

Publications du **Laboratoire de  
Combinatoire et d'  
Informatique  
Mathématique**

2

---

Hélène Décoste

**Séries indicatrices d'espèces pondérées  
et  $q$ -analogues**

---

Département de mathématiques et d'informatique



Université du Québec à Montréal

**Responsable de la collection:**

Srecko Brieck  
LACIM  
Université du Québec à Montréal  
C.P. 8888, Succ. A  
Montréal, Qc.  
Canada H3C 3P8 .  
e-mail: brieck@lacim.uqam.ca

**Comité éditorial**

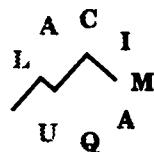
A. ARNOLD	<i>Bordeaux I</i>	J. LABELLE	<i>UQAM</i>
F. BERGERON	<i>UQAM</i>	P. LEROUX	<i>UQAM</i>
J. BERSTEL	<i>LITP, Paris VI</i>	C. REUTENAUER	<i>UQAM</i>
S. BRLEK	<i>UQAM</i>	M.P. SCHÜTZENBERGER	<i>LITP, Paris VII</i>
R. CORI	<i>Bordeaux I</i>	V. STREHL	<i>Erlangen</i>
P. FLAJOLET	<i>INRIA</i>	D. THÉRIEN	<i>McGill</i>
A. GARSIA	<i>UCSD</i>	G.X. VIENNAT	<i>Bordeaux I</i>
G. LABELLE	<i>UQAM</i>	T. WALSH	<i>UQAM</i>

Dépôt légal, deuxième semestre 1990, Bibliothèque nationale du Québec.

ISBN 2-89276-080-1 LACIM Montréal

© LACIM, Montréal, Novembre 1990.

Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique  
Département de mathématiques et d'informatique  
Université du Québec à Montréal  
C.P. 8888, Succ. A  
Montréal, Qc.  
Canada H3C 3P8



Université de Montréal

Séries indicatrices d'espèces pondérées  
et q-analogues

par

Hélène Décoste

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)  
en mathématiques

décembre, 1989

© Hélène Décoste, 1989



## SOMMAIRE

En théorie des fonctions symétriques, il existe une substitution très utile, appelée *spécialisation principale*, permettant de générer plusieurs  $q$ -analogues. Comme l'a remarqué A. Joyal en 1982, c'est par le biais des séries indicatrices que l'on peut relier cette substitution à la théorie combinatoire des espèces de structures. Le but du présent travail est de développer, dans ce contexte, une théorie du  $q$ -comptage des espèces de structures, pondérées ou non.

Nous commençons par un exposé de la théorie des espèces pondérées, qui va des définitions de base jusqu'au problème de la série indicatrice de cycles d'une espèce obtenue par substitution d'espèces pondérées. Ceci nous conduit à une preuve détaillée d'une formule de pléthysme pondéré. La puissance de calcul ainsi obtenue est d'abord illustrée par la reprise d'exemples classiques de la théorie des graphes qui sont habituellement résolus à l'aide de la théorie de Pólya et apparaissent ici simplifiés. Puis nous explorons systématiquement la plupart des modèles combinatoires récents pour les familles de polynômes orthogonaux classiques, y compris les polynômes de Jacobi. Dans chaque cas, nous montrons comment le modèle s'inscrit dans la théorie des espèces pondérées, ce qui permet de donner une preuve élémentaire et élégante de la série génératrice et de calculer explicitement les séries indicatrices de ces structures combinatoires.

Les outils développés lors de l'étude des espèces pondérées sont ensuite utilisés pour obtenir une compréhension combinatoire de la  $q$ -série associée à une espèce. Il

s'avère en effet que les coefficients de cette série sont des polynômes en  $q$  à coefficients entiers positifs, qui ne demandent qu'à être expliqués combinatoirement. Dans ce but, certains résultats généraux sont présentés et plusieurs exemples particuliers sont traités explicitement. Finalement, une des formules explicites que nous obtenons fait intervenir les fonctions symétriques monomiales et nous amène à formuler une interprétation combinatoire des polynômes obtenus par substitution principale dans ces mêmes fonctions monomiales. Les annexes contiennent les premiers de ces polynômes ainsi que quelques tables (calculées par MAPLE) concernant la  $q$ -série de toute espèce vivant sur les petites cardinalités.

# TABLE DES MATIÈRES

Sommaire.....	iii
Table des matières .....	v
Remerciements.....	vii
<b>Introduction.....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 Espèces pondérées.....</b>	<b>5</b>
§1.1 Définitions et propriétés de base .....	6
§1.2 Opérations .....	10
§1.3 Séries indicatrices.....	23
§1.4 Deux exemples classiques .....	33
§1.5 Preuve de la formule de pléthysme .....	47
<b>Chapitre 2 Polynômes orthogonaux.....</b>	<b>55</b>
§2.1 Les involutions d'Hermite.....	56
§2.2 Laguerre et les permutations.....	59
§2.3 Des pieuvres pour Charlier .....	65
§2.4 Le deuxième niveau .....	69
§2.5 Endofonctions et Meixner .....	79
§2.6 Meixner-Pollaczek.....	83
§2.7 Endofonctions de Jacobi.....	88

<b>Chapitre 3</b>	<b><i>q</i>-analogues .....</b>	<b>103</b>
§3.1	La <i>q</i> -énumération d'une espèce .....	103
§3.2	Propriétés et positivité .....	119
§3.3	Quelques formules pour le <i>q</i> -comptage .....	130
<b>Conclusion .....</b>		<b>147</b>
<b>Bibliographie.....</b>		<b>153</b>
Annexe I	Les polynômes $P_n(\lambda ; q)$ .....	I-1
Annexe II	Spécialisation principale dans les fonctions symétriques monômiales ..	II-1
Annexe III	Polynômes <i>q</i> -énumérateurs d'une espèce .....	III-1
Annexe IV	Scripts du <i>q</i> -comptage .....	IV-1

## **REMERCIEMENTS**

Je voudrais remercier Dana Schlomiuk pour avoir accepté de diriger cette thèse, pour son enthousiasme à faire des mathématiques et son support moral. J'ai toujours eu beaucoup de plaisir à travailler avec elle. Merci aussi à mon co-directeur, Pierre Leroux, professeur au département de mathématiques et d'informatique de l'Université du Québec à Montréal, pour son assistance constante et éclairée, son soutien, son organisation. C'est grâce à son appui financier (CRSNG, FCAR) que j'ai pu présenter certains résultats de cette thèse au Séminaire Lotharingien de Combinatoire à Burg Feuerstein et à Thurnau, RFA.

Je remercie Gilbert Labelle, à qui je dois de fructueuses discussions, pour sa patience de «*bon spectateur*» lors de mes tentatives de «*remise en ordre des idées*» ainsi qu'une lecture attentive de ce travail qui a permis de corriger bon nombre de coquilles et d'erreurs. Il m'a aussi amenée à utiliser le langage de calcul symbolique MAPLE et m'a aidée dans la mise au point de certaines procédures. Je remercie également Volker Strehl qui m'a initiée au calcul formel par ordinateur lors de mon passage à l'Université d'Erlangen et m'a encouragée à poursuivre.

Merci à André Joyal pour ses belles conférences et idées mathématiques. Merci aux membres du groupe de recherche en combinatoire de l'UQAM pour leur enthousiasme, leur séminaire régulier et stimulant, pour m'avoir donné accès à leurs ressources informatiques et pour leur support financier.

Je tiens à remercier Louise toujours présente au terminal pour une séance de «tell». Ces intermèdes, souvent aux petites heures du matin, ont été un encouragement constant. Je lui souhaite de finir «la sienne» au plus vite. Merci à Odette qui m'a avoué avoir évité de me téléphoner dans les périodes de travail intense, pour ne pas déranger! Merci aussi à Jacques, François, Alain, Anne-Marie, Pierre, Claude, Xavier, Loxie, et les autres pour leur présence, leurs encouragements...

Finalement, merci à Thérèse Ouellet d'avoir pris la relève quand je n'avais plus assez de temps et d'avoir accepté de faire le traitement informatique du dernier chapitre avec Word, un gros merci... Et je m'en voudrais d'oublier mon petit Macintosh qui est maintenant bien fatigué.

## LE JURY

Outre mes directeur et co-directeur Dana Schlomiuk et Pierre Leroux, les personnes suivantes ont accepté de faire parti du jury de cette thèse, je leur en suis reconnaissante :

- André Giroux et Ivo Rosenberg, du département de mathématiques et de statistiques de l'Université de Montréal, agissant respectivement comme président rapporteur et membre du jury,
- Richard P. Stanley, du département de mathématiques du M.I.T., à titre d'examinateur externe,
- Gilles Deslauriers, du département de mathématiques appliquées de l'École polytechnique, comme représentant du doyen.

## **INTRODUCTION**

En 1980, lors de deux conférences données au séminaire de combinatoire de l'Université du Québec à Montréal, André Joyal a proposé un cadre catégorique pour l'étude des structures combinatoires et de leurs diverses séries génératrices, fondé sur le concept d'espèce de structures [JA1]. Cette approche permet de relever au niveau structurel les opérations de somme, produit, substitution, dérivation, etc, des séries génératrices exponentielles, génératrices des types et indicatrices des cycles. Ainsi la recherche se fait à l'aide d'équations combinatoires (caractérisant explicitement ou implicitement des espèces) exprimant de façon claire des observations et constructions combinatoires qui sont malheureusement, dans l'approche traditionnelle, trop souvent camouflées sous des notations ou des descriptions épiques. Depuis, plusieurs chercheurs du domaine de la combinatoire énumérative ont adopté et utilisent cette théorie lorsqu'elle est appropriée. Mentionnons notamment Gian-Carlo Rota du MIT, Cambridge, S. Schanuel, SUNY at Buffalo, Volker Strehl de l'université d'Erlangen, RFA [SV3], W.R. Unger de l'université de Sydney, Australie [UW], Y.N. Yeh de l'institut Sinica, Taïwan [YY1, YY2, BY, LY1-2-3-4], sans oublier les membres de l'équipe de combinatoire de l'UQAM qui ont grandement contribué au développement et à la diffusion de la théorie [BF1, BF2, JA1, JA2, LG1, LG2, LG3, LJ1, LJ2, LJ3, LP]. En particulier les travaux récents de Gilbert Labelle [LG4] sur le dénombrement des structures asymétriques contiennent des résultats inédits certainement plus difficiles à obtenir avec

les méthodes classiques.

Comme l'a remarqué A. Joyal, la théorie des espèces de structures est reliée à la théorie des fonctions symétriques par le biais des séries indicatrices et de la correspondance de Fröbenius [JA3]. Or, en théorie des fonctions symétriques, il existe une substitution très utile, appelée *spécialisation principale*, permettant de générer plusieurs  $q$ -analogues. L'un des buts du présent travail est de développer, dans ce contexte, une théorie du  $q$ -comptage des espèces de structures.

Nos exemples et résultats se situent tous dans le cadre de la théorie des espèces pondérées, une des variantes de la théorie initiale. Afin de préciser le contexte, de familiariser le lecteur non averti avec les notations utilisées et aussi parce qu'il n'existe pas vraiment d'exposé complet du sujet, nous avons choisi de présenter en grand détail les définitions et résultats de base. Ainsi les sections 1.1, 1.2 et 1.3 du chapitre 1 auraient pu être omises et supposées connues. On y remarquera quand même que le concept d'espèce pondérée qui y est présenté n'est pas celui proposé par A. Joyal [JA1] mais plutôt celui utilisé par J. Labelle et Y.N. Yeh [LY1-2-3-4] dans leurs travaux sur les familles de polynômes orthogonaux. Ce choix est guidé par le grand nombre d'exemples de la combinatoire classique qu'il permet d'intégrer dans la théorie. En particulier, nous montrons dans la section 1.4 comment la formule de *pléthysme pondéré* contient le théorème de Pólya sur le dénombrement des « *structures colorées* ». Cette formule de pléthysme pondéré exprime la série indicatrice d'une espèce obtenue par substitution de deux espèces pondérées en termes des séries indicatrices de chacune des deux espèces impliquées. Nous en donnons une preuve dans la section 1.5 qui est basée sur (et complète) la preuve donnée par A. Joyal [JA1] pour le cas non pondéré.

La formule de pléthysme est un outil de calcul puissant. Une première illustration en est donnée à la section 1.4 où nous reprenons des exemples classiques de la théorie des graphes qui sont habituellement résolus à l'aide de la théorie de Pólya et apparaissent ici

simplifiés. Un article plus complet sur le sujet est présentement soumis pour publication [DLL]. Le chapitre 2 est en lui-même une autre illustration de la puissance de calcul de la théorie. Nous y explorons systématiquement la plupart des modèles combinatoires récents pour les familles de polynômes orthogonaux, y compris les polynômes de Jacobi. Dans chaque cas, nous montrons comment le modèle s'inscrit dans la théorie des espèces pondérées, ce qui permet de donner une preuve élémentaire et élégante de la série génératrice et de calculer explicitement les séries indicatrices de ces structures combinatoires.

Dans le chapitre 3, nous utilisons les outils développés lors de l'étude des espèces pondérées pour obtenir une compréhension combinatoire de la  $q$ -série associée à une espèce. On y propose d'abord une définition de la  $q$ -énumération d'une espèce ainsi que ses propriétés de base. Plusieurs exemples particuliers sont traités explicitement. Puis le lien avec la spécialisation principale dans les fonctions symétriques permet d'utiliser un résultat dû à R. Stanley [SR] sur les fonctions de Schur et de montrer, dans la section 3.2, que les coefficients de la  $q$ -série associée à une espèce sont des polynômes en  $q$  à coefficients entiers positifs. Dans la section 3.3 nous cherchons une explication combinatoire pour ces coefficients. Une des expressions explicites que nous y obtenons fait intervenir les fonctions symétriques monomiales et nous amène à formuler une interprétation combinatoire des polynômes obtenus par substitution principale dans ces mêmes fonctions monomiales. On retrouve une table de ces polynômes, pour les petites valeurs, à l'annexe II. Les autres annexes contiennent deux autres tables concernant la  $q$ -série de toute espèce vivant sur les petites cardinalités ainsi que les programmes MAPLE utilisés pour les calculer.

Tout au long du texte nous utilisons une numérotation uniforme. Ainsi les définitions, propositions, théorèmes, formules, etc, d'un même chapitre sont numérotés les uns à la suite des autres par une suite unique de numéros placés du côté gauche, entre

parenthèses. Par exemple dans le chapitre 2 on trouve les items

$$(2.1) \quad \sum_{n \geq 0} H_n(t) \frac{x^n}{n!} = e^{2tx - x^2}.$$

(2.2) **Définition.** *Les espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées  $H$  et  $\mathcal{H}$  sont...*

(2.3) **Proposition.** *Les espèces  $H$  et  $\mathcal{H}$  sont...*

Nous utilisons un carré noir ■ placé à l'extrême droite pour indiquer la fin d'une preuve et un carré blanc □ pour la fin d'un énoncé (définition ou résultat donné sans preuve). Les figures ont une numérotation indépendante qui va de la figure 1 (au chapitre 1) à la figure 33 (au chapitre 3) et sont intégrées au texte afin d'en faciliter la lecture.

# **Chapitre 1**

## **ESPÈCES PONDÉRÉES**

L'idée de donner des «poids» à certaines structures combinatoires apparaît chez plusieurs auteurs dans la littérature classique ; [GJ] contient une bonne bibliographie sur le sujet. Nous nous intéresserons en particulier à l'étude de modèles combinatoires récents pour les familles classiques de polynômes orthogonaux [BF1, FL, FP, LS, LY(1,2,3), SV(1,2,3), etc...]. La manipulation des objets combinatoires impliqués ainsi que de leurs séries génératrices conduit parfois à un symbolisme lourd qui ne peut que camoufler la beauté de ces modèles. En plus d'offrir un formalisme adéquat, la théorie des espèces pondérées, introduite par A. Joyal [JA1], offre une notation simple qui exprime de façon élégante les opérations combinatoires.

Nous consacrons la première section de ce chapitre aux notions de base de la théorie ; elle contient un exposé élémentaire, inspiré de [BL, DH1, JA1, LJ1]. Dans les sections suivantes, nous développons certains aspects de la théorie que l'on ne retrouve pas dans la littérature existante sur le sujet. En particulier, nous donnons une présentation détaillée de la théorie des séries indicatrices pondérées et de leur substitution pléthystique. Par la suite, les méthodes exposées seront utilisées pour analyser explicitement divers exemples.

### §1.1 DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS DE BASE

Soit  $\mathbb{A}$  un anneau commutatif unitaire de caractéristique 0. Considérons la catégorie  $\mathbb{E}_{\mathbb{A}}$  des ensembles  $\mathbb{A}$ -pondérés (ou  $\mathbb{A}$ -valués) finis : les objets sont les ensembles finis munis d'une fonction vers  $\mathbb{A}$ ,  $v : E \rightarrow \mathbb{A}$ , (appelée *fonction de poids ou valuation*) ; un morphisme entre les objets  $v : E \rightarrow \mathbb{A}$  et  $w : F \rightarrow \mathbb{A}$  est une fonction  $f : E \rightarrow F$  qui préserve le poids, i.e.: telle que  $w \circ f = v$ :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{v} & \mathbb{A} \\ f \downarrow & \nearrow w & \\ F & & \end{array}$$

**(1.1) Définition.** Une espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée est un foncteur  $F : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{A}}$  de la catégorie des ensembles finis et bijections vers la catégorie des ensembles  $\mathbb{A}$ -pondérés.  $\square$

Nous pouvons voir une espèce pondérée  $F$  comme une règle qui associe :

- i) à chaque ensemble fini  $U$ , un ensemble, noté  $F[U]$ , appelé l'ensemble des  $F$ -structures sur  $U$ , ainsi qu'une fonction  $w_U : F[U] \rightarrow \mathbb{A}$  qui donne un poids à chaque  $F$ -structure ;
- ii) à chaque bijection  $f : U \rightarrow V$ , une fonction  $F[f] : F[U] \rightarrow F[V]$ , appelée le transport de structures le long de  $f$ , qui préserve les poids, i.e.: si  $s \in F[U]$  et  $t = F[f](s) \in F[V]$  alors  $w_U(s) = w_V(t)$ , et qui effectue un transport cohérent, i.e.: si  $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$  sont des bijections alors  $F[g] \circ F[f] = F[g \circ f]$ , et pour l'identité  $1_U : U \rightarrow U$  on a  $F[1_U] = 1_{F[U]}$ .

Selon le contexte, nous écrirons  $F = F_w$ , ou plus simplement  $F_w$ , pour spécifier la fonction de poids  $w = (w_U)_{U \in \mathbb{B}}$  associée à l'espèce pondérée  $F$ , et pour alléger la notation nous remplacerons  $w_U(s)$  par  $w(s)$ . Remarquons qu'appliqué aux permutations de l'ensemble  $U$  sous-jacent, le transport de structures définit une action du

groupe  $\mathfrak{S}_U$  des permutations de  $U$  sur l'ensemble  $F[U]$  des  $F$ -structures sur  $U$ :

$$\mathfrak{S}_U \times F[U] \longrightarrow F[U]$$

$$(\sigma, s) \longmapsto \sigma \cdot s = F[\sigma](s)$$

Ceci nous suggère d'utiliser la notation pratique  $f_F \cdot s$  ou  $f \cdot s$  pour désigner  $F[f](s)$ .

Une structure générique d'espèce  $F_w$  sera représentée graphiquement par une des images de la figure 1, où les points doivent être vus comme tous les éléments distincts de l'ensemble sous-jacent.

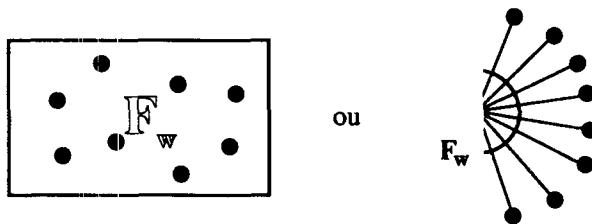


figure 1

Une illustration suggestive permet de décrire par une image des opérations combinatoires dont la description formelle n'est pas toujours des plus simples. Nous l'utiliserons à chaque fois qu'elle peut éclairer la compréhension du lecteur.

Pour un ensemble pondéré  $v : E \rightarrow \mathbb{A}$ , la *cardinalité* est définie comme le poids total, i.e.: la somme des poids de tous ses éléments :

$$Card(E) = |E| = \sum_{e \in E} v(e).$$

La cohérence du transport nous assure que le poids d'un ensemble de structures  $F_w[U]$  ne dépend que de la taille  $n = |U|$  de l'ensemble sous-jacent,

$$|F_w[U]| = \sum_{s \in F[U]} w(s) = \sum_{t \in F[n]} w(t) = |F_w[n]|,$$

où  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  et  $F[n]$  désigne l'ensemble des  $F$ -structures sur  $[n]$ . On associe alors à chaque espèce pondérée une série formelle :

**(1.2) Définition.** Soit  $F = F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_A$  une espèce  $A$ -pondérée. Sa série génératrice, notée  $F_w(x)$ , est la série de Hurwitz

$$F_w(x) = \sum_{n \geq 0} |F_w[n]| \frac{x^n}{n!}$$

□

À l'occasion, nous écrirons *poids*( $F[n]$ ) pour désigner  $|F_w[n]|$ , ou plus simplement  $|F[n]|$  (s'il n'y a pas de risque d'ambiguïté, cette dernière notation étant aussi utilisée pour le nombre de  $F$ -structures sur l'ensemble  $[n]$  dans le cas d'une espèce «ordinaire»  $F : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}$ ).

**(1.3) Définition.** Soit  $F = F_w$  et  $G = G_v$  deux espèces  $A$ -pondérées. On dit que

- (1)  $F_w$  et  $G_v$  sont *isomorphes* (noté  $F_w \cong G_v$ ) si et seulement s'il existe un isomorphisme naturel  $\theta$  entre les foncteurs  $F_w$  et  $G_v$ .
- (2)  $F_w$  et  $G_v$  sont *équipotentes* (noté  $F_w \equiv G_v$ ) si et seulement si leurs fonctions génératrices coïncident :  $F_w(x) = G_v(x)$ . □

La condition d'isomorphisme signifie qu'à chaque ensemble  $U$  est associée une bijection  $\theta_U : F_w[U] \rightarrow G_v[U]$  de sorte que pour toute bijection  $f : U \rightarrow V$  le rectangle

$$\begin{array}{ccc} F_w[U] & \xrightarrow{\theta_U} & G_v[U] \\ \downarrow F_w[f] & & \downarrow G_v[f] \\ F_w[V] & \xrightarrow{\theta_V} & G_v[V] \end{array}$$

soit commutatif. L'équipotence est beaucoup moins exigeante ; on demande seulement que pour chaque ensemble fini  $U$ , les ensembles de structures  $F_w[U]$  et  $G_v[U]$  aient le même poids,

$$\forall U \in \mathbb{B}, \quad \sum_{s \in F_w[U]} w(s) = \sum_{t \in G_v[U]} v(t).$$

Il est clair que  $F_w \cong G_v \Rightarrow F_w \equiv G_v$  mais la réciproque est fausse en général.



(1.4) **Exemple.** Toute espèce de structure ordinaire (i.e.: non pondérée) donne lieu à une espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée : il suffit de donner le poids 1 à toutes ses structures,

$F : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}$  définit  $F_1 : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{A}}$ , où  $\forall U \in \mathbb{B}, \forall s \in F[U], 1(s) = 1$ ,  
 $1 \in \mathbb{A}$  étant l'unité de l'anneau. On a alors  $F_1(x) = F(x)$ . De cette façon on trouve des espèces équivalentes mais non isomorphes, par exemple l'espèce  $L$  des ordres linéaires et l'espèce  $S$  des permutations [JA1, LA1]. Les principales espèces «pondérées par le poids 1» que nous emploierons sont :

- l'espèce vide, notée  $0$ , définie par  $0[U] = \emptyset$  pour tout  $U$
- l'espèce de l'ensemble vide, notée  $1$ , définie par

$$1[U] = \begin{cases} \{\emptyset\} & \text{si } U = \emptyset \\ \emptyset & \text{si } U \neq \emptyset \end{cases}$$

- l'espèce des singletons, notée  $X$ , définie par

$$X[U] = \begin{cases} \{U\} & \text{si } U \text{ est un singleton} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

- l'espèce des ensembles, notée  $E$ , définie par  $E[U] = \{U\}$  pour tout  $U$ .

Ces notations sont réservées et se justifient par le fait que

$$0(x) = 0, \quad 1(x) = 1, \quad X(x) = x \quad \text{et} \quad E(x) = e^x.$$

Voyons maintenant quelques exemples d'espèces «vraiment» pondérées.

(1.5) **Exemple.** Soit  $\pi$  une indéterminée et  $\mathbb{Z}[\pi]$  l'anneau des polynômes en  $\pi$ . Alors  $X_{\pi} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{Z}[\pi]}$  désigne l'espèce des singletons pondérés par le poids  $\pi$ . Bien sûr, on a  $X_{\pi}(x) = \pi x$ .

Plus généralement, si  $F_w$  est une espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée et  $a \in \mathbb{A}$ , alors  $F_{aw}$  (ou  $F_{(a)}$ ) désigne l'espèce obtenue en multipliant par  $a$  le poids de toute  $F$ -structure. Cette espèce satisfait  $F_{aw}(x) = a \cdot F_w(x)$ .

**(1.6) Exemple.** Soit  $t_1, t_2, t_3, \dots$  une suite illimitée d'indéterminées et  $\mathbb{Z}[t_1, t_2, t_3, \dots]$  l'anneau des polynômes en  $t_1, t_2, t_3, \dots$  (i.e.: sommes finies de monômes). On définit les espèces suivantes :

- l'espèce des cycles pondérés  $C = C_\gamma : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{Z}[t_1, t_2, t_3, \dots]}$ , où  $C[\emptyset] = \emptyset$  et  $C[U]$  est l'ensemble des permutations circulaires  $c : U \rightarrow U$ , avec poids  $\gamma(c) = t_n$ ,  $n = |U|$ .

- l'espèce des permutations pondérées  $S = S_\gamma : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{Z}[t_1, t_2, t_3, \dots]}$ , où  $S[U]$  est l'ensemble des permutations  $\sigma$  de  $U$  ( $S[U] := \mathfrak{S}_U$ ), pondéré par  $\gamma(\sigma) = t_1^{\sigma_1} t_2^{\sigma_2} t_3^{\sigma_3} \dots$ ,  $\sigma_i$  étant le nombre de cycles de longueur  $i$  dans la décomposition de  $\sigma$  en cycles disjoints.

D'une part, on trouve facilement que

$$C(x) = \frac{t_1 x^1}{1} + \frac{t_2 x^2}{2} + \frac{t_3 x^3}{3} + \dots$$

D'autre part,

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \gamma(\sigma) \right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} Z_n x^n$$

où  $Z_n$  est le *polynôme indicateur de cycles* du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ . Il est bien connu (par exemple voir [BC]) que

$$Z_n = \sum_{\sigma_1 + 2\sigma_2 + \dots = n} \frac{t_1^{\sigma_1} t_2^{\sigma_2} \dots t_n^{\sigma_n}}{1^{\sigma_1} \sigma_1! 2^{\sigma_2} \sigma_2! \dots n^{\sigma_n} \sigma_n!}$$

## §1.2 OPÉRATIONS

Nous verrons qu'on peut obtenir facilement cette dernière formule à partir du lien combinatoire qui relie les deux espèces impliquées : tout le monde sait qu'une permutation est un ensemble de cycles disjoints ! L'opération de substitution d'une espèce dans une autre transforme cet énoncé intuitif en un isomorphisme,  $S \cong E \circ C$ , qui donne lieu à une identité entre séries génératrices.

Les opérations entre espèces de structures sont toutes des relèvements au niveau combinatoire d'opérations entre séries formelles. Nous utiliserons principalement la somme, le produit, la dérivée et la composition.

(1.7) **Définition.** Soit  $F = F_w$  et  $G = G_v$  deux espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées.

L'espèce somme de  $F$  et  $G$ , notée  $F+G$ , est définie par :

-  $\forall U \in \mathbb{B}, (F+G)[U] = F[U] + G[U]$  (où  $+$  désigne la réunion disjointe)

et si  $s$  est une  $F+G$ -structure sur  $U$  alors

$$\text{poids } (s) = \begin{cases} w(s) & \text{si } s \in F[U] \\ v(s) & \text{si } s \in G[U] \end{cases}$$

$$- \forall f : U \xrightarrow{\sim} V, f_{F+G} \cdot s = \begin{cases} f_F \cdot s & \text{si } s \in F[U] \\ f_G \cdot s & \text{si } s \in G[U] \end{cases}$$

□

Ainsi une  $F+G$ -structure est soit une  $F$ -structure, soit une  $G$ -structure. On en trouve deux représentations graphiques à la figure 2.

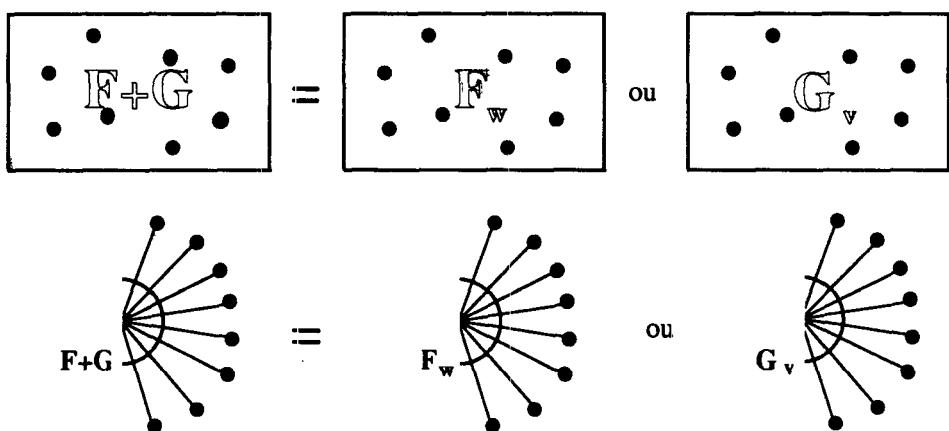


figure 2

Plus généralement, on définit la somme d'une famille d'espèces :

**(1.8) Définition.** Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille d'espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées. Alors

- la famille  $(F_i)_{i \in I}$  est sommable si et seulement si

pour chaque ensemble fini  $U \in \mathbb{B}$ ,  $\{i \in I \mid F_i[U] \neq \emptyset\}$  est fini.

- pour une famille sommable, la somme, notée  $\sum_{i \in I} F_i$ , est définie par

$$\forall U \in \mathbb{B}, \left( \sum_{i \in I} F_i \right)[U] = \sum_{i \in I} F_i[U].$$

□

**(1.9) Exemple.** Pour une espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée  $F = F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_A$  on désigne par  $F_{n,w}$  ou  $F_n$  la restriction de  $F$  aux ensembles de cardinalité  $n$ , et par  $F_w^*$  ou  $F^*$  la restriction de  $F$  aux ensembles non vides. Ainsi,

$$F_w = \sum_{n \geq 0} F_{n,w} = F_{0,w} + \sum_{n \geq 1} F_{n,w} = F_{0,w} + F_w^*.$$

**(1.10) Définition.** Soit  $F = F_w$  et  $G = G_v$  deux espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées.

L'espèce produit de  $F$  et  $G$ , notée  $FG$  ou  $F \cdot G$ , est définie par :

$$- \forall U \in \mathbb{B}, (FG)[U] = \sum_{U_1 + U_2 = U} F[U_1] \times G[U_2]$$

et si  $s = (s_1, s_2) \in F[U_1] \times G[U_2]$  est une  $FG$ -structure sur  $U$  alors

$$\text{poids } (s) = w(s_1)v(s_2)$$

$$- \forall f : U \xrightarrow{\sim} V, f_{FG}(s_1, s_2) = ((f|_{U_1}, s_1), (f|_{U_2}, s_2))$$

$$\text{où } f|_{U_1} : U_1 \xrightarrow{\sim} V_1, (V_1 = f(U_1))$$

$$f|_{U_2} : U_2 \xrightarrow{\sim} V_2, (V_2 = f(U_2)).$$

□

Une  $FG$ -structure sur  $U$  est donc la donnée de :

- i) une décomposition de  $U$  en deux parties  $U_1, U_2$ ;  $U = U_1 \cup U_2$ ,  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$
- ii) une  $F$ -structure sur la première partie  $U_1$
- iii) une  $G$ -structure sur la deuxième partie  $U_2$

et le poids d'une telle structure est obtenu en prenant le produit des poids des deux

structures présentes. La figure 3 en donne deux représentations graphiques.

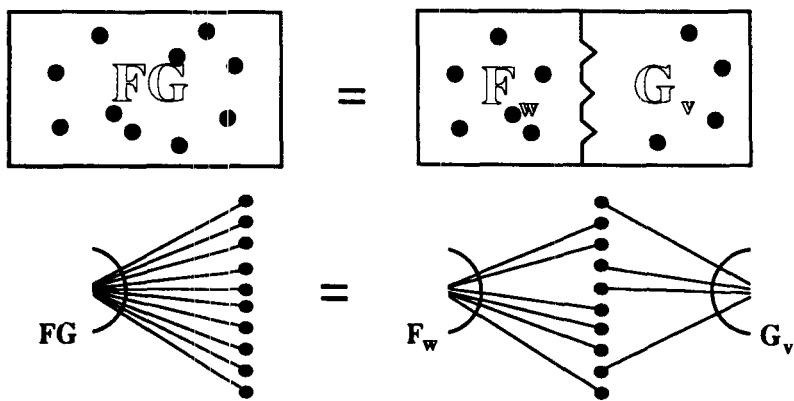


figure 3

On définit le produit d'une famille finie d'espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées de façon analogue :

$$\left( \prod_{i=1}^n F_i \right) [U] = \sum_{U_1 + U_2 + \dots + U_n = U} F_1[U_1] \times F_2[U_2] \times \dots \times F_n[U_n]$$

et  $w(s_1, s_2, \dots, s_n) = w_1(s_1)w_2(s_2) \dots w_n(s_n)$ .

**(1.11) Exemple.** Un dérangement d'un ensemble fini  $U$  est une permutation n'ayant pas de points fixes. Notons  $D_\gamma$  l'espèce des dérangements pondérée par l'indicateur de cycles :

$$\forall U \in \mathbb{B}, D[U] = \{\sigma \in \mathfrak{S}_U \mid \forall u \in U, \sigma(u) \neq u\}, \text{ poids}(\sigma) = t_1^{\sigma_1} t_2^{\sigma_2} t_3^{\sigma_3} \dots,$$

où  $\sigma_i$  est le nombre de cycles de longueur  $i$  dans  $\sigma$ .

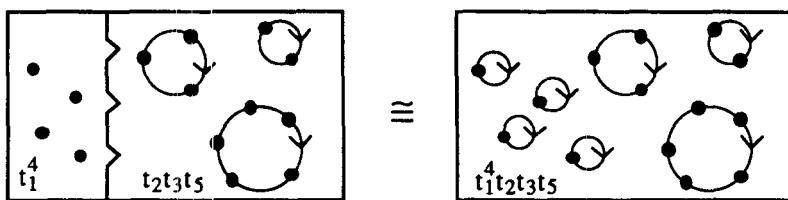


figure 4

Dans le produit ED, chaque dérangement est accompagné d'un ensemble. Lorsqu'on considère les points de cet ensemble comme des cycles de longueur 1, on effectue la

bijection qui transforme une ED-structure en une permutation, comme illustré à la figure 4. Afin que le poids total soit l'indicateur de cycles, nous avons donné à chaque élément de l'ensemble le poids  $t_1$ . On a alors  $E_{t_1} D_\gamma \equiv S_\gamma$ , où  $E_{t_1}$  désigne l'espèce des ensembles qu'on a pondérés par  $t_1^*$  éléments de l'ensemble.

**(1.12) Définition.** Soit  $F = F_w$  une espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée. L'espèce dérivée de  $F$ , notée  $F'$ , est définie par :

- $\forall U \in \mathbb{B}$ ,  $(F')[U] = F[U + \{*\}]$ , où  $+$  désigne la réunion disjointe,
  - et si  $s$  est une  $F'$ -structure sur  $U$  alors *poids* ( $s$ ) =  $w(s)$
  - $\forall f: U \xrightarrow{\sim} V$ ,  $f_{F'} \cdot s = (f^*)_{F'} \cdot s$ ,
- où  $f^*: U + \{*\} \xrightarrow{\sim} V + \{*\}$  est définie par  $f^*(u) = \begin{cases} f(u) & \text{si } u \in U \\ * & \text{si } u = *\end{cases}$

□

Les  $F'$ -structures sur un ensemble  $U$  sont tout simplement les  $F$ -structures construites sur l'ensemble obtenu en augmentant  $U$  d'un point supplémentaire. On en trouve deux représentations graphiques à la figure 5.

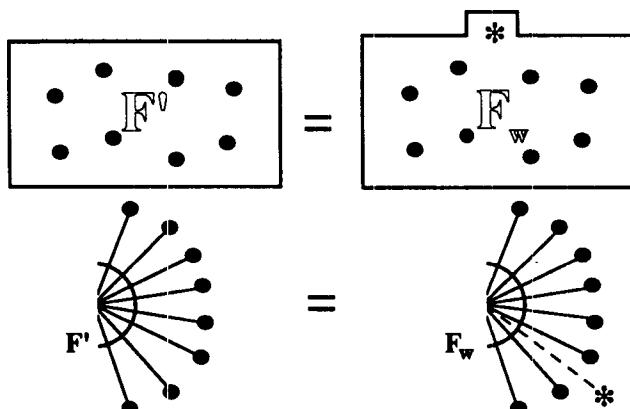


figure 5

Contrairement au produit  $FG$ , le produit cartésien  $F \times G$  nous donne simultanément sur le même ensemble une  $F$ -structure et une  $G$ -structure.

(1.13) **Définition.** Soit  $F = F_w$  et  $G = G_v$  deux espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées.

L'espèce produit cartésien de  $F$  et  $G$ , notée  $F \times G$ , est définie par :

$$\text{- } \forall U \in \mathbb{B}, \quad F \times G[U] = F[U] \times G[U]$$

et si  $s = (s_1, s_2) \in F[U] \times G[U]$  est une  $F \times G$ -structure sur  $U$  alors

$$\text{poids } (s) = w(s_1)v(s_2)$$

$$\text{- } \forall f: U \xrightarrow{\sim} V, \quad f_{F \times G} \cdot (s_1, s_2) = (f_F \cdot s_1, f_G \cdot s_2)$$

□

(1.14) **Exemple.** Une structure est *pointée* lorsqu'on spécifie un des éléments de son ensemble sous-jacent. Désignons par  $F_w^*$  l'espèce de toutes les  $F_w$ -structures pointées. De façon triviale

$$\forall U \in \mathbb{B}, \quad F_w^*[U] = U \times F_w[U] \xrightarrow{\sim} E^*[U] \times F_w[U],$$

et donc  $F_w^* \cong E^* \times F_w$ . Une façon équivalente de pointer une structure est d'isoler le point choisi et, pour conserver la structure, de le remplacer par une étoile. On obtient alors l'isomorphisme  $F_w^* \cong X \cdot F_w'$ , illustré à la figure 6.

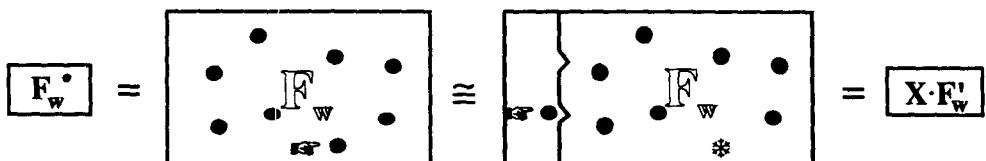


figure 6

(1.15) **Définition.** Soit  $F = F_w$  et  $G = G_v$  deux espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées.

Lorsque  $G[\emptyset] = \emptyset$ , l'espèce substitution de  $G$  dans  $F$ , notée  $F \circ G$  ou  $F(G)$ , est définie par :

$$\text{- } \forall U \in \mathbb{B}, \quad (F \circ G)[U] = \sum_{\pi \text{ partition de } U} F[\pi] \times \prod_{C \in \pi} G[C]$$

et si  $s = (\pi, t, (t_C)_{C \in \pi})$  est une  $F \circ G$ -structure sur  $U$  ( $\pi$  une partition de  $U$ ,  $t \in F[\pi]$ ,  $\forall C \in \pi, t_C \in G[C]$ ), alors

$$\text{poids } (s) = w(t) \prod_{C \in \pi} v(t_C)$$

$$\text{- } \forall f: U \xrightarrow{\sim} V, \quad f_{F \circ G} \cdot (\pi, t, (t_C)_{C \in \pi}) = (f(\pi), (f/\pi)_F \cdot t, ((f|_C)_G \cdot t_C)_{C \in \pi})$$

□

Pour obtenir une  $F \circ G$ -structure, il faut procéder comme suit :

- i) partager l'ensemble sous-jacent en classes disjointes non vides
- ii) sur chacune des classes de la partition, mettre une  $G_v$ -structure, obtenant ainsi une assemblée de  $G_v$ -structures.
- iii) sur l'ensemble quotient (i.e.: l'ensemble dont les éléments sont les classes de la partition), construire une  $F_w$ -structure.

Le poids d'une telle structure est obtenu en faisant le produit des poids de toutes les structures présentes. Il est intuitivement correct et pratique de lire  $F$  « de »  $G$  pour  $F \circ G$  et de voir les structures comme des  $F$ -structures construites sur un ensemble dont les éléments ont été gonflés en cellules qui abritent chacune une  $G$ -structure (*F-assemblées de G-structures*). Certaines représentations graphiques de la figure 7 laissent très bien voir cette image.

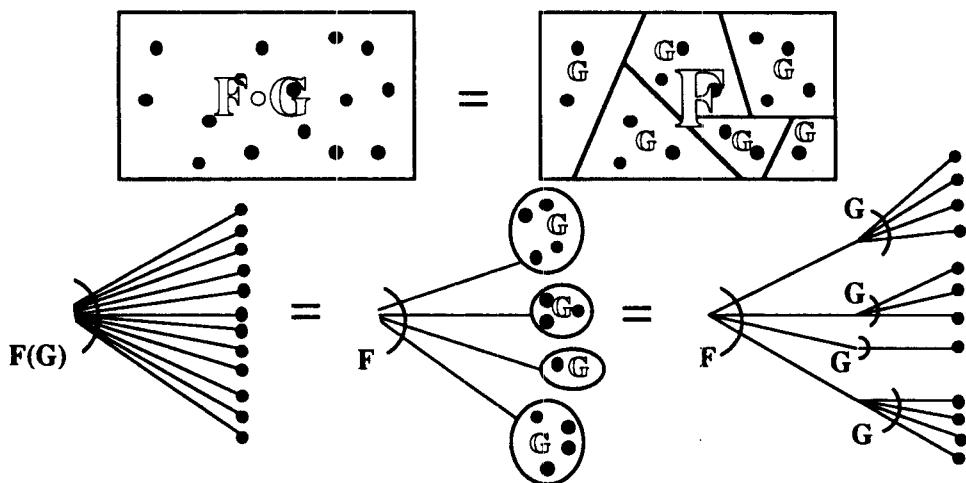


figure 7

On peut étendre la définition de la substitution de  $G$  dans  $F$  aux cas où  $G[\emptyset] \neq \emptyset$  (le lecteur curieux peut consulter [JA2]). Nous ne décrirons pas de «substitution générale» parce qu'elle ne relève pas celle des séries génératrices comme le font les autres opérations (théorème 1.19).

**(1.16) Exemple.** Reprenons l'exemple 1.6 où on tente d'énumérer les permutations selon leur monôme indicateur de cycles. Chaque permutation est composée d'un ensemble de cycles et le poids d'une permutation est égal au produit des poids de ses cycles.

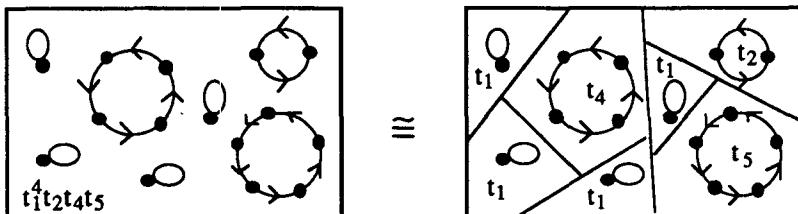


figure 8

Cette observation permet de définir une bijection naturelle entre l'ensemble  $S_\gamma[U]$  des permutations de  $U$  et l'ensemble  $(E \circ C_\gamma)[U]$ . On a donc l'isomorphisme  $S_\gamma \cong E \circ C_\gamma$ , illustré par la figure 8.

**(1.17) Exemple.** Soit  $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k\}$  un ensemble d'indéterminées et désignons par  $X_\pi$  l'espèce des singletons de poids  $\pi_1$  ou  $\pi_2$  ou ... ou  $\pi_k$ . En fait  $X_\pi = X_{\pi_1} + \dots + X_{\pi_k}$ . Une structure d'espèce  $E(X_\pi)$  sur un ensemble  $U$  consiste en un étiquetage des éléments de  $U$  à l'aide des indéterminés  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$  (voir figure 9).

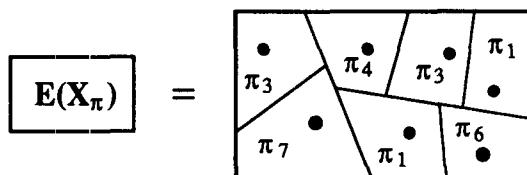


figure 9

Ainsi une  $F \times E(X_\pi)$ -structure est obtenue en plaçant une  $F$ -structure sur un ensemble dont les éléments sont étiquetés par  $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k\}$ . Ceci est équivalent à construire une  $F$ -structure sur un ensemble de cellules contenant chacune un point ayant un poids choisi parmi  $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k\}$ , c'est-à-dire une  $F(X_\pi)$ -structure. D'où  $F(X_\pi) \cong F \times E(X_\pi)$ . Cette observation a d'abord été faite par Yeh [YY1] dans un contexte légèrement différent.

(1.18) Théorème. Soit  $F_w$ ,  $G_v$  et  $H_u$  trois espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées. Alors

- i)  $F_w + 0 \equiv F_w$ ,  $F_w + G_v \equiv G_v + F_w$ ,  $(F_w + G_v) + H_u \equiv F_w + (G_v + H_u)$
- ii)  $F_w \cdot 0 \equiv 0$ ,  $F_w \cdot 1 \equiv F_w$ ,  $F_w \cdot G_v \equiv G_v \cdot F_w$ ,  $(F_w \cdot G_v) \cdot H_u \equiv F_w \cdot (G_v \cdot H_u)$
- iii)  $F_w \equiv X \circ F_w \equiv F_w \circ X = F_w(X)$ ,  $(F_w \circ G_v) \circ H_u \equiv F_w \circ (G_v \circ H_u)$
- iv)  $(F_w + G_v) \cdot H_u \equiv F_w \cdot H_u + G_v \cdot H_u$ ,
- $(F_w + G_v) \circ H_u \equiv (F_w \circ H_u) + (G_v \circ H_u)$ ,  $(F_w \cdot G_v) \circ H_u \equiv (F_w \circ H_u) \cdot (G_v \circ H_u)$
- v)  $(F_w + G_v)' \equiv F_w' + G_v'$ ,  $(F_w \cdot G_v)' \equiv F_w \cdot G_v' + F_w' \cdot G_v$ ,
- $(F_w \circ G_v)' \equiv (F_w' \circ G_v) \cdot G_v'$ ,  $X \cdot F_w' \equiv F_w''$ .

□

Nous avons montré la dernière de ces propriétés à l'exemple 1.14. Les autres démonstrations se font de façon analogue, en explicitant dans chaque cas une bijection naturelle, et sont laissées au lecteur.

Nous pouvons maintenant effectuer des calculs combinatoires sur les espèces, qui ont le bonheur de correspondre aux calculs analytiques sur les fonctions et donneront lieu à des identités entre séries formelles (ou leurs coefficients).

(1.19) Théorème. Soit  $F_w$  et  $G_v$  deux espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées. On a :

- i)  $(F_w + G_v)(x) = F_w(x) + G_v(x)$
- ii)  $(F_w \cdot G_v)(x) = F_w(x) \cdot G_v(x)$
- iii)  $F_w'(x) = \frac{d}{dx} F_w(x)$
- iv)  $(F_w \times G_v)(x) = F_w(x) \times G_v(x)$ ,

*l'opération  $\times$  de droite doit être interprétée comme le produit terme à terme des coefficients de  $x^n/n!$  (qu'on pourrait appeler produit de Hadamard pour les séries de Hurwitz)*

- v)  $(F_w \circ G_v)(x) = F_w(G_v(x))$ , lorsque  $G_v[\emptyset] = \emptyset$ .

*Preuve :* La preuve se fait par identification de coefficients dans les séries génératrices

appropriées. Posons

$$\mathbf{F}_w(x) = \sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!}, \quad f_n = \sum_{s \in F[n]} w(s) \quad \text{et} \quad \mathbf{G}_v(x) = \sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!}, \quad g_n = \sum_{t \in G[n]} v(t).$$

Alors,

i)  $(\mathbf{F} + \mathbf{G})(x) = \sum_{n \geq 0} h_n x^n/n!, \quad \text{où}$

$h_n = \text{la somme des poids des } (\mathbf{F} + \mathbf{G})\text{-structures sur } [n] = f_n + g_n.$

Donc  $(\mathbf{F} + \mathbf{G})(x) = \mathbf{F}(x) + \mathbf{G}(x).$

ii)  $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(x) = \sum_{n \geq 0} h_n x^n/n!, \quad \text{où}$

$h_n = \text{la somme des poids des } (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})\text{-structures sur } [n]$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |\mathbf{F}[k] \times \mathbf{G}[n-k]| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{(s,t) \in \mathbf{F}[k] \times \mathbf{G}[n-k]} w(s)v(t)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \sum_{s \in \mathbf{F}[k]} w(s) \right) \left( \sum_{t \in \mathbf{G}[n-k]} v(t) \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k g_{n-k}$$

Donc  $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(x) = \mathbf{F}(x) \cdot \mathbf{G}(x).$

iii)  $(\mathbf{F}')(x) = \sum_{n \geq 0} h_n x^n/n!, \quad \text{où}$

$h_n = \text{la somme des poids des } \mathbf{F}'\text{-structures sur } [n] = |\mathbf{F}[n+*]| = f_{n+1}.$

Donc  $\mathbf{F}'_w(x) = \frac{d}{dx} \mathbf{F}_w(x).$

iv)  $(\mathbf{F} \times \mathbf{G})(x) = \sum_{n \geq 0} h_n x^n/n!, \quad \text{où}$

$h_n = \text{la somme des poids des } (\mathbf{F} \times \mathbf{G})\text{-structures sur } [n] = |\mathbf{F}[n] \times \mathbf{G}[n]| = f_n \cdot g_n.$

Donc  $(\mathbf{F}_w \times \mathbf{G}_v)(x) = \mathbf{F}_w(x) \times \mathbf{G}_v(x).$

v)  $(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(x) = \sum_{n \geq 0} h_n x^n/n!, \quad \text{où}$

$h_n = \text{la somme des poids des } (\mathbf{F} \circ \mathbf{G})\text{-structures sur } [n]$

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{n_1+\dots+n_k=n} \frac{1}{k!} \binom{n}{n_1, \dots, n_k} |\mathbf{F}[k] \times \mathbf{G}[n_1] \times \dots \times \mathbf{G}[n_k]|$$

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{n_1+\dots+n_k=n} \frac{1}{k!} \binom{n}{n_1, \dots, n_k} f_k g_{n_1} \cdots g_{n_k}$$

Donc  $(\mathbf{F}_w \circ \mathbf{G}_v)(x) = \mathbf{F}_w(\mathbf{G}_v(x)).$

■

**(1.20) Exemple.** Nous pouvons maintenant calculer le polynôme  $Z_n$  indicateur de cycles du groupe symétrique  $S_n$  (voir l'exemple 1.6). L'isomorphisme  $S_\gamma \cong E(C_\gamma)$  de l'exemple 1.16 donne, par passage aux séries génératrices,

$$\sum_{n \geq 0} Z_n x^n = S_\gamma(x) = E(C_\gamma(x)) = e^{\sum_{i \geq 1} t_i \frac{x^i}{i}}$$

et il n'y a plus qu'à utiliser le développement du multinôme pour expliciter le coefficient de  $x^n$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left( \sum_{i \geq 1} \frac{t_i}{i} x^i \right)^k &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots = k \\ \sigma_i \geq 0}} \binom{k}{\sigma_1, \sigma_2, \dots} \left( \frac{t_1}{1} x^1 \right)^{\sigma_1} \left( \frac{t_2}{2} x^2 \right)^{\sigma_2} \dots \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots = k \\ \sigma_i \geq 0}} \frac{1}{\sigma_1! \sigma_2! \dots} \left( \frac{t_1}{1} \right)^{\sigma_1} \left( \frac{t_2}{2} \right)^{\sigma_2} \dots x^{\sigma_1 + 2\sigma_2 + \dots} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\substack{\sigma_1 + 2\sigma_2 + \dots = n \\ \sigma_i \geq 0}} \frac{1}{\sigma_1! \sigma_2! \dots} \left( \frac{t_1}{1} \right)^{\sigma_1} \left( \frac{t_2}{2} \right)^{\sigma_2} \dots \right) x^n . \end{aligned}$$

**(1.21) Remarque.** Pour être conforme à la définition 1.1 d'une espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée, on devrait décrire non seulement les ensembles de structures mais aussi les transports de ces structures. Nous l'avons fait dans les définitions des espèces somme, produit, dérivée, etc... de deux espèces  $F$  et  $G$  où le transport est défini en termes des transports de  $F$  et de  $G$ . Nous ne l'avons pas fait dans les divers exemples, tout simplement parce qu'en général le transport de structures se fait de façon évidente et peut être résumé intuitivement comme suit : pour transporter une structure le long de la bijection  $f : U \rightarrow V$  vous n'avez qu'à renommer les éléments de l'ensemble sous-jacent par leur image selon  $f$ . Sauf exception, nous sous-entendrons toujours que le transport est fait de cette façon.

**(1.22) Exemple.** La série génératrice de l'espèce  $D_\gamma$  des dérangements pondérée par l'indicateur de cycles s'obtient de celle des permutations en posant  $t_1 = 0$  :

$$S_\gamma(x) = e^{\sum_{i \geq 1} \frac{t_i}{i} x^i} \Rightarrow D_\gamma(x) = e^{\sum_{i \geq 2} \frac{t_i}{i} x^i}$$

Ce résultat s'explique également par la relation combinatoire présentée à l'exemple 1.11 :

$$E_{t_1} D_\gamma \equiv S \Rightarrow D_\gamma(x) = (E_{t_1}(x))^{-1} S_\gamma(x) = e^{-t_1 x} e^{t_1 x + \frac{t_2}{2} x^2 + \dots}$$

**(1.23) Exemple.** Nous voulons énumérer certaines permutations selon leur nombre de cycles, i.e.: en leur donnant le poids  $t^{\text{nb de cycles}}$ . On peut utiliser la méthode de l'exemple précédent et remplacer les indéterminés  $t_1, t_2, \dots$  de l'indicateur de cycles par  $t$ . Un calcul utilisant des équations combinatoires donne les mêmes résultats :

$$(1) \quad C_t(x) = \sum_{n \geq 1} t(n-1)! \frac{x^n}{n!} = t \ln \frac{1}{1-x}$$

$$(2) \quad S_t \equiv E \circ C_t \Rightarrow S_t(x) = E(C_t(x)) = e^{t \ln \frac{1}{1-x}} = \left( \frac{1}{1-x} \right)^t$$

$$(3) \quad E_t D_t \equiv S_t \Rightarrow D_t(x) = e^{-tx} S_t(x) = \left( \frac{1}{e^x (1-x)} \right)^t$$

**(1.24) Exemple.** Si  $f: U \rightarrow U$  est une endofonction de  $U$  et  $a \in U$ , on dit que  $a$  est un point cyclique de  $f$  s'il existe un entier  $v \in \mathbb{N}$  tel que  $f^v(a) = a$ . Considérons l'espèce  $\text{End}_c$  des endofonctions pondérée à l'aide des points cycliques, définie par

$$\forall U \in \mathbb{B}, \quad \text{End}_c[U] = \{ f \mid f: U \rightarrow U \}, \quad c(f) = t^k,$$

où  $k$  est le nombre de points cycliques de  $f$ . Analysons le graphe sagittal d'une endofonction  $f: U \rightarrow U$ . Pour chaque  $u \in U$ , la suite  $u, f(u), f^2(u), \dots$  est éventuellement périodique (puisque  $U$  est fini). Le premier point de la période est un point cyclique de  $f$  qu'on dira *associé à*  $u$ . L'ensemble des éléments de  $U$  qui sont associés à un même point cyclique  $a$  ne contient pas de point cyclique autre que  $a$ , donc

son graphe sagittal est une arborescence enracinée en  $a$  (les flèches, étant toutes orientées vers la racine, peuvent être omises). Les éléments de  $U$  sont donc partagés en une assemblée d'arborescences. De plus, le fait que  $f$  permute entre eux ses points cycliques définit une permutation sur cette assemblée d'arborescences.

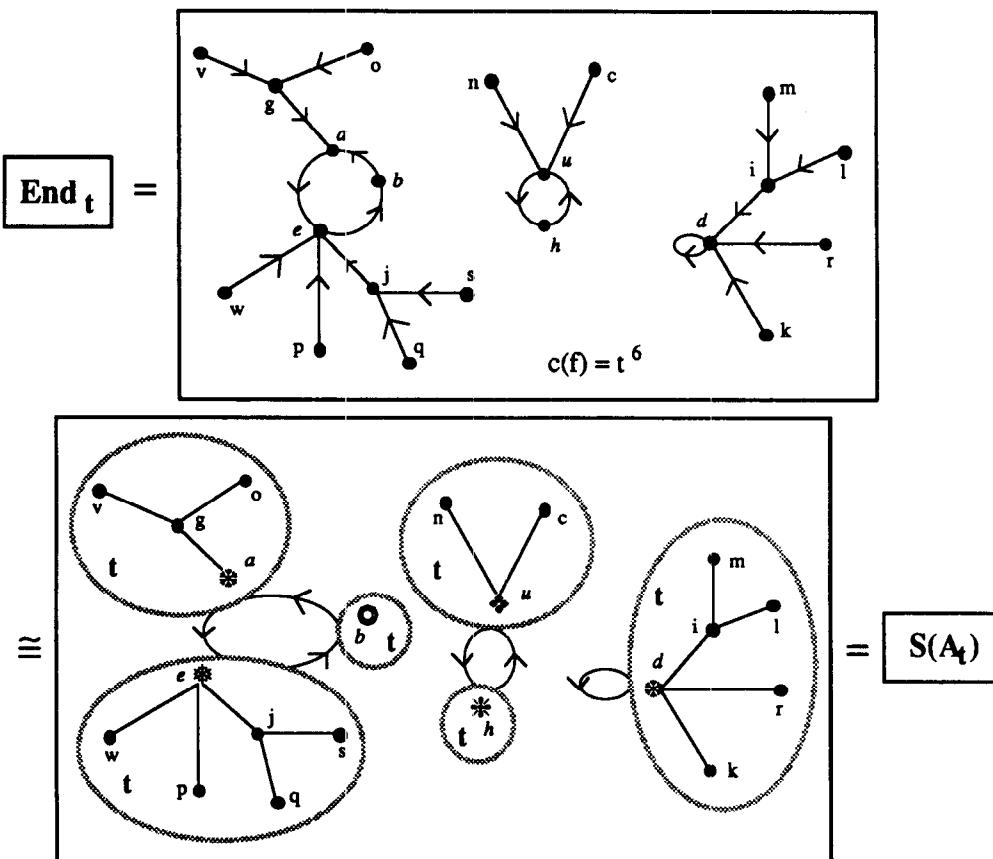


figure 10

Comme l'illustre la figure 10, nous venons de décrire comment transformer une endofonction en une  $S$ -assemblée d'arborescences. Si  $A_t$  désigne l'espèce des arborescences ayant chacune le poids  $t$  et  $S$  l'espèce des permutations, on obtient l'équation combinatoire  $\text{End}_t \cong S(A_t)$ . Puis, par passage aux séries génératrices,

$$\text{End}_t(x) = \frac{1}{1 - tA(x)} , \quad \text{puisque } A_t(x) = tA(x) \text{ et } S(x) = \frac{1}{1 - x} .$$

Donc

$$\text{End}_c(x) = 1 + tA(x) + t^2 A^2(x) + t^3 A^3(x) + \dots$$

Le terme général de  $A^k(x)$  est bien connu :  $A^k = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$  est l'espèce des «*haies de k arborescences*». Or le nombre de haies de  $k$  arborescences est  $|A^{k[n]}| = k! a_n^{(k)}$ , où

$$a_n^{(k)} = \text{nombre de forêts de } k \text{ arborescences} = \frac{k}{n} \binom{n}{k} n^{n-k}$$

(on trouve une jolie preuve combinatoire de cette dernière formule dans [LG1]). Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{End}_c(x) &= \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{f \in \text{End}[n]} c(f) \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{k=1}^n k(n-1)_{\langle k-1 \rangle} t^k n^{n-k} \right) \frac{x^n}{n!}, \end{aligned}$$

où  $n_{\langle k \rangle} = n(n-1) \dots (n-k+1)$  dénote la factorielle décroissante. Remplaçant  $t$  par 1, chaque endofonction est comptée avec un poids 1 et le poids total de  $\text{End}[n]$  devient le nombre d'endofonctions sur  $[n]$ , soit  $n^n$ . On obtient alors l'identité

$$n^n = \sum_{k=1}^n k(n-1)_{\langle k-1 \rangle} n^{n-k}.$$

## §1.3 SÉRIES INDICATRICES

Nous n'avons jusqu'à maintenant considéré que des structures étiquetées, c'est-à-dire construites sur un ensemble d'éléments distinguables. De nombreux problèmes de combinatoire concernent l'énumération des *types (d'isomorphisme)* de structures (ou *structures à isomorphisme près*) et sont en général résolus à l'aide de la théorie de Pólya [PO, traduction anglaise dans PR]. Nous allons maintenant voir comment ce genre de problèmes s'inscrivent dans la théorie des espèces ; nous verrons aussi que le théorème de Pólya s'obtient comme cas particulier de la formule de *pléthysme pondéré* qu'on trouve en (1.33-5).

Pour une espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée  $F_w$ , les *types* de structures sur un ensemble fini  $U$  sont les orbites (classes d'équivalence) de l'action du groupe  $\mathfrak{S}_U$  des permutations de  $U$  sur l'ensemble  $F[U]$  des  $F_w$ -structures sur  $U$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_U \times F[U] &\longrightarrow F[U] \\ (\sigma, s) &\longmapsto \sigma_F \cdot s \end{aligned}$$

Ainsi, deux structures  $s_1, s_2 \in F[U]$  sont *équivalentes* (ou *isomorphes*) s'il existe une permutation  $\sigma$  de  $U$  qui transporte  $s_1$  sur  $s_2$  ( $\sigma_F \cdot s_1 = s_2$ ), l'*orbite* ou le *type* d'une structure  $s$  est

$$\mathcal{O}(s) = \{ s' \in F[U] \mid \exists \sigma \in \mathfrak{S}_U, \sigma \cdot s = s' \},$$

l'ensemble des *types de F-structures* sur  $U$  est

$$\mathcal{O}(F[U]) = \mathcal{O}_{\mathfrak{S}_U}(F_w[U]) = \{ \mathcal{O}(s) \mid s \in F[U] \},$$

toutes les structures d'un type ayant le même poids (le transport préserve le poids), le *poids d'un type* de structures est défini comme étant le poids d'un de ses représentants

$$w(\mathcal{O}(s)) = w(s)$$

et la *série génératrice (ordinaire) des types* de  $F$  est

$$\sum_{n \geq 0} |\mathcal{O}(F_w[n])| x^n,$$

où  $|\mathcal{O}(F_w[n])|$  désigne la somme des poids des types de  $F_w$ -structures sur  $[n]$ . Cette dernière série n'est pas toujours facile à calculer. Joyal [JA1] montre qu'elle est égale à la série génératrice d'une espèce associée  $\tilde{F}$ . Dans le cas pondéré, nous définissons deux espèces associées. La première,  $\tilde{F}_w$ , est l'analogie de  $\tilde{F}$ ; la seconde,  $\tilde{F}_{wI}$ , est reliée au calcul de la série indicatrice de  $F$ .

**(1.25) Définition.** Soit  $F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_A$  une espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée. On définit deux espèces associées à  $F_w$  comme suit:

(1) l'espèce  $\tilde{F}_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_A$  est définie par :

- $\forall U \in \mathbb{E}, \tilde{F}_w[U] = \{(s, \sigma) \mid s \in F[U], \sigma \in \mathfrak{S}_U \text{ et } \sigma_F \cdot s = s\}, w(s, \sigma) = w(s).$
- $\forall f : U \xrightarrow{\sim} V, \tilde{F}_w[f](s, \sigma) = (f_F \cdot s, f \sigma f^{-1}).$

(2) l'espèce  $\tilde{F}_{wI} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{A}\{x_1, x_2, x_3, \dots\}}$  est définie par :

$$- \forall U \in \mathbb{E}, \quad \tilde{F}_{wI}[U] = \{(s, \sigma) \mid s \in F[U], \sigma \in \mathfrak{S}_U \text{ et } \sigma \cdot s = s\},$$

$$wI(s, \sigma) = w(s)I(\sigma),$$

où  $I(\sigma) = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots$  est le monôme indicateur des cycles de  $\sigma$ .

$$- \forall f : U \xrightarrow{\sim} V, \quad \tilde{F}_{wI}[f](s, \sigma) = (f_F \cdot s, f \sigma f^{-1}). \quad \square$$

**(1.26) Proposition.** Soit  $F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{A}}$  une espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée. Alors

$$\tilde{F}_w(x) = \sum_{n \geq 0} |\mathcal{O}(F_w[n])| x^n.$$

**Preuve :** C'est une version pondérée du lemme de Burnside. La preuve utilise le lemme du stabilisateur : Pour toute action  $G \times X \rightarrow X$  d'un groupe fini  $G$  sur un ensemble fini  $X$ , si  $\mathcal{O}(x)$  désigne l'orbite d'un élément  $x \in X$  et  $G_x$  son sous-groupe stabilisateur,  $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ , alors  $|\mathcal{O}(x)| |G_x| = |G|$ . Ici, on considère l'action de  $\mathfrak{S}_n$  sur  $F[n]$  définie par le transport de structures. Un calcul direct montre l'égalité des coefficients de  $x^n$  dans les deux séries génératrices :

$$\begin{aligned} |\mathcal{O}(F_w[n])| &= \sum_{t \in \mathcal{O}(F[n])} w(t) = \sum_{s \in F[n]} \frac{w(s)}{|\mathcal{O}(s)|} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{s \in F[n]} w(s) |G_s| = \frac{1}{n!} \sum_{s \in F[n]} w(s) \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \cdot s = s}} 1 \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{(s, \sigma) \in \tilde{F}[n]} w(s) = \frac{|\tilde{F}_w[n]|}{n!} \end{aligned}$$

■

Puisque le calcul de la série génératrice des types d'une espèce est ramené au calcul de la série génératrice d'une espèce associée, on peut espérer utiliser les opérations entre espèces pour dénombrer les types de structures comme nous l'avons fait à la section 1.1. Malheureusement, cette espèce associée ne commute pas à toutes les opérations ; on constate rapidement que

$$(\tilde{F} + \tilde{G}) \cong \tilde{F} + \tilde{G}, \quad (\tilde{F} \cdot \tilde{G}) \cong \tilde{F} \cdot \tilde{G}, \quad \text{mais} \quad (\tilde{F}(G)) \not\cong \tilde{F}(\tilde{G}).$$

En fait, le nombre de types de structures d'une espèce obtenue par substitution ne dépend pas seulement des nombres de types des espèces utilisées mais aussi de leur structure interne et en général  $\widetilde{F} \circ G(x) \neq \widetilde{F}(\widetilde{G}(x))$ . La recherche d'une solution à ce problème amène Joyal [JA1] à considérer ce qu'il appelle la *série indicatrice* d'une espèce, pour laquelle il obtient un théorème de substitution. Nous effectuons la même démarche dans le cas des espèces pondérées.

(1.27) **Définition.** Soit  $F = F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_A$  une espèce  $A$ -pondérée. La série indicatrice,  $Z_F$ , de  $F$  est définie par

$$Z_F = \sum_d p_F(d) \frac{x^d}{\text{aut } d}$$

où  $d = (d_1, d_2, \dots)$ ,  $\sum_i id_i = n < \infty$

$$x^d = x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots$$

$$\text{aut } d = 1^{d_1} d_1! 2^{d_2} d_2! \dots$$

$$p_F(d) = \sum (w(s) : s \in F[n], \sigma \cdot s = s),$$

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$  étant une permutation de type  $d$  (i.e.: ayant  $d_i$  cycles de longueur  $i$ ).

□

Remarquons que l'expression  $p_F(d)$  ne dépend pas de la permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  choisie. En effet, si  $\sigma$  et  $\varphi$  sont de même type  $d = (d_1, d_2, \dots)$ , alors elles sont conjuguées, donc il existe  $\beta$  telle que  $\sigma = \beta^{-1}\varphi\beta$ , et alors  $\sigma \cdot s = s \Leftrightarrow \varphi\beta \cdot s = \beta \cdot s$ . Ainsi

$$\sum_{\sigma \cdot s = s} w(s) = \sum_{\sigma \cdot s = s} w(\sigma \cdot s) = \sum_{\varphi\beta \cdot s = \beta \cdot s} w(\beta^{-1}\varphi\beta s) = \sum_{\varphi\beta \cdot s = \beta \cdot s} w(\beta s) = \sum_{\varphi \cdot s = s} w(s).$$

Il existe diverses formes d'écriture pour les séries indicatrices. Selon le contexte, nous emploierons indifféremment l'une ou l'autre.

**(1.28) Proposition.** *La série indicatrice d'une espèce pondérée possède les expressions équivalentes suivantes :*

$$(i) \quad Z_F = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{(d_1, d_2, \dots) \\ \sum id_i = n}} p_F(d_1, d_2, \dots) \frac{x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots}{1^{d_1} d_1! 2^{d_2} d_2! \dots}$$

$$(ii) \quad Z_F = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_F(\sigma) I(\sigma)$$

$$(iii) \quad Z_F = \sum_{t \in \mathcal{O}(F)} \frac{w(t)}{|G_t|} \sum_{\sigma \in G_t} I(\sigma)$$

où  $\mathcal{O}(F)$  désigne l'ensemble de tous les types de  $F$ -structures et  $G_t$  le sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n$  stabilisateur d'une structure de type  $t$  (i.e.:  $t = \mathcal{O}(s) \Rightarrow G_t := G_s$ ).

**Preuve :** La formule (i) est une reformulation de la définition. L'équivalence avec les formules (ii) et (iii) repose encore sur le lemme du stabilisateur (énoncé à la proposition 1.27). En effet, pour

(ii) considérer l'action  $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n : (\tau, \sigma) \mapsto \tau^{-1}\sigma\tau$  et remarquer que si  $\beta = \tau^{-1}\sigma\tau$  alors  $p_F(\sigma) I(\sigma) = p_F(\beta) I(\beta)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_F(\sigma) I(\sigma) &= \frac{1}{n!} \sum_{d \in \mathcal{O}(\mathfrak{S}_n)} \sum_{\sigma \in d} p_F(\sigma) I(\sigma) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{d \in \mathcal{O}(\mathfrak{S}_n)} |d| p_F(d) I(d) = \sum_{\substack{d = (d_1, d_2, \dots) \\ \sum id_i = n}} p_F(d) \frac{x^d}{\text{aut } d} \end{aligned}$$

(iii) considérer l'action  $\mathfrak{S}_n \times F[n] \rightarrow F[n] : (\sigma, s) \mapsto \sigma \cdot s$  (le transport de structures):

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_F(\sigma) I(\sigma) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\substack{s \in F[n] \\ \sigma \cdot s = s}} w(s) I(\sigma) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{s \in F[n]} w(s) \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \cdot s = s}} I(\sigma) = \frac{1}{n!} \sum_{t \in \mathcal{O}(F[n])} \sum_{s \in t} w(s) \sum_{\sigma \in G_t} I(\sigma) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{t \in \mathcal{O}(F[n])} |t| w(t) \sum_{\sigma \in G_t} I(\sigma) = \sum_{t \in \mathcal{O}(F[n])} \frac{w(t)}{|G_t|} \sum_{\sigma \in G_t} I(\sigma). \end{aligned}$$

Même si elles ne caractérisent pas les espèces (voir [LJ2] pour un exemple d'espèces non isomorphes qui ont la même série indicatrice), les séries indicatrices contiennent beaucoup d'information structurelle. On y retrouve entre-autre les dénombrements des structures et des types de structures, et nous verrons au chapitre 3 qu'on peut en extraire un *q-analogue* de la suite  $(|F[n]|)_{n \geq 0}$ .

**(1.29) Proposition.** Soit  $F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_A$  une espèce  $A$ -pondérée. La série génératrice de  $F$  ainsi que celle de ses types s'obtiennent de la série indicatrice par spécialisation des variables, comme suit :

- (i)  $Z_F(x, 0, 0, \dots) = F_w(x)$
- (ii)  $Z_F(x, x^2, x^3, \dots) = \tilde{F}_w(x)$

*Preuve :* (i) Après évaluation,

$$Z_F(x, 0, 0, \dots) = \sum_d p_F(d) \frac{x^d}{\text{aut } d} \quad \Big|_{x := (x, 0, 0, \dots)},$$

les seuls termes non nuls de cette somme sont de la forme  $p_F(n, 0, 0, \dots) x^n/n!$ ,  $n \geq 0$ .

Or la seule permutation de type  $(n, 0, 0, \dots)$  est *id* et

$$p_F(id) = \sum_{\substack{s \in F[n] \\ id \cdot s = s}} w(s) = |F_w[n]|,$$

donc  $Z_F(x, 0, 0, \dots) = \sum_{n \geq 0} |F_w[n]| x^n/n!$ .

(ii) D'après la proposition (1.28-ii),

$$\begin{aligned} Z_F(x, x^2, x^3, \dots) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_F(\sigma) I(\sigma) \quad \Big|_{x_1 := x, x_2 := x^2, x_3 := x^3, \dots} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_F(\sigma) x^{\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 + \dots} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\substack{s \in F[n] \\ \sigma \cdot s = s}} w(s) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{(s, \sigma) \in \tilde{F}[n]} w(s) \frac{x^n}{n!} = \tilde{F}_w(x). \end{aligned}$$

■

**(1.30) Exemple.** Pour chaque ensemble  $U \in \mathbb{B}$ , l'espèce  $C_U$  (cycles pondérés par la longueur du cycle, exemple 1.6) ne possède qu'un seul type. La série génératrice de ses types est donc  $\tilde{C}_U(x) = \sum_{n \geq 1} t_n x^n$ . Utilisons la troisième formule, proposition 1.28 (iii), pour calculer sa série indicatrice :

$$Z_{C_U} = \sum_{n \geq 1} \frac{t_n}{|G_t|} \sum_{\sigma \in G_t} I(\sigma).$$

Or  $G_t = \{1, c, c^2, \dots, c^{n-1}\}$  pour  $c \in C[n]$ , donc

$$\begin{aligned} Z_C &= \sum_{n \geq 1} \frac{t_n}{n} \sum_{i=1}^n I(c^i) \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{t_n}{n} \sum_{d|n} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ (i,n)=d}} x_{n/d}^d && (\text{Ici } I(c^i) = x_{n/d}^d) \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{t_n}{n} \sum_{d|n} \varphi(n/d) x_{n/d}^d, \end{aligned}$$

$\varphi$  étant la fonction d'Euler ( $[(i,n) = d \iff (i/d, n/d) = 1] \Rightarrow \#\{i \mid (i,n) = d\} = \varphi(n/d)$ ).

Ainsi

$$Z_{C_U} = \sum_{n \geq 1} \frac{t_n}{n} \sum_{k|n} \varphi(k) x_k^{n/k} = \sum_{i,j \geq 1} \frac{t_{ij}}{ij} \varphi(i) x_i^j.$$

On retrouve bien

$$Z_C(x, 0, 0, \dots) = \sum_{j \geq 1} \frac{t_j}{j} x^j = C(x)$$

et l'égalité

$$Z_C(x, x^2, x^3, \dots) = \sum_{n \geq 1} \frac{t_n}{n} \sum_{k|n} \varphi(k) x^n = \tilde{C}(x)$$

nous redonne l'identité bien connue  $\sum_{k|n} \varphi(k) = n$ .

**(1.31) Proposition.** Soit  $F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_A$  une espèce  $A$ -pondérée. On a :

$$\tilde{F}_{wI}(u) \Big|_{u=1} = Z_{F_w}.$$

**Preuve :** En effet, il suffit de calculer la série génératrice de l'espèce  $\tilde{F}_{wI}$  associée à

$F_w$  (définition 1.25 (2)) pour trouver la série indicatrice  $Z_F$  de  $F$  :

$$\tilde{F}_{wI}(u) = \sum_{n \geq 0} |\tilde{F}_{wI}[n]| \frac{u^n}{n!}$$

où

$$|\tilde{F}_{wI}[n]| = \sum_{(s, \sigma) \in \tilde{F}_{wI}[n]} w(s) I(\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\substack{s \in F[n] \\ \sigma \cdot s = s}} w(s) I(\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_F(\sigma) I(\sigma)$$

donc, d'après la formule (ii) (proposition 1.28),

$$\tilde{F}_{wI}(u) \Big|_{u=1} = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_F(\sigma) I(\sigma) \right) \frac{u^n}{n!} \Big|_{u=1} = Z_{F_w}.$$

■

(1.32) **Exemple.** La série indicatrice  $Z_E$  de l'espèce (pondérée par le poids 1) des ensembles est

$$Z_E = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{(d_1, d_2, \dots) \\ \sum id_i = n}} \frac{x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots}{1^{d_1} d_1! 2^{d_2} d_2! \dots}$$

Avec la proposition précédente, on obtient directement une expression pour cette somme :

$$\tilde{E}_I[U] = \{ (U, \sigma) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_U \} \cong S_\gamma[U],$$

donc  $\tilde{E}_I \cong S_\gamma \cong E \circ C_\gamma$  et

$$\tilde{E}_I(u) = S_\gamma(u) = E \circ C_\gamma(u) = \exp \left( \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{n} u^n \right).$$

D'où

$$Z_E = \tilde{E}_I(u) \Big|_{u=1} = \exp \left( \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{n} \right).$$

Dans les exemples précédents nous avons calculé directement certaines séries indicatrices. En général, nous préférons utiliser les liens combinatoires entre les structures considérées. Il suffit pour cela de connaître le comportement des séries indicatrices devant les opérations sur les espèces.

(1.33) Théorème. Soit  $F_w$  et  $G_v$  deux espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées. On a :

$$(1) \quad Z_{F_w + G_v} = Z_{F_w} + Z_{G_v}$$

$$(2) \quad Z_{F_w \cdot G_v} = Z_{F_w} \cdot Z_{G_v}$$

$$(3) \quad Z_{F_w'} = \frac{\partial}{\partial x_1} Z_{F_w}$$

$$(4) \quad Z_{F_w \times G_v} = Z_{F_w} \times Z_{G_v}$$

$$(5) \quad Z_{F_w \circ G_v} = Z_{F_w} \circ Z_{G_v} := Z_{F_w} \left( \left( Z_{G_v} \right)_1, \left( Z_{G_v} \right)_2, \left( Z_{G_v} \right)_3, \dots \right)$$

Dans (4), l'opération  $\times$  de droite doit être interprétée comme le produit terme à terme des coefficients de  $x^d$ /aut  $d$  (que nous appellerons *produit de Hadamard pour les séries indicatrices*). Dans (5), on suppose que  $G[\emptyset] = \emptyset$ , la fonction de poids  $v^n$  est définie par  $v^n(s) := (v(s))^n$  et l'expression  $(Z_G)_n$  désigne la série obtenue en effectuant la substitution  $x_i := x_{ni}$  dans la série indicatrice  $Z_G$  :

$$\left( Z_G \right)_n (x_1, x_2, x_3, \dots) := Z_G(x_1, x_2, x_3, \dots) \Big|_{\substack{x_i := x_{ni}}} = Z_G(x_n, x_{2n}, x_{3n}, \dots)$$

*Preuve* : Pour l'instant, nous ne donnons que la preuve de (2) ; les règles (1), (3) et (4) se démontrent de façon semblable et sont laissées au lecteur. La formule de *substitution pléthystique pondérée* que nous donnons en (5) demande quelques développements et sera prouvée à la section suivante.

(2) Selon la définition de série indicatrice (1.27), il faut vérifier que pour chaque  $d = (d_1, d_2, \dots)$ ,  $\sum i d_i = n$ , on a

$$\frac{p_{F \cdot G}(d)}{\text{aut } d} = \sum_{d'+d''=d} \frac{p_F(d') p_G(d'')} {\text{aut } d' \text{ aut } d''} ,$$

où  $d'+d'' = (d'_1 + d''_1, d'_2 + d''_2, \dots)$ . D'une part, on remarque que

$$\frac{n!}{\text{aut } d} p_{F \cdot G}(d) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \text{ de type } d}} p_{F \cdot G}(d) .$$

D'autre part, d'après la définition (1.10) du produit d'espèces, on a

$$\begin{aligned}
 n! \sum_{d'+d''=d} \frac{p_F(d') p_G(d'')}{\text{aut } d' \text{ aut } d''} &= \sum_{d'+d''=d} \binom{n}{n'} \frac{n'!}{\text{aut } d'} \frac{n''!}{\text{aut } d''} p_F(d') p_G(d'') \\
 &= \sum_{d'+d''=d} \binom{n}{n'} \frac{n'!}{\text{aut } d'} \frac{n''!}{\text{aut } d''} \left( \sum_{\substack{s=(s',s'') \in F \cdot G[n] \\ \sigma \cdot s' = s', \sigma \cdot s'' = s''}} w(s') v(s'') \right) \\
 &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \text{ de type } d}} \sum_{s \in F \cdot G[n]} \text{poids}(s) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \text{ de type } d}} p_{F \cdot G}(d)
 \end{aligned}$$

■

**(1.34) Corollaire.** Soit  $F_w$  et  $G_v$  deux espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées. Si  $G[\emptyset] = \emptyset$ , alors

$$\tilde{F}(G)(x) = Z_F\left(\tilde{G}_v(x), \tilde{G}_{v^2}(x^2), \tilde{G}_{v^3}(x^3), \dots\right).$$

**Preuve :** C'est une conséquence de (1.33-5) et de (1.29-ii) :

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(G)(x) &= Z_{F(G)}(x_1, x_2, x_3, \dots) \Big|_{x_i=x^i} \\
 &= Z_F\left(\left(Z_{G_v}\right)_1 \Big|_{x_i=x^i}, \left(Z_{G_{v^2}}\right)_2 \Big|_{x_i=x^i}, \left(Z_{G_{v^3}}\right)_3 \Big|_{x_i=x^i}, \dots\right)
 \end{aligned}$$

où

$$(Z_G)_n \Big|_{x_i=x^i} = Z_G(x_n, x_{2n}, x_{3n}, \dots) \Big|_{x_i=x^i} = Z_G(x^n, x^{2n}, x^{3n}, \dots) = \tilde{G}(x^n).$$

■

**(1.35) Exemple.** Considérons l'espèce  $S_\gamma$  des permutations pondérées par l'indicateur de cycles (1.16). Les types de cette espèce correspondent aux partages d'entiers et le poids d'un type est une description du partage :  $t_1^{d_1} t_2^{d_2} t_3^{d_3} \dots$  pour  $d_i$  parts de taille  $i$ . Ainsi la fonction génératrice des types contient une énumération de tous les partages d'entiers, groupés selon leur cardinalité (la taille de l'entier partagé). On obtient une expression pour cette somme à l'aide du corollaire précédent :

$$\tilde{S}_\gamma(x) = E(C_\gamma)(x), \quad \tilde{C}_\gamma(x) = \sum_{n \geq 1} t_n x^n \quad \text{et} \quad Z_E = e^{x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \dots}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}_\gamma(x) &= Z_E \left( \mathfrak{C}_\gamma(x), \mathfrak{C}_{\gamma'}(x^2), \dots \right) \\ &= e^{\sum_{n \geq 1} t_n x^n + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} t_n^2 x^{2n} + \dots} = e^{\sum_{n \geq 1} -\ln(1 - t_n x^n)} \\ &= \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - t_n x^n},\end{aligned}$$

ce qui est un produit infini plus raffiné que celui d'Euler pour les partages d'entiers.

#### §1.4 DEUX EXEMPLES CLASSIQUES

Lorsqu'il s'agit d'énumérer des types de graphes suivant un paramètre descriptif (par exemple leur nombre d'arêtes), on trouve habituellement des solutions faisant appel au théorème de Pólya. Nous allons, par quelques exemples, montrer comment ce genre de problèmes peuvent être traités efficacement à l'aide de la théorie des espèces pondérées ; chaque cas sera ramené à une application simple de la formule de substitution pléthystique. Mais d'abord nous voulons montrer que le théorème de Pólya lui-même est une conséquence de cette formule.

Afin de bien situer le lecteur, nous énoncerons le théorème de Pólya [PO,PR] dans sa forme classique. Puis nous verrons que les hypothèses de ce théorème sont réalisées en considérant une espèce  $F$  obtenue par substitution d'une espèce pondérée très simple dans une espèce *moléculaire* (voir remarque 1.37-1) bien choisie et que le problème, vu de cette façon, revient au calcul de la série génératrice des types de  $F$ .

**(1.36) Exemple.** Soit  $D, R$  deux ensembles finis,  $|D| = d$ ,  $w : R \rightarrow \mathbb{A}$  une fonction et  $G \hookrightarrow \mathfrak{S}_D$  un groupe de permutations de  $D$ . La fonction  $w$  s'étend à l'ensemble  $R^D$  des fonctions  $f : D \rightarrow R$  en définissant le poids  $w(f)$  par  $w(f) := \prod_{x \in D} w(f(x))$ . Sur

cet ensemble de fonctions, considérons la relation d'équivalence  $\equiv$  définie par

$$\begin{array}{ccc} \exists g & \begin{array}{c} D \xrightarrow{f} R \\ \downarrow \\ D \end{array} & f \equiv f' \\ & \nearrow f' & \text{ssi} \\ & & \exists g \in G, fg = f'. \end{array}$$

Il est clair que cette relation préserve les poids,  $f \equiv f' \Rightarrow w(f) = w(f')$ . On peut donc définir le poids d'une classe d'équivalence comme étant le poids d'un de ses représentants. Le problème qui nous intéresse est le suivant : on voudrait faire *l'inventaire*, c'est-à-dire calculer la somme des poids des classes d'équivalence. Le théorème de Pólya donne une réponse en termes de  $Z_{G:D}$ , le polynôme indicateur de cycles de l'action de  $G$  sur  $D$  :

$$\sum_{\bar{f}^* \in R^{D/\equiv}} w(\bar{f}) = Z_{G:D} \left( \sum_{r \in R} w(r), \sum_{r \in R} (w(r))^2, \dots \right),$$

où  $\bar{f}^*$  désigne la classe d'équivalence de  $f$  selon la relation  $\equiv$  et  $Z_{G:D}$  est défini par

$$Z_{G:D} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} I(G)$$

(on peut aussi considérer un groupe  $H$  agissant sur  $D$ ,  $H \times D \rightarrow D : (h,x) \mapsto h \cdot x$ , et appeler  $G$  le sous-groupe de  $\mathfrak{S}_D$  défini par cette action,  $G = \{g \in \mathfrak{S}_D \mid \exists h \in H, \forall x \in D, g(x) = h \cdot x\}$  ; dans ce cas, le polynôme indicateur de cycles est  $Z_{H:D} := (1/|H|) \sum_{h \in H} I(h^*)$ ,  $h^* \in \mathfrak{S}_D$  étant la permutation définie par  $h^*(x) = h \cdot x$ , et on remarque que  $Z_{H:D} = Z_{G:D}$ ).

Pour traiter ce problème avec les outils de la théorie des espèces, nous allons, pour chaque ensemble fini  $U$ , étiqueter les éléments de  $D$  à l'aide de ceux de  $U$  (en tenant compte des équivalences imposées par  $G$ ) et faire suivre cet étiquetage d'une fonction vers  $R$  pondérée adéquatement ; puis nous oublierons les étiquettes en passant aux types de structures et constaterons que l'inventaire cherché est précisément le coefficient de  $x^d$  dans la série génératrice des types. Pour ce faire, définissons les espèces  $X_w$ ,  $M_G$  et  $F$  comme suit :

- $X_w := \sum_{r \in R} X_{w(r)}$  où, pour chaque  $r \in R$ ,  $X_{w(r)}$  est l'espèce des singlets pondérés par le poids  $w(r)$ .

- $M_G$  est une espèce de bijections :

$\forall U \in \mathbb{B}, M_G[U] = \text{Bij}(D, U)/\approx$ , où  $\text{Bij}(D, U) = \{\varphi : D \rightarrow U \mid \varphi \text{ bijection}\}$

et  $\approx$  est la relation d'équivalence définie par

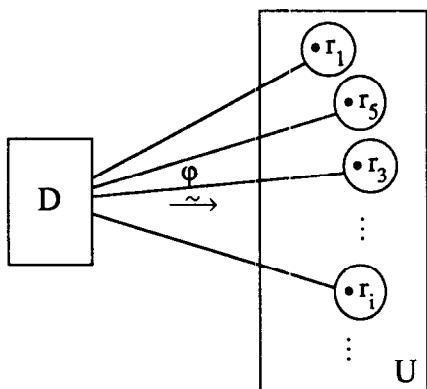
$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\varphi} & U \\ \exists g \downarrow & \nearrow \psi & \\ D & \xrightarrow{\psi} & \end{array} \quad \begin{array}{l} \varphi \approx \psi \\ \text{ssi} \\ \exists g \in G, \psi g = \varphi, \end{array}$$

$\forall \sigma : U \xrightarrow{\sim} V$ , le transport des  $M_G$ -structures se fait via des représentants des classes d'équivalences,  $\sigma_M \cdot \bar{\varphi}^\sim = \bar{\psi}^\sim \Leftrightarrow \sigma \circ \varphi \approx \psi \Leftrightarrow \exists g \in G, \sigma \circ \varphi = \psi \circ g$ :

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\varphi} & U \\ g \downarrow & & \downarrow \sigma \\ D & \xrightarrow{\psi} & V \end{array}$$

- $F := M_G(X_w)$ .

Tout comme l'espèce  $M_G$ , l'espèce  $F$  est portée par la cardinalité  $d$  et après examen (figure 11), les  $F$ -structures sont vues comme des couples  $s = (\bar{\varphi}^\sim, U \xrightarrow{c} R)$  ayant poids  $w(s) = \prod_{u \in U} w(c(u))$ . Il est alors facile d'associer à une structure  $s = (\bar{\varphi}^\sim, c)$  la fonction  $f = c \circ \varphi : D \rightarrow R$ .



$$s \in F[U] = M_G(X_w)[U]$$

$$s = \left( \bar{\varphi}^\sim, U \xrightarrow{c} R \right)$$

$$w(s) = w(r_1)w(r_5)w(r_3) \cdots w(r_i) \cdots$$

$$\begin{array}{c} D \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{c} R \\ f = c \circ \varphi \end{array}$$

figure 11

On s'assure que les types de  $F$ -structures sur  $U$  sont en bijection avec les classes d'équivalence selon  $\equiv$  des fonctions  $f \in R^D$  en considérant l'application

$$\begin{array}{ccc} F[U] & \xrightarrow{\Phi} & R^D/\equiv \\ s = (\bar{\varphi}^\sim, c) & \longmapsto & \bar{f}^\equiv = \bar{c} \bar{\varphi}^\equiv \end{array}$$

et en vérifiant (les détails sont laissés au lecteur) que

(1)  $\Phi$  est bien définie, c'est-à-dire :

$$\bar{\varphi}^* = \bar{\psi}^* \Rightarrow \bar{c}\bar{\varphi}^* = \bar{c}\bar{\psi}^*,$$

(2)  $\Phi$  est compatible avec les types de  $F$ -structures, c'est-à-dire :

$$s' = \sigma_F \cdot s \Rightarrow \Phi(s') = \Phi(s),$$

(3)  $\Phi$  est surjective : pour  $f: D \rightarrow R$ , prendre  $\varphi: D \xrightarrow{\sim} U$  quelconque, poser  $c = f \circ \varphi^{-1}$  et alors  $s = (\bar{\varphi}^*, c)$  satisfait  $\Phi(s) = \bar{f}^*$ ,

(4)  $\Phi$  préserve les poids, c'est-à-dire :

$$w(s) = w(\Phi(s)).$$

Les observations (1), (2), (3) et (4) impliquent qu'il existe une bijection entre l'ensemble  $F[U]/\equiv$  des types de  $F$ -structures sur  $U$  et l'ensemble  $R^D/\equiv$  des classes d'équivalence,

$$\begin{array}{ccc} F[U] & \xrightarrow{\Phi} & R^D/\equiv \\ & \searrow & \uparrow \exists \text{ bijection} \\ & & F[U]/\equiv \end{array}$$

et que cette bijection préserve les poids. On en conclut que l'inventaire est égal à la somme des poids des types de  $F$ -structures, c'est-à-dire le coefficient de  $x^d$  dans  $\tilde{F}(x)$ . Or, d'après le corollaire (1.34),

$$\tilde{F}(x) = Z_{M_G} \left( \tilde{X}_w(x), \tilde{X}_{w^2}(x), \dots \right) = Z_{M_G} \left( \left( \sum_{r \in R} w(r) \right) x, \left( \sum_{r \in R} (w(r))^2 \right) x^2, \dots \right)$$

et puisque cette série ne comporte que des termes en  $x^d$  on peut écrire

$$\tilde{F}(x) = Z_{M_G} \left( \left( \sum_{r \in R} w(r) \right), \left( \sum_{r \in R} (w(r))^2 \right), \dots \right) x^d.$$

Nous n'avons plus qu'à calculer la série indicatrice de l'espèce  $M_G$ . Ceci peut être fait directement en utilisant la formule (1.28-iii) et en remarquant que :

- (i)  $M_G$  est portée par la cardinalité  $d$  et il n'y a qu'un seul type de  $M_G$ -structures, car  $\forall \varphi, \psi: D \xrightarrow{\sim} U, \exists \sigma (= \psi \circ \varphi^{-1}) \in \mathfrak{S}_U, \sigma_M \cdot \varphi = \psi$ ,
- (ii) toutes les  $M_G$ -structures ont le même groupe d'automorphisme et celui-ci est isomorphe au groupe  $G$ , car

$$\sigma \in Aut(\bar{\varphi}^*) \Leftrightarrow \sigma_M \cdot \bar{\varphi}^* = \bar{\varphi}^* \Leftrightarrow \sigma \circ \varphi = \varphi \Leftrightarrow \exists g \in G, \sigma \circ \varphi = \varphi \circ g,$$

ce qui permet de définir un isomorphisme entre  $G$  et  $\text{Aut}(\overline{\phi}^{\infty})$ .

Donc

$$Z_{M_G} = \sum_{t \in \mathfrak{G}(M_G)} \frac{1}{|\text{Aut}(t)|} \sum_{\sigma \in \text{Aut}(t)} I(\sigma) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} I(g) = Z_{GD}.$$

D'où

$$\tilde{F}(x) = Z_{GD} \left( \left( \sum_{r \in R} w(r) \right), \left( \sum_{r \in R} (w(r))^2 \right), \dots \right) x^d.$$

### (1.37) Remarques.

(1) L'espèce  $M_G$  est une espèce *moléculaire*, c'est-à-dire indécomposable sous la somme ( $M \neq 0$  et  $(M = P + Q \Rightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0)$ ), ce qui est équivalent au fait qu'il n'y a qu'un seul type de  $M_G$ -structures. C'est l'espèce que Yeh dénote  $X^d/G$ . On retrouve des études plus ou moins détaillées de la notion d'*espèce moléculaire, espèce multisorte moléculaire* et de *S-espèce moléculaire* dans [BY, LG2, LJ2, UW, YY1 et YY2]. Un traitement semblable peut être fait pour les *espèces pondérées moléculaires*.

(2) Lorsque toutes les structures d'une espèce donnée ont le même poids  $p$ , ce qui est le cas pour les espèces moléculaires, ou lorsque leurs poids ont un facteur commun ou lorsqu'on veut indiquer que les poids de toutes les structures sont multipliés par  $p$ , nous conviendrons de placer ce facteur commun entre parenthèses :  $F_{(p)}$ . Étant donné que ce poids sort en facteur des séries génératrices et indicatrices de l'espèce,

$$F_{(p)}(x) = p \cdot F(x) \quad \text{et} \quad Z_{F_{(p)}} = p \cdot Z_F,$$

on peut être tenté d'utiliser la notation  $pF$  pour désigner l'espèce  $F_{(p)}$ . Nous ne l'avons pas fait jusqu'à présent et nous continuerons d'éviter cette pratique parce que d'une part elle ne simplifie pas la notation et d'autre part elle peut introduire une confusion entre les notions de *K-espèce* (*K-combinaison linéaire d'espèces moléculaires* au sens de Yeh [YY2]) et *espèce K-pondérée*. Ces deux notions sont fondamentalement différentes puisque les transports ne s'effectuent pas de la même façon et qu'en général les espèces n'ont même pas le même nombre de structures! On peut s'en convaincre en

examinant l'exemple suivant : si  $M$  est une espèce moléculaire alors

$$F = 5M \cong 2M + 3M \text{ mais } G = M_{(5)} \not\cong M_{(2)} + M_{(3)},$$

où  $F$  est une  $\mathbb{Z}$ -espèce et  $G$  est une espèce  $\mathbb{Z}$ -pondérée. Cette possibilité de confusion peut s'avérer désastreuse lorsqu'il s'agit de calculer la série indicatrice d'une substitution d'espèces. Pour les séries génératrices, tout va bien et on obtient même de jolies formules lorsqu'il s'agit de substituer dans l'espèce  $E$  des ensembles :

$$E^{\circ}F_{(p)}(x) = e^{pF(x)} = E^{\circ}pF(x) = (E^{\circ}F(x))^p.$$

Par contre, on doit être prudent lors du passage aux séries indicatrices : lorsque  $p$  est un coefficient d'une  $\mathbb{K}$ -espèce, il est vrai que

$$Z_{E^{\circ}pF} = Z_E \circ pZ_F = Z_E \left( p(Z_F)_1, p(Z_F)_2, \dots \right) = (Z_E \circ Z_F)^p,$$

mais lorsque  $p$  est un poids commun à toutes les structures, la formule de substitution (1.34-5) donne

$$Z_{E^{\circ}F_{(p)}} = Z_E \left( p(Z_F)_1, p^2(Z_F)_2, p^3(Z_F)_3, \dots \right),$$

et en général  $Z_{E^{\circ}pF} \neq Z_{E^{\circ}F_{(p)}}$ .

(3) Il y a plusieurs façons d'introduire le théorème de Pólya dans la théorie des espèces. Par exemple, dans le texte de Unger [UW chap.5-2] on trouve un modèle légèrement différent qui n'utilise pas de formule générale de pléthysme. Celui que nous venons de présenter a l'avantage de bien situer le théorème de Pólya par rapport à la substitution pléthystique générale : il s'agit d'un cas très particulier et la substitution d'espèces pondérées est une généralisation de la situation classique décrite par Pólya.

Le fait qu'on puisse démontrer le théorème de Pólya à l'intérieur de la théorie des espèces s'avère très intéressant d'un point de vue calculatoire. Des exemples faisant habituellement appel à ce résultat seront simplifiés par un choix judicieux d'espèces et un calcul direct de séries génératrices de types. Considérons par exemple la situation suivante :

$$D \xrightarrow{f} \{0, 1\} \xrightarrow{w} \{1, t\}, \quad \mathfrak{S}_n \times D \rightarrow D$$

où  $w(0) = 1$  et  $w(1) = t$ . Il s'agit du schéma utilisé classiquement pour dénombrer les types de graphes. La fonction  $f$  effectue un choix d'un sous-ensemble de  $D$ , les éléments de ce sous-ensemble se voient attribuer le poids  $t$  par la fonction  $w$ . En définissant  $D$  de façon appropriée, le polynôme indicateur de cycles  $Z_{\mathfrak{S}_n \times D}$  de l'action considérée permet d'effectuer l'inventaire de divers types de graphes, énumérés selon leur nombre d'arêtes :

- les *graphes non orientés sans boucles*, lorsque  $D = \binom{[n]}{2}$  (l'ensemble des parties à deux éléments de  $[n]$ ),
- les *graphes non orientés*, lorsque  $D = \binom{[n]}{2} + [n]$ ,
- les *graphes orientés sans boucles*, lorsque  $D = [n]^{[2]}$  (l'ensemble des paires ordonnées d'éléments distincts de  $D$ ),
- les *graphes orientés*, lorsque  $D = [n] \times [n]$ .

Nous allons calculer les polynômes qui énumèrent ces graphes selon leur nombre d'arêtes en utilisant les méthodes de la théorie des espèces. Dans ce but, nous introduisons une nouvelle opération entre espèces :

**(1.38) Définition.** Soit  $F$  une espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée et  $G$  une espèce ordinaire.

L'espèce *composition fonctorielle* de  $F$  et  $G$ , notée  $F \square G$ , est définie par :

- $\forall U \in \mathbb{B}, \quad F \square G[U] = F[G[U]]$  (l'ensemble de toutes les  $F$ -structures ayant  $G[U]$  pour ensemble sous-jacent).
- $\forall f : U \xrightarrow{\sim} V, \quad F \square G[f] = F[G[f]]$ .

□

**(1.39) Théorème.** Soit  $F$  une espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée et  $G$  une espèce ordinaire.

Alors

$$Z_{F \circ G} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} p_F(\beta_1, \beta_2, \dots) I(\sigma),$$

où  $\beta_k = c_k(G[\sigma])$  est le nombre de cycles de longueur  $k$  dans  $G[\sigma]$ . De plus, ce nombre est complètement caractérisé par  $\beta_1 = c_1(G[\sigma]) = p_G(\sigma)$  (i.e.: par la connaissance de  $Z_G$ ) ; on a les formules

$$\beta_k = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(k/d) p_G(\sigma^d) \quad \text{et} \quad c_r(\sigma^d) = \sum_{\substack{\delta|d \\ (r, d/\delta) = 1}} \delta c_{r\delta}(\sigma).$$

*Preuve :* La définition de  $F \circ G$  nous donne que  $p_{F \circ G}(s) = p_F(\beta_1, \beta_2, \dots)$  avec  $\beta_k = c_k(G[\sigma])$ . Maintenant, si  $\sigma$  est une permutation ayant  $\sigma_k$  cycles de longueur  $k$  et si  $z_1, z_2, \dots$  sont des permutations circulaires de longueur  $1, 2, \dots$ , alors on peut écrire que le type cyclique de  $\sigma$  est

$$cyc(\sigma) = cyc(\sigma_1 z_1 + \sigma_2 z_2 + \dots + \sigma_k z_k + \dots)$$

et celui de  $\sigma^d$  sera donc

$$cyc(\sigma^d) = cyc(\sigma_1 z_1^d + \sigma_2 z_2^d + \dots + \sigma_k z_k^d + \dots).$$

Mais il est facile de voir que  $cyc(z_k^d) = cyc((k,d)z_{k/(k,d)})$ , où  $(k,d)$  désigne le plus grand commun diviseur de  $k$  et  $d$ . Donc

$$cyc(\sigma^d) = cyc \sum_{k \geq 1} (k,d) \sigma_k z_{k/(k,d)} = cyc \sum_{r \geq 1} \left( \sum_{k/(k,d) = r} (k,d) \sigma_k \right) z_r$$

et en posant  $\delta = (k,d)$ , i.e.:  $k = r\delta$ ,  $d = \rho\delta$  avec  $(\rho, \delta) = 1$ , on obtient :

$$c_r(\sigma^d) = \sum_{k/(k,d) = r} (k,d) \sigma_k = \sum_{\substack{\delta|d \\ (r, d/\delta) = 1}} \delta \sigma_{r\delta}.$$

Un cas particulier de cette dernière formule nous donne  $c_1(\beta^k) = \sum_{d|k} d \beta_d$ . D'où, par inversion de Möbius,

$$\beta_k = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(k/d) c_1(\beta^d).$$

Et lorsque  $\beta = G[\sigma]$  on remarque que  $\beta^d = (G[\sigma])^d = G[\sigma^d]$  puisque  $G$  est un foncteur, ce qui permet de conclure :

$$c_k(G[\sigma]) = \beta_k = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(k/d) c_1(G[\sigma^d]) = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(k/d) p_G(\sigma^d).$$

■

**(1.40) Corollaire.** Pour toute permutation  $\sigma \in S_n$  de type  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$  on a :

$$(1) \quad \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(k/d) c_1(\sigma^d) = \sigma_k,$$

$$(2) \quad \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(k/d) (c_1(\sigma^d))^2 = \sum_{[k_1, k_2] = k} (k_1, k_2) \sigma_{k_1} \sigma_{k_2},$$

où  $[k_1, k_2]$  dénote le plus petit commun multiple de  $k_1$  et  $k_2$  et  $(k_1, k_2)$  leur plus grand commun diviseur,

$$(3) \quad \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(k/d) c_2(\sigma^d) = \begin{cases} \sigma_{2k} & \text{si } k \text{ impair} \\ \sigma_{2k} - \frac{1}{2} \sigma_k & \text{si } k \text{ pair.} \end{cases}$$

**Preuve :** On somme chacune de ces expressions à l'aide d'une inversion de Möbius :

$$(1) \quad \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(k/d) c_1(\sigma^d) = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(k/d) \sum_{\delta|d} \delta \sigma_\delta = \frac{1}{k} k \sigma_k,$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(k/d) (c_1(\sigma^d))^2 &= \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(k/d) \sum_{k_1|d, k_2|d} k_1 k_2 \sigma_{k_1} \sigma_{k_2} \\ &= \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(k/d) \sum_{\delta|d} \left( \sum_{[k_1, k_2] = \delta} k_1 k_2 \sigma_{k_1} \sigma_{k_2} \right) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{[k_1, k_2] = k} k_1 k_2 \sigma_{k_1} \sigma_{k_2} = \sum_{[k_1, k_2] = k} (k_1, k_2) \sigma_{k_1} \sigma_{k_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(k/d) c_2(\sigma^d) &= \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(k/d) \sum_{\substack{\delta|d \\ d/\delta \text{ impair}}} \delta \sigma_{2\delta} \\ &= \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(k/d) \sum_{\delta|d} \delta \sigma_{2\delta}, \quad \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(k/d) \sum_{\substack{\delta|d \\ d/\delta \text{ pair}}} \delta \sigma_{2\delta} \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque  $k$  est impair cette somme donne  $\frac{1}{k} k \sigma_{2k} = \sigma_{2k}$  et nous n'avons plus qu'à faire le calcul avec  $k$  pair. Dans ce cas, écrivons  $d = 2^r r$ ,  $r$  impair. Alors d'une part

$$(\delta \mid 2^v r \text{ et } 2^v r / \delta \text{ impair}) \Leftrightarrow (\delta = 2^v p, p \nmid r)$$

et d'autre part, puisque  $\mu(2^s x) = 0$  si  $s \geq 2$ , il faut que ( $k = 2^v m$  ou  $2^{v+1}m$ ,  $m$  impair). On obtient donc, lorsque  $k = 2^v m$

$$\frac{1}{2^v m} \sum_{r \mid m} \mu(m/r) \sum_{p \mid r} 2^v p \sigma_{2^{v+1}p} = \frac{1}{2^v m} 2^v m \sigma_{2^{v+1}m} = \sigma_{2k},$$

et lorsque  $k = 2^{v+1}m$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{v+1}m} \sum_{r \mid m} \mu(2m/r) \sum_{p \mid r} 2^v p \sigma_{2^{v+1}p} &= -\frac{1}{2^{v+1}m} \sum_{r \mid m} \mu(m/r) \sum_{p \mid r} 2^v p \sigma_{2^{v+1}p} \\ &= -\frac{1}{2^{v+1}m} 2^v m \sigma_{2^{v+1}m} = -\frac{1}{2} \sigma_k. \end{aligned}$$

D'où le résultat pour le cas pair :  $\sigma_{2k} - \frac{1}{2} \sigma_k$ . ■

Pour  $\beta_k = \beta_k(\sigma_1, \sigma_2, \dots) = c_k(G[\sigma])$ , la famille  $(\beta_k)_{k \geq 1}$  décrit les décompositions en cycles des transports des  $G$ -structures le long de  $\sigma$ , pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ; son nom de *type cyclique de l'espèce*  $G$  ainsi que les formules permettant de le calculer ont été introduits par Gilbert Labelle [LG3].

**(1.41) Exemple.** Soit  $t$  une indéterminée et  $\mathbb{A} = \mathbb{Z}[t]$ . On définit les espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G}^\circ$ ,  $\mathcal{GO}$ ,  $\mathcal{GO}^\circ$  respectivement par :

- $\forall U \in \mathbb{B}$ ,  $\mathcal{G}[U]$  est l'ensemble de tous les graphes non orientés sans boucles ayant  $U$  pour ensemble de sommets. Le poids d'un tel graphe est  $t^{\#\text{arêtes}}$ ,
- $\forall U \in \mathbb{B}$ ,  $\mathcal{G}^\circ[U]$  est l'ensemble de tous les graphes non orientés ayant  $U$  pour ensemble de sommets. Le poids d'un tel graphe est  $t^{\#\text{arêtes}}$ ,
- $\forall U \in \mathbb{B}$ ,  $\mathcal{GO}[U]$  est l'ensemble de tous les graphes orientés sans boucles ayant  $U$  pour ensemble de sommets. Le poids d'un tel graphe est  $t^{\#\text{arêtes}}$ ,
- $\forall U \in \mathbb{B}$ ,  $\mathcal{GO}^\circ[U]$  est l'ensemble de tous les graphes orientés ayant  $U$  pour ensemble de sommets. Le poids d'un tel graphe est  $t^{\#\text{arêtes}}$ ,

avec les transports habituels. Définissons aussi l'espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée  $\wp_w$  par

$$\forall U \in \mathbb{B}, \rho_w[U] = \{ A \mid A \subseteq U \}, v(A) = t^{|A|}.$$

On remarque que

$$(*) \quad G^o \equiv G \times \rho_w \quad \text{et} \quad GO^o \equiv GO \times \rho_w,$$

puisque tout graphe (avec boucles) est un graphe sans boucles auquel on a ajouté une partie de l'ensemble des sommets (l'ensemble des boucles). De plus, pour les espèces  $G$  et  $GO^o$ , les graphes voulus sont obtenus en choisissant une partie (pondérée) d'un ensemble approprié, soit l'ensemble des paires (parties à deux éléments) pour  $G$  et l'ensemble des couples (flèches et boucles) pour  $GO^o$ . D'où les relations

$$(**) \quad G \equiv \rho_w \square \rho_2 \quad \text{et} \quad GO^o \equiv \rho_w \square (E^o \times E^o)$$

où  $\rho_2$  désigne l'espèce ordinaire des parties à deux éléments.

Les séries génératrices des types des quatre espèces de l'exemple (1.41) contiennent tous les polynômes énumérateurs (selon le nombre d'arêtes) de chacune de ces classes de graphes. Or, ces polynômes s'obtiennent aussi à l'aide du théorème de Pólya (1.36) appliqué aux actions de  $S_n$  décrites plus haut. On a donc

$$Z_{G_n: \binom{[n]}{2}}(1+t, 1+t^2, \dots) = \text{coefficient de } x^n \text{ dans } \tilde{G}(x) = Z_G(x, x^2, \dots),$$

$$Z_{G_n: \binom{[n]}{2} + [n]}(1+t, 1+t^2, \dots) = \text{coefficient de } x^n \text{ dans } \tilde{G}^o(x) = Z_{GO}(x, x^2, \dots),$$

$$Z_{G_n: [n]^{(2)}}(1+t, 1+t^2, \dots) = \text{coefficient de } x^n \text{ dans } \tilde{GO}(x) = Z_{GO}(x, x^2, \dots),$$

$$Z_{G_n: [n] \times [n]}(1+t, 1+t^2, \dots) = \text{coefficient de } x^n \text{ dans } \tilde{GO}^o(x) = Z_{GO^o}(x, x^2, \dots),$$

et c'est en calculant les séries indicatrices des membres de droite que nous obtiendrons le résultat.

**(1.42) Exemple.** Nous nous intéressons ici aux graphes simples pondérés selon leur nombre d'arêtes et au dénombrement des types de cette classe de graphes. Il s'agit bien sûr de calculer la série génératrice des types de l'espèce  $G$  en utilisant la relation

$\mathcal{G} \equiv \wp_w \circ \wp_2$ . Calculons d'abord les séries indicatrices impliquées :

$$\wp \equiv E(X_t) \cdot E \Rightarrow Z_{\wp} = Z_{E(X_t)} \cdot Z_E = e^{\sum_{n \geq 1} \frac{t^n x_n}{n}} e^{\sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{n}} = \prod_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} (1+t^n)^k \frac{x_n^k}{n^k k!},$$

donc

$$\begin{aligned} Z_{\wp} &= \sum_{\substack{k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, \dots \\ \sum k_i < \infty}} \left( \frac{(1+t)^{k_1} \frac{x_1^{k_1}}{1^{k_1} k_1!}}{(1+t^2)^{k_2} \frac{x_2^{k_2}}{2^{k_2} k_2!}} \right) \left( \frac{(1+t^3)^{k_3} \frac{x_3^{k_3}}{3^{k_3} k_3!}}{\dots} \right) \dots \\ &= \sum_{k_i \geq 0, \sum k_i < \infty} \prod_{i \geq 1} \left( 1 + t^i \right)^{k_i} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! \dots} \end{aligned}$$

d'où

$$Z_{\wp} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_{\wp}(\sigma_1, \sigma_2, \dots) I(\sigma)$$

où  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$  est le type cyclique de  $\sigma$  et  $p_{\wp}(\sigma_1, \sigma_2, \dots) = \prod_{i \geq 1} (1+t^i)^{\sigma_i}$ .

À ce stade, P. Leroux [LP] nous fait remarquer qu'il n'est pas nécessaire de connaître le théorème de Pólya pour traiter cet exemple. En effet, le théorème (1.39) nous dit que

$$Z_{\mathcal{G}} = Z_{\wp_w \circ \wp_2} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_{\wp_w}(\wp_2[\sigma]) I(\sigma)$$

donc

$$\tilde{G}(x) = Z_{\mathcal{G}}(x, x^2, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (1+t)^{\beta_1} (1+t^2)^{\beta_2} \dots x^n,$$

où  $(\beta_1, \beta_2, \dots)$  est le type cyclique de la permutation  $\wp_2[\sigma]$ . Or la définition du polynôme indicateur de cycles d'une action (1.36) nous dit précisément que

$$Z_{\mathfrak{S}_n \cdot \binom{[n]}{2}}(t_1, t_2, \dots) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} I(\wp_2[\sigma]) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} t_1^{\beta_1} t_2^{\beta_2} \dots.$$

Ce polynôme est aussi noté  $Z_{\mathfrak{S}_n^{(2)}}$  et la comparaison des deux dernières formules nous donne le résultat de Pólya pour ce cas particulier. En effet, il est maintenant clair que

$$\tilde{G}(x) = \sum_{n \geq 0} Z_{\mathfrak{S}_n^{(2)}}(1+t, 1+t^2, \dots) x^n.$$

Dans Harary/Palmer [HP], on trouve une expression basée sur une analyse méticuleuse de l'action considérée. Nous présentons ici une méthode très différente et notre calcul sera complété avec la connaissance du type cyclique de l'espèce  $\wp_2$ . D'abord, si  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  est une permutation de type  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$  et  $|U| = n$  alors les seules paires d'éléments de  $U$  qui sont laissées fixes par l'action de  $\sigma$  sont celles qui contiennent soit les deux éléments d'un cycle de longueur 2 de  $\sigma$  soit deux éléments choisis parmi les points fixes de  $\sigma$ .

Donc

$$p_{\wp_2}(\sigma) = \binom{\sigma_1}{2} + \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_1 + 2\sigma_2),$$

et d'après (1.39)

$$c_k(\wp_2[\sigma]) = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(k/d) p_{\wp_2}(\sigma^d) = \frac{1}{2k} \sum_{d|k} \mu(k/d) \left( (c_1(\sigma^d))^2 - c_1(\sigma^d) + 2c_2(\sigma^d) \right).$$

Ce qui, utilisant le corollaire (1.40), donne

$$\beta_k = c_k(\wp_2[\sigma]) = \frac{1}{2} \sum_{[i,j]=k} (i,j) \sigma_i \sigma_j - \frac{1}{2} \sigma_k + \begin{cases} \sigma_{2k} & \text{si } k \text{ impair} \\ -\frac{1}{2} \sigma_k + \sigma_{2k} & \text{si } k \text{ pair.} \end{cases}$$

D'où

$$Z_G = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{k \geq 1} (1 + t_k^{c_k}) \quad I(\sigma),$$

et

$$Z_{\mathfrak{S}_n^{(2)}} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{k=1}^n t_k^{\frac{1}{2} \sum_{[i,j]=k} (i,j) \sigma_i \sigma_j + \sigma_{2k}} - (1 - \frac{1}{2}(k \bmod 2)) \sigma_k,$$

où  $k \bmod 2$  désigne le reste de la division de  $k$  par 2.

**(1.43) Exemple.** Grâce à l'exemple précédent, il nous est maintenant facile de trouver les polynômes énumérateurs, selon le nombre d'arêtes, des trois autres classes de graphes introduites plus tôt ; les graphes non orientés et les graphes orientés sans ou avec boucles, qui définissent respectivement les espèces  $G^0$ ,  $GO$  et  $GO^0$  de l'exemple (1.41). Nous

utiliserons les relations

$$(*) \quad G^o \equiv G \times \rho_w \quad \text{et} \quad GO^o \equiv GO \times \rho_w.$$

Ainsi, pour l'espèce  $G^o$  on trouve :

$$Z_{G^o} = Z_G \times Z_{\rho_w} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} p_G(\sigma) \cdot p_{\rho_w}(\sigma) I(\sigma),$$

donc

$$Z_{G^o} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{k \geq 1} (1 + t^k) \frac{1}{2} \sum_{[i,j] \neq k} (i,j) \sigma_i \sigma_j + \sigma_{2k} + \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ \frac{1}{2} \sigma_k & \text{si } k \text{ impair} \end{cases} I(\sigma)$$

et

$$Z_{S_n: \binom{n}{2} + [n]} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{k=1}^n t_k^{\frac{1}{2} \sum_{[i,j] \neq k} (i,j) \sigma_i \sigma_j + \sigma_{2k} + \frac{1}{2} (k \bmod 2) \sigma_k}.$$

Pour l'espèce  $GO^o$  la relation  $GO^o \equiv \rho_w \circ (E^* \times E^*)$  donne

$$Z_{GO^o} = Z_{\rho_w(E^* \times E^*)} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} p_{\rho_w}(E^* \times E^*[\sigma]) I(\sigma).$$

Or

$$Z_{E^* \times E^*} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma_1^2 I(\sigma),$$

donc le type cyclique  $(\beta_1, \beta_2, \dots)$  de la permutation  $E^* \times E^*[\sigma]$  est donné par :

$$\begin{aligned} \beta_k &= c_k(E^* \times E^*[\sigma]) = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(k/d) p_{E^* \times E^*}(\sigma^d) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(k/d) (c_1(\sigma^d))^2 = \sum_{[i,j]=k} (i,j) \sigma_i \sigma_j. \end{aligned}$$

D'où

$$Z_{GO^o} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{k \geq 1} (1 + t^k)^{\sum_{[i,j] \neq k} (i,j) \sigma_i \sigma_j} I(\sigma)$$

et

$$Z_{GO} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{k \geq 1} (1 + t^k)^{\sum_{[i,j] \neq k} (i,j) \sigma_i \sigma_j - \sigma_k} I(\sigma).$$

Une méthode semblable permet de traiter diverses classes de graphes [DLL]. Par ces quelques exemples, nous avons voulu illustrer comment l'emploi des espèces pondérées et de leurs propriétés permet d'obtenir facilement des formules élaborées. Au chapitre II nous présentons des exemples tirés d'un autre domaine; celui des fonctions spéciales.

### §1.5 PREUVE DE LA FORMULE DE PLÉTHYSME

Comme nous l'avons annoncé plus tôt, cette section sera entièrement consacrée à la preuve de la formule de pléthysme pondéré introduite au théorème (1.33-5). Plusieurs approches sont possibles [BF2, JA1, UW], nous avons choisi de donner une version pondérée de la démonstration exposée par V. Strehl dans son cours de combinatoire [SV]. Celui-ci présente un raffinement de l'analyse faite par A. Joyal dans son article d'introduction à la théorie [JA1], raffinement qui permet d'éviter le recours à un *principe de prolongement des identités algébriques* qui n'est pas clairement établi.

Nous voulons donc montrer que si  $F = F_w$  et  $G = G_v$  sont deux espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées et si  $G[\emptyset] = \emptyset$ , alors la série indicatrice de l'espèce  $F \circ G$  (obtenue par substitution de  $G$  dans  $F$ ) se calcule à l'aide des séries indicatrices de  $F$  et de  $G$  par la formule

$$(*) \quad Z_{F_w \circ G_v} = Z_{F_w} \circ Z_{G_v} := Z_{F_w} \left( (Z_{G_v})_1, (Z_{G_v})_2, (Z_{G_v})_3, \dots \right)$$

où la fonction de poids  $v^n$  est définie par  $v^n(s) := (v(s))^n$  et l'expression  $(Z_G)_n$  désigne la série obtenue en effectuant la substitution  $x_i := x_{ni}$  dans la série indicatrice  $Z_G$ :

$$(Z_G)_n(x_1, x_2, x_3, \dots) := Z_G(x_1, x_2, x_3, \dots) \Big|_{x_i := x_{ni}} = Z_G(x_n, x_{2n}, x_{3n}, \dots),$$

Afin d'alléger la notation, nous n'indiquerons pas les poids s'il n'y a pas de risque de confusion. Si son emploi s'avérait nécessaire, la lettre «  $w$  » désignera la fonction de poids générique. La lettre «  $v$  » est réservée pour la fonction de poids de  $G$ .

Tout d'abord, rappelons la définition (1.27) de série indicatrice ainsi qu'une reformulation de (1.28-ii) (voir la preuve de 1.31) :

$$(1.44) \quad Z_F := \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{(+)}} p_F(\beta) \frac{x^\beta}{\text{aut } \beta} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{(h, \sigma) \in \tilde{F}[n]} w(h) x^{\text{cyc}(\sigma)}$$

où  $\mathbb{N}^{(+)}$  est l'ensemble des suites éventuellement nulles  $(\beta_1, \beta_2, \dots)$  d'entiers non négatifs,  $\tilde{F}$  est l'espèce associée définie en 1.25 (1),  $\text{cyc}(\sigma)$  désigne le type cyclique de  $\sigma$ ,  $\text{cyc}(\sigma) = (c_1(\sigma), c_2(\sigma), \dots)$  si  $\sigma$  possède  $c_k(\sigma)$  cycles de longueur  $k$ , et  $x^{\text{cyc}(\sigma)} = x_1^{c_1(\sigma)} x_2^{c_2(\sigma)} x_3^{c_3(\sigma)} \dots$

Tenant compte de ces préliminaires, la formule (\*) devient

(1.45)

$$Z_{F(G)}(x) := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{(h, \sigma) \in \tilde{F}(G)[n]} w(h) x^{\text{cyc}(\sigma)} = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{(+)}} p_F(\beta) \frac{x^\beta}{\text{aut } \beta} \circ Z_G(x)$$

et il est alors clair que sa compréhension passe par une étude détaillée des  $\tilde{F}(G)$ -structures. Rappelons qu'une  $\tilde{F}(G)$ -structure sur un ensemble fini  $U$  est un couple  $(h, \sigma) \in F(G)[U] \times \mathfrak{S}_U$  qui satisfait  $\sigma \cdot h = h$ , avec poids  $w(h)$ . De façon plus explicite,  $h = \left( U/\equiv, s, \left( \lambda_C \right)_{C \in U/\equiv} \right)$ ,  $w(h) = w(s) \prod_{C \in U/\equiv} v(\lambda_C)$ , où  $\begin{cases} \equiv \text{ est une relation d'équivalence sur } U \\ s \in F[U/\equiv] \\ \lambda_C \in G[C] \end{cases}$

et la condition  $\sigma \cdot h = h$  signifie que (voir figure 12) :

- i)  $\sigma$  et  $\equiv$  sont compatibles, donc  $\sigma$  est un automorphisme de  $\equiv$ ,
- ii)  $\sigma$  induit une permutation  $\sigma/\equiv$  de  $U/\equiv$  qui satisfait  $\sigma/\equiv \cdot s = s$ , donc  $(s, \sigma/\equiv) \in \tilde{F}[U/\equiv]$ ,
- iii) chaque classe  $C \in U/\equiv$  est munie d'une permutation  $\sigma_C \in \mathfrak{S}_C$ , définie par  $\sigma_C(a) = \sigma^k(a)$ , où  $k = \min\{j \geq 1 \mid \sigma^j(a) \in C\}$ , qui satisfait  $\sigma_C \cdot \lambda_C = \lambda_C$ , donc  $(\lambda_C, \sigma_C) \in \tilde{G}[C]$ ,
- iv) pour chaque classe  $C \in U/\equiv$  le transport de structure le long de  $\sigma$  donne  $\tilde{G}[\sigma](\lambda_C, \sigma_C) = (\lambda_{\sigma(C)}, \sigma_{\sigma(C)})$ .

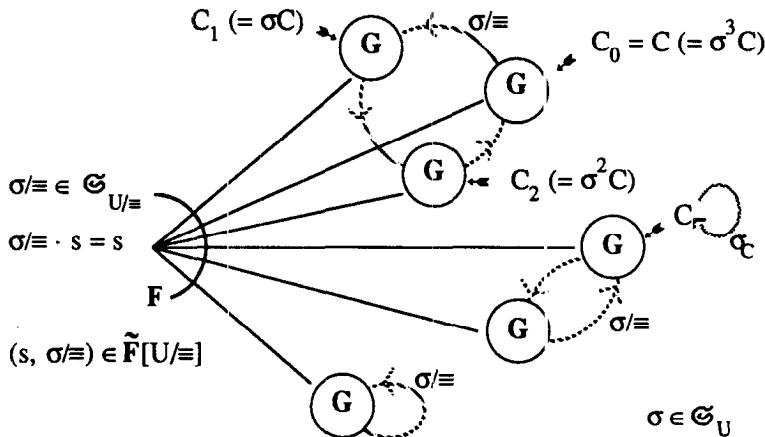


figure 12

Nous utiliserons cette description détaillée lorsque viendra le temps d'énumérer (sommer les poids!) ces structures. Mais voyons d'abord les liens entre les monônes indicateurs de cycles des diverses permutations.

Si  $\sigma$  et  $\equiv$  sont compatibles, pour chaque cycle de la permutation  $\sigma/\equiv \in G_{U/\equiv}$  choisissons une classe  $C (= C_0)$  et posons

$$C_0 = C (= \sigma^0 C), \quad C_1 = \sigma C, \quad C_2 = \sigma^2 C, \quad \dots, \quad C_{k-1} = \sigma^{k-1} C,$$

$$\hat{C} = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{k-1},$$

où  $k$  est la longueur du cycle (voir figure 13). Alors tous les cycles de  $\sigma|_{\hat{C}}$  ont pour longueur un multiple de  $k$  et

$$x^{\text{cyc}(\sigma|_{\hat{C}})} = x_k^{c_k(\sigma|_{\hat{C}})} x_{2k}^{c_{2k}(\sigma|_{\hat{C}})} \dots,$$

$$x^{\text{cyc}(\sigma_C)} = x_1^{c_1(\sigma_C)} x_2^{c_2(\sigma_C)} \dots$$

$$= x_1^{c_k(\sigma|_{\hat{C}})} x_2^{c_{2k}(\sigma|_{\hat{C}})} \dots$$

d'où

$$(1.46) \quad x^{\text{cyc}(\sigma|_{\hat{C}})} = x_k^{\text{cyc}(\sigma_C)} \circ x^{\text{cyc}(\sigma_C)}.$$

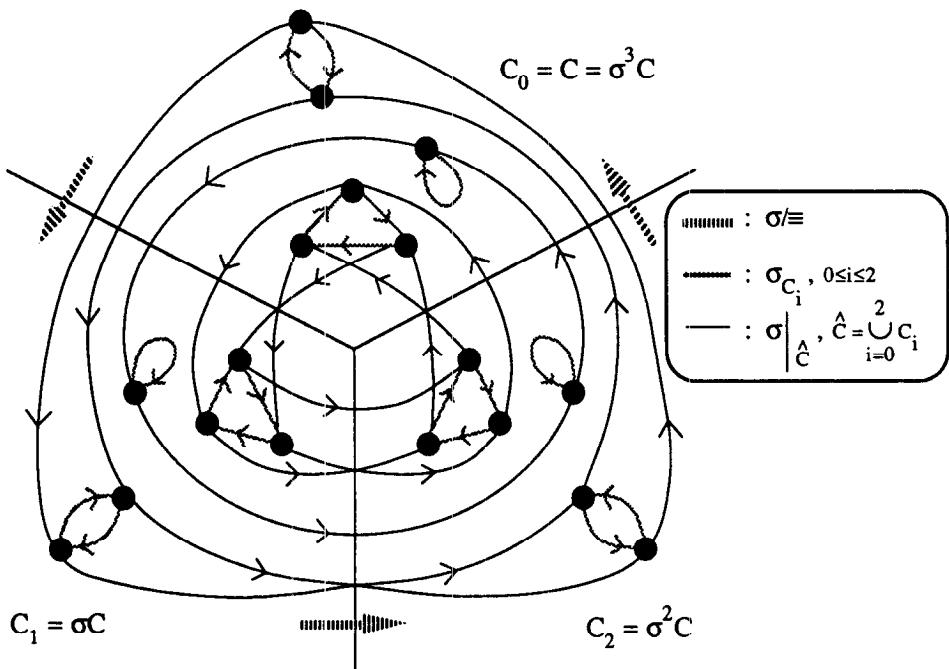


figure 13

Maintenant, nous allons énumérer les  $\tilde{F}(G)$ -structures  $(h, \sigma)$  selon le type cyclique de la permutation  $\sigma/\equiv$ . Pour chaque type cyclique  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots) \in \mathbb{N}^{(+)}$ , on définit une espèce  $\tilde{F}(G)^{<\beta>}$  par

$\forall U \in \mathbb{B}, \tilde{F}(G)^{<\beta>}[U] =$  l'ensemble des  $\tilde{F}(G)$ -structures  $(h, \sigma)$  sur  $U$   
telles que le type cyclique de  $\sigma/\equiv$  est  $\beta$ .

et une série auxiliaire

$$Z_{\tilde{F}(G)}^{<\beta>} := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{(h, \sigma) \in \tilde{F}(G)^{<\beta>}[n]} w(h) x^\beta,$$

(on écrira  $<k>$  lorsque  $\beta = (0, 0, \dots, \underset{\uparrow k}{1}, 0, \dots)$ ).

Il est clair que :

$$(1.47) \quad \tilde{F}(G) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{(+)}} \tilde{F}(G)^{<\beta>} ;$$

(1.48) les  $\widetilde{F}(G)^{\langle \beta \rangle}$ -structures peuvent être vues comme des «  $\beta$ -assemblées de  $G$ -structures » « chapeautées » d'une  $\widetilde{F}$ -structure, comme suit :

$$\forall U \in \mathbb{B}, \quad \widetilde{F}(G)^{\langle \beta \rangle}[U] \cong \{ (s, \lambda, \sigma) \mid (\lambda, \sigma) \in E(G)^{\langle \beta \rangle}, (s, \sigma/\equiv) \in \widetilde{F}[U/\equiv] \}$$

$$w(s, \lambda, \sigma) = w(s) w(\lambda) = w(s, \sigma/\equiv) w(\lambda, \sigma),$$

où  $E$  désigne l'espèce des ensembles et  $w(\lambda) = \prod_C w(\lambda_C)$  ;

$$(1.49) \quad Z_{\widetilde{F}(G)}(x) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{(+)}} Z_{\widetilde{F}(G)}^{\langle \beta \rangle}(x);$$

et un premier calcul de somme de poids donne

$$\sum_{(h, \sigma) \in \widetilde{F}(G)^{\langle \beta \rangle}[U]} w(h) x^{\text{cyc}(\sigma)} = \sum_{(\lambda, \sigma) \in E(G)^{\langle \beta \rangle}[U]} \left( \sum_{(s, \sigma/\equiv) \in \widetilde{F}[U/\equiv]} w(s) \right) w(\lambda) x^{\text{cyc}(\sigma)},$$

donc

$$(1.50) \quad \sum_{(h, \sigma) \in \widetilde{F}(G)^{\langle \beta \rangle}[U]} w(h) x^{\text{cyc}(\sigma)} = p_F(\beta) \cdot \sum_{(\lambda, \sigma) \in E(G)^{\langle \beta \rangle}[U]} w(\lambda) x^{\text{cyc}(\sigma)},$$

ce qui ramène le problème à une énumération et calcul de poids d'assemblées particulières de  $G$ -structures, les  $\widetilde{E}(G)^{\langle \beta \rangle}$ -structures. Il suffit pour cela d'examiner en détail celles dont le type cyclique  $\beta$  est réduit à un seul cycle de longueur  $k \in \mathbb{N}$  (les couronnes de longueur  $k$  de Joyal [JA1]), puisque

$$Z_{\widetilde{E}(G)}^{\langle \beta \rangle} = \frac{\left( Z_{E(G)}^{\langle 1 \rangle} \right)^{\beta_1}}{\beta_1!} \cdot \frac{\left( Z_{E(G)}^{\langle 2 \rangle} \right)^{\beta_2}}{\beta_2!} \cdot \frac{\left( Z_{E(G)}^{\langle 3 \rangle} \right)^{\beta_3}}{\beta_3!} \cdot \dots$$

$$= \text{ coefficient de } z^\beta \text{ dans } e^{\sum_{k \geq 0} z_k Z_{E(G)}^{\langle k \rangle}} \left( = \sum_{j \geq 0} \frac{\left( \sum_{k \geq 0} z_k Z_{E(G)}^{\langle k \rangle} \right)^j}{j!} \right).$$

En effet, la première égalité découle d'un argument semblable à celui de la proposition 1.31 : donnant aux structures  $(\lambda, \sigma) \in \widetilde{E}(G)^{\langle \beta \rangle}[U]$  le poids  $w(\lambda)x^\beta$ , on obtient la série génératrice

$$\widetilde{E}(G)^{\langle \beta \rangle}(u) = \sum_{n \geq 0} |\widetilde{E}(G)^{\langle \beta \rangle}[n]| \frac{u^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{(\lambda, \sigma) \in \widetilde{E}(G)^{\langle \beta \rangle}[n]} w(\lambda) x^\beta \right) \frac{u^n}{n!},$$

qui satisfait  $\tilde{E}(G)^{<\beta>}(u) \Big|_{u=1} = Z_{E(G)}^{<\beta>}.$  Puis l'isomorphisme d'espèces

$$\tilde{E}(G)^{<\beta>} \cong \tilde{E}(G)^{<(\beta_1, 0, 0, \dots)>} \cdot \tilde{E}(G)^{<(0, \beta_2, 0, \dots)>} \cdots$$

donne l'égalité voulue, les  $\beta_k$  couronnes de longueur  $k$  (pour  $k$  fixé) pouvant être comptés indépendamment, mais ne devant pas être ordonnés :

$$\tilde{E}(G)^{<\beta>}(u) \Big|_{u=1} = \frac{(\tilde{E}(G)^{<1>}(u))^{\beta_1}}{\beta_1!} \cdot \frac{(\tilde{E}(G)^{<2>}(u))^{\beta_2}}{\beta_2!} \cdot \cdots \Big|_{u=1}.$$

Se rapportant aux figures 12 et 13 ainsi qu'à la description détaillée des  $\tilde{F}(G)$ -structures faite en début de section, nous constatons que les  $\tilde{E}(G)^{<k>}$ -structures  $(U/\equiv, \{U/\equiv\}, \lambda = (\lambda_C)_{C \in U/\equiv})$  sur un ensemble  $U$  s'obtiennent par :

- i) un choix d'une partition ordonnée de  $U$  en  $k$  classes  $(C_0, C_1, \dots, C_{k-1})$  telles que  $|C_0| = |C_1| = \dots = |C_{k-1}| = n.$  Ceci n'est possible que si  $|U| = nk$  et alors il y a

$$\binom{nk}{n, n, \dots, n} = \frac{(nk)!}{(n!)^k} \text{ possibilités.}$$

- ii) un choix de  $k-1$  bijections  $\gamma_i : C_i \rightarrow C_{i+1}, (0 \leq i < k-1)$ , ce qui peut être fait de  $(n!)^{k-1}$  façons.

- iii) un choix d'une structure  $(\lambda_0, \sigma_0) \in \tilde{G}[C_0]$  avec poids  $v(\lambda_0).$
- iv) les structures  $(\lambda_{i+1}, \sigma_{i+1}) \in \tilde{G}[C_{i+1}], 0 \leq i < k-1,$  ainsi que leur poids, sont entièrement déterminées par les transports,  $(\lambda_{i+1}, \sigma_{i+1}) := \tilde{G}[\gamma_i](\lambda_i, \sigma_i)$  et  $v(\lambda_{i+1}) := v(\tilde{G}[\gamma_i](\lambda_i)) = \dots = v(\lambda_0).$
- v) la dernière bijection  $\gamma_{k-1} : C_{k-1} \longrightarrow C_0$  est aussi entièrement déterminée,  $\gamma_{k-1} := \sigma_0 \circ (\gamma_{k-2} \circ \dots \circ \gamma_0)^{-1},$  et elle satisfait  $\tilde{G}[\gamma_{k-1}](\lambda_{k-1}, \sigma_{k-1}) = (\lambda_0, \sigma_0),$  donc

$$w(\lambda) := \prod_{i=0}^{k-1} v(\lambda_i) = (v(\lambda_0))^k.$$

- vi) parmi les structures que nous venons de décrire, certaines sont équivalentes par

*rotation cyclique car la classe  $C_0$  peut être choisie de façon arbitraire, ce qui réduit leur nombre d'un facteur  $1/k$ .*

Rassemblant toutes ces données et utilisant (1.46) on obtient

$$(1.51) \quad \sum_{\substack{\sim \\ (\ell, \sigma) \in E(G)^{<k>}[nk]}} w(\ell) x^{\text{cyc}(\sigma)} = \frac{(nk)!}{(n!)^k} \cdot \frac{1}{k} \cdot \sum_{(\ell_0, \sigma_0) \in \tilde{G}[n]} (v(\ell_0))^k x_k \circ x^{\text{cyc}(\sigma_0)}$$

$$\sum_{\substack{\sim \\ (\ell, \sigma) \in E(G)^{<k>}[nk]}} w(\ell) x^{\text{cyc}(\sigma)} = \frac{1}{k} \frac{(nk)!}{n!} \sum_{(\ell_0, \sigma_0) \in \tilde{G}[n]} (v(\ell_0))^k x_k \circ x^{\text{cyc}(\sigma_0)}.$$

Nous avons maintenant tous les ingrédients nécessaires pour terminer la preuve :

$$(1.51) \quad \begin{aligned} Z_{E(G)}^{<k>}(x) &:= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(nk)!} \sum_{\substack{\sim \\ (\ell, \sigma) \in E(G)^{<k>}[nk]}} w(\ell) x^{\text{cyc}(\sigma)} \\ &\Downarrow \\ &= \frac{1}{k} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{(\ell_0, \sigma_0) \in \tilde{G}[n]} (v(\ell_0))^k x_k \circ x^{\text{cyc}(\sigma_0)} \\ &= \frac{1}{k} Z_{G_k}(x_k, x_{2k}, \dots) \end{aligned}$$

donc

$$(1.52) \quad Z_{E(G)}^{<k>}(x) = \frac{1}{k} x_k \circ Z_G(x),$$

ce qui donne

$$(1.52) \quad \begin{aligned} Z_{E(G)}^{<B>}(x) &:= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\sim \\ (\ell, \sigma) \in E(G)^{<B>}[n]}} w(\ell) x^{\text{cyc}(\sigma)} \\ &= \text{Coefficient de } z^B \text{ dans } \exp \sum_{k \geq 0} z_k Z_{E(G)}^{<k>}(x) \\ &\Downarrow \\ &= \text{Coefficient de } z^B \text{ dans } \prod_{k \geq 0} \sum_{j_k \geq 0} \frac{\left( \frac{z_k}{k} x_k \circ Z_G(x) \right)^{j_k}}{j_k!} \end{aligned}$$

d'où

$$(1.53) \quad Z_{E(G)}^{<\beta>}(x) = \frac{x^\beta}{\text{aut } \beta} \circ Z_G(x)$$

et finalement,

**(1.54) Proposition.** Si  $F = F_w$  et  $G = G_v$  sont deux espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées et si  $G[\emptyset] = \emptyset$ , alors  $Z_{F(G)}(x) = Z_F \circ Z_G(x)$ .

**Preuve :** Il suffit d'assembler les calculs précédents :

$$(1.49) \quad \downarrow \quad Z_{F(G)}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{(h, \sigma) \in \tilde{F}(G)[n]} w(h) x^{\text{cyc}(\sigma)}$$

$$(1.50) \quad \downarrow \quad = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{(+)}} Z_{F(G)}^{<\beta>}(x)$$

$$(1.53) \quad \downarrow \quad = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{(+)}} p_F(\beta) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{(\lambda, \sigma) \in \tilde{E}(G)^{<\beta>}[n]} w(\lambda) x^{\text{cyc}(\sigma)}$$

$$= \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{(+)}} p_F(\beta) \frac{x^\beta}{\text{aut } \beta} \circ Z_G(x)$$

$$= Z_F \circ Z_G(x).$$

■

## Chapitre 2

# POLYNÔMES ORTHOGONaux

Les familles classiques de polynômes orthogonaux ont été étudiées d'un point de vue combinatoire par de nombreux auteurs [BF1, FD1, FL, FP, FS, LS, LY1-2-3 et 4, SV1-2 et 3] et la plupart de ces modèles s'insèrent bien dans la théorie que nous venons de présenter. Nous nous proposons d'en décrire certains sous la forme d'une espèce pondérée et dans chaque cas de calculer la série indicatrice correspondante. Ces résultats permettront d'obtenir des *q-analogues* des diverses familles de polynômes considérées. Remarquons que plusieurs modèles pour une même famille peuvent donner lieu à des espèces non isomorphes, qui peuvent avoir des séries indicatrices différentes qui, à leur tour, donneront éventuellement des q-analogues distincts.

Nous conviendrons de dire que toute espèce  $F : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{A}}$  est un *modèle combinatoire* pour la suite de ses coefficients  $(|F[n]|)_{n \geq 0}$ . Lorsque la fonction de poids prend ses valeurs dans un anneau de polynômes, l'espèce considérée devient un modèle combinatoire pour une famille  $(F_n)_{n \geq 0}$  de polynômes ou une normalisation de celle-ci ( $k_n F_n = |F[n]|$  pour une constante  $k_n$  bien choisie). Le n-ième polynôme de la suite apparaît alors comme la somme des poids des  $F$ -structures sur  $n$  éléments, ou, si l'on préfère, comme l'énumération des  $F$ -structures suivant certaines statistiques. Nous déclarons une fois pour toutes que  $\mathbb{A} = \mathbb{Q}[\alpha, \beta, \varphi, N, a, a^{-1}, p, c, t]$ , nos polynômes étant des fonctions de  $t$  ( $\alpha, \beta, \varphi, N, a, a^{-1}, p$  et  $c$  étant les divers paramètres de nos

familles orthogonales). Nous utiliserons aussi la convention établie à la remarque (1.37-2) de placer entre parenthèses un poids qui est commun à toutes les structures d'une espèce et nous continuerons d'employer la lettre générique «  $w$  » pour désigner la fonction de poids ( $w_F$  si l'espèce doit être précisée). Les définitions et notations utilisées dans la littérature classique pour les familles de polynômes pouvant varier d'un auteur à l'autre, nous utiliserons généralement celles que l'on trouve dans le livre de Chihara [CT].

## § 2.1 LES INVOLUTIONS D'HERMITE

Les polynômes d'*Hermite*, notés  $H_n(t)$ , sont définis par la série génératrice

$$(2.1) \quad \sum_{n \geq 0} H_n(t) \frac{x^n}{n!} = e^{2tx - x^2}.$$

Classiquement, les polynômes d'Hermite dénombrent les involutions selon leur nombre de points fixes et de transpositions. Nous retrouvons ce modèle dans l'espèce  $\mathbf{H}$  et nous introduisons un autre modèle,  $\mathcal{H}$ , qui énumère des points et des flèches et qui n'est pas isomorphe à  $\mathbf{H}$ .

(2.2) **Définition.** *Les espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées  $\mathbf{H}$  et  $\mathcal{H}$  sont définies comme suit :*

$$(1) \quad \forall U \in \mathbb{B}, \quad \mathbf{H}[U] = \{\sigma \in \mathfrak{S}_U \mid \sigma \text{ est une involution } (\sigma^2 = \sigma)\}$$

$$w_{\mathbf{H}}(\sigma) = (2t)^{c_1(\sigma)} (-2)^{c_2(\sigma)}.$$

$$(2) \quad \forall U \in \mathbb{B}, \quad \mathcal{H}[U] = \{s \mid s \text{ est une assemblée de points et de flèches}\}$$

$$w_{\mathcal{H}}(s) = (2t)^p (-1)^f,$$

où  $p$  désigne le nombre de points (singletons) et  $f$  le nombre de flèches (arcs). □

(2.3) **Proposition.** *Les espèces  $\mathbf{H}$  et  $\mathcal{H}$  sont deux modèles combinatoires pour la famille  $(H_n)_{n \geq 0}$  des polynômes d'Hermite.*

**Preuve :** De façon évidente (voir figure 14), une  $\mathbf{H}$ -structure est une assemblée de singletons ayant chacun le poids  $2t$  suivie d'une assemblée de paires ( $\mathbf{E}_2$ -structure :

ensemble de 2 éléments) ayant chacune le poids -2, donc

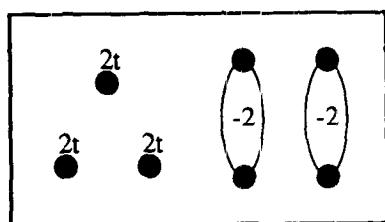
$$H \cong E(X_{(2t)}) \cdot E(E_{(-2)}),$$

et une  $\mathfrak{H}$ -structure est une assemblée de singlenton ayant chacun le poids  $2t$  suivie d'une assemblée de flèches ( $L_2$ -structure : liste de longueur 2) ayant chacune le poids -1, donc

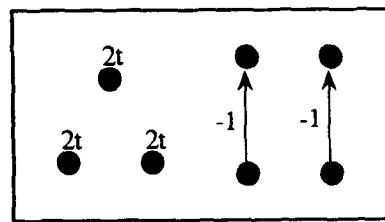
$$\mathfrak{H} \cong E(X_{(2t)}) \cdot E(L_{2(-1)}),$$

d'où

$$H(x) = e^{2tx} \cdot e^{(-2)x^2/2!} = e^{2tx-x^2} = e^{2tx} \cdot e^{-x^2} = \mathfrak{H}(x).$$



Une  $H$ -structure de poids  
 $32 t^3 = (2t)^3 (-2)^2$ .



Une  $\mathfrak{H}$ -structure de poids  
 $8 t^3 = (2t)^3 (-1)^2$ .

figure 14

L'espèce  $H$  est une sous-espèce (avec  $t_1 = 2t$  et  $t_2 = -2$ ) de l'espèce  $S_\gamma$  des permutations pondérées par l'indicateur de cycle et nous obtenons sa série indicatrice en particularisant celle de  $S_\gamma$ .

(2.4) **Proposition.** *Les séries indicatrices des espèces  $S_\gamma$  et  $H$  sont respectivement*

$$(1) \quad Z_{S_\gamma} = e^{\sum_{m,n \geq 1} \frac{1}{mn} \sum_{d|m,n} d \varphi(d) t_m^{n/d} x_n^{m/d}},$$

où  $\varphi$  désigne la fonction d'Euler, et

$$(2) \quad Z_H = e^{\sum_{r \geq 1} \frac{2^r}{r} \left( t^r x_r + (-1)^r \frac{(x_1^2 + x_{2r})}{2} \right)}.$$

**Preuve :** (1) Nous avons déjà calculé la série indicatrice de l'espèce  $C_\gamma$  à l'exemple 1.30, utilisons la formule de pléthysme pondéré (1.34-5) pour obtenir celle de  $S_\gamma$ :

$$S_\gamma = E \circ C_\gamma \Rightarrow Z_{S_\gamma} = Z_E \circ Z_{C_\gamma} = e^{\sum_{r \geq 1} \frac{1}{r} (Z_{C_\gamma})_r},$$

où

$$\sum_{r \geq 1} \frac{1}{r} (Z_{C_\gamma})_r = \sum_{r \geq 1} \sum_{m \geq 1} \frac{t_m^r}{rm} \sum_{d|m} \phi(d) x_{dr}^{m/d}$$

et en regroupant selon les termes en  $x_n$  pour  $n = dr$ , i.e.:  $d|n$  et  $r = n/d$ , on trouve :

$$Z_{S_\gamma} = e^{\sum_{n,m \geq 1} \sum_{d|n, d|m} \frac{t_m^{n/d} d \phi(d)}{nm} x_n^{m/d}}.$$

(2) Pour restreindre les permutations aux involutions, il suffit de poser  $t_i = 0$ ,  $i \geq 3$ , dans  $Z_S$ ; puis nous remplaçons  $t_1$  par  $2t$  et  $t_2$  par  $-2$  pour obtenir  $Z_H$ :

$$\begin{aligned} Z_H &= Z_{S_\gamma} \Big|_{\substack{t_1 := 2t, t_2 := -2 \\ t_i := 0, i \geq 3}} = \exp \left( \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} t_1^n x_n + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n} t_2^n x_n^2 + \sum_{r \geq 1} \frac{1}{2r} t_2^r x_{2r} \right) \Big|_{\substack{t_1 := 2t, t_2 := -2}} \\ &= \exp \left( \sum_{r \geq 1} \frac{(2t)^r x_r}{r} + \frac{(-2)^r x_r^2}{2r} + \frac{(-2)^r x_{2r}}{2r} \right). \end{aligned}$$

■

Pour l'espèce  $\mathcal{H}$ , l'isomorphisme donné dans la preuve de (2.3) permet de calculer directement la série indicatrice en utilisant des espèces très simples.

**(2.5) Proposition.** La série indicatrice de l'espèce  $\mathcal{H}$  est

$$\begin{aligned} Z_{\mathcal{H}} &= e^{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left[ (2t)^n x_n + (-1)^n x_n^2 \right]} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots) \\ \sum_v d_v = n}} \left[ t_1^{n - \sum_v d_v} \prod_{r \geq 1} r^{d_r/2} H_{d_r}(t_r) \right] \frac{x^\mathbf{d}}{\text{aut } \mathbf{d}}, \end{aligned}$$

$$\text{où } i = \sqrt{-1} \text{ et } t_r = \left( \frac{2}{i} \right)^{r-1} \cdot \frac{i}{\sqrt{r}} .$$

*Preuve :* L'isomorphisme  $\mathcal{B} \cong E(X_{(2t)}) \cdot E(L_{2(-1)})$  donne

$$Z_{\mathcal{B}} = Z_E \circ Z_{X_{(2t)}} \cdot Z_E \circ Z_{L_{2(-1)}}, \text{ où } Z_{X_{(2t)}} = 2t x_1 \text{ et } Z_{L_{2(-1)}} = -x_1^2,$$

d'où

$$Z_{\mathcal{B}} = e^{\sum_{n \geq 1} \frac{(2t)^n x_n}{n}} \cdot e^{\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x_n^2}{n}} .$$

Utilisons temporairement des variables auxiliaires et écrivons

$$Z_{\mathcal{B}} = \prod_{n \geq 1} e^{\frac{(2t)^n}{n} x_n + \frac{(-1)^n}{n} x_n^2} = \prod_{n \geq 1} e^{2t_n \xi_n \cdot \xi_n^2},$$

avec  $\xi_n^2 = \frac{(-1)^{n-1} x_n^2}{n}$ , i.e.:  $\xi_n = \frac{i^{n-1}}{\sqrt{n}} x_n$ , où  $i = \sqrt{-1}$  et  $\frac{(2t)^n}{n} x_n = 2t_n \xi_n$ ,

donc  $t_n = \left( \frac{2}{i} \right)^{n-1} \frac{i^n}{\sqrt{n}}$ . Il est alors clair que

$$Z_{\mathcal{B}} = \prod_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} H_k(t_n) \frac{\xi_n^k}{k!} = \sum_{k_1, k_2, \dots \geq 0} H_{k_1}(t_1) H_{k_2}(t_2) \dots \frac{\xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \dots}{k_1! k_2! \dots} ;$$

revenant aux variables  $x_n$  et multipliant par  $1^{k_1} 2^{k_2} \dots$ , on trouve

$$= \sum_{k_1, k_2, \dots \geq 0} \left[ \prod_{r \geq 1} H_{k_r}(t_r) \left( r^{1/2} i^{r-1} \right)^{k_r} \right] \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! \dots},$$

et on obtient la forme voulue en regroupant les termes selon les  $n$  tels que  $\sum r k_r = n$ . ■

## §2.2 LAGUERRE ET LES PERMUTATIONS

Dans les exemples qui suivent, un des paramètres est utilisé pour énumérer des permutations selon leur nombre de cycles. Nous avons déjà obtenu les séries génératrices des espèces  $C_{(t)}$ ,  $S_t$  et  $D_t$  des cycles, permutations et dérangements pondérés par le

poids  $\tau^{\text{nb de cycles}}$  à l'exemple (1.23),

$$C_{(\tau)}(x) = \tau \ln\left(\frac{1}{1-x}\right), \quad S_\tau(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^\tau \quad \text{et} \quad D_\tau(x) = e^{-\tau x}\left(\frac{1}{1-x}\right)^\tau.$$

(2.6) **Proposition.** Pour les espèces  $C_{(\tau)}$ ,  $S_\tau$  et  $D_\tau$ , on a les séries indicatrices

$$(1) \quad Z_{C_{(\tau)}} = \tau \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \varphi(n) \ln\left(\frac{1}{1-x_n}\right),$$

$$(2) \quad Z_{S_\tau} = \prod_{n \geq 1} \left(\frac{1}{1-x_n}\right)^{\frac{1}{n} \omega_n(\tau)}, \quad \text{où} \quad \omega_n(\tau) = \sum_{d|n} \varphi(d) \tau^{n/d},$$

$$= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{(d_1, d_2, \dots) \\ \sum_i d_i = n}} p_{S_\tau}(d_1, d_2, \dots) \frac{x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots}{1^{d_1} d_1! 2^{d_2} d_2! \dots},$$

$$\text{où } p_{S_\tau}(d_1, d_2, \dots) = \prod_{i=1}^n \left[ \omega_i(\tau) (\omega_i(\tau) + i) (\omega_i(\tau) + 2i) \dots (\omega_i(\tau) + (d_i - 1)i) \right],$$

$$(3) \quad Z_{D_\tau} = e^{-\sum_{n \geq 1} \frac{\tau^n x_n}{n}} \prod_{n \geq 1} \left(\frac{1}{1-x_n}\right)^{\frac{1}{n} \omega_n(\tau)}.$$

**Preuve :** (1) On obtient la série indicatrice de l'espèce  $C_{(\tau)}$  en posant  $t_n = \tau$ ,  $n \geq 1$ , dans celle de l'espèce  $C_\gamma$  (exemple 1.30) ou bien en invoquant la remarque (1.37-2) qui dit de multiplier par  $\tau$  celle de l'espèce des cycles (non pondérés) :

$$Z_{C_{(\tau)}} = \sum_{i,j \geq 1} \frac{\tau}{ij} \varphi(i) x_i^j = \tau \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i} \varphi(i) \left( \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} x_i^j \right).$$

$$(2) \quad Z_{S_\tau} = Z_E \circ Z_{C_{(\tau)}} = e^{\sum_{m \geq 1} \frac{\tau^m}{m} (Z_C)_m} = e^{\sum_{m \geq 1} \sum_{k \geq 1} \frac{\tau^m}{mk} \varphi(k) \ln \frac{1}{1-x_{mk}}}$$

posant  $mk = n$ , i.e.:  $k|n$  et  $m = n/k$ ,

$$= e^{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left( \sum_{k|n} \tau^{nk} \varphi(k) \right) \ln \frac{1}{1-x_n}} = \prod_{n \geq 1} \left(\frac{1}{1-x_n}\right)^{\frac{1}{n} \omega_n(\tau)}.$$

Or, par la formule du binôme,

$$\left( \frac{1}{1-x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(\tau)} = \sum_{k \geq 0} \left( \frac{1}{n} \omega_n(\tau) \right)_k \frac{x_n^k}{k!},$$

où  $\left( \frac{1}{n} \omega_n(\tau) \right)_k$  dénote la factorielle croissante,

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{n} \omega_n(\tau) \right)_k &= \left( \frac{1}{n} \omega_n(\tau) \right) \left( \frac{1}{n} \omega_n(\tau) + 1 \right) \left( \frac{1}{n} \omega_n(\tau) + 2 \right) \dots \left( \frac{1}{n} \omega_n(\tau) + k-1 \right) \\ &= \left( \frac{1}{n} \right)^k \left( \omega_n(\tau) \right) \left( \omega_n(\tau) + n \right) \left( \omega_n(\tau) + 2n \right) \dots \left( \omega_n(\tau) + (k-1)n \right) \end{aligned}$$

D'où la forme explicite :

$$\begin{aligned} Z_{S_\tau} &= \prod_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} \left( \frac{1}{n} \omega_n(\tau) \right)_k \frac{x_n^k}{k!} = \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots) \\ \sum k_i < \infty}} \prod_{i \geq 1} \left( \frac{1}{i} \omega_i(\tau) \right)_{k_i} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots}{k_1! k_2! \dots} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{k = (k_1, k_2, \dots) \\ \sum i k_i = n}} \prod_{i=1}^n \left[ \omega_i(\tau) \left( \omega_i(\tau) + i \right) \left( \omega_i(\tau) + 2i \right) \dots \left( \omega_i(\tau) + (k_i-1)i \right) \right] \frac{x^n}{\text{aut } k}. \end{aligned}$$

(3) Pour les dérangements, on procède comme d'habitude, en utilisant le résultat pour les permutations ainsi que la relation  $S_\tau \equiv D_\tau \cdot E(X_\tau)$  :

$$Z_{S_\tau} = Z_{D_\tau} \cdot Z_{E(X_\tau)} \Rightarrow Z_{D_\tau} = Z_{E(X_\tau)}^{-1} \cdot Z_{S_\tau},$$

$$\text{où } Z_{X_\tau} = \tau x_1 \text{ et } Z_{E(X_\tau)} = Z_E \circ Z_{X_\tau} = e^{\sum_{n \geq 1} \frac{\tau^n x_n}{n}}.$$

■

(2.7) Remarque. On obtient directement l'identité suivante, qui est apparentée à l'identité cyclotomique [RC] :

$$\prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1-x_n^n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(\tau)} = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1-\tau x_k},$$

où  $\omega_n(\tau) = \sum_{d|n} \phi(d) \tau^{n/d}$ . En effet, cette égalité présente deux expressions pour la série

génératrice des types  $\tilde{S}_\tau(x)$  de l'espèce des permutations pondérées selon leur nombre de cycles ; le membre de gauche est obtenu en remplaçant  $x_n$  par  $x^n$ ,  $n \geq 1$ , dans la série indicatrice calculée à la proposition (2.6-2), et celui de droite vient de la série génératrice des types de l'espèce  $S_\gamma$  des permutations pondérées par l'indicateur de cycles (voir l'exemple 1.35), où on a posé  $t_i = \tau$ ,  $i \geq 1$ .

Les polynômes de *Laguerre*, notés  $L_n^{(\alpha)}(t)$ , sont définis par la série génératrice

$$(2.8) \quad \sum_{n \geq 0} L_n^{(\alpha)}(t) x^n = (1 - x)^{-1-\alpha} e^{\frac{-tx}{1-x}}.$$

Notre principal modèle, l'espèce  $\mathfrak{L}$ , est celui des configurations de Laguerre qu'on trouve dans les travaux de Foata et Strehl [FS]. Nous traiterons aussi d'une autre espèce,  $\mathfrak{L}'$ , que Labelle et Yeh [LY2] ont introduite pour donner une preuve combinatoire d'une formule limite reliant les polynômes de Meixner-Pollaczek aux polynômes de Laguerre.

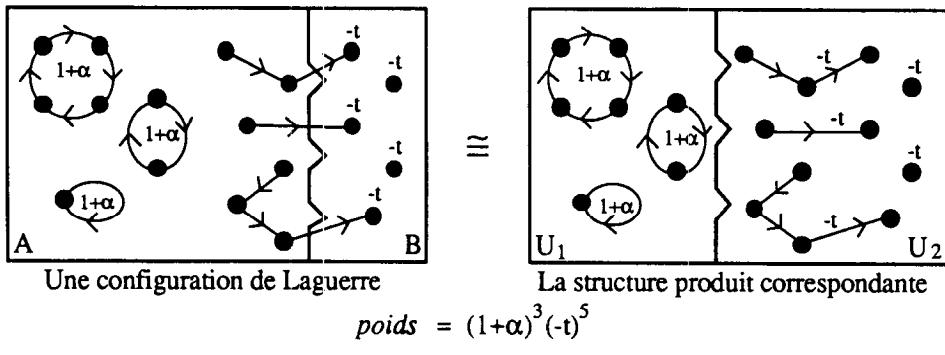


figure 15

(2.9) **Définition.** Une configuration de Laguerre sur un ensemble fini  $U$  est un triplet  $(f, A, B)$  où

- (i)  $(A, B)$  est une composition de  $U$ , i.e.: une paire ordonnée de sous-ensembles  $A$  et  $B$  de  $U$  tels que  $A \cap B = \emptyset$  et  $A \cup B = U$ ,
- (ii)  $f: A \hookrightarrow A+B$  est une fonction injective.

Le poids d'une telle configuration dépend du nombre de cycles  $\#cyc(f)$  dans le graphe sagittal de  $f$  ainsi que de la taille de  $B$  (voir figure 15) :

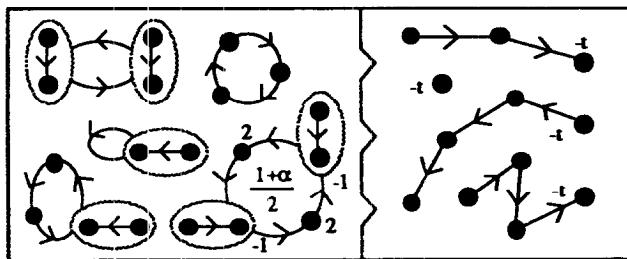
$$w(f, A, B) = (1+\alpha)^{\#cyc(f)} (-t)^{|B|}$$

□

(2.10) **Définition.** Les espèces  $\mathfrak{A}$ -pondérées  $\mathfrak{L}$  et  $\mathfrak{Q}$  sont définies comme suit :

(1)  $\forall U \in \mathbb{B}$ ,  $\mathfrak{L}[U]$  est l'ensemble des configurations de Laguerre sur  $U$ .

(2)  $\mathfrak{Q} = S_\tau(X_{(2)} + L_{2(-1)}) \cdot E(L_{(-t)}^*)$ , avec  $\tau = (1+\alpha)/2$  (voir figure 16).  $\square$



Une  $\mathfrak{Q}$ -structure de poids  $2^7(-1)^6\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^5(-t)^4$

figure 16

(2.11) **Proposition.** Les espèces  $\mathfrak{L}$  et  $\mathfrak{Q}$  sont deux modèles combinatoires pour la famille normalisée  $(n!L_n^{(\alpha)})_{n \geq 0}$  des polynômes de Laguerre.

**Preuve :** Comme l'illustre la figure 15, chaque configuration de Laguerre ( $f$ , A, B) induit un autre découpage de l'ensemble sous-jacent en deux parties ; la première,  $U_1$ , contient les cycles de  $f$ , chacun ayant le poids  $1+\alpha$ , et la deuxième,  $U_2$ , contient tous les autres éléments qui constituent alors une assemblée de chaînes (listes) non vides ayant toutes le poids  $-t$ . D'où l'isomorphisme

$$\mathfrak{L} \cong E(C_{(1+\alpha)}) \cdot E(L_{(-t)}^*) \cong S_\tau \cdot E(L_{(-t)}^*) ,$$

avec  $\tau = 1 + \alpha$ . C'est pourquoi

$$\mathfrak{L}(x) = S_\tau(x) e^{-tL^*(x)} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{1+\alpha} \cdot e^{\frac{-tx}{1-x}} = \sum_{n \geq 0} n! L_n^{(\alpha)}(t) \frac{x^n}{n!} ,$$

et  $|\mathfrak{L}[n]| = n! L_n^{(\alpha)}(t)$ ,  $n \geq 0$ .

L'espèce  $\mathfrak{Q}$  étant définie par un produit, il suffit de calculer directement sa série génératrice et de remarquer que  $(1-x)^2 = 1-2x+x^2$  :

$$\mathfrak{Q}(x) = S_\tau(2x - x^2) \cdot e^{-tL^*(x)} = \left(\frac{1}{1-2x+x^2}\right)^{1+\alpha} \cdot e^{\frac{-tx}{1-x}} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{1+\alpha} \cdot e^{\frac{-tx}{1-x}} .$$

■

**(2.12) Proposition.** Les séries indicatrices des espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{Q}$  sont respectivement :

$$(1) \quad Z_{\mathfrak{B}} = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(1+\alpha)} \cdot e^{\frac{(-t)^n}{n} \cdot \frac{x_n}{1-x_n}}$$

$$= \sum_{\substack{d = (d_1, d_2, \dots) \\ \sum id_i < \infty}} \left( \prod_{r \geq 1} r^{d_r} d_r! L_{d_r}^{(\alpha_r)}(t_r) \right) \frac{x^d}{\text{aut } d},$$

$$\text{où } 1 + \alpha_r = \frac{1}{r} \omega_r(1+\alpha) \left( = \frac{1}{r} \sum_{d|r} \varphi(d) (1+\alpha)^{r/d} \right) \text{ et } t_r = \frac{(-1)^{r-1} t^r}{r}.$$

$$(2) \quad Z_{\mathfrak{Q}} = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - 2^n x_n - (-1)^n x_n^2} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} \cdot e^{\frac{(-t)^n}{n} \cdot \frac{x_n}{1-x_n}}.$$

**Preuve :** (1) Puisque  $\mathfrak{B} \equiv S_{\tau} \cdot E(L_{(-t)})^*$ ,  $\tau = 1 + \alpha$ , il suffit de multiplier les séries indicatrices appropriées : celle de  $S_{\tau}$  se trouve à la proposition (2.6-2) et

$$Z_{L_{(-t)}} = -t Z_{L^*} = \frac{-tx_1}{1 - x_1} \Rightarrow Z_E \circ Z_{L_{(-t)}} = e^{\sum_{n \geq 1} \frac{(-t)^n}{n} (Z_{L^*})_n} = e^{\sum_{n \geq 1} \frac{(-t)^n}{n} \cdot \frac{x_n}{1-x_n}}$$

donc

$$Z_{\mathfrak{B}} = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(1+\alpha)} \cdot e^{\sum_{n \geq 1} \frac{(-t)^n}{n} \frac{x_n}{1-x_n}} = \prod_{n \geq 1} \left[ \left( \frac{1}{1 - x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(1+\alpha)} \cdot e^{\frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} \cdot \frac{x_n}{1-x_n}} \right]$$

$$= \prod_{n \geq 1} \left[ \left( \frac{1}{1 - x_n} \right)^{1+\alpha_n} e^{\frac{-t_n x_n}{1-x_n}} \right] = \prod_{n \geq 1} \left( \sum_{k \geq 0} L_k^{(\alpha_n)}(t_n) x_n^k \right),$$

$$\text{où } 1 + \alpha_n = \frac{1}{n} \omega_n(1+\alpha) \text{ et } t_n = \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n}. \text{ D'où}$$

$$Z_{\mathfrak{B}} = \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots \geq 0 \\ \sum k_i < \infty}} L_{k_1}^{(\alpha_1)}(t_1) L_{k_2}^{(\alpha_2)}(t_2) \dots x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots$$

(2) Pour l'espèce  $\mathfrak{L}$ , le calcul est direct :

$$Z_{\mathfrak{L}} = Z_{S_t} \circ Z_{X_{(2)} + L_{(-1)}} \cdot Z_{E(L_{(-1)})} = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - \left( Z_{X_{(2)} + L_{(-1)}} \right)_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}} \cdot e^{\frac{(-t)^n}{n} \frac{x_n}{1-x_n}},$$

où  $Z_{X_{(2)} + L_{(-1)}} = 2x_1 - x_1^2$  et  $\left( Z_{X_{(2)} + L_{(-1)}} \right)_n = 2^n x_n + (-1)^n x_n^2$ . ■

### §2.3 DES PIEUVRES POUR CHARLIER

Les polynômes de *Charlier*, notés  $C_n^{(a)}(t)$ , sont définis par la série génératrice

$$(2.13) \quad \sum_{n \geq 0} C_n^{(a)}(t) \frac{x^n}{n!} = \left( 1 - \frac{x}{a} \right)^t \cdot e^x.$$

On a ici remplacé la variable de Chihara ([CT] p.170) par  $-x/a$ . Ainsi, utilisant l'expérience des exemples précédents, on trouve facilement le modèle combinatoire  $\mathfrak{C}$  des *configurations de Charlier*, tout comme l'ont fait Labelle et Yeh [LY1]. Nous présentons aussi une espèce de *pieuvres*,  $\mathcal{C}$ , que Bergeron obtient comme cas limite de son modèle des polynômes de Krawtchouk [BF1].

Une *configuration de Charlier* sur un ensemble fini  $U$  est simplement une permutation partielle sur  $U$  (voir figure 17), d'où la définition suivante :

(2.14) **Définition.** L'espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée  $\mathfrak{C}$  des configurations de Charlier est définie par :

$$\forall U \in \mathbb{B}, \mathfrak{C}[U] = \{(A, \sigma) \mid A \subseteq U \text{ et } \sigma \in \mathfrak{S}_A\}$$

$$w(A, \sigma) = (1/a)^{|A|} (-t)^{\# \text{cyc}(\sigma)}. \quad \square$$

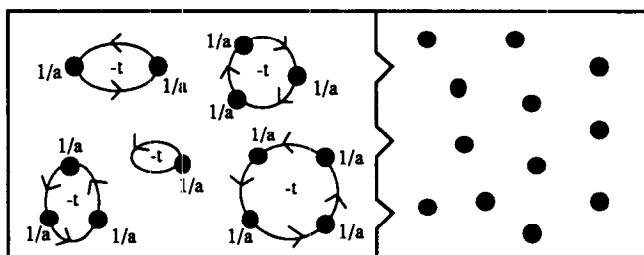
(2.15) **Proposition.** L'espèce  $\mathfrak{C}$  est un modèle combinatoire pour la famille  $(C_n^{(a)})_{n \geq 0}$  des polynômes de Charlier.

**Preuve :** En effet, toute permutation partielle s'obtient par un choix d'un sous-ensemble et d'une permutation de ce sous-ensemble, son complémentaire étant muni de son unique structure d'ensemble ; nous sommes donc en présence d'un produit d'espèces. De façon précise,

$$\mathfrak{C} \cong S_\tau(X_{(1/a)}) \cdot E, \text{ avec } \tau = -t.$$

D'où

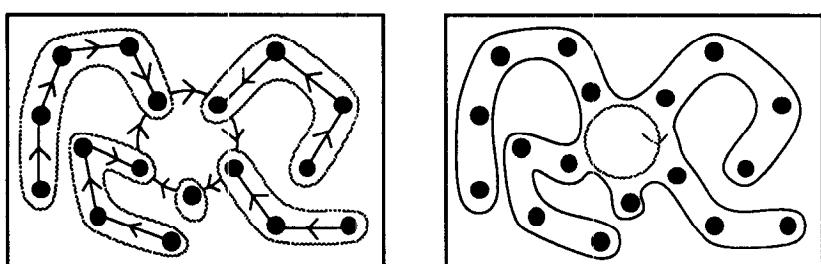
$$\mathfrak{C}(x) = S_\tau(x/a) \cdot e^x = \left( \frac{1}{1 - x/a} \right)^{-t} \cdot e^x.$$
■



Une configuration de Charlier de poids  $(1/a)^{13} (-t)^5$ .

figure 17

Rappelons que dans [BF1], les *permutations circulaires de chaînes non vides* ou  $\text{C}^\circ\text{L}^*$ -structures sont appelées *pieuvres* ou *O-structures* (figure 18). À chaque pieuvre on attribue un poids,  $c_k a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_k}$ , où  $k$  est la longueur de son cycle et  $j_1, j_2, \dots, j_k$  sont les longueurs de ses diverses tentacules. En spécialisant les valeurs de ces paramètres, on obtient des modèles connus et nouveaux pour la plupart des familles classiques de polynômes orthogonaux.



Une  $\text{C}^\circ\text{L}^*$ -structure.

Une pieuvre ou O-structure.

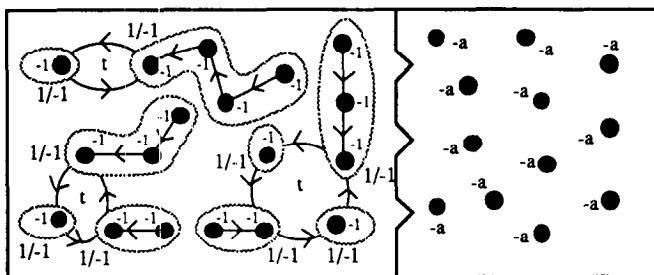
figure 18

En particulier, Bergeron dit que pour les polynômes de Charlier on doit considérer les

« assemblées de deux types de pieuvres :

- celles dont le poids est  $(-1)^{n-k} t$ , où  $n$  est le nombre de points de la pieuvre et  $k$  est la longueur de son cycle
- celles qui sont réduites à un point, et dont le poids est  $(-a)$  ».

Le premier de ces deux types de pieuvres s'obtient en donnant à tous les cycles le poids  $t$ , à toutes les tentacules le poids  $(1/-1)$  et en ajoutant un poids supplémentaires de  $(-1)$  à chaque point de la pieuvre (voir figure 19). Il s'agit donc de structures de l'espèce que nous définissons en (2.16).



Une  $\mathcal{C}$ -structure de poids  $(-1)^{18-9} t^3 (-a)^{12}$ .

figure 19

**(2.16) Définition.** L'espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée  $\mathcal{C}$  est définie par l'isomorphisme

$$\mathcal{C} \equiv S_t(L_{(-1)}^*(X_{(-1)})) \cdot E(X_{(-a)})$$

□

**(2.17) Proposition.** L'espèce  $\mathcal{C}$  est un modèle combinatoire pour la famille normalisée  $((-a)^n C_n^{(a)})_{n \geq 0}$  des polynômes de Charlier.

**Preuve :** D'une part

$$C(\xi) = S_t(L_{(-1)}^*(-\xi)) \cdot E(-a\xi) = \left[ \frac{1}{1 - \frac{-(-\xi)}{1 - (-\xi)}} \right]^t e^{-a\xi} = (1 + \xi)^t e^{-a\xi},$$

et d'autre part, par (2.13), on obtient

$$\sum_{n \geq 0} (-a)^n C_n^{(a)}(t) \frac{\xi^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} C_n^{(a)}(t) \frac{(-a\xi)^n}{n!} = \left(1 - \frac{(-a\xi)^t}{a}\right)^t e^{-a\xi} = (1 + \xi)^t e^{-a\xi}.$$

D'où  $|C_n| = (-a)^n C_n^{(a)}$ ,  $n \geq 0$ . ■

**(2.18) Proposition.** *Les séries indicatrices des espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées  $\mathfrak{C}$  et  $C$  sont respectivement :*

$$(1) \quad Z_{\mathfrak{C}} = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - a^{-n} x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(-t)} \cdot e^{\frac{x_n}{n}}$$

$$= \sum_{\substack{\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots) \\ \sum i d_i < \infty}} \left( \prod_{r \geq 1} C_{d_r}^{(a_r)}(t_r) \right) \frac{x^{\mathbf{d}}}{\text{aut } \mathbf{d}},$$

$$\text{où } a_r = \frac{a^r}{r} \text{ et } t_r = -\frac{1}{r} \omega_r(-t) \left( = -\frac{1}{r} \sum_{d|r} \varphi(d) (-t)^{r/d} \right).$$

$$(2) \quad Z_C = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - \frac{x_n}{1 - (-1)^n x_n}} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(t)} \cdot e^{\frac{(-a)^n x_n}{n}}.$$

**Preuve :** (1) Utilisant l'isomorphisme  $\mathfrak{C} \cong S_{\tau}(X_{(1/a)}) \cdot E$ ,  $\tau = -t$ , on obtient

$$Z_{\mathfrak{C}} = Z_{S_{\tau}} \circ Z_{X_{(1/a)}} \cdot Z_E, \quad \text{où} \quad Z_{X_{(1/a)}} = a^{-1} x_1 \quad \text{et} \quad \left( Z_{X_{(1/a^n)}} \right)_n = a^{-n} x_n,$$

donc

$$Z_{\mathfrak{C}} = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - a^{-n} x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(-t)} \cdot e^{\sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{n}} = \prod_{n \geq 1} \left[ \left( \frac{1}{1 - a^{-n} x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(-t)} \cdot e^{\frac{x_n}{n}} \right]$$

$$= \prod_{n \geq 1} \left[ \left( \frac{1}{1 - n a^{-n} \xi_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(-t)} e^{\xi_n} \right] = \prod_{n \geq 1} \left[ \sum_{k \geq 0} C_k^{(a_n)}(t_n) \frac{\xi_n^k}{k!} \right]$$

$$\text{où } \xi_n = \frac{x_n}{n}, \quad a_n = n^{-1} a^n \quad \text{et} \quad t_n = -\frac{1}{n} \omega_n(-t).$$

D'où

$$Z_{\mathcal{C}} = \prod_{n \geq 1} \left[ \sum_{k \geq 0} C_k^{(a_n)}(t_n) \frac{x_n^k}{n^k k!} \right] = \sum_{k_1, k_2, \dots \geq 0} \frac{C_{k_1}^{(a_1)}(t_1) C_{k_2}^{(a_2)}(t_2) \dots}{\frac{k_1! k_2! \dots}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! \dots}}.$$

(2) Le résultat découle de la définition de l'espèce  $C$ :

$$Z_C = (Z_{S_t(L_{(-1)})} \circ Z_{X_{(-1)}}) \cdot Z_{E(X_{(-a)})}$$

où

$$\begin{aligned} Z_{L_{(-1)}} &= \frac{-x_1}{1 - x_1}, \quad \left( Z_{L_{(-1)}} \right)_k = \frac{(-1)^k x_k}{1 - x_k}, \\ \left( Z_{X_{(-1)}} \right)_n &= (-1)^n x_n \text{ et } \left( Z_{X_{(-a)}} \right)_n = (-a)^n x_n. \end{aligned}$$

D'où

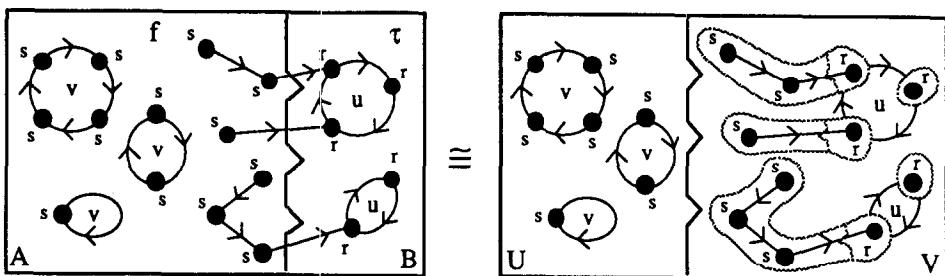
$$Z_{S_t} \circ Z_{L_{(-1)}} = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - \frac{(-1)^n x_n}{1 - x_n}} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(t)}$$

et

$$Z_C = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - \frac{(-1)^n (-1)^n x_n}{1 - (-1)^n x_n}} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(t)} \cdot e^{\sum_{n \geq 1} \frac{(-a)^n x_n}{n}} = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - \frac{x_n}{1 - (-1)^n x_n}} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(t)} \cdot e^{\frac{(-a)^n x_n}{n}}. \blacksquare$$

## §2.4 LE DEUXIÈME NIVEAU

Les familles de polynômes d'Hermite, de Laguerre et de Charlier figurent aux niveaux 0 et 1 du « tableau d'Askey » [LJ3]. Nous allons maintenant aborder le niveau 2 qui contient les Krawtchouk, Meixner, Meixner-Pollaczek et Jacobi. La plupart des modèles qui suivent se retrouvent dans les travaux de Labelle et Yeh [LY2, 3 et 4]. Entre-autre ceux-ci ont remarqué, suite aux travaux de Foata et Labelle [FL], qu'en modifiant les poids utilisés dans les *endofonctions de Meixner* on obtient quantité de modèles pour ces diverses familles ; d'où l'introduction de la notion de « *configuration de Meixner* ».



Une configuration de Meixner de poids  $s^{13}r^5v^3u^2$

figure 20

(2.19) **Définition.** Une configuration de Meixner sur un ensemble fini  $U$  est formée d'une configuration de Laguerre et d'une permutation complémentaire. De façon précise :

(1)  $(A, B, f, \tau)$  est une configuration de Meixner sur  $U$ ssi

(i)  $(f, A, B)$  est une configuration de Laguerre,

i.e. :  $A \cup B = U$ ,  $A \cap B = \emptyset$  et  $f : A \hookrightarrow A+B$

(ii)  $\tau$  est une permutation de  $B$  :  $\tau \in \mathfrak{S}_B$ .

(2) L'espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée  $\mathcal{M}_{\text{sr vu}}$  de toutes les configurations de Meixner a pour fonction de poids

$$w : (A, B, f, \tau) \longmapsto s^{|A|} r^{|B|} v^{\#\text{cyc } f} u^{\#\text{cyc } \tau}.$$

□

(2.20) **Proposition.** L'espèce  $\mathcal{M}_{\text{sr vu}}$  s'exprime comme produit d'espèces de permutations,

$$\mathcal{M}_{\text{sr vu}} \cong S_v(X_s) \cdot S_u(X_r \cdot L(X_s)),$$

sa série génératrice est

$$\mathcal{M}_{\text{sr vu}}(x) = (1 - sx)^{u-v} (1 - (s+r)x)^{-u}$$

et sa série indicatrice

$$Z_{\mathfrak{M}_{\text{srwu}}} = \prod_{n \geq 1} (1 - s^n x_n)^{-\frac{1}{n} \omega_n(v)} \left( 1 - \frac{r^n x_n}{1 - s^n x_n} \right)^{-\frac{1}{n} \omega_n(u)}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n i^{\sigma_i} m_{\sigma_i}(s_i, r_i, v_i, u_i) I(\sigma),$$

où  $u_n = \frac{1}{n} \omega_n(u)$ ,  $v_n = \frac{1}{n} \omega_n(v)$ ,  $s_n = s^n$ ,  $r_n = r^n$  et les  $m_n(s, r, v, u)$ ,  $n \geq 0$ , sont définis par

$$\sum_{n \geq 0} m_n(s, r, v, u) \frac{x^n}{n!} = \mathfrak{M}_{\text{srwu}}(x).$$

**Preuve :** La décomposition des configurations de Meixner se fait de la même façon que pour les configurations de Laguerre (2.11) : d'une part on garde les cycles de  $f$  et d'autre part les cycles de  $\tau$ . Ces derniers s'avèrent être suivis de listes de points ayant chacun le poids  $s$  (voir figure 20). D'où l'isomorphisme

$$\mathfrak{M}_{\text{srwu}} \equiv S_v(X_s) \cdot S_u(X_r \cdot L(X_s)).$$

Cette relation facilite le calcul des séries génératrices et indicatrices. D'abord,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\text{srwu}}(x) &= S_v(sx) \cdot S_u\left(rx \cdot \frac{1}{1-sx}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1-sx}\right)^v \left(\frac{1}{1-\frac{rx}{1-sx}}\right)^u = (1-sx)^{u-v} \left(\frac{1}{1-(r+s)x}\right)^u. \end{aligned}$$

Puis

$$Z_{\mathfrak{M}_{\text{srwu}}} = (Z_{S_v} \circ Z_{X_s}) \cdot (Z_{S_u} \circ Z_{X_r \cdot L(X_s)})$$

où  $Z_{X_s} = sx_1$  et  $Z_{X_r \cdot L(X_s)} = \frac{rx_1}{1-sx_1}$ , donc

$$Z_{\mathfrak{M}_{\text{srwu}}} = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1-s^n x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(v)} \left( \frac{1}{1-\frac{r^n x_n}{1-s^n x_n}} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(u)}.$$

Ainsi on peut écrire

$$\begin{aligned} Z_{\mathfrak{M}_{sr vu}} &= \prod_{n \geq 1} (1 - s^n x_n)^{-\frac{1}{n} \omega_n(v)} \left( \frac{1 - s^n x_n}{1 - (s^n + r^n) x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(u)} \\ &= \prod_{n \geq 1} (1 - s^n x_n)^{\frac{1}{n} \omega_n(u) - \frac{1}{n} \omega_n(v)} (1 - (s^n + r^n) x_n)^{-\frac{1}{n} \omega_n(u)}, \end{aligned}$$

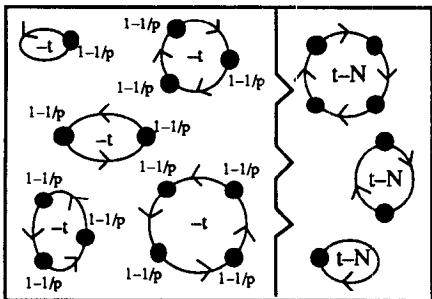
posant  $u_n = \frac{1}{n} \omega_n(u)$ ,  $v_n = \frac{1}{n} \omega_n(v)$ ,  $s_n = s^n$ ,  $r_n = r^n$  et utilisant la série génératrice,

$$\begin{aligned} &= \prod_{n \geq 1} (1 - s_n x_n)^{u_n - v_n} (1 - (s_n + r_n) x_n)^{-u_n} \\ &= \prod_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} m_k(s_n, r_n, v_n, u_n) \frac{x_n^k}{k!} \\ &= \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots \geq 0 \\ \sum k_i = \infty}} m_{k_1}(s_1, r_1, v_1, u_1) \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} m_{k_2}(s_2, r_2, v_2, u_2) \frac{x_2^{k_2}}{k_2!} \dots \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n) \\ \sum i d_i = n}} \prod_{i=1}^n i^{d_i} m_{d_i}(s_i, r_i, v_i, u_i) \frac{x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots}{\text{aut}(\mathbf{d})} \end{aligned}$$

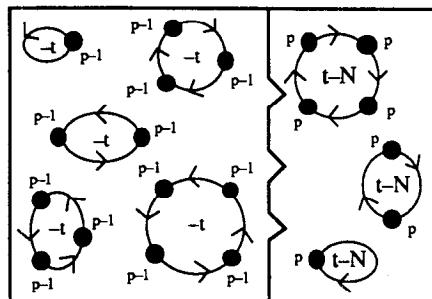
Nous définissons les polynômes de **Krawtchouk**, notés  $K_n(t; p, N)$ , par la série génératrice

$$(2.21) \quad \sum_{n \geq 0} (-N)_n p^n K_n(t; p, N) \frac{x^n}{n!} = (1 + (1-p)x)^t (1 - px)^{N-t}$$

qu'on trouve dans Szego [SG]. Chaque valeur entière positive du paramètre  $N$  donne lieu à une famille orthogonale finie. Une telle série génératrice suggère un produit d'espèces de permutations. Labelle et Yeh [LY2] donnent un modèle de cette sorte, l'espèce **K**, et nous en proposons une variante dans l'espèce **K1**. Nous avons aussi une espèce de pieuvres [BF1]; il s'agit de l'espèce **K** qui donne lieu au modèle **C** des polynômes de Charlier. Et finalement, deux espèces de configurations de Meixner, **K** et **K1**, complètent notre tour des polynômes de Krawtchouk.



une structure d'espèce **K**  
de poids  $(-t)^5 (1-1/p)^{13} (t-N)^3$



une structure d'espèce **K1**  
de poids  $(-t)^5 (p-1)^{13} (t-N)^3 p^7$

figure 21

(2.22) **Définition.** On a les définitions suivantes pour les espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées **K**, **K1** et **K**:

$$(1) \quad \forall U \in \mathbb{B}, \quad K[U] = \{(A, B, \sigma, \tau) \mid A \cup B = U, A \cap B = \emptyset, \sigma \in \mathfrak{G}_A \text{ et } \tau \in \mathfrak{G}_B\}$$

$$w(A, B, \sigma, \tau) = (-t)^{\#cyc \sigma} (1-1/p)^{|A|} (t-N)^{\#cyc \tau}.$$

$$(2) \quad \forall U \in \mathbb{B}, \quad K1[U] = \{(A, B, \sigma, \tau) \mid A \cup B = U, A \cap B = \emptyset, \sigma \in \mathfrak{G}_A \text{ et } \tau \in \mathfrak{G}_B\}$$

$$w(A, B, \sigma, \tau) = (-t)^{\#cyc \sigma} (p-1)^{|A|} (t-N)^{\#cyc \tau} p^{|B|}.$$

$$(3) \quad K = S_i(L_{(p-1)^{-1}}^* \circ X_{(p-1)}) \cdot S \cdot N(X_{(p)}).$$

□

Comme l'indique la figure 21, les espèces **K** et **K1** ne diffèrent que dans la façon de distribuer les poids sur les points : on obtient la structure de droite en ajoutant un facteur  $p$  à tous les poids des points de l'ensemble sous-jacent de la structure de gauche. Ceci se réflète par un facteur de normalisation dans les séries génératrices et indicatrices. Malgré la définition que nous en avons donné en (2.22-3), l'espèce **K** est bien une espèce d'assemblées de pieuvres ; un premier type dont non seulement les tentacules mais aussi les points ont un poids et un deuxième type qu'on pourrait qualifier de pieuvres amputées (voir figure 22).

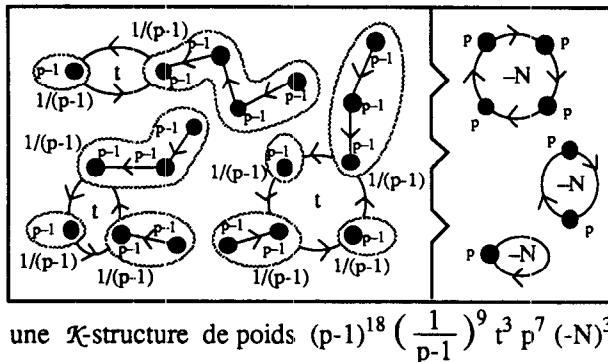


figure 22

**(2.23) Définition.** Les espèces de configuration de Meixner  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{K}_1$  sont définies par :

$$(1) \quad \mathcal{K} = \mathfrak{M}_{\text{sr vu}}, \text{ avec } v = -N, s = 1, u = -t \text{ et } r = -1/p$$

$$(2) \quad \mathcal{K}_1 = \mathfrak{M}_{\text{sr vu}}, \text{ avec } v = -N, s = 1 - 1/p, u = t - N \text{ et } r = 1/p \quad \square$$

**(2.24) Proposition.** L'espèce  $\mathbf{K}$  est un modèle combinatoire pour la famille normalisée  $((-N)_n K_n)_{n \geq 0}$ ; les espèces  $\mathbf{K}_1$  et  $\mathcal{K}$  sont des modèles combinatoires pour la famille normalisée  $((-N)_n p^n K_n)_{n \geq 0}$  et les espèces  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{K}_1$  sont des modèles pour la famille normalisée  $((-N)_n K_n)_{n \geq 0}$  des polynômes de Krawtchouk.

**Preuve :** Comme le suggèrent leur définition ainsi que la figure 21, écrivons les espèces  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{K}_1$  sous la forme d'un produit d'espèces de permutations pondérées adéquatement :

$$\mathbf{K} \cong S_t(X_{(1-1/p)}) \cdot S_{t-N} \text{ et } \mathbf{K}_1 \cong S_t(X_{(p-1)}) \cdot S_{t-N}(X_p).$$

De ces relations on tire tout d'abord que

$$\mathbf{K}(x) = \left( \frac{1}{1 - (1-1/p)x} \right)^t \left( \frac{1}{1-x} \right)^{t-N} = \left( 1 + (1-p) \frac{x}{p} \right)^t \left( 1 - p \frac{x}{p} \right)^{N-t}$$

ce qui, utilisant (2.21), est égal à

$$= \sum_{n \geq 0} (-N)_n p^n K_n(t; p, N) \frac{x^n}{p^n n!} = \sum_{n \geq 0} (-N)_n K_n(t; p, N) \frac{x^n}{n!} .$$

Puis, la deuxième relation donne

$$K1(x) = \left( \frac{1}{1 - (p-1)x} \right)^t \left( \frac{1}{1 - px} \right)^{N-t} = (1 + (1-p)x)^t (1 - px)^{N-t} .$$

Pour l'espèce  $\mathcal{K}$ , on fait un petit calcul avec la définition :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x) &= S_t(L_{(p-1)^{-1}}^*((p-1)x)) \cdot S_{-N}(px) = S_t\left(\frac{(p-1)^{-1}(p-1)x}{1 - (p-1)x}\right) \cdot S_{-N}(px) \\ &= \left( \frac{1}{1 - \frac{x}{1 - (p-1)x}} \right)^t \left( \frac{1}{1 - px} \right)^{-N} = \left( \frac{1 + (1-p)x}{1 - px} \right)^t \left( \frac{1}{1 - px} \right)^{-N} . \end{aligned}$$

Le résultat pour  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{K}1$  découle de la proposition (2.20) puisqu'il s'agit d'espèces de configurations de Meixner :

$$\mathcal{K} \equiv S_N \cdot S_{-t}(X_{-1/p} \cdot L) \quad \text{et} \quad \mathcal{K}1 \equiv S_{-N}(X_{1-1/p}) \cdot S_{t-N}(X_{1/p} \cdot L(X_{1-1/p}))$$

donc

$$\mathcal{K}(x) = (1-x)^{N-t} (1 - (1-1/p)x)^t$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{K}1(x) &= (1 - (1-1/p)x)^t (1 - x)^{N-t} \\ &= (1 + (1-p)x/p)^t (1 - p x/p)^{N-t} = \sum_{n \geq 0} (-N)_n K_n(t; p, N) \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

■

**(2.25) Proposition.** *Les séries indicatrices de nos cinq modèles combinatoires pour les polynômes de Krawtchouk sont respectivement :*

$$(1) \quad Z_K = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - \left( \frac{p-1}{p} \right)^n x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(-t)} \left( \frac{1}{1 - x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(t-N)}$$

$$= \sum_{\substack{\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots) \\ \sum v d_v < \infty}} \prod_{i \geq 1} i^{\frac{d_i}{n}} (-N_i)_{d_i} K_{d_i}(t_i; p_i, N_i) \frac{x^{\mathbf{d}}}{\text{aut } \mathbf{d}},$$

$$\text{ou } t_n = -\frac{1}{n} \omega_n(-t), \quad N_n = -\frac{1}{n} [\omega_n(t-N) + \omega_n(-t)] \quad \text{et} \quad p_n = \frac{p^n}{p^n - (p-1)^n}.$$

$$(2) \quad Z_{K1} = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - (p-1)^n x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(-t)} \left( \frac{1}{1 - p^n x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(t-N)}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots) \\ \sum i d_i = n}} p^n \prod_{i=1}^n i^{\frac{d_i}{n}} (-N_i)_{d_i} K_{d_i}(t_i; p_i, N_i) \frac{x^{\mathbf{d}}}{\text{aut } \mathbf{d}},$$

$$\text{ou } t_n = -\frac{1}{n} \omega_n(-t), \quad N_n = -\frac{1}{n} [\omega_n(t-N) + \omega_n(-t)] \quad \text{et} \quad p_n = \frac{p^n}{p^n - (p-1)^n}.$$

$$(3) \quad Z_K = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1 - (p-1)^n x_n}{1 - (1 + (p-1)^n) x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(t)} \left( \frac{1}{1 - p^n x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(-N)}.$$

$$(4) \quad Z_{K2} = \prod_{n \geq 1} (1 - x_n)^{-\frac{1}{n} \omega_n(-N)} \left( 1 - \frac{(-1)^n x_n}{p^n (1 - x_n)} \right)^{-\frac{1}{n} \omega_n(-t)}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{v=1}^n v^{\sigma_v} (-N_v)_{\sigma_v} K_{\sigma_v}(t_v; p_v, N_v) I(\sigma),$$

$$\text{ou } t_v = -\frac{1}{v} \omega_v(-t), \quad N_v = -\frac{1}{v} \omega_v(-N) \quad \text{et} \quad p_v = (-1)^{v-1} p^v.$$

$$(5) \quad Z_{K3} = \prod_{n \geq 1} \left( 1 - \left( \frac{p-1}{p} \right)^n x_n \right)^{-\frac{1}{n} \omega_n(-N)} \left( 1 - \frac{x_n}{p^n - (p-1)^n x_n} \right)^{-\frac{1}{n} \omega_n(t-N)}.$$

**Preuve :** Nous utilisons les isomorphismes qui permettent d'écrire chacune de ces espèces à l'aide d'espèces plus simples.

$$(1) \quad Z_K = (Z_{S-t} \circ Z_{X_{(1-p)^n}}) \cdot Z_{S-t-N}, \quad \text{où } \left( Z_{X_{(1-p)^n}} \right)_n = \left( \frac{p-1}{p} \right)^n x_n, \text{ donc}$$

$$Z_K = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - \left( \frac{p-1}{p} \right)^n x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(-t)} \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(t-N)}.$$

Posons  $t_n = -\frac{1}{n} \omega_n(-t)$ ,  $N_n = -\frac{1}{n} [\omega_n(t-N) + \omega_n(-t)]$  et choisissons  $\xi_n, p_n$  de sorte que

$$\begin{cases} (1 - p_n) \xi_n = -\left(\frac{p-1}{p}\right)^n x_n \\ p_n \xi_n = x_n \end{cases}, \text{ donc } \xi_n = x_n - \left(\frac{p-1}{p}\right)^n x_n = \left(\frac{p^n - (p-1)^n}{p^n}\right) x_n$$

$$p_n = \frac{x_n}{\xi_n} = \left(\frac{p^n}{p^n - (p-1)^n}\right).$$

On peut alors écrire, d'après (2.21),

$$Z_K = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 + (1-p_n)\xi_n} \right)^{t_n} \left( \frac{1}{1 - p_n \xi_n} \right)^{t_n - N_n} = \prod_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} (-N_n)_k p_n^k K_k(t_n; p_n, N_n) \frac{\xi_n^k}{k!}$$

et puisque  $\xi_n = \frac{x_n}{p_n}$  on obtient bien

$$Z_K = \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots \geq 0 \\ \sum k_i < \infty}} \prod_{i \geq 1} i^{k_i} (-N_i)_{k_i} K_{k_i}(t_i; p_i, N_i) \frac{x_i^{k_i}}{i^{k_i} k_i!}.$$

$$(2) \quad Z_{K1} = (Z_{S_{-t}} \circ Z_{X_{(p-1)}}) \cdot (Z_{S_{t-N}} \circ Z_{X_{(p)}}), \text{ où } \left( Z_{X_{(\tau)^n}} \right)_n = (\tau)^n x_n \text{ donc}$$

$$Z_{K1} = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - (p-1)^n x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(-t)} \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - p^n x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(t-N)}.$$

Encore une fois, posons  $t_n = -\frac{1}{n} \omega_n(-t)$ ,  $N_n = -\frac{1}{n} [\omega_n(t-N) + \omega_n(-t)]$  et choisissons  $\xi_n$  et  $p_n$  de sorte que

$$\begin{cases} (1 - p_n) \xi_n = -(p-1)^n x_n \\ p_n \xi_n = p^n x_n \end{cases}, \text{ donc } \xi_n = [p^n - (p-1)^n] x_n$$

$$p_n = \frac{p^n x_n}{\xi_n} = \left(\frac{p^n}{p^n - (p-1)^n}\right).$$

On peut alors écrire

$$Z_{K1} = \prod_{n \geq 1} (1 + (1 - p_n) \xi_n)^{t_n} (1 - p_n \xi_n)^{N_n t_n} = \prod_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} (-N_n)_k p_n^k K_k(t_n; p_n, N_n) \frac{\xi_n^k}{k!},$$

et puisque  $\xi_n = \frac{p^n x_n}{p_n}$ , on trouve

$$\begin{aligned} Z_{K1} &= \prod_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} (-N_n)_k p_n^k K_k(t_n; p_n, N_n) \frac{p^{nk} x_n^k}{p_n^k k!} \\ &= \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots \geq 0 \\ \sum k_i < \infty}} \prod_{i \geq 1} (-N_i)_{k_i} K_{k_i}(t_i; p_i, N_i) p^{ik_i} i^{k_i} \frac{x_i^{k_i}}{i^{k_i} k_i!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots) \\ \sum i d_i = n}} p^n \prod_{i=1}^n i^{d_i} (-N_i)_{d_i} K_{d_i}(t_i; p_i, N_i) \frac{x^{\mathbf{d}}}{\text{aut } \mathbf{d}}. \end{aligned}$$

$$(3) \quad Z_K = (Z_{S_t(L_{(p-1)^{-1}})} \circ Z_{X_{(p-1)}}) \cdot (Z_{S_N} \circ Z_{X_{(p)}}),$$

$$\text{où } Z_{S_t(L_{(p-1)^{-1}})} = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - \frac{(p-1)^{-n} x_n}{1 - x_n}} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(t)} \quad \text{et} \quad \left( Z_{X_{(\tau)^n}} \right)_n = (\tau)^n x_n \quad \text{donc}$$

$$\begin{aligned} Z_K &= \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - \frac{(p-1)^{-n} (p-1)^n x_n}{1 - (p-1)^n x_n}} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(t)} \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - p^n x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(-N)} \\ &= \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1 - (p-1)^n x_n}{1 - (1 + (p-1)^n) x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(t)} \left( \frac{1}{1 - p^n x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(-N)}. \end{aligned}$$

$$(4) \quad \text{Suivant (2.20), avec } v = -N, u = -t, s = 1 \text{ et } r = -1/p, \text{ on a}$$

$$Z_{K1} = \prod_{n \geq 1} (1 - x_n)^{-\frac{1}{n} \omega_n(-N)} \left( 1 - \frac{(-1)^n x_n}{p^n (1 - x_n)} \right)^{-\frac{1}{n} \omega_n(-t)}$$

et posant

$$t_n = -u_n = -\frac{1}{n} \omega_n(u) = -\frac{1}{n} \omega_n(-t)$$

$$N_n = -v_n = -\frac{1}{n} \omega_n(v) = -\frac{1}{n} \omega_n(-N)$$

$$s_n = 1$$

$$p_n = -\frac{1}{r_n} = -\frac{1}{r^n} = -\frac{1}{(-1/p)^n} = (-1)^{n-1} p^n$$

on obtient

$$Z_{\mathfrak{X}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n i^{\sigma_i} (-N_i)_{\sigma_i} K_{\sigma_i}(t_i; p_i, N_i) I(\sigma).$$

(5) Ici  $v = -N$ ,  $u = t-N$ ,  $s = 1-1/p$  et  $r = 1/p$ , donc  $p = \frac{1}{r} = \frac{1}{1-s}$  et pour utiliser la forme explicite donnée en (2.20) il faudrait que

$$p_n = \frac{1}{r_n} = \frac{1}{r^n} = p^n,$$

ce qui est en contradiction avec

$$p = \frac{1}{1-s}, \quad p_n = \frac{1}{1-s_n} = \frac{1}{1-s^n} = \frac{1}{1-(1-1/p)^n} = \frac{1}{1-(p-1)^n}.$$

C'est pourquoi nous écrivons simplement

$$\begin{aligned} Z_{\mathfrak{X}} &= \prod_{n \geq 1} \left( 1 - \left( \frac{p-1}{p} \right)^n x_n \right)^{-\frac{1}{n} \omega_n(-N)} \left( 1 - \frac{(1/p)^n x_n}{1 - \left( \frac{p-1}{p} \right)^n x_n} \right)^{-\frac{1}{n} \omega_n(t-N)} \\ &= \prod_{n \geq 1} \left( 1 - \left( \frac{p-1}{p} \right)^n x_n \right)^{-\frac{1}{n} \omega_n(-N)} \left( 1 - \frac{x_n}{p^n - (p-1)^n x_n} \right)^{-\frac{1}{n} \omega_n(t-N)} \end{aligned}$$

■

## §2.5 ENDOFONCTIONS ET MEIXNER

Les polynômes de *Meixner*, notés  $m_n(t; \beta, c)$ , sont définis par la série génératrice

$$(2.26) \quad \sum_{n \geq 0} m_n(t; \beta, c) \frac{x^n}{n!} = \left( 1 - \frac{x}{c} \right)^t (1-x)^{-t-\beta}$$

Outre le modèle original  $\mathfrak{M}$  des *endofonctions de Meixner* introduit par Foata et Labelle [FL], on trouve chez Labelle et Yeh [LY3] deux autres modèles : un produit  $M$

d'espèces de permutations et une espèce de configurations de Meixner,  $\mathfrak{M}_1$ .

(2.27) **Définition.** Une endofonction de Meixner sur un ensemble fini  $U$  est un couple  $\psi = ((A, B), f)$  où

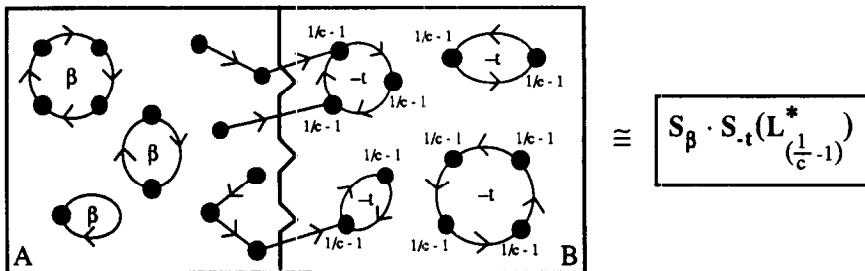
(i)  $(A, B)$  est une composition de  $U$ , i.e.: une paire ordonnée  $(A, B)$  de sous-ensembles de  $U$  qui satisfont  $A \cup B = U$ ,  $A \cap B = \emptyset$ .

(ii)  $f$  est une endofonction de  $U$  dont la restriction  $f_A : A \rightarrow U$  à la partie  $A$  est injective et la restriction  $f_B : B \rightarrow U$  de  $f$  à  $B$  est une permutation de  $B$ .

Si  $a(\psi)$  et  $b(\psi)$  désignent respectivement les nombres de cycles de  $f_A$  et de  $f_B$  alors le poids de  $\psi$  est défini par

$$w((A, B), f) = \beta^{a(\psi)} (-t)^{b(\psi)} \left(\frac{1}{c} - 1\right)^{|B|}.$$

□



Une endofonction de Meixner  
de poids  $(1/c - 1)^{11} \beta^3 (-t)^4$

figure 23

La correspondance  $((A, B), f) \leftrightarrow (A, B, f_A, f_B)$ ,  $v = \beta$ ,  $u = -t$ ,  $s = 1$  et  $r = \frac{1}{c} - 1$

(figure 23) établit le lien entre endofonctions de Meixner et configurations de Meixner.

(2.28) **Définition.** (1) On désigne par  $\mathfrak{M}$  l'espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée de toute les endofonctions de Meixner.

(2)  $\mathfrak{M}_1$  est l'espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée des configurations de Meixner de poids

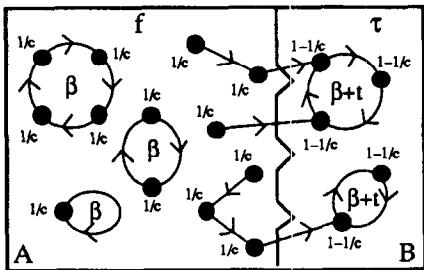
$$w(A, B, f, \tau) = (1/c)^{|A|} (1 - 1/c)^{|B|} \beta^{\# \text{cyc } f} (\beta + t)^{\# \text{cyc } \tau}$$

(3)  $M$  est l'espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée définie par

$$\forall U \in \mathbb{B}, M[U] = \{(A, B, \sigma, \tau) \mid A \cup B = U, A \cap B = \emptyset, \sigma \in \mathfrak{S}_A \text{ et } \tau \in \mathfrak{S}_B\},$$

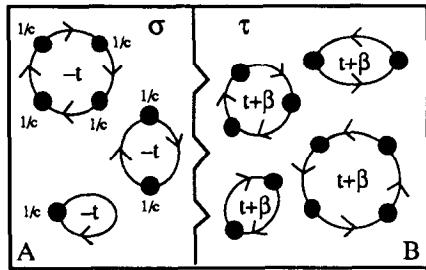
$$w(A, B, \sigma, \tau) = (1/c)^{|A|} (-t)^{\#\text{cyc } \sigma} (t + \beta)^{\#\text{cyc } \tau}.$$

□



Une  $\mathfrak{M}1$ -structure de poids

$$(1/c)^{13} (1-1/c)^5 \beta^3 (\beta+t)^2$$



Une  $M$ -structure de poids

$$(1/c)^7 (-t)^3 (t+\beta)^4$$

figure 24

(2.29) Proposition. Les espèces  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{M}1$  et  $M$  sont trois modèles combinatoires pour la famille  $(m_n)_{n \geq 0}$  des polynômes de Meixner.

Preuve : Suivant (2.20) et se basant sur la figure 23,

$$\mathfrak{M} \cong S_\beta \cdot S_{-t}(X_{(\frac{1}{c}-1)} \cdot L) \cong S_\beta \cdot S_{-t}(L_{(\frac{1}{c}-1)}^*)$$

donc

$$\mathfrak{M}(x) = (1-x)^{-t-\beta} \left(1 - \frac{1}{c}x\right)^t.$$

De même,

$$\mathfrak{M}1 \cong S_\beta(X_{1/c}) \cdot S_{\beta+t}(X_{1-\frac{1}{c}} \cdot L(X_{1/c}))$$

donne

$$\mathfrak{M}1(x) = \left(1 - \frac{1}{c}x\right)^t (1-x)^{-\beta-t}.$$

Écrivons l'espèce  $M$  comme produit d'espèces de permutations :

$$M \cong S_{-t}(X_{1/c}) \cdot S_{t+\beta}.$$

On a alors

$$M(x) = \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{c}x} \right)^{-t} \cdot \left( \frac{1}{1-x} \right)^{t+\beta} = (1-x/c)^t (1-x)^{-t-\beta} .$$

■

(2.30) **Proposition.** *Les séries indicatrices des espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées  $M_0$ ,  $M_1$  et  $M$  sont respectivement :*

$$(1) \quad Z_{M_0} = \prod_{n \geq 1} (1 - x_n)^{-\frac{1}{n}\omega_n(\beta)} \left( 1 - \frac{(c^{-1}-1)^n x_n}{1 - x_n} \right)^{-\frac{1}{n}\omega_n(-t)} \\ = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{v=1}^n v^{\sigma_v} m_{\sigma_v}(t_v; \beta_v, c_v) I(\sigma)$$

$$\text{où } t_v = -\frac{1}{v} \omega_v(t), \quad \beta_v = \frac{1}{v} \omega_v(\beta) \quad \text{et} \quad c_v = \frac{c^v}{c^v + (1-c)^v} .$$

$$(2) \quad Z_{M_1} = \prod_{n \geq 1} \left( 1 - \frac{x_n}{c^n} \right)^{-\frac{1}{n}\omega_n(\beta)} \left( \frac{c^n - x_n}{c^n - (1 + (c-1)^n)x_n} \right)^{\frac{1}{n}\omega_n(\beta+t)} .$$

$$(3) \quad Z_M = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - x_n/c^n} \right)^{\frac{1}{n}\omega_n(-t)} \left( \frac{1}{1 - x_n} \right)^{\frac{1}{n}\omega_n(t+\beta)} \\ = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{v=1}^n v^{\sigma_v} m_{\sigma_v}(t_v; \beta_v, c_v) I(\sigma)$$

$$\text{où } t_v = -\frac{1}{v} \omega_v(-t) \quad \text{et} \quad \beta_v = \frac{1}{v} [\omega_v(t+\beta) + \omega_v(-t)] .$$

**Preuve :** (1) et (2) s'obtiennent directement de (2.20) :

$$(1) \quad v = \beta, u = -t, s = 1 \quad \text{et} \quad r = \frac{1}{c} - 1 \quad \text{donnent}$$

$$\begin{aligned} \beta_n &= v_n = \frac{1}{n} \omega_n(v) = \frac{1}{n} \omega_n(\beta) \\ t_n &= -u_n = -\frac{1}{n} \omega_n(u) = -\frac{1}{n} \omega_n(-t) \\ c_n &= \frac{1}{1+r_n} = \frac{1}{1 + (\frac{1}{c} - 1)^n} = \frac{c^n}{c^n + (1-c)^n} . \end{aligned}$$

(2) Ici  $v = \beta$ ,  $u = \beta + t$ ,  $s = \frac{1}{c}$ ,  $r = 1 - \frac{1}{c}$  donne, par (2.20),

$$Z_M = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{x_n}{c^n}\right)^{-\frac{1}{n} \omega_n(\beta)} \left(1 - \frac{\left(1 - \frac{1}{c}\right)^n x_n}{1 - \frac{x_n}{c^n}}\right)^{-\frac{1}{n} \omega_n(\beta+t)}.$$

(3) Puisque  $M \cong S_{-t}(X_{1/c}) \cdot S_{t+\beta}$ , on a

$$Z_M = (Z_{S_{-t}} \circ Z_{X_{1/c}}) \cdot Z_{S_{t+\beta}},$$

où  $Z_{X_{1/c}} = \frac{x_1}{c}$ ,  $\left(Z_{X_{1/c^n}}\right)_n = \frac{x_n}{c^n}$ , donc

$$\begin{aligned} Z_M &= \prod_{n \geq 1} \left(\frac{1}{1 - \frac{x_n}{c^n}}\right)^{\frac{1}{n} \omega_n(-t)} \prod_{n \geq 1} \left(\frac{1}{1 - x_n}\right)^{\frac{1}{n} \omega_n(t+\beta)} \\ &= \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{x_n}{c^n}\right)^{-\frac{1}{n} \omega_n(-t)} (1 - x_n)^{-\frac{1}{n} \omega_n(t+\beta)} \end{aligned}$$

posant  $t_n = -\frac{1}{n} \omega_n(-t)$ ,  $\beta_n = \frac{1}{n} [\omega_n(t+\beta) + \omega_n(-t)]$  et utilisant (2.26) on conclut

$$\begin{aligned} Z_M &= \prod_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} m_k(t_n; \beta_n, c^n) \frac{x_n^k}{k!} \\ &= \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots \geq 0 \\ \sum k_i < \infty}} \prod_{i \geq 1} i^{k_i} m_{k_i}(t_i; \beta_i, c^i) \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots}{\text{aut}(k_1, k_2, \dots)}. \end{aligned}$$

## §2.6 MEIXNER-POLLACZEK

Les polynômes de *Meixner-Pollaczek*, notés  $P_n^a(t; \varphi)$ , sont définis par la fonction génératrice

$$(2.31) \quad \sum_{n \geq 0} P_n^a(t; \varphi) x^n = \frac{(1 - xe^{i\varphi})^{-a+it}}{(1 - xe^{-i\varphi})^{a+it}}.$$

On s'attend bien sûr à un produit d'espèces de permutations,  $\mathbf{P}$ , et en répartissant

diféremment les poids des singlets on en obtiendra un deuxième,  $\mathbf{P1}$ , [LY2, 3]. Puis encore une fois des configurations de Meixner avec poids particuliers nous donnent deux autres modèles,  $\mathfrak{P}$  et  $\mathfrak{P1}$ .

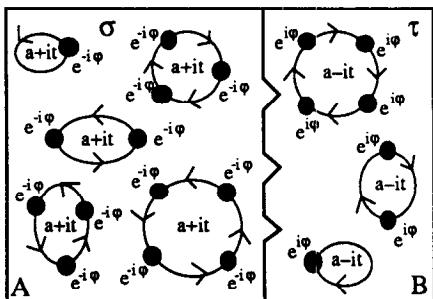
(2.32) **Définition.** Les espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{P1}$  sont définies par :

$$(1) \quad \forall U \in \mathbb{B}, \mathbf{P}[U] = \{(A, B, \sigma, \tau) \mid A \cup B = U, A \cap B = \emptyset, \sigma \in \mathfrak{S}_A \text{ et } \tau \in \mathfrak{S}_B\},$$

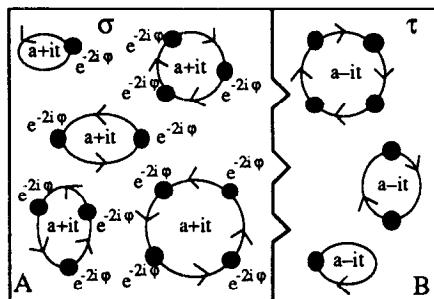
$$w(A, B, \sigma, \tau) = (e^{-i\varphi})^{|A|} (e^{i\varphi})^{|B|} (a+it)^{\#\text{cyc } \sigma} (a-it)^{\#\text{cyc } \tau}.$$

$$(2) \quad \forall U \in \mathbb{B}, \mathbf{P1}[U] = \{(A, B, \sigma, \tau) \mid A \cup B = U, A \cap B = \emptyset, \sigma \in \mathfrak{S}_A \text{ et } \tau \in \mathfrak{S}_B\},$$

$$w(A, B, \sigma, \tau) = (e^{-2i\varphi})^{|A|} (a+it)^{\#\text{cyc } \sigma} (a-it)^{\#\text{cyc } \tau}. \quad \square$$



Une structure d'espèce  $\mathbf{P}$  de poids  
 $(e^{-i\varphi})^{13} (e^{i\varphi})^7 (a+it)^5 (a-it)^3$



Une structure d'espèce  $\mathbf{P1}$  de poids  
 $(e^{-2i\varphi})^{13} (a+it)^5 (a-it)^3$

figure 25

(2.33) **Définition.** Les espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées  $\mathfrak{P}$  et  $\mathfrak{P1}$  sont les espèces de toutes les configurations de Meixner ayant

$$(1) \quad v = 2a, u = a+it, s = 1 \text{ et } r = e^{-2i\varphi}-1 \text{ pour } \mathfrak{P}$$

$$(2) \quad v = 2a, u = a-it, s = e^{-2i\varphi} \text{ et } r = 1-e^{-2i\varphi} \text{ pour } \mathfrak{P1}. \quad \square$$

(2.34) **Proposition.** L'espèce  $\mathbf{P}$  est un modèle combinatoire pour la famille normalisée  $(n! P_n^a)_{n \geq 0}$  et les espèces  $\mathbf{P1}$ ,  $\mathfrak{P}$  et  $\mathfrak{P1}$  sont des modèles combinatoires pour la famille normalisée  $(n! e^{-in\varphi} P_n^a)_{n > 0}$  des polynômes de

*Meixner-Pollaczek.*

**Preuve :** Exprimant  $P$  comme produit d'espèces de permutations (figure 25),

$$P \cong S_{a+it}(X_{e^{-i\varphi}}) \cdot S_{a-it}(X_{e^{i\varphi}}),$$

on obtient

$$P(x) = \left( \frac{1}{1 - e^{-i\varphi}x} \right)^{a+it} \left( \frac{1}{1 - e^{i\varphi}x} \right)^{a-it} = \sum_{n \geq 0} n! P_n^a(t; \varphi) \frac{x^n}{n!}$$

d'où  $|P[n]| = n! P_n^a(t; \varphi)$ . De façon semblable,

$$P_1 \cong S_{a+it}(X_{e^{-2i\varphi}}) \cdot S_{a-it}(X_{e^{i\varphi}}),$$

donne

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \left( \frac{1}{1 - e^{-2i\varphi}x} \right)^{a+it} \left( \frac{1}{1 - x} \right)^{a-it} \\ &= \left( \frac{1}{1 - (xe^{-i\varphi}) e^{-i\varphi}} \right)^{a+it} \left( \frac{1}{1 - (xe^{-i\varphi}) e^{i\varphi}} \right)^{a-it} = \sum_{n \geq 0} n! e^{-in\varphi} P_n^a(t; \varphi) \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

donc  $|P_1[n]| = n! e^{-in\varphi} P_n^a(t; \varphi)$ .

Le résultat annoncé pour les espèces  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}_1$  s'obtient directement en remplaçant les paramètres  $v, u, s$  et  $r$  de la proposition (2.20) par les valeurs appropriées. ■

**(2.35) Proposition.** *Les séries indicatrices des quatre modèles combinatoires  $P, P_1$ ,*

*$\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}_1$  pour les polynômes de Meixner-Pollaczek sont respectivement*

$$\begin{aligned} (1) \quad Z_P &= \prod_{n \geq 1} \frac{(1 - e^{in\varphi} x_n)^{-\frac{1}{n} \omega_n(a-it)}}{(1 - e^{-in\varphi} x_n)^{\frac{1}{n} \omega_n(a+it)}} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in G_n} \prod_{v=1}^n v^{\sigma_v} \sigma_v! P_{\sigma_v}^{a_v}(t_v, v\varphi) I(\sigma) \end{aligned}$$

$$(2) \quad Z_{P1} = \prod_{n \geq 1} \frac{(1 - x_n)^{-\frac{1}{n} \omega_n(a+it)}}{(1 - e^{-2in\varphi} x_n)^{\frac{1}{n} \omega_n(a-it)}} \\ = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} e^{-in\varphi} \prod_{v=1}^n v^{\sigma_v} \sigma_v! P_{\sigma_v}^{a_v}(t_v; v\varphi) I(\sigma)$$

où, dans (1) et (2),  $a_v = \frac{1}{2v} [\omega_v(a+it) + \omega_v(a-it)]$  et  $t_v = \frac{-i}{2v} [\omega_v(a+it) - \omega_v(a-it)]$ .

$$(3) \quad Z_{P2} = \prod_{n \geq 1} (1 - x_n)^{-\frac{1}{n} \omega_n(2a)} \left( 1 - \frac{(e^{-2i\varphi} - 1)^n x_n}{1 - x_n} \right)^{-\frac{1}{n} \omega_n(a+it)} \\ = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{v=1}^n v^{\sigma_v} \sigma_v! \left( (e^{-2i\varphi} - 1)^v + 1 \right)^{\sigma_v/2} P_{\sigma_v}^{a_v}(t_v; \varphi_v) I(\sigma)$$

où  $a_v = \frac{1}{2v} \omega_v(2a)$ ,  $t_v = \frac{-i}{v} [\omega_v(a+it) - \frac{1}{2} \omega_v(2a)]$  et  $\varphi_v$  satisfait  
 $e^{-2i\varphi_v} = (e^{-2i\varphi} - 1)^v + 1$ .

$$(4) \quad Z_{P3} = \prod_{n \geq 1} \left( 1 - e^{-2in\varphi} x_n \right)^{-\frac{1}{n} \omega_n(2a)} \left( 1 - \frac{(1 - e^{-2i\varphi})^n x_n}{1 - e^{-2in\varphi} x_n} \right)^{-\frac{1}{n} \omega_n(a-it)}.$$

**Preuve :** Utilisons les isomorphismes pour  $P$  et  $P1$  de la preuve précédente :

$$(1) \quad Z_P = (Z_{S_{a+it}} \circ Z_{X_{e^{-i\varphi}}}) \cdot (Z_{S_{a-it}} \circ Z_{X_{e^{i\varphi}}}) \\ = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - e^{-in\varphi} x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(a+it)} \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - e^{in\varphi} x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(a-it)}$$

choisissons  $a_n$  et  $t_n$  de sorte que

$$\begin{cases} a_n + it_n = \frac{1}{n} \omega_n(a+it) \\ a_n - it_n = \frac{1}{n} \omega_n(a-it) \end{cases} \quad \text{i.e.:} \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{2n} [\omega_n(a+it) + \omega_n(a-it)] \\ t_n = \frac{-i}{2n} [\omega_n(a+it) - \omega_n(a-it)] \end{cases},$$

on obtient, d'après (2.31),

$$Z_P = \prod_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} P_k^{a_n}(t_n; n\varphi) x_n^k = \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots \geq 0 \\ \sum k_v < \infty}} \prod_{v \geq 1} P_{k_v}^{a_v}(t_v; v\varphi) x_v^{k_v},$$

$$Z_P = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n) \\ \sum id_i = n}} \prod_{v=1}^n v^{d_v} d_v! P_{d_v}^{a_v}(t_v; v\varphi) \frac{x^{\mathbf{d}}}{\text{aut } \mathbf{d}} .$$

$$\begin{aligned} (2) \quad Z_{P1} &= (Z_{S_{a+it}} \circ Z_{X_{e^{-2i\varphi}}}) \cdot Z_{S_{a-it}} \\ &= \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - e^{-2in\varphi} x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(a+it)} \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - x_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n(a-it)} \\ &= \prod_{n \geq 1} \frac{(1 - (x_n e^{-in\varphi}) e^{in\varphi})^{-\frac{1}{n} \omega_n(a-it)}}{(1 - (x_n e^{-in\varphi}) e^{in\varphi})^{\frac{1}{n} \omega_n(a+it)}} \\ &= \prod_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} P_k^{a_n}(t_n; n\varphi) (x_n e^{-in\varphi})^k \\ &= \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots \geq 0 \\ \sum k_v < \infty}} \prod_{v \geq 1} P_{k_v}^{a_v}(t_v; v\varphi) e^{-ik_v v\varphi} v^{k_v} k_v! \frac{x_v^{k_v}}{v^{k_v} k_v!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots) \\ \sum vd_v = n}} e^{-in\varphi} \prod_{v=1}^n v^{d_v} d_v! P_{d_v}^{a_v}(t_v; v\varphi) \frac{x^{\mathbf{d}}}{\text{aut } \mathbf{d}} \end{aligned}$$

Pour  $\mathfrak{P}$  et  $\mathfrak{P}1$ , on utilise (2.20) :

$$(3) \quad v = 2a, u = a+it, s = 1 \text{ et } r = e^{-2i\varphi}-1 \text{ donne}$$

$$a_n = \frac{1}{2} v_n = \frac{1}{2n} \omega_n(v) = \frac{1}{2n} \omega_n(2a)$$

$$a_n + it_n = u_n = \frac{1}{n} \omega_n(u) = \frac{1}{n} \omega_n(a+it) \Rightarrow t_n = \frac{-i}{n} [\omega_n(a+it) - \frac{1}{2} \omega_n(2a)]$$

$$e^{-2i\varphi_n} = r_n + 1 = r^n + 1 = (e^{-2i\varphi}-1)^n + 1, \text{ i.e.: } \varphi_n = \frac{i}{2} \ln((e^{-2i\varphi}-1) + 1).$$

Et puisqu'il s'agit d'un modèle de la famille  $(n! e^{-in\varphi} P_n^a)_{n \geq 0}$ , on obtient

$$\begin{aligned} Z_{\mathfrak{P}} &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n} \prod_{v=1}^n v^{\sigma_v} \sigma_v! e^{-i\sigma_v \varphi_v} P_{\sigma_v}^{a_v}(t_v; \varphi_v) I(\sigma) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n} \prod_{v=1}^n v^{\sigma_v} \sigma_v! ((e^{-2i\varphi}-1)^v + 1)^{\sigma_v/2} P_{\sigma_v}^{a_v}(t_v; \varphi_v) I(\sigma) \end{aligned}$$

$$(4) \quad \text{Ici, } v = 2a, u = a-it, s = e^{-2i\varphi}, r = 1-e^{-2i\varphi} \text{ et le résultat est immédiat par (2.20).}$$



### §2.7 ENDOFONCTIONS DE JACOBI

Nous définissons les polynômes de *Jacobi*, notés  $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ , par leur fonction génératrice

$$(2.36) \quad \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(t) x^n = 2^{\alpha+\beta} R^{-1} (1 - x + R)^{-\alpha} (1 + x + R)^{-\beta},$$

où  $R = R(x; t) = (1 - 2tx + x^2)^{1/2}$ .

On trouve dans Bergeron [BF1] ainsi que dans Labelle et Yeh [LY4] plusieurs de ce que ces derniers appellent des « *ugly models* » parce que le poids des constituantes d'une structure utilise un paramètre qui dépend de la cardinalité  $n$  de l'ensemble sous-jacent. Pour cette raison, ces modèles ne s'inscrivent pas bien dans la théorie des espèces pondérées. Il y a aussi les couplages orientés maximaux (*complete oriented matchings*) de Strehl [SV1] qui reposent sur la connaissance d'un ordre total sur l'ensemble sous-jacent et par le fait même pourraient être traités dans le cadre des espèces linéaires [LV]. Ainsi le seul modèle que nous présentons est celui des *endofonctions de Jacobi* qui fut introduit par Foata et Leroux [FP].

(2.37) **Définition.** On appelle *endofonction de Jacobi* sur un ensemble fini  $U$  tout couple  $\phi = ((A, B), f)$  où

- i)  $(A, B)$  est une composition de  $U$ , i.e.: une paire ordonnée de sous-ensembles de  $U$  qui satisfait  $A \cup B = U$ ,  $A \cap B = \emptyset$ .
- ii)  $f$  est une endofonction de  $U$  dont les restrictions  $f_A : A \rightarrow U$  et  $f_B : B \rightarrow U$  aux parties  $A$  et  $B$  sont injectives.

Si  $a(\phi)$  et  $b(\phi)$  désignent le nombre de cycles de  $f$  dont tous les sommets sont respectivement dans  $A$  et dans  $B$  alors le poids de  $\phi$  est donné par

$$w(\phi) = (1 + \alpha)^{a(\phi)} (1 + \beta)^{b(\phi)} \left(\frac{t+1}{2}\right)^{|A|} \left(\frac{t-1}{2}\right)^{|B|}.$$

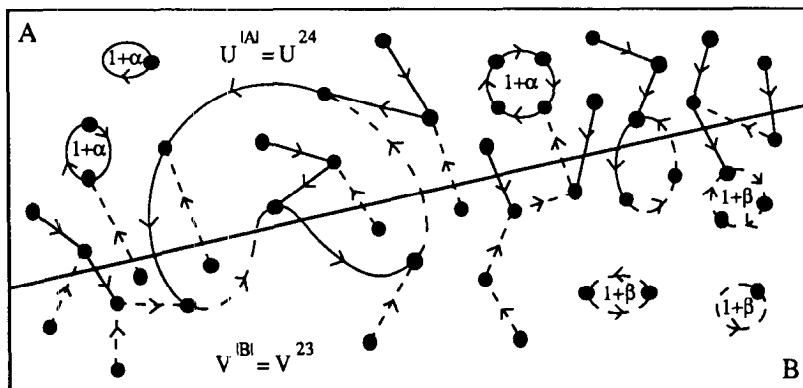
□

Sur la figure 26 nous avons tracé en trait plein les arcs qui sont issus d'un point de A et en trait pointillés ceux qui sont issus d'un point de B. Ceci permet d'illustrer le fait que les endofonctions de Jacobi sont des paires complémentaires de configurations de Laguerre, la correspondance étant

$$\phi = ((A, B), f) \leftrightarrow ((f_A, A, B), (f_B, B, A))$$

$$(1+\alpha)^{a(\phi)} (1+\beta)^{b(\phi)} \left(\frac{t+1}{2}\right)^{|A|} \left(\frac{t-1}{2}\right)^{|B|} \leftrightarrow (1+\alpha)^{\# \text{cyc } f_A} \left(\frac{t-1}{2}\right)^{|B|} \cdot (1+\beta)^{\# \text{cyc } f_B} \left(\frac{t+1}{2}\right)^{|A|}.$$

On remarque aussi que chaque sommet est le but d'au plus un arc continu et un arc pointillé (autrement l'une des restrictions  $f_A$  ou  $f_B$  ne serait pas injective). Nous pourrions donc adopter la convention que lorsqu'on tourne autour d'un point dans le sens anti-horaire, à partir de l'arc dont il est la source, on rencontre d'abord une flèche continue, i.e. la pré-image se trouvant dans A, puis une flèche pointillée, i.e. sa B pré-image. Cette convention sera utilisée à la proposition (2.43) pour décider de l'ordre des facteurs  $K_A$  et  $K_B$ .



Une endofonction de Jacobi

figure 26

Foata et Leroux [FP] déduisent de ce modèle une démonstration combinatoire de la fonction génératrice via les polynômes dits *homogènes de Jacobi*, notés

$\wp_n^{(\alpha, \beta)}(U, V)$ . Ces polynômes sont reliés aux polynômes de Jacobi par

$$(2.38) \quad n! P_n^{(\alpha, \beta)}(t) = \wp_n^{(\alpha, \beta)}\left(\frac{t+1}{2}, \frac{t-1}{2}\right)$$

et donc satisfont la relation

$$(2.39) \quad n! P_n^{(\alpha, \beta)}\left(\frac{U+V}{U-V}\right) (U-V)^n = \wp_n^{(\alpha, \beta)}(U, V)$$

que nous prendrons pour définition. Leur fonction génératrice s'obtient de (2.36) en y remplaçant  $x$  par  $(U-V)x$  et  $t$  par  $\frac{U+V}{U-V}$ :

$$(2.40) \quad \sum_{n \geq 0} \wp_n^{(\alpha, \beta)}(U, V) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} n! P_n^{(\alpha, \beta)}\left(\frac{U-V}{U+V}\right) (U-V)^n \frac{x^n}{n!} \\ = 2^{\alpha+\beta} \mathfrak{R}^{-1} (1 - (U-V)x + \mathfrak{R})^{-\alpha} (1 + (U-V)x + \mathfrak{R})^{-\beta}$$

où

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(x; U, V) = \left(1 - 2\left(\frac{U+V}{U-V}\right)(U-V)x + (U-V)^2 x^2\right)^{1/2} = (1 - 2(U+V)x + (U-V)^2 x^2)^{1/2}.$$

En fait les deux séries génératrices sont équivalentes puisqu'il suffit de poser  $U = \frac{t+1}{2}$  et  $V = \frac{t-1}{2}$  dans (2.40) et d'utiliser (2.38) pour faire le passage inverse. Ainsi nous pouvons alléger la notation en utilisant les paramètres de poids  $U$  et  $V$ .

(2.41) **Définition.** On dénote par  $J_w$  l'espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée de toutes les endofonctions de Jacobi de poids

$$w(\phi) = w((A, B), f) = (1+\alpha)^{\#cyc f_A} (1+\beta)^{\#cyc f_B} U^{|A|} V^{|B|}. \quad \square$$

Pour prouver que l'espèce  $J_w$  est un modèle combinatoire de la famille des polynômes de Jacobi, nous présentons une version simplifiée de l'approche de Foata et Leroux. La différence principale n'est pas l'utilisation de la théorie des espèces mais plutôt l'introduction de la proposition (2.43) où nous donnons une relation fonctionnelle pour les espèces de « contractions de Jacobi de type A et de type B ». Cette relation permet de calculer leur série génératrice sans avoir recours aux « arborescence de

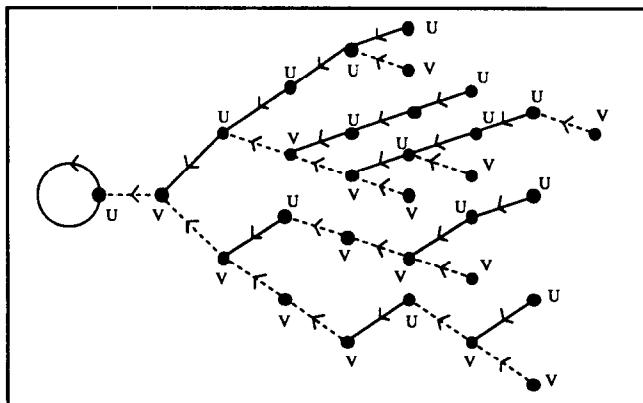
Jacobi ». La même démarche sera utilisée lors du calcul de séries indicatrices.

**(2.42) Définition.** Une contraction de Jacobi est une endofonction de Jacobi qui est connexe et dont l'unique cycle est réduit à un point (appelé point fixe).

On dénote par  $K_p$  l'espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée de toutes les contractions de Jacobi munies du poids

$$p(\phi) = p((A, B), f) = U^{|A|} V^{|B|}.$$

On distingue deux types de contractions, A et B, selon que leur point fixe appartienne à A ou à B. Celles-ci sont rassemblées dans les sous-espèces  $KA_p$  des contractions de Jacobi de type A et  $KB_p$  des contractions de type B (figure 27). □



Une  $KA_p$ -structure ou contraction de Jacobi de type A

figure 27

L'utilisation de la lettre «  $p$  » pour la fonction de poids est intentionnelle ; il ne s'agit pas du poids «  $w$  » défini pour les endofonctions de Jacobi en (2.41) puisque ce dernier tient compte non seulement des points de A et de B mais aussi des cycles de l'endofonction. En fait le «  $p$ -poids »  $p(\phi)$  s'obtient du «  $w$ -poids »  $w(\phi)$  en posant  $\alpha = \beta = 0$ . Ces deux fonctions de poids servent à définir des espèces différentes, non

isomorphes, que nous distinguerons en indiquant toujours, dans le nom de l'espèce, le poids utilisé :  $J_p$ ,  $J_w$ ,  $K_p$ ,  $K_w$ , ...

**(2.43) Proposition.** *Les espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées  $KA_p$  et  $KB_p$  de contractions de Jacobi satisfont les relations*

$$(1) \quad \begin{aligned} KA_p &\cong X_U + KB_p \cdot KA_p \\ KB_p &\cong X_V + KA_p \cdot KB_p \end{aligned}$$

*et ont pour séries génératrices*

$$(2) \quad \begin{aligned} KA_p(x) &= \frac{(1 + (U-V)x) - \mathfrak{R}}{2} \\ KB_p(x) &= \frac{(1 - (U-V)x) - \mathfrak{R}}{2} \end{aligned}$$

où  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(x; U, V) = (1 - 2(U+V)x + (U-V)^2x^2)^{1/2}$ .

**Preuve :** Une contraction de Jacobi peut être réduite à un seul point, élément de A ou de B selon le type de la contraction. D'où

$$\begin{aligned} KA_p &\cong X_U + \dots & KA_p(x) &= Ux + O(x^2) \\ KB_p &\cong X_V + \dots & KB_p(x) &= Vx + O(x^2) \end{aligned}$$

Lorsqu'une contraction n'est pas réduite à un point, son point fixe a pour prédécesseurs lui-même et un autre point. En détachant ces deux points du graphe de la contraction, on obtient deux graphes, l'un se terminant par un arc plein, l'autre par un arc pointillé. Il ne manque qu'un point fixe au bout de ces derniers arcs pour obtenir les graphes de deux contractions, l'une de type A et l'autre de type B, et les deux points que nous avons détachés peuvent très bien remplir ce rôle puisque l'un est dans A et l'autre dans B (lorsque l'un des graphes est vide on obtient, en lui recollant un point fixe, le cas limite d'une contraction réduite à un point). La figure 28 illustre le processus dans le cas où la

contraction de départ est de type A.

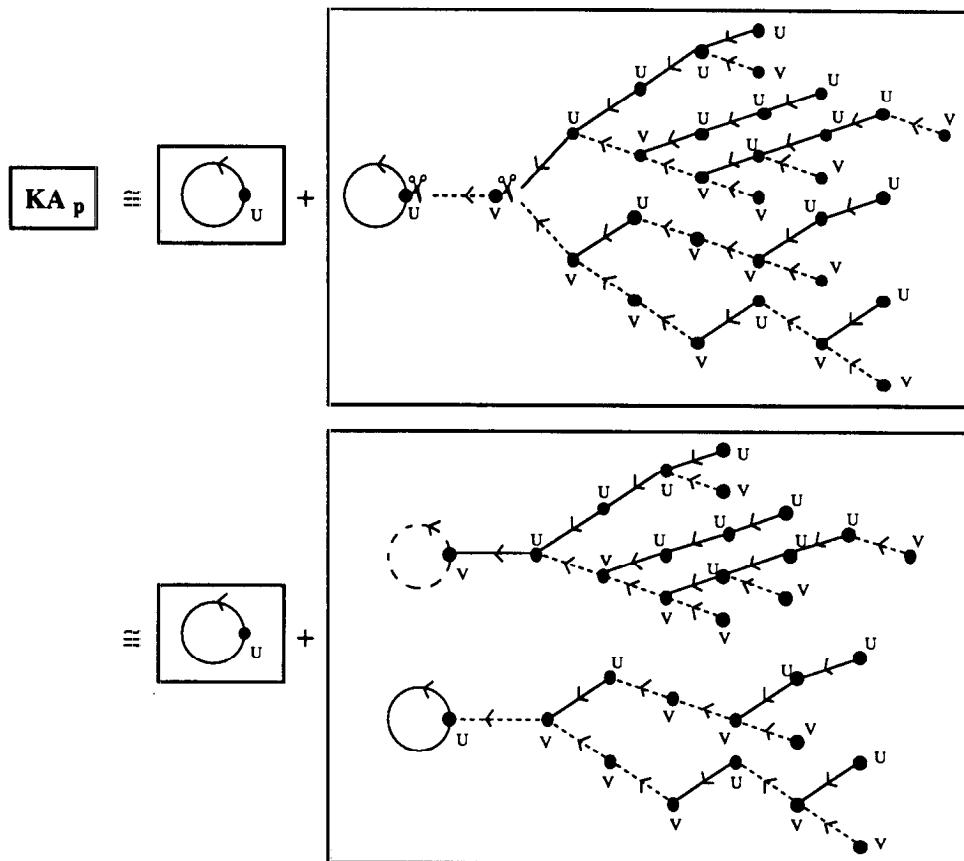


figure 28

Nous venons donc de décrire la bijection qui donne lieu aux isomorphismes

$$KA_p \cong X_U + KB_p \cdot KA_p \quad \text{et} \quad KB_p \cong X_V + KA_p \cdot KB_p.$$

Passant aux séries génératrices, on obtient

$$(*) \begin{cases} KA_p(x) = Ux + KB_p(x)KA_p(x) \\ KB_p(x) = Vx + KA_p(x)KB_p(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} KB_p(x) = \frac{KA_p(x) - Ux}{KA_p(x)} \\ KB_p(x) = Vx + KA_p(x)KB_p(x) \end{cases}$$

donc

$$\frac{KA_p(x) - Ux}{KA_p(x)} = Vx + KA_p(x) - Ux$$

$$(KA_p(x))^2 - (1 + (U-V)x)KA_p(x) + Ux = 0$$

$$KA_p(x) = \frac{1 + (U-V)x \pm \sqrt{(1 + (U-V)x)^2 - 4Ux}}{2}$$

et puisque la série génératrice de  $KA_p$  commence par  $Ux$  on peut conclure :

$$KA_p(x) = \frac{1 + (U-V)x - \sqrt{1 - 2x(U+V) + (U-V)^2x^2}}{2}.$$

La série génératrice de  $KB_p$  s'obtient de façon semblable, en résolvant le système (\*) pour  $KB_p(x)$ . ■

**(2.44) Proposition.** *Toute endofonction de Jacobi est une permutation de contractions de Jacobi ; de façon précise, on a les isomorphismes*

$$J_p \equiv S \circ K_p \equiv S \circ (KA_p + KB_p)$$

**Preuve :** Si toutes les contractions sont de même type, il n'est pas difficile de transformer un cycle de contractions en une endofonction de Jacobi. Le cas délicat est celui où les deux types de contractions sont substitués dans un même cycle de la permutation (c'est le cas mixte). Dans ce cas, on doit d'abord détacher les points fixes des contractions ainsi que les arcs qui en sont issus, puis dérouler les boucles pour aller rattacher ces points à la contraction précédente (dans l'ordre donné par le cycle). La figure 29 illustre clairement la transformation à faire. En procédant de cette façon pour chacun des cycles de la permutation, on obtient une endofonction de Jacobi (la nature de l'arc dont il est la source, trait plein ou pointillé, permet d'identifier l'appartenance d'un point au sous-ensemble A ou B). ■

On trouve chez Strehl [SV3] une mise-en-garde quand au traitement du cas mixte. Celui-ci présente une utilisation des espèces légèrement différente de la notre puisqu'il distingue

les points en plusieurs sortes (et non pas par des poids). Hormis ce fait, on pourrait croire à priori qu'il propose (§2[SV3]) une solution différente de la nôtre ; mais après examen on constate qu'il s'agit simplement d'une description différente de la même bijection.

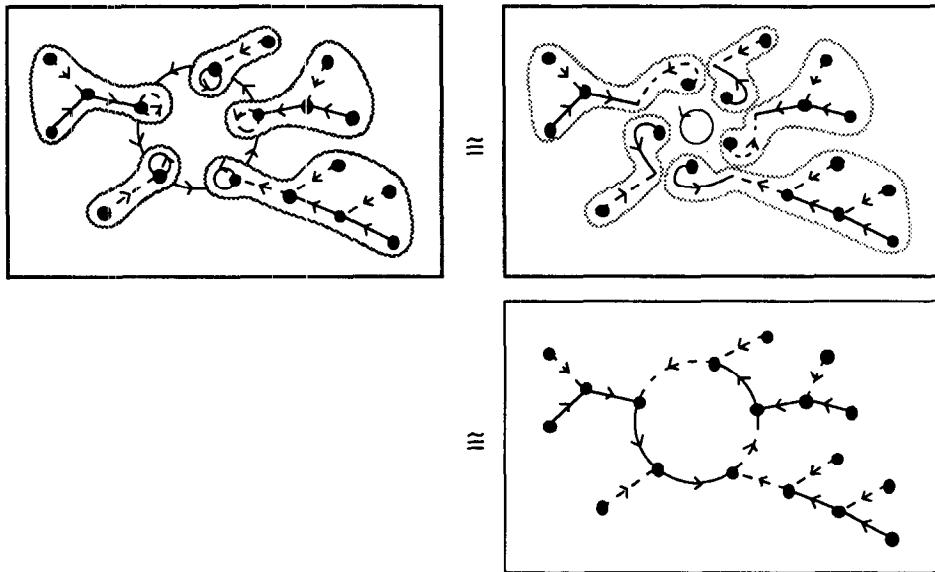


figure 29

(2.45) Corollaire. L'espèce  $J_p$  a pour série génératrice

$$J_p(x) = \frac{1}{R(x; U, V)} \left( = \frac{1}{R(x; t)} \right)$$

*Preuve :* D'après (2.44) et (2.43),

$$\begin{aligned} J_p(x) &= S \circ (KA_p + KB_p)(x) = \frac{1}{1 - (KA_p(x) + KB_p(x))} \\ &= \frac{1}{1 - \left[ \frac{1 + (U-V)x - R}{2} + \frac{1 - (U-V)x - R}{2} \right]} = \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

■

On remarque que l'isomorphisme de la proposition (2.44) n'est valide que pour le  $p$ -poids. En effet, étant donné une permutation on ne saurait à priori pondérer

correctement ses cycles puisqu'il faut pour cela savoir si les contractions qui y seront substituées sont toutes de même type ou non. On devra donc, pour traiter le cas général, considérer trois types d'endofonctions de Jacobi (A, B et mixte).

**(2.46) Proposition.** *L'espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée  $J_w$  est un modèle combinatoire pour la famille  $(\varphi_n^{(\alpha,\beta)})_{n \geq 0}$  des polynômes homogènes de Jacobi et donc pour la famille normalisée  $(n!P_n^{(\alpha,\beta)})_{n \geq 0}$  des polynômes de Jacobi.*

**Preuve :** Nous distinguerons trois types d'endofonctions de Jacobi, selon que tous les points de leurs cycles appartiennent au même sous-ensemble (type A et type B) ou que leurs cycles contiennent des points de A et de B (type M), et nous dénoterons JA, JB et JM les espèces correspondantes. Lorsqu'on restreint les endofonctions considérées à être toutes du même type, la relation (2.44) peut être étendue au  $w$ -poids puisqu'il suffit de donner le même poids à chaque cycle de la permutation. On obtient alors

$$JA_w \cong S_{1+\alpha} \circ KA_p, \quad JB_w \cong S_{1+\beta} \circ KB_p \quad \text{et} \quad JM_w \cong JM_p,$$

donc, par (2.43),

$$\begin{aligned} JA_w(x) &= \left( \frac{1}{1 - KA_p(x)} \right)^{1+\alpha} = \left( \frac{2}{1 - (U-V)x + R} \right)^{1+\alpha}, \\ JB_w(x) &= \left( \frac{1}{1 - KB_p(x)} \right)^{1+\beta} = \left( \frac{2}{1 + (U-V)x + R} \right)^{1+\beta} \end{aligned}$$

et

$$JM_w(x) = JM_p(x).$$

Pour terminer la preuve, il suffit de remarquer que toute endofonction de Jacobi peut être considérée comme un triplet de trois endofonctions, la première de type A, la seconde de type B et la troisième de type M (figure 30).

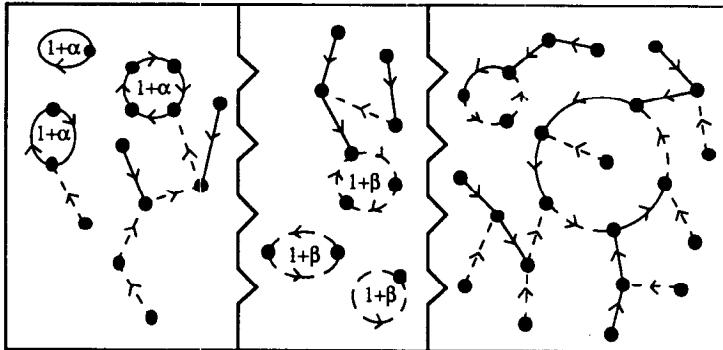


figure 30

En effet, on obtient le découpage requis en rassemblant d'une part les cycles de l'endofonction qui sont entièrement contenus dans  $A$ , puis les cycles qui sont entièrement dans  $B$  et finalement tous les autres cycles. L'espèce des endofonctions de Jacobi peut donc s'écrire comme produit de trois sous-espèces :

$$J_w \cong JA_w \cdot JB_w \cdot JM_w.$$

Cette relation est aussi valide pour le  $p$ -poids,

$$\begin{aligned} J_p &\cong JA_p \cdot JB_p \cdot JM_p \\ &\cong (S \circ KA_p) \cdot (S \circ KB_p) \cdot JM_p, \end{aligned}$$

ce qui permet de calculer la fonction génératrice de  $JM_w$  :

$$JM_w(x) = JM_p(x) \quad \text{et} \quad J_p(x) = JA_p(x) \cdot JB_p(x) \cdot JM_p(x)$$

donne

$$JM_w(x) = \frac{J_p(x)}{JA_p(x) \cdot JB_p(x)} = \frac{1}{\Re} \cdot (1 - KA_p(x))(1 - KB_p(x)).$$

D'où

$$\begin{aligned} J_w(x) &= JA_w(x) \cdot JB_w(x) \cdot JM_w(x) \\ &= \left( \frac{1}{1 - KA_p(x)} \right)^{1+\alpha} \cdot \left( \frac{1}{1 - KB_p(x)} \right)^{1+\beta} \cdot \frac{1}{\Re} \cdot (1 - KA_p(x))(1 - KB_p(x)) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} J_w(x) &= \frac{1}{\Re} (1 - KA_p(x))^{-\alpha} (1 - KB_p(x))^{-\beta} \\ &= \frac{1}{\Re} \left( \frac{1 - (U-V)x + \Re}{2} \right)^{-\alpha} \left( \frac{1 + (U-V)x + \Re}{2} \right)^{-\beta}. \end{aligned}$$

■

Nous terminons ce chapitre par le calcul de la série indicatrice de l'espèce Jacobi. Reprenant la même démarche que pour la série génératrice, nous devons d'abord trouver les séries indicatrices des espèces de contractions de Jacobi pour ensuite incorporer le tout dans l'espèce  $J_w$ .

**(2.47) Proposition.** *Les séries indicatrices des espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées  $KA_p$ ,  $KB_p$  des contractions de Jacobi, ainsi que de l'espèce  $J_w$  des endofonctions de Jacobi sont respectivement*

$$(1) \quad Z_{KA_p} = \frac{1 + (U-V)x_1 - \Re(x_1; U, V)}{2}, \quad Z_{KB_p} = \frac{1 - (U-V)x_1 - \Re(x_1; U, V)}{2}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad Z_{J_w} &= \prod_{n \geq 1} 2^{\alpha_n + \beta_n} \Re_n^{-1} (1 - (U^n - V^n)x_n + \Re_n)^{-\alpha_n} (1 + (U^n - V^n)x_n + \Re_n)^{-\beta_n} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n) \\ \sum id_i = n}} \left[ \prod_{v=1}^n v^{d_v} P_{d_v}^{(\alpha_v, \beta_v)}(U^v, V^v) \right] \frac{x^{\mathbf{d}}}{\text{aut } \mathbf{d}} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n) \\ \sum id_i = n}} \frac{\text{aut } \mathbf{d}}{2^n} \left[ \prod_{v=1}^n ((t+1)^v - (t-1)^v)^{d_v} P_{d_v}^{(\alpha_v, \beta_v)}(t_v) \right] \frac{x^{\mathbf{d}}}{\text{aut } \mathbf{d}} \\ &= \prod_{n \geq 1} 2^{\alpha_n + \beta_n} \Re_n^{-1} \left[ 1 - \frac{(t+1)^n - (t-1)^n}{2^n} x_n + \Re_n \right]^{-\alpha_n} \left[ 1 + \frac{(t+1)^n - (t-1)^n}{2^n} x_n + \Re_n \right]^{-\beta_n} \end{aligned}$$

où, dans (1) et (2), on a posé

$$\Re(x; U, V) = (1 - 2(U+V)x + (U-V)^2x^2)^{1/2}, \quad \Re_n = \Re(x_n; U^n, V^n),$$

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \omega_n(1+\alpha) - 1, \quad \beta_n = \frac{1}{n} \omega_n(1+\beta) - 1, \quad t_n = \frac{(t+1)^n + (t-1)^n}{(t+1)^n - (t-1)^n}$$

$$R_n = \left[ 1 - \frac{(t+1)^n + (t-1)^n}{2^{n-1}} x_n + \frac{((t+1)^n + (t-1)^n)^2}{2^{2n}} x_n^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

**Preuve :** (1) Utilisant (2.43) on obtient

$$(***) \quad \begin{cases} Z_{KA_p} = Ux_1 + Z_{KB_p} \cdot Z_{KA_p} \\ Z_{KB_p} = Vx_1 + Z_{KA_p} \cdot Z_{KB_p} . \end{cases}$$

Donc

$$Z_{KA_p} - Ux_1 = (Vx_1 + Z_{KA_p} - Ux_1) \cdot Z_{KA_p}$$

$$(Z_{KA_p})^2 - (1 + Ux_1 - Vx_1) Z_{KA_p} + Ux_1 = 0$$

$$Z_{KA_p} = \frac{1 + (U-V)x_1 \pm \sqrt{1 + 2(U-V)x_1 + (U-V)^2 x_1^2 - 4Ux_1}}{2}.$$

Et puisque  $Z_{KA_p}$  commence par  $Ux_1$ ,

$$Z_{KA_p} = \frac{1 + (U-V)x_1 - \sqrt{1 - 2(U+V)x_1 + (U-V)^2 x_1^2}}{2}$$

$$= \frac{1 + (U-V)x_1 - \Re(x_1; U, V)}{2}.$$

Puis on résoud le système de façon semblable pour  $KB_p$ .

(2) Le résultat vient de la relation

$$J_w \equiv JA_w \cdot JB_w \cdot JM_w$$

où on doit traiter séparément chaque terme du produit. D'abord

$$JA_w \equiv S_{1+\alpha} \circ KA_p \quad \Rightarrow \quad Z_{JA_w} = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - \left( Z_{KA_{p^n}} \right)_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n (1+\alpha)}$$

où

$$\left( Z_{KA_{p^n}} \right)_n = \frac{1 + (U^n - V^n)x_n - \Re(x_n; U^n, V^n)}{2}.$$

De même,

$$Z_{JB_w} = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - \left( Z_{KB_{p^n}} \right)_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n (1+\beta)} = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{2}{1 + (U^n - V^n)x_n + \Re(x_n; U^n, V^n)} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n (1+\beta)}$$

Puis,

$$S \circ (KA_p + KB_p) \equiv J_p \equiv JA_p \cdot JB_p \cdot JM_w \equiv (S \circ KA_p) \cdot (S \circ KB_p) \cdot JM_w$$

donne

$$Z_{JM_w} = \frac{Z_S \circ Z_{KA_p + KB_p}}{(Z_S \circ Z_{KA_p}) \cdot (Z_S \circ Z_{KB_p})} = \prod_{n \geq 1} \frac{\left[ 1 - \left( Z_{KA_{p^n}} \right)_n \right] \left[ 1 - \left( Z_{KB_{p^n}} \right)_n \right]}{\left[ 1 - \left( Z_{KA_{p^n}} \right)_n - \left( Z_{KB_{p^n}} \right)_n \right]}.$$

D'où

$$Z_{J_w} = Z_{JA_w} \cdot Z_{JB_w} \cdot Z_{JM_w}$$

$$\begin{aligned} &= \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - \left( Z_{KA_{p^n}} \right)_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n (1+\alpha)} \left( \frac{1}{1 - \left( Z_{KB_{p^n}} \right)_n} \right)^{\frac{1}{n} \omega_n (1+\beta)} \frac{\left[ 1 - \left( Z_{KA_{p^n}} \right)_n \right] \left[ 1 - \left( Z_{KB_{p^n}} \right)_n \right]}{\left[ 1 - \left( Z_{KA_{p^n}} \right)_n - \left( Z_{KB_{p^n}} \right)_n \right]} \\ &= \prod_{n \geq 1} \left( 1 - \left( Z_{KA_{p^n}} \right)_n \right)^{1 - \frac{1}{n} \omega_n (1+\alpha)} \left( 1 - \left( Z_{KB_{p^n}} \right)_n \right)^{1 - \frac{1}{n} \omega_n (1+\beta)} \cdot \frac{1}{\Re(x_n; U^n, V^n)} \end{aligned}$$

$$= \prod_{n \geq 1} \frac{1}{R_n} \cdot \left( \frac{1 - (U^n - V^n)x_n + R_n}{2} \right)^{1 - \frac{1}{n}\omega_n(1+\alpha)} \cdot \left( \frac{1 + (U^n - V^n)x_n + R_n}{2} \right)^{1 - \frac{1}{n}\omega_n(1+\beta)}$$

$$\text{où } R_n = R(x_n; U^n, V^n) = (1 - 2(U^n + V^n)x_n + (U^n - V^n)^2 x_n^2)^{1/2}.$$

Posant  $\alpha_n = \frac{1}{n}\omega_n(1+\alpha) - 1$ ,  $\beta_n = \frac{1}{n}\omega_n(1+\beta) - 1$  et utilisant (2.40) on peut écrire

$$\begin{aligned} Z_{J_w} &= \prod_{n \geq 1} 2^{\alpha_n + \beta_n} R_n^{-1} (1 - (U^n - V^n)x_n + R_n)^{-\alpha_n} (1 + (U^n - V^n)x_n + R_n)^{-\beta_n} \\ &= \prod_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} \wp_k^{(\alpha_n, \beta_n)}(U^n, V^n) \frac{x_n^k}{k!} \\ &= \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots \geq 0 \\ \sum k_i < \infty}} \wp_{k_1}^{(\alpha_1, \beta_1)}(U, V) \wp_{k_2}^{(\alpha_2, \beta_2)}(U^2, V^2) \dots \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots}{k_1! k_2! \dots} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n) \\ \sum id_i = n}} \left[ \prod_{v=1}^n v^{d_v} \wp_{d_v}^{(\alpha_v, \beta_v)}(U^v, V^v) \right] \frac{x^{\mathbf{d}}}{\text{aut } \mathbf{d}}. \end{aligned}$$

Pour obtenir la deuxième forme explicite, revenons deux étapes plus haut et utilisons (2.39) avant d'effectuer le produit :

$$\begin{aligned} Z_{J_w} &= \prod_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} \wp_k^{(\alpha_n, \beta_n)}(U^n, V^n) \frac{x_n^k}{k!} \\ &= \prod_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} k! P_k^{(\alpha_n, \beta_n)} \left( \frac{U^n + V^n}{U^n - V^n} \right) (U^n - V^n)^k \frac{x_n^k}{k!} \\ &= \prod_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} P_k^{(\alpha_n, \beta_n)}(t_n) \xi_n^k \end{aligned}$$

où  $t_n = \frac{U^n + V^n}{U^n - V^n}$  et  $\xi_n = (U^n - V^n)x_n$ . Remplaçant  $U$  par  $\frac{t+1}{2}$  et  $V$  par  $\frac{t-1}{2}$  on obtient

$$t_n = \frac{(t+1)^n + (t-1)^n}{(t+1)^n - (t-1)^n} \quad \text{et} \quad \xi_n = \frac{(t+1)^n - (t-1)^n}{2^n} x_n.$$

D'une part, (2.36) donne alors le développement

$$Z_{J_w} = \prod_{n \geq 1} 2^{\alpha_n + \beta_n} R(\xi_n; t_n)^{-1} (1 - \xi_n + R(\xi_n; t_n))^{\alpha_n} (1 + \xi_n + R(\xi_n; t_n))^{\beta_n}$$

où

$$R(\xi_n; t_n) = (1 - 2t_n \xi_n + \xi_n^2)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} &= \left[ 1 - 2 \left( \frac{(t+1)^n + (t-1)^n}{(t+1)^n - (t-1)^n} \right) \left( \frac{(t+1)^n - (t-1)^n}{2^n} \right) x_n + \left( \frac{(t+1)^n - (t-1)^n}{2^n} \right)^2 x_n^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[ 1 - \frac{((t+1)^n + (t-1)^n) x_n}{2^{n-1}} + \frac{((t+1)^n - (t-1)^n)^2 x_n^2}{2^{2n}} \right]^{\frac{1}{2}} = R_n \end{aligned}$$

donc

$$Z_{J_w} = \prod_{n \geq 1} 2^{\alpha_n + \beta_n} R_n^{-1} \left[ 1 - \left( \frac{(t+1)^n - (t-1)^n}{2^n} \right) x_n + R_n \right]^{-\alpha_n} \left[ 1 + \left( \frac{(t+1)^n - (t-1)^n}{2^n} \right) x_n + R_n \right]^{-\beta_n}.$$

Et d'autre part, n'utilisant pas (2.36) mais effectuant le produit, on trouve

$$\begin{aligned} Z_{J_w} &= \prod_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} P_k^{(\alpha_n, \beta_n)}(t_n) \xi_n^k \\ &= \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots \geq 0 \\ \sum k_i < \infty}} P_{k_1}^{(\alpha_1, \beta_1)}(t_1) P_{k_2}^{(\alpha_2, \beta_2)}(t_2) \dots \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \dots \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n) \\ \sum id_i = n}} \left[ \prod_{v=1}^n \left( \frac{(t+1)^v - (t-1)^v}{2^v} \right)^{d_v} P_{d_v}^{(\alpha_v, \beta_v)} \left( \frac{(t+1)^v + (t-1)^v}{(t+1)^v - (t-1)^v} \right) \right] x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n) \\ \sum id_i = n}} \left[ \prod_{v=1}^n (t+1)^v - (t-1)^v \right]^{d_v} P_{d_v}^{(\alpha_v, \beta_v)} \left( \frac{(t+1)^v + (t-1)^v}{(t+1)^v - (t-1)^v} \right) x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}. \end{aligned}$$

■

# Chapitre 3

## q - ANALOGUES

En théorie des fonctions symétriques, il existe une substitution, appelée « spécialisation principale », utilisée par Foata [FD2], Macdonald [MI], Stanley [SR], ..., qui permet de générer plusieurs q-analogues. Comme l'a remarqué Joyal en 1982 [JA3], c'est par le biais des séries indicatrices que l'on peut relier cette substitution à la théorie combinatoire des espèces. Le but de ce dernier chapitre est d'explorer et de développer, dans ce contexte, une théorie du q-comptage des espèces de structures (pondérées ou non). Un certain nombre de résultats généraux sont présentés et des exemples particuliers seront traités explicitement : q-comptage des espèces atomiques de degré  $\leq 5$ , d'espèces de permutations, de dérangements, etc...

### § 3.1 LA q-ÉNUMÉRATION D'UNE ESPÈCE

Classiquement, les suites de polynômes en  $q$  à coefficients entiers positifs

$$[n]_q = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

et

$$n!_q = [1]_q [2]_q \dots [n]_q = \frac{(1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^n)}{(1 - q)^n}$$

sont associées aux suites d'entiers

$$0, 1, 2, \dots, n, \dots \quad \text{et} \quad 0!, 1!, 2!, \dots, n!, \dots$$

De la même façon, pour  $n, k \in \mathbb{N}$ ,

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q = \frac{n!_q}{(n-k)!_q k!_q}$$

est associé au coefficient binomial  $\left( \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right)$ . Dans chacun de ces cas, les suites d'entiers citées s'obtiennent par passage à la limite, lorsque  $q \rightarrow 1$ , dans l'expression polynomiale correspondante. Ces polynômes sont appelés des q-analogues, pour cette raison et aussi parce qu'ils satisfont des propriétés semblables à celles des nombres qui leur sont associés. Par exemple, il est bien connu que

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q = \left[ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_q + q^{n-k} \left[ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_q,$$

récurrence analogue à celle des coefficients binomiaux.

On considère aussi des q-analogues de fonctions, ainsi qu'un opérateur de q-dérivée,

$$D_q f_q(x) = \frac{f_q(x) - f_q(qx)}{(1-q)x},$$

qui contient la dérivée habituelle

$$\lim_{q \rightarrow 1} D_q f_q(x) = \frac{d}{dx} f(x).$$

De plus, lorsque  $f_q$  est donnée par une q-série,

$$f_q(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(q) \frac{x^n}{n!_q},$$

cet opérateur effectue une translation des coefficients, tout comme la dérivée pour les séries exponentielles :

$$D_q f_q(x) = \sum_{n \geq 0} f_{n+1}(q) \frac{x^n}{n!_q} .$$

Par exemple, la fonction exponentielle  $e^x$  possède les q-analogues

$$e_q(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!_q} = \frac{1}{(1 - (1-q)x)} \frac{1}{1 - (1-q)xq} \frac{1}{1 - (1-q)xq^2} \dots$$

et

$$\mathcal{E}_q(x) = \sum_{n \geq 0} q^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{n!_q} = (1 + (1-q)x)(1 + (1-q)xq)(1 + (1-q)xq^2) \dots$$

qui satisfont

$$\lim_{q \rightarrow 1} e_q(x) = e^x = \lim_{q \rightarrow 1} \mathcal{E}_q(x) ,$$

$$D_q e_q(x) = e_q(x) \quad \text{et} \quad D_q \mathcal{E}_q(x) = \mathcal{E}_q(qx) .$$

Dans ce cas-ci, nous ne sommes pas vraiment en présence de q-analogues distincts puisque les deux sont reliés par la formule

$$e_q(x) \cdot \mathcal{E}_q(-x) = \mathcal{E}_q(x) \cdot e_q(-x) = 1 .$$

La première expression,  $e_q(x)$ , nous a pourtant semblé plus naturelle et nous l'avons choisie pour guide dans notre recherche d'une définition de la q-énumération d'une espèce.

Chaque espèce de structure possède une série génératrice, une série génératrice des types et une série indicatrice. Une q-série associée à l'espèce doit être une série intermédiaire qui, lorsque  $q \rightarrow 1$ , redonne la série génératrice. De cette façon les coefficients, polynômes en  $q$ , de la q-série sont des q-analogues des coefficients de la série génératrice, c'est-à-dire de la suite qui dénombre les structures de l'espèce considérée. Sachant que, pour une espèce  $F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_A$ ,

$$Z_{F_w}(x_1, x_2, \dots)|_{(x, 0, 0, \dots)} = F_w(x) = \sum_{n \geq 0} |F_w[x]| \frac{x^n}{n!}$$

et

$$Z_{F_w}(x_1, x_2, \dots)|_{(x_1, x^2, x^3, \dots)} = \tilde{F}_w(x) = \sum_{n \geq 0} |\tilde{F}_w[n]| \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} |\mathcal{O}_{\otimes_n} F_w[n]| x^n,$$

nous définirons la q-série de  $F_w$  par une substitution appropriée dans sa série indicatrice. Tenant compte de ces préliminaires, il nous apparaît raisonnable de chercher une substitution de la forme  $x_i := u_i(q)x^i$ , et de demander que la q-série obtenue donne les q-analogues classiques au moins dans les cas les plus simples. De là la prochaine proposition ainsi que la définition qui suit.

**(3.1) Proposition.** Soit  $E$  l'espèce des ensembles (1.4). L'unique substitution de la forme  $x_i := u_i(q)x^i$ ,  $i \geq 1$ , qui satisfait

$$Z_E(x_1, x_2, \dots)|_{x_i := u_i(q)x^i} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!q}$$

est donnée par

$$u_i(q)x^i = \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}$$

**Preuve :** On sait que (1.32)

$$Z_E(x_1, x_2, \dots) = e^{x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \dots};$$

écrivons  $u_i$  pour  $u_i(q)$  et posons

$$E(x; q) = Z_E(x_1, x_2, \dots)|_{x_i := u_i x^i} = e^{u_1 x + \frac{1}{2}u_2 x^2 + \frac{1}{3}u_3 x^3 + \dots}.$$

Pour que  $E(x; q)$  soit égal à  $\sum_{n \geq 0} x^n / n!q = e_q(x)$ , il faut que

$$D_q E(x; q) = E(x; q),$$

c'est-à-dire

$$\frac{E(x; q) - E(qx; q)}{(1-q)x} = E(x; q),$$

donc

$$e^{u_1x + \frac{1}{2}u_2x^2 + \frac{1}{3}u_3x^3 + \dots} - e^{u_1qx + \frac{1}{2}u_2q^2x^2 + \frac{1}{3}u_3q^3x^3 + \dots} = (1-q)x E(x;q),$$

$$1 - e^{u_1(q-1)x + \frac{1}{2}u_2(q^2-1)x^2 + \frac{1}{3}u_3(q^3-1)x^3 + \dots} = (1-q)x,$$

$$e^{u_1(q-1)x + \frac{1}{2}u_2(q^2-1)x^2 + \frac{1}{3}u_3(q^3-1)x^3 + \dots} = 1 - (1-q)x$$

et prenant le logarithme,

$$u_1(q-1)x + \frac{1}{2}u_2(q^2-1)x^2 + \frac{1}{3}u_3(q^3-1)x^3 + \dots = -[(1-q)x + \frac{1}{2}(1-q)^2x^2 + \dots],$$

d'où, pour  $i \geq 1$ ,  $u_i(q-1) = -(1-q)^i$ . Ainsi,

$$u_i(q)x^i = \frac{(1-q)^ix^i}{1-q}$$

est l'unique solution. ■

**(3.2) Définition.** Soit  $F := F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_A$  une espèce  $A$ -pondérée. La q-série génératrice de  $F$ , ou série génératrice des q-dénombrements de  $F$ , est notée

$$F(x;q) = \sum_{n \geq 0} |F[n]|_q \frac{x^n}{n!_q}$$

et définie par

$$F(x;q) = Z_F(x_1, x_2, \dots) \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}}$$
□

**(3.3) Exemples.** (1) Comme exigé par la proposition (3.1), pour l'espèce  $E$  des ensembles on a

$$E(x;q) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!_q} \quad \text{et} \quad |E[n]|_q = 1, n \geq 0.$$

(2) Soit  $E^*$  l'espèce des ensembles pointés,  $\forall U \in \mathbb{B}$ ,  $E^*[U] = \{u \mid u \in U\}$  et  $|E^*[n]| = n$ .

$$E^* = X \cdot E' \Rightarrow Z_{E^*} = x_1 Z_E \Rightarrow E^*(x; q) = x \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!_q}$$

donc

$$E^*(x; q) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+1}}{n!_q} = \sum_{n \geq 1} [n]_q \frac{x^n}{n!_q}$$

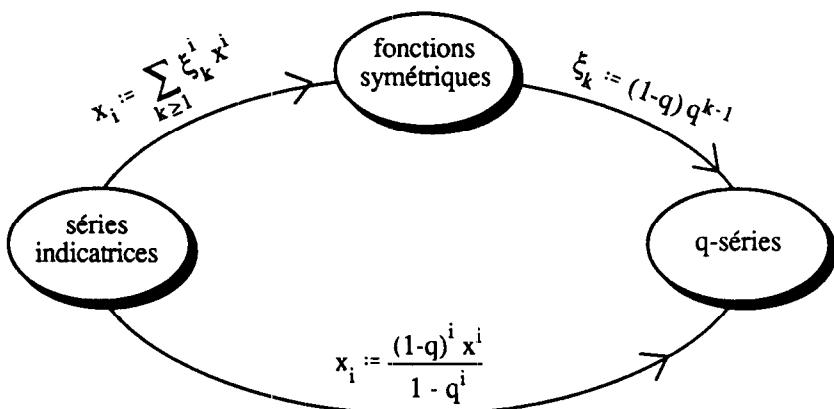
et  $|E^*[n]|_q = [n]_q$ , le  $q$ -anologue classique de l'entier  $n$ .

(3) Soit  $L$  l'espèce des ordres linéaires. Cette espèce est énumérée par la suite des factorielles, puisque tout ensemble de cardinal  $n$  admet  $n!$  ordres totaux. De plus,

$$Z_L = \frac{1}{1-x_1} \Rightarrow L(x; q) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n,$$

donc  $|L[n]|_q = n!_q$ , le  $q$ -anologue classique de  $n!$ .

(3.4) **Remarque.** Il n'est pas trop étonnant que cette substitution contienne des exemples classiques puisqu'on l'obtient en composant deux procédés bien connus; d'abord la « *correspondance de Frobenius* » qui transporte les séries indicatrices (ou séries de caractères) dans le monde des fonctions symétriques, puis la « *spécialisation principale* » qui fabrique des  $q$ -séries à partir de fonctions symétriques.



Dans la section 2 nous utiliserons cette décomposition, à l'occasion d'une preuve, mais en général nous tenterons de l'étudier globalement, avec le point de vue de la théorie des espèces.

Par exemple, il découle directement de sa définition que la  $q$ -série d'une espèce de structures est un  $q$ -analogue qui contient aussi l'énumération des types de structures :

**(3.5) Proposition.** Soit  $F := F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_A$  une espèce  $A$ -pondérée. Alors

$$F(x) = \lim_{q \rightarrow 1} F(x; q)$$

$$\tilde{F}(x) = \lim_{q \rightarrow 0} F(x; q).$$

**Preuve :** En effet,

$$\frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i} \xrightarrow[q \rightarrow 1]{} \begin{cases} x & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i > 1 \end{cases}$$

donc, par (1.29),

$$F(x; q) = Z_F|_{x_i = \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}} \xrightarrow[q \rightarrow 1]{} Z_F|_{(x, 0, 0, \dots)} = F(x).$$

De même

$$\frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i} \xrightarrow[q \rightarrow 0]{} x^i$$

donne

$$F(x; q) \xrightarrow[q \rightarrow 0]{} Z_F|_{(x, x^2, x^3, \dots)} = \tilde{F}(x). \quad \blacksquare$$

**(3.6) Corollaire.** Soit  $F := F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_A$  une espèce  $A$ -pondérée. Alors

$$|F[n]|_q \xrightarrow[q \rightarrow 1]{} |F[n]| \quad \text{et} \quad |F[n]|_q \xrightarrow[q \rightarrow 0]{} |\bigoplus_{G_n} F[n]|.$$

**Preuve :** C'est une conséquence du fait que

$$n!_q \xrightarrow[q \rightarrow 1]{} n! \quad \text{et} \quad n!_q \xrightarrow[q \rightarrow 0]{} 1.$$

En effet, posons  $\lim_{q \rightarrow 1} |F[n]|_q = \alpha_n$  et  $\lim_{q \rightarrow 0} |F[n]|_q = \beta_n$ , alors

$$F(x; q) = \sum_{n \geq 0} |F[n]|_q \frac{x^n}{n!_q} \xrightarrow[q \rightarrow 1]{} \sum_{n \geq 0} \alpha_n \frac{x^n}{n!} = F(x) = \sum_{n \geq 0} |F[n]| \frac{x^n}{n!}$$

donc  $\alpha_n = |\mathbf{F}[n]|$ , et

$$\mathbf{F}(x; q) = \sum_{n \geq 0} |\mathbf{F}[n]|_q \frac{x^n}{n!_q} \xrightarrow[q \rightarrow 0]{} \sum_{n \geq 0} \beta_n \frac{x^n}{1} = \tilde{\mathbf{F}}(x) = \sum_{n \geq 0} |\mathfrak{S}_n| \mathbf{F}[n] x^n$$

donc  $\beta_n = |\mathfrak{S}_n| \mathbf{F}[n]|$ . ■

**(3.7) Exemple.** Considérons l'espèce  $S$  des permutations,

$$\forall U \in \mathbb{B}, \quad S[U] = \{s \mid s : U \xrightarrow{\sim} U\}.$$

Tout comme l'espèce  $L$  des ordres linéaires, l'espèce des permutations est énumérée par la suite  $(n!)_{n \geq 0}$ . Mais ces deux espèces ne sont pas isomorphes, parce que les groupes d'automorphismes de leurs structures ne sont pas les mêmes. D'après le corollaire (3.6), nous obtenons deux q-analogues différents pour  $n!$ .

On sait déjà que  $|L[n]|_q = n!_q$ . Et  $\lim_{q \rightarrow 0} n!_q = 1$  confirme le fait qu'il n'y a qu'un seul type d'ordre linéaire sur  $[n]$ , ou que chaque ordre linéaire admet un seul automorphisme, l'identité.

D'autre part, les types de permutations de  $[n]$  coïncident avec les partages de l'entier  $n$  et sont donc énumérés par  $p(n)$ ,  $n \geq 0$ . Ainsi, le q-analogue de  $n!$  obtenu de  $S$ , ou la q-énumération  $|S[n]|_q$ , aura pour terme constant  $p(n)$ . Voyons le calcul : de (1.28) rappelons que

$$Z_S = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{(d_1, d_2, \dots) \\ \sum id_i = 1}} p_S(d_1, d_2, \dots) \frac{x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots}{1^{d_1} d_1! 2^{d_2} d_2! \dots}$$

où

$$p_S(d_1, d_2, \dots) = \#\{s \in S[n] \mid \sigma \cdot s = s\},$$

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$  étant une permutation de type  $(d_1, d_2, \dots)$ . Or

$$\sigma \cdot s = s \Leftrightarrow \sigma^{-1}s\sigma = s \Leftrightarrow \sigma = s^{-1}\sigma s \Leftrightarrow s \in \text{Aut}(\sigma)$$

donc

$$p_S(d_1, d_2, \dots) = |\text{Aut}(\sigma)| = 1^{d_1} d_1! 2^{d_2} d_2! \dots$$

d'où

$$\begin{aligned} S(x; q) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{(d_1, d_2, \dots) \\ \sum id_i = n}} x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{(d_1, d_2, \dots) \\ \sum id_i = n}} \prod_{i \geq 1} \frac{(1-q)^{id_i} x^{id_i}}{(1-q^i)^{d_i}} \quad (\text{puisque } \sum id_i = n) \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{(d_1, d_2, \dots) \\ \sum id_i = n}} \frac{(1-q)^n x^n}{\prod_{i \geq 1} (1-q^i)^{d_i}} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{(d_1, d_2, \dots) \\ \sum id_i = n}} \frac{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)}{\prod_{i \geq 1} (1-q^i)^{d_i}} \frac{x^n}{n! q^n} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{(d_1, d_2, \dots) \\ \sum id_i = n}} \prod_{i=1}^n (1-q^i)^{1-d_i} \frac{x^n}{n! q^n}. \end{aligned}$$

Pour chaque partage  $\lambda$  de  $n$ ,  $\lambda \vdash n$ ,  $\lambda = 1^{d_1} 2^{d_2} \dots n^{d_n}$ , posons

$$P_n(\lambda; q) = \prod_{i=1}^n (1-q^i)^{1-d_i},$$

alors

$$S(x; q) = \sum_{n \geq 0} |S[n]|_q \frac{x^n}{n! q^n} \quad \text{où} \quad |S[n]|_q = \sum_{\lambda \vdash n} P_n(\lambda; q).$$

Les premières valeurs sont :

$$|S[0]|_q = 1 \quad p(0) = 1$$

$$|S[1]|_q = 1 \quad p(1) = 1$$

$$|S[2]|_q = 2 \quad p(2) = 2$$

$$|S[3]|_q = 3 + q + q^2 + q^3 \quad p(3) = 3$$

$$|S[4]|_q = 5 + 2q + 5q^2 + 4q^3 + 5q^4 + 2q^5 + q^6 \quad p(4) = 5$$

$$\begin{aligned} |S[5]|_q = & 7 + 5q + 11q^2 + 16q^3 + 20q^4 + 20q^5 + 18q^6 \\ & + 12q^7 + 7q^8 + 3q^9 + q^{10} \end{aligned} \quad p(5) = 7$$

$$\begin{aligned} |S[6]|_q = & 11 + 8q + 23q^2 + 37q^3 + 61q^4 + 73q^5 + 98q^6 \\ & + 93q^7 + 97q^8 + 78q^9 + 63q^{10} + 37q^{11} + 27q^{12} \\ & + 9q^{13} + 4q^{14} + q^{15}. \end{aligned} \quad p(6) = 11$$

Nous avons obtenus ces polynômes en additionnant les divers  $P_n(\lambda; q)$  pour  $n$  donné. On trouvera en annexe I une table pour  $n \leq 10$ , générée par un programme MAPLE. Dans tous les cas où les coefficients de la série indicatrice de l'espèce sont connus, on peut utiliser cette table pour calculer explicitement le  $q$ -anologue correspondant. En effet, il suffit d'en prendre une combinaison linéaire comme le montre la proposition (3.8).

**(3.8) Proposition.** Soit  $F := F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_A$  une espèce  $A$ -pondérée et

$$Z_F(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\substack{(d_1, d_2, \dots) \\ \sum id_i < \infty}} p_F(d_1, d_2, \dots) \frac{x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots}{1^{d_1} d_1! 2^{d_2} d_2! \dots}$$

sa série indicatrice. Alors, pour  $n \geq 0$ ,

$$|F[n]|_q = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda = 1^{d_1} 2^{d_2} \dots}} \frac{p_F(d_1, d_2, \dots)}{1^{d_1} d_1! 2^{d_2} d_2! \dots} P_n(\lambda; q),$$

où, pour chaque  $\lambda \vdash n$ ,  $P_n(\lambda; q)$  est un polynôme en  $q$  à coefficients entiers, de degré  $\frac{n(n-1)}{2}$ , défini par

$$P_n(\lambda; q) = \prod_{i=1}^n (1-q^i)^{1-d_i}.$$

**Preuve :** Nous avons vu, à l'exemple (3.7), que

$$x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}} = \prod_{i \geq 1} (1-q^i)^{1-d_i} \frac{x^n}{n!q^n} = P_n(\lambda; q) \frac{x^n}{n!q^n}.$$

On obtient la première formule en intégrant ce résultat au calcul de  $F(x; q)$  :

$$\begin{aligned} F(x; q) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{(d_1, d_2, \dots) \\ \sum id_i = n}} p_F(d_1, d_2, \dots) \frac{x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots}{1^{d_1} d_1! 2^{d_2} d_2! \dots} \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda = 1^{d_1} 2^{d_2} \dots}} \frac{p_F(d_1, d_2, \dots)}{1^{d_1} d_1! 2^{d_2} d_2! \dots} P_n(\lambda; q) \frac{x^n}{n!q^n} \end{aligned}$$

Pour voir que les  $P_n(\lambda; q)$  sont des polynômes, nous allons les décomposer en facteurs linéaires, puis regrouper les facteurs identiques et vérifier que chacun apparaît avec un exposant positif. D'abord, pour  $1 \leq k \leq n$ , écrivons

$$(q^{k-1}) = (q-1)(q-\varepsilon_k)(q-\varepsilon_k^2) \dots (q-\varepsilon_k^{k-1}),$$

où  $\varepsilon_k$  est une racine primitive d'ordre  $k$  de l'unité,  $\varepsilon_k = e^{2\pi i/k}$ . Alors

$$(q^k - 1)^{1-d_k} = (q-1)^{1-d_k} (q-\varepsilon_k)^{1-d_k} (q-\varepsilon_k^2)^{1-d_k} \dots (q-\varepsilon_k^{k-1})^{1-d_k}$$

et

$$\prod_{k=1}^n (q^k - 1)^{1-d_k} = \prod_{k=1}^n \prod_{r=0}^{k-1} (q-\varepsilon_k^r)^{1-d_k}.$$

Réordonnons les facteurs de façon à ce que ceux pour lesquels la fraction  $r/k$  est réduite apparaissent en premier :

$$\prod_{k=1}^n (q^k - 1)^{1-d_k} = \prod_{\substack{1 \leq \mu \leq n \\ 0 \leq v < n \\ (\mu, v) = 1}} (q-\varepsilon_\mu^v)^{1-d_\mu} (q-\varepsilon_{2\mu}^{2v})^{1-d_{2\mu}} \dots (q-\varepsilon_{[\frac{n}{\mu}] \mu}^{1-d_{[\frac{n}{\mu}] \mu}})^{1-d_{[\frac{n}{\mu}] \mu}}$$

et remarquons que

$$\varepsilon_k^r = \varepsilon_\mu^v \Leftrightarrow e^{\frac{2\pi ir}{k}} = e^{\frac{2\pi iv}{\mu}} \Leftrightarrow e^{2\pi i(\frac{r}{k} - \frac{v}{\mu})} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{k} - \frac{v}{\mu} \text{ est un entier}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{k} = \frac{v}{\mu} \text{ car } 0 \leq r < k \text{ et } 0 \leq v < \mu$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{k} \in \left\{ \frac{v}{\mu}, \frac{2v}{2\mu}, \frac{3v}{3\mu}, \dots, \frac{\left[\frac{n}{\mu}\right]v}{\left[\frac{n}{\mu}\right]\mu} \right\} \text{ car } 1 \leq k \leq n.$$

Ceci nous permet de regrouper les facteurs identiques. On a alors

$$\prod_{k=1}^n (q^{k-1})^{1-d_k} = \prod_{\substack{1 \leq \mu \leq n \\ 0 \leq v < n \\ (\mu, v) = 1}} (q - \epsilon_\mu^v)^{1-d_{\frac{v}{\mu}} \mu} = \prod_{\substack{1 \leq \mu \leq n \\ 0 \leq v < n \\ (\mu, v) = 1}} (q - \epsilon_\mu^v)^{\left[\frac{n}{\mu}\right] - \sum_{j=1}^{\frac{n}{\mu}} d_{j\mu}},$$

et, pour s'assurer qu'il s'agit d'un polynôme, il n'y a qu'à vérifier que tous les exposants sont positifs. Le calcul est simple :

$$\sum_{j=1}^{\frac{n}{\mu}} j\mu d_{j\mu} \leq \sum_{i=1}^n i d_i = n,$$

donc

$$\mu \sum_{j=1}^{\frac{n}{\mu}} j d_{j\mu} \leq n,$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{\frac{n}{\mu}} d_{j\mu} \leq \sum_{j=1}^{\frac{n}{\mu}} j d_{j\mu} \leq \left[\frac{n}{\mu}\right].$$

Ainsi

$$P_n(\lambda; q) = \prod_{k=1}^n (-1)^{1-d_k} (q^{k-1})^{1-d_k} = \prod_{\substack{1 \leq \mu \leq n \\ 0 \leq v < n \\ (\mu, v) = 1}} [(-1)(q - \epsilon_\mu^v)]^{\left[\frac{n}{\mu}\right] - \sum_{j=1}^{\frac{n}{\mu}} d_{j\mu}}$$

est un polynôme. Son degré est

$$\sum_{k=1}^n k(1-d_k) = \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n kd_k = \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$$

et ses coefficients sont entiers parce qu'il s'écrit comme le quotient d'un polynôme à coefficients entiers par un polynôme unitaire à coefficients entiers :

$$\prod_{k=1}^n (q^{k-1})^{1-d_k} = \frac{\prod_{k \in J} (q^{k-1})^{1-d_k}}{\prod_{k \notin J} (q^{k-1})^{d_k-1}}, \quad \text{où } J = \{k \mid d_k \leq 1\}.$$

■

(3.9) **Corollaire 1.** *Les polynômes  $P_n(\lambda; q)$ ,  $\lambda = 1^{d_1} 2^{d_2} \dots$ , s'écrivent explicitement comme suit :*

$$P_n(\lambda; q) = \sum_{\mu=0}^{n(n-1)/2} \left( \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_n) \\ \sum ik_i = \mu}} \binom{d_1-1}{k_1} \dots \binom{d_n-1}{k_n} \right) q^\mu,$$

où  $\binom{m}{k}$  désigne le « binomial croissant »,

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m+1) \dots (m+k-1)}{k!} = \binom{m+k-1}{k}.$$

**Preuve :** Utilisons la formule du binôme de Newton pour développer  $(1-q^{-1})^{1-d_k}$  :

$$\begin{aligned} P_n(\lambda; q) &= \prod_{i=1}^n (1-q^{-1})^{1-d_i} = \prod_{i=1}^n \sum_{k_i=0}^{\infty} \binom{1-d_i}{k_i} (-1)^{k_i} q^{-ik_i} \\ &= \sum_{0 \leq k_1, k_2, \dots, k_n} (-1)^{\sum k_i} \binom{1-d_1}{k_1} \binom{1-d_2}{k_2} \dots \binom{1-d_n}{k_n} q^{\sum ik_i}. \end{aligned}$$

Maintenant, regroupons les termes selon la puissance  $\mu$  de  $q$  qui y apparaît,  $\mu = \sum ik_i$ .

Puisque  $P_n(\lambda; q)$  est de degré  $n(n-1)/2$ , on obtient

$$P_n(\lambda; q) = \sum_{\mu=0}^{n(n-1)/2} \left( \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_n) \\ \sum ik_i = \mu}} (-1)^{\sum k_i} \binom{1-d_1}{k_1} \binom{1-d_2}{k_2} \dots \binom{1-d_n}{k_n} \right) q^\mu.$$

Pour le reste du calcul, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \binom{1-d}{k} &= \frac{(1-d)(1-d-1) \dots (1-d-(k-1))}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{(d-1)(d-1+1) \dots (d-1+(k-1))}{k!} = (-1)^k \binom{d-1}{k}, \end{aligned}$$

donc

$$(-1)^{\sum_{i=1}^n k_i} \binom{1-d_1}{k_1} \dots \binom{1-d_n}{k_n} = (-1)^{\sum_{i=1}^n k_i} (-1)^{k_1} \binom{d_1-1}{k_1} \dots (-1)^{k_n} \binom{d_n-1}{k_n} = \binom{d_1-1}{k_1} \dots \binom{d_n-1}{k_n}.$$

■

**(3.10) Corollaire 2.** Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , on a l'identité suivante :

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda = d_1 \ 2 \ d_2 \ \dots}} \frac{(1-q)^{1-d_1} (1-q^2)^{1-d_2} \dots (1-q^n)^{1-d_n}}{d_1! \ d_2! \ \dots \ n^{d_n} d_n!} = 1$$

$$\text{qui généralise le fait que } \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{\text{aut}(\lambda)} = 1.$$

**Preuve :** Il suffit d'appliquer la proposition (3.8) dans le cas de l'espèce  $E$  des ensembles. Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , l'unique structure d'ensemble sur  $[n]$  est laissée fixe par toutes les permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , donc  $p_E(d_1, d_2, \dots) = 1$  et

$$|\mathbb{E}[n]|_q = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda = d_1 \ 2 \ d_2 \ \dots}} \frac{p_E(d_1, d_2, \dots)}{d_1! \ d_2! \ \dots} P_n(\lambda; q) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda = d_1 \ 2 \ d_2 \ \dots}} \frac{P_n(\lambda; q)}{d_1! \ d_2! \ \dots}.$$

D'autre part, on sait que  $|\mathbb{E}[n]|_q = 1$ ,  $n \geq 0$ . D'où la première identité. La deuxième s'obtient en posant  $q = 0$ .

■

**(3.11) Corollaire 3.** Soit  $F := F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_A$  une espèce  $A$ -pondérée. Alors pour  $n \geq 0$ ,  $|F[n]|_q$  est un polynôme en  $q$  de degré  $\leq n(n-1)/2$ . De plus, si tous les automorphismes des  $F$ -structures sur  $[n]$  sont des permutations paires (i.e.: si  $\forall s \in F[n]$ ,  $\text{Aut}(s) \subseteq A_n \subseteq \mathfrak{S}_n$ ) alors ce polynôme est symétrique,

de degré  $\frac{n(n-1)}{2}$  ou identiquement nul.

**Preuve :** Que  $|F[n]|_q$  soit un polynôme en  $q$  de degré  $\leq n(n-1)/2$  est une conséquence immédiate de (3.8). Pour voir que ce polynôme est symétrique lorsque tous les automorphismes sont pairs, il suffit de vérifier que les  $P_n(\lambda; q)$  sont symétriques lorsque  $\lambda$  est le type d'une permutation paire.

$$\begin{aligned} q^{\frac{n(n-1)}{2}} P_n(\lambda; \frac{1}{q}) &= q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{q^i}\right)^{1-d_i} = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n \left(\frac{q^i - 1}{q^i}\right)^{1-d_i} \\ &= q^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(-1)^{n-\sum d_i}}{\prod_{i=1}^n (1-q^i)^{1-d_i}} \\ &= (-1)^{\text{sgn}(d_1, d_2, \dots)} P_n(\lambda; q). \end{aligned}$$

Donc

$$q^{\frac{n(n-1)}{2}} P_n(\lambda; \frac{1}{q}) = \begin{cases} P_n(\lambda; q) & \text{si } \lambda \text{ est le type d'une permutation paire} \\ -P_n(\lambda; q) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Rappelons que le terme constant de  $|F[n]|_q$  est le nombre de type de  $F$ -structures sur  $[n]$ . Si le polynôme  $|F[n]|_q$  est symétrique, alors celui-ci sera de degré  $n(n-1)/2$  avec coefficient dominant égal au nombre de types de  $F$ -structures sur  $[n]$ . ■

**(3.12) Exemples.** (1) Soit  $C$  l'espèce des cycles. Si  $c \in C[n]$  est une permutation circulaire de  $[n]$  alors

$$\text{Aut}(c) = \{1, c, c^2, \dots, c^{n-1}\}.$$

Or  $\text{sgn}(c^k) = (\text{sgn } c)^k = ((-1)^{n-1})^k$ . Donc si  $n$  est impair alors  $\forall \sigma \in \text{Aut}(c)$ ,  $\text{sgn}(\sigma) = 1$ , c'est-à-dire que tous les automorphismes des  $C$ -structures sont des permutations paires. D'où

$|C[n]|_q$  est symétrique pour  $n$  impair.

(2) Soit  $E^\pm$  l'espèce des ensembles orientés,

$$\forall U \in \mathbb{B}, E^\pm[U] = \{\mathcal{O} | \mathcal{O} \text{ est une orientation de } U\} = \{\mathcal{O}^+, \mathcal{O}^-\}.$$

Il est bien connu que l'action d'une permutation  $\sigma \in S_n$  est de laisser fixe l'orientation si  $\sigma$  est paire et d'interchanger les deux orientations si  $\sigma$  est impaire. Donc  $\text{Aut}(\mathcal{O}^+) = A_n = \text{Aut}(\mathcal{O}^-)$  et  $|E^\pm[n]|_q$  est symétrique. Puisque le nombre de types de  $E^\pm$ -structures sur  $[n]$  est 1, on a

$$|E^\pm[n]|_q = 1 + ? + q^{n(n-1)/2}.$$

En sachant que tous les coefficients sont positifs, on pourrait conclure que  $|E^\pm[n]|_q = 1 + q^{n(n-1)/2}$  puisque la somme des coefficients est égale au nombre de structures. Ce sera l'objet du théorème (3.20) de la section suivante que de montrer que pour toute espèce  $F$ , les coefficients de  $|F[n]|_q$  sont des entiers positifs. Prenant pour acquis ce résultat, on a  $|E^\pm[n]|_q = 1 + q^{n(n-1)/2}$ . Mais on a aussi que

$$p_{E^\pm}(d_1, d_2, \dots) = \begin{cases} 2 & \text{si } (d_1, d_2, \dots) \text{ est le type d'une permutation paire} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc, par (3.8),

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda = 1^{d_1} 2^{d_2} \dots \\ \lambda \text{ pair}}} \frac{2(1-q)^{1-d_1} (1-q^2)^{1-d_2} \dots (1-q^n)^{1-d_n}}{1^{d_1} d_1! 2^{d_2} d_2! \dots n^{d_n} d_n!} = 1 + q^{n(n-1)/2}$$

et en posant  $q = 0$  on obtient

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \text{ pair}}} \frac{1}{\text{aut}(\lambda)} = \frac{1}{2},$$

ce qui exprime le fait que la moitié des permutations de  $[n]$  sont paires.

**(3.13) Remarque.** Lors d'une conversation, A. Joyal nous a fait remarquer que les  $P_n(\lambda; q)$  possèdent un autre développement explicite, celui-ci faisant appel aux

coefficients q-multinomiaux : posons

$$x_k \Big|_{\substack{x_k := \frac{(1-q)^k x^k}{1-q^k}}} = \frac{(1-q)^{k-1} (k-1)_q^{k-1} x^k}{k_q!} = \frac{Q_k}{k_q!} x^k$$

alors

$$\begin{aligned} x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n} \Big|_{\substack{x_k := \frac{(1-q)^k x^k}{1-q^k}}} &= \frac{Q_1^{d_1} Q_2^{d_2} \cdots Q_n^{d_n}}{1_q!^{d_1} 2_q!^{d_2} \cdots n_q!^{d_n}} x^{1d_1 + 2d_2 + \dots + nd_n} \\ &= Q_1^{d_1} Q_2^{d_2} \cdots Q_n^{d_n} \frac{(1d_1 + 2d_2 + \dots + nd_n)_q^{n-d_1-d_2-\dots-d_n}}{1_q!^{d_1} 2_q!^{d_2} \cdots n_q!^{d_n}} \frac{x^n}{n_q!} \\ &= \left[ \begin{array}{c} n \\ 1, \dots, 1, 2, \dots, 2, \dots \end{array} \right]_q Q_1^{d_1} Q_2^{d_2} \cdots \frac{x^n}{n_q!}. \end{aligned}$$

Ainsi, si  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  sont les parts du partage  $\lambda = 1^{d_1} 2^{d_2} \dots$ , i.e.  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{d_1} = 1$ ,  $\lambda_{d_1+1} = \dots = \lambda_{d_1+d_2} = 2, \dots$ , on obtient

$$(3.14) \quad P_n(\lambda; q) = \left[ \begin{array}{c} n \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \end{array} \right]_q (1-q)^{n - \sum d_i} \prod_{i=1}^r (i-1)_q^{d_i}.$$

Sachant que le coefficient q-multinomial est un polynôme à coefficients entiers, on peut en conclure que les  $P_n(\lambda; q)$  sont des polynômes à coefficients entiers.

### §3.2 PROPRIÉTÉS ET POSITIVITÉ

Comme nous l'avons déjà mentionné, la q-série d'une espèce peut être calculée à l'aide de polynômes  $P_n(\lambda; q)$  lorsqu'on connaît explicitement les coefficients de la série indicatrice. Mais en général on préfère procéder comme pour les séries génératrices ou indicatrices, en utilisant le comportement des q-séries devant les opérations sur les espèces.

(3.15) **Propositon.** Soient  $F_w$  et  $G_v$  deux espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées. Alors

$$(1) \quad F_w + G_v(x; q) = F_w(x; q) + G_v(x; q)$$

$$(2) \quad F_w \cdot G_v(x; q) = F_w(x; q) \cdot G_v(x; q)$$

$$(3) \quad F_w \circ G_v(x; q) = Z_{F_w}(G_v(x_1; q), G_{v^2}(x_2; q^2), G_{v^3}(x_3; q^3), \dots) \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}}$$

**Preuve :** Ces formules s'obtiennent des formules analogues pour les séries indicatrices;

(1) et (2) sont immédiates puisque

$$Z_{F+G} = Z_F + Z_G \quad \text{et} \quad Z_{F \cdot G} = Z_F \cdot Z_G.$$

(3) De (1.33 -5) on obtient

$$\begin{aligned} F_w \circ G_v &= Z_{F_w} \circ G_v(x_1, x_2, \dots) \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}} \\ &= Z_{F_w} \left( (Z_{G_v})_1 \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}}, (Z_{G_{v^2}})_2 \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}}, \dots \right). \end{aligned}$$

Pour  $k \geq 1$ , d'une part

$$\begin{aligned} (Z_{G_{v^k}})_k \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}} &= Z_{G_{v^k}}(x_k, x_{2k}, \dots) \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}} \\ &= Z_{G_{v^k}} \left( \frac{(1-q)^k x^k}{1-q^k}, \frac{(1-q)^{2k} x^{2k}}{1-q^{2k}}, \dots \right), \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} G_{v^k}(x_k; q^k) \Big|_{x_k := \frac{(1-q)^k x^k}{1-q^k}} &= G_{v^k}(x; q) \Big|_{x := \frac{(1-q)^k x^k}{1-q^k}, q := q^k} \\ &= \left[ Z_{G_{v^k}}(x_1, x_2, \dots) \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}} \right] \Big|_{x := \frac{(1-q)^k x^k}{1-q^k}, q := q^k}. \end{aligned}$$

Or cette dernière substitution se simplifie en :

$$x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i} \Big|_{x := \frac{(1-q)^k x^k}{1-q^k}, q := q^k} = \frac{(1-q^k)^i}{1-(q^k)^i} \left( \frac{(1-q)^k x^k}{1-q^k} \right)^i = \frac{(1-q)^{ki} x^{ki}}{1-q^{ki}}$$

ce qui était précisément la substitution, obtenue plus haut, à faire dans  $Z_{G_{v^k}}$ , d'où

$$(Z_{G_{v^k}})_k \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}} = G_{v^k}(x_k; q^k) \Big|_{x_k := \frac{(1-q)^k x^k}{1-q^k}}.$$

**(3.16) Exemple.** Soit  $F$  l'espèce des sous-ensembles de cardinal  $k$ ,

$$\forall U \in \mathbb{B}, F[U] = \{V \mid V \subseteq U, \#V = k\}, |F[U]| = \binom{n}{k} \text{ si } |U| = n.$$

Bien sûr  $F = E_k \cdot E$ , où  $E_k$  désigne l'espèce des ensembles de cardinal  $k$ . On a donc

$$\begin{aligned} F(x; q) &= E_k(x; q) \cdot E(x; q) \\ &= \frac{x^k}{k!_q} \cdot \sum_{\ell \geq 0} \frac{x^\ell}{\ell!_q} = \sum_{\ell \geq 0} \frac{x^{\ell+k}}{k!_q \ell!_q} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{n!_q}{k!_q (n-k)!_q} \frac{x^n}{n!_q}, \end{aligned}$$

d'où  $|E_k \cdot E[n]|_q = \frac{n!_q}{k!_q (n-k)!_q} = \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q$ , le  $q$ -anologue classique du coefficient binomial.

**(3.17) Exemple.** Soit  $C$  l'espèce des cycles et, pour  $n \geq 1$ ,  $C_n$  l'espèce des cycles de longueur  $n$ . Puisque  $C = \sum_{n \geq 1} C_n$ , on a

$$C(x; q) = \sum_{n \geq 1} C_n(x; q).$$

On trouve facilement que

$$Z_C = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{n/d},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} C_n(x; q) &= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) \left( \frac{(1-q)^d x^d}{1-q^d} \right)^{n/d} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) \frac{(1-q)^n}{(1-q^{d/n})^{n/d}} x^n, \end{aligned}$$

d'où

$$C(x; q) = \sum_{n \geq 1} C_n(x; q) = \sum_{n \geq 1} |C[n]|_q \frac{x^n}{n!_q}$$

avec

$$|C[n]|_q = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) \frac{(1-q)^n n!_q}{(1-q^d)^{n/d}} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) \frac{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)}{(1-q^{d/n})^{n/d}}.$$

Les premières valeurs des polynômes  $|C[n]|_q$  sont :

$$|C[1]|_q = |C[2]|_q = 1$$

$$|C[3]|_q = 1 + q^3$$

$$|C[4]|_q = 1 + q^2 + q^3 + 2q^4 + q^5$$

$$|C[5]|_q = 1 + q^2 + 3q^3 + 4q^4 + 6q^5 + 4q^6 + 3q^7 + q^8 + q^{10}$$

$$\begin{aligned} |C[6]|_q &= 1 + 2q^2 + 5q^3 + 8q^4 + 11q^5 + 17q^6 + 16q^7 + 17q^8 + 15q^9 + 12q^{10} \\ &\quad + 7q^{11} + 6q^{12} + 2q^{13} + q^{14}. \end{aligned}$$

On remarque que  $|C[1]|_q$ ,  $|C[3]|_q$  et  $|C[5]|_q$  sont des polynômes symétriques, ce qui confirme le fait que pour  $n$  impair,  $|C[n]|_q$  est symétrique (3.12-1).

**(3.18) Exemple.** Soit  $D$  l'espèce des dérangements. Nous savons que  $S = E \cdot D$ , donc

$$D(x; q) = \frac{S(x; q)}{E(x; q)}.$$

Or, comme nous l'avons indiqué en début de chapitre,

$$\begin{aligned}\frac{1}{E(x;q)} &= (1-(1-q)x)(1-(1-q)qx)(1-(1-q)q^2x)\dots = E(-x;q) \\ &= \sum_{n \geq 0} q^{n(n-1)/2} (-1)^n \frac{x^n}{n!_q}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}D(x;q) &= \sum_{k \geq 0} q^{k(k-1)/2} (-1)^k \frac{x^k}{k!_q} \cdot \sum_{r \geq 0} |S[r]|_q \frac{x^r}{r!_q} \\ &= \sum_{n \geq 0} |D[n]|_q \frac{x^n}{n!_q}\end{aligned}$$

où

$$|D[n]|_q = \sum_{k=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q (-1)^k q^{k(k-1)/2} |S[n-k]|_q.$$

Remplaçant  $|S[n-k]|_q$  par la valeur trouvée à l'exemple (3.7) on obtient la formule

$$|D[n]|_q = n!_q \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!_q} q^{k(k-1)/2} \sum_{\substack{(d_1, d_2, \dots) \\ \sum v d_v = n-k}} \frac{(1-q)^{n-k}}{(1-q)^{d_1} (1-q^{2})^{d_2} \dots (1-q^{n-k})^{d_{n-k}}}.$$

Les premières valeurs sont

$$|D[0]|_q = 1$$

$$|D[1]|_q = 0$$

$$|D[2]|_q = 1$$

$$|D[3]|_q = 1 + q^3$$

$$|D[4]|_q = 2 + 2q^2 + q^3 + 3q^4 + q^5.$$

Remarquons que l'espèce  $D$  ainsi que sa  $q$ -série contiennent l'information des types de dérangements, contrairement au  $q$ -anologue classique qui s'obtient en calculant le quotient  $L(x;q)/E(x;q)$ .

Dans chacun des exemples précédents, les polynômes obtenus ont tous leurs coefficients entiers positifs. S'agit-il d'un fait général? Rappelons que toute espèce se décompose comme somme d'espèces moléculaires,

$$F = \sum_{n \geq 0} \sum_{M \in \mathcal{M}(n)} c_M M, \quad c_M \in \mathbb{N},$$

et que chaque espèce moléculaire  $M$  s'écrit, de façon unique (Yeh[YY1]), comme produit d'espèces atomiques, c'est-à-dire indécomposables sous le produit ( $A \neq 1$  et  $(A = B \cdot C \Rightarrow B = 1 \text{ ou } C = 1)$ ). Dans le cas des espèces pondérées, ce résultat est encore vrai sauf que l'unicité de décomposition d'une espèce moléculaire en produit d'espèces atomiques devient «à répartition près» du poids. En effet, dans une espèce moléculaire il n'y a qu'un seul type et toutes les structures sont équivalentes; si l'espèce est pondérée, ses structures auront toutes le même poids. On peut alors écrire

$$F_w = \sum_{n \geq 0} \sum_{M \in \mathcal{M}(n)} \sum_{a \in A} c_{M,a} M_{(a)}, \quad c_{M,a} \in \mathbb{N},$$

où (a) désigne le poids commun à toutes les structures d'une composante moléculaire de  $F$  isomorphe à  $M$ . Lorsqu'on désire écrire chaque  $M$  comme produit d'espèces atomiques, il peut y avoir plusieurs façons de répartir le poids entre les différents facteurs atomiques, mais cette répartition n'affecte pas la décomposition en facteur. On constate donc qu'il suffit de vérifier que les  $q$ -séries des espèces atomiques ont tous leurs coefficients entiers positifs pour conclure qu'il en est de même pour toute espèce.

Utilisons la formule (3.8), les polynômes  $P_n(\lambda)$  de l'annexe I et les tables de séries indicatrices des espèces moléculaires et atomiques données par J. Labelle [LJ2] pour calculer les premières valeurs. Le tableau A contient les  $q$ -comptages de toutes les espèces atomiques définies sur  $n \leq 5$  éléments. On peut en conclure que pour  $n \leq 5$ ,  $|F[n]|_q \in \mathbb{N}[q]$  pour toute espèce  $F : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}$ .

## Séries indicatrices et q-comptages d'espèces atomiques

	$F$	$n! \cdot Z_F$	$ F[n] _q$
$n = 1$	$X$	$x_1$	1
$n = 2$	$E_2$	$x_1^2 + x_2$	1
$n = 3$	$E_3$	$x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3$	1
	$C_3$	$2x_1^3 + 4x_3$	$1 + q^3$
$n = 4$	$E_4$	$x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4$	1
	$E_4^\pm$	$2x_1^4 + 16x_1x_3 + 6x_2^2$	$1 + q^6$
	$E_2 \circ E_2$	$3x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 9x_2^2 + 6x_4$	$1 + q^2 + q^4$
	$P_4^{bic}$	$6x_1^4 + 18x_2^2$	$1 + 2q^2 + 2q^4 + q^6$
	$C_4$	$6x_1^4 + 6x_2^2 + 12x_4$	$1 + q^2 + q^3 + 2q^4 + q^5$
	$E_2 \circ L_2$	$12x_1^4 + 12x_2^2$	$1 + q + 3q^2 + 2q^3 + 3q^4 + q^5 + q^6$
$n = 5$	$E_5$	$x_1^5 + 10x_1^3x_2 + 20x_1^2x_3 + 30x_1x_4 + 15x_1x_2^2 + 20x_2x_3 + 24x_5$	1
	$E_5^\pm$	$2x_1^5 + 40x_1^2x_3 + 30x_1x_2^2 + 48x_5$	$1 + q^{10}$
	$P_5/\mathbb{Z}_2$	$6x_1^5 + 60x_1x_4 + 30x_1x_2^2 + 24x_5$	$1 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 + q^8$
	$P_5$	$12x_1^5 + 60x_1x_2^2 + 48x_5$	$1 + q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 2q^6 + q^7 + q^8 + q^{10}$
	$(L_2 \cdot C_3)/\mathbb{Z}_2$	$20x_1^5 + 40x_1^2x_3 + 60x_1x_2^2$	$1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 2q^5 + 3q^6 + 2q^7 + 2q^8 + q^9 + q^{10}$
	$C_5$	$24x_1^5 + 96x_5$	$1 + q^2 + 3q^3 + 4q^4 + 6q^5 + 4q^6 + 3q^7 + q^8 + q^{10}$

Tableau A

Dans le cas d'une espèce pondérée, ce raisonnement s'applique encore si l'on considère les poids des diverses structures comme autant de variables formelles. Nous écrirons

$$|F_w[n]|_q \in \mathbb{N}[\mathbb{A}][q], \quad F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{A}},$$

pour exprimer le fait que  $|F_w[n]|_q$  est un polynôme en  $q$  dont les coefficients sont eux-mêmes des polynômes, à coefficients entiers positifs, en les variables  $(w(s))_{s: \text{F-structure}}$ .

Ainsi le tableau A montre donc que pour toute espèce pondérée  $F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{A}}$ ,  $|F_w[n]|_q \in \mathbb{N}[\mathbb{A}][q]$  si  $n \leq 5$ . En fait, ce résultat est vrai pour tout  $n$ , et pour le prouver il suffit de le vérifier dans le cas des espèces non-pondérées. C'est ce que nous ferons au théorème (3.20); nous devrons y utiliser des résultats de la théorie des fonctions symétriques et des représentations linéaires du groupe symétrique. Mais voyons d'abord un résultat entièrement combinatoire concernant la première des deux étapes du calcul de  $F(x; q)$  mentionnées à la remarque (3.4).

**(3.19) Proposition.** Soit  $F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{A}}$  une espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée. Pour  $i \geq 1$ , soit  $X_{\pi_i} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_{Z[\pi_1, \pi_2, \dots]}$  l'espèce des singletons pondérés par le poids  $\pi_i$  et soit

$$X_{\pi} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_{Z[\pi_1, \pi_2, \dots]}$$

l'espèce pondérée définie par  $X_{\pi} = X_{\pi_1} + X_{\pi_2} + X_{\pi_3} + \dots$ . Alors

**(1) le  $q$ -comptage de  $F$  s'obtient par :**

$$F(x; q) = \widetilde{F}(X_{\pi})(x) \Big|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}}$$

$$(2) \quad F(x; q) = \sum_{n \geq 0} f_n(\pi_1, \pi_2, \dots) x^n \Big|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}}$$

où, pour chaque  $n \geq 0$ ,  $f_n$  est une fonction symétrique  $\in \mathbb{N}[\mathbb{A}][[\pi_1, \pi_2, \dots]]$ .

**Preuve :** Suivant les remarques précédentes, il suffit de prouver le cas  $F$  non pondérée.

(1) En effet, par (1.29 ii),

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(\mathbf{X}_\pi)(x) &= Z_{F(\mathbf{X}_\pi)}(x_i := x^i) \\ &= Z_F \circ Z_{\mathbf{X}_\pi}(x_i := x^i);\end{aligned}$$

or

$$Z_{\mathbf{X}_\pi} = (\pi_1 + \pi_2 + \dots)x_1, \quad (Z_{\mathbf{X}_\pi})_n = (\pi_1^n + \pi_2^n + \dots)x_n$$

et utilisant (1.33-5) on obtient

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(\mathbf{X}_\pi)(x) &= Z_F\left(\sum_{k \geq 1} \pi_k x_1, \sum_{k \geq 1} \pi_k^2 x_2, \dots, \sum_{k \geq 1} \pi_k^n x_n, \dots\right)|_{x_i := x^i} \\ &= Z_F\left(x_i := \sum_{k \geq 1} \pi_k^i x^i\right).\end{aligned}$$

Maintenant, effectuons la spécialisation principale  $\pi_k := (1-q)q^{k-1}$  dans cette dernière expression,

$$\sum_{k \geq 1} \pi_k^i x^i|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}} = \sum_{k \geq 1} (1-q)^i q^{(k-1)i} x^i = \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i},$$

donc

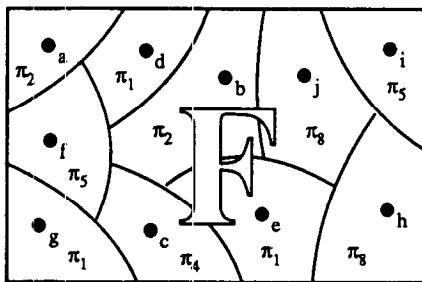
$$\widetilde{F}(\mathbf{X}_\pi)|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}} = Z_F\left(x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}\right) = F(x; q).$$

(2) La proposition (1.26) nous dit que la série génératrice des types de l'espèce  $F(\mathbf{X}_\pi)$  est donnée par

$$\widetilde{F}(\mathbf{X}_\pi)(x) = \sum_{n \geq 0} |\mathcal{O}_{\mathfrak{S}_n} F(\mathbf{X}_\pi)[n]| x^n$$

où  $|\mathcal{O}_{\mathfrak{S}_n} F(\mathbf{X}_\pi)[n]|$  désigne la somme des poids des orbites, sous l'action de  $\mathfrak{S}_n$ , des  $F(\mathbf{X}_\pi)$ -structures. Chaque poids est un monôme  $\pi_{i_1}^{n_1} \pi_{i_2}^{n_2} \pi_{i_3}^{n_3} \dots$  qui apparaît un nombre fini de fois (au plus une fois par  $F$ -structure, voir figure 31), donc  $|\mathcal{O}_{\mathfrak{S}_n} F(\mathbf{X}_\pi)[n]| \in \mathbb{N}[\pi_1, \pi_2, \dots]$ . Nous allons maintenant voir que la fonction

$f_n(\pi_1, \pi_2, \dots) = |\mathcal{O}_{\mathfrak{S}_n} F(X_\pi)[n]|$  est une fonction symétrique des variables  $\pi_1, \pi_2, \dots$ .



Une  $F(X_\pi)$ -structure sur  $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ ,  
de poids  $\pi_1^3 \pi_2^2 \pi_4 \pi_5^2 \pi_8^2$ .

figure 31

En effet, puisque le transport de structures préserve les poids (en particulier ici le poids de chaque singleton), les orbites (ou types) de  $F(X_\pi)$ -structures peuvent être regroupées en classes qui sont caractérisées par

- 1) le type de  $F$ -structure, 2) la suite de multiplicités des poids (les exposants du monôme) et 3) la "disposition" de ces poids sur les points de la structure.

De façon précise, si  $(n_1, n_2, n_3, \dots)$  est une suite d'entiers positifs à support fini alors les coefficients des monômes  $\pi_{i_1}^{n_1} \pi_{i_2}^{n_2} \dots$  et  $\pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots$  dans  $|\mathcal{O}_{\mathfrak{S}_n} F(X_\pi)[n]|$  sont égaux, puisque comme l'illustre la figure 32, le nombre d'apparitions d'un monôme ne dépend pas des indices de ses variables mais de leur multiplicité et de leur disposition sur le type de structures. Donc si  $(n_1, n_2, \dots)^+$  désigne la suite décroissante finie des entiers non nuls de la suite  $(n_1, n_2, \dots)$ ,

$$(n_1, n_2, n_3, \dots)^+ = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots),$$

et si  $(m_1, m_2, \dots)^+ = (n_1, n_2, \dots)^+$ , alors les monômes  $\pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots$  et  $\pi_1^{m_1} \pi_2^{m_2} \dots$  apparaissent avec le même coefficient dans  $|\mathcal{O}_{\mathfrak{S}_n} F(X_\pi)[n]|$ , c'est-à-dire que la fonction  $f_n(\pi_1, \pi_2, \dots) = |\mathcal{O}_{\mathfrak{S}_n} F(X_\pi)[n]|$  est symétrique en  $\pi_1, \pi_2, \dots$ . ■

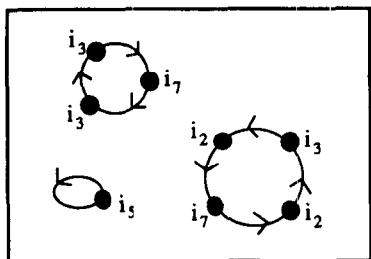
Une orbite de  $S(X_\pi)$ -structures

figure 32

(3.20) **Théorème.** Soit  $F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_A$  une espèce  $A$ -pondérée. Alors pour chaque  $n \geq 0$ ,

$$|F_w[n]|_q \in \mathbb{N}[A][q],$$

ce qui justifie le nom de *q-énumération des F-structures*.

**Preuve.** Comme précédemment, on prouve seulement le cas  $F$  non-pondérée. D'après (3.19-2),

$$F(x;q) = \sum_{n \geq 0} |F[n]|_q \frac{x^n}{n!_q} = \sum_{n \geq 0} f_n(\pi_1, \pi_2, \dots) x^n \Big|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}}.$$

Dans cette formule, les  $f_n$  sont les fonctions symétriques associées à la suite de représentations linéaires du groupe symétrique définies par  $F$ . En effet, ces représentations s'obtiennent du transport de structures comme suit :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n &\xrightarrow{\Phi_n} \text{Aut}(L(F[n])) \\ \sigma &\longmapsto \Phi_n(\sigma) : s \mapsto \sigma_F \cdot s \quad (s \in F[n]) \end{aligned}$$

où  $L(F[n])$  est le linéarisé de  $F[n]$ , c'est-à-dire l'espace vectoriel libre engendré par  $F[n]$ . On remarque que leur série de caractères

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi_{\Phi_n}(\sigma) I(\sigma)$$

est exactement la série indicatrice de  $F$ , puisque

$$\chi_{\Phi_n}(\sigma) = \text{Tr } \Phi_n(\sigma) = \sum_{s \in F[n]} \sum_{\sigma_F \cdot s = s} 1 = p_F(\sigma),$$

et c'est en appliquant la correspondance de Fröbenius à cette série de caractères qu'on obtient les fonctions symétriques  $f_n(\pi_1, \pi_2, \dots)$ . En décomposant les  $\Phi_n$  comme somme de représentations irréductibles ( $\Phi_n = \sum_{\lambda \vdash n} f_\lambda \Phi_\lambda$ ) et en utilisant le fait que les fonctions symétriques associées aux représentations irréductibles du groupe symétrique  $S_n$  sont les fonctions de Schur  $(s_\lambda)_{\lambda \vdash n}$  [MI], on obtient l'expression des  $f_n$  dans la base des fonction de Schur :

$$F(x; q) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\lambda \vdash n} f_\lambda s_\lambda(\pi_1, \pi_2, \dots) x^n \Big|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}},$$

où  $f_\lambda \in \mathbb{N}$  est la multiplicité de la représentation irréductible  $\Phi_\lambda$  dans  $\Phi_n$ . Or

$$s_\lambda(\pi_1, \pi_2, \dots) \Big|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}} = \frac{T_\lambda(q)}{n!_q}$$

où  $T_\lambda(q) = \frac{q^{(\sum v \lambda_v) - n} n!_q}{\prod [h_{ij}]_q}$  est un polynôme à coefficients entiers positifs,  $q$ -comptage des tableaux de Young (ce résultat est dû à R. Stanley [SR]). D'où, pour  $n \geq 0$ ,

$$|F[n]|_q = \sum_{\lambda \vdash n} f_\lambda T_\lambda(q)$$

est un polynôme en  $q$  à coefficients entiers positifs. ■

### § 3.3 - QUELQUES FORMULES POUR LE $q$ -COMPTAGE

Le Théorème (3.20) nous assure que la  $q$ -série d'une espèce est une  $q$ -énumération en ce sens que les coefficients des puissances de  $q$  qu'on trouve dans les divers polynômes sont tous des entiers positifs. Il apparaît alors naturel de poser la question du sens de ces coefficients et c'est dans la recherche de leur interprétation combinatoire que nous avons développé les formules présentées dans cette section. Ce sont toutes des formules équivalentes pour le calcul du  $q$ -comptage, elles ont toutes une saveur plus ou moins combinatoire, l'échelle du plus vers le moins pouvant varier avec le

sens que le lecteur accorde au mot « *combinatoire* ».

Nous avons déjà donné, à la proposition (3.8), une première formule qui fait intervenir les polynômes  $P_n(\lambda; q)$ . En développant ceux-ci, on peut expliciter les coefficients des diverses puissances de  $q$  :

(3.21) **Proposition.** Soit  $F := F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_A$  une espèce  $A$ -pondérée. Alors pour  $n \geq 0$ ,

$$|F[n]|_q = \sum_{\mu=0}^{n(n-1)/2} \left[ \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_F(\sigma) \sum_{\substack{i k_i = \mu \\ k_1, \dots, k_n \geq 0}} (-1)^{\sum k_i} \binom{1-\sigma_1}{k_1} \dots \binom{1-\sigma_n}{k_n} \right] q^\mu .$$

**Preuve :** Écrivons (3.8) sous la forme

$$|F[n]|_q = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_F(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) P_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n; q) ,$$

utilisons (3.9) pour expliciter les  $P_n$ ,

$$|F[n]|_q = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_F(\sigma) \sum_{\mu=0}^{n(n-1)/2} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \geq 0 \\ \sum i k_i = \mu}} \left\{ \begin{matrix} \sigma_1 - 1 \\ k_1 \end{matrix} \right\} \dots \left\{ \begin{matrix} \sigma_n - 1 \\ k_n \end{matrix} \right\} q^\mu$$

et rappelons que  $\left\{ \begin{matrix} \sigma_1 - 1 \\ k_1 \end{matrix} \right\} \dots \left\{ \begin{matrix} \sigma_n - 1 \\ k_n \end{matrix} \right\} = (-1)^{\sum k_i} \binom{1-\sigma_1}{k_1} \dots \binom{1-\sigma_n}{k_n}$ . ■

Pour obtenir les formules suivantes, nous reprenons la proposition (3.19) qui relie la  $q$ -série  $F(x; q)$  et la série génératrice des types de l'espèce  $F(X_\pi)$  et nous étudions davantage cette dernière. Remarquons que dans une  $F(X_\pi)$ -structure l'attribution des poids  $\in \{\pi_1, \pi_2, \dots\}$  aux éléments de l'ensemble sous-jacent se fait de façon indépendante du choix d'une  $F$ -structure sur cet ensemble. Ainsi, suite à l'exemple (1.17), nous écrivons

$$(3.22) \quad F(X_\pi) \equiv F \times E(X_\pi) .$$

(3.23) **Proposition.** Soit  $F := F_w : \mathbb{B} \rightarrow E_{\mathbb{A}}$  une espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée. Alors pour  $n \geq 0$ ,

$$|F_w[n]|_q = (1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n) \sum_{(s, \phi) \in F_n(\mathbb{N})} w(s) q^{\phi(1)+\phi(2)+\dots+\phi(n)}$$

où  $F_n(\mathbb{N}) = \bigoplus_{\mathfrak{S}_n} (F[n] \times \mathbb{N}^n)$  ( $= F[n] \times \mathbb{N}^n / \mathfrak{S}_n$ ) .

**Preuve :** D'abord, observons que la donnée d'une  $E(X_\pi)$ -structure sur un ensemble fini  $U$  équivaut à la donnée d'une fonction vers  $\mathbb{N}$ ,

$$E(X_\pi)[U] \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}^U = \{\phi : U \rightarrow \mathbb{N}\},$$

où  $\phi : U \rightarrow \mathbb{N}$  est définie par  $\phi(a) = i \Leftrightarrow \pi(a) = \pi_{i+1}$ , et que le poids d'une telle structure devient, après la substitution  $\pi_k := (1-q)q^{k-1}$ ,

$$\pi(\phi) = (1-q)^n q^{\phi(1)+\phi(2)+\dots+\phi(n)}.$$

Puisque  $F_w(X_\pi) \cong F_w \times E(X_\pi)$ , le poids d'une  $F_w(X_\pi)$ -structure  $(s, \phi)$  sera

$$w(s)\pi(\phi) = (1-q)^n w(s) q^{\phi(1)+\dots+\phi(n)}.$$

D'après la proposition (3.19), on a

$$\begin{aligned} F(x; q) &= \widetilde{F}(X_\pi)(x) \\ &= \sum_{n \geq 0} |\bigoplus_{\mathfrak{S}_n} F(X_\pi)[n]| x^n \Big|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}} = \sum_{n \geq 0} |F[n]|_q \frac{x^n}{n!_q} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |F_w[n]|_q &= n!_q |\bigoplus_{\mathfrak{S}_n} F_w(X_\pi)[n]| \Big|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}} \\ &= n!_q |\bigoplus_{\mathfrak{S}_n} F_w \times E(X_\pi)[n]| \Big|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}} \\ &= n!_q |\bigoplus_{\mathfrak{S}_n} F_w[n] \times \mathbb{N}^n| \Big|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}} \end{aligned}$$

d'où, posant  $\bigoplus_{\mathfrak{S}_n} F_w[n] \times \mathbb{N}^n = F_n(\mathbb{N})$ , on obtient

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}_w[n]|_q &= n!_q \sum_{(\overline{s}, \overline{\phi}) \in \mathbf{F}_n(\mathbb{N})} (1-q)^n w(s) q^{\phi(1)+\dots+\phi(n)} \\ &= (1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n) \sum_{(\overline{s}, \overline{\phi}) \in \mathbf{F}_n(\mathbb{N})} w(s) q^{\phi(1)+\dots+\phi(n)}. \end{aligned}$$

■

(3.24) **Remarque.** À toute espèce  $\mathbf{F}$ , Joyal [JA2] associe un *foncteur analytique*, défini par

$$\mathbf{F}(A) = \sum_{n \geq 0} \mathbf{F}_n(A) = \sum_{n \geq 0} \mathbf{F}[n] \times A^n / \mathfrak{S}_n,$$

qui construit les « mots  $\mathbf{F}$ -structurés sur l'alphabet  $A$  ». La formule précédente nous dit donc que  $|\mathbf{F}[n]|_q$  est une énumération de mots de longueur  $n$   $\mathbf{F}$ -structurés, sur l'alphabet infini  $\mathbb{N}$ , suivant le paramètre  $q^{\sum \text{lettres du mot}}$ . Remarquons que la fonction génératrice des partages d'entiers en  $n$  parts  $\geq 0$  est

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)} = \sum_{\mu \in P_{o,n}} q^{\sum \mu_i},$$

où  $P_{o,n} = \{(\mu_1, \dots, \mu_n) \mid \mu_1 \geq \dots \geq \mu_n \geq 0\}$ , et réécrivont (3.23) sous la forme

$$(3.25) \quad \sum_{(\overline{s}, \overline{\phi}) \in \mathbf{F}_n(\mathbb{N})} w(s) a_{\phi(1)} \dots a_{\phi(n)}|_{a_i := q^i} = |\mathbf{F}_w[n]|_q \cdot \sum_{\mu \in P_{o,n}} q^{\sum \mu_i}.$$

Cette équation suggère l'existence d'une bijection entre l'ensemble des mots  $\mathbf{F}$ -structurés de longueur  $n$  et l'ensemble des couples formés d'un partage d'entier en  $n$  parts  $\geq 0$  et d'un mot  $\mathbf{F}$ -structuré « spécial ». Nous n'avons malheureusement pas de candidat adéquat pour cette bijection et laissons ce problème ouvert.

Reprendons donc l'égalité combinatoire  $\mathbf{F}(X_\pi) \cong \mathbf{F} \times \mathbf{E}(X_\pi)$  (3.22) et voyons comment on peut la développer.

(3.26) **Proposition.** Pour toute espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée  $\mathbf{F} := \mathbf{F}_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{A}}$  on a :

$$(1) \quad \widetilde{\mathbf{F}}(X_\pi) \cong \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{n_1 + n_2 + \dots = n \\ n_i \geq 0}} (\mathbf{F}_w \times [\mathbb{E}_{n_1} \cdot \mathbb{E}_{n_2} \cdot \dots]) \tilde{\sim}_{(\pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots)},$$

où  $E_{n_i}$  désigne l'espèce des ensembles de cardinal  $n_i$  et l'indice  $(\pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots)$  signifie que le poids de chaque  $(F_w \times [E_{n_1} \cdot E_{n_2} \cdot \dots])^{\sim}$ -structure est multiplié par  $\pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots$ .

$$(2) |F_w[n]|_q = \sum_{\substack{n_1 + n_2 + \dots = n \\ n_i \geq 0}} |\mathcal{O}_{G_{n_1} \times G_{n_2} \times \dots} F_w[n]| (1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n) \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots|_{\pi_i := q^{i-1}}$$

où  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{O}_{G_{n_1} \times G_{n_2} \times \dots} F_w[n]$  désigne l'ensemble des orbites de l'action (par transport de structures) du groupe  $G_{n_1} \times G_{n_2} \times \dots$ , celui-ci étant vu comme un sous-groupe de  $G_n$  qui agit indépendamment sur des sous-ensembles disjoints de  $[n]$  de tailles  $n_1, n_2, \dots$ , et  $|\mathcal{O}_{G_{n_1} \times G_{n_2} \times \dots} F_w[n]|$  et la somme des poids de ces orbites.

**Preuve :**

(1) Utilisant le fait que l'espèce  $E$  des ensembles satisfait  $E(A+B) \equiv E(A) \cdot E(B)$  et se décompose suivant les cardinalités en  $E \equiv 1 + E_1 + E_2 + \dots$  on obtient

$$\begin{aligned} F_w(X_\pi) &\equiv F_w \times E(X_\pi) \\ &\equiv F_w \times [E(X_{\pi_1} + X_{\pi_2} + \dots)] \\ &\equiv F_w \times \prod_{i \geq 1} E(X_{\pi_i}) \\ &\equiv F_w \times \prod_{i \geq 1} (1 + E_1(X_{\pi_i}) + E_2(X_{\pi_i}) + \dots + E_{n_i}(X_{\pi_i}) + \dots) \\ &\equiv F_w \times \prod_{i \geq 1} (1 + (E_1)_{\pi_i} + (E_2)_{\pi_i} + \dots + (E_{n_i})_{\pi_i} + \dots), \end{aligned}$$

la dernière égalité étant due au fait qu'il n'y a qu'une seule structure d'espèce  $E_{n_i}(X_{\pi_i})$ , soit un ensemble de cardinal  $n_i$  et de poids  $\pi_i^{n_i}$ . Effectuant le produit et remarquant que toutes les structures de l'espèce produit  $(E_{n_1})_{\pi_1} \cdot (E_{n_2})_{\pi_2} \dots$  ont le même poids  $\pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots$ , on trouve

$$F_w(X_\pi) \equiv F_w \times \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots \geq 0 \\ \sum n_i < \infty}} (E_{n_1} \cdot E_{n_2} \cdot \dots)_{\pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots},$$

ce qui donne, en regroupant les termes suivant la somme des  $n_i$ ,

$$F_w(X_\pi) \equiv \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots \geq 0 \\ \sum n_i < \infty}} F_w \times (E_{n_1} \cdot E_{n_2} \cdot \dots)_{\pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots}.$$

Finalement, on considère les espèces tildes associées et on remarque que le facteur  $\pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots$  est commun au poids de tous les types de  $F_w \times (E_{n_1} \cdot E_{n_2} \cdot \dots)_{\pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots}$ -structure.

(2) À l'aide de (1) on calcule la série génératrice de l'espèce  $\widetilde{F_w}(X_\pi)$ :

$$\widetilde{F_w}(X_\pi)(x) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots=n \\ n_i \geq 0}} |(F_w \times [E_{n_1} \cdot E_{n_2} \cdot \dots])^{\sim}[n]| \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots \frac{x^n}{n!}.$$

Or par définition (1.25-1) de l'espèce tilde,

$$\begin{aligned} |(F_w \times [E_{n_1} \cdot E_{n_2} \cdot \dots])^{\sim}[n]| &= \left| \left\{ (\varphi, s, \sigma) \mid \begin{array}{l} \varphi \in E_{n_1} \cdot E_{n_2} \cdot \dots [n], s \in F_w[n], \sigma \in \mathfrak{S}_n, \\ \sigma \cdot \varphi = \varphi \text{ et } \sigma \cdot s = s \end{array} \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ (\varphi, s, \sigma) \mid \begin{array}{l} \varphi \in E_{n_1} \cdot E_{n_2} \cdot \dots [n], s \in F_w[n], \\ \sigma = \sigma_{n_1} \sigma_{n_2} \dots \in \mathfrak{S}_{n_1} \times \mathfrak{S}_{n_2} \times \dots \text{ et } \sigma \cdot s = s \end{array} \right\} \right| \\ &= |E_{n_1} \cdot E_{n_2} \cdot \dots [n]| \cdot \left| \left\{ (s, \sigma) \mid \begin{array}{l} \sigma = \sigma_{n_1} \sigma_{n_2} \dots \in \mathfrak{S}_{n_1} \times \mathfrak{S}_{n_2} \times \dots, \\ s \in F_w[n] \text{ et } \sigma \cdot s = s \end{array} \right\} \right| \end{aligned}$$

ce qui donne, en utilisant le lemme du stabilisateur,

$$\begin{aligned} |(F_w \times [E_{n_1} \cdot E_{n_2} \cdot \dots])^{\sim}[n]| &= \binom{n}{n_1, n_2, \dots} \cdot |\mathfrak{S}_{n_1} \times \mathfrak{S}_{n_2} \times \dots| \cdot |\mathcal{O}_{\mathfrak{S}_{n_1} \times \mathfrak{S}_{n_2} \times \dots} F_w[n]| \\ &= n! \left| \mathcal{O}_{\mathfrak{S}_{n_1} \times \mathfrak{S}_{n_2} \times \dots} F_w[n] \right|, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} F_w(x; q) &= \widetilde{F_w}(X_\pi)(x) \Big|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots=n \\ n_i \geq 0}} \left| \mathfrak{S}_{G_{n_1} \times G_{n_2} \times \dots} F_w[n] \Big| \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots \right|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}} x^n \end{aligned}$$

d'où le coefficient de  $x^n/n!_q$  est égal à

$$\begin{aligned} |F_w[n]|_q &= n!_q \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots=n \\ n_i \geq 0}} \left| \mathfrak{S}_{G_{n_1} \times G_{n_2} \times \dots} F_w[n] \Big| \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots \right|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}} \\ &= (1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n) \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots=n \\ n_i \geq 0}} \left| \mathfrak{S}_{G_{n_1} \times G_{n_2} \times \dots} F_w[n] \Big| \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots \right|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}} \end{aligned}$$

■

Nous avons déjà remarqué, dans la preuve de (3.19-2), que les coefficients des monômes  $\pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots$  et  $\pi_{i_1}^{n_1} \pi_{i_2}^{n_2} \dots$  sont toujours égaux quels que soient les indices  $i_1, i_2, \dots$ . Ce fait est encore plus évident ici, dans la formule (3.26-2), puisque l'action du groupe  $G_{n_1} \times G_{n_2} \times \dots$  ne dépend pas du poids  $\pi_i$  qu'on donne aux éléments du sous-ensemble de taille  $n_i$  sur lequel agit  $G_{n_i}$ . Si dans cette dernière formule on regroupe un maximum de termes, on obtiendra une combinaison linéaire des fonctions symétriques monomiales qui, nous le verrons plus loin, permettra une description combinatoire du résultat de la substitution principale,  $\pi_k := q^{k-1}$ , dans cette famille de fonctions. Mais avant nous effectuons un regroupement partiel qui n'est pas en terme de fonctions symétriques et permet une formule explicite.

(3.27) **Proposition.** *Le  $q$ -comptage d'une espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée  $F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_\mathbb{A}$  est donné par*

$$|F_w[n]|_q = \sum_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle \in Comp(n)} |\mathfrak{S}_{G_{k_1} \times \dots \times G_{k_s}} F_w[n]| E_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}(q),$$

où  $Comp(n)$  est l'ensemble des compositions de  $n$  ( $Comp(0) = \{\emptyset\}$ ) et

pour  $n > 0$ ,  $\text{Comp}(n) = \{(k_1, \dots, k_s) \mid s > 0, k_i \in \mathbb{N}^*, k_1 + \dots + k_s = n\}$  ,

$\mathfrak{S}_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}$  désigne un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n$  isomorphe au groupe

$\mathfrak{S}_{k_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{k_s}$  et

$$E_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}(q) = q^{-n+\sum i k_i} \frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}{(1-q^{k_1})(1-q^{k_1+k_2})\dots(1-q^{k_1+\dots+k_s})}.$$

**Preuve :** Pour une suite à support fini  $(n_1, n_2, \dots)$ , appelons  $(k_1, k_2, \dots, k_s)$  la sous-suite des termes non-nuls et dans la formule (3.26-2) regroupons tous les monômes  $\pi_{i_1}^{k_1} \pi_{i_2}^{k_2} \dots \pi_{i_s}^{k_s}$ ,  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s$ , qui ont cette même sous-suite d'exposants non-nuls. Puisque tous ces monômes ont le même coefficient, on peut écrire

$$|\mathcal{F}[n]|_q = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_s=n \\ k_i>0, s\geq 0}} |\mathfrak{S}_{\mathfrak{S}_{k_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{k_s}} \mathcal{F}[n]| (1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n) \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s} \pi_{i_1}^{k_1} \dots \pi_{i_s}^{k_s} |_{\pi_i := q^{i-1}}$$

(le cas limite  $s=0$  intervient seulement lorsque  $n=0$ ). Or

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s} \pi_{i_1}^{k_1} \dots \pi_{i_s}^{k_s} |_{\pi_i := q^{i-1}} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s} q^{(i_1-1)k_1 + (i_2-1)k_2 + \dots + (i_s-1)k_s},$$

posant  $i_1 = j_1 + 1$ ,  $i_2 = j_1 + j_2 + 2$ , ...,  $i_s = j_1 + j_2 + \dots + j_s + s$ ,

$$\begin{aligned} &= \sum_{j_1, \dots, j_s \geq 0} q^{j_1 k_1 + (j_1 + j_2 + 1)k_2 + \dots + (j_1 + \dots + j_s + (s-1))k_s} \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_s \geq 0} q^{k_2 + 2k_3 + \dots + (s-1)k_s} q^{(k_1 + \dots + k_s)j_1} q^{(k_2 + \dots + k_s)j_2} \dots q^{k_s j_s} \\ &= q^{\sum i k_i - \sum k_i} \cdot \frac{1}{1-q^{k_1+\dots+k_s}} \cdot \frac{1}{1-q^{k_2+\dots+k_s}} \cdot \frac{1}{1-q^{k_s}}. \end{aligned}$$

D'où

$$|\mathcal{F}[n]|_q = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_s=n \\ k_i>0, s\geq 0}} |\mathfrak{S}_{\mathfrak{S}_{k_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{k_s}} \mathcal{F}[n]| E_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}(q),$$

où

$$\begin{aligned}
 E_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}(q) &= (1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n) \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s} \pi_{i_1}^{k_1} \dots \pi_{i_s}^{k_s} \Big|_{\pi_i := q^{i-1}} \\
 &= q^{(\sum i k_i) - n} \frac{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)}{(1-q^{k_1 + \dots + k_s})(1-q^{k_2 + \dots + k_s}) \dots (1-q^{k_s})}.
 \end{aligned}$$

■

Le lemme suivant effectue une réécriture qui donnera une autre formule explicite pour le q-comptage.

(3.28) **Lemme.** *Les polynômes  $E_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}$  de la proposition (3.27) possèdent le développement suivant :*

$$E_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}(q) = \sum_{i=0}^{n(n-1)/2} \sum_{\substack{R_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle} \subseteq V \subseteq [n-1] \\ \sum v = i \\ v \in V}} (-1)^{|V \setminus R|} q^i$$

où  $R_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle} = \{k_s, k_s + k_{s-1}, \dots, k_s + \dots + k_2\}$ .

**Preuve :** Posons  $R_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle} = \{k_s, k_s + k_{s-1}, \dots, k_s + \dots + k_2\}$ , remarquons que puisque  $k_s + \dots + k_1 = n$ ,

$$\left( \sum_{i=1}^s i k_i \right) - n = [k_s + (k_s + k_{s-1}) + \dots + (k_s + \dots + k_1)] - (k_s + \dots + k_1) = \sum_{r \in R_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}} r,$$

et écrivons

$$\begin{aligned}
 E_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}(q) &= q^{(\sum i k_i) - n} \frac{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)}{(1-q^{k_s})(1-q^{k_s+k_{s-1}}) \dots (1-q^{k_s+\dots+k_1})} \\
 &= q^{\sum_{r \in R_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}} r} (1-q^{\tau_1})(1-q^{\tau_2}) \dots (1-q^{\tau_{n-s}}),
 \end{aligned}$$

où  $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-s}\} = [n] \setminus \{k_s, k_s + k_{s-1}, \dots, k_s + k_1\} = [n-1] \setminus R_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}$ .

En effectuant le produit on obtient

$$\begin{aligned}
 E_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}(q) &= q^{\sum_{r \in R_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}} r} \sum_{U \subseteq [n-1] \setminus R_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}} (-1)^{|U|} q^{\sum_{v \in U} v} \\
 &= \sum_{R_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle} \subseteq V \subseteq [n-1]} (-1)^{|V \setminus R|} q^{\sum_{v \in V} v}
 \end{aligned}$$

et il n'y a plus qu'à regrouper les termes suivant les diverses puissances de  $q$  pour obtenir la forme voulue. ■

(3.29) **Théorème.** Pour toute espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée  $F := F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{A}}$  on a la formule explicite

$$|F_w[n]|_q = \sum_{i=0}^{n(n-1)/2} \left( \sum_{\lambda \vdash n} c_n(\lambda, i) t_{\lambda} \right) q^i, \text{ pour } n \geq 0.$$

Dans cette formule  $t_{\lambda} := |\bigoplus_{\mathfrak{G}_{\lambda}} F_n[n]|$  désigne le nombre (somme des poids) de types de  $F$ -structures associées au partage  $\lambda$  ( $\mathfrak{G}_{\lambda} = \mathfrak{G}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathfrak{G}_{\lambda_n} \subseteq \mathfrak{G}_n$ ) et les coefficients  $c_n(\lambda, i)$  sont des entiers qui ne dépendent pas de l'espèce et sont donnés par

$$c_n(\lambda, i) = \sum_{\substack{\mu, v \in P_{\leq n}^*, \mu \triangleleft v \\ <\mu>^+ = \lambda, v \vdash i}} (-1)^{\ell(v) - \ell(\mu)},$$

où  $P_{\leq n}^* = \{(\mu_1, \mu_2, \dots) \mid n > \mu_1 > \mu_2 > \dots\}$  est l'ensemble de tous les partages en parts distinctes de taille  $< n$ ,  $\ell(\mu)$  est le nombre de parts du partage  $\mu$  ( $\ell(\emptyset) := 1$ ),  $\mu \triangleleft v$  ssi toutes les parts de  $\mu$  sont des parts de  $v$  et  $<\mu>$  est la composition de  $n$  formée des marches de  $\mu$ ,  $<\mu> = <n - \mu_1, \mu_1 - \mu_2, \dots, \mu_{s-2} - \mu_{s-1}, \mu_{s-1}>$  (la figure 33 illustre ces concepts).

**Preuve :** En appliquant le lemme (3.28) à la formule de la proposition (3.27) on obtient

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{F}[n]|_q &= \sum_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle \in \text{Comp}(n)} |\mathcal{O}_{\otimes_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}} \mathbf{F}_w[n]| \sum_{i=0}^{n(n-1)/2} \sum_{\substack{R_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle} \subseteq V \subseteq [n-1] \\ \sum_{v \in V} v = i}} (-1)^{|V \setminus R|} q^i \\
 &= \sum_{i=0}^{n(n-1)/2} \left[ \sum_{\substack{\langle k_1, \dots, k_s \rangle \in \text{Comp}(n) \\ R_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle} \subseteq V \subseteq [n-1] \\ \sum_{v \in V} v = i}} (-1)^{|V \setminus R|} |\mathcal{O}_{\otimes_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}} \mathbf{F}[n]| \right] q^i,
 \end{aligned}$$

où  $R_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle} = \{k_s, k_s + k_{s-1}, \dots, k_s + \dots + k_2\}$ . Utilisons le fait que

$$\langle k_1, \dots, k_s \rangle^+ = \langle k'_1, \dots, k'_s \rangle^+ = \lambda \Rightarrow$$

$$|\mathcal{O}_{\otimes_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}} \mathbf{F}[n]| = |\mathcal{O}_{\otimes_{\langle k'_1, \dots, k'_s \rangle}} \mathbf{F}[n]| = |\mathcal{O}_{\otimes_\lambda} \mathbf{F}[n]|$$

pour regrouper les coefficients suivant le partage  $\lambda$  sous-jacent à la composition de  $n$ .

Ceci donne

$$|\mathbf{F}[n]|_q = \sum_{i=0}^{n(n-1)/2} \sum_{\lambda \vdash n} \left[ \sum_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle} (-1)^{|V \setminus R_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}|} \right] |\mathcal{O}_{\otimes_\lambda} \mathbf{F}[n]| q^i$$

la somme intérieure étant faite sur toutes les compositions  $\langle k_1, \dots, k_s \rangle$  et les ensembles  $V$  qui satisfont

$$(i) \quad \langle k_1, \dots, k_s \rangle^+ = \lambda$$

$$(ii) \quad R_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle} \subseteq V \subseteq [n-1]$$

$$(iii) \quad \sum_{v \in V} v = i.$$

Nous allons montrer que cet ensemble d'indices de sommation est équivalent à celui donné dans l'énoncé pour les  $c_n(\lambda, i)$ . Pour cela, on considère les éléments de l'ensemble  $R_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}$  comme les parts d'un partage  $\mu$ . Puisque  $k_1 + \dots + k_s = n$  et  $k_i > 0$ ,  $1 \leq i \leq s$ , ces parts sont distinctes de taille  $< n$ :

$$\text{Comp}(n) \xrightarrow{\sim} P_{\leq n}^*$$

$$\langle k_1, \dots, k_s \rangle \longmapsto \mu = k_s + \dots + k_2 > \dots > k_s + k_{s-1} > k_s.$$

Il s'agit bien d'une bijection puisque d'un partage  $\mu$  on retrouve la composition  $\langle k_1, \dots, k_s \rangle$  en considérant les «marches» de  $\mu$  (voir figure 33):

$$\langle n - \mu_1, \mu_1 - \mu_2, \dots, \mu_{s-2} - \mu_{s-1}, \mu_{s-1} \rangle \longleftrightarrow \mu = \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_{s-1}$$

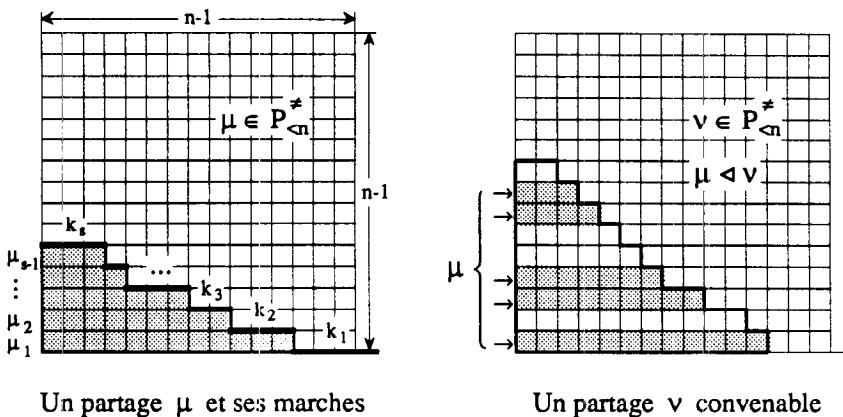


figure 33

L'ensemble  $V$  doit contenir  $R_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}$ ; on l'obtient donc en ajoutant des parts à  $\mu$ , de façon à former un partage  $v$  en parts distinctes (de taille  $\leq n$  puisque  $V \subseteq [n-1]$ ).  
Ainsi

$$V \subseteq [n-1] \longleftrightarrow v \in P_{\leq n}^*$$

$$R_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle} \subseteq V \longleftrightarrow \mu \triangleleft v.$$

La traduction des autres conditions est directe,

$$\langle k_1, \dots, k_s \rangle^+ = \lambda \longleftrightarrow \langle \mu \rangle^+ = \lambda$$

$$\sum_{v \in V} v = i \longleftrightarrow v \vdash i,$$

et les cardinalités d'ensemble se transforment en nombre de parts. On obtient donc

$$|\mathbf{F}[n]|_q = \sum_{i=0}^{n(n-1)/2} \sum_{\lambda \vdash n} \left[ \sum_{\substack{\mu, v \in P_{<n}^*, \mu \triangleleft v \\ <\mu>^+ = \lambda, v \vdash i}} (-1)^{\ell(v) - \ell(\mu)} \right] |\mathcal{O}_{\otimes \lambda} \mathbf{F}[n]| q^i$$

■

(3.30) **Corollaire 1.** *Les premiers coefficients du q-comptage sont :*

$$|\mathbf{F}[0]|_q = t_\emptyset$$

$$|\mathbf{F}[1]|_q = t_{1^1}$$

$$|\mathbf{F}[2]|_q = t_{2^1} + (-t_{2^1} + t_{1^2})q$$

$$|\mathbf{F}[3]|_q = t_{3^1} + (-t_{3^1} + t_{2^1 1^1})q + (-t_{3^1} + t_{2^1 1^1})q^2 + (t_{3^1} - 2t_{2^1 1^1} + t_{1^3})q^3$$

$$|\mathbf{F}[4]|_q = t_{4^1} + (-t_{4^1} + t_{3^1 1^1})q + (-t_{4^1} + t_{2^2})q^2 + (-t_{2^2} + t_{2^1 1^2})q^3$$

$$+ (t_{4^1} - 2t_{3^1 1^1} + t_{2^1 1^2})q^4 + (t_{4^1} - t_{3^1 1^1} - t_{2^2} + t_{2^1 1^2})q^5$$

$$+ (-t_{4^1} + 2t_{3^1 1^1} + t_{2^2} - 3t_{2^1 1^2} + t_{1^4})q^6$$

.

.

.

$$|\mathbf{F}[n]|_q = t_{n^1} + (-t_{n^1} + t_{(n-1)^1 1^1})q + (-t_{n^1} + t_{(n-2)^1 2^1})q^2 + \dots$$

**Preuve :** On sait déjà que le terme constant de  $|\mathbf{F}[n]|_q$  est égal au nombre de types de F-structures  $|\mathcal{O}_{\otimes n} \mathbf{F}[n]| = t_{n^1}$ . On obtient ici que le coefficient de  $q$  est égal au nombre de types de F-structures pointées moins le nombre de type de F-structures. On peut calculer tous ces coefficients à l'aide de la formule du théorème (3.29). Nous donnons en exemple le calcul du coefficient de  $q^2$  qui est donné par :

$$\sum_{\lambda \vdash n} c_n(\lambda, 2) t_\lambda, \text{ où } c_n(\lambda, 2) = \sum_{\substack{\mu, v \in P_{<n}^*, \mu \triangleleft v \\ <\mu>^+ = \lambda, v \vdash 2}} (-1)^{\ell(v) - \ell(\mu)}.$$

La condition  $v \vdash 2, v \in P_{<n}^*$  implique que  $v = 2^1$  et  $n > 2$ . Ce coefficient est donc nul lorsque  $n \leq 2$ . Dans les autres cas,  $\mu$  est soit vide, soit égal à  $v$ . Ces deux possibilités donnent

$$\mu = \emptyset : \langle \mu \rangle = \langle n \rangle, \quad \lambda = \langle \mu \rangle^+ = n^1, \quad (-1)^{\ell(\nu) - \ell(\mu)} t_\lambda = -t_{n^1}$$

$$\mu = 2^1 : \langle \mu \rangle = \langle n-2, 2 \rangle, \quad \lambda = \langle \mu \rangle^+ = (n-2)^1 2^1, \quad (-1)^{\ell(\nu) - \ell(\mu)} t_\lambda = +t_{(n-2)^1 2^1}$$

D'où le coefficient de  $q^2$  :  $-t_{n^1} + t_{(n-2)^1 2^1}$ . ■

**(3.31) Corollaire 2.** Si  $\text{mon}_\lambda(\pi_1, \pi_2, \dots)$  désigne la fonction symétrique monomiale associée au partage  $\lambda$  de  $n$  ( $\lambda \vdash n$ ), alors

$$\text{mon}_\lambda(\pi_1, \pi_2, \dots)|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}} = \frac{1}{n!_q} \sum_{i=0}^{n(n-1)/2} c_n(\lambda, i) q^i,$$

les coefficients  $c_n(\lambda, i)$  étant ceux définis au théorème (3.29).

**Preuve :** Rappelons que les fonctions monomiales sont définies par

$$\text{mon}_\lambda(\pi_1, \pi_2, \dots) = \sum_{(n_1, n_2, \dots)^+ = \lambda} \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots, \text{ pour } \lambda \vdash n,$$

où  $(n_1, n_2, \dots)^+$  désigne le partage formé des entiers non nuls de la suite  $(n_1, n_2, \dots)$ .

Nous avons déjà remarqué que si on regroupe un maximum de termes dans la formule (3.26-2) on obtient une expression du  $q$ -comptage comme combinaison linéaire des fonctions monomiales,

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}_w[n]|_q &= \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{(n_1, n_2, \dots)^+ = \lambda} |\mathcal{O}_{\mathfrak{S}_{n_1} \times \mathfrak{S}_{n_2} \times \dots} F_w[n]| n!_q \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots |_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}} \\ &= \sum_{\lambda \vdash n} |\mathcal{O}_{\mathfrak{S}_\lambda} F_w[n]| n!_q \text{mon}_\lambda(\pi_1, \pi_2, \dots) |_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}}. \end{aligned}$$

Or la formule du théorème (3.29) s'écrit

$$|\mathbf{F}_w[n]|_q = \sum_{\lambda \vdash n} \left( \sum_{i=0}^{n(n-1)/2} c_n(\lambda, i) q^i \right) t_\lambda.$$

Ces deux expressions pour  $|\mathbf{F}_w[n]|_q$  étant des polynômes en les variables  $t_\lambda = |\mathcal{O}_{\mathfrak{S}_\lambda} F_w[n]|$ , on conclut à l'égalité des coefficients :

$$\left. n!_q \operatorname{mon}_\lambda(\pi_1, \pi_2, \dots) \right|_{\substack{\pi_k := (1-q)q^{k-1}}} = \sum_{i=0}^{n(n-1)/2} c_n(\lambda, i) q^i.$$
■

La formule du théorème (3.29) offre un intérêt théorique parce qu'elle permet de calculer explicitement certains coefficients ou familles de coefficients du q-comptage. Nous en avons calculés quelques uns au corollaire (3.30) et à titre d'exemples supplémentaires, mentionnons qu'on obtient facilement que les coefficients de  $t_\lambda q^i$  pour  $\lambda = n^1$  et  $\lambda = 1^n$  sont :

$$c_n(n^1, i) = \sum_{v \in P_{n^1}, v \vdash i} (-1)^{\ell(v)-1}$$

(3.32)

$$c_n(1^n, i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n(n-1)/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Mais lorsqu'il s'agit de calculer systématiquement les polynômes du q-comptage, cette formule n'est pas assez efficace. Les programmes MAPLE et les tables qu'on trouve en annexes II, III et IV ont plutôt été obtenus à l'aide de la récurrence que nous présentons maintenant.

(3.33) **Théorème.** *Les polynômes q-énumérateurs de l'espèce  $F := F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_A$  sont donnés par*

$$|F_w[n]|_q = \sum_{\lambda \vdash n} n!_q \operatorname{mon}_\lambda(1-q, (1-q)q, (1-q)q^2, \dots) t_\lambda,$$

*où les polynômes  $W_\lambda(q) = n!_q \operatorname{mon}_\lambda(1-q, (1-q)q, (1-q)q^2, \dots) \in \mathbb{Z}[q]$  satisfont la récurrence*

$$W_\lambda(q) = \sum_{p:\lambda} q^{|\lambda|-p} (1-q^{|\lambda|-1})(1-q^{|\lambda|-2}) \dots (1-q^{|\lambda|-p+1}) W_{\lambda \setminus p}(q),$$

*avec les notations  $|\lambda| = \sum \lambda_i = n$  pour la somme des parts de  $\lambda$ ,  $p : \lambda$  signifie que  $p$  est une part de  $\lambda$ ,  $\lambda \setminus p$  est le partage obtenu de  $\lambda$  en supprimant la part*

$p$  et les  $t_\lambda$  sont définis comme précédemment,  $t_\lambda = |\bigoplus_{\pi \in \mathcal{G}_\lambda} F_w[n]|$ .  $\square$

La preuve utilise le lemme suivant :

(3.34) **Lemme.** *Avec les notations du théorème (3.33) on a*

$$\text{mon}_\lambda(\pi_1, \pi_2, \dots) = \text{mon}_\lambda(\pi_2, \pi_3, \dots) + \sum_{p:\lambda} \pi_1^p \text{mon}_{\lambda \setminus p}(\pi_2, \pi_3, \dots).$$

**Preuve :** Il suffit de regrouper les monômes, dans la définition de  $\text{mon}_\lambda$ , suivant que  $n_1 = 0$  ou  $n_1 = p$  une part de  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} \text{mon}_\lambda(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots) &= \sum_{(n_1, n_2, \dots)^+ = \lambda} \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \pi_3^{n_3} \dots \\ &= \sum_{\substack{(n_2, n_3, \dots)^+ = \lambda \\ n_1 = 0}} \pi_2^{n_2} \pi_3^{n_3} \dots + \sum_{\substack{p:\lambda \\ (n_2, n_3, \dots)^+ = \lambda \setminus p}} \pi_1^p \pi_2^{n_2} \pi_3^{n_3} \dots \\ &= \text{mon}_\lambda(\pi_2, \pi_3, \dots) + \sum_{p:\lambda} \pi_1^p \text{mon}_{\lambda \setminus p}(\pi_2, \pi_3, \dots). \end{aligned}$$

**Preuve du Théorème (3.33) :** Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned} \text{mon}_\lambda(\pi_2, \pi_3, \dots)|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}} &= \text{mon}_\lambda((1-q)q, (1-q)q^2, (1-q)q^3, \dots) \\ &= q^{|\lambda|} \text{mon}_\lambda(1-q, (1-q)q, (1-q)q^2, \dots) \\ &= q^{|\lambda|} \text{mon}_\lambda(\pi_1, \pi_2, \dots)|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}}, \end{aligned}$$

donc la formule du lemme (3.34) devient

$$\begin{aligned} \text{mon}_\lambda(\pi_1, \pi_2, \dots)|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}} &= q^{|\lambda|} \text{mon}_\lambda(\pi_1, \pi_2, \dots)|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}} \\ &\quad + \sum_{p:\lambda} (1-q)^p q^{|\lambda|-p} \text{mon}_{\lambda \setminus p}(\pi_1, \pi_2, \dots)|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(1-q^{|\lambda|}) \text{mon}_\lambda(\pi_1, \pi_2, \dots)|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}} = \sum_{p:\lambda} (1-q)^p q^{|\lambda|-p} \text{mon}_{\lambda \setminus p}(\pi_1, \pi_2, \dots)|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}}$$

$$\left. \text{mon}_\lambda(\pi_1, \pi_2, \dots) \right|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}} = \frac{1}{(1-q)^{|\lambda|}} \sum_{p:\lambda} (1-q)^p q^{|\lambda|-p} \left. \text{mon}_{\lambda \setminus p}(\pi_1, \pi_2, \dots) \right|_{\pi_k := (1-q)q^{k-1}}.$$

Or  $W_\lambda(q) = n_q^{\ell_q} \text{mon}_\lambda(1-q, (1-q)q, (1-q)q^2, \dots)$ , d'où

$$\begin{aligned} W_\lambda(q) &= n_q^{\ell_q} \frac{1}{(1-q)^{|\lambda|}} \sum_{p:\lambda} (1-q)^p q^{|\lambda|-p} \frac{W_{\lambda \setminus p}(q)}{(|\lambda|-p)!_q} \\ &= \frac{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^{|\lambda|})}{(1-q)^{|\lambda|} (1-q^{|\lambda|})} \sum_{p:\lambda} (1-q)^p q^{|\lambda|-p} \frac{(1-q)^{|\lambda|-p} W_{\lambda \setminus p}(q)}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^{|\lambda|-p})} \\ &= \sum_{p:\lambda} q^{|\lambda|-p} (1-q^{|\lambda|-p+1})(1-q^{|\lambda|-p+2}) \dots (1-q^{|\lambda|-1}) W_{\lambda \setminus p}(q). \end{aligned}$$

■

## CONCLUSION

Plusieurs directions d'explorations sont maintenant ouvertes. Nous en avons déjà mentionnée une explicitement à la remarque (3.24). Il s'agit de donner une bijection qui explique combinatoirement la formule (3.25). Celle-ci permettrait probablement une interprétation directe des coefficients du q-comptage  $|F[n]|_q$  d'une espèce  $F$  quelconque, pour  $n \geq 0$ . Dans la même ligne de pensée, nous proposons au lecteur d'examiner les tables qu'on trouve dans les annexes II et III. On peut y découvrir toutes sortes de belles relations et tenter de les généraliser. Par exemple, on y remarque que pour chaque  $n \geq 0$ ,

$$\sum_{\lambda \vdash n} W_\lambda(q) = 1,$$

ce qui n'est qu'une autre façon d'exprimer le fait que le q-comptage de l'espèce des ensembles est toujours égal à 1, comme nous l'avons souligné au corollaire (3.10).

Les coefficients entiers qui apparaissent dans les annexes II et III sont les  $c_n(\lambda; i)$  définis au théorème (3.29). Cette définition fait intervenir une somme de termes  $(-1)^{\ell(v)-\ell(\mu)}$  qui porte sur un ensemble très grand de couples de partages  $(\mu, v)$ . Il serait intéressant de trouver une involution qui réduit le nombre de termes à sommer. On devrait aussi explorer les liens possibles entre les  $c_n(\lambda; i)$  et le treillis des partitions.

Une autre direction consiste à analyser divers exemples particuliers. Ceux des

familles de polynômes orthogonaux que nous donnons au chapitre 2 sont tout désignés pour cela, puisqu'on y trouve la série indicatrice et qu'il ne reste plus, « en principe », qu'à calculer... Il peut s'avérer plus intéressant dans certains cas d'étudier la possibilité de récurrences pour le q-comptage de ces modèles combinatoires de polynômes orthogonaux. Deux méthodes classiques pour obtenir des récurrences peuvent être utilisées. La première consiste à exploiter le fait que la q-dérivée d'une q-série effectue une translation des coefficients et tenter d'obtenir une identité de la forme

$$D_q F_w(x; q) = C(x; q) F_w(x; q),$$

où  $C(x; q)$  est connue explicitement,

$$\sum_{n \geq 0} |F[n+1]|_q \frac{x^n}{n!_q} = \left( \sum_{i \geq 0} C_i(q) \frac{x^i}{i!_q} \right) \left( \sum_{j \geq 0} |F[j]|_q \frac{x^j}{j!_q} \right),$$

qui, lorsqu'on passe aux coefficients, donne une récurrence de la forme

$$|F[n+1]|_q = \sum_{i=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right]_q C_i(q) |F[n-i]|_q$$

pour  $n \geq 0$ . Par exemple [DH2] en choisissant pour  $F$  l'espèce  $H$  des « *configurations d'Hermite* » définie par l'équation

$$H = E(X_{t_1}) \cdot E(E_{2t_2})$$

on obtient

$$|H[n+1]|_q = t_1 |H[n]|_q + [n]_q t_2 |H[n-1]|_q + \dots + \left[ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right]_q C_i(q) |H[n-i]|_q + \dots$$

où

$$C_i(q) = \begin{cases} q^{i(i-2)/8} t_1 t_2^{i/2} \prod_{k=1}^{i/2} \left( 1 - q^{\frac{i}{2}+k} \right) & \text{si } i = 2n \\ -q^{(i-1)(i+1)/8} (-t_2)^{\frac{i+1}{2}} \prod_{k=1}^{(i-1)/2} \left( 1 - q^{\frac{i-1}{2}+k} \right) \frac{(1 - q^i)}{1 - q} & \text{si } i = 2n+1 \end{cases}$$

qui, lorsque  $q \rightarrow 1$ , redonne la récurrence classique à trois termes

$$H_{n+1}(t_1, t_2) = t_1 H_n(t_1, t_2) + n t_2 H_{n-1}(t_1, t_2)$$

et, lorsque  $q \rightarrow 0$ , donne la récurrence suivante pour le polynôme  $p_{t_1, t_2}(n)$  énumérateur des partages de  $n$  en parts de taille 1 ou 2 :

$$p_{t_1, t_2}(n+1) = t_1 p_{t_1, t_2}(n) + t_2 p_{t_1, t_2}(n-1) - t_1 t_2 p_{t_1, t_2}(n-2).$$

La deuxième méthode pour trouver des récurrences passe par la dérivée logarithmique (ordinaire)

$$\frac{d}{dx} \ln F_w(x; q) = \frac{\frac{d}{dx} F_w(x; q)}{F_w(x; q)}.$$

Lorsqu'on peut calculer explicitement cette dérivée logarithmique, l'identité

$$x \frac{d}{dx} F_w(x; q) = \left( x \frac{d}{dx} \ln F_w(x; q) \right) F_w(x; q)$$

peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{n \geq 1} n |F[n]|_q \frac{x^n}{n!_q} = \left( \sum_{i \geq 1} K_i(q) \frac{x^i}{i!_q} \right) \left( \sum_{j \geq 0} |F[j]| \frac{x^j}{j!_q} \right)$$

et donne une récurrence du type

$$n |F[n]|_q = \sum_{i=1}^n \left[ {}^n_i \right]_q K_i(q) |F[n-i]|_q.$$

Par exemple, en choisissant pour  $F$  l'espèce des permutations pondérées par l'indicateur de cycles,

$$S_\gamma = E \circ C_\gamma, \quad \text{où } \gamma(\sigma) = t_1^{\sigma_1} t_2^{\sigma_2} \dots,$$

on obtient [DH2]

$$n |S_\gamma[n]|_q = [n]_q t_1 |S_\gamma[n-1]|_q + \dots + \left[ \begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right]_q K_i(q) |S_\gamma[n-i]|_q + \dots$$

où

$$K_i(q) = \sum_{\substack{(\delta, m, n) \\ \delta \mid (m, n) \\ [m, n] \delta = i}} \phi\left(\frac{(m, n)}{\delta}\right) t_m^{i/m} \frac{i!_q (1-q)^i}{(1-q^n)^{i/n}}$$

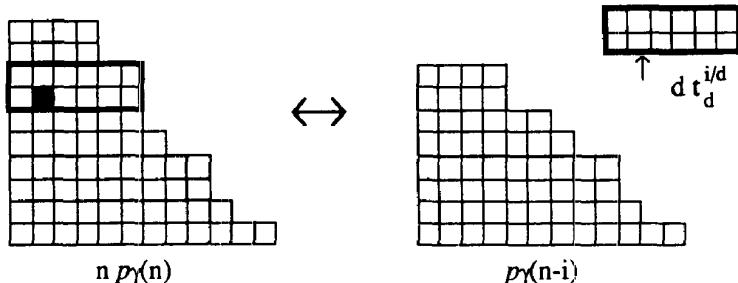
qui, lorsque  $q \rightarrow 1$ , donne l'identité

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} t_1^{\sigma_1} t_2^{\sigma_2} \dots = \sum_{k=1}^n (n-1)(n-2)\dots(n-k+1) t_k \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \dots$$

et, lorsque  $q \rightarrow 0$ , donne une récurrence pour les types de  $S_\gamma$ -structures, i.e. le polynôme  $p_\gamma(n)$  énumérateur des partages de  $n$  suivant le type du partage :

$$n p_\gamma(n) = t_1 p_\gamma(n-1) + \dots + \left( \sum_{d \mid i} d t_d^{i/d} \right) p_\gamma(n-i) + \dots$$

La lecture de cette dernière formule en fournit une preuve combinatoire, la bijection à utiliser est illustrée dans la figure suivante :



De plus, lorsqu'on spécialise les variables  $t_i$  on retrouve des récurrences connues pour le polynôme  $p_\tau(n)$  énumérateur des partages de  $n$  selon le nombre de parts,

$$n p_\tau(n) = \tau p_\tau(n-1) + \dots + \left( \sum_{d|n} d \tau^{\frac{i}{d}} \right) p_\tau(n-i) + \dots$$

et pour le nombre  $p(n)$  de partages de l'entier  $n$ ,

$$n p(n) = p(n-1) + \dots + \left( \sum_{d|n} d \right) p(n-i) + \dots$$

La bijection évoquée plus haut se transpose directement pour donner une preuve combinatoire de chacune de ces deux récurrences. La preuve qu'on obtient alors pour la deuxième de ces récurrences, aussi appelée récurrence d'Euler, s'avère être la même que celle qu'on trouve dans [NW] (après remaniement de celle-ci).

Nous terminons en mentionnant une nouvelle direction de recherche à explorer. Dans ses travaux sur le dénombrement des structures asymétriques, G. Labelle introduit [LG4], pour toute espèce  $F$ , une « *série indicatrice d'asymétrie* » notée  $\Gamma_F$ . Pour l'espèce  $E$  des ensembles, cette série est égale à

$$\Gamma_E(x_1, x_2, \dots) = e^{x_1 \cdot \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} \cdot \frac{x_4}{4} + \dots}$$

et on vérifie aisément qu'en effectuant la substitution de la q-énumération dans cette série, on trouve

$$\begin{aligned} \Gamma_E(x_1, x_2, \dots) \Big|_{\substack{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}}} &= (1 + (1-q)x)(1 + (1-q)xq)(1 + (1-q)xq^2)\dots \\ &= \sum_{n \geq 0} q^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{n!q^n} = E_q(x), \end{aligned}$$

l'autre q-analogue pour la fonction exponentielle que nous avons introduit au début du

chapitre 3. Qu'obtient-on lorsqu'on effectue cette substitution dans la série indicatrice d'asymétrie d'une espèce quelconque? Et alors, que signifie cette substitution?

## BIBLIOGRAPHIE

- [BC] C. Berge, *Principes de combinatoire*, Dunod, Paris, 1968.
- [BF1] F. Bergeron, *Modèles combinatoires de familles de polynômes orthogonaux: une approche unifiée*, European J. Combin. (à paraître).
- [BF2] F. Bergeron, *Une combinatoire du pléthysme*, J. of Combin. Theory, Series A, vol. 46, no. 2, 1987, pp. 291-305.
- [BL] C. Blais, *Espèces de structures et polynômes eulériens*, Mémoire de maîtrise, Dép. Math. et Info., UQAM, 1982.
- [BY] F. Bergeron et Y.N. Yeh, *The Factoriality of the Ring of S-species*, Rapport de recherche n°30, Dép. Math. et Info., UQAM, Montréal, 1987 (à paraître dans J. of Combin. Theory, Series A).
- [CT] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and Its Applications, vol. 13, Gordon and Breach, 1978.
- [DH1] H. Décoste, *Introduction to the Theory of Species*, Notes de cours, U. Concordia, Montréal, 1986.
- [DH2] H. Décoste, *Polynômes de Jacobi : espèce et série indicatrice*, conférence, Séminaire Lotharingien de combinatoire, Thurnau, RFA, mai 1989.
- [DLL] H. Décoste, G. Labelle, P . Leroux, *The Functorial Composition of Species, a Forgotten Operation*, Rapport de recherche n°91, Dép. Math. et Info., UQAM, Montréal, 1989 (à paraître dans Discrete Math).
- [FD1] D. Foata, *Combinatoire des identités sur les polynômes orthogonaux*, Internat. Congress Math. (Warshaw, Poland. 1983).
- [FD2] D. Foata, *Fonctions symétriques et applications combinatoires*, Notes de conférences, Séminaire de combinatoire, UQAM, automne 1981.
- [FL] D. Foata et J. Labelle, *Modèles combinatoires pour les polynômes de Meixner*, Europ. J. Combin., vol 4, 1983, pp. 305-311.

- [FP] D. Foata et P. Leroux, *Polynômes de Jacobi, interprétation combinatoire et fonction génératrice*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 87, 1983, pp. 47-53.
- [FS] D. Foata et V. Strehl, *Combinatorics of the Laguerre polynomials, Enumeration and Designs*, Proc. Waterloo Silver Jubilee, 1982, D.M. Jackson and S.A. Vanstone, ed., Academic Press, Toronto, 1984, pp. 123-140.
- [GJ] I. Goulden et D. Jackson, *Combinatorial Enumeration*, J. Wiley, New York, 1983.
- [HP] F. Harary et E. M. Palmer *Graphical Enumeration*, Academic Press, 1973.
- [JA1] A. Joyal, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Advances in Mathematics, vol. 42, no 1, 1981, pp. 1-82.
- [JA2] A. Joyal, *Foncteurs analytiques et espèces de structures*, *Combinatoire Énumérative, Proceedings, Montréal, Québec, 1985*, G. Labelle et P. Leroux, ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 1234, Springer-Verlag, 1986, pp. 126-159.
- [JA3] A. Joyal,  $\lambda$ -anneaux et combinatoire, Conférence, Séminaire de combinatoire de l'UQAM, mars 1982.
- [LG1] G. Labelle, *Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange*, Advances in Mathematics, vol. 42, no 3, 1981, pp. 217-247.
- [LG2] G. Labelle, *On Combinatorial Differential Equations*, J. of Math. Anal. and Appl., vol. 113, no 2, 1986, pp. 344-381.
- [LG3] G. Labelle, *The Cyclic Type of Combinatorial Species*, Conférence, 819<sup>th</sup> Meeting AMS, Worcester, 1985.
- [LG4] G. Labelle, *On Asymmetric Structures*, (à paraître dans Discrete Math), 1990.
- [LJ1] J. Labelle, *Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures*, Ann. Sc. Math. Québec, vol. 7, 1983, pp. 59-94.
- [LJ2] J. Labelle, *Quelques espèces sur les ensembles de petite cardinalité*, Ann. Sc. Math. Québec, vol. 9, no 1, 1985, pp. 31-58.
- [LJ3] J. Labelle, *Le tableau d'Askey, Polynômes orthogonaux et applications*, *Proceedings, Bar-le-Duc, 1984*, édité par C. Brézinski, A. Draux, A. P. Magnus, P. Maroni, et A. Ronveaux, Lecture Notes in Math. no. 1171, Springer-Verlag, pp. XXXVI et XXXVII.
- [LP] P. Leroux, *Methoden der Anzahlbestimmung für einige Klassen von Graphen*, Bayreuther Math. Schriften, Heft 26, 1988, pp. 1-36.

- [LS] P. Leroux et V. Strehl, *Jacobi polynomials: Combinatorics of the basic identities*, Discrete Mathematics, vol. 57, 1985, pp. 167-186.
- [LV] P. Leroux et X. Viennot, *Combinatorial resolution of systems of differential equations*, I : *Ordinary differential equations, Combinatoire Énumérative, Proceedings, Montréal, Québec, 1985*, G. Labelle et P. Leroux, ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 1234, Springer-Verlag, 1986, pp. 210-245.
- [LY1] J. Labelle et Y.N. Yeh, *The combinatorics of Laguerre, Charlier and Hermite Polynomials revisited*, Studies in Applied Mathematics, vol. 80, 1989, pp. 25-36.
- [LY2] J. Labelle et Y.N. Yeh, *Combinatorial proofs of some limit formulas involving orthogonal polynomials*, Discrete Mathematics, vol. 79, 1989-90, pp. 77-93.
- [LY3] J. Labelle et Y.N. Yeh, *Some combinatorics of the Hypergeometric series*, Europ. J. Combinatorics, vol. 9, 1988, pp. 593-605.
- [LY4] J. Labelle et Y.N. Yeh, *Combinatorial Proofs of Symmetry Formulas for the Generalized Hypergeometric Series*, J. of Math. Anal. and Appl., vol. 139, no. 1, avril 1989, pp. 36-48.
- [MI] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Clarendon Press, Oxford, 1979.
- [NW] A. Nijenhuis et H.S. Wilf, *Combinatorial Algorithms*, Academic Press, 1975.
- [PO] G. Pólya, *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen*, Acta Mathematica, vol. 68, 1937, pp. 145-254.
- [PR] G. Pólya et R.C. Read, *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs, and Chemical Compounds*, Springer Verlag 1987.
- [RC] C. Reutenauer, *Mots circulaires et polynômes irréductibles*, Annales des sciences mathématiques du Québec, vol. 12, no. 2, 1988, pp. 275-285.
- [SG] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, AMS Colloquium Publications, vol. 23, Providence, 1975 (4<sup>th</sup> ed.).
- [SR] R. Stanley, *Theory and Application of plane partitions I-II*, Studies in Appl. Math., vol. 50, 1971, pp. 167-188 et pp. 259-279.
- [SV] V. Strehl, Communication personnelle, Notes de cours, 1986.

- [SV1] V. Strehl, *Combinatorics of Jacobi-configurations I: Complete oriented matchings, Combinatoire Énumérative, Proceedings, Montréal, Québec, 1985*, G. Labelle et P. Leroux, ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 1234, Springer-Verlag, 1986, pp. 294-307.
- [SV2] V. Strehl, *Combinatorics of Jacobi-configurations II: A rational approximation via matching polynomials, Actes du Séminaire Lotharingien de Combinatoire XIII, Bologne, 1985*, G. Nicoletti, ed, Institut de recherche mathématique avancée, Strasbourg, pp. 113-134.
- [SV3] V. Strehl, *Combinatorics of Jacobi-configurations III: the Srivastava-Singal generating function revisited*, Discrete Math., vol. 73, 1988/89, pp. 221-232.
- [UW] W.R. Unger, *Combinatorial Species and Permutation Groups*, Mémoire de maîtrise, Dept. of Pure Math., U. of Sydney, 1987.
- [YY1] Y.N. Yeh, *On the Combinatorial Species of Joyal*, Ph.D. Thesis, State University of NY at Buffalo, 1985.
- [YY2] Y.N. Yeh, *The Calculus of Virtual Species and  $\mathbb{K}$ -species, Combinatoire Énumérative, Proceedings, Montréal, Québec, 1985*, G. Labelle et P. Leroux, ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 1234, Springer-Verlag, 1986, pp. 351-369.

## Annexe I

### LES POLYNÔMES $P_n(\lambda; q)$

$$P_n(\lambda; q) = \prod_{i=1}^n (1 - q^{d_i})^{1-d_i} = \frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}{\prod_{j=1}^v (1-q^{\lambda_j})}, \text{ pour } 0 \leq n \leq 10,$$

où  $\lambda \vdash n$ ,  $\lambda = 1^{d_1} 2^{d_2} \dots n^{d_n} = (\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_v)$ .

#### Session Maple, ordinateur Mipsmath.UQAM.CA

```
|\\^/|
-__|\\|_ /|/. University du Quebec a Montreal - Mathematiques
\ MAPLE / Version 4.3 --- Mar 1989
<____ _> For on-line help, type help();
|
> with(combinat);
Warning: new definition for combine
[bell, binomial, combinations, combine, fibonacci, kpartition, kpartitions,
multinomial, partition, partitions, permutations, permute, powerset,
randperm, stirling1, stirling2]

> read(Flambda);           #(voir annexe IV)
> for kk from 0 to 10 do
> calcule_les_Plambda(kk);
> od;
```

Plambda(q) pour [] :

$$1$$

-----

Plambda(q) pour [1] :

$$1$$

-----

Plambda(q) pour [1, 1] :

$$1 + q$$

Plambda(q) pour [2] :

$$1 - q$$

-----

Plambda(q) pour [1, 1, 1] :

$$1 + 2q + 2q^2 + q^3$$

Plambda(q) pour [1, 2] :

$$1 - q^3$$

Plambda(q) pour [3] :

$$1 - q^2 - q^3 + q^5$$

-----

Plambda(q) pour [1, 1, 1, 1] :

$$1 + 3q + 5q^2 + 6q^3 + 5q^4 + 3q^5 + q^6$$

Plambda(q) pour [1, 1, 2] :

$$1 + q^2 + q^4 - q^5 - q^6$$

Plambda(q) pour [1, 3] :

$$1 - q^2 - q^4 + q^6$$

Plambda(q) pour [2, 2] :

$$1 - q^2 + q^3 - 2q^4 + q^5 - q^6 + q^7$$

Plambda(q) pour [4] :

$$1 - q^2 - q^4 + q^5 + q^6 - q^7$$

-----

Plambda(q) pour [1, 1, 1, 1, 1] :

$$1 + 4q + 9q^2 + 15q^3 + 20q^4 + 22q^5 + 20q^6 + 15q^7 + 9q^8 + 4q^9 + q^{10}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 1, 2] :

$$1 + 2q^2 + 3q^3 + 3q^4 + 2q^6 - 2q^7 - 3q^8 - 3q^9 - 2q^{10} - q^{11}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 3]$  :

$$1 + q - q^4 - 2q^5 - q^6 + q^9 + q^{10}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 2, 2]$  :

$$1 + q^2 - q^3 - 2q^5 - q^7 + q^8 + q^{10}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 4]$  :

$$1 - q^2 - q^3 + q^7 + q^8 - q^{10}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[2, 3]$  :

$$1 - q^4 - q^6 + q^9 + q^{10} - q^{12}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[5]$  :

$$1 - q^2 - q^5 + 2q^8 - q^9 - q^{10} + q^{12}$$


---

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 1, 1, 1, 1]$  :

$$\begin{aligned} 1 + 5q + 14q^2 + 29q^3 + 49q^4 + 71q^5 + 90q^6 + 101q^7 + 101q^8 + 90q^9 \\ + 71q^{10} + 49q^{11} + 29q^{12} + 14q^{13} + 5q^{14} + q^{15} \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 1, 1, 2]$  :

$$\begin{aligned} 1 + 3q + 6q^2 + 9q^3 + 11q^4 + 11q^5 + 8q^6 + 3q^7 - 3q^8 - 8q^9 - 11q^{10} \\ - 11q^{11} - 9q^{12} - 6q^{13} - 3q^{14} - q^{15} \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 1, 3]$  :

$$\begin{aligned} 1 + 2q + 2q^2 + 2q^3 + q^4 - q^5 - 3q^6 - 4q^7 - 4q^8 - 3q^9 - q^{10} + q^{11} + 2q^{12} \\ + 2q^{13} + 2q^{14} + q^{15} \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 2, 2]$  :

$$\begin{aligned} 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4 - q^5 - 2q^6 - 3q^7 - 3q^8 - 2q^9 - q^{10} + q^{11} + q^{12} \\ + 2q^{13} + q^{14} + q^{15} \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 4]$  :

$$1 + q^3 - q^4 - q^5 - 2q^6 - q^7 + q^8 + 2q^9 + q^{10} + q^{11} + q^{12} - q^{14} - q^{15}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 2, 3]$  :

$$1 - q^4 - q^5 - q^6 + q^9 + q^{10} + q^{11} - q^{15}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 5]$  :

$$1 - q^2 - q^3 - q^4 + q^5 + q^7 + q^8 + q^{10} - q^{11} - q^{12} - q^{13} - q^{15}$$

Plambda(q) pour [2, 2, 2] :

$$1 - q + 2q^2 - 3q^3 + 3q^4 - 5q^5 + 4q^6 - 5q^7 + 5q^8 - 4q^9 + 5q^{10} - 3q^{11} \\ + 3q^{12} - 2q^{13} + q^{14} - q^{15}$$

Plambda(q) pour [2, 4] :

$$1 - q - q^3 + q^4 - q^5 + q^7 - q^8 + q^{10} + q^{11} - q^{12} - q^{14} + q^{15}$$

Plambda(q) pour [3, 3] :

$$1 - q - q^2 + 2q^3 - 2q^4 - q^5 + 3q^6 - q^7 - q^8 + 3q^9 - q^{10} - 2q^{11} + 2q^{12} \\ - q^{13} - q^{14} + q^{15}$$

Plambda(q) pour [6] :

$$1 - q - q^2 + q^5 + q^6 + q^7 - q^8 - q^9 - q^{10} + q^{13} + q^{14} - q^{15}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] :

$$1 + 6q + 20q^2 + 49q^3 + 98q^4 + 169q^5 + 259q^6 + 359q^7 + 455q^8 + 531q^9 \\ + 573q^{10} + 573q^{11} + 531q^{12} + 455q^{13} + 359q^{14} + 259q^{15} + 169q^{16} \\ + 98q^{17} + 49q^{18} + 20q^{19} + 6q^{20} + q^{21}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 1, 1, 1, 2] :

$$1 + 4q + 10q^2 + 19q^3 + 30q^4 + 41q^5 + 49q^6 + 51q^7 + 45q^8 + 31q^9 \\ + 11q^{10} - 11q^{11} - 31q^{12} - 45q^{13} - 51q^{14} - 49q^{15} - 41q^{16} - 30q^{17} \\ - 19q^{18} - 10q^{19} - 4q^{20} - q^{21}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 1, 1, 3] :

$$1 + 3q + 5q^2 + 7q^3 + 8q^4 + 7q^5 + 4q^6 - q^7 - 7q^8 - 12q^9 - 15q^{10} \\ - 15q^{11} - 12q^{12} - 7q^{13} - q^{14} + 4q^{15} + 7q^{16} + 8q^{17} + 7q^{18} + 5q^{19} \\ + 3q^{20} + q^{21}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 1, 2, 2] :

$$1 + 2q + 4q^2 + 5q^3 + 6q^4 + 5q^5 + 3q^6 - q^7 - 5q^8 - 9q^9 - 11q^{10} - 11q^{11} \\ - 9q^{12} - 5q^{13} - q^{14} + 3q^{15} + 5q^{16} + 6q^{17} + 5q^{18} + 4q^{19} + 2q^{20} \\ + q^{21}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 1, 4]$  :

$$\begin{aligned} 1 + 2q + 2q^2 + q^3 - q^5 - 3q^6 - 5q^7 - 5q^8 - 3q^9 - q^{10} + q^{11} + 3q^{12} \\ + 5q^{13} + 5q^{14} + 3q^{15} + q^{16} - q^{18} - 2q^{19} - 2q^{20} - q^{21} \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 2, 3]$  :

$$\begin{aligned} 1 + q + q^2 + q^3 - q^5 - 2q^6 - 3q^7 - 3q^8 - 2q^9 - q^{10} + q^{11} + 2q^{12} + 3q^{13} \\ + 3q^{14} + 2q^{15} + q^{16} - q^{18} - q^{19} - q^{20} - q^{21} \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 5]$  :

$$\begin{aligned} 1 + q - q^3 - 2q^4 - q^5 - q^6 - q^7 - q^9 + q + 3q^{10} + 3q^{11} + q^{12} - q^{14} - q^{15} - q^{16} \\ - 2q^{17} - q^{18} + q^{20} + q^{21} \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 2, 2, 2]$  :

$$\begin{aligned} 1 + 2q^2 - q^3 + 2q^4 - 3q^5 + q^6 - 5q^7 + q^8 - 5q^9 + 3q^{10} - 3q^{11} + 5q^{12} \\ - q^{13} + 5q^{14} - q^{15} + 3q^{16} - 2q^{17} + q^{18} - 2q^{19} - q^{21} \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 2, 4]$  :

$$\begin{aligned} 1 - q^3 - q^5 - q^6 - q^7 - q^8 + q^9 + q^{10} + q^{11} + q^{12} + q^{13} - q^{14} - q^{15} - q^{16} - q^{18} \\ + q^{21} \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 3, 3]$  :

$$\begin{aligned} 1 - q^2 + q^3 - q^4 - 2q^5 + q^6 - q^7 - q^8 + 3q^9 + 3q^{10} - q^{12} - q^{13} - q^{14} + q^{15} - 2q^{16} \\ - q^{17} + q^{18} - q^{19} + q^{21} \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 6]$  :

$$\begin{aligned} 1 - q^2 - q^3 - q^4 - q^6 - q^7 - q^8 + q^9 + q^{10} + q^{11} - q^{12} - q^{13} - q^{14} - q^{15} + q^{17} + q^{18} + q^{19} \\ - q^{21} \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[2, 2, 3]$  :

$$\begin{aligned} 1 - q^2 + q^3 - q^5 - q^7 - q^8 + q^{10} + q^{11} + q^{13} - q^{14} - q^{16} - q^{18} + q^{19} - q^{20} \\ + q^{21} \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[2, 5]$  :

$$\begin{aligned} 1 - q - q^3 + q^5 - q^6 - q^7 + q^9 + q^{10} + q^{11} - q^{12} - q^{14} + q^{15} - q^{16} + q^{18} + q^{20} \\ - q^{21} \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [3, 4] :

$$1 - q - q^2 + q^3 - q^5 + q^7 + q^8 - q^{10} + q^{11} - q^{13} - q^{14} + q^{16} - q^{18} + q^{19} + q^{20} \\ - q^{21}$$

Plambda(q) pour [7] :

$$1 - q - q^2 + q^3 + 2q^5 - q^7 - q^9 - q^{11} - q^{12} + 2q^{14} + q^{16} - q^{19} - q^{20} + q^{21}$$


---

Plambda(q) pour [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] :

$$1 + 7q + 27q^2 + 76q^3 + 174q^4 + 343q^5 + 602q^6 + 961q^7 + 1415q^8 + 1940q^9 \\ + 2493q^{10} + 3017q^{11} + 3450q^{12} + 3736q^{13} + 3836q^{14} + 3736q^{15} \\ + 3450q^{16} + 3017q^{17} + 2493q^{18} + 1940q^{19} + 1415q^{20} + 961q^{21} + 602q^{22} \\ + 343q^{23} + 174q^{24} + 76q^{25} + 27q^{26} + 7q^{27} + q^{28}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 1, 1, 1, 1, 2] :

$$1 + 5q + 15q^2 + 34q^3 + 64q^4 + 105q^5 + 154q^6 + 205q^7 + 249q^8 + 276q^9 \\ + 277q^{10} + 247q^{11} + 186q^{12} + 100q^{13} - 100q^{15} - 186q^{16} - 247q^{17} \\ - 277q^{18} - 276q^{19} - 249q^{20} - 205q^{21} - 154q^{22} - 105q^{23} - 64q^{24} \\ - 34q^{25} - 15q^{26} - 5q^{27} - q^{28}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 1, 1, 1, 3] :

$$1 + 4q + 9q^2 + 16q^3 + 24q^4 + 31q^5 + 35q^6 + 34q^7 + 26q^8 + 11q^9 - 9q^{10} \\ - 31q^{11} - 51q^{12} - 65q^{13} - 70q^{14} - 65q^{15} - 51q^{16} - 31q^{17} - 9q^{18} \\ + 11q^{19} + 26q^{20} + 34q^{21} + 35q^{22} + 31q^{23} + 24q^{24} + 16q^{25} + 9q^{26} \\ + 4q^{27} + q^{28}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 1, 1, 2, 2] :

$$1 + 3q + 7q^2 + 12q^3 + 18q^4 + 23q^5 + 26q^6 + 25q^7 + 19q^8 + 8q^9 - 7q^{10} \\ - 23q^{11} - 38q^{12} - 48q^{13} - 52q^{14} - 48q^{15} - 38q^{16} - 23q^{17} - 7q^{18} \\ + 8q^{19} + 19q^{20} + 25q^{21} + 26q^{22} + 23q^{23} + 18q^{24} + 12q^{25} + 7q^{26} \\ + 3q^{27} + q^{28}$$

```
Plambda(q) pour [1, 1, 1, 1, 4] :
```

$$\begin{aligned} 1 + 3 q + 5 q^2 + 6 q^3 + 6 q^4 + 5 q^5 + 5 q^6 + 2 q^7 - 3 q^8 - 9 q^9 - 14 q^{10} \\ - 17 q^{11} - 14 q^{12} - 8 q^{13} + 8 q^{14} + 14 q^{15} + 16 q^{16} + 17 q^{17} + 17 q^{18} + 14 q^{19} \\ + 9 q^{20} + 3 q^{21} - 2 q^{22} + 23 q^{23} - 5 q^{24} - 6 q^{25} - 6 q^{26} - 5 q^{27} - 3 q^{28} \end{aligned}$$

```
Plambda(q) pour [1, 1, 1, 2, 3] :
```

$$\begin{aligned} 1 + 2 q + 3 q^2 + 4 q^3 + 4 q^4 + 4 q^5 + 3 q^6 + q^7 - 2 q^8 - 6 q^9 - 9 q^{10} - 11 q^{11} \\ - 9 q^{12} - 5 q^{13} + 5 q^{14} + 9 q^{15} + 16 q^{16} + 11 q^{17} + 11 q^{18} + 9 q^{19} + 6 q^{20} + 2 q^{21} \\ - q^{22} - 3 q^{23} + 4 q^{24} - 4 q^{25} + 25 q^{26} - 3 q^{27} - 2 q^{28} - q \end{aligned}$$

```
Plambda(q) pour [1, 1, 1, 5] :
```

$$\begin{aligned} 1 + 2 q + 2 q^2 + q - q - 2 q^3 - 3 q^4 - 4 q^5 - 3 q^6 - 4 q^7 - 5 q^8 - 5 q^9 - 2 q^{10} + 2 q^{11} \\ + 5 q^{12} + 6 q^{13} + 6 q^{14} + 6 q^{15} + 6 q^{16} + 5 q^{17} + 2 q^{18} - 2 q^{19} - 5 q^{20} - 5 q^{21} \\ - 4 q^{22} - 3 q^{23} - 2 q^{24} - q + q + 2 q^{25} - 2 q^{26} + 2 q^{27} + 2 q^{28} \end{aligned}$$

```
Plambda(q) pour [1, 1, 2, 2, 2] :
```

$$\begin{aligned} 1 + q + 3 q^2 + 2 q^3 + 4 q^4 + 4 q^5 + q + 2 q^6 - 3 q^7 - 3 q^8 - 8 q^9 - 8 q^{10} - 7 q^{11} - 9 q^{12} \\ - 6 q^{13} - 4 q^{14} + 4 q^{15} + 6 q^{16} + 16 q^{17} + 17 q^{18} + 8 q^{19} + 8 q^{20} + 3 q^{21} + 3 q^{22} \\ - 2 q^{23} - q - 4 q^{24} - 2 q^{25} - 3 q^{26} - 27 q^{27} - 28 q^{28} \end{aligned}$$

```
Plambda(q) pour [1, 1, 2, 4] :
```

$$\begin{aligned} 1 + q + q^2 + 5 q^3 + 6 q^4 - 2 q^5 - 3 q^6 - 2 q^7 + 9 q^8 - 2 q^9 - q + q^{10} + q^{11} + 2 q^{12} + 4 q^{13} + 4 q^{14} \\ + 4 q^{15} + 2 q^{16} + q^{17} + 18 q^{18} - q - 2 q^{19} + 19 q^{20} - 3 q^{21} - 3 q^{22} - 2 q^{23} - q + q^{24} \\ + q + q^{25} + q^{26} + q^{27} + q^{28} \end{aligned}$$

```
Plambda(q) pour [1, 1, 3, 3] :
```

$$\begin{aligned} 1 + q + q^3 + 2 q^5 - q - 2 q^6 - q - 2 q^7 - 4 q^8 - q - q^9 + 3 q^{10} + 3 q^{11} + 3 q^{12} + 4 q^{13} + 2 q^{14} + 4 q^{15} \\ + 3 q^{16} - q - q - 4 q^{17} + 19 q^{18} - 2 q^{19} - 2 q^{20} + q^{21} - 22 q^{22} - 23 q^{23} + 25 q^{24} + 27 q^{25} + 28 q^{26} \\ + 3 q^{27} - 3 q^{28} \end{aligned}$$

```
Plambda(q) pour [1, 1, 6] :
```

$$\begin{aligned} 1 + q - q^3 - 2 q^4 - 2 q^5 - q - q + q + 2 q^6 - q + 2 q^7 - 4 q^8 - q - q^9 + 2 q^{10} + 3 q^{11} + 3 q^{12} + 2 q^{13} - 2 q^{14} \\ - 3 q^{15} - 3 q^{16} + 17 q^{17} - 2 q^{18} + 18 q^{19} - q + q^{20} + 22 q^{21} - 2 q^{22} + q^{23} + 23 q^{24} + 25 q^{25} + 27 q^{26} - q^{27} - q^{28} \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 2, 2, 3] :

$$\begin{aligned} & 2 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \\ & 1 + q - q - q - 2q - 2q - q - q + q + q + 3q + 2q + 3q \\ & + q + q - q - q - 2q - 2q - 2q - q - q + q + q \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 2, 5] :

$$\begin{aligned} & 3 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \\ & 1 - q - q - q - q + q + 2q + 2q + q - q - 2q - 2q - q \\ & + q + q + q + q - q \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 3, 4] :

$$\begin{aligned} & 2 \quad 5 \quad 6 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \\ & 1 - q - q - q + q + q + q + q - q - q - q - q - q \\ & + q + q + q - q \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 7] :

$$\begin{aligned} & 2 \quad 3 \quad 4 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 12 \quad 13 \quad 15 \quad 16 \quad 18 \quad 19 \\ & 1 - q - q - q + 2q + q + q + q - q - 2q - 2q - q + q + q \\ & + q + 2q - q - q - q + q \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [2, 2, 2, 2] :

$$\begin{aligned} & 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \\ & 1 - q + 3q - 4q + 6q - 9q + 10q - 15q + 15q - 20q + 21q \\ & - 23q + 26q - 24q + 28q - 24q + 26q - 23q + 21q \\ & - 20q + 15q - 15q + 10q - 9q + 6q - 4q + 25q - 3q - q \\ & + q \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [2, 2, 4] :

$$\begin{aligned} & 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \\ & 1 - q + q - 2q + 2q - 3q + 2q - 3q + 3q - 2q + 3q - q \\ & + 2q - 2q + 16q - q - 3q + 18q + 2q - 3q + 21q - 2q + 3q \\ & - 2q + 2q - q + q - q \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [2, 3, 3] :

$$\begin{aligned} & 3 \quad 4 \quad 6 \quad 7 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 15 \\ & 1 - q + q - 2q + q - 2q + 3q - 2q + q + 3q - 2q + 2q \\ & - 3q - q + 2q - 3q + 2q - q + 2q - 2q + q - q \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [2, 6] :

$$\begin{aligned} & 3 \quad 6 \quad 9 \quad 11 \quad 12 \quad 14 \quad 16 \quad 17 \quad 19 \quad 22 \quad 25 \quad 27 \\ & 1 - q - q + q + q + q - q - 2q - q + q + q + q - q - q \\ & + q \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour [3, 5] :

$$\begin{aligned} & 1 - q - q^2 + q^3 - q^4 + q^5 - q^7 + q^8 + q^9 + q^{10} - q^{11} - q^{12} - q^{16} - q^{17} + q^{18} \\ & + q^{19} + q^{20} - q^{21} + q^{23} - q^{24} + q^{25} - q^{26} - q^{27} + q^{28} \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour [4, 4] :

$$\begin{aligned} & 1 - q - q^2 + 2q^4 - q^5 - 2q^6 + q^7 + 3q^8 - 3q^{10} + q^{11} + 2q^{12} - 4q^{14} + 2q^{16} \\ & + q^{17} - 3q^{18} + 3q^{20} - q^{21} - 2q^{22} - q^{23} + 2q^{24} - q^{26} - q^{27} + q^{28} \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour [8] :

$$\begin{aligned} & 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 + q^8 - q^{10} - q^{11} - 2q^{12} + 2q^{16} + q^{17} + q^{18} - q^{20} - q^{21} \\ & - q^{23} + q^{26} + q^{27} - q^{28} \end{aligned}$$


---

$\text{Plambda}(q)$  pour [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] :

$$\begin{aligned} & 1 + 8q + 35q^2 + 111q^3 + 285q^4 + 628q^5 + 1230q^6 + 2191q^7 + 3606q^8 \\ & + 5545q^9 + 8031q^{10} + 11021q^{11} + 14395q^{12} + 17957q^{13} + 21450q^{14} \\ & + 24584q^{15} + 27073q^{16} + 28675q^{17} + 29228q^{18} + 28675q^{19} + 27073q^{20} \\ & + 24584q^{21} + 21450q^{22} + 17957q^{23} + 14395q^{24} + 11021q^{25} + 8031q^{26} \\ & + 5545q^{27} + 3606q^{28} + 2191q^{29} + 1230q^{30} + 628q^{31} + 285q^{32} + 111q^{33} \\ & + 35q^{34} + 8q^{35} + q^{36} \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2] :

$$\begin{aligned} & 1 + 6q + 21q^2 + 55q^3 + 119q^4 + 224q^5 + 378q^6 + 583q^7 + 832q^8 + 1107q^9 \\ & + 1379q^{10} + 1611q^{11} + 1763q^{12} + 1799q^{13} + 1694q^{14} + 1440q^{15} \\ & + 1049q^{16} + 553q^{17} - 553q^{19} - 1049q^{20} - 1440q^{21} - 1694q^{22} - 1799q^{23} \\ & - 1763q^{24} - 1611q^{25} - 1379q^{26} - 1107q^{27} - 832q^{28} - 583q^{29} - 378q^{30} \\ & - 224q^{31} - 119q^{32} - 55q^{33} - 21q^{34} - 6q^{35} - q^{36} \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour [1, 1, 1, 1, 1, 1, 3] :

$$\begin{aligned} & 1 + 5q + 14q^2 + 30q^3 + 54q^4 + 85q^5 + 120q^6 + 154q^7 + 180q^8 + 190q^9 \\ & + 177q^{10} + 137q^{11} + 70q^{12} - 19q^{13} - 120q^{14} - 220q^{15} - 305q^{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 362 q^{17} - 382 q^{18} - 362 q^{19} - 305 q^{20} - 220 q^{21} - 120 q^{22} - 19 q^{23} \\
 & + 70 q^{24} + 137 q^{25} + 177 q^{26} + 190 q^{27} + 180 q^{28} + 154 q^{29} + 120 q^{30} \\
 & + 85 q^{31} + 54 q^{32} + 30 q^{33} + 14 q^{34} + 5 q^{35} + q^{36}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 1, 1, 2, 2] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 4 q + 11 q^2 + 23 q^3 + 41 q^4 + 64 q^5 + 90 q^6 + 115 q^7 + 134 q^8 + 141 q^9 \\
 & + 131 q^{10} + 101 q^{11} + 51 q^{12} - 15 q^{13} - 90 q^{14} - 164 q^{15} - 227 q^{16} \\
 & - 269 q^{17} - 284 q^{18} - 269 q^{19} - 227 q^{20} - 164 q^{21} - 90 q^{22} - 15 q^{23} \\
 & + 51 q^{24} + 101 q^{25} + 131 q^{26} + 141 q^{27} + 134 q^{28} + 115 q^{29} + 90 q^{30} \\
 & + 64 q^{31} + 41 q^{32} + 23 q^{33} + 11 q^{34} + 4 q^{35} + q^{36}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 1, 1, 1, 4] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 4 q + 9 q^2 + 15 q^3 + 21 q^4 + 26 q^5 + 28 q^6 + 25 q^7 + 16 q^8 + q^9 - 19 q^{10} \\
 & - 41 q^{11} - 61 q^{12} - 75 q^{13} - 80 q^{14} - 74 q^{15} - 57 q^{16} - 31 q^{17} + 31 q^{19} \\
 & + 57 q^{20} + 74 q^{21} + 80 q^{22} + 75 q^{23} + 61 q^{24} + 41 q^{25} + 19 q^{26} - q^{27} \\
 & - 16 q^{28} - 25 q^{29} - 28 q^{30} - 26 q^{31} - 21 q^{32} - 15 q^{33} - 9 q^{34} - 4 q^{35} \\
 & - q^{36}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 1, 1, 2, 3] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 3 q + 6 q^2 + 10 q^3 + 14 q^4 + 17 q^5 + 18 q^6 + 16 q^7 + 10 q^8 - 13 q^9 \\
 & - 27 q^{11} - 40 q^{12} - 49 q^{13} - 52 q^{14} - 48 q^{15} - 37 q^{16} - 20 q^{17} + 20 q^{19} \\
 & + 37 q^{20} + 48 q^{21} + 52 q^{22} + 49 q^{23} + 40 q^{24} + 27 q^{25} + 13 q^{26} - 10 q^{28} \\
 & - 16 q^{29} - 18 q^{30} - 17 q^{31} - 14 q^{32} - 10 q^{33} - 6 q^{34} - 3 q^{35} - q^{36}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 1, 1, 5] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 3 q + 5 q^2 + 6 q^3 + 5 q^4 + 3 q^5 - 4 q^7 - 9 q^8 - 15 q^9 - 19 q^{10} - 19 q^{11} \\
 & - 15 q^{12} - 8 q^{13} + 9 q^{15} + 18 q^{16} + 25 q^{17} + 28 q^{18} + 25 q^{19} + 18 q^{20} \\
 & + 9 q^{21} - 8 q^{23} - 15 q^{24} - 19 q^{25} - 19 q^{26} - 15 q^{27} - 9 q^{28} - 4 q^{29} \\
 & + 3 q^{31} + 5 q^{32} + 6 q^{33} + 5 q^{34} + 3 q^{35} + q^{36}
 \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 1, 2, 2, 2]$  :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 2q + 5q^3 + 7q^4 + 11q^5 + 12q^6 + 14q^7 + 11q^8 + 8q^9 - q^{10} - 9q^{11} \\
 & - 21q^{12} - 29q^{13} - 37q^{14} - 38q^{15} - 36q^{16} - 27q^{17} - 15q^{18} + 15q^{19} \\
 & + 27q^{20} + 36q^{21} + 38q^{22} + 37q^{23} + 29q^{24} + 21q^{25} + 9q^{26} + q^{27} \\
 & - 8q^{28} - 11q^{29} - 14q^{30} - 12q^{31} - 11q^{32} - 7q^{33} - 5q^{34} - 2q^{35} - q^{36}
 \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 1, 2, 4]$  :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 2q + 3q^3 + 3q^4 + 3q^5 + 2q^7 - 3q^8 - 6q^9 - 9q^{10} - 11q^{11} - 11q^{12} \\
 & - 9q^{13} - 5q^{15} + 6q^{16} + 11q^{17} + 15q^{18} + 16q^{19} + 15q^{20} + 11q^{21} \\
 & + 6q^{22} - 5q^{23} - 9q^{24} - 11q^{25} - 11q^{26} - 9q^{27} - 6q^{28} - 3q^{29} + 2q^{31} \\
 & + 3q^{32} + 3q^{33} + 3q^{34} + 2q^{35} + q^{36}
 \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 1, 3, 3]$  :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 2q + 2q^3 + 3q^4 + 3q^5 + q^7 - 2q^8 - 6q^9 - 8q^{10} - 9q^{11} - 10q^{12} - 8q^{13} \\
 & - 4q^{15} + 5q^{16} + 10q^{17} + 13q^{18} + 14q^{19} + 13q^{20} + 10q^{21} + 5q^{22} \\
 & - 4q^{23} - 8q^{24} - 10q^{25} - 9q^{26} - 8q^{27} - 6q^{28} - 2q^{29} + q^{31} + 3q^{32} \\
 & + 3q^{33} + 2q^{34} + 2q^{35} + q^{36}
 \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 1, 6]$  :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 2q + 2q^3 + q^4 - q^5 - 3q^6 - 4q^7 - 4q^8 - 4q^9 - 4q^{10} - 3q^{11} + 4q^{12} \\
 & + 8q^{13} + 10q^{14} + 9q^{15} + 6q^{16} + 3q^{17} - 3q^{19} - 6q^{20} - 9q^{21} - 10q^{22} \\
 & - 8q^{23} - 4q^{24} + 3q^{26} + 4q^{27} + 4q^{28} + 4q^{29} + 4q^{30} + 3q^{31} + q^{32} \\
 & - q^{33} - 2q^{34} - 2q^{35} - q^{36}
 \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 2, 2, 3]$  :

$$\begin{aligned}
 & 1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5 - 2q^7 - 4q^8 - 6q^9 - 7q^{10} - 7q^{11} - 6q^{12} \\
 & - 3q^{13} + 4q^{15} + 7q^{16} + 10q^{17} + 10q^{18} + 10q^{19} + 7q^{20} + 4q^{21} - 3q^{23} \\
 & - 6q^{24} - 7q^{25} - 7q^{26} - 6q^{27} - 4q^{28} - 2q^{29} + q^{30} + 2q^{31} + 2q^{32} \\
 & + 2q^{34} + q^{35} + q^{36}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 2, 5] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + q + q - q - q - 2q - 2q - 3q - 3q - q + q + 3q + 4q \\
 & + 4q + 5q + 4q + 3q + 17q - 3q - 4q - 5q - 4q - 4q \\
 & - 3q - q + q + 3q + 3q + 2q + 2q + 2q + q + q - q \\
 & - q - q
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 3, 4] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + q - q - 2q - 2q - 2q - 2q - q + q + 2q + 3q + 4q \\
 & + 4q + 3q + 2q - 2q - 3q - 4q - 4q - 4q - 3q - 2q \\
 & - q + q + 2q + 2q + 2q + 2q + 2q + q - q - q \\
 & - q
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 7] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + q - q - 2q - 2q - 2q + q + q + 2q + 3q + 3q + 2q \\
 & + 2q - 3q - 4q - 4q - 4q - 3q + 2q + 2q + 2q + 3q \\
 & + 3q + 2q + q + q - 2q - 2q - 2q - q + q + q \\
 & - q
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 2, 2, 2, 2] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 3q - q + 5q - 4q - 6q - 9q + 6q - 15q + 7q - 19q \\
 & + 11q - 19q + 18q - 16q + 25q - 13q + 28q - 13q \\
 & + 25q - 16q + 18q - 19q + 11q - 19q + 7q - 15q \\
 & + 6q - 9q + 6q - 4q + 5q - q + 3q + q \\
 & + q
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 2, 2, 4] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + q - q + q - 2q - 3q - 3q + q - q + 3q + q + 4q + 2q \\
 & + 3q + q - q - 3q - 2q - 4q - q - 3q + q - q \\
 & + 3q + 3q + 2q - q + q - q - q
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 2, 3, 3] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + q - q - q - 2q - 2q - q + 2q + 2q + 2q + 3q + 2q \\
 & + q - q - 2q - 3q - 2q - 2q - 2q - 2q + q + 2q + 2q \\
 & + q + q - q - q
 \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 2, 6]$  :

$$\begin{aligned} & 3 \quad 4 \quad 5 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \\ 1 - q - q - q + q + 2q + 2q + 2q - q - 2q - q - 2q \\ & - q - 2q - q + 2q + 2q + 2q + 2q - q - q - q + q \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 3, 5]$  :

$$\begin{aligned} & 2 \quad 4 \quad 7 \quad 10 \quad 11 \quad 13 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 23 \quad 25 \\ 1 - q - q - q + 2q + 2q + q - 2q - 2q - 2q + q + 2q \\ & + 2q - q - q - q + q \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 4, 4]$  :

$$\begin{aligned} & 2 \quad 3 \quad 4 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \\ 1 - q - q + q - 2q - q + 2q + q - q + q + 3q + q - 2q \\ & + q - q - 4q - q + q - 2q + q + 3q + q - q + q \\ & + 2q - q - 2q + q - q - q + q \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 8]$  :

$$\begin{aligned} & 2 \quad 3 \quad 4 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \\ 1 - q - q - q + q + 2q + q + q + q - q - q - 2q - 2q - q \\ & - q + q + q + 2q + 2q + 2q + q + q - q - q - q - 2q \\ & - q + q + q + q - q \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[2, 2, 2, 3]$  :

$$\begin{aligned} & 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \\ 1 - q + 2q - 2q + 2q - 3q + 2q - 4q + 2q - 4q + 3q - 3q \\ & + 4q - q + 4q + 3q - 3q - 4q + q - 4q + 3q \\ & - 3q + 4q - 2q + 4q - 2q + 3q - 2q + 3q - 2q \\ & + q - q \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[2, 2, 5]$  :

$$\begin{aligned} & 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \\ 1 - q + q - 2q + q - q - q + q + q + q + q - 2q + q \\ & - 4q + q - 2q + q + q + q + q + q - q - q + q \\ & - 2q + q - q + q \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[2, 3, 4]$  :

$$\begin{aligned} & 5 \quad 10 \quad 11 \quad 13 \quad 16 \quad 18 \quad 20 \quad 23 \quad 25 \quad 26 \quad 31 \quad 35 \\ 1 - q - q + q + q + q - q - 2q - q + q + q + q - q - q \\ & + q \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [2, 7] :

$$1 - q - \frac{3}{q} + 2q - \frac{7}{q} - q + \frac{8}{q} + q + \frac{9}{q} + q - \frac{11}{q} - q - \frac{12}{q} - 2q - \frac{15}{q} - q + \frac{16}{q} + q + \frac{20}{q} + 2q + \frac{21}{q} + q - \frac{24}{q} - q - \frac{25}{q}$$

$$- q + \frac{27}{q} + q - 2q + \frac{28}{q} + q + \frac{29}{q} + q - \frac{33}{q} + q + \frac{35}{q} - q$$

Plambda(q) pour [3, 3, 3] :

$$1 - q - \frac{2}{q} + 3q - 3q - 2q + 6q - 5q - 3q + 10q - 6q - 4q - 11q$$

$$+ 13q - 7q - 6q + 14q - 8q - 8q + 14q - 8q - 8q - 8q$$

$$+ 14q - 6q - 7q + 13q - 4q - 6q + 10q - 3q - 5q - 29q$$

$$+ 6q - 2q - 3q + 3q - q - q + q$$

Plambda(q) pour [3, 6] :

$$1 - q - \frac{3}{q} + q - \frac{4}{q} + 2q - q - \frac{6}{q} + q + \frac{7}{q} - q + \frac{8}{q} + q + \frac{9}{q} + q - \frac{12}{q} - q - \frac{13}{q} - 2q + 2q - q + 22q + q - 23q$$

$$- q - 2q + \frac{24}{q} + q + \frac{27}{q} + q - 2q + \frac{28}{q} + q + \frac{29}{q} - q + \frac{30}{q} + q - q + \frac{32}{q} - q + \frac{33}{q} + q + \frac{34}{q} + q - \frac{35}{q} - q + \frac{36}{q}$$

Plambda(q) pour [4, 5] :

$$1 - q - \frac{2}{q} + q + q - 2q + q + q + q + q + q - q - q + q - q - q + q - q - q + q - q - q$$

$$+ q + 2q - q - q + q + q + q - q - q - q - q + 2q - q - q - q - q - q$$

$$+ q + q - q$$

Plambda(q) pour [9] :

$$1 - q - \frac{2}{q} + q + q - \frac{5}{q} + q + q - q - \frac{7}{q} + q + q - q - \frac{9}{q} + q + q - q - \frac{11}{q} - q - \frac{12}{q} - q - \frac{13}{q} - q - \frac{15}{q} + q + q + q - q - \frac{16}{q} - q - \frac{17}{q} - q + q - \frac{18}{q} + q + q - \frac{19}{q}$$

$$+ q + \frac{20}{q} - q - \frac{21}{q} - q - \frac{23}{q} - q - \frac{24}{q} - q - \frac{25}{q} + q + q + q + q + q - q - q - q + q - q + q$$

Plambda(q) pour [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] :

$$1 + 9q + 44q^2 + 155q^3 + 440q^4 + 1068q^5 + 2298q^6 + 4489q^7 + 8095q^8$$

$$+ 13640q^9 + 21670q^{10} + 32683q^{11} + 47043q^{12} + 64889q^{13} + 86054q^{14}$$

$$+ 110010q^{15} + 135853q^{16} + 162337q^{17} + 187959q^{18} + 211089q^{19}$$

$$+ 230131q^{20} + 243694q^{21} + 250749q^{22} + 250749q^{23} + 243694q^{24}$$

$$+ 230131q^{25} + 211089q^{26} + 187959q^{27} + 162337q^{28} + 135853q^{29}$$

$$+ 110010q^{30} + 86054q^{31} + 64889q^{32} + 47043q^{33} + 32683q^{34} + 21670q^{35}$$

$$+ 13640q^{36} + 8095q^{37} + 4489q^{38} + 2298q^{39} + 1068q^{40} + 440q^{41}$$

$$+ 155q^{42} + 44q^{43} + 9q^{44} + q^{45}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2]$  :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 7 q + 28 q^2 + 83 q^3 + 202 q^4 + 426 q^5 + 804 q^6 + 1387 q^7 + 2219 q^8 \\
 & + 3326 q^9 + 4704 q^{10} + 6309 q^{11} + 8051 q^{12} + 9795 q^{13} + 11370 q^{14} \\
 & + 12586 q^{15} + 13257 q^{16} + 13227 q^{17} + 12395 q^{18} + 10735 q^{19} + 8307 q^{20} \\
 & + 5256 q^{21} + 1799 q^{22} - 1799 q^{23} - 5256 q^{24} - 8307 q^{25} - 10735 q^{26} \\
 & - 12395 q^{27} + 13227 q^{28} - 13257 q^{29} - 12586 q^{30} - 11370 q^{31} - 9795 q^{32} \\
 & - 8051 q^{33} - 6309 q^{34} - 4704 q^{35} - 3326 q^{36} - 2219 q^{37} - 1387 q^{38} \\
 & - 804 q^{39} - 426 q^{40} - 202 q^{41} - 83 q^{42} - 28 q^{43} - 7 q^{44} - q^{45}
 \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3]$  :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 6 q + 20 q^2 + 50 q^3 + 104 q^4 + 189 q^5 + 309 q^6 + 463 q^7 + 643 q^8 + 833 q^9 \\
 & + 1009 q^{10} + 1141 q^{11} + 1197 q^{12} + 1148 q^{13} + 974 q^{14} + 669 q^{15} + 244 q^{16} \\
 & - 272 q^{17} - 834 q^{18} - 1386 q^{19} - 1868 q^{20} - 2225 q^{21} - 2415 q^{22} - 2415 q^{23} \\
 & - 2225 q^{24} - 1868 q^{25} - 1386 q^{26} - 834 q^{27} - 272 q^{28} + 244 q^{29} + 669 q^{30} \\
 & + 974 q^{31} + 1148 q^{32} + 1197 q^{33} + 1141 q^{34} + 1009 q^{35} + 833 q^{36} + 643 q^{37} \\
 & + 463 q^{38} + 309 q^{39} + 189 q^{40} + 104 q^{41} + 50 q^{42} + 20 q^{43} + 6 q^{44} + q^{45}
 \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2]$  :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 5 q + 16 q^2 + 39 q^3 + 80 q^4 + 144 q^5 + 234 q^6 + 349 q^7 + 483 q^8 + 624 q^9 \\
 & + 754 q^{10} + 851 q^{11} + 891 q^{12} + 853 q^{13} + 722 q^{14} + 494 q^{15} + 177 q^{16} \\
 & - 207 q^{17} - 625 q^{18} - 1035 q^{19} - 1393 q^{20} - 1658 q^{21} - 1799 q^{22} - 1799 q^{23} \\
 & - 1658 q^{24} - 1393 q^{25} - 1035 q^{26} - 625 q^{27} - 207 q^{28} + 177 q^{29} + 494 q^{30} \\
 & + 722 q^{31} + 853 q^{32} + 891 q^{33} + 851 q^{34} + 754 q^{35} + 624 q^{36} + 483 q^{37} \\
 & + 349 q^{38} + 234 q^{39} + 144 q^{40} + 80 q^{41} + 39 q^{42} + 16 q^{43} + 5 q^{44} + q^{45}
 \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 1, 1, 1, 1, 4]$  :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 5 q + 14 q^2 + 29 q^3 + 50 q^4 + 76 q^5 + 104 q^6 + 129 q^7 + 145 q^8 + 146 q^9 \\
 & + 126 q^{10} + 81 q^{11} + 11 q^{12} - 79 q^{13} - 180 q^{14} - 280 q^{15} - 365 q^{16} \\
 & - 421 q^{17} - 437 q^{18} - 407 q^{19} - 331 q^{20} - 216 q^{21} - 75 q^{22} + 75 q^{23} \\
 & + 216 q^{24} + 331 q^{25} + 407 q^{26} + 437 q^{27} + 421 q^{28} + 365 q^{29} + 280 q^{30} \\
 & + 180 q^{31} + 79 q^{32} - 11 q^{33} - 81 q^{34} - 126 q^{35} - 146 q^{36} - 145 q^{37} \\
 & - 129 q^{38} - 104 q^{39} - 76 q^{40} - 50 q^{41} - 29 q^{42} - 14 q^{43} - 5 q^{44} - q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 1, 1, 1, 2, 3] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 4 q + 10 q^2 + 20 q^3 + 34 q^4 + 51 q^5 + 69 q^6 + 85 q^7 + 95 q^8 + 95 q^9 \\
 & + 81 q^{10} + 51 q^{11} + 5 q^{12} - 54 q^{13} - 120 q^{14} - 185 q^{15} - 240 q^{16} - 276 q^{17} \\
 & - 286 q^{18} - 266 q^{19} - 216 q^{20} - 141 q^{21} - 49 q^{22} + 49 q^{23} + 141 q^{24} \\
 & + 216 q^{25} + 266 q^{26} + 286 q^{27} + 276 q^{28} + 240 q^{29} + 185 q^{30} + 120 q^{31} \\
 & + 54 q^{32} - 5 q^{33} - 51 q^{34} - 81 q^{35} - 95 q^{36} - 95 q^{37} - 85 q^{38} - 69 q^{39} \\
 & - 51 q^{40} - 34 q^{41} - 20 q^{42} - 10 q^{43} - 4 q^{44} - q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 1, 1, 1, 1, 5] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 4 q + 9 q^2 + 15 q^3 + 20 q^4 + 23 q^5 + 23 q^6 + 19 q^7 + 10 q^8 - 5 q^9 - 25 q^{10} \\
 & - 47 q^{11} - 67 q^{12} - 81 q^{13} - 86 q^{14} - 80 q^{15} - 62 q^{16} - 33 q^{17} + 4 q^{18} \\
 & + 44 q^{19} + 81 q^{20} + 109 q^{21} + 124 q^{22} + 124 q^{23} + 109 q^{24} + 81 q^{25} \\
 & + 44 q^{26} + 4 q^{27} - 33 q^{28} - 62 q^{29} - 80 q^{30} - 86 q^{31} - 81 q^{32} - 67 q^{33} \\
 & - 47 q^{34} - 25 q^{35} - 5 q^{36} + 10 q^{37} + 19 q^{38} + 23 q^{39} + 23 q^{40} + 20 q^{41} \\
 & + 15 q^{42} + 9 q^{43} + 4 q^{44} + q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 1, 1, 2, 2, 2] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 3 q + 8 q^2 + 15 q^3 + 26 q^4 + 38 q^5 + 52 q^6 + 63 q^7 + 71 q^8 + 70 q^9 + 60 q^{10} \\
 & + 37 q^{11} + 3 q^{12} - 41 q^{13} - 90 q^{14} - 138 q^{15} - 179 q^{16} - 205 q^{17} - 213 q^{18} \\
 & - 197 q^{19} - 161 q^{20} - 104 q^{21} - 37 q^{22} + 37 q^{23} + 104 q^{24} + 161 q^{25} \\
 & + 197 q^{26} + 213 q^{27} + 205 q^{28} + 179 q^{29} + 138 q^{30} + 90 q^{31} + 41 q^{32} \\
 & - 3 q^{33} - 37 q^{34} - 60 q^{35} - 70 q^{36} - 71 q^{37} - 63 q^{38} - 52 q^{39} - 38 q^{40} \\
 & - 26 q^{41} - 15 q^{42} - 8 q^{43} - 3 q^{44} - q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 1, 1, 2, 2, 4] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 3 q + 6 q^2 + 9 q^3 + 12 q^4 + 14 q^5 + 14 q^6 + 11 q^7 + 5 q^8 - 4 q^9 - 16 q^{10} \\
 & - 29 q^{11} - 41 q^{12} - 49 q^{13} - 52 q^{14} - 48 q^{15} - 37 q^{16} - 19 q^{17} + 3 q^{18} \\
 & + 27 q^{19} + 49 q^{20} + 66 q^{21} + 75 q^{22} + 75 q^{23} + 66 q^{24} + 49 q^{25} + 27 q^{26} \\
 & + 3 q^{27} - 19 q^{28} - 37 q^{29} - 48 q^{30} - 52 q^{31} - 49 q^{32} - 41 q^{33} - 29 q^{34} \\
 & - 16 q^{35} - 4 q^{36} + 5 q^{37} + 11 q^{38} + 14 q^{39} + 14 q^{40} + 12 q^{41} + 9 q^{42} \\
 & + 6 q^{43} + 3 q^{44} + q^{45}
 \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 1, 1, 3, 3]$  :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 3 q + 5 q^2 + 8 q^3 + 11 q^4 + 12 q^5 + 12 q^6 + 10 q^7 + 4 q^8 - 4 q^9 - 14 q^{10} \\
 & - 26 q^{11} - 36 q^{12} - 43 q^{13} - 46 q^{14} - 42 q^{15} - 32 q^{16} - 17 q^{17} + 3 q^{18} \\
 & + 24 q^{19} + 43 q^{20} + 58 q^{21} + 66 q^{22} + 66 q^{23} + 58 q^{24} + 43 q^{25} + 24 q^{26} \\
 & + 3 q^{27} - 17 q^{28} - 32 q^{29} - 42 q^{30} - 46 q^{31} - 43 q^{32} - 36 q^{33} - 26 q^{34} \\
 & - 14 q^{35} - 4 q^{36} + 4 q^{37} + 10 q^{38} + 12 q^{39} + 12 q^{40} + 11 q^{41} + 8 q^{42} \\
 & + 5 q^{43} + 3 q^{44} + q^{45}
 \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 1, 1, 1, 6]$  :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 3 q + 5 q^2 + 6 q^3 + 5 q^4 + 2 q^5 - 2 q^6 - 6 q^7 - 10 q^8 - 14 q^9 - 18 q^{10} \\
 & - 20 q^{11} - 18 q^{12} - 11 q^{13} + 12 q^{15} + 22 q^{16} + 29 q^{17} + 33 q^{18} + 34 q^{19} \\
 & + 31 q^{20} + 22 q^{21} + 8 q^{22} - 8 q^{23} - 22 q^{24} - 31 q^{25} - 34 q^{26} - 33 q^{27} \\
 & - 29 q^{28} - 22 q^{29} - 12 q^{30} + 11 q^{32} + 18 q^{33} + 20 q^{34} + 18 q^{35} + 14 q^{36} \\
 & + 10 q^{37} + 6 q^{38} + 2 q^{39} - 2 q^{40} - 5 q^{41} - 6 q^{42} - 5 q^{43} - 3 q^{44} - q^{45}
 \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 1, 2, 2, 3]$  :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 2 q + 4 q^2 + 6 q^3 + 8 q^4 + 9 q^5 + 9 q^6 + 7 q^7 + 3 q^8 - 3 q^9 - 11 q^{10} \\
 & - 19 q^{11} - 27 q^{12} - 32 q^{13} - 34 q^{14} - 31 q^{15} - 24 q^{16} - 12 q^{17} + 2 q^{18} \\
 & + 18 q^{19} + 32 q^{20} + 43 q^{21} + 49 q^{22} + 49 q^{23} + 43 q^{24} + 32 q^{25} + 18 q^{26} \\
 & + 2 q^{27} - 12 q^{28} - 24 q^{29} - 31 q^{30} - 34 q^{31} - 32 q^{32} - 27 q^{33} - 19 q^{34} \\
 & - 11 q^{35} - 3 q^{36} + 3 q^{37} + 7 q^{38} + 9 q^{39} + 9 q^{40} + 8 q^{41} + 6 q^{42} + 4 q^{43} \\
 & + 2 q^{44} + q^{45}
 \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 1, 2, 5]$  :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 2 q + 3 q^2 + 3 q^3 + 2 q^4 + q^5 - q^6 - 3 q^7 - 6 q^8 - 9 q^9 - 11 q^{10} - 11 q^{11} \\
 & - 9 q^{12} - 5 q^{13} + 6 q^{15} + 12 q^{16} + 17 q^{17} + 20 q^{18} + 20 q^{19} + 17 q^{20} \\
 & + 11 q^{21} + 4 q^{22} - 4 q^{23} - 11 q^{24} - 17 q^{25} - 20 q^{26} - 20 q^{27} - 17 q^{28} \\
 & - 12 q^{29} - 6 q^{30} + 5 q^{32} + 9 q^{33} + 11 q^{34} + 11 q^{35} + 9 q^{36} + 6 q^{37} + 3 q^{38} \\
 & + q^{39} - q^{40} - 2 q^{41} - 3 q^{42} - 3 q^{43} - 2 q^{44} - q^{45}
 \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour  $[1, 1, 1, 3, 4]$  :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 2 q + 2 q^2 + 2 q^3 + 2 q^4 + q^5 - q^6 - 3 q^7 - 5 q^8 - 7 q^9 - 9 q^{10} - 9 q^{11} \\
 & - 7 q^{12} - 4 q^{13} + 5 q^{15} + 10 q^{16} + 14 q^{17} + 16 q^{18} + 16 q^{19} + 14 q^{20} \\
 & + 9 q^{21} + 3 q^{22} - 3 q^{23} - 9 q^{24} - 14 q^{25} - 16 q^{26} - 16 q^{27} - 14 q^{28} \\
 & - 10 q^{29} - 5 q^{30} + 4 q^{32} + 7 q^{33} + 9 q^{34} + 9 q^{35} + 7 q^{36} + 5 q^{37} + 3 q^{38} \\
 & + q^{39} - q^{40} - 2 q^{41} - 2 q^{42} - 2 q^{43} - 2 q^{44} - q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 1, 7] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 2 q + 2 q^2 + q^3 - q^4 - 3 q^5 - 5 q^6 - 5 q^7 - 4 q^8 - 3 q^9 - 2 q^{10} + 3 q^{12} \\
 & + 6 q^{13} + 10 q^{14} + 12 q^{15} + 11 q^{16} + 7 q^{17} + 2 q^{18} - 3 q^{19} - 8 q^{20} \\
 & - 11 q^{21} - 12 q^{22} - 12 q^{23} - 11 q^{24} - 8 q^{25} - 3 q^{26} + 2 q^{27} + 7 q^{28} \\
 & + 11 q^{29} + 12 q^{30} + 10 q^{31} + 6 q^{32} + 3 q^{33} - 2 q^{35} - 3 q^{36} - 4 q^{37} - 5 q^{38} \\
 & - 5 q^{39} - 3 q^{40} - q^{41} + q^{42} + 2 q^{43} + 2 q^{44} + q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 2, 2, 2, 2] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + q + 4 q^2 + 3 q^3 + 8 q^4 + 4 q^5 + 10 q^6 + q^7 + 7 q^8 - 8 q^9 - 2 q^{10} - 21 q^{11} \\
 & - 13 q^{12} - 31 q^{13} - 18 q^{14} - 30 q^{15} - 11 q^{16} - 15 q^{17} + 7 q^{18} + 9 q^{19} \\
 & + 27 q^{20} + 30 q^{21} + 37 q^{22} + 37 q^{23} + 30 q^{24} + 27 q^{25} + 9 q^{26} + 7 q^{27} \\
 & - 15 q^{28} - 11 q^{29} - 30 q^{30} - 18 q^{31} - 31 q^{32} - 13 q^{33} - 21 q^{34} - 2 q^{35} \\
 & - 8 q^{36} + 7 q^{37} + q^{38} + 10 q^{39} + 4 q^{40} + 8 q^{41} + 3 q^{42} + 4 q^{43} + q^{44} + q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 2, 2, 4] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + q + 2 q^2 + q^3 + 2 q^4 - 3 q^7 - 3 q^8 - 6 q^9 - 6 q^{10} - 7 q^{11} - 5 q^{12} - 3 q^{13} \\
 & + 4 q^{15} + 7 q^{16} + 11 q^{17} + 11 q^{18} + 13 q^{19} + 9 q^{20} + 8 q^{21} + q^{22} - q^{23} \\
 & - 8 q^{24} - 9 q^{25} - 13 q^{26} - 11 q^{27} - 11 q^{28} - 7 q^{29} - 4 q^{30} + 3 q^{32} + 5 q^{33} \\
 & + 7 q^{34} + 6 q^{35} + 6 q^{36} + 3 q^{37} + 3 q^{38} - 2 q^{41} - q^{42} - 2 q^{43} - q^{44} - q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 2, 3, 3] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + q + q^2 + 2 q^3 + q^4 - 2 q^7 - 4 q^8 - 4 q^9 - 6 q^{10} - 6 q^{11} - 4 q^{12} - 3 q^{13} \\
 & + 4 q^{15} + 6 q^{16} + 9 q^{17} + 11 q^{18} + 10 q^{19} + 9 q^{20} + 6 q^{21} + 2 q^{22} - 2 q^{23} \\
 & - 6 q^{24} - 9 q^{25} - 10 q^{26} - 11 q^{27} - 9 q^{28} - 6 q^{29} - 4 q^{30} + 3 q^{32} + 4 q^{33} \\
 & + 6 q^{34} + 6 q^{35} + 4 q^{36} + 4 q^{37} + 2 q^{38} - q^{41} - 2 q^{42} - q^{43} - q^{44} - q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 2, 6] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + q + q^2 - q^4 - 2 q^5 - 2 q^6 - 2 q^7 - 2 q^8 - 2 q^9 - 2 q^{10} + 2 q^{12} + 5 q^{13} \\
 & + 6 q^{14} + 6 q^{15} + 4 q^{16} + 3 q^{17} + q^{18} - 3 q^{20} - 6 q^{21} - 8 q^{22} - 8 q^{23} \\
 & - 6 q^{24} - 3 q^{25} + q^{27} + 3 q^{28} + 4 q^{29} + 6 q^{30} + 6 q^{31} + 5 q^{32} + 2 q^{33} \\
 & - 2 q^{35} - 2 q^{36} - 2 q^{37} - 2 q^{38} - 2 q^{39} - 2 q^{40} - q^{41} + q^{43} + q^{44} + q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 1, 3, 5] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + q - q^4 - q^5 - 2 q^6 - 2 q^7 - 2 q^8 - 2 q^9 - q^{10} + q^{11} + 2 q^{12} + 3 q^{13} + 4 q^{14} \\
 & + 4 q^{15} + 4 q^{16} + 3 q^{17} + q^{18} - q^{19} - 3 q^{20} - 5 q^{21} - 5 q^{22} - 5 q^{23} \\
 & - 5 q^{24} - 3 q^{25} - q^{26} + q^{27} + 3 q^{28} + 4 q^{29} + 4 q^{30} + 4 q^{31} + 3 q^{32} \\
 & + 2 q^{33} + q^{34} - q^{35} - 2 q^{36} - 2 q^{37} - 2 q^{38} - q^{39} - q^{40} - q^{41} + q^{44} + q^{45}
 \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour [1, 1, 4, 4] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + q - q^3 - 2q^6 - 3q^7 - q^8 - 2q^{10} - q^{11} + 3q^{12} + 5q^{13} + 2q^{14} + 2q^{15} \\
 & + 5q^{16} + 5q^{17} - q^{18} - 3q^{19} - q^{20} - 2q^{21} - 7q^{22} - 7q^{23} - 2q^{24} - q^{25} \\
 & - 3q^{26} - q^{27} + 5q^{28} + 5q^{29} + 2q^{30} + 2q^{31} + 5q^{32} + 3q^{33} - q^{34} \\
 & - 2q^{35} - q^{37} - 3q^{38} - 2q^{39} - q^{42} + q^{44} + q^{45}
 \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour [1, 1, 8] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + q - q^3 - 2q^4 - 2q^5 - 2q^6 - q^7 + q^8 + 2q^9 + 2q^{10} + 3q^{11} + 3q^{12} \\
 & + 3q^{13} + 2q^{14} - q^{16} - 3q^{17} - 5q^{18} - 5q^{19} - 5q^{20} - 4q^{21} - q^{22} + q^{23} \\
 & + 4q^{24} + 5q^{25} + 5q^{26} + 5q^{27} + 3q^{28} + q^{29} - 2q^{31} - 3q^{32} - 3q^{33} \\
 & - 3q^{34} - 2q^{35} - 2q^{36} - q^{37} + q^{38} + 2q^{39} + 2q^{40} + 2q^{41} + q^{42} - q^{44} \\
 & - q^{45}
 \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour [1, 2, 2, 2, 3] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + 2q^2 + 2q^4 - q^5 + q^6 - 3q^7 - q^8 - 5q^9 - 3q^{10} - 5q^{11} - 3q^{12} - 2q^{13} \\
 & + 3q^{15} + 4q^{16} + 8q^{17} + 6q^{18} + 10q^{19} + 4q^{20} + 7q^{21} - q^{22} + q^{23} \\
 & - 7q^{24} - 4q^{25} - 10q^{26} - 6q^{27} - 8q^{28} - 4q^{29} - 3q^{30} + 2q^{32} + 3q^{33} \\
 & + 5q^{34} + 3q^{35} + 5q^{36} + q^{37} + 3q^{38} - q^{39} + q^{40} - 2q^{41} - 2q^{43} - q^{45}
 \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour [1, 2, 2, 5] :

$$\begin{aligned}
 & 1 + q^2 - q^3 - q^5 - q^6 - q^7 - 2q^8 - q^9 - q^{10} - q^{11} + q^{12} + 3q^{13} + 2q^{14} \\
 & + 4q^{15} + 2q^{16} + 3q^{17} - 3q^{20} - 3q^{21} - 4q^{22} - 4q^{23} - 3q^{24} - 3q^{25} \\
 & + 3q^{28} + 2q^{29} + 4q^{30} + 2q^{31} + 3q^{32} + q^{33} + q^{34} - q^{35} - q^{36} - q^{37} \\
 & - q^{38} - q^{39} - q^{40} - q^{42} + q^{43} + q^{45}
 \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour [1, 2, 3, 4] :

$$\begin{aligned}
 & 1 - q^5 - q^6 - q^7 - q^8 - q^9 - q^{10} + q^{11} + q^{12} + 2q^{13} + 2q^{14} + 3q^{15} + 2q^{16} \\
 & + 2q^{17} - 2q^{20} - 3q^{21} - 3q^{22} - 3q^{23} - 3q^{24} - 2q^{25} + 2q^{28} + 2q^{29} \\
 & + 3q^{30} + 2q^{31} + 2q^{32} + q^{33} + q^{34} - q^{35} - q^{36} - q^{37} - q^{38} - q^{39} - q^{40} \\
 & + q^{45}
 \end{aligned}$$

$\text{Plambda}(q)$  pour [1, 2, 7] :

$$\begin{aligned}
 & 1 - q^3 - q^4 - q^5 - q^6 + q^7 + q^9 + 2q^{11} + q^{12} + 2q^{13} + 2q^{14} - q^{16} - 3q^{17} \\
 & - 2q^{18} - 3q^{19} - 2q^{20} - q^{21} + q^{24} + 2q^{25} + 3q^{26} + 2q^{27} + 3q^{28} + q^{29} \\
 & - 2q^{31} - 2q^{32} - q^{33} - 2q^{34} - q^{36} - q^{38} + q^{39} + q^{40} + q^{41} + q^{42} - q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 3, 3, 3] :

$$\begin{aligned}
 1 - q^2 + 2q^3 - q^4 - 3q^5 + 3q^6 - 2q^7 - 5q^8 + 5q^9 - 2q^{10} - 5q^{11} + 9q^{12} \\
 - q^{13} - 4q^{14} + 12q^{15} - 2q^{16} - 5q^{17} + 12q^{18} - 6q^{19} - 8q^{20} + 10q^{21} \\
 - 9q^{22} - 9q^{23} + 10q^{24} - 8q^{25} - 6q^{26} + 12q^{27} - 5q^{28} - 2q^{29} + 12q^{30} \\
 - 4q^{31} - q^{32} + 9q^{33} - 5q^{34} - 2q^{35} + 5q^{36} - 5q^{37} - 2q^{38} + 3q^{39} \\
 - 3q^{40} - q^{41} + 2q^{42} - q^{43} + q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 3, 6] :

$$\begin{aligned}
 1 - q^2 - q^4 - q^5 + q^6 - q^8 + q^9 + q^{11} + 3q^{12} + q^{13} - 2q^{16} - q^{17} - 2q^{19} \\
 - 2q^{20} - 2q^{21} - q^{22} + q^{23} + 2q^{24} + 2q^{25} + 2q^{26} + q^{28} + 2q^{29} - q^{32} \\
 - 3q^{33} - q^{34} - q^{36} + q^{37} - q^{39} + q^{40} + q^{41} + q^{43} - q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 4, 5] :

$$\begin{aligned}
 1 - q^2 - q^3 + q^5 - q^6 - q^7 + q^9 + q^{10} + q^{11} + q^{12} + q^{13} - q^{17} - 2q^{18} - 2q^{19} \\
 - q^{20} - q^{21} + q^{24} + q^{25} + 2q^{26} + 2q^{27} + q^{28} - q^{32} - q^{33} - q^{34} - q^{35} \\
 - q^{36} + q^{38} - q^{39} + q^{40} + q^{42} + q^{43} - q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [1, 9] :

$$\begin{aligned}
 1 - q^2 - q^3 - q^4 + q^7 + q^8 + 2q^9 + q^{10} + q^{11} - q^{13} - q^{14} - 3q^{15} - 2q^{16} \\
 - 2q^{17} + q^{20} + q^{21} + 3q^{22} + 3q^{23} + q^{24} + q^{25} - 2q^{28} - 2q^{29} - 3q^{30} \\
 - q^{31} - q^{32} + q^{34} + q^{35} + 2q^{36} + q^{37} + q^{38} - q^{41} - q^{42} - q^{43} + q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [2, 2, 2, 2, 2] :

$$\begin{aligned}
 1 - q + 4q^2 - 5q^3 + 10q^4 - 14q^5 + 20q^6 - 29q^7 + 35q^8 - 50q^9 + 56q^{10} \\
 - 75q^{11} + 83q^{12} - 101q^{13} + 114q^{14} - 126q^{15} + 145q^{16} - 149q^{17} \\
 + 171q^{18} - 169q^{19} + 187q^{20} - 184q^{21} + 191q^{22} - 191q^{23} + 184q^{24} \\
 - 187q^{25} + 169q^{26} - 171q^{27} + 149q^{28} - 145q^{29} + 126q^{30} - 114q^{31} \\
 + 101q^{32} - 83q^{33} + 75q^{34} - 56q^{35} + 50q^{36} - 35q^{37} + 29q^{38} - 20q^{39} \\
 + 14q^{40} - 10q^{41} + 5q^{42} - 4q^{43} + q^{44} - q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [2, 2, 2, 4] :

$$\begin{aligned}
 1 - q + 2q^2 - 3q^3 + 4q^4 - 6q^5 + 6q^6 - 9q^7 + 9q^8 - 12q^9 + 12q^{10} \\
 - 13q^{11} + 15q^{12} - 13q^{13} + 16q^{14} - 12q^{15} + 15q^{16} - 11q^{17} + 11q^{18} \\
 - 9q^{19} + 5q^{20} - 6q^{21} - q^{22} - q^{23} - 6q^{24} + 5q^{25} - 9q^{26} + 11q^{27} \\
 - 11q^{28} + 15q^{29} - 12q^{30} + 16q^{31} - 13q^{32} + 15q^{33} - 13q^{34} + 12q^{35} \\
 - 12q^{36} + 9q^{37} - 9q^{38} + 6q^{39} - 6q^{40} + 4q^{41} - 3q^{42} + 2q^{43} - q^{44} \\
 + q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [2, 2, 3, 3] :

$$\begin{aligned}
 & 1 - q + q^2 - q^4 - 2q^5 - 2q^{10} + 2q^{11} + q^{13} + 2q^{14} + 2q^{15} + 3q^{17} - q^{18} \\
 & - q^{20} - 2q^{21} - 2q^{22} - 2q^{23} - 2q^{24} - q^{25} - q^{27} + 3q^{28} + 2q^{30} + 2q^{31} \\
 & + q^{32} + 2q^{34} - 2q^{35} - 2q^{38} - q^{41} + q^{43} - q^{44} + q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [2, 2, 6] :

$$\begin{aligned}
 & 1 - q + q^2 - 2q^3 + q^4 - 2q^5 + 2q^6 - 2q^7 + 2q^8 - 2q^9 + 2q^{10} + 2q^{12} + q^{13} \\
 & - 2q^{16} + q^{17} - 3q^{18} + 2q^{19} - 5q^{20} + 2q^{21} - 4q^{22} + 4q^{23} - 2q^{24} \\
 & + 5q^{25} - 2q^{26} + 3q^{27} - q^{28} + 2q^{29} - q^{32} - 2q^{33} - 2q^{35} + 2q^{36} \\
 & - 2q^{37} + 2q^{38} - 2q^{39} + 2q^{40} - q^{41} + 2q^{42} - q^{43} + q^{44} - q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [2, 3, 5] :

$$\begin{aligned}
 & 1 - q - q^4 + q^5 - q^6 + q^{10} + q^{11} + q^{13} - q^{17} - q^{18} - q^{19} - q^{20} - q^{21} + q^{22} \\
 & - q^{23} + q^{24} + q^{25} + q^{26} + q^{27} + q^{28} - q^{32} - q^{34} - q^{35} + q^{39} - q^{40} + q^{41} \\
 & + q^{44} - q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [2, 4, 4] :

$$\begin{aligned}
 & 1 - q - q^3 + 2q^4 - 2q^5 - q^7 + 3q^8 - 2q^9 + q^{11} + 3q^{12} - q^{13} - 2q^{14} + 2q^{15} \\
 & + q^{16} - q^{17} - 5q^{18} + 3q^{19} - q^{20} - 5q^{22} + 5q^{23} + q^{25} - 3q^{26} + 5q^{27} \\
 & + q^{28} - q^{29} - 2q^{30} + 2q^{31} + q^{32} - 3q^{33} - q^{34} + 2q^{36} - 3q^{37} + q^{38} \\
 & + 2q^{40} - 2q^{41} + q^{42} + q^{44} - q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [2, 8] :

$$\begin{aligned}
 & 1 - q - q^3 + q^7 + q^8 + q^{11} - q^{12} + q^{13} - 2q^{14} - q^{16} - q^{17} - q^{18} + q^{19} - q^{20} \\
 & + 2q^{21} + q^{22} + q^{23} + 2q^{24} - q^{25} + q^{26} - q^{27} - q^{28} - q^{29} - q^{31} - 2q^{32} + q^{33} \\
 & - q^{33} + q^{34} + q^{37} + q^{38} - q^{42} - q^{44} + q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [3, 3, 4] :

$$\begin{aligned}
 & 1 - q - q^2 + 2q^3 - q^4 - 2q^5 + 2q^6 - 2q^8 + 2q^9 + 2q^{12} - q^{13} + 2q^{15} \\
 & - 2q^{16} - q^{17} + q^{18} - 2q^{19} - q^{20} + q^{25} + 2q^{26} - q^{27} + q^{28} + 2q^{29} \\
 & - 2q^{30} + q^{32} - 2q^{33} - 2q^{36} + 2q^{37} - 2q^{39} + 2q^{40} + q^{41} - 2q^{42} + q^{43} \\
 & + q^{44} - q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [3, 7] :

$$\begin{aligned}
 & 1 - q - q^2 + q^3 - q^4 + q^6 + q^7 - q^8 + q^{10} + q^{14} - 3q^{15} - q^{16} + q^{17} - q^{18} + q^{20} \\
 & + q^{21} + q^{24} + q^{25} - q^{27} + q^{28} - q^{29} - 3q^{30} + q^{31} + q^{35} - q^{37} + q^{38} + q^{39} \\
 & - q^{41} + q^{42} - q^{43} - q^{44} + q^{45}
 \end{aligned}$$

Plambda(q) pour [4, 6] :

$$1 - q - q^2 + q^4 + 2q^{11} - q^{13} - 2q^{14} + q^{17} - q^{18} - q^{20} + 2q^{22} + 2q^{23} - q^{25} \\ - q^{27} + q^{28} - 2q^{31} - q^{32} + 2q^{34} + q^{41} - q^{43} - q^{44} + q^{45}$$

Plambda(q) pour [5, 5] :

$$1 - q - q^2 + 3q^5 - 2q^6 - q^7 + 5q^{10} - 2q^{11} - 2q^{12} - q^{13} - q^{14} + 5q^{15} \\ - 2q^{16} - 3q^{17} - q^{18} - q^{19} + 6q^{20} - q^{21} - q^{22} - q^{23} - q^{24} + 6q^{25} - q^{26} \\ - q^{27} - 3q^{28} - 2q^{29} + 5q^{30} - q^{31} - q^{32} - 2q^{33} - 2q^{34} + 5q^{35} - q^{38} \\ - 2q^{39} + 3q^{40} - q^{43} - q^{44} + q^{45}$$

Plambda(q) pour [10] :

$$1 - q - q^2 + q^5 + q^7 + q^{10} - 2q^{12} - q^{13} - q^{14} - q^{15} + q^{17} + q^{18} + q^{19} + 2q^{20} \\ + q^{21} + q^{22} - q^{23} - q^{24} - 2q^{25} - q^{26} - q^{27} - q^{28} + q^{30} + q^{31} + q^{32} \\ + 2q^{33} - q^{35} - q^{38} - q^{40} + q^{43} + q^{44} - q^{45}$$


---

## Annexe II

# SPÉCIALISATION PRINCIPALE DANS LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES MONOMIALES

$$\text{Les } W_\lambda(q) = n!_q \text{ mon}_\lambda(1-q, (1-q)q, (1-q)q^2, \dots) = \sum_{i=0}^{n(n-1)/2} c_n(\lambda, i) q^i$$

et leur factorisation, pour  $\lambda \vdash n$ ,  $0 \leq n \leq 8$ .

### Session Maple, ordinateur Macintosh Plus

```
>
read(scriptqcompt);           #(voir annexe IV)

Les partages de 0 à 9 sont entrés

O.K.

>
part:='part': kk:='kk':
lprint(`-----`);
for kk from 0 to 8 do
  for part in partages_de[kk] do
    lprint('Wlambda(q) pour',part,':');
    lprint();
    print(taylor(w[part],q,(kk*(kk-1)/2)+1));
    lprint(`=`);
    print(factor(w[part]));
  od;
  lprint(`-----`);
od;
```

---

Wlambda(q) pour [] :

$$= 1$$

=

$$= 1$$


---

Wlambda(q) pour [1] :

$$= 1$$

=

$$= 1$$


---

Wlambda(q) pour [2] :

$$= 1 - q$$

=

$$= 1 - q$$

Wlambda(q) pour [1, 1] :

$$= q$$

=

$$= q$$


---

Wlambda(q) pour [3] :

$$= \frac{2}{1 - q} - \frac{3}{q + q}$$

=

$$= \frac{2}{(q + 1)} \cdot \frac{3}{(-1 + q)}$$

Wlambda(q) pour [2, 1] :

$$= \frac{2}{q + q} - \frac{3}{2q}$$

=

$$= -q(2q + 1)(-1 + q)$$

Wlambda(q) pour [1, 1, 1] :

$$= \frac{3}{q}$$

=

$$= \frac{3}{q}$$


---

Wlambda(q) pour [4] :

$$= \frac{2}{1 - q} - \frac{3}{q + q} + \frac{4}{q + q} + \frac{5}{q + q} - \frac{6}{q}$$

=

$$= - (q + 1) \cdot \frac{2}{(q + q + 1)} \cdot \frac{3}{(-1 + q)}$$

Wlambda(q) pour [3, 1] :

$$= \frac{4}{q - 2q} - \frac{5}{q - q} + \frac{6}{2q}$$

=

$$q (q + 1) (2 q^2 + q + 1) (-1 + q)^2$$

Wlambda(q) pour [2, 2] :

$$\frac{2}{q} - \frac{3}{q} - \frac{5}{q} + \frac{6}{q}$$

=

$$q^2 (q^2 + q + 1) (-1 + q)^2$$

Wlambda(q) pour [2, 1, 1] :

$$\frac{3}{q} + \frac{4}{q} + \frac{5}{q} - \frac{6}{q}$$

=

$$- \frac{3}{q} (-1 + q) (3 q^2 + 2 q + 1)$$

Wlambda(q) pour [1, 1, 1, 1] :

$$\frac{6}{q}$$

=

$$\frac{6}{q}$$

Wlambda(q) pour [5] :

$$1 - \frac{2}{q} - \frac{5}{q} + \frac{8}{q} - \frac{9}{q} + \frac{10}{q}$$

=

$$(q^2 + q + 1) (q^2 + 1) (q + 1)^2 (-1 + q)^4$$

Wlambda(q) pour [4, 1] :

$$q - \frac{3}{q} - 2 \frac{5}{q} + \frac{7}{q} + 2 \frac{8}{q} - \frac{9}{q} - 2 \frac{10}{q}$$

=

$$- q (q + 1) (1 + q + q^2 + 2 q) (q^2 + q + 1) (-1 + q)^3$$

Wlambda(q) pour [3, 2] :

$$\frac{2}{q} - \frac{4}{q} - 2 \frac{5}{q} + \frac{6}{q} + \frac{8}{q} + 2 \frac{9}{q} - 2 \frac{10}{q}$$

=

$$- \frac{2}{q} (q + 1) (1 + 2 q + 2 q^2) (q^2 + 1) (-1 + q)^3$$

Wlambda(q) pour [3, 1, 1] :

$$\frac{3}{q} + \frac{5}{q} - \frac{6}{q} - \frac{7}{q} - 2 \frac{8}{q} - \frac{9}{q} + 3 \frac{10}{q}$$

=

$$\frac{3}{q} (q + 1) (3 q^4 + 2 q^3 + 3 q^2 + q + 1) (-1 + q)^2$$

Wlambda(q) pour [2, 2, 1] :

$$\frac{4}{q} + \frac{5}{q} - \frac{6}{q} - \frac{7}{q} - \frac{8}{q} - 2 \frac{9}{q} + 3 \frac{10}{q}$$

$$= \frac{4}{q} \frac{4}{(3q + 4)} \frac{3}{q} \frac{2}{(q + 3)} \frac{2}{(q + 1)} (-1 + q)^2$$

Wlambda(q) pour [2, 1, 1, 1] :

$$\frac{6}{q} \frac{7}{+q} \frac{8}{+q} \frac{9}{+q} \frac{10}{-4q}$$

$$= \frac{6}{-q} (-1 + q) (4q^3 + 3q^2 + 2q + 1)$$

Wlambda(q) pour [1, 1, 1, 1, 1] :

$$\frac{10}{q}$$

$$= \frac{10}{q}$$

Wlambda(q) pour [6] :

$$\frac{2}{1-q} \frac{5}{-q} \frac{6}{+q} \frac{7}{+q} \frac{8}{-q} \frac{9}{-q} \frac{10}{-q} \frac{13}{+q} \frac{14}{+q} \frac{15}{-q}$$

$$= - (1 + q)^2 (q + q + 1) (q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) (q + 1)^2 (-1 + q)^5$$

Wlambda(q) pour [5, 1] :

$$\frac{3}{q} \frac{4}{-q} \frac{6}{-q} \frac{8}{+2q} \frac{9}{+2q} \frac{10}{-q} \frac{11}{-q} \frac{12}{-2q} \frac{13}{-q} \frac{14}{+2q} \frac{15}{-q}$$

$$= \frac{2}{q} (q + q + 1) \frac{2}{(1 + q)} (2q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) (q + 1)^2 (-1 + q)^4$$

Wlambda(q) pour [4, 2] :

$$\frac{2}{q} \frac{3}{-q} \frac{4}{+q} \frac{5}{-2q} \frac{6}{-q} \frac{8}{+2q} \frac{9}{+q} \frac{11}{+q} \frac{12}{-q} \frac{13}{-2q} \frac{14}{+2q} \frac{15}{-q}$$

$$= \frac{2}{q} (q + 1) \frac{2}{(q + q + 1)} (1 + 2q)^2 (q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) (-1 + q)^4$$

Wlambda(q) pour [4, 1, 1] :

$$\frac{3}{q} \frac{7}{-q} \frac{8}{-2q} \frac{10}{-q} \frac{11}{+q} \frac{12}{+2q} \frac{13}{+2q} \frac{14}{+q} \frac{15}{-3q}$$

$$= \frac{3}{-q} (q + 1) \frac{2}{(q + q + 1)} (3q^6 + 2q^5 + 3q^4 + 3q^3 + 2q^2 + q + 1) (-1 + q)^3$$

$$(-1 + q)$$

Wlambda(q) pour [3, 3] :

$$\frac{3}{q} \frac{4}{-q} \frac{5}{-q} \frac{6}{+q} \frac{7}{-q} \frac{9}{+2q} \frac{11}{-q} \frac{12}{+q} \frac{13}{-q} \frac{14}{-q} \frac{15}{+q}$$

$$= \frac{3}{q} (1 + q + q + q + q + q) \frac{2}{(q + 1)} \frac{2}{(q + 1)} \frac{2}{(q + 1)} (-1 + q)^4$$

`Wlambda(q) pour [3, 2, 1] :`

$$= \frac{4}{q} + 2 \frac{5}{q^2} - 2 \frac{6}{q^3} + \frac{7}{q^4} - 3 \frac{8}{q^5} - 4 \frac{9}{q^6} + 3 \frac{11}{q^7} + 4 \frac{13}{q^8} + 4 \frac{14}{q^9} - 6 \frac{15}{q^{10}}$$

$$= - \frac{4}{q} (q+1) (6 \frac{7}{q^2} + 8 \frac{6}{q^3} + 12 \frac{5}{q^4} + 12 \frac{4}{q^5} + 11 \frac{3}{q^6} + 6 \frac{2}{q^7} + 4 \frac{1}{q^8} + 1) (-1 + q)^3$$

`Wlambda(q) pour [3, 1, 1, 1] :`

$$= \frac{6}{q} + \frac{8}{q^2} - 2 \frac{11}{q^3} - \frac{12}{q^4} - 2 \frac{13}{q^5} - \frac{14}{q^6} + 4 \frac{15}{q^7}$$

$$= \frac{6}{q} (q+1) (4 \frac{6}{q^2} + 3 \frac{5}{q^3} + 5 \frac{4}{q^4} + 3 \frac{3}{q^5} + 3 \frac{2}{q^6} + q+1) (-1 + q)^2$$

`Wlambda(q) pour [2, 2, 2] :`

$$= \frac{6}{q} - \frac{7}{q^2} - \frac{9}{q^3} + \frac{10}{q^4} - \frac{11}{q^5} + \frac{12}{q^6} + \frac{14}{q^7} - \frac{15}{q^8}$$

$$= - \frac{6}{q} (q+q+1) (q+q+q+q+1) (-1 + q)^3$$

`Wlambda(q) pour [2, 2, 1, 1] :`

$$= \frac{7}{q} + \frac{8}{q^2} + 2 \frac{9}{q^3} - 2 \frac{10}{q^4} - \frac{11}{q^5} - 2 \frac{12}{q^6} - 2 \frac{13}{q^7} - 3 \frac{14}{q^8} + 6 \frac{15}{q^9}$$

$$= \frac{7}{q} (6 \frac{6}{q^2} + 9 \frac{5}{q^3} + 10 \frac{4}{q^4} + 9 \frac{3}{q^5} + 7 \frac{2}{q^6} + 3 q + 1) (-1 + q)^2$$

`Wlambda(q) pour [2, 1, 1, 1, 1] :`

$$= \frac{10}{q} + \frac{11}{q^2} + \frac{12}{q^3} + \frac{13}{q^4} + \frac{14}{q^5} - 5 \frac{15}{q^6}$$

$$= - \frac{10}{q} (-1 + q) (5 \frac{4}{q^2} + 4 \frac{3}{q^3} + 3 \frac{2}{q^4} + 2 q + 1)$$

`Wlambda(q) pour [1, 1, 1, 1, 1, 1] :`

$$= \frac{15}{q}$$


---

`Wlambda(q) pour [7] :`

$$= 1 - \frac{2}{q} - \frac{5}{q^2} + \frac{7}{q^3} - \frac{9}{q^4} - \frac{10}{q^5} - \frac{11}{q^6} - \frac{12}{q^7} + 2 \frac{14}{q^8} + \frac{16}{q^9} - \frac{19}{q^{10}} - \frac{20}{q^{11}} + \frac{21}{q^{12}}$$

$$= (1 - q + q^2) (1 + q^2) (q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) (q^2 + q + 1)^2 (q + 1)^3 (-1 + q)^6$$

`Wlambda(q) pour [6, 1] :`

$$= \frac{3}{q} - \frac{4}{q^2} - \frac{5}{q^3} + \frac{6}{q^4} - \frac{7}{q^5} + \frac{8}{q^6} + 2 \frac{9}{q^7} + \frac{10}{q^8} + \frac{11}{q^9} - \frac{13}{q^{10}} - 3 \frac{14}{q^{11}} - \frac{15}{q^{12}} - \frac{16}{q^{13}}$$

$$+ \frac{17}{q^{14}} + \frac{18}{q^{15}} + 2 \frac{19}{q^{16}} + \frac{20}{q^{17}} - 2 \frac{21}{q^{18}}$$

$$= -q(1+q^2)(q^2+q+1)(q^4+q^3+q^2+q+1) \\ (2q^5+q^4+q^3+q^2+q+1)(q+1)^2(-1+q^5)$$

Wlambda(q) pour [5, 2] :

$$\frac{2}{q} \frac{3}{-q} \frac{6}{-q} \frac{7}{-q} \frac{9}{+2q} \frac{10}{+2q} \frac{-3q}{-3q} \frac{14}{+q} \frac{15}{-2q} \frac{16}{+q} \frac{18}{+q} \frac{19}{+2q} \frac{20}{-2q} \\ -2q^{21}$$

$$= -q^2(1+q+q^2+2q^3+2q^4)(1-q+q^2)(1+q^2)(q+1)^2(q^2+q+1)^2 \\ (-1+q^5)$$

Wlambda(q) pour [5, 1, 1] :

$$\frac{3}{q} \frac{6}{-q} \frac{8}{-q} \frac{9}{-2q} \frac{11}{+q} \frac{12}{+q} \frac{13}{+q} \frac{14}{+3q} \frac{16}{+q} \frac{17}{-2q} \frac{18}{-2q} \frac{19}{-2q} \\ -q^{20} + 3q^{21}$$

$$= q^3(1+q^2)(q^2+q+1) \\ (3q^8+2q^7+3q^6+3q^5+4q^4+2q^3+2q^2+q+1)(q+1)^2 \\ (-1+q^4)$$

Wlambda(q) pour [4, 3] :

$$\frac{3}{q} \frac{5}{-2q} \frac{7}{-q} \frac{8}{+q} \frac{9}{+q} \frac{11}{+2q} \frac{12}{+q} \frac{13}{-q} \frac{14}{-3q} \frac{18}{-q} \frac{19}{+2q} \frac{20}{+2q} \\ -2q^{21}$$

$$= -q^3(1+2q+2q^2+2q^3)(q^2+q+1)(1-q+q^2)(q^4+q^3+q^2+q+1)^2 \\ (q+1)^2(-1+q^5)$$

Wlambda(q) pour [4, 2, 1] :

$$\frac{4}{q} \frac{5}{+q} \frac{6}{-q} \frac{8}{-q} \frac{9}{-3q} \frac{10}{-q} \frac{11}{-q} \frac{12}{+q} \frac{13}{+3q} \frac{14}{+6q} \frac{15}{-q} \frac{16}{+q} \frac{17}{+q} \\ -2q^{18} - 4q^{19} - 4q^{20} + 6q^{21}$$

$$= q^4(q+1)(q^2+q+1) \\ (6q^{10}+8q^9+12q^8+16q^7+17q^6+15q^5+13q^4+9q^3+5q^2+3q \\ + 1)(-1+q^4)$$

$W_{\lambda}(q)$  pour  $[4, 1, 1, 1]$  :

$$\begin{aligned}
 & q^6 + q^9 - q^{10} - q^{11} - q^{12} - q^{13} - 2q^{14} + q^{15} + 2q^{17} + 2q^{18} + 2q^{19} + q^{20} \\
 & - 4q^{21} \\
 = & -q^6 (q+1) (q^2 + q + 1) \\
 & (4q^9 + 3q^8 + 5q^7 + 6q^6 + 5q^5 + 4q^4 + 4q^3 + 2q^2 + q + 1) (-1 + q)^3
 \end{aligned}$$

$W_{\lambda}(q)$  pour  $[3, 3, 1]$  :

$$\begin{aligned}
 & q^5 - 2q^8 - 2q^{11} + q^{12} + q^{13} + 3q^{14} + q^{15} - q^{16} - q^{17} + q^{18} - 3q^{19} - 2q^{20} \\
 & + 3q^{21} \\
 = & q^5 (1 + q + q^2 + q^3 + q^4) (3q^6 + q^5 + 4q^4 + q^3 + 3q^2 + q + 1) (q + 1)^2 \\
 & (-1 + q)^4
 \end{aligned}$$

$W_{\lambda}(q)$  pour  $[3, 2, 2]$  :

$$\begin{aligned}
 & q^6 - 2q^9 - q^{10} + q^{13} + 3q^{14} - q^{15} + q^{16} - q^{18} - q^{19} - 3q^{20} + 3q^{21} \\
 = & q^6 (q+1) (1 - q + q^2) (q^2 + q + 1) \\
 & (3q^6 + 6q^5 + 8q^4 + 8q^3 + 6q^2 + 3q + 1) (-1 + q)^4
 \end{aligned}$$

$W_{\lambda}(q)$  pour  $[3, 2, 1, 1]$  :

$$\begin{aligned}
 & q^7 + 2q^8 + q^9 - q^{10} + q^{11} - 4q^{12} - 3q^{13} - 7q^{14} + q^{15} + 2q^{16} + 4q^{17} \\
 & + 2q^{18} + 7q^{19} + 6q^{20} - 12q^{21} \\
 = & -q^7 (q+1) \\
 & (12q^{10} + 18q^9 + 29q^8 + 32q^7 + 36q^6 + 30q^5 + 24q^4 + 15q^3 + 9q^2 \\
 & + 4q + 1) \\
 & (-1 + q)^3
 \end{aligned}$$

$W_{\lambda}(q)$  pour  $[3, 1, 1, 1, 1]$  :

$$\begin{aligned}
 & q^{10} + q^{12} + q^{14} - q^{15} - q^{16} - 2q^{17} - q^{18} - 2q^{19} - q^{20} + 5q^{21} \\
 = & q^{10} (q+1) (5q^8 + 4q^7 + 7q^6 + 5q^5 + 4q^4 + 3q^3 + 3q^2 + q + 1) \\
 & (-1 + q)^2
 \end{aligned}$$

Wlambda(q) pour [2, 2, 2, 1] :

$$\begin{aligned}
 & \frac{9}{q} + \frac{10}{q} - \frac{11}{q} - 2\frac{13}{q} - 2\frac{14}{q} + \frac{15}{q} + 2\frac{18}{q} + \frac{19}{q} + 3\frac{20}{q} - 4\frac{21}{q} \\
 = & \frac{9}{q} \left( q + q + 1 \right) \left( 4\frac{7}{q} + 5\frac{6}{q} + 5\frac{5}{q} + 7\frac{4}{q} + 6\frac{3}{q} + 4\frac{2}{q} + 3\frac{q+1}{q} \right) \\
 & (-1 + q^3)
 \end{aligned}$$

Wlambda(q) pour [2, 2, 1, 1, 1] :

$$\begin{aligned}
 & \frac{11}{q} + \frac{12}{q} + 2\frac{13}{q} + 2\frac{14}{q} - 2\frac{15}{q} - 2\frac{16}{q} - 2\frac{17}{q} - 3\frac{18}{q} - 3\frac{19}{q} - 4\frac{20}{q} \\
 & + 10\frac{21}{q} \\
 = & \frac{11}{q} \left( 10\frac{8}{q} + 16\frac{7}{q} + 19\frac{6}{q} + 19\frac{5}{q} + 17\frac{4}{q} + 13\frac{3}{q} + 7\frac{2}{q} + 3\frac{q+1}{q} \right) \\
 & (-1 + q^2)
 \end{aligned}$$

Wlambda(q) pour [2, 1, 1, 1, 1, 1] :

$$\begin{aligned}
 & \frac{15}{q} + \frac{16}{q} + \frac{17}{q} + \frac{18}{q} + \frac{19}{q} + \frac{20}{q} - 6\frac{21}{q} \\
 = & \frac{15}{q} (-1 + q) (6\frac{5}{q} + 5\frac{4}{q} + 4\frac{3}{q} + 3\frac{2}{q} + 2\frac{q+1}{q})
 \end{aligned}$$

Wlambda(q) pour [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] :

$$\begin{aligned}
 & \frac{21}{q} \\
 = & \frac{21}{q}
 \end{aligned}$$

Wlambda(q) pour [8] :

$$\begin{aligned}
 & 1 - \frac{2}{q} - \frac{5}{q} + \frac{7}{q} + \frac{8}{q} - \frac{10}{q} - \frac{11}{q} - 2\frac{12}{q} + 2\frac{16}{q} + \frac{17}{q} + \frac{18}{q} - \frac{20}{q} - \frac{21}{q} \\
 & - \frac{23}{q} + \frac{26}{q} + \frac{27}{q} - \frac{28}{q} \\
 = & (1 + q + q + q + q) (1 - q + q) (1 + q + q + q + q + q + q) \\
 & (q + 1) (q + q + 1) (q + 1) (-1 + q^7)
 \end{aligned}$$

Wlambda(q) pour [7, 1] :

$$\begin{aligned}
 & q - \frac{3}{q} - \frac{4}{q} - \frac{5}{q} + \frac{7}{q} + \frac{9}{q} + \frac{10}{q} + \frac{11}{q} + \frac{12}{q} - 2\frac{13}{q} - 2\frac{15}{q} - 3\frac{16}{q} - \frac{17}{q} \\
 & + \frac{19}{q} + 2\frac{20}{q} + 3\frac{21}{q} + \frac{23}{q} - \frac{24}{q} - \frac{25}{q} - 2\frac{26}{q} - \frac{27}{q} + 2\frac{28}{q} \\
 = 
 \end{aligned}$$

$$q (1 + q + q^2 + q^3 + q^4) (1 - q + q^2) (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + 2q^6)$$

$$(q^2 + 1) (q^2 + q + 1) (q + 1) (-1 + q^6)$$

Wlambda(q) pour [6, 2] :

$$q^2 - q^3 - q^5 + q^6 - q^7 - q^8 + q^9 + q^{10} + 2q^{11} + q^{12} - 2q^{14} - 3q^{16} - q^{18}$$

$$+ q^{19} + q^{20} + q^{21} + q^{22} + q^{23} - q^{25} - q^{26} - 2q^{27} + 2q^{28}$$

$$=$$

$$q^2 (1 + q + q^2 + q^3 + q^4) (1 + q + 2q^2) (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6)$$

$$(q^2 + 1) (q^2 + q + 1) (q + 1) (-1 + q^6)$$

Wlambda(q) pour [6, 1, 1] :

$$q^3 - q^6 - q^7 - q^9 - q^{10} + q^{12} + 3q^{13} + q^{14} + q^{15} + 2q^{16} - q^{17} - q^{18} - 2q^{19}$$

$$- 2q^{20} - 3q^{21} + 2q^{24} + 2q^{25} + 2q^{26} + q^{27} - 3q^{28}$$

$$=$$

$$- q^3 (1 + q + q^2 + q^3 + q^4) (q + 1) (q^2 + q + 1)$$

$$(3q^{10} + 2q^9 + 3q^8 + 3q^7 + 4q^6 + 4q^5 + 3q^4 + 2q^3 + 2q^2 + q + 1)$$

$$(q + 1) (-1 + q^5)$$

Wlambda(q) pour [5, 3] :

$$q^3 - q^4 - 2q^7 + q^9 + 2q^{10} - q^{12} - 3q^{16} - 2q^{17} + q^{19} + 2q^{20} + 2q^{23} - q^{24}$$

$$+ q^{25} - 2q^{26} - 2q^{27} + 2q^{28}$$

$$=$$

$$q^3 (1 - q + q^2) (q^2 + q + 1) (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6) (q + 1)$$

$$(2q^4 + 2q^3 + 2q^2 + q + 1) (q + 1) (-1 + q^6)$$

Wlambda(q) pour [5, 2, 1] :

$$q^4 + q^5 - 2q^6 + q^7 - q^8 - 2q^9 - 2q^{10} + 2q^{13} + 2q^{14} + 2q^{15} + 6q^{16}$$

$$- 2q^{18} - 4q^{19} - 3q^{20} - 3q^{21} - 3q^{23} + 3q^{24} + 2q^{25} + 4q^{26} + 4q^{27}$$

$$- 6q^{28}$$

$$\begin{aligned}
 &= \\
 &\frac{4}{-q} \frac{2}{(q+q+1)} \frac{2}{(q+1)} \\
 &(6q^{13} + 8q^{12} + 12q^{11} + 16q^{10} + 21q^9 + 21q^8 + 22q^7 + 18q^6 + 16q^5 \\
 &+ 12q^4 + 8q^3 + 4q^2 + 3q + 1) \\
 &\frac{2}{(q+1)} \frac{5}{(-1+q)}
 \end{aligned}$$

`Wlambda(q) pour [5, 1, 1, 1] :`

$$\begin{aligned}
 &\frac{6}{q} \frac{11}{-q} \frac{12}{-q} \frac{13}{-2q} \frac{16}{-q} \frac{17}{+2q} \frac{18}{+2q} \frac{19}{+2q} \frac{20}{+q} \frac{21}{+2q} \frac{22}{-q} \\
 &-3q^{24} - 2q^{25} - 2q^{26} - q^{27} + 4q^{28}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \\
 &\frac{6}{q} \frac{2}{(q+1)} \frac{2}{(q+q+1)} \\
 &(4q^{12} + 3q^{11} + 5q^{10} + 6q^9 + 8q^8 + 6q^7 + 7q^6 + 5q^5 + 5q^4 + 3q^3 \\
 &+ 2q^2 + q + 1) \\
 &\frac{2}{(q+1)} \frac{4}{(-1+q)}
 \end{aligned}$$

`Wlambda(q) pour [4, 4] :`

$$\begin{aligned}
 &\frac{4}{q} \frac{5}{-q} \frac{6}{-q} \frac{8}{+q} \frac{10}{-q} \frac{11}{+q} \frac{12}{+2q} \frac{14}{-2q} \frac{18}{-2q} \frac{20}{+2q} \frac{21}{+q} \frac{22}{-q} \\
 &+q^{24} - q^{26} - q^{27} + q^{28}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \\
 &\frac{4}{q} \frac{2}{(1+q+q+q+q+q+q)} \frac{3}{(1-q+q)} \frac{4}{(q+q+q+q+q+1)} \\
 &\frac{2}{(q+1)} \frac{2}{(q+q+1)} \frac{2}{(-1+q)} \frac{6}{}
 \end{aligned}$$

`Wlambda(q) pour [4, 3, 1] :`

$$\begin{aligned}
 &\frac{5}{q} \frac{6}{+q} \frac{8}{-3q} \frac{9}{-q} \frac{11}{-q} \frac{12}{-3q} \frac{13}{+3q} \frac{14}{+4q} \frac{15}{+q} \frac{16}{+3q} \frac{17}{+q} \frac{18}{+2q} \\
 &-3q^{19} - 7q^{20} - 4q^{21} + 3q^{22} - q^{23} + 6q^{24} + 4q^{25} - 6q^{26}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \\
 &\frac{5}{-q} \frac{2}{(1-q+q)} \frac{2}{(q+q+1)} \\
 &(6q^{12} + 14q^{11} + 24q^{10} + 32q^9 + 38q^8 + 39q^7 + 38q^6 + 32q^5 + 25q^4)
 \end{aligned}$$

$$+ 17 q^3 + 10 q^2 + 4 q + 1)$$

$$(q+1)^2 (-1+q)^5$$

Wlambda(q) pour [4, 2, 2] :

$$q^6 - q^7 + q^8 - 2 q^9 + 2 q^{10} - 3 q^{11} - q^{12} + 4 q^{14} + q^{16} + q^{18} - 4 q^{20} - q^{22}$$

$$+ q^{23} - 2 q^{24} + 2 q^{25} + q^{26} + 3 q^{27} - 3 q^{28}$$

$$= -q^6 (q+1) (1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6) (1+q+q^2+q^3+q^4)$$

$$(q^2+q+1) (3 q^4 + 2 q^2 + 1) (-1+q)^5$$

Wlambda(q) pour [4, 2, 1, 1] :

$$q^7 - q^8 + 2 q^9 - 3 q^{10} + q^{11} - 4 q^{13} - 5 q^{14} - 3 q^{16} + 3 q^{17} + 2 q^{18} + 5 q^{19}$$

$$+ 8 q^{20} + 4 q^{21} - 3 q^{22} - q^{23} - 2 q^{24} - 5 q^{25} - 7 q^{26} - 6 q^{27} + 12 q^{28}$$

$$= q^7 (q+1) (q^2+q+1)$$

$$(12 q^{14} + 18 q^{13} + 29 q^{12} + 41 q^{11} + 50 q^{10} + 52 q^9 + 55 q^8 + 47 q^7 + 40 q^6$$

$$+ 31 q^5 + 21 q^4 + 12 q^3 + 8 q^2 + 3 q + 1)$$

$$(-1+q)^4$$

Wlambda(q) pour [4, 1, 1, 1, 1] :

$$q^{10} + q^{13} - q^{15} - 2 q^{17} - q^{18} - q^{19} - q^{20} - q^{21} + 2 q^{22} + q^{23} + 2 q^{24} + 2 q^{25}$$

$$+ 2 q^{26} + q^{27} - 5 q^{28}$$

$$= -q^{10} (q+1) (q^2+q+1)$$

$$(5 q^{12} + 4 q^{11} + 7 q^{10} + 9 q^9 + 9 q^8 + 8 q^7 + 9 q^6 + 6 q^5 + 5 q^4 + 4 q^3$$

$$+ 2 q^2 + q + 1)$$

$$(-1+q)^3$$

Wlambda(q) pour [3, 3, 2] :

$$\begin{aligned}
 & 7 \quad 10 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 20 \quad 21 \\
 q & - 3q + q - q + q + q + 2q + q + q - 3q - 2q + q \\
 & - q - 2q + 2q - q + 2q + 3q - 3q \\
 = & \\
 & - q (1 + q + q + q + q + q + q) (1 + q) \\
 & (3q^6 + 3q^5 + 4q^4 + 3q^3 + 4q^2 + 2q + 1) (q + 1)^2 (-1 + q)^5
 \end{aligned}$$

Wlambda(q) pour [3, 3, 1, 1] :

$$\begin{aligned}
 & 8 \quad 10 \quad 11 \quad 13 \quad 14 \quad 16 \quad 19 \quad 20 \quad 21 \quad 22 \quad 24 \\
 q & + q - q - 2q - 2q - q + 4q + 4q + 2q - 2q - 2q \\
 & - 5q - 3q + 6q \\
 = & \\
 & q^8 \\
 & (1 + 2q + 6q^2 + 9q^3 + 17q^4 + 21q^5 + 30q^6 + 32q^7 + 38q^8 + 34q^9 \\
 & + 33q^{10} + 23q^{11} + 19q^{12} + 9q^{13} + 6q^{14}) \\
 & (q + 1)^2 (-1 + q)^4
 \end{aligned}$$

Wlambda(q) pour [3, 2, 2, 1] :

$$\begin{aligned}
 & 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 19 \quad 20 \\
 q & + 2q + q - 3q + q - 5q - 2q - 4q + q + 8q + 7q \\
 & - q + q + 2q - 4q - 2q - 6q - 9q + 12q \\
 = & \\
 & q^9 (q + 1) \\
 & (12q^{14} + 27q^{13} + 51q^{12} + 73q^{11} + 95q^{10} + 108q^9 + 115q^8 + 106q^7 \\
 & + 91q^6 + 68q^5 + 47q^4 + 27q^3 + 14q^2 + 5q + 1) \\
 & (-1 + q)^4
 \end{aligned}$$

Wlambda(q) pour [3, 2, 1, 1, 1] :

$$\begin{aligned}
 & 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 20 \quad 21 \\
 q & + 2q + q + 3q - 2q + q - 4q - 2q - 9q - 6q - q \\
 & + 5q + 2q + 7q + 4q + 10q + 8q - 20q
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \\
 &- q^{11} (q + 1) \\
 &(20 q^{13} + 32 q^{12} + 54 q^{11} + 64 q^{10} + 77 q^9 + 76 q^8 + 73 q^7 + 57 q^6 + 45 q^5 \\
 &\quad + 29 q^4 + 19 q^3 + 9 q^2 + 4 q + 1) \\
 &(-1 + q^3)
 \end{aligned}$$

`Wlambda(q) pour [3, 1, 1, 1, 1, 1] :`

$$\begin{aligned}
 &15 q^{15} + 17 q^{17} + 19 q^{19} - 2 q^{22} - q^{23} - 2 q^{24} - q^{25} - 2 q^{26} - q^{27} + 6 q^{28} \\
 &q^{15} (q + 1) \\
 &(6 q^{10} + 5 q^9 + 9 q^8 + 7 q^7 + 9 q^6 + 6 q^5 + 6 q^4 + 3 q^3 + 3 q^2 + q + 1) \\
 &(-1 + q^2)
 \end{aligned}$$

`Wlambda(q) pour [2, 2, 2, 2] :`

$$\begin{aligned}
 &12 q^{12} - q^{13} - q^{15} + q^{16} - q^{17} + q^{18} - q^{19} + 2 q^{20} - q^{21} + q^{22} - q^{23} + q^{24} - q^{25} \\
 &- q^{27} + q^{28} \\
 &q^{12} (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6) (q^2 + q + 1) (q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) \\
 &(-1 + q^4)
 \end{aligned}$$

`Wlambda(q) pour [2, 2, 2, 1, 1] :`

$$\begin{aligned}
 &13 q^{13} + 14 q^{14} + 15 q^{15} - q^{16} - 3 q^{18} - 2 q^{19} - 6 q^{20} + 3 q^{21} - q^{22} + 2 q^{23} + q^{24} \\
 &+ 4 q^{25} + 3 q^{26} + 6 q^{27} - 10 q^{28}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \\
 &- q^{13} \\
 &(1 + 4 q + 59 q^8 + 39 q^{10} + 11 q^2 + 21 q^3 + 47 q^5 + 34 q^4 + 58 q^6 + 61 q^7 \\
 &\quad + 51 q^9 + 10 q^{12} + 24 q^{11}) \\
 &(-1 + q^3)
 \end{aligned}$$

$W\lambda\mu\delta(a)$  pour  $[2, 2, 1, 1, 1, 1]$  :

$$\frac{16}{q} + \frac{17}{q} + \frac{18}{q} + \frac{19}{q} + \frac{20}{q} - \frac{21}{q} - \frac{22}{q} - \frac{23}{q} - \frac{24}{q} - \frac{25}{q}$$

$$- \frac{26}{q} - \frac{27}{q} + \frac{28}{q}$$

=

$$\frac{16}{q}$$

$$(15q^{10} + 25q^9 + 31q^8 + 33q^7 + 32q^6 + 28q^5 + 22q^4 + 13q^3 + 7q^2 + 3q + 1)$$

$$(-1 + q)^2$$

$W\lambda\mu\delta(a)$  pour  $[2, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$  :

$$\frac{21}{q} + \frac{22}{q} + \frac{23}{q} + \frac{24}{q} + \frac{25}{q} + \frac{26}{q} + \frac{27}{q} - \frac{28}{q}$$

=

$$\frac{21}{q} (-1 + q) (7q^6 + 6q^5 + 5q^4 + 4q^3 + 3q^2 + 2q + 1)$$

$W\lambda\mu\delta(a)$  pour  $[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$  :

$$\frac{28}{q}$$

=

$$\frac{28}{q}$$


---

### **Annexe III**

## **POLYNÔMES q-ÉNUMÉRATEURS D'UNE ESPÈCE**

$$|F[n]|_q = \sum_{i=0}^{n(n-1)/2} \left( \sum_{\lambda \vdash n} c_n(\lambda, i) t_\lambda \right) q^i, \text{ pour } 0 \leq n \leq 9.$$

### **Session Maple, ordinateur Macintosh Plus**

```
>
read(scriptqcompt);           #(voir annexe IV)

Les partages de 0 à 9 sont entrés

O.K.

>
kkk:='kkk':
print();print();
for kkk from 0 to 9 do
lprint(`-----`);
lprint();
lprint(`Le q-comptage de F[n] pour n =` , kkk, `:`);
lprint();
print(le_q_comptage(kkk));
od;
lprint(`-----`);
```

---

Le q-comptage de  $F[n]$  pour  $n = 0$  :

$$t_0$$


---

Le q-comptage de  $F[n]$  pour  $n = 1$  :

$$t_1$$


---

Le q-comptage de  $F[n]$  pour  $n = 2$  :

$$t_2 + (-t_2 + t_{11}) q$$


---

Le q-comptage de  $F[n]$  pour  $n = 3$  :

$$t_3 + (-t_3 + t_{21}) q + (-t_3 + t_{21}) q^2 + (t_3 - 2t_{21} + t_{111}) q^3$$


---

Le q-comptage de  $F[n]$  pour  $n = 4$  :

$$\begin{aligned} t_4 &+ (-t_4 + t_{31}) q + (-t_4 + t_{22}) q^2 + (-t_{22} + t_{211}) q^3 \\ &+ (t_4 - 2t_{31} + t_{211}) q^4 + (t_4 - t_{31} - t_{22} + t_{211}) q^5 \\ &+ (-t_4 + 2t_{31} + t_{22} - 3t_{211} + t_{1111}) q^6 \end{aligned}$$


---

Le q-comptage de  $F[n]$  pour  $n = 5$  :

$$\begin{aligned} t_5 &+ (-t_5 + t_{41}) q + (-t_5 + t_{32}) q^2 + (-t_{41} + t_{311}) q^3 + (-t_{32} + t_{221}) q^4 \\ &+ (-2t_{41} + t_{311} + 2t_5 - 2t_{32} + t_{221}) q^5 \\ &+ (-t_{311} + t_{2111} + t_{32} - t_{221}) q^6 + (-t_{311} + t_{2111} - t_{221} + t_{41}) q^7 \\ &+ (-t_{221} + t_{32} - 2t_{311} + t_{2111} - t_5 + 2t_{41}) q^8 \\ &+ (2t_{32} - t_{311} + t_{2111} - t_5 - 2t_{221} + t_{41}) q^9 \\ &+ (-2t_{41} + 3t_{311} + t_5 - 2t_{32} + 3t_{221} - 4t_{2111} + t_{11111}) q^{10} \end{aligned}$$


---

Le q-comptage de  $F[n]$  pour  $n = 6$  :

$$\begin{aligned} t_6 &+ (-t_6 + t_{51}) q + (-t_6 + t_{42}) q^2 + (t_{33} + t_{411} - t_{51} - t_{42}) q^3 \\ &+ (t_{321} - t_{33} - t_{51} + t_{42}) q^4 + (2t_{321} - t_{33} + t_6 - 2t_{42}) q^5 \\ &+ (t_{33} + t_6 - t_{51} + t_{222} - 2t_{321} - t_{42} + t_{3111}) q^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (- t_{33} + t_{321} - t_{222} + t_{2211} - t_{411} + t_6) q^7 \\
& + (2 t_{51} - 2 t_{411} + 2 t_{42} + t_{2211} - 3 t_{321} - t_6 + t_{3111}) q^8 \\
& + (2 t_{33} + t_{51} + t_{42} - t_6 + 2 t_{2211} - t_{222} - 4 t_{321}) q^9 \\
& + (t_{21111} - t_6 - 2 t_{2211} + 2 t_{51} - t_{411} + t_{222}) q^{10} \\
& + (3 t_{321} + t_{411} + t_{21111} - t_{222} + t_{42} - 2 t_{3111} - t_{2211} - t_{51} - t_{33}) q^{11} \\
& + (t_{222} - t_{42} + t_{33} - t_{3111} + t_{21111} - t_{51} - 2 t_{2211} + 2 t_{411}) q^{12} \\
& + (- 2 t_{3111} + t_{21111} + t_6 - 2 t_{2211} - t_{33} + 4 t_{321} - 2 t_{51} + 2 t_{411} - t_{42}) \\
& \quad q^{13} \\
& + (- t_{3111} - t_{33} + 4 t_{321} - 3 t_{2211} + t_{222} + t_{21111} - t_{51} + t_{411} + t_6 \\
& \quad - 2 t_{42}) \\
& \quad q^{14} \\
& + (2 t_{51} + 4 t_{3111} - 3 t_{411} + 6 t_{2211} - 6 t_{321} - t_6 + 2 t_{42} - t_{222} + t_{33} \\
& \quad - 5 t_{21111} + t_{111111}) \\
& \quad q^{15}
\end{aligned}$$


---

Le  $q$ -comptage de  $F[n]$  pour  $n = 7$  :

$$\begin{aligned}
& t_7 + (- t_7 + t_{61}) q + (t_{52} - t_7) q^2 + (- t_{52} - t_{61} + t_{43} + t_{511}) q^3 \\
& + (t_{421} - t_{61}) q^4 + (t_{421} - t_{61} + t_{331} + t_7 - 2 t_{43}) q^5 \\
& + (t_{61} + t_{4111} - t_{511} + t_{322} - t_{421} - t_{52}) q^6 \\
& + (- t_{52} - t_{61} + 2 t_7 + t_{3211} - t_{43}) q^7 \\
& + (- t_{421} - 2 t_{331} + t_{43} - t_{511} + 2 t_{3211} + t_{61}) q^8 \\
& + (- t_7 - 3 t_{421} + t_{2221} - 2 t_{511} - 2 t_{322} + t_{4111} + 2 t_{52} + t_{43} + 2 t_{61} \\
& \quad + t_{3211}) \\
& \quad q^9 \\
& + (t_{2221} - t_{322} + 2 t_{52} - t_{421} - t_{4111} + t_{31111} - t_{3211} + t_{61} - t_7) q^{10} \\
& + (- 2 t_{331} + t_{22111} + 2 t_{43} + t_{511} - t_{421} + t_{3211} - t_{4111} - t_7 - t_{2221} \\
& \quad + t_{61}) \\
& \quad q^{11}
\end{aligned}$$

```

+ (t43 - t7 + t421 + t22111 + t511 + t31111 - t4111 - 4 t3211 + t331) q12
+ (2 t22111 - t4111 + 3 t421 + t331 + t322 + t511 - 3 t3211 - t43 - 2 t2221
- t61)

13
q
+ (2 t22111 + 3 t511 - 2 t4111 + 6 t421 - 7 t3211 - 3 t52 - 3 t43 + 3 t331
- 3 t61 + t31111 + 3 t322 + 2 t7 - 2 t2221)

14
q
+ (- 2 t22111 + t4111 - t421 + t3211 - t322 + t211111 - t31111 + t331 + t52
- t61 + t2221)

15
q
+ (- t61 + t421 - 2 t52 + t322 + t7 - 2 t22111 + 2 t3211 + t211111 - t31111
- t331 + t511)

16
q
+ (- t331 - 2 t511 + 4 t3211 - t421 + 2 t4111 + t61 - 2 t31111 + t211111
- 2 t22111)

17
q
+ (t331 - 2 t421 + t52 + 2 t4111 - 3 t22111 + 2 t3211 - t31111 + t211111
+ 2 t2221 - t43 + t61 - t322 - 2 t511)

18
q
+ (- 2 t511 + 7 t3211 + 2 t4111 - 3 t331 - t7 + t2221 + t52 + t211111
+ 2 t43 - 2 t31111 + 2 t61 - t322 - 3 t22111 - 4 t421)

19
q
+ (t4111 + 6 t3211 + 2 t52 + t211111 + 3 t2221 - t7 + t61 - 3 t322 - t511
- 4 t421 + 2 t43 - t31111 - 2 t331 - 4 t22111)

20
q
+ (- 2 t61 - 4 t2221 + 3 t322 + 3 t511 - 2 t52 - 4 t4111 + 3 t331 + 6 t421
+ t7 - 12 t3211 + 10 t22111 + 5 t31111 - 2 t43 - 6 t211111 + t1111111)

21
q
-----
```

Le q-comptage de F[n] pour n = 8 :

$$\begin{aligned}
& t8 + (- t8 + t71) q + (- t8 + t62) q^2 + (t53 - t62 + t611 - t71) q^3 \\
& + (- t53 - t71 + t521 + t44) q^4 + (t431 - t71 + t8 - t62 + t521 - t44) q^5 \\
& + (t5111 + t422 - 2 t521 + t431 - t611 - t44 + t62) q^6 \\
& + (- t611 + t521 - 2 t53 + t332 - t422 + t71 + t4211 + t8 - t62) q^7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (t_{4211} - t_{521} - 3 t_{431} - t_{62} + t_{422} + t_8 + t_{3311} + t_{44}) q^8 \\
& + (t_{71} + t_{62} - t_{611} - 2 t_{422} + 2 t_{4211} - t_{431} - 2 t_{521} + t_{3221} + t_{53}) q^9 \\
& + (-2 t_{521} - t_{611} - 3 t_{332} + 2 t_{53} - t_{44} + 2 t_{71} + t_{41111} + t_{62} - t_8 \\
& \quad + t_{3311} + 2 t_{422} - 3 t_{4211} + 2 t_{3221}) \\
& \quad q^{10} \\
& + (t_{32111} + t_{71} - t_8 - 3 t_{422} + t_{44} + t_{3221} - t_{5111} + 2 t_{62} - t_{431} - t_{3311} \\
& \quad + t_{4211}) \\
& \quad q^{11} \\
& + (-3 t_{431} - t_{5111} + t_{611} - 2 t_8 + t_{332} + 2 t_{32111} + t_{62} + t_{71} + 2 t_{44} \\
& \quad - 3 t_{3221} + t_{2222} + t_{53} - t_{422}) \\
& \quad q^{12} \\
& + (t_{32111} + 3 t_{611} + t_{22211} + 3 t_{431} + 2 t_{521} - t_{332} - 4 t_{4211} - 2 t_{3311} \\
& \quad + t_{3221} + t_{41111} - t_{2222} - 2 t_{5111} - 2 t_{71}) \\
& \quad q^{13} \\
& + (-2 t_{62} + 3 t_{32111} - 5 t_{4211} + t_{22211} + t_{332} + 2 t_{521} + 4 t_{431} - 2 t_{3311} \\
& \quad + 4 t_{422} - 2 t_{44} - 5 t_{3221} + t_{611}) \\
& \quad q^{14} \\
& + (t_{311111} - t_{41111} + t_{332} + 2 t_{22211} + t_{431} - 2 t_{71} - t_{2222} + t_{611} \\
& \quad + 2 t_{521} - 2 t_{3221} - 2 t_{32111}) \\
& \quad q^{15} \\
& + (t_{32111} + t_{221111} + 2 t_8 - 3 t_{53} + 2 t_{611} + t_{2222} - t_{3311} - 3 t_{4211} \\
& \quad - t_{22211} + t_{422} - 3 t_{71} + 2 t_{332} - 4 t_{3221} + 3 t_{431} - t_{5111} - 3 t_{62} \\
& \quad + 6 t_{521}) \\
& \quad q^{16} \\
& + (t_8 + 2 t_{5111} - t_{2222} - 4 t_{32111} - t_{611} - 2 t_{41111} - 2 t_{53} + 3 t_{4211} \\
& \quad + t_{431} - t_{71} + t_{221111} + t_{311111} + t_{3221} + t_{332}) \\
& \quad q^{17} \\
& + (2 t_{5111} + t_8 - 3 t_{22211} + t_{2222} - t_{611} + t_{332} - t_{62} + 2 t_{4211} + t_{422} \\
& \quad - 2 t_{44} - 2 t_{32111} + 2 t_{221111} - 2 t_{521} + 2 t_{431} - t_{41111}) \\
& \quad q^{18} \\
& + (-2 t_{611} + 2 t_{5111} + t_{62} + t_{71} - 4 t_{521} + t_{53} + 4 t_{3311} - 3 t_{332} \\
& \quad + t_{311111} - t_{41111} - 3 t_{431} + 2 t_{221111} - 9 t_{32111} - 2 t_{22211} + 5 t_{4211} \\
& \quad - t_{2222} + 8 t_{3221}) \\
& \quad q^{19}
\end{aligned}$$

```

+ (- 2 t611 + 4 t3311 + t62 + 2 t53 - 4 t422 - 3 t521 - t41111 - 6 t22211
+ t5111 - t8 + 2 t2222 - 7 t431 + 2 t71 + 3 t221111 - 6 t32111 + 8 t4211
- 2 t332 + 2 t44 + 7 t3221)

20
q

+ (2 t3311 + t62 + 2 t5111 - 3 t611 - t2222 + 3 t22211 + 3 t71 - 3 t521
- 3 t221111 + t2111111 - t8 + 4 t4211 - t3221 + t332 - t32111 - t41111
+ t44 - 4 t431)

21
q

+ (- t332 - t22211 - 2 t3311 + t2222 - 3 t4211 - t5111 + 2 t41111 + t62
- t422 + t2111111 - t44 - 2 t221111 + t3221 + 5 t32111 + 3 t431
- 2 t3111111)

22
q

+ (t62 - t2222 + t71 - t431 - 2 t332 + 2 t32111 + 2 t22211 + 2 t3221
+ t2111111 + 2 t53 + t422 - 3 t221111 - t8 + t41111 - 3 t521 - t4211
- t3111111)

23
q

+ (- t71 - 2 t3311 + 2 t332 + t2222 + t22211 - 3 t5111 + 3 t521 - 2 t422
- t53 - 4 t3221 + 2 t611 + 7 t32111 + 2 t41111 + t44 - 2 t311111
- 3 t221111 - 2 t4211 + t2111111)

24
q

+ (4 t22211 - t71 + 2 t611 + 2 t521 + t53 - t332 - 4 t221111 + 2 t422
- t311111 - 2 t5111 - t62 + 4 t32111 - 2 t3221 - t2222 + 2 t41111
- 5 t4211 + t2111111)

25
q

+ (- 5 t3311 - 4 t221111 + 4 t521 + 2 t611 + 6 t431 + t8 - 2 t5111
+ 2 t41111 + 2 t332 - 7 t4211 + 3 t22211 - 2 t71 - 2 t311111 - 6 t3221
+ 10 t32111 + t422 - t44 - t62 - 2 t53 + t2111111)

26
q

+ (3 t332 + 8 t32111 - t311111 + 4 t521 - t2222 + 6 t22211 - 3 t3311
+ t41111 + t611 + 3 t422 - 6 t4211 - t71 - 2 t53 + 4 t431 - 5 t221111
- 2 t62 + t8 - t5111 - 9 t3221 + t2111111 - t44)

27
q

+ (- 3 t611 - 6 t431 - 20 t32111 + 12 t4211 + t2222 - 3 t332 + 6 t3311
- 10 t22211 - t8 + 6 t311111 - 5 t41111 + 12 t3221 + 2 t62 + 2 t71
+ 4 t5111 - 6 t521 + 15 t221111 + t44 + 2 t53 - 3 t422 - 7 t2111111
+ t111111111)

28
q

```

---

Le  $q$ -comptage de  $F[n]$  pour  $n = 9$  :

$$\begin{aligned}
 & t_9 + (t_{81} - t_9) q + (-t_9 + t_{72}) q^2 + (-t_{72} + t_{63} + t_{711} - t_{81}) q^3 \\
 & + (-t_{63} + t_{621} - t_{81} + t_{54}) q^4 + (t_{621} - t_{72} - t_{63} - t_{81} + t_{531} + t_9) q^5 \\
 & + (2 t_{63} - 2 t_{54} + t_{6111} + t_{441} + t_{522} - t_{711} - 2 t_{621}) q^6 \\
 & + (t_{72} + t_9 - 2 t_{63} + t_{5211} - t_{54} - t_{711} + t_{432} + t_{531} - t_{522}) q^7 \\
 & + (-t_{63} - t_{711} + t_{4311} - t_{72} + t_{5211} + t_{432} + t_{54} - t_{441} + 2 t_{81} - 2 t_{531}) \\
 & q^8 \\
 & + (-2 t_{432} + t_{63} + t_{4221} - 2 t_{621} + t_9 + t_{4311} + t_{5211} + t_{333} - 2 t_{531}) q^9 \\
 & + (t_{4221} + t_{81} + t_{51111} + t_{54} - 2 t_{441} - t_{6111} + t_{3321} - t_{333} + t_{4311} \\
 & - 2 t_{5211}) \\
 & q^{10} \\
 & + (2 t_{3321} + t_{42111} + t_{63} - t_{432} + 2 t_{81} - t_9 - t_{333} - t_{711} - t_{522} + 2 t_{72} \\
 & - t_{4311} - 2 t_{621}) \\
 & q^{11} \\
 & + (t_{3222} + t_{42111} + t_{54} - 2 t_9 - 3 t_{432} - t_{6111} + t_{441} + 3 t_{63} + t_{81} + t_{333} \\
 & + t_{72} + t_{711} - 3 t_{531} - t_{4311} - t_{3321} + t_{33111} - t_{621}) \\
 & q^{12} \\
 & + (t_{32211} + 2 t_{42111} + t_{54} - t_9 - 2 t_{4221} - 2 t_{4311} + t_{711} + t_{531} - t_{6111} \\
 & + 2 t_{621} + t_{3321} - t_{333} + t_{72} - t_{522} - 2 t_{5211}) \\
 & q^{13} \\
 & + (-2 t_{63} + 2 t_{32211} - 2 t_{6111} + 2 t_{432} + 4 t_{531} + t_{51111} + t_{42111} - t_{4221} \\
 & + 4 t_{621} - 3 t_{4311} - 2 t_{81} - 3 t_{3321} - 5 t_{5211} + t_{33111} + 3 t_{711}) \\
 & q^{14} \\
 & + (-t_9 - t_{81} + 4 t_{32211} - t_{3222} + t_{63} - t_{531} - t_{432} - 5 t_{3321} + t_{411111} \\
 & - 3 t_{42111} + 2 t_{711} + t_{621} - t_{441} + 2 t_{54} + t_{522} + 2 t_{333} - t_{51111} \\
 & + 2 t_{4311} - t_{72}) \\
 & q^{15} \\
 & + (t_9 - t_{32211} - t_{63} + t_{22221} + 4 t_{441} + 4 t_{432} - 3 t_{54} + t_{6111} - 4 t_{4221} \\
 & + 5 t_{531} + t_{711} + t_{321111} - 2 t_{5211} + 2 t_{621} - 2 t_{72} + 2 t_{522} - t_{333} \\
 & - 2 t_{81} - t_{51111} - 7 t_{4311} + 2 t_{42111} - t_{3222} + t_{33111}) \\
 & q^{16} \\
 & + (t_9 + t_{6111} - t_{72} + 2 t_{531} - t_{32211} - t_{63} + 2 t_{441} - 2 t_{54} + 2 t_{621} \\
 & - t_{51111} + 2 t_{321111} + 2 t_{3321} - 2 t_{81} - t_{4311} + 2 t_{522} - 2 t_{3222} \\
 & + 3 t_{432} - 4 t_{4221} - t_{333} - 2 t_{33111} + t_{22221}) \\
 & q^{17}
 \end{aligned}$$

```

+ (- 2 t54 + 2 t621 + t6111 - 2 t72 + 2 t432 + 2 t9 + 3 t4311 - 8 t3321
+ t222111 - t51111 - 2 t81 + t411111 + 2 t531 - t22221 + 2 t5211 + t3222
- 6 t42111 - 2 t63 + 3 t333 + t32211 + t321111 + 2 t4221)
18
q
+ (- 2 t711 + t222111 - t333 - t72 + 2 t6111 - 3 t42111 - t441 + t522
+ 3 t5211 - t51111 + 5 t4311 - 4 t33111 + 5 t3321 + 3 t321111 - 2 t531
- 5 t32211 + t432 - t63 - t3222 + t9)
19
q
+ (- 2 t711 - 2 t621 + 6 t3321 - 4 t42111 + 5 t4221 - 2 t522 + 5 t5211
+ 2 t222111 + 3 t4311 - 2 t33111 - t22221 + 2 t6111 - t333 - t441 - t63
+ 2 t3222 + 3 t321111 - 10 t32211 - 2 t432 + t9 - t51111 + t54 - t531)
20
q
+ (- 2 t3321 - 4 t711 + t63 - 7 t621 + 3 t6111 - 3 t531 - t441 - 2 t522
+ 2 t333 + 7 t5211 - t51111 - 3 t432 - t9 + 4 t4311 - 5 t42111 + 7 t4221
- 2 t32211 + 2 t3222 + t33111 - 3 t321111 + 3 t81 - 3 t22221 + t3111111
+ 3 t222111 + 3 t72)
21
q
+ (5 t4311 - t42111 + 3 t4221 + 3 t5211 - 4 t621 + 2 t321111 - 3 t33111
- 8 t32211 - 4 t531 + 9 t3321 - 2 t333 + t2211111 + 2 t63 - t411111
- t222111 - 2 t432 + t22221 + 2 t81 - 2 t441 + t51111 - t711)
22
q
+ (- 2 t411111 + 6 t3321 - t711 + 2 t63 - 2 t621 - t6111 + t54 - 3 t531
- t441 - t522 - 2 t333 + 2 t51111 - 2 t432 - t9 + t4311 + 4 t42111
+ t4221 - 2 t32211 + t3222 - 4 t321111 + 2 t81 - t22221 + t3111111
+ t2211111 + t72)
23
q
+ (3 t81 + 4 t4311 - 2 t9 + t33111 - 5 t531 + 4 t5211 - 3 t522 + 2 t32211
- t42111 - 3 t321111 + 4 t4221 - 3 t621 + 2 t3222 - 2 t3321 + t63
+ 2 t2211111 - 5 t432 + 3 t54 - 3 t222111 - 2 t711 + 3 t72 - 2 t441
+ 2 t333)
24
q
+ (- t9 - t333 + 2 t621 - 3 t4311 + 3 t33111 + t63 - 3 t6111 - t432
- 6 t5211 - 2 t4221 + 7 t32211 + 2 t2211111 + t3111111 - 8 t321111
- 3 t222111 - 2 t411111 + 8 t42111 - t441 + 2 t54 + 3 t51111 + 2 t711)
25
q
+ (2 t621 + 3 t33111 + t522 - t81 - t333 + 8 t42111 - 5 t4221 + 10 t32211

```

```

+ 2 t432 - 2 t3222 - 6 t321111 + 3 t2211111 + 4 t531 + 3 t22221
- 7 t5211 - 7 t222111 - 6 t4311 + t441 - 2 t3321 + 2 t711 - t54
- t411111 - 2 t6111 + 2 t51111)
26
q
+ (- t411111 - 16 t3321 + 3 t711 - 3 t63 + 6 t621 - 3 t6111 - 2 t54
+ 6 t531 + 3 t441 + 3 t522 + 3 t333 - 9 t5211 + 2 t51111 + 6 t432 + t9
- 10 t4311 + 10 t42111 - 9 t4221 + 23 t32211 - 3 t3222 + 8 t33111
- 13 t321111 - 2 t81 + 2 t22221 + t3111111 - 7 t222111 + 3 t2211111
- 2 t72)
27
q
+ (- t333 - t522 - t432 - t4221 - 2 t81 - 4 t32211 + t63 + t3222
+ 3 t321111 - t3111111 + 2 t222111 + 2 t711 + t21111111 - t5211 + 3 t441
- 6 t4311 + t33111 + 3 t42111 + 3 t3321 - t54 + t72 - 3 t2211111 - t6111
+ 2 t531)
28
q
+ (t3321 + 3 t711 + 4 t621 - 2 t6111 - t54 + t531 + t441 + 3 t522 - t333
- 5 t5211 + t51111 + 3 t432 + t9 - 2 t4311 + 3 t42111 - 5 t4221 + t32211
- 2 t3222 - t33111 + 3 t321111 - 2 t81 + t22221 - t3111111 + t222111
- 3 t22111111 + t21111111 - 3 t72)
29
q
+ (2 t621 + 2 t54 + 2 t32211 - 2 t51111 - t522 - 2 t3111111 + t222111
- 6 t3321 - 3 t441 + 2 t333 + 3 t411111 + t21111111 - 2 t63 + 2 t4221
+ 6 t4311 - 3 t22111111 + 6 t321111 - t711 - 8 t42111 - 2 t33111 + t6111
+ 2 t5211)
30
q
+ (t411111 - t3321 - t63 + t621 + t6111 - 2 t54 + 3 t531 + 2 t441 + t522
- t5211 - t51111 + 2 t432 + t9 - 3 t4311 - t42111 - t4221 - 2 t32211
+ 4 t321111 - t81 - t22221 - t3111111 + 4 t222111 - 4 t2211111
+ t21111111 - t72)
31
q
+ (2 t411111 + 6 t3321 - 2 t711 + t63 - 3 t621 + 3 t6111 - t54 - 2 t531
+ t441 + t522 - t333 + 5 t5211 - 3 t51111 + 2 t4311 - 5 t42111
- 9 t32211 - t3222 - 4 t33111 + 10 t321111 + t81 + t22221 - 2 t3111111
+ 3 t222111 - 4 t22111111 + t21111111)
32
q
+ (2 t411111 - 2 t3321 - 2 t711 - t63 - 2 t621 + 2 t6111 - t441 - 2 t522
+ t333 + 5 t5211 - 2 t51111 + 3 t4311 - 8 t42111 + 5 t4221 - 6 t32211

```

```

+ 2 t3222 - t33111 + 6 t321111 + t81 - 3 t22221 - t3111111 + 7 t222111
- 5 t2211111 + t21111111 + t72)

33
q

+ (2 t411111 + 9 t3321 - 2 t711 + 2 t63 - 4 t621 + 2 t6111 + 2 t54 - 6 t531
- 3 t441 - t522 - t333 + 7 t5211 - 2 t51111 - 4 t432 - t9 + 10 t4311
- 10 t42111 + 6 t4221 - 15 t32211 + t3222 - 7 t33111 + 13 t321111
+ 2 t81 - t22221 - 2 t3111111 + 6 t222111 - 5 t2211111 + t21111111 + t72)

34
q

+ (t411111 + 9 t3321 - t711 + 2 t63 - 4 t621 + t6111 + 2 t54 - 4 t531
- 2 t441 - 3 t522 - t333 + 6 t5211 - t51111 - 6 t432 - t9 + 6 t4311
- 8 t42111 + 9 t4221 - 18 t32211 + 4 t3222 - 4 t33111 + 10 t321111 + t81
- 4 t22221 - t3111111 + 10 t222111 - 6 t2211111 + t21111111 + 2 t72)

35
q

+ (- 6 t411111 - 12 t3321 + 3 t711 - 2 t63 + 6 t621 - 4 t6111 - 2 t54
+ 6 t531 + 3 t441 + 3 t522 + t333 - 12 t5211 + 5 t51111 + 6 t432 + t9
- 12 t4311 + 20 t42111 - 12 t4221 + 30 t32211 - 4 t3222 + 10 t33111
- 30 t321111 - 2 t81 + 5 t22221 + 7 t3111111 - 20 t222111 + 21 t2211111
- 8 t21111111 + t111111111 - 2 t72)

36
q
-----
```

## Annexe IV

# SCRIPTS DU q-COMPTAGE

### Le fichier *Plambda*

#pour Maple version 4.3, ordinateur Mipsmath.UQAM.ca (RISC/os (UMIPS) 4.0)

```
calcule_les_Plambda := proc(n)
local i, num, lambda, lambdai, resultat:
option remember:
partages_de[0] := []:
if n > 0 then partages_de[n] := partition(n): fi:
num:=expand(product((1-q^i),i=1..n)):
for lambda in partages_de[n] do
    resultat:=num:
    for lambdai in lambda do
        resultat:=normal(resultat/(1-q^lambdai)):
    od:
    P[lambda] := expand(resultat):
    lprint(`Plambda(q) pour`,lambda,`:`);
    lprint();
    print(taylor(P[lambda],q,(n*(n-1)/2)+1));
od:
lprint(`-----`);
end:
```

## Le fichier *scriptqcompt*

#pour Maple version 4.2, ordinateur Macintosh Plus (MacOS 6.0)

```

partages_de[0]:=[[[]]]:
partages_de[1]:=[[1]]:
partages_de[2]:=[[2],[1,1]]:
partages_de[3]:=[[3],[2,1],[1,1,1]]:
partages_de[4]:=[[4],[3,1],[2,2],[2,1,1],[1,1,1,1]]:
partages_de[5]:=[[5],[4,1],[3,2],[3,1,1],[2,2,1],[2,1,1,1],[1,1,1,1,1]]:
partages_de[6]:=[[6],[5,1],[4,2],[4,1,1],[3,3],[3,2,1],[3,1,1,1],
                [2,2,2],[2,2,1,1],[2,1,1,1,1],[1,1,1,1,1,1]]:
partages_de[7]:=[[7],[6,1],[5,2],[5,1,1],[4,3],[4,2,1],[4,1,1,1],
                [3,3,1],[3,2,2],[3,2,1,1],[3,1,1,1,1],[2,2,2,1],[2,2,1,1,1],
                [2,1,1,1,1,1],[1,1,1,1,1,1,1]]:
partages_de[8]:=[[8],[7,1],[6,2],[6,1,1],[5,3],[5,2,1],[5,1,1,1],
                [4,4],[4,3,1],[4,2,2],[4,2,1,1],[4,1,1,1,1],[3,3,2],
                [3,3,1,1],[3,2,2,1],[3,2,1,1,1],[3,1,1,1,1,1],[2,2,2,2],
                [2,2,2,1,1],[2,2,1,1,1,1],[2,1,1,1,1,1,1],[1,1,1,1,1,1,1,1]]:
partages_de[9]:=[[9],[8,1],[7,2],[7,1,1],[6,3],[6,2,1],[6,1,1,1],
                [5,4],[5,3,1],[5,2,2],[5,2,1,1],[5,1,1,1,1],[4,4,1],
                [4,3,2],[4,3,1,1],[4,2,2,1],[4,2,1,1,1],[4,1,1,1,1,1],
                [3,3,3],[3,3,2,1],[3,3,1,1,1],[3,2,2,2],[3,2,2,1,1],
                [3,2,1,1,1,1],[3,1,1,1,1,1,1],[2,2,2,2,1],[2,2,2,1,1,1],
                [2,2,1,1,1,1,1],[2,1,1,1,1,1,1,1],[1,1,1,1,1,1,1,1,1]]:

lprint(`Les partages de 0 à 9 sont entrés`);

les_parts_de:= proc(xxx):
  convert(xxx,set):
end:

t:=proc(xxx) local i:
  xxx[i] $ i=1..nops(xxx):
  cat(t,""):
end:

lambda_moins:=proc(xxx,ppp) local i, j, k, aux:
  aux:=[0 $ i=1..(nops(xxx)-1)]:
  i:=1:j:=1:
  while xxx[i]<>ppp do aux[i]:=xxx[i]: i:=i+1: od:
  for j from i to (nops(xxx)-1) do aux[j]:=xxx[j+1]: od:
  {aux[k] $ k=1..(nops(xxx)-1)}:
end:
```

```
calcule_les_Wlambda:=proc(nmax)
    local i, n, lambda, p, resultat:
    option remember:
    w[{}]:=1:
    for n from 1 to nmax do
        resultat:=0:
        for lambda in partages_de[n] do
            resultat:=0:
            for p in les_parts_de(lambda) do
                resultat:=
            resultat + (q^(n-p))*product((1-q^('i')), 'i'=n-p+1..n-1)*w[lambda_moins(lambda,p)]:
            w[lambda]:=expand(resultat):
        od:
        od:
    od:
lprint(`O.K. `);
end:

le_q_comptage:=proc(n) local lambda, resultat:
    if n=0 then print(`t0`) else
        resultat:=0:
        for lambda in partages_de[n] do resultat:=resultat+w[lambda]*t(lambda) od:
        print(taylor(resultat,q,(n*(n-1)/2)+1)):
    fi:
end:

calcule_les_Wlambda(9);
```

