

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ÉTUDE D'ESPACES
DE POLYNÔMES HARMONIQUES
GÉNÉRALISÉS

THÈSE
PRÉSENTÉE
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

PAR
FRANÇOIS LAMONTAGNE

JUIN 2003

Table des matières

Liste des tableaux	v
Table des figures	vi
INTRODUCTION	1
Chapitre I	
MODULES BIGRADUÉS	4
1.1 \mathbb{S}_n -modules bigradués et caractéristiques de Frobenius	4
1.1.1 Partages et permutations	4
1.1.2 Représentations	6
1.1.3 Produit tensoriel de représentations	9
1.1.4 Représentations induites et restreintes	10
1.1.5 Les \mathbb{S}_n -modules	11
1.2 Fonctions symétriques classiques	12
1.2.1 L'anneau Λ_n	12
1.2.2 L'anneau Λ	13
1.2.3 Les bases usuelles de Λ	15
1.2.4 Les fonctions de Schur	16
1.2.5 Les séries génératrices et les changements de bases	18
1.3 λ -Anneaux et λ -substitutions	19
1.3.1 Opérateurs d'Adams	21
1.4 Polynômes de Macdonald renormalisés	23
1.5 Les caractéristiques de Frobenius bigraduées	28
1.6 Fonctions diagonalement symétriques	29
1.6.1 Partages et relations d'ordre	29
1.6.2 Définitions des fonctions diagonalement symétriques à deux jeux de variables	32
1.7 Les modules M_Δ	35

1.8	Éléments de la théorie des polynômes alternés	37
1.9	Identités liées aux coins d'un diagramme de Ferrers	39
1.10	Identités circulaires, opérateurs de différences et curiosité algébrique	43
Chapitre II		
	HARMONIQUES DIAGONALES	48
2.1	Harmoniques classiques	48
2.2	Harmoniques diagonales	52
2.3	Les harmoniques de $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n$	53
2.4	Polynômes de diagrammes	54
2.4.1	Diagrammes à un trou	54
2.4.2	Traduction en terme des noyaux	56
2.5	Récurrence pour les atomes	59
Chapitre III		
	DIAGRAMMES COMPACTS	61
3.1	Diagrammes compacts dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	62
3.2	Diagrammes compacts et harmoniques diagonales	78
3.3	Diagrammes compacts et nombres de Catalan	81
3.4	Configurations compactes dans \mathbb{N}^3	87
3.5	Compacts de diagrammes à cases multiples	90
3.6	Liens avec les fonctions quasi-symétriques	96
3.7	Tableaux semi-standards à entrées dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	102
CONCLUSION		112
Annexe A		
	CALCULS PAR ORDINATEUR	113
A.1	\mathcal{DA} en tant que $\Lambda[X] \otimes \Lambda[Y]$ -module	113
A.2	Bases empiriques des harmoniques diagonales alternantes	114
A.2.1	Le cas $n = 4$	116
A.2.2	Le cas $n = 5$	118
A.3	Code MAPLE pour les diagrammes compacts	125
Annexe B		

AJOUTS SUR LES FONCTIONS BISYMÉTRIQUES	131
B.1 Relations entre la série génératrice des fonctions complètes homogènes et les autres bases	131
B.1.1 Produit scalaire et relations d'orthogonalité	135
B.1.2 Un autre candidat pour Z_λ via l'isométrie ϕ_u^*	137
B.1.3 La matrice de transition $M(p,m)$ à un et deux jeux de variables	139
B.1.4 Les nombres de Kostka pour le cas à deux jeux de variables	141
B.2 Fonctions diagonalement symétriques à plusieurs jeux de variables	141
B.2.1 Les partages vectoriels et les partitions colorées	142
B.2.2 Les fonctions symétriques en plusieurs jeux de variables	146
B.2.3 Morphismes et définitions en termes d'ensembles de dispositions	148
B.2.4 Les théorèmes principaux	150
B.2.5 Identification de \mathfrak{M}_{1^n} avec $\tilde{\varphi}$	151

Liste des tableaux

1.1 Les coefficients de s_μ dans $\nabla(s_\lambda)$ pour $\lambda, \mu \vdash 2$.	26
1.2 Les coefficients de s_μ dans $\nabla(s_\lambda)$ pour $\lambda, \mu \vdash 3$.	26
1.3 Les coefficients de s_μ dans $\nabla(s_\lambda)$ pour $\lambda, \mu \vdash 4$.	27
3.1 Les termes du polynômes $f_2(q,t,w)$ en fonctions des $(\sigma, \tau) \in \mathbb{S}_2^2$.	91
3.2 Les termes du polynômes $f_3(q,t,w)$ en fonctions des $(\sigma, \tau) \in \mathbb{S}_3^3$.	91
3.3 Les coefficients des polynômes $P_\lambda(q,t)$ pour $\lambda \vdash 3$.	104
3.4 Les coefficients des polynômes $P_\lambda(q,t)$ pour $\lambda \vdash 4$.	105

Table des figures

1.1 L'ordre lexicographique renversé sur $\wp_{(2)}^{(3)}$	31
1.2 Un diagramme quelconque	37
1.3 Application de l'opérateur différentiel associé à un Vandermonde	39
1.4 Les bras, jambe et autres dans un diagramme de Ferrers	40
1.5 Les coins externes et internes d'un diagramme de Ferrers	43
1.6 La fonction homogène complète par inclusion-exclusion.	45
3.1 Les deux interprétations de l'identité sur $P_n(q)$	62
3.2 Un diagramme et ses distributions marginales	63
3.3 Les ordres \mathcal{O}_e et \mathcal{O}_l sur une portion de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	66
3.4 La partition de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} - \{\alpha\}$ selon \mathcal{O}_e et \mathcal{O}_l	67
3.5 Intervalles vides pour les mouvements permis	68
3.6 Invariance de G_d sous un mouvement vers le bas	70
3.7 Les montées et descentes d'un diagramme	72
3.8 Le diagramme compact et la permutation associés à un diagramme	73
3.9 Le remplissage de $\rho \setminus \overline{\rho}$ comme trace des mouvements vers la gauche	75
3.10 La deuxième convention d'ordres pour obtenir maj et maj	77

3.11 Les diagrammes compacts pour $n = 2$	78
3.12 Les diagrammes compacts pour $n = 3$	78
3.13 Les diagrammes compacts pour $n = 4$	79
3.14 Un arbre binaire comme graphe de montées et descentes d'un diagramme de permutation	81
3.15 L'arbre binaire selon la présentation usuelle	82
3.16 La décomposition d'un arbre binaire selon les chaînes droites maximales	84
3.17 Le graphe d'une permutation évitant le motif 132.	85
3.18 L'arbre binaire obtenu en modifiant les descentes.	86
3.19 L'arbre ordonné obtenu en considérant les chaînes droites maximales. . .	87
3.20 Un intervalle de l'ordre \mathcal{O}_1 sur \mathbb{N}^3	88
3.21 Un intervalle de l'ordre \mathcal{O}_2 sur \mathbb{N}^3	88
3.22 Un intervalle de l'ordre \mathcal{O}_2 sur \mathbb{N}^3	89
3.23 Le calcul des mouvements permis selon les projections de $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ et \mathcal{O}_3 . .	90
3.24 Intervalles vides pour les mouvements permis (cases multiples)	92
3.25 Un diagramme à cases multiples et distributions marginales	94
3.26 Un diagramme à cases multiples étiquetté et son compact.	94
3.27 Les diagrammes compacts pour $n = 2$	95
3.28 Les diagrammes compacts pour $n = 3$	95
3.29 Les diagrammes compacts pour $n = 4$	97
3.30 Deux tableaux semi-standards correspondant au même tableau standard.	101

3.31 Sur le compact d'un tableau semi-standard canonique dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	108
3.32 Les diagrammes compacts engendrant $\text{SSYT}^o_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(2,1)$	109
3.33 Les diagrammes compacts engendrant $\text{SSYT}^o_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(3,1)$	109
3.34 Les diagrammes compacts engendrant $\text{SSYT}^o_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(2,2)$	110
3.35 Les diagrammes compacts engendrant $\text{SSYT}^o_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(2,1,1)$	111

INTRODUCTION

LES POLYNÔMES harmoniques pour le groupe symétrique sont obtenus comme solutions d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles. Un théorème classique montrent qu'ils sont tous obtenus comme dérivées (d'ordre quelconque) du déterminant de Vandermonde et que l'espace ainsi obtenu est de dimension $n!$. Nous allons en présenter des généralisations naturelles qui soulèvent de nombreux problèmes intéressants de combinatoire algébrique.

Pour délimiter le contexte, on peut situer le début de notre histoire il y a quinze ans au séminaire lotharingien où Macdonald a introduit une nouvelle classe de fonctions symétriques à deux paramètres – maintenant appelées *polynômes de Macdonald* – qui sont en correspondance avec les partages d'entiers. Exprimés dans la base des Schur, ces polynômes ont pour coefficients des expressions rationnelles en q et t – qui sont nommés coefficients de q,t -Kostka car ils généralisent les nombres de Kostka. On a montré depuis que les q,t -Kostka sont en fait des polynômes. De plus, il était conjecturé que ces polynômes appartenaient à $\mathbb{N}[q,t]$; conjecture dite MPK pour «*Macdonald's positivity conjecture*». Afin de démontrer MPK, A. Garsia et M. Haiman en sont venu à formuler une conjecture plus générale indiquant que les polynômes de Macdonald apparaissent comme caractéristiques de Frobenius bigraduées de \mathbb{S}_n -modules bigradués bien choisis, appelons-la *conjecture C = \tilde{H}* . Plus tard, il a été démontré que cette conjecture était équivalente à la *conjecture n!* voulant que les \mathbb{S}_n -modules en question soient de dimension $n!$ (vers 1990). M. Haiman a récemment démontré cette conjecture à l'aide d'outils sophistiqués de la géométrie algébrique. Mais tout n'est pas dit, loin s'en faut!

Il existe d'autre part une autre conjecture plus générale : celle de la *récurrence à quatre termes*, de F. Bergeron, N. Bergeron, A. Garsia, M. Haiman et G. Tesler, faisant inter-

venir les Frobenius bigradués de \mathbb{S}_n -modules correspondants avec des partages *troués*(!). De plus, les espaces impliqués dans la conjecture $n!$ sont tous sous-espaces de l'espace \mathcal{D}_n des harmoniques diagonales. Une autre conjecture stipule à leur propos que

$$\mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{D}_n) = \nabla(e_n),$$

où ∇ est un opérateur défini en terme des polynômes de Macdonald. Même des preuves élémentaires de différentes spécialisations de cette formule relève toujours du défi :

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{D}_n &= (n+1)^{(n-1)}, \text{ pour } q=t=1, \\ \langle \mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{D}_n), e_n \rangle &= \mathcal{C}_n(q,t).\end{aligned}$$

Remarquons que dans [9] a remporté la course aux interprétations combinatoires du q,t -comptage représenté par les q,t -Catalans.

Un autre groupe de conjectures intervient dans le contexte suivant. Soit D_n l'espace

$$\mathcal{L}_\partial[E^\alpha \Delta_n | \alpha \in \mathbb{N}^n].$$

Nous avons alors la conjecture suivante. L'espace de linéarisation (sans dérivation)

$$\mathcal{L}[E^\alpha \Delta_n | \alpha \in \mathbb{N}]$$

serait inclus dans la composante isotypique alternée de \mathcal{D}_n et sa série de Hilbert – le degré en x répertorié par q , celui en y par t – correspondrait au q,t -Catalan $\mathcal{C}_n(q,t)$.

Cette thèse sera organisée de la manière suivante. Au chapitre I, nous présenterons l'essentiel de la théorie des fonctions symétriques dans le but d'introduire rapidement les polynômes de Macdonald renormalisés. Pour bien décrire les opérateurs ∇ , nous aurons besoin des λ -anneaux et de la λ -substitution. Un bref formularium concernant cet opérateur terminera le chapitre.

Au deuxième chapitre, nous verrons de quelle manière les harmoniques diagonales généralisent les harmoniques classiques. En fait les harmoniques proviennent de l'étude

du module des invariants polynomiaux sur lesquels un groupe de réflexion agit. Nous définirons les différents \mathbb{S}_n -modules dont les caractéristiques de Frobenius correspondent expérimentalement aux polynômes de Macdonald renormalisés. Nous mettrons en évidence les structures qui admettent une généralisations aux harmoniques diagonales. La récurrence à quatre termes (un condensé combinatoire de conjectures qui ont été prouvées géométrico-algébriquement depuis) sera abordée.

Le troisième chapitre contiendra les nouveaux résultats à proprement parler. On y développe une approche élémentaire à l'étude des harmoniques diagonales en plongeant \mathcal{D}_n dans un espace plus grand dont la combinatoire est plus facile à maîtriser. En particulier on y étudie les modules $\mathcal{DA}/(XSym \otimes YSym)$ et une base de \mathcal{HDA} en terme de diagrammes compacts, constructions inédites associées aux permutations. Nous y discuterons des méthodes algorithmiques de calculs à l'aide d'exemples mais nous reporterons à l'annexe le code et les calculs en MAPLE.

Nous espérons qu'à la lecture de ce travail les néophytes auront le goût de s'investir dans ce domaine passionnant, et que les érudits sauront trouver quelques nouveautés. Bonne lecture.

François Lamontagne,
Montréal, le 30 avril 2003.

Chapitre I

MODULES BIGRADUÉS ET CARACTÉRISTIQUES DE FROBENIUS

L'ÉTUDE des harmoniques diagonales et des modules de polynômes exigent des outils de la théorie des représentations linéaires des groupes finis. Ce chapitre se veut un bref rappel des éléments nécessaires. Les monographies [24] et [25] ont servi à cette fin.

1.1 \mathbb{S}_n -modules bigradués et caractéristiques de Frobenius

Le but ultime étant la présentation des caractéristiques de Frobenius bigraduées, le lecteur déjà au fait peut sauter cette section sans perdre le fil de la présentation.

1.1.1 Partages et permutations

Définition 1.1.1. *Un partage λ est une séquence*

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dots)$$

d'entiers non-négatifs décroissants,

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq \dots,$$

et contenant un nombre fini d'éléments non-nuls. Ces éléments sont appelés parts du partage. La longueur du partage λ , notée $\ell(\lambda)$, est le nombre de parts de λ . Le cardinal d'un partage λ , noté $|\lambda|$, est

$$|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$$

Réiproquement, pour un entier non-négatif n donné, la notation $\lambda \vdash n$ (lire λ partage de l'entier n) signifie que le partage λ est tel que $|\lambda| = n$.

Remarque 1.1.2. Un partage λ peut être écrit dans la notation multiplicative. Dans cette notation, seules les parts non-nulles apparaissent et elles sont affublées d'un exposant correspondant à leur multiplicité dans le partage. Par exemple, $(5, 3, 3, 2, 1, 1, 1)$ devient $1^3 2^3 5$. La tradition veut que les parts soient dans l'ordre croissant.

Le groupe \mathbb{S}_n est constitué de toutes les permutations de l'ensemble $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Les éléments $\sigma \in \mathbb{S}_n$ peuvent s'exprimer de deux façons. Premièrement, en format deux lignes:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix},$$

où $\sigma(i) = \sigma_i$. Deuxièmement, via leur décomposition en cycles disjoints. Un cycle est constitué d'un élément de $a \in [n]$ et de toutes ses images par les itérées de σ (orbite): $(a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^{k-1}(a))$ où $k \geq 1$ est le plus petit entier tel que $\sigma^k(a) = a$. Un tel cycle est dit de longueur k (écriture non unique). Chaque entier $i \in [n]$ apparaît dans un et un seul cycle. Supposons qu'il y ait d_k cycles de longueurs, alors $1^{d_1} 2^{d_2} \dots n^{d_n}$ est un partage de l'entier n en notation multiplicative (voir remarque 1.1.2) appelé forme ou structure cyclique de la permutation σ et est noté $\lambda(\sigma)$.

Exemple 1.1.3. La permutation $\sigma \in [8]$ suivante

$$\begin{aligned} \sigma &= (3, 5, 6)(2, 1)(4)(7, 8), \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est de forme $\lambda(\sigma) = 1^2 2^3$.

Deux éléments $\sigma, \tau \in \mathbb{S}_n$ sont conjugués si et seulement s'ils possèdent la même structure cyclique. Les classes de conjugaison de \mathbb{S}_n sont donc en bijection avec les partages de

l'entier n . Le nombre d'éléments de la classe de conjugaison $\lambda = 1^{d_1} 2^{d_2} \dots n^{d_n}$ est égal à $n! / z_\lambda$ où

$$z_\lambda = 1^{d_1} d_1! 2^{d_2} d_2! \dots n^{d_n} d_n! \quad (1.1.1)$$

1.1.2 Représentations

Soit V un espace vectoriel de dimension finie d , $GL(V)$ le groupe général linéaire de V (c.-à-d. le groupe des transformations linéaires inversibles de V vers V) et GL_d le groupe des matrices inversibles $d \times d$ à entrées pris dans \mathbb{C} .

Définition 1.1.4. Soit G un groupe fini et V ci-haut. Une représentation (linéaire) de G est un homomorphisme de groupes $\rho : G \longrightarrow GL(V)$. Une représentation matricielle est un homomorphisme de groupes $\rho : G \longrightarrow GL_d$. L'espace V est un G -module s'il est muni une action $G \times V \longrightarrow V$ compatible avec les opérations vectorielles, c.-à-d.

- 1. $\sigma.v \in V$,
- 2. $(\sigma\tau).v = \sigma.(\tau.v)$,
- 3. $\text{id}.v = v$,
- 4. $\sigma.(av + bw) = a(\sigma.v) + b(\sigma.w)$.

Ce sont des définitions équivalentes et l'on peut passer d'une description à l'autre de façon naturelle (modulo le choix d'une base de V). La dimension d est appelée degré de la représentation.

Définition 1.1.5. Soit $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ une représentation. Le caractère de ρ est la fonction $\chi_\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\chi_\rho(\sigma) = \text{tr}(\rho(\sigma)),$$

où $\text{tr}(\rho(\sigma))$ est la trace de la transformation linéaire $\rho(\sigma)$ (qui est égale à la trace de la matrice dans la représentation matricielle correspondante).

Lorsqu'il est question du G -module V , on adopte la notation χ_V pour le caractère. Les

caractères sont des fonctions centrales, c.-à-d. pour tout $g, h \in G$ on a

$$\chi(g) = \chi(hgh^{-1}).$$

Définition 1.1.6. Soient V, W des espaces vectoriels et $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$, $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ des représentations du groupe G . La transformation linéaire $\theta : V \longrightarrow W$ est un homomorphisme de représentation si, pour tout $g \in G$,

$$\theta \circ \varphi(g) = \psi(g) \circ \theta.$$

Les représentations φ et ψ sont équivalentes s'il existe un isomorphisme de représentation θ entre les deux. On peut définir les homomorphismes et équivalence de G -modules de façon similaire.

Définition 1.1.7. Soit V un G -module. Un sous-module de V est un sous-espace $W \subset V$ qui est G -invariant, c.-à-d. si $w \in W$ alors, pour tout $g \in G$, on a $g \cdot w \in W$. Un sous-module est dit trivial si $W = \{0\}$ ou $W = V$.

Définition 1.1.8. Un G -module V est réductible s'il contient un sous-module non trivial. Sinon, il est dit irréductible.

Soient V un G -module, W un sous-module de V et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit interne invariant sous l'action de G . Alors,

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\} \quad (1.1.2)$$

est aussi un G -sous-module. Pour un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ quelconque sur V et B une base de V qui lui est orthogonale, le produit scalaire défini par

$$\langle\langle v, w \rangle\rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle g.v, g.w \rangle \quad (1.1.3)$$

est évidemment G -invariant. En itérant la décomposition 1.1.2 jusqu'à ce que tous les modules considérés soient des modules irréductibles, nous obtenons le résultat important suivant.

Théorème 1.1.9 (Maschke). Soit G un groupe fini et V un G -module non nul. Alors, il existe des G -modules $W^{(i)}$ irréductibles et sous-modules de V tels que

$$V = W^{(1)} \oplus W^{(2)} \oplus \dots \oplus W^{(k)}.$$

Théorème 1.1.10 (Lemme de Schur). *Soit V un G -module, alors V admet l'unique décomposition (à isomorphisme et ordre près)*

$$V \cong m_1 V^{(1)} \oplus m_2 V^{(2)} \oplus \cdots \oplus m_r V^{(r)}$$

où les $V^{(i)}$ sont des G -modules irréductibles non équivalents deux à deux et les coefficients m_i devant $V^{(i)}$ signifie $V^{(i)} \oplus V^{(i)} \oplus \cdots \oplus V^{(i)}$ avec m_i termes.

Proposition 1.1.11. *Le nombre de $V^{(i)}$ irréductibles et non équivalents est égal au nombre de classes de conjugaison dans G .*

Considérons l'algèbre de groupe de G , noté \mathbb{C} , qui consiste en les combinaisons linéaires formelles d'éléments de G :

$$\mathbb{C}[G] = \left\{ \sum_{g \in G} c_g g \mid c_g \in \mathbb{C} \right\}.$$

Or, le groupe G agit naturellement par multiplication à gauche. L'action étendue aux combinaisons linéaires par

$$h \cdot \left(\sum_{g \in G} c_g g \right) = \sum_{g \in G} c_g (h \cdot g)$$

fait de $\mathbb{C}[G]$ un G -module. La représentation correspondante est dite représentation régulième. La représentation régulière possède une décomposition remarquable.

Proposition 1.1.12. *Si $\mathbb{C}[G] = \bigoplus_i m_i V^{(i)}$ est la décomposition en modules irréductibles deux à deux non équivalents de la représentation régulière, alors*

$$(i) \sum m_i \dim(V^{(i)}) = |G|,$$

$$(ii) \sum m_i^2 = |G|^2.$$

Définition 1.1.13. *Soient χ et ψ deux fonctions centrales de G vers \mathbb{C} . Alors on définit*

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)}. \quad (1.1.4)$$

Or, pour un G -module V et une base \mathcal{B} orthonormales, quitte à prendre le produit scalaire de 1.1.3, la représentation matricielle correspondante associe à chaque $g \in G$ une matrice

unitaire. Ainsi, la définition 1.1.4 peut se réécrire:

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1}).$$

Proposition 1.1.14. Soient χ, ψ des caractères irréductibles. Alors,

$$\langle \chi, \psi \rangle = \delta_{\chi, \psi}$$

et les caractères irréductibles forment une base orthonormale des fonctions centrales.

Proposition 1.1.15. Soient V et W deux G -modules de caractères χ_V et χ_W . Alors, V est irréductible si et seulement si $\langle \chi_V, \chi_W \rangle = 1$. Aussi, V est irréductible si et seulement si $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.

Théorème 1.1.16. Soit V un G -module de décomposition

$$V \cong m_1 V^{(1)} \oplus m_2 V^{(2)} \oplus \cdots \oplus m_k V^{(k)}$$

où les G -modules $V^{(i)}$ sont deux à deux non équivalents et de caractères $\chi_{V^{(i)}}$. Alors les multiplicités m_i s'obtiennent par

$$m_i = \langle \chi_V, \chi_{V^{(i)}} \rangle.$$

Les caractères irréductibles jouent donc un rôle primordial dans la décomposition d'un module quelconque. Le lien avec les fonctions symétriques sera développé à la section 1.5.

1.1.3 Produit tensoriel de représentations

Définition 1.1.17. Soient U un G -module et V un H -module (G et H des groupes finis). Alors, le produit tensoriel d'espaces vectoriels $U \otimes V$ possède la structure de $G \times H$ -module en posant, pour $(g, h) \in G \times H$,

$$(g, h).(v \otimes w) = (g.v) \otimes (h.w).$$

Au niveau des caractères, on vérifie aisément que $\chi_{U \otimes V}(g, h) = \chi_U(g)\chi_V(h)$.

Proposition 1.1.18. Si U (resp. V) est un G -module (resp. H -module) irréductible alors $U \otimes V$ est un $G \times H$ -module irréductible. Si $\{U^{(i)}\}$ (resp. $\{V^{(j)}\}$) est un ensemble

complet de G -modules (resp. H -modules) irréductibles et deux à deux non équivalents alors $\{U^{(i)} \otimes V^{(j)}\}$ est un ensemble complet de $G \times H$ -modules irréductibles et deux à deux non équivalents.

1.1.4 Représentations induites et restreintes

Définition 1.1.19. Soit V un G -module et soit W un sous- H -module de V . Le module V est dit *induit de W* si et seulement si $V = \bigoplus_{r \in R} rW$ où $R = \{r_1, \dots, r_l\}$ est un système de représentants de classes à gauche de H dans G .

On peut montrer que le choix de R est arbitraire dans la définition et qu'étant donné W un H -module il existe un et un seul G -module induit de W à isomorphisme près. Voir par exemple le traitement qu'en fait J.-P. Serre, sections 3.3 et 7.1 de [25].

Définition 1.1.20. Soit V un G -module. Si l'on considère l'action $H \times V \rightarrow V$ (obtenue de $G \times V \rightarrow V$) alors les conditions de la définition ?? sont encore satisfaites. Le H -module ainsi obtenu est dit *restreint*.

Certains préfèreront l'analogie au niveau des représentations matricielles.

Définition 1.1.21. Considérons $H \leq G$ des groupes finis. Soit X (resp. Y) une représentation matricielle de G (resp. H). Alors, la représentation matricielle du groupe H donnée par

$$X \downarrow_H^G (h) = X(h), \forall h \in H$$

est dite représentation matricielle restreinte. Soit $\{r_1, \dots, r_l\}$ un ensemble de représentants des classes à gauche de H dans G et posons $Y(g) = 0$ pour $g \notin H$. Alors, la représentation matricielle du groupe G donnée par

$$X \uparrow_H^G (g) = (Y(r_i^{-1} g r_j))_{ij}, \forall h \in H$$

est dite représentation matricielle induite.

Soit χ (resp. ψ) le caractère du G -module (resp. H -module). Notons $\chi \downarrow_H^G$ (resp. $\psi \uparrow_H^G$)

le caractère du module induit (resp. restreint). Alors, il est prouvé que

$$\chi \downarrow_H^G(h) = \chi(h), \forall h \in H, \quad (1.1.5)$$

$$\psi \uparrow_H^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{\gamma \in G \\ \gamma^{-1}g\gamma \in H}} \psi(\gamma^{-1}g\gamma). \quad (1.1.6)$$

En fait, les équations 1.1.5 et 1.1.6 servent de définition à $f \downarrow_H^G$, $g \uparrow_H^G$ pour n'importe quelles fonctions centrales $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : H \rightarrow \mathbb{C}$. Aussi, le lemme de réciprocité de Frobenius stipule que

$$\langle \psi, \chi \downarrow_H^G \rangle_H = \langle \psi \uparrow_H^G, \chi \rangle_G,$$

où les produits scalaires sont ceux de la définition 1.1.13.

1.1.5 Les \mathbb{S}_n -modules

Nous allons maintenant considérer le cas où le groupe G est \mathbb{S}_n et les espaces V sont des espaces de polynômes, plus particulièrement des sous-espaces de $\mathbb{Q}[X,Y]$ (où $X = x_1, \dots, x_n$ et $Y = y_1, \dots, y_n$). Pour en faire des \mathbb{S}_n -modules, on considère l'action diagonale de \mathbb{S}_n :

$$\sigma.P(X;Y) = P(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n}; y_{\sigma_1}, \dots, y_{\sigma_n}).$$

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, notons $X^\alpha Y^\beta$ le monôme $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \dots y_n^{\beta_n}$. Soit $\pi_{m,l}$ l'extension linéaire à $\mathbb{Q}[X,Y]$ de la projection

$$\pi_{m,l}(X^\alpha Y^\beta) = \begin{cases} X^\alpha Y^\beta & \text{si } \sum \alpha_i = m \text{ et } \sum \beta_i = l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 1.1.22. Un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X,Y]$ est dit bihomogène de bidegré (j,k) si $\pi_{j,k}(P) = P$; et un sous-espace S de $\mathbb{Q}[X,Y]$ est dit bihomogène si $\pi_{j,j}(P) \in S$ pour tout $P \in S$ et pour tout j,k .

Bien sûr, l'action diagonale de \mathbb{S}_n préserve les bidegrés. On peut donc faire la décompo-

sition suivante. Soit M un \mathbb{S}_n -module et, pour tout $r,s \geq 0$, $M_{j,k} = \pi_{j,k}(M)$, alors

$$M = \bigoplus_{j \geq 0, k \geq 0} M_{j,k} \quad (1.1.7)$$

et l'on dit de M qu'il est bigradué.

1.2 Fonctions symétriques classiques

Nous suivrons ici, pour l'essentiel, les notations de Macdonald (voir chap. I de [21]).

1.2.1 L'anneau Λ_n

Soit $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ l'anneau des polynômes à coefficients entiers ayant n variables indépendantes $X = x_1, \dots, x_n$. Considérons l'action du groupe de permutations \mathbb{S}_n sur les indices des variables:

$$\sigma.P(X) = P(\sigma.X),$$

pour tout $\sigma \in \mathbb{S}_n$ et où $\sigma.X = x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n}$. Un polynôme P est dit symétrique si

$$P(X) = \sigma.P(X),$$

pour tout $\sigma \in \mathbb{S}_n$. Posons $\Lambda_n = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathbb{S}_n}$ l'anneau des polynômes symétriques en n variables. L'anneau Λ_n est gradué par le degré puisque tout polynôme symétrique est décomposable en somme de polynômes symétriques homogènes. Donc,

$$\Lambda_n = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda_n^k,$$

où Λ_n^k est le sous-anneau des polynômes symétriques homogènes de degré k en n variables (ainsi que le polynôme identiquement nul).

Définition 1.2.1. Pour $\lambda \vdash k$ et $k \geq n$, posons

$$m_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} x^\alpha,$$

où les $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sont les permutations distinctes de $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. On pose $m_\lambda(x_1, \dots, x_n) = 0$ pour $\ell(\lambda) > n$.

Proposition 1.2.2. *L'ensemble $\{m_\lambda \mid \ell(\lambda) \leq n\}$ est une base de Λ_n sur \mathbb{Z} et l'ensemble $\{m_\lambda \mid \ell(\lambda) \leq n \text{ et } \lambda \vdash k \leq n\}$ est une base de Λ_n^k sur \mathbb{Z} .*

1.2.2 L'anneau Λ

Pour éviter la nullité de polynômes symétriques par manque de variables (comme ci-haut), on construit l'anneau des fonctions symétriques en un nombre dénombrables de variables de la façon suivante. Rappelons d'abord quelques concepts de la théorie des catégories.

Définition 1.2.3. *Soit \mathcal{C} une catégorie et soit (I, \leq) un ensemble ordonné filtrant supérieurement, (c.-à-d. $\forall x,y \in I, \exists z \in I, x,y \leq z$). Un système projectif est la donnée d'une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de \mathcal{C} et, pour chaque paire de $i \leq j$, d'un morphisme $\varphi_{ij} : X_j \longrightarrow X_i$ tels que $\varphi_{ii} = \text{id}_{X_i}$ et si $i \leq j \leq k$ alors $\varphi_{ki} = \varphi_{ji} \circ \varphi_{kj}$.*

Définition 1.2.4. *La limite projective d'un système projectif $(X_i)_{i \in I}$ dans une catégorie \mathcal{C} est la donnée d'un objet $P \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ et d'une famille de morphismes $(\varphi_i)_{i \in I}$, $\varphi_i : P \longrightarrow X_i$ tels que*

$$\varphi_{ij} \circ \varphi_i = \varphi_j, \forall i,j \in I.$$

De plus, pour $Q \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ et $(\psi_i)_{i \in I}$ satisfaisants aux mêmes conditions, il existe un unique $\psi : Q \longrightarrow P$ tel que

$$\psi_i = \varphi_i \circ \psi, \forall i \in I.$$

La limite projective est notée $\varprojlim_{i \in I} X_i$.

Dans la catégorie \mathbb{Z} -modules, pour un k fixé, considérons le système projectif $(\Lambda_n^k)_{n \geq 0}$ avec pour morphismes les $\rho_{m,n}^k : \Lambda_m^k \longrightarrow \Lambda_n^k$ obtenus comme suit. Considérons les morphismes surjectifs

$$\rho_{m,n} : \Lambda_m \longrightarrow \Lambda_n, \tag{1.2.1}$$

qui consistent à garder les n premières variables et remplacer les autres par 0. Ainsi,

$$m_\lambda(x_1, \dots, x_m) \longmapsto \begin{cases} m_\lambda(x_1, \dots, x_n) & \ell(\lambda) \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les $\rho_{m,n}^k$ s'obtiennent par restriction aux polynômes de degrés k ; ils sont des isomorphismes lorsque $m \geq n \geq k$. À partir de ce système projectif, on construit la limite projective

$$\Lambda^k = \varprojlim_{n \geq 0} \Lambda_n^k.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \rho_n^k : \Lambda^k &\longrightarrow \Lambda_n^k \\ f = (f_n)_{n \geq 0} &\mapsto f_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

est un isomorphisme quand $n \geq k$. Donc, il existe une base $\{m_\lambda \mid \lambda \vdash k\}$ sur \mathbb{Z} de l'anneau Λ^k définie par

$$\rho_n^k(m_\lambda) = m_\lambda(x_1, \dots, x_n), \forall n \geq k.$$

Définition 1.2.5. Posons, $\Lambda = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k$. L'anneau gradué Λ est dit anneau des fonctions symétriques.

Par construction, l'anneau Λ est engendré par les m_λ , λ parcourant tous les partages.

Définition 1.2.6. Pour $r \geq 0$, les r ième fonctions symétriques élémentaires, homogènes et somme de puissances sont, respectivement,

$$e_r = m_{1^r} = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}, \quad (1.2.2)$$

$$h_r = \sum_{|\lambda|=r} m_\lambda = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}, \quad (1.2.3)$$

$$p_r = m_r = \sum x_i^r. \quad (1.2.4)$$

Remarque 1.2.7. Soit f un symbole générique pour e, h ou p . La sommation explicite dans l'équation 1.2.4 pour l'expression de f_r fait intervenir un nombre *infini* de variables. Une sommation ne comportant que n variables explicite le polynôme symétrique $\rho_n(f_r)$. En particulier, $\rho_n(e_r) = 0$ pour $r > n$.

1.2.3 Les bases usuelles de Λ

Proposition 1.2.8. *Les fonctions de la définition 1.2.6 ont les propriétés suivantes:*

1. $\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots]$ et les e_r sont algébriquement indépendantes sur \mathbb{Z} ,
2. $\Lambda = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \dots]$ et les h_r sont algébriquement indépendantes sur \mathbb{Z} ,
3. $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots]$ et les p_r sont algébriquement indépendantes sur \mathbb{Q} .

Remarque 1.2.9. L'indépendance algébrique des sommes de puissances sur \mathbb{Q} plutôt que sur \mathbb{Z} découle naturellement des relations entre les séries génératrices introduites à la prochaine section (voir l'équation 1.2.6).

Pour pouvoir passer d'une base de fonctions de symétriques à une autre sans devoir changer le contexte d'utilisation, nous allons adopter la version définitive suivante de l'anneau des fonctions symétriques.

Définition 1.2.10. *Dorénavant, pour ne pas alourdir la notation, nous ferons l'abus de notation qui consiste à écrire Λ en lieu et place de*

$$\Lambda = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Similairement pour Λ^k .

Définition 1.2.11. *Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ un partage.*

1. $e_{\lambda} = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots,$
2. $h_{\lambda} = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \dots,$
3. $p_{\lambda} = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots.$

Pour $\lambda = \prod_j j^{m_j}$ nous avons donc, en utilisant la remarque 1.1.2 sur la notation multiplicative, $f_{\lambda} = \prod_j f_j^{m_j}$ où le symbole générique f peut être remplacer par e , h ou p . Pour cette raison, les fonctions symétriques élémentaire, homogène et somme de puissances sont dites *multiplicatives*.

Proposition 1.2.12. *Les familles $\{e_{\lambda}\}$, $\{h_{\lambda}\}$ et $\{p_{\lambda}\}$ (partages quelconques) sont des bases de Λ . Aussi, les familles $\{e_{\lambda} | \lambda \vdash k\}$, $\{h_{\lambda} | \lambda \vdash k\}$ et $\{p_{\lambda} | \lambda \vdash k\}$ sont des bases de Λ^k .*

1.2.4 Les fonctions de Schur

Les fonctions de Schur, fonctions symétriques riches de propriétés, peuvent être définies d'au moins trois façons équivalentes.

1. Comme quotient de deux polynômes antisymétriques.
2. Via les identité de Jacobi-Trudi (déterminant en les fonctions homogènes).
3. Comme somme de polynômes de Schur, eux-mêmes sommes de ménomes correspondant aux mots de lecture de tableaux semi-standards (définis plus loin).

Soit α un n -tuplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Posons $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$. Nous définissons le polynôme a_α par

$$a_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \det(x_i^{\alpha_j})_{1 \leq i, j \leq n} = \sum_{w \in \mathbb{S}_n} \varepsilon(w) w.x^\alpha.$$

Ce polynôme a_α est antisymétrique, c.-à-d. que pour tout $w \in \mathbb{S}_n$,

$$w.a_\alpha = \varepsilon(w)a_\alpha,$$

Il s'annule donc lorsque les α_i ne sont pas tous distincts.

Définition 1.2.13. le déterminant de Vandermonde à n variables est défini par

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \Delta_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j), \\ &= \det(x_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n} \end{aligned}$$

On pose $\Delta_1 = 1$. Ce polynôme divise tout polynôme antisymétrique et est lui-même antisymétrique. On vérifie que $\Delta_n = a_{\delta_n}(x_1, \dots, x_n)$ où $\delta_n = (n-1, \dots, 1, 0)$.

Définition 1.2.14. Soit λ un partage que nous écrirons comme un n -tuplet $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0.$$

Nous supposerons que $\ell(\lambda)$, c.-à-d. le nombres de parts non-nulles, satisfait $\ell(\lambda) \leq n$.

Posons

$$\lambda + \delta_n = (\lambda_1 + n - 1, \dots, \lambda_{n-1} + 1, \lambda_n).$$

Alors, le polynôme de Schur à n variables pour le partage λ est défini par

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{a_{\lambda+\delta_n}(x_1, \dots, x_n)}{a_{\delta_n}(x_1, \dots, x_n)}.$$

On pose $s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = 0$ lorsque $\ell(\lambda) > n$.

Proposition 1.2.15. *Les S_λ , pour $\ell(\lambda) \leq n$ sont des polynômes symétriques en les variables x_1, \dots, x_n et homogènes de degré $|\lambda|$. Aussi, $\{s_\lambda(x_1, \dots, x_n) \mid \ell(\lambda) \leq n\}$ est une base de Λ_n et $\{s_\lambda(x_1, \dots, x_n) \mid \ell(\lambda) \vdash k \leq n\}$ en est une de Λ_n^k .*

Pour passer des polynômes de Schur aux fonctions de Schur, il faut considérer les morphismes $\rho_{m,n} : \Lambda_m \longrightarrow \Lambda_n$ de la section 1.2.2. Il suffit de voir que

$$\rho_{n+1,n}(s_\lambda(x_1, \dots, x_{n+1})) = s_\lambda(x_1, \dots, x_n).$$

Or, pour $\ell(\lambda)l(n)$, en développant le déterminant de $a_{\lambda+\delta_{n+1}}(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$ selon la dernière rangée nous obtenons

$$a_{\lambda+\delta_{n+1}}(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) = x_1 x_2 \dots x_n a_{\lambda+\delta_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

où

$$\lambda + \delta_{n+1} = (\lambda_1 + n, \lambda_2 + n - 1, \dots, \lambda_n + 1, \lambda_{n+1}), \text{ et}$$

$$\lambda + \delta_n = (\lambda_1 + n - 1, \lambda_2 + n - 2, \dots, \lambda_n).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) &= \frac{x_1 x_2 \dots x_n a_{\lambda+\delta_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_1 x_2 \dots x_n a_{\delta_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)} \\ &= s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Définition 1.2.16. *Un tableau T de forme λ est une application de l'ensemble des cases de λ vers \mathbb{N} . Un tableau est dit standard ou de Young si les valeurs dans les cases sont strictement croissantes de gauche à droite et de bas en haut. Un tableau est dit semi-standard si les valeurs sont strictement croissantes de bas en haut mais faiblement croissantes de gauche à droite.*

Proposition 1.2.17. *Les polynômes de Schur satisfont l’identité combinatoire*

$$s_\lambda = \sum_T x^T,$$

où la sommation est faite sur les tableaux T semi-standards de forme λ à valeurs dans $\{1, 2, \dots, n\}$ et $x^T = \prod_{c \in \lambda} x_{T(c)}$.

Proposition 1.2.18 (Formule de Jacobi-Trudi). *Si l’on pose $h_0 = 1$ et $h_r = 0$ pour $r < 0$ alors*

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

1.2.5 Les séries génératrices et les changements de bases

Les séries génératrices sont un puissant outil dans l’obtention de formules reliant les différentes fonctions symétriques.

Définition 1.2.19.

- 1. $\Omega(t) = \sum_{r \geq 0} h_r t^r = \prod_{i \geq 0} \frac{1}{1 - tx_i};$
- 2. $E(t) = \sum_{r \geq 0} e_r t^r = \prod_{i \geq 0} 1 + tx_i;$
- 3. $P(t) = \sum_{r \geq 1} p_r \frac{t^r}{r} = \sum_{i \geq 1} \sum_{r \geq 1} \frac{x_i^r}{r} t^r.$

Mais en fait, une seule suffit en regard des relations suivantes:

$$\begin{aligned} \Omega(t)E(-t) &= 1, \\ \frac{d}{dt}P(t) &= \frac{\Omega'(t)}{\Omega(t)}. \end{aligned}$$

La dernière relation étant obtenue par le calcul classique

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P(t) &= \sum_{r \geq 1} p_r t^{r-1} = \sum_{i \geq 1} \sum_{r \geq 1} x_i^r t^{r-1}, \\ &= \sum_{i \geq 1} \frac{x_i}{1 - x_i t} = \sum_{i \geq 1} \frac{d}{dt} \log \frac{1}{1 - x_i t}, \\ &= \frac{d}{dt} \log \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x_i t}. \end{aligned}$$

Des équations 1.2.5 et 1.2.5, on obtient les systèmes d'équations

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r e_r h_{n-r} = 0, \text{ pour tout } n \geq 1, \quad (1.2.5)$$

$$\sum_{r=1}^n p_r h_{n-r} = nh_n, \text{ pour tout } n \geq 1, \quad (1.2.6)$$

desquels on extrait les formules déterminentales classiques. Qui plus est, l'équation 1.2.5, alliée à l'indépendance algébrique des e_r , montre que l'application suivante est en fait un isomorphisme involutif.

Définition 1.2.20. *L'application $\omega : \Lambda \longrightarrow \Lambda$ est définie par*

$$\omega(e_r) = h_r,$$

pour tout $r \geq 1$.

Proposition 1.2.21. *L'involution ω se comporte bien pour les fonctions multiplicatives:*

$$\begin{aligned} \omega(e_r) &= h_r, & \omega(e_\lambda) &= h_\lambda, \\ \omega(h_r) &= e_r, & \omega(e_\lambda) &= e_\lambda, \\ \omega(p_r) &= (-q)^{r-1} p_r, & \omega(p_\lambda) &= \varepsilon_\lambda p_\lambda, \end{aligned}$$

et de façon remarquable sur les fonctions de Schur:

$$\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}.$$

Ici, λ' est le partage conjugué de λ et

$$\varepsilon_\lambda = (-1)^{|\lambda| - \ell(\lambda)}.$$

1.3 λ -Anneaux et λ -substitutions

Les λ -anneaux sont des anneaux munis d'une structure additionnelle. Pour les décrire, il faut d'abord présenter les polynômes dit *universels*. Soit $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q$ et $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ des variables indéterminées. À la manière des séries génératrices des fonctions symétriques

élémentaires, posons pour $k \in \mathbb{N}$, $\sigma_k = \prod_i (1 + \xi_i t)|_{t^k}$ et $\tau_k = \prod_i (1 + \eta_i t)|_{t^k}$. Maintenant, en vertu du théorème fondamental des fonctions symétriques, il existe un unique polynôme P_n à coefficients entiers tel que pour tout $q, r \geq n$,

$$P_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau_1, \dots, \tau_n) = \prod_{i,j} (1 + \xi_i \eta_j t)|_{t^n}$$

De même, il existe un unique polynôme $P_{n,m}$ à coefficients entiers tel que pour tout $q \geq nm$,

$$P_{n,m}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{nm}) = \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq q} (1 + \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_m} t)|_{t^n}.$$

Définition 1.3.1. *Un λ -anneau est un anneau A commutatif unifère doté des opérations $\lambda^i : A \rightarrow A$, pour $i \in \mathbb{N}$ satisfaisant:*

- (i) $\lambda^1(1) = 1$ et $\lambda^k(1) = 0$ pour tout $k > 1$,
- (ii) $\lambda^0(x) = 1$ et $\lambda^1(x) = x$, pour tout $x \in A$,
- (iii) $\lambda^n(x+y) = \sum_{i=0}^n \lambda^i(x)\lambda^{n-i}(y)$,
- (iv) $\lambda^n(xy) = P_n(\lambda^1(x), \lambda^2(x), \dots, \lambda^n(x), \lambda^1(y), \lambda^2(y), \dots, \lambda^n(y))$, pour tout $x, y \in A$,
- (v) $\lambda^n(\lambda^m(x)) = P_{n,m}(\lambda^1(x), \dots, \lambda^{nm}(x))$, pour tout $x \in A$ et $n, m \geq 0$.

L'exemple le plus simple de λ -anneau est l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ avec les opérations λ^n définies par $\lambda^n(i) = \binom{i}{n}$. Si l'anneau contient des éléments x_i de degré un (c.-à-d. tels que $\lambda^k(x_i) = 0$ pour tout $k > 1$) considérés comme des indéterminées, alors les axiomes ci-haut décrivent des propriétés des fonctions symétriques élémentaires. Toutefois, dans ce contexte, les $x \in A$ ne peuvent être remplacés par des sommes infinies. Fait intéressant, le contexte peut être augmenté en utilisant une limite projective.

Proposition 1.3.2. *Soit A un λ -anneau. Alors il existe une unique structure de λ -anneau sur l'anneau de polynômes $A[x]$ telle que $\lambda^k(x) = 0$, pour tout $k > 1$.*

Ainsi, pour une suite d'indéterminées x_1, x_2, x_3, \dots , on peut construire la séquence de λ -anneaux $\Omega_0 = \mathbb{Z}$, $\Omega_1 = \mathbb{Z}[x_1]$, $\Omega_2 = \mathbb{Z}[x_1, x_2]$, etc. Maintenant, pour $m \geq n$, les morphismes $\rho_{m,n} : \Omega_m \rightarrow \Omega_n$ définis de manière analogues à ceux en 1.2.1, c.-à-d. tels

que

$$\rho_{m,n}(x_i) = \begin{cases} x_i & i \leq n, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

permettent de construire la limite projective

$$\Omega = \varprojlim_{n \geq 0} \Omega_n.$$

La limite projective de λ -anneaux est obtenue en faisant la limite projective des anneaux et en imposant la λ -structure naturelle. Maintenant, la famille de fonction symétrique élémentaire $\{e_n(x_1, x_2, \dots, x_k)\}_k$ correspond à une unique fonction symétrique élémentaire $e_n \in \Omega$. Aussi, $\lambda^n(e_1) = e_n$ dans Ω puisque la relation tient dans chacun des Ω_k . Désignons par Λ le sous- λ -anneau de Ω engendré par e_1 . Par les opérations λ^n , il contient tous les e_n . C'est un λ -anneau libre à un générateur. Mais en tant qu'anneau, $\Lambda = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$ est polynomial en une infinité de variables. Il s'avère que cet anneau Λ et celui de la définition 1.2.5 sont un et un seul.

1.3.1 Opérateurs d'Adams

Dans le contexte des séries génératrice de la définition 1.2.19, les sommes de puissances $p_k = \sum x_i^k$ sont liées au fonctions symétriques élémentaires par la formule de Waring:

$$\frac{d}{dx} \log E(t) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n p_{n+1} t^n = \frac{d}{dx}(-P(t)).$$

Soit A un λ -anneau. Un *principe de vérification* (voir [20]) permet de définir formellement des opérateurs Ψ^n en utilisant la relation

$$\frac{d}{dx} \log \sum_{n \geq 0} \lambda^n(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \Psi^{n+1}(x) t^n = \frac{d}{dx}(-P(t)). \quad (1.3.1)$$

Les ψ^n sont appelés opérateurs d'Adams. La propriété (v) de la proposition suivante dit que ces opérateurs sont des endomorphismes du λ -anneau.

Proposition 1.3.3. *Soient x, y éléments d'un λ -anneau A et des entiers $m, n \geq 1$. Alors,*

(i) $\Psi^n(1) = 1$,

- (ii) $\Psi^0(x) = 1$ et $\Psi^1(x) = x$,
- (iii) $\Psi^n(x + y) = \Psi^n(x) + \Psi^n(y)$,
- (iv) $\Psi^n(xy) = \Psi^n(x)\Psi^n(y)$,
- (v) $\Psi^n(\lambda^m(x)) = \lambda^m(\Psi^n(x))$,
- (vi) $\Psi^n(\Psi^m(x)) = \Psi^m(\Psi^n(x)) = \Psi^{nm}(x)$.

On aurait pu tout aussi bien procéder à l'envers, c.-à-d. définir une structure de Ψ -anneau en exigeant les propriétés énumérées à la proposition précédante (sauf (v)) pour ensuite prouver que les opérateurs λ^n définissables via la relation 1.3.1 sont des endomorphismes de Ψ -anneaux possèdant les propriétés énoncées à la définition 1.3.1. La propriété (vi) traduit le pléthysme $p_n \circ p_m = p_{nm}$ dans Λ . L'anneau des fonctions rationnelles en q,t à coefficients dans \mathbb{Q} , dénoté $\mathbb{Q}(q,t)$, possède une structure de Ψ -anneau (et donc de λ -anneau) en posant $\Psi^n(R(q,t)) = R(q^n, t^n)$ pour toute fonction rationnelle $R(q,t)$. Maintenant, posons $\Lambda_{\mathbb{Q}(q,t)} = \mathbb{Q}(q,t) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$. Or, le produit tensoriel de deux λ -anneaux (resp. Ψ -anneau) est encore un λ -anneau (resp. Ψ -anneau). Il suffit d'apposer une structure de λ -anneau sur le produit tensoriel d'anneaux comme suit: $\lambda^n(a \otimes 1) = \lambda^n(a) \otimes 1$, $\lambda^n(1 \otimes b) = 1 \otimes \lambda^n(b)$ et $\lambda^n(a \otimes b) = \lambda^n((a \otimes 1)(1 \otimes b))$. Aussi, $\Psi^n(a \otimes b) = \Psi^n(a) \otimes \Psi^n(b)$. Maintenant, on sait que

$$\Lambda_{\mathbb{Q}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[p_1, p_2, p_3, \dots]$$

et que les p_n sont algébriquement indépendant sur \mathbb{Q} . On peut donc considérer un élément de $\Lambda_{\mathbb{Q}(q,t)}$ comme une fonctions symétriques (en x_1, x_2, \dots) à coefficient dans $\mathbb{Q}(q,t)$. L'effet de Ψ^n est donc d'élever à la puissance n les variables qui apparaissent dans les fonctions symétriques ainsi que les paramètres q,t . On reviendra sur l'anneau $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ à la prochaine section. L'usage dans le domaine est d'employer la notation de substitution pléthystique (voir [16]) plutôt que les opérateurs d'Adams. D'abord, on considère l'anneau des séries formelles de Laurent en les variables t_1, t_2, t_3, \dots (dépendent du contexte). Pour un élément $E(t_1, t_2, \dots)$, on définit

$$\Psi^n E(t_1, t_2, t_3, \dots) \stackrel{\text{def}}{=} E(t_1^n, t_2^n, t_3^n, \dots)$$

que l'on écrit

$$p_n E[t_1, t_2, t_3, \dots] \stackrel{\text{def}}{=} E[t_1^n, t_2^n, t_3^n, \dots]$$

avec les crochets qui dénotent la substitution pléthystique. Pour une fonction symétrique F exprimable comme série formelle en les sommes de puissances

$$F = Q[p_1, p_2, p_3, \dots],$$

on définit

$$F[E] = Q[p_1, p_2, p_3, \dots]|_{p_n \leftarrow p_k[E]}.$$

Par convention, X_n désigne $x_1 + x_2 + \dots + x_n$. De sorte que pour $f \in \Lambda_n$,

$$f[X_n] = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

De la même manière, l'alphabet X désigne $x_1 + x_2 + x_3 + \dots$

En notation pléthystique,

$$p_k[A + B] = p_k[A] + p_k[B], \quad (1.3.2)$$

$$p_k[A - B] = p_k[A] - p_k[B], \quad (1.3.3)$$

$$p_k[AB] = p_k[A]p_k[B]. \quad (1.3.4)$$

Aussi, un deuxième signe moins est nécessaire pour indiquer que l'on substitue à chaque variable sa valeur opposée:

$$p_k[-X_n] \stackrel{\text{def}}{=} p_k[X_n]|_{x_i \leftarrow -x_i} = (-1)^k p_k[X_n]$$

Ainsi l'involution ω de la définition 1.2.20 se traduit par

$$\omega p_k[X_n] = (-1)^{k-1} p_k[X_n] = p_k[-X_n].$$

1.4 Polynômes de Macdonald renormalisés

Les fonctions symétriques à deux paramètres fournissent quantité de beaux problèmes et identités et il serait trop long d'en faire ici la présentation complète (voir Macdonald [21])

mais voici les ingrédients nécessaires à l'obtention des polynômes de Macdonald renormalisés qui seront utilisés à la prochaine section. D'abord, Macdonald a introduit une famille de fonctions symétriques à deux paramètres $\{P_\mu(x; q, t)\}_\mu$ qui satisfait

- (i) $P_\lambda = s_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} s_\mu \xi_{\mu\lambda}(q, t)$,
- (ii) $\langle P_\lambda, P_\mu \rangle_{q,t} = 0$ pour $\lambda \neq \mu$,

où le produit scalaire $\langle , \rangle_{q,t}$ fait intervenir les paramètres q, t selon

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} = \begin{cases} z_\lambda p_\lambda \left[\frac{1-q}{1-t} \right] & \text{si } \lambda = \mu, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.4.1)$$

La famille $\{Q_\mu(x; q, t)\}_\mu$ définie par

$$Q_\mu(x; q, t) = \frac{h_\mu(q, t)}{h'_\mu(q, t)} P_\mu(x; q, t)$$

s'avère être duale à $\{P_\mu(x; q, t)\}_\mu$ par rapport au produit scalaire (1.4.1). La forme dite *intégrale* est définie par

$$\begin{aligned} J_\mu(x; q, t) &= h_\mu(q, t) P_\mu(x; q, t), \\ &= h'_\mu(q, t) Q_\mu(x; q, t), \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Macdonald définit les q, t -analogues des nombres de Kostka, $K_{\lambda, \mu}(q, t)$ par la décomposition

$$J_\mu(x; q, t) = \sum_\lambda s_\lambda [X(1-t)] K_{\lambda, \mu}(q, t).$$

Maintenant, on pose

$$H_\mu(x; q, t) = J_\mu[X/(1-t); q, t], \quad (1.4.3)$$

$$= \sum_\lambda K_{\lambda\mu}(q, t) s_\lambda. \quad (1.4.4)$$

et finalement

$$\tilde{H}_\mu(x; q, t) = H_\mu(x; q, 1/t) t^{n(\mu)}. \quad (1.4.5)$$

Les coefficients dans la décomposition des fonctions symétriques $\tilde{H}_\mu(x; q, t)$ en terme des fonctions de Schur, c.-à-d. les $\tilde{K}_{\lambda\mu}$ dans

$$\tilde{H}_\mu(x; q, t) = \sum_{\lambda} \tilde{K}_{\lambda\mu}(q, t) s_\lambda$$

sont reliés aux q, t -Kostka par

$$\tilde{K}_{\lambda\mu}(q, t) = K_{\lambda\mu}(q, 1/t) t^{n(\mu)}.$$

Mentionnons aussi qu'il existe un produit scalaire pour lequel les \tilde{H}_μ sont orthogonaux. En effet, soit $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ le produit scalaire défini par

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_* = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\lambda) z_\lambda p_\lambda[(1-q)(1-t)] & \text{si } \lambda = \mu, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où le signe de λ vaut $\operatorname{sgn}(\lambda) = (-1)^{|\lambda| - \ell(\lambda)}$. Alors (voir théorème 1.1 dans [15])

$$\langle \tilde{H}_\mu, \tilde{H}_\nu \rangle_* = \begin{cases} \tilde{h}_\mu(q, t) \tilde{h}'_\mu(q, t) & \text{si } \mu = \nu, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les formules explicites pour les coefficients $\tilde{K}_{\lambda\mu}$ s'avèrent plutôt sophistiquées et n'ont pas l'élégance combinatoire des nombres de Kostka ordinaires. Le résultat est intimement relié à l'opérateur ∇ (lire *nabla*).

Définition 1.4.1. *L'opérateur ∇ est défini sur la base $\{\tilde{H}_\mu(x; q, t)\}_\mu$ par*

$$\nabla \tilde{H}_\mu(x; q, t) = T_\mu \tilde{H}_\mu(x; q, t). \quad (1.4.6)$$

Soient $\gamma \vdash k$ et $\lambda = (n-k, \gamma) \vdash n$, c.-à-d. le partage obtenu en adjoignant une première part de longueur $n-k$ devant le partage γ avec la condition que $\gamma_1 \leq n-k$. Le résultat principal de [15] est l'existence d'un unique polynôme symétrique $\mathbf{k}_\gamma(x; q, t)$, de degré inférieur ou égal à k , tel que

$$\tilde{K}_{\lambda\mu} = \mathbf{k}_\gamma[B_\mu(q, t); q, t]. \quad (1.4.7)$$

Le résultat a pris la forme plus définitive dans [16]. Pour les λ et γ ci-haut, soit

$$\mathbf{k}'_\gamma(x; q, t) = \nabla^{-1} \left(s_\gamma \left[\frac{1 - X}{(1-q)(1-t)} - 1 \right] \right). \quad (1.4.8)$$

Alors,

$$\tilde{K}_{\lambda, \mu}(q, t) = \mathbf{k}'_\gamma[D_\mu(q, t); q, t]. \quad (1.4.9)$$

Les \mathbf{k} et \mathbf{k}' sont reliés par l'identité

$$\mathbf{k}_\gamma[X] = \mathbf{k}'_\gamma[(1-q)(1-t)X - 1]. \quad (1.4.10)$$

Les tableaux 1.1, 1.2 et 1.3 présentent les matrices de ∇ en terme des fonctions de Schur pour $n = 2, 3$ et 4 .

$\lambda \setminus \mu$	[2]	[1,1]
[2]	0	$-t q$
[1,1]	1	$t + q$

TAB. 1.1 – Les coefficients de s_μ dans $\nabla(s_\lambda)$ pour $\lambda, \mu \vdash 2$.

$\lambda \setminus \mu$	[3]	[2,1]	[1,1,1]
[3]	0	$t^2 q^2$	$(t+q) t^2 q^2$
[2,1]	0	$-(t+q) t q$	$-(t^2 + t q + q^2) t q$
[1,1,1]	1	$t^2 + t q + q^2 + t + q$	$t^3 + t^2 q + t q^2 + q^3 + t q$

TAB. 1.2 – Les coefficients de s_μ dans $\nabla(s_\lambda)$ pour $\lambda, \mu \vdash 3$.

$\lambda \setminus \mu$	[4]	[3,1]	[2,2]	[2,1,1]	[1,1,1,1]
[4]	0	$-t^3 q^3$	$-t^3 q^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$-t^3 q^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$-t^3 q^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
[3,1]	0	$t^2 q^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$t^2 q^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$t^2 q^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$t^2 q^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
[2,2]	0	$-t^2 q^2$	0	$-t^2 q^2 \begin{array}{ c c } \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$	$-t^2 q^2 \begin{array}{ c c } \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}$
[2,1,1]	0	$-t q \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$-t q \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$-t q \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$-t q \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
[1,1,1,1]	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

 TAB. 1.3 – Les coefficients de s_μ dans $\nabla(s_\lambda)$ pour $\lambda, \mu \vdash 4$.

1.5 Les caractéristiques de Frobenius bigraduées

Soit R^n le \mathbb{Z} -module des fonctions centrales (engendré par les caractères irréductibles de \mathbb{S}_n). Posons $R = \bigoplus_{n \geq 0} R^n$ (avec $R^0 = \mathbb{Z}$). R est un anneau gradué commutatif et associatif unitaire avec pour multiplication bilinéaire $R^m \times R^n \longrightarrow R^{m+n}$:

$$f \cdot g \stackrel{\text{def}}{=} (f \times g) \uparrow_{\mathbb{S}_m \times \mathbb{S}_n}^{\mathbb{S}_{m+n}},$$

voir section 1.1.4. Aussi, pour $f, g \in R$, c.-à-d. $f = \sum_n f_n$ et $g = \sum_n g_n$, le produit scalaire vaut

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \geq 0} \langle f_n, g_n \rangle_{\mathbb{S}_n}.$$

Définition 1.5.1. *La caractéristique de Frobenius usuelle est l'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &: R \longrightarrow \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}, \\ \mathcal{F}(f) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} f(\sigma) p_{\text{type}(\sigma)}, \\ &= \sum_{\mu \vdash n} \frac{f_\mu p_\mu}{z_\mu}, \end{aligned}$$

où f_μ est la valeur (constante) de f sur la classe de conjugaison des éléments de type μ .

Une propriété importante est que l'évaluation sur les caractères irréductibles donne les fonctions de Schur: $\mathcal{F}(\chi^\lambda) = s_\lambda$. Grâce à la réciprocité de Frobenius, on peut montrer que \mathcal{F} est une isométrie d'anneaux gradués. En outre, c'est un isomorphisme de λ -anneaux (voir [20]). Soit $M \subseteq \mathbb{Q}[X, Y]$ un \mathbb{S}_n -module bihomogène pour l'action diagonale (donc respectant le bidegré, voir définition 1.1.22). Posons $M_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_{i,j}(M)$, la composante bihomogène de bidegré (i, j) .

Définition 1.5.2. *La caractéristique de Frobenius du module bigradué bihomogène $M = \bigoplus_{i,j} M_{i,j}$ est la fonction symétrique à paramètres q, t suivante:*

$$\mathcal{F}_{q,t}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j} q^i t^j \mathcal{F}(\chi_{M_{i,j}}).$$

Nous verrons qu'il existe des \mathbb{S}_n -modules M_μ dont la caractéristique de Frobenius bigraduée vaut $\tilde{H}_\mu[X; q, t]$, le polynôme de Macdonald renormalisé.

1.6 Fonctions diagonalement symétriques

Dans l'étude des harmoniques diagonales, il serait intéressant d'avoir une description détaillée de l'idéal des fonctions diagonalement symétriques (sans terme constant) dans l'anneau des polynômes $\mathbb{Q}[X,Y]$. Jusqu'à maintenant, on se contente de dire que cet idéal est engendré par les «power sums généralisés ». Ce qui suit est un compte-rendu de la partie de la thèse de M. Rosas concernant les fonctions symétriques à plusieurs jeux de variables (dites de *MacMahon*) mais où les résultats sont donnés dans le contexte à deux jeux de variables (fonctions bisymétriques). Une notation inspirée de celle de Macdonald [21] a été adoptée pour mettre en évidence les similarités avec les fonctions symétriques usuelles.

1.6.1 Partages et relations d'ordre

Définition 1.6.1. *Une part est un couple ordonné (a,b) dans \mathbb{N}^2 . Pour des raisons esthétiques, nous l'écrirons en colonne comme ceci: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. La composante a est dite composante en x et b , celle en y . Nous adopterons la notation $B_{\binom{k}{j}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(k+j)!}{k!j!}$ pour les coefficients binomiaux, évitant ainsi toute ambiguïté.*

La part nulle est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et l'on peut additionner vectoriellement les parts. Nous définissons d'abord un ordre sur les parts.

Définition 1.6.2. *Soient $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ des parts. Alors, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} >_{\text{dlex}} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ si et seulement si*

$$a + b > c + d \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a + b = c + d & \text{et} \\ a > c. \end{cases}$$

Cet ordre est compatible avec la somme vectoriel: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \geq_{\text{dlex}} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ implique $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \geq_{\text{dlex}} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$.

Proposition 1.6.3. *Soient $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$ telles que $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \geq_{\text{dlex}} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \geq_{\text{dlex}} \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$. Alors, $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \geq_{\text{dlex}} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$.*

Preuve: Il suffit d'étendre momentanément l'ordre dlex à \mathbb{Z}^2 et de prouver le résultat dans ce contexte. Nous avons alors la propriété suivante où les parts sont dans \mathbb{Z}^2 :

$$\forall \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right), \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \geq_{\text{dlex}} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \iff \exists! \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \geq_{\text{dlex}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \right\}.$$

La vérification du résultat est alors directe. ■

Définition 1.6.4. Soit $u = \binom{u_1}{u_2}$ une part non nulle. Un partage vectoriel de u est une suite de parts $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$ où les parts sont, par convention, en ordre décroissant pour l'ordre dlex , il n'y a qu'un nombre fini de parts non nulles et la somme des parts donne u . La longueur d'un partage est le nombre de parts non nulles. Sauf mention explicite, par partage nous entendrons partage vectoriel. Les parenthèses et virgules sont omises pour alléger la notation. Aussi, $\lambda \vdash u$ signifie que λ est un partage de u . L'ensemble des partages de u est noté \wp_u . L'ensemble (infini) des partages quelconques est noté \wp .

Remarque 1.6.5. Il est possible de définir des partages ayant leurs parts dans \mathbb{Z}^2 plus grandes que $\binom{0}{0}$. Les propriétés énoncées dans cette section restent valide. Mais il existe alors une infinité de $\lambda \vdash u >_{\text{dlex}} \binom{0}{0}$.

Voyons maintenant les différentes relations d'ordre sur \wp_u pour u fixé.

Définition 1.6.6. L'ordre lexicographique renversé, noté $>_L$ (u sous-entendu), est l'ordre total sur \wp_u défini par

$$\lambda >_L \mu \iff \exists (j \geq 1), (\lambda_j >_{\text{dlex}} \mu_j \text{ et } \forall (i < j), \lambda_i = \mu_i).$$

Au besoin, des parts nulles sont ajoutées pour que λ et μ soient de même longueur. Cet ordre généralise l'ordre L_n trouvé [21].

Exemple 1.6.7. Il y a 16 partages de $\binom{3}{2}$. La figure 1.1 les donne dans l'ordre $>_L$, du plus grand au plus petit. Lire de gauche à droite.

Définition 1.6.8. La somme marginale d'une part $\binom{a}{b}$ est $\text{SM}(\binom{a}{b}) \stackrel{\text{def}}{=} a + b$. Soit $\lambda \vdash \binom{u_1}{u_2}$. La somme marginale de $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots$ est définie comme étant le partage usuel $\text{SM}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \text{SM}(\lambda_1)\text{SM}(\lambda_2)\text{SM}(\lambda_3)\dots$ de l'entier $\text{sm}(\binom{u_1}{u_2})$.

$$\begin{array}{cccc}
\binom{3}{2} & \binom{3 \ 0}{1 \ 1} & \binom{2 \ 1}{2 \ 0} & \binom{3 \ 0}{0 \ 2} \\
\binom{3 \ 0 \ 0}{0 \ 1 \ 1} & \binom{2 \ 1}{1 \ 1} & \binom{2 \ 1 \ 0}{1 \ 0 \ 1} & \binom{1 \ 2}{2 \ 0} \\
\binom{1 \ 1 \ 1}{2 \ 0 \ 0} & \binom{2 \ 1 \ 0}{0 \ 1 \ 1} & \binom{2 \ 0 \ 1}{0 \ 2 \ 0} & \binom{2 \ 1 \ 0 \ 0}{0 \ 0 \ 1 \ 1} \\
\binom{1 \ 1 \ 1}{1 \ 1 \ 0} & \binom{1 \ 1 \ 1 \ 0}{1 \ 0 \ 0 \ 1} & \binom{0 \ 1 \ 1 \ 1}{2 \ 0 \ 0 \ 0} & \binom{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0}{0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1}
\end{array}$$

FIG. 1.1 – L’ordre lexicographique renversé sur $\wp_{(2)}^{(3)}$.

La somme marginale **n’est pas compatible** avec l’ordre $>_{\text{dlex}}$. En effet, dans l’exemple 1.6.7, $sm \left(\binom{3 \ 0 \ 0}{0 \ 1 \ 1} \right) = 311$ et $SM \left(\binom{2 \ 1}{1 \ 1} \right) = 32$. Or, $311 <_{L_n} 32$.

Définition 1.6.9. Soient $\lambda, \mu \in \wp_u$ (complétés avec des parts nulles). L’ordre de dominance sur \wp_u est donné ainsi: $\lambda \sqsupseteq \mu$ si et seulement si

$$\forall i \geq 1, \lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geq_{\text{dlex}} \mu_1 + \cdots + \mu_i.$$

Cet ordre partiel généralise l’ordre de dominance usuel.

Exemple 1.6.10. L’ordre de dominance pour les éléments $\wp_{(2)}^{(3)}$. Faire un diagramme.

Définition 1.6.11. Soient $\lambda, \mu \in \wp_u$ (parts nulles maintenant omises), de longueurs l et m respectivement. L’ordre de raffinement sur \wp_u est défini comme suit: $\lambda \geq_R \mu$ si et seulement s’il existe une fonction $f : [m] \longrightarrow [l]$ telle que

$$\forall 1 \leq i \leq l, \lambda_i = \sum_{f(j)=i} \mu_j.$$

Une condition équivalente est

$$\exists \left(\{\mu^{(i)} \vdash \lambda_i\}_{1 \leq i \leq l} \right), \mu = \cup_i \mu^{(i)}.$$

Exemple 1.6.12. Nous avons $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leq_R \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ puisque

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vdash \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vdash \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \vdash \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \vdash \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vdash \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \vdash \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \vdash \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.6.13. Pour tout $\lambda, \mu \in \wp_u$ nous avons les implications suivantes.

$$\lambda \geq_R \mu \stackrel{(1)}{\not\Rightarrow} \lambda \trianglerighteq \mu \stackrel{(2)}{\not\Rightarrow} \lambda \geq_{\text{dlex}} \mu.$$

Preuve: La démonstration des implications (1) et (2) est in extenso celle trouvée dans [21].

Voyons tout de même quelles propriétés de $\trianglerighteq_{\text{dlex}}$ sont requises par (1). Supposons λ et μ de longueur l et m respectivement. Par hypothèse, il existe une fonction $f : [m] \rightarrow [l]$ telle que pour $1 \leq i \leq l$, $\lambda_i = \sum_{f(j)=i} \mu_j$. Posons, pour $1 \leq k \leq l$, $I_k = f([k])$. Alors, nous avons, pour $1 \leq k \leq l$,

$$\mu_1 + \cdots + \mu_k \leq_{\text{dlex}} \sum_{j \in I_k} \lambda_j \leq_{\text{dlex}} \lambda_1 + \cdots + \lambda_k.$$

La deuxième inégalité est obtenue par la proposition 1.6.3. Puisque λ et μ sont partagés de la même part u , on déduit que $\mu \leq \lambda$.

■

1.6.2 Définitions des fonctions diagonalement symétriques à deux jeux de variables

Les définitions de cette section sont inspirées des définitions de fonctions diagonalement symétriques à plusieurs jeux de variables telles que présentées par Mercedes Rosas [23].

Un compte-rendu se trouve à la section B.2. Dans ce qui suit, $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ et $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ sont deux jeux de variables infinis. Nous supposerons aussi que $\mathbb{S}_\infty = \cup_{i \geq 1} \mathbb{S}_i$ agit de façon diagonale sur les variables par permutations des indices, c.-à-d. pour $\sigma \in \mathbb{S}_\infty$,

$$\sigma \cdot f(x_1, x_2, x_3, \dots; y_1, y_2, y_3, \dots) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, \dots; y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(3)}, \dots).$$

Dans cette section, sauf mention contraire, nous entendrons fonctions diagonalement symétriques à deux jeux de variables lorsque nous dirons fonctions symétriques.

Définition 1.6.14. Une série formelle $f \in \mathbb{Q}[[X, Y]]$ est dite fonction diagonalement symétrique en deux jeux de variables si elle est invariante sous l'action diagonale de \mathbb{S}_∞ et si le multidegré est borné. Nous noterons \mathfrak{M} l'anneau des fonctions diagonalement symétriques en deux jeux de variables). De plus \mathfrak{M} est un anneau gradué:

$$\mathfrak{M}_i = \bigcup_{\substack{u=(u_1 \\ u_2) \\ \text{SM}(u)=i}} \mathfrak{M}_u$$

où \mathfrak{M}_u est l'espace vectoriel des fonctions symétriques f de degré multihomogène u , c.-à-d. où chacun des monômes apparaissant dans f est de dimension u_1 en X et u_2 en Y .

Considérons la séquence infinie de parts dont un nombre fini sont non nulles:

$$\alpha = \left[\binom{a_1}{b_1}, \binom{a_2}{b_2}, \binom{a_3}{b_3}, \dots \right].$$

Le monôme M^α est défini par

$$M^\alpha = x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \dots y_1^{b_1} y_2^{b_2} y_3^{b_3} \dots .$$

Définition 1.6.15. Soit λ un partage de u . La fonction symétrique monomiale m_λ est

$$m_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha} M^\alpha,$$

où la somme se fait sur toutes les séquences distinctes α obtenues par permutation des parts de λ .

La famille de fonctions

$$\{m_\lambda\} \quad \lambda \text{ partage vect. de } u$$

est une **base** de \mathfrak{M}_u (implicitement dans [23]). Les autres bases sont obtenues par matrices de transition.

Définition 1.6.16. *La fonction symétrique somme de puissances pour le partage $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots$ est donné par*

$$p_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots$$

où

$$p_{\binom{a}{b}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j x_j^a y_j^b = m_{\binom{a}{b}}.$$

Définition 1.6.17. *Soit une part $\binom{a}{b}$, $e_{\binom{a}{b}}$ est défini par la fonction génératrice*

$$\sum_{\binom{a}{b}} e_{\binom{a}{b}} s^a t^b = \prod_i (1 + x_i s + y_i t),$$

avec pour convention que $e_{\binom{0}{0}} = 1$. Ensuite, pour un partage $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots$, la fonction symétrique élémentaire est

$$e_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots .$$

Définition 1.6.18. *Soit une part $\binom{a}{b}$, $h_{\binom{a}{b}}$ est défini par la fonction génératrice*

$$\sum_{\binom{a}{b}} h_{\binom{a}{b}} s^a t^b = \prod_i \frac{1}{1 - x_i s - y_i t},$$

avec pour convention que $h_{\binom{0}{0}} = 1$. Nous poserons $H(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_i \frac{1}{1 - x_i s - y_i t}$. Ensuite, pour un partage $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots$, la fonction symétrique complète homogène est

$$h_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \dots .$$

Lemme 1.6.19. *Une définition alternative des $h_{\binom{q}{r}}$ est la suivante:*

$$h_{\binom{q}{r}} = \sum_{\substack{\lambda = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots \end{smallmatrix} \right) \\ |\lambda|_x = q \\ |\lambda|_y = r}} B_\lambda m_\lambda,$$

où $B_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} B_{\binom{a_1}{b_1}} B_{\binom{a_2}{b_2}} B_{\binom{a_3}{b_3}} \dots$

La preuve de ce résultat ainsi que d'autres considérations sur les relations entre les différentes bases de fonctions bisymétriques se retrouvent à l'annexe B

1.7 Les modules M_Δ

Considérons un polynôme bihomogène et diagonalement alternant Δ quelconque. Soit M_Δ l'espace linéairement engendré par les dérivées partielles de Δ ,

$$M_\Delta = \mathcal{L}_\partial[\Delta] = \mathcal{L}_\partial[\partial_X^p \partial_Y^q \Delta(X; Y)].$$

Un tel espace est appelé *cône* du fait que tout élément est obtenu comme combinaison linéaire de dérivées d'un élément particulier, Δ , qui est le *sommet* du cône. L'espace $M_\Delta \subset \mathbb{Q}[X, Y]$ est un \mathbb{S}_n -module bigradué. L'idéal annulateur de M_Δ , noté I_Δ , est composé des polynômes qui tuent tout élément de M_Δ :

$$I_\Delta = \{Q(X; Y) | Q(\partial_X; \partial_Y)P = 0\}.$$

Définissons le produit scalaire suivant sur $\mathbb{Q}[X, Y]$:

$$\langle P, Q \rangle = P(\partial_X; \partial_Y)Q(X; Y)|_{X=Y=0}.$$

Par rapport à ce produit scalaire,

$$\mathbf{M}_\Delta^\perp = I_\Delta.$$

En effet, si $Q \in \mathbf{M}_\Delta^\perp$ alors pour tout tuples p, q $\langle Q, \partial_X^p \partial_Y^q \Delta(X; Y) \rangle = 0$. Ainsi,

$$Q(\partial_X \partial_Y) \partial_X^p \partial_Y^q \Delta(X; Y)|_{X=Y=0} = 0$$

et par le développement en série de taylor multivarié $Q(\partial_X^p \partial_Y^q) \Delta(X; Y)$ est identiquement nul. Maintenant, en général, pour un espace vectoriel (bi)homogène $V \subset \mathbb{Q}[X, Y]$ de dimension finie, $\mathbb{Q}[X, Y] = V \oplus V^\perp$ et $V^{\perp\perp} = V$. Par conséquent, $\mathbf{M}_\Delta = I_\Delta^\perp$.

Définition 1.7.1. Soit $\Delta \in \mathbb{Q}[X, Y]$ un polynôme bihomogène alternant. L'opérateur $\text{flip}_\Delta : \mathbf{M}_\Delta \longrightarrow \mathbf{M}_\Delta$ est défini par

$$\text{flip}_\Delta P(X; Y) = P(\partial_X; \partial_Y) \Delta(X; Y).$$

Proposition 1.7.2. *Le flip $_{\Delta}$ est un isomorphisme sur \mathbf{M}_{Δ} qui, sous l'action diagonale de \mathbb{S}_n , tensorise par le signe et qui complémente le bidegré de $P(X; Y)$ par rapport à celui de $\Delta(X; Y)$.*

Preuve: L'injectivité est immédiate puisque $P_1(\partial_X; \partial_Y)\Delta(X; Y) = P_2(\partial_X; \partial_Y)\Delta(X; Y)$ implique $(P_1 - P_2)(\partial_X; \partial_Y)\Delta(X; Y) = 0$, c.-à-d. $P_1 - P_2 \in I_{\Delta} = \mathbf{M}_{\Delta}^{\perp}$ et $P_1 - P_2 = 0$. La surjectivité découle du théorème 4.1 de [10] qui dit, entre autre, la chose suivante. Soit $V \subset \mathbb{Q}[X, Y]$ cône bihomogène de sommet Δ et \mathcal{B} une base de $\mathbb{Q}[X, Y]/I_{\Delta}$ (ou simplement une base bihomogène de V lui-même) alors

$$\mathcal{B}^* = \{b(\partial_X; \partial_Y)\Delta \mid b \in \mathcal{B}\}$$

est aussi une base de V . Dans [10], le théorème est énoncé dans le contexte d'un seul jeu de variable mais facilement étendu à deux jeux.

■

1.8 Éléments de la théorie des polynômes alternés

On définit un diagramme d comme étant un sous-ensemble fini de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Aussi, le couple $(a, b) \in d$ correspond aux coordonnées d'une case du diagramme située à l'intersection de la $b + 1^{\text{ième}}$ rangée (de bas en haut) et de la $a + 1^{\text{ième}}$ colonne (de gauche à droite).

Par exemple, le diagramme

$$d = \{(0,2), (1,0), (1,1), (2,1)\}$$

est représenté à la figure 1.2

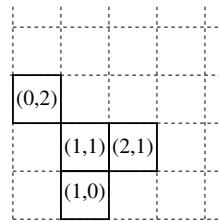


FIG. 1.2 – Un diagramme quelconque

Définition 1.8.1. Considérons le diagramme $d = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\}$. On définit le déterminant

$$\Delta_d = \Delta_d(X; Y) \stackrel{\text{def}}{=} \det(x_i^{a_j} y_i^{b_j})_{1 \leq i, j \leq n},$$

où $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ et $Y = y_1, y_2, \dots, y_n$. Le polynôme Δ_d est bihomogène de degré $|a| = a_1 + \dots + a_n$ en X et degré $|b| = b_1 + \dots + b_n$ en Y . Pour lever l'ambiguité quant au signe du polynôme associé au diagramme d , on ordonne les cases selon l'ordre lexicographique (comme il a été fait pour le diagramme de la figure 1.2).

Il y a une façon naturelle de faire apparaître des fonctions bisymétriques pures, c.-à-d. qui ne s'expriment pas comme combinaison linéaire de produits de fonctions symétriques en X et de fonctions symétriques en Y .

Soient $d = \{c_1, \dots, c_n\}$ et $D = \{C_1, \dots, C_n\}$ deux diagrammes quelconques, mais dont les cases sont triées selon l'ordre qui induit le signe des déterminants de Vandermonde. Pour la cases $c_i = (a_i, b_i)$, dénotons par $z_j^{c_i}$ (resp. $\partial z_j^{c_i}$) le monôme $x_j^{a_i} y_j^{b_i}$ (resp. l'opérateur différentiel $(\partial/\partial x_j)^{a_i} (\partial/\partial y_j)^{b_i}$). Dans ce qui suit, nous aurons besoin des fonction bisymétriques monomiales $m_\lambda[X_n; Y_n]$ mais restreintes aux jeux de variables finis $X_n = x_1 + \dots + x_n$ et $Y_n = y_1 + \dots + y_n$. Aussi, pour $c = (a, b)$ et $C = (m, n)$ dénotons par $(C)_c$ le produit des factorielles descendantes:

$$(a)_m (b)_n = a(a-1) \dots (a-m+1) b(b-1) \dots (b-n+1).$$

Donc, $(C)_c$ est non nul si et seulement si $C - c$ est dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Proposition 1.8.2. *Pour tous diagrammes d et D (chacun ayant n cases), le polynôme $\Delta_d(\partial)\Delta_D$ est bisymétrique. En fait, on a l'expression explicite suivante.*

$$\Delta_d(\partial)\Delta_D = \sum_{\lambda} \sum_{\rho} \epsilon(\rho) b_{\lambda, \rho} m_{\lambda}[X_n; Y_n],$$

où la première somme se fait sur les bipartages $\lambda \vdash \sum C_i - \sum c_i$, la deuxième somme se fait sur les permutations $\rho \in \mathbb{S}_n$ telles que $\{C_i - c_{\rho(i)} | i = 1, \dots, n\}$ est un réarrangement des biparts de λ et la constante $b_{\lambda, \rho}$ vaut

$$\prod_i \mathfrak{m}_{\binom{a}{b}}! \prod_i (C_i)_{c_{\rho(i)}}$$

où $\mathfrak{m}_{\binom{a}{b}}$ est la multiplicité de la bipart $\binom{a}{b}$ dans le bipartage λ , incluant la bipart nulle.

Preuve:

$$\Delta_d(\partial)\Delta_D = \left(\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_i \partial z_i^{c_{\sigma(i)}} \right) \left(\sum_{\tau \in \mathbb{S}_n} \epsilon(\tau) \prod_i z_{\tau(i)}^{C_i} \right), \quad (1.8.1)$$

$$= \sum_{\sigma, \tau \in \mathbb{S}_n} \epsilon(\sigma \cdot \tau) \prod_i z_{\tau(i)}^{C_i - c_{\sigma(\tau(i))}} (C_i)_{c_{\sigma(\tau(i))}}, \quad (1.8.2)$$

$$= \sum_{\rho, \tau \in \mathbb{S}_n} \epsilon(\rho) \prod_i z_{\tau(i)}^{C_i - c_{\rho(i)}} (C_i)_{c_{\rho(i)}},$$

$$= \sum_{\lambda} \sum_{\rho \in \mathbb{S}_n} \epsilon(\rho) \prod_i \mathfrak{m}_{\binom{a}{b}}! \prod_i (C_i)_{c_{\rho(i)}} m_{\lambda}[X_n; Y_n].$$

■

L'exemple suivant permet de clarifier les notations un peu rébarbatives.

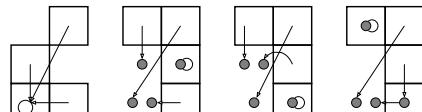
Exemple 1.8.3. Soient $d = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ et $D = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ où

$$\begin{aligned} c_1 &= (0,0), & C_1 &= (0,2), \\ c_2 &= (0,1), & C_2 &= (1,0), \\ c_3 &= (1,0), & C_3 &= (1,1), \\ c_4 &= (1,2), & C_4 &= (1,2). \end{aligned}$$

Alors,

$$\Delta_d(\partial) \Delta_D = 8m_{(1000)} - 8m_{(1000)} - 4m_{(0100)}. \quad (1.8.3)$$

À chaque case $(a,b) \in d$, on associe le vecteur $(-a, -b)$ (voir figure 1.8.3 a)). La permutation ρ dans l'équation 1.8.3 indique quel vecteur $-c_{\rho(i)}$ agit sur la case C_i de D . Ainsi, les termes du membre droit de l'équation 1.8.3 correspondent, dans l'ordre, aux permutations 2314, 2134 et 1324. Les biparts des fonctions bisymétriques monomiales associées, toujours dans l'ordre, sont représentées par les gros points dans les figures 1.8.3 b) - d).



a) b) c) d)

FIG. 1.3 – Application de l'opérateur différentiel associé à un Vandermonde

1.9 Identités liées aux coins d'un diagramme de Ferrers

Un cas particulièrement intéressant de diagramme est le diagramme de Ferrers associé à un partage $\mu = \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_k > 0$ de l'entier n . Il est défini par l'ensemble

$$\{(i,j) \mid 0 \leq j \leq k-1, 0 \leq i \leq \mu_{i+1}\},$$

et on utilise le symbole μ pour désigner à la fois le partage et son diagramme.

Plusieurs identités sur les fonctions symétriques à deux paramètres (q et t , voir section ???) font appel à des statistiques définies sur les partages.

Définition 1.9.1. Soit $\mu \vdash n$ de longueur k et $s = (\alpha, \beta)$ une case du diagramme de Ferrers. Le bras, la jambe, le cobras et la cojambe (notés respectivement $a_\mu(s)$, $l_\mu(s)$, $a'_\mu(s)$ et $l'_\mu(s)$) sont définis par:

$$\begin{aligned} a_\mu(s) &= \mu_{\beta+1} - \alpha - 1, \\ l_\mu(s) &= \mu'_{\alpha+1} - \beta - 1, \\ a'_\mu(s) &= \alpha, \\ l'_\mu(s) &= \beta. \end{aligned}$$

Remarque 1.9.2. 1. Respectivement, ces grandeurs sont le nombre de cases strictement au nord, à l'est, au sud et à l'ouest de la case s dans le diagramme μ . Voir la figure 1.4

2. L'indice μ est omis lorsque le contexte est sans équivoque.
3. On peut étendre la définition pour s dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

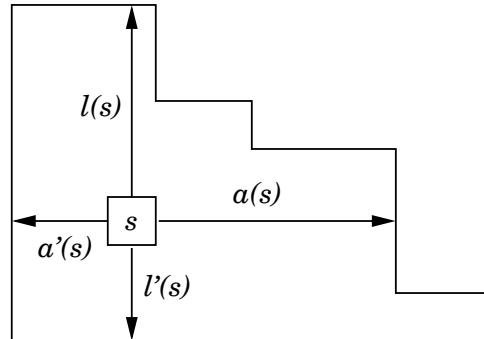


FIG. 1.4 – Les bras, jambe et autres dans un diagramme de Ferrers

Voici maintenant les définitions de quelques statistiques regroupées au même endroit pour consultation ultérieure.

$$n(\mu) = \sum_{i=1}^n (i-1)\mu_i = \sum_{s \in \mu} l'_\mu(s) = \sum_{s \in \mu} l_\mu(s), \quad (1.9.1)$$

$$n(\mu') = \sum_{i=1}^n (i-1)\mu'_i = \sum_{s \in \mu} a'_\mu(s) = \sum_{s \in \mu} a_\mu(s), \quad (1.9.2)$$

$$T_\mu(q,t) = t^{n(\mu)} q^{n(\mu')} = \prod_{s \in \mu} q^{a'_\mu(s)} t^{l'_\mu(s)}, \quad (1.9.3)$$

$$M = (1-t)(1-q) \text{ and } \widetilde{M} = (1-1/t)(1-1/q), \quad (1.9.4)$$

$$B_\mu(q,t) = \sum_{s \in \mu} q^{a'_\mu(s)} t^{l'_\mu(s)}, \quad (1.9.5)$$

$$D_\mu(q,t) = MB_\mu(q,t) - 1, \quad (1.9.6)$$

$$\Pi_\mu(q,t) = \prod_{s \in \mu/(0,0)} (1 - q^{a'_\mu(s)} t^{l'_\mu(s)}), \quad (1.9.7)$$

$$\tilde{h}_\mu(q,t) = \prod_{s \in \mu} (q^{a_\mu(s)} - t^{l_\mu(s)+1}), \quad (1.9.8)$$

$$\tilde{h}'_\mu(q,t) = \prod_{s \in \mu} (t^{l_\mu(s)} - q^{a_\mu(s)+1}), \quad (1.9.9)$$

$$c_{\mu\nu}(q,t) = \prod_{s \in \mathcal{R}_{\mu\nu}} \frac{t^{l_\mu(s)} - q^{a_\mu(s)+1}}{t^{l_\nu(s)} - q^{a_\nu(s)+1}} \prod_{s \in \mathcal{C}_{\mu\nu}} \frac{q^{a_\mu(s)} - t^{l_\mu(s)+1}}{q^{a_\nu(s)} - t^{l_\nu(s)+1}}, \quad (1.9.10)$$

$$d_{\mu\nu}(q,t) = \prod_{s \in \mathcal{R}_{\mu\nu}} \frac{q^{a_\nu(s)} - t^{l_\nu(s)+1}}{q^{a_\mu(s)} - t^{l_\mu(s)+1}} \prod_{s \in \mathcal{C}_{\mu\nu}} \frac{t^{l_\nu(s)} - q^{a_\nu(s)+1}}{t^{l_\mu(s)} - q^{a_\mu(s)+1}}, \quad (1.9.11)$$

où $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ (resp. $\mathcal{C}_{\mu\nu}$) désigne la rangée (resp. la colonne) contenant le coin μ/ν .

$$E_\mu(q,t) = \sum_{i \geq 1} q^{\mu_i} t^{i-1}, \quad (1.9.12)$$

où $\mu_i = 0$ for $i \geq l(\mu)$.

$$E'_\mu(q,t) = E_\mu(q,1/t), \quad (1.9.13)$$

$$\overline{\mu}(q,t) = \sum_{i=1}^n t^{-n+i} q^{-\mu_i}, \quad (1.9.14)$$

comme Sahi le fait (voir le théorème 3.2 dans [16]).

Il y a un choix arbitraire dans le rôle des rangées et des colonnes (et d'un partage par rapport à son conjugué). C'est pourquoi certaines identités révèlent leur symétrie lorsqu'exprimées en fonction des *coins* du partage plutôt qu'en fonction des *parts*.

Définition 1.9.3. Soit μ un diagramme de Ferrers. Un coin ou coin externe est une case $s = (\alpha, \beta)$ de μ telle que $(\alpha + 1, \beta) \notin \mu$ et $(\alpha, \beta + 1) \notin \mu$. Notons A_1, \dots, A_m les coins de μ , auxquels on adjoint le coin virtuel $A_0 = (-1, -1)$. Notons B_k la case à l'intersection de la colonne contenant A_k et de la rangée contenant A_{k+1} (indices pris modulo m). Les B_1, \dots, B_{m-1} sont dits coins internes. Voir la figure 1.5

Remarque 1.9.4. Les cases A_0, B_0 et B_m n'appartiennent pas à μ .

Maintenant, à toute case $s = (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, on peut associer le monôme $t^{l'(s)} q^{a'(s)} = t^\beta q^\alpha$. Soient x_0, \dots, x_m (resp. u_0, \dots, u_m) les monômes associés aux cases A_0, \dots, A_m (resp. B_0, \dots, B_m).

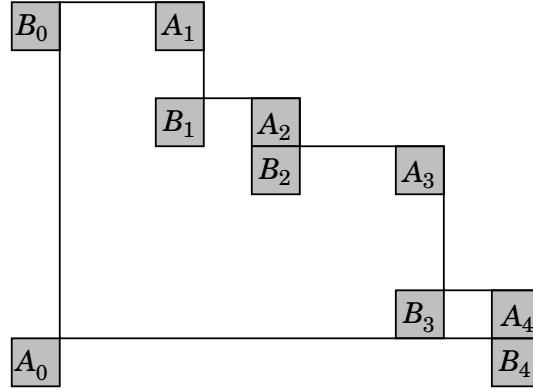


FIG. 1.5 – Les coins externes et internes d'un diagramme de Ferrers

1.10 Identités circulaires, opérateurs de différences et curiosité algébrique

La plupart des résultats sur les fonctions symétriques ont des preuves algébriques. Néanmoins, des considérations combinatoires peuvent jeter un éclairage nouveau sur ces résultats. Il y a deux résultats dont les preuves reposent sur des développements en fractions partielles. Les résultats des identités auxiliaires énoncées aux théorèmes 4.1 et 4.2 dans [16]:

Théorème 1.10.1. *Posons pour $P \in \Lambda$*

$$\mathbf{H}_m P[X] = P[X - \frac{1}{z}] \Omega[zX]|_{z^m}.$$

Alors, pour $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $\lambda_1 \geq \dots \lambda_n \geq 0$, on a

$$s_\lambda[X] = \mathbf{H}_{\lambda_1} \mathbf{H}_{\lambda_2} \dots \mathbf{H}_{\lambda_n} \cdot 1.$$

Ce résultat utilise le développement en fractions partielles

$$\Omega[zX_n] = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - zx_i} = \sum_{i=1}^n A_i(x) \frac{1}{1 - zx_i}, \quad (1.10.1)$$

où

$$A_i(x) = \frac{x_i^{n-1}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}.$$

Théorème 1.10.2. *Posons pour $P \in \Lambda$*

$$D_1^{(n)} P[X_n] = \sum_{i=1}^n A_i(x; t) T_q^{(i)} P[X_n],$$

où $A_i(x; t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{tx_j - x_i}{x_i - x_j}$ et $T_q^{(i)}$ est la substitution $x_i \leftarrow qx_i$. Alors, pour tout $P \in \Lambda$,

$$D_1^{(n)} P[X_n] = \frac{1}{1-t} P[X_n] - \frac{t^n}{1-t} P[X_n - \frac{1-q}{z}] \Omega[z(1-1/t)X_n] \Big|_{z^0}.$$

Ce résultat utilise comme «ingrédient crucial»

$$\Omega[(1-1/t)zX_n] = \prod_{i=1}^n \frac{1-zx_i/t}{1-zx_i} = \frac{1}{t^n} + \frac{t-1}{t^n} \sum_{i=1}^n \frac{A_i(x; t)}{1-zx_i}. \quad (1.10.2)$$

On peut interpréter combinatoirement l'identité 1.10.1 comme suit. Prenons le cas $n = 2$,

$$\begin{aligned} \Omega[z(x_1 + x_2)] &= \frac{x_1}{x_1 - x_2} \cdot \frac{1}{1-zx_1} + \frac{x_2}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{1-zx_2}, \\ &= \Omega\left[\frac{x_2}{x_1}\right] \Omega[zx_1] + \Omega\left[\frac{x_1}{x_2}\right] \Omega[zx_2], \\ &= \Omega\left[\frac{x_2}{x_1}\right] \Omega[zx_1] - \frac{x_2}{x_1} \Omega\left[\frac{x_2}{x_1}\right] \Omega[zx_2], \end{aligned}$$

en utilisant $\Omega\left[\frac{x_1}{x_2}\right] = -\frac{x_2}{x_1} \Omega\left[\frac{x_2}{x_1}\right]$. On peut considérer $\Omega\left[\frac{x_2}{x_1}\right]$ comme une famille d'opérateurs $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^k$ pour $k \geq 0$ qui diminuent le degré en x_1 de k et augmentent le degré en x_2 d'autant. Cette famille d'opérateurs est appliquée simultanément à chacun des $h_m(x_1)$ dans $\Omega[zx_1]$. En considérant le coefficient de z^m :

$$h_m(x_1) = x_1^m \xrightarrow{\Omega\left[\frac{x_2}{x_1}\right]} x_1^m + x_1^{m-1}x_2 + x_1^{m-2}x_2^2 + \cdots + x_2^m + \frac{x_2^{m+1}}{x_1} + \dots$$

De la même manière,

$$h_m(x_2) = x_2^m \xrightarrow{-\frac{x_2}{x_1} \Omega\left[\frac{x_2}{x_1}\right]} \frac{x_2^{m+1}}{x_1} + \frac{x_2^{m+2}}{x_1^2} + \dots$$

En combinant, on obtient bien $h_m[x_1 + x_2] = x_1^m + x_1^{m-1}x_2 + \cdots + x_2^m$. Le cas $n = 3$ permet de voir le principe d'inclusion-exclusion qui sous-tend le cas général:

$$\Omega[zX_3] = \Omega\left[\frac{X_3 - x_1}{x_1}\right] \Omega[zx_1] + \Omega\left[\frac{X_3 - x_2}{x_2}\right] \Omega[zx_2] \Omega\left[\frac{X_3 - x_3}{x_3}\right] \Omega[zx_3],$$

avec les choix

$$\begin{aligned}\Omega\left[\frac{X_3 - x_1}{x_1}\right] &= \Omega\left[\frac{x_2}{x_1}\right]\Omega\left[\frac{x_3}{x_1}\right], \\ \Omega\left[\frac{X_3 - x_2}{x_2}\right] &= -\frac{x_2}{x_1}\Omega\left[\frac{x_2}{x_1}\right]\Omega\left[\frac{x_3}{x_2}\right], \\ \Omega\left[\frac{X_3 - x_3}{x_3}\right] &= \frac{x_3}{x_1}\Omega\left[\frac{x_3}{x_1}\right]\frac{x_3}{x_2}\Omega\left[\frac{x_3}{x_2}\right].\end{aligned}$$

La figure 1.6 illustre l'application de ces trois familles d'opérateurs. Un pas vers le haut (resp. la droite) correspond à multiplier par $\frac{x^2}{x_1}$ (resp. par $\frac{x_3}{x_1}$) le contenu de la case précédente. Le premier opérateur ci-haut appliqué à $h_m(x_1)$ engendre tout le quadrant. Le deuxième appliqué à $h_m(x_2)$ retranche la partie à droite de l'escalier (région en gris moyen). Le troisième appliqué à $h_m(x_3)$ rajoute la partie en gris foncé. Il reste exactement $h_m[X_3]$. On a évidemment

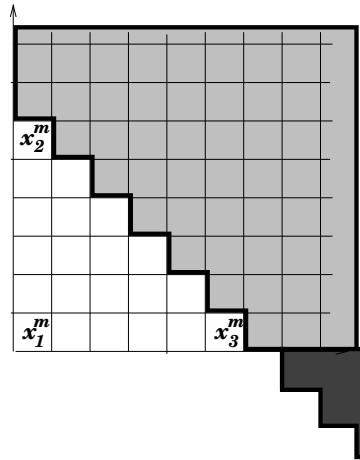


FIG. 1.6 – La fonction homogène complète par inclusion-exclusion.

$$\Omega[tX_n] = \sum_{i=1}^n \Omega\left[\frac{X_n - x_i}{x_i}\right] \Omega[tx_i]. \quad (1.10.3)$$

que l'on peut établir par récurrence en n'utilisant que le fait que

$$\Omega\left[\frac{1}{x}\right] = -x\Omega[x].$$

Donc, on se ramène à un contexte où l'on peut prendre l'inverse de variables.

Il y a un lien intriguant avec les *identités circulaires* de F. Patras et C. Reutenauer (section 4 dans [22]). Dans leur contexte, ξ_1, \dots, ξ_p est une séquence d'éléments d'un corps dont le produit $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_p$ donne 1 et dont les sous-produits sont différents de 1. Les auteurs y établissent l'identité

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 0} t^k \sum_{p \geq i \geq 1} \frac{(\xi_{i+1} \dots \xi_p)^k}{(1 - \xi_{i+1})(1 - \xi_{i+1}\xi_{i+2}) \dots (1 - \xi_{i+1}\xi_{i+2} \dots \xi_{i+p-1})} \\ &= 1 + (-1)^{p-1} \frac{\xi_2 \xi_3^2 \dots \xi_p^{p-1} t^p}{(1 - \xi_2 \dots \xi_p t)(1 - \xi_3 \dots \xi_p t) \dots (1 - \xi_p t)(1 - t)}, \end{aligned}$$

où t est une variable et les indices sont pris modulo p . Cette identité est établie en considérant les descentes *circulaires* d'une permutation. On peut arriver au même résultat en ne considérant que la fonction symétrique $\Omega(x)$. La preuve est faite pour $p = 3$ mais le résultat se généralise de façon naturelle. D'abord, pour $p = 3$ l'identité s'écrit

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{(1 - \xi_1)(1 - \xi_1\xi_2)} + \frac{\xi_3^k}{(1 - \xi_3)(1 - \xi_3\xi_1)} + \frac{\xi_2 \xi_3^k}{(1 - \xi_2)(1 - \xi_2\xi_3)} \right) t^k \quad (1.10.4) \\ &= 1 + (-1)^2 \frac{\xi_2 \xi_3^2 t^3}{(1 - \xi_2 \xi_3 t)(1 - \xi_3 t)(1 - t)}. \end{aligned}$$

On part de

$$\Omega \left[\frac{1}{t} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) \right] = 1 - \Omega[t(x_1 + x_2 + x_3)].$$

En développant le membre gauche à l'aide de 1.10.3 et en utilisant 1.10.4, on obtient

$$\begin{aligned} 1 - \Omega[t(x_1 + x_2 + x_3)] &= \\ & \Omega \left[\frac{x_2 + x_3}{x_1} \right] \Omega \left[\frac{1}{x_1 t} \right] + \Omega \left[\frac{x_1 + x_3}{x_2} \right] \Omega \left[\frac{1}{x_2 t} \right] + \Omega \left[\frac{x_1 + x_2}{x_3} \right] \Omega \left[\frac{1}{x_3 t} \right]. \end{aligned}$$

Maintenant il suffit d'effectuer le changement de variables $\xi_1 \leftarrow \frac{x_2}{x_1}$, $\xi_2 \leftarrow \frac{x_3}{x_2}$, $\xi_3 \leftarrow \frac{x_1}{x_3}$ et $t \leftarrow \frac{1}{x_1 t}$ (qui donne bien $\xi_1 \xi_2 \xi_3 = 1$) pour obtenir 1.10.4.

■

Il serait intéressant de voir si le concept de *descentes circulaires* jette un éclairage combinatoire nouveau sur des identités qui utilisent les monômes de coins : x_0, x_1, \dots, x_m et u_0, u_1, \dots, u_m qui ont l'heure de satisfaire

$$\frac{x_0 x_1 \dots x_m}{u_0 u_1 \dots u_m} = 1.$$

De telles identités sont, par exemple, les formules de Pieri:

$$\partial_{p_1} \tilde{H}_\mu = \frac{1}{\widetilde{M}} \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i} \frac{\prod_{s=0}^m (u_s - x_i)}{\prod_{\substack{s=0 \\ s \neq i}}^m (x_s - x_i)} \tilde{H}_{\nu^{(i)}},$$

où $\widetilde{M} = (1 - 1/t)(1 - 1/q)$ et $\nu^{(i)}$ est diagramme de Ferrers obtenu de μ en retranchant le i ième coin externe, c.-à-d. le coin dont le monôme associé est x_i .

Chapitre II

HARMONIQUES DIAGONALES

LES HARMONIQUES diagonales sont une généralisation des harmoniques classiques, c.-à-d. celles rencontrées dans l'étude des invariants polynomiaux du groupe de réflexions \mathbb{S}_n (de type A_{n-1} dans le système de classification des groupes de Weyl). Voici un bref résumé du contexte classique avec une emphase sur les éléments susceptibles d'admettre une généralisation.

2.1 Harmoniques classiques

Considérons le produit scalaire (symétrique) sur $\mathbb{Q}[X]$ défini par

$$\langle P, Q \rangle \stackrel{\text{def}}{=} P(\partial)Q(X)|_{X=0}, \quad (2.1.1)$$

c.-à-d. le terme constant de l'application de l'opérateur $P(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n})$ sur le polynôme $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n &\stackrel{\text{def}}{=} \{P \in \mathbb{Q}[X] \mid f(\partial_X)P(X) = 0, \forall f(X) \text{ symétrique sans terme constant}\}, \\ &= \{P \in \mathbb{Q}[X] \mid \sum_{i=1}^n \partial x_i^k P(X) = 0, 1 \leq k \leq n\}. \end{aligned}$$

Le déterminant de Vandermonde usuel

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j), \\ &= \det(x_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n} \end{aligned}$$

fait clairement partie de \mathcal{H}_n du fait qu'il est de degré minimal en tant qu'alternant et qu'il divise tout alternant. Il est facile de voir que $\mathcal{L}_\partial[\Delta_n(X)] \subseteq \mathcal{H}_n$. Mais en fait, il y a égalité.

Théorème 2.1.1. *L'espace \mathcal{H}_n est un cône de sommet $\Delta_n(X)$, c.-à-d.*

$$\mathcal{H}_n = \mathcal{L}_\partial[\Delta_n(X)],$$

et sa dimension est $n!$. De plus, en tant que \mathbb{S}_n -module, \mathcal{H}_n est isomorphe à la représentation régulière.

Les éléments de \mathcal{H}_n sont appelés *harmoniques*. Ces définitions proviennent du contexte plus général des invariants de groupes de réflexions.

Définition 2.1.2. *Soit V un espace euclidien doté d'une forme bilinéaire symétrique définie positive (\cdot, \cdot) . Une réflexion est un opérateur linéaire s sur V qui envoie un vecteur α sur son opposé $-\alpha$ et fixe l'hyperplan H_α orthogonal à α . On note parfois $s = s_\alpha$ et l'image d'un vecteur quelconque ν est alors*

$$s_\alpha \nu = \nu - \frac{2(\nu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha.$$

Un groupe fini de réflexions est un groupe fini engendré par des réflexions.

Maintenant, pour W un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions (où V est espace euclidien de dimension n) , on peut définir une action sur l'anneau des fonctions polynomiale sur V . En effet, soit $R \stackrel{\text{def}}{=} S(V^*)$ l'algèbre symétrique de l'espace dual V^* . Alors, R est identifiable à $\mathbb{Q}[X]$ où X est le jeu de variables x_1, x_2, \dots, x_n . Pour n'importe quel sous-groupe G de $\mathrm{GL}(V)$ on peut définir une action de G sur R comme groupe d'automorphismes de \mathbb{Q} -algèbre: pour tout $g \in G$, $v \in V$ et $f \in V^*$,

$$(g.f)(v) \stackrel{\text{def}}{=} f(g^{-1}v).$$

Naturellement, $f \in R$ est G -invariant si et seulement si $g.f = f$. Notons R^G la sous-algèbre des G -invariants. En tant que \mathbb{Q} -algèbre, R^G est finiment engendré.

Remarque 2.1.3. Les groupes de réflexions sont des sous-groupes du groupe orthogonal. Ainsi, $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ est toujours un invariant.

L'anneau R^G possède une structure d'anneau gradué. Désignons par R_+^G l'anneau des polynômes G -invariants sans terme constant. Par rapport au produit scalaire de (2.1.1), posons $\mathcal{H}_G \stackrel{\text{def}}{=} (R_+^G)^\perp$. \mathcal{H}_n est dit espace des harmoniques puisque par la remarque 2.1.3 $P \in \mathcal{H}_G$ satisfait

$$\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 P = 0.$$

Définition 2.1.4. *Un polynôme $P(X)$ est dit être G -harmonique si et seulement si*

$$f(\partial X)P(X) = 0$$

pour tout invariant polynomial $f(X)$ sans terme constant. On dénote \mathcal{H}_G l'espace des G -harmoniques polynomiales.

Il est clair que \mathcal{H}_G est un espace homogène de $\mathbb{Q}[X]$. Ainsi, il est gradué par le degré:

$$\mathcal{H}_G = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{H}_G^{(d)},$$

avec chaque $\mathcal{H}_G^{(d)}$ G -invariant. Considérons a un point régulier de V , c.-à-d. un point tel que $[a] \stackrel{\text{def}}{=} \{g.a \mid g \in G\}$, son *orbite* sous G , est réduite à $\{\text{id}\}$. Maintenant, posons

$$\mathcal{J}_{[a]} \stackrel{\text{def}}{=} \{P(X) \mid P(g.a) = 0, \forall g \in G\},$$

où l'on fait l'abus de notation qui consiste à considérer les éléments de G comme des matrices orthogonales. Donc, $\mathcal{J}_{[a]}$ est l'idéal des polynômes s'annulant sur l'orbite. Pour un élément P d'un idéal gradué \mathcal{J} , on peut considérer $h(P)$, sa composante homogène dominante (pas nécessairement un monôme). On pose,

$$\text{gr } \mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} (h(P) \mid P \in \mathcal{J}),$$

l'idéal engendré par les composantes homogènes dominantes. La construction finale, c'est de prendre le complément orthogonal

$$H_{[a]} \stackrel{\text{def}}{=} (\text{gr } \mathcal{J}_{[a]})^\perp.$$

Aussi, un groupe de réflexion est toujours engendré par les réflexions qu'il contient. Sans entrer dans le détail des systèmes de racines d'un groupe de réflexion, mentionnons que le

discriminant (ou *G-Vandermonde*), Δ_G , est défini comme étant le produit des polynômes α_ρ associés aux hyperplans orthogonaux aux racines ρ du système.

$$\Delta_G = \prod_{\rho \in G} \alpha_\rho,$$

Le G -Vandermonde est gauche (*«skew»*) invariant, c.-à-d. pour $g \in G$,

$$g.\Delta_G = \epsilon(g)\Delta,$$

où $\epsilon(g)$ est -1 puissance le nombre de réflexions dans la description de g comme produit de réflexions. La parité de ce nombre est un invariant et le nombre minimal est dit *longueur* de g . Dans le cas de \mathbb{S}_n , c'est le nombre d'inversions d'une permutation. Aussi, Δ_G divise tout gauche invariant de G . Dans le cas du groupe \mathbb{S}_n ,

$$\Delta_{\mathbb{S}_n} = \Delta_n,$$

le Vandermonde usuel. Une généralisation du théorème 2.1.1 s'obtient de résultats de géométrie algébrique (Steinberg, Shephard-Todd, Chevaley).

Théorème 2.1.5. *Soit G un groupe fini de réflexions. Alors, le G -module \mathcal{H}_G est une version graduée de la représentation régulière à gauche de G . En particulier,*

$$\dim \mathcal{H}_G = |G|.$$

Aussi, $\mathbb{Q}[X]$ est un $\mathbb{Q}[X]^G$ -module libre, c.-à-d.

$$\mathbb{Q}[X] \simeq \mathbb{Q}[X]^G \otimes \mathcal{H}_G.$$

Garsia et Haiman (voir théorème 3.3 dans [10]) en donne une preuve selon la suite d'inclusions

$$\mathcal{H}_G \subseteq \mathcal{L}_\partial[\Delta_G] \subseteq \mathbf{H}_{[a]} \subseteq \mathcal{H}_G,$$

où a est un point régulier quelconque. Soit \mathcal{I}_G l'idéal de $\mathbb{Q}[X]$ engendré par R_+^G , l'ensemble des invariants polynomiaux sans terme constant. Alors, l'*anneau des coinvariants* $\mathbb{Q}[X]_G$ est un G -module défini par

$$\mathbb{Q}[X]_G = \mathbb{Q}[X]/\mathcal{I}_G.$$

Puisque \mathcal{I}_G est homogène, $\mathbb{Q}[X]_G$ est gradué par le degré et

$$\mathbb{Q}[X]_G \simeq \mathcal{H}_G$$

en tant que G -modules gradués. La caractéristique de Frobenius graduée de $\mathcal{H}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}_{\mathbb{S}_n}$, définie par

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}_n}(q) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{d \geq 0} q^d \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \chi_{\mathcal{H}_n^{(d)}}(\sigma) p_{\lambda(\sigma)}$$

vaut

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathcal{H}_n}(q) &= \prod_{k=1}^n (1 - q^k) \left(\sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{z_\lambda} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{p_{\lambda_i}}{1 - q^{\lambda_i}} \right), \\ &= (q; q)_n h_n \left[\frac{X}{1-q} \right]. \end{aligned}$$

Une base homogène de $\mathbb{Q}[X]_{\mathbb{S}_3}$:

$$\begin{array}{lll} & q^{\deg} & \\ \Delta_3 & = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) & q^3 \\ \partial x_1 \Delta_3 & = (x_2 - x_3)(2x_1 - x_2 - x_3) & q^2 \\ \partial x_2 \Delta_3 & = (x_1 - x_3)(-2x_2 + x_1 + x_3) & q^2 \\ \partial x_1^2 \Delta_3 & = 2(x_2 - x_3) & q \\ \partial x_1 \partial x_2 \Delta_3 & = 2(x_1 - x_2) & q \\ \partial x_1^2 \partial x_2 \Delta_3 & = 2 & + 1 \\ & & \text{Série de Hilbert: } q^3 + 2q^2 + 2q + 1 \end{array}$$

2.2 Harmoniques diagonales

On définit les harmoniques diagonales en se dotant d'un deuxième jeu de variables,

$$y = y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Définition 2.2.1. *Un polynôme $P(X, Y)$ est diagonalement harmonique si et seulement si*

$$f(\partial X, \partial Y)P(X, Y) = 0$$

pour tout polynôme $f(X, Y)$ diagonalement symétrique sans terme constant. L'espace $\mathcal{D}\mathcal{H}_n$ est l'espace des harmoniques diagonales.

L'espace \mathcal{DH}_n est bihomogène:

$$\mathcal{DH}_n = \bigoplus_{c,d \geq 0} \mathcal{DH}_n^{(c,d)},$$

avec chacun des $\mathcal{DH}_n^{(c,d)}$ invariant sous l'action de \mathbb{S}_n .

Théorème 2.2.2 (Haiman). *L'espace \mathcal{DH}_n*

- a) *est de dimension $(n+1)^{(n-1)}$,*
- b) *est bigradué de caractéristique de Frobenius bigraduée $\nabla(e_n)$,*

où ∇ est un opérateur sur les fonctions symétriques décrit en terme des fonctions symétriques de Macdonald à deux paramètres.

Remarque 2.2.3. \mathcal{DH}_n n'est pas l'espace des harmoniques d'un groupe de réflexions.

Plusieurs conjectures intéressantes ayant trait à l'opérateur ∇ sont encore ouvertes (voir [4]). La combinatoire de \mathcal{DH}_n reste mystérieuse. Le coefficient de e_n dans la caractéristique de Frobenius bigraduée $\mathcal{F}_{\mathcal{DH}_n}(q,t)$ s'avère être un beau q,t -Catalan:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathcal{DH}_1}(q,t) &= s_1, \\ \mathcal{F}_{\mathcal{DH}_2}(q,t) &= s_2 + (q+t)s_{11}, \\ \mathcal{F}_{\mathcal{DH}_3}(q,t) &= s_3 + (q^2 + qt + t^2 + q + t)s_{21} + \underbrace{(q^3 + qt^2 + q^2t + q^3 + qt)}_{q,t\text{-Catalan}} s_{111}. \end{aligned}$$

2.3 Les harmoniques de $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n$

Du résultat énoncé plus tôt, il s'ensuit que l'espace

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n}$$

peut être identifié avec l'espace linéairement engendré par toutes les dérivées partielles de

$$\Delta_n(X)\Delta_n(Y) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (y_i - y_j)$$

dont la caractéristique de Frobenius bigraduée vaut

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n}(q,t) = (q;q)_n(t;t)_n h_n \left[\frac{X}{1-q} \right] \otimes h_n \left[\frac{Y}{1-t} \right].$$

En considérant \mathbb{S}_n comme un sous-groupe diagonal de $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n$, nous obtenons une action de \mathbb{S}_n sur $\mathcal{H}_{\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n}$. De plus, l'inclusion

$$\mathcal{D}\mathcal{H}_n \hookrightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n}$$

est un morphisme de représentations bigraduées de \mathbb{S}_n . Il s'ensuit de principes généraux que

$$\mathcal{F}_{\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n}(q, t) = (q; q)_n(t; t)_n h_n \left[\frac{X}{(1-q)(1-t)} \right].$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1}(q, t) &= s_1, \\ \mathcal{F}_{\mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_2}(q, t) &= (qt + 1)s_2 + (q + t)s_{11}, \\ \mathcal{F}_{\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3}(q, t) &= (q^3t^3 + q^2t^2 + q^2t + qt^2 + qt + 1)s_3 \\ &\quad + (q^3t^2 + q^2t^3 + q^3t + q^2t^2 + qt^3 + q^2t + qt^2 + q^2 + qt + t^2 + q + t)s_{21} \\ &\quad + \underbrace{(q^2t^2 + q^3 + qt^2 + q^2t + q^3 + qt)}_{q,t\text{-Catalan}} s_{111}. \end{aligned}$$

2.4 Polynômes de diagrammes

L'introduction donne nouvelle classe d'objets combinatoires, les diagrammes compacts, permet la description de belles propriétés des alternants diagonaux (nous le verrons à la section 3.2). Mais voyons d'abord ce qui a déjà été fait dans le cas des polynômes de diagrammes («*lattice determinants*»).

2.4.1 Diagrammes à un trou

Considérons les modules

$$M_D \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}[\Delta_D],$$

où D est un diagramme inclus dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On a vu à la section 1.7 que sous l'action diagonale, c.-à-d. l'action telle que pour toute permutation $\sigma \in \mathbb{S}_n$,

$$\sigma P(X; Y) = P(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \dots, x_{\sigma_n}; y_{\sigma_1}, y_{\sigma_2}, \dots, y_{\sigma_n}).$$

Le polynôme $\Delta_D = \Delta_D(X; Y)$ est un alternant. Par conséquent, M_D est un sous-espace invariant de $\mathbb{Q}[X, Y]$. De plus, puisque Δ_D est bihomogène, M_D possède une décomposition bigraduée. Posons $\mathcal{H}_{r,s}[M_D]$ le sous-espace des éléments bihomogènes de degré r in X et degré s in Y . On a la décomposition en somme directe possèdent une décomposition en somme directe de la forme

$$M_D = \bigoplus_{r=0}^{|p|} \bigoplus_{s=0}^{|q|} \mathcal{H}_{r,s}[M_D].$$

Le caractère bigradué de M_D est encodé par la fonction symétrique suivante :

$$\mathcal{F}_{q,t}(M_D) = C_D(X; q, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{r=0}^{|p|} \sum_{s=0}^{|q|} t^r q^s \mathcal{F}(\chi_{\mathcal{H}_{r,s}[M_D]}),$$

où $\chi_{\mathcal{H}_{r,s}[M_D]}$ désigne le caractère de $\mathcal{H}_{r,s}[M_D]$ et \mathcal{F} est la correspondance de Frobenius qui associe au caractère irréductible χ^λ la fonction de Schur s_λ . La conjecture $n!$ de Garsia et Haiman dit que pour tout diagramme de Ferrers μ , l'expression $C_D(x; q, t)$ est nul autre que le polynôme de Macdonald renormalisé $\tilde{H}_\mu(X; q, t)$ associé à μ . Ceci a été montré récemment par Haiman avec une approche de géométrie algébrique. Il appert qu'une approche naturelle, combinatoire et récursive à la conjecture $n!$ implique des diagrammes *troués*, c.-à-d. des diagrammes obtenus en supprimant une seule case du diagramme de Ferrers. Il a été conjecturé que pour un tel diagramme D , l'espace M_D est somme directe de représentation régulière à gauche de \mathbb{S}_n (voir conjecture I.2 dans [2]). Plus précisément, si μ est un partage de $n + 1$, on désigne par μ/ij le diagramme obtenu en supprimant la case (i, j) du diagramme de Ferrers de μ . On dit de la position (i, j) qu'elle est le *trou* of μ/ij . La conjecture en question affirme que le nombre de copie de la représentation régulière à gauche dans $M_{\mu/ij}$ équivaut au cardinal de l'*ombre* de (i, j) , c.-à-d. le cardinal de $\{(s, t) \in \mu : s \geq i, t \geq j\}$. Ceci, et plus, est encodé dans *récurrence à quatre termes* suivante liant les caractéristiques de Frobenius $C_{\mu/ij}$ des espaces $M_{\mu/ij}$:

$$C_{\mu/ij} = \frac{t^\ell - q^{a+1}}{t^\ell - q^a} C_{\mu/i,j+1} + \frac{t^{\ell+1} - q^a}{t^\ell - q^a} C_{\mu/i+1,j} - \frac{t^{\ell+1} - q^{a+1}}{t^\ell - q^a} C_{\mu/i+1,j+1}, \quad (2.4.1)$$

où ℓ and a sont respectivement les longueur de *jambe* et de *bras* de la case (i, j) dans μ . En ce qui a trait aux conditions initiales, $C_{\mu/i,j+1}$ (resp. $C_{\mu/i+1,j}$ and $C_{\mu/i+1,j+1}$)

s'annule lorsque la case $(i,j+1)$ (resp. $(i+1,j)$ et $(i+1,j+1)$) tombe à l'extérieur de μ . De plus, si (i,j) est un coin (interne) de μ , de sorte que μ/ij est en fait un partage, disons ν , alors on pose

$$C_{\mu/ij} = \tilde{H}_\nu.$$

Conjecture 2.4.1. *Pour tout $(i,j) \in \mu$, nous avons $\tilde{H}_{\mu/ij} = C_{\mu/ij}$.*

2.4.2 Traduction en terme des noyaux

Soit $\mathbf{K}_{ij}^x \stackrel{\text{def}}{=} \ker D_X$ le noyau de l'application

$$D_X : M_{\mu/ij} \longrightarrow M_{\mu_{i+1,j}},$$

où $D_X \stackrel{\text{def}}{=} \partial x_1 + \partial x_2 + \dots + \partial x_n$. Le choix de l'ensemble d'arrivée est justifié par le fait que

$$D_X \Delta_{\mu/ij} =_{\text{cte}} \Delta_{\mu_{i+1,j}}.$$

Ici, le symbole " $=_{\text{cte}}$ " signifie l'égalité (à une constante non nulle près). Similairement, nous définissons $\mathbf{K}_{ij}^y \stackrel{\text{def}}{=} \ker D_Y$ pour $D_Y \stackrel{\text{def}}{=} \partial y_1 + \partial y_2 + \dots + \partial y_n$ et $\mathbf{K}_{ij}^{xy} \stackrel{\text{def}}{=} \ker(D_X D_Y)$. Finalement, considérons les noyaux suivants:

$$K_{ij}^x \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}_{q,t} \mathbf{K}_{ij}^x, \quad K_{ij}^y \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}_{q,t} \mathbf{K}_{ij}^y \quad \text{et} \quad K_{ij}^{xy} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}_{q,t} \mathbf{K}_{ij}^{xy}.$$

La récurrence à quatre termes de (2.4.1) est équivalente à l'identité

$$K_{ij}^{xy} = \frac{t^{\ell+1} - q^a}{t^{\ell+1} - q^{a+1}} q K_{ij}^x + \frac{t^\ell - q^{a+1}}{t^{\ell+1} - q^{a+1}} t K_{ij}^y. \quad (2.4.2)$$

Rappelons la proposition I.3 de [2].

Proposition 2.4.2. *Soit $D_x^h = \sum_{i=1}^n \partial x_i^h$, $D_y^k = \sum_{i=1}^n \partial y_i^k$ et $D_{hk} = \sum_{i=1}^n \partial x_i^h \partial y_i^k$, (les «polarized power sums»). Alors,*

$$D_x^h D_y^k \mathbf{M}_{\mu/ij} = D_{hk} \mathbf{M}_{\mu/ij} = \mathbf{M}_{\mu_{i+h,j+k}} \quad (2.4.3)$$

En particulier, $\mathbf{M}_{\mu_{i'j'}} \subseteq \mathbf{M}_{\mu/ij}$ aussitôt que $i' \geq i$ et $j' \geq j$.

Par conséquent, $D_X = D_x^1 : \mathbf{M}_{\mu/ij} \longrightarrow \mathbf{M}_{\mu/i+1,j}$ est une application surjective. Désignons par \mathbf{K}_{ij}^x le noyau de cette application. Aussi, désignons par \mathbf{K}_{ij}^y le noyau de $D_Y = D_y^1 : \mathbf{M}_{\mu/ij} \longrightarrow \mathbf{M}_{\mu/i,j+1}$ et \mathbf{K}_{ij}^{xy} , celui de $D_{XY} = D_x^1 D_y^1 : \mathbf{M}_{\mu/ij} \longrightarrow \mathbf{M}_{\mu/i+1,j+1}$. Soient K_{ij}^x , K_{ij}^y et K_{ij}^{xy} les caractéristiques de Frobenius respectives. Du premier théorème des isomorphismes de groupes, on obtient

$$\mathbf{M}_{\mu/i+1,j} \cong \mathbf{M}_{\mu/ij}/\mathbf{K}_{ij}^x,$$

qui se traduit en terme de caractéristique de Frobenius par

$$C_{\mu/i+1,j} = \frac{C_{\mu/ij} - K_{ij}^x}{t}. \quad (2.4.4)$$

Notons que t encode le degré de la composante en x , ainsi le quotient par t est une conséquence de D_X . Similairement, on obtient

$$C_{\mu/i,j+1} = \frac{C_{\mu/ij} - K_{ij}^y}{q}, \quad (2.4.5)$$

et

$$C_{\mu/i+1,j+1} = \frac{C_{\mu/ij} - K_{ij}^{xy}}{qt}, \quad (2.4.6)$$

En sustituant les équations (2.4.4), (2.4.5) et (2.4.6) dans (2.4.1), l'on obtient

$$\begin{aligned} C_{\mu/ij} &= \frac{t^\ell - q^{a+1}}{t^\ell - q^a} \left(\frac{C_{\mu/ij} - K_{ij}^y}{q} \right) + \frac{t^{\ell+1} - a^q}{t^\ell - q^a} \left(\frac{C_{\mu/ij} - K_{ij}^x}{t} \right) \\ &\quad - \frac{t^{\ell+1} - q^{a+1}}{t^\ell - q^a} \left(\frac{C_{\mu/ij} - K_{ij}^{xy}}{qt} \right), \end{aligned}$$

qui est équivalent à

$$\begin{aligned} qt(t^\ell - q^a)C_{\mu/ij} &= \{t(t^\ell - q^{a+1}) + q(t^{\ell+1} - a^q) - (t^{\ell+1} - q^{a+1})\}C_{\mu/ij} \\ &\quad + \{-t(t^\ell - q^{a+1})K_{ij}^y - q(t^{\ell+1} - a^q)K_{ij}^x + (t^{\ell+1} - q^{a+1})K_{ij}^{xy}\} \end{aligned}$$

Les coefficients de $C_{\mu/ij}$ s'annulent pour donner simplement

$$(t^{\ell+1} - q^{a+1})K_{ij}^{xy} - t(t^\ell - q^{a+1})K_{ij}^y - q(t^{\ell+1} - a^q)K_{ij}^x = 0, \quad (2.4.7)$$

ce qui prouve l'équation (2.4.2), tel qu'annoncé. Maintenant, en extirpant t^ℓ et q^a dans (2.4.7) et en divisant par qt , l'on obtient

$$t^\ell \left\{ K_{ij}^x - \frac{K_{ij}^{xy} - K_{ij}^y}{q} \right\} = q^a \left\{ K_{ij}^y - \frac{K_{ij}^{xy} - K_{ij}^x}{t} \right\}. \quad (2.4.8)$$

Posons

$$A_{ij}^x \stackrel{\text{def}}{=} K_{ij}^x - \frac{K_{ij}^{xy} - K_{ij}^y}{q},$$

et

$$A_{ij}^y \stackrel{\text{def}}{=} K_{ij}^y - \frac{K_{ij}^{xy} - K_{ij}^x}{t}.$$

Théorème 2.4.3. *La récurrence à quatre termes (2.4.1) est équivalente à l'identité suivante surnommée identité cruciale.*

$$t^\ell A_{ij}^x = q^a A_{ij}^y, \quad (2.4.9)$$

où $A_{ij}^x = K_{ij}^x - K_{i,j+1}^x$ et $A_{ij}^y = K_{ij}^y - K_{i+1,j}^y$.

Preuve: voir formule (I.20) dans [2]. À cet endroit, \mathbf{A}_{ij}^x est par définition $\mathbf{K}_{ij}^x / \mathbf{K}_{i,j+1}^x$, de sorte que A_{ij}^x est sa caractéristique de Frobenius (similairement pour \mathbf{A}_{ij}^y). Pour insérer ceci dans notre contexte, il reste à montrer que

$$K_{i,j+1}^x = \frac{K_{ij}^{xy} - K_{ij}^y}{q} \quad (2.4.10)$$

et

$$K_{i+1,j}^y = \frac{K_{ij}^{xy} - K_{ij}^x}{t}. \quad (2.4.11)$$

Or,

$$\begin{aligned} K_{i,j}^{xy} &= \{P \in \mathbf{M}_{\mu/ij} \mid D_{XY}(P) = 0\}, \\ &= \{P \in \mathbf{M}_{\mu/ij} \mid D_Y(P) = 0 \text{ or } \exists Q \in \mathbf{M}_{\mu/i,j+1} \setminus \{0\}, D_Y P = Q \in \ker D_X\}, \\ &= \mathbf{K}_{i,j}^y \oplus \{0\} \cup D_Y^{-1}(\mathbf{K}_{i,j+1}^x \setminus \{0\}). \end{aligned}$$

Ceci implique $K_{i,j}^{xy} = K_{i,j}^y + q K_{i,j+1}^x$ au niveau des séries de Hilbert bigraduées. C'est précisément l'équation (2.4.10). L'équation (2.4.11) est établie de façon similaire. ■

Remarque 2.4.4 (Aux évaluateurs). Cette section est encore en construction. Dans la version finale, on devrait y trouver la description des atomes en terme des noyaux et un compte-rendu des atomes tels que définis dans [2]. Aussi, une heuristique analogue à celle trouvée dans [3] sera développée pour le cas des diagrammes troués.

2.5 Récurrence pour les atomes

La récurrence à quatre termes pour les atomes est comme suit. Pour une case $c = (i,j)$, on a

$$\Xi_{i,j} = \begin{cases} \tilde{H}_\nu & \text{si } a(\mu)(c) = l(\mu)(c) = 0, \\ \frac{q^a - t^m}{q^a - t^l} \Xi_{i+1,j} + \frac{q^b - t^l}{q^a - t^l} \Xi_{i,j+1} - \frac{q^b - t^m}{q^a - t^l} \Xi_{i+1,j+1} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.5.1)$$

avec les conditions initiales $\Xi_{i,j} = 0$ si $c \notin \mu$. On observe les simplifications suivantes pour $a = b$ or $l = m$:

$$\Xi_{i,j} = \begin{cases} \Xi_{i+1,j} & \text{si } l = m, \\ \Xi_{i,j+1} & \text{si } a = b. \end{cases}$$

Cela correspond au fait que les atomes sont constants dans les régions de cases dont l'ombre contient les mêmes coins. Il est clair que

$$\begin{aligned} a(\mu)(i+1,j) &= a-1, \\ l(\mu)(i,j+1) &= l-1, \\ a(\mu)(i+1,j+1) &= b-1, \\ l(\mu)(i+1,j+1) &= m-1. \end{aligned}$$

Maintenant, avec

$$A_{i,j}^x = q^{a_{ij}} \Xi_{i,j} \text{ et } A_{i,j}^y = t^{l_{ij}} \Xi_{i,j}$$

en tête (voir formule (5.22) dans [2]), on multiplie les deux côtés de (2.5.1) par $q^a - t^l$ pour obtenir

$$A_{i,j}^x - A_{i,j}^y = (qA_{i+1,j}^x - A_{i+1,j}^y) + (A_{i,j+1}^x - tA_{i+1,j}^y) - (qA_{i+1,j+1}^x - tA_{i+1,j+1}^y). \quad (2.5.2)$$

Il est à noter que cette relation tient toujours pour les cas $a = b$ ou $l = m$, et qu'elle peut se réécrire

$$(A_{i,j}^x - A_{i,j+1}^x) - q(A_{i+1,j}^x - A_{i+1,j+1}^x) = (A_{i,j}^y - A_{i+1,j}^y) - t(A_{i,j+1}^y - A_{i+1,j+1}^y). \quad (2.5.3)$$

Remarque 2.5.1. Le contexte dans [2] est le suivant. La formule (5.19) y dit que

$$\begin{aligned} a)_x \quad C_{\mu_{i,j}} &= K_{ij}^x + tC_{\mu/i+1,j}, \\ a)_y \quad C_{\mu_{i,j}} &= K_{ij}^y + qC_{\mu/i,j+1}, \\ b)_x \quad K_{i,j}^x &= A_{i,j}^x + K_{i,j+1}^x, \\ b)_y \quad K_{i,j}^y &= A_{i,j}^y + K_{i+1,j}^y, \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

avec pour conditions initiales

$$K_{\mu'_{i+1},i} = 0 = K_{i,\mu_{i+1}},$$

puisque $\mathbf{K}_{\mu'_{i+1},i} = \{0\} = \mathbf{K}_{i,\mu_{i+1}}$. Récursivement,

$$C_{\mu/ij} = K_{ij}^x + tK_{i+1,j}^x + \dots + t^{l_{ij}} K_{\mu'_{j+1}-1,j} \quad (2.5.5)$$

où $l_{ij} = \mu'_{j+1} - i - 1$, la jambe de (i,j) .

Chapitre III

DIAGRAMMES COMPACTS

LE BUT de ce chapitre est d'étudier la combinatoire de bipartages particuliers. Pour insérer cette étude dans un contexte classique, considérons la série génératrice

$$P_n(q) = \sum_{\rho} q^{|\rho|}, \quad (3.0.1)$$

où la somme se fait sur les partages $\rho' = \rho'_1 > \rho'_2 > \dots > \rho'_n \geq 0$ à n parts distinctes dont la dernière possiblement nulle (alternativement les ρ tel les parts $n-1, n-2, \dots, 1$ apparaissent chacune au moins une fois). On a l'identité classique

$$P_n(q) = \frac{q^{\binom{n}{2}}}{\prod_{i=1}^n (1 - q^i)} \quad (3.0.2)$$

qui s'interprète de deux façons différentes. En effet,

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - q^i)}$$

peut être considéré soit comme la série génératrice des partages $\lambda' = (\lambda'_1 \geq \lambda'_2 \geq \dots \geq \lambda'_n \geq 0)$ ou soit la série génératrice des partages λ où $\lambda_k \leq n$ pour tout k et $\ell(\lambda)$ est quelconque. Dans le premier cas, le partage *escalier* $\delta'_n = \delta_n \stackrel{\text{def}}{=} (n-1, n-2, \dots, 1) \vdash \binom{n}{2}$ rend les parts de ρ' distinctes par $\rho' = \lambda' + \delta'_n$, c.-à-d. $\rho'_k = \lambda'_k + n - k$ (voir figure 3.1(i)). Dans le deuxième cas, les parts de δ_n sont insérées dans le partage λ pour obtenir ρ , c.-à-d. $\rho = \lambda \cup \delta_n$ (voir figure 3.1(ii)). Cette dernière interprétation permet de déduire immédiatement la récurrence

$$P_n(q) = P_{n-1}(q) \left(\frac{q^{n-1}}{1 - q^n} \right) \text{ avec } P_1(q) = (1 - q)^{-1}.$$

(i) avec $\lambda' = (\lambda'_1 \geq \lambda'_2 \geq \dots \geq \lambda'_n \geq 0)$ (ii) avec $\lambda_k \leq n$ et $\ell(\lambda)$ quelconqueFIG. 3.1 – Les deux interprétations de l’identité sur $P_n(q)$

3.1 Diagrammes compacts dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Maintenant, à chaque ρ' de la série $P_n(q)$ correspond trivialement un diagramme de n cases dans la première rangée de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\rho' \iff d = \{(\rho'_n, 0), (\rho'_{n-1}, 0), \dots, (\rho'_1, 0)\}.$$

Et bien sûr,

$$\rho_k = \# \{(c_1, c_2) \in d \mid c_1 > k\}.$$

On généralise $P_n(q)$ à $P_n(q, t)$ comme suit:

$$P_n(q, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{d \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ |d|=n}} w(d) \quad (3.1.1)$$

où $w(d) = \prod_{c \in d} q^{c_1} t^{c_2}$. Soient ρ et η les partages avec les parts de longueur inférieure ou égale à n définis par:

$$\begin{aligned} \rho_k &= \# \{(c_1, c_2) \in d \mid c_1 > k\}, \\ \eta_k &= \# \{(c_1, c_2) \in d \mid c_2 > k\} \end{aligned}$$

pour tout k . Ainsi, les partages ρ et η donnent les distributions marginales des cases de d . Pour récupérer d , les distributions ρ et η ne sont pas suffisante; il faut étiquetter les cases de d d’une quelconque façon et donner les listes d’étiquettes à distribuer sur les partages ρ et η . Le recouplement d’une même étiquette donne la position de la case étiquettée (voir figure 3.2). On se donnera un étiquetage canonique d’ici peu.

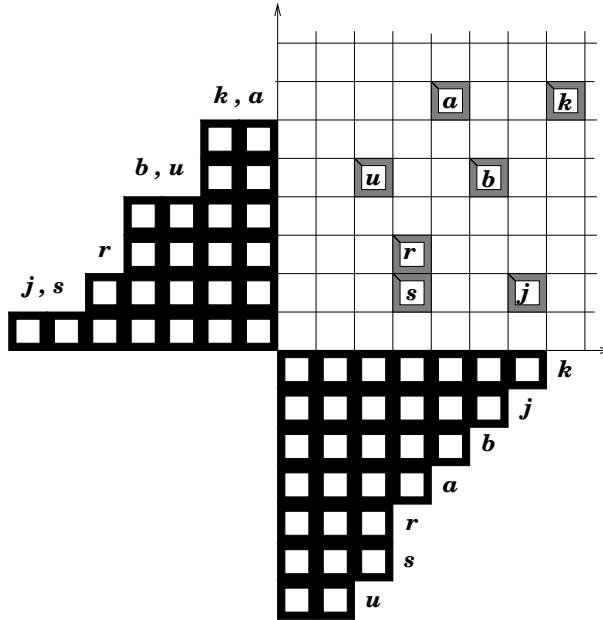


FIG. 3.2 – Un diagramme et ses distributions marginales

Théorème 3.1.1. *L’ensemble $\{d \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid |d| = n\}$ est en bijection avec l’ensemble des triplets (σ, λ, μ) où $\sigma \in \mathbb{S}_n$ et λ, μ sont des partages dont les parties sont de longueur inférieure ou égale à n . De plus, au niveau de la pondération*

$$w(d) = q^{\text{comaj}(\sigma)} t^{\text{comaj}'(\sigma^{-1})} q^{|\lambda|} t^{|\mu|}.$$

Ainsi, la série génératrice pondérée des diagrammes $d \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $|d| = n$ est donnée par

$$P_n(q, t) = \sum_d w(d) = \frac{\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} q^{\text{comaj}(\sigma)} t^{\text{comaj}'(\sigma^{-1})}}{\prod_{i=1}^n (1 - q^i)(1 - t^i)}, \quad (3.1.2)$$

$$= \frac{\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} q^{\text{maj}(\sigma)} t^{\text{maj}'(\sigma^{-1})}}{\prod_{i=1}^n (1 - q^i)(1 - t^i)}. \quad (3.1.3)$$

Avant de procéder à la preuve de ce résultat, quelques définitions et lemmes sont nécessaires.

Définition 3.1.2. *Soit $\sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathbb{S}_n$. L’ensemble des descentes de σ , noté $D(\sigma)$ est défini par*

$$D(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \{i \mid \sigma_i > \sigma_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\}.$$

De même, l'ensemble des montées, noté $A(\sigma)$, est défini par

$$\begin{aligned} A(\sigma) &\stackrel{\text{def}}{=} \{i \mid \sigma_i < \sigma_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\}, \\ &= [n-1] \setminus D(\sigma). \end{aligned}$$

Nous considérons quatre statistiques sur les permutations:

$$\begin{aligned} \text{maj}(\sigma) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in D(\sigma)} i, \\ \text{maj}'(\sigma) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in A(\sigma)} i, \\ \text{comaj}(\sigma) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in D(\sigma)} n - i, \\ \text{comaj}'(\sigma) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in A(\sigma)} n - i. \end{aligned}$$

Le lemme suivant clarifie l'énoncé du théorème.

Lemme 3.1.3. Pour les statistiques ci-haut, nous avons les équidistributions suivantes:

$$\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} q^{\text{maj}(\sigma)} t^{\text{maj}(\sigma^{-1})} = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} q^{\text{comaj}(\sigma)} t^{\text{comaj}(\sigma^{-1})}, \quad (3.1.4)$$

$$\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} q^{\text{maj}(\sigma)} t^{\text{maj}'(\sigma^{-1})} = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} q^{\text{comaj}(\sigma)} t^{\text{comaj}'(\sigma^{-1})}. \quad (3.1.5)$$

Preuve: Pour $\sigma \in \mathbb{S}_n$, considérons

$$w_0\sigma = n+1-\sigma_1, \dots, n+1-\sigma_n,$$

$$\sigma w_0 = \sigma_n, \dots, \sigma_1,$$

$$w_0\sigma w_0 = n+1-\sigma_n, \dots, n+1-\sigma_1.$$

où $w_0 = n, n-1, \dots, 1$ (le mot le plus long). Maintenant, la vérification des relations

suivantes est directe:

$$\begin{aligned}\text{maj}(w_0\sigma) &= \text{maj}'(\sigma), \\ \text{comaj}(w_0\sigma) &= \text{comaj}'(\sigma), \\ \text{maj}(\sigma w_0) &= \text{comaj}'(\sigma), \\ \text{comaj}(\sigma w_0) &= \text{maj}'(\sigma), \\ \text{maj}(w_0\sigma w_0) &= \text{comaj}(\sigma), \\ \text{maj}'(w_0\sigma w_0) &= \text{comaj}'(\sigma).\end{aligned}$$

Les équations (3.1.4) et (3.1.5) découlent des propriétés de l'involution $\sigma \mapsto w_0\sigma w_0$. ■

Voici une généralisation aux diagrammes dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des concepts de montées et descentes d'une permutation.

Définition 3.1.4. Soient α et β deux cases distinctes d'un diagramme $d \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Soient $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ deux ordres totaux sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Le couple (α, β) est une $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ -descente (resp. une $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ -montée) si et seulement si

- i) $\alpha <_{\mathcal{O}_1} \beta$ et $\exists \gamma \in d, \alpha <_{\mathcal{O}_1} \gamma <_{\mathcal{O}_1} \beta$, c.-à-d. α précède immédiatement β dans d selon l'ordre \mathcal{O}_1 ,
- ii) $\alpha >_{\mathcal{O}_2} \beta$ (resp. $\alpha <_{\mathcal{O}_2} \beta$).

Autrement dit, si les cases de d sont $c_1 <_{\mathcal{O}_1} \dots <_{\mathcal{O}_1} c_n$ lorsque triées selon l'ordre \mathcal{O}_1 , alors l'ensemble des descentes de d est

$$\text{DESC}_{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2}(d) \stackrel{\text{def}}{=} \{i \mid c_i >_{\mathcal{O}_2} c_{i+1}\}.$$

Et celui des montées est

$$\text{MONT}_{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2}(d) \stackrel{\text{def}}{=} \{i \mid c_i <_{\mathcal{O}_2} c_{i+1}\}.$$

Il y a deux ordres totaux sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qui jouent un rôle important dans la suite de cet exposé. Il s'agit de l'ordre d'*écriture* et de l'ordre de *lecture*, notés \mathcal{O}_e et \mathcal{O}_l respectivement.

Soient $\alpha = (a_1, a_2)$ et $\beta = (b_1, b_2)$. Alors $\alpha <_{\mathcal{O}_e} \beta$ si et seulement si

$$a_2 < b_2 \text{ ou } (a_2 = b_2 \text{ et } a_1 > b_1).$$

Aussi, $\alpha <_{\mathcal{O}_l} \beta$ si et seulement si

$$a_1 < b_1 \text{ ou } (a_1 = b_1 \text{ et } a_2 < b_2).$$

La figure 3.3 montre comment $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est parcourru selon \mathcal{O}_e (en rouge) et \mathcal{O}_l (en vert). On remarque d'abord les caractérisations suivantes.

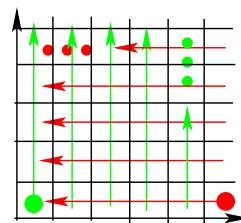


FIG. 3.3 – Les ordres \mathcal{O}_e et \mathcal{O}_l sur une portion de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Lemme 3.1.5. Soient $\alpha, \beta, \mathcal{O}_e$ et \mathcal{O}_l comme ci-haut. Alors,

- i) (α, β) est une $(\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_e)$ -desccente dans d si et seulement si
 - a) $(a_1 < b_1 \text{ et } a_2 \geq b_2)$, et
 - b) $\nexists \gamma \in d, \alpha <_{\mathcal{O}_l} \gamma <_{\mathcal{O}_e} \beta$.
- ii) (α, β) est une $(\mathcal{O}_e, \mathcal{O}_l)$ -montée (notez l'inversion des ordres) dans d si et seulement si
 - a) $(a_1 \leq b_1 \text{ et } a_2 < b_2)$, et
 - b) $\nexists \gamma \in d, \alpha <_{\mathcal{O}_e} \gamma <_{\mathcal{O}_l} \beta$.

Ceci découle simplement de l'observation que les régions des conditions i)a) et ii)a) sont deux des quadrants de la partition de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} - \{\alpha\}$ selon les \mathcal{O}_e et \mathcal{O}_l illustrée à la

figure 3.4. Pour deux cases distinctes α et β , on définit les relations suivantes:

$$\begin{aligned}\beta \in Q_I(\alpha) &\iff \alpha <_{\mathcal{O}_l} \beta \text{ et } \alpha <_{\mathcal{O}_e} \beta, \\ \beta \in Q_{II}(\alpha) &\iff \alpha <_{\mathcal{O}_l} \beta \text{ et } \alpha >_{\mathcal{O}_e} \beta, \\ \beta \in Q_{III}(\alpha) &\iff \alpha >_{\mathcal{O}_l} \beta \text{ et } \alpha >_{\mathcal{O}_e} \beta, \\ \beta \in Q_{IV}(\alpha) &\iff \alpha >_{\mathcal{O}_l} \beta \text{ et } \alpha <_{\mathcal{O}_e} \beta.\end{aligned}$$

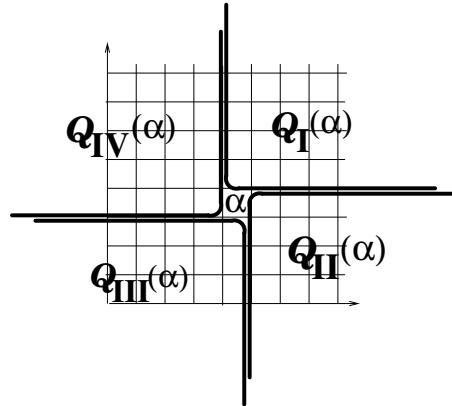


FIG. 3.4 – La partition de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} - \{\alpha\}$ selon \mathcal{O}_e et \mathcal{O}_l

D'autre part, les régions des conditions i)b) et ii)b) inspirent les définitions suivantes pour les mouvements locaux *permis* d'une case dans un diagramme d .

Définition 3.1.6. Soit d un diagramme et $c = (c_1, c_2) \in d$ une case quelconque. Un mouvement vers le bas de la case c (c -à-d. $c \mapsto (c_1, c_2 - 1)$) est permis si et seulement si

$$\nexists \gamma \in d, \gamma \in I_{\text{bas}}(c),$$

où

$$I_{\text{bas}}(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varepsilon \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (c_1, c_2 - 1) \leq_{\mathcal{O}_e} \varepsilon <_{\mathcal{O}_e} c\}.$$

Aussi, un mouvement vers la gauche de la case c (c -à-d. $c \mapsto (c_1 - 1, c_2)$) est permis si et seulement si

$$\nexists \gamma \in d, \gamma \in I_{\text{gau}}(c),$$

où

$$I_{\text{gau}}(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varepsilon \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (c_1, c_2 - 1) \leq_{\mathcal{O}_l} \varepsilon <_{\mathcal{O}_l} c\}.$$

(Voir la figure 3.5.)

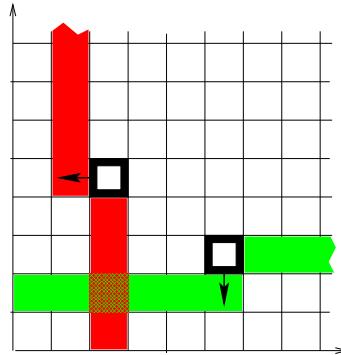


FIG. 3.5 – Intervalles vides pour les mouvements permis

De ces définitions découlent deux lemmes.

Lemme 3.1.7. *Soit d un diagramme et $c \in d$ une case quelconque. Alors, l'ordre des cases de d trié selon \mathcal{O}_e (resp. \mathcal{O}_l) est invariant sous n'importe quel mouvement permis (à gauche ou en bas) de c .*

Maintenant, soit c_1, \dots, c_n les cases de d trié selon l'ordre \mathcal{O}_e . Notons par $\text{bas}_i(d)$ (resp. $\text{gau}_i(d)$) le diagramme obtenu de d par le mouvement (permis ou non) vers le bas (resp. vers la gauche) de la case c_i . Notons B_d (resp. G_d) l'ensemble des indices (ou étiquettes) des cases dont le mouvement vers le bas (resp. la gauche) est permis, c.-à-d.

$$\begin{aligned} B_d &\stackrel{\text{def}}{=} \{1 \leq i \leq n \mid I_{\text{bas}}(c_i) \cap d = \emptyset\}, \\ G_d &\stackrel{\text{def}}{=} \{1 \leq i \leq n \mid I_{\text{gau}}(c_i) \cap d = \emptyset\}. \end{aligned}$$

Lemme 3.1.8. *Il y a indépendance entre les mouvements permis vers la gauche et ceux vers le bas, c.-à-d.*

- i) $\forall j \in B_d, G_{\text{bas}_j(d)} = G_d,$
- ii) $\forall j \in G_d, B_{\text{gau}_j(d)} = B_d.$

Preuve: i) Supposons $G_d \neq G_{\text{bas}_j(d)}$. Alors, on se trouve dans au moins l'un des cas suivants:

- a) $\exists k \in G_{\text{bas}_j(d)}, k \notin G_d,$
- b) $\exists k \in G_d, k \notin G_{\text{bas}_j(d)}.$

a) Si $j \neq k$ alors, puisque c_j est la seule case à se déplacer, $c_j \in I_{\text{gau}}(k)$ dans d et $c_j \notin I_{\text{gau}}(k)$ dans $\text{bas}_j(d)$. Il n'y qu'une possibilité, $c_j = c_k + (-1,0)$, c.-à-d. c_j est immédiatement à gauche de c_k . Mais cela implique $c_k \in I_{\text{bas}}(j)$ dans d , contredisant $j \in B_d$. Si $j = k$ alors, puisque c_j est la seule case à bouger,

$$I_{\text{gau}}(c_j) \setminus I_{\text{gau}}(c_j + (0, -1)) = \{c_j + (0, -1)\}$$

doit contenir une case de d . Or, $c_j + (0, -1) \in I_{\text{bas}}(c_j)$, contredisant $j \in B_d$.

b) Si $j \neq k$ alors, initialement, l'intervalle $I_{\text{gauche}}(c_k)$ ne contient aucune case de d . Or, il est impossible d'y faire entrer la case c_j par un mouvement vers le bas. Si $j = k$ alors, puisque c_j est la seule case à bouger,

$$I_{\text{gau}}(c_j + (0, -1)) \setminus I_{\text{gau}}(c_j) = \{c_j + (-1, -1)\}$$

doit contenir une case de d . Or, $c_j + (-1, -1) \in I_{\text{bas}}(c_j)$, contredisant $j \in B_d$.

ii) De façon similaire.

■

Exemple 3.1.9. Pour le diagramme d de la figure 3.6, $G_d = \{5,6,7\}$ et $B_d = \{1,4,6\}$.

Aussi, $G_{\text{bas}_4(d)} = \{5,6,7\}$ et $B_{\text{bas}_4(d)} = \{1,5,6\} \neq B_d$.

Définition 3.1.10. Un diagramme $d \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dit **compact** si et seulement si

$$B_d = G_d = \emptyset,$$

c.-à-d. il n'y a pas de mouvements permis vers le bas ou la gauche.

Ces nouveaux objets, on le verra plus loin, ont de belles propriétés.

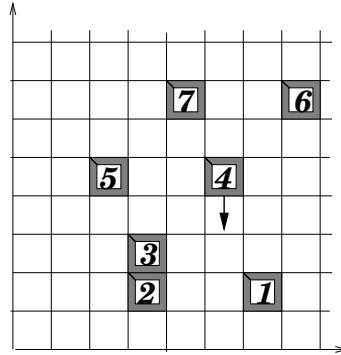


FIG. 3.6 – Invariance de G_d sous un mouvement vers le bas

Lemme 3.1.11. *À chaque diagramme d correspond un unique diagramme compact, noté $C(d)$, que l'on peut obtenir à partir de d par une séquence (pas nécessairement unique) de mouvements permis.*

Preuve: L'existence de $C(d)$ est évidente puisque les mouvements permis rapprochent les cases de d de l'origine et les cases doivent rester dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Il reste à montrer que $C(d)$ est unique, même pour différentes séquences de mouvements permis. Par le lemme 3.1.11, il est possible de séparer les mouvements horizontaux des mouvements verticaux. Il faut donc voir que pour d quelconque, il existe un unique diagramme $C_H(d)$ (resp. $C_V(d)$) tel que $G_{C_H(d)} = \emptyset$ (resp. $B_{C_V(d)} = \emptyset$). Ainsi, on aura

$$C(d) = C_H(C_V(d)) = C_V(C_H(d)).$$

Revenons à l'interprétation des $d \subset \mathbb{N} \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de la figure 3.1(ii) où

$$\rho_k = \# \{(a,b) \in d \mid a > k\},$$

c.-à-d. le nombre de cases de d strictement à droite de la $k^{\text{ième}}$ colonne dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Une part de ρ_k de $\rho = \lambda \cup \delta_n$ provient de δ_n (en rouge) si et seulement si une case c de d est dans la $k^{\text{ième}}$ colonne de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Donc, la part ρ_k provenant de δ_n signifie l'interdiction pour les ρ_k cases à la droite de la case c de venir occuper la $k^{\text{ième}}$ colonne par des mouvements par la gauche (tant que c reste dans cette colonne). Ainsi, lors de mouvements permis vers la gauche, la distribution ρ change ($|\rho|$ diminue de un) mais δ_n reste toujours inclus

dans ρ . Ceci admet une généralisation aux diagrammes d quelconques. On sait par le lemme 3.1.7 que les mouvements permis vers la gauche préserve les ordres \mathcal{O}_e et \mathcal{O}_l sur les cases de d . Soient c_1, \dots, c_n les cases de d ordonné selon \mathcal{O}_l . Une part de ρ_k de $\rho = \lambda \cup \bar{\rho}$ provient de $\bar{\rho}$ (en rouge, voir figure 3.7) si et seulement si une case c_i de d est dans la $k^{\text{ième}}$ colonne de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et (c_i, c_{i+1}) est une $(\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_e)$ -descente, signifiant que les cases c_{i+1}, \dots, c_n doivent occuper des colonnes strictement à droite de la $k^{\text{ième}}$ colonne. Inversement, si (c_i, c_{i+1}) n'est pas une $(\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_e)$ -descente alors par une séquence de mouvements vers la gauche, la case c_{i+1} peut éventuellement venir se loger dans la colonne occupée par c_i . Donc, $\bar{\rho}$ reste invariant (quoique la disposition de ses parts dans ρ varie). Pour

$$\text{DESC}_{\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_e}(d) = \{i_1, i_2, \dots, i_s\},$$

le partage $\bar{\rho}$ est donné par

$$\bar{\rho}_k = n - i_k, \text{ pour tout } 1 \leq k \leq s = \ell(\bar{\rho}).$$

Donc, $|\bar{\rho}| = \text{COMAJ}_{\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_e}(d)$ au sens usuel. Aussi, $C_H(d)$ est obtenu lorsque $\rho = \bar{\rho}$, c.-à-d. $\lambda = \emptyset$, et est indépendant de la séquence de mouvements permis vers la gauche. On verra plus loin un résultat sur le degré de liberté dans les mouvements vers la gauche. On peut faire la même analyse pour les mouvements permis vers le bas. Soient c_1, \dots, c_n les cases de d trié selon \mathcal{O}_e . Supposons c_i dans la $k^{\text{ième}}$ rangée de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Alors la part de η_k de $\eta = \lambda \cup \bar{\eta}$ provient de $\bar{\eta}$ (en vert, voir figure 3.7) si et seulement si une case c_i de d est dans la $k^{\text{ième}}$ rangée de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et (c_i, c_{i+1}) est une $(\mathcal{O}_e, \mathcal{O}_l)$ -montée, signifiant que les cases c_{i+1}, \dots, c_n doivent occuper des rangées strictement plus haute que la $k^{\text{ième}}$ rangée. Inversement, si (c_i, c_{i+1}) n'est pas une $(\mathcal{O}_e, \mathcal{O}_l)$ -montée alors par une séquence de mouvements vers le bas, la case c_{i+1} peut venir se loger dans la rangée occupée par c_i . Donc, $\bar{\eta}$ reste invariant (quoique la disposition de ses parts dans η varie). Pour

$$\text{MONT}_{\mathcal{O}_e, \mathcal{O}_l}(d) = \{j_1, j_2, \dots, j_r\},$$

le partage $\bar{\eta}$ est donné par

$$\bar{\eta}_k = n - j_k, \text{ pour tout } 1 \leq k \leq r = \ell(\bar{\eta}).$$

Et $|\bar{\eta}| = \text{COMAJ}'_{\mathcal{O}_e, \mathcal{O}_l}(d)$ au sens usuel. Aussi, $C_V(d)$ est obtenu lorsque $\eta = \bar{\eta}$, c.-à-d. $\mu = \emptyset$, et est indépendant de la séquence de mouvements permis vers le bas.

■

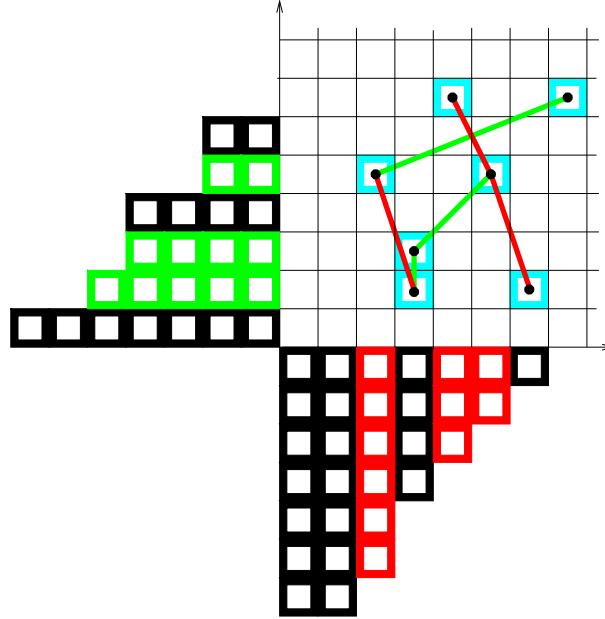


FIG. 3.7 – Les montées et descentes d'un diagramme

Les mouvements de cases dans les diagrammes

Définition 3.1.12. Soient d_1 et d_2 deux diagrammes. Un $\{\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_e\}$ -isomorphisme de diagrammes est une application $\varphi : d_1 \longrightarrow d_2$ telle que pour tout $\alpha, \beta \in d_1$

$$\alpha \leq_{\mathcal{O}_l} \beta \iff \varphi(\alpha) \leq_{\mathcal{O}_l} \varphi(\beta),$$

$$\alpha \leq_{\mathcal{O}_e} \beta \iff \varphi(\alpha) \leq_{\mathcal{O}_e} \varphi(\beta).$$

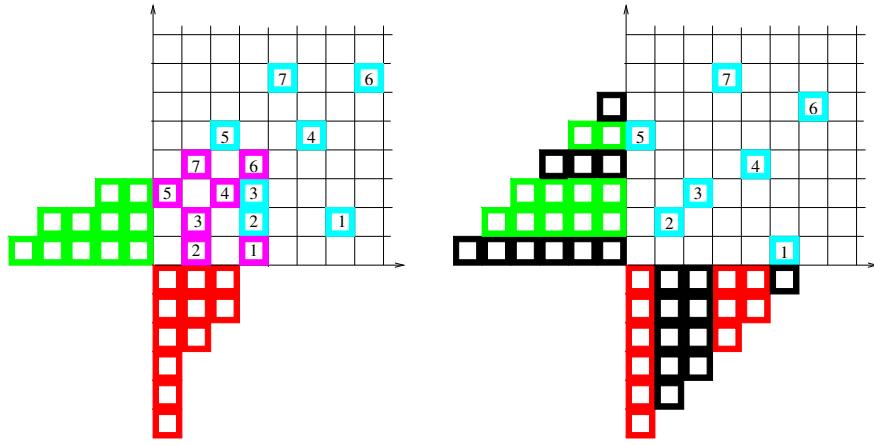
Pour un $\{\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_e\}$ -isomorphisme de diagrammes φ quelconque, on a pour $R = \text{I}, \text{II}, \text{III}, \text{IV}$.

$$\beta \in Q_R(\alpha) \iff \varphi(\beta) \in Q_R(\varphi(\alpha)).$$

Aussi, (α, β) est une $(\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_e)$ -descente (resp. $(\mathcal{O}_e, \mathcal{O}_l)$ -montée) si et seulement si $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$ en est une. Bref, toutes les constructions $\text{DESC}_{\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_e}$, $\text{MONT}_{\mathcal{O}_e, \mathcal{O}_l}$, $\text{COMAJ}_{\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_e}$ et

$\text{COMAJ}'_{\mathcal{O}_e, \mathcal{O}_l}$ sont invariantes sous l'isomorphisme φ . Finalement, si d' est obtenu de d par une séquence de mouvements permis, alors d et d' sont isomorphes.

Définition 3.1.13. Soit d un diagramme quelconque avec ses cases c_1, c_2, \dots, c_n données selon \mathcal{O}_e . En parcourant $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ selon \mathcal{O}_l , on rencontre, dans l'ordre, les cases $c_{\sigma_1}, \dots, c_{\sigma_n}$ pour une certaine permutation $\sigma \in \mathbb{S}_n$. C'est la permutation associée au diagramme d , notée $\sigma = \sigma_d$. Le graphe de permutation de σ translaté de $(-1, -1)$, c.-à-d. $\{(i - 1, \sigma_i - 1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n\}$, est noté d_σ .



(i) Le diagramme et son compact (ii) Le graphe de permutation associé

FIG. 3.8 – Le diagramme compact et la permutation associés à un diagramme

L'application φ définie par

$$\varphi : c_{\sigma_i} \mapsto (i - 1, \sigma_i - 1), \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n,$$

est nécessairement un isomorphisme de diagrammes puisque

$$c_i <_{\mathcal{O}_l} c_j \iff \sigma_i^{-1} < \sigma_j^{-1} \iff (\sigma_i^{-1} - 1, i - 1) <_{\mathcal{O}_l} (\sigma_j^{-1} - 1, j - 1)$$

et

$$c_i <_{\mathcal{O}_e} c_j \iff i < j \iff (\sigma_i^{-1} - 1, i - 1) <_{\mathcal{O}_e} (\sigma_j^{-1} - 1, j - 1)$$

On peut être plus précis en ce qui a trait aux différentes séquences de mouvements vers la gauche (et similairement vers le bas).

Corollaire 3.1.14. Soit d un diagramme à n cases, ρ sa distribution marginale horizontale et $\bar{\rho}$ le partage construit dans la preuve du lemme. Alors, on peut garder l'historique (la trace) des mouvements permis vers la gauche pour l'obtention de $C_H(d)$ par numérotation des cases du partage gauche $\rho \setminus \bar{\rho}$.

Preuve: La séquence de mouvements vers la gauche produit une suite de diagrammes d_i , une suite de distributions marginales $\rho^{(i)}$, une suite de partages $\lambda^{(i)}$ mais un seul partage $\bar{\rho}$ (invariant) satisfaisant $\rho^{(i)} = \lambda^{(i)} \cup \bar{\rho}$:

$$\begin{aligned} d &= d_0 \rightarrow d_1 \rightarrow d_2 \dots \rightarrow d_r = C_H(d), \\ \rho &= \rho^{(0)} \rightarrow \rho^{(1)} \rightarrow \rho^{(2)} \dots \rightarrow \rho^{(r)} = \bar{\rho}, \\ \lambda &= \lambda^{(0)} \rightarrow \lambda^{(1)} \rightarrow \lambda^{(2)} \dots \rightarrow \lambda^{(r)} = \emptyset. \end{aligned}$$

On numérote de l'entier k la case qui disparaît en passant de $\rho^{(k-1)}$ à $\rho^{(k)}$, pour $k = 1, \dots, r$. Il y a exactement deux règles à respecter pour que la case numérotée k corresponde à un mouvement permis vers la gauche:

- 1) La case numérotée k appartient à la frontière de $\rho^{(k-1)}$ mais n'est pas dans une part provenant de $\bar{\rho}$.
- 2) Si, dans $\rho^{(k-1)}$, $\rho_j = \rho_{j+1}$ et ρ_{j+1} provient de $\bar{\rho}$ alors la numérotation par l'entier k de la dernière case de ρ_j fait en sorte que dans $\rho^{(k)}$, $\rho_j = \rho_{j+1}$ et c'est alors ρ_j qui provient $\bar{\rho}$.

La règle 2) stipule donc que la disposition de $\bar{\rho}$ (de parts distinctes) dans ρ est canonique: si une part ρ_k de ρ provient de $\bar{\rho}$ alors

$$k = \min \{j \mid \rho_j = \rho_k\}.$$

■

La figure 3.9 illustre un remplissage de $\rho \setminus \bar{\rho}$.

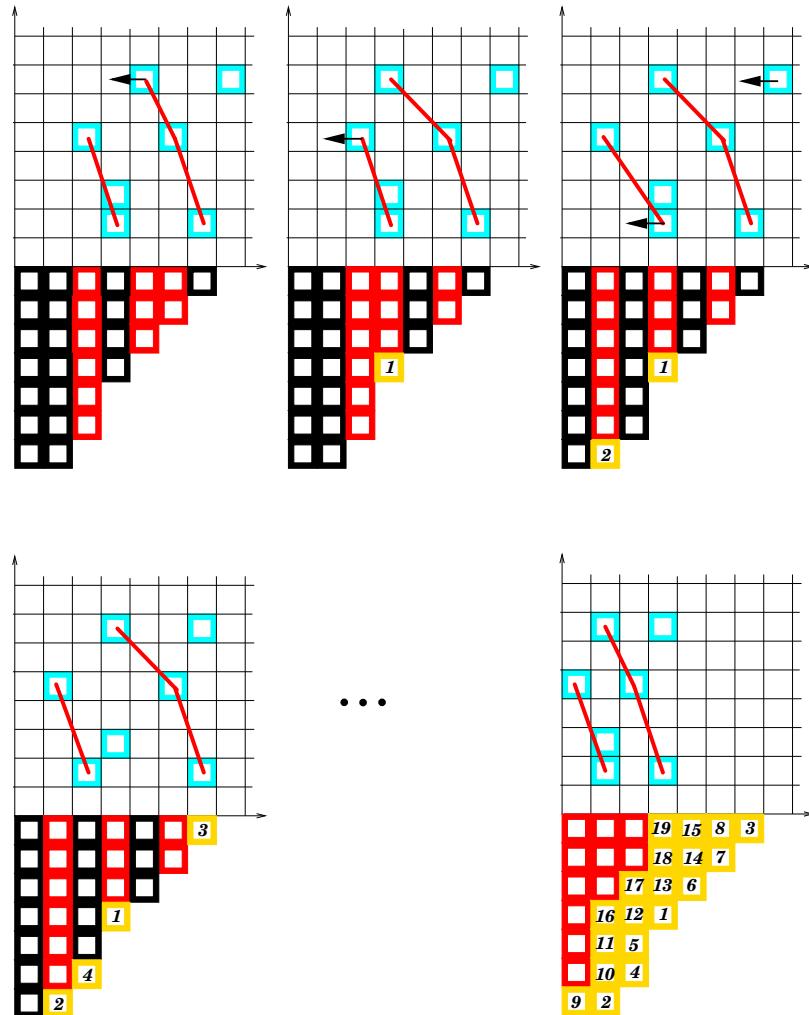


FIG. 3.9 – Le remplissage de $\rho \setminus \bar{\rho}$ comme trace des mouvements vers la gauche

Preuve du théorème 3.1.1: Soit d un diagramme à n cases. On calcule σ_d et les distributions marginales ρ et η . Les partages $\bar{\rho}$ et $\bar{\eta}$ sont calculés à partir des ensembles

$$\text{DESC}_{\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_e}(d) = \text{DESC}(\sigma_d), \text{ et}$$

$$\text{MONT}_{\mathcal{O}_e, \mathcal{O}_l}(d) = \text{MONT}(\sigma_d^{-1}).$$

Dès lors, les partages λ et μ sont extirpés des relations $\rho = \lambda \cup \bar{\rho}$ et $\eta = \mu \cup \bar{\eta}$. À d correspond donc le triplet (σ_d, λ, μ) . Il y a isomorphisme de diagrammes entre d , grph_{σ_d} (par définition de σ_d) et entre d et $C(d)$ (puisque $C(d)$ est obtenu par des mouvements permis). Donc, pour ces trois diagrammes, les $\bar{\rho}$ et $\bar{\eta}$ sont identiques et les deux listes d'étiquettes $([1, 2, \dots, n])$ à distribuer sur η et $[\sigma_d(1), \dots, \sigma_d(n)]$ à distribuer sur ρ sont les mêmes (quoique les distributions marginales ρ et η soient propres à chacun des diagrammes). La construction est réversible par la canonicité de l'insertion de $\bar{\rho}$ dans λ pour obtenir ρ (voir corollaire 3.1.14). Similairement pour $\bar{\eta}$ dans μ . L'équidistribution des numérateurs des séries génératrice (3.1.2) et (3.5.2) peut se prouver en changeant la convention pour les ordres \mathcal{O}_e et \mathcal{O}_l (il suffit de renverser chacun d'eux) et les mouvements permis de façon appropriée. Sous le changement de conventions, un diagramme d garde les mêmes $\rho, \bar{\rho}, \eta$ et $\bar{\eta}$. Mais σ_d (donc l'étiquetage) change (voir figure 3.10). Ceci termine la démonstration du théorème.

■

Corollaire 3.1.15. *Soit d un diagramme à n cases dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dont le diagramme compact est $C(d)$. Soit (σ_d, λ, μ) le triplet associé à d . Alors, le triplet associé à $C(d)$ est $(\sigma_d, \emptyset, \emptyset)$.*

Bref, les diagrammes compacts à n cases sont en bijection avec les permutations $\sigma \in \mathbb{S}_n$ et l'on peut scinder l'ensemble infini $\{d \mid d \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ et } |d| = n\}$ en exactement n classes d'équivalence comportant chacune un et un seul diagramme compact. Les figures 3.11, 3.12 et 3.13 présentent la distribution des diagrammes compacts à 2, 3 et 4 cases. (Les chiffres 1 dans les cases des diagrammes de la dernière figure sont nécessaires pour lever l'ambiguité du diagramme en forme de croix trouée.) La forme spéciale des tableaux tient

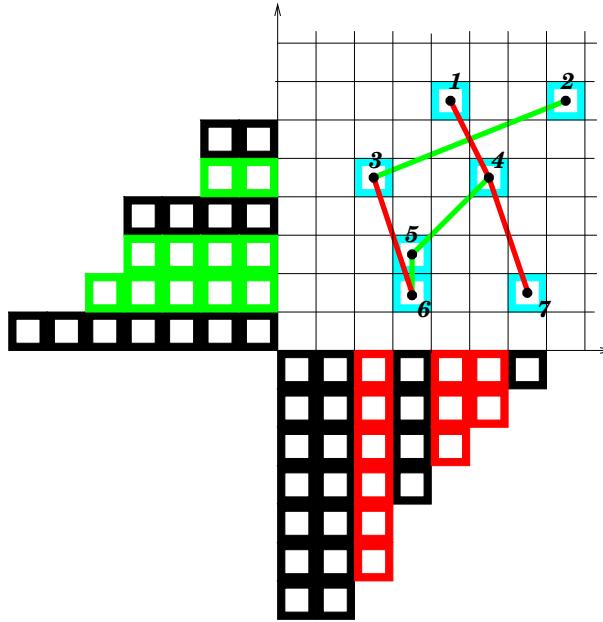


FIG. 3.10 – La deuxième convention d'ordres pour obtenir maj et maj

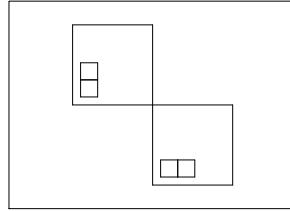
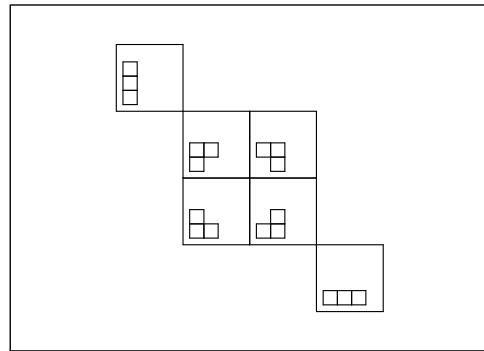
compte de la pondération. Un diagramme compact de poids $q^j t^k$ est à l'intersection de la $k + 1$ ième rangée (à partir du bas) et de la $j + 1$ ième colonne (à partir de la gauche).

Corollaire 3.1.16. Soit d un diagramme à n cases dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Soit σ_d la permutation associée à d . Alors, le diagramme compact $C(d)$ se décrit explicitement par

$$C(d) = \left\{ (\delta_{\sigma_d}(i), \nu_{\sigma_d^{-1}}(\sigma_i)) \mid 1 \leq i \leq n \right\},$$

où

$$\begin{aligned} \delta_\sigma(i) &\stackrel{\text{def}}{=} \# \{k \mid k < i \text{ et } \sigma_k > \sigma_{k+1}\}, \\ \nu_\sigma(i) &\stackrel{\text{def}}{=} \# \{k \mid k < i \text{ et } \sigma_k < \sigma_{k+1}\}. \end{aligned}$$

FIG. 3.11 – Les diagrammes compacts pour $n = 2$ FIG. 3.12 – Les diagrammes compacts pour $n = 3$

3.2 Diagrammes compacts et harmoniques diagonales

Le sous-espace \mathcal{DA}_n des alternants diagonaux de $\mathbb{Q}[X, Y]$ est l'espace engendré par tous les

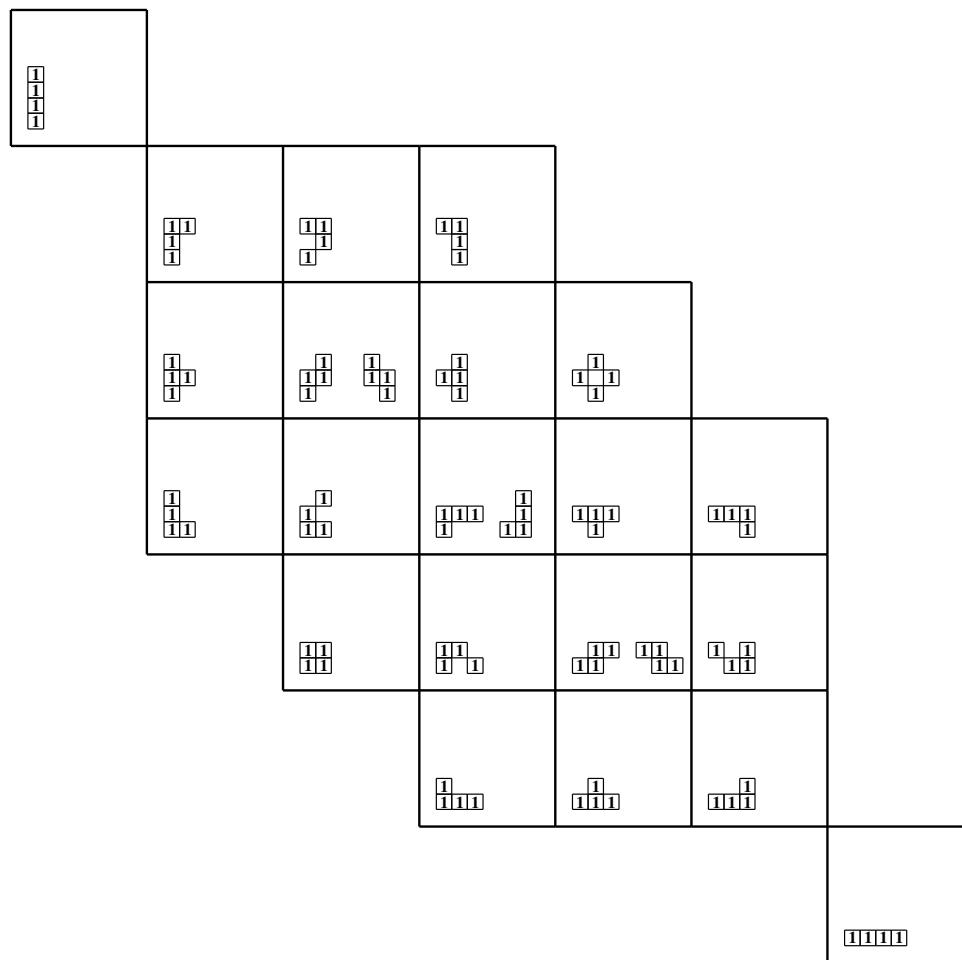
$$\Delta_d(X, Y) := \det \left((x_i^a y_i^b)_{\substack{(a,b) \in d \\ 1 \leq i \leq n}} \right)$$

où d est n'importe quel sous-ensemble de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, et les éléments de d sont triés lexicographiquement pour fixer le signe. Pour $d = \{(i, 0) \mid 0 \leq i \leq n - 1\}$, on obtient le Vandermonde usuel dénoté par $\Delta_n(X)$. On appelle d un *diagramme* et ses éléments, des *cases*. On aborde l'étude de

$$\mathcal{DAH}_n := \mathcal{DA}_n \cap \mathcal{DH}_n$$

via celle de

$$\mathcal{T}_n = \mathcal{DA}_n \cap \mathcal{H}_{\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n}.$$

FIG. 3.13 – Les diagrammes compacts pour $n = 4$

Ce dernier espace a pour dimension $n!$ et sa série de Hilbert est

$$(q; q)_n(t; t)_n e_n \left[\frac{1}{(1-q)(1-t)} \right].$$

Remarque 3.2.1. L'espace \mathcal{DAH}_n a les q, t -Catalans pour série de Hilbert.

Nous reviendrons sur les q, t -Catalans à la section ?? Parmi les belles symétries de \mathcal{T}_n , il y a

$$\mathcal{T}_n = \{P(Y, X) \mid P(X, Y) \in \mathcal{T}_n\}$$

et

$$\mathcal{T}_n = \{P(\partial X, \partial Y) \Delta_n(X) \Delta_n(Y) \mid P(X, Y) \in \mathcal{T}_n\}.$$

L'espace \mathcal{DA}_n est un $(\Lambda_n(X) \otimes \Lambda_n(Y))$ -module libre et n'importe quelle base vectorielle de \mathcal{T}_n fournit une base de \mathcal{DA}_n en tant que module sur $(\Lambda_n(X) \otimes \Lambda_n(Y))$. En d'autres termes,

$$\mathcal{DA}_n \simeq \Lambda_n(X) \otimes \Lambda_n(Y) \otimes \mathcal{T}_n.$$

On sait que $\{\Delta_d(X; Y) \mid d \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}, |d| = n\}$ est une base des alternants diagonaux en deux jeux de n variables. Maintenant, le théorème 3.1.1 suggère une base de la forme:

$$\Delta_d = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} f_\sigma[X_n] g_\sigma[Y_n] \Delta_{C_\sigma},$$

où le diagramme C_σ est le diagramme compact associé à la permutation σ , $f_\sigma[X_n]$ est élément de Λ_n , les fonctions symétriques sur les variables x_1, x_2, \dots, x_n , similairement pour $g_\sigma[Y_n]$.

L'annexe A rassemble des calculs par ordinateur illustrant cette conjecture.

3.3 Diagrammes compacts et nombres de Catalan

?? Parmi la multitude d'objets dénombrés par les nombres de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$, il y a les *arbres binaires* à n sommets. Maintenant, notons \mathcal{G}_σ le graphe orienté obtenu du diagramme grph_σ (mais en laissant tomber la translation $(-1, -1)$ pour ne pas alourdir la présentation) dans lequel une $(\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_e)$ -descente (resp. $(\mathcal{O}_e, \mathcal{O}_l)$ -montée) de α vers β est codée par une arête pleine (resp. pointillée) de α vers β . Il appert que chaque arbre binaire se réalise une et une seule fois comme \mathcal{G}_σ pour un $\sigma \in \mathbb{S}_n$ donné avec pour conventions:

- 1) la racine est le sommet le plus haut, c.-à-d. (σ_n^{-1}, n) ,
- 2) les branches droites sont les $(\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_e)$ -descentes, c.-à-d. les descentes au sens usuel de σ (trait plein),
- 3) les branches gauches sont les $(\mathcal{O}_e, \mathcal{O}_l)$ -montées, c.-à-d. les montées au sens usuel de σ^{-1} (trait pointillé).

La figure 3.14 présente un \mathcal{G}_σ et la figure 3.15, son arbre binaire usuel correspondant. Bien sûr, la présence de sommets isolés ou de sommets à plusieurs parents exclue la

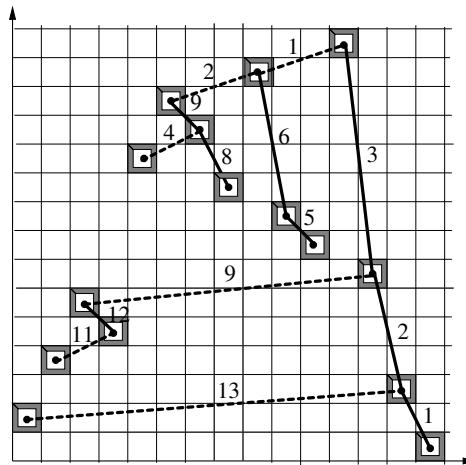


FIG. 3.14 – Un arbre binaire comme graphe de montées et descentes d'un diagramme de permutation

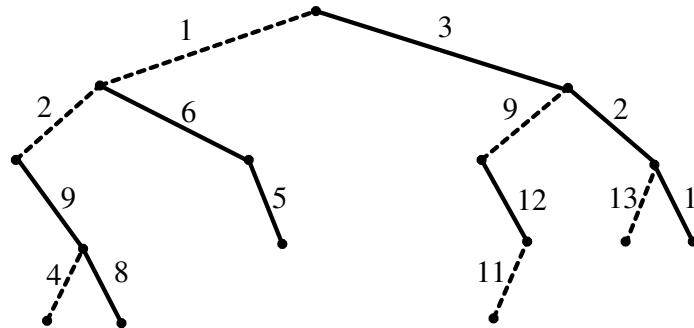


FIG. 3.15 – L’arbre binaire selon la présentation usuelle

candidature d’un \mathcal{G}_σ comme arbre binaire. Une condition supplémentaire est qu’il ne doit pas y avoir de croisement d’arêtes. Or, une descente (α, β) croise une montée (γ, δ) si et seulement s’il existe une case $\varepsilon \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (pas nécessairement dans le diagramme grph_σ) telle que $\alpha \in Q_{\text{IV}}(\varepsilon)$, $\beta \in Q_{\text{II}}(\varepsilon)$, $\gamma \in Q_{\text{III}}(\varepsilon)$ et $\delta \in Q_{\text{I}}(\varepsilon)$. En fait, on verra d’ici peu que les $\sigma \in \mathbb{S}_n$ qui donnent un arbre binaire sont caractérisés par l’évitement du motif 312. La bijection entre les arbres binaires et les permutations évitant un motif à trois nombres est bien connue (voir [26]). Cependant, il est intéressant de voir comment la pondération $w(\sigma) = q^{\text{comaj}(\sigma)} t^{\text{comaj}'(\sigma^{-1})}$ se répercute dans les arbres binaires pour donner un q, t -Catalan. En partant d’un arbre binaire donné \mathcal{A} , à chaque sommet, il faut trouver les coordonnées (i, σ_i) du sommet correspondant dans \mathcal{G}_σ , donc le σ lui-même éventuellement, de la manière suivante.

- La première composante s’obtient en considérant les chaînes droites maximales (voir figure 3.16). On considère la plus longue liste de sommets s_1, s_2, \dots, s_r de \mathcal{A} telle que s_{i+1} est le fils à droite de s_i et s_1 est la racine. À chaque s_i , par la branche gauche, est rattaché un sous-arbre \mathcal{A}_i . Pour la première composante, on étiquette de 1 à n les sommets rencontrés récursivement selon

$$\mathcal{A}_r, \mathcal{A}_{r-1}, \dots, \mathcal{A}_1, \text{ suivis de } s_1, \dots, s_{r-1}, s_r.$$

Encore une fois, on peut simultanément donner la pondération des branches droites. Si un sommet est étiqueté de l’entier k et qu’il possède un fils à droite alors l’arête du parent au fils est pondérée par $n - k$.

- La deuxième composante s'obtient en étiquettant de n à 1 les sommets lorsqu'on parcourt récursivement \mathcal{A} selon l'ordre postfixe. On peut simultanément donner la pondération des branches gauches. Si un sommet est étiqueté de l'entier k et qu'il est un fils à gauche alors l'arête du parent au fils est pondérée par $n - k$.

Ce couple d'étiquettement donne des sommets dont les coordonnées sont telles que dans la décomposition en chaînes droites maximales, les sous-arbres se projettent sur des intervalles disjoints de \mathbb{N} . Soit $I_k = \text{proj}_1(\mathcal{A}_k)$ l'intervalle de \mathbb{N} des premières composantes des sommets de \mathcal{A}_k pour $k = 1..r$. Alors, par construction, les $\sigma(I_k)$ sont les projections selon la deuxième composante, et ils sont également distincts. Aussi,

$$\begin{aligned} \{1, 2, \dots, n\} &= I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{r-1} \cup I_r \cup \underbrace{\{n-r+1, n-r, \dots, n-1, n\}}_{=F}, \\ \{1, 2, \dots, n\} &= \sigma(I_1) \cup \{\sigma_n\} \cup \sigma(I_2) \cup \{\sigma_{n-1}\} \cup \dots \\ &\quad \cup \sigma(I_{r-1}) \cup \{\sigma_{n-r}\} \cup \sigma(I_r) \cup \{\sigma_{n-r+1}\}, \end{aligned}$$

où ce sont des réunions d'intervalles donnés en ordre croissant (voir figure 3.16). Cette disposition en ordre croissant des sous-arbres fait en sorte qu'il n'y a aucune descente ou montée possible impliquant des sommets de deux sous-arbres différents, donc pas de croisement ni de point isolé. Maintenant, il reste à voir l'évitement du motif 312.

Lemme 3.3.1. *Soit \mathcal{G}_σ dont la décomposition selon sa chaîne droite maximale est comme ci-haut, et récursivement dont chaque sous-arbre \mathcal{A}_k admet une décomposition analogue de ses intervalles I_k et $\sigma(I_k)$. Alors, σ évite le motif 312.*

Preuve: soit $i_1 < i_2 < i_3$ et montrons que $\sigma_{i_1} > \sigma_{i_3} > \sigma_{i_2}$ est impossible. Par récurrence, supposons que pour tout j il est impossible d'avoir le motif 312 avec $i_1, i_2, i_3 \in I_j$. Les cas de figure sont:

- 1) Il existe un j tel que $i_1, i_2 \in I_j$ et $i_3 \notin I_j$. Mais, pour $k \notin I_j$, ou bien $\sigma_k > \max \sigma(I_j)$ ou bien $\sigma_k < \min \sigma(I_j)$.
- 2) Il existe un j tel que $i_2, i_3 \in I_j$ et $i_1 \notin I_j$. Le même argument qu'en 1) s'applique.
- 3) Il existe $j_1 < j_2 < j_3$ tels que $i_1 \in I_{j_1}$, $i_2 \in I_{j_2}$ et $i_3 \in I_{j_3}$. Mais alors, $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$.

4) Il existe un j tel que $1 \leq j \leq r$ et $i_3 = n - j + 1 \in F$. Pour que $\sigma_{i_2} < \sigma_{i_3}$ il faut que $i_2 \in I_l$ pour un certain $l = 1, \dots, j$. Pour que $\sigma_{i_1} > \sigma_{i_3}$ il faut que $i_1 \in I_k$ pour un certain $k = j + 1, \dots, r$. Mais $l < k$ implique $\max \sigma(I_l) < \min \sigma(I_k)$. D'où $\sigma_{i_1} < \sigma_{i_2}$. Donc, le motif 312 est impossible à faire.

■

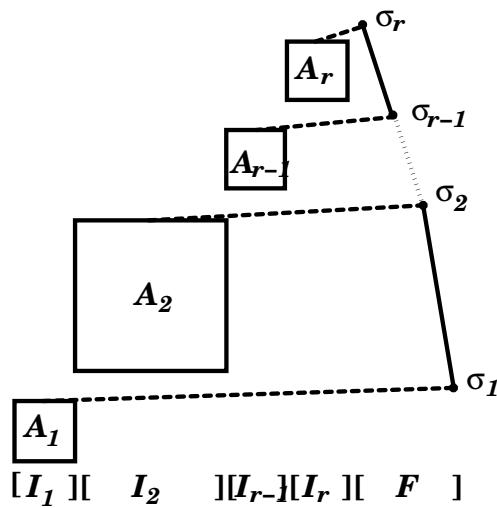


FIG. 3.16 – La décomposition d'un arbre binaire selon les chaînes droites maximales

Parmi les objets comptés par les nombres de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$, il y a le nombre de permutations de \mathbb{S}_n évitant un motif quelconque de \mathbb{S}_3 et le nombre d'arbres ordonnés à $n+1$ sommets (c'est un résultat classique, voir [26]). M. Jani et R. G. Rieper [19] donnent une application injective π de l'ensemble des arbres ordonnés à $n+1$ sommets (ou n arêtes) vers l'ensemble des permutations de \mathbb{S}_n évitant le motif 132. Étant donné l'arbre ordonné T , la permutation associée $\pi(T)$ est obtenue comme suit. On étiquette des entiers $n, n-1, \dots, 1$ les sommets de T (sauf la racine) rencontrés selon l'ordre préfixe. La permutation $\pi(T)$ est obtenue comme mot de lecture des étiquettes selon l'ordre postfixe (étiquette transcrise lorsque lue pour la dernière fois). De l'égalité des cardinalités, l'application π est bijective. Aussi, Jani et Rieper tirent des conséquences sur les motifs croissants de $\pi(T)$ à partir de T . Dans notre contexte, on peut facilement

voir l'application inverse de π et les conséquences quant aux motifs croissants d'une permutations $\sigma \in \mathbb{S}_n$ évitant le motif 132. En effet, soit $\sigma \in \mathbb{S}_n$ qui évite le motif 132. Soit k tel que $\sigma_k = n$. Alors l'évitement du motif 132 signifie que

$$\sigma(\{1, \dots, k-1\}) = \{n-k+1, \dots, n-1\} \text{ et}$$

$$\sigma(\{k+1, \dots, n\}) = \{1, \dots, n-k-1\}$$

(voir les régions encadrées de la figure 3.17). On peut décomposer récursivement chacune

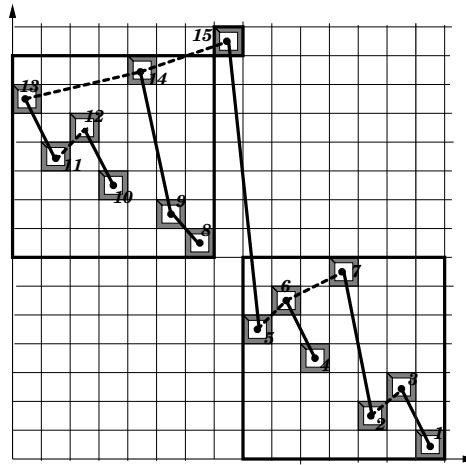


FIG. 3.17 – Le graphe d'une permutation évitant le motif 132.

des régions à gauche et à droite de l'élément maximal. Ce que l'on obtient n'est pas un arbre binaire mais il suffit de modifier le point d'arrivée des descentes (traits pleins) pour en obtenir un. Il y a une branche droite (toujours en trait plein mais n'est plus une $\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_e$ -descente) de α (parent) à β (fils) si et seulement si

$$\beta = \min_{\mathcal{O}_e} \{\gamma \mid \alpha <_{\mathcal{O}_l} \gamma\} \text{ et } \alpha <_{\mathcal{O}_e} \beta.$$

Il y a une branche gauche (trait pointillé et toujours une $\mathcal{O}_e, \mathcal{O}_l$ -montée) de α (parent) à β (fils) si et seulement si

$$\beta = \max_{\mathcal{O}_e} \{\gamma \mid \alpha <_{\mathcal{O}_l} \gamma\} \text{ et } \beta <_{\mathcal{O}_e} \alpha.$$

Pour la même permutation qu'à la figure 3.17, on obtient l'arbre binaire de la figure 3.18. Les motifs croissants de longueur k dans σ correspondent à un choix de $k-1$ branches

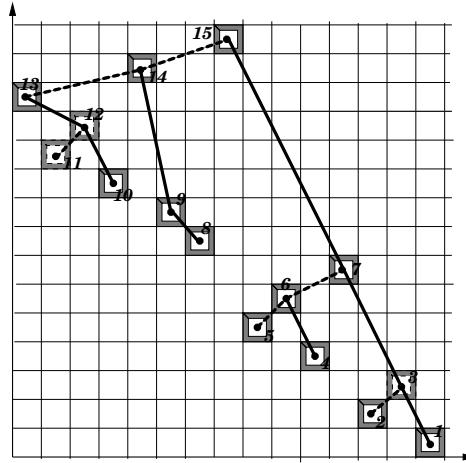


FIG. 3.18 – L’arbre binaire obtenu en modifiant les descentes.

gauches (traits pointillés) dans un même chemin qui relie un noeud à la racine dans l’arbre binaire de la figure 3.18. Pour avoir la construction de Jani et Rieper, il suffit de considérer la décomposition en chaînes droites maximales pour obtenir un arbre ordonné sur $n+1$ sommets dont toutes les arêtes sont pointillées (voir figure 3.19). Soit T_σ , l’arbre ainsi obtenu. Notons que $\pi(T_\sigma) = \sigma$. On a donc une preuve alternative du résultat suivant où T est explicitement T_σ .

Théorème 3.3.2 (théorème 6 dans [19]). *Une permutation σ évite le motif 132 si et seulement si $\sigma = \pi(T)$ pour un certain arbre ordonné T . Si tel est le cas, le nombre de motifs croissants de longueur k dépend seulement des niveaux des sommets dans l’arbre et est donné par*

$$\sum_{v \in T} \binom{\text{niveau}(v) - 1}{k - 1}.$$

Les q,t -Catalans seront abordés à la section 3.2 avec des considérations plus algébriques.

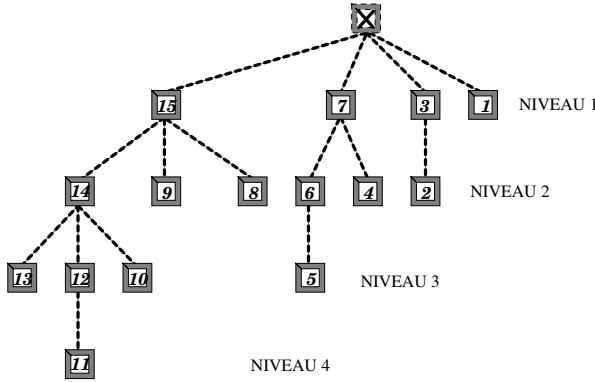


FIG. 3.19 – L’arbre ordonné obtenu en considérant les chaînes droites maximales.

3.4 Configurations compactes dans \mathbb{N}^3

Les diagrammes compacts se généralisent aux configurations de n blocs dans \mathbb{N}^3 et le théorème 3.1.1 admet la généralisation suivante. On se sert des variables de pondérations q , t et w pour désigner trois axes orthogonaux dans \mathbb{N}^3 .

Théorème 3.4.1. *L’ensemble $\{d \subset \mathbb{N}^3 \mid |d| = n\}$ est en bijection avec l’ensemble des triplets $(\sigma, \tau, \lambda, \mu, \nu)$ où $\sigma, \tau \in \mathbb{S}_n$ et λ, μ, ν sont des partages dont les parts sont de longueur inférieure ou égale à n . De plus, au niveau de la pondération*

$$\text{poids}(d) = q^{\text{comaj}'(\tau^{-1})} t^{\text{comaj}'(\sigma)} w^{\text{comaj}'(\tau \circ \sigma^{-1})} q^{|\lambda|} t^{|\mu|} w^{|\nu|}.$$

Ainsi, la série génératrice pondérée des configurations $d \subset \mathbb{N}^3$ tels que $|d| = n$ est donnée par

$$\sum_d \text{poids}(d) = \frac{\sum_{\sigma, \tau \in \mathbb{S}_n} q^{\text{maj}'(\tau^{-1})} t^{\text{maj}'(\sigma)} w^{\text{maj}'(\tau \circ \sigma^{-1})}}{\prod_{i=1}^n (1 - q^i)(1 - t^i)(1 - w^i)}, \quad (3.4.1)$$

Preuve: Remarquons d’abord que le passage à la statistique maj' dans la série 3.4.1 est simplement une application de l’involution $\sigma \mapsto w_0 \sigma w_0$ (voir la preuve du lemme 3.1.3). D’abord à $(\sigma, \tau) \in \mathbb{S}_n^2$, on associe le graphe de permutation

$$\text{grph}_{(\sigma, \tau)} \stackrel{\text{def}}{=} \{(i - 1, \sigma_i - 1, \tau_i - 1) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Les variables de pondérations dans l'ordre (q, t, w) servent à désigner les axes orthogonaux de \mathbb{N}^3 . Il faut aussi trois ordres totaux sur \mathbb{N}^3 . Pour $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$ et $\beta = (b_1, b_2, b_3)$:

$$\begin{aligned}\alpha <_{\mathcal{O}_1} \beta &\iff a_1 < b_1 \text{ ou} \\ &(a_1 = b_1 \text{ et } a_3 > b_3) \text{ ou} \\ &(a_1 = b_1, a_3 = b_3 \text{ et } a_2 < b_2),\end{aligned}$$

(en vert sur la figure 3.20).

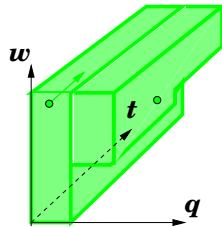


FIG. 3.20 – Un intervalle de l'ordre \mathcal{O}_1 sur \mathbb{N}^3

$$\begin{aligned}\alpha <_{\mathcal{O}_2} \beta &\iff a_3 < b_3 \text{ ou} \\ &(a_3 = b_3 \text{ et } a_2 > b_2) \text{ ou} \\ &(a_3 = b_3, a_2 = b_2 \text{ et } a_1 < b_1),\end{aligned}$$

(en bleu sur la figure 3.21).

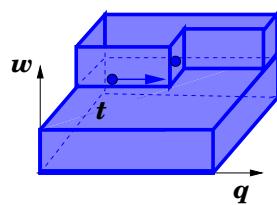


FIG. 3.21 – Un intervalle de l'ordre \mathcal{O}_2 sur \mathbb{N}^3

$$\begin{aligned}\alpha <_{\mathcal{O}_3} \beta \iff & a_2 < b_2 \text{ ou} \\ & (a_2 = b_2 \text{ et } a_1 > b_1) \text{ ou} \\ & (a_2 = b_2, a_1 = b_1 \text{ et } a_3 < b_3),\end{aligned}$$

(en rouge sur la figure 3.22). Les définitions de mouvements *permis* vers la gauche, le

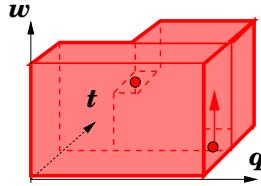


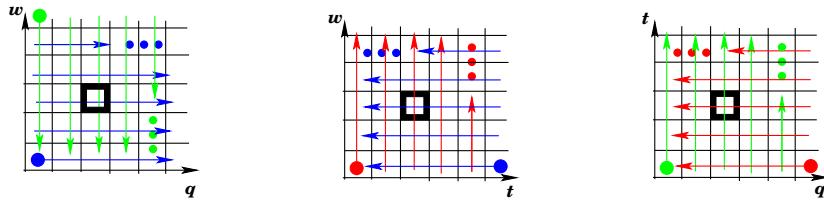
FIG. 3.22 – Un intervalle de l'ordre \mathcal{O}_2 sur \mathbb{N}^3

bas et l'avant découlent directement des contraintes imposées par le respect d'invariance des trois ordres (le détail est laissé au lecteur). Il y a aussi des contraintes à respecter pour que deux blocs puissent occuper un même *plan*:

- 1) Soit $c_1 <_{\mathcal{O}_2} \dots <_{\mathcal{O}_2} c_n$ les blocs de d . Si c_i est dans le k ième w,t -plan de \mathbb{N}^3 et que $c_i >_{\mathcal{O}_1} c_{i+1}$ alors aucun bloc de d ne peut passer par un mouvement vers la gauche (q -négatif) du $k+1$ ième au k ième w,t -plan. C'est donc l'ensemble $\text{DESC}_{\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1}(d)$. Avec nos conventions, il suffit de considérer le mouvement vers la gauche de la case (i, τ_i) dans la projection illustrée à la figure 3.23(i). Cet état de fait est codé par la statistique $q^{\text{comaj}'(\tau^{-1})}$.
- 2) Soit $c_1 <_{\mathcal{O}_3} \dots <_{\mathcal{O}_3} c_n$ les blocs de d . Si c_i est dans le k ième q,t -plan de \mathbb{N}^3 et que $c_i >_{\mathcal{O}_2} c_{i+1}$ alors aucun bloc de d ne peut passer par un mouvement vers le bas (w -négatif) du $k+1$ ième au k ième q,t -plan. C'est donc l'ensemble $\text{DESC}_{\mathcal{O}_3, \mathcal{O}_2}(d)$. Avec nos conventions, il suffit de considérer le mouvement vers le bas de la case $(i, \tau_{\sigma_i^{-1}})$ dans la projection illustrée à la figure 3.23(ii). Cet état de fait est codé par la statistique $w^{\text{comaj}'(\tau \circ \sigma^{-1})}$.
- 3) Soit $c_1 <_{\mathcal{O}_1} \dots <_{\mathcal{O}_1} c_n$ les blocs de d . Si c_i est dans le k ième q,w -plan de \mathbb{N}^3 et que $c_i >_{\mathcal{O}_3} c_{i+1}$ alors aucun bloc de d ne peut passer par un mouvement vers l'avant

(t -négatif) du $k + 1$ ième au k ième q, w -plan. C'est donc l'ensemble $\text{DESC}_{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_3}(d)$. Avec nos conventions, il suffit de considérer le mouvement vers la gauche de la case (i, σ_i) dans la projection illustrée à la figure 3.23(iii). Cet état de fait est codé par la statistique $t^{\text{comaj}'(\sigma)}$.

On observe une propriété de cyclicité dans les définitions d'ordre et les contraintes de mouvements.



(i) (i, τ_i) vers la gauche (ii) $(i, \tau_{\sigma_i^{-1}})$ vers le bas (iii) (i, σ_i) vers l'avant

FIG. 3.23 – Le calcul des mouvements permis selon les projections de $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ et \mathcal{O}_3 .

Les tableaux 3.1 et 3.2 donnent les termes explicites du polynôme

$$f_n(q, t, w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n} q^{\text{maj}'(\tau^{-1})} t^{\text{maj}'(\sigma)} w^{\text{maj}'(\tau \circ \sigma^{-1})}$$

pour $n = 2$ et $n = 3$. Donc, $f_n(q, t, w)$ est un q, t, w -anologue de $n!$ ² et l'on peut montrer les spécialisations suivantes:

$$\begin{aligned} f_n(q, t, 1) &= [n]_q [n]_t, \text{ (où } [n]_q = [1]_q [2]_q \dots [n]_q \text{ et } [k]_q = \frac{1-q^k}{1-q}), \\ f_n(q, t, 0) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{\text{comaj}(\sigma)} t^{\text{comaj}'(\sigma^{-1})}, \end{aligned}$$

le q, t analogue de $n!$ rencontré à l'équation 3.1.2. Et finalement,

$$f_n(q, 0, 0) = q^{\binom{n}{2}},$$

le numérateur de $P_n(q)$ à l'équation 3.0.2.

3.5 Compacts de diagrammes à cases multiples

A. Garsia et I. Gessel dans [8] ont produit une bijection de même nature que celle du théorème 3.1.1. Pour cette bijection, il y a d'une part les bipartages («*bipartite parti-*

$\sigma \setminus \tau$	12	21
12	$q t w$	t
21	q	w

TAB. 3.1 – Les termes du polynômes $f_2(q,t,w)$ en fonctions des $(\sigma,\tau) \in \mathbb{S}_2^2$.

$\sigma \setminus \tau$	123	132	213	231	312	321
123	$q^3 t^3 w^3$	$q^2 t^3 w^2$	$q t^3 w$	$q t^3 w^2$	$q^2 t^3 w$	t^3
132	$q^3 t^2 w^2$	$q^2 t^2 w^3$	$q t^2 w^2$	$q t^2 w$	$q^2 t^2$	$t^2 w$
213	$q^3 t w$	$q^2 t w$	$q t w^3$	$q t$	$q^2 t w^2$	$t w^2$
231	$q^3 t^2 w$	$q^2 t^2 w$	$q t^2$	$q t^2 w^3$	$q^2 t^2 w^2$	$t^2 w^2$
312	$q^3 t w^2$	$q^2 t$	$q t w^2$	$q t w$	$q^2 t w^3$	$t w$
321	q^3	$q^2 w^2$	$q w$	$q w^2$	$q^2 w$	w^3

TAB. 3.2 – Les termes du polynômes $f_3(q,t,w)$ en fonctions des $(\sigma,\tau) \in \mathbb{S}_3^3$.

tions» dans l'article) à au plus n biparts (certaines possiblement nulles) **mais où la répétition est permise**. Nous obtenons cette bijection dans le contexte de la section précédante en apportant quelques modifications aux ordres et aux mouvements permis. L'ordre de lecture, \mathcal{O}_l , est inchangé. L'ordre d'écriture, \mathcal{O}'_e est différent de \mathcal{O}_e . Soient $\alpha = (a_1, a_2)$ et $\beta = (b_1, b_2)$. Alors $\alpha <_{\mathcal{O}'_e} \beta$ si et seulement si

$$a_2 < b_2 \text{ ou } (a_2 = b_2 \text{ et } a_1 < b_1).$$

À partir de ces ordres, on redéfinit les mouvements locaux *permis* d'une case dans un diagramme d en fonction d'intervalles.

Définition 3.5.1. Soit d un diagramme et $c = (c_1, c_2) \in d$ une case quelconque. Un mouvement vers le bas de la case c (*c.-à-d.* $c \mapsto (c_1, c_2 - 1)$) est permis si et seulement si

$$\nexists \gamma \in d, \gamma \in I'_{\text{bas}}(c),$$

où

$$I'_{\text{bas}}(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varepsilon \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (c_1, c_2 - 1) <_{O'_e} \varepsilon <_{O'_e} c\}.$$

Aussi, un mouvement vers la gauche de la case c (c.-à-d. $c \mapsto (c_1 - 1, c_2)$) est permis si et seulement si

$$\nexists \gamma \in d, \gamma \in I'_{\text{gau}}(c),$$

où

$$I'_{\text{gau}}(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varepsilon \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (c_1, c_2 - 1) <_{O_l} \varepsilon <_{O_l} c\}.$$

On remarque que I_{gau} diffère de I'_{gau} par l'utilisation d'une relation faible \leq_{O_l} . Aussi, I_{bas} diffère de I'_{bas} par l'ordre et par l'utilisation d'une relation faible $\leq_{O'_e}$. Voir la figure 3.24 pour une illustration des intervalles I'_{gau} et I'_{bas} .

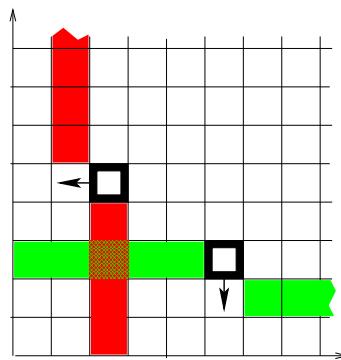


FIG. 3.24 – Intervalles vides pour les mouvements permis (cases multiples)

Théorème 3.5.2. L'ensemble $\{d \text{ multi-ensemble de } \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid |d| = n\}$ est en bijection avec l'ensemble des triplets (σ, λ, μ) où $\sigma \in \mathbb{S}_n$ et λ, μ sont des partages aux parts de longueur inférieure ou égale à n . De plus, au niveau de la pondération

$$w(d) = q^{\text{comaj}(\sigma)} t^{\text{comaj}(\sigma^{-1})} q^{|\lambda|} t^{|\mu|}.$$

Ainsi, la série génératrice pondérée des diagrammes d , multi-ensemble de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que

$|d| = n$, est donnée par

$$P_n(q,t) = \sum_d w(d) = \frac{\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} q^{\text{comaj}(\sigma)} t^{\text{comaj}(\sigma^{-1})}}{\prod_{i=1}^n (1 - q^i)(1 - t^i)}, \quad (3.5.1)$$

$$= \frac{\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} q^{\text{maj}(\sigma)} t^{\text{maj}(\sigma^{-1})}}{\prod_{i=1}^n (1 - q^i)(1 - t^i)}. \quad (3.5.2)$$

L'équidistribution est tributaire de l'équation (3.1.4). La preuve est similaire à celle du théorème 3.1.1. La figure 3.25 illustre un diagramme (avec cases multiples) et ses distributions marginales. Les parts rouges sont celles qui correspondent à une $(\mathcal{O}_l, \mathcal{O}'_e)$ -descente du diagramme d où pour $d = c_1 \leq_{\mathcal{O}_l} \dots \leq_{\mathcal{O}_l} c_n$,

$$\text{DESC}_{\mathcal{O}_l, \mathcal{O}'_e}(d) \stackrel{\text{def}}{=} \{i \mid c_i >_{\mathcal{O}'_e} c_{i+1}\}.$$

Similairement, les parts vertes sont celles qui correspondent à une $(\mathcal{O}'_e, \mathcal{O}_l)$ -descente du diagramme d où pour $d = c_1 \leq_{\mathcal{O}'_e} \dots \leq_{\mathcal{O}'_e} c_n$,

$$\text{DESC}_{\mathcal{O}'_e, \mathcal{O}_l}(d) \stackrel{\text{def}}{=} \{i \mid c_i >_{\mathcal{O}_l} c_{i+1}\}.$$

Ainsi, pour étiquetter les cases de d , une case multiple peut être considérée comme étant constituée d'un diagonale montante de cases (à être étiquetées avant de passer à la case suivante). Les mouvements permis ont justement pour effet de comprimer une diagonale montante de cases en une seule case. La figure 3.26(a) illustre l'étiquetage des cases selon \mathcal{O}'_e et la figure 3.26(b), le diagramme compact correspondant.

Dans la correspondance entre les triplets (σ, λ, μ) et les diagrammes de n cases (avec multiplicités permises) du théorème 3.5.2, λ et μ sont des partages constitués d'un nombre quelconque de parts mais chacune de longueur égale ou inférieure à n . La correspondance peut se décrire en terme des partages conjugués λ' et μ' , comme le font implicitement Garsia et Gessel dans [8].

Définition 3.5.3. Soit $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ une permutation. Un partage $\rho = (\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_n \geq 0)$ est σ -compatible si et seulement $\sigma_i > \sigma_{i+1}$ implique $\lambda_i > \lambda_{i+1}$, pour tout $1 \leq i \leq n$.

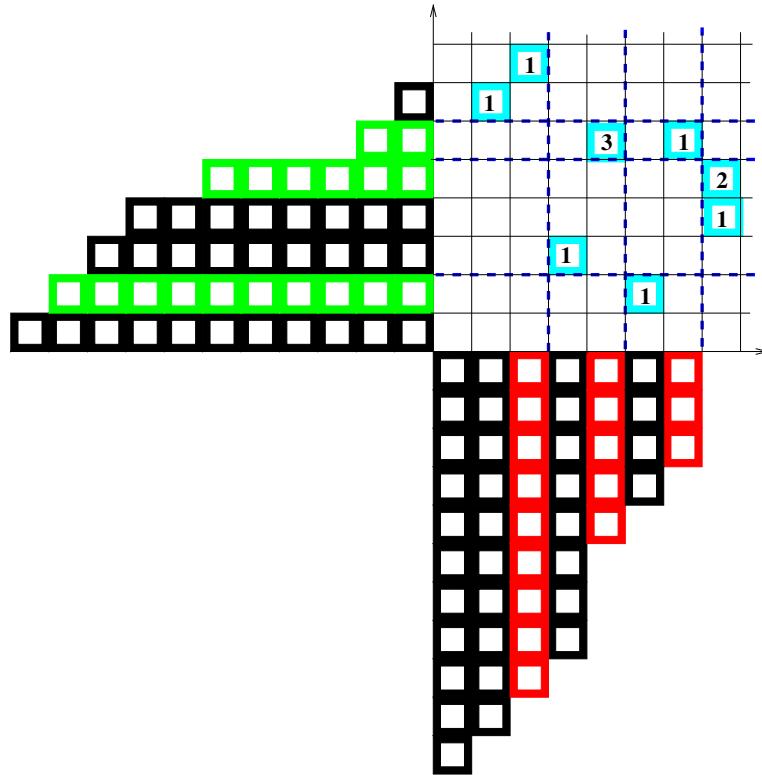


FIG. 3.25 – Un diagramme à cases multiples et distributions marginales

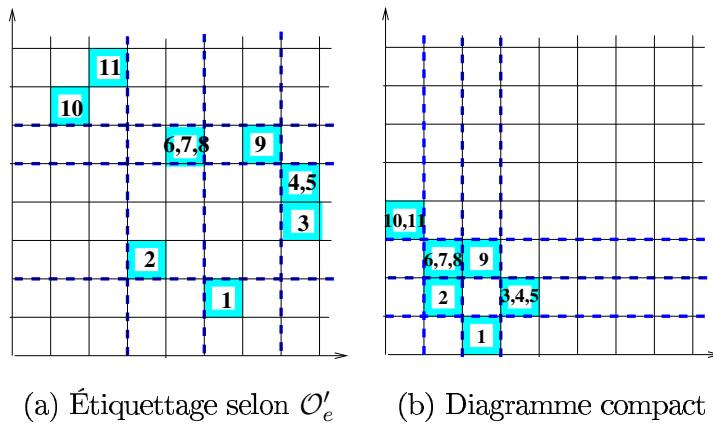


FIG. 3.26 – Un diagramme à cases multiples étiquetté et son compact.

Les diagrammes de n cases (avec multiplicités permises) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sont en bijection avec les triplets (σ, λ', μ') où $\sigma \in \mathbb{S}_n$, λ' est σ -compatible et μ' est σ^{-1} -compatible. Les figures 3.27, 3.28 et 3.29 présentent la distribution des diagrammes compacts, selon

les règles de cette section, à 2,3 et 4 cases. Le nombre dans chacune des cases indique seulement la multiplicité; il ne provient pas de l'étiquetage des cases du graphe de permutation original.

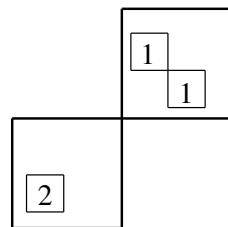


FIG. 3.27 – Les diagrammes compacts pour $n = 2$

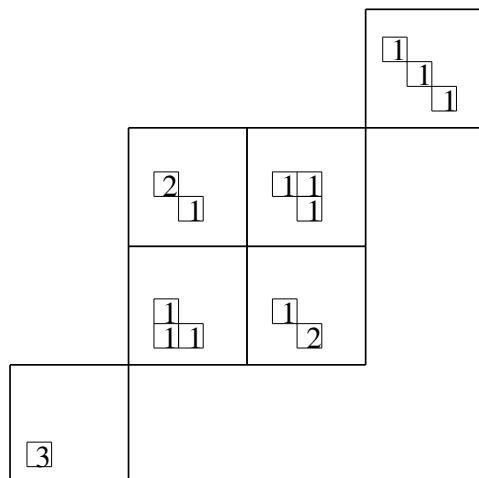


FIG. 3.28 – Les diagrammes compacts pour $n = 3$

Nous verrons à la section 3.7 que les deux façons d'obtenir des diagrammes compacts peuvent se décrire par un algorithme plus général dans le contexte des tableaux semi-standards à entrées dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

3.6 Liens avec les fonctions quasi-symétriques

Considérons uniquement les séries génératrices aux théorèmes 3.1.1 et 3.5.2:

$$P_n(q,t) = \sum_d w(d) = \frac{\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} q^{\text{maj}(\sigma)} t^{\text{maj}'(\sigma^{-1})}}{\prod_{i=1}^n (1 - q^i)(1 - t^i)}, \quad (3.6.1)$$

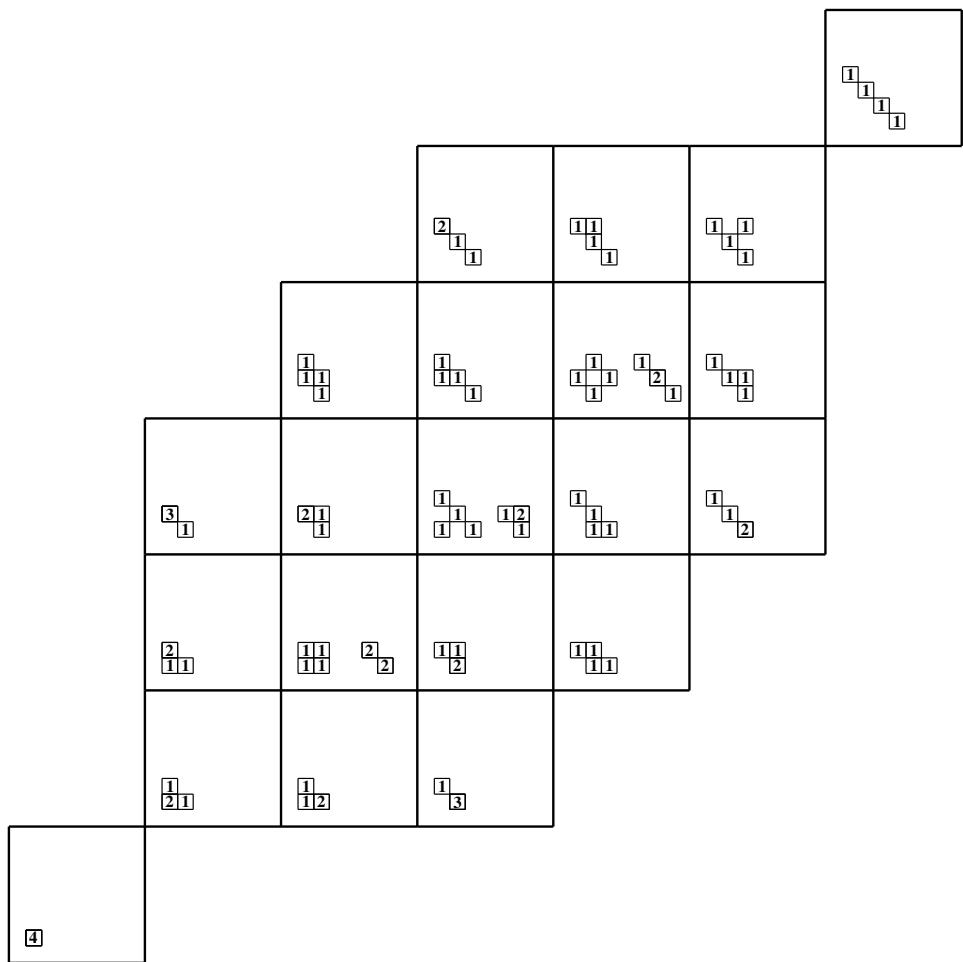
$$Q_n(q,t) = \sum_d w(d) = \frac{\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} q^{\text{maj}(\sigma)} t^{\text{maj}'(\sigma^{-1})}}{\prod_{i=1}^n (1 - q^i)(1 - t^i)}, \quad (3.6.2)$$

où la somme dans (3.7.1) se fait sur les diagrammes $d \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $|d| = n$ et la somme dans (3.7.2) se fait sur les diagrammes d multi-ensemble de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $|d| = n$. On peut obtenir ces séries génératrices par substitution principale dans des fonctions symétriques sur l'alphabet XY où $X = x_1, x_2, \dots$ et $Y = y_1, y_2, \dots$ sont deux jeux infinis de variables. En effet,

$$\begin{aligned} P_n(q,t) &= m_{1^n}[XY] \Big|_{\substack{x_i \leftarrow q^{i-1}, \\ y_i \leftarrow t^{i-1}}}, \\ &= s_{1^n}[XY] \Big|_{\substack{x_i \leftarrow q^{i-1}, \\ y_i \leftarrow t^{i-1}}}, \\ Q_n(q,t) &= \sum_{\lambda \vdash n} m_{\lambda}[XY] \Big|_{\substack{x_i \leftarrow q^{i-1}, \\ y_i \leftarrow t^{i-1}}}, \\ &= s_n[XY] \Big|_{\substack{x_i \leftarrow q^{i-1}, \\ y_i \leftarrow t^{i-1}}}. \end{aligned}$$

Remarque 3.6.1. En considérant le noyau de Cauchy et en utilisant la notation des λ -anneaux,

$$\begin{aligned} P_n(q,t) &= h_n \left[\frac{Z_n}{(1-q)(1-t)} \right] \Big|_{s_{1^n}[Z_n]}, \\ Q_n(q,t) &= h_n \left[\frac{Z_n}{(1-q)(1-t)} \right] \Big|_{s_n[Z_n]}. \end{aligned}$$

FIG. 3.29 – Les diagrammes compacts pour $n = 4$

Les séries $P_n(q,t)$ et $Q_n(q,t)$ peuvent s'obtenir par spécialisation principale dans les identités du théorème suivant (anticipé par H. Foulkes, voir [6], théorème 7.23.2 dans [26]):

Théorème 3.6.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,*

$$\sum_{\lambda \vdash n} s_\lambda[X] s_\lambda[Y] = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} L_{\text{co}(\sigma)}[X] L_{\text{co}(\sigma^{-1})}[Y], \quad (3.6.3)$$

$$\sum_{\lambda \vdash n} s_\lambda[X] s_{\lambda'}[Y] = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} L_{\text{co}(\sigma)}[X] L_{\text{co}'(\sigma^{-1})}[Y]. \quad (3.6.4)$$

Voici comment les fonctions quasi-symétrique fondamentales L_α sont définies. Pour une composition $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ avec $|\alpha| = n$ et $\alpha_i \geq 1$, pour tout i et $k \geq 1$, posons

$$S_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1}\} \subseteq [n-1].$$

Inversement, pour $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}\} \subseteq [n-1]$ avec les s_i croissants, posons,

$$\text{co}(S) \stackrel{\text{def}}{=} (s_1, s_2 - s_1, \dots, n - s_{k-1}).$$

La définition est étendue pour $\sigma \in \mathbb{S}_n$ en considérant son ensemble de descentes:

$$\text{co}(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \text{co}(D(\sigma)).$$

Définition 3.6.3. *Soit α une composition de n . La fonction quasi-symétrique fondamentale L_α est définie par*

$$L_\alpha = \sum_{\substack{i_1 \leq \dots \leq i_n, \\ i_j < i_{j+1} \text{ si } j \in S_\alpha}} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}.$$

Le théorème 3.6.2 s'obtient des noyaux de Cauchy

$$\begin{aligned} h_n[XY] &= \sum_{\lambda} s_\lambda[X] s_\lambda[Y], \\ e_n[XY] &= \sum_{\lambda} s_\lambda[X] s_{\lambda'}[Y], \end{aligned}$$

et de l'identité suivante (connue de Gessel, théorème 7.19.7 dans [26]):

$$s_\lambda = \sum_T L_{\text{co}(T)}, \quad (3.6.5)$$

où $\text{co}(T) = \text{co}(D(T))$. Avant de définir l'ensemble de descente, $D(T)$ d'un tableau, quelques clarifications sur les tableaux sont nécessaires.

Définition 3.6.4. Soit $\lambda \vdash n$ pour n fixé. Un tableau standard (de Young) de forme λ est un remplissage bijectif des cases du diagramme de Ferrers de forme λ par les entiers 1 à n croissant selon les rangées et les colonnes. L'ensemble de ces objets est dénoté $\text{SYT}(\lambda)$.

Nous adoptons la convention francophone où la taille des rangées du diagrammes de Ferrers va décroissant de bas en haut. Malheureusement, pour les tableaux semi-standards, les définitions varient d'un auteur à l'autre. Deux types sont inventoriés. Le premier type, comme I. Macdonald dans [21] par exemple, met l'emphase sur la forme du remplissage et nous le qualifierons de canonique.

Définition 3.6.5. Soit $\lambda \vdash n$ pour n fixé. Un tableau semi-standard canonique de forme λ est une séquence de partages $t = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)})$ telle que

$$\emptyset = \lambda^{(0)} \subseteq \lambda^{(1)} \subseteq \dots \subseteq \lambda^{(r)} = \lambda$$

et, pour chaque i , $\theta^{(i)} = \lambda^{(i)} - \lambda^{(i-1)}$ est une bande horizontale, c.-à-d. un diagramme pour lequel deux cases ne sont jamais dans une même colonne. La composition

$$(|\theta^{(1)}|, \dots, |\theta^{(r)}|)$$

de n est le poids de t . L'ensemble de ces objets est dénoté $\text{SSYT}^c(\lambda)$.

Rappelons que le nombre de Kostka, $K_{\lambda\mu}$, est le nombre de tableaux semi-standards canoniques de forme λ et poids μ . Il est prouvé que ce nombre est indépendant de l'ordre des μ_i , de sorte que $K_{\lambda\mu}$ est souvent considéré comme étant indexé par deux partages du même entier n . Le deuxième type met l'emphase sur les éléments servant au remplissage du tableau et nous le qualifierons d'ordinaire. Cette définition est utilisée par exemple par W. Fulton dans [7].

Définition 3.6.6. Soit $\lambda \vdash n$ pour n fixé. Un tableau semi-standard ordinaire de forme λ est un couple $t = (\lambda, f)$ constitué du diagramme de Ferrers λ de forme λ (abus de

notation) et d'une fonction de remplissage $f : \lambda \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ faiblement croissante selon les rangées de λ et strictement croissante selon les colonnes. L'ensemble de ces objets est dénoté $\text{SSYT}^c(\lambda)$.

En ce qui a trait aux nombres de Kostka,

$$K_{\lambda\mu} = \#\{t = (\lambda, f) \mid \#f^{-1}(\{i\}) = \mu_i, \forall i\},$$

d'où le synonyme «contenu» pour désigner μ . Clairement, le tableau standard est un cas particulier du tableau semi-standard canonique, et ce dernier, un cas particulier du tableau semi-standard ordinaire. Maintenant, on peut définir le concept de *descentes* globalement pour tous ces objets en le définissant comme suit.

Définition 3.6.7. Soit $\tau = (\lambda, f)$ un tableau semi-standard ordinaire. Soit a_1, a_2, \dots, a_n les entrées du tableau en ordre faiblement croissant. Soit c_1, c_2, \dots, c_n les cases de λ tel que $f(c_i) = a_i$ et si $a_i = a_{i+1}$ alors $c_i <_{\mathcal{O}_l} c_{i+1}$. Il y a une descente de tableau entre les cases c_k et c_{k+1} si $a_k < a_{k+1}$ et $c_k <_{\mathcal{O}_e} c_{k+1}$, c.-à-d. c_{k+1} apparaît dans une rangée supérieure à celle contenant c_k . L'ensemble des descentes, noté $D(\tau)$, contient le rang des descentes:

$$D(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \{k \mid \text{il y a une descente de } c_k \text{ à } c_{k+1}\}.$$

Les indices majeur et comajeur du tableau sont donnés par

$$\begin{aligned} \text{maj}(\tau) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in D(\tau)} k, \\ \text{comaj}(\tau) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in D(\tau)} (n - k). \end{aligned}$$

Notons que lorsque τ est un tableau standard, $D(\tau)$ peut se décrire simplement en terme de positions relatives de ses entrées a_i . La figure 3.30 présente trois types de tableaux dont les cases grises correspondent aux c_k tels qu'il y a descente de c_k à c_{k+1} . En fait, pour $\lambda \vdash n$ fixé, il y a une bijection entre les tableaux semi-standards ordinaires de forme λ et les couples (ρ, T) où ρ est un partage aux parts de longueur inférieure ou égale à n et $T \in \text{SYT}(\lambda)$. En effet, les séquences d'entrées a_i (et leurs c_i cases respectives) entre

8
7 9
4 4 4 6
2 2 3 4 5

6
5 6
2 2 3 4
1 1 1 3 3

11
10 12
4 5 6 9
1 2 3 7 8

(a) Semi-standard ordinaire (b) Semi-standard canonique (c) Standard

FIG. 3.30 – Deux tableaux semi-standards correspondant au même tableau standard.

deux descentes dans un tableau (quelconque) détermine une bande horizontale. D'une bande horizontale à la suivante, la valeur des entrées doit impérativement augmenter de 1. Ce saut obligatoire est codé par le comaj du tableau T . Par exemple, écrivons la liste croissante de entrées des tableaux de la figure 3.30:

$$\begin{aligned} \text{tableau en (c): } & 1 \ 2 \ 3 \ \searrow \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ \searrow \ 9 \ \searrow \ 10 \ \searrow \ 11 \ 12 \\ \text{tableau en (b): } & 1 \ 1 \ 1 \ \searrow \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \ \searrow \ 4 \ \searrow \ 5 \ \searrow \ 6 \ 6 \\ \text{tableau en (a): } & 2 \ 2 \ 3 \ \searrow \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 5 \ \searrow \ 6 \ \searrow \ 7 \ \searrow \ 8 \ 9 \end{aligned}$$

L'excédant des valeurs a_i est codé par ρ selon la formule

$$f(c_i) = a_i = \#\{k < i \mid \text{descente de } c_k \text{ à } c_{k+1}\} + \#\{k \mid \rho_k > n - i\}. \quad (3.6.6)$$

Remarque 3.6.8. Lorsque $\rho = \emptyset$ dans l'équation 3.6.6, la statistique $\sum_i(a_i - 1)$ rappelle la *charge* d'un tableau T , notée $c(T)$ (voir la description qu'en fait Macdonald, [21][part. III, ch. 6]), qui apparaît dans l'identité (due à Lascoux et Schutzenberger):

$$K_{\lambda\mu}(t) = \sum_T t^{c(T)},$$

où les $K_{\lambda\mu}(t)$ sont les polynômes de Kostka-Foulkes de la décomposition des fonctions de Schur en terme des polynômes de Hall-Littlewood:

$$s_\lambda[X] = \sum_\mu K_{\lambda\mu} P_\mu(X; t).$$

Le polynôme $P_\lambda(X; t)$ peut s'obtenir par la spécialisation $P_\lambda(X; 0, q)$ des polynômes de Macdonald (voir le début de la section 1.4).

Cette bijection alliée à la définition combinatoire des fonctions de Schur,

$$\begin{aligned} s_\lambda[(1-q)^{-1}] &= s_\lambda(1, q, q^2, \dots), \\ &= \sum_{\substack{\tau \in \text{SSYT}^\circ \\ \tau = (d, f)}} \prod_{c \in d} q^{f(c)}, \end{aligned}$$

permet d'obtenir le résultat suivant (prouvé d'une autre façon dans [26]).

Lemme 3.6.9. *Soit $\lambda \vdash n$. Alors,*

$$s_\lambda[(1-q)^{-1}] = \frac{\sum_{T \in \text{SYT}(\lambda)} q^{\text{comaj}(T)}}{\prod_{i=1}^n (1-q^i)}.$$

Maintenant, sous nous spécialisons dans $\sum_\lambda s_\lambda[X]s_\lambda[y]$, nous obtenons

$$\sum_\lambda [(1-q)^{-1}]s_\lambda[(1-t)^{-1}] = \sum_{(P,Q) \in \text{SYT}(\lambda)} \frac{q^{\text{comaj}(P)}t^{\text{comaj}(Q)}}{\prod_{i=1}^n (1-q^i)(1-t^i)}.$$

Or, par la correspondance de Robinson-Schensted-Knuth, les permutations $\sigma \in \mathbb{S}_n$ sont en bijection avec les paires de tableaux standards (P, Q) de même forme, disons $\lambda \vdash n$. Or, il appert que $D(\sigma) = D(Q)$ et $D(\sigma^{-1}) = D(P)$. Donc, en combinant tout cela, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \vdash n} s_\lambda[(1-q)^{-1}]s_\lambda[(1-t)^{-1}] &= \frac{\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} q^{\text{comaj}(\sigma)}t^{\text{comaj}(\sigma^{-1})}}{\prod_{i=1}^n (1-q^i)(1-t^i)}, \\ &= \frac{\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} q^{\text{maj}(\sigma)}t^{\text{maj}(\sigma^{-1})}}{\prod_{i=1}^n (1-q^i)(1-t^i)}, \\ &= Q_n(q, t), \end{aligned}$$

en utilisant l'équidistribution. On obtient $P_n(q, t)$ de manière similaire.

3.7 Tableaux semi-standards à entrées dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Considérons les séries génératrices suivantes:

$$P_n(q, t) = \sum_d w(d) = \frac{\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} q^{\text{maj}(\sigma)}t^{\text{maj}'(\sigma^{-1})}}{\prod_{i=1}^n (1-q^i)(1-t^i)}, \quad (3.7.1)$$

$$Q_n(q, t) = \sum_d w(d) = \frac{\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} q^{\text{maj}(\sigma)}t^{\text{maj}(\sigma^{-1})}}{\prod_{i=1}^n (1-q^i)(1-t^i)}, \quad (3.7.2)$$

où la somme dans (3.7.1) se fait sur les diagrammes $d \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $|d| = n$ et la somme dans (3.7.2) se fait sur les diagrammes d multi-ensemble de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $|d| = n$. Nous avons vu qu'à chaque σ les statistiques $q^{\text{maj}(\sigma)}t^{\text{maj}'(\sigma)}$ (resp. $q^{\text{maj}(\sigma)}t^{\text{maj}(\sigma)}$) correspondent à un diagramme *compact* (définition de compacité différente pour chacune des deux séries génératrices). Chaque terme du développement en série de $(\prod_{i=1}^n (1 - q^i)(1 - t^i))^{-1}$ correspond à un couple (λ, μ) de partages – aux parts de longueur inférieure ou égale à n – indiquant un décalage supplémentaire à introduire entre les cases du diagramme compact. Or, on peut obtenir ces séries génératrices par substitution principale dans fonctions symétriques sur l'alphabet XY où $X = x_1, x_2, \dots$ et $Y = y_1, y_2, \dots$ (deux jeux infinis de variables). En effet,

$$\begin{aligned} P_n(q, t) &= m_{1^n}[XY] \Big|_{\substack{x_i \leftarrow q^{i-1}, \\ y_i \leftarrow t^{i-1}}}, \\ &= s_{1^n}[XY] \Big|_{\substack{x_i \leftarrow q^{i-1}, \\ y_i \leftarrow t^{i-1}}}, \\ Q_n(q, t) &= \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda[XY] \Big|_{\substack{x_i \leftarrow q^{i-1}, \\ y_i \leftarrow t^{i-1}}}, \\ &= s_n[XY] \Big|_{\substack{x_i \leftarrow q^{i-1}, \\ y_i \leftarrow t^{i-1}}}. \end{aligned}$$

Mais qu'en est-il de $s_\lambda[XY] \Big|_{\substack{x_i \leftarrow q^{i-1}, \\ y_i \leftarrow t^{i-1}}}$, pour λ autre que (n) ou 1^n ? Des calculs par ordinateur (voir les tableaux 3.3 et 3.4) suggèrent que pour tout $\lambda \vdash n$,

$$P_\lambda(q, t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n (1 - q^i)(1 - t^i) s_\lambda[XY] \Big|_{\substack{x_i \leftarrow q^{i-1}, \\ y_i \leftarrow t^{i-1}}} \quad (3.7.3)$$

est élément de $\mathbb{N}[q, t]$. Cela n'est évident a priori puisqu'en général

$$\prod_{i=1}^n (1 - q^i)(1 - t^i) m_\lambda[XY] \Big|_{\substack{x_i \leftarrow q^{i-1}, \\ y_i \leftarrow t^{i-1}}}$$

n'est pas élément de $\mathbb{N}[q, t]$ mais plutôt de $\mathbb{Z}[q, t]$. La question est maintenant de trouver une interprétation combinatoire du polynôme $P_\lambda(q, t)$ généralisant l'interprétation que nous en avions pour les cas particuliers $\lambda = n$ et $\lambda = 1^n$.

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \text{(a) } P_3(q,t) \qquad \text{(b) } P_{21}(q,t) \qquad \text{(c) } P_{111}(q,t)
 \end{array}$$

TAB. 3.3 – Les coefficients des polynômes $P_\lambda(q,t)$ pour $\lambda \vdash 3$.

Nous reformulons la définition 3.6.6 pour que les entrées de tableau puissent provenir de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Définition 3.7.1. Soit $\lambda \vdash n$ pour n fixé. Soit E un ensemble quelconque (fini ou infini) doté d'un ordre total \mathcal{O} . Un tableau semi-standard ordinaire de forme λ et à entrées dans E est un couple (λ, f) tel que λ est le diagramme de Ferrers de forme λ et $f : \lambda \longrightarrow E$. Soit $\{c_1, \dots, c_n\}_{\leq \mathcal{O}}$ les cases de λ triées selon \mathcal{O}_l , alors f doit satisfaire: pour $i < j$ si c_i et c_j sont dans une même rangée de λ alors $f(c_i) \leq_{\mathcal{O}} f(c_j)$. Toujours pour $i < j$, si c_i et c_j sont dans une même colonne de λ alors $f(c_i) <_{\mathcal{O}} f(c_j)$.

Lorsque $\mathcal{O} = \mathcal{O}_l$ et $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nous obtenons les des tableaux semi-standards à entrées dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. L'ensemble de ces objets sera dénoté $\text{SSYT}^o_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(\lambda)$. Le diagramme de Ferrers λ peut toujours être considéré comme un diagramme (à cases nécessairement distinctes) et le (multi-)ensemble image $f(\lambda)$ est un diagramme (à cases possiblement multiples, donc multi-ensemble de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$).

La spécialisation principale $s_\lambda[XY]|_{\substack{x_i \leftarrow q^{i-1}, \\ y_i \leftarrow t^{i-1}}}$, donne la série génératrice des tableaux semi-standards de forme λ à entrées dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (avec l'ordre \mathcal{O}_l):

$$s_\lambda[XY]|_{\substack{x_i \leftarrow q^{i-1}, \\ y_i \leftarrow t^{i-1}}} = \sum_{\substack{\tau \in \text{SSYT}^o_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(\lambda) \\ \tau = (\lambda, f)}} w(f(\lambda)),$$

où

$$w(f(\lambda)) = \prod q^{a_{i,1}} t^{a_{i,2}},$$

pour $a_i = (a_{i,1}, a_{i,2}) \stackrel{\text{def}}{=} f(c_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Cela se déduit de l'interprétation combinatoire de la fonction de Schur et du produit XY de deux alphabets.

$$\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
(a) P_4(q,t) \qquad \qquad \qquad (b) P_{31}(q,t) \qquad \qquad \qquad (c) P_{22}(q,t) \\
\\
\left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
(d) P_{211}(q,t) \qquad \qquad \qquad (e) P_{1111}(q,t)
\end{array}$$

TAB. 3.4 – Les coefficients des polynômes $P_\lambda(q,t)$ pour $\lambda \vdash 4$.

Conjecture 3.7.2. Il existe une bijection entre $\text{SSYT}_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}^\circ(\lambda)$ et l’ensemble des tuples (σ, T, ν, μ) où $\sigma \in \mathbb{S}_n$, $T \in \text{SYT}(\lambda)$, ν et μ sont des partages dont les parts sont de longueur inférieure ou égale à n . À $(\sigma, T, \emptyset, \emptyset)$ correspond un diagramme (à cases possiblement multiples) compact $C_{\sigma, T}$ (selon des règles données plus loin). Au niveau des séries génératrices,

$$\sum_{\substack{\tau \in \text{SSYT}_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}^\circ(\lambda) \\ \tau = (\lambda, f)}} w(f(\lambda)), \quad = \quad \frac{\sum_{(\sigma, T)} w(C_{\sigma T})}{\prod i=1^n (1-q^i)(1-t^i)}.$$

Au couple (d, T) , où d est un diagramme à cases possiblement multiples et $T \in \text{SYT}(\lambda)$, on construit le diagramme compact $C_{d, T}$ comme suit. Considérons la suite faiblement croissante des entrées (dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$) obtenue en prenant $\rho = \emptyset$ dans l’équation 3.6.6. C’est donc la suite du tableau semi-standard ordinaire *minimal* associé au tableau standard T . On étiquette les cases de d (lu selon \mathcal{O}_l) de cette suite de nombre. Ensuite, on déplace

les cases étiquetées de d selon des règles mixtes de déplacements locaux permis.

Définition 3.7.3. Soit d_T le diagramme étiqueté ci-haut et $c = (c_1, c_2) \in d_T$ une case quelconque d'étiquette, disons, i . Un mouvement vers le bas de la case c (c -à- d . $c \mapsto (c_1, c_2 - 1)$) est permis si et seulement si

$$\nexists \gamma \in d_T, (\gamma \in I_{\text{bas}}(c) \text{ et } \gamma \text{ est d'étiquette } j \neq i)$$

et simultanément

$$\nexists \gamma \in d_T, (\gamma \in I'_{\text{bas}}(c) \text{ et } \gamma \text{ est d'étiquette } j = i).$$

Aussi, un mouvement vers la gauche de la case c (c -à- d . $c \mapsto (c_1 - 1, c_2)$) est permis si et seulement si

$$\nexists \gamma \in d_T, (\gamma \in I_{\text{gau}}(c) \text{ et } \gamma \text{ est d'étiquette } j \neq i)$$

et simultanément

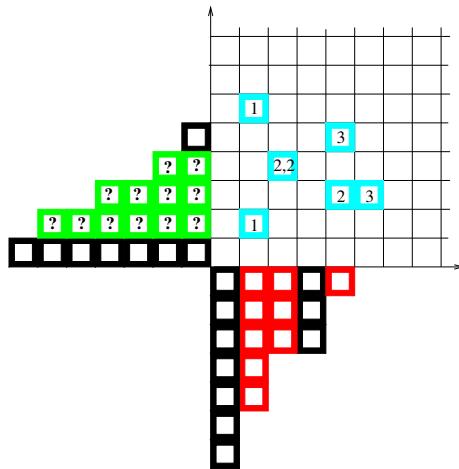
$$\nexists \gamma \in d_T, (\gamma \in I'_{\text{gau}}(c) \text{ et } \gamma \text{ est d'étiquette } j = i).$$

La figure 3.31(c)-(d) rappelle les différents intervalles. À ce jeu, au départ, toutes les étiquettes d'une case multiple de d_T doivent être identiques. La figure 3.31(a) représente un diagramme étiqueté par la suite 1,1,2,2,2,3,3. Cette suite peut être obtenue comme entrées de tableaux semi-standard ordinaires associés à deux tableaux standards différents – et de formes nécessairement différentes – avec leurs descentes illustrées à la figure 3.31(b). Le résultat de l'application des règles mixtes de mouvement permis donne le diagramme compact de la figure 3.31(e). Maintenant, en appliquant ces déplacements de cases sur les graphes de permutations grph_σ étiquetés par la suite croissante des entrées du tableau semi-standard ordinaire associé à un tableau standard T , nous obtenons les compacts $C_{\sigma T}$. Les figures 3.32, , 3.33, 3.34 et 3.35 présentent les diagrammes compacts dans des q,t -distributions compatibles avec celles des coefficients des polynômes $P_\lambda(q,t)$ définis à l'équation 3.7.3 (voir les tableaux 3.3 et 3.4). Par manque d'espace, ce sont les multiplicités des cases, et non leurs étiquettes, qui figurent à l'intérieur. Bien sûr, lorsque $\lambda = 1^n$, il n'y a qu'un seul tableau standard et les étiquettes sont toutes

différentes de sorte que l'on se ramène au contexte de la section 3.1. De même, lorsque $\lambda = n$, il n'y a qu'un seul tableau standard et les étiquettes sont toutes identiques de sorte que l'on se ramène au contexte de la section 3.5. Malheureusement, il n'y a pas encore de formule simple pour $P_\lambda(q,t)$ pour λ général. Elle doit avoir la forme:

$$P_\lambda(q,t) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathbb{S}_n \\ T \in \text{SYT}(\lambda)}} q^{\text{comaj}(\sigma)} t^{\text{stat}(\sigma^{-1}, T)},$$

où la statistique positive $\text{stat}(\sigma^{-1}, T)$ reste à déterminer (d'où les points d'interrogation à la figure 3.31(a)).



(a) Le tableau semi-standard canonique

6	7	
3	4	
1	2	5

→

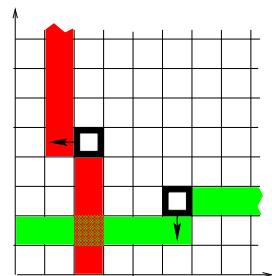
3	3	
2	2	
1	1	2

3	4	6	
1	2	5	7

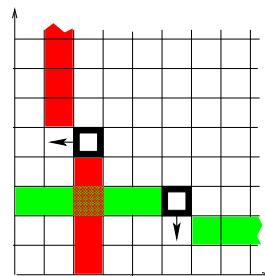
→

2	2	3	
1	1	2	3

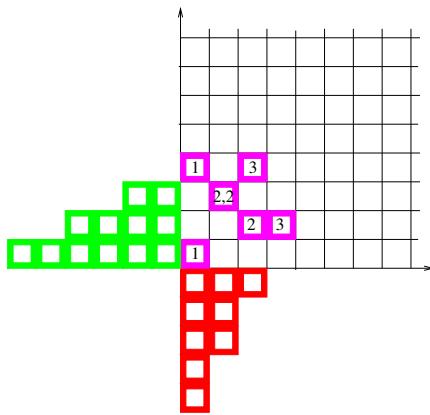
(b) Tableaux pour 1,1,2,2,2,3,3



(c) Entre étiquettes différentes

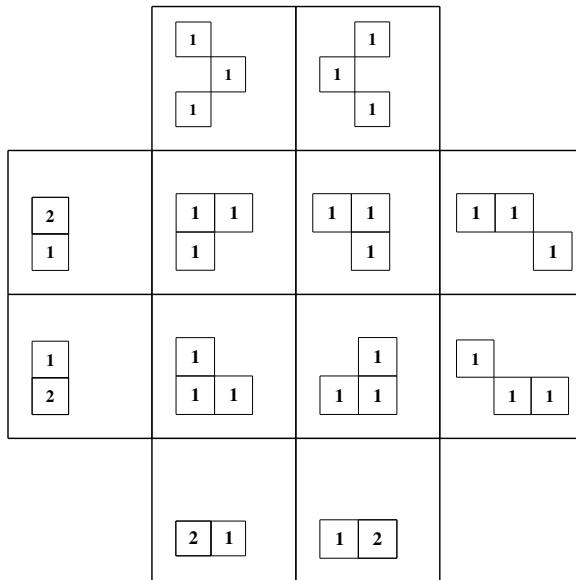
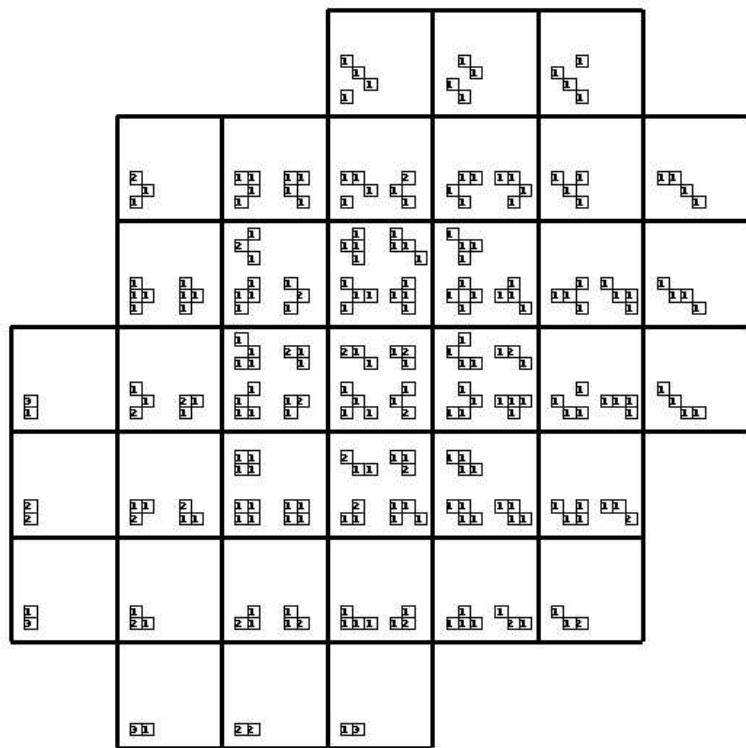


(d) Entre étiquettes identiques



(e) Le compact mixte

FIG. 3.31 – Sur le compact d'un tableau semi-standard canonique dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

FIG. 3.32 – Les diagrammes compacts engendrant $\text{SSYT}^{\circ}_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(2,1)$.FIG. 3.33 – Les diagrammes compacts engendrant $\text{SSYT}^{\circ}_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(3,1)$.

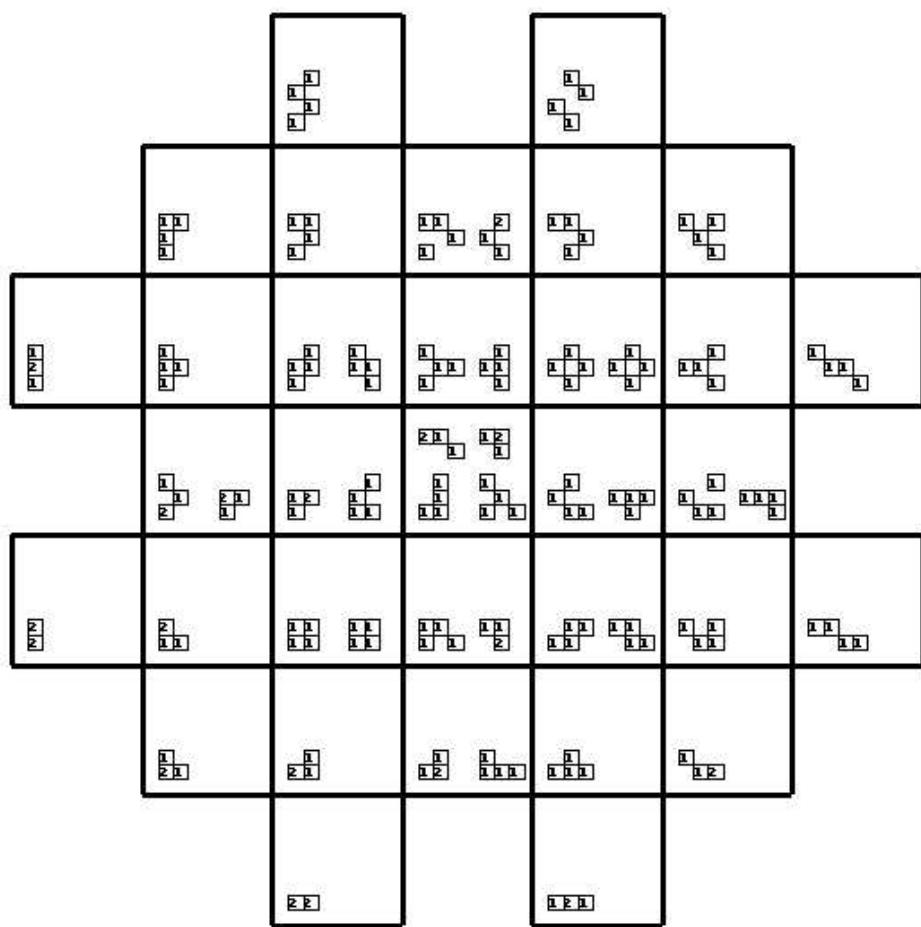
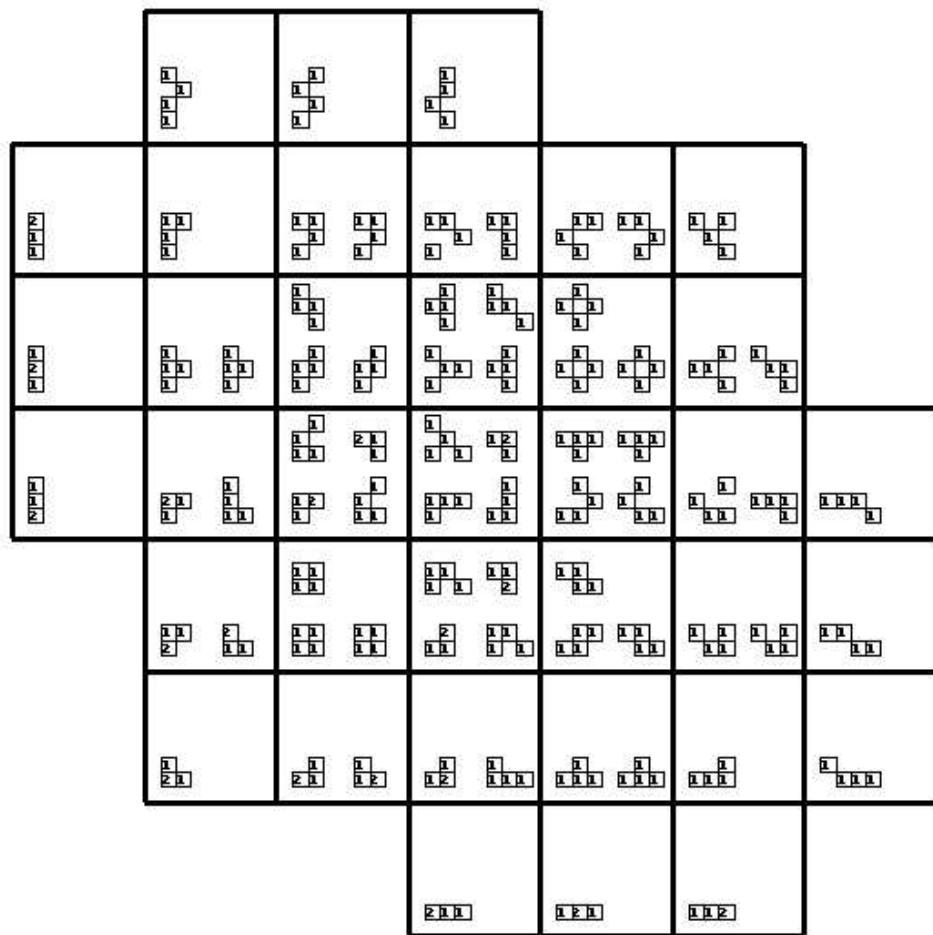


FIG. 3.34 – Les diagrammes compacts engendrant $\text{SSYT}^{\text{o}}_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(2,2)$.

FIG. 3.35 – Les diagrammes compacts engendrant $\text{SSYT}^{\circ}_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(2,1,1)$.

CONCLUSION

LA THÉORIE DES fonctions symétriques à deux paramètres q, t est déjà riche en résultats purement algébriques. Durant la dernière décennie, nous avons eu la chance de voir apparaître dans la littérature des modules de polynômes dans $\mathbb{Q}[X,Y]$ dont les Frobenius bigradués fournissent des fonctions symétriques déjà connues, de sorte que les conjectures n'ont pas manqué! Cependant, les résultats relevant purement de la combinatoire énumérative sont plutôt rares.

Les correspondances avec des diagrammes de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ énoncées aux théorèmes 3.1.1 et 3.5.2 et à la conjecture 3.7.2 donnent des objets combinatoires explicites (facilement programmables) dont les propriétés doivent être investiguées pour savoir s'ils contribuent de façon significative aux résultats sur les Frobenius déjà connus. En particulier, il est une application,

$$\downarrow \Phi[X; q t] \stackrel{\text{def}}{=} \omega \Phi[X; 1/q, 1/t], \quad (3.7.4)$$

qui apparaît à plusieurs endroits. Par exemple, dans l'heuristique de la Science-Fiction [3] et dans le théorème du flip d'atomes [2, théorème 1.2]:

$$T_{\mu/ij} \downarrow A_{ij}^x = A_{ij}^y. \quad (3.7.5)$$

Une explication combinatoire de (3.7.4) à l'aide de diagrammes compacts donnerait de nouvelles armes pour le développement de la récurrence à quatre termes qui est l'équivalent combinatoire de l'identité (3.7.5).

Annexe A

CALCULS PAR ORDINATEUR

A.1 \mathcal{DA} en tant que $\Lambda[X] \otimes \Lambda[Y]$ -module

Voici quelques relations illustrant la conjecture qui dit que pour un diagramme d à n cases quelconque il existe une unique relation de la forme

$$\Delta_d = \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma[X_n] g_\sigma[Y_n] \Delta_{C_\sigma},$$

où le diagramme C_σ est le diagramme compact associé à la permutation σ , $f_\sigma[X_n]$ est élément de Λ_n , les fonctions symétriques sur les variables x_1, x_2, \dots, x_n , similairement pour $g_\sigma[Y_n]$. Dans, ce qui suit, pour ne pas alourdir la notation, un diagramme d désigne en fait le vandermonde Δ_d .

– Pour le diagramme $d := [[0,2],[1,0],[1,1]]$:

$$\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} = 1/3 m_{1,1}[X_3] \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} - 1/3 m_{1,1}[Y_3] \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + 2/3 m_1[Y_3] \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}$$

– Pour le diagramme $d := [[0,2],[1,1],[2,0]]$:

$$\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} = -\frac{1}{6} m_{2,1}[X_3] \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} - \frac{1}{3} m_{1,1}[X_3] m_{1,1}[Y_3] \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} - \frac{1}{3} m_1[X_3] m_1[Y_3] \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + \frac{1}{6} m_{2,1}[Y_3] \square \square \square$$

– Pour le diagramme $d := [[0,1],[1,1],[2,0]]$:

$$\square \square = -\frac{1}{3}m_{1,1}[X_3] \boxplus -\frac{2}{3}m_1[X_3] \boxplus + \frac{1}{3}m_{1,1}[Y_3] \square \square$$

– Pour le diagramme $d := [[0,1],[1,0],[2,1]]$:

$$\square \square = -\frac{1}{3}m_{1,1}[X_3] \boxplus + \frac{1}{3}m_1[X_3] \boxplus + \frac{1}{3}m_{1,1}[Y_3] \square \square$$

– Pour le diagramme $d := [[0,0],[0,1],[1,2]]$:

$$\boxplus = \frac{1}{3}m_1[X_3] \boxplus - \frac{1}{3}m_{1,1}[Y_3] \boxplus + \frac{2}{3}m_1[Y_3] \boxplus$$

– Pour le diagramme $d := [[1,1],[2,3],[3,0]]$ (attention au décalage horizontal):

$$\begin{aligned} \square \square &= \frac{1}{6}m_{3,2,1}[X_3]m_1[Y_3] \boxplus + \frac{1}{3}m_{2,2,1}[X_3](m_{2,1}[Y_3] + m_{1,1,1}[Y_3]) \boxplus \\ &\quad - \frac{1}{3}m_{2,1,1}[X_3]m_{1,1,1}[Y_3] \boxplus - \frac{1}{3}m_{2,2,1}[X_3](m_2[Y_3] + m_{1,1}[Y_3]) \boxplus \\ &\quad - \frac{1}{3}m_{2,1,1}[X_3]m_2[Y_3] \boxplus + \frac{1}{6}m_{1,1,1}[X_3]m_{3,1}[Y_3] \square \square \end{aligned}$$

– Pour le diagramme $d := [[0,0],[0,1],[2,0]]$:

$$\boxplus \square = m_1[X_3] \boxplus + 1 \boxplus$$

– Pour le diagramme $d := [[0,0],[2,0],[4,0]]$:

$$\square \square \square = (m_{2,1}[X_3] + 2m_{1,1,1}[X_3]) \square \square$$

– Pour le diagramme $d := [[0,0],[0,2],[2,0]]$:

$$\square \square = m_1[X_3]m_1[Y_3] \boxplus + m_1[Y_3] \boxplus - m_1[X_3] \boxplus - 1 \boxplus$$

A.2 Bases empiriques des harmoniques diagonales alternantes

À l'aide de l'ordinateur, il est possible de calculer une base vectorielle de l'espace des harmoniques diagonales alternantes (décomposable en composantes bihomogène). En

fait, pour nous guider, nous utilisons la distribution des bidegrés donnée par la formule

$$C_n(q,t) = \nabla e_n[x]|_{e_n},$$

où $C_n(q,t)$ est le q,t -Catalan de Haglund et Garsia, et $\nabla e_n[X]$ est le Frobenius bigradué des harmoniques diagonales à deux jeux de n variables. Étonnamment, les diagrammes compacts associés aux permutations de \mathbb{S}_n ont une distribution compatible (superposable) à celle des q,t -Catalans.

Il est difficile de trouver un critère combinatoire qui permette de déterminer si une permutation quelconque doit être considérée comme un Catalan ou non (au sens de Haglund et Garsia). En particulier, il faudrait choisir un seul diagramme compact dans chacune des cellules faiblement sous la grande diagonale dans la figure 3.13. Il est difficile de discriminer entre les deux formes «L» de la cellule de pondération (3,3) (pondération commence à partir de (0,0) au coin inférieur gauche). Aussi, la plupart des diagrammes compacts sont tels que le déterminant de Vandermonde associé n'est même pas une harmonique diagonale.

On sait que les vecteurs dans les bases calculées par ordinateur de $\mathcal{D}\mathcal{H}Alt_n$ pour $n = 4,5$ peuvent facilement s'exprimer à l'aide des opérateurs E_k :

$$E_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial y_i},$$

Un rappel sur les (malheureusement inévitables choix arbitraires de) conventions: les cases sont numérotées par (c_1, c_2) où c_1 est l'abscisse et c_2 l'ordonnée, dans le calcul de déterminants, cette case compte pour $x_j^{c_1} y_j^{c_2}$ et ce monôme est pondéré par $q^{c_1} t^{c_2}$. Les cases sont ordonnées lexicographiquement pour fixer le signe du déterminant.

L'observation intéressante est que chaque vecteur de la base s'obtient du déterminant de Vandermonde usuel en les variables y_1, y_2, \dots, y_n (la colonne de longueur n) par applications d'opérateurs E_k et que le résultat est combinaison linéaire de Vandermonde de diagrammes où apparaît un unique diagramme compact. La seule exception est l'utilisation simultanée des deux diagrammes compacts de la cellule (3,3), ce qui justifie la

difficulté d'en discriminer un dans la recherche d'une correspondance avec les Catalans de Garsia et Haglund.

A.2.1 Le cas $n = 4$

Dans les calculs suivants, pour ne pas alourdir la notation, un diagramme d désigne en fait le vandermonde Δ_d .

– Pour le bidegré (0,6):

$$\begin{aligned} b_{0,6} &= \begin{array}{|c|c|}\hline & \square \\ \square & \end{array}, \\ &= \Delta_4 \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (1,5):

$$\begin{aligned} b_{1,5} &= 3 \begin{array}{|c|c|}\hline & \square \\ \square & \end{array} - 2 \begin{array}{|c|c|}\hline & \square \\ \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline \square & \\ \hline \end{array}, \\ &= 6 \begin{array}{|c|c|}\hline & \square \\ \square & \end{array} - 3m_1[Y] \begin{array}{|c|c|}\hline & \square \\ \square & \end{array} + m_{1,1}[Y] \begin{array}{|c|c|}\hline \square & \\ \hline \end{array} \\ &= E_1(\Delta_4) \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (1,4):

$$\begin{aligned} b_{1,4} &= 3 \begin{array}{|c|c|}\hline & \square \\ \square & \end{array} - \begin{array}{|c|c|}\hline \square & \\ \hline \end{array}, \\ &= 4 \begin{array}{|c|c|}\hline & \square \\ \square & \end{array} - m_1[Y] \begin{array}{|c|c|}\hline \square & \\ \hline \end{array}, \\ &= \frac{1}{2} E_2(\Delta_4), \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (1,3):

$$\begin{aligned} b_{1,3} &= \begin{array}{|c|c|}\hline & \square \\ \square & \end{array}, \\ &= \frac{1}{6} E_3(\Delta_4) \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (2,4):

$$\begin{aligned}
 b_{2,4} &= 6\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} - 3\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + 2\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + 3\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}, \\
 &= 15\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + m_{1,1}[Y]\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} - 4m_1[Y]\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \\
 &\quad + 3m_2[Y]\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + 4m_1[X]\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} - m_1[X]m_1[Y]\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}, \\
 &= \frac{1}{2}E_1^2(\Delta_4)
 \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (2,3):

$$\begin{aligned}
 b_{2,3} &= \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}, \\
 &= 4\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} - 2m_1[Y]\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + m_1[X]\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}, \\
 &= \frac{1}{6}E_2E_1(\Delta_4)
 \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (2,2):

$$\begin{aligned}
 b_{2,2} &= \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}, \\
 &= \frac{1}{24}E_2^2(\Delta_4)
 \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (3,3):

$$\begin{aligned}
 b_{3,3} &= 6\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} - 3\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} - 3\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} + 6\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}, \\
 &= 10\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} + 10\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + 5m_1[X]\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} - 5m_1[X]m_1[Y]\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \\
 &\quad - 5m_1[Y]\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + (m_2[X] + m_{1,1}[X])\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + (m_2[Y] + m_{1,1}[Y])\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}, \\
 &= \frac{1}{6}E_1^3(\Delta_4)
 \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (3,2):

$$\begin{aligned}
 b_{3,2} &= \begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}, \\
 &= 4\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + 2m_1[X]\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} - m_1[Y]\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}, \\
 &= \frac{1}{12}E_2E_1^2(\Delta_4)
 \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (3,1):

$$\begin{aligned} b_{3,1} &= \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square , \\ &= \frac{1}{24} E_2^2 E_1(\Delta_4) \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (4,2):

$$\begin{aligned} b_{4,2} &= 6 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square - 3 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square + 2 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square - \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square + 3 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square , \\ &= 15 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square - 4m_1[Y] \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square + \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square \\ &\quad + (7m_{1,1}[X] + m_2[X]) \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square + 4m_1[X] \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square - m_1[X]m_1[Y] \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square , \\ &= \frac{1}{24} E_1^4(\Delta_4) \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (4,1):

$$\begin{aligned} b_{4,1} &= 3 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square + \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square \square , \\ &= 4 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square + m_1[X] \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square , \\ &= \frac{1}{12} E_1^3 E_2(\Delta_4) \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (5,1):

$$\begin{aligned} b_{5,1} &= 3 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square + \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square \square + 2 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square \square , \\ &= 6 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square + 3m_1[X] \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square + m_{1,1}[X] \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square , \\ &= \frac{1}{120} E_1^5(\Delta_4) \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (6,0):

$$\begin{aligned} b_{6,0} &= \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} , \\ &= \frac{1}{720} E_1^6(\Delta_4) \end{aligned}$$

A.2.2 Le cas $n = 5$

– Pour le bidegré (0,10):

$$\Delta_5 = \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array}$$

– Pour le bidegré (1,9):

$$E_1(\Delta_5) = -\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + 2\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + 4\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} - 3\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}$$

– Pour le bidegré (1,8):

$$E_2(\Delta_5) = 12\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} - 6\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} + 2\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}$$

– Pour le bidegré (1,7):

$$E_3(\Delta_5) = 24\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} - 6\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}$$

– Pour le bidegré (1,6):

$$E_4(\Delta_5) = 24\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}$$

– Pour le bidegré (2,8):

$$E_1^2(\Delta_5) = 2\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + 12\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} + 24\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} + 4\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} - 16\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} - 6\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} + 8\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} - 6\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + 12\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$$

– Pour le bidegré (2,7):

$$E_2 E_1(\Delta_5) = -6\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} - 8\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} + 6\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} + 24\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} + 24\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} + 12\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} - 24\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} - 6\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$$

– Pour le bidegré (2,6): attention, deux vecteurs!

$$\begin{aligned} E_3 E_1(\Delta_5) &= 24\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} - 12\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} - 72\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} + 24\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} + 24\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}, \\ E_2^2(\Delta_5) &= 24\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} + 24\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} + 144\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} - 48\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (2,5): deux façons de l'obtenir!

$$\begin{aligned} E_2 E_3(\Delta_5) &= 72\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} - 48\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}, \\ &= -E_1 E_4(\Delta_5) \end{aligned}$$

- Pour le bidegré (2,4): deux façons de l'obtenir

$$\begin{aligned} E_3^2(\Delta_5) &= 288 \begin{array}{|c|c|}\hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\ &= -2E_2 E_4(\Delta_5) \end{aligned}$$

- Pour le bidegré (3,7):

- Pour le bidegré (3,6):

$$\begin{aligned}
E_2 E_1^2(\Delta_5) = & \\
& -48 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + 48 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} - 24 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + 72 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + 12 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + 12 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + 72 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\
& + 48 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} - 96 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} - 12 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + 24 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + 24 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} - 48 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + 48 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}
\end{aligned}$$

- Pour le bidegré (3,5): deux vecteurs

$$E_1 E_2^2(\Delta_5) =$$

$$-96 \begin{array}{|c|c|}\hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} - 144 \begin{array}{|c|c|c|}\hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + 288 \begin{array}{|c|c|}\hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + 24 \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + 24 \begin{array}{|c|c|}\hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} - 48 \begin{array}{|c|c|c|}\hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + 96 \begin{array}{|c|c|}\hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} - 72 \begin{array}{|c|c|c|}\hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

$$E_1^2 E_3(\Delta_5) =$$

$$144 \begin{array}{|c|c|}\hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} - 144 \begin{array}{|c|c|c|}\hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + 48 \begin{array}{|c|c|c|}\hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} - 12 \begin{array}{|c|c|}\hline \square & \square \\ \hline \end{array} - 48 \begin{array}{|c|c|}\hline \square & \square \\ \hline \end{array} \square - 96 \begin{array}{|c|c|}\hline \square & \square \\ \hline \end{array} \square + 144 \begin{array}{|c|c|}\hline \square & \square \\ \hline \end{array} \square + 72 \begin{array}{|c|c|}\hline \square & \square \\ \hline \end{array} \square$$

- Pour le bidegré $(3,4)$: deux vecteurs

$$E_2^3(\Delta_5) = 432 \begin{array}{|c|c|}\hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + 864 \begin{array}{|c|c|}\hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} - 144 \begin{array}{|c|c|}\hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

– Pour le bidegré (3,3):

$$\begin{aligned} E_3^2 E_1(\Delta_5) &= 288 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}, \\ &= 2E_3 E_2^2(\Delta_5) \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (4,6):

$$\begin{aligned} E_1^4(\Delta_5) = & \\ & 288 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 192 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 96 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 144 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 432 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 864 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 96 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \\ & + 48 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 72 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 288 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 576 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 288 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 576 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 432 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \\ & - 144 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 72 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 288 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 96 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 24 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 24 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (4,5):

$$\begin{aligned} E_1^3 E_2(\Delta_5) = & \\ & 288 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 36 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 144 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 216 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 216 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 432 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \\ & + 72 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 72 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 144 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 144 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 48 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 144 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 216 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \\ & + 216 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 144 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 144 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 12 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (4,4): deux vecteurs

$$\begin{aligned} E_2^2 E_1^2(\Delta_5) = & \\ & 432 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 96 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 288 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 192 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \\ & + 288 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 576 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 288 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 144 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 96 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \\ E_1^3 E_3(\Delta_5) = & -432 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 144 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 144 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 432 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 432 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \\ & - 432 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 432 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 144 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 144 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (4,3): deux vecteurs

$$\begin{aligned} E_2^3 E_1(\Delta_5) &= -432 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 1728 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 432 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square, \\ E_3 E_2 E_1^2(\Delta_5) &= 144 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 432 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 864 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (4,2):

$$E_2^4(\Delta_5) = 3456 \square\square\square$$

- Pour le bidegré (5,5):

$$\begin{aligned}
E_1^5(\Delta_5) = & \\
& 360 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square - 2880 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square + 4320 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square - 360 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square + 720 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square - 2160 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square \\
& + 120 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square - 2160 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square + 4320 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square + 1440 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square - 720 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square + 1440 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square \\
& + 480 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square - 480 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square + 1440 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square - 1440 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square + 960 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square + 2880 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square \\
& - 240 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square - 960 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square - 240 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square + 120 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \square
\end{aligned}$$

- Pour le bidegré (5,4):

$$\begin{aligned}
E_1^4 E_2(\Delta_5) = & \\
& 576 \square \square \square + 576 \square \square \square + 1152 \square \square \square - 864 \square \square \square - 288 \square \square \square + 288 \square \square \square + 144 \square \square \square \\
& - 576 \square \square \square - 48 \square \square \square - 192 \square \square \square + 576 \square \square \square + 576 \square \square \square + 864 \square \square \square - 864 \square \square \square \\
& - 576 \square \square \square + 864 \square \square \square - 576 \square \square \square + 1728 \square \square \square
\end{aligned}$$

- Pour le bidegré $(5,3)$: deux vecteurs

$$\begin{aligned}
E_1^4 E_3(\Delta_5) &= 576 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 1728 \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} - 576 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \square + 144 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 864 \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} \square \\
&\quad + 1728 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 1728 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 1152 \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} \square \\
E_2^2 E_1^3(\Delta_5) &= -864 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 864 \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} + 576 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 720 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \square \\
&\quad + 864 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} \square - 1296 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 576 \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} \square
\end{aligned}$$

- Pour le bidegré (5,2):

$$\begin{aligned} E_1^2 E_2^3(\Delta_5) &= 2592 \square\square + 1728 \square\square \quad \square \\ &= \text{cte} E_1^3 E_2 E_3(\Delta_5) \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (6,4):

$$\begin{aligned}
E_1^6(\Delta_5) = & -8640 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + 17280 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + 2880 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} - 12960 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} - 5760 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} - 8640 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \\
& + 4320 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + 4320 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + 2880 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + 8640 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} - 720 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + 1440 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \\
& - 720 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + 17280 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + 25920 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} - 8640 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + 2880 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \\
& - 2160 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + 12960 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + 2160 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}
\end{aligned}$$

- Pour le bidegré (6,3):

$$\begin{aligned}
E_1^5 E_2(\Delta_5) = & \quad 5760 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \square - 1440 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} - 2880 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + 2880 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + 2880 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \\
& - 4320 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} - 720 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \square + 4320 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + 1440 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + 720 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \square \\
& - 2880 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \square - 1440 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \square + 2880 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \square + 720 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \square \square
\end{aligned}$$

- Pour le bidegré (6,2):

$$E_1^4 E_2^2(\Delta_5) = \\ 1152 \square \square \square \square - 2880 \square \square \square \square + 3456 \square \square \square \square + 2304 \square \square \square \square + 2304 \square \square \square \square + 576 \square \square \square \square \square$$

$$E_1^5 E_3(\Delta_5) = 2880 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \square \end{smallmatrix} - 8640 \begin{smallmatrix} \square \square \\ \square \end{smallmatrix} - 2880 \begin{smallmatrix} \square \square \square \\ \square \end{smallmatrix} - 2880 \begin{smallmatrix} \square \square \\ \square \square \end{smallmatrix} - 1440 \begin{smallmatrix} \square \square \\ \square \end{smallmatrix} \quad \square$$

- Pour le bidegré (6,1):

$$\begin{aligned} E_1^3 E_2^3(\Delta_5) &= 4320 \square \square \square \\ &= \text{cte} \cdot E_1^4 E_2 E_3(\Delta_5) \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (7,3):

$$\begin{aligned}
E_1^7(\Delta_5) = & \\
& 30240 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 5040 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 5040 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square + 120960 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \square + 60480 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \square \\
& + 20160 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \square - 30240 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \square - 60480 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \square + 90720 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \square \square + 30240 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \square \square \\
& + 40320 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \square - 15120 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \square - 20160 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \square - 15120 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \square - 60480 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \square \square
\end{aligned}$$

– Pour le bidegré (7,2):

$$\begin{aligned} E_1^6 E_2(\Delta_5) = & 4320 \square \square \square + 8640 \square \square \square + 17280 \square \square \square + 5760 \square \square \square \\ & - 4320 \square \square \square + 4320 \square \square \square + 17280 \square \square \square - 17280 \square \square \square \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (7,1):

$$E_1^5 E_2^2(\Delta_5) = 11520 \square \square \square + 2880 \square \square \square$$

– Pour le bidegré (8,2):

$$\begin{aligned} E_1^8(\Delta_5) = & 161280 \square \square + 322560 \square \square \square + 241920 \square \square \square - 120960 \square \square \square \\ & + 80640 \square \square \square - 241920 \square \square \square + 483840 \square \square \square + 120960 \square \square \square - 40320 \square \square \square \end{aligned}$$

– Pour le bidegré (8,1):

$$E_1^7 E_2(\Delta_5) = 60480 \square \square \square + 10080 \square \square \square + 30240 \square \square \square$$

– Pour le bidegré (9,1):

$$E_1^9(\Delta_5) = 1451520 \square \square \square \square + 362880 \square \square \square \square + 725760 \square \square \square \square + 1088640 \square \square \square \square$$

– Pour le bidegré (10,0):

$$E_1^{10}(\Delta_5) = 3628800 \square \square \square \square \square$$

A.3 Code MAPLE pour les diagrammes compacts

[-] Prérequis

```
[> restart; with(combinat); with(plottools); with(plots); with(linalg)
```

[-] Ordres totaux usuels

```
L'ordre de lecture
> Ol := proc(A, B)
    option operator, arrow;
    if A[1] < B[1] then true elif A[1] = B[1] and A[2] < B[2] then true else false end if
end proc

L'ordre d'écriture
> Oe := proc(A, B)
    option operator, arrow;
    if A[2] < B[2] then true elif A[2] = B[2] and B[1] < A[1] then true else false end if
end proc

L'ordre d'écriture prime
> Oep := proc(A, B)
    option operator, arrow;
    if A[2] < B[2] then true elif A[2] = B[2] and A[1] < B[1] then true else false end if
end proc

Directions (vecteurs) de compactage
> gauche := [-1, 0]
> bas := [0, -1]
```

[-] Outils de manipulation de tableaux

```
Pour passer d'un partage 'mu' à un diagramme (liste de cases).
> cases := proc(mu)
    local i, j;
    option remember;
    sort([seq(seq([j-1, i-1], j = 1 .. mu[i]), i = 1 .. nops(mu))], lexico)
end proc

> lexico := proc(c, d)
    if c[1] + c[2] < d[1] + d[2] then true
    elif c[1] + c[2] = d[1] + d[2] and c[1] < d[1] then true
    else false
    end if
end proc
```

```

[ > est_un_coin := (c, d) → evalb( not (member(c + [1, 0], d) or member(c + [0, 1], d)))
[ Le tableau vide. En général, un tableau est un couple (diagramme, fonction)
[ > vide := [[ ], proc(x) end proc]
[ > diagramme := t → op(1, t)
[ > fonction := t → op(2, t)
[ Retourne l'ensemble des tableaux standards, suppose 'd' le diagramme correspondant à un partage.
> standards := proc(d, n)
  local c, rep;
  if nargs = 1 then standards( {op(d)}, nops(d))
  elif nops(d) = 0 then {vide}
  elif n < nops(d) then {vide}
  else
    rep := {};
    for c in d do
      if est_un_coin(c, d) then rep := rep union
        map((t, n, c) → ajoute(n, c, t), standards(d minus {c}, n - 1), n, c)
      end if
    end do;
    rep
  end if
end proc
Pour pouvoir ajouter une case à un tableau déjà existant.
> ajoute := (n, c, t) → [[op(diagramme(t)), c],
  subs(C = c, N = n, f = fonction(t), 'proc(x) if x = C then N else f(x) end if end proc')]
Pour pouvoir enlever une occurrence d'une case (possiblement multiple) d'un tableau.
> enleve := proc(c, t)
  local d, f,
  option operator, arrow;
  d := diagramme(t);
  f := fonction(t);
  member(c, d, 'k');
  d := [seq(d[i], i = 1 .. k - 1), seq(d[i], i = k + 1 .. nops(d))];
  RETURN([d, f])
end proc
Calcule l'ensemble des descentes d'un tableau standard
> D_standard := proc(t)
  local d, f, L, c, C;
  d := diagramme(t);
  f := fonction(t);
  L := [ ];
  for c in d do for C in d do
    if c[2] < C[2] and f(C) = f(c) + 1 then L := [op(L), f(c)] end if
  end do
end proc

```

```

end do;
sort(L)
end proc
retourne les entrées du tableau semi-standard canonique associé au tableau standard
't' (construit avec bande horizontale selon l'ensemble de descentes du tab. t).
> semistd_canon := proc(t)
local D_t;
D_t := D_standard(t);
[seq(nops(select(proc(y) evalb(y < i) end proc, D_t)) + 1, i = 1 .. nops(diagramme(t)))
]
end proc
Fait d'un diagramme 'd' quelconque un tableau en étiquettant les cases lues selon l'ordre OI par la
séquence des entrées du tableau semi-standard canonique associé au tableau standard T.
> etiq_semi := proc(d, T)
local t, i, dd, L;
dd := sort(d, OI);
L := semistd_canon(T);
t := [[], proc(c) end proc];
for i to nops(dd) do t := ajoute(L[i], dd[i], t) end do;
RETURN(t)
end proc

```

Outils d'affichage

```

Une case vide
> CASEVIDE := PLOT(
POLYGONS([[0,0],[0,1],[1,1],[1,0]], COLOR(RGB, 1, 1, 1), THICKNESS(3)))
Pour afficher un tableau 't', faire un "display" du résultat.
> Plot_Tableau := proc(t, B)
local d, f, figure, texte, bloc;
if nargs = 1 then bloc := CASEVIDE else bloc := B end if;
d := diagramme(t);
f := fonction(t);
figure := map(c → translate(bloc, c[1], c[2]), d);
texte := map(c → translate(PLOT(TEXT([1/2, 1/2], convert(f(c), string),
COLOR(RGB, 0, 0, 0), FONT(COURIER, BOLD, 8))), c[1], c[2]), d);
[op(figure), op(texte)]
end proc
> affiche_tableau :=
proc(t) ; display(Plot_Tableau(t), scaling = constrained, axes = none) end proc

```

Outils de compactage

Vérifie si une case particulière 'c' d'un tableau 't' peut effectuer un mouvement dans la direction 'pas'. 'ordreA' concerne les étiquettes différentes tandis que 'ordreB' concerne les étiquettes identiques.

```
> possible := proc(c, t, pas, ordreA, ordreB)
  local d, f, ddA, ddB, nbre_ill;
  d := diagramme(t);
  f := fonction(t);
  ddA := select(proc(x) evalb(f(c) ≠ f(x)) end proc, d);
  ddB := select(proc(x) evalb(f(c) = f(x)) end proc, d);
  nbre_ill := nops(
    select(proc(x) (x = c + pas or ordreA(c + pas, x)) and ordreA(x, c) end proc, ddA)
    + nops(select(proc(x) ordreB(c + pas, x) and ordreB(x, c) end proc, ddB)));
  RETURN(nbre_ill = 0)
end proc
```

Fait un compactage directionnel du tableau t (étiquetté par les entrées d'un tableau semi-std canonique) dans la direction 'pas'. 'ordreA' est utilisé entre les cases d'étiq diff tandis que 'ordreB' est utilisé entre les cases de même étiq. (mais SIMULTANÉMENT).

```
> compactage_dir := proc(tt, ordreA, ordreB, pas, compact)
  local d, c, i, n, est_positif, comp, dd, t;
  est_positif := proc(A)
    local i, rep;
    rep := true; for i to nops(A) do rep := rep and type(A[i], positive) end do; rep
  end proc;
  t := tt;
  d := sort(diagramme(t), ordreA);
  n := nops(d);
  comp := true;
  for i to n do
    c := d[i];
    while possible(c, t, pas, ordreA, ordreB) and est_positif(c + pas) do
      comp := false;
      t := enleve(c, t);
      t := ajoute(f(c), c + pas, t);
      d := sort(diagramme(t), ordreA);
      c := c + pas
    end do
  end do;
  compact := comp;
  RETURN(t)
end proc
```

Retourne le compactat directionnel du diagramme 'd' dans la direction de 'pas', respectant les ordres pour étiquettes différentes/identiques.

```
> compactat_dir := proc(t, ordreA, ordreB, pas)
```

```

local i, k, compact, tt;
tt := compactage_dir(t, ordreA, ordreB, pas, 'k');
while k = false do tt := compactage_dir(tt, ordreA, ordreB, pas, 'k') end do;
if k = true then tt else ERROR( "pas compacte correctement") end if
end proc

```

Calcule le tableau correspondant au compact associé au couple (d,T) où 'd' est un diagramme et 'T' un tableau standard.

```

> compactat_univ := proc(d, T)
local t;
t := etiq_semi(d, T);
t := compactat_dir(t, Ol, Ol, gauche);
t := compactat_dir(t, Oe, Oep, bas);
RETURN(t)
end proc

```

Un exemple

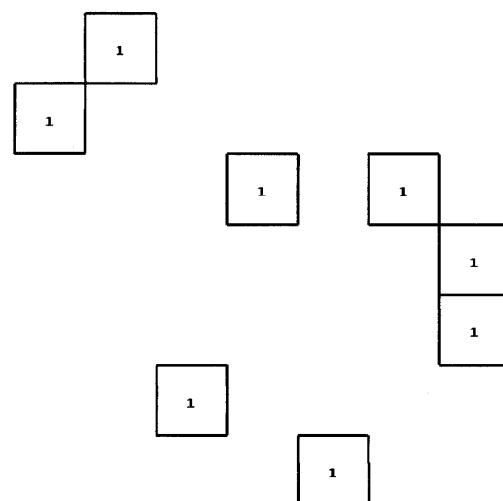
```

[ > d := [[1, 6], [2, 7], [3, 2], [4, 5], [4, 5], [4, 5], [5, 1], [6, 5], [7, 3], [7, 4], [7, 4]]
[ > T := op(standards(cases([nops(d)])))
[ > affiche_tableau(T)

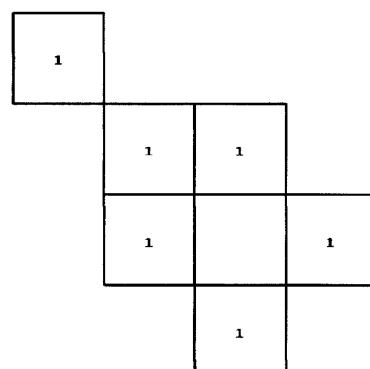
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----

```
> affiche_tableau( etiq_semi(d, T))
```



```
> t := compactat_univ(d, T); print(affiche_tableau(t))
```



Annexe B

AJOUTS SUR LES FONCTIONS BISYMÉTRIQUES

Cette annexe contient d'une part des considérations sur les relations d'orthogonalité entre les différentes bases de fonctions bisymétriques et d'autre part, les liens explicites entre les définitions et résultats de M. Rosas et ceux contenus dans l'article [5] de P. Doubilet.

B.1 Relations entre la série génératrice des fonctions complètes homogènes et les autres bases

Les relations entre la série génératrice des fonctions complètes homogènes et les autres bases ont été investiguées dans le but d'obtenir une bonne définition des fonctions de Schur à deux jeux de variables. Malheureusement, aucun des candidats envisagés ne donne pleine satisfaction.

Dans le cas des fonctions symétriques à un jeu de variables nous avons la relation (voir formule (2.14) dans [21]):

$$H(t) = \sum_{\lambda} \frac{p_{\lambda}}{z_{\lambda}} t^{|\lambda|}, \quad (\text{B.1.1})$$

où $z_{\lambda} = \prod_r r^{m_r} m_r!$ pour $\lambda = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots$ en notation multiplicative. Cela s'obtient de

$$P(t) = \frac{d}{dt} \log H(t)$$

où

$$P(t) = \sum_{r \geq 0} p_{r+1} t^r. \quad (\text{B.1.2})$$

Lemme B.1.1. *Considérons la série génératrice suivante:*

$$P(s,t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{q \geq 1 \\ r \geq 1}} B_{(q-1)} p_{(q)} s^{q-1} r^{t-1}.$$

Nous avons

$$P(s,t) = \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \log H(s,t). \quad (\text{B.1.3})$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \log H(s,t) &= \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \log \left(\prod_j \frac{1}{1 - x_j s - y_j t} \right), \\ &= \sum_j \frac{x_j y_j}{1 - x_j s - y_j t}, \\ &= \sum_j x_j y_j \sum_{n \geq 0} (x_j s + y_j t)^n, \\ &= \sum_j \sum_{q \geq 1} \sum_{r \geq 1} B_{(q-1)} x_j^q y_j^r s^{q-1} t^{r-1}, \\ &= \sum_{q \geq 1} \sum_{r \geq 1} B_{(q-1)} p_{(q)} s^{q-1} t^{r-1}. \end{aligned}$$

■

Remarque B.1.2. Le série génératrice usuelle, c.-à-d. $P(s)$ selon formule (B.1.2), s'obtient de $P(s,t)$ avec les spécialisations $t = 0$ et $y_1 = y_2 = \dots = 1$.

Proposition B.1.3. *La formule (B.1.1)admet la généralisation suivante:*

$$H(s,t) = \sum_{\lambda} \frac{p_{\lambda}}{Z_{\lambda}} s^{|\lambda|_x} t^{|\lambda|_y} \quad (\text{B.1.4})$$

où, pour $\lambda = \prod_{(q)} \binom{q}{r}^{\mathfrak{m}_{(q)}}$ en notation multiplicative,

$$Z_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{(q)} C(q, r)^{\mathfrak{m}_{(q)}} \mathfrak{m}_{(q)}! \quad (\text{B.1.5})$$

$$C(q, r) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{q!r!}{(q+r-2)!} & \text{si } q \geq 1 \text{ et } r \geq 1, \\ q & \text{si } q \geq 1 \text{ et } r = 0, \\ r & \text{si } q = 0 \text{ et } r \geq 1, \\ 0 & \text{si } q = r = 0. \end{cases} \quad (\text{B.1.6})$$

Preuve: en intégrant par rapport à s et ensuite par rapport à t chaque membre de l'équation (B.1.3) nous obtenons:

$$\log H(s, t) = \left\{ \sum_{\substack{q \geq 1 \\ r \geq 1}} B_{(q-1)} p_{(q)} \frac{s^q}{q} \frac{t^r}{r} \right\} + K_0(t) + K_1(s) + K_2,$$

où K_0 et K_1 sont des séries sans terme constant et K_2 est une constante. Nécessairement, $K_2 = 0$, et par exponentiation,

$$H(s, t) = \exp \left\{ \sum_{\substack{q \geq 1 \\ r \geq 1}} B_{(q-1)} p_{(q)} \frac{s^q}{q} \frac{t^r}{r} \right\} \exp\{K_0(t)\} \exp\{K_1(s)\}.$$

Maintenant, les substitutions $t = 0$ et $s = 0$ nous donnent respectivement

$$\begin{aligned} H(s) &= \exp\{K_1(s)\} \text{ en les variables } x_i, \\ H(t) &= \exp\{K_0(t)\} \text{ en les variables } y_i. \end{aligned}$$

Ce sont deux occurrences de la situation classique que l'on sait résoudre formule (B.1.1):

$$\begin{aligned} \exp\{K_1(s)\} &= \sum_{\lambda} \frac{p_{\lambda}(x_1, x_2, \dots)}{z_{\lambda}} s^{|\lambda|}, \\ &= \sum_{\substack{(\lambda) \\ (\lambda)}} \frac{p_{(\lambda)}}{Z_{(\lambda)}} s^{|\lambda|} {}_x t^{|\lambda|} {}_y, \\ \exp\{K_0(t)\} &= \sum_{\lambda} \frac{p_{\lambda}(y_1, y_2, \dots)}{z_{\lambda}} t^{|\lambda|}, \\ &= \sum_{\substack{(\lambda) \\ (\lambda)}} \frac{p_{(\lambda)}}{Z_{(\lambda)}} s^{|\lambda|} {}_x t^{|\lambda|} {}_y, \end{aligned}$$

où, pour un partage usuel $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots$, nous faisons l'abus de notation $\binom{\lambda}{0} = \binom{\lambda_1 \lambda_2 \dots}{0}$ et $\binom{0}{\lambda} = \binom{0 0 \dots}{\lambda_1 \lambda_2 \dots}$. Par définition, $p_{\binom{\lambda}{0}} = p_\lambda(x_1, x_2, \dots)$ et $p_{\binom{0}{\mu}} = p_\mu(y_1, y_2, \dots)$. Maintenant,

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \sum_{\substack{q \geq 1 \\ r \geq 1}} B_{\binom{q-1}{r-1}} p_{\binom{q}{r}} \frac{s^q t^r}{q r} \right\} &= \prod_{\substack{q \geq 1 \\ r \geq 1}} \sum_{m_{\binom{q}{r}}=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{B_{\binom{q-1}{r-1}}}{qr} p_{\binom{q}{r}} s^q t^r \right]^{m_{\binom{q}{r}}}}{m_{\binom{q}{r}}!}, \\ &= \sum_{\substack{\lambda = \prod_{\substack{q \geq 1 \\ r \geq 1}} \binom{q}{r}^{m_{\binom{q}{r}}} \\ m_{\binom{q}{r}}}} \frac{p_\lambda s^{|\lambda|_x} t^{|\lambda|_y}}{Z_\lambda}, \end{aligned}$$

où il y a un nombre fini de $m_{\binom{q}{r}}$ non nuls dans la notation multiplicative de λ . Posons

$$\begin{aligned} \wp &= \left\{ \lambda = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{pmatrix} \right\}, \\ \wp_{(\geq 1)} &= \left\{ \lambda = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{pmatrix} \middle| \forall i, a_i \geq 1 \text{ et } b_i \geq 1 \right\}, \\ \wp_{(0)} &= \left\{ \lambda = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \middle| \forall i, a_i \geq 1 \right\}, \\ \wp_{(\geq 1)} &= \left\{ \lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{pmatrix} \middle| \forall i, b_i \geq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Nous avons établi

$$H(s, t) = \left[\sum_{\lambda' \in \wp_{(\geq 1)}} \frac{p_{\lambda'} s^{|\lambda'|_x} t^{|\lambda'|_y}}{Z_{\lambda'}} \right] \left[\sum_{\lambda'' \in \wp_{(0)}} \frac{p_{\lambda''} s^{|\lambda''|_x} t^{|\lambda''|_y}}{Z_{\lambda''}} \right] \left[\sum_{\lambda''' \in \wp_{(\geq 1)}} \frac{p_{\lambda'''} s^{|\lambda'''|_x} t^{|\lambda'''|_y}}{Z_{\lambda'''}} \right]$$

Le lemme suivant nous permet de conclure.

■

Lemme B.1.4. Soient \wp , $\wp_{(\geq 1)}$, $\wp_{(0)}$ et $\wp_{(\geq 1)}$ comme ci-haut. Alors, la bijection naturelle $\varphi : \wp \xrightarrow{\text{bij}} \wp_{(\geq 1)} \times \wp_{(0)} \times \wp_{(\geq 1)}$ qui consiste à trier les parts selon les critères servant

d'indices aux ensembles possède les propriétés suivantes. Pour $\varphi(\lambda) = (\lambda', \lambda'', \lambda''')$,

$$\begin{aligned} Z_\lambda &= Z_{\lambda'} Z_{\lambda''} Z_{\lambda'''}, \\ p_\lambda &= p_{\lambda'} p_{\lambda''} p_{\lambda'''}, \\ |\lambda|_x &= |\lambda'|_x + |\lambda''|_x + |\lambda'''|_x \text{ et} \\ |\lambda|_y &= |\lambda'|_y + |\lambda''|_y + |\lambda'''|_y. \end{aligned}$$

Preuve: Premièrement, la définition par cas de $C(q,r)$ à l'intérieur de Z_λ sépare les cas selon les mêmes critères que les indices des φ . Deuxièmement, les p_λ sont multiplicatives. Les deux dernières égalités sont triviales.

■

B.1.1 Produit scalaire et relations d'orthogonalité

En théorie des λ -anneaux, on identifie souvent un alphabet $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ avec le terme $x_1 + x_2 + x_3 + \dots$ car cela est compatible avec la λ -substitution. Aussi, le produit de deux alphabets, $XY = \{x_i y_j | i \geq 1, j \geq 1\}$, reste identifiable avec $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots)(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)$. Dans le cas à deux jeux de variables $(X; Y)$, on utilise une bijection $\chi : X \xrightarrow{\text{bij}} Y$ pour définir l'action diagonale. (Cela est fait de manière implicite puisque les indices pris dans \mathbb{N} sont naturellement ordonnés.) Soient S, T, U et V des alphabets (finis ou dénombrables) tels que $\varphi : S \xrightarrow{\text{bij}} T$ et $\psi : U \xrightarrow{\text{bij}} V$ alors $(S; T)(U; V) \stackrel{\text{def}}{=} (S \times T; U \times V)$ (noté $(ST; UV)$ pour ne pas alourdir la notation) avec $\varphi \times \psi : S \times T \xrightarrow{\text{bij}} U \times V$.

Exemple B.1.5. Avec les notations précédentes:

$$\begin{aligned}
 p_{(q)}[ST;UV] &= \sum_{i,j} (s_i t_j)^q (u_i v_j)^r, \\
 &= \sum_{i,j} (s_i^q u_i^r) (t_j^q v_j^r), \\
 &= \left(\sum_i (s_i^q u_i^r) \right) \left(\sum_j (t_j^q v_j^r) \right), \\
 &= p_{(q)}[S;U] p_{(q)}[T;V].
 \end{aligned}$$

Puisque les sommes de puissances sont multiplicatives, nous obtenons pour un partage λ

$$p_\lambda[ST;UV] = p_\lambda[S;T] p_\lambda[U;V].$$

Dans le cas à un jeu de variables, nous avons le développement du noyau de Cauchy sous plusieurs formes:

$$\prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda} \frac{p_{\lambda}[X] p_{\lambda}[Y]}{z_{\lambda}}, \quad (\text{B.1.7})$$

$$= \sum_{\lambda} h_{\lambda}[X] m_{\lambda}[Y], \quad (\text{B.1.8})$$

$$= \sum_{\lambda} s_{\lambda}[X] s_{\lambda}[Y]. \quad (\text{B.1.9})$$

Nous verrons que les deux premières formes se généralisent au cas à deux jeux de variables.

Proposition B.1.6. Les équations (B.1.7) et (B.1.8) admettent les généralisations suivantes:

$$\prod_{i,j} \frac{1}{1 - s_i t_j - u_i v_j} = \sum_{\lambda} \frac{p_{\lambda}[S;U] p_{\lambda}[T;V]}{Z_{\lambda}}, \quad (\text{B.1.10})$$

$$= \sum_{\lambda} h_{\lambda}[S;U] m_{\lambda}[T;V]. \quad (\text{B.1.11})$$

Preuve: in extenso la preuve donnée dans [21]. Soit

$$\Omega[X,Y;s,t] \stackrel{\text{def}}{=} H(s,t) = \prod_i \frac{1}{1 - x_i s - y_i t}.$$

L'égalité (B.1.10) concernant les sommes de puissances:

$$\begin{aligned}
 \prod_{i,j} \frac{1}{1 - s_i t_j - u_i v_j} &= \Omega[ST,UV;1,1], \\
 &= \sum_{\lambda} \frac{p_{\lambda}[ST;UV]}{Z_{\lambda}}, \text{ par la proposition B.1.3,} \\
 &= \sum_{\lambda} \frac{p_{\lambda}[S;U]p_{\lambda}[T;V]}{Z_{\lambda}}, \text{ par l'exemple B.1.5.}
 \end{aligned}$$

L'égalité (B.1.11) concernant monômiales et complètes homogènes:

$$\begin{aligned}
 \prod_{i,j} \frac{1}{1 - s_i t_j - u_i v_j} &= \prod_j \Omega[S,U;t_j,v_j], \\
 &= \prod_j \sum_{\binom{q}{r}} h_{\binom{q}{r}}[S;U]t_j^q v_j^r, \\
 &= \sum_{\alpha=\left[\binom{a_1}{b_1}, \binom{a_2}{b_2}, \binom{a_3}{b_3}, \dots\right]} h_{\alpha}[S;U] \prod_j t_j^{a_j} v_j^{b_j}, \\
 &\quad \text{somme sur les séquences de parts, les parts} \\
 &\quad \text{non nulles étant en nombre fini,} \\
 &= \sum_{\lambda} h_{\lambda}[S;U]m_{\lambda}[T;V].
 \end{aligned}$$

■

B.1.2 Un autre candidat pour Z_{λ} via l'isométrie ϕ_u^*

Les calculs par ordinateur avec les Z_{λ} donnés par la formule (B.1.5) ne sont pas concluants. Un autre candidat pour Z_{λ} peut être obtenu via l'isométrie $\phi_u^* : \mathfrak{M}_u \longrightarrow \mathfrak{M}_{1^n}$ où $n = \text{SM}(u) = u_1 + u_2$. D'abord, introduisons quelques notations. Pour $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots$ nous avons $\lambda! \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1! \lambda_2! \lambda_3! \dots$ où pour une part $\binom{a}{b}$, $\binom{a}{b}! \stackrel{\text{def}}{=} a!b!$. Pour $\mu = \prod_{\binom{q}{r}} \binom{q}{r}^{m_{\binom{q}{r}}}$ en notation multiplicative, $\mu!^{\text{mul}} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\binom{q}{r}} m_{\binom{q}{r}}!$. Finalement, $\binom{u}{\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u!}{\lambda! \lambda!^{\text{mul}}}$. D'après la section B.2, nous avons pour $\lambda, \mu \vdash u$

$$\langle \phi_u^*(H_{\lambda}), \phi_u^*(M_{\mu}) \rangle_{1^n} = \langle H_{\lambda}, M_{\mu} \rangle_u. \quad (\text{B.1.12})$$

Or, d'une part,

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_u^*(H_\lambda), \phi_u^*(M_\mu) \rangle_{1^n} &= \left\langle \tilde{H}_\lambda, \tilde{M}_\mu \right\rangle_{1^n}, \\
 &= \left\langle \sum_{\text{type}_u(\pi)=\lambda} \tilde{h}_\pi, \sum_{\text{type}_u(\sigma)=\mu} \tilde{m}_\sigma \right\rangle_{1^n}, \\
 &= \delta_{\lambda\mu} \sum_{\text{type}_u(\pi)=\lambda} n!, \\
 &= \delta_{\lambda\mu} n! \binom{u}{\lambda},
 \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}
 \langle H_\lambda, M_\mu \rangle_u &= \left\langle \binom{u}{\lambda} \lambda! h_\lambda, \binom{u}{\mu} \mu!^{\text{mul}} m_\mu \right\rangle_u, \\
 &= \binom{u}{\lambda} \binom{u}{\mu} \lambda! \mu!^{\text{mul}} \langle h_\lambda, m_\mu \rangle_u.
 \end{aligned}$$

L'égalité B.1.12 permet la définition suivante.

Définition B.1.7. Soit un entier positif n et u une part telle que $\text{SM}(u) = n$. Nous définissons le produit scalaire sur \mathfrak{M}_u par

$$\langle h_\lambda, m_\mu \rangle_u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{u!} \delta_{\lambda\mu}.$$

Ce produit scalaire concorde avec le produit scalaire usuel sur Λ_n lorsque $u = \binom{n}{0}$.

Maintenant, évaluons $\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_u$. D'une part, nous avons

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_u^*(P_\lambda), \phi_u^*(P_\mu) \rangle_{1^n} &= \langle P_\lambda, P_\mu \rangle_u, \\
 &= \left\langle \binom{u}{\lambda} p_\lambda, \binom{u}{\mu} p_\mu \right\rangle_u, \\
 &= \binom{u}{\lambda} \binom{u}{\mu} \langle p_\lambda, p_\mu \rangle_u.
 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\langle \phi_u^*(P_\lambda), \phi_u^*(P_\mu) \rangle_{1^n} &= \left\langle \tilde{P}_\lambda, \tilde{P}_\mu \right\rangle_{1^n}, \\
&= \left\langle \sum_{\text{type}_u(\pi)=\lambda} \tilde{p}_\pi, \sum_{\text{type}_u(\sigma)=\mu} \tilde{p}_\sigma \right\rangle_{1^n}, \\
&= \delta_{\lambda\mu} \sum_{\text{type}_u(\pi)=\lambda} \frac{n!}{|\mu(0,\pi)|}, \\
&= \delta_{\lambda\mu} \binom{u}{\lambda} \frac{n!}{|\mu(0,\text{SM}(\lambda))|},
\end{aligned}$$

La troisième égalité provient du fait que $\langle \tilde{p}_\pi, \tilde{p}_\sigma \rangle_{1^n} = \delta_{\pi\sigma} \frac{n!}{|\mu(0,\pi)|}$ et la deuxième, du fait que la fonction de Möbius ne dépend que de la forme de la partition π . Or, nous savons que pour $\eta \vdash n$ où $\eta = 1^{r_1} 2^{r_2} 3^{r_3} \dots$ partage usuel de l'entier n en notation multiplicative, $|\mu(0,\eta)| = [(1-1)!]^{r_1} [(2-1)!]^{r_2} [(3-1)!]^{r_3} \dots$. En combinant ces éléments, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_u &= \delta_{\lambda\mu} \frac{n!}{u!} Z_\lambda, \\
\text{où } Z_\lambda &= \prod_{\binom{q}{r}} \mathfrak{m}_{\binom{q}{r}}! \left[\frac{q!r!}{(q+r-1)!} \right]^{\mathfrak{m}_{\binom{q}{r}}},
\end{aligned}$$

pour $\lambda = \prod_{\binom{q}{r}} \binom{q}{r}^{\mathfrak{m}_{\binom{q}{r}}}$ en notation multiplicative.

B.1.3 La matrice de transition $M(p,m)$ à un et deux jeux de variables

Dans le cas à un jeu de variables, considérons $\lambda, \mu \vdash n$ de longueur l et m respectivement. Nous avons l'identité

$$p_\lambda = \sum_{\mu \geq_R \lambda} L_{\lambda\mu} m_\mu, \tag{B.1.13}$$

où $L_{\lambda\mu}$ est le nombre de fonctions $f : [l] \longrightarrow [m]$ telles que

$$\mu = \left(\sum_{f(j)=1} \lambda_j, \sum_{f(j)=2} \lambda_j, \sum_{f(j)=3} \lambda_j, \dots \right).$$

Une façon de le voir est la suivante. Pour $\lambda \vdash n$, considérons π_* la partition canonique de forme λ (utiliser l'ordre sur $[n]$). D'après la section B.2 nous avons

$$p_{\pi_*} = \sum_{\sigma \geq \pi_*} m_\sigma.$$

en appliquant ϕ_n sur chaque membre:

$$\begin{aligned} p_\lambda &= \sum_{\sigma \geq \pi_*} [\text{type}_n \sigma]!^{\text{mul}} m_{\text{type}_n \sigma}, \\ &= \sum_{\mu \geq_R \lambda} c_{\lambda \mu} \mu!^{\text{mul}} m_\mu, \end{aligned}$$

où $c_{\lambda \mu}$ est le nombre de partitions σ telles que $\text{type}_n \sigma = \mu$ et que $\sigma \geq_R \pi_*$ (c.-à-d. plus grossière que la partition canonique). Il est alors aisément d'établir combinatoirement l'égalité des coefficients $L_{\lambda \mu} = c_{\lambda \mu} \mu!^{\text{mul}}$.

Pour une part $u = \binom{u_1}{u_2}$, tout ce précède peut être repris en remplaçant n par u pour obtenir le résultat suivant.

Proposition B.1.8. *Soit $\lambda \vdash u$. Nous avons l'identité suivante où la somme fait intervenir l'ordre de raffinement sur \wp_u .*

$$p_\lambda = \sum_{\mu \geq_R \lambda} L_{\lambda \mu} \mu$$

où, pour λ et μ de longueur respective l et m , $L_{\lambda \mu}$ est le nombre de fonctions $f : [l] \rightarrow [m]$ telles que

$$\mu = \left(\sum_{f(j)=1} \lambda_j, \sum_{f(j)=2} \lambda_j, \sum_{f(j)=3} \lambda_j, \dots \right),$$

les sommes étant des sommes vectorielles ici.

Nous pouvons alors obtenir la matrice de transition $M(p,m)$ par ordinateur, et en inversant, la matrice $M(m,p)$.

Exemple B.1.9. *Un simple calcul nous montre que*

$$m_{\binom{1 1 0}{0 0 1}} = p_{(1)} - \frac{1}{2} p_{(0)} p_{(1)} - p_{(1)} p_{(0)} + \frac{1}{2} p_{(0)} p_{(1)} p_{(0)}.$$

On peut vérifier l'identité en fixant arbitrairement à trois ou plus le nombre de variables dans chaque jeux et en utilisant les définitions.

B.1.4 Les nombres de Kostka pour le cas à deux jeux de variables

Le but ici est d'obtenir explicitement, avec l'aide de l'ordinateur , les fonctions de Schur. La définition usuelle comme rapport de déterminants n'est pas généralisable. Cependant, nous savons que les Schur usuels peuvent s'obtenir en orthogonalisant (ou orthonormalisant) par rapport au produit scalaire $\langle m_\lambda, h_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu}$ la liste de tous les monomiales m_λ où les $\lambda \vdash n$ sont ordonnés de façon croissante par rapport à $>_L$. Nous savons comment calculer les matrices de transition $M(p,m)$ et $M(m,p)$. Nous avons des candidats pour le produit scalaire entre les sommes de puissances. Malheureusement, les résultats ne sont pas concluant.

B.2 Fonctions diagonalement symétriques à plusieurs jeux de variables

Dans un article(voir [5]) datant de 1972, Peter Doubilet a défini cinq ensembles de fonctions ($\mathcal{M}_\pi, \mathcal{P}_\pi, \mathcal{E}_\pi, \mathcal{H}_\pi$ et \mathcal{F}_π) qui, sous une pondération associant monome en l'alphabet X à chaque fonction, ont les fonctions symétriques monomiales, sommes de puissances, élémentaires, complètes homogènes et *oubliées* pour séries génératrices respectives (à un multiple entier près). L'intérêt vient du fait que les matrices de transition entre ces bases de l'anneau des fonctions symétriques de degré n peuvent s'interpréter élégamment en termes de fonction de Möbius et d'inversion de Möbius sur le treillis des partitions de $[n]$. Les relations concernant le produit scalaire de Hall et le produit de Kronecker ont également ce type d'interprétation. Dans sa thèse de doctorat, [23], Mercedes Rosas a généralisé les définitions des ensembles de fonctions de Doubilet (ou plutôt leur pondération) de sorte qu'ils ont pour séries génératrices les fonctions symétriques respectives

à plusieurs jeux de variables (définitions plus loin). Le choix de la généralisation fait en sorte que l'espace $\tilde{\varphi}$ de Doubilet[†] est identifiable avec l'espace des fonctions diagonalement symétriques unitaires \mathfrak{M}_{1^n} (définition plus loin).

Nous prenons la peine de réécrire la partie de [23] qui concerne les définitions de Doubilet engendrant les fonctions symétriques avec des notations complètement différentes. En fait, ce document se veut un guide d'adaptation des résultats de Doubilet à un contexte plus général. Il est donc conseillé de le lire avec une copie de [5] dans l'autre main.

B.2.1 Les partages vectoriels et les partitions colorées

Voyons d'abord une généralisation du partage de l'entier n .

Définition B.2.1. Soit $u = (u_1, u_2, \dots, u_k) \in \mathbb{N}^k$ un vecteur dont la somme des composantes est n . Un partage vectoriel λ de u est un multi-ensemble de vecteurs (parts) $\lambda_i \in \mathbb{N}^k$ dont la somme (composantes à composantes) donne u .

Nous écrirons $\lambda_i = (a_i, b_i, c_i, \dots)$ en rangée pour des raisons typographiques mais il serait toutefois plus naturel de penser λ comme étant une matrice à k rangées avec ses parts en colonnes. Notons aussi, $m(a, b, c, \dots)$ la multiplicité de la part (a, b, c, \dots) dans λ . Aussi, posons[‡]

[†] Doubilet utilise un symbole qui ressemble plus à un S scripte qu'à φ .

[‡] La notation $\lambda!^{mul}$ est préférée à la notation $|\lambda|$ des références [5] et [23] puisque cette dernière ne généralise pas la même notation pour les partages usuels de l'entier n adoptée par Macdonald [21], i.e lorsque $u = (n, 0, \dots, 0)$.

$$\begin{aligned}
u! &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_i u_i!, \\
\lambda! &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_i \lambda_i!, \\
\lambda_i! &\stackrel{\text{def}}{=} a_i! b_i! c_i! \dots, \\
\lambda!^{\text{mul}} &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{(a,b,c,\dots)} m(a,b,c,\dots)!
\end{aligned}$$

Il y a deux cas particuliers. Lorsque $u = (n,0,\dots,0)$, noté $u = (n)$, les partages de u sont identifiables avec les **partages usuels** de l'entier n . Lorsque $u = (1,1,\dots,1)$, noté $u = 1^n$, les partages vectoriels de u sont identifiables avec les **partitions** (d'un ensemble en classes) de $[n]$. Par exemple, considérons la partition $\pi = 12|3|457|69|8$ de $[9]$. Les barres verticales séparent les blocs B_1 à B_5 dans l'ordre. Cette partition correspond au partage vectoriel λ ayant pour parts

$$\begin{array}{cccccccccc}
& 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
\lambda_1 & = & (1, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0) & \leftrightarrow B_1 \\
\lambda_2 & = & (0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0) & \leftrightarrow B_2 \\
\lambda_3 & = & (0, & 0, & 0, & 1, & 1, & 0, & 1, & 0) & \leftrightarrow B_3 \\
\lambda_4 & = & (0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0) & \leftrightarrow B_4 \\
\lambda_5 & = & (0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1) & \leftrightarrow B_5 \\
\hline \text{total: } u & = & (1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1)
\end{array}$$

Maintenant, voyons comment un vecteur $u = (u_1, u_2, \dots) \in \mathbb{N}^k$, dont la somme marginale est n , peut induire une coloration sur une partition π de $[n]$. Considérons la partition $\{C_1, C_2, C_3, \dots\}$ de $[n]$ (tolérant des parties possiblement vides):

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{1, \dots, u_1\} \\
C_2 &= \{u_1 + 1, \dots, u_1 + u_2\} \\
C_3 &= \{u_1 + u_2 + 1, \dots, u_1 + u_2 + u_3\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Les éléments de C_1 seront de la 1ère couleur, ceux de C_2 , de la deuxième couleur, etc. (Une partie vide correspond à un décalage dans la numérotation des couleurs).

Définition B.2.2. Posons,

$$\rho_u : [n] \longrightarrow [n] \times \mathbb{P} : i \longmapsto (i, j).$$

où l'élément i est de la couleur j selon la coloration induite de u . Posons $[n]_u = \rho([n])$.

Maintenant,

$$\pi_u \stackrel{\text{def}}{=} \{\rho_u(C_1), \rho_u(C_2), \dots\},$$

c.-à-d. pour chaque bloc B de π , on remplace chaque $i \in B$ par le couple ordonné (i, j) .

Définition B.2.3. Posons $\Pi_{[n]}$ le treillis des partitions de $[n]$ avec la relation de raffinement, c.-à-d. $\pi \leq \sigma$ si et seulement si chacune des classes de π est un sous-ensemble d'une classe de σ . Notons $\hat{0}$ la partition la plus fine et $\hat{1}$, la plus grossière. Nous noterons $[\sigma, \pi]$ l'intervalle entre σ et π . Posons $\Pi_{[n]_u}$ le treillis des partitions de $[n]$ colorées par u avec la relation de raffinement induite de celle de $\Pi_{[n]}$.

Rappelons certaines propriétés de la fonction de Möbius sur $\Pi_{[n]}$. D'abord, $\mu(0,1) = (-1)^{(n-1)}(n-1)!$ Si $\pi = \{B_1, B_2, \dots, B_l\}$ et que pour obtenir σ , chaque classe B_i est partitionnée en λ_i classes, alors

$$[\sigma, \pi] \simeq \Pi_{\lambda_1} \times \Pi_{\lambda_2} \times \dots \times \Pi_{\lambda_l}.$$

Définition B.2.4. Soient π , σ et λ comme ci-haut. Le type d'un intervalle $[\sigma, \pi]$ est le partage λ formé les parts λ_i (en réarrangeant en ordre croissant si nécessaire), noté

$$\text{type}(\sigma, \pi) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda.$$

Aussi, $\text{type} \pi \stackrel{\text{def}}{=} \text{type}(0, \pi)$. Le signe du même intervalle est défini par

$$\text{sign}(\sigma, \pi) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_\lambda = (-1)^{|\lambda| - l(\lambda)}.$$

Ce signe est justement le signe qui intervient dans la fonction de Möbius sur un intervalle:

$$\mu(\sigma, \pi) = \text{sign}(\sigma, \pi) \prod_{i=1}^l (\lambda_i - 1)!$$

Définition B.2.5. Soit u un vecteur fixé et $\pi \in \Pi_{[n]}$. Le type de la partition colorée π_u est le partage vectoriel λ de u obtenu comme suit. La j ième composante de λ_i est le nombre d'élément de la j ième couleur dans la i ième classe de π . Nous noterons cela

$$\lambda = \text{type}_u \pi.$$

Lemme B.2.6. Soit λ partage vectoriel de u . Le nombre de $\pi \in \Pi_{[n]}$ tels que $\text{type}_u \pi = \lambda$ vaut

$$\binom{u}{\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u!}{\lambda! \lambda^{\text{mul}}}.$$

Exemple B.2.7. Considérons encore la partition $\pi = 12|3|457|69|8$ de [9] et le vecteur $u = (3,2,4,0,\dots,0)$. La partition π_u est donnée par

$$\pi_u = (1,1)(2,1)|(3,1)|(4,2)(5,2)(7,3)|(6,3)(9,3)|(8,3)$$

et son type est donné par le partage vectoriel λ ayant pour parts

$$\begin{array}{rccccc} & C_1 & C_2 & C_3 & & \\ \lambda_1 & = & (2, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0) & \leftrightarrow & B_1 \\ \lambda_2 & = & (1, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0) & \leftrightarrow & B_2 \\ \lambda_3 & = & (0, & 2, & 1, & 0, & \dots, & 0) & \leftrightarrow & B_3 \\ \lambda_4 & = & (0, & 0, & 2, & 0, & \dots, & 1) & \leftrightarrow & B_4 \\ \lambda_5 & = & (0, & 0, & 1, & 0, & \dots, & 0) & \leftrightarrow & B_5 \\ \hline \text{total: } u & = & (3, & 2, & 4, & 0, & \dots, & 0) & & \end{array}$$

Remarque B.2.8.

- Pour $u = 1^n$, en prenant le type des partitions nous avons la bijection

$$\left(\Pi_{[n]} \xleftrightarrow{\text{bij}} \right) \left(\Pi_{[n]_u} \xleftrightarrow{\text{bij}} \left\{ \begin{array}{c} \text{partages vectoriels} \\ \text{de } u = 1^n \end{array} \right\} \right)$$

Mais si u admet un $u_i > 1$ alors le passage au type est une application surjective mais non injective:

$$\Pi_{[n]_u} \twoheadrightarrow \{\text{partages vectoriels de } u\}.$$

2. Si $\pi \leq \sigma$ dans Π_n , c.-à-d. π est un raffinement de σ , alors $\text{type}_u \pi \leq \text{type}_u \sigma$ au sens suivant. Soient λ et η deux partages vectoriels de u . On a $\lambda \leq \eta$ si et seulement si pour tout i il existe $\lambda^{(i)}$ partage vectoriel de η_i et que, globalement, $\cup_i \lambda^{(i)} = \lambda$ (réunion ensembliste des parts).

B.2.2 Les fonctions symétriques en plusieurs jeux de variables

Définition B.2.9. Une série formelle $f \in \mathbb{Q}[[X, Y, \dots, Z]]$ est dite fonction symétrique en k jeux de variables si elle est invariante sous l'action diagonale de \mathbb{S}_∞ (action indépendante sur chacun des jeux de variables par permutations des indices) et si le multidegré est borné. Nous noterons \mathfrak{M} l'anneau des fonctions symétriques de MacMahon (sous-entendu en k jeux de variables). De plus \mathfrak{M} est un anneau gradué:

$$\mathfrak{M}_i = \bigcup_{\substack{u \in \mathbb{N}^k \\ \sum_m u_m = i}} \mathfrak{M}_u$$

où \mathfrak{M}_u est l'espace vectoriel des fonctions symétriques de degré multihomogène u .

Lorsque nous travaillons avec le vecteur $u \in \mathbb{N}^k$, nous supposerons que nous disposons que k jeux de variables infinis (alphabets) $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$, $Z = \{z_1, z_2, \dots\}, \dots$.

Considérons la séquence infinie de vecteurs dans \mathbb{N}^k dont un nombre fini sont non nuls:

$$\alpha = [(a_1, b_1, c_1, \dots), (a_2, b_2, c_2, \dots), (a_3, b_3, c_3, \dots), \dots].$$

Le monôme M^α est défini par

$$M^\alpha = x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \dots y_1^{b_1} y_2^{b_2} y_3^{b_3} \dots z_1^{c_1} z_2^{c_2} z_3^{c_3} \dots \dots$$

Définition B.2.10. Soit λ un partage vectoriel de u . La fonction symétrique monomiale m_λ est

$$m_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha} M^\alpha,$$

où la somme se fait sur toutes les séquences *distinctes* α obtenues par permutation des vecteurs de λ .

Dire que les fonctions suivantes sont des bases de \mathfrak{M}_u et en trouver la référence puisque glissé en passant dans [23]. Je crois qu'il suffit de voir que

$$\{m_\lambda\} \quad \lambda \text{ partage vect. de } u$$

est une base; les autres découlent des matrices de transition.

Définition B.2.11. Les sommes de puissances pour le partage vectoriel $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots$ où $\lambda_i = (a_i, b_i, c_i, \dots)$ est donné par

$$p_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots$$

où

$$p_{(a,b,c,\dots)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j x_j^a y_j^b z_j^c \dots = m_{(a,b,c,\dots)}.$$

Définition B.2.12. Soit $(a, b, c, \dots) \in \mathbb{N}^k$, $e_{(a,b,c,\dots)}$ est défini par la fonction génératrice

$$\sum_{(a,b,c,\dots) \in \mathbb{N}^k} e_{(a,b,c,\dots)} r^a s^b t^c \dots = \prod_i (1 + x_i r + y_i s + z_i t + \dots).$$

Ensuite, pour un partage vectoriel $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots$, la fonction symétrique élémentaire est

$$e_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots .$$

Définition B.2.13. Soit $(a, b, c, \dots) \in \mathbb{N}^k$, $h_{(a,b,c,\dots)}$ est défini par la fonction génératrice

$$\sum_{(a,b,c,\dots) \in \mathbb{N}^k} h_{(a,b,c,\dots)} r^a s^b t^c \dots = \prod_i (1 - x_i r - y_i s - z_i t - \dots)^{-1}.$$

Ensuite, pour un partage vectoriel $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots$, la fonction symétrique complète homogène est

$$h_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \dots .$$

On pourrait définir les *forgotten* avec l'involution ω suivant Doubilet et ou Macdonald ?

B.2.3 Morphismes et définitions en termes d'ensembles de dispositions

Définition B.2.14. Une disposition est une fonction $f : [n] \longrightarrow \mathbb{P}$ avec un même type de configuration sur chaque ensemble $f^{-1}(\{j\})$. Le type de configuration étant à spécifier et pouvant dépendre de paramètres extérieurs tels le vecteur u et une partition π .

Définition B.2.15. Soit $f : [n] \longrightarrow \mathbb{P}$. Posons $\ker f$ la partition de $[n]$ définie par la relation d'équivalence

$$i \sim j \Leftrightarrow f(i) = f(j).$$

Le \ker d'une disposition f est défini comme étant le \ker de la fonction sous-jacente.

Définition B.2.16 (Doubilet). Soit $\pi = \{B_1, B_2, \dots, B_l\}$ une partition de $[n]$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_\pi &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{dispositions } f : [n] \longrightarrow \mathbb{P} \text{ sans configuration} \\ \text{particulière telles que } \ker f = \pi. \end{array} \right\}, \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{fonctions } f : [n] \longrightarrow \mathbb{P} \text{ telles } f \text{ est constante} \\ \text{sur chacune des classes } B_i \text{ et diffère d'une} \\ \text{classe à l'autre.} \end{array} \right\}, \\
 \mathcal{P}_\pi &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{dispositions } f : [n] \longrightarrow \mathbb{P} \text{ sans configuration} \\ \text{particulière telles que } \ker f \geq \pi. \end{array} \right\}, \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{fonctions } f : [n] \longrightarrow \mathbb{P} \text{ telles } f \text{ est constante} \\ \text{sur chacune des classes } B_i. \end{array} \right\}, \\
 \mathcal{E}_\pi &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{dispositions } f : [n] \longrightarrow \mathbb{P} \text{ sans configuration} \\ \text{particulière telles que } (\ker f) \wedge \pi = \hat{0}. \end{array} \right\}, \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{fonctions } f : [n] \longrightarrow \mathbb{P} \text{ telles que la restriction} \\ \text{de } f \text{ sur chacune des classes } B_i \text{ est injective.} \end{array} \right\}, \\
 \mathcal{H}_\pi &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{dispositions } f : [n] \longrightarrow \mathbb{P} \text{ avec pour configu-} \\ \text{ration sur chacun des } f^{-1}(\{j\}) \text{ un ordre li-} \\ \text{néaire pour chacun des sous-ensembles consti-} \\ \text{tués des éléments d'une même couleur (selon} \\ \text{coloration } u). \end{array} \right\}, \\
 \mathcal{F}_\pi &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{dispositions } f : [n] \longrightarrow \mathbb{P} \text{ constantes sur cha-} \\ \text{cune des classes } B_i \text{ et ayant pour configuration} \\ \text{sur chacun des } f^{-1}(\{j\}) \text{ un ordre linéaire sur} \\ \text{l'ensemble des } B_i \subseteq f^{-1}(\{j\}). \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

Définition B.2.17. Soit $f : [n] \longrightarrow \mathbb{P}$. Posons

$$\begin{aligned}
 \text{id}^{\rho_u} &: [n]_u \longrightarrow \mathbb{P} \\
 \rho_u(i) &\longmapsto f(i).
 \end{aligned}$$

Voici l'importante pondération qui va nous permettre de récupérer les fonctions symétriques.

triques de MacMahon.

Définition B.2.18. Soit $f : [n]_u \longrightarrow \mathbb{P}$.

$$\gamma(f) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i \in [n]} \overline{\rho_u(i)}_{f(i)}$$

où, pour $\rho_u(i) = (i, j)$, $\overline{\rho_u(i)}$ désigne le j ième jeu de variables, par exemple

$$\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow X = \{x_1, x_2, \dots\}, \\ 2 &\leftrightarrow Y = \{y_1, y_2, \dots\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

(pour chacun des ensembles de la définition B.2.16.) Nous posons alors $\kappa_u \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \circ \text{id}^{\rho_u}$.

Comme dans les séries génératrices, pour F un ensemble de fonctions:

$$\kappa_u(F) = \sum_{f \in F} \kappa_u(f).$$

Nous posons

$$\begin{aligned} m_{\pi, u} &\stackrel{\text{def}}{=} \kappa_u(\mathcal{M}_\pi), \\ p_{\pi, u} &\stackrel{\text{def}}{=} \kappa_u(\mathcal{P}_\pi), \\ &\vdots \end{aligned}$$

B.2.4 Les théorèmes principaux

Théorème B.2.19. Pour u quelconque, nous avons les matrices de transition suivantes:

$$p_{\pi, u} = \sum_{\sigma \geq \pi} m_{\sigma, u} \tag{B.2.1}$$

$$e_{\pi, u} = \sum_{\sigma \wedge \pi = \hat{0}} m_{\sigma, u} \tag{B.2.2}$$

$$h_{\pi, u} = \sum_{\sigma} (\text{type}_u(\sigma, \pi))! m_{\sigma, u} \tag{B.2.3}$$

$$f_{\pi, u} = \sum_{\tau \geq \pi} (\text{type}_u(\tau, \pi))! m_{\tau, u} \tag{B.2.4}$$

Preuve: Les identités (B.2.1) et (B.2.2) sont obtenues en vertu des définitions de \mathcal{M}_π , \mathcal{P}_π et \mathcal{E}_π tandis que les identités (B.2.3) et (B.2.4) sont démontrées suivant une argumentation similaire à celle des théorèmes 6 et 8(ii) de [5].

■

On peut dériver toutes les matrices de transition entre les $m_{\pi,u}$, $p_{\pi,u}$, $e_{\pi,u}$, $h_{\pi,u}$ et $f_{\pi,u}$ en utilisant seulement les relations (B.2.1) à (B.2.4) et les techniques d'inversion de Möbius sur $\Pi_{[n]}$. Ce que fait Doubilet.

Théorème B.2.20. *Soient $\pi \in \Pi_{[n]}$ et $u \in \mathbb{N}^k$. Alors, nous avons les identités combinatoires suivantes (dans \mathfrak{M}_u):*

$$\begin{aligned} m_{\pi,u} &= (\text{type}_u \pi)^{\text{mul}} m_{\text{type}_u \pi}, \\ p_{\pi,u} &= p_{\text{type}_u \pi}, \\ e_{\pi,u} &= (\text{type}_u \pi)! e_{\text{type}_u \pi}, \\ h_{\pi,u} &= (\text{type}_u \pi)! h_{\text{type}_u \pi}, \\ f_{\pi,u} &= (\text{type}_u \pi)^{\text{mul}} f_{\text{type}_u \pi}. \end{aligned}$$

preuve: voir Rosas [23], pp.22-25.

■

Remarque B.2.21. Originalement, Doubilet a prouvé ce résultat seulement dans le contexte $u = (n)$. Mais tous les calculs peuvent être repris in extenso. Ce que fait Rosas.

B.2.5 Identification de \mathfrak{M}_{1^n} avec $\tilde{\varphi}$

L'espace \mathfrak{M}_{1^n} joue un rôle particulier. Premièrement, il y a la bijection mentionnée en première partie de la remarque B.2.8. Deuxièmement, il y a le fait que pour tout $\pi \in \Pi_{[n]}$,

$$(\text{type}_{1^n} \pi)! = (\text{type}_{1^n} \pi)^{\text{mul}} = 1.$$

Ceci nous permet d'identifier \mathfrak{M}_{1^n} avec l'espace $\tilde{\varphi}$ défini comme suit par Doubilet.

Définition B.2.22. *$\tilde{\varphi}$ est l'espace vectoriel, à coefficients dans \mathbb{Q} , librement engendré*

par les symboles \tilde{m}_π . On définit les autres éléments suivant les relations (B.2.1) à (B.2.4):

$$\tilde{p}_\pi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \geq \pi} \tilde{m}_\sigma \quad (\text{B.2.5})$$

$$\tilde{e}_\pi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \wedge \pi = \hat{0}} \tilde{m}_\sigma \quad (\text{B.2.6})$$

$$\tilde{h}_\pi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma} (\text{type}_u(\sigma, \pi))! \tilde{m}_\sigma \quad (\text{B.2.7})$$

$$\tilde{f}_\pi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\tau \geq \pi} (\text{type}_u(\tau, \pi))! \tilde{m}_\tau \quad (\text{B.2.8})$$

Définition B.2.23. Soient u fixé et λ un partage vectoriel de u . Posons, en utilisant le lemme B.2.6 et le théorème B.2.20, les éléments de \mathfrak{M}_u suivants :

$$M_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\text{type}_u \pi = \lambda} m_{\pi, u} = \binom{u}{\lambda} \lambda!^{\text{mul}} m_\lambda,$$

$$P_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\text{type}_u \pi = \lambda} p_{\pi, u} = \binom{u}{\lambda} p_\lambda,$$

$$E_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\text{type}_u \pi = \lambda} e_{\pi, u} = \binom{u}{\lambda} \lambda! e_\lambda,$$

$$H_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\text{type}_u \pi = \lambda} h_{\pi, u} = \binom{u}{\lambda} \lambda! h_\lambda,$$

$$F_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\text{type}_u \pi = \lambda} f_{\pi, u} = \binom{u}{\lambda} \lambda!^{\text{mul}} f_\lambda.$$

Posons, cette fois-ci dans \mathfrak{M}_{1^n} :

$$\tilde{M}_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\text{type}_u \pi = \lambda} \tilde{m}_\lambda.$$

$$\tilde{P}_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\text{type}_u \pi = \lambda} \tilde{p}_\lambda.$$

⋮ similairement pour \tilde{E}_λ , \tilde{H}_λ et \tilde{F}_λ .

Nous définissons ensuite deux morphismes:

$$\begin{aligned} \phi_u &: \mathfrak{M}_{1^n} \longrightarrow \mathfrak{M}_u : \tilde{m}_\pi \longmapsto \kappa_u(\mathcal{M}_\pi) = (\text{type}_u \pi)!^{\text{mul}} m_{\text{type}_u \pi} \quad \text{et} \\ \phi_u^* &: \mathfrak{M}_u \longrightarrow \mathfrak{M}_{1^n} : M_\lambda \longmapsto \tilde{M}_\lambda. \end{aligned}$$

Ce sont des morphismes d'espaces vectoriels puisque $\{\tilde{m}_\pi\}$ et $\{M_\lambda\}$ sont des bases de \mathfrak{M}_{1^n} et \mathfrak{M}_u respectivement. Le théorème B.2.20 se lit alors $\phi_u \circ \kappa_{1^n}(\mathcal{M}_\pi) = \kappa_u(\mathcal{M}_\pi)$, etc.

Lemme B.2.24. *Pour λ partage vectoriel de u nous avons*

$$\phi_u(\tilde{M}_\lambda) = M_\lambda.$$

Preuve: simplement les définitions.

■

Théorème B.2.25 (théorème 11 dans [5]). *Considérons u fixé et λ parcourant les partages vectoriels de u .*

- (i) *Les éléments \tilde{P}_λ , \tilde{E}_λ , \tilde{H}_λ et \tilde{F}_λ sont dans $\phi_u^*(\mathfrak{M}_u)$ le sous-espace de \mathfrak{M}_{1^n} engendré par les \tilde{M}_λ ;*
- (ii) *Nous avons*

$$\begin{aligned} \phi_u^*(M_\lambda) &= \tilde{M}_\lambda, \\ \phi_u^*(P_\lambda) &= \tilde{P}_\lambda, \\ &\vdots \text{ similairement pour } E_\lambda, H_\lambda \text{ et } F_\lambda; \end{aligned}$$

- (iii) *Le morphisme ϕ_u^* est un relèvement de ϕ_u , c.-à-d. $\phi_u \circ \phi_u^* = \text{id}_{\mathfrak{M}_{1^n}}$.*

Index

- arbre binaire, 71
- arbre ordonné, 74
- bidegré, 11
- bihomogène
 - espace, 11
 - polynôme, 11
- bras, 32
- cône, 27
- cobras, 32
- coin
 - d'un diagramme, 35
- cojambe, 32
- composante homogène dominante, 42
- configuration tridimensionnelle, 77
 - compacte, 77–80
- diagramme
 - de cases dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, 29
 - compact, 53–82
 - définition, 60
 - de Ferrers (d'un partage), 32
 - descente dans un, 55
 - indice comajeur d'un, 62
 - indice majeur d'un, 62
 - isomorphisme de, 62
 - montée dans un, 55
- mouvement permis dans un, 57
- permutation associée, 63
- troué, 47
- distribution marginale, 54
- fonction bisymétrique, 30
- monômiale, 30
- fonction centrale, 7
- fonction symétrique, 11–17
 - élémentaire, 15
 - à deux paramètres, 23
 - anneau des, 13
 - de Schur, 15
 - homogène complète, 15
- fonctions symétrique
 - somme de puissances, 15
- groupe de réflexion
 - discrimant, 43
- groupe de réflexions, 41
- harmonique, 41
- diagonale, 44
- involution ω , 18, 22
- Jacobi-Trudi
 - identité de, 15, 17
- jambe, 32

- λ -anneau, 19–21
 - définition, 19
 - libre à un générateur, 20
 - produit tensoriel, 21
- limite
 - projective, 12
- module, 6
 - bigradué, 11
 - de Young, 9
 - irréductible, 7
 - réductible, 7
 - \mathbb{S}_n -module, 10
 - sous-module, 7
- nombre
 - de Catalan, 71
 - de Kostka, 24
 - à deux paramètres, 24
- notation pléthystique, voir substitution
 - pléthystique
- opérateur
 - d’Adams, 20
 - flip_Δ , 27
 - ∇ (nabla), 24
- orbite, 42
- ordre
 - d’écriture, 56
 - de lecture, 56
- partage, 4
- cardinal d’un, 5
- longueur d’un, 5
- part d’un, 5
- permutation, 5
 - évitant un motif, 72
 - cycles disjoints, 5
 - groupe de, 5
 - action diagonale, 10
 - classes de conjugaison, 5
 - structure cyclique, 5
- point régulier, 42
- polynôme
 - de Macdonald
 - forme intégrale, 23
 - renormalisé, 23
 - universel, 19
- réflexion, 41
- représentation, 6
 - caractère d’une, 6
 - degré de, 6
 - homomorphisme de, 7
 - induite, 10
 - produit tensoriel de, 9
 - régulière, 8
 - restreinte, 10
- sommet d’un cône, 27
- substitution pléthystique, 21
- tableau, 17

semi-standard, 17
standard (ou de Young), 17

Vandermonde

déterminant, 16

G-Vandermonde, 43

Bibliographie

- [1] E. Allen, *The Decomposition of a Bigraded Left Regular Representation of the Diagonal Action of \mathbb{S}_n* , **Journal of Combinatorial Theory**, série A71, pp. 97-111, (1995).
- [2] F.Bergeron, N. Bergeron, A. M. Garsia, M. Haiman, and G. Tesler, *Lattice Diagram Polynomials and Extended Pieri Rules*, **Advances in Mathematics** **142**, pp.244-334 (1999).
- [3] F.Bergeron and A. Garsia, *Science-Fiction and Macdonald Polynomials*, in "Algebraic methods and q -special functions" (L. Vinet, R. Floreanini, eds), CRM Proceedings and Lecture Notes, **American Mathematical Society**, vol. VI, no. 3, pp.363-429, (1999).
- [4] F.Bergeron and A. Garsia, M. Haiman, G. Tesler, *Identities and positivity conjecture for some remarkable operators in the theory of symmetric functions*, **Asian J. Math.**, v.6, no.3, pp.363-420, (1999).
- [5] P. Doubilet, *On the foundations of combinatorial theory. VII: Symmetric functions through the theory of distribution and occupancy*, **Studies in Applied Math.**, vol. LI, No.4, pp. 377-396, (1972). Reproduit dans «Gian-Carlo Rota on Combinatorics », J. P. Kung ed., Birkhäuser, pp.403-422 (1995).
- [6] H. Foulkes, *Enumeration of permutations with prescribed up-down and inversion sequences*, **Discrete Math.**, vol. 15, pp. 235-252, (1976).
- [7] W. Fulton, *Young Tableaux*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 35, Cambridge University Press, Cambridge, (1997)
- [8] A. M. Garsia et I. Gessel, *Permutation Statistics and Partitions*, **Advances in Math.**, vol. 31, pp.288-305, (1979).
- [9] A. M. Garsia et J. Haglund, *A Proof of the q,t -Catalan Positivity Conjecture*, **Discrete Math.** , 39p., (2000?).
- [10] A. M. Garsia et M. Haiman, *Orbit Harmonics and Graded Representations*, à paraître aux Éditions du LaCIM.
- [11] A. M. Garsia et M. Haiman, *A Graded Representation Module for Macdonald's Polynomials*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA V 90, pp.3607-3610, (1993).
- [12] A. M. Garsia and M. Haiman, *A remarkable q,t -Catalan sequence and q -Lagrange inversion*, **J. Algebraic Combin.**, v.5, no.3, pp.191-244, (1996).
- [13] A. M. Garsia and M. Haiman, *Some Bigraded \mathbb{S}_n -Modules and the Macdonald q,t -Kostka Coefficients*, **Electronic Journal of Alg. Comb.** v.3 no.2, pp.561-620, (1996).
- [14] A. M. Garsia and C. Procesi, *On certain Graded \mathbb{S}_n -Modules and the q -Kostka Polynomials*, **Advances in Mathematics** v.94, pp.82-138, (1992).

- [15] A. M. Garsia and G. Tesler, *Plethystic Formulas for the Macdonald q,t-Kostka Coefficients*, **Advances in Mathematics** v.123 no.2, pp.144-162, (1996).
- [16] A. M. Garsia, G. Tesler et M. Haiman, *Explicit Plethystic Formulas for Macdonald q,t-Kostka Polynomials*, 40p., à paraître.
- [17] M. Haiman, *Conjectures on the Quotient Ring by Diagonal Invariants*, **Journal of Algebraic Combinatorics**, vol. 3, pp. 17-76, (1994).
- [18] M. Haiman, *q,t-Catalan and the Hilbert Scheme*, **Discrete Math.**, vol. 193, pp.201-224, (1998).
- [19] M. Jani et R. G. Rieper, *Continued Fractions and Catalan Problems*, **The Electronic Journal of Combinatorics**, v.7 , no. R45, (2000).
- [20] D. Knutson, *λ -Ring and the Representation Theory of the Symmetric Group*, Springer Lecture Notes, v. 308, (1973).
- [21] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Second Edition, Clarendon Press, Oxford (1995).
- [22] F. Patras et C. Reutenauer, *On Dynkin and Klyachko Idempotents in Graded Bialgebras*, **Advances in Applied Mathematics**, no. 28, pp.560-579, (2002).
- [23] M. Rosas, *A Combinatorial Overview of the Theory of MacMahon Symmetric Functions and a Study of the Kronecker Product of Schur Functions*, Brandeis University, Massachusetts.
- [24] B. E. Sagan, *The Symmetric Group*, Wadsworth and Brooks/Cole, Pacific Grove, California, (1991)
- [25] J.-P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Graduate Texts in Mathematics vol. 42, Springer-Verlag, New-York, (1977)
- [26] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics*, vol.2, Cambridge University Press, Cambridge, (1999)
- [27] H. Weyl, *The Classical Groups, Their Invariants and Representations*, Second Edition, Princeton University, Princeton(1946).