont deux mots de Lyndon, on sait que ℓm est un mot de Lyndon et que $\ell < \ell m < m$. Existe-t-il une situation similaire pour les empilements de Lyndon? La figure 2.10 montre que tel n'est pas le cas.

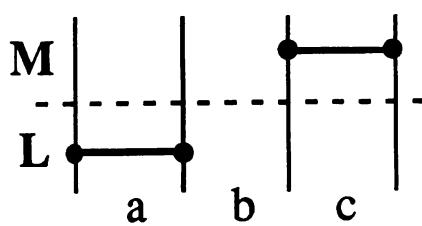


Fig. 2.10 $L < M$ sont de Lyndon bien que $L \cdot M$ ne le soit pas.

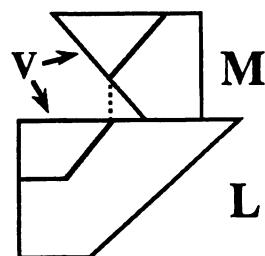


Fig. 2.11 Un facteur droit V de $L \cdot M$. V a une partie dans L et dans M .

Un remède possible serait d'exiger que $\min(M) \subseteq \zeta(L)$, obligeant l'empilement $L \cdot M$ à être une pyramide. Comme $L < M$, cette pyramide est admissible. Il y a donc quelque chance pour que $L \cdot M$ soit un empilement de Lyndon. Malheureusement un facteur droit V de $L \cdot M$ peut avoir une partie non-vide dans L sans englober l'empilement M (voir fig. 2.11). Cette situation contraste avec celle des mots.

L'argument habituel pour prouver la proposition dans le contexte des mots ne passe pas au contexte des empilements. On peut espérer qu'il s'applique au mot $\text{St}(L)\text{St}(M)$. Malheureusement, on trouve facilement des contre-exemples où $\text{St}(L)\text{St}(M)$ n'est pas un mot standard (ni même égal à $\text{St}(L \circ M)$). Pire encore, $\text{St}(L \circ M)$ peut ne pas être un "shuffle" de $\text{St}(L)$ et $\text{St}(M)$.

Proposition 2.5.1. Soit $L \in \mathcal{L}_p$ et $M \in \mathcal{H}(\mathbf{P}, \leq)$ tels que :

- 1) $M \neq \Phi$,
- 2) $\min(M) \subseteq \zeta(L)$,
- 3) $\inf(M) > p$.

Alors $L \circ M \in \mathcal{L}_p$ et $L < L \circ M$. \diamond

Démonstration. Commençons par montrer l'inégalité. Supposons que $L \circ M \in \mathcal{L}_p$. Alors $p = \sup(\min(L \circ M)) < \sup(\min(M))$ et donc $L \circ M < M$. Par la relation 7) du lemme 2.3.1, on a $L < L \circ M$.

Reste à montrer que $L \circ M \in \mathcal{L}_p$. On factorise L en super-lettres pour obtenir $L = A_1 \circ \dots \circ A_k$ ($A_i \in \mathcal{A}_p$). Quand M "tombe" sur L , l'empilement résultant $L \circ M$ est une pyramide admissible (de base p) dont la factorisation en super-lettres est: $L \circ M = (A_1 \circ M_1) \circ \dots \circ (A_k \circ M_k)$, où $(A_i \circ M_i) \circ \dots \circ (A_k \circ M_k) = (A_i \circ \dots \circ A_k) \circ (M_i \circ \dots \circ M_k)$ est l'empilement déterminé par $(A_i \circ \dots \circ A_k)$ dans $L \circ M$, ce qui définit les empilements M_i (voir fig. 2.12). La proposition 2.4.7 affirme que $L \circ M$ est un empilement de Lyndon ssi $(A_1 \circ M_1) \circ \dots \circ (A_k \circ M_k)$ est un mot de Lyndon de \mathcal{A}_p^* . Il suffit donc de comparer ses facteurs droits. Soit un entier i (avec $1 < i \leq k$). Nous allons montrer que $(A_1 \circ M_1) \circ \dots \circ (A_k \circ M_k) < (A_i \circ M_1) \circ \dots \circ (A_k \circ M_k)$, ce qui résout la question. En comparant ces deux mots super-lettre par super-lettre, on trouve un entier maximal j (avec $0 \leq j \leq k-i+1$) tel que $A_1 \circ M_1 = A_i \circ M_i$, $A_2 \circ M_2 = A_{i+1} \circ M_{i+1}$, ..., $A_j \circ M_j = A_{i+j-1} \circ M_{i+j-1}$.

On en arrive à une série de lemmes techniques.

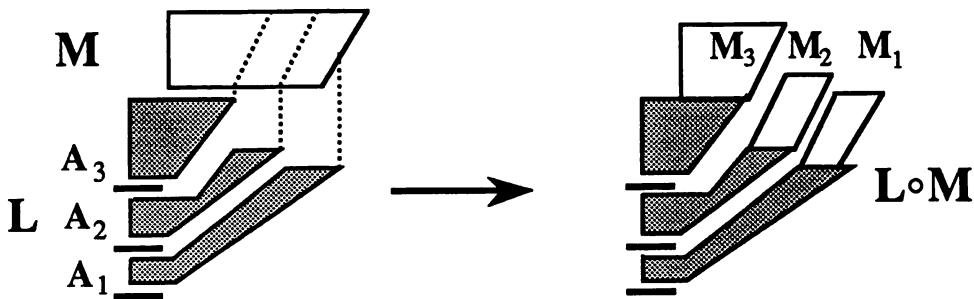


Fig. 2.12 La factorisation de $L \circ M$ en terme de "nouvelles" super-lettres $A_i \circ M_i$.

Soit $r \in \{0, \dots, j-1\}$. Par construction de $M_{r+2} \circ \dots \circ M_k$, l'empilement complémentaire $M_1 \circ \dots \circ M_{r+1}$ n'a aucune position commune ni même concorrente avec $A_{r+2} \circ \dots \circ A_k$. On peut en dire autant de M_{r+1} et A_{i+r} . Comme $A_{r+1} \circ M_{r+1} = A_{i+r} \circ M_{i+r}$, l'empilement M_{r+1} est un facteur droit de M_{i+r} . On peut donc écrire:

$$(1) \quad M_{i+r} = M'_r \circ M_{r+1} \quad \text{pour un certain empilement } M'_r.$$

Ainsi,

$$(2) \quad A_{i+r} \circ M'_r \circ M_{1+r} = A_{r+1} \circ M_{r+1}.$$

Après simplification, l'équation (2) devient $A_{i+r} \circ M'_r = A_{r+1}$. On a donc:

$$(3) \quad A_{r+1} \geq A_{i+r} \quad (\text{pour tout } r \in \{0, \dots, j-1\}).$$

Une induction, utilisant (3) et la relation $A_1 \circ \dots \circ A_k \leq A_i \circ \dots \circ A_k$ (car L est un empilement de Lyndon) donne:

$$(4) \quad A_{r+1} = A_{i+r} \quad (\text{pour } r \in \{0, \dots, j-1\}).$$

Ceci permet une seconde simplification de l'équation (2) qui donne $M'_r = \Phi$. L'équation (1) donne alors $M_{i+r} = M_{r+1}$. L'empilement M_{r+1} , s'il n'est pas vide, a donc des pièces concurrentes avec certaines pièces de A_{i+r} : une contradiction. La seule possibilité est:

$$(5) \quad M_{r+1} = M_{i+r} = \Phi \quad (\text{pour } r \in \{0, \dots, j-1\}).$$

Nous allons maintenant montrer que $j < k-i+1$. Supposons le contraire: $j = k-i+1$. L'équation (4) montre que $L = A_1 \circ \dots \circ A_k > A_i \circ \dots \circ A_k$, contredisant l'hypothèse voulant que L soit un empilement de Lyndon. On a donc:

$$(6) \quad j \leq k-i \text{ et } A_{j+1} \circ M_{j+1} \neq A_{i+j} \circ M_{i+j},$$

par maximalité de j . Il ne reste qu'à prouver que $A_{j+1} \circ M_{j+1} < A_{i+j} \circ M_{i+j}$, ce qui demande une autre discussion.

Remarquer que $A_{j+1} \leq A_{i+j}$ (d'après l'équation (4) et le fait que $A_1 \circ \dots \circ A_k > A_i \circ \dots \circ A_k$). Si $M_{j+1} = \Phi$, alors $A_{i+j} \circ M_{i+j} \geq A_{i+j} \geq A_{1+j} \geq A_{1+j} \circ M_{1+j}$. Aussi, on peut supposer que $M_{j+1} \neq \Phi$. Considérons $St(A_{j+1})$ et $St(A_{i+j})$ comme des mots de P^* . Écrivons $St(A_{j+1}) = ww_1$ et $St(A_{i+j}) = ww_i$ (avec $w, w_1, w_i \in P^*$) où w est le plus long facteur gauche commun de $St(A_{j+1})$ et de $St(A_{i+j})$. On pose $A = \varphi(w)$, $B = \varphi(w_1)$ et $C = \varphi(w_i)$ où φ est la fonction qui transforme un mot $p_1 \dots p_s \in P^*$ en l'empilement $\varphi(p_1 \dots p_s) = p_1 \circ \dots \circ p_s$. Clairement $A_{j+1} = A \circ B$ et $A_{i+j} = A \circ C$.

Comme M_{j+1} n'a aucune pièce concorrente avec une pièce de $A_{i+j} = A \circ C$, on peut en dire autant de M_{j+1} et A . De plus, toute position de $\min(M_{j+1})$ est concorrente avec une pièce de $A_{j+1} = A \circ B$. Aussi,

$$(7) \quad \min(M_{j+1}) \subseteq \zeta(B).$$

Donc $B \neq \Phi$. Mais $St(A)St(C) = St(A_{i+j}) \geq St(A_{j+1}) = St(A)St(B)$. On a donc :

$$(8) \quad B \leq C.$$

Soit b (respectivement c) la première lettre de w_1 (respectivement la première lettre de w_i). On a $c \geq b$; mieux, $c > b$, par maximalité de la longueur de w . Par la proposition 2.3.5 et la relation (7), on a $St(A_{j+1} \circ M_{j+1}) = St(A \circ (B \circ M_{j+1})) = St(A)St(B \circ M_{j+1}) = wb\dots$, tandis que $St(A_{i+j} \circ M_{i+j}) \geq St(A)St(C)St(M_{i+j}) = wc\dots$. En comparant ces deux résultats, on a $St(A_{j+1} \circ M_{j+1}) < St(A_{i+j} \circ M_{i+j})$. \diamond

Corollaire 2.5.2. Soit $L, M \in \mathcal{L}$ avec $M > L$ et $\inf(M) \in \zeta(L)$. Alors $L \circ M \in \mathcal{L}$ et $L < L \circ M < M$. \diamond

Démonstration. Soit $p = \inf(M) = \min(M)$. Comme $M > L$, alors $p \geq \inf(L)$. Si l'inégalité est stricte, le corollaire se vérifie par la proposition précédente. Supposons que $p = \inf(L)$. Les empilements L et M sont tous deux des mots de Lyndon dans \mathcal{A}_p^+ . Le corollaire découle alors d'un résultat standard de la théorie des mots de Lyndon. \diamond

Chapitre 3.

Algèbres de Lie libres partiellement commutatives

§ 3.1 Algèbre de Lie générée par les positions

Soit \mathfrak{A} un anneau commutatif unitaire qu'on supposera fixé et soit P un ensemble de positions avec relation de concurrence ζ . On considère l'ensemble $\mathfrak{A}\langle P \rangle$ des combinaisons linéaires “formelles” (à coefficients dans \mathfrak{A}) d'empilements sur P . Chaque élément $\alpha \in \mathfrak{A}\langle P \rangle$ s'écrit sous la forme

$$\alpha = \sum_{E \in \mathcal{H}(P)} \alpha_E E,$$

où les $\alpha_E \in \mathfrak{A}$ sont presque tous nuls (tous, sauf un nombre fini). Ces expressions s'assimilent à des polynômes en variables partiellement commutatives. De façon équivalente, on peut voir $\mathfrak{A}\langle P \rangle$ comme l'ensemble des fonctions $\alpha : \mathcal{H}(P) \rightarrow \mathfrak{A}$ à support fini. Si $\alpha_E \neq 0$, on dit que E apparaît dans α . Le coefficient de E dans α est α_E (0 si E n'apparaît pas dans α) et se note $\alpha(E) = \alpha_E$.

Il existe un produit sur $\mathfrak{A}\langle P \rangle$ qui en fait une algèbre associative : il suffit d'étendre par bilinéarité la superposition d'empilements. Autrement dit, on pose

$$\left(\sum_E \alpha_E E \right) \left(\sum_F \beta_F F \right) = \sum_{E,F} \alpha_E \beta_F E \circ F = \sum_E \left(\sum_{U,V=E} \alpha_U \beta_V \right) E .$$

On dit que $\mathfrak{A}\langle P \rangle$, muni de ce produit, est l'algèbre du monoïde $\mathcal{H}(P)$ ou l'algèbre générée par les positions P .

Soit $\{t_p; p \in P\}$ un ensemble de variables formelles commutatives indexées par l'ensemble P des positions. Soit $E \in \mathcal{H}(P)$; on définit le poids de l'empilement E par :

$$v(E) = \prod_{p \in P} t_p^{|E|_p},$$

(au chapitre 4, on introduira une notion plus générale de poids). Comme $|E| < \infty$, le produit ci-haut se ramène toujours à un produit fini.

L'algèbre $\mathfrak{A}(P)$ se sépare en somme directe de sous-modules

$$\mathfrak{A}(P) = \bigoplus_{\mu} \mathfrak{A}^{\mu}(P),$$

(la somme portant sur tous les monômes μ) où $\mathfrak{A}^{\mu}(P) = \{\alpha \in \mathfrak{A}(P) \text{ telles que si } \alpha(E) \neq 0 \text{ alors } v(E) = \mu\}$. Le poids introduit une graduation sur $\mathfrak{A}(P)$ puisque:

$$\mathfrak{A}^{\mu}(P) \mathfrak{A}^{\nu}(P) \subseteq \mathfrak{A}^{\mu+\nu}(P).$$

Sur $\mathfrak{A}(P)$, on définit un autre produit, le crochet de Lie. Si $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}(P)$, leur crochet de Lie est :

$$[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha.$$

On voit facilement que ce crochet vérifie les identités :

$$(L1) \quad [\alpha, \beta] = 0,$$

$$(L2) \quad [[\alpha, \beta], \gamma] + [[\beta, \gamma], \alpha] + [[\gamma, \alpha], \beta] = 0.$$

Si le crochet de Lie remplace le produit dans $\mathfrak{A}(P)$, celle-ci devient une algèbre de Lie qu'on notera $\mathfrak{A}_L(P)$.

La plus petite sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{A}_L(P)$ contenant P est l'*algèbre de Lie libre (partiellement commutative) engendrée par P*. On la note $\mathfrak{L}(P)$. La graduation due au poids se transporte à $\mathfrak{L}(P)$; pour un monôme μ , on écrit, par exemple:

$$\mathfrak{L}^{\mu}(P) = \{\alpha \in \mathfrak{L}(P) \text{ telles que si } \alpha(E) \neq 0 \text{ alors } v(E) = \mu\}.$$

On a alors

$$\mathfrak{L}(P) = \bigoplus_{\mu} \mathfrak{L}^{\mu}(P).$$

Clairement, $\mathfrak{L}^1(P) = \{0\}$. On remarque que $\mathfrak{L}^{tp}(P)$ est le sous-module engendré par la position $p \in P$. Pour chaque monôme ξ de degré total supérieur à 1, on a la relation:

$$\mathfrak{L}^{\xi}(P) = \sum_{\substack{\mu, \nu = \xi \\ \mu, \nu \neq 1}} [\mathfrak{L}^{\mu}(P), \mathfrak{L}^{\nu}(P)],$$

où $[\mathbb{L}^{\mu}(P), \mathbb{L}^v(P)]$ est le sous-module engendré par $\{[\alpha, \beta] : \alpha \in \mathbb{L}^{\mu}(P), \beta \in \mathbb{L}^v(P)\}$. Cette récurrence se ramène d'ailleurs à :

$$\mathbb{L}^{\xi}(P) = \sum_{t_p | \xi} [\mathbb{L}^{\xi/t_p}(P), \mathbb{L}^{t_p}(P)],$$

par une induction.

Dans le cas où l'ensemble des positions P forme un alphabet A non-commutatif, les mots de Lyndon sur cet alphabet s'associent bijectivement à une base $\{\lambda(\ell) : \ell \text{ est un mot de Lyndon sur } A\}$ de l'algèbre de Lie $\mathbb{L}(A)$. La correspondance λ se définit par :

$$\lambda(\ell) = \begin{cases} \ell & \text{si } \ell \in A, \\ [\lambda(m), \lambda(n)] & \text{si } \ell \notin A \text{ et } \sigma(\ell) = (m, n), \end{cases}$$

où $\sigma(\ell) = (m, n)$ est la “factorisation standard” de ℓ . On consultera Viennot [Vi1] pour une étude plus détaillée des bases de cette algèbre.

Dans la prochaine section on définira l'analogie de la factorisation standard pour les empilements de Lyndon. Nous pourrons ensuite construire une base de l'algèbre de Lie $\mathbb{L}(P)$ à partir de ceux-ci.

§ 3.2 Factorisation standard

La factorisation standard $\sigma(w)$ d'un mot w de longueur supérieure à 1 se définit par $\sigma(w) = (m, n)$ où m et n sont des mots non vides tels que $w = mn$ et où n est un mot de Lyndon de longueur maximale pour cette condition. De façon équivalente, on peut montrer que n est aussi le mot de Lyndon minimal qui est facteur droit propre de w . Voici le concept correspondant dans le contexte des empilements.

Définition 3.2.1. Soit $E \in \mathcal{H}(P, \leq)$ avec $|E| \geq 2$. L'empilement E se factorise d'une seule façon sous la forme $E = F \circ N$ où

- 1) $F \neq \Phi$,
- 2) $N \in \mathcal{L}$,
- 3) N est minimal.

On pose $\Sigma(E) = (F, N)$ qu'on appelle la factorisation standard de E . ♦

Exemples.

Soit $P = \{a < b < c\}$ avec $a \leq b \leq c$. On a:

- 1) $\Sigma(c \circ b \circ a \circ a \circ b) = (c \circ b \circ c, a \circ a \circ b)$;
- 2) $\Sigma(c \circ b \circ c) = (c, b \circ c)$;
- 3) $\Sigma(a \circ b \circ a \circ b \circ c) = (a \circ b, a \circ b \circ c)$;
- 4) $\Sigma(a \circ b \circ c \circ b \circ c) = (a \circ b \circ c, b \circ c)$.

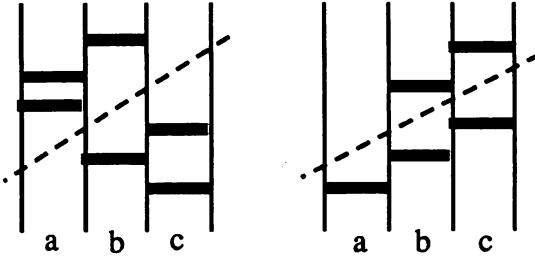


Fig. 3.1 Factorisations standards correspondant aux exemples 1 et 4.

Pour tout empilement E contenant au moins deux pièces, il existe toujours un nombre fini non-nul de facteurs droits propres qui sont des empilements de Lyndon; par exemple, n'importe quelle pièce $p \in \max(E)$ répond à ces conditions. Comme ces facteurs sont totalement ordonnés, le concept de factorisation standard est bien défini.

Nous allons chercher les propriétés de la factorisation standard d'empilements qui correspondent aux propriétés de la factorisation standard de mots. Que le lecteur prenne garde : si $\Sigma(E) = (F, N)$, alors N ne possède pas nécessairement un nombre maximal de pièces, ce qui était le cas pour les mots. On peut souvent extraire de E plusieurs facteurs droits propres de Lyndon de cardinalité maximale.

Proposition 3.2.2. Soit $E \in \mathcal{H}(P, \leq)$. Soit $E = L_1 \circ \dots \circ L_k$ la factorisation de Lyndon de E (avec $L_i \in \mathcal{L}$). Si $k \geq 2$ alors $\Sigma(E) = (L_1 \circ \dots \circ L_{k-1}, L_k)$. \diamond

Démonstration. Écrire $\Sigma(E) = (F, N)$. Observer que $L_k \geq N$, par définition de N . Soit $n = \inf(N)$, $\ell_i = \inf(L_i)$ (pour $i = 1, 2, \dots, k$). Clairement, $\ell_1 \geq \dots \geq \ell_k \geq n$. Mais $\ell_k = \inf(L_k) = \inf(E) \leq n$, d'où $\ell_k = n$. L'empilement de Lyndon N doit donc être un facteur droit de $L_i \circ \dots \circ L_k$ pour un entier i maximal. Remarquer que $\ell_1 = \dots = \ell_k = n$. Écrire $N = V \circ L_{i+1} \circ \dots \circ L_k$ avec $L_i = U \circ V$. Par la proposition 2.4.8, $L_i \leq V$. Mais $V \leq V \circ L_{i+1} \circ \dots \circ L_k = N \leq L_k \leq L_i$, ce qui prouve que $i = k$ et que $N = L_k$. \diamond

Corollaire 3.2.3. Soit $E \in \mathcal{H}(P, \leq)$ avec $|E| \geq 2$. Soit $\Sigma(E) = (F, N)$ alors $E \in \mathcal{L}$ ssi $E < N$. \diamond

Démonstration. Découle des propositions 2.4.8 et 3.2.2 en remarquant que $L_k \leq L_i \leq E$. \diamond

Lemme 3.2.4. Soit $E \in \mathcal{H}(P, \leq)$ avec $|E| \geq 2$. Soit $\Sigma(E) = (F, N)$. On a $St(E) = St(F)St(N)$. \diamond

Démonstration. Soit $p = \inf(F)$ et $n = \inf(N)$. Si $n \leq p$, le résultat découle de la proposition 2.3.4. Supposons que $n > p$. Soit D la pyramide de base $\max(\pi^{-1}(p))$ dans E (voir fig. 3.2). Clairement, D est une super-lettre de base p . Aussi, $D \in \mathcal{L}_p$ et $D < N$, ce qui contredit la minimalité de N sauf si D n'est pas un facteur propre de E . On a donc $D = E$, d'où $E = p \circ M \circ N$ pour un certain empilement M . Pour toute pièce $m \in M \circ N$, on a $\pi(m) \geq n$ puisque la base de N doit être minimale parmi $\pi(M \circ N)$. Donc $n \leq \inf(M)$ et, toujours par la proposition 2.3.4: $St(E) = p \circ St(M \circ N) = p \circ St(M) \circ St(N) = St(p \circ M) \circ St(N) = St(F) \circ St(N)$. \diamond

Lemme 3.2.5. Soit $E \in \mathcal{H}(P, \leq)$ avec $|E| \geq 2$. Alors $\Sigma(E) = (F, N)$ ssi $\sigma(St(E)) = (St(F), St(N))$. \diamond

Démonstration. Soit $\Sigma(E) = (F, N)$ et $\sigma(St(E)) = (f, n)$ avec $f, n \in P^*$. Comme $St(E) = fn$, on a $E = \varphi(f)\varphi(n)$ où φ est la fonction qui transforme un mot de P^* en un empilement. Par le lemme 2.3.2, le mot n est un mot de Lyndon standard de P^* . Donc, $\varphi(n)$ est un empilement de Lyndon. La définition de la factorisation standard d'empilements garantit que $N \leq \varphi(n)$, d'où $St(N) \leq n$. Parallèlement, on a $E = F \circ N$; donc $St(E) = St(F) \circ St(N)$. Comme $St(N)$ est un mot de Lyndon de P^* , la minimalité de n affirme que $n \leq St(N)$. Ainsi, $n = St(N)$ et $f = St(F)$. \diamond

Proposition 3.2.6. Soit $M \in \mathcal{L}_p$ avec $|M| \geq 2$. Si $\Sigma(M) = (L, N)$ alors $L \in \mathcal{L}_p$, $L < M < N$ et $\inf(N) \in \zeta(L)$. \diamond

Démonstration. Clairement, $L < L \circ N = M < N$. Comme M est une pyramide (inversée) admissible, L doit être une pyramide inversée de même base et, d'autre part, $\inf(N) = \min(N) \in \zeta(L)$. On montre que $L \in \mathcal{L}$. Par le lemme 3.2.5, $\sigma(St(M)) = (St(L), St(N))$. Mais $St(M)$ est un mot de Lyndon de P^* . La théorie des mots de Lyndon affirme alors que $St(L)$ est un mot de Lyndon. Donc L est un empilement de Lyndon. \diamond

Corollaire 3.2.7. Soit $E \in \mathcal{H}(P, \leq)$ avec $|E| \geq 2$. Soit $\Sigma(E) = (F, N)$. Si $p = \sup(\min(E))$ et si $E = p \circ E'$ alors $\inf(N) = \inf(E')$. \diamond

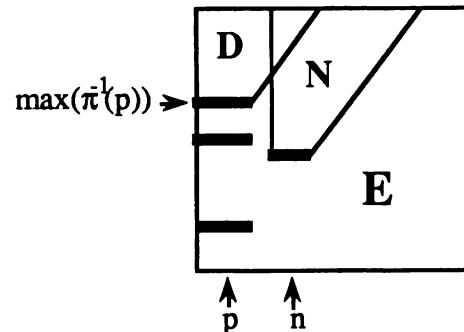


Fig.3.2 Situation de D et N dans E .

Démonstration. Par le lemme 3.2.5, on sait que $\sigma(\text{St}(E)) = \sigma(p\text{St}(E')) = (\text{St}(F), \text{St}(N))$. Mais la première lettre de $\text{St}(N)$ (qui est $\inf(N)$) doit être $\inf(E')$, sinon on pourrait extraire de $\text{St}(E')$ un facteur droit de Lyndon dont la première lettre serait $\inf(N)$. \diamond

Corollaire 3.2.8. Soit $E \in \mathcal{H}(P, \leq)$ avec $|E| \geq 2$. Soit $\Sigma(E) = (F, N)$. L'empilement E est une super-lettre ssi $\inf(N) > \inf(E)$. \diamond

Démonstration. Direct, à partir du corollaire précédent. \diamond

Un résultat bien connu de la factorisation standard des mots de Lyndon affirme que : "Si w, f et n sont des mots tels que $\sigma(w) = (f, n)$ et si m est un mot de Lyndon vérifiant $m \leq n$, alors $\sigma(wm) = (w, m)$ ". La figure 3.3, ci-contre, montre que cette affirmation ne se généralise pas aux empilements. Heureusement, on peut récupérer une version atténuée qui sera suffisante comme outil d'étude des algèbres de Lie libres partiellement commutatives.

Proposition 3.2.9. Soit $E \in \mathcal{H}(P, \leq)$ avec $\Sigma(E) = (F, N)$. Soit $M \in \mathcal{L}$ tel que $\inf(M) \in \zeta(E)$. On a alors $\Sigma(E \circ M) = (E, M)$ ssi $M \leq N$. \diamond

Démonstration. Supposons que $M \leq N$. Soit $\Sigma(E \circ M) = (U, V)$. On sait que $V \in \mathcal{L}$ et que $V \leq M \leq N$. Soit $V = V_1 \circ V_2$ où V_1 est la partie de V qui se trouve dans E et V_2 est la partie de V qui se trouve dans M ¹ (voir la figure 3.4 ci-contre). On a $V_1 \leq V \leq M \leq N$.

Si $V_1 \neq \Phi$, V_1 est un facteur droit propre de E ; autrement, on aurait $V_1 = E$, d'où $V = E \circ M$ puisque $\min(M) \in \zeta(E)$. Soit $V_1 = L_1 \circ \dots \circ L_k$ (avec $k \geq 1$) la factorisation de Lyndon de V_1 . On a $L_k \leq L_1 \leq V_1 \leq V \leq M \leq N$. Mais L_k est un facteur droit propre de E

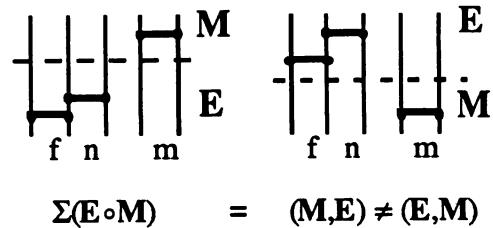


Fig. 3.3 L'ordre sur les positions est $f < m < n$. Observer la disposition particulière de ces positions.

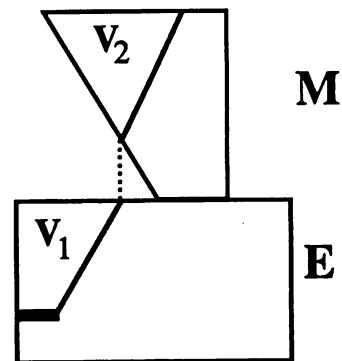


Fig. 3.4

¹ Plus rigoureusement, la pyramide inversée V est déterminée par une pièce $p \in E \circ M$. Si $p \in E$, V_1 est la pyramide de base p dans E et $V = V_1 \circ V_2$. Si $p \notin E$, alors $V_1 = \Phi$ et V_2 est la pyramide de base p dans M .

qui est de Lyndon. Donc $N \leq L_k$, ce qui implique que $N = L_k = L_1 = V_1 = V = M$. Mais, d'une part, $V_1 = V = V_1 \circ V_2$ implique que $V_2 = \Phi$ et, d'autre part, $V_1 = M$ implique que $V_2 = M$; une contradiction. Donc $V_1 = \Phi$ et $V = V_2$. Si V est un facteur propre de M , on a $V > M$; encore une contradiction. On doit conclure que $V = M$.

Inversement, supposons que $\Sigma(E \circ M) = (E, M)$. Supposons que $M > N$. On pose $m = \inf(M)$ et $n = \inf(N)$; on sait que $m \geq n$. Si l'inégalité est stricte, on peut alors trouver une super-lettre $L \in \mathcal{A}_n$ (un empilement de Lyndon) qui est un facteur droit propre de $E \circ M$, contredisant la minimalité de M . Donc $m = n$. Par le corollaire 2.5.2, $N \circ M$ est un empilement de Lyndon avec $N \circ M < N$. Comme $N \circ M$ est un facteur droit propre de $E \circ M$, nous obtenons une contradiction. On a donc $M \leq N$. \diamond

Exemples.

Soit $P = \{a < b < c < d\}$ avec $a\zeta b\zeta c\zeta d$. Comme $\Sigma(a \circ b \circ c) = (a, b \circ c)$, on a :

- 1) $\Sigma(a \circ b \circ c \circ b \circ c) = (a \circ b \circ c, b \circ c)$ (puisque $b \circ c \leq b \circ c$) et
- 2) $\Sigma(a \circ b \circ c \circ b \circ c \circ d) \neq (a \circ b \circ c, b \circ c \circ d)$ (puisque $b \circ c \circ d > b \circ c$).

§ 3.3 Base de l'algèbre de Lie générée par les positions

Nous allons montrer dans cette section qu'on peut construire une base de $\mathfrak{L}(P)$ à partir de l'ensemble des empilements de Lyndon $\mathcal{L}(P, \leq)$. Dans un esprit différent, Duchamp et Knob ([DK1], [DK2]) ont trouvé des bases équivalentes, mais sans faire appel aux empilements de Lyndon. La construction que nous proposons se développe parallèlement à celle qu'on trouve dans Lothaire ([Lo], section 5.3) avec pourtant quelques modifications dues principalement à la non-connectivité de certaines paires de pièces. Comme pour les mots, on définit, pour tout empilement de Lyndon L :

$$\Lambda(L) = \begin{cases} L & \text{si } L \in P, \\ [\Lambda(M), \Lambda(N)] & \text{si } L \notin P \text{ et } \Sigma(L) = (M, N). \end{cases}$$

On vérifie sans difficulté que $\Lambda(L) \in \mathfrak{L}(P)$.

Proposition 3.3.1. Soit $L \in \mathcal{L}(P, \leq)$ avec $\mu = v(L)$. Alors $\Lambda(L) \in \mathfrak{L}^\mu(P)$ et $\Lambda(L) = L + \alpha$ pour un certain $\alpha \in \mathfrak{A}(P)$. De plus, si E est un empilement apparaissant dans α , on a $E > L$. \diamond

Démonstration. Induction sur $|L|$. Si $|L| = 1$, la proposition est évidente. Supposons donc que $|L| > 1$. Soit $\Sigma(L) = (M, N)$; on a alors $M < L < N < N \circ M$. L'hypothèse d'induction permet d'écrire :

$$\Lambda(M) = M + \beta, \quad \Lambda(N) = N + \gamma;$$

où $\beta \in \mathfrak{A}(P)$, et où chaque empilement E apparaissant dans β vérifie $E > M$ et $v(E) = v(M)$ (car $\Lambda(M) \in \mathfrak{L}^{v(M)}(P)$). On a des conditions similaires pour γ .

Le calcul de $\Lambda(L)$ donne :

$$\begin{aligned}\Lambda(L) &= [\Lambda(M), \Lambda(N)] = (M + \beta)(N + \gamma) - (N + \gamma)(M + \beta) \\ &= M \circ N + \beta N + M \gamma + \beta \gamma - N \circ M - \gamma M - N \beta - \gamma \beta.\end{aligned}$$

Tout empilement apparaissant dans cette expression a poids $v(M)v(N) = v(L) = \mu$; donc $\Lambda(L) \in \mathfrak{L}^\mu(P)$. Tout empilement E apparaissant dans $-N \circ M - \gamma M - N \beta - \gamma \beta$ possède un facteur gauche supérieur (ou égal) à N . On a dans ce cas $E \geq N > M \circ N = L$. Tout empilement E apparaissant dans $\beta N + \beta \gamma$ est de la forme $B \circ C$ où $B > M$, $|B| = |M|$ et $C \geq N$. Dans ce cas, $St(B \circ C) \geq St(B)St(C) > St(M)St(N) = St(L)$. (Attention! L'inégalité intermédiaire découle de $B > M$ et de $|B| = |M|$). On a donc $B \circ C > L$. Les empilements apparaissant dans $M \gamma$, quant à eux, sont de la forme $M \circ C$ avec $C > N$. On a alors $St(M \circ C) \geq St(M)St(C) > St(M)St(N) = St(L)$, d'où $M \circ C > L$. \diamond

Corollaire 3.3.2 *L'ensemble $\{\Lambda(L): L \in \mathcal{L}(P, \leq)\}$ est linéairement indépendant.* \diamond

Démonstration. Soit $\gamma = \sum_L \gamma_L \Lambda(L) = 0$ une combinaison linéaire nulle portant sur un nombre fini d'empilements de Lyndon L . S'il existe un empilement de Lyndon minimal L pour lequel $\gamma_L \neq 0$, alors, par la proposition 3.3.1, le coefficient de L dans γ est $0 = \gamma(L) = \gamma_L \neq 0$. Les coefficients sont donc tous nuls. \diamond

Proposition 3.3.3. *Soit $L, M \in \mathcal{L}(P, \leq)$. Si L et M ne sont pas connectés, alors $[\Lambda(L), \Lambda(M)] = 0$.* \diamond

Démonstration. Induction sur $|L| + |M|$. Si $|L| + |M| = 2$, alors L et M ne comportent qu'une seule pièce chacun ; on pose $L = p$, $M = q$ avec $p \not\sqsubset q$. Dans ce cas,

$$[\Lambda(L), \Lambda(M)] = [p, q] = p \circ q - q \circ p = 0.$$

Si $|L|+|M| \geq 2$, on peut supposer que $|L| \geq 2$. Soit $\Sigma(L) = (U, V)$. On a :

$$\begin{aligned} [\Lambda(L), \Lambda(M)] &= [[\Lambda(U), \Lambda(V)], \Lambda(M)] \\ &= -[[\Lambda(V), \Lambda(M)], \Lambda(U)] - [[\Lambda(M), \Lambda(U)], \Lambda(V)]. \end{aligned}$$

Comme U est un facteur de L , alors U et M ne sont pas connectés. Comme $|U|+|M| < |L|+|M|$, on a $[\Lambda(M), \Lambda(U)] = 0$. De même, $[\Lambda(V), \Lambda(M)] = 0$. Donc

$$[\Lambda(L), \Lambda(M)] = -[0, \Lambda(U)] - [0, \Lambda(V)] = 0.$$

Si par contre, $|L| = 1$ et $|M| \geq 2$, l'argument tient toujours. Il suffit de remarquer que, grâce à l'identité (L1), $[\Lambda(L), \Lambda(M)] = -[\Lambda(M), \Lambda(L)]$. \diamond

La proposition précédente montre que les produits $[\Lambda(L), \Lambda(M)]$ (pour $L, M \in \mathcal{L}$, avec L et M non connectés) s'expriment comme combinaisons linéaires de certains $\Lambda(N)$ ($N \in \mathcal{L}$). Nous vérifierons si le même énoncé s'applique au cas où L et M sont connectés. On s'inspire de la preuve de Lothaire d'un résultat similaire sur les mots de Lyndon ([Lo], lemme 5.3.3). Là, les mots de Lyndon n qui apparaissent sous la forme $\lambda(n)$ dans $[\lambda(\ell), \lambda(m)]$ vérifient $n \geq \ell m$. Si on passe aux empilements, ce résultat est faux; on obtient plutôt $N < M$. Comme chez Lothaire, cependant, la démonstration se réalise par induction sur un ensemble $\bigcup_{\mu} X^{\mu}$ qu'on ordonnera adéquatement.

Soit μ un monôme; on pose :

$$X^{\mu} = \{(L, M) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L} : L < M \text{ et } v(L)v(M) = \mu\}.$$

On partage cet ensemble en deux parties :

$$\begin{aligned} X_1^{\mu} &= \{(L, M) \in X^{\mu} : \min(M) \in \zeta(L)\} \text{ et} \\ X_2^{\mu} &= \{(L, M) \in X^{\mu} : \min(M) \notin \zeta(L)\}. \end{aligned}$$

Chez Lothaire, cette division n'apparaît pas (pas plus que le cas où L et M ne sont pas connectés) puisque les lettres d'un mot sont toutes concurrentes. Remarquons que pour chaque monôme μ , l'ensemble X^{μ} est fini.

Sur $X = \bigcup_{\mu} X^{\mu}$, on définit un ordre partiel. Soit (L, M) et (L', M') dans X avec $v(L)v(M) = \mu$ et $v(L')v(M') = \nu$. On écrit $(L, M) < (L', M')$ si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée:

- 1) $\mu \mid v$ et $\mu \neq v$;
- 2) $\mu = v$ et $(L, M) \in X_1^\mu, (L', M') \in X_2^\mu$;
- 3) $\mu = v; (L, M), (L', M') \in X_i^\mu$ (pour $i = 1$ ou $i = 2$) et $M < M'$.

Proposition 3.3.4. Soit $(L, M) \in X$. Le crochet $[\Lambda(L), \Lambda(M)]$ se développe sous la forme d'une combinaison linéaire (finie) $\sum \alpha_N \Lambda(N)$ (avec $\alpha_N \in \mathbb{A}$ et $N \in \mathcal{L}$) où $N < M$ et $v(L)v(M) = v(N)$. \diamond

Démonstration. Si $\mu = v(L)v(M)$ est un monôme de degré 2 (le plus petit possible) alors $|L| = |M| = 1$. Compte tenu de la proposition 3.3.3, on peut supposer que L et M sont connectés. Dans ce cas, $\Sigma(L \circ M) = (L, M)$ et $[\Lambda(L), \Lambda(M)] = [L, M] = \Lambda(L \circ M)$. Remarquer que $L \circ M < M$.

Supposons maintenant que μ soit de degré supérieur à 2. On examine deux cas, selon que $(L, M) \in X_1^\mu$ ou $(L, M) \in X_2^\mu$.

Si $(L, M) \in X_1^\mu$, alors $|L| = 1$ ou $|L| > 1$. Dans le premier cas, $L \circ M \in \mathcal{L}$, $L \circ M < M$ et $\Sigma(L \circ M) = (L, M)$. On a donc $[\Lambda(L), \Lambda(M)] = \Lambda(L \circ M)$. Supposons donc que $|L| > 1$. Soit $\Sigma(L) = (U, V)$. Si $V \geq M$, alors la proposition 3.2.9 affirme que $\Sigma(L \circ M) = (L, M)$. On a donc $[\Lambda(L), \Lambda(M)] = \Lambda(L \circ M)$ avec $L \circ M < M$.

On suppose maintenant que $V < M$. Mais alors, on peut écrire:

$$\begin{aligned} [\Lambda(L), \Lambda(M)] &= [[\Lambda(U), \Lambda(V)], \Lambda(M)] \\ &= -[[\Lambda(V), \Lambda(M)], \Lambda(U)] - [[\Lambda(M), \Lambda(U)], \Lambda(V)] \\ &= [\Lambda(U), [\Lambda(V), \Lambda(M)]] + [[\Lambda(U), \Lambda(M)], \Lambda(V)]. \end{aligned}$$

On examine séparément chacun des termes résultant. Commençons par le premier. Il est clair que $(V, M) < (L, M)$ (premier cas d'inégalité). Par induction, $[\Lambda(V), \Lambda(M)]$ est une combinaison linéaire $\sum \alpha_N \Lambda(N)$ (pour $\alpha_N \in \mathbb{A}$, $N \in \mathcal{L}$) avec $N < M$ et $v(N) = v(V)v(M)$. Aussi a-t-on:

$$\begin{aligned} [\Lambda(U), [\Lambda(V), \Lambda(M)]] &= \sum \alpha_N [\Lambda(U), \Lambda(N)] \\ &= - \sum_{\substack{N < M \\ N < U}} \alpha_N [\Lambda(N), \Lambda(U)] + \sum_{U < N < M} \alpha_N [\Lambda(U), \Lambda(N)]. \end{aligned}$$

Encore une fois, on examine séparément chaque somme du dernier membre. Commençons par les termes de la première. On a $N < U$ et $v(N)v(U) = v(U)v(V)v(M) = v(L)v(M) = \mu$. Donc $(N,U) \in X^\mu$. Comme $v(N) = v(V \circ M)$ et que N est un empilement de Lyndon, on a $\inf(U) \geq \inf(N) = \inf(V \circ M) = \inf(V) \geq \inf(U)$ (l'avant dernière relation provient du fait que V et M sont de Lyndon avec $V < M$). Donc $\inf(N) = \inf(U)$, d'où $\min(U) \in \zeta(N)$. Ainsi $(N,U) \in X_1^\mu$; comme $U < V < M$, on a $(N,U) < (L,M)$ (troisième cas d'inégalité). En invoquant l'hypothèse d'induction, $[\Lambda(N), \Lambda(U)]$ s'exprime sous la forme d'une combinaison linéaire de $\Lambda(K)$ (avec $K \in \mathcal{L}$, $K < U < M$ et $v(K) = v(N)v(U) = \mu$).

Pour les termes $[\Lambda(U), \Lambda(N)]$ de la deuxième somme, on a $(U,N) \in X^\mu$. Ici, encore, $\inf(N) = \inf(V \circ M) = \inf(V) \in \zeta(U)$ (puisque $U \circ V = L$ est connexe); donc $(U,N) \in X_1^\mu$. Comme $N < M$, on a $(U,N) < (L,M)$. L'hypothèse d'induction permet donc de dire que chaque terme de la dernière somme est une combinaison linéaire de $\Lambda(K)$ avec $K \in \mathcal{L}$, $K < N < M$ et $v(K) = \mu$. Ceci termine la vérification du terme $[\Lambda(U), [\Lambda(V), \Lambda(M)]]$.

Passons à l'étude du terme $[[\Lambda(U), \Lambda(M)], \Lambda(V)]$. Comme $U < V < M$, $(U,M) \in X$; il est clair que $(U,M) < (L,M)$ (premier cas d'inégalité). On peut donc écrire : $[\Lambda(U), \Lambda(M)] = \sum \beta_N \Lambda(N)$, la somme portant sur un nombre fini d'empilements de Lyndon N de poids $v(U)v(M)$ et vérifiant $N < M$. Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned} [[\Lambda(U), \Lambda(M)], \Lambda(V)] &= \sum_N \beta_N [\Lambda(N), \Lambda(V)] \\ &= \sum_{N < V} \beta_N [\Lambda(N), \Lambda(V)] - \sum_{V < N < M} \beta_N [\Lambda(V), \Lambda(N)]. \end{aligned}$$

Pour tous ces termes, on a $v(N)v(V) = \mu$. Pour les termes de la première somme finale, on a $(N,V) \in X^\mu$. Comme $\inf(V) \in \zeta(U) \subseteq \zeta(U \circ M) = \zeta(N)$, on a $(N,V) \in X_1^\mu$ et $(N,V) < (L,M)$. Donc $[\Lambda(N), \Lambda(V)]$ est une combinaison linéaire de $\Lambda(K)$ où $K \in \mathcal{L}$, $K < V < M$ et $v(K) = \mu$.

Pour les termes de la seconde somme finale, on a $(V,N) \in X^\mu$. Comme $v(N) = v(U \circ M)$, on a $\inf(N) = \inf(U \circ M) \leq \inf(U) \leq \inf(V) \leq \inf(N)$. Donc $\min(N) \in \zeta(V)$, $(V,N) \in X_1^\mu$ et $(V,N) < (L,M)$. Les termes de la seconde somme s'expriment donc comme combinaisons linéaires de $\Lambda(K)$ avec $K \in \mathcal{L}$, $v(K) = \mu$ et $K < N < M$. Ceci termine la démonstration dans le cas où $(L,M) \in X_1^\mu$.

Reste à examiner le cas où $(L, M) \in X_2^\mu$. Remarquons qu'on a nécessairement $\inf(L) < \inf(M)$ puisque $L < M$ et que $\inf(M) \notin \zeta(L)$. Si $|M| = 1$, alors clairement M et L se sont pas connectés et $[\Lambda(L), \Lambda(M)] = 0$ en vertu de la proposition 3.3.3. On peut donc supposer que $|M| \geq 2$. Soit $\Sigma(M) = (R, S)$ la factorisation standard de M . On procède comme précédemment :

$$\begin{aligned} [\Lambda(L), \Lambda(M)] &= [\Lambda(L), [\Lambda(R), \Lambda(S)]] \\ &= -[[\Lambda(R), \Lambda(S)], \Lambda(L)] \\ &= [[\Lambda(S), \Lambda(L)], \Lambda(R)] + [[\Lambda(L), \Lambda(R)], \Lambda(S)] \\ &= [[\Lambda(L), \Lambda(R)], \Lambda(S)] - [[\Lambda(L), \Lambda(S)], \Lambda(R)]. \end{aligned}$$

Comme $\inf(L) < \inf(M) = \inf(R) \leq \inf(S)$, on a $L < R$ et $L < S$. Donc, $(L, R) \in X$ et $(L, S) \in X$. Par induction, on peut écrire :

$$\begin{aligned} [[\Lambda(L), \Lambda(R)], \Lambda(S)] &= \left[\sum_{N < R} \alpha_N \Lambda(N), \Lambda(S) \right] \\ &= \sum_{N < R} \alpha_N [\Lambda(N), \Lambda(S)]. \end{aligned}$$

Mais $\inf(S) \in \zeta(R) \subseteq \zeta(L \circ R) = \zeta(N)$ et $N < R < S$. Donc $(N, S) \in X_1^\mu$ et $(N, S) < (L, M)$. Donc $[\Lambda(N), \Lambda(S)]$ est une combinaison linéaire de $\Lambda(K)$ avec $K \in L$, $v(K) = \mu$ et $K < S$. Remarquons cependant que $\inf(K) = \inf(N \circ S) = \inf(L \circ M) = \inf(L) < \inf(M)$. On a donc $K < M$.

De même, on peut écrire :

$$\begin{aligned} [[\Lambda(L), \Lambda(S)], \Lambda(R)] &= \left[\sum_{N < S} \beta_N \Lambda(N), \Lambda(R) \right] \\ &= \sum_{N < S} \beta_N [\Lambda(N), \Lambda(R)]. \end{aligned}$$

Remarquons que $\inf(N) = \inf(L \circ S) = \inf(L) < \inf(M) = \inf(R)$. On a donc $N < R$ et $(N, R) \in X_1^\mu$. Si $(N, R) \in X_1^\mu$, on a $(N, R) < (L, M) \in X_2^\mu$. Si, d'autre part $(N, R) \in X_2^\mu$, on a $(N, R) < (L, M)$ car $R < M = R \circ S$. La somme s'exprime donc comme combinaison linéaire de $\Lambda(K)$ avec $K < R < M$. Ce qui complète la démonstration. \diamond

Exemple.

Soit $P = \{a < b < c < d\}$ avec $d \leq a \leq c \leq b$. Calculons $[\Lambda(a \circ c \circ a \circ d), \Lambda(b \circ c)]$ en suivant l'algorithme sous-jacent à la proposition 3.3.4.

On a :

$$\begin{aligned} [\Lambda(a \circ c \circ a \circ d), \Lambda(b \circ c)] \\ = [\Lambda(a \circ c), [\Lambda(a \circ d), \Lambda(b \circ c)]] \\ + [[\Lambda(a \circ c), \Lambda(b \circ c)], \Lambda(a \circ d)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } [\Lambda(a \circ d), \Lambda(b \circ c)] &= [\Lambda(a \circ d), [\Lambda(b), \Lambda(c)]] \\ &= [[\Lambda(a \circ d), b], c] - [[\Lambda(a \circ d), c], b]. \end{aligned}$$

Comme $a \circ d$ et b ne sont pas connectés, le premier terme du second membre est nul. De plus,

$$\begin{aligned} [\Lambda(a \circ d), c] &= \Lambda(a \circ d \circ c), \\ \text{donc, } [\Lambda(a \circ d), \Lambda(b \circ c)] &= -[\Lambda(a \circ d \circ c), b] = -\Lambda(a \circ d \circ c \circ b). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$[\Lambda(a \circ c), [\Lambda(a \circ d), \Lambda(b \circ c)]] = -[\Lambda(a \circ c), \Lambda(a \circ d \circ c \circ b)] = -\Lambda(a \circ c \circ a \circ d \circ c \circ b).$$

Au tour du deuxième terme maintenant:

$$\begin{aligned} [\Lambda(a \circ c), \Lambda(b \circ c)] &= \Lambda(a \circ c \circ b \circ c), \\ \text{donc, } [[\Lambda(a \circ c), \Lambda(b \circ c)], \Lambda(a \circ d)] &= [\Lambda(a \circ c \circ b \circ c), \Lambda(a \circ d)] = \Lambda(a \circ c \circ b \circ c \circ a \circ d). \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$[\Lambda(a \circ c \circ a \circ d), \Lambda(b \circ c)] = \Lambda(a \circ c \circ b \circ c \circ a \circ d) - \Lambda(a \circ c \circ a \circ d \circ c \circ b).$$

Remarquer que:

$$acbcad > St((a \circ c \circ a \circ d) \circ (b \circ c)) = acbadc > acadcb,$$

contrairement au cas des mots avec l'ordre utilisé par Lothaire sur les couples de mots de Lyndon. Pour ceux-ci, on aurait plutôt obtenu:

$$[\lambda(acad), \lambda(bc)] = \lambda(acbcad) - \lambda(acadbc). \diamond$$

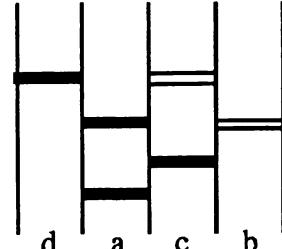


Fig. 3.5 Les empilements $a \circ c \circ a \circ d$ et $b \circ c$. Attention à l'ordre des positions.

Corollaire 3.3.5. *L'ensemble $\{\Lambda(L) : L \in \mathcal{L}\}$ génère le module $\mathbb{L}(P)$. \diamond*

Démonstration. Soit \mathfrak{M} le module généré par $\{\Lambda(L) : L \in \mathcal{L}\}$. La proposition précédente montre que \mathfrak{M} devient une algèbre de Lie quand on le munit du crochet de Lie. Cette algèbre contient P . De plus, on sait que $\Lambda(L) \in \mathbb{L}(P)$ pour tout empilement de Lyndon L . L'algèbre \mathfrak{M} est donc contenue dans $\mathbb{L}(P)$. Mais comme $\mathbb{L}(P)$ est minimale, on a $\mathbb{L}(P) \subseteq \mathfrak{M}$, d'où $\mathfrak{M} = \mathbb{L}(P)$. \diamond

Corollaire 3.3.6. *Les éléments de l'ensemble $\{\Lambda(L) : L \in \mathcal{L}\}$ forment une base de $\mathbb{L}(P)$. \diamond*

Nous étudierons, au chapitre 4, la cardinalité de ces bases en obtenant une équation similaire à la formule de Witt.

Chapitre 4.

Séries formelles d'empilements

§ 4.1 Séries formelles et poids

Beaucoup de théorèmes des chapitres précédents vont se refléter dans la structure des séries associées à certains ensembles d'empilements. Ces ensembles, souvent infinis, exigent un élargissement du cadre des polynômes formels du chapitre 3 de façon à inclure, plus généralement, les séries formelles.

Soit \mathfrak{A} un anneau commutatif unitaire (on pensera habituellement à \mathbb{Z} ou à \mathbb{Q}). Au lieu de considérer les fonctions à support fini (qu'on avait assimilées aux polynômes formels), on prend plus généralement l'ensemble $\mathfrak{A}\langle\langle P \rangle\rangle$ des fonctions de $\mathcal{H}(P)$ vers \mathfrak{A} . Ces fonctions prennent le nom de *séries formelles* (d'empilements). Comme les polynômes formels, on peut les représenter sous la forme :

$$\alpha = \sum_{E \in \mathcal{H}(P)} \alpha_E E,$$

(où $\alpha_E \in \mathfrak{A}$) en remarquant que la famille $\{\alpha_E E\}_{E \in \mathcal{H}(P)}$ est localement finie. Si $\alpha = \sum \alpha_E E$ et $\beta = \sum \beta_E E$ sont deux séries formelles, leur somme est :

$$\alpha + \beta = \sum_E (\alpha_E + \beta_E) E,$$

et leur produit :

$$\alpha \beta = \sum_{E, F} \alpha_E \beta_F E \circ F = \sum_E \left(\sum_{U \circ V = E} \alpha_U \beta_V \right) E.$$

Ces opérations donnent à $\mathfrak{A}\langle\langle P \rangle\rangle$ une structure de \mathfrak{A} -algèbre associative, dont le neutre multiplicatif est Φ (qu'on notera souvent I dans ce contexte). Pour un empilement E , on note $\alpha(E) = \alpha_E$ le coefficient de E dans la série α .

La somme et le produit s'étendent aux familles localement finies $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ (où I est un ensemble d'indices) de séries formelles. La définition de la somme ne cause aucun problème. Si I est totalement ordonné et si pour tout $i \in I$, on a $\alpha_i(\Phi) = 0$, on définit

$$\prod_{i \in I} (I + \alpha_i) = \sum_{J \subseteq I} \prod_{i \in J} \alpha_i ,$$

la somme portant sur les sous-ensembles finis J de I , le produit intérieur s'effectuant suivant l'ordre qui rend l'inclusion $J \subseteq I$ croissante.

Si \mathfrak{A} contient \mathbb{Q} et si $\alpha(\Phi) = 0$, on définit aussi :

$$\log(I - \alpha) = - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \alpha^n \quad \text{et} \quad \exp(\alpha) = e^\alpha = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \alpha^n .$$

Les sommes, produits, logarithmes et exponentielles de séries formelles obéissent aux lois habituelles de ces constructions dans les contextes non-commutatifs.

Soit Q un ensemble de positions (possiblement indépendantes de P) muni d'une relation de concurrence adéquate. Un *poids* est une fonction $v: P \rightarrow \mathfrak{A}\langle\langle Q \rangle\rangle$ telle que si $p, q \in P$ et $p \not\leq q$ alors $v(p)v(q) = v(q)v(p)$. On peut étendre le poids v à l'ensemble des empilements en posant

$$v(E) = v(p_1) \circ \cdots \circ v(p_n)$$

pour un empilement $E = p_1 \circ \cdots \circ p_n \in \mathcal{H}(P)$. Comme v préserve la relation de commutation, le poids de l'empilement E ne dépend pas de la représentation $p_1 \circ \cdots \circ p_n$ choisie. On peut encore étendre cette définition par linéarité. Le poids v se relève donc en un unique morphisme de \mathfrak{A} -algèbre $v: \mathfrak{A}\langle P \rangle \rightarrow \mathfrak{A}\langle\langle Q \rangle\rangle$.

Soit $S \subseteq \mathcal{H}(P)$; si $\{v(E)\}_{E \in S}$ est une famille localement finie de séries formelles de $\mathfrak{A}\langle\langle Q \rangle\rangle$, on dira que v est un poids régulier pour l'ensemble S . Dans le cas où $S = \mathcal{H}(P)$, on dira que v est totalement régulier. Remarquons que si S est fini, tout poids est régulier pour S .

Si le poids v est régulier pour un ensemble infini $S \subseteq \mathcal{H}(P)$, on définit:

$$v\left(\sum_{E \in S} \alpha_E E\right) = \sum_{E \in S} \alpha_E v(E).$$

Nous allons montrer que tout poids régulier v s'étend en un unique morphisme de \mathfrak{A} -algèbre entre $\mathfrak{A}\langle\langle P \rangle\rangle$ et $\mathfrak{A}\langle\langle Q \rangle\rangle$. Remarquons, pour commencer que, si $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ (avec $\alpha_i \in \mathfrak{A}\langle\langle P \rangle\rangle$) est une famille localement finie de séries, alors $\{v(\alpha_i)\}_{i \in I}$ est localement finie. En effet, soit $F \in \mathcal{H}(Q)$; on a:

$$\begin{aligned} \left\{ i \in I \text{ tels que } (v(\alpha_i))(F) \neq 0 \right\} &= \left\{ i \in I \text{ tels que } \sum_{v(E)=F} \alpha_i(E) \neq 0 \right\} \\ &\subseteq \bigcup_{v(E)=F} \{i \in I \text{ tels que } \alpha_i(E) \neq 0\} \end{aligned}$$

qui est une union finie d'ensembles finis. On peut alors écrire:

$$\sum_{i \in I} \alpha_i = \sum_E \sum_{\substack{i \in I \\ \alpha_i(E) \neq 0}} \alpha_i(E) E,$$

d'où

$$v\left(\sum_{i \in I} \alpha_i\right) = \sum_E \sum_{\substack{i \in I \\ \alpha_i(E) \neq 0}} \alpha_i(E) v(E) = \sum_{i \in I} v(\alpha_i).$$

Si $\alpha = \sum \alpha_E E$ et $\beta = \sum \beta_E E$ sont des séries de $\mathfrak{A}\langle\langle P \rangle\rangle$ alors:

$$v(\alpha\beta) = v\left(\sum_{E,F} \alpha_E \beta_F E \circ F\right) = \sum_{E,F} \alpha_E \beta_F v(E) \circ v(F) = v(\alpha)v(\beta).$$

On vérifie facilement que v préserve le produit par un scalaire et le neutre. Comme l'inversion, le produit d'une famille infinie, le logarithme et l'exponentielle s'expriment en terme de sommes et de produits finis, toute identité de $\mathfrak{A}\langle\langle P \rangle\rangle$ impliquant seulement ces fonctions donne une identité de $\mathfrak{A}\langle\langle Q \rangle\rangle$, en remplaçant simplement les séries de $\mathfrak{A}\langle\langle P \rangle\rangle$ par leurs poids respectifs.

Exemples.

- 1) Soit P^T l'ensemble des positions muni de la relation de concurrence totale. Le monoïde $\mathcal{H}(P^T)$ est l'ensemble des mots sur P . Soit $v : P^T \rightarrow \mathcal{H}(P)$ la fonction qui à $p \in P^T$ associe $p \in \mathcal{H}(P)$. Clairement, v définit un poids régulier. En fait, l'extension de v à $\mathcal{H}(P^T)$ est la fonction φ du chapitre 2 qui transforme un mot sur P en un empilement sur P .
- 2) Soit $Q = P^0$ l'ensemble P muni de la relation de concurrence triviale. Soit $v : P \rightarrow \mathcal{H}(P^0)$ la fonction qui à $p \in P$ associe $p \in \mathcal{H}(P^0)$. Ici encore v est un poids régulier. Il s'agit essentiellement du poids utilisé au chapitre 3. Dans ce cas, on note habituellement $\mathfrak{A}(\langle P^0 \rangle) = \mathfrak{A}[[P]]$.

§ 4.2 Inversion combinatoire

Si α est une série formelle de $\mathfrak{A}(\langle P \rangle)$ avec $\alpha(\Phi) = 0$, on sait que $I - \alpha$ est inversible et que $(I - \alpha)^{-1} = \sum_{n \geq 0} \alpha^n$. Pour certaines séries, l'inversion se réduit à une forme beaucoup plus simple. Le théorème suivant traduit en terme d'empilements une proposition de Cartier-Foata ([CF], lemme 2.3, théorème 2.4).

Théorème 4.2.1. $\sum_{E \in \mathcal{H}(P)} E$ est inversible; son inverse est: $\sum_{T \in T(E)} (-1)^{|T|} T$. \diamond

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$\sum_{(E, T) \in \mathcal{H}(P) \times T(P)} (-1)^{|T|} E \circ T = \Phi = \sum_{(T, E) \in T(P) \times \mathcal{H}(P)} (-1)^{|T|} T \circ E.$$

Nous ne démontrerons que la première égalité, l'autre étant symétrique. Nous allons définir une involution “tuante” sur $A = \mathcal{H}(P) \times T(P) - \{(\Phi, \Phi)\}$. On ordonne donc P totalement. Soit $(E, T) \in A$; on a $E \circ T \neq \Phi$, d'où $\max(E \circ T) \neq \Phi$. Comme $\max(E \circ T)$ est un ensemble fini, on peut définir $p = \inf(\max(E \circ T))$. Remarquons qu'on a, soit $E = E' \circ p$ pour un certain empilement E' , soit $T = T' \circ p = p \circ T'$ pour un certain empilement trivial T' . Dans le premier cas, on pose:

$$(\bar{E}, \bar{T}) = \theta(E, T) = (E', p \circ T');$$

dans le deuxième, on pose:

$$(\bar{E}, \bar{T}) = \theta(E, T) = (E \circ p, T').$$

On dira que la position p a été transférée de E à T ou de T à E selon le cas. Dans les deux cas, on a $(-1)^{|T|} = -(-1)^{|T'|}$ et $(\bar{E} \circ \bar{T}) = E \circ T$ (d'où $\max((\bar{E} \circ \bar{T})) = \max(E \circ T)$).

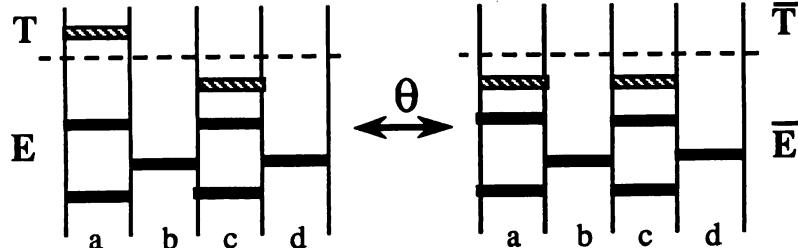


Fig. 4.1 Relations entre $(E \circ T)$, $(\bar{E} \circ \bar{T})$ et leur max (tramé).

Ceci signifie que $p = \inf(\max(\bar{E} \circ \bar{T}))$. Il est alors clair que $\theta(\bar{E}, \bar{T}) = (E, T)$. L'involution θ fera donc disparaître tous les couples $(E, T) \in A$. ♦

On trouve cette démonstration dans Viennot ([Vi3], proposition 5.1). Elle est typique de plusieurs preuves combinatoires qui s'établissent justement à l'aide d'une involution "tuante". Une autre raison de son intérêt : l'idée de transférabilité d'une pièce entre deux empilements. Nous examinerons les conséquences de cette idée au chapitre 6. Le théorème 4.2.1 peut être vu aussi comme une inversion de Möbius pour laquelle Content, Lemay et Leroux ont décrit un cadre général [CLL]. Comme on l'a remarqué, si v est un poids totalement régulier, on peut transporter l'inversion pour obtenir :

$$\left(\sum_{E \in \mathcal{H}(P)} v(E) \right)^{-1} = \sum_{T \in \mathcal{T}(P)} (-1)^{|T|} v(T).$$

Dans une autre direction, on obtient la généralisation suivante du théorème 4.2.1 due à Desainte-Catherine et Viennot ([Vi3], proposition 5.3).

Théorème 4.2.2. Soit $M \subseteq P$. On a :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}(P)} (-1)^{|T|} T \times \sum_{\substack{E \in \mathcal{H}(P) \\ \max(E) \subseteq M}} E = \sum_{T \in \mathcal{T}(P-M)} (-1)^{|T|} T = \sum_{\substack{E \in \mathcal{H}(P) \\ \min(E) \subseteq M}} E \times \sum_{T \in \mathcal{T}(P)} (-1)^{|T|} T. \text{ ♦}$$

Démonstration. Encore ici, on peut construire une involution tuante pour éliminer les couples (E, F) indésirables. Il est plus simple, cependant, de suivre une suggestion d'André Joyal, basée sur la remarque suivante. Tout empilement E se factorise de façon unique sous la forme $E = U \circ V$ où $\max(U) \subseteq M$ et $\pi(V) \cap M = \emptyset$. Il suffit, en

effet, de prendre le facteur gauche U déterminé par les pièces de E qui occupent une position appartenant à M . Le facteur droit complémentaire V ne contient donc aucune pièce ayant une position dans M . On peut alors écrire:

$$\sum_{E \in \mathcal{H}(P)} E = \sum_{\substack{U \in \mathcal{H}(P) \\ \max(U) \subseteq M}} U \times \sum_{V \in \mathcal{H}(P-M)} V$$

En inversant, par le théorème 4.2.1, les deux sommes extrêmes, on démontre la première égalité du théorème. La deuxième égalité se prouve de façon similaire. \diamond

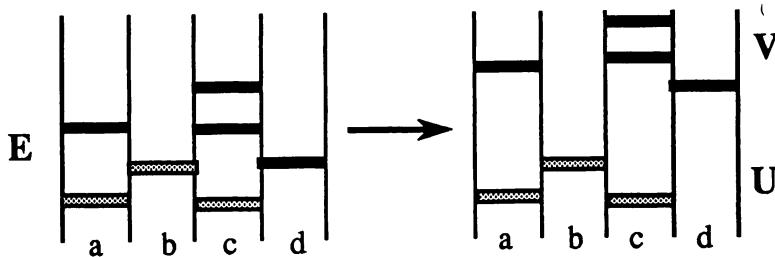


Fig 4.2 Factorisation de $E = U \circ V$. Ici, $M = \{b\}$.

§ 4.3 Transformations somme-produit

Le théorème 2.4.10 affirme que tout empilement se factorise de façon unique comme superposition d'empilements de Lyndon décroissants. Ceci se traduit aisément en terme de séries formelles.

Théorème 4.3.1. *Supposons que P soit totalement ordonné. On a :*

$$\sum_{E \in \mathcal{H}(P)} E = \prod_{\substack{L \in \mathcal{L} \\ \text{décroissant}}} (I + L + L^2 + \dots) = \prod_{\substack{L \in \mathcal{L} \\ \text{décroissant}}} (I - L)^{-1} = \left(\prod_{\substack{L \in \mathcal{L} \\ \text{croissant}}} (I - L) \right)^{-1}. \diamond$$

Cette formule est une généralisation de la formule d'Euler pour la fonction ζ de Riemann. Dans ce cas précis, l'ensemble P des positions est l'ensemble des nombres premiers avec relation de concurrence triviale. Les empilements deviennent les nombres. On peut prendre comme poids: $v(p) = 1/p^s$ pour tout premier p . Comme on l'a vu, les empilements de Lyndon pour ce type de relation de concurrence sont les empilements à une seule pièce. On trouve alors:

$$\sum v(E) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}.$$

L'inversion des séries du théorème précédent donne, grâce au théorème 4.2.1:

$$\sum_{T \in T(P)} (-1)^{|T|} T = \prod_{\substack{L \in \mathcal{L} \\ \text{croissant}}} (I - L) = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ L_1 < \dots < L_k \in \mathcal{L}}} (-1)^k L_1 \circ \dots \circ L_k.$$

Si la relation de concurrence est triviale, chaque terme d'une des sommes se retrouve dans l'autre. Dans le cas d'une relation de concurrence plus élaborée, la somme de droite englobe celle de gauche tout en contenant énormément plus de termes. En fait, si le nombre de positions est fini, la somme de gauche est finie, contrairement à celle de droite. Ceci suggère fortement l'existence d'un involution qui élimine les termes supplémentaires.

Chaque suite $L_1 < \dots < L_r$ d'empilements de Lyndon telle que $L_1 \circ \dots \circ L_r \notin T(P)$ correspondra, via cette involution, à une suite $L'_1 < \dots < L'_s$ d'empilements de Lyndon telle que $L'_1 \circ \dots \circ L'_s = L_1 \circ \dots \circ L_r$ avec $s = r \pm 1$. Le lecteur se doute bien que l'involution utilisera la factorisation standard pour briser un empilement de Lyndon ou pour en rassembler deux consécutifs.

En fait, la situation est légèrement plus compliquée. La simplification se réalise par l'application successive de deux involutions θ_1 et θ_2 . La première, θ_1 , ne laisse survivre que les suites $L_1 < \dots < L_r$ constituées de super-lettres de bases distinctes. L'involution θ_2 , appliquée aux survivants, termine le nettoyage.

Description de l'involution θ_1

Soit $L_1 < \dots < L_r$ une suite croissante d'empilements de Lyndon. Soit $i \in [k]$ l'entier minimal tel que $\inf(L_i) = \inf(L_{i+1})$ ou tel que L_i n'est pas une super-lettre. On dira que i est le *pivot* de la suite. Remarquons qu'il est possible qu'un tel entier i n'existe pas. Dans ce cas, les empilements de la suite sont des super-lettres et leurs bases sont distinctes : cette suite survivra. Dans le cas contraire, après avoir posé $\Sigma(L_i) = (M, N)$ (si $|L_i| > 1$), on définit θ_1 par :

$$(L'_1, \dots, L'_s) = \theta_1(L_1, \dots, L_r) = \begin{cases} (L_1, \dots, L_{i-1}, L_i \circ L_{i+1}, L_{i+2}, \dots, L_r), & \text{si } i < r \text{ et } L_i \text{ est une super - lettre ou si } L_{i+1} \leq N; \\ (L_1, \dots, L_{i-1}, M, N, L_{i+1}, \dots, L_r), & \text{si } L_i \text{ n'est pas une super - lettre et } L_{i+1} > N \text{ (si } i < r\text{).} \end{cases}$$

Les deux cas de définition couvrent toutes les possibilités et sont mutuellement exclusifs. De plus, on a bien $L'_1 \circ \dots \circ L'_s = L_1 \circ \dots \circ L_r$ et $s = r \pm 1$. Nous allons procéder par une suite de lemmes techniques pour montrer que θ_1 réalise bien ce qu'on attend d'elle.

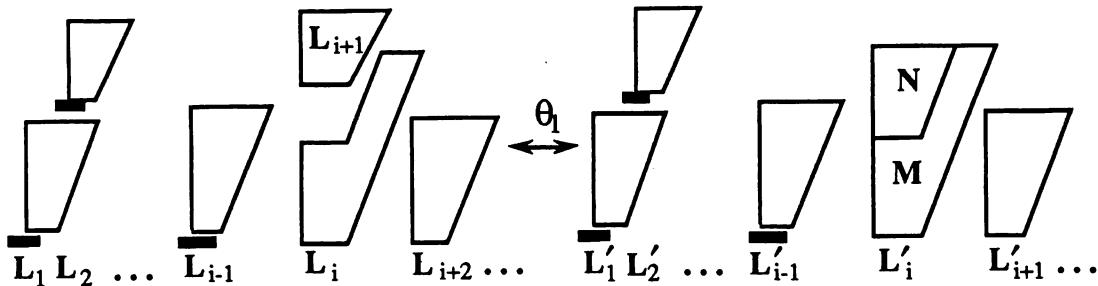


Fig 4.3 Description de l'involution θ_1 .

1) L'_1, \dots, L'_s est une suite d'empilements de Lyndon. Dans le premier cas de définition de θ_1 , en effet, si L_i est une super-lettre, on a $\inf(L_i) = \inf(L_{i+1})$ par choix de i . Cette relation est valide même si L_i n'est pas une super-lettre; dans ce cas, on a en effet $L_i < L_{i+1} \leq N$. On trouve alors $\inf(L_i) = \inf(L_{i+1}) \leq \inf(N) = \inf(L_i)$ (la dernière égalité provient du corollaire 3.2.8). Dans tous les cas, on a $L_i < L_{i+1}$ avec $\inf(L_{i+1}) \in \zeta(L_i)$. Par le corollaire 2.5.2, $L_i \circ L_{i+1}$ est un empilement de Lyndon. Dans le deuxième cas de définition de θ_1 , l'affirmation est évidente, par définition de la factorisation standard et par la proposition 3.2.6.

2) L'_1, \dots, L'_s est une suite croissante. Dans le premier cas de définition, ceci est clair puisque $L_{i-1} < L_i < L_i \circ L_{i+1} < L_{i+2}$. Dans le deuxième cas, on a $M < N < L_{i+1}$. Reste à montrer que $L_{i-1} < M$. Si on avait $L_{i-1} \geq M$, on aurait alors $\inf(L_{i-1}) \geq \inf(M) = \inf(L_i) \geq \inf(L_{i-1})$, d'où $\inf(L_{i-1}) = \inf(L_i)$, ce qui contredit le choix de i .

3) Le pivot i' de la suite L'_1, \dots, L'_s existe et vérifie $i' = i$. Dans le premier cas, il est clair que $L_i \circ L_{i+1}$ n'est pas une super-lettre (si L_i est une super-lettre, alors $\inf(L_i) = \inf(L_{i+1})$). Dans le deuxième, on a $\inf(L'_i) = \inf(M) = \inf(N) = \inf(L'_{i+1})$ puisque L_i n'est pas une super-lettre. Ceci montre que i' existe et que $i' \leq i$. Remarquons que, par choix de i , la sous-suite $L'_1, \dots, L'_{i-1} = L_1, \dots, L_{i-1}$ se compose de super-lettres qui sont toutes de bases distinctes puisque $\inf(L_1) < \inf(L_2) < \dots < \inf(L_{i-1})$. On a donc $i' = i$.

4) $\theta_1(L'_1, \dots, L'_s) = (L_1, \dots, L_r)$. En effet, si on avait appliqué le premier cas de définition à la suite (L_1, \dots, L_r) , on aurait $L'_i = L_i \circ L_{i+1}$. Comme $L_{i+1} \leq N$, on a $\Sigma(L'_i) = (L_i, L_{i+1})$ qu'on posera égal à (M', N') . Comme $L'_{i+1} = L_{i+2} > L_{i+1} = N'$ (si $i < s$), on doit appliquer le deuxième cas à la suite L'_1, \dots, L'_s , ce qui nous fait retrouver la suite de départ.

D'autre part, si on avait appliqué le deuxième cas à la suite L_1, \dots, L_r , on aurait $i < s$. Si $L'_i = M$ n'est pas une super-lettre, posons $\Sigma(M) = \Sigma(L'_i) = (M', N')$. Comme $\Sigma(L_i) = \Sigma(M \circ N) = (M, N)$, on a, en vertu de la proposition 3.2.9, $N' \geq N = L'_{i+1}$. Ceci montre qu'on doit appliquer le premier cas à la suite L'_1, \dots, L'_s , ce qui nous redonne la suite de départ. \diamond

Symboliquement, on peut écrire :

$$\prod_{\substack{L \in \mathcal{L} \\ \text{croissant}}} (I - L) = \sum_{\substack{p_1 < \dots < p_r \in P \\ A_1 \in \mathcal{A}_{p_1}, \dots, A_r \in \mathcal{A}_{p_r}}} (-1)^r A_1 \circ \dots \circ A_r = \prod_{\substack{p \in P \\ \text{croissant}}} \left(I - \sum_{A \in \mathcal{A}_p} A \right).$$

Après une inversion, on trouve

$$\sum_{E \in \mathcal{H}(P)} E = \prod_{\substack{p \in P \\ \text{décroissant}}} \left(I - \sum_{A \in \mathcal{A}_p} A \right)^{-1} = \prod_{\substack{p \in P \\ \text{décroissant}}} \left(\sum_{D \in \mathcal{D}_p} D \right).$$

La somme intérieure du dernier membre se calcule bien grâce au théorème 4.2.2; il s'agit en effet de:

$$\sum_{D \in \mathcal{D}_p} D = \sum_{\substack{E \in \mathcal{H}(Q_p) \\ \min(E) \subseteq \{p\}}} E .$$

où $Q_p = \{q \in P \text{ telles que } q \geq p\}$. L'expression affirme que tout empilement E se factorise de façon unique en pyramides admissibles de bases décroissantes, ce qui, combinatoirement, devrait sauter aux yeux.

Description de l'involution θ_2

Nous devons maintenant réduire cette somme de produits de super-lettres en somme d'empilements triviaux, ce qu'on peut réaliser grâce à l'involution θ_2 .

Soit $L_1 < \dots < L_r$ une suite croissante de super-lettres de bases distinctes vérifiant $L_1 \circ \dots \circ L_r \notin \mathcal{T}(P)$. Soit $i \in [r]$ maximal tel que $L_i \circ \dots \circ L_r$ ne soit pas trivial. Remarquons que, pour $j > i$, l'empilement L_j ne comporte qu'une seule position. On pose $A = A_1 \cup A_2$ où $A_1 = \{L_j \text{ tels que } j > i \text{ et } \pi(L_j) \in \zeta(L_i)\}$ et où $A_2 = \{m \in \max(L_i) \text{ tels que } m \notin \zeta(L_{i+1} \circ \dots \circ L_r)\}$.

Chacun des ensembles A_1 et A_2 définit un empilement trivial. Il en est de même pour leur union qui est donc disjointe. Si $A_1 = \emptyset$, aucun des empilements L_j ($j > i$) n'est concurrent avec L_i ; dans ce cas, $A_2 \neq \emptyset$. Ainsi l'ensemble A n'est pas vide. Soit $p = \sup(A)$. On examine deux cas suivant l'appartenance de p à A_1 ou à A_2 .

1) Si $p \in A_1$, alors $p = L_j$ pour un certain $j > i$. On a $p = \inf(L_j) > \inf(L_i)$ et $p \in \zeta(L_i)$. Ainsi, $L_i \circ p$ est une super-lettre de base $\inf(L_i)$. On définit alors :

$$(L'_1, \dots, L'_s) = \theta_2(L_1, \dots, L_r) = (L_1, \dots, L_{i-1}, L_i \circ p, L_{i+1}, \dots, L_{j-1}, L_{j+1}, \dots, L_r).$$

Clairement, $s = r-1$ et $L'_1 \circ \dots \circ L'_s = L_1 \circ \dots \circ L_r$, puisque $p \circ L_{i+1} \circ \dots \circ L_r$ est trivial. Nous préparons ensuite le terrain pour montrer que θ_2 est une involution. Remarquons que i est l'entier maximal pour lequel $L'_1 \circ \dots \circ L'_s$ n'est pas trivial. Si A'_1 , A'_2 et A' désignent les ensembles correspondant à A_1, A_2 et A pour la suite $L'_1 \circ \dots \circ L'_s$, on voit que $A'_1 = A_1 - \{p\}$ et que $A'_2 = A_2 \cup \{p\}$. Aussi, $A' = A$ et $p = \sup(A')$ avec $p \in A'_2$. On appliquera donc le prochain cas de définition à la suite L'_1, \dots, L'_s .

2) Si $p \in A_2$, alors $p \circ L_{i+1} \circ \dots \circ L_r$ est trivial. Posons $L_i = L'_i \circ p$. Remarquons que $L'_i \neq \Phi$ sinon $L_i = p$ et $L_i \circ \dots \circ L_r$ serait trivial, ce qui contredit le choix de i . Donc L'_i est une super-lettre de base $\inf(L'_i) = \inf(L_i)$. Comme $p > \inf(L_i)$ et que $p \in A_2$, on peut insérer p dans la suite L_{i+1}, \dots, L_r de façon à ce que les bases de la suite résultante $L'_{i+1}, \dots, L'_{r+1}$ soient croissantes. On pose alors :

$$(L'_1, \dots, L'_s) = \theta_2(L_1, \dots, L_r) = (L_1, \dots, L_{i-1}, L'_i, \dots, L'_{r+1}).$$

On a, ici, $s = r+1$ et $L'_1 \circ \dots \circ L'_s = L_1 \circ \dots \circ L_r$ puisque $L'_{i+1} \circ \dots \circ L'_{r+1} = p \circ L_{i+1} \circ \dots \circ L_r$ est trivial. De plus, i est l'entier maximal tel que $L'_1 \circ \dots \circ L'_s$ ne soit pas trivial. On voit facilement que $A'_1 = A_1 \cup \{p\}$ et que $A'_2 = A_2 - \{p\}$. Comme précédemment, $A' = A$ et $p = \sup(A')$ avec, cette fois, $p \in A'_1$. On appliquera donc le cas de définition précédent à la suite (L'_1, \dots, L'_s) .

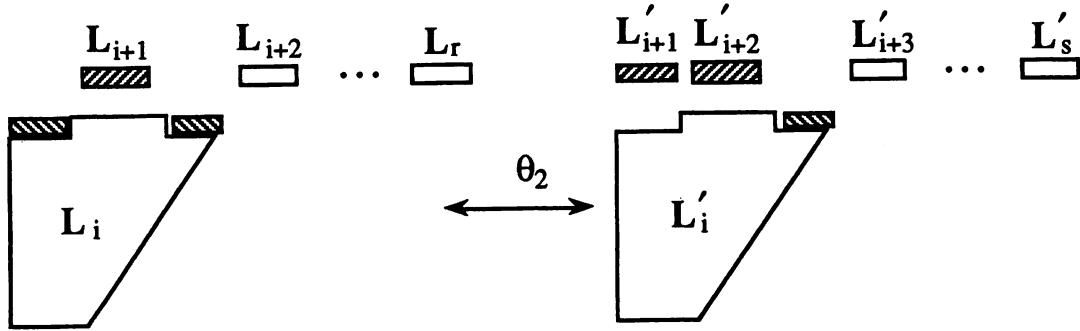


Fig. 4.4 Description de l'involution θ_2 , de A_1 et A_2 (par les différentes trames).

La discussion qui suit chaque cas de définition montre que θ_2 est une involution qui ne laisse survivre que les empilements triviaux. ♦

La relation $\sum_{T \in T(P)} (-1)^{|T|} T = \prod_L (I - v(L))$ se trouve implicitement dans le travail de

Sherman ([Sh1], [Sh2]) (remanié par Burgoyne [Bu]) sur le modèle de Ising et sur la solution de la conjecture de Feynman. On la retrouve sous une forme plus explicite chez Kasteleyn ([Ka], éq.(38)). Dans tous ces cas, elle apparaît dans le contexte des circuits d'un graphe; les empilements de Lyndon correspondent alors aux circuits non-périodiques. Un cas particulier, développé par Sherman et, avec lui, Schützenberger ([Sh2], [SS]) permet de l'étendre aux générateurs d'un groupe libre.

§ 4.4 Relations logarithmiques

On supposera dans cette section que $Q \subseteq A$. Soit $v : A\langle\langle P \rangle\rangle \rightarrow A[[P]]$ le poids qui rend les positions commutatives. Par le théorème 4.3.1, on peut écrire:

$$\sum_{E \in H(P)} v(E) = \prod_{L \in L} (I - v(L))^{-1} .$$

En prenant le logarithme, et en utilisant la commutativité du poids, on obtient la suite de relations:

$$\log \left(\sum_{E \in H(P)} v(E) \right) = - \sum_{L \in L} \log(I - v(L)) = \sum_{\substack{L \in L \\ n \geq 1}} \frac{v(L)^n}{n}$$

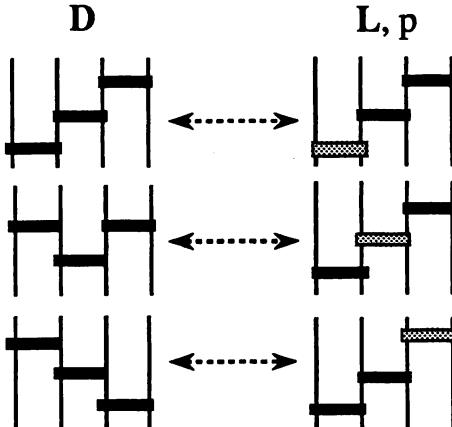
$$= \sum_{\substack{L \in \mathcal{L} \\ n \geq 1}} \frac{|L| v(L)^n}{n^{|L|}} = \sum_{\substack{L \in \mathcal{L} \\ n \geq 1 \\ p \in L}} \frac{v(L)^n}{n^{|L|}} .$$

Si D est une pyramide inversée primitive avec $\min(D) = d$, alors l'étude de la conjugaison et des empilements de Lyndon nous enseignent qu'il existe une unique pièce $\ell \in D$ telle que $A_\ell^\sim(D) \in \mathcal{L}$. De plus, si p est la pièce correspondante à d dans l'empilement de Lyndon $A_\ell^\sim(D)$, on a:

$$A_p^\sim(A_\ell^\sim(D)) = A_d^\sim(D) = D .$$

Ainsi, à toute pyramide primitive D , on peut associer bijectivement un couple (p, L) où L est un empilement de Lyndon conjugué avec D et où $p \in L$. On peut alors poursuivre le calcul et écrire :

$$\log \left(\sum_{E \in \mathcal{H}(P)} v(E) \right) = \sum_{D \in \mathcal{D}} \frac{v(D)^n}{|D| n} ,$$



la dernière somme portant sur les pyramides inversées primitives. Comme toute pyramide est une puissance d'une pyramide primitive, on a l'égalité qui apparaît dans le théorème suivant.

Théorème 4.4.1. Soit $v: \mathbb{A}\langle\langle P \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{A}[[P]]$ le poids qui rend les positions commutatives. Alors

$$\log \left(\sum_{E \in \mathcal{H}(P)} v(E) \right) = \sum_{D \in \mathcal{D}} \frac{v(D)}{|D|} ,$$

la somme de droite portant sur les pyramides inversées. \diamond

Comme le poids est commutatif, on peut tout aussi bien sommer sur les pyramides non-inversées. On retrouve le théorème dans l'article de base de Viennot sur les empilements ([Vi3], proposition 5.10). La démonstration qu'il y donne est beaucoup plus courte que celle donnée ici. L'intérêt de cette dernière réside dans le fait qu'elle reprend essentiellement l'argumentation de Kasteleyn pour démontrer la relation de Sherman citée précédemment.

Fig. 4.5 Bijection entre les pyramides inversées primitives et les empilements de Lyndon. La pièce p est colorée.

Étant donné $\alpha \in \mathcal{A}(\langle P \rangle)$ avec $\alpha(\Phi) = 0$ et $\beta \in \mathcal{A}$, on peut définir: $\alpha^\beta = e^{\beta \log \alpha}$ puisque $(\beta \log \alpha)(\Phi) = 0$. On trouve alors:

$$\left(\sum_{E \in \mathcal{H}(P)} E \right)^\beta = e^{\beta \log(\sum E)} = e^{-\beta \log \prod_{L \in L} (I - L)},$$

le produit s'effectuant en suivant l'ordre croissant des empilements L . Si v est le poids qui rend les positions commutatives, cette équation devient:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{E \in \mathcal{H}(P)} v(E) \right)^\beta &= \prod_{L \in L} e^{-\beta \log(I - v(L))} \\ &= \prod_{L \in L} \left(\sum_{m \geq 0} \sum_{k \geq 0} \beta^k |s_{mk}| \frac{v(L^m)}{m!} \right) \end{aligned}$$

où s_{mk} désigne les nombres de Stirling de première espèce. En utilisant l'interprétation combinatoire de ces nombres, on trouve:

$$\left(\sum_{E \in \mathcal{H}(P)} v(E) \right)^\beta = \sum_{r \geq 0} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r \geq 0 \\ \sigma_1 \in \mathfrak{S}_{m_1}, \dots, \sigma_r \in \mathfrak{S}_{m_r}}} \beta^{\sum_{i=1}^r \text{cy}(\sigma_i)} \frac{v(L_1^{m_1} \circ \dots \circ L_r^{m_r})}{m_1! \dots m_r!}$$

où $\text{cy}(\sigma)$ est le nombre de cycles d'une permutation σ .

Or, le groupe \mathfrak{S}_n agit sur les suites d'empilements de Lyndon (L_1, \dots, L_n) en posant:

$$\sigma(L_1, \dots, L_n) = (L_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, L_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Si la factorisation de Lyndon d'un empilement E est $E = L_1 \circ \dots \circ L_n$, on définit:

$$\text{Fix}(E) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ telles que } \sigma(L_1, \dots, L_n) = (L_1, \dots, L_n)\}.$$

En réécrivant la factorisation sous la forme $E = L_1^{m_1} \circ \dots \circ L_r^{m_r}$ (avec $L_1 > \dots > L_r$), il est clair que $\text{Fix}(E)$ est le produit direct des sous-groupes $\text{Fix}(L_i^{m_i}) \cong \mathfrak{S}_{m_i}$ (pour $i \in [r]$). On trouve finalement le théorème suivant.

Théorème 4.4.2. Soit $v : \mathbb{A}\langle\langle P \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{A}[[P]]$ le poids qui rend commutatif les positions. Si $\beta \in \mathbb{A}$, on a :

$$\left(\sum_{E \in \mathcal{H}(P)} v(E) \right)^\beta = \sum_{E \in \mathcal{H}(P)} \left(\sum_{\sigma \in \text{Fix}(E)} \beta^{c_y(\sigma)} \right) \frac{v(E)}{|\text{Fix}(E)|}. \diamond$$

Dans le cas où P est l'ensemble des circuits élémentaires d'un graphe, Foata et Zeilberger ([FZ]: la β -extention du “Master Theorem” de MacMahon) obtiennent une formule combinatoire pour $(\sum v(E))^\beta$ qui leur permet d'étudier les produits de polynômes de Laguerre. Zeng [Zn] étend ces méthodes à l'étude d'autres familles de polynômes orthogonaux. On peut établir, grâce à une bijection assez évidente, les liens entre le théorème 4.4.2 et la β -extention de Foata-Zeilberger, moyennant le travail préparatoire du prochain chapitre.

§4.5 Formules de Witt

La formule de Witt

$$L_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) k^{n/d}$$

donne le nombre L_n de mots de Lyndon composés de n lettres formé à partir d'un alphabet de k lettres. On sait que L_n est aussi la dimension de la composante homogène de degré n de l'algèbre de Lie libre générée par k éléments non-commutatifs. Dans le cas d'une relation de concurrence plus générale que celle des mots, nous savons, d'après le chapitre 3, que ce lien entre les empilements de Lyndon et les algèbres de Lie libres partiellement commutatives est toujours valide. Nous cherchons donc une généralisation de la formule de Witt qui permettra de connaître le nombre d'empilements de Lyndon comportant un nombre donné de pièces.

On suppose encore que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A}$ et que $v : \mathbb{A}\langle\langle P \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{A}[[P]]$ est le poids qui rend les positions commutatives. Rappelons que la démonstration du théorème 4.4.1 donnait :

$$\log \left(\sum_{E \in \mathcal{H}(P)} v(E) \right) = \sum_{\substack{L \in \mathcal{L} \\ d \geq 1}} \frac{v(L^d)}{d} = \sum_{D \in \mathcal{D}} \frac{v(D)}{|D|}.$$

Soit $t^v = \prod_{p \in P} t_p^{v_p}$ un monôme de $\mathbb{A}[[P]]$ (les v_p sont des entiers non-négatifs presque tous nuls). On isole le terme correspondant à ce monôme dans les deux derniers membres de l'équation précédente, ce qui donne:

$$\sum_{\substack{d \geq 1 \\ L \in \mathcal{L} \\ v(L^d) = t^v}} \frac{1}{d} = \sum_{\substack{D \in \mathcal{D} \\ v(D) = t^v}} \frac{1}{|D|},$$

ou mieux:

$$\sum_{d | v} \frac{1}{d} \sum_{\substack{L \in \mathcal{L} \\ |L|_p = v_p}} 1 = \frac{1}{|V|} \sum_{\substack{D \in \mathcal{D} \\ |D|_p = v_p}} 1,$$

où $|V| = \sum_{p \in P} v_p$ est le nombre total de pièces dans chaque pyramide énumérée par le membre de droite. Dans cette somme et dans les suivantes, les relations où p semble intervenir sont valides pour toute position p . Ici, on somme sur tous les d diviseurs de tous les v_p . Une inversion de Möbius fournit alors le prochain théorème.

Théorème 4.5.1. Soit $v = (v_p)_{p \in P}$ une suite d'entiers non-négatifs indexée par l'ensemble P des positions. Si $L(v)$ est le nombre d'empilements de Lyndon L vérifiant $|L|_p = v_p$ (pour chaque position $p \in P$) et si $D(v)$ est le nombre de pyramides inversées D vérifiant $|D|_p = v_p$, alors

$$L(v) = \frac{1}{|V|} \sum_{d | v} \mu(d) D(v/d),$$

où $|V| = \sum_{p \in P} v_p$, et où $d | n$ signifie $d | v_p$ pour tout p . \diamond

Si le nombre de positions $|P|$ est fini, on peut ne pas spécifier toutes les valeurs de v_p . Il suffit de connaître le nombre total de pièces.

Corollaire 4.5.2. Supposons que $|P| < \infty$. Soit $Q \subseteq P$ un sous-ensemble de positions, soit $v = (v_p)_{p \in Q}$ une suite d'entiers non-négatifs indexée par Q .

Soit $n \geq \sum_{p \in Q} v_p$. Si $L(n, v)$ est le nombre d'empilements de Lyndon L comportant n pièces et tels que $|L|_p = v_p$ (pour chaque $p \in Q$) avec une notation similaire ($D(n, v)$) pour les pyramides inversées, alors on a :

$$L(n, v) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \mid v}} D(n/d, v/d) . \diamond$$

Démonstration. Comme $|P| < \infty$, on peut écrire:

$$L(n, v) = \sum_{v'} L(n, v \cup v')$$

la somme portant sur les suites v' d'entiers non-négatifs indexées par $P-Q$ et vérifiant $|v| + |v'| = n$. On a donc :

$$\begin{aligned} L(n, v) &= \frac{1}{n} \sum_{v'} \sum_{\substack{d \mid v \\ d \mid v'}} \mu(d) D\left(\frac{v \cup v'}{d}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{d \mid v} \mu(d) \sum_{v'} D\left(\frac{n/d}{d}, \frac{v \cup v'}{d}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{d \mid v \\ d \mid n}} \mu(d) D(n/d, v/d) . \quad \diamond \end{aligned}$$

En particulier, si on ne désire que spécifier le nombre de pièces, on trouve :

$$L(n, \emptyset) = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu(d) D(n/d, \emptyset) .$$

Dans le cas des mots, les pyramides sont les mots non-vides et on retrouve la formule de Witt :

$$L(n, \emptyset) = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu(d) k^{n/d},$$

si l'alphabet P comporte exactement k lettres.

Autre situation: la relation de concurrence triviale. Dans ce cas, les pyramides ont la forme p^i (pour $p \in P$ et $i \geq 1$). Il y a donc $|P|$ pyramides comportant n/d pièces; d'où

$$L(n, \emptyset) = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu(d) |P| = \begin{cases} |P| & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n \neq 1. \end{cases}$$

Ceci correspond bien à la remarque du chapitre 2 qui affirmait que les Lyndon sont des empilements ne comportant qu'une pièce.

Chapitre 5.

Graphes et empilements

§ 5.1 Introduction

Nous avons remarqué, dans le chapitre précédent, que certains théorèmes généraux sur les empilements prennent une forme particulièrement simple quand l'ensemble des positions est l'ensemble des circuits élémentaires d'un graphe. On calcule alors les séries génératrices d'empilements par des déterminants, ce qui ouvre la voie à l'interprétation de plusieurs théorèmes d'algèbre linéaire. Dans cette perspective, on se souviendra des travaux de Cartier et Foata [CF] sur le "master theorem" de MacMahon; de Jackson [Ja] et de Foata [Fo2] sur l'identité de Jacobi reliant le déterminant et la trace d'une matrice; de Straubing [Str] sur le théorème de Cayley-Hamilton; de Zeilberger [Ze] sur le théorème de Cauchy-Binet (déterminant d'un produit)... Nous allons démontrer ici un théorème, dû à Jacobi, qui relie les mineurs d'une matrice avec les mineurs complémentaires de la matrice inverse.

Soit $D = \{d_1 < \dots < d_k\}$ et $F = \{f_1 < \dots < f_k\}$ des sous-ensembles de $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, et soit $M = (m_{ij})$ une matrice de dimension $n \times n$; on pose:

$$M[D, F] = (m_{d_i, f_j}) \quad (\text{pour } i, j \in [k]),$$

la sous-matrice de M correspondant aux lignes et aux colonnes énumérées (respectivement) par D et F . Le théorème de Jacobi, auquel nous référons plus haut, affirme que:

$$\det((I - V)^{-1}[D, F]) = \frac{(-1)^{D+F} \det((I - V)[\bar{F}, \bar{D}])}{\det(I - V)},$$

où V est une matrice de dimension $n \times n$, où \bar{D} et \bar{F} sont les complémentaires de D et F respectivement, et où on a posé $(-1)^{D+F} = (-1)^{d_1 + \dots + d_k + f_1 + \dots + f_k}$ afin d'alléger la notation.

Dans le cas où $|D| = |F| = k = 1$, cette égalité se réduit à l'inversion par cofacteurs. Foata [Fo1] en a déjà donné la preuve combinatoire par l'utilisation du modèle précité des chemins dans un graphe. En fait, Foata démontre un théorème plus fort par l'introduction de variables non-commutatives dans la matrice V .

Dans le cas où le digraphe sous-jacent ne possède aucun circuit, Gessel et Viennot ([GV], [Vi2]) démontrent essentiellement l'égalité de Jacobi, ci-haut. Ils obtiennent alors de nombreux résultats sur l'énumération de tableaux de Young. Au niveau de la matrice d'incidence, la restriction signifie qu'elle est similaire, par une permutation des lignes et des colonnes, à une matrice triangulaire de diagonale nulle.

Nous allons laisser tomber la restriction "sans circuits" ce qui permettra d'unifier les deux approches. De plus, nous utiliserons un poids non-commutatif pour obtenir une généralisation "à la Foata" du théorème de Jacobi.

§5.2 Chemins dans un graphe

Les graphes que nous considérons sont en fait des multi-digraphes finis. Pour nous, un *graphe* $G = (S, A)$ est donc un ensemble S de sommets et un ensemble fini A d'arcs, chaque arc $a \in A$ reliant un sommet d à un sommet f . On notera alors $d = d(a)$ (début de a) et $f = f(a)$ (fin de a). Il peut y avoir plusieurs arcs reliant deux sommets donnés.

Un *chemin* ω sur G est une séquence $(s_0, a_1, s_1, \dots, a_m, s_m)$ ($m \geq 0$) de sommets $s_i \in S$ et d'arcs $a_i \in A$, l'arc a_i reliant s_{i-1} à s_i . On dira alors que le chemin ω relie s_0 à s_m , ($\omega: s_0 \rightarrow s_m$); comme pour les arcs, on écrira $d(\omega) = s_0$ et $f(\omega) = s_m$. La *longueur* de ω est le nombre d'arcs qui le composent: $\ell(\omega) = m$. Si $s_0 = s_m$, on dit que ω est un *lacet* (en s_0). Si $m = 0$, on dit que le chemin ω est *vide* (en s_0).

Étant donné deux chemins $\omega_1 = (s_0, a_1, \dots, a_m, s_m)$ et $\omega_2 = (t_0, b_1, \dots, b_n, t_n)$ avec $s_m = t_0$, on définit le *produit* $\omega_1\omega_2$ comme le chemin

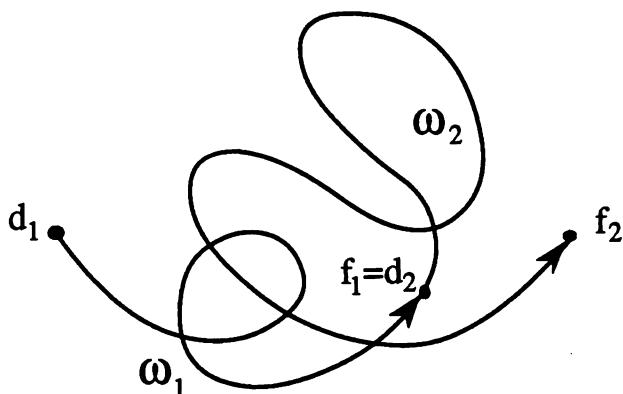


Fig 5.1 Produit de ω_1 et de ω_2 .

$$\omega_1\omega_2 = (s_0, a_1, \dots, a_m, s_m, b_1, t_1, \dots, t_n).$$

Un *circuit* est une séquence “circulaire” $\gamma = [s_0, a_1, \dots, s_{m-1}, a_m]$ (la fin de l’arc a_m étant s_0); on écrit aussi $\gamma = [s_0, a_1, \dots, s_{m-1}, a_m, s_0]$, de longueur non-nulle, pour laquelle $(s_0, a_1, \dots, s_{m-1}, a_m, s_0)$ est un lacet en s_0 . Nous utilisons les crochets pour les circuits afin de les distinguer des lacets correspondants. Le terme “circulaire”, indique qu’on considère que

$$\gamma = [s_i, a_{i+1}, \dots, s_{m-1}, a_m, s_0, a_1, \dots, s_{i-1}, a_i]$$

pour tout $i \in \{0, \dots, m\}$. De façon imagée, un circuit est un lacet dont on aurait oublié l’origine. La longueur de γ est $\ell(\gamma) = m$.

Un chemin $\omega = (s_0, a_1, \dots, s_m)$ est *élémentaire* si s_0, s_1, \dots, s_m sont tous distincts. Le seul lacet élémentaire en s est le chemin vide en s , $\omega = (s)$. Un circuit $\gamma = [s_0, a_1, \dots, s_{m-1}, a_m]$ est *élémentaire* si le chemin $(s_0, a_1, \dots, a_{m-1}, s_{m-1})$ est élémentaire.

Un chemin ω_1 coupe un autre chemin ω_2 si ω_1 et ω_2 ont (au moins) un sommet commun; on note souvent: $\omega_1 \cap \omega_2 \neq \emptyset$. Ceci s’étend de façon évidente aux paires chemin-circuit ou circuit-circuit. On peut alors définir une relation de concurrence ζ : $\omega_1 \zeta \omega_2$ ssi ω_1 et ω_2 se coupent (ω_1 et ω_2 pourront être des chemins ou des circuits). On réserve le symbole C pour l’ensemble des circuits élémentaires du graphe G , muni de cette relation de concurrence. On peut donc considérer les empilements de circuits élémentaires $E \in \mathcal{H}(C)$.

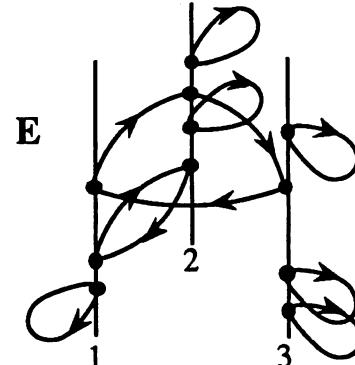


Fig 5.2 Un empilement de circuits élémentaires.

Soit $D = \{d_1 < \dots < d_k\}$ et $F = \{f_1 < \dots < f_k\}$ des sous-ensembles de $[n]$ de même cardinalité. Une *configuration* $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_k)$ est une séquence de chemins $\omega_i: d_{\sigma(i)} \rightarrow f_i$ pour une certaine permutation $\sigma \in S_k$. On dit que la configuration Ω joint D à F (par σ), noté $\Omega \in G_\sigma[D, F]$. Si, de plus, les chemins ω_i de Ω sont élémentaires (sans “auto-intersections”) et disjoints deux à deux, on dira que Ω est *sans intersections*. L’ensemble des configurations sans intersections de D à F par σ , s’écrit $SI_\sigma[D, F]$. On pose:

$$G[D, F] = \bigcup_{\sigma \in S_k} G_\sigma[D, F] \quad \text{et} \quad SI[D, F] = \bigcup_{\sigma \in S_k} SI_\sigma[D, F].$$

À chaque configuration Ω correspond une unique permutation σ telle que $\Omega \in G_\sigma[D, F]$. Aussi, on définit le *signe* de Ω , $(-1)^\Omega$, comme étant le signe $(-1)^\sigma$ de la permutation σ correspondante. La *longueur* de la configuration Ω est, bien sûr:

$$\ell(\Omega) = \sum_i \ell(\omega_i)$$

Pour une configuration Ω (possiblement réduite à un chemin), $\zeta(\Omega)$ est l'ensemble des circuits $\gamma \in C$ qui coupent un chemin de Ω .

A la plupart de ces structures, nous associons un poids qui prend ses valeurs dans le monoïde des flots que nous définissons ici. On considère A comme l'ensemble A des arcs des graphes G , muni de la relation de concurrence:

$$a \zeta b \text{ ssi } d(a) = d(b), \text{ pour } a, b \in A.$$

Deux arcs sont concurrents s'ils ont le même point de départ; les points d'arrivée n'interviennent pas. Un empilement d'arcs $F \in \mathcal{H}(A)$ s'appelle aussi un *flot*. Cette notion (et la suivante, celle de réarrangements) a été introduite par Cartier et Foata [CF]. Elle leur permet, entre autres, de démontrer le "Master Theorem" de MacMahon.

Définition 5.2.1. Un flot $F \in \mathcal{H}(A)$ est un réarrangement si, pour chaque sommet $s \in S$ du graphe $G = (S, A)$, le nombre d'arcs de F pointant vers s est le même que le nombre d'arcs de F sortant de s . \diamond

L'ensemble des réarrangements sur G , qu'on note $R(A)$, forme un sous-monoïde de $\mathcal{H}(A)$. Étant donné un chemin

$$\omega = (s_0, a_1, \dots, a_m, s_m) : d \rightarrow f,$$

on lui fait correspondre le flot:

$$\rho(\omega) = a_1 \circ \dots \circ a_m \in \mathcal{H}(A),$$

obtenu en détachant, suivant leur ordre d'apparition, les arcs de ω . Connaissant le point de départ $s_0 = d$ et le flot $\rho(\omega)$, on peut reconstituer

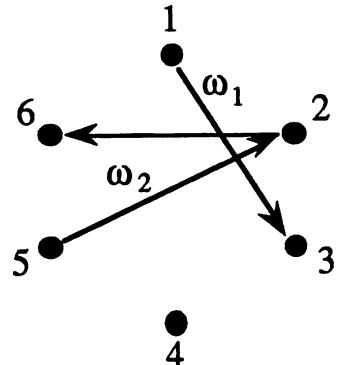


Fig. 5.3 Une configuration sans intersections.

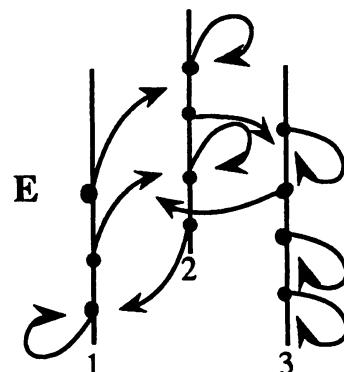


Fig. 5.4 Le flot associé à l'empilement de la figure 5.2

le chemin ω ; il suffit en effet, de trouver l'arc a_1 le plus bas dans $\rho(\omega)$ et d'origine s_0 . Suivre l'arc $a_1:s_0 \rightarrow s_1$, effacer l'arc a_1 et recommencer en prenant comme point de départ s_1 . On note

$$\rho^{-1}(a_1 \circ \dots \circ a_m) = \omega = (s_0, a_1, \dots, a_m, s_m).$$

Dans le cas où le chemin ω est un lacet, $\rho(\omega)$ est un réarrangement. De plus, si ω est un lacet élémentaire, $\rho(\omega)$ ne dépend pas du point de départ de ω . La fonction ρ est donc bien définie pour les circuits élémentaires. La fonction ρ est un poids car, si α et β sont non-concurrents, les points de départ des arcs de α et les points de départ des arcs de β forment deux ensembles disjoints. Aussi, on a $\rho(\alpha)\rho(\beta) = \rho(\beta)\rho(\alpha)$. On peut donc parler, pour un empilement $E \in \mathcal{H}(C)$, du réarrangement $\rho(E)$. On remarquera que ρ définit un poids régulier (voir le chapitre 4) sur l'ensemble des empilements de circuits élémentaires et de chemins (qui, eux ne sont pas nécessairement élémentaires) ayant au plus $|S|$ chemins vides. En particulier, ρ est régulier pour $\mathcal{H}(C)$.

Dans ce contexte, nous considérons une configuration $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_k)$ comme l'empilement de chemins $\omega_1 \circ \dots \circ \omega_k$. Le poids de la configuration Ω est donc:

$$\rho(\Omega) = \rho(\omega_1)\rho(\omega_2)\dots\rho(\omega_k).$$

Étant donné un poids v défini sur les arcs, on construit alors la *matrice d'incidence* $V = (v_{ij})$ du graphe G (relativement à la pondération v) en posant:

$$v_{ij} = \sum v(a),$$

la somme portant sur les arcs a reliant i à j .

§ 5.3 Interprétation des déterminants de l'égalité de Jacobi

On interprétera chaque déterminant de la relation de Jacobi dans le cadre développé jusqu'ici. Remarquons que les déterminants du membre de droite de cette relation sont des polynômes dont les variables sont les entrées de V , ce qui garantit l'existence des séries formelles correspondantes.

Les résultats de cette section s'inspirent des travaux de plusieurs chercheurs. On peut remonter à Coates [Co] et à Harary [Ha] pour trouver une interprétation en terme de circuits du déterminant de la matrice d'incidence V . Suivirent quelques applications allant de l'inversion matricielle (avec Wai-Kai Chen [Wa]) jusqu'au dénombrement d'isomères en chimie (avec Spialter [Sp]). Plus directement, le

théorème 5.3.1, qui suit, généralise légèrement les résultats de Ponstein [Po] et Schwenk [Sc] sur les cofacteurs de la matrice caractéristique I-V.

Théorème 5.3.1. Soit $G = ([n], A)$ un graphe avec pondération v sur les arcs. Soit $V = (v_{ij})$ la matrice d'incidence de G . Soit D et F deux sous-ensembles de $[n]$ de même cardinalité. On a:

$$(-1)^{D+F} \det((I - V)[\bar{F}, \bar{D}]) = \sum_{\Omega \in S([D, F])} (-1)^{\Omega} v(\Omega) \times \sum_{T \in T(C - \zeta(\Omega))} (-1)^{|T|} v(T) . \quad \diamond$$

Démonstration. On construit un nouveau graphe $G^* = ([n], A^*)$ où A^* est obtenu de A de la façon suivante (voir l'exemple qui suit la démonstration).

- 1) On ôte tout arc dont le départ est dans F et tout arc dont la fin est dans D .
- 2) On ajoute des arcs "spéciaux" reliant f_1 à d_1 , f_2 à d_2 , ..., f_k à d_k (où $D = \{d_1, \dots, d_k\}$ et $F = \{f_1, \dots, f_k\}$) et on ajoute des boucles "spéciales" en i (pour $i \notin D \cup F$).

Les arcs non-spéciaux de A^* sont dits "ordinaires".

Sur A^* , on définit un poids w . Pour $a \in A^*$, on pose:

$$w(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ est un arc spécial,} \\ -v(a) & \text{si } a \text{ est un arc ordinaire.} \end{cases}$$

Soit W la matrice d'incidence de G^* pour le poids w . Par développement du déterminant de W suivant les lignes énumérées par F , on a:

$$\det(W) = (-1)^{D+F} \det((I - V)[\bar{F}, \bar{D}]) .$$

D'autre part, on sait que le signe d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est: $(-1)^\sigma = (-1)^n (-1)^{cy(\sigma)}$, où $cy(\sigma)$ est le nombre de cycles de σ . En utilisant cette relation, la définition du déterminant donne:

$$\det(W) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^n (-1)^{cy(\sigma)} \times \prod_{i=1}^n \sum_{\substack{a \in A^* \\ a:i \rightarrow \sigma(i)}} w(a) .$$

Mais les cycles de σ définissent les sommets de circuits élémentaires disjoints: tous les sommets sont utilisés. Les arcs sont donnés par le choix d'un terme particulier dans le développement du produit. Aussi peut-on écrire:

$$\det(W) = \sum_{\substack{T \in T(C^*) \\ \ell(T)=n}} (-1)^{\ell(T)} (-1)^{|T|} w(T) ,$$

où C^* est l'ensemble des circuits élémentaires de G^* .

Chaque empilement trivial T énuméré dans cette somme se décompose en trois parties disjointes. En fait, on peut écrire $T = T_1 \circ T_2 \circ T_3$, où

T_1 est composé exclusivement des boucles spéciales en i (pour $i \notin D \cup F$) qui apparaissent dans T ,

T_2 est composé des circuits de T comportant au moins un arc spécial $f_i \rightarrow d_i$, et

T_3 est composé exclusivement des circuits de T constitués entièrement d'arcs ordinaires (circuits de G).

De plus,

$$(-1)^{\ell(T) + |T|} w(T) = \prod_i (-1)^{\ell(T_i) + |T_i|} w(T_i).$$

Effaçons maintenant tous les arcs spéciaux (boucles incluses). Par construction de A^* et de la valuation w , l'effacement définit une bijection qui préserve les poids. On décrit séparément ce qu'il advient de chacun des empilements T_i .

T_1 disparaît complètement, même au niveau des poids. En effet, comme $\ell(T_1) = |T_1|$, on a $(-1)^{\ell(T_1) + |T_1|} w(T_1) = I$.

T_2 . Le début f_i de l'arc spécial reliant f_i à d_i est la fin d'un chemin élémentaire η_i . Le début de η_i est caractérisé par la fin (disons $d_{\tau(i)}$) de l'arc spécial précédent sur le même circuit. Ceci définit une certaine permutation $\tau \in S_k$. Comme les chemins η_i ne se coupent pas, on a une configuration $\Omega = (\eta_1, \dots, \eta_k) \in SI_\tau[D, F]$. De plus, le nombre de circuits de T_2 est le nombre de cycles de τ . On a donc:

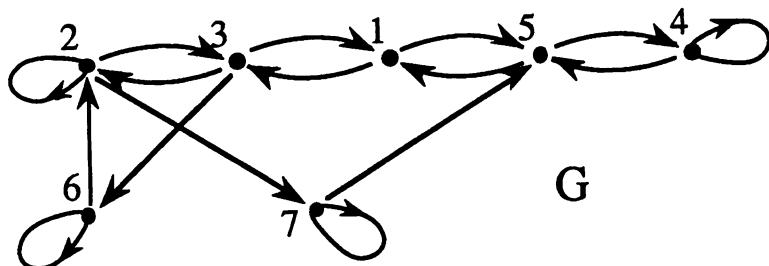
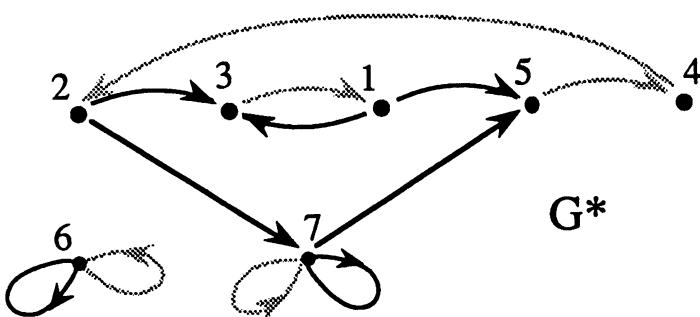
$$(-1)^{\ell(T_2) + |T_2|} w(T_2) = (-1)^{(\ell(\Omega) + k) + cy(\sigma)} w(T) = (-1)^\tau v(\Omega) = (-1)^\Omega v(\Omega).$$

T_3 . Aucun des circuits de T_3 ne coupe Ω ; aussi $T_3 \in \mathcal{T}(C - \zeta(\Omega))$. On a:

$$(-1)^{\ell(T_3) + |T_3|} w(T_3) = (-1)^{|T_3|} v(T_3). \quad \diamond$$

Exemple.

Soit G le graphe de la figure 5.5a. Soit $D = \{1, 2, 4\}$ et $F = \{3, 4, 5\}$. Alors G^* est le graphe de la figure 5.5b (les arcs spéciaux sont représentés par des flèches grises).

Fig. 5.5a) Un graphe G .Fig. 5.5b) Le même, après transformation en G^* .

La matrice \mathbf{W} est:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} & -v_{13} & -v_{15} & \\ & -v_{23} & & -v_{27} \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1-v_{66} \\ & & & -v_{75} & 1-v_{77} \end{bmatrix}$$

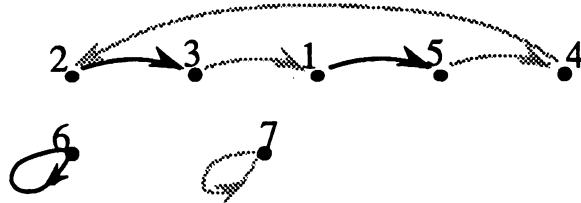
où v_{ij} est le poids (relativement à v) de l'arc ordinaire reliant i à j (s'il existe dans G).

On a:

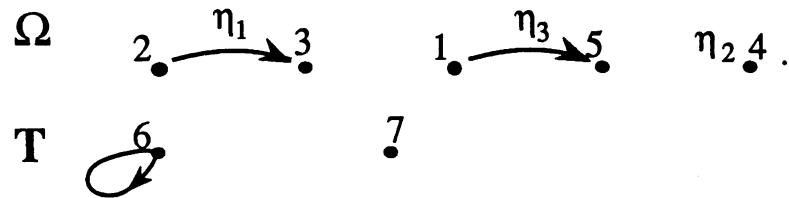
$$\det(\mathbf{W}) = - \begin{vmatrix} -v_{13} & -v_{15} & & \\ -v_{23} & & -v_{27} & \\ & 1-v_{66} & & \\ -v_{75} & & 1-v_{77} & \end{vmatrix} = -\det((\mathbf{I} - \mathbf{V})[1, 2, 6, 7; 3, 5, 6, 7])$$

$$= v_{13}v_{27}v_{66}v_{75} + v_{15}v_{23}v_{66}v_{77} + v_{15}v_{23} - v_{15}v_{23}v_{66} - v_{13}v_{27}v_{75} - v_{15}v_{23}v_{77}.$$

Le terme $-v_{15}v_{23}v_{66}$ correspond, par exemple, à:



(avec $\sigma = (123)$, $|T| = 1$) ou, en enlevant les arcs spéciaux, à:



Corollaire 5.3.2. Soit $G = ([n], A)$ un graphe muni d'une pondération v et de matrice d'incidence V . Alors:

$$\det(I - V) = \sum_{T \in T(C)} (-1)^{|T|} v(T). \quad \diamond$$

Démonstration. Dans le théorème 5.3.1, prendre $D = F = \emptyset$. La seule configuration sans intersection de \emptyset à \emptyset est la configuration vide, de poids 1. \diamond

On ne perd rien en généralité en supposant que le poids v est la fonction ρ . On pourra toujours retrouver des résultats apparemment plus généraux en appliquant ensuite le poids adéquat.

Corollaire 5.3.3. Soit G un graphe de matrice d'incidence V pour le poids ρ . On a:

$$(\det(I - V))^{-1} \times (-1)^{D+F} \det((I - V)[\bar{F}, \bar{D}]) = \sum_{\Omega \in SI[D, F]} (-1)^{\Omega} \times \sum_{\substack{E \in H(C) \\ \max(E) \subseteq \zeta(\Omega)}} \rho(E) \rho(\Omega)$$

et

$$(-1)^{D+F} \det((I - V)[\bar{F}, \bar{D}]) \times (\det(I - V))^{-1} = \sum_{\Omega \in SI[D, F]} (-1)^{\Omega} \times \sum_{\substack{E \in H(C) \\ \min(E) \subseteq \zeta(\Omega)}} \rho(\Omega) \rho(E) . \quad \diamond$$

Démonstration. Comme ρ est un poids régulier sur $T(P)$, on peut appliquer le théorème 4.2.2 (inversion) au théorème 5.3.1 et au corollaire 5.3.2. \diamond

Exemple. On considère le graphe de la figure 5.5. Les sommets 6 et 7 n'interviennent pas. Comme tout couple de sommets de ce graphe détermine au plus un arc, une liste (respectivement: liste circulaire) de sommets détermine au plus un seul chemin (respectivement: circuit).

Soit $D = \{1, 2, 4\}$,
 $F = \{3, 4, 5\}$ et
 $\Omega = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$
où $\eta_1 = (2, 3)$,
 $\eta_2 = (4)$,
 $\eta_3 = (1, 5)$.

Clairement $\Omega \in SI_{(123)}[D, F]$.

Soit $E = [2, 2] \circ [1, 3, 1] \circ [1, 5, 1] \circ [4, 5, 4] \circ [1, 5, 1] \circ [4, 4]$;
on a: $\max(E) = [2, 2] \circ [1, 5, 1] \circ [4, 4]$.

Chacun de ces circuits coupe un chemin η_i , d'où $\max(E) \subseteq \zeta(\Omega)$. Aussi le poids

$$+v_{13}v_{15}^3v_{22}v_{23}v_{31}v_{45}v_{44}v_{51}v_{54}v_{51}$$

de la paire (E, Ω) apparaît-il dans la série formelle associée à

$$(\det(I - V))^{-1} \times (-1)^{D+F} \det((I - V)[\bar{F}, \bar{D}]). \quad \diamond$$

Passons maintenant à l'étude du membre de gauche de la relation de Jacobi. On voit facilement que $(I - V)^{-1} = I + V + V^2 + \dots = (\mu_{ij})$ est une matrice dont l'entrée μ_{ij} représente le poids des chemins reliant i à j :

$$\mu_{ij} = \sum_{\omega: i \rightarrow j} v(\omega).$$

Nous devons glisser un mot sur la définition des déterminants. Jusqu'ici, les déterminants donnaient des séries formelles associées à des flots triviaux; on avait donc la commutativité des facteurs de chaque terme. La situation diffère quand on veut calculer le déterminant de la matrice $(I - V)^{-1}$. On définit, pour une matrice $M = (m_{ij})$ de dimensions $n \times n$:

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma m_{\sigma(1)1} m_{\sigma(2)2} \dots m_{\sigma(n)n};$$

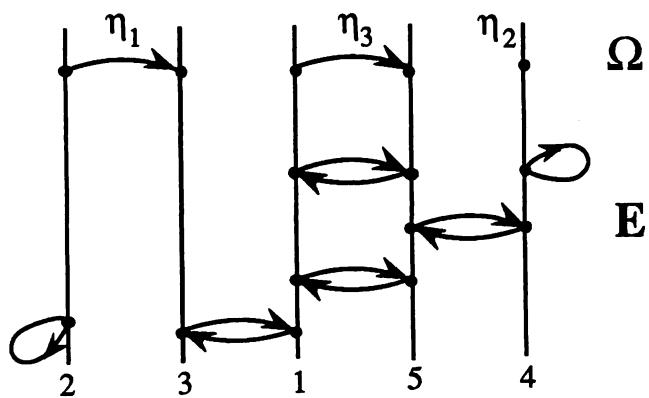


Fig.5.6 Un empilement E surmonté d'une configuration sans intersections Ω , vérifiant $\max(E) \subseteq \zeta(\Omega)$.

ce qui correspond au développement du déterminant suivant les colonnes dans l'ordre naturel.

Proposition 5.3.4. *Soit G un graphe de matrice d'incidence V pour le poids ρ .*

On a

$$\det((I - V)^{-1}[D, F]) = \sum_{\Omega \in G[D, F]} (-1)^\Omega \rho(\Omega). \quad \diamond$$

Démonstration. On a en effet:

$$\det((I - V)^{-1}[D, F]) = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma \prod_{i=1}^k \left(\sum_{\omega: d_{\sigma(i)} \rightarrow f_i} \rho(\omega) \right) = \sum_{\Omega \in G[D, F]} (-1)^\Omega \rho(\Omega). \quad \diamond$$

Pour une démonstration combinatoire du théorème de Jacobi (non-commutatif) il faut démontrer l'égalité:

$$\sum_{\Omega \in G[D, F]} (-1)^\Omega \rho(\Omega) = \sum_{\Omega \in SI[D, F]} (-1)^\Omega \times \sum_{\substack{E \in \mathcal{H}(C) \\ \max(E) \subseteq \zeta(\Omega)}} \rho(E) \rho(\Omega),$$

avec une égalité similaire obtenue en changeant dans le membre de droite, $\max(E)$ pour $\min(E)$ et en permutant $\rho(E)$ et $\rho(\Omega)$. A cause de la symétrie de la situation, on n'examinera que la première égalité telle qu'écrite.

Remarquons que le cas $D = F = \emptyset$ est immédiat. La seule configuration énumérée est la configuration vide. On a alors $\max(E) \subseteq \emptyset$ et $E = \Phi$. L'égalité se réduit à $1 = 1$.

Plus intéressant, le cas $D = \{i\}$, $F = \{j\}$; l'inversion par cofacteurs. Combinatoirement, il s'agit de l'égalité:

$$\sum_{\omega: i \rightarrow j} \rho(\omega) = \sum_{\eta: i \rightarrow j} \sum_{\substack{E \in \mathcal{H}(C) \\ \max(E) \subseteq \zeta(\Omega)}} \rho(E) \rho(\eta),$$

la somme intermédiaire portant sur les chemins élémentaires. Cette égalité suggère l'existence d'une bijection entre les chemins ω reliant i à j et les paires constituées d'un chemin élémentaire $\eta: i \rightarrow j$ et d'un empilement E de circuits élémentaires dont les pièces maximales coupent η . C'est la bijection de Dulucq-Viennot ([Vi2],[Vi3]) que nous étudions dans la prochaine section.

§ 5.4 Bijections de chemins

Étant donné un chemin $\omega: d \rightarrow f$, nous construisons bijectivement un chemin élémentaire $\eta: d \rightarrow f$ et un empilement E de circuits élémentaires vérifiant:

- 1) $\max(E) \subseteq \zeta(\eta)$ et
- 2) $\rho(\omega) = \rho(E)\rho(\eta)$.

On écrira alors $\chi(\omega) = E \circ \eta$.

L'idée est très simple. Partant de d , on parcourt ω . A chaque fois que (ce qui reste de) ω se coupe lui-même, le parcours définit un circuit élémentaire γ . On le coupe, il tombe et s'empile sur E (initialement vide). On continue ainsi jusqu'à la fin de ω . De façon plus précise, on a la définition suivante.

Définition 5.4.1. Soit $\omega = (s_0, a_1, \dots, a_m, s_m)$ un chemin d'un graphe $G = (S, A)$ (avec $s_i \in S$, $a_i \in A$).

- 1) Si $m = 0$, on pose $E = \Phi$, $\eta = (s_0)$, et $\chi(\omega) = E \circ \eta$.
- 2) Si $m > 0$, soit $\omega' = (s_0, a_1, \dots, a_{m-1}, s_{m-1})$. Supposons connu $\chi(\omega') = E' \circ \eta'$.
 - 2.1) Si $s_m \notin \eta'$, on pose $E = E'$, $\eta = \eta'(s_{m-1}, a_m, s_m)$ et $\chi(\omega) = E \circ \eta$.
 - 2.2) Si $s_m \in \eta'$, écrivons $\eta' = (t_0, b_1, \dots, b_r, t_r)$ (pour $t_i \in S$, $b_i \in A$, $t_0 = s_0$ et $t_r = s_{m-1}$); alors il existe un unique entier i ($0 \leq i \leq r$) tel que $s_m = t_i$. On pose alors:

$$\gamma = [t_i, b_{i+1}, \dots, b_r, t_r, a_m, s_m], \quad E = E' \circ \eta,$$

$$\eta = (t_0, b_1, \dots, b_i, t_i) \text{ et } \chi(\omega) = E \circ \eta. \quad \diamond$$

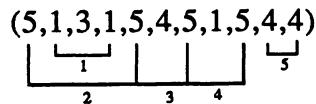
Exemple.

Soit G le graphe de la figure 5.7



Fig. 5.7 Le graphe G .

Considérons le chemin $\omega = (5, 1, 3, 1, 5, 4, 5, 1, 5, 4, 4)$ (encore ici, seuls les sommets sont énumérés). On indique les circuits élémentaires et l'ordre dans lequel ils tombent:



pour former $\chi(\omega) = [1,3,1] \circ [1,5,1] \circ [4,5,4] \circ [1,5,1] \circ [4,4] \circ (5,4)$.

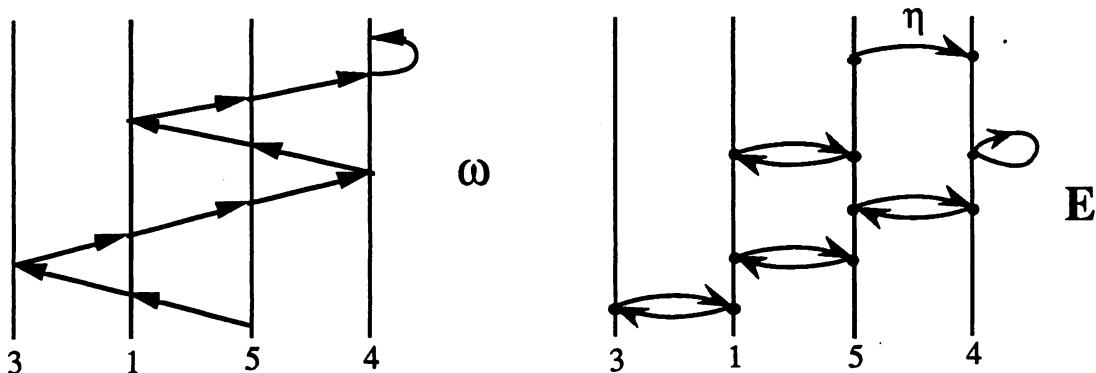


Fig.5.8 Un chemin ω et l'empilement associé $\chi(\omega) = E \circ \eta$.

Lemme 5.4.2. Soit $G = (S, A)$ un graphe. Soit $\omega: d \rightarrow f$ un chemin de G , avec $\chi(\omega) = E \circ \eta$. Alors:

- 1) $\eta: d \rightarrow f$ est un chemin élémentaire;
- 2) $E \in \mathcal{H}(C)$,
- 3) $\max(E) \subseteq \zeta(\eta)$;
- 4) $\rho(\omega) = \rho(E)\rho(\eta)$;
- 5) la suite des arcs de η est une sous-suite de celle des arcs de ω . \diamond

La démonstration se réalise facilement par induction sur $\ell(\omega)$. Le lemme montre en même temps la validité de la définition 5.4.1: l'unicité de l'entier i vérifiant $t_i = s_m$ (partie 2.2) est garantie puisque η' est élémentaire. Cette définition exprime $\chi(\omega)$ en terme de $\chi(\omega')$ où ω' est un facteur gauche propre et maximal de ω . Que peut-on dire pour d'autres facteurs gauches de ω ?

Lemme 5.4.3. Soit $\omega^-: d \rightarrow s$ et $\omega^+: s \rightarrow f$ deux chemins d'un graphe G . Soit $\omega = \omega^- \omega^+$, $\chi(\omega^-) = E^- \circ \eta^-$ et $\chi(\omega) = E \circ \eta$. Alors:

- 1) $\chi(\omega) = \chi(\omega^- \omega^+) = E^- \circ \chi(\eta^- \omega^+)$,
- 2) E^- est un facteur gauche de l'empilement E . \diamond

La preuve est par induction sur $\ell(\omega^+)$. On peut visualiser le résultat en appliquant la description informelle de χ à $\omega^- \omega^+$ jusqu'à leur jonction s .

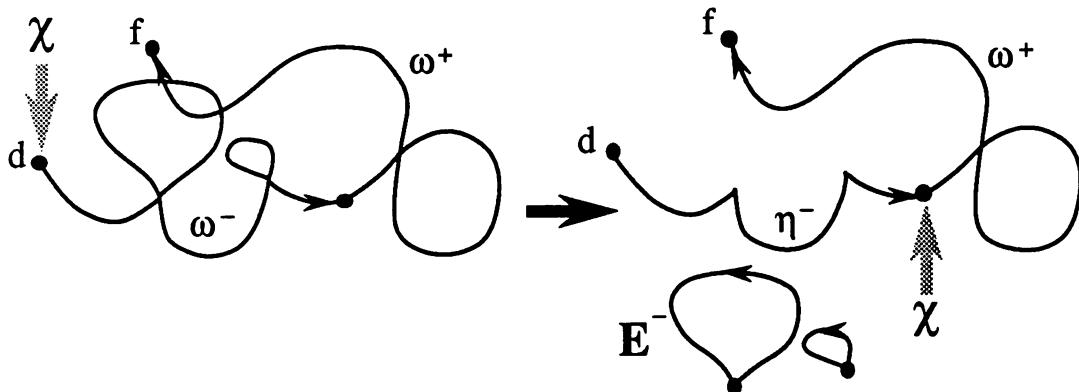


Fig. 5.9 Illustration du lemme 5.4.3.

Malgré l'apparente disparition d'informations lors du calcul de $\chi(\omega) = E \circ \eta$ — on semble perdre l'ordre précis dans lequel les circuits élémentaires “tombent” et on semble perdre le point d'attache de ces circuits — on peut facilement reconstruire le chemin ω connaissant E et η . En fait, comme annoncé au début de cette section, χ est une bijection. Commençons par décrire son inverse.

Définition 5.4.4. Soit G un graphe, C l'ensemble de ses circuits élémentaires, $\eta: d \rightarrow f$ un chemin élémentaire de G et $E \in \mathcal{H}(C)$ vérifiant $\max(E) \subseteq \zeta(\eta)$. On définit $\chi^{-1}(E \circ \eta)$ comme suit.

- 1) Si E est vide et $\eta = (s_0)$, on pose $\chi^{-1}(E \circ \eta) = (s_0)$.
- 2) Si $\ell(E) + \ell(\eta) \geq 1$,
 - 2.1) s'il existe un circuit élémentaire $\gamma \in \max(E)$ vérifiant $\gamma \cap \eta = \{f\}$, on pose $E = E' \circ \gamma$, $\eta' = \eta(t_0, b_1, \dots, b_{m-1}, t_{m-1})$ où $\gamma = [t_0, b_i, \dots, b_m, t_m]$ avec $t_0 = t_m = f$;
 - 2.2) autrement, $\ell(\eta) \geq 1$; on pose $E' = E$ et $\eta' = (t_0, b_1, \dots, b_{m-1}, t_{m-1})$ où $\eta = [t_0, b_1, \dots, b_m, t_m]$.

Dans ces deux derniers cas, on pose:

$$\chi^{-1}(E \circ \eta) = \chi^{-1}(E' \circ \eta')(t_{m-1}, b_m, t_m). \diamond$$

Remarquons que $\ell(E) + \ell(\eta) > \ell(E') + \ell(\eta')$. Le prochain lemme montre que χ^{-1} est bien définie.

Lemme 5.4.5. Dans le contexte de la définition 5.4.4, on remarque que:

- 1) si on se trouve dans le cas 2.2 de la définition, on a bien $\ell(\eta) \geq 1$;
- 2) $\eta': d \rightarrow t_{m-1}$ est élémentaire;
- 3) $\max(E') \subseteq \zeta(\eta')$;
- 4) $\chi^{-1}(E \circ \eta): d \rightarrow f$. \diamond

Démonstration.

- 1) Comme $\ell(E) + \ell(\eta) \geq 1$, on a le résultat si E est vide. Supposons le contraire; soit $\gamma \in \max(E)$. On a $\gamma \cap \eta \neq \{f\}$. L'intersection n'est pas vide puisque $\gamma \in \max(E) \subseteq \zeta(\eta)$. Donc $\gamma \cap \eta$ contient au moins deux sommets. Il en est de même pour η .
- 2) et 3) Simple induction.
- 4) Cette affirmation découle de 2) et de la définition. \diamond

On peut alors montrer aisément (toujours par induction) que χ^{-1} est bien l'inverse de χ . Nous donnerons plus tard une autre description de χ^{-1} qui permet de "lire" le chemin ω directement à partir de $E \circ \eta$.

Théorème 5.4.6. *La fonction χ est une bijection de l'ensemble des chemins d'un graphe G vers l'ensemble des pyramides $E \circ \eta$ où η est un chemin élémentaire et où $E \in \mathcal{H}(C)$.* \diamond

Remarque. Demander que $E \circ \eta$ soit une pyramide équivaut à demander que $\max(E) \subseteq \zeta(\eta)$. On remarquera aussi que χ définit un poids régulier sur les chemins (vers les empilements de chemins et de circuits élémentaires).

Proposition 5.4.7. *Soit $\omega = (s_0, a_1, \dots, a_m, s_m)$ un chemin du graphe G . On a:*

$$\rho(\chi(\omega)) = \rho(\omega). \quad \diamond$$

Démonstration. Induction sur $\ell(\omega)$. Si $\ell(\omega) = 0$, l'énoncé est clair. Supposons que $\ell(\omega) \geq 1$. Soit $\omega' = (s_0, a_1, \dots, a_{m-1}, s_{m-1})$ avec $\chi(\omega') = E' \circ \eta'$ et $\rho(\omega') = \rho(\chi(\omega')) = \rho(E') \circ \rho(\eta')$. Si $s_m \notin \eta'$, alors $\chi(\omega) = E' \circ \eta'(s_{m-1}, a_m, s_m)$ et $\rho(\chi(\omega)) = \rho(E') \circ \rho(\eta') \circ a_m = \rho(\omega') \circ a_m = \rho(\omega)$. Si $s_m \in \eta'$, alors, d'après la définition de χ , $\chi(\omega) = E' \circ \gamma \circ \eta$ où $\rho(\eta') \circ a_m = \rho(\gamma) \circ \rho(\eta)$. Ainsi $\rho(\chi(\omega)) = \rho(E') \circ \rho(\gamma) \circ \rho(\eta) = \rho(E') \circ \rho(\eta') \circ a_m = \rho(\omega)$. \diamond

Exemple. Examinez le graphe et le chemin de la figure 5.10.

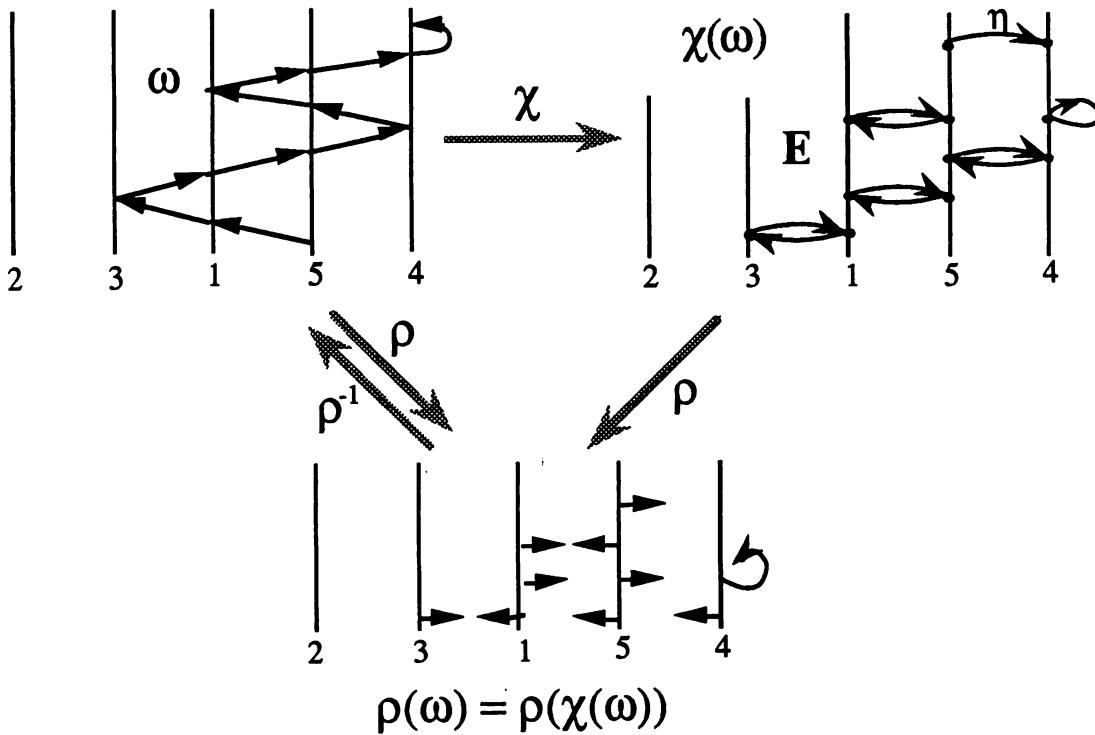


Fig. 5.10 Relations entre un chemin, l'empilement associé et le flot associé.

Finalement, on donne la description annoncée de χ^{-1} (due à J. Bourret [Bo]) ainsi qu'une esquisse de démonstration.

Proposition 5.4.8. Soit $\eta = (s_0, a_1, \dots, a_m, s_m)$ un chemin élémentaire et $E \in \mathcal{H}(C)$ vérifiant $\max(E) \subseteq \zeta(\eta)$. On obtient $\chi^{-1}(E \circ \eta)$ de la façon suivante.

Partant de s_0 , trouver l'arc (appartenant à η ou à un circuit de E) le plus bas d'origine s_0 ; effacer cet arc en retenant son point d'arrivée s_1 . Recommencer avec ce qui reste de η et de E en partant de s_1 , etc. La suite des arcs effacés donne la suite des arcs de ω . \diamond

En fait, on réalise en une seule étape le passage:

$$E \circ \eta \xrightarrow{\rho} \rho(E \circ \eta) = \rho(\omega) \xrightarrow{\rho^{-1}} \omega.$$

§ 5.5 Involutions de chemins

Nous possédons maintenant tous les outils nécessaires à l'élaboration de la preuve combinatoire du théorème de Jacobi. Pour commencer, on examine le cas

particulier (implicite dans [GV] et [Vi2]) où le graphe G ne comporte aucun circuit. Dans ce cas, le seul empilement de circuits possible est l'empilement vide; de plus, tous les chemins de G sont automatiquement élémentaires. L'égalité de Jacobi s'écrit alors:

$$\sum_{\Omega \in G[D,F]} (-1)^{\Omega} \rho(\Omega) = \sum_{\Omega \in SI[D,F]} (-1)^{\Omega} \rho(\Omega).$$

Les deux membres de cette égalité énumèrent des configurations de chemins élémentaires. Cependant, à gauche, deux chemins d'une même configuration peuvent se couper, contrairement à ceux énumérés à droite.

Puisque $SI[D,F] \subseteq G[D,F]$, il suffit de trouver une involution sans points fixes sur $G[D,F] - SI[D,F]$ qui préserve les poids en changeant le signe des configurations, comme l'ont réalisé Gessel et Viennot. A quelques variantes de notation près, leur involution peut se décrire comme suit. Étant donné une configuration $\Omega \in G[D,F] - SI[D,F]$ de chemins élémentaires, on repère deux chemins η_i et η_j qui se coupent (la paire d'indices (i,j) s'appelle le pivot de Ω). On échange alors les parties de η_i et η_j allant de leur point de départ à leur premier point de rencontre. Les chemins obtenus, notés $\bar{\eta}_i$ et $\bar{\eta}_j$, sont élémentaires, sont composés des mêmes arcs que η_i et η_j et ont échangé leur point de départ. La configuration résultante $\bar{\Omega}$ possède donc un signe contraire à celui de Ω . Une bonne définition du "pivot", qui indique quels chemins η_i et η_j seront transformés est essentielle pour que le tout fonctionne bien. Le pivot de $\bar{\Omega}$ doit être le même que celui de Ω .

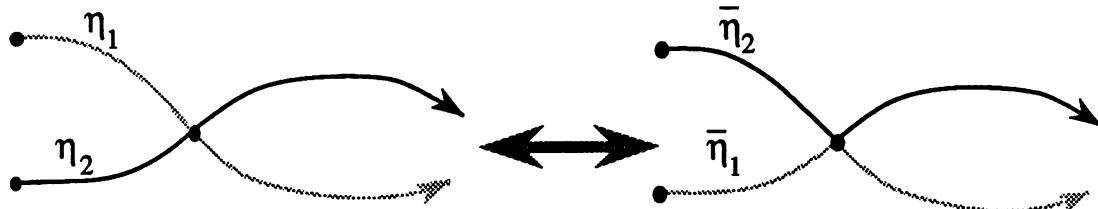


Fig.5.11 L'involution de Gessel-Viennot.

Revenons maintenant au cas général où le graphe G peut posséder des circuits. Les configurations de $G[D,F]$ ne sont plus nécessairement constituées de chemins élémentaires. Alors, comment peut-on définir le premier point de rencontre de deux chemins? La figure 5.12 montre la difficulté d'une telle entreprise. Nous devrons opter pour une construction différente.

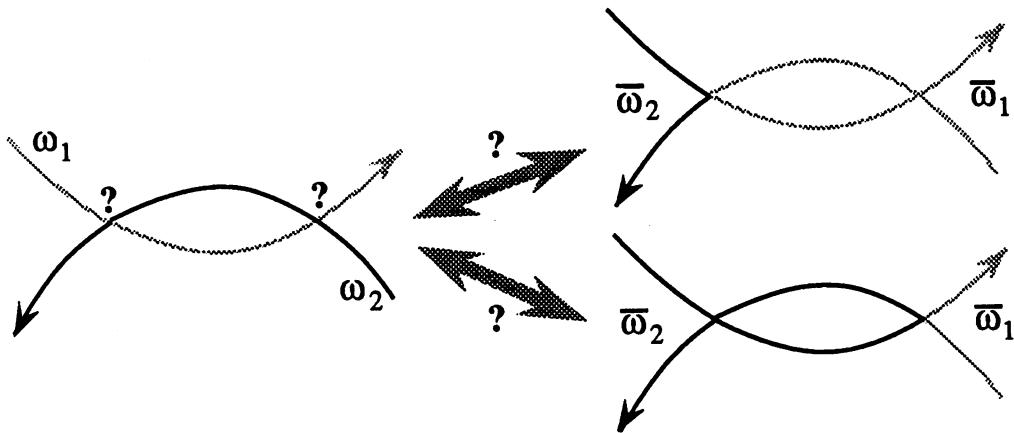


Fig. 5.12

Partant du graphe $G = (S, A)$, on construit un graphe $G^* = (S^*, A^*)$ où:

$$S^* = S \cup \{0\} = \{0, \dots, n\},$$

$$A^* = A \cup \{(i,j)^* \text{ tels que } i, j \in S^*\},$$

les arcs $(i,j)^*$ étant des arcs “spéciaux” (et distincts de ceux, “arc ordinaires”, de A). Pour l’instant, il n’est pas nécessaire de définir le poids de ces arcs spéciaux. Un chemin (ou circuit) est spécial s’il comporte un ou des arcs spéciaux. On note C^* l’ensemble des circuits élémentaires (spéciaux ou non) de G^* muni de la relation de concurrence habituelle.

Définition 5.5.1. Soit $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_k) \in G_\sigma[D, F]$ une configuration du graphe G .

On note Ω^* le chemin:

$$\Omega^* = \omega_0 * \omega_1 * \dots * \omega_k = (0, d_{\sigma(1)})^* \omega_1 (f_1, d_{\sigma(2)})^* \omega_2 \dots \omega_{k-1} (f_{k-1}, d_{\sigma(k)})^* \omega_k,$$

où $\omega_0 = (0)$ est le chemin nul en 0. ♦

Pour une configuration donnée, la notation $\omega_0 * \dots * \omega_k$ ne comporte aucune ambiguïté, les points de départ et d’arrivée de chaque chemin ω_i étant connus. Que va-t-il se passer si on applique la bijection de Dulucq-Viennot au chemin Ω^* ? On traite séparément deux cas, décrits par la définition suivante.

Définition 5.5.2. Soit ω un chemin de G^* avec $\chi(\omega) = E \circ \eta$. Si $E \in \mathcal{H}(C)$, on dit que ω est un bon chemin. Dans le cas contraire ($E \in \mathcal{H}(C^*) - \mathcal{H}(C)$), on dit que ω est un mauvais chemin. On reporte cette terminologie aux configurations Ω en considérant le chemin Ω^* . L’ensemble des mauvaises configurations de D à F se note $G^*[D, F]$. ♦

Remarque. D'après le lemme 5.4.3, il est clair que tout facteur gauche ω^- d'un bon chemin $\omega = \omega^- \omega^+$ est lui-même un bon chemin.

Soit $\Omega \in G_{\sigma}[D,F]$ une bonne configuration. Soit $\chi(\Omega^*) = E \circ \eta$. Les arcs spéciaux se retrouvent tous dans η . Par l'énoncé 5) du lemme 5.4.2, ces arcs spéciaux apparaissent dans le même ordre autant dans η que dans Ω^* . Le départ de η étant 0, le premier arc est $(0, d_{\sigma}(1))^* = (f_0, d_{\sigma}(1))^*$. Aussi, peut-on écrire

$$\eta = 0 * \eta_1 * \dots * \eta_k,$$

pour certains chemins $\eta_i : d_{\sigma(i)} \rightarrow f_i$. De plus, comme η est élémentaire, les chemins η_i sont eux-mêmes élémentaires et disjoints. Cette construction décrit une bijection.

Lemme 5.5.3. Soit $\Omega \in G_{\sigma}[D,F]$ une bonne configuration du graphe G^* , alors $\chi(\Omega^*) = E \circ H^*$ pour une certaine configuration $H \in SI_{\sigma}[D,F]$ et un certain empilement $E \in \mathcal{H}(C)$ vérifiant $\max(E) \subseteq \zeta(H)$. Inversement, soit $H \in SI_{\sigma}[D,F]$ et $E \in \mathcal{H}(C)$ avec $\max(E) \subseteq \zeta(H)$. Alors $\Omega^* = \chi^{-1}(E \circ H^*)$ fournit une bonne configuration $\Omega \in G_{\sigma}[D,F]$. De plus, on a $\rho(\Omega) = \rho(E)\rho(H)$. \diamond

Exemple.

En se référant à la figure 5.13, ci-contre, soit:

$$D = \{1, 2, 4\} \text{ et } F = \{3, 4, 5\},$$

$$\omega_1 = (2, 2, 3, 1, 3),$$

$$\omega_2 = (4, 5, 1, 5, 4, 4),$$

$$\omega_3 = (1, 5, 1, 5) \text{ et}$$

$$\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in G_{(123)}[D,F].$$

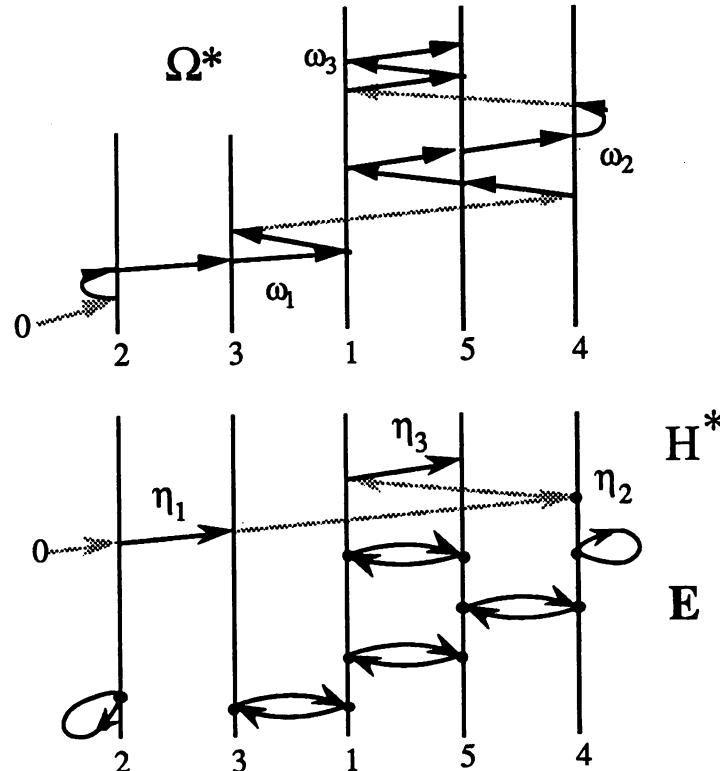


Fig 5.13 Un bon chemin et l'empilement associé.

On a

$$\Omega^* = (0*2, 2, 3, 1, 3*4, 5, 1, 5, 4, 4*1, 5, 1, 5)$$

(on utilise la notation de la définition 5.5.1 et on élimine les parenthèses inutiles)

et $\chi(\Omega^*) = [2,2] \circ [1,3,1] \circ [1,5,1] \circ [4,5,4] \circ [4,4] \circ [1,5,1] \circ (0*2, 3*4*1, 5).$

Donc $E = [2,2] \circ [1,3,1] \circ [1,5,1] \circ [4,5,4] \circ [4,4] \circ [1,5,1],$
 $H^* = (0*2, 3*4*1, 5).$

D'où $\eta_1 = (2,3), \eta_2 = (4) \text{ et } \eta_3 = (1,5).$

On a bien $H = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \Omega_{(123)}[D, F].$ Remarquons aussi que les circuits de $\max(E) = [2,2] \circ [4,4] \circ [1,5,1]$ touchent $H.$

Le lemme 5.5.3 montre que les bonnes configurations correspondent aux paires (E, Ω) énumérées par le membre de droite de l'égalité de Jacobi. Pour démontrer celle-ci, il suffit donc d'éliminer les mauvaises configurations. Nous allons construire une involution qui les tuera. Pour la définir nous devons caractériser le plus petit mauvais facteur gauche du (mauvais) chemin $\Omega^*.$

Lemme 5.5.4. *Soit $\omega: d \rightarrow f$ un mauvais chemin du graphe $G^*.$ Soit $\omega^-: d \rightarrow s$ un mauvais facteur gauche de $\omega = \omega^- \omega^+.$ Alors:*

*ω^- est de longueur minimale ssi $\chi(\omega^-) = E^- \circ \gamma \circ \eta^-$ où $E^- \in \mathcal{H}(C),$
 $\gamma \in C^* - C$ est un circuit spécial et où
 $\gamma \cap \eta^- = \{s\}.$ \diamond*

Démonstration. Supposons que ω^- soit de longueur minimale. Comme ω est mauvais, $\ell(\omega^-) \geq 1.$ Soit ω' le facteur gauche propre maximal de ω^- , écrivons $\omega^- = \omega'(s', a, s)$ (pour certains $s' \in S, a \in A$). Soit $\chi(\omega') = E^- \circ \eta'.$ Comme ω' est bon, on a $E^- \in \mathcal{H}(C).$ Mais $\chi(\omega^-) = E^- \circ \chi(\eta'(s', a, s)).$ Comme ω^- est mauvais, le sommet s doit être un sommet de η' , ce qui définit un chemin élémentaire $\eta^-: d \rightarrow s$, suivi d'un circuit élémentaire γ passant par s et tel que $\gamma \cap \eta^- = \{s\}.$ Ce circuit doit être spécial.

Inversement, si $\chi(\omega^-) = E^- \circ \gamma \circ \eta^-$ où E^- , γ et η^- répondent aux conditions du lemme, alors la définition de χ^{-1} montre que $\omega^- = \chi^{-1}(E^- \circ \eta')(s', a, s)$ pour un certain chemin élémentaire η' joignant d à un sommet s' et pour un certain arc $a \in A^*$ (avec $a: s' \rightarrow s$). Donc $\chi^{-1}(E^- \circ \eta')$ est bon et ω^- est minimal. \diamond

Prenons une mauvaise configuration $\Omega \in G_\sigma^*[D,F]$. Soit ω^- le plus petit mauvais facteur gauche de $\Omega^* = \omega = \omega^-\omega^+$. On peut écrire: $\chi(\omega^-) = E^- \circ \gamma \circ \eta^-$ où $E^- \circ \gamma \circ \eta^-$ satisfait les conditions du lemme 5.5.4. Le circuit γ contient donc au moins un arc spécial. Il en est de même pour le chemin η^- (au moins l'arc $(0, d_{\sigma(1)})^*$). Nous allons associer à $E^- \circ \gamma \circ \eta^-$ une structure semblable via une involution ι telle que $\iota(E^- \circ \gamma \circ \eta^-) = E^- \circ \iota(\gamma \circ \eta^-) = E^- \circ \bar{\gamma} \circ \bar{\eta}^-$. Remarquons que l'empilement d'arc $\rho(\gamma \circ \eta^-)$ est trivial puisque $\gamma \cap \eta^- = \{s\}$ et que le sommet s n'apparaît dans η^- qu'à la fin.

Définition 5.5.5. Soit $\Omega \in G_\sigma^*[D,F]$ une mauvaise configuration du graphe G .

Soit ω^- le plus petit mauvais facteur gauche de $\Omega^* = \omega^-\omega^+$, avec $\chi(\omega^-) = E^- \circ \gamma \circ \eta^-$ comme défini au lemme 5.5.4. Soit $(f_{i-1}, d_{\sigma(i)})^*$ le dernier arc spécial de η^- (le plus rapproché de s) et $(f_{j-1}, d_{\sigma(j)})^*$ le dernier arc spécial de γ considéré comme un lacet en s . (On a nécessairement $i < j$). Soit $\tau \in \mathfrak{S}_k$ la permutation $\sigma \circ (i \ j)$, où $(i \ j)$ est la transposition de i et de j .

Dans $\rho(\gamma \circ \eta^-)$, on remplace l'arc $(f_{i-1}, d_{\sigma(i)})^*$ par l'arc $(f_{i-1}, d_{\tau(i)})^* = (f_{i-1}, d_{\sigma(j)})^*$ et l'arc $(f_{j-1}, d_{\sigma(j)})^*$ par l'arc $(f_{j-1}, d_{\tau(j)})^* = (f_{j-1}, d_{\sigma(i)})^*$ (voir la figure 5.14).

Cette opération donne un empilement d'arcs $\bar{\gamma} \circ \bar{\eta}^-$ qui détermine un unique chemin élémentaire $\bar{\eta}^- : 0 \rightarrow s$ et un unique circuit élémentaire spécial $\bar{\gamma}$ qui vérifient $\bar{\gamma} \circ \bar{\eta}^- = \{s\}$. On pose alors

$$\begin{aligned}\iota(E^- \circ \gamma \circ \eta^-) \\ = E^- \circ \iota(\gamma \circ \eta^-) \\ = E^- \circ \bar{\gamma} \circ \bar{\eta}^-. \diamond\end{aligned}$$

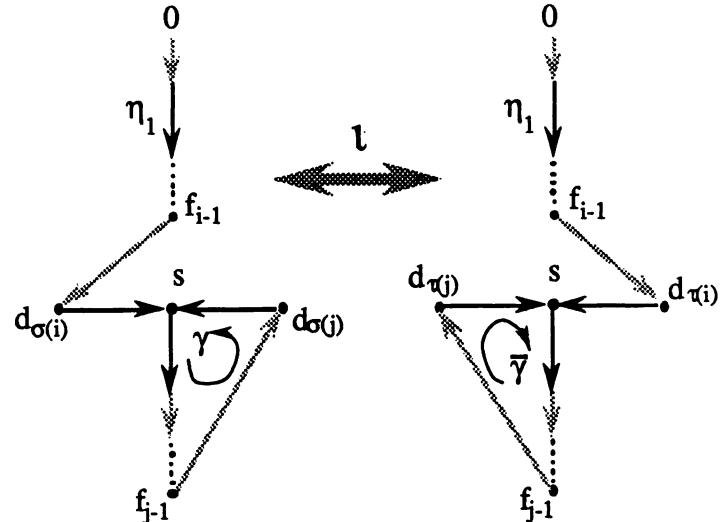


Fig.5.14 L'involution ι .

Remarques.

- 1) La fonction ι est en fait définie sur les structures $\gamma \circ \eta^-$ où γ est un circuit élémentaire spécial et où $\eta^- : 0 \rightarrow s$ est un chemin élémentaire spécial vérifiant

$\gamma \cap \eta^- = \{s\}$. Il est clair que $\bar{\gamma} \circ \bar{\eta}^-$ est une structure de même type et que $\iota(\bar{\gamma} \circ \bar{\eta}^-) = \iota(\iota(\gamma \circ \eta^-)) = \gamma \circ \eta^-$.

- 2) Si on donne un poids 1 aux arcs spéciaux, on a $\rho(\gamma \circ \eta^-) = \rho(\bar{\gamma} \circ \bar{\eta}^-)$.
- 3) Comme les mêmes sommets apparaissent dans $\bar{\gamma} \circ \bar{\eta}^-$ et dans $\gamma \circ \eta^-$, on a $\max(E^-) \subseteq \zeta(\bar{\gamma} \circ \bar{\eta}^-) = \zeta(\gamma \circ \eta^-)$. Comme $\bar{\gamma} \circ \bar{\eta}^- = \{s\}$, on a $\max(E^- \circ \bar{\gamma}) \subseteq \zeta(\bar{\eta}^-)$. Aussi, on peut parler du chemin $\chi^{-1}(E^- \circ \bar{\gamma} \circ \bar{\eta}^-)$.
- 4) Les départs des arcs spéciaux de $\omega^- = \chi^{-1}(E^- \circ \gamma \circ \eta^-)$ et de $\chi^{-1}(E^- \circ \bar{\gamma} \circ \bar{\eta}^-)$ sont les mêmes et apparaissent dans le même ordre ($0 = f_0 < f_1 < \dots < f_{j-1}$).
- 5) Comme $\chi^{-1}(E^- \circ \bar{\gamma} \circ \bar{\eta}^-)$ joint le sommet 0 au sommet s et comme ω^+ joint s à f_k , on peut poser $\bar{\omega} = \chi^{-1}(E^- \circ \bar{\gamma} \circ \bar{\eta}^-) \omega^+$. Aussi, on pourra définir:

$$\bar{\omega} = (0, d_{\tau(1)})^* \bar{\omega}_1 (f_1, d_{\tau(2)})^* \bar{\omega}_2 \dots \bar{\omega}_{k-1} (f_{k-1}, d_{\tau(k)})^* \bar{\omega}_k,$$

pour certains (bons) chemins $\bar{\omega}_i : d_{\tau(i)} \rightarrow f_i$.

Définition 5.5.6. Soit $\Omega \in G_\sigma^*[D, F]$ une mauvaise configuration du graphe G.

Soit ω^- le plus petit mauvais facteur gauche de $\Omega^* = \omega = \omega^- \omega^+$.

On pose $\bar{\Omega}^* = \bar{\omega} = ((\chi^{-1} \circ \iota \circ \chi)(\omega^-)) \omega^+$ où $\bar{\Omega}^*$ est une configuration de $G_\tau[D, F]$ pour une permutation $\tau \in S_k$ obtenue de σ par une transposition. On pose aussi $\psi(\Omega) = \bar{\Omega}$. \diamond

Exemple.

Toujours le même graphe. On prend $D = \{1, 2, 4\}$, $F = \{3, 4, 5\}$. La configuration Ω est composée des chemins:

$$\omega_1 = (2, 2, 3) : d_2 \rightarrow f_1,$$

$$\omega_2 = (4, 5, 1, 5, 4, 4) : d_3 \rightarrow f_2,$$

$$\omega_3 = (1, 5, 1, 3, 1, 5) : d_1 \rightarrow f_3.$$

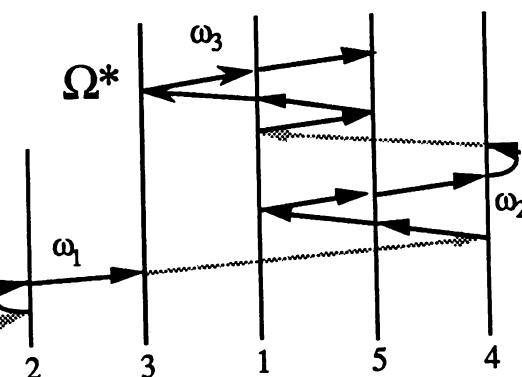


Fig. 5.15a)

Aussi $\Omega \in G_{(123)}[D, F]$.

On a $\Omega^* = (0*2, 2, 3*4, 5, 1, 5, 4, 4*1, 5, 1, 3, 1, 5)$,

d'où $\omega^- = (0*2, 2, 3*4, 5, 1, 5, 4, 4*1, 5, 1, 3)$ (fig. 5.15a)

et $\chi(\omega^-) = [2,2] \circ [1,5,1] \circ [4,5,4] \circ [4,4] \circ [1,5,1] \circ [3*4*1,3] \circ (0*2,3)$ (fig. 5.15b).

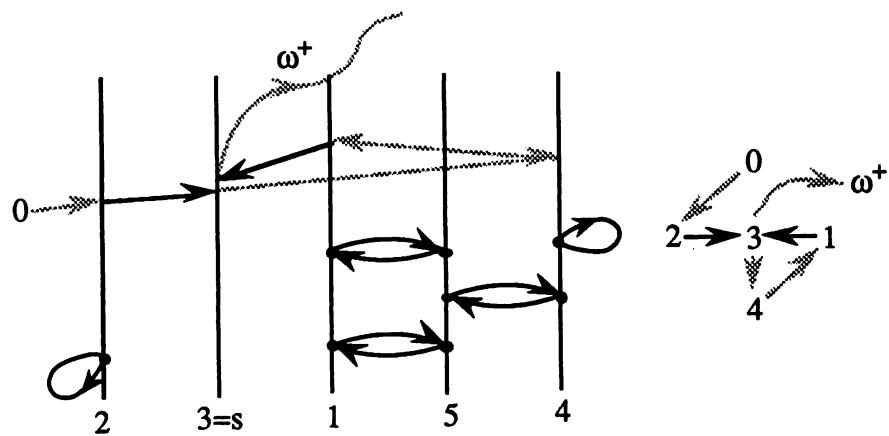


Fig. 5.15b)

On a donc

$$\iota(\chi(\omega^-)) = [2,2] \circ [1,5,1] \circ [4,5,4] \circ [4,4] \circ [1,5,1] \circ [3*4*2,3] \circ (0*1,3) \quad (\text{fig. 5.15c})$$

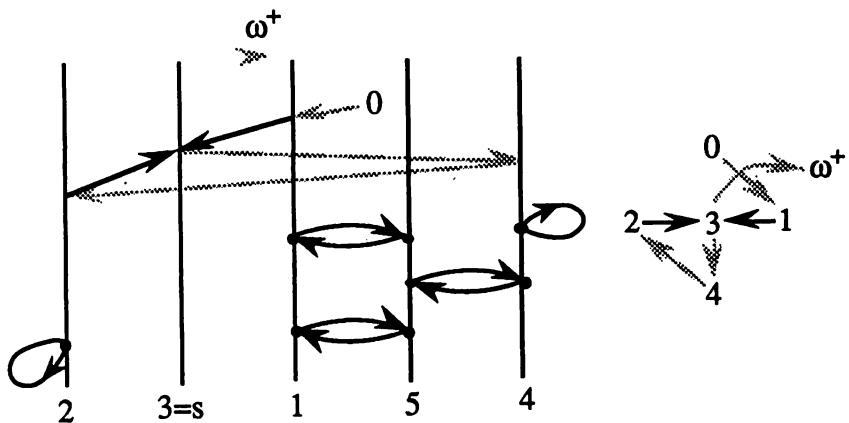


Fig. 5.15c)

$$\text{et } (\chi^{-1} \circ \iota \circ \chi)(\omega^-) \omega^+ = (0*1,5,1,5,4,5,1,3*4,4*2,2,3)(3,1,5) = \bar{\Omega}^* \quad (\text{fig. 5.15d}).$$

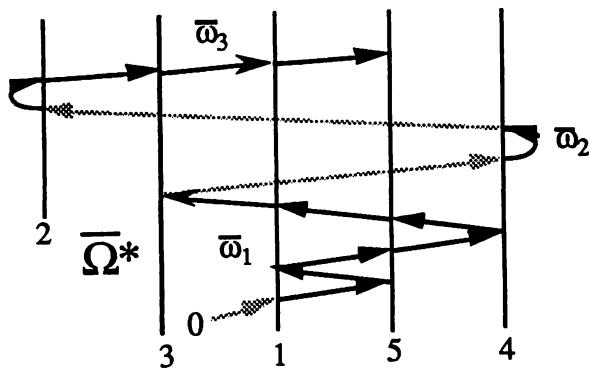


Fig. 5.15d)

Ainsi $\bar{\Omega} = \psi(\Omega) = (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3)$ où
 $\bar{\omega}_1 = (1, 5, 1, 5, 4, 5, 1, 3) : d_1 \rightarrow f_1,$
 $\bar{\omega}_2 = (4, 4) : d_3 \rightarrow f_2,$
 $\bar{\omega}_3 = (2, 2, 3, 1, 5) : d_2 \rightarrow f_3.$

Donc $\bar{\Omega} \in G_{(1)(23)}[D, F]$.

De façon imagée, pour calculer $\psi(\Omega)$, on procède comme suit.

- 1) Relier 0 et les chemins de Ω dans l'ordre par des arcs spéciaux pour former Ω^* .
- 2) Parcourir Ω^* en coupant les circuits ordinaires jusqu'à la rencontre d'un premier circuit spécial qui se ferme en un certain sommet s.
- 3) Permuter les arrivées des deux arcs spéciaux qui mènent directement à s.
- 4) Reculer en recollant les circuits ordinaires.
- 5) Oter les arcs spéciaux.

Théorème 5.5.7. Soit $\Omega \in G^*[D, F]$ une mauvaise configuration du graphe G. Soit $\bar{\Omega} = \psi(\Omega)$. Alors:

- 1) $\bar{\Omega}$ est une mauvaise configuration,
- 2) $(-1)\Omega = -(-1)\bar{\Omega}$,
- 3) $\rho(\Omega) = \rho(\bar{\Omega})$,
- 4) $\psi(\bar{\Omega}) = \Omega$. \diamond

Démonstration. On utilise toujours la même notation qu'à la définition 5.5.6.

- 1) La configuration $\bar{\Omega}^*$ est mauvaise puisque $\chi(\bar{\Omega}^*) = E^- \circ \bar{\gamma} \circ \chi(\bar{\eta}^- \omega^+)$ où $\bar{\gamma} \in C^* - C$.
- 2) Les permutations associées à Ω et $\bar{\Omega}$ diffèrent par une transposition.
- 3) On a:

$$\rho(\Omega^*) = \rho(\omega^- \omega^+) = \rho(\chi(\omega^-)) \circ \rho(\omega^+) = \rho(E^-) \circ \rho(\gamma \circ \eta^-) \circ \rho(\omega^+).$$

De même,

$$\rho(\bar{\Omega}^*) = \rho(E^-) \circ \rho(\bar{\gamma} \circ \bar{\eta}^-) \circ \rho(\omega^+).$$

Comme $\rho(\gamma \circ \eta^-)$ et $\rho(\bar{\gamma} \circ \bar{\eta}^-)$ sont égaux à des arcs spéciaux près, on obtient, après les avoir effacés: $\rho(\Omega) = \rho(\bar{\Omega})$.

- 4) Par le lemme 5.5.4, $(\chi^{-1} \circ \iota \circ \chi)(\omega^-)$ est le plus petit mauvais facteur gauche de $\bar{\Omega}^*$. Si $\bar{\Omega} = \psi(\bar{\Omega})$, on a $\bar{\Omega}^* = ((\chi^{-1} \circ \iota \circ \chi) \circ (\chi^{-1} \circ \iota \circ \chi)(\omega^-)) \omega^+ = \omega^- \omega^+ = \Omega^*$; d'où $\bar{\Omega} = \Omega$. \diamond

Nous avons donc démontré le théorème de Jacobi.

Théorème 5.5.8. *Soit G un graphe dont la matrice d'incidence est V . Alors:*

$$\begin{aligned} \det((I - V)^{-1}[D, F]) &= \sum_{\Omega \in G[D, F]} (-1)^\Omega \rho(\Omega) \\ &= \sum_{\Omega \in SI[D, F]} (-1)^\Omega \times \sum_{\substack{E \in \mathcal{H}(C) \\ \max(E) \subseteq \zeta(\Omega)}} \rho(E) \circ \rho(\Omega) \\ &= (-1)^{D+F} (\det(I - V))^{-1} \det((I - V)[\bar{F}, \bar{D}]). \quad \diamond \end{aligned}$$

Ceci, d'ailleurs, suggère la possibilité de définir ψ en terme de flot; on y parvient sans trop de difficulté. On peut aussi trouver une version “explicite” de la fonction ψ , version qui ne fait pas appel aux arcs spéciaux. Par ailleur, l'auteur [Ln] a déjà obtenu, dans un travail plus ancien, une autre version qui se ramène à la fonction ψ quand on traite une configuration à deux chemins. Cette version souffre de deux défauts: on ne voit pas pourquoi sa description produit une involution (sauf force d'arguments), et on doit définir un pivot (compliqué) pour l'appliquer aux configurations à plus de deux chemins.

Pour terminer, quelques remarques sur le choix de la définition du déterminant en variables non-commutatives. Si on adopte un développement suivant les lignes, nous devons changer parallèlement les définitions de $SI_\sigma[D, F]$ et de $G_\sigma[D, F]$: le chemin ω_i d'une configuration $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_k)$ relie alors d_i à $f_{\sigma(i)}$. On ne calcule plus $\chi(\omega)$ en avançant sur ω , mais en partant de la fin, en reculant et en laissant “flotter” les circuits qui se détachent au lieu de les laisser tomber. Les entrées de la matrice V sont concurrentes non plus suivant les lignes mais suivant les colonnes. Autrement dit, la relation de concurrence sur les arcs dépend de la fin des arcs plutôt que de leur début. Moyennant ces modifications , on a le théorème suivant.

Théorème 5.5.9. *Soit G un graphe dont la matrice d'incidence est V . On a, en calculant le déterminant suivant les lignes plutôt que suivant les colonnes:*

$$\begin{aligned} \det((I - V)^{-1}[D, F]) &= \sum_{\Omega \in G[D, F]} (-1)^\Omega \rho(\Omega) \\ &= \sum_{\Omega \in SI[D, F]} (-1)^\Omega \rho(\Omega) \times \sum_{\substack{E \in \mathcal{H}(C) \\ \max(E) \subseteq \zeta(\Omega)}} \rho(E) \\ &= (-1)^{D+F} \det((I - V)[\bar{F}, \bar{D}]) (\det(I - V))^{-1}. \quad \diamond \end{aligned}$$

Chapitre 6.

Transférabilité

§ 6.1 Introduction

Les résultats de la section 4.2 font apparaître une sorte de dualité entre sous-ensembles d'empilements. Le prototype de cette dualité s'exprime clairement dans l'énoncé du théorème 4.2.1:

$$\sum_{E \in \mathcal{H}(P)} E \times \sum_{T \in \mathcal{T}(P)} (-1)^{|T|} T = I$$

ou de sa généralisation, le théorème 4.2.2:

$$\sum_{\substack{E \in \mathcal{H}(P) \\ \min(E) \subseteq M}} E \times \sum_{T \in \mathcal{T}(P)} (-1)^{|T|} T = \sum_{T \in \mathcal{T}(P-M)} (-1)^{|T|} T .$$

Rappelons que la preuve de ces énoncés peut s'obtenir par un transfert d'une pièce de E vers T ou inversement de T vers E . On peut se demander s'il existe d'autres paires de sous-ensembles de $\mathcal{H}(P)$ qui jouissent d'une telle dualité par transfert de pièce. Un exemple vient immédiatement à l'esprit: soit $Q \subseteq P$; on a bien évidemment:

$$\sum_{E \in \mathcal{H}(Q)} E \times \sum_{T \in \mathcal{T}(Q)} (-1)^{|T|} T = I .$$

Heureusement, on trouve d'autres exemples plus intéressants. Ainsi, un empilement est *strict* s'il ne contient aucun facteur de la forme $p \cdot p$ ($p \in P$). On note $\mathcal{H}(P, S)$ l'ensemble des empilements stricts. Une pile est un empilement de la forme p^k pour une certaine position $p \in P$ et un certain entier $k \geq 1$. Un *jeu de piles* E est un empilement dont les pièces vérifient:

soit $p, q \in E$, si $p \zeta q$ alors $p = q$.

Un jeu de piles se construit donc avec des piles non-connectées. On note $\mathcal{H}(P, S^*)$ l'ensemble de tous les jeux de piles sur P . Mais tout empilement est un empilement strict de piles. Aussi, on peut écrire:

$$\sum_{E \in \mathcal{H}(P, S)} E \Big|_{p \rightarrow \frac{p}{1-p}} = \sum_{E \in \mathcal{H}(P)} E,$$

c'est-à-dire: la substitution de p par $p/(1-p) = p + p^2 + \dots$ (pour toute position $p \in P$) dans la série génératrice des empilements stricts, donne la série génératrice des empilements. En utilisant la substitution inverse, on trouve aussi:

$$\sum_{E \in \mathcal{H}(P, S)} E = \sum_{E \in \mathcal{H}(P)} E \Big|_{p \rightarrow \frac{p}{1-p}}.$$

De la même façon,

$$\sum_{F \in \mathcal{H}(P, S)} (-1)^{|F|} F = \sum_{T \in T(P)} (-1)^{|T|} T \Big|_{p \rightarrow \frac{p}{1-p}}$$

(on substitue toute pièce p de l'empilement trivial T par une pile p^k (pour tout choix d'entier $k \geq 1$) de signe $(-1)^{k-1}$). On a alors:

$$\sum_{E \in \mathcal{H}(P, S)} E \times \sum_{F \in \mathcal{H}(P, S^*)} (-1)^{|F|} F = I.$$

Les ensembles $\mathcal{H}(P, S)$ et $\mathcal{H}(P, S^*)$ forment donc une paire candidate à la dualité par transfert de pièces. La figure 6.1 montre comment le transfert s'opère dans ce cas.

Dans ce chapitre, nous chercherons donc à généraliser l'idée de transfert pour voir ensuite quelles sont les paires de sous-ensembles de $\mathcal{H}(P)$ dont les séries génératrices sont inverses l'une de l'autre. Cet objectif n'est atteint que pour certains sous-ensembles que nous nommerons idéaux (section 6.3).

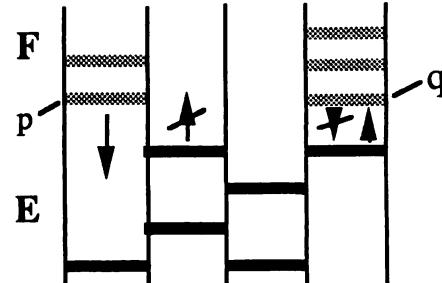


Fig.6.1 Seules p et q sont transférables pour l'empilement strict E et le jeu de piles F .

§ 6.2 Ensembles transférables

En explorant les conditions qui permettent d'obtenir un théorème de transfert sur un sous-ensemble $A \subseteq \mathcal{H}(P) \times \mathcal{H}(P)$, nous sommes conduits à la prochaine définition. La démonstration du théorème 6.2.3, qui suit, éclaircira le choix de la définition.

Définition 6.2.1. Soit $A \subseteq \mathcal{H}(P) \times \mathcal{H}(P)$. On dit que A est transférable si, pour toutes positions $p, q \in P$ et pour tous empilements $E, F \in \mathcal{H}(P)$, on a:

- 1) si $p \leq q$ alors $(E \circ p \circ q, F), (E \circ p, q \circ F), (E, p \circ q \circ F)$ ne sont pas tous les trois dans A ;
- 2) si $p \leq q$ et si trois des paires $(E \circ p \circ q, F), (E \circ p, q \circ F), (E \circ q, p \circ F), (E, p \circ q \circ F)$ sont dans A alors la quatrième y est aussi. \diamond

Pour alléger l'écriture, on introduit aussi quelques notations.

Définition 6.2.2. Soit $A \subseteq \mathcal{H}(P) \times \mathcal{H}(P)$ un ensemble transférable. Soit $(E, F) \in A$; on note:

$$T_1(E, F) = \{p \in \max(E) \text{ tel que } (E', p \circ F) \in A, \text{ où } E = E' \circ p\} \quad (\text{c'est l'ensemble des pièces transférables de } E \text{ à } F);$$

$$T_2(E, F) = \{q \in \min(F) \text{ tel que } (E \circ q, F') \in A, \text{ où } F = q \circ F'\} \quad (\text{l'ensemble des pièces transférables de } F \text{ à } E).$$

Finalement, le noyau de A se définit par:

$$N(A) = \{(E, F) \in A \text{ tels que } T_1(E, F) = \emptyset = T_2(E, F)\}. \diamond$$

On remarquera que $T_1(E, F)$ et $T_2(E, F)$ définissent des empilements triviaux.

Théorème 6.2.3. Soit $A \subseteq \mathcal{H}(P) \times \mathcal{H}(P)$ un ensemble transférable. On a:

$$\sum_{(E, F) \in A} (-1)^{|F|} E \circ F = \sum_{(E, F) \in N(A)} (-1)^{|F|} E \circ F. \diamond$$

Démonstration. La démonstration repose sur les idées suivantes. Sur $A - N(A)$, on définit une involution sans points fixes φ pour laquelle on a (en écrivant $(\bar{E}, \bar{F}) = \varphi(E, F)$):

- 1) $\bar{E} \circ \bar{F} = E \circ F,$
- 2) $(-1)^{|\bar{F}|} = (-1)^{|F|}$

Les termes associés à $A - N(A)$ se simplifient donc deux à deux. L'involution φ transfère une pièce de $\max(E)$ vers $\min(F)$ ou vice-versa. Les définitions de $T_1(E, F)$ et de $T_2(E, F)$ donnent la liste des pièces qu'on peut soumettre au transfert. Ainsi, $N(A)$ est la partie de A dont les paires d'empilements ne comportent aucune pièce transférable: aucune simplification n'y est possible (par transfert d'une pièce). Les axiomes d'ensemble transférable expriment la possibilité de définir φ convenablement.

De façon plus détaillée, on commence par ordonner P linéairement. Soit $(E, F) \in A - N(A)$. Par définition de $N(A)$, un des ensembles $T_1(E, F), T_2(E, F)$ n'est

pas vide. Remarquons que ceux-ci sont disjoints. Mieux, l'empilement $T_1(E,F) \circ T_2(E,F)$ est trivial. Dans le cas contraire, en effet, il existerait des positions $p,q \in P$ telles que $p \leq q$ avec $p \in T_1(E,F)$ et $q \in T_2(E,F)$. On pourrait alors écrire $E = E' \circ p$ et $F = q \circ F'$. Comme $p \in T_1(E,F)$ et $q \in T_2(E,F)$, on sait que $(E', p \circ q \circ F')$ et $(E' \circ p \circ q, F')$ sont dans A , ce qui contredit l'axiome 1 de la définition 6.2.1 (puisque $(E' \circ p, q \circ F')$ appartient à A lui aussi).

On peut donc parler de la pièce p de $T_1(E,F) \circ T_2(E,F)$ occupant la position minimale (pour l'ordre linéaire sur P). On définit φ par:

$$\varphi(E,F) = (\bar{E},\bar{F}) = \begin{cases} (E', p \circ F) & \text{si } p \in T_1(E,F), \\ (E \circ p, F') & \text{si } p \in T_2(E,F). \end{cases}$$

Clairement φ réponds aux propriétés 1) et 2) ci-haut. On voit facilement que si $p \in T_1(E,F)$ (respectivement $p \in T_2(E,F)$) alors $p \in T_2(\bar{E},\bar{F})$ (respectivement $p \in T_1(\bar{E},\bar{F})$); on a donc $p \in T_1(\bar{E},\bar{F}) \circ T_2(\bar{E},\bar{F})$. Reste à montrer que φ est une involution.

Commençons par montrer que p occupe la position minimale parmi les pièces de $T_1(\bar{E},\bar{F}) \circ T_2(\bar{E},\bar{F})$. Soit q la pièce de $T_1(\bar{E},\bar{F}) \circ T_2(\bar{E},\bar{F})$ occupant la position minimale. On sait que $\pi(q) \leq \pi(p)$ puisque p appartient aussi à cet empilement. Supposons que $\pi(q) < \pi(p)$. Comme $T_1(\bar{E},\bar{F}) \circ T_2(\bar{E},\bar{F})$ est trivial et comme $p \neq q$, on a $p \not\leq q$. Nous examinons la provenance de p et de q . Supposons que p et q proviennent toutes deux de E . On peut écrire $E = E'' \circ q \circ p$. Ainsi, les trois couples $(E,F) = (E'' \circ q \circ p, F)$, $\varphi(E'' \circ q \circ p, F) = (E'' \circ q, p \circ F)$ et $\varphi(E'' \circ q, p \circ F) = (E'', q \circ p \circ F)$ appartiennent à A . Par l'axiome 2, on a $(E'' \circ p, q \circ F) \in A$, d'où $q \in T_1(E,F)$. Ceci signifie que la pièce à transférer lors du calcul de $\varphi(E,F)$ aurait dû être q au lieu de p . On obtient une contradiction similaire si p et q proviennent toutes deux de F .

Supposons que $p \in E$ et que $q \in F$. On peut écrire $E = E' \circ p$ et $F = q \circ F'$. Ainsi, les trois couples $(E' \circ p, q \circ F')$, $\varphi(E' \circ p, q \circ F') = (E', p \circ q \circ F')$ et $\varphi(E', p \circ q \circ F') = (E' \circ q, p \circ F')$ appartiennent à A . Par l'axiome 2, $(E' \circ p \circ q, F') \in A$ et $q \in T_2(E,F)$. Ceci signifie que la pièce à transférer lors du calcul de $\varphi(E,F)$ aurait dû être q au lieu de p . Le cas $p \in F$ et $q \in E$ se traite de façon similaire.

On doit donc conclure que $\pi(q) = \pi(p)$. Comme $T_1(\bar{E},\bar{F}) \circ T_2(\bar{E},\bar{F})$ est trivial, on a $p = q$. Si $p \in E$, on a donc:

$$\varphi^2(E,F) = \varphi(E', p \circ F) = (E' \circ p, F) = (E,F).$$

On a le même résultat si $p \in F$. \diamond

Exemples.

Soit $A = \mathcal{H}(P,S) \times \mathcal{H}(P,S^*)$ (empilements stricts \times jeux de piles). On vérifie que A est transférable.

Observons d'abord que si $p \leq q$ et si $p \circ q \circ F$ est un jeu de piles, alors $p = q$. Dans ce cas, si E est strict, $E \circ p \circ q$ ne peut l'être aussi. L'axiome 1 est donc vérifié. Supposons maintenant que $p \not\leq q$. Si $E \circ p$ et $E \circ q$ sont stricts; alors $E \circ p \circ q$ est strict. De plus, tout facteur gauche d'un empilement strict est strict. Aussi, dès que trois des empilements $E, E \circ p, E \circ q, E \circ p \circ q$ sont stricts, le quatrième l'est aussi. Par un raisonnement similaire, dès que trois des empilements $F, p \circ F, q \circ F, p \circ q \circ F$ sont des jeux de piles, le quatrième l'est aussi. L'axiome 2 est donc vérifié.

Quel est le noyau? Une paire $(E,F) \in \mathcal{H}(P,S) \times \mathcal{H}(P,S^*)$ appartient au noyau si:

- 1) pour toute pièce $p \in \max(E)$, on trouve une pièce $q \in \min(F)$ telle que $\pi(p) \neq \pi(q)$ et $\pi(p) \leq \pi(q)$;
- 2) pour toute pièce $q \in \min(F)$, on trouve une pièce $p \in \max(E)$ telle que $\pi(p) = \pi(q)$.

Ces deux conditions se contredisent sauf si $(E,F) = (\Phi,\Phi)$. \diamond

§ 6.3 Idéaux d'empilements

Nous nous intéressons particulièrement aux ensembles transférables A qui prennent la forme d'un produit cartésien. La plupart du temps, étant donné un sous-ensemble $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}(P)$, on cherchera un sous-ensemble $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}(P)$ tel que $\mathcal{G} \times \mathcal{D}$ soit transférable et, si possible, tel que $N(\mathcal{G} \times \mathcal{D})$ se réduise à $\{(\Phi,\Phi)\}$. Souvent, la série génératrice de \mathcal{D} sera plus facile à calculer que celle de \mathcal{G} qu'on obtiendra alors par inversion.

Cette question possède une réponse particulièrement simple quand \mathcal{G} est un idéal du treillis "partiel" des empilements. Nous allons donc développer ces sujets.

Remarquons pour commencer que l'ensemble $\mathcal{H}(P)$ s'ordonne partiellement par la relation "être un facteur gauche de ...". On écrira $E \leq E \circ F$. De même, on peut considérer l'ordre "dual" induit par la relation "être un facteur droit de ...". On écrira $F \leq^* E \circ F$. Ces ordres n'ont rien à voir, à priori, avec l'ordre total défini sur les positions et étendu aux empilements tel que défini au chapitre 2.

Étant donné deux empilements $E, F \in \mathcal{H}(P)$, considérons l'ensemble des facteurs gauches communs à E et à F :

$$\{U \in \mathcal{H}(P) : U \leq E \text{ et } U \leq F\}.$$

Cet ensemble n'est pas vide (l'empilement vide Φ en fait toujours partie) et est fini. Il contient donc des éléments maximaux (pour l'ordre partiel). Soit U_1 et U_2 deux de ces éléments maximaux. Comme $U_1, U_2 \leq E$, alors, par le lemme 1.2.20, $U_1 \cup U_2 \leq E$. De même $U_1 \cup U_2 \leq F$. Donc $U_1 \cup U_2$ fait partie de l'ensemble des facteurs gauches de E et F . Comme U_1 est un facteur gauche de $U_1 \cup U_2$, on a $U_1 \leq U_1 \cup U_2$. Par maximalité et symétrie, on trouve $U_1 = U_1 \cup U_2 = U_2$. Ceci permet alors de définir une première opération du futur treillis "partiel".

Définition 6.3.1. Soit $E, F \in \mathcal{H}(P)$. On définit l'infimum $E \wedge F$ de E et F comme l'unique élément maximal de l'ensemble

$$\{U \in \mathcal{H}(P) : U \leq E \text{ et } U \leq F\}. \diamond$$

Parallèlement, on peut définir $E \wedge^* F$ en opérant sur les facteurs droits plutôt que les facteurs droits. On a clairement $E \wedge^* F = (E^t \wedge F^t)^t$. Attention! $E \wedge F$ n'est pas l'intersection ensembliste des pièces de E et de F (voir la figure 6.2).

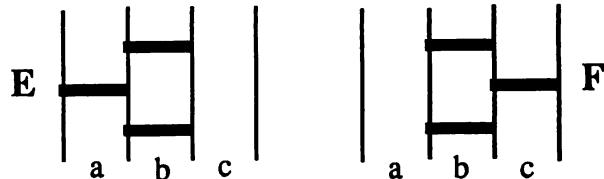


Fig 6.2 $E \wedge F = b$ (et non $b \circ b$).

Lemme 6.3.2. Soit $E, F, G \in \mathcal{H}(P)$ alors

- 1) $E \wedge F = F \wedge E$,
- 2) $E \wedge (F \wedge G) = \max\{U : U \leq E, F, G\} = (E \wedge F) \wedge G$. \diamond

Démonstration. L'énoncé 1) est évident. Un raisonnement analogue à celui de la discussion précédente montre que $W = \max\{U : U \leq E, F, G\}$ existe et est unique. Soit $U = E \wedge (F \wedge G)$. On a $U \leq E$ et $U \leq F \wedge G \leq F, G$. Donc $U \leq W$. D'autre part, $W \leq F, G$; donc $W \leq F \wedge G$. Mais $W \leq E$ donc $W \leq E \wedge (F \wedge G) = U$. Ainsi $E \wedge (F \wedge G) = W$, et, de façon symétrique, $W = (E \wedge F) \wedge G$. \diamond

Pour former un treillis, nous devons construire une deuxième opération: le supréumum.

Définition 6.3.3. Soit $E, F \in \mathcal{H}(P)$. S'il existe un empilement $G \in \mathcal{H}(P)$ tel que $E, F \leq G$, alors, on définit le supréumum $E \vee F$ de E et F par:

$$E \vee F = E \cup F. \diamond$$

Cette définition est possible grâce au providentiel lemme 1.2.20. Le supréumum de deux empilements E et F n'est pas toujours défini; la condition voulant que E et F soient facteurs gauches d'un même empilement est essentielle. On voit mal comment définir $p \vee q$, par exemple, pour deux positions concurrentes p et q .

Bien sûr, on a aussi la notion duale \vee^* opérant sur les facteurs droits. On a $E \vee^* F = (E^t \vee F^t)^t$.

Lemme 6.3.4. Soit $E, F, G \in \mathcal{H}(P)$.

- 1) $E \vee F$ existessi $F \vee E$ existe. On a alors $E \vee F = F \vee E$.
- 2) $E \vee (F \vee G)$ existessi $(E \vee F) \vee G$ existe. On a alors :

$$E \vee (F \vee G) = (E \vee F) \vee G. \diamond$$

Démonstration.

- 1) Si $E \vee F$ existe alors E et F sont facteurs gauches d'un même empilement; donc $F \vee E$ existe. On a clairement $E \vee F = F \vee E$.
- 2) Si $E \vee (F \vee G)$ existe alors $F \vee G$ existe et $E, F \vee G$ sont facteurs gauches d'un même empilement H . Mais $F, G \leq F \vee G \leq H$. On a donc $E, F, G \leq H$. Donc $E \vee F$ existe et $E \vee F, G \leq H$ (lemme 1.2.20). Donc $(E \vee F) \vee G$ existe. On a alors:

$$E \vee (F \vee G) = E \cup F \cup G = (E \vee F) \vee G. \diamond$$

Lemme 6.3.5. Soit $E, F \in \mathcal{H}(P)$.

- 1) $E \vee (E \wedge F)$ existe et est égal à E .
- 2) Si $E \vee F$ existe alors $E \wedge (E \vee F) = E$. \diamond

Démonstration. L'énoncé 1) découle du fait que $E \wedge F$ est un facteur gauche de E . L'énoncé 2), du fait que E est facteur gauche de $E \vee F$. \diamond

Un ensemble partiellement ordonné, possédant deux opérations binaires \wedge et \vee partout définies et qui vérifient les lemmes 6.3.2, 6.3.4 et 6.3.5 s'appelle un treillis.

Dans le cas qui nous occupe, une des opérations (le supréumum \vee) n'est que partiellement définie. Nous proposons d'appeler de tels ensembles des treillis partiels. On s'attend à ce que ceux-ci partagent de nombreuses propriétés avec les treillis.

Lemme 6.3.6. Soit $E, F \in \mathcal{H}(P)$.

- 1) $E = E \wedge F$ ssi $E \leq F$.
- 2) Si $E \vee F$ existe alors $F = E \vee F$ ssi $E \leq F$. \diamond

La démonstration est immédiate.

Nous pouvons maintenant aborder la notion d'idéal.

Définition 6.3.7. Un idéal gauche G de $\mathcal{H}(P)$ est un sous-ensemble non-vide de $\mathcal{H}(P)$ vérifiant:

- 1) soit $E \in G$ et $F \in \mathcal{H}(P)$ alors $E \wedge F \in G$;
- 2) si $E, F \in G$ et si $E \vee F$ existe alors $E \vee F \in G$. \diamond

On définira de façon analogue les *idéaux droits* (avec les opérations \wedge^* et \vee^*). Un *idéal bilatère* sera un ensemble qui est à la fois un idéal gauche et un idéal droit. On peut définir alternativement les idéaux gauches par le lemme suivant.

Lemme 6.3.8. Soit $G \subseteq \mathcal{H}(P)$ un ensemble non-vide. Alors G est un idéal gauche ssi

- 1') si $E \circ F \in G$ alors $E \in G$;
- 2') si $p, q \in P$ avec $p \not\leq q$ et si $E \in \mathcal{H}(P)$ avec $E \circ p, E \circ q \in G$ alors $E \circ p \circ q \in G$. \diamond

Démonstration. En fait, la condition 1') est équivalente à la condition 1) de la définition 6.3.7, comme on peut le vérifier facilement.

Il est clair que la condition 2) de la définition 6.3.7 implique la condition 2'). Il suffit donc de montrer que 2') implique 2). Soit donc $E, F \in G$ tels que $E \vee F$ existe. Posons $E = (E \wedge F) \circ E'$ et $F = (E \wedge F) \circ F'$ (voir fig. 6.3). On montre que E' et F' ne sont pas connectés.

Dans le cas contraire, on trouve une pièce $p \in E'$ et une pièce $q \in F'$ telles que $p \not\leq q$. Comme $p, q \in E \vee F$, on pourra supposer, en utilisant un chargement de notation au besoin, que $p \leq_{E \vee F} q$ (voir fig. 6.3). Mais, comme F est un facteur gauche de $E \vee F$,

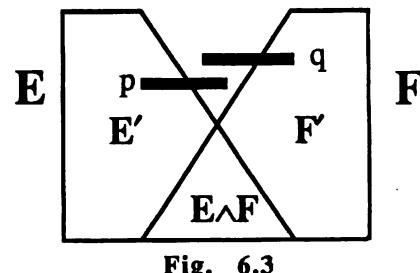


Fig. 6.3

on doit conclure que $p \in F$. Mieux, le facteur gauche G de $E \vee F$ déterminé par $(E \wedge F) \cup \{p\}$ est un facteur gauche de F . Comme c'est aussi un facteur gauche de E , on a $G \leq E \wedge F$, ce qui est contradictoire.

Soit $E' = p_1 \circ \dots \circ p_k$ et $F' = q_1 \circ \dots \circ q_\ell$; on a montré que $p_i \nmid q_j$ (pour $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq \ell$). Supposons qu'il existe des entiers i et j (on prendra $i+j$ minimal) tels que

$$(E \wedge F) \circ p_1 \circ \dots \circ p_i \circ q_1 \circ \dots \circ q_j \in \mathcal{G}.$$

Clairement, $i, j \neq 0$ puisque $E, F \in \mathcal{G}$ (de même que tous leurs facteurs gauches). Soit $H = (E \wedge F) \circ p_1 \circ \dots \circ p_{i-1} \circ q_1 \circ \dots \circ q_{j-1}$. Alors $H \circ p_i \in \mathcal{G}$ et $H \circ q_j \in \mathcal{G}$. Donc, par 2', $H \circ p_i \circ q_j \in \mathcal{G}$: une contradiction. Ceci montre que $(E \wedge F) \circ E' \circ F' \in \mathcal{G}$. Mais $E \vee F = (E \wedge F) \circ E' \cup (E \wedge F) \circ F' = (E \wedge F) \circ E' \circ F'$. \diamond

On peut utiliser une partie de cette démonstration pour montrer que $E \vee F$ existe ssi E' et F' ne sont pas connectés.

Exemples.

- 1) Clairement $\mathcal{H}(P)$ et $\mathcal{T}(P)$ sont des idéaux bilatères.
- 2) $\mathcal{H}(P, S)$ et $\mathcal{H}(P, S^*)$ sont aussi des idéaux bilatères.
- 3) $\{E \in \mathcal{H}(P) : \mathcal{H}(E) \leq 10\}$ est un idéal bilatère.
- 4) Soit $\{n_p\}_{p \in P}$ une famille d'entiers; $\{E \in \mathcal{H}(P) : |E|_p \leq n_p\}$ est un idéal bilatère.
- 5) $\{E \in \mathcal{H}(P) : E \text{ ne contient aucun facteur de forme } p^7 \text{ (pour toute position } p \in P)\}$ est un idéal bilatère.
- 6) Soit $M \subseteq P$. $\{E \in \mathcal{H}(P) : \min(E) \subseteq M\}$ est un idéal gauche.
- 7) Soit $p, q \in P$ avec $p \nmid q$. $\{E \in \mathcal{H}(P) : E \text{ ne contient pas le facteur } p \circ q\}$ est un idéal gauche.
- 8) $\{E \in \mathcal{H}(P) : |E| \text{ est pair}\}$ n'est pas un idéal.
- 9) Soit $E_0 \in \mathcal{H}(P)$. $\{E \leq E_0\}$ est un idéal gauche.

Lemme 6.3.9. *Les idéaux gauches de $\mathcal{H}(P)$ possèdent les propriétés suivantes.*

- 1) Pour tout idéal gauche \mathcal{G} , on a $\Phi \in \mathcal{G}$.
- 2) Toute intersection d'idéaux gauches est un idéal gauche.
- 3) Tout ensemble $A \subseteq \mathcal{H}(P)$ peut être plongé dans un idéal gauche minimal qui est unique.
- 4) Soit \mathcal{G} un idéal gauche de $\mathcal{H}(P)$. Soit $Q \subseteq P$ tel que $Q \subseteq \mathcal{G}$. Alors $\mathcal{T}(Q) \subseteq \mathcal{G}$. \diamond

Démonstration. Les énoncés 1), 2) et 3) ne font intervenir que les arguments habituels d'algèbre pour les situations du même genre. L'énoncé 4) se démontre par induction sur le nombre de pièces de $T \in \mathcal{T}(Q)$. Clairement, \mathcal{G} contient les empilements triviaux de $\mathcal{T}(Q)$ comportant 0 ou 1 pièce. Supposons que \mathcal{G} contienne tous les empilements triviaux de $\mathcal{T}(Q)$ comportant i pièces ou moins. Soit $T \circ p \circ q \in \mathcal{T}(Q)$ un empilement comportant $i+1$ pièces. On a $T \circ p, T \circ q \in \mathcal{G}$ et $p \not\leq q$. Donc $T \circ p \circ q \in \mathcal{G}$. \diamond

Comme toujours, on a un lemme similaire pour les idéaux droits.

§ 6.4 Relations de succession

Nous parlerons maintenant d'idéaux engendrés par une relation de succession. Comme nous le verrons plus loin, ces idéaux jouent un rôle central dans la théorie.

Définition 6.4.1. Soit $E \in \mathcal{H}(P)$. On note

$$\text{Succ}(E) = \{(p,q) \in \zeta \text{ tels que } p \circ q \text{ est un facteur de } E\}$$

qu'on appelle l'ensemble des successions définies par E .

Si $A \subseteq \mathcal{H}(P)$, on note

$$\text{Succ}(A) = \bigcup_{E \in A} \text{Succ}(E) . \diamond$$

Lemme 6.4.2. Soit $E, F \in \mathcal{H}(P)$. Alors

- 1) $\text{Succ}(E) \subseteq \text{Succ}(E \circ F)$;
- 2) Si $E \vee F$ existe, $\text{Succ}(E \vee F) = \text{Succ}(E) \cup \text{Succ}(F)$. \diamond

Démonstration. La première affirmation est évidente. Puisque E et F sont des facteurs gauches de $E \vee F$, il est clair que $\text{Succ}(E) \cup \text{Succ}(F) \subseteq \text{Succ}(E \vee F)$. On démontre l'inclusion inverse. Soit $(p,q) \in \text{Succ}(E \vee F)$; on a $p \not\leq q$. On peut écrire $(E \vee F) = U \circ p \circ q \circ V$ où $U \circ p \circ q$ est la pyramide de sommet q dans $(E \vee F)$. Si $q \in E$, alors $U \circ p \circ q$ est aussi la pyramide de sommet q dans E . Dans ce cas, $U \circ p \circ q$ est un facteur gauche de E et $(p,q) \in \text{Succ}(E)$. L'argument se répète si $q \in F$. \diamond

Définition 6.4.3. Soit $Q \subseteq P$. Soit S un sous-ensemble de

$$\zeta_Q = \{(p,q) \in Q^2 : p \not\leq q\}.$$

On dit alors que (Q,S) est une relation de succession (sur Q). \diamond

Tout ensemble d'empilements $A \subseteq \mathcal{H}(P)$ définit une relation de succession si on pose $Q = \pi(A)$ et $S = \text{Succ}(A)$. Une autre propriété immédiate: si $\{(Q_i, S_i)\}_{i \in I}$ est une famille de relations de succession, alors $(\bigcap_{i \in I} Q_i, \bigcap_{i \in I} S_i)$ est une relation de succession.

Définition 6.4.4. Soit (Q, S) une relation de succession. On dit que

$$\mathcal{H}(Q, S) = \{E \in \mathcal{H}(Q): \text{Succ}(E) \subseteq S\}$$

est l'idéal engendré par (Q, S) . On dit aussi que $\mathcal{H}(Q, S)$ est un idéal complet. \diamond

Nous avons déjà rencontré des cas particuliers de cette notation: les empilements stricts ($\mathcal{H}(P, S)$) et les jeux de piles ($\mathcal{H}(P, S^*)$). Dans le cas des empilements stricts, on a

$$S = \zeta - \{(p, p): p \in P\};$$

tandis que pour les jeux de piles,

$$S^* = \{(p, p): p \in P\}.$$

Évidemment, S et S^* définissent des relations de succession sur P .

La définition 6.4.4 suggère que $\mathcal{H}(Q, S)$ est un idéal (bilatère), ce qu'on vérifie facilement grâce au lemme 6.4.2.

Exemples.

- 1) $\mathcal{H}(P, \zeta) = \mathcal{H}(P); \mathcal{H}(P, \emptyset) = \mathcal{T}(P).$
- 2) Soit $P = \{1, 2, \dots\}$, $\zeta = P^2$ et $S = \{(i, j) \in \zeta: i \leq j\}$ alors on peut assimiler $\mathcal{H}(P, S)$ avec l'ensemble des partages; si $S^* = \{(i, j) \in \zeta: i > j\}$, alors $\mathcal{H}(P, S^*)$ s'assimile à l'ensemble des partages en parts distinctes.

Lemme 6.4.5. Si $\{\mathcal{H}(Q_i, S_i)\}_{i \in I}$ est une famille d'idéaux engendrés par les relations de succession (Q_i, S_i) alors

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{H}(Q_i, S_i) = \mathcal{H}\left(\bigcap_{i \in I} Q_i, \bigcap_{i \in I} S_i\right).$$

Tout ensemble $A \subseteq \mathcal{H}(P)$ peut être plongé dans un idéal complet minimal. Cet idéal complet est unique et est en fait $\mathcal{H}(\pi(A), \text{Succ}(A))$. \diamond

Ce lemme complète le lemme 6.3.9. Sa démonstration ne comporte aucune difficulté et est laissée au lecteur.

Définition 6.4.6. Soit \mathcal{G} et \mathcal{D} des sous-ensembles de $\mathcal{H}(\mathbf{P})$. On dit que \mathcal{G} et \mathcal{D} sont compatibles si $\text{Succ}(\mathcal{G}) \cap \text{Succ}(\mathcal{D}) = \emptyset$. On dit aussi que les relations de succession correspondantes $(\pi(\mathcal{G}), \text{Succ}(\mathcal{G}))$ et $(\pi(\mathcal{D}), \text{Succ}(\mathcal{D}))$ sont compatibles. \diamond

La série d'exemples précédente décrit des paires compatibles d'ensembles de $\mathcal{H}(\mathbf{P})$. Il en est de même pour la paire empilements stricts – jeux de piles. Le prochain théorème montre l'importance de la notion de compatibilité.

Théorème 6.4.7. Soit \mathcal{G} un idéal gauche et \mathcal{D} un idéal droit de $\mathcal{H}(\mathbf{P})$. Alors \mathcal{G} et \mathcal{D} sont compatibles ssi $\mathcal{G} \times \mathcal{D}$ est transférable. \diamond

Démonstration. Supposons que \mathcal{G} et \mathcal{D} soient compatibles. Examinons la transférabilité de $\mathcal{G} \times \mathcal{D}$. Soit $E, F \in \mathcal{H}(\mathbf{P})$ et soit $p, q \in \mathbf{P}$ avec $p \zeta q$. Si $(E \circ p \circ q, F)$, $(E \circ p, q \circ F)$ et $(E, p \circ q \circ F)$ appartiennent à $\mathcal{G} \times \mathcal{D}$, alors $E \circ p \circ q \in \mathcal{G}$ et $p \circ q \circ F \in \mathcal{D}$. Donc $(p, q) \in \text{Succ}(\mathcal{G}) \cap \text{Succ}(\mathcal{D})$, une contradiction. L'ensemble répond donc à l'axiome 1 des ensembles transférables.

Si $p \not\zeta q$ et si $(E, p \circ q \circ F)$, $(E \circ p, q \circ F)$ et $(E \circ q, p \circ F)$ appartiennent à $\mathcal{G} \times \mathcal{D}$, alors $E \circ p, E \circ q \in \mathcal{G}$. Donc $E \circ p \circ q \in \mathcal{G}$. De plus $q \circ F \in \mathcal{D}$, donc $F \in \mathcal{D}$. Ainsi, $(E \circ p \circ q, F) \in \mathcal{G} \times \mathcal{D}$. On procède de la même manière pour montrer que $\mathcal{G} \times \mathcal{D}$ répond aux autres cas de l'axiome 2 des ensembles transférables.

Inversement, supposons que $\mathcal{G} \times \mathcal{D}$ soit transférable; nous allons montrer que \mathcal{G} et \mathcal{D} sont compatibles. Soit $Q = \pi(\mathcal{G}) \cup \pi(\mathcal{D})$, $S_1 = \text{Succ}(\mathcal{G})$ et $S_2 = \text{Succ}(\mathcal{D})$. Supposons qu'il existe une paire de positions $(p, q) \in S_1 \cap S_2$. Ceci signifie que $p \zeta q$ et qu'il existe une pyramide $E \circ p \circ q \in \mathcal{G}$ de sommet q et une pyramide inversée $p \circ q \circ F \in \mathcal{D}$ de base p . Mais alors $E, E \circ p \in \mathcal{G}$ et $F, q \circ F \in \mathcal{D}$, ce qui contredit l'axiome 1 des ensembles transférables. Donc $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. \diamond

Définition 6.4.8. Soit (Q, S) une relation de succession sur Q . La succession duale, notée (Q, S^*) est définie par:

$$S^* = \zeta_{|Q} - S . \quad \diamond$$

Clairement, si (Q, S) est une relation de succession alors $\mathcal{H}(Q, S) \times \mathcal{H}(Q, S^*)$ et $\mathcal{H}(Q, S^*) \times \mathcal{H}(Q, S)$ sont transférables (d'après le théorème 6.4.7). Remarquons aussi que $\mathcal{H}(Q, S) \cap \mathcal{H}(Q, S^*) = \mathcal{H}(Q, S \cap S^*) = \mathcal{H}(Q, \emptyset) = \mathcal{T}(Q)$.

§ 6.5 Inversion par transfert

Dans cette section, nous chercherons des conditions sur les idéaux compatibles \mathcal{G} et \mathcal{D} (respectivement gauche et droit) de $\mathcal{H}(P)$ pour que le noyau $N(\mathcal{G} \times \mathcal{D})$ soit le plus simple possible. Comme $\Phi \in \mathcal{G}$ et $\Phi \in \mathcal{D}$, on voit facilement que $(\Phi, \Phi) \in N(\mathcal{G}, \mathcal{D})$. Que peut-on dire des idéaux \mathcal{G} et \mathcal{D} quand $N(\mathcal{G}, \mathcal{D}) = \{(\Phi, \Phi)\}$?

Théorème 6.5.1. *Soit \mathcal{G} (respectivement: \mathcal{D}) un idéal gauche (respectivement: droit) de $\mathcal{H}(P)$, tels que \mathcal{G} et \mathcal{D} soient compatibles et tels que $N(\mathcal{G} \times \mathcal{D}) = \{(\Phi, \Phi)\}$*

Alors:

- 1) $\pi(\mathcal{G}) = \pi(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{G} \cap \mathcal{D}$;
- 2) si on écrit $Q = \pi(\mathcal{G}) = \pi(\mathcal{D})$ alors $\mathcal{T}(Q) = \mathcal{G} \cap \mathcal{D}$;
- 3) $\text{Succ}(\mathcal{G})^* = \text{Succ}(\mathcal{D})$ (sur Q);
- 4) si on écrit $S = \text{Succ}(\mathcal{G})$ alors $\mathcal{G} = \mathcal{H}(Q, S)$ et $\mathcal{D} = \mathcal{H}(Q, S^*)$. \diamond

Démonstration.

- 1) Soit $p \in \pi(\mathcal{G})$. Il existe donc une pyramide $E \circ p \in \mathcal{G}$ de sommet p . Mais comme $\Phi \in \mathcal{D}$ et que $(E \circ p, \Phi) \neq (\Phi, \Phi)$, on a $(E \circ p, \Phi) \in \mathcal{G} \times \mathcal{D} - N(\mathcal{G} \times \mathcal{D})$. Aussi, ce couple a un correspondant (par l'involution de transfert) qui ne peut être que $\varphi(E \circ p, \Phi) = (E, p)$. Donc $p \in \mathcal{D}$ (et $p \in \pi(\mathcal{D})$). En utilisant la symétrie, on trouve donc $\pi(\mathcal{G}) = \pi(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{G}, \mathcal{D}$, d'où le résultat.
- 2) Soit $S = \text{Succ}(\mathcal{G})$, alors $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}(Q, S)$ et $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}(Q, S^*)$. Par l'énoncé 4) du lemme 6.3.9, $\mathcal{T}(Q) \subseteq \mathcal{G} \cap \mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}(Q, S) \cap \mathcal{H}(Q, S^*) = \mathcal{T}(Q)$.
- 3) Nous savons que $\text{Succ}(\mathcal{G}) \cap \text{Succ}(\mathcal{D}) = \emptyset$. Nous allons montrer que $\text{Succ}(\mathcal{G}) \cup \text{Succ}(\mathcal{D}) = \zeta_Q$. Soit $p, q \in Q$ avec $p \zeta q$. Comme $(p, q) \in \mathcal{G} \times \mathcal{D} - N(\mathcal{G} \times \mathcal{D})$, alors $\varphi(p, q)$ est soit $(p \circ q, \Phi)$, soit $(\Phi, p \circ q)$. Ce qui signifie que $(p, q) \in \text{Succ}(\mathcal{G}) \cup \text{Succ}(\mathcal{D})$.
- 4) Clairement $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}(Q, S)$. Supposons qu'il existe $E \in \mathcal{H}(Q, S) - \mathcal{G}$. On le choisira de telle sorte que $|E|$ soit minimal. Comme $\mathcal{T}(Q) \subseteq \mathcal{G}$, on a $E \notin \mathcal{T}(Q)$, d'où $|E| \geq 2$.

Soit $p \in \max(E)$. Posons $E = E' \circ p$. On a $E' \in \mathcal{H}(Q, S)$, d'où, par minimalité de $|E|$, $E' \in \mathcal{G}$. Comme $p \in \mathcal{D}$, on a $(E', p) \in \mathcal{G} \times \mathcal{D}$. Mais $E' \circ p = E \notin \mathcal{G}$; donc $\varphi(E', p) \neq (E' \circ p, \Phi)$. Autrement dit, il existe $q \in \max(E')$ tel que $\varphi(E', p) = (E'', q \circ p)$ (où $E'' = E' \circ q$).

Supposons que $p \leq q$. Dans ce cas, on aurait à la fois $(q, p) \in S^*$ (puisque $q \circ p \in \mathcal{D}$) et $(q, p) \in S$ (puisque $E = E'' \circ q \circ p \in \mathcal{H}(Q, S)$). Aussi doit-on conclure que $p \not\leq q$. Mais alors $E'' \circ p$ et $E'' \circ q$ sont des facteurs gauches de $E \in \mathcal{H}(Q, S)$. Par minimalité de $|E|$, on a $E'' \circ p, E'' \circ q \in \mathcal{G}$. Donc $E = E'' \circ p \circ q \in \mathcal{G}$; une contradiction. Cette fois nous sommes forcés de conclure que $\mathcal{G} = \mathcal{H}(Q, S)$. De façon symétrique, $\mathcal{D} = \mathcal{H}(Q, S^*)$. \diamond

Définition 6.5.2. Soit (Q, S) une relation de succession. On dit que (Q, S) est bienveillante si $N(\mathcal{H}(Q, S) \times \mathcal{H}(Q, S^*)) = \{(\Phi, \Phi)\}$. \diamond

La question qui se pose à ce moment, est de caractériser les relations de succession bienveillantes. Ainsi, on pourrait croire que $N(\mathcal{H}(Q, S) \times \mathcal{H}(Q, S^*)) = \{(\Phi, \Phi)\}$, pour toute relation de succession (Q, S) . Pourtant, cette conjecture est fausse, comme l'illustre le contre-exemple qui suit.

Contre-exemple.

Soit $E = b \circ c$ et $F = a \circ b$ des empilements de dominos donnés par la figure 6.4 ci-contre.

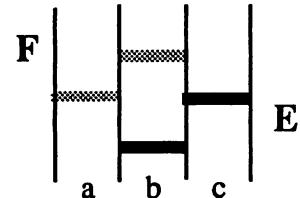


Fig 6.4

Si la relation de succession S contient (b, c) et (c, b) mais pas (a, b) ni (b, a) alors $E \in \mathcal{H}(P, S)$ et $F \in \mathcal{H}(P, S^*)$.

Comme $E \circ a \notin \mathcal{H}(P, S)$ et comme $c \circ F \notin \mathcal{H}(P, S)$, on a $(E, F) \in N(\mathcal{H}(P, S) \times \mathcal{H}(P, S^*))$. \diamond

En fait, on aimerait pouvoir caractériser la bienveillance sur (Q, S) sans avoir à passer par la construction de $\mathcal{H}(Q, S) \times \mathcal{H}(Q, S^*)$. Malheureusement, les critères explorés jusqu'ici par l'auteur demandent beaucoup plus de vérifications que le calcul direct du noyau. Malgré tout, on trouve cependant des conditions simples qui assurent la bienveillance.

Définition 6.5.3. Soit (Q, S) une relation de succession telle que pour toutes positions $p, q, r \in Q$ avec $p \leq q \leq r$, on a:

- 1) si $(p,q) \in S$ et $(r,q) \in S^*$ alors $p \zeta r$;
- 2) si $(q,p) \in S^*$ et $(q,r) \in S$ alors $p \zeta r$.

On dit alors que (Q,S) est fortement bienveillante. \diamond

Théorème 6.5.4. Soit (Q,S) une relation de succession fortement bienveillante alors (Q,S) est bienveillante. \diamond

Démonstration. Soit $(E,F) \in N(\mathcal{H}(Q,S) \times \mathcal{H}(Q,S^*))$. Supposons que $E \neq \Phi$. Soit $p \in \max(E)$. Par définition du noyau, on doit avoir $p \circ F \notin \mathcal{H}(Q,S^*)$; sinon, on pourrait transférer p . Autrement dit, il existe une pièce $q \in F$ qui recouvre p (dans $p \circ F$) et telle que $(p,q) \in S^*$. On a donc $(p,q) \in S$. On examine deux cas selon que $q \in \min(F)$ ou non.

Si $q \in \min(F)$, alors, par un raisonnement presque identique, on prouve l'existence d'une pièce $r \in E$ recouverte par q (dans $E \circ q$) et telle que $(r,q) \in S^*$ (voir fig. 6.5a). Si $q \notin \min(F)$, alors q recouvre une certaine pièce $r \in F$ pour laquelle on aura $(r,q) \in S^*$ (voir fig. 6.5b).

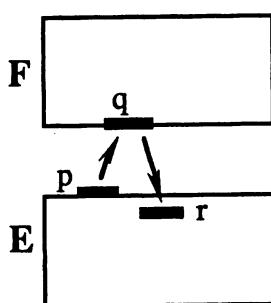


Fig. 6.5a)

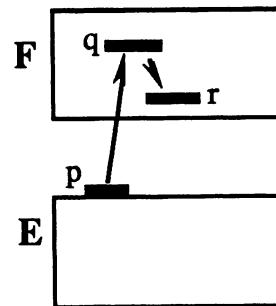


Fig. 6.5b)

Dans les deux cas, on a trois pièces p,q,r telles que $p \zeta q \zeta r$ avec $(p,q) \in S$ et $(r,q) \in S^*$. Comme (Q,S) est fortement bienveillante, alors $p \zeta r$. Mais ceci est impossible car q recouvre à la fois p et r . Donc $E = \Phi$. Symétriquement, $F = \Phi$. \diamond

Remarquons que (Q,S) est (fortement) bienveillante si et seulement si (Q,S^*) est (fortement) bienveillante.

Exemples.

- 1) Si $S = \zeta$ alors $S^* = \emptyset$. Dans ce cas, S est (trivialement) fortement bienveillante.
- 2) Si $S = \zeta - \{(p,p) : p \in P\}$, alors $S^* = \{(p,p) : p \in P\}$ (ceci correspond, comme on l'a vu, aux empilements stricts et aux jeux de piles). Si $(p,q) \in S$ et $(r,q) \in S^*$ alors $r = q$

et $p\zeta r$. La deuxième condition se vérifie de la même façon. Donc S est fortement bienveillante.

- 3) On peut traiter les groupes libres partiellement commutatifs de la façon suivante. Considérons l'ensemble des positions P . On construit un ensemble $P^\pm = \{p^+, p^-, \dots\}$ pour qu'à chaque position $p \in P$ correspondent les deux éléments p^+ et p^- de P^\pm . On écrira $(p^+)^{-1} = p^-$ et $(p^-)^{-1} = p^+$. On étend ζ à P^\pm en posant:

$$\text{si } p, q \in P \text{ avec } p\zeta q \text{ alors } p^\pm \zeta q^\pm$$

(ici, pour une position $r \in P$, r^\pm représente r^+ ou r^-). On peut alors représenter chaque élément du groupe libre G engendré par P par les empilements de $\mathcal{H}(P^\pm, S)$ où

$$S = \zeta - \{(p^+, p^-), (p^-, p^+): p \in P\}.$$

La relation S ne permet donc pas aux éléments “non-simplifiés” de G d'apparaître dans $\mathcal{H}(P^\pm, S)$. On montre que (P^\pm, S) est fortement bienveillante. Soit $(p, q) \in S$ et $(r, q) \in S^*$ pour $p, q, r \in P^\pm$ avec $p\zeta q\zeta r$. On a donc $r = q^{-1}$, d'où $p\zeta r$ puisque $p\zeta q$. L'autre condition est symétrique.

- 4) Soit $P = \{1, 2, \dots\}$ et $\zeta = P \times P$. Soit $S = \{(i, j) \in P^2: i-j \geq 2\}$; on a $S^* = \{(i, j) \in P^2: i-j \leq 1\}$. Clairement, (P, S) est fortement bienveillante. Nous aurons donc dualité entre $\mathcal{H}(P, S)$ et $\mathcal{H}(P, S^*)$. Remarquons que $\mathcal{H}(P, S)$ décrit les D-partages (partages $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ tels que $\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2$) tandis que $\mathcal{H}(P, S^*)$ décrit les 1-compositions (suites $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ telles que $\lambda_i \geq 0$ et $\lambda_{i+1} - \lambda_i \leq 1$). Andrews [An] a relevé cette dualité en considérant l'inverse du membre de gauche de la relation de Rogers-Ramanujan. Viennot [Vi4] en a donné une preuve combinatoire similaire à celle qu'on trouve ici.
- 5) Si $\zeta = P \times P$ (cas des mots), toute relation de succession est fortement bienveillante; donc bienveillante. Dans ce contexte, Gessel [Ge; ch.4] montre que la condition 4) du théorème 6.5.1 est suffisante pour obtenir un noyau trivial (théorie des “linked sets”). Sa théorie débouche sur plusieurs applications. \diamond

Nous pouvons aussi chercher des conditions pour obtenir un analogue du théorème 4.2.2 de Desainte-Catherine-Viennot.

Théorème 6.5.5. Soit \mathcal{G} un idéal gauche avec $\pi(\mathcal{G}) = P$. Posons $M = P \cap \mathcal{G}$ et $S = \text{Succ}(\mathcal{G})$. S'il existe un ensemble $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}(P)$ tel que

$$N(\mathcal{G} \times \mathcal{H}(P, S^*)) = \{\Phi\} \times \mathcal{D}$$

alors

$$\mathcal{G} = \{E \in \mathcal{H}(P, S): \min(E) \subseteq M\}$$

et

$$\mathcal{D} = \{F \in \mathcal{H}(P, S^*): \min(F) \subseteq P - M\}. \quad \diamond$$

Démonstration. Comme $\{\Phi\} \times \mathcal{D} \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{H}(P, S^*)$, on a $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}(P, S^*)$. On montre que \mathcal{D} prend bien la forme annoncée. Soit $F \in \mathcal{H}(P, S^*)$; par définition du noyau, on peut écrire: $(\Phi, F) \in \{\Phi\} \times \mathcal{D}$ ssi chaque pièce q de $\min(F)$ n'appartient pas à M . Autrement dit $F \in \mathcal{D}$ ssi $F \in \mathcal{H}(P, S^*)$ et $\min(F) \subseteq P - M$.

Ensuite, on montre que \mathcal{G} prend lui aussi la forme annoncée. Il est clair que $\mathcal{G} \subseteq \{E \in \mathcal{H}(P, S): \min(E) \subseteq M\}$. Supposons qu'il existe un empilement E dans ce dernier ensemble et qui n'appartienne pas à \mathcal{G} . On aura pris soin de choisir E pour que $|E|$ soit minimal. On procède par un argument similaire à celui utilisé dans la preuve du théorème 6.5.1.

Si $|E| \leq 1$ alors $E = \min(E) \subseteq M \subseteq \mathcal{G}$. On doit donc avoir $|E| \geq 2$. Soit $p \in \max(E)$. Écrivons $E = E' \circ p$. Clairement, $E' \in \mathcal{H}(P, S)$ et $\min(E') \subseteq M$. Par minimalité de $|E|$, on a $E' \in \mathcal{G}$. Ainsi, $(E', p) \in \mathcal{G} \times \mathcal{H}(P, S^*)$; comme $E' \neq \Phi$, on a $(E', p) \notin N(\mathcal{G} \times \mathcal{H}(P, S^*))$. Mais $E' \circ p = E \notin \mathcal{G}$; donc il existe $q \in \max(E')$ telle que $\varphi(E', p) = (E'', q \circ p)$ où $E' = E'' \circ q$. Comme $E = E'' \circ q \circ p \in \mathcal{H}(P, S)$ et comme $q \circ p \in \mathcal{D}$, on ne peut avoir $p \not\subset q$. Donc $p \subset q$. Par minimalité de $|E|$, $E'' \circ p, E'' \circ q \in \mathcal{G}$, d'où $E = E'' \circ p \circ q \in \mathcal{G}$: une contradiction. \diamond

Théorème 6.5.6. Soit (P, S) une relation de succession, $M \subseteq P$ soit

$$\mathcal{G} = \{E \in \mathcal{H}(P, S): \min(E) \subseteq M\}$$

et

$$\mathcal{D} = \{F \in \mathcal{H}(P, S^*): \min(F) \subseteq P - M\}.$$

Si (P, S) est fortement bienveillante, alors

$$N(\mathcal{G} \times \mathcal{H}(P, S^*)) = \{\Phi\} \times \mathcal{D}. \quad \diamond$$

Démonstration. Il est clair que $\{\Phi\} \times \mathcal{D} \subseteq N(\mathcal{G} \times \mathcal{H}(P, S^*))$. Soit (E, F) un élément du noyau. Soit $E \circ F_2$ le facteur droit déterminé par E dans $E \circ F$ et soit F_1 la partie de F non-connectée à E . Comme F_2 est un facteur droit de F , on a $F_2 \in \mathcal{H}(P, S^*)$.

Supposons que

$$(E, F_2) \notin N(\mathcal{H}(P, S) \times \mathcal{H}(P, S^*)).$$

On a deux possibilités; il peut exister une pièce $p \in \max(E)$ telle que $p \circ F_2 \in \mathcal{H}(P, S^*)$. Mais alors $p \circ F_2$ et $F = F_1 \circ F_2$ sont facteurs droits de $p \circ F$. Donc $(p \circ F_2) \vee^* F$ existe et

est $p \circ F$. Or $p \circ F_2$ et F appartiennent à $\mathcal{H}(P, S^*)$. Donc $p \circ F \in \mathcal{H}(P, S^*)$ et (E, F) ne peut appartenir au noyau $N(\mathcal{G} \times \mathcal{H}(P, S^*))$.

L'autre possibilité est qu'il existe $q \in \min(F_2)$ telle que $E \circ q \in \mathcal{H}(P, S)$. Mais, comme $q \in F_2$, on a $\min(E \circ q) = \min(E) \subseteq M$; d'où $E \circ q \in \mathcal{G}$. Nous sommes forcés de conclure que $q \notin \min(F_2)$ sinon on aurait $(E, F) \in N(\mathcal{G} \times \mathcal{H}(P, S^*))$. Mais alors, il existe une pièce $r \in F$ recouverte par q . De plus $(r, q) \in S^*$. Remarquons que $r \in F_1$ puisque $q \in \min(F_2)$. Par définition de l'empilement F_2 , il existe aussi une pièce $p \in E$ recouverte par q . Comme $E \circ q \in \mathcal{G}$, on a $(p, q) \in S$. Comme (P, S) est fortement bienveillante, on $p \zeta r$. Mais ceci contredit le fait que E et F_1 soient non-connectés.

Aussi notre supposition de départ était fausse et

$$(E, F_2) \in N(\mathcal{H}(P, S) \times \mathcal{H}(P, S^*)).$$

Or (P, S) est bienveillante; donc $(E, F_2) = (\Phi, \Phi)$. Comme $(\Phi, F) \in N(\mathcal{G} \times \mathcal{H}(P, S^*))$ on a $\min(F) \subseteq P - M$. \diamond

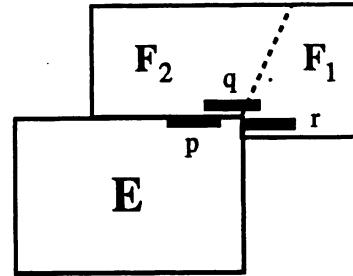


Fig 6.6

Conclusion

Les empilements de Lyndon jouent le même rôle, dans un contexte non-commutatif, que les mots de Lyndon: la plupart des propriétés combinatoires de ces derniers se relèvent au niveau des empilements. Nous avons obtenu ces résultats en réglant deux problèmes: l'étude de la conjugaison dans les empilements et l'introduction d'un ordre total sur ceux-ci qui imite l'ordre lexicographique sur les mots.

La conjugaison a déjà été étudiée par Duboc. Nous apportons une vision différente, ce qui permet d'obtenir un théorème essentiel pour le développement de la théorie. En effet, la proposition 2.2.6 relie, par une transposition, deux pyramides conjuguées dont les pièces de base occupent la même position. Ceci permet de montrer l'équivalence de deux définitions possibles des empilements de Lyndon: celle faisant appel à la conjugaison et celle faisant appel à une transposition (définition 2.4.1 et proposition 2.4.3).

L'ordre total sur les empilements, défini à partir des mots standards associés aux empilements, introduit une plus grande complexité dans les démonstrations. Il semble que nous ne puissions échapper à cet état de fait. La difficulté réside dans l'inégalité:

$$St(E \circ F) \geq St(E)St(F)$$

qui n'a pas d'équivalent pour les mots. En fait, si on avait toujours l'égalité des deux membres, on obtiendrait la théorie des mots de Lyndon. Aussi, on a du étudier des conditions qui permettent de retrouver l'égalité dans plusieurs cas importants. Fondamentalement, l'inégalité résulte de la non-connexité de certaines positions; il n'est donc pas surprenant que des conditions de connexité viennent teinter certaines propositions. Ceci est particulièrement apparent dans les sections traitant de la superposition des empilements de Lyndon, de la factorisation standard, des bases d'algèbres de Lie,... où des arguments très techniques furent nécessaires pour circonvenir la difficulté.

Malgré tout, un certain travail reste à faire. Ainsi, on aurait pu développer l'analogue du produit de "shuffle", en liaison avec les algèbres de Lie. Dans une autre

direction, il est curieux de constater que la plupart des démonstrations des propriétés des empilements de Lyndon appellent deux arguments distincts. Un premier traite les cas où on ne peut se ramener à la théorie des mots, l'autre invoque justement cette théorie. On souhaite éventuellement unifier ces deux types d'arguments.

À l'aide du modèle des chemins, Gessel et Viennot avaient déjà démontré l'égalité de Jacobi dans le cas où le graphe sous-jacent n'a pas de circuits. Il était bien tentant d'éliminer cette contrainte, d'autant plus que des preuves combinatoires (avec circuits) du cas à un chemin (inversion de matrices par cofacteurs) existaient déjà. Dans son mémoire de maîtrise, l'auteur avait réussi à résoudre le problème, mais au prix de certaines difficultés. Comme on l'a vu, le cœur du problème consiste en la découverte d'une involution qui élimine certaines structures indésirables. L'involution que l'auteur apportait à ce moment se définissait en deux étapes: une involution applicable à deux chemins, et, dans le cas d'une configuration comportant plus de deux chemins, la recherche d'un pivot qui permette de dire à quelle paire de chemins ont fera subir l'involution précédente. Le caractère involutif de celle-ci était difficile à prouver. À priori, il était presqu'incroyable que la fonction donnée puisse être une involution. De plus, la définition du pivot semblait comporter une part exagérée d'arbitraire.

Le chapitre 5 apporte une meilleure solution au problème. Maintenant, le caractère involutif de la fonction qui y est décrite (définition 5.5.6) devrait apparaître immédiatement. Mieux, elle traite d'un coup, sans l'intermédiaire de la définition d'un pivot, n'importe quel nombre de chemins par configuration. Il semble donc que nous ayons obtenu, cette fois, l'involution combinatoire naturelle. Comme argument supplémentaire, rappelons que cette involution démontre une version non-commutative de l'égalité de Jacobi.

L'utilisation d'une nouvelle définition des empilements, comme suggéré par Viennot, amène très naturellement les nouvelles opérations \wedge et \vee pour faire de $\mathcal{H}(\mathbf{P})$ ce que nous avons appelé un treillis partiel. Cette structure apparaît dans l'étude de la transférabilité, préfigurée par Dulucq et Viennot (manuscrit cité par Bourret [Bo] pp.65-66). Dans leur travail, l'ensemble droit \mathcal{D} sujet au transfert de pièces est un ensemble d'empilements triviaux. Les ensembles gauche \mathcal{G} et droit \mathcal{D} obéissent à des conditions assez semblables à celles qui en feraient des idéaux. Nous généralisons ces résultats de plusieurs façons: ainsi, \mathcal{D} est un idéal droit qui n'est plus nécessairement constitué d'empilements triviaux. Nous obtenons des conditions simples qui permettent de vérifier quels couples d'idéaux \mathcal{G}, \mathcal{D} peuvent être sujet au transfert. De plus, on parvient à cerner les paires d'idéaux dont le produit des séries formelles associées se réduit à \mathbf{I} . Ceci s'apparente à la théorie des "linked sets" de Gessel [Ge]. Bien qu'il reste beaucoup de travail à faire dans cette direction, on peut espérer trouver, dans un proche avenir, une théorie plus complète et de nombreuses applications.

Rappel des notations

\mathbb{A}	anneau commutatif unitaire.
$\mathbb{A}[[P]]$	algèbre des séries formelles (commutatives) en P sur \mathbb{A} .
$\mathbb{A}[P]$	algèbre des polynômes (commutatifs) en P sur \mathbb{A} .
$\mathbb{A}\langle P \rangle$	algèbre des polynômes (non-commutatifs) en P sur \mathbb{A} .
$\mathbb{A}\langle\langle P \rangle\rangle$	algèbre des séries formelles (non-commutatives) en P sur \mathbb{A} .
$\mathbb{A}_L\langle\langle P \rangle\rangle$	algèbre de Lie des séries formelles (non-commutatives) en P sur \mathbb{A} .
$\mathbb{A}^\mu\langle\langle P \rangle\rangle$	module des séries formelles (non-commutatives) en P sur \mathbb{A} de poids μ .
\mathcal{A}_p	alphabet des super-lettres de base p .
$a:d \rightarrow f$	arc reliant d à f .
A	alphabet; ensemble des arcs.
A^*	monoïde libre engendré par l'alphabet A .
A^+	semi-groupe libre engendré par l'alphabet A .
A^*/\equiv	monoïde libre partiellement commutatif engendré par l'alphabet A .
$A_p(\)$	fonction réalisant une transposition déterminée par une pièce d'un empilement.
$A_p^*(\)$	fonction réalisant une conjugaison déterminée par une pièce d'un empilement.
$\zeta; \zeta'$	relation de concurrence; de commutation.
$\zeta(\)$	ensemble des positions concurrentes avec... .
C	commutation partielle.
C	ensemble des circuits élémentaires d'un graphe.
C^*	ensemble des circuits élémentaires d'un graphe comportant des arcs spéciaux.
$cy(\)$	nombre de cycles de... .
$cyp(\)$	nombre de cycles pairs de... .

\mathcal{D}	ensemble, idéal droit.
$\mathcal{D}^p(P)$	ensemble des pyramides de sommet p .
$\mathcal{D}_p(P)$	ensemble des pyramides (inversées) de base p .
$D(v)$	nombre de pyramides de poids commutatif t^v .
$D(n,v)$	nombre de pyramides comportant n pièces dont v_p de position p .
\det	déterminant (souvent non-commutatif).
E_p	ensemble des pyramides inversées élémentaires de base p .
E^t	renversé de l'empilement E .
$ E $	nombre de pièces de l'empilement E .
$ E _p$	nombre de pièces occupant la position p dans l'empilement E .
$\text{Fix}()$	nombre de permutations laissant fixe la factorisation de Lyndon de...
G	ensemble, idéal gauche.
G	un graphe.
G^*	un graphe comportant des arcs spéciaux.
$G[D,F]$	ensemble des configurations de D à F .
$G_\sigma[D,F]$	ensemble des configurations de D à F par la permutation σ .
$G_\sigma^*[D,F]$	ensemble des mauvaises configurations de D à F par la permutation σ .
$\mathcal{H}(P)$	monoïde des empilements sur P .
$\mathcal{H}(P,S)$	ensemble des empilements sur P sujets à la succession S ; empilements stricts.
$H()$	hauteur totale de...
$h()$	hauteur maximale de...
$\inf()$	la position la plus petite de...
I	matrice identité; empilement vide; la série formelle 1Φ .
$\mathfrak{L}(P)$	algèbre de Lie libre partiellement commutative engendrée par P .
$\mathfrak{L}^\mu(P)$	composante homogène de poids μ de $\mathfrak{L}(P)$.
$\mathcal{L}_p, \mathcal{L}_p(P, \leq)$	ensemble des empilements de Lyndon de base p .
$L(A,C)$	monoïde libre partiellement commutatif engendré par A avec commutation C .
$L(v)$	nombre d'empilements de Lyndon de poids t^v .
$L(n;v)$	nombre d'empilements de Lyndon comportant n pièces dont v_p (avec $v = (v_p)_{p \in P}$) de position p .

$\ell()$	longueur de...
$\max()$	maximum de...(surtout pour les empilements).
$\min()$	minimum de...(surtout pour les empilements).
$M[D,F]$	la matrice $(m_{d_i,f_j})_{i,j}$.
\mathbb{N}	$\{0,1,2,\dots\}$.
$[n]$	$\{1,\dots,n\}$, pour $n \in \mathbb{N}$.
$N(A)$	noyau de l'ensemble transférable A.
\mathbb{P}	$\{1,2,\dots\}$.
P, \mathbf{P}	ensemble des positions; avec relation de concurrence ζ .
\mathbb{Q}	les nombres rationnels
$R(A)$	monoïde des réarrangements d'arcs.
S_k	groupe des permutations de $[k]$.
S	relation de succession, en particulier celle définissant les empilements stricts.
S^*	ensemble des sommets d'un graphe.
$SI[D,F]$	relation de succession duale de S, en particulier pour les jeux de piles.
$SI_\sigma[D,F]$	ensemble des sommets (spéciaux ou non) d'un graphe.
	ensemble des configurations sans intersections de D à F.
	ensemble des configurations sans intersections de D à F par la permutation σ .
$St()$	mot standard associé à l'empilement...
$Succ()$	ensemble des facteurs à 2 éléments (successions) de...
$sup()$	la position la plus grande de...
$T(P)$	ensemble des empilements triviaux sur P.
$T_1(E,F)$	ensemble des pièces transférables de E vers F.
$T_2(E,F)$	ensemble des pièces transférables de F vers E.
v	poids.
V	matrice d'incidence (pondérée) d'un graphe.
\mathbb{Z}	les entiers relatifs

γ	circuit.
η	chemin élémentaire.
H	configuration sans intersections de chemins élémentaires.
$\theta, \theta_1, \theta_2$	involutions Lyndon–super-lettres–empilements triviaux.
ι	involution qui transforme les arcs spéciaux.
$\Lambda(\)$	bijection empilements de Lyndon–base de l’algèbre de Lie.
$\chi(\)$	bijection (de Dulucq-Viennot) chemins–empilements de circuits.
$\pi(\)$	ensemble des positions de...
$\rho(\)$	fonction empilements de circuits/chemins–fonds.
$\Sigma(\)$	la factorisation standard de l’empilement...
φ	bijection mots–empilements.
	conjugaison.
	équivalence de pré-empilements.
	bijection de transfert.
Φ	empilement vide (noté aussi I).
$\Psi(\)$	involution sur les mauvaises configurations.
ω	chemin.
$\omega:d \rightarrow f$	chemin reliant d à f .
Ω	configuration de chemins.
Ω^*	$0*\omega_1* \dots * \omega_k$.
\leq_E	ordre partiel associé à l’empilement E .
\circ	superposition.
\sim	conjugaison.
\equiv	équivalence (commutation).
$\wedge, \vee, \wedge^*, \vee^*$	opérations du treillis partiel des empilements.
$(-1)^\sigma$	signe de la permutation σ .
$(-1)^\Omega$	signe de la configuration Ω .
$(-1)^{D+F}$	$(-1)^{\sum d_i + \sum f_i}$.

Index

- algèbre
 - de Lie 42
 - libre (partiellement commut.) 42
 - du monoïde 41
 - générée par 41
- alphabet 7, 16
- arc 72
 - ordinaire 76, 88
 - spécial 76, 88
- bijection
 - associée à 23
 - bonne config. 89
 - de Dulucq-Viennot 81, 82
 - de Dulucq-Viennot (inverse) 84
- chemin 72
 - bon 88
 - couper 73
 - élémentaire 73
 - mauvais 88
 - spécial 88
 - vide 72
- circuit 73
 - élémentaire 73
 - spécial 88
- commutation 7
- compatibilité 107
- concaténation 7
- configuration 73
 - bonne 88
 - longueur 74
 - mauvaise 88
 - permutation associée 74
 - sans intersections 73
 - signe d'une 74
- conjugaison
 - d'empilements 21
 - simple 21
 - de mots 20
- début 72
- déterminant (non-commutatif) 80, 81
- digraphe 72
- dualité 107
- empilements 10
 - admissible 30
 - circulaires 21
 - connectés 17
 - connexe 18
 - de Lyndon 31
 - de base 32
 - périodique 21
 - primitif 21
 - stricts 96
 - trivial 16
- ensemble
 - des pièces transférables 98
 - des successions 105
 - transférable 98
- équivalence
 - de mots 7
 - de pré-empilements 9
- facteur 18
 - déterminé par 18
 - droit 18
 - gauche 18
 - propre 18
- factorisation
 - de Lyndon 36
 - en pyramides 26
 - en super-lettres 33
- factorisation standard
 - d'empilements 43
 - de mots 43
- fin 72
- flot 74
- forme normale lexicographique 28
- formule de Witt 68

- graphé 72
- hauteur maximale 9
- hauteur totale 9
- idéal
 - bilatère 103
 - compatibilité 107
 - complet 106
 - droit 103
 - engendré par 106
 - gauche 103
- infimum 101
- involution
 - autres 61
 - de Gessel-Viennot 87
 - de transfert 98
 - mauvais chemins 91
 - mauvaises config. 92
- jeu de piles 96
- lacet 72
- langage trace 7
- lettres 7
- longueur 72, 73
- matrice d'incidence 75
- max 16
- min 16
- monoïde 7
 - partiellement commutatif 7, 15
- mot 7, 16
 - de Lyndon 31
 - standard 28
 - associé à 28
 - vide 7
- niveau 9
- noyau 98
- ordre
 - associé à un empilement 15
 - lexicographique
 - empilements 28
 - mots 28
 - paires de mots 49
- partie non-connectée 19
- pièces 9
- pile 96
- pivot 61, 87
- poids 42, 56, 74, 76
 - régulier pour 56, 75
 - totalement régulier 56
- polynômes formels 41
- positions 8, 9
 - concurrentes 16
- pré-empilement 9
 - vide 13
- produit 72
 - de polynômes formels 41
- pyramide
 - de base 16
 - de sommet 16, 19
 - élémentaire 26
 - inversée 16
- racine 21
- relation
 - de commutation 9
 - de concurrence 8
 - totale 11
 - triviale 11
 - de succession 105
 - bienveillante 109
 - compatible 107
 - duale 107
 - fortement bienveillante 110
 - relier 72
 - renversement d'empilements 17
 - réarrangement 74
- séries formelles 55
- sommets 72
- successeurs 105
- super-lettre
 - de base 33
- superposition 12, 13
- supréumum 102
- trace 7
- transposition
 - d'empilements 21
 - propre 21
 - simple 21
- treillis 102
 - partiels 103

Bibliographie

- [AK] A.V. Anisimov, D.E. Knuth, *Inhomogenous sorting*, Internat. J. Comput. Inform. Sci., **8**, (1979), 255-260.
- [An] G.E. Andrews, *The Rogers-Ramanujan reciprocal and Minc's partition function*, Pacific J. of Math., **95**, (1981), 251-256.
- [AR] I. Aalbersberg, G. Rosenberg, *Theory of Traces*, Theoret. Comput. Sci., **60**, (1988), 1-82.
- [Bo] J. Bourret, *Applications algébriques des empilements de pièces et de la méthode involutive en combinatoire*, mémoire de maîtrise, UQAM, (1985), 95 p.
- [Bu] P.N. Burgoyne, *Remark on the combinatorial approach to the Ising problem*, J. Math. Phys. **4**, (1963), 1320-1326.
- [CF] P. Cartier, D. Foata, *Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements*, Lecture Notes in Math., **85**, Springer-Verlag, Berlin, (1969), 88 p.
- [CLL] M. Content, F. Lemay, P. Leroux, *Catégories de Möbius et fonctorialités: un cadre général pour l'inversion de Möbius*, J. Comb. Th. (A), **28**, (1980), 169-190.
- [Co] C.L. Coates, *Flow-graph Solutions of Linear Algebraic Equations*, IRE Trans. Circuit Theory CT-6, (1959), 170-187.
- [CFL] K.T. Chen, R.H. Fox, R.C. Lyndon, *Free differential calculus, IV.—The quotient groups of the lower central series*, Ann. Math., **68**, (1958), 81-95.
- [Db1] C. Duboc, *Some properties of commutation on free partially commutative monoids*, Inform. Proc. Letters No 20, (1985), 1-4.

- [Db2] C. Duboc, *Commutations dans les monoïdes libres: un cadre théorique pour l'étude du parallélisme*, thèse de doctorat, Paris, (1986).
- [Db3] C. Duboc, *On some equations in free partially commutative monoids*, Theoret. Comput. Sci., **46**, (1986), 159-174.
- [DK1] G. Duchamp, D. Krob, *The Free Partially Commutative Lie Algebra: Bases and Ranks*, L.I.R., Université de Rouen, (1990), 35 p.
- [DK2] G. Duchamp, D. Krob, *The Lower Central Series of the Free Partially Commutative Group*, LITP 90.32, Institut Blaise Pascal, (1990), 19 p.
- [Dv] J.P. Duval, *Factorizing words over an ordered alphabet*, J. Algorithms, **4**, (1983), 363-381.
- [Fo1] D. Foata, *A Non-Commutative Version of the Matrix Inversion Formula*, Advances in Math., **31**, (1979), 330-349.
- [Fo2] D. Foata, *A Combinatorial Proof of Jacobi's Identity*, Annals of Discrete Math., **6**, (1980), 125-135.
- [FZ] D. Foata, D. Zeilberger, *Laguerre Polynomials, Weighted Derangements, and Positivity*, SIAM J.Disc.Math., **1**, #4, (1988), 425-433.
- [Ge] I.M. Gessel, *Generating Functions and Enumeration of Sequences*, thèse de doctorat, M.I.T., Cambridge, (1979).
- [GV] I. Gessel, G. Viennot, *Binomial Determinants, Paths and Hook Length Formulae*, Advances in Math., **58**, (1985), 300-321.
- [Ha] F. Harary, *The Determinant of Adjacency Matrix of a Graph*, SIAM Rev., **4**, (1962), 202-210.
- [Ja] D.M. Jackson, *The Combinatorial Interpretation of the Jacobi Identity from Lie Algebra*, J. Comb. th. A, **23**, (1977), 233-257.
- [Jo] A. Joyal, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Adv. in Math., **42**, (1981), 1-82.
- [Ka] P. W. Kasteleyn, *Graph Theory and Crystal Physics*, dans Graph Theory and Theoretical Physics, F. Harary, éd., (1967), Acad. Press, N.Y., 43-110.

- [Lm] G. Lallement, *Semigroups and Combinatorial Applications*, John Wiley, New-York, (1979).
- [Ln] P. Lalonde, *Déterminants et chemins dans un graphe*, Mémoire de maîtrise, UQAM, Montréal, (1987), 180 p.
- [Lo] M. Lothaire, *Combinatorics on words*, Encyclopedia of Math., #17, Addison Wesley, Reading, (1983), 238 p.
- [Ly] R.C. Lyndon, *On Burnside problem I*, Trans. Am. Math. Soc., **77**, (1954), 202-215.
- [Ma] A. Mazurkiewicz, *Concurrent program schemes and their interpretations*, DAIMI Rep., PB 78, Aarhus University, (1977).
- [Pc] J.K. Percus, *Combinatorial Methods*, Applied Mathematical Sciences, **4**, Springer-Verlag, N.Y., (1971), 194 p.
- [Pe1] D. Perrin, *Words over a partially commutative alphabet*, in Combinatorial Algorithms on Words, A. Apostolico, Z. Galil, eds., Springer, (1985), 329-340.
- [Pe2] D. Perrin, *Partial Commutations*, preprint, LITP #89-30, Univ. P. et M. Curie, Paris 7, (1989), 15 p.
- [Po] J. Ponstein, *Self-avoiding paths and the adjacency matrix of a graph*, J. SIAM Appl. Math., **14**, (1966), 600-609.
- [Sc1] M.P. Schutzenberger, *Sur une propriété combinatoire des algèbres de Lie libres pouvant être utilisée dans un problème de mathématiques appliquées*, Séminaire Dubreuil-Piso, année 1958-59, Paris, (1958), 23 p.
- [Sc2] M.P. Schutzenberger, *On a factorization of free monoids*, Proc. A.M.S., **16**, 1, (1965), 21-24.
- [Sc] A.J. Schwenk, *Computing the Characteristic Polynomial of a Graph*, dans Graph and Combinatorics, Lecture Notes in Math., **406**, Springer-Verlag, New-York, (1974), 153-185.

- [Sh1] S. Sherman, *Combinatorial aspects of the Ising model for ferromagnetism I. A conjecture of Feynman on paths and graphs*, J. Math. Phys., **1**, (1960), 202-217.
- [Sh2] S. Sherman, *Combinatorial aspects of the Ising model for ferromagnetism II. An analogue to the Witt identity*, Bull. Am. Math. Soc. , **68**, (1962), 225-229.
- [Sp] L. Spialter, *The Atom Connectivity Matrix and its Characteristic Polynomial*, J. Chem. Documentation, **4**, (1964), 261-274.
- [SS] M.P. Schützenberger, S. Sherman, *On a Formal Product over the Conjugate Classes in a Free Group*, J. Math. Anal. and Appl. ,**7**,#3, (1963), 482-488.
- [Str] H. Straubing, *A combinatorial Proof of the Caley-Hamilton theorem*, Discrete Math., **43**, (1983), 273-279.
- [Vi1] X. Viennot, *Algèbres de Lie libres et monoïdes libres*, Lecture Notes in Math., **691**, Springer-Verlag, (1978), 124 p.
- [Vi2] X. Viennot, *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux*, notes de conférence, dépt. de Math., UQAM , (1984), 215 p.
- [Vi3] X. Viennot, *Heaps of pieces, I: Basic definitions and combinatorial lemmas*, dans Combinatoire Énumérative, G. Labelle, P. Leroux, éds., Lecture Notes in Math., **1234**, Springer-Verlag, (1986), 321-350.
- [Vi4] X. Viennot, *Bijections for the Rogers-Ramanujan reciprocal*, Université de Bordeaux 1, (1987), 14 p.
- [Wa] Wai-Kai Chen, *The Inversion of Matrices by Flow Graph*, J. SIAM Appl. Math., **12**, (1964), 676-683.
- [Ze] D. Zeilberger, *A Combinatorial Approach to Matrix Algebra*, Discrete Math., **56**, (1985), 61-72.
- [Zn] J. Zeng, *Calcul Saalschützien*, thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg, (1988), 97 p.

Contribution à l'étude des empilements

Pierre Lalonde

Errata

- p iv 2^{ième} parag., ligne -2: ...Lyndon, la factorisation
- p v 1^{ième} ligne: au lieu de "...des empilements" lire "...des déterminants"
- p 9 fig 1.2 c) ...l'empilement correspondant
- p 16 démonstration: au lieu de "(p₀ i₀)" lire "(p₀, i₀)"
- p 46 démonstration (milieu) ...cette affirmation
- p 63 2^{ième} formule, dernier membre =
$$\prod_{\substack{p \in P \\ \text{décroissant}}} \left(\mathbf{I} + \sum_{\substack{D \in \mathcal{D}_p \\ \text{admissible}}} D \right)$$
- 3^{ième} formule $\mathbf{I} + \sum_{\substack{D \in \mathcal{D}_p \\ \text{admissible}}} D$
- p 66 2^{ième} ligne au lieu de "...nous enseignent" lire "...nous enseigne"
- p 69 théorème 4.5.1, formule au lieu de "...et où dln" lire "...et où dlv"
- p 88 4^{ième} ligne au lieu de "...arc ordinaires" lire "...arcs ordinaires"
- p 96 8^{ième} ligne au lieu de "...vient immédiatement" lire "...vient immédiatement"
- p 98 démonstration du théorème 6.2.3, 3^{ième} ligne au lieu de "φ(E, F)" lire "φ(E, F)"
- p 101 2^{ième} ligne après la définition 6.3.1 au lieu de "...facteurs droits" lire "...facteurs gauches"
- p 104 Exemple 3) au lieu de " $\mathcal{H}(E) \leq 10$ " lire "h(E) ≤ 10"