

Publications du Laboratoire de Combinatoire et d' Informatique Mathématique

17

Emmanuel Roblet

**Une interprétation combinatoire
des approximants de Padé**

Départements de mathématiques et d'informatique



Université du Québec à Montréal

Ce numéro constitue la publication d'une thèse soutenue, le 5 avril 1994, pour l'obtention du grade de Docteur (spécialité: mathématiques pures).

Commission d'examen

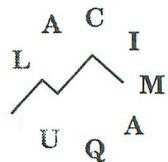
M. J.-P. ALLOUCHE	<i>LMD, CNRS Luminy</i>
M. C. BREZINSKI	<i>Université des Sciences et Techniques, Lille</i>
MME P. CASSOU-NOGUÈS	<i>Université Bordeaux I</i>
M. S. DULUCQ	<i>Université Bordeaux I</i>
M. P. FLAJOLET	<i>INRIA, Rocquencourt</i>
M. D. FOATA	<i>Université Louis Pasteur, Strasbourg</i>
M. X. G. VIENNOT	<i>CNRS, Université Bordeaux I</i>

Dépôt légal, deuxième semestre 1994, Bibliothèque nationale du Québec.

ISBN 2-89276-133-6 LACIM Montréal

© LACIM, Montréal, Octobre 1994.

Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique
Départements de mathématiques et d'informatique
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. Centre-Ville
Montréal, Qc.
Canada H3C 3P8



THÈSE
PRÉSENTÉE À
L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I
ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES
Par **Emmanuel ROBLET**
POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

**Une interprétation combinatoire
des approximants de Padé**

Soutenue le : 5 avril 1994

Après avis de : M. Claude BREZINSKI Rapporteurs
 M. Philippe FLAJOLET

Devant la Commission d'examen formée de :

M.	Dominique FOATA	Président
M.	Serge DULUCQ	Rapporteur
M.	Jean-Paul ALLOUCHE	Examinateurs
M.	Claude BREZINSKI	
Mme	Pierrette CASSOU-NOGUÈS	
M.	Philippe FLAJOLET	
M.	Xavier Gérard VIENNOT ...	

Remerciements

Claude Brezinski et Philippe Flajolet m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de ce mémoire et je les en remercie. Ma gratitude va aussi à Jean-Paul Allouche, toujours disponible pour de longues explications, à Pierrette Cassou-Noguès, dont l'intérêt pour mes travaux m'honore, à Serge Dulucq, auditeur attentif de mes exposés au groupe de travail de combinatoire énumérative, et à Dominique Foata, qui m'a toujours accueilli à Strasbourg et au Séminaire Lotharingien de Combinatoire avec gentillesse et attention. Merci à tous d'avoir accepté de faire partie du jury.

Les cours de Xavier Viennot furent l'occasion de mon premier contact avec la combinatoire. Le plaisir et le renouvellement de cette découverte n'ont pas cessé depuis lors, et se sont poursuivis durant cette période où il a dirigé mes recherches. Son goût communicatif et exigeant pour l'exposé et la rédaction n'est pas le moindre de ses enseignements. De tout cela, je le remercie très chaleureusement.

L'équipe de combinatoire et algorithmique du LaBRI, aux groupes de travail florissants, réunit les conditions d'amitiés et d'encouragement idéales pour faire une thèse : je veux dire ici un grand merci à toutes et à tous, ainsi qu'à ceux, au sein du LaBRI, que j'ai harcelé de questions pendant la rédaction. François, Miguel et Laurent méritent notamment un premier prix de patience.

Il m'est agréable de remercier les mathématiciens bordelais avec qui j'ai eu l'occasion de discuter, en particulier Henri Cohen, qui a toujours pris le temps de répondre aux problèmes que je lui ai soumis. Pierre Leroux et les membres du LACIM, de l'Université du Québec à Montréal, m'ont accueilli pendant quatre mois, à l'automne 1994. Anne, à Sherbrooke, et Srećko, à Montréal et Saint-Jean-de-Matha, m'ont fait découvrir le plaisir éprouvé face à un paysage québécois enneigé, par -27°C , contemplé à travers la fenêtre d'une maison douce et chaude. Que tous en soient remerciés.

Merci à Pierre qui m'a appris tout ce que je sais sur le Bordeaux, à Arnaud qui n'a jamais réussi à me convertir au semi-marathon, ni même au nano-marathon, à Farès, à Guy, qui prête volontiers sa bicyclette, à Laurent, qui ferait un *très bon professeur*. Mireille sait tout ce que je lui dois : une page entière n'y suffirait pas. Merci enfin à Abdelhakim, qui m'a constamment soutenu par son affection et ses encouragements.

Mes chers parents m'ont pourvu en confitures (qui se mangent) et en martins-pêcheurs (qui se regardent). Ils ont scrupuleusement relu et corrigé le manuscrit : je suis responsable des fautes figurant dans les ajouts ultérieurs. Je suis heureux de leur dédier cette thèse.

Résumé

Nous proposons des modèles combinatoires pour interpréter trois classes d'approximants rationnels : les approximants de Padé, de Padé en deux points et de Padé vectoriels. Notre méthode consiste à représenter les coefficients des séries formelles comme sommes de valuations de certains chemins étiquetés, à sommets dans le réseau carré. La géométrie de ces modèles permet d'unifier certains calculs portant sur les déterminants de Hankel, la structure de la table de Padé, ou encore les fractions continues (P-fractions), arborescentes (T-fractions) ou multicontinues (fractions de Lukasiewicz) respectivement liées à ces trois sortes d'approximants. De nouveaux algorithmes de calcul découlent naturellement de ces modèles.

Deux applications à la combinatoire énumérative sont données : une nouvelle bijection entre permutations et certaines “histoires d’Hermite”, conduisant à un développement en fraction continue de Thron d’une série génératrice trivariée sur le groupe symétrique, ainsi qu’une propriété de dualité pour ces mêmes fractions continues, relatives cette fois à l’énumération d’objets planaires appelés polyominos parallélogrammes, suivant hauteur, largeur, aire et périmètre.

Nous étudions enfin les fractions continues appelées C-fractions : leurs réduites ne fournissent pas nécessairement des approximants de Padé et nous quantifions — en général et dans le pire des cas — ce phénomène. Nous déterminons si le développement d’une série formelle en C-fraction est une bonne méthode pour une vérification algorithmique de sa rationalité, et donnons un développement inédit en C-fraction d’une série apparentée à la fonction thêta.

Mots-clés. Approximants de Padé, fractions continues, permutations, polyominos, séries formelles, séries génératrices.

English abstract We develop combinatorial models for three families of rational approximants: Padé approximants, two-point Padé approximants and vector Padé approximants. Our method consists in writing the coefficients of formal power series as sums of valuations of some labelled paths on the square lattice. The geometry of these paths provides a uniform framework for computing Hankel determinants, investigating the structure of the Padé table and studying the three classes of continued fractions linked to the these approximants, respectively named P-fractions, T-fractions, Lukasiewicz multicontinued fractions. Our models also provide new algorithms for the computation of these approximants.

We give two applications to enumerative combinatorics. First, we describe a new bijection between permutations and “Hermite histories”, which leads to a T-fraction expansion of a trivariate generating function on the symmetric group. Then we prove a T-fraction duality property for the generating function of staircase polygons, counted according to their width, height, area and perimeter.

We also study general C-fractions: their convergents are not Padé approximants and we give a measure — in the general case and in the worst case — of this phenomenon. Expanding a power series in C-fraction is a theoretical method to test the rationality of the series; we explain why it is not a convenient algorithmic method. We finally give the C-fraction expansion of a power series related to a theta function.

Keywords. Continued fractions, formal power series, generating series, Padé approximants, permutations, polyominoes.

Sommaire

Sommaire	vii
Liste des figures	xii
Introduction	1
1 Présentation des fractions continues	7
1.1 Introduction.	7
1.1.1 Les modèles combinatoires connus.	7
1.1.2 Deux généralisations possibles.	10
1.2 Fractions multicontinues.	12
1.2.1 Définitions et notations.	12
1.2.2 Les applications de déploiement.	14
1.2.3 Z-fractions multicontinues.	17
1.2.4 Fractions multicontinues de Lukasiewicz.	22
1.2.5 Qu'est-ce qu'un modèle combinatoire?	24
1.3 Fractions continues arborescentes.	25
1.3.1 Terminologie.	26
1.3.2 Développement en fractions continues arborescentes.	30
1.3.3 Un exemple : cartes planaires et arbre ${}^3T^0$	33
2 Approximants de Padé et P-fractions	39
2.1 Introduction.	39
2.2 Le modèle combinatoire.	41
2.2.1 Les P-chemins.	41
2.2.2 Développement en P-fraction.	44
2.3 Approximants de Padé.	47
2.3.1 Esquisse de la structure de la table de Padé.	47
2.3.2 Le cas des P-chemins de Jacobi.	49
2.4 Déterminants de moments.	51
2.4.1 Le calcul du déterminant $C(n/n)$	52
2.4.2 Une preuve de l'identité de la croix.	56
2.5 Structure de la C-table et de la table de Padé d'une série formelle.	61
2.5.1 Position des zéros dans la C-table.	62

2.5.2	Structure de la table de Padé.	65
2.6	Un algorithme de calcul des approximants de Padé.	68
2.6.1	Une vue d'ensemble.	69
2.6.2	Le détail des calculs.	71
2.6.3	Étude du nombre de divisions.	76
3	Approximants de Padé en deux points et T-fractions	79
3.1	Introduction.	79
3.2	Le modèle combinatoire.	81
3.2.1	Peigne et T-fractions.	81
3.2.2	Chemins de Dyck et T-fractions.	84
3.2.3	Les problèmes de l'existence et de l'unicité d'un développement en T-fraction.	86
3.2.4	L'exemple des histoires d'Hermite restreintes.	88
3.2.5	Un quotient lié à la fonction hypergéométrique de Gauss.	90
3.3	Approximants de Padé en deux points.	92
3.3.1	Introduction	92
3.3.2	Le lien entre T-fractions et approximants de Padé en deux points.	93
3.3.3	Déploiement des chemins premiers sur la brosse et T-fractions duales.	97
3.4	Un algorithme de développement en T-fractions duales d'un couple de séries formelles.	98
3.4.1	Une vue d'ensemble.	99
3.4.2	Le détail des calculs.	100
3.5	Des algorithmes de passage des T-fractions aux séries formelles et aux fractions de Jacobi et de Stieltjes.	104
3.5.1	Des fractions de Thron à celles de Jacobi et de Stieltjes. .	104
3.5.2	De la fraction de Thron à la série formelle.	108
3.5.3	Un exemple d'application : les histoires d'Hermite restreintes.	109
3.6	Une bijection entre les permutations et les histoires d'Hermite restreintes.	111
3.6.1	La bijection.	112
3.6.2	Séries génératrices et T-fractions.	118
3.6.3	Séries génératrices et quotients de Gauss de fonctions hypergéométriques.	121
3.7	Deux résultats de dualité dans l'énumération des polyominos. .	122
3.7.1	Introduction.	122
3.7.2	La bijection de Delest et Viennot.	125
3.7.3	La bijection de Férou et Viennot.	127
3.7.4	Développements en T-fractions duales : les polyominos parallélogrammes.	129

3.7.5	Développements en T-fractions duales : les polyominos convexes dirigés.	133
3.7.6	Fractions de Jacobi et de Stieltjes.	134
4	Approximants de Padé vectoriels et fractions de Lukasiewicz	137
4.1	Introduction.	137
4.2	Le modèle combinatoire.	138
4.2.1	Chemins, pavages et formes linéaires.	138
4.2.2	Fractions multicontinues de d -Lukasiewicz.	142
4.3	Approximants de Padé vectoriels.	144
4.4	Un algorithme de calcul des approximants de Padé vectoriels.	147
4.4.1	Une vue d'ensemble.	147
4.4.2	Le détail des calculs.	149
4.5	Les propriétés d'orthogonalité des polynômes de pavage.	152
5	Étude des C-fractions	161
5.1	Introduction.	161
5.2	Le modèle combinatoire.	162
5.2.1	Les C-chemins.	162
5.2.2	Étude des degrés du numérateur et du dénominateur des réduites.	165
5.3	Approximants de Padé et C-fractions.	168
5.4	Un algorithme de développement en C-fraction.	175
5.4.1	Une vue d'ensemble.	175
5.4.2	Le détail des calculs.	177
5.5	Fractions rationnelles et C-fractions.	179
5.6	Trois exemples de développement en C-fraction.	187
5.6.1	Nombres de Catalan et q -analogues.	187
5.6.2	La série $\sum_{n \geq 1} t^{n^2-1} - t^{n^2}$	189
A	L'interprétation des déterminants selon Gessel et Viennot	193
A.1	Notations.	193
A.2	Interprétation combinatoire des déterminants.	194
A.3	Une variante.	197
B	Les relations de tassement et l'algorithme quotient-différence	199
B.1	Tassements de chemins.	199
B.1.1	Tassement T	199
B.1.2	Tassement T^+	201
B.2	Le qd-algorithme.	202
B.2.1	La qd-transformation.	202
B.2.2	Le qd-algorithme.	203
Bibliographie		207

Liste des figures

1.1	un chemin de Motzkin et un chemin de Dyck valués.	8
1.2	la projection sur \mathbb{IN} du chemin de Motzkin de la figure 1.1.	11
1.3	le déploiement de cheminement et le déploiement propre de ω .	15
1.4	un Z-chemin premier et sa factorisation (1.23).	18
1.5	la factorisation du chemin de Lukasiewicz premier $\mathcal{DP}(\omega)$.	23
1.6	un arbre valué.	27
1.7	structure de l'arbre ${}^3T^0$.	34
2.1	la table de Padé de la série formelle $f = \sum_{n \geq 0} c_n t^n$.	40
2.2	la C-table de la série formelle $f = \sum_{n \geq 0} c_n t^n$.	41
2.3	un P-chemin de valuation $\lambda_1 \lambda_2^2 a_{1,1} a_{1,3} a_{2,5} a_{2,2}$.	42
2.4	les approximants de Padé le long de la diagonale s .	49
2.5	un P-chemin de Jacobi ω et le chemin de Motzkin $\tau(\omega)$.	50
2.6	les points A_i et B_j .	52
2.7	l'unique configuration associée au déterminant $C(N_1/N_1)$.	53
2.8	un couple de P-chemins non stable, au sens de la section A.3.	54
2.9	calcul de $C(N_1 + \dots + N_4/N_1 + \dots + N_4)$ par superposition de 4 barrières.	55
2.10	l'identité de la croix.	56
2.11	les deux types de configurations dans \mathcal{E}_n ou \mathcal{F}_n .	59
2.12	simplification du membre de droite de (2.24) par transport d'un chevron.	59
2.13	factorisation de deux chevrons.	60
2.14	quatre motifs exclus de la C-table de f .	62
2.15	bloc dont les cases <i>proches</i> contiennent des déterminants $\neq 0$.	63
2.16	déroulement de la preuve de ce qu'un bloc de la C-table est carré.	64
2.17	ce que l'on sait sur les blocs de la table de Padé après le théorème 38.	65
2.18	visualisation de la preuve du théorème 39.	66
2.19	structure de la table de Padé.	68
2.20	les sommes $h_{k,p,l}$ et $h'_{k,p,l,i}$.	72
2.21	le calcul de $h'_{k,i,k,i-1}$.	73
2.22	le calcul de $h'_{k,i,l,i-1}$ lorsque $k-1 \geq l \geq 2$.	74
2.23	le calcul de $h'_{k,i,1,i-1}$.	74
2.24	le calcul de $h'_{k,i,0,i-1}$.	74

3.1	l'arbre infini en forme de peigne et la valuation d'un chemin.	81
3.2	pics, creux et pas associés d'un chemin de Dyck.	85
3.3	une histoire d'Hermite (ω, p) restreinte.	90
3.4	l'arbre infini en forme de brosse et la valuation d'un chemin premier.	95
3.5	les calculs des systèmes \mathcal{F}_n et \mathcal{G}_n	102
3.6	les règles du losange (à gauche) et du losange partiel (à droite).	105
3.7	l'algorithme quotient-différence du lemme 53.	106
3.8	passage d'une T-fraction à la J-fraction et à la S-fraction.	108
3.9	passages entre T-fractions, S-fractions, J-fractions et séries formelles.	109
3.10	Calcul de la S- et de la J-fraction pour la série $H(t)$	110
3.11	les éléments saillants de la permutation $\sigma_0 = 23185674$	112
3.12	l'involution sans point fixe $B \circ A(\sigma_0)$	114
3.13	le motif interdit dans $I = B(\mu)$	114
3.14	deux arcs sont croisés avec (j, k)	115
3.15	l'histoire d'Hermite $C \circ B \circ A(\sigma_0)$	116
3.16	un instantané de la construction de C^{-1}	116
3.17	l'application ψ	117
3.18	un polyomino et un polyomino convexe.	123
3.19	un polyomino convexe dirigé et un polyomino parallélogramme.	124
3.20	un polyomino P et le chemin de Dyck $g(P)$	126
3.21	le huitième de plan ordonné E	127
3.22	la numérotation des cases du polyomino parallélogramme P_0	128
3.23	une multichaîne $M \in \mathcal{M}$ et le chemin de Dyck premier $\text{Supp}(M)$	129
3.24	la bijection ρ	130
3.25	la transformation de w en v^*	132
3.26	calcul de la J- et de la S-fraction pour les polyominos parallélogrammes.	135
4.1	un chemin de d -Lukasiewicz arrivant au niveau 0.	139
4.2	les $d + 1$ formes possibles d'un pavage de $\{0, \dots, k + d\}$	142
4.3	la factorisation d'un chemin de d -Lukasiewicz arrivant au niveau $a = 2$	143
4.4	deux exemples de chemins maximaux pour $d = 4$	148
4.5	le calcul de $\lambda_{p,qd+a}$ lorsque $n - a \equiv 1 \pmod{d+1}$	150
4.6	le calcul de $\lambda_{p,qd+a}$ lorsque $n - a \not\equiv 1 \pmod{d+1}$	151
4.7	l'involution Ψ	155
5.1	un C-chemin et sa valuation.	163
5.2	les sommes $h_{k,i,l}$ et $h'_{k,i,l}$	178
5.3	le calcul de $h'_{k,i,l}$	179
5.4	un chemin de Dyck d'aire 9.	188
A.1	l'hypothèse de stabilité.	195

A.2 l'action de l'involution Θ sur les configurations de chemins.	196
B.1 le tassemement T	200
B.2 le tassemement T^+	202
B.3 l'algorithme quotient-différence.	204
B.4 les règles du losange et du losange partiel.	205

Introduction

Un approximant de Padé d'une fonction est une fraction rationnelle F dont le développement de Taylor coïncide avec celui de la fonction, jusqu'à la puissance égale à la somme des degrés du numérateur et du dénominateur de F . L'intérêt majeur de cette notion réside dans les renseignements sur la fonction que l'on peut tirer en étudiant ses approximants de Padé : détermination de la nature et du lieu des singularités, réalisations de prolongements analytiques ...

L'étude des approximants de Padé a connu un développement spectaculaire depuis une vingtaine d'années, sous l'impulsion des physiciens en particulier, qui ont attiré à nouveau l'attention sur cette branche de l'Analyse. En amont de l'étude analytique, on trouve les problèmes consistant à déterminer les conditions d'existence des approximants de Padé, à les calculer — au moyen de formules closes ou d'algorithmes —, à établir leurs liens avec les fractions continues, à déterminer les relations algébriques qui les lient : toute la partie qu'on pourrait qualifier de *formelle*.

Le projet. Notre thèse est consacrée à la mise en place d'une théorie combinatoire de cette partie formelle. Nous étudions plus précisément les approximants de Padé d'une série formelle à coefficients dans un corps commutatif, noté K . Deux autres sortes d'approximants rationnels retiennent notre attention : les approximants de Padé en deux points et les approximants de Padé vectoriels. Voici leur définition :

1. Étant donné un couple de séries formelles à coefficients dans K , un approximant de Padé en deux points de ce couple est une fraction rationnelle dont les développements de Taylor et asymptotique coïncident respectivement avec la première et la seconde série formelle, jusqu'à un certain ordre.
2. Étant données $d \geq 1$ séries formelles, un approximant de Padé vectoriel est un vecteur constitué de d fractions rationnelles, de même dénominateur, et dont le développement de Taylor coïncide avec les séries formelles données jusqu'à un certain ordre.

Dans les deux cas, les ordres optimaux sont exprimés en fonction des degrés des numérateurs et dénominateurs des fractions rationnelles (les définitions précises sont données au début des premier, troisième et quatrième chapitres).

La méthode. Elle s'inspire des travaux de Flajolet [37], Françon et Viennot [42] et Viennot [84]. Elle consiste à exprimer les coefficients des séries formelles comme sommes des valuations de certains chemins sur l'ensemble des couples d'entiers naturels, ou bien sur certains arbres (une valuation est une application à valeurs dans le corps K). Nous avons ainsi trois familles de chemins, correspondant aux trois sortes d'approximants étudiés.

Pour chacune d'elles, nous adoptons la démarche suivante : définir les séries génératrices des chemins valués et prouver qu'une certaine façon de borner les chemins donne naissance à des séries génératrices rationnelles, qui sont les approximants cherchés des séries génératrices de départ. Il reste alors à déterminer quelles séries formelles sont susceptibles d'être écrites comme séries génératrices de chemins valués, à démontrer qu'une telle écriture est unique, et à donner des moyens de la calculer.

De plus, nous obtenons grâce à cette approche combinatoire trois types de fractions continues : les P-fractions, les fractions continues de Thron (ou T-fractions) et celles de Lukasiewicz. Si les liens entre approximants de Padé usuels et P-fractions d'une part, et approximants de Padé en deux points et T-fractions d'autre part sont connus, le lien entre approximants de Padé vectoriels et fractions de Lukasiewicz est nouveau.

Quoique notre l'objet de notre thèse ne soit pas une étude systématique de la combinatoire des fractions continues, le point de vue des séries génératrices de chemins nous permet d'esquisser une classification générale des fractions continues, qu'il sera sans doute fructueux de développer.

Les résultats. D'une part, la géométrie des chemins nous permet de donner des preuves combinatoires de théorèmes connus, comme par exemple l'existence de la structure en blocs carrés de la table de Padé ou la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de polynômes soit orthogonale de dimension d , établissant ainsi l'efficacité de la méthode utilisée.

Nous apportons d'autre part un certain nombre de résultats nouveaux : trois algorithmes de calcul des approximants de Padé usuels, en deux points ou vectoriels, qui effectuent un nombre de divisions linéaire par rapport au nombre de coefficients des séries formelles pris en compte, un algorithme de passage entre fractions continues de Thron et fractions continues de Jacobi et de Stieltjes, une étude des liens entre approximants de Padé usuels et réduites des C-fractions, et enfin un algorithme de développement en C-fraction.

Les chemins valués de Dyck ou de Motzkin furent introduits pour résoudre des problèmes d'analyse d'algorithmes et de combinatoire énumérative. Nous montrons que les chemins utilisés pour interpréter les approximants de Padé en deux points peuvent aussi être mis à profit pour résoudre des problèmes de combinatoire énumérative. Nous donnons deux exemples : une nouvelle bijection entre le groupe symétrique et les "histoires d'Hermite restreintes" est décrite, ainsi que ses conséquences sur les expressions des séries génératrices; une curieuse

propriété de dualité est mise en lumière dans l'énumération de certaines figures planaires, les polyominos parallélogrammes et les polyominos convexes dirigés.

Nous donnons par ailleurs un développement en T-fraction d'un quotient de q -analogues de fonctions hypergéométriques, ainsi qu'un exemple inédit de développement en C-fraction, pour une série dont les exposants sont les carrés et les carrés moins un.

Dessiner des calculs, calculer des dessins. La nature géométrique des objets étudiés suggère de s'aider de dessins et nous n'y manquons pas, comme l'indique le titre de ce paragraphe, que nous empruntons à Xavier Viennot. Soixante-quatorze figures illustrent ce mémoire, qui sont l'axe de certaines démonstrations.

Nous montrons en particulier comment s'applique le calcul de Gessel et Viennot (voir l'annexe A de ce mémoire et [49]) en exprimant les déterminants de Hankel comme sommes de valuations de configurations de chemins sans sommets communs. Nous calculons ainsi les déterminants de Hankel diagonaux en fonction des coefficients du développement en P-fraction de la série correspondante, et démontrons combinatoirement l'identité de la croix, qui lie cinq déterminants voisins dans la C-table d'une série formelle.

Enfin, l'écriture des algorithmes utilise de façon essentielle le support visuel que fournissent les chemins.

Le rôle du corps K . Pour chaque résultat énoncé, nous nous sommes attachés à dire s'il dépendait ou non du corps des coefficients. Dans le cas d'une réponse positive, nous nous sommes efforcés de donner les variantes possibles. Par exemple, le problème de l'unicité d'un développement d'une série formelle en T-fraction admet des réponses différentes suivant que les coefficients sont dans le corps à deux éléments ou non.

Nous examinons régulièrement la situation dite générique, qui correspond au cas où les valuations des chemins sont des indéterminées indépendantes et où K est le corps des fractions rationnelles sur \mathbb{Q} de cette famille d'indéterminées.

Voici maintenant un résumé des chapitres.

Chapitre 1 : Présentation des fractions continues. Nous mettons en place la notion de modèle combinatoire de fraction continue à l'aide des séries génératrices de chemins valués. La classification que nous proposons fait apparaître deux grands groupes : les fractions multicontinues et les fractions arborescentes. Les premières se divisent à leur tour en deux sous-groupes : les Z-fractions multicontinues et celles de Lukasiewicz. Nous montrons que des spécialisations de ces familles fournissent les fractions continues usuelles : celles de Jacobi, de Stieltjes, de Thron, les P-fractions et les C-fractions.

Chapitre 2 : Approximants de Padé ordinaires et P-fractions. Le modèle combinatoire des P-chemins permet de calculer les déterminants de Hankel appartenant à une diagonale de la C-table d'une série formelle quelconque, de démontrer l'identité de la croix, expression de l'identité de Sylvester dans la C-table, et de démontrer que les zéros apparaissent dans cette dernière sous la forme de blocs carrés, à l'exclusion de tout autre motif.

Nous retrouvons aussi la structure diagonale de la table de Padé (les approximants d'une diagonale sont les réduites des développements en P-fraction de la série formelle de départ qu'on a multipliée par une puissance adéquate de la variable) ainsi que sa structure de blocs (aux blocs de la C-table correspondent des blocs carrés de la table de Padé, en dehors desquels l'existence des approximants est assurée et dans lesquels se produisent des dégénérescences).

Enfin un algorithme de développement en P-fraction apparaît naturellement lorsque l'on tente de représenter les coefficients d'une série formelle comme somme de valuations de P-chemins. Nous obtenons ainsi un moyen de déterminer l'existence des approximants de Padé de toute série formelle et, le cas échéant, de les calculer.

Chapitre 3 : Approximants de Padé en deux points et T-fractions. Ce chapitre se divise en deux parties. La première partie est consacrée à une preuve combinatoire du théorème de Jones, Thron, McCabe et Murphy [54, 64] qui établit le lien entre les réduites des T-fractions et les approximants de Padé en deux points. Le modèle combinatoire utilisé est celui des arbres en forme de peigne. A la dualité purement algébrique des T-fractions correspond une dualité entre arbres valués en forme de peigne et arbres valués en forme de brosse.

Un algorithme inédit de développement en T-fractions duales d'un couple de séries formelles est décrit. Il est numériquement plus stable que le FG-algorithme de Jones et Thron [55]. Nous donnons aussi un algorithme de transformation d'une T-fraction en fraction de Jacobi ou de Stieltjes. Nous nous attachons par ailleurs à résoudre les questions de l'existence et de l'unicité d'un développement en T-fraction.

Deux exemples de développements en T-fraction sont donnés, portant l'un sur un quotient de Gauss, l'autre sur une série génératrice de certaines "histoires" combinatoires, appelées histoires d'Hermite restreintes.

La deuxième partie comprend deux applications du modèle des T-fractions à la combinatoire énumérative. C'est une nouvelle bijection entre groupe symétrique et histoires d'Hermite restreintes qui nous conduit à la première application. Il s'agit du développement en T-fraction, puis du calcul d'une série génératrice trivariée sur le groupe symétrique (les permutations sont énumérées suivant leur nombre d'inversions, d'éléments saillants supérieur gauches et inférieurs droits). Nous retrouvons alors les résultats de Dumont et Kreweras [33] et de Zeng [91] par une méthode bijective.

La seconde application porte sur des objets connus en physique statistique sous le nom d'animaux sur réseaux, et en combinatoire sous le nom de polyominos. Si l'énumération des objets généraux est un problème ouvert, de nombreuses classes, définies par des propriétés de direction privilégiée ou de convexité, ont été étudiées (*cf.* l'article de synthèse [89] de Viennot).

Nous calculons explicitement une T-fraction et sa duale qui correspondent à un couple de séries formelles énumérant des polyominos parallélogrammes — selon hauteur, largeur, aire et périmètre —, la deuxième série se déduisant de la première par permutation et inversion de certaines variables. Un résultat analogue portant sur un couple de séries énumérant cette fois les polyominos convexes dirigés en résulte.

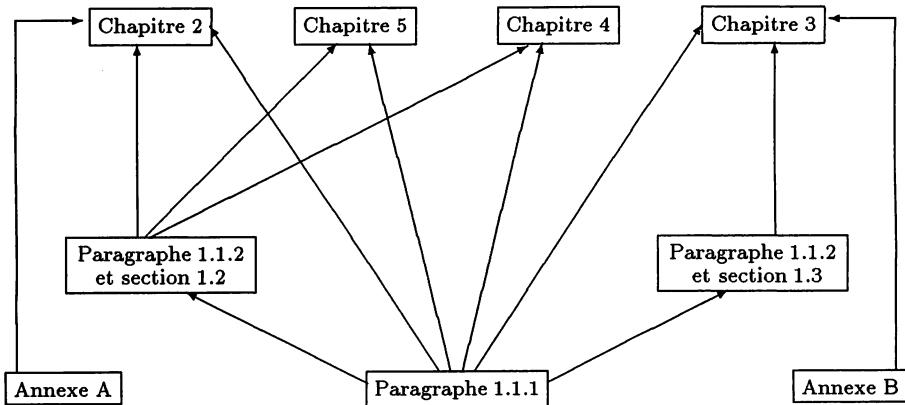
Chapitre 4 : Approximants de Padé vectoriels et fractions de Lukasiewicz. Les approximants de Padé vectoriels introduits par Van Iseghem [83] apparaissent dans notre travail en lien avec les fractions de d -Lukasiewicz. Le modèle combinatoire de ces fractions a été introduit par Viennot [84] : il utilise des chemins planaires dont les pas descendants forment des “chutes” de hauteur bornée par d , que nous appelons chemins de d -Lukasiewicz. Outre une preuve que certaines réduites des fractions continues de d -Lukasiewicz sont des approximants de Padé vectoriels, ce modèle nous permet de retrouver un théorème de caractérisation des suites de polynômes orthogonaux de dimension d , donné par Maroni [67].

Un algorithme de calcul des approximants de Padé vectoriels résulte naturellement du modèle des chemins de d -Lukasiewicz.

Chapitre 5 : Étude des C-fractions. Après avoir exposé le modèle combinatoire des C-chemins, nous examinons les conditions dans lesquelles les réduites des C-fractions sont des approximants de Padé : nous énonçons une condition suffisante et nous donnons *a contrario* des exemples où cela n'arrive jamais. Nous donnons des majorations précises du “défaut d’approximation” et étudions son comportement asymptotique dans le cas le pire.

L'algorithme de développement en C-fraction prouve l'existence et l'unicité de ce développement pour toute série formelle et soulève la question de savoir s'il est efficace pour la “détection” des fractions rationnelles parmi les séries formelles. Nous apportons des éléments de réponse à cette question et donnons pour terminer un exemple non trivial de développement d'une série en C-fraction.

Organisation du mémoire. Nous avons choisi une rédaction permettant, après la lecture du paragraphe 1.1.1, de passer directement à l'un quelconque des quatre chapitres suivants. En contrepartie, on trouvera un certain nombre de redites dans les introductions des chapitres. La figure ci-dessous décrit les liens logiques entre les différentes parties du mémoire.



Notation des fractions continues. Nous adoptons dans ce mémoire la notation horizontale, c'est-à-dire que l'expression

$$b_0 + \frac{a_0}{b_1 +} \frac{a_1}{b_2 +} \cdots \frac{a_n}{b_{n+1} +} (\cdots),$$

désigne la fraction continue finie ou infinie

$$b_0 + \cfrac{a_0}{b_1 + \cfrac{a_1}{b_2 + \cfrac{a_2}{\ddots + \cfrac{a_n}{b_{n+1} + (\cdots)}}}}.$$

Chapitre 1

Présentation des fractions continues

1.1 Introduction.

La lettre K désigne un corps commutatif, dont les éléments sont appelés les scalaires.

1.1.1 Les modèles combinatoires connus.

Nous donnons tout d'abord la définition d'un approximant de Padé d'une série formelle à coefficients dans un corps commutatif K . Il s'agit de la définition notamment adoptée par Baker et Graves-Morris [7], Brezinski [14], Gilewicz [50].

Définition 1. — Soit $f = \sum_{n \geq 0} c_n t^n$ une série formelle à coefficients dans K . Soient p et q deux nombres entiers.

Une fraction rationnelle irréductible $R = \frac{P}{Q}$ de $K(t)$ est l'approximant de Padé de f de type $[p/q]$ si les degrés de P et Q sont respectivement inférieurs ou égaux à p et q et si l'approximation

$$f(t) = R(t) + o(t^{p+q}) \quad (1.1)$$

est vérifiée en $t = 0$, c'est-à-dire que le développement de Taylor de R en 0 doit coïncider avec f jusqu'à la puissance $p + q$.

Il est facile de vérifier l'unicité d'une telle fraction rationnelle, ce qui autorise à parler de l'approximant de Padé de type $[p/q]$. En revanche, si f est donnée, une telle fraction n'existe pas nécessairement pour tous les entiers p et q .

Le terme de *forme de Padé*, ou encore d'*approximant de Padé-Frobenius* de type $[p/q]$ est réservé aux fractions rationnelles $\frac{P}{Q}$ avec $\deg(P) \leq p$, $\deg(Q) \leq q$ et satisfaisant l'approximation $Qf - P = o(t^{p+q})$ en $t = 0$, qui est une conséquence de la relation (1.1), mais ne lui est pas équivalente.

Voici maintenant la définition de deux objets d'usage courant en combinatoire énumérative.

Définition 2. — Un chemin de Motzkin est une suite $\omega = (s_0, \dots, s_n)$ de points de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vérifiant les propriétés suivantes.

1. Son origine s_0 est le point $(0, 0)$.
2. Son arrivée s_n est le point $(n, 0)$.
3. Ses pas, c'est-à-dire les couples (s_i, s_{i+1}) , sont montants, descendants ou horizontaux, comme l'indique la figure 1.1.

Un chemin de Dyck est un chemin de Motzkin sans pas horizontaux.

La longueur de $\omega = (s_0, \dots, s_n)$ est le nombre n . Nous la notons $|\omega|$. C'est aussi l'abscisse de l'arrivée du chemin ω . Remarquons que la longueur d'un chemin de Dyck est paire. Nous matérialisons toujours les sommets des chemins par des cercles, et les pas par des traits joignant ces cercles.

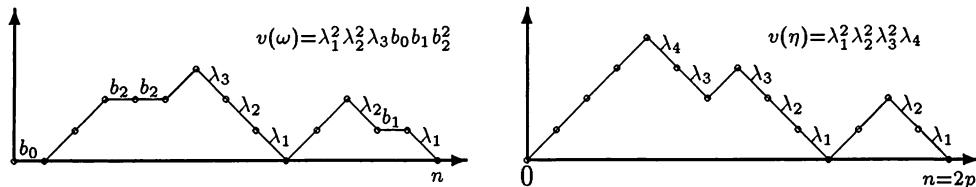


Figure 1.1: un chemin de Motzkin et un chemin de Dyck valués.

Le lien entre approximants de Padé et chemins de Motzkin (ou de Dyck) résulte de l'article fondateur de Flajolet [37], qui fournit une interprétation combinatoire des fractions continues de Jacobi et de Stieltjes. Voici leur forme générale :

$$J(t) = \frac{1}{1 - b_0 t -} \frac{\lambda_1 t^2}{1 - b_1 t -} \cdots \frac{\lambda_k t^2}{1 - b_k t -} \cdots, \quad (1.2)$$

$$S(t) = \frac{1}{1 -} \frac{\lambda_1 t}{1 -} \cdots \frac{\lambda_k t}{1 -} \cdots, \quad (1.3)$$

où les lettres λ_k et b_k sont des éléments du corps K . Nous rappelons à cette occasion que les fractions continues sont écrites en notation horizontale, définie dans l'introduction.

Les familles de fractions continues sont souvent désignées par une initiale suivie du mot fraction. Ainsi, les fractions de Jacobi sont elles plus brièvement appelées J-fractions, et celles de Stieltjes, S-fractions.

Les interprétations que donne Flajolet en termes de chemins de Motzkin ou de Dyck permettent, comme le fait remarquer Viennot [84] dans sa monographie sur les polynômes orthogonaux formels, de retrouver le lien entre les réduites de ces deux types de fractions continues et les approximants de Padé de type

$[k/k]$ et $[k/k + 1]$. Nous rappelons ci-après leurs résultats, dans le cadre de nos hypothèses : le corps K est commutatif et les fractions continues ont les formes (1.2) et (1.3).

Soient deux suites de scalaires $\lambda = (\lambda_k)_{k \geq 1}$ et $b = (b_k)_{k \geq 0}$. Soit ξ un pas d'un chemin de Motzkin ou de Dyck dont le *niveau* (ordonnée du premier sommet du pas) est k . Nous définissons la valuation de ξ comme suit :

$$v(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \text{ est un pas montant,} \\ b_k & \text{si } \xi \text{ est un pas horizontal (cas d'un chemin de Motzkin),} \\ \lambda_k & \text{si } \xi \text{ est un pas descendant.} \end{cases} \quad (1.4)$$

La valuation d'un chemin ω , notée $v(\omega)$, est par définition le produit des valuations de ses pas (*cf.* figure 1.1). Nous convenons que la valuation du chemin de longueur nulle est 1. Nous définissons deux séries génératrices de chemins valués, éléments de $K[[t]]$:

$$M(\lambda, b; t) = \sum v(\omega) t^{|\omega|}, \quad (1.5)$$

$$D(\lambda; t) = \sum v(\omega) t^{\frac{|\omega|}{2}}, \quad (1.6)$$

où la première somme (*resp.* la seconde) porte sur tous les chemins de Motzkin (*resp.* de Dyck). Nous abrégeons souvent les notations de ces séries en $M(t)$ et $D(t)$. Le résultat suivant [37, 84] est en quelque sorte le paradigme de l'approche combinatoire des fractions continues et des approximants de Padé.

Proposition 3. — 1) *Les séries $M(t)$ et $D(t)$, respectivement définies par (1.5) et (1.6) admettent les développements en fraction continue $J(t)$ et $S(t)$ donnés par (1.2) et (1.3).*

2) *Les séries génératrices $M_k(t)$ et $D_k(t)$ des chemins de Motzkin et de Dyck bornés au niveau k sont rationnelles. Ce sont les approximants de Padé des séries $M(t)$ et $D(t)$, respectivement de type $\left[\lfloor \frac{k}{2} \rfloor / \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor\right]$ et $[k/k + 1]$, où la notation $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre réel x .*

3) *Les fractions rationnelles $M_k(t)$ et $D_k(t)$ sont respectivement égales aux réduites d'ordre k des fractions continues $J(t)$ et $S(t)$ données par (1.2) et (1.3).*

A partir de ces résultats et de la méthode de Gessel et Viennot [49] interprétant combinatoirement des déterminants — exposée à l'annexe A —, il est possible de mettre en œuvre une théorie combinatoire des approximants de Padé : le point 2 de la proposition ci-dessus constitue le premier pas de cette théorie.

Mais on achoppe rapidement sur le problème suivant : étant donné une série formelle $F \in K[[t]]$, il n'existe pas nécessairement deux suites de scalaires λ et b (*resp.* une suite λ) telles que $F(t)$ soit la série génératrice des chemins de Motzkin valués $M(\lambda, b; t)$ (*resp.* la série $D(\lambda; t)$ des chemins de Dyck valués).

Cela signifie en d'autres termes que certaines séries formelles n'admettent pas de développement en fraction continue de Jacobi ou de Stieltjes.

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser d'autres chemins que ceux de la définition 2 et nous résumons ainsi la démarche de ce mémoire :

“Représenter les coefficients des séries formelles comme sommes de valuations de certains chemins, la longueur des chemins correspondant aux indices des coefficients.”

Pour trois sortes d'approximants rationnels (les approximants de Padé usuels de la définition 1, les approximants de Padé en deux points et les approximants de Padé vectoriels), nous appliquerons le programme suivant.

1. Décrire les chemins valués utilisés et définir leur(s) série(s) génératrice(s).
2. Décrire une manière de borner les chemins qui conduise aux approximants de Padé adéquats; en déduire leurs propriétés formelles.
3. Déduire, grâce aux équations fonctionnelles portant sur les séries génératrices, des développements en fractions continues.
4. Etant donné une (plusieurs) série(s) formelle(s), résoudre les problèmes de l'existence et de l'unicité d'une valuation sur ces chemins qui permet de représenter les coefficients de la (des) série(s).

L'ordre indiqué n'est pas impératif. Les problèmes du point 4 seront résolus en donnant des algorithmes, inspirés de la géométrie des chemins, permettant de passer des coefficients aux valuations et vice-versa.

Par ailleurs, dans le cas des approximants en deux points, nous utiliserons le modèle développé pour résoudre deux problèmes de combinatoire énumérative. Le dernier chapitre est consacré aux chemins permettant une interprétation combinatoire des *C-fractions*, qui n'ont pas nécessairement de lien avec les approximants de Padé : le programme ci-dessus n'y est donc pas respecté.

Notations. — Nous réservons la lettre t pour désigner la variable courante, la lettre n pour les indices des coefficients des séries formelles et les longueurs des chemins, et la lettre k pour les indices des valuations des pas et ceux des réduites des fractions continues.

Le lecteur peut maintenant passer directement au chapitre de son choix, ou bien achever de lire celui-ci.

1.1.2 Deux généralisations possibles.

La figure 1.1 présente les chemins de Motzkin et de Dyck sous une forme bidimensionnelle, pour faciliter leur lecture. Mais il est clair qu'un tel chemin est

parfaitement défini si l'on ne retient que la suite des ordonnées de ses sommets, c'est-à-dire si l'on considère sa projection sur l'axe des ordonnées.

On obtient alors des chemins à sommets dans \mathbb{N} , dont les pas vont de i à $i - 1$, i ou $i + 1$ dans le cas des chemins de Motzkin, et seulement de i à $i - 1$ ou $i + 1$ dans le cas des chemins de Dyck. Par exemple, la projection du chemin de Motzkin de la figure 1.1 est la suite d'entiers $(0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 1, 0)$. Nous avons représentée cette suite à la figure 1.2.

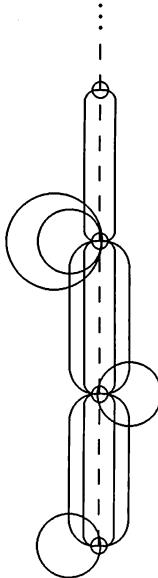


Figure 1.2: la projection sur \mathbb{N} du chemin de Motzkin de la figure 1.1.

C'est à partir de cette version unidimensionnelle que nous décrivons deux généralisations possibles.

1. Nous changeons *la nature des pas*, qui peuvent aller de $i \in \mathbb{N}$ à $j \in \mathbb{N}$, avec ou sans restriction sur ces valeurs.
2. Nous changeons *le support des chemins*, en choisissant un arbre de forme quelconque au lieu de l'ensemble \mathbb{N} .

Dans les deux cas, nous obtenons des classes de chemins trop vastes pour que le problème de l'unicité (point 4 du programme de la page 10) admette une réponse positive. En revanche, ces généralisations permettent de décrire d'une manière unifiée la plupart des fractions continues rencontrées dans la littérature. Nous précisons maintenant quelques points de vocabulaire.

Les fractions continues *arborescentes*¹ sont étudiées depuis une trentaine d'années, en particulier en Ukraine, autour de Skorobogat'ko [77]; voir aussi

¹ *Branching continued fractions*, suivant la terminologie anglaise.

Cuyt et Verdonk [25], Kuchminskaya et Siemaszko [57], Siemazko [75, 76]. Choisi à cause de la forme d'arbre sous-jacente à l'écriture d'une telle fraction, ce nom reçoit sa signification combinatoire avec Viennot [84] : ses résultats sont rappelés en section 1.3, avec quelques compléments.

Il reste à nommer les fractions continues qu'on obtient en généralisant les *pas* des chemins de Motzkin. Le terme “multicontinues” — en référence à la façon dont se déroulent les itérations des équations fonctionnelles des pages 19 et 22 — a été proposé par Viennot [84]. Ce terme n'est pas encore consacré par l'usage : Arquès, Françon, Jacques et Orieux [4, 5, 6] utilisent l'adjectif multicontinues pour qualifier les fractions qui sont ici appelées arborescentes.

Notons pour terminer que d'autres types de généralisations ont été considérées par Labelle et Yeh [59] : ils étendent la notion de chemins de Dyck à des chemins sur \mathbb{Z} , et le premier auteur [58] obtient ainsi des fractions continues différentes de celles que nous étudions dans la suite de ce mémoire.

1.2 Fractions multicontinues.

1.2.1 Définitions et notations.

Les chemins sur \mathbb{N} que nous allons étudier ici sont des successions de pas montants — analogues aux pas montants de la définition 2 —, ou descendants, qui sont cette fois des “chutes” de hauteur quelconque. Plus précisément, nous donnons la définition suivante.

Définition 4.— 1) *Un chemin sur \mathbb{N} est une suite $\omega = (s_0, \dots, s_n)$ d'entiers vérifiant les conditions*

$$s_{i+1} \leq 1 + s_i \quad (1.7)$$

pour tout nombre entier i tel que $0 \leq i \leq n - 1$.

2) *Si $n \geq 1$ et si $\omega = (s_0, \dots, s_n)$ est un chemin sur \mathbb{N} , les couples (s_i, s_{i+1}) pour $0 \leq i \leq n - 1$ s'appellent les pas du chemin ω . Lorsque $s_{i+1} = s_i + 1$, on dira que le pas est montant, et l'on parlera de pas descendant de hauteur h si le nombre $s_i - s_{i+1}$ est positif ou nul et vaut h . Si $h = 0$, on dira aussi que le pas est une boucle.*

Le sommet s_0 est l'*origine* de ω et s_n est son *arrivée*. Ces deux sommets sont les *extrémités* de ω . Nous notons $\Omega(\mathbb{N})$ l'ensemble des chemins sur \mathbb{N} dont les extrémités sont égales à 0. Si $\omega = (s_0, \dots, s_n)$ et $\eta = (r_0, \dots, r_p)$ sont deux chemins sur \mathbb{N} tels que $s_n = r_0$, nous définissons le produit $\omega\eta$ par

$$\omega\eta = (s_0, \dots, s_n, r_1, \dots, r_p). \quad (1.8)$$

Puisque les extrémités des chemins de $\Omega(\mathbb{N})$ sont égales à 0, le produit de deux tels chemins est toujours défini. Nous obtenons ainsi une structure de

monoïde sur $\Omega(\mathbb{N})$. L'élément neutre de ce monoïde est le chemin (0) , qui comporte un seul sommet.

Soit $\lambda = (\lambda_{l,k})_{0 \leq k \leq l}$ une famille d'éléments d'un corps commutatif K .

Définition 5. — *La valuation d'un chemin $\omega = (s_0, \dots, s_n)$ sur \mathbb{N} est la quantité*

$$v(\omega) = \prod_{i=0}^{n-1} v(s_i, s_{i+1}), \quad (1.9)$$

où les valuations des pas sont données par

$$v(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \text{ est un pas montant} \\ \lambda_{l,k} & \text{si } \xi \text{ est le pas descendant } (l, k). \end{cases} \quad (1.10)$$

Nous convenons que la valuation des chemins réduits à un seul sommet vaut 1.

Exemple. — Soit le chemin $\omega = (0, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 3, 3, 4, 3, 0)$. Alors

$$\begin{aligned} v(\omega) &= 1 \times 1 \times 1 \times \lambda_{3,1} \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times \lambda_{6,3} \times \lambda_{3,3} \times 1 \times \lambda_{3,0}, \\ &= \lambda_{3,1} \lambda_{6,3} \lambda_{3,3} \lambda_{3,0}. \end{aligned}$$

L'application $v : \Omega(\mathbb{N}) \rightarrow K$, restriction de la valuation aux chemins à extrémités nulles, est *multiplicative*, c'est-à-dire que $v(\omega\eta) = v(\omega)v(\eta)$ pour tous les chemins ω et η de $\Omega(\mathbb{N})$.

Définition 6. — 1) Une pièce est un intervalle non vide de \mathbb{N} , c'est-à-dire un ensemble de la forme $\{k, k+1, \dots, l\}$, que l'on note aussi $[k, l]$. La longueur d'une telle pièce est $l - k + 1$. Un pavage de $\{0, \dots, n-1\}$ est un ensemble fini, éventuellement vide, de pièces incluses dans $\{0, \dots, n-1\}$ et deux à deux disjointes.

2) La valuation de la pièce $[k, l]$ est $v([k, l]) = \lambda_{l,k}$ et le poids d'un pavage α est

$$w(\alpha) = \prod_{p \in \alpha} (-v(p)). \quad (1.11)$$

Cette quantité vaut 1 par convention lorsque le pavage est vide.

3) Nous définissons le polynôme de pavage de $\{0, \dots, n-1\}$ par

$$P_n(t) = \sum w(\alpha) t^{\text{lib}(\alpha)}, \quad (1.12)$$

où la somme porte sur les pavages de $\{0, \dots, n-1\}$, et dans laquelle le nombre entier $\text{lib}(\alpha)$ désigne le nombre d'éléments de $\{0, \dots, n-1\}$ n'appartenant à aucune pièce de α . Ces éléments sont appelés les points libres du pavage.

La convention du point 2 de la définition nous dit que $P_0(t) = 1$. Nous avons par exemple :

$$\begin{aligned} P_1(t) &= t - \lambda_{0,0}, \\ P_2(t) &= t^2 - (\lambda_{0,0} + \lambda_{1,1})t + \lambda_{1,1}\lambda_{0,0} - \lambda_{1,0}, \\ P_3(t) &= t^3 - (\lambda_{0,0} + \lambda_{1,1} + \lambda_{2,2})t^2 \\ &\quad + (\lambda_{0,0}\lambda_{1,1} + \lambda_{1,1}\lambda_{2,2} + \lambda_{2,2}\lambda_{0,0} - \lambda_{2,1} - \lambda_{1,0})t \\ &\quad - \lambda_{2,2}\lambda_{1,1}\lambda_{0,0} + \lambda_{2,1}\lambda_{0,0} + \lambda_{2,2}\lambda_{1,0} - \lambda_{2,0}. \end{aligned}$$

Le polynôme $P_n(t)$ est unitaire de degré n : c'est une conséquence immédiate de la définition.

1.2.2 Les applications de déploiement.

Soit ω un chemin sur \mathbb{N} dont les extrémités valent 0. Il existe deux façons naturelles de définir sa longueur, suivant que l'on s'intéresse plutôt au support de ω — qui est l'ensemble \mathbb{N} — ou à ω pour lui-même. Définissons d'abord l'écart d'un pas ξ :

$$\text{écart}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \text{ est un pas montant ou une boucle,} \\ h & \text{si } \xi \text{ est un pas descendant de hauteur } h > 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Définition 7.— 1) La longueur de cheminement du chemin $\omega = (s_0, \dots, s_n)$ sur \mathbb{N} est la quantité

$$lc(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \text{écart}(s_i, s_{i+1}). \quad (1.14)$$

2) La longueur propre du chemin $\omega = (s_0, \dots, s_n)$ sur \mathbb{N} est la quantité

$$lp(\omega) = n, \quad (1.15)$$

c'est-à-dire le nombre de ses pas.

On peut vérifier que les expressions (1.14) et (1.15) coïncident dans le cas où ω est composé exclusivement de pas montants, de boucles et de pas descendants de hauteur 1. Autrement dit, ces deux notions de longueur sont confondues dans le cas des chemins de Motzkin.

Donner des représentations bidimensionnelles claires des chemins de $\Omega(\mathbb{N})$, en rapport avec chaque notion de longueur est l'objet de ce paragraphe.

Pour cela, nous introduisons les applications de *déploiement de cheminement* \mathcal{DC} et de *déploiement propre* \mathcal{DP} . Ces deux applications vont de $\Omega(\mathbb{N})$ dans l'ensemble des suites de points de \mathbb{N}^2 , qu'on désigne aussi par le terme “chemin”. La description qui suit doit être lue en même temps que la figure 1.3.

Soit $\omega \in \Omega(\mathbb{N})$. Les chemins $\mathcal{DC}(\omega)$ et $\mathcal{DP}(\omega)$ sont définis en mettant bout à bout, à partir du point $(0, 0)$ de \mathbb{N}^2 , les déplolements respectifs des pas de ω . Il reste donc à définir ces derniers :

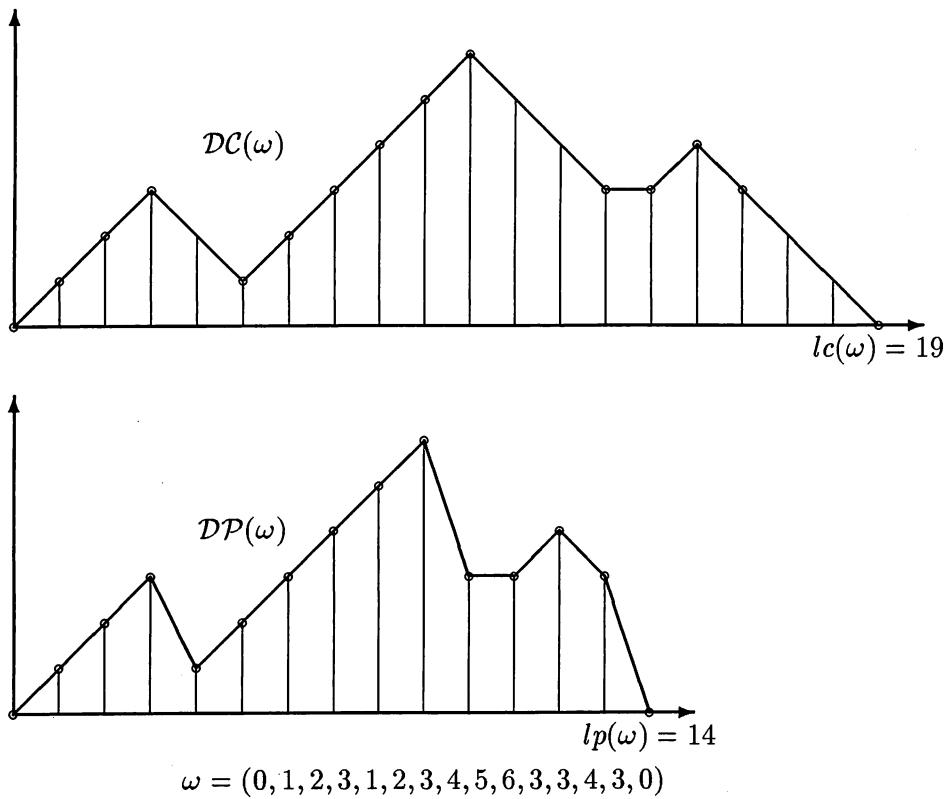


Figure 1.3: le déploiement de cheminement et le déploiement propre de ω .

- le déploiement de cheminement du pas $\xi = (l, k)$ est de la forme $((x, k), (x + \text{écart}(\xi), l))$;
- le déploiement propre du pas $\xi = (l, k)$ est de la forme $((x, k), (x + 1, l))$.

Le nombre entier x est choisi de façon à pouvoir concaténer le pas déployé avec les précédents. La figure 1.3 présente les deux déploiements du chemin

$$\omega = (0, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 3, 3, 4, 3, 0).$$

Définition 8. — *Un Z-chemin² est l'image d'un chemin de $\Omega(\mathbb{N})$ par le déploiement de cheminement \mathcal{DC} . Un chemin de Lukasiewicz³ est l'image d'un chemin de $\Omega(\mathbb{N})$ par le déploiement propre \mathcal{DP} .*

Comme on le constate en regardant la figure 1.3, la seule différence entre les deux applications de déploiement réside dans la façon dont sont transformés les pas descendants de hauteur supérieure ou égale à 2.

Remarque. — Lorsque le chemin η sur \mathbb{N}^2 va de $(0, 0)$ à $(m, 0)$, nous posons $|\eta| = m$. La construction des applications de déploiement de cheminement et de déploiement propre est faite de façon que l'on ait

$$\begin{aligned} |\mathcal{DC}(\omega)| &= lc(\omega), \\ |\mathcal{DP}(\omega)| &= lp(\omega). \end{aligned}$$

Le résultat qui suit est clair.

Lemme 9. — *Si ω et η sont deux chemins de $\Omega(\mathbb{N})$, nous avons*

$$lc(\omega\eta) = lc(\omega) + lc(\eta), \quad (1.16)$$

$$lp(\omega\eta) = lp(\omega) + lp(\eta). \quad (1.17)$$

Les applications de déploiement nous permettent donc de voir les chemins unidimensionnels de $\Omega(\mathbb{N})$ sous la forme de Z-chemins ou de chemins de Lukasiewicz, qui sont des chemins planaires. Dans les chapitres suivants, cette visualisation sera essentielle pour écrire des algorithmes qui permettent d'écrire les séries formelles de $K[[t]]$ (ou certaines d'entre elles) comme des séries génératrices de chemins valués, dont nous donnons la définition ci-dessous.

Définition 10. — *Soit $\lambda = (\lambda_{l,k})_{0 \leq k \leq l}$ une famille d'éléments d'un corps commutatif K . La série génératrice de cheminement et la série génératrice propre des chemins sur \mathbb{N} sont les éléments de $K[[t]]$ respectivement définis par*

$$f(lc, \lambda; t) = \sum_{\omega} v(\omega) t^{lc(\omega)}, \quad (1.18)$$

$$f(lp, \lambda; t) = \sum_{\omega} v(\omega) t^{lp(\omega)}, \quad (1.19)$$

²Terme que nous proposons.

³Terme proposé par Viennot dans [84]. En effet, une certaine spécialisation de (1.36) est l'image commutative de l'équation fonctionnelle définissant un langage sur l'alphabet $\{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$, précisément appelé langage de Lukasiewicz.

où v est la valuation définie par (1.9) et où les sommes sont étendues aux chemins sur \mathbb{N} dont les extrémités valent 0.

Lorsque la longueur choisie, lc ou lp , ainsi que la famille λ , sont précisées, on omettra la plupart du temps de les mentionner dans le nom de la série génératrice. On dira ainsi : “Soit $f(t)$ la série ...”.

Si k est un nombre entier, les notations

$$f_k(lc, \lambda; t) = \sum_{\omega} v(\omega) t^{lc(\omega)}, \quad (1.20)$$

$$f_k(lp, \lambda; t) = \sum_{\omega} v(\omega) t^{lp(\omega)}, \quad (1.21)$$

désignent respectivement la série génératrice de cheminement et la série génératrice propre des chemins de $\Omega(\mathbb{N})$ dont les sommets sont inférieurs ou égaux à k . Nous disons que ces chemins sont *bornés au niveau k*. Leurs images par les applications de déploiement sont des chemins contenus dans la bande horizontale $\mathbb{N} \times \{0, \dots, k\}$.

Le temps est maintenant venu d'expliquer le titre de cette section : les séries de $K[[t]]$ définies par (1.18) et (1.19) admettent respectivement un développement en fraction multicontinue et un développement en fraction arborescente dont les coefficients sont les valuations $\lambda_{l,k}$ des pas descendants. Les réduites de ces développements sont respectivement données par les expressions (1.20) et (1.21).

Examinons d'abord le cas de la série génératrice de cheminement.

1.2.3 Z-fractions multicontinues.

Une famille $\lambda = (\lambda_{l,k})_{0 \leq k \leq l}$ de scalaires est fixée.

Le cas général. Soit $f(t)$ la série génératrice donnée par (1.18). Nous allons écrire une équation fonctionnelle satisfaite par $f(t)$, qui résulte d'une factorisation des chemins.

Nous disons qu'un chemin appartenant à $\Omega(\mathbb{N})$ est *premier* s'il comporte plus de deux sommets et si ses seuls sommets égaux à 0 sont ses extrémités. Le chemin $\omega = (0, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 3, 3, 4, 3, 0)$ dont il est question à la figure 1.3 est premier. Il est évident que tout chemin $\omega \in \Omega(\mathbb{N})$ ayant au moins deux sommets admet une unique factorisation

$$\omega = \eta_1 \dots \eta_p$$

en chemins premiers [le terme factorisation est relatif au produit défini par (1.8)].

Notons $h(t) = \sum_{\omega} v(\omega) t^{lc(\omega)}$ la série génératrice (de cheminement) qui porte sur les chemins premiers. Le caractère multiplicatif de la valuation v , le lemme 9

et enfin l'existence et l'unicité de la factorisation en chemins premiers prouvent alors que

$$f(t) = \frac{1}{1 - h(t)}. \quad (1.22)$$

Soit $\omega \in \Omega(\mathbb{N})$ un chemin premier. L'alternative suivante est vraie.

- Ou bien ω est la boucle $(0, 0)$, dont l'image par l'application \mathcal{DC} est le pas horizontal $\circ \longrightarrow \circ$.
- Ou bien il existe un unique nombre entier $p \geq 1$ et une unique factorisation

$$\omega = u_1\omega_1 \dots u_p\omega_p\xi, \quad (1.23)$$

dans laquelle ξ est le pas descendant $(p, 0)$, les u_i sont des pas montants et ω_i est un chemin sur \mathbb{N} , éventuellement réduit à un seul sommet, qui va de i à i sans sommet inférieur à i . La figure 1.4 présente cette factorisation pour $p = 3$ et ω_2 réduit à un seul sommet. En fait, la factorisation est vue sur le Z-chemin $\mathcal{DC}(\omega)$.

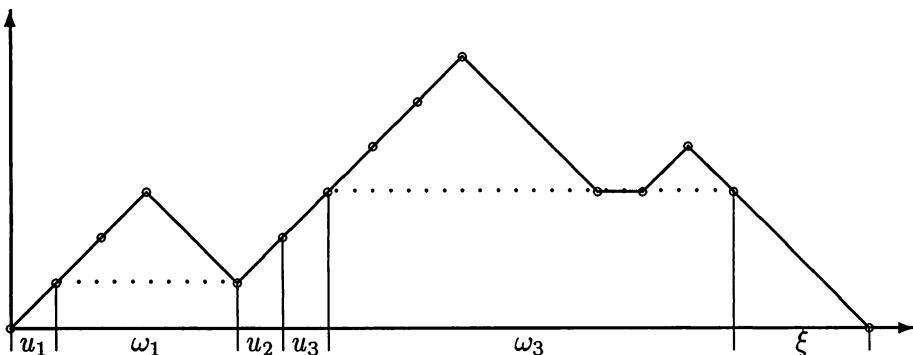


Figure 1.4: un Z-chemin premier et sa factorisation (1.23).

Nous notons δ l'application de *décalage* ainsi définie : si E est une expression algébrique contenant les termes de la famille λ , la notation δE désigne l'expression E dans laquelle on a effectué la substitution

$$\lambda_{l,k} \longrightarrow \lambda_{l+1,k+1}. \quad (1.24)$$

Par exemple, la série génératrice (de cheminement) des chemins ω_i sur \mathbb{N} , dont les extrémités sont égales à l'entier i et dont tous les sommets sont supérieurs à i , s'écrit :

$$f(lc, \delta^i \lambda; t) = \delta^i f(lc, \lambda; t) = \delta^i f(t).$$

Grâce au caractère multiplicatif de la valuation v , au lemme 9, à l'existence et à l'unicité de la factorisation (1.23) et enfin, à l'identité (1.22), nous avons l'équation fonctionnelle

$$f(t) = \frac{1}{1 - \lambda_{0,0}t - \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_{p,0} \prod_{i=1}^p \delta^i f(\lambda; t) t^{2p}}. \quad (1.25)$$

Notation. — Dans la suite de ce mémoire, les termes *cas générique* ou *situation générique* signifient que le corps K est le corps des fractions rationnelles $\mathbb{Q}(\lambda)$, les lettres $\lambda_{l,k}$ étant considérées comme des indéterminées indépendantes. Nous pourrions choisir, à la place du corps \mathbb{Q} des nombres rationnels, un corps de caractéristique nulle, sans que cela modifie les résultats énoncés (cela n'est en revanche plus vrai si l'on remplace \mathbb{Q} par un corps de caractéristique $p > 0$).

Voici alors le résultat essentiel de cette section.

Théorème 11. — 1) La série formelle $f_k(lc, \lambda; t)$ définie par (1.20) est une fraction rationnelle et elle vérifie l'approximation suivante en $t = 0$:

$$f(lc, \lambda; t) = f_k(lc, \lambda; t) + o(t^{2k+1}), \quad (1.26)$$

c'est-à-dire que les coefficients des séries f et f_k coïncident jusqu'à la puissance $2k+1$. Cette approximation est optimale dans le cas générique, défini par la notation de la page 19.

2) La série $f(lc, \lambda; t)$ admet le développement $Z(\lambda; t)$ en Z-fraction multicontinue

$$\frac{1}{1 - \lambda_{0,0}t - \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_{p,0} t^{2p} \prod_{i=1}^p \frac{1}{1 - \lambda_{i,i}t - \sum_{q=1}^{\infty} \lambda_{q+i,i} t^{2q} \prod_{j=1}^q \frac{1}{1 - \lambda_{i+j,i+j}t - \dots}}}, \quad (1.27)$$

obtenu en itérant l'équation fonctionnelle (1.25).

Démonstration : 1) La série f_k s'obtient à partir de f en substituant par 0 tous les scalaires $\lambda_{l,j}$ tels que $l \geq k+1$. Il est clair qu'on obtient une fraction rationnelle en itérant $k+1$ fois l'équation fonctionnelle (1.25) dans laquelle on a effectué ces substitutions.

L'approximation (1.26) est vraie car les chemins de $\Omega(\mathbb{N})$ de longueur inférieure ou égale à $2k+1$ sont nécessairement bornés au niveau k . Parmi les chemins de $\Omega(\mathbb{N})$ de longueur $2k+2$, au moins un n'est pas borné au niveau k . En fait, il y en a $p(2k+2)$, où $p(n)$ désigne le nombre de *partages* de l'entier n . Dans le cas générique, le coefficient de t^{2k+2} dans la différence $f - f_k$ est donc un polynôme en les variables $\lambda_{i,j}$ à coefficients entiers strictement positifs.

2) L'approximation (1.26) prouve la *convergence formelle* des fractions rationnelles f_k vers la série f , c'est-à-dire dans l'espace vectoriel $K[[t]]$ muni, par exemple, de la norme $\|u\| = 2^{-\text{ordre}(u)}$.

□

Définition 12. — 1) La fraction rationnelle $f_k(lc, \lambda; t)$ est la réduite d'ordre k de la Z-fraction multicontinue donnée par (1.27).

2) Le développement (1.27) est fini s'il existe un nombre entier $k \geq 0$ tel que $\lambda_{l,k} = 0$ pour tout $l > k$.

Autrement dit, un développement en Z-fraction multicontinue est fini s'il correspond à la série génératrice (de cheminement) des chemins *bornés au niveau k* , pour un $k \geq 0$. Le développement est dit infini dans le cas contraire. Voici la réduite d'ordre 2 :

$$f_2(lc, \lambda; t) = \frac{1}{1 - \lambda_{0,0}t - \frac{\lambda_{1,0}t^2}{1 - \lambda_{1,1}t - \frac{\lambda_{2,1}t^2}{1 - \lambda_{2,2}t}}} - \frac{\lambda_{2,0}t^4}{1 - \lambda_{1,1}t - \frac{\lambda_{2,1}t^2}{1 - \lambda_{2,2}t}}. \quad (1.28)$$

Remarque. — Nous avons pris soin de distinguer la série $f(t)$ du développement $Z(\lambda; t)$, car une série formelle peut admettre plusieurs développements en Z-fraction. En d'autres termes, lorsque $F = \sum_{n \geq 0} c_n t^n$ est donnée dans $K[[t]]$ avec $F(0) = 1$, il existe éventuellement plusieurs familles λ de scalaires telles que $F = f(lc, \lambda; t)$.

Voici une manière de rendre vraisemblable cette dernière affirmation : chercher une famille λ telle que $F = f(lc, \lambda; t)$, c'est chercher à résoudre pour tout n les systèmes :

$$(S_n) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad c_i = \sum v(\omega),$$

où la somme porte sur les chemins de $\Omega(\mathbb{N})$ de longueur de cheminement égale à i . Le système (S_n) comporte n équations et $\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}{2}$ inconnues (plus une, si n est impair) : ce sont les $\lambda_{l,k}$ pour $0 \leq k \leq l \leq \frac{n}{2}$ (sauf $\lambda_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ si n est pair). Bien que ces systèmes ne soient pas linéaires, on peut avancer qu'ils admettent en général plus d'une solution. L'exemple suivant complète cette heuristique.

Exemple. — La série $F(t) = \sum_{n \geq 0} t^{2n}$ admet le développement fini $\frac{1}{1-t^2}$.

Mais elle admet aussi un développement infini de la forme $Z(\lambda; t)$ où la famille λ vérifie

$$\lambda_{n,n} = 0 \text{ pour tout } n,$$

$$\lambda_{l,k} = 1 \text{ si } (l, k) \text{ n'est pas de la forme } (n, 0) \text{ ou } (n, n) \text{ pour } n \text{ entier.}$$

Les conditions $\lambda_{n,n} = 0$ impliquent que la valuation de tout chemin de longueur de cheminement impaire est nulle. Il suffit alors de vérifier qu'il existe une suite $(\lambda_{n,0})_{n \geq 1}$ telle que

$$c_{2n} = 1 = \sum v(\omega), \quad (1.29)$$

la somme étant étendue aux chemins de $\Omega(\mathbb{N})$ de longueur de cheminement égale à $2n$. Nous allons en fait montrer qu'une telle suite existe et est unique, en raisonnant par récurrence.

Pour $n = 1$, il est clair que $\lambda_{1,0} = 1$ est la seule solution possible. Supposons trouvées les valeurs $\lambda_{1,0}, \dots, \lambda_{n,0}$ telles que l'équation (1.29) soit satisfaite. Parmi les chemins de longueur de cheminement $2n + 2$, un seul fait intervenir la valuation inconnue $\lambda_{n+1,0}$: c'est le chemin formé de $n + 1$ pas montants, suivis d'un pas descendant du niveau $n + 1$ au niveau 0. Au rang $n + 1$, l'équation (1.29) s'écrit donc :

$$1 = \lambda_{n+1,0} + \text{termes connus}.$$

Cette équation admet une unique solution. Voici la forme que prend alors le développement correspondant de $F(t) = \sum_{n \geq 0} t^{2n}$:

$$Z(\lambda; t) = \frac{1}{1 - \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{p,0} t^{2p}}{1 - \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{t^{2q}}{1 - \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{t^{2r}}{(1 - \dots)^r} \right)^q} \right)^p} \right)}.$$

Nous remarquons que ce résultat est indépendant du corps K : les valuations $\lambda_{l,k}$ appartiennent en fait au sous-corps premier de K . Ce type de raisonnement sera abondamment utilisé dans les chapitres suivants.

Quelques cas particuliers.

Les fractions de Jacobi. Nous supposons que les scalaires $\lambda_{l,k}$ sont nuls si le couple d'indices (l, k) n'est pas de la forme (n, n) ou $(n+1, n)$ pour $n \geq 0$. Nous abrégeons alors $\lambda_{n,n}$ en b_n pour $n \geq 0$ et $\lambda_{n,n-1}$ en λ_n pour $n \geq 1$. L'équation fonctionnelle (1.25) et le développement en Z-fraction (1.27) se simplifient alors considérablement et nous obtenons le développement en fraction continue de Jacobi :

$$Z(\lambda; t) = J(t) = \frac{1}{1 - b_0 t -} \quad \frac{\lambda_1 t^2}{1 - b_1 t -} \quad \cdots \quad \frac{\lambda_k t^2}{1 - b_k t -} \quad \cdots$$

Le cas des chemins sans boucle. Supposons $\lambda_{n,n} = 0$ pour tout $n \geq 0$. La série génératrice $f(lc, \lambda; t)$ est alors paire. Autrement dit, seuls les chemins sans boucle — cf. définition 4 — apportent une contribution à la série génératrice et, la longueur de cheminement de ces chemins étant paire, la série $f(lc, \lambda; t)$ l'est aussi. Nous utilisons alors plutôt la série

$$\sum v(\omega) t^{\frac{1}{2}lc(\omega)}, \quad (1.30)$$

la somme portant sur les chemins sans boucle de $\Omega(\mathbb{N})$. Par abus de notation, nous l'appelons encore $f(lc, \lambda; t)$ ou $f(t)$; ceci ne prêtera pas à confusion car chaque chapitre ultérieur utilisera une et une seule des séries (1.18) ou (1.30). L'équation fonctionnelle (1.27) devient alors

$$f(t) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,0} \prod_{i=1}^k \delta^i f(\lambda; t) t^k}, \quad (1.31)$$

Il est facile d'imaginer un énoncé analogue au théorème 11 portant sur cette nouvelle série.

Les P-fractions. Ce cas relève des chemins sans boucle de la rubrique précédente. La description des scalaires $\lambda_{l,k}$ qu'il faut supposer nuls pour que le développement issu de l'équation fonctionnelle (1.31) soit une P-fraction est assez long. Le lecteur est renvoyé au deuxième chapitre, où l'on mènera une étude systématique des P-fractions, en lien avec les approximants de Padé.

Les C-fractions générales. Ce cas relève lui aussi des chemins sans boucle. Les C-fractions, dont voici la forme générale :

$$C(t) = \frac{1}{1 -} \frac{\lambda_1 t^{a_1}}{1 -} \cdots \frac{\lambda_k t^{a_k}}{1 -} \cdots, \quad (1.32)$$

seront étudiées au cinquième chapitre. Dans l'expression ci-dessus, la suite a est formée de nombres entiers strictement positifs. Dans le cas où cette suite est constante et vaut 1, nous retrouvons les *fractions de Stieltjes* décrites par la formule (1.3).

1.2.4 Fractions multicontinues de Lukasiewicz.

Les résultats de ce paragraphe ont été établis par Viennot [84]. Nous nous contenterons de les rappeler brièvement.

La série génératrice (1.19) satisfait l'équation fonctionnelle

$$f(lp, \lambda; t) = \frac{1}{1 - \lambda_{0,0}t - \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_{p,0} t^{p+1} \prod_{i=1}^p \delta^i f(lp, \lambda; t)}, \quad (1.33)$$

où la lettre δ garde la signification attribuée au paragraphe précédent par la formule (1.24). La factorisation des chemins de $\Omega(\mathbb{N})$ permettant de démontrer cette équation fonctionnelle, vue sur un chemin de Lukasiewicz, est donnée à la figure 1.5. Le résultat suivant est le pendant du théorème 11.

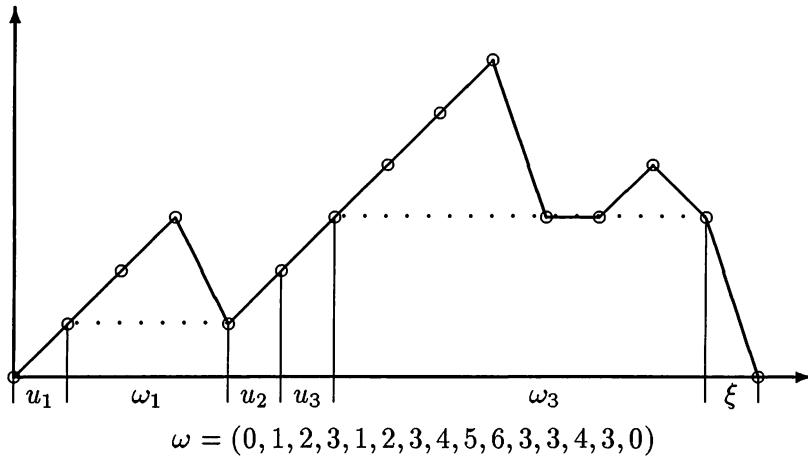


Figure 1.5: la factorisation du chemin de Lukasiewicz premier $\mathcal{DP}(\omega)$.

Théorème 13. — 1) La série $f_k(lp, \lambda; t)$ définie par (1.20) est une fraction rationnelle. Elle s'exprime à l'aide des polynômes de pavages donnés par (1.12) :

$$f_k(t) = \frac{\delta P_{k-1}^*(t)}{P_k^*(t)}, \quad (1.34)$$

où la notation $S^*(t)$ désigne le polynôme réciproque $t^n S(t^{-1})$ du polynôme $S(t)$ de degré n .

2) L'approximation suivante est vérifiée en $t = 0$:

$$f(lp, \lambda; t) = f_k(lp, \lambda; t) + o(t^{k+1}). \quad (1.35)$$

Elle est optimale dans le cas générique, défini par la notation de la page 19.

3) La série $f(\lambda; t)$ admet le développement $L(\lambda; t)$ en fraction multicontinue de Lukasiewicz ou L-fraction

$$\frac{1}{1 - \lambda_{0,0}t - \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_{p,0}t^{p+1} \prod_{i=1}^p \frac{1}{1 - \lambda_{i,i}t - \sum_{q=1}^{\infty} \lambda_{q+i,i}t^{q+1} \prod_{j=1}^q \frac{1}{1 - \lambda_{i+j,i+j}t - \dots}}}, \quad (1.36)$$

issu de l'itération de l'équation fonctionnelle (1.33).

Les fractions rationnelles $f_k(lp, \lambda; t)$ s'appellent les *réduites* du développement (1.36). Ce développement est *fini* sous les mêmes conditions qu'à la définition 12 (nous aurions pu donner, pour les réduites $f_k(lc, \lambda; t)$ du paragraphe précédent, une interprétation en termes de certains polynômes de pavages, analogue à l'interprétation (1.34) ci-dessus).

Voici la réduire d'ordre 2 du développement (1.36) :

$$f_2(lp, \lambda; t) = \frac{1}{1 - \lambda_{0,0}t - \frac{\lambda_{1,0}t^2}{1 - \lambda_{1,1}t - \frac{\lambda_{2,1}t^2}{1 - \lambda_{2,2}t}} - \frac{\lambda_{2,0}t^3}{1 - \lambda_{1,1}t - \frac{\lambda_{2,1}t^2}{1 - \lambda_{2,2}t}}}.$$

La seule différence entre cette réduite et celle donnée par (1.28) réside dans la valeur d'une puissance de t , qui vaut 3 ici et 4 dans le cas des Z-fractions. Les différences sont plus nettes sur les réduites d'ordre 3, mais leur grande taille rend impossible leur écriture sous forme développée.

Un cas particulier. Soit $d \geq 1$ un nombre entier. Nous supposons que $\lambda_{l,k} = 0$ si $l - k > d + 1$, ou encore, nous restreignons la série génératrice (1.19) aux chemins ayant des chutes de hauteur inférieure ou égale à d . Les fractions correspondantes s'appellent *fractions de d -Lukasiewicz*. Le chapitre 4 leur est consacré, où nous interpréterons des résultats de Van Iseghem [83] sur les approximants de Padé vectoriels et de Maroni [67, 68] sur l'orthogonalité de dimension d et la $\frac{1}{d}$ -orthogonalité des polynômes.

Remarque. — Lorsque $d = 1$, nous retrouvons à nouveau les fractions continues de Jacobi, vues cette fois comme fractions multicontinues de 1-Lukasiewicz.

1.2.5 Qu'est-ce qu'un modèle combinatoire?

Nous avons à plusieurs reprises utilisé l'expression “modèle combinatoire d'une famille de fractions continues”, sans lui donner de définition précise. Au terme de cette section, nous sommes en mesure de réparer cette négligence.

Les exemples donnés dans les pages précédentes sont tous obtenus suivant le même principe : après le choix d'une notion de longueur certains $\lambda_{l,k}$ sont spécialisés à zéro. On peut voir cette opération comme le choix, parmi tous les pas descendants, d'un certain nombre de pas autorisés (les autres, ceux dont les valuations ne sont pas spécialisées à zéro). L'ensemble \mathcal{T} des pas (l, k) autorisés s'appelle l'ensemble des *transitions*. Nous proposons alors la définition suivante.

Définition 14. — 1) Un modèle combinatoire de fraction multicontinue est la donnée d'un ensemble \mathcal{T} de transitions (ou encore d'une famille de tels ensembles), et d'une des deux longueurs définies par les formules (1.14) et (1.15).

2) La série génératrice du modèle combinatoire donnée par l'ensemble T et la longueur l est la la série

$$\sum v(\omega)t^{l(\omega)},$$

où la somme porte sur les chemins dont les pas descendants sont dans T .

3) Lorsque la longueur est la longueur de cheminement lc et que les pas horizontaux n'appartiennent pas à T , la série génératrice sera plutôt

$$\sum v(\omega)t^{\frac{lc(\omega)}{2}},$$

où la somme porte sur les chemins dont les pas descendants sont dans T .

On ajoute éventuellement des hypothèses supplémentaires : entre autres, on peut supposer que les chemins sont premiers et modifier les séries génératrices en conséquence. Les exemples des paragraphes précédents se reformulent ainsi :

1. Pour les J-fractions, on choisit la longueur de cheminement et l'ensemble de transitions $T = \{(l, k) \mid l = k \text{ ou } l = k + 1\}$ (il revient au même de choisir la longueur propre, comme nous l'avons remarqué).
2. Pour les S-fractions, on choisit la longueur de cheminement et l'ensemble de transitions $T = \{(k + 1, k) \mid k \geq 0\}$.
3. Pour les P-fractions, on choisit la longueur de cheminement et la famille d'ensembles de transitions décrite au deuxième chapitre.
4. Pour les C-fractions, on choisit la longueur de cheminement et la famille des ensembles de transitions $T = \{(s_k, s_{k-1}) \mid k \geq 1\}$, où la suite $(s_k)_{k \geq 0}$ est formées des sommes partielles d'une suite de nombres entiers $a_k \geq 1$.
5. Pour les fractions de d -Lukasiewicz, on choisit la longueur propre et l'ensemble de transitions $T = \{(l, k) \mid 0 \leq l - k \leq d\}$.

On trouvera à la fin de ce chapitre un tableau récapitulatif des modèles combinatoires, classés par ordre de spécialisation croissante (page 37).

1.3 Fractions continues arborescentes.

Nous avons signalé au début de ce chapitre, à la page 11, les deux possibilités de généralisation que suggère le modèle combinatoire des chemins de Dyck ou de Motzkin. Dans cette section, nous allons examiner la seconde. Les résultats sont dûs à Viennot.

1.3.1 Terminologie.

Arbres valués. Un *graphe* est un couple $G = (S, A)$ dans lequel S est un ensemble, dont les éléments s'appellent les *sommets* du graphe, et A est un ensemble de *paires* d'éléments de S , appelées *arêtes* du graphe⁴. Nous disons que deux sommets s et s' sont *adjacents* si $\{s, s'\} \in A$ et qu'une arête e est *adjacente* à un sommet s si $s \in e$. Un *cycle* du graphe $G = (A, S)$ est une suite finie (s_0, \dots, s_n) telle que $s_0 = s_n$ et que $\{s_i, s_{i+1}\}$ est une arête de G pour tout nombre entier i vérifiant $0 \leq i \leq n - 1$.

Un *arbre* est un graphe $T = (S, A)$ sans cycle, dont un sommet est distingué. Ce sommet s'appelle la *racine* de l'arbre et nous le notons r . Nous convenons que le graphe vide (celui pour lequel l'ensemble des sommets S est vide) est lui aussi un arbre. Dans ce mémoire, la lettre T désignera toujours un arbre. Nous désignons parfois par $S(T)$ l'ensemble de ses sommets et par $A(T)$ l'ensemble de ses arêtes, en particulier lorsque plusieurs arbres sont en jeu. Voici l'exemple le plus simple d'arbre infini.

Définition 15. — L'arbre filiforme a pour sommets l'ensemble \mathbb{N} des nombres entiers et pour arêtes les paires $\{n, n+1\}$ pour $n \geq 0$. On le note simplement \mathbb{N} .

La donnée de la racine détermine une orientation des arêtes d'un arbre $T = (A, S)$, qu'on peut décrire brièvement de la manière suivante : si s_1, \dots, s_p sont les sommets de l'arbre adjacents à r , les arêtes $\{r, s_i\}$ sont orientées dans le sens $r \rightarrow s_i$, les arêtes $\{s_i, x\}$ telles que $x \neq r$ sont orientées dans le sens $s_i \rightarrow x$ etc. Si une arête $\{s, s'\}$ est orientée dans le sens $s \rightarrow s'$, nous disons que s' est un enfant de s et que s est le parent de s' . Nous parlons aussi d'ancêtres et de descendants (la signification est claire).

Le *sous-arbre de T issu du sommet s* est l'arbre dont les sommets sont les descendants de s dans T et dont les arêtes sont les arêtes de T joignant ces descendants.

Soit K un corps commutatif.

Définition 16. — Une valuation sur l'arbre $T = (S, A)$ est une application définie sur $A \cup S$, à valeurs dans le corps commutatif K .

Nous notons en général v une valuation et λ (resp. b) la restriction de v à $A = A(T)$ (resp. $S(T)$). Si e est une arête et si s est un sommet de T , nous utilisons les notations $v(e)$, $\lambda(e)$ ou λ_e d'une part, et $v(s)$, $b(s)$ ou b_s d'autre part, suivant leur commodité. Nous considérons parfois que λ et b désignent respectivement les familles d'indéterminées $(\lambda_e)_{e \in A(T)}$ et $(b_s)_{s \in S(T)}$. Nous convenons de dessiner les arbres munis d'une valuation comme l'indique la figure 1.6.

⁴Plus précisément, nous venons de définir un graphe sans boucle non orienté.

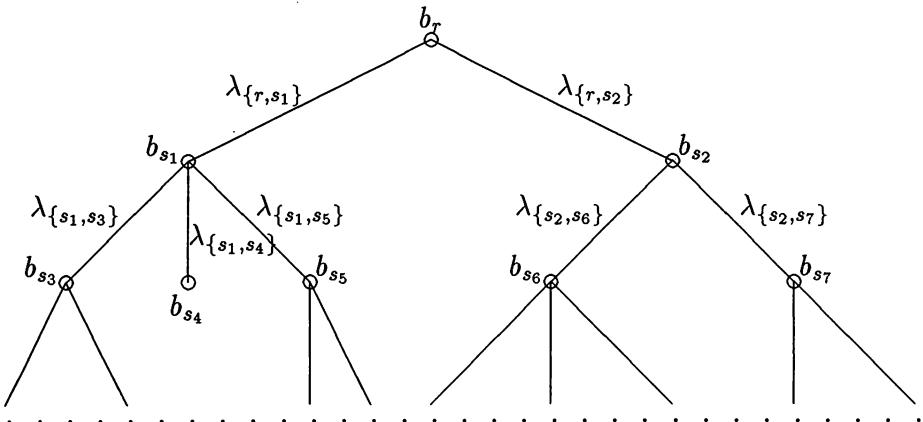


Figure 1.6: un arbre valué.

Remarque. — La définition que nous avons donnée d'un arbre ne fait pas référence à un ordre sur les enfants de chaque sommet. En ce sens, la figure 1.6 est trompeuse, de même que la proposition “Soient s_1, \dots, s_p les enfants de la racine $r \dots$ ”, car elles semblent indiquer la présence d'un ordre. Il faut imaginer les enfants de chaque sommet à permutation près.

Chemins sur un arbre.

Définition 17. — *Un chemin ω sur T , d'origine s_0 et d'arrivée s_n , est une suite de sommets (s_0, \dots, s_n) de T telle que, si $0 \leq i \leq n - 1$, le sommet s_{i+1} est un enfant de s_i , ou bien le parent de s_i , ou encore s_i lui-même. Les sommets s_0 et s_n s'appellent les extrémités de ω .*

Nous disons que le *pas* (s_i, s_{i+1}) est *montant* dans le premier cas, *descendant* dans le deuxième cas et qu'il s'agit d'une *boucle* dans le dernier cas. L'entier n est la *longueur* du chemin ω , que l'on note aussi $|\omega|$.

On vérifie immédiatement, dans le cas où T est l'arbre filiforme, que cette notion de longueur coïncide avec les deux notions de longueur de cheminement et de longueur propre, respectivement définies à la section précédente par les expressions (1.14) et (1.15).

Attention : l'usage veut que les arbres soient dessinés avec la racine en haut, comme le montre la figure 1.6. Les termes “montant” et “descendant” font donc référence, non pas à l'orientation de la page, mais à la botanique. Une autre raison nous pousse à adopter ces termes : c'est qu'il existe une exception, bien connue, à la règle de représentation des arbres. Il s'agit de l'arbre filiforme de la définition 15 : lorsque l'on représente ce dernier, naturellement plongé dans le plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, sa racine est en bas.

Le *produit* $\omega\eta$ de deux chemins tels que l'arrivée de $\omega = (s_0, \dots, s_n)$ et

l'origine de $\eta = (r_0, \dots, r_p)$ sont confondues est le chemin

$$\omega\eta = (s_0, \dots, s_{n-1}, s_n, r_1, \dots, r_p).$$

La longueur et le produit satisfont l'identité $|\omega\eta| = |\omega| + |\eta|$.

Soit U un sous-arbre de T issu du sommet s . L'ensemble des chemins sur U et d'extrémités s est noté $\Omega(U)$. La notation $\Omega(T)$ désigne donc l'ensemble des chemins sur t dont les extrémités sont égales à la racine r .

Enfin, la *profondeur* d'un sommet s de T est la longueur du plus court chemin allant de la racine r au sommet s . Ainsi, la racine de T est le seul sommet à la profondeur 0, les enfants de la racine sont à la profondeur 1 etc. La profondeur d'un arbre est un élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$: c'est le supremum de la famille des profondeurs de ses sommets. Elle est finie si, et seulement si, l'arbre est fini.

La donnée d'une valuation $v = (\lambda, b)$ — définition 16 — permet de définir sur $\Omega(T)$ une application à valeurs dans K . Par abus de langage, nous l'appelons aussi valuation et nous la notons encore v .

Définition 18.— 1) La valuation d'un chemin $\omega = (s_0, \dots, s_n)$ sur l'arbre T est la quantité

$$v(\omega) = \prod_{i=0}^{n-1} v(s_i, s_{i+1}), \quad (1.37)$$

où les valuations des pas sont données par:

$$v(s, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } (s, t) \text{ est un pas montant} \\ \lambda_{\{s, t\}} & \text{si } (s, t) \text{ est un pas descendant} \\ b_s & \text{si } (s, t) \text{ est une boucle.} \end{cases} \quad (1.38)$$

On convient que la valuation du chemin r réduit à la racine de T vaut 1.

2) La série génératrice des chemins sur un sous-arbre U de T est l'élément de $K[[t]]$ donné par

$$f(U, \lambda, b; t) = \sum_{\omega \in \Omega(U)} v(\omega) t^{|\omega|}, \quad (1.39)$$

où la somme est étendue aux chemins sur U d'extrémités la racine de U .

Notons que l'application $v : \Omega(T) \longrightarrow K$ est *multiplicative*, c'est-à-dire que $v(\omega\eta) = v(\omega)v(\eta)$ pour tout couple (ω, η) de chemins de $\Omega(T)$.

Nous abrégeons souvent la notation (1.39) en $f(U; t)$. Par exemple, la série $f(T; t)$ est la série génératrice des chemins valués de $\Omega(T)$. Si T est réduit à sa racine r , il est immédiat que

$$f(T; t) = 1 + b_r t + (b_r t)^2 + \cdots = \frac{1}{(1 - b_r t)}.$$

Si la racine de T admet p enfants, notés s_1, \dots, s_p , les premiers termes de $f(T; t)$ sont

$$1 + b_r t + (b_r^2 + \lambda_1 + \dots + \lambda_p) t^2 + (b_r^3 + 2b_r[\lambda_1 + \dots + \lambda_p] + \lambda_1 b_{s_1} + \dots + \lambda_p b_{s_p}) t^3 + \dots,$$

où nous avons appelé λ_i la valuation $\lambda_{\{r, s_i\}}$ de l'arête joignant la racine à son enfant s_i .

Pavages d'un arbre.

Définition 19. — Soit U un arbre fini. Un pavage de U est un sous-ensemble de $A(U) \cup S(U)$, formé d'arêtes et de sommets de U deux à deux disjoints.

Les éléments d'un pavage α s'appellent les *pièces*. Parmi ces pièces, nous distinguons celles qui appartiennent à $A(U)$, les *dominos*, de celles qui appartiennent à $S(U)$, les *monominos*. Les *sommets libres* de α sont les sommets de U qui n'appartiennent à aucune pièce de α ; leur nombre (fini, car l'arbre U est fini) est noté $\text{lib}(\alpha)$.

La donnée d'une valuation v sur T donné à la définition 16 permet de définir une application de l'ensemble des pavages, à valeurs dans K , que nous appelons *poids* et que nous notons w .

Définition 20. — 1) Le poids d'un pavage α de U est

$$w(\alpha) = \prod_{p \in \alpha} (-v(p)),$$

où le produit porte sur toutes les pièces de α . Nous convenons que ce poids vaut 1 lorsque α est le pavage vide.

2) Le polynôme de pavage de l'arbre U est donné par

$$P(U, \lambda; t) = \sum_{\alpha} w(\alpha) t^{\text{lib}(\alpha)}, \quad (1.40)$$

où la somme porte sur tous les pavages α de U . Si l'arbre U est vide, la convention ci-dessus impose que $P(U, \lambda; t) = P(\emptyset, \lambda; t) = 1$.

Nous adoptons des notations spéciales pour les arbres déduits de T par troncature, ainsi que pour leurs polynômes de pavage.

Définition 21. — Soient T un arbre valué et k un nombre entier.

1) L'arbre obtenu en effaçant les sommets de T de profondeur supérieure ou égale à k et leurs arêtes adjacentes est noté T_k .

2) Son polynôme de pavage est $P(T_k, \lambda; t)$ en vertu de la définition 20, et nous le notons plus brièvement $P_k(t)$.

Ainsi, T_0 est l'arbre vide et $P_0(t) = 1$, l'arbre T_1 est l'arbre réduit à la racine r de T et $P_1(t) = t - b_r$, l'arbre T_2 comporte la racine r , ses enfants notés s_1, \dots, s_p et les arêtes qui les joignent, etc.

Notation. — Dans la suite de ce mémoire, les termes *cas générique* ou *situation générique* signifient que nous supposons que le corps K est le corps des fractions rationnelles $\mathbb{Q}(\lambda, b)$, les familles λ et b étant considérées comme des familles d'indéterminées indépendantes. Nous pourrions choisir, à la place du corps \mathbb{Q} des nombres rationnels, un corps de caractéristique nulle, sans que cela modifie les résultats énoncés (cela n'est plus vrai si l'on remplace \mathbb{Q} par un corps de caractéristique $p > 0$).

1.3.2 Développement en fractions continues arborescentes.

Nous proposons de rappeler ici le résultat de Viennot [84] donnant un développement de la série $f(T; t)$ définie par (1.39) en fraction continue arborescente, dont les coefficients sont les valuations des sommets et des arêtes. Nous précisons quelques résultats dans le cas générique.

Commençons par établir une équation fonctionnelle satisfaite par cette série. Nous supposons que la racine r de T possède $p \geq 1$ enfants, notés s_1, \dots, s_p . Notons $T^{(i)}$ le sous-arbre de T issu du sommet s_i . On veillera à ne pas confondre ces arbres avec les arbres T_k de la définition 21.

Définition 22. — *Un chemin ω de $\Omega(T)$ est premier s'il n'est pas réduit à (r) et si les seuls sommets de ω égaux à r sont ses extrémités.*

Il est clair que tout élément $\omega \in \Omega(T)$ de longueur strictement positive admet une unique factorisation

$$\omega = \eta_1 \dots \eta_k \quad (1.41)$$

en chemins premiers. Si $h(T; t) = \sum v(\omega)t^{|\omega|}$ désigne la série génératrice des chemins valués premiers sur T , l'existence et l'unicité de la décomposition (1.41) prouvent l'identité

$$f(T; t) = \frac{1}{1 - h(T; t)}.$$

Soit alors ω un chemin premier. L'alternative suivante est vraie :

- ou bien ω est la boucle (r, r) ;
- ou bien il existe i tel que $1 \leq i \leq p$ et tel que ω est le produit $(r, s_i)\zeta_i(s_i, r)$ dans lequel $\zeta_i \in \Omega(T^{(i)})$ est un chemin sur l'arbre $T^{(i)}$, d'extrémités égales à s_i .

Ceci démontre l'équation fonctionnelle

$$f(T; t) = \frac{1}{1 - b_r t - \lambda_1 t^2 f(T^{(1)}; t) - \dots - \lambda_p t^2 f(T^{(p)}; t)}. \quad (1.42)$$

Nous pouvons alors démontrer le résultat suivant, dû à Viennot [84].

Théorème 23. — Soit T un arbre dont la racine r admet p fils notés s_1, \dots, s_p . Soit $T^{(i)}$ le sous-arbre de T issu du sommet s_i . Soit b_r la valuation de la racine r et soit λ_i la valuation de l'arête $\{r, s_i\}$ pour $1 \leq i \leq p$.

1) L'approximation suivante est vérifiée en $t = 0$:

$$f(T; t) = f(T_{k+1}; t) + o(t^{2k+1}), \quad (1.43)$$

c'est-à-dire que les séries $f(T; t)$ et $f(T_{k+1}; t)$ définies par (1.39) coïncident jusqu'à la puissance $2k + 1$. Si la profondeur de T est strictement supérieure à k et si nous sommes dans le cas générique (cf. la notation de la page 30), cette approximation est optimale.

2) Si T est fini, la série $f(T; t)$ est une fraction rationnelle et s'exprime de la façon suivante à l'aide des polynômes de pavage de la définition 20 :

$$f(T; t) = \frac{\prod_{i=1}^p P^*(T^{(i)}; t)}{P^*(T; t)}, \quad (1.44)$$

où la notation $S^*(t)$ désigne le polynôme réciproque $t^n S(t^{-1})$ du polynôme $S(t)$ de degré n . Dans le cas générique, la propriété réciproque est vraie : si $f(T; t)$ est une fraction rationnelle, alors l'arbre T est fini.

3) La série $f(T; t)$ admet le développement en fraction continue arborescente

$$\overline{T}(\lambda, b; t) = \cfrac{1}{1 - b_r t - \cfrac{\lambda_1 t^2}{1 - b_{s_1} t - \cdots - \cfrac{\lambda_p t^2}{1 - b_{s_p} t - \cdots}}}, \quad (1.45)$$

obtenu en itérant l'identité (1.42).

Démonstration : 1) l'approximation (1.43) entre génératrices résulte de l'égalité des ensembles $\Omega(T, 2k + 1)$ et $\Omega(T_{k+1}, 2k + 1)$. Si la profondeur de T est strictement supérieure à k , l'ensemble $\Omega(T_{k+1}, 2k + 2)$ est strictement inclus dans $\Omega(T, 2k + 2)$. Puisque $K = \mathbb{Q}(\lambda, b)$, on a alors

coefficient de t^{2k+2} dans $f(T; t) = \text{coefficient de } t^{2k+2} \text{ dans } f(T_{k+1}; t) + S,$

où S est un polynôme à coefficients entiers strictement positifs, dans les indéterminées λ_e et b_s .

2) Si T est fini de profondeur l , l'itération de l'identité (1.45) pour chacune des génératrices $f(T^{(i)}; t)$ conduit en au plus l étapes à un développement en fraction arborescente finie, car la série $f(U; t)$ d'un arbre U réduit à sa racine r vaut $\frac{1}{1 - b_r t}$.

Examinons la réciproque dans le cas où $\mathbb{Q}(\lambda, b)$. Si $f(T; t) = \sum_{n \geq 0} c_n t^n$ est une fraction rationnelle, on sait qu'il existe deux entiers q et N , ainsi que des éléments a_0, \dots, a_{q-1} dans K tels que

$$\forall n \geq N, \quad c_{n+q} = a_{q-1} c_{n+q-1} + \cdots + a_0 c_n. \quad (1.46)$$

Tous les coefficients c_n s'expriment donc linéairement en fonction des $N + q$ premiers d'entre eux. Les sous-familles de λ et b , constituées des indéterminées figurant d'une part dans les $N + q$ premiers coefficients et, d'autre part, dans les éléments a_0, \dots, a_{q-1} , sont finies. Par suite, tous les moments s'expriment polynomiallement en fonction de ces familles finies d'indéterminées, ce qui implique que T est fini.

Nous renvoyons le lecteur à [84] pour une preuve de l'expression (1.44).

3) L'approximation (1.43) assure la *convergence formelle* vers $f(T; t)$ de la suite des séries $f(T_{k+1}; t)$, c'est-à-dire dans l'espace vectoriel $K[[t]]$ muni de la norme $\|f\| = 2^{-\text{ordre}(f)}$.

□

Remarque. — Les preuves de l'optimalité de l'approximation (1.43) ainsi que de la propriété réciproque du point 2 ne sont valables que dans le cas générique. Ces restrictions proviennent, un arbre T étant fixé, de ce qu'une série formelle sur un corps quelconque admet en général plusieurs⁵ développements de la forme (1.45). En d'autres termes, si $F \in K[[t]]$ vérifie $F(0) = 1$, il existe éventuellement plusieurs familles λ et b de scalaires telles que $F = f(T, \lambda, b; t)$.

Définition 24. — 1) La fraction rationnelle $f(T_{k+1}, \lambda, b; t)$ définie par (1.39) s'appelle la réduite d'ordre k du développement (1.45).

2) Le développement (1.45) est fini s'il existe un nombre entier k tel que toutes les valuations des arêtes joignant les sommets de profondeur k à ceux de profondeur $k + 1$ soient nulles.

L'écriture effective d'un développement en fraction arborescente devient vite impossible, pour peu que T soit un arbre “touffu”. De façon générale la distribution des traits de fraction reflète la structure de l'arbre T et nous parlons plus brièvement d'un développement de forme T .

Voici $f(T_3; t)$, la réduite d'ordre 2 correspondant à l'arbre valué de la figure 1.6.

$$\frac{1}{1 - b_r t - \frac{\lambda_1 t^2}{1 - b_{s_1} t - \frac{\lambda_{\{s_1, s_3\}} t^2}{1 - b_{s_3} t} - \frac{\lambda_{\{s_1, s_4\}} t^2}{1 - b_{s_4} t} - \frac{\lambda_{\{s_1, s_5\}} t^2}{1 - b_{s_5} t}} - \frac{\lambda_2 t^2}{1 - b_{s_2} t - \frac{\lambda_{\{s_2, s_6\}} t^2}{1 - b_{s_6} t} - \frac{\lambda_{\{s_2, s_7\}} t^2}{1 - b_{s_7} t}}} \quad (1.47)$$

Quelques cas particuliers.

⁵Voir au chapitre 3 la page 88, où l'on examine en détail le cas de l'arbre en forme de peigne.

Le cas de l'arbre filiforme. Si $T = \mathbb{N}$, les fractions continues arborescentes de forme T sont les fractions continues de Motzkin :

$$\overline{T}(\lambda, b; t) = \frac{1}{1 - b_0 t -} \quad \frac{\lambda_1 t^2}{1 - b_1 t -} \quad \cdots \quad \frac{\lambda_k t^2}{1 - b_k t -} \quad \cdots,$$

où la lettre λ_n (*resp.* la lettre b_n) désigne la valuation de l'arête $\{n-1, n\}$ (*resp.* la valuation du sommet n). Si une série formelle $F \in K[[t]]$ admet un tel développement, alors il est unique : c'est un résultat classique [37, 55, 84, 90]. Cette propriété d'unicité est d'ailleurs propre à l'arbre filiforme

La variante des chemins sans boucle. Supposons que les valuations b_s , des sommets soient toutes nulles ou, ce qui revient au même, supposons que les seuls chemins sur T considérés soient sans boucle. Ces chemins sont alors de longueur paire et les fonctions génératrices $f(U; t)$ définies par (1.39) sont paires.

Nous utilisons alors plus volontiers l'indéterminée u telle que $u = t^2$. En fait, nous remplaçons, dans la définition 18, les expressions (1.39) par les suivantes :

$$f(U; t) = \sum_{\omega \in \Omega(U)} v(\omega) t^{\frac{1}{2}|\omega|}. \quad (1.48)$$

Le développement (1.45) en fraction arborescente de forme T deviendra alors

$$\overline{T}(\lambda; t) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda_1 t}{1 - \cdots} - \cdots - \frac{\lambda_p t}{1 - \cdots}}. \quad (1.49)$$

Le troisième chapitre se place dans ce cadre. Il est consacré à l'étude du cas où T possède la forme d'un peigne et permet d'explorer les liens entre fractions continues de Thron et approximants de Padé en deux points.

L'exemple suivant est lui aussi relatif à des chemins sans boucle, et conduit à un développement en fraction arborescente d'une série génératrice de cartes planaires.

1.3.3 Un exemple : cartes planaires et arbre ${}^3T^0$.

Arbres ternaires. Un arbre est dit *ternaire* si chaque sommet interne possède trois fils. Nous notons en particulier 3T l'arbre ternaire complet infini : c'est l'arbre dont les sommets sont tous les mots w sur l'alphabet $\{a, b, c\}$, et qui vérifie les propriétés suivantes.

- La racine est le mot vide.
- Les trois fils gauche de w sont les mots wa , wb et wc .

Si i est un nombre entier, on désigne par ${}^3T^i$ le sous-arbre de 3T enraciné en le mot $b^i = \underbrace{bb \dots b}_{i \text{ fois}}$ et dont les sommets sont les mots w tels que $|w|_c \geq |w|_a$.

La figure 1.7 présente l'arbre ${}^3T^0$ et décrit sa structure; le signe \sim signifie “est isomorphe à”.

Nous notons f^i la série génératrice des chemins sans boucle sur l'arbre ${}^3T^i$, allant de la racine à la racine c'est-à-dire, d'après la formule (1.48) de la page 33,

$$f^i(t) = f({}^3T^i; t) = \sum_{\omega \in \Omega_r({}^3T^i)} t^{\frac{|\omega|}{2}}. \quad (1.50)$$

La valuation implicitement utilisée ci-dessus est la valuation de comptage sur les arêtes, constante et égale à 1.

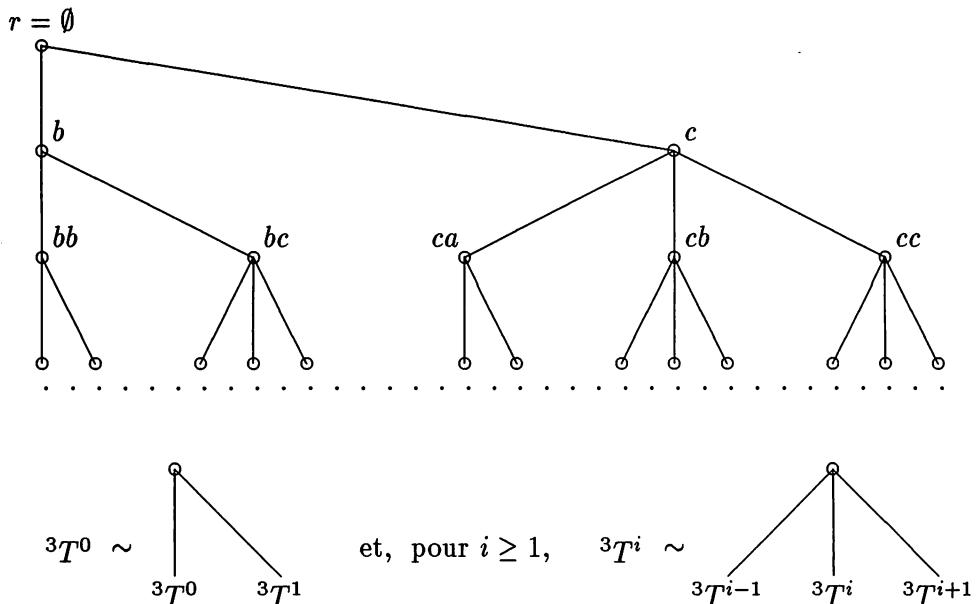


Figure 1.7: structure de l'arbre ${}^3T^0$.

Nous pouvons alors, en utilisant (1.49), établir le résultat suivant : la série f^0 admet le développement en fraction arborescente issu de l'itération des identités

$$f^0(t) = \frac{1}{1 - tf^0(t) - tf^1(t)},$$

$$f^i(t) = \frac{1}{1 - tf^{i-1}(t) - tf^i(t) - tf^{i+1}(t)} \quad \text{pour } i \geq 1.$$

Autrement dit, si λ est la valuation constante et égale à 1, le développement $\overline{^3T^0}(\lambda; t)$ vaut :

$$\frac{1}{1 - \frac{t}{1 - \frac{t}{1 - \frac{t}{1 - \frac{t}{\dots}}}} - \frac{t}{1 - \frac{t}{1 - \frac{t}{1 - \frac{t}{1 - \frac{t}{\dots}}}}}$$

Les cartes planaires. Soit n un nombre entier. Une *carte* à $2n$ brins est un couple (α, σ) dans lequel α est une involution sans point fixe et σ une permutation, toutes deux appartenant au groupe symétrique S_n : voir Cori [21]. Les *arêtes* de la carte sont les cycles de α , ses *sommets* sont les cycles de σ et ses *faces* sont les cycles de $\alpha\sigma$. Lorsque le sous-groupe de S_n engendré par α et σ est transitif, la carte est dite connexe. Le *genre* d'une carte est le nombre entier positif ou nul

$$g = \frac{1}{2} (n + 2 - z(\sigma) - z(\sigma\alpha)) ,$$

dans lequel $z(\tau)$ est le nombre de cycles de la permutation τ . Lorsque $g = 0$, la carte est *planaire*.

Tutte [79] étudie la série génératrice $f(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$, où a_n désigne le nombre des cartes planaires pointées — c'est-à-dire dont une arête et un sommet adjacent à cette arête sont distingués — ayant n arêtes. Il montre que f satisfait le système d'équations algébriques

$$\begin{cases} f(t) &= g(t) - tg^3(t) , \\ g(t) &= 1 + 3t(g(t))^2 . \end{cases} \quad (1.51)$$

On en déduit, à l'aide de la formule d'inversion de Lagrange, la valeur suivante pour $n \geq 0$:

$$a_n = 2 \times 3^n \frac{(2n)!}{n!(n+2)!} .$$

Cori et Vauquelin [22] ont donné une preuve bijective de ce que f satisfait le système ci-dessus. Cette preuve est en deux parties

1. Une bijection est construite entre l'ensemble des cartes planaires pointées à n arêtes et celui des arbres *bien étiquetés* à $n+1$ sommets. Un arbre est bien étiqueté si chaque sommet reçoit un nombre entier (son étiquette) de sorte que l'étiquette de la racine soit 0 et que les étiquettes de deux sommets issus d'un même père diffèrent d'au plus 1.
2. Une deuxième bijection est construite entre l'ensemble des arbres “mal” étiquetés et l'ensemble des triplets de mots de Dyck.

Viennot a décrit dans [84] une bijection entre arbres bien étiquetés et chemins de $\Omega_r(^3T^0)$, établissant ainsi l'égalité

$$f = f^0,$$

où f^0 est définie par (1.50). Par conséquent, donnous avons un développement en fraction arborescente de la série génératrice f des cartes planaires pointées, de forme ${}^3T^0$. Ce développement est relatif à la première partie de la preuve de Cori et Vauquelin, et ne permet pas de prouver directement la validité du système (1.51).

Notons que Françon a donné dans [41] une preuve de ce dernier résultat qui contient implicitement la bijection entre arbres bien étiquetés et chemins sans boucle sur ${}^3T^0$.

Résumé du premier chapitre. Le tableau ci-dessous présente la classification que nous avons établie dans ce chapitre. Nous y avons fait figurer tous les types de fractions continues rencontrés dans ce mémoire. Voici de brèves indications sur celles qui figurent seulement dans les chapitres ultérieurs. Les T-fractions, ou fractions continues de Thron, sont étudiées au troisième chapitre; les δ -fractions apparaissent comme une sous-famille des T-fractions dans un article de Lange [60]. Les fractions continues de Ramanujan, ou R-fractions, sont définies au dernier chapitre comme une famille particulière de C-fractions.

Les fractions continues y sont rangées de haut en bas, les traits horizontaux signalant un degré de spécialisation croissant. On remarquera qu'il ne s'agit pas d'une classification au sens exclusif du terme, car un même type de fractions continues peut être réalisé de plusieurs façons.

fractions multicontinues		fractions continues arborescentes
L-fractions	Z-fractions	
L_d -fractions		
	C-fractions P-fractions	
J-fractions	J-fractions	J-fractions
S-fractions	S-fractions	S-fractions
	R-fractions	T-fractions
		δ -fractions

Table 1.1: une classification des fractions continues.

Chapitre 2

Approximants de Padé et P-fractions

La lettre K désigne un corps commutatif, dont les éléments seront appelés les scalaires.

2.1 Introduction.

Si $f = \sum_{n \geq 0} c_n t^n$ est une série formelle à coefficients dans K , si p et q sont deux nombres entiers, nous notons $[p/q]_f$ l'approximant de Padé de f de type $[p/q]$ s'il existe : cf. la définition 1 de la page 7. Ces approximants sont disposés dans la *table de Padé de f* , qui comporte, à l'intersection de la colonne p et de la ligne q , l'éventuel approximant de Padé de type $[p/q]$: voir la figure 2.1.

Nous notons $C_f(p/q)$, où plus simplement $C(p/q)$ lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, le *déterminant de Hankel* $\det(c_{p-q-1+i+j})_{1 \leq i,j \leq q}$, de taille $q \times q$:

$$C(p/q) = \begin{vmatrix} c_{p-q+1} & \cdots & c_p \\ \vdots & & \vdots \\ c_p & \cdots & c_{p+q-1} \end{vmatrix}. \quad (2.1)$$

Nous convenons que $c_n = 0$ si $n < 0$ et que $C(p/0) = 1$ dans l'expression ci-dessus

La *C-table de f* est obtenue en disposant, à l'intersection de la colonne p et de la ligne q , le déterminant $C_f(p/q)$. La figure 2.2 présente la C-table d'une série formelle, où l'on a calculé quelques déterminants.

Ce chapitre a pour but de présenter les approximants de Padé d'une série formelle, à l'aide d'une représentation des ses coefficients comme des sommes de valuations de certains chemins (cf. le programme de la page 10 au premier chapitre). Nous montrons que l'on peut déduire, en partant de cette seule interprétation combinatoire, un certain nombre de leurs propriétés formelles. Deux

[0/0]	[1/0]	[2/0]	[3/0]	[4/0]	[5/0]
[0/1]	[1/1]	[2/1]	[3/1]	[4/1]	[5/1]
[0/2]	[1/2]	[2/2]	[3/2]	[4/2]	[5/2]
[0/3]	[1/3]	[2/3]	[3/3]	[4/3]	[5/3]
[0/4]	[1/4]	[2/4]	[3/4]	[4/4]	[5/4]
[0/5]	[1/5]	[2/5]	[3/5]	[4/5]	[5/5]

Figure 2.1: la table de Padé de la série formelle $f = \sum_{n \geq 0} c_n t^n$.

thèmes retiendront plus particulièrement notre attention : la structure de la table de Padé dans le cas le plus général et le lien avec les fractions continues du type P-fraction.

Certains passages ne diffèrent pas des présentations classiques. Ils figurent néanmoins dans ce mémoire, car nous souhaitons donner des démonstrations complètes. Voici le plan du chapitre.

La section 1 présente le modèle combinatoire des P-chemins et le développement en P-fractions qui s'en déduit.

La deuxième section montre que les séries génératrices des P-chemins bornés sont des approximants de Padé, et décrit les positions qu'ils occupent dans la table de Padé. Les P-chemins les plus simples, dits de Jacobi, donnent lieu à des développements en fractions continues de Jacobi, qui diffèrent légèrement de celles du premier chapitre : nous expliquons comment se ramener d'un P-chemin de Jacobi à un chemin de Motzkin.

La section 3 calcule, de manière combinatoire, les déterminants de Hankel appartenant à la diagonale de la C-table, en fonction des valuations des P-chemins. Nous prouvons aussi l'*identité de la croix*. Tous ces calculs reposent sur les résultats de l'annexe A.

Nous retrouvons à la section 4 les structures en blocs carrés de la C-table et de la table de Padé d'une série formelle.

La section 5 est consacrée à la description d'un algorithme de calcul des valuations des P-chemins représentant une série formelle donnée (c'est-à-dire un

1	1	1	1	1	1
c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
$C(0/2)$	$C(1/2)$	$C(2/2)$	$C(2/2)$	$C(4/2)$	$C(5/2)$
$C(0/3)$	$C(1/3)$	$C(2/3)$	$C(3/3)$	$C(4/3)$	$C(5/3)$
$C(0/4)$	$C(1/4)$	$C(2/4)$	$C(3/4)$	$C(4/4)$	$C(5/4)$
$C(0/5)$	$C(1/5)$	$C(2/5)$	$C(3/5)$	$C(4/5)$	$C(5/5)$

Figure 2.2: la C-table de la série formelle $f = \sum_{n \geq 0} c_n t^n$.

algorithme de développement en P-fraction). Il est nouveau à notre connaissance.

2.2 Le modèle combinatoire.

2.2.1 Les P-chemins.

Dans ce chapitre le terme *chemin* désigne une suite finie $\omega = (s_0, \dots, s_n)$ de points de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. L'origine du chemin (s_0, \dots, s_n) est le sommet s_0 , son arrivée est le sommet s_n . Ces deux sommets constituent ses *extrémités*.

Ses *pas* sont les couples (s_i, s_{i+1}) pour $0 \leq i \leq n - 1$. Le *niveau* de (s_i, s_{i+1}) est l'ordonnée du point s_i .

Définition 25.— Soit $N = (N_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres entiers strictement positifs et soit $M = (M_k)_{k \geq 1}$ la suite définie par :

$$\begin{aligned} M_0 &= 0, \\ M_k &= 2 \sum_{i=1}^{k-1} N_i + N_k. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Un P-chemin associé à la suite N est un chemin sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vérifiant les propriétés suivantes.

1. Son origine est $(0, 0)$.

2. Son arrivée est de la forme $(2n, 0)$ pour $n \geq 0$.
3. Il est premier, c'est-à-dire que ses seuls sommets au niveau 0 sont ses extrémités.
4. Ses pas ont l'une des quatre formes suivantes :
 - *pas montant* $((x, h), (x+1, h+1))$ d'un niveau $h \geq 0$ au niveau $h+1$;
 - *grand pas descendant* $((x, N_1), (x+N_1, 0))$, du niveau N_1 au niveau 0;
 - *grand pas descendant* $((x, M_{k+1}), (x+N_k + N_{k+1}, M_k))$, du niveau M_{k+1} au niveau M_k , pour un nombre entier $k \geq 1$;
 - *petit pas descendant* $((x, M_k+i), (x+i, M_k))$, du niveau M_k+i au niveau M_k pour des nombres entiers $k \geq 1$ et i tels que $1 \leq i \leq N_k$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la suite $N = (N_k)_{k \geq 1}$, nous parlons plus simplement d'un *P-chemin*. La *longueur* d'un P-chemin ω d'arrivée $(2n, 0)$, notée $|\omega|$, est le nombre $2n$: ce n'est pas le nombre de sommets du P-chemin. La figure 2.3 présente un P-chemin de longueur 60, associé à la suite $N = (3, 5, \dots)$ [la figure ne nous renseigne pas davantage sur la suite N].

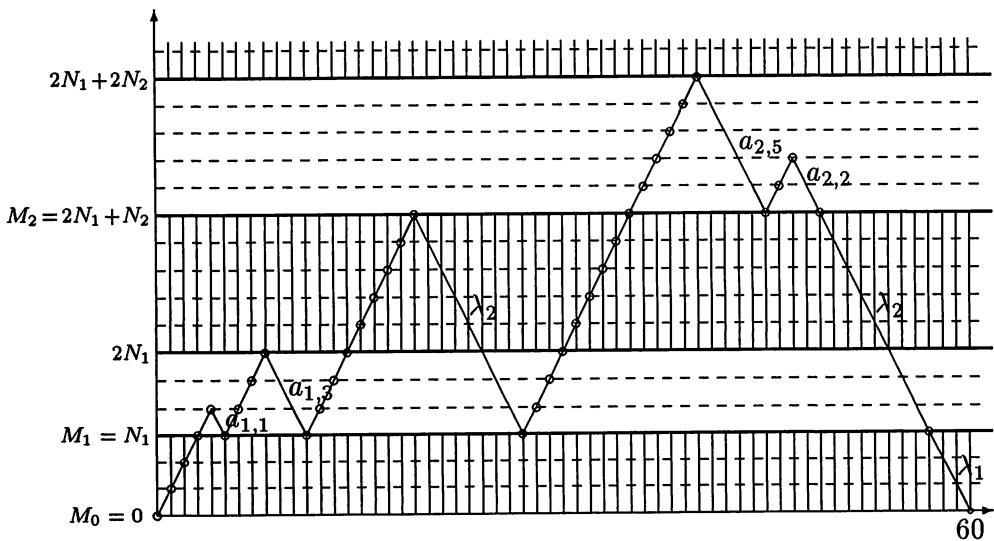


Figure 2.3: un P-chemin de valuation $\lambda_1\lambda_2^2a_{1,1}a_{1,3}a_{2,5}a_{2,2}$.

Remarques. — On peut paraphraser la définition 25 pour donner la description géométrique que voici. La suite $N = (N_k)_{k \geq 1}$ étant fixée, on superpose dans le quart de plan $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ des bandes horizontales, alternativement sombres

et claires, de hauteur N_k pour $k \geq 1$: une bande sombre et une bande claire de hauteur N_1 , puis une bande sombre et une bande claire de hauteur N_2 etc.

Les grands pas descendants enjambent alors exactement une bande sombre de hauteur N_{k+1} et la bande claire de hauteur N_k située immédiatement en dessous, à l'exception du plus bas d'entre eux, qui n'enjambe que la bande sombre la plus basse, de hauteur N_1 . Les petits pas descendants vont d'un niveau quelconque dans une bande claire de hauteur N_k jusqu'au niveau le plus bas de cette bande, c'est-à-dire M_k . Par conséquent, les niveaux (ordonnées) des seconds sommets des pas descendants des P-chemins associés à la suite N sont tous les nombres de la forme M_k pour $k \in \mathbb{N}$, et eux seuls.

Au vu de la figure 2.3, on pourrait croire que les pentes des pas des P-chemins ne sont pas $+1$ ou -1 , mais il n'en est rien. Pour des raisons de mise en page, nous avons dû choisir une unité de longueur sur l'axe des ordonnées double de celle sur l'axe des abscisses.

Le lecteur ayant lu la section 1.2 du premier chapitre pourra vérifier que les P-chemins associés à la suite N sont les images, par l'application de déploiement \mathcal{DC} , des chemins premiers sur \mathbb{N} , dont l'ensemble des *transitions* est

$$\mathcal{T} = \{(M_k, M_{k-1}) \mid k \geq 1\} \cup \{(M_k + i, M_k) \mid k \geq 1 \text{ et } 1 \leq i \leq N_k\}.$$

En particulier, la quantité que nous avons notée $|\omega|$ est la longueur de cheminement du P-chemin ω , définie par l'expression (1.14). Le modèle combinatoire des P-chemins s'insère donc dans le cadre général de l'interprétation combinatoire de ce que nous appelons les Z-fractions multicontinues.

Soit $\lambda = (\lambda_k)_{k \geq 1}$ une suite de scalaires et soit $a = (a_{k,i})_{k \geq 1, 1 \leq i \leq N_k}$ une famille de scalaires. Lorsque $k \geq 1$, le polynôme P_k , de degré inférieur ou égal à N_k , est défini par

$$P_k(t) = 1 - a_{k,1}t - \cdots - a_{k,N_k}t^{N_k}. \quad (2.3)$$

Soit enfin un polynôme P_0 , en la variable t^{-1} , qui peut être nul. S'il ne l'est pas, nous notons N_0 son degré et nous définissons les scalaires $a_{0,i}$ par l'expression :

$$P_0(t) = a_{0,0} + \frac{a_{0,1}}{t} + \cdots + \frac{a_{0,N_0}}{t^{N_0}}, \quad (2.4)$$

avec $a_{0,N_0} \neq 0$. Nous définissons la valuation d'un pas ξ d'un P-chemin comme suit :

$$v(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \text{ est un pas montant,} \\ \lambda_1 & \text{si } \xi \text{ est le grand pas descendant } ((x, N_1), (x + N_1, 0)), \\ \lambda_k & \text{si } \xi \text{ est le grand pas descendant } ((x, M_{k+1}), (x + N_k + N_{k+1}, M_k)), \\ a_{k,i} & \text{si } \xi \text{ est le petit pas descendant } ((x, M_k + i), (x + i, M_k)). \end{cases} \quad (2.5)$$

La valuation d'un P-chemin $\omega = (s_0, \dots, s_p)$ de longueur strictement positive, notée aussi par la lettre v , est le produit des valuations de ses pas :

$$v(\omega) = \prod_{i=0}^{p-1} v(s_i, s_{i+1}). \quad (2.6)$$

La valuation du P-chemin réduit au seul sommet $(0, 0)$ est $P_0(t)$, *contrairement à la convention en usage dans les autres chapitres*. La figure 2.3 montre un P-chemin de longueur 60, de valuation $\lambda_1\lambda_2^2a_{1,1}a_{1,3}a_{2,5}a_{2,2}$.

La série génératrice des P-chemins valués est, par définition

$$f(N, P_0, \lambda, a; t) = \sum v(\omega)t^{\frac{|\omega|}{2}}, \quad (2.7)$$

où la somme porte sur les P-chemins (rappelons qu'ils sont premiers par définition). S'il n'y a pas de risque de confusion, on abrège souvent $f(N, P_0, \lambda, a; t)$ en $f(t)$. C'est *a priori* une série de Laurent, à coefficients dans K , dont voici les premiers termes :

$$\begin{aligned} f(N, P_0, \lambda, a; t) &= P_0(t) + \lambda_1 t^{N_1} + \lambda_1 a_{1,1} t^{N_1+1} + \cdots, \\ &= \frac{a_{0,N_0}}{t^{N_0}} + \cdots + \frac{a_{0,1}}{t} + a_{0,0} + \lambda_1 t^{N_1} + \lambda_1 a_{1,1} t^{N_1+1} + \cdots. \end{aligned}$$

C'est une série de Taylor de $K[[t]]$ si, et seulement si, le polynôme P_0 est constant.

Nous définissons aussi la série génératrice des P-chemins *bornés au niveau h* par

$$f_h(N, P_0, \lambda, a; t) = \sum v(\omega)t^{\frac{|\omega|}{2}}, \quad (2.8)$$

où la somme porte sur les P-chemins dont les niveaux (ordonnées) des sommets sont inférieurs ou égaux à h . Cette série est souvent notée $f_h(t)$. Lorsque $h = 2(N_1 + \cdots + N_k) = M_k + N_k$, nous obtenons la série $f_{M_k+N_k}(t)$, qui joue un rôle privilégié dans la suite.

2.2.2 Développement en P-fraction.

Dans les propositions 26 et 27, nous allons successivement donner le développement de la série $f(N, P_0, \lambda, a; t)$ en P-fraction, et énoncer que toute série de Laurent s'écrit de manière unique comme série génératrice de P-chemins.

Proposition 26. — Soient $N = (N_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres entiers strictement positifs et $M = (M_k)_{k \geq 0}$ la suite définie par (2.2). Soit $P_0 \in K[t^{-1}]$ et soient $\lambda = (\lambda_k)_{k \geq 1}$ et $a = (a_{k,i})_{k \geq 1, 1 \leq i \leq N_k}$ une suite et une famille de scalaires.

1) La série génératrice $f_{M_k+N_k}(t)$ définie par (2.8) est rationnelle et vaut

$$f_{M_k+N_k}(t) = P_0(t) + \frac{\lambda_1 t^{N_1}}{P_1(t)} - \frac{\lambda_2 t^{N_1+N_2}}{P_2(t)} - \cdots - \frac{\lambda_k t^{N_{k-1}+N_k}}{P_k(t)}, \quad (2.9)$$

où les polynômes $P_k(t)$ sont donnés par (2.3).

2) L'approximation suivante est vérifiée en $t = 0$:

$$f(t) = f_{M_k+N_k}(t) + o(t^{M_k+N_k}). \quad (2.10)$$

En d'autres termes, les séries $f(t)$ et $f_{M_k+N_k}(t)$ coïncident au moins jusqu'à la puissance $M_k + N_k$.

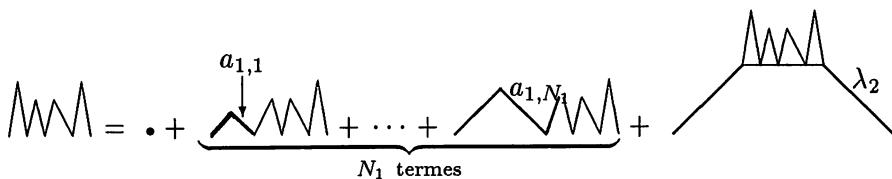
3) La série génératrice $f(t)$ définie par (2.8) des P-chemins valués admet le développement suivant en P-fraction :

$$P(t) = P_0(t) + \frac{\lambda_1 t^{N_1}}{P_1(t) -} \frac{\lambda_2 t^{N_1+N_2}}{P_2(t) -} \cdots \frac{\lambda_k t^{N_{k-1}+N_k}}{P_k(t) -} \cdots . \quad (2.11)$$

Démonstration : 1) la preuve que nous donnons est une reprise de la preuve du théorème 11, au premier chapitre.

Notons δ le décalage à gauche, qui est le prolongement aux expressions algébriques de l'application suivante : si u est la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ (resp. la famille $(u_{n,i})_{n \geq 1, i \in I_n}$), alors δu est la suite $(u_{n+1})_{n \geq 1}$ (resp. la famille $(u_{n+1,i})_{n \geq 1, i \in I_{n+1}}$).

Les P-chemins de longueur strictement positive commencent par N_1 pas montants et se terminent par un grand pas descendant, du niveau N_1 au niveau 0. Entre ces pas, on trouve des chemins dont tous les sommets ont un niveau $h \geq N_1$ et qui vérifient la propriété 4 de la définition 25 (ils ne sont pas nécessairement premiers). Voici une décomposition et une factorisation imagées de ces chemins intermédiaires, dans lesquelles le niveau de base est N_1 :



Nous en déduisons une équation fonctionnelle sur les séries génératrices :

$$f(N, P_0, \lambda, a, t) = P_0(t) + \frac{\lambda_1 t^{N_1}}{1 - a_{1,1}t - \cdots - a_{1,N_1}t^{N_1} - f(\delta N, 0, \delta \lambda, \delta a; t)}.$$

Nous obtenons le développement (2.9) par itération de cette équation fonctionnelle, puis substitution de λ_{k+1} par 0 : cette dernière opération est clairement équivalente à borner les chemins au niveau $M_k + N_k$.

2) Il suffit de constater qu'un P-chemin de longueur inférieure ou égale à $2(M_k + N_k)$ est nécessairement borné au niveau $M_k + N_k$. Nous donnons un résultat plus précis à la proposition 28.

3) Cela résulte de ce que la série $f_{M_k+N_k}$ converge formellement vers la série f , d'après le point 2. □

Nous disons que le développement (2.11) est *fini* s'il existe un nombre entier k tel que $\lambda_p = 0$ pour tout $p \geq k$.

Remarque. — Définissons la suite $(\alpha_k)_{k \geq 1}$ par

$$\begin{aligned}\alpha_{2p+1} &= \frac{\lambda_{2p}\lambda_{2p-2}\dots\lambda_2}{\lambda_{2p+1}\lambda_{2p-1}\dots\lambda_1}, \\ \alpha_{2p} &= -\frac{\lambda_{2p-1}\lambda_{2p-3}\dots\lambda_1}{\lambda_{2p}\lambda_{2p-2}\dots\lambda_2},\end{aligned}$$

et multiplions, dans le développement (2.11), le numérateur $\lambda_k t^{N_{k-1}+N_k}$ et son dénominateur $P_{k+1}(t) + \dots$ par $\alpha_k t^{-N_k}$. Nous obtenons la fraction continue

$$B_0(t) + \frac{1}{B_1(t) +} \frac{1}{B_2(t) +} \dots \frac{1}{B_k(t) +} \dots, \quad (2.12)$$

dans laquelle $B_k(t)$ est un polynôme en la variable t^{-1} , de degré exactement N_k . Ces polynômes sont donnés par

$$\begin{aligned}B_0(t) &= P_0(t), \\ B_k(t) &= \alpha_k \frac{P_k(t)}{t^{N_k}}, \quad \text{si } k \geq 1.\end{aligned}$$

L'écriture (2.12) est la présentation habituelle des P-fractions telle qu'on peut la trouver dans [65, 66]. C'est aussi la forme sous laquelle l'analogie avec le développement en fraction continue des nombres réels apparaît le mieux. Les polynômes en la variable t^{-1} jouent, pour les séries de Laurent, le rôle de la partie entière pour les nombres réels et la division euclidienne des polynômes joue le rôle de la division euclidienne des nombres entiers.

Une abondante littérature traite de l'aspect arithmétique des ces fractions continues : citons notamment Allouche [2], Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy [18], Mills et Robbins [69]. Nous n'avons pas abordé ces problèmes dans ce mémoire.

Nous avons pris soin, comme il est préconisé au chapitre 1, de distinguer la série $f(t)$ et la P-fraction $P(t)$. Cette précaution s'avère inutile à l'issue de la proposition suivante.

Proposition 27. — Soient $s \in \mathbb{Z}$ et $f = \sum_s^\infty c_n t^n$ une série de Laurent à coefficients dans K . Nous supposons que f est rationnelle (resp. n est pas rationnelle). Il existe alors un unique quadruplet (N, P_0, λ, a) tel que $f(t) = f(N, P_0, \lambda, a; t)$, dans lequel

- $N = (N_k)_{k \geq 1}$ est une suite finie (resp. infinie) de nombres entiers strictement positifs,
- P_0 est un polynôme en la variable t^{-1} ,

- λ est une suite finie (resp. infinie) de scalaires tous non nuls,
- $a = (a_{k,i})_{k \geq 1, 1 \leq i \leq N_k}$ est une famille finie (resp. infinie) de scalaires.

Autrement dit, la série f admet un unique développement en P-fraction de la forme (2.11), et ce développement est fini si et seulement si f est rationnelle.

Démonstration : nous donnons à la fin de ce chapitre un algorithme de calcul des scalaires λ_k , $a_{k,i}$ et des nombres N_k à partir des coefficients c_n , qui prouve du même coup l'existence et l'unicité du développement en P-fraction. Nous prions le lecteur de bien vouloir se reporter au paragraphe 2.6.1. \square

2.3 Approximants de Padé.

2.3.1 Esquisse de la structure de la table de Padé.

Proposition 28.— Soient a et b deux nombres entiers, positifs ou nuls. Soient (i) et (ii) les deux assertions suivantes.

- (i) Nous avons $0 \leq a + b < N_{k+1}$.
- (ii) La fraction rationnelle $f_{M_k+N_k}(t) - P_0(t)$ donnée par (2.9) est l'approximant de Padé de $f(t) - P_0(t)$ de type

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^k N_i + a}{\sum_{i=1}^k N_i + b} \right].$$

L'assertion (i) implique l'assertion (ii) et, dans le cas où le produit $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{k+1}$ est non nul, ces deux assertions sont équivalentes.

Démonstration : il est immédiat de vérifier, par récurrence sur k , que les degrés du numérateur et du dénominateur de la fraction rationnelle

$$\frac{\lambda_1 t^{N_1}}{P_1(t)} - \frac{\lambda_2 t^{N_1+N_2}}{P_2(t)} - \dots - \frac{\lambda_k t^{N_{k-1}+N_k}}{P_k(t)}$$

sont tous deux inférieurs ou égaux à $N_1 + \dots + N_k$. Ils sont *a fortiori* inférieurs ou égaux à $N_1 + \dots + N_k + a$ et $N_1 + \dots + N_k + b$ respectivement. Les conditions de degré de la définition 1 sont donc remplies pour que l'assertion (ii) soit vraie.

Soit maintenant j un nombre entier compris au sens large entre 0 et N_{k+1} . Considérons les deux ensembles suivants :

- l'ensemble des P-chemins bornés au niveau $M_k + N_k$ et de demi-longueur $M_k + N_k + j$;
- l'ensemble des P-chemins (sans restriction) de demi-longueur $M_k + N_k + j$.

Ces deux ensembles coïncident lorsque $0 \leq j < N_{k+1}$. Pour $j = N_{k+1}$, le second contient exactement un chemin de plus que le premier. Il s'agit du P-chemin en forme de *chevron* : , constitué de $M_{k+1} = 2 \sum_{i=1}^k N_i + N_{k+1}$ pas montants, suivis de $k+1$ grands pas descendants. La valuation de ce chemin est le produit $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{k+1}$. Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} f(t) - f_{M_k+N_k}(t) &= \\ [f(t) - P_0(t)] - [f_{M_k+N_k}(t) - P_0(t)] &= \\ \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{k+1} t^{[N_1+\dots+N_k+a] + [N_1+\dots+N_k+b] + [N_{k+1}-(a+b)]} &+ \dots . \end{aligned}$$

La quantité $N_{k+1} - (a + b)$ étant strictement positive si et seulement si $a + b < N_{k+1}$, la proposition s'en déduit. \square

Nous avons ainsi déterminé les conditions d'existence et, le cas échéant, la valeur de certains approximants appartenant au voisinage de la diagonale de la table de Padé. Voici un résultat analogue pour une diagonale quelconque de cette table.

Corollaire 29. — Soit $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ une série de Taylor à coefficients dans K et soit $s \in \mathbb{Z}$. Nous notons $(N_k^{(s)})_{k \geq 1}$, $(M_k^{(s)})_{k \geq 1}$ et $(\lambda_k^{(s)})_{k \geq 1}$ les suites d'entiers et de scalaires apparaissant dans le développement en P-fraction de la série de Laurent $t^s f(t)$. Nous supposons que le produit $\lambda_1^{(s)} \dots \lambda_{k+1}^{(s)}$ est non nul. Soient enfin a et b deux entiers positifs ou nuls.

Alors la fraction rationnelle $t^{-s} f_{M_k^{(s)}+N_k^{(s)}}^{(s)}(t)$, définie par (2.8), est l'approximant de Padé de type

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^k N_i^{(s)} - s + a}{\sum_{i=1}^k N_i^{(s)} + b} \right]$$

de la série $f(t)$ si et seulement si $0 \leq a + b < N_{k+1}^{(s)}$.

Démonstration : l'existence du développement de $t^s f(t)$ est assuré par la proposition 27. Alors la proposition 28 (plus précisément, sa démonstration), assure que

$$t^s f(t) - f_{M_k^{(s)}+N_k^{(s)}}^{(s)}(t) = ct^{2(N_1^{(s)}+\dots+N_k^{(s)})+N_{k+1}^{(s)}} + \dots,$$

avec $c = \lambda_1^{(s)} \dots \lambda_{k+1}^{(s)} \neq 0$. Nous obtenons le résultat souhaité en multipliant cette égalité par t^{-s} et en constatant que le degré du numérateur (*resp.* du dénominateur) de $t^{-s} f_{M_k^{(s)}+N_k^{(s)}}^{(s)}(t)$ est inférieur ou égal à $N_1^{(s)} + \dots + N_k^{(s)} - s$ (*resp.* inférieur ou égal à $N_1^{(s)} + \dots + N_k^{(s)}$). \square

case de coordonnées $(s, 0)$

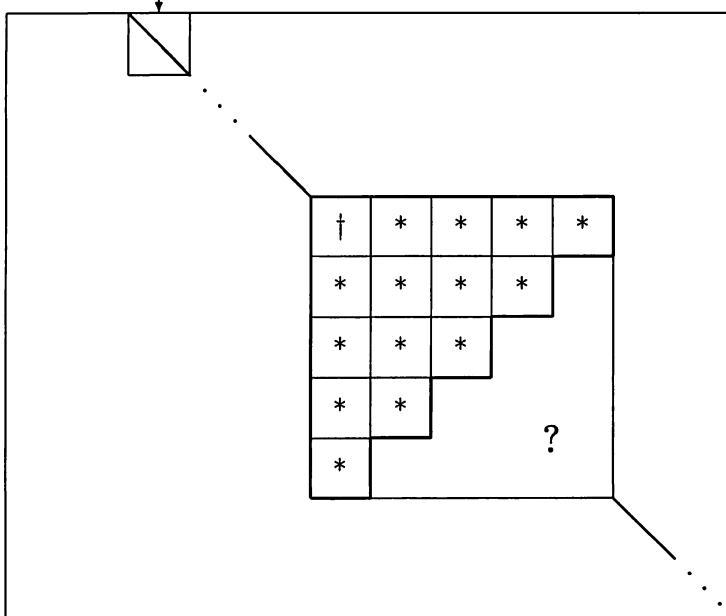


Figure 2.4: les approximants de Padé le long de la diagonale s .

Grâce à ce corollaire, nous avons établi de manière combinatoire le lien entre

- certains approximants appartenant à la diagonale s de la table de Padé de f , c'est-à-dire de la forme $[n - s/n]_f$ (plus quelques autres au voisinage de cette diagonale : voir la figure 2.4, où les astérisques * indiquent que l'approximant de Padé correspondant existe et est égal à celui désigné par le symbole †);
- certaines réduites du développement en P-fractions de $t^s f(t)$.

En fait, nous avons obtenu ainsi *tous* les approximants de Padé de la série f : les approximants de Padé de f n'existent pas dans la zone marquée d'un "?" à la figure 2.4. Mais avant de pouvoir le démontrer, avant de passer de la visite locale de la table de Padé (diagonale par diagonale) à une l'étude globale (les blocs carrés et leur structure interne), il nous faut étudier la C-table de f : c'est l'objet de la section 2.4.

Nous nous y consacrerons après avoir examiné les P-fractions les plus simples, celles de Jacobi.

2.3.2 Le cas des P-chemins de Jacobi.

Les notations sont celles du paragraphe 2.2.1. Lorsque la suite $(N_k)_{k \geq 1}$ est constante et vaut 1 et lorsque $P_0(t) = 1$, le développement de la série génératrice $f(N, P_0, \lambda, a; t)$ fait apparaître une fraction de Jacobi. Si la lettre a_k est

mise pour a_{k,N_k} , nous avons :

$$f(t) = 1 + \frac{\lambda_1 t}{1 - a_1 t} - \frac{\lambda_2 t^2}{1 - a_2 t} \dots - \frac{\lambda_k t^2}{1 - a_k t} \dots . \quad (2.13)$$

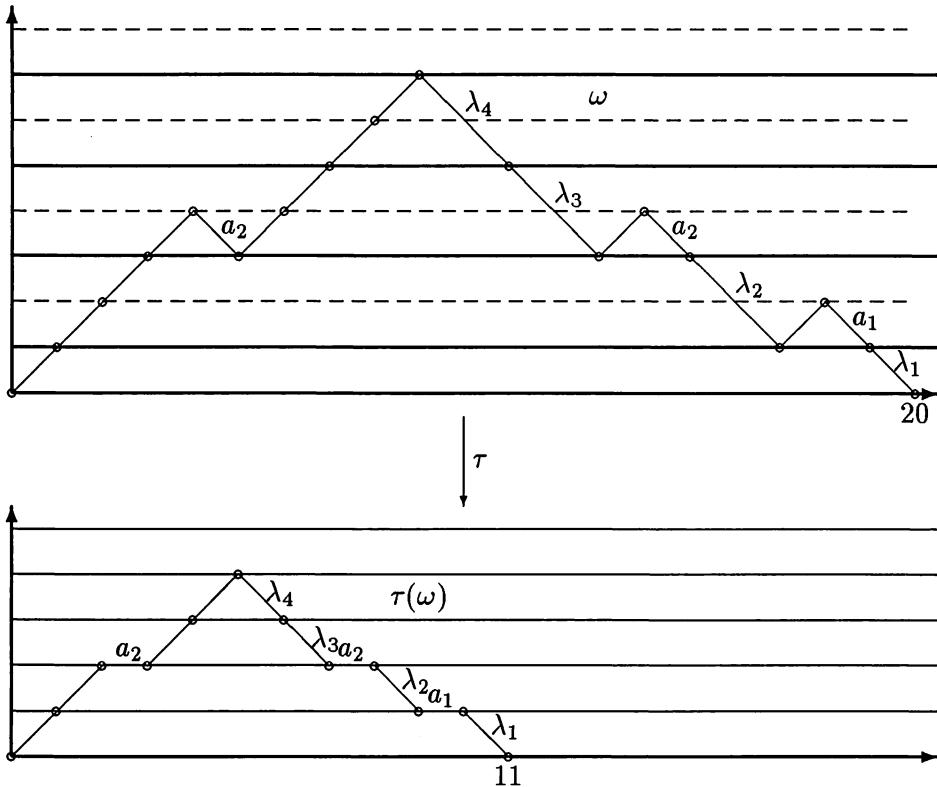


Figure 2.5: un P-chemin de Jacobi ω et le chemin de Motzkin $\tau(\omega)$.

Cependant, les P-chemins que nous obtenons dans ce cas et que nous appelons P-chemins de Jacobi, ne sont pas les chemins de Motzkin de la définition 2, au début du premier chapitre. La figure 2.5 explique comment passer des premiers aux seconds, en *tassant* les pas des P-chemins de Jacobi. Plus précisément, cette figure explique l'action sur un P-chemin ω d'une *application de tassemment* τ , analogue à l'application T^+ de l'annexe B, page 202. Nous donnons une description rapide de τ .

Les pas de ω sont lus de deux en deux, à partir du second; à chaque fois que deux pas de ω sont lus, un pas d'un chemin de Motzkin est créé, avec les règles suivantes.

1. Si les deux pas de ω sont montants, le pas créé est montant.

2. S'il s'agit d'un pas montant suivi d'un petit pas descendant, le pas créé est horizontal.
3. S'il s'agit d'un grand pas descendant, le pas créé est descendant.
4. Le premier et le dernier pas de ω sont inchangés.

Le lecteur vérifiera sans peine que le chemin $\tau(\omega)$ obtenu en mettant bout à bout les pas ainsi créés est effectivement un chemin de Motzkin, puis que τ est une bijection entre P-chemins de longueur strictement positive et chemins de Motzkin premiers de longueur strictement positive.

De plus, il est clair que les valuations se transportent “pas à pas”, de sorte que $v(\omega) = v(\tau(\omega))$ et que l'on ait $|\omega| + 1 = 2|\tau(\omega)|$. Ceci explique l'équation (2.13).

2.4 Déterminants de moments.

Nous supposons donnée une série formelle $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, admettant le développement (2.11) en P-fraction, avec $P_0 = c_0$. Nous souhaitons calculer les déterminants de Hankel donnés par (2.1) en fonction des coefficients du développement (2.11).

Pour cela, nous utilisons l'interprétation — unique d'après la proposition 27 — des coefficients c_n comme somme de valuations de P-chemins. Nous utilisons la méthode de calcul des déterminants mise au point par Gessel et Viennot [49, 84]. La description de cette méthode fait l'objet de l'annexe A.

Nous nous intéressons en particulier aux trois déterminants $C(n/n+1)$, $C(n/n)$ et $C(n+1/n)$:

$$\begin{aligned} C(n/n+1) &= \begin{vmatrix} c_0 & \cdots & c_n \\ \vdots & & \vdots \\ c_n & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix}, \\ C(n/n) &= \begin{vmatrix} c_1 & \cdots & c_n \\ \vdots & & \vdots \\ c_n & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix}, \\ C(n+1/n) &= \begin{vmatrix} c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n+1} & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Notations. — Nous introduisons, pour tout entier positif ou nul i , les points du plan $A_i = (-2i, 0)$ et $B_i = (2i, 0)$. Par définition, l'origine d'un P-chemin de longueur $2n$ est le point $(0, 0)$ et son arrivée est le point $(2n, 0)$. Dans les

calculs qui vont suivre, il est utile de translater ces chemins par des vecteurs de coordonnées $(-2i, 0)$, pour les entiers $i \in \{1, \dots, n\}$. Ils vont alors de $A_i = (-2i, 0)$ à $B_{n-i} = (2n - 2i, 0)$. Par abus de langage, nous appelons encore *P-chemin* ces P-chemins translatés.

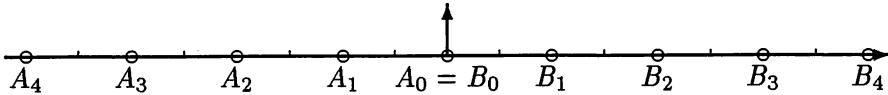


Figure 2.6: les points A_i et B_j .

Le résultat suivant est clair.

Lemme 30. — *Pour tous les nombres entiers positifs ou nuls i et j, nous avons*

$$c_{i+j} = \sum v(\omega), \quad (2.15)$$

où la somme porte sur les P-chemins allant de A_i à B_j .

2.4.1 Le calcul du déterminant $C(n/n)$.

Nous allons d'abord interpréter le déterminant $C(n/n)$ à l'aide des résultats généraux de l'annexe A, et le calculer pour les premières valeurs de n .

Lemme 31. — 1) *L'ensemble $\Omega_{n,n}$ des P-chemins allant des points A_1, \dots, A_n aux points B_0, \dots, B_{n-1} vérifie les hypothèses de finitude et de stabilité énoncées à la page 194 et l'on a*

$$C(n/n) = \sum_{(\sigma, (\omega_1, \dots, \omega_n))} (-1)^{\text{inv}(\sigma)} v(\omega_1) \dots v(\omega_n), \quad (2.16)$$

où la somme porte sur les couples $(\sigma, (\omega_1, \dots, \omega_n))$ formés d'une permutation σ de S_n et d'une configuration de P-chemins sans sommets communs $(\omega_1, \dots, \omega_n)$, telles que ω_i va de A_i à $B_{\sigma(i)-1}$.

2) *Les déterminants $C(1/1), \dots, C(N_1-1/N_1-1)$ définis par (2.14) sont tous nuls et l'on a*

$$C(N_1/N_1) = (-1)^{\text{inv}(\sigma)} v(\omega_1) \dots v(\omega_{N_1}) = (-1)^{\binom{N_1-1}{2}} \lambda_1^{N_1}, \quad (2.17)$$

où ω_i désigne un chemin allant de A_i à $B_{\sigma(i)-1}$ et où σ désigne la permutation de S_{N_1} donnée par $\sigma(j) = N_1 - j + 1$.

Démonstration : 1) Il est clair que $\Omega_{n,n}$ vérifie l'hypothèse de finitude. Si $\omega = \omega_1 \omega_2$ et $\eta = \eta_1 \eta_2$ appartiennent à $\Omega_{n,n}$ et possèdent l'arrivée de ω_1 et de η_1 comme sommet commun, les chemins $\omega_1 \eta_2$ et $\eta_1 \omega_2$

- satisfont clairement les conditions 1, 2 et 4 de la définition 25;
- sont premiers, car aucun A_i pour $i \in \{1, \dots, n\}$ n'est un B_j pour $j \in \{0, \dots, n-1\}$.

Par suite, $\Omega_{n,n}$ vérifie l'hypothèse de stabilité. Puisque

$$C(n/n) = \det(c_{i+j})_{1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n-1},$$

la formule (2.16) résulte du lemme 30 et de la proposition 100.

2) Le plus court P-chemin de longueur strictement positive est un “chevron”, de la forme , constitué de N_1 pas montants suivis d'un grand pas descendant, du niveau N_1 au niveau 0. Il est de longueur $2N_1$ et sa valuation est λ_1 . Il est alors clair qu'il n'existe pas de configuration satisfaisant aux conditions définissant le domaine de validité de l'expression (2.16) pour $1 \leq n \leq N_1 - 1$. Par suite, les déterminants $C(1/1), \dots, C(N_1 - 1/N_1 - 1)$ sont nuls.

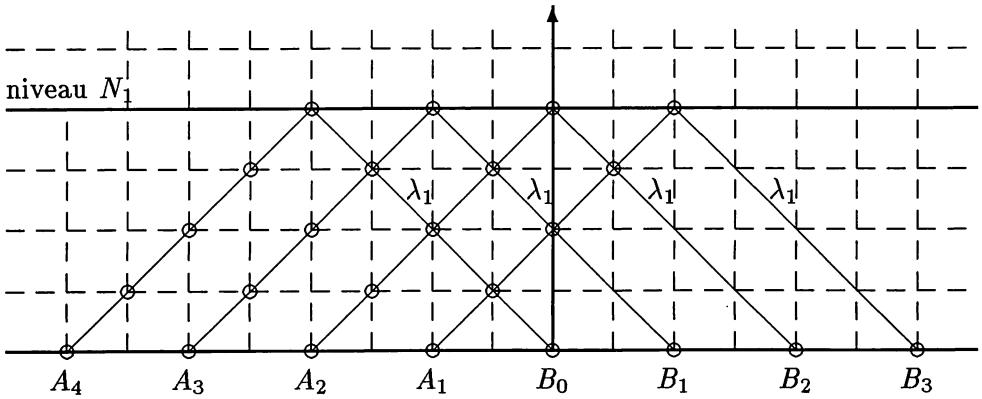


Figure 2.7: l'unique configuration associée au déterminant $C(N_1/N_1)$.

L'examen de la figure 2.7 — dans laquelle N_1 vaut 4 — nous convainc par ailleurs qu'une seule configuration intervient dans le calcul de $C(N_1/N_1)$. Elle est constituée d'une *barrière* de N_1 chevrons, allant de A_i à B_{N_1-i} , c'est-à-dire un motif de la forme . Elle correspond à la permutation *miroir* de S_{N_1} , qui envoie i sur $N_1 - i + 1$. Le nombre d'inversions d'une telle permutation est $\binom{N_1-1}{2}$. Chaque chevron étant valué λ_1 , la valeur de $C(N_1/N_1)$ s'en déduit immédiatement. □

Attention : la configuration de la figure 2.7 montre des chemins qui semblent se croiser, car nous avons matérialisé les pas par des traits joignant deux sommets successifs. Cependant, ces chemins sont bel et bien *sans sommets communs*.

Remarque. — La figure 2.8 montre ce qui peut se produire si certains des A_i sont égaux à certains des B_j et si

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega, \\ \eta_2 &= \eta.\end{aligned}$$

Alors le chemin $\eta_1\omega_2$, réduit à un seul sommet, est bien un P-chemin, mais le chemin $\omega_1\eta_2 = \omega\eta$ n'est pas premier, et n'est donc pas un P-chemin. Dans les notations de la section A.3 de l'annexe A, cela signifie que le couple (ω, η) n'est pas stable. Réciproquement, il est facile de vérifier qu'un couple non stable de P-chemins est nécessairement de la forme indiquée par la figure 2.8.

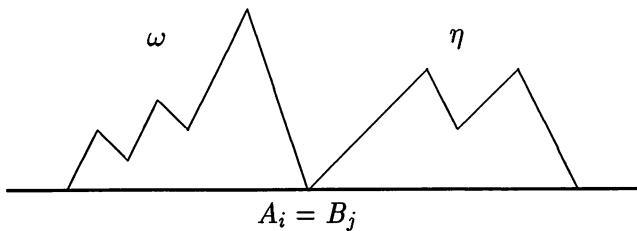


Figure 2.8: un couple de P-chemins non stable, au sens de la section A.3.

Proposition 32. — *Le calcul de $C(n/n)$ par la proposition 100 fait apparaître au plus une configuration de chemins sans sommets communs et l'on a :*

$$C(n/n) = \begin{cases} (-1)^{\binom{N_1-1}{2} + \dots + \binom{N_k-1}{2}} \prod_{i=1}^k \lambda_i^{N_i+N_{i+1}+\dots+N_k} & \text{si } n = N_1 + \dots + N_k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.18)$$

Démonstration : il s'agit de déterminer l'ensemble des couples $(\sigma, (\omega_1, \dots, \omega_n))$ sur lesquels porte la somme (2.16). La figure 2.9, où $N_1 = 3, N_2 = 1, N_3 = 4$ et $N_4 = 2$, suggère l'hypothèse (\mathcal{H}_k) suivante.

- Si $N_1 + \dots + N_{k-1} < n < N_1 + \dots + N_k$, le déterminant $C(n/n)$ est nul.
- Si $n = N_1 + \dots + N_k$, il existe une seule configuration possible de P-chemins dans la somme (2.16) qui exprime $C(N_1 + \dots + N_k / N_1 + \dots + N_k)$. Cette configuration est obtenue en superposant :
 - l'unique configuration associée au déterminant $C(N_1 + \dots + N_{k-1} / N_1 + \dots + N_{k-1})$;

- une barrière de N_k chevrons, allant du point $A_{N_1+\dots+N_{k-1}+i}$ au point $B_{N_1+\dots+N_{k-1}+N_k-i}$, pour i variant de 1 à N_k .

La preuve de l'hypothèse (\mathcal{H}_1) a fait l'objet du point 2 du lemme 31. Contempler la figure 2.9 est à notre avis la seule façon raisonnable de se convaincre de la mystérieuse structure de barricade [23] que possède la configuration associée à $C(n/n)$.

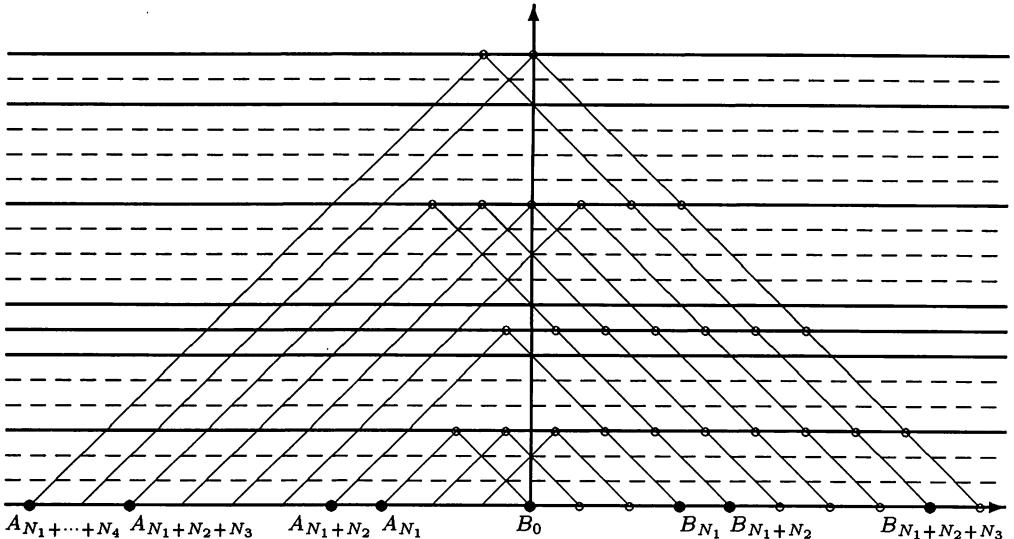


Figure 2.9: calcul de $C(N_1 + \dots + N_4/N_1 + \dots + N_4)$ par superposition de 4 barrières.

De la propriété (\mathcal{H}_k), on tire la relation

$$\begin{aligned} C(N_1 + \dots + N_k/N_1 + \dots + N_k) = \\ C(N_1 + \dots + N_{k-1}/N_1 + \dots + N_{k-1}) \times (-1)^{\binom{N_k-1}{2}} (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k)^{N_k}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Il suffit pour cela de constater que la valuation d'un des chevrons les plus hauts est $\lambda_1 \dots \lambda_k$ et de compter le nombre d'inversions supplémentaires qu'apporte la barrière de N_k chevrons allant de $A_{N_1+\dots+N_{k-1}+i}$ à $B_{N_1+\dots+N_{k-1}+N_k-i}$ pour i variant de 1 à N_k . L'expression (2.18) en résulte, par une récurrence immédiate. \square

Remarque. — Nous retrouvons les résultats classiques [84] lorsque tous les N_k valent 1. Dans ce cas, le calcul de $C(n/n)$ par la proposition 100 fait intervenir une seule configuration pour tout n , et $C(n/n)$ vaut $\lambda_1^n \lambda_2^{n-1} \dots \lambda_n$.

Corollaire 33. — Soient $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ une série de Taylor et $s \in \mathbb{Z}$. Nous notons $(N_k^{(s)})_{k \geq 1}$ (resp. $(\lambda_k^{(s)})_{k \geq 1}$) la suite des nombres entiers (resp. des

scalaires) apparaissant dans le développement en P-fraction de la série de Laurent $t^s f(t)$.

Alors le déterminant $C_f(n - s/n)$ est non nul si et seulement si n est de la forme $N_1^{(s)} + \dots + N_k^{(s)}$. Dans ce cas, sa valeur est donnée par l'expression (2.18) dans laquelle on a substitué $N_i^{(s)}$ à N_i et $\lambda_i^{(s)}$ à λ_i .

Démonstration : il suffit de constater que $C_f(n - s/n) = C_{t^s f}(n/n)$ — simple décalage d'indices dans la définition de ces déterminants — et d'appliquer la proposition 32. □

2.4.2 Une preuve de l'identité de la croix.

L'identité de la croix lie 5 déterminants de la C-table d'une série formelle lorsqu'ils occupent des positions géographiques rappelant les points cardinaux : nous avons indiqué à la figure 2.10 le moyen mnémotechnique par lequel on retient cette identité.

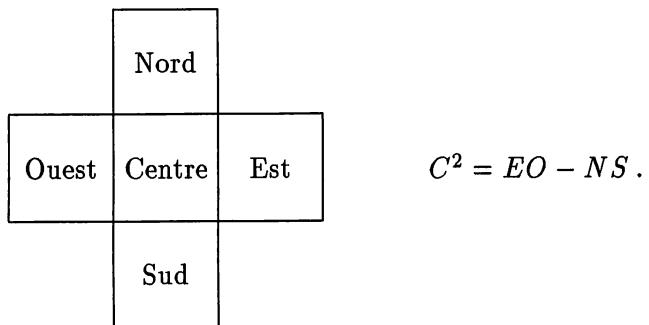


Figure 2.10: l'identité de la croix.

Nous fixons une série $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ et nous appelons $(N_k)_{k \geq 1}$ la suite des nombres entiers apparaissant dans le développement (2.11) de f en P-fraction. Les points A_i et B_j sont définis par la figure 2.6.

Définition 34. — Nous disons qu'une configuration $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ de P-chemins, où ω_p va, pour tout p , d'un point A_i à un point B_j , est presque sans sommets communs si les seuls éventuels sommets communs à ω_i et ω_j apparaissent au sein d'un motif du type "figure 2.8".

Si nous voulons interpréter $C(n/n + 1) = \det((c_{i+j})_{0 \leq i,j \leq n})$, nous devons considérer l'ensemble $\Omega_{n,n+1}$ des P-chemins allant des points A_0, A_1, \dots, A_n aux points B_0, B_1, \dots, B_n . Nous avons $A_0 = B_0$, et l'avertissement de la remarque de la page 54 s'applique : l'ensemble $\Omega_{n,n+1}$ ne vérifie pas l'hypothèse de stabilité.

Voici alors l'expression du déterminant $C(n/n + 1)$, déduite de la proposition 101 :

$$C(n/n + 1) = \sum_{(\sigma, (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n))} (-1)^{\text{inv}(\sigma)} v(\omega_0)v(\omega_1)\dots v(\omega_n), \quad (2.20)$$

où la somme porte sur les couples $(\sigma, (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n))$ formés d'une permutation σ de l'ensemble $\{0, 1, \dots, n\}$ et d'une configuration de P-chemins *presque* sans sommets communs $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$, telles que ω_i va de A_i à $B_{\sigma(i)}$.

En revanche, le problème ne se pose pas pour $C(n+1/n) = \det((c_{i+j})_{1 \leq i, j \leq n})$. L'ensemble $\Omega_{n+1,n}$ correspondant est constitué des P-chemins allant des points A_1, \dots, A_n aux points B_1, \dots, B_n : aucun A_i n'est un B_j dans ce cas. Par conséquent, l'ensemble $\Omega_{n,n+1}$ vérifie l'hypothèse de stabilité de la page de l'annexe A et nous en déduisons l'expression du déterminant $C(n+1/n)$, grâce à la proposition 100 :

$$C(n+1/n) = \sum_{(\sigma, (\omega_1, \dots, \omega_n))} v(\omega_1)\dots v(\omega_n), \quad (2.21)$$

où la somme porte sur les couples $(\sigma, (\omega_1, \dots, \omega_n))$ formés d'une permutation σ de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ et d'une configuration de P-chemins sans sommets communs $(\omega_1, \dots, \omega_n)$, telles que ω_i va de A_i à $B_{\sigma(i)}$.

Proposition 35. — Soient l et m deux entiers strictement positifs. Dans la C-table de f , la relation suivante est vérifiée :

$$C(p/q)^2 = C(p+1/q)C(p-1/q) - C(p/q+1)C(p/q-1). \quad (2.22)$$

Cette relation s'appelle l'*identité de la croix*.

Démonstration : elle se fait en trois étapes. Seule la première est traitée de manière combinatoire.

1. Nous prouvons la relation (2.22) dans le cas où $p = q$ et où tous les N_k sont égaux à 1, grâce aux résultats de l'annexe A. Ceci fait l'objet du lemme 36 à venir.
2. Nous nous affranchissons ensuite de l'hypothèse " $N_k = 1$ pour tout $k \geq 1$ " par un argument d'analyse : le déterminant est une fonction continue de ses coefficients et le sous-ensemble des suites des coefficients de séries formelles pour lesquelles $N_k = 1$ quel que soit $k \geq 1$ est dense pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ par exemple.

Pour s'en convaincre, on peut se reporter à l'algorithme de la section 2.6 et examiner les conditions, portant sur les coefficients des séries, dans lesquelles un nombre $N_k > 1$ apparaît (on peut en fait se ramener des séries formelles aux polynômes car la relation (2.22) ne fait intervenir qu'un nombre fini de coefficients).

3. Nous nous affranchissons enfin de l'hypothèse $p = q$ en considérant la série formelle $g(t) = \sum_{n=\sup(0,p-q)}^{\infty} c_n t^{n+q-l}$. Cette série vérifie $C_g(n/n) = C_f(p/q)$ et nous sommes alors ramenés à l'étape 2.

□

Lemme 36. — *Dans les conditions précisées ci-dessus à l'étape 1, nous avons*

$$C(n/n)^2 = C(n + 1/n)C(n - 1/n) - C(n/n - 1)C(n/n + 1). \quad (2.23)$$

Démonstration : appelons h l'application qui, à un couple $(\rho, (\zeta_1, \dots, \zeta_k))$ adéquat, fait correspondre la quantité $(-1)^{\text{inv}(\rho)} v(\zeta_1) \dots v(\zeta_k)$. D'après les expressions (2.16), (2.20) et (2.21), nous devons prouver que

$$\sum_{(C,D) \in \mathcal{C}_n \times \mathcal{C}_n} h(C)h(D) = \sum_{(E,F) \in \mathcal{E}_n \times \mathcal{F}_{n-1}} h(E)h(F) - \sum_{(G,H) \in \mathcal{E}_{n-1} \times \mathcal{F}_n} h(G)h(H), \quad (2.24)$$

où les notations employées sont les suivantes.

- \mathcal{C}_n est l'ensemble des couples constitués d'une permutation σ sur $\{1, \dots, n\}$ et d'une configuration $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ de P-chemins sans sommets communs, où ω_i va de A_i à $B_{\sigma(i)-1}$.
- \mathcal{E}_n est l'ensemble des couples constitués d'une permutation τ sur $\{1, \dots, n\}$ et d'une configuration de P-chemins sans sommets communs (η_1, \dots, η_n) où η_i va de A_i à $B_{\sigma(i)}$.
- \mathcal{F}_n est l'ensemble des couples constitués d'une permutation θ de $\{0, \dots, n\}$ et d'une configuration $(\kappa_0, \dots, \kappa_n)$ de P-chemins *presque* sans sommets communs, où κ_i va de A_i à $B_{\sigma(i)}$.

Puisque nous sommes dans le cas où tous les N_i valent 1, la relation de récurrence (2.19) se traduit sur le membre de gauche de (2.24) par :

$$C(n/n)^2 = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)^2 C(n - 1/n - 1).$$

Le lemme est démontré si nous parvenons à prouver que le membre de droite de (2.24) satisfait la même relation de récurrence. Cela peut se faire sans aucun calcul, à l'aide des figures suivantes... et de quelques explications.

Tout d'abord, nous constatons que \mathcal{E}_n et \mathcal{F}_n contiennent plusieurs éléments. L'existence des "grands pas descendants" (qui vont d'un niveau de la forme $2p+1$ au niveau $2p-1$ et qui peuvent enjamber des pas montants) et, pour \mathcal{F}_n , la présence possible d'un motif du type "figure 2.8", permettent des situations variées. Deux d'entre elles sont dessinées ci-dessous (le disque noir dans la configuration de droite indique la présence du P-chemin réduit à un seul sommet).

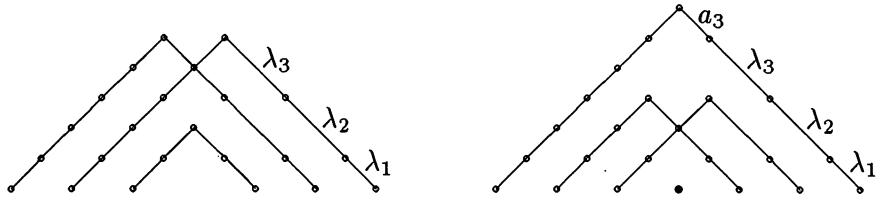


Figure 2.11: les deux types de configurations dans \mathcal{E}_n ou \mathcal{F}_n .

Nous constatons que les configurations des éléments de \mathcal{E}_n ou \mathcal{F}_n ont deux chevrons maximaux entrecroisés ou un seul . Nous appelons \mathcal{A}_n (*resp.* \mathcal{B}_n) le sous ensemble de \mathcal{E}_n (*resp.* de \mathcal{F}_n) constitué par les configurations qui possèdent deux chevrons maximaux entrecroisés (*resp.* un seul chevron maximal).

La figure 2.12 définit une bijection entre $(\mathcal{E}_n \setminus \mathcal{A}_n) \times \mathcal{F}_{n-1}$ et $\mathcal{E}_{n-1} \times (\mathcal{F}_n \setminus \mathcal{B}_n)$. Elle consiste à ôter son unique chevron maximal à E pour en coiffer F . On obtient ainsi E' et F' , qui vérifient $h(E)h(F) = h(E')h(F')$. En effet, les valeurs absolues sont égales, car on a simplement déplacé le produit $\lambda_1 \dots \lambda_n a_n$ d'un terme à l'autre, et les signes sont égaux, car le nombre d'inversions n'a été modifié pour aucun des termes.

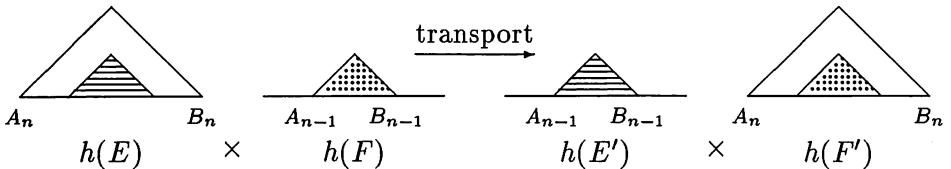


Figure 2.12: simplification du membre de droite de (2.24) par transport d'un chevron.

La bijection qui vient d'être décrite et le signe “ $-$ ” du membre de droite de (2.24) prouvent la simplification suivante :

$$\begin{aligned} & \sum_{(E,F) \in \mathcal{E}_n \times \mathcal{F}_{n-1}} h(E)h(F) - \sum_{(G,H) \in \mathcal{E}_{n-1} \times \mathcal{F}_n} h(G)h(H) \\ &= \sum_{(E,F) \in \mathcal{A}_n \times \mathcal{F}_{n-1}} h(E)h(F) - \sum_{(G,H) \in \mathcal{E}_{n-1} \times \mathcal{B}_n} h(G)h(H) \end{aligned} \quad (2.25)$$

La figure 2.13 indique une factorisation du deuxième membre de (2.25), égalité que nous venons d'établir. Elle consiste à ôter les deux chevrons maximaux de E et H , qui existent par définition de \mathcal{A}_n et \mathcal{B}_n , faisant ainsi apparaître E'' et H'' .

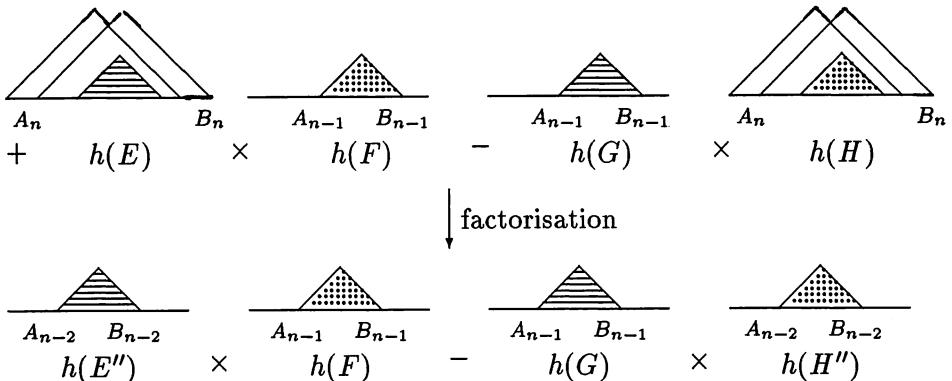


Figure 2.13: factorisation de deux chevrons.

Le terme mis en facteur est $-(\lambda_1 \dots \lambda_n)^2$: une inversion a en effet disparu, d'où le signe. Par suite, nous avons

$$h(E)h(F) - h(G)h(H) = -(\lambda_1 \dots \lambda_n)^2 (h(E'')h(F) - h(G)h(H'')) .$$

Les configurations E'' et H'' pouvant prendre toutes les valeurs, respectivement dans \mathcal{E}_{n-2} et \mathcal{F}_{n-2} , nous en déduisons que

$$\sum_{(E,F) \in \mathcal{E}_n \times \mathcal{F}_{n-1}} h(E)h(F) - \sum_{(G,H) \in \mathcal{E}_{n-1} \times \mathcal{F}_n} h(G)h(H) = \\ (\lambda_1 \dots \lambda_n)^2 \left(\sum_{(G,H'') \in \mathcal{E}_{n-1} \times \mathcal{F}_{n-2}} h(G)h(H'') - \sum_{(E'',F) \in \mathcal{E}_{n-2} \times \mathcal{F}_{n-1}} h(E'')h(F) \right),$$

qui est la relation de récurrence cherchée. □

Remarque. — Soient $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ les nombres de Fibonacci. On vérifie aisément que \mathcal{E}_0 est vide, que \mathcal{E}_1 contient l'unique configuration , que \mathcal{F}_0 contient la seule configuration réduite au point $A_0 = B_0 = (0,0)$ et enfin que \mathcal{F}_1 contient les deux configurations et . La structure des configurations de \mathcal{E}_n ou \mathcal{F}_n , possédant deux chevrons maximaux ou un seul, prouve que les cardinaux de ces deux ensembles sont soumis à la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. En tenant compte des conditions initiales, on a finalement

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_n| &= F_{n-1}, \\ |\mathcal{F}_n| &= F_{n+1}. \end{aligned}$$

L'identité de la croix (2.23), évaluée lorsque $\lambda_i = a_i = 1$ pour tout i , apparaît alors comme la relation bien connue

$$1 = F_{n-1}F_n - F_{n-2}F_{n+1}$$

entre nombres de Fibonacci, ou encore $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = 1$.

2.5 Structure de la C-table et de la table de Padé d'une série formelle.

Nous fixons une série formelle $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ non nulle. Nous allons montrer que l'on peut retrouver, à partir de l'écriture des coefficients comme somme de valuations de P-chemins, les structures en blocs carrés de la C-table et de la table de Padé de f . Les raisonnements que nous tenons reposeront d'une part sur le corollaire 29, et d'autre part sur l'identité de la croix (2.22).

En cela, ils ne diffèrent pas des raisonnements classiques que l'on peut trouver dans les ouvrages consacrés aux approximants de Padé, quoique le lien entre les P-fractions et les approximants de Padé soit en général établi après l'étude des blocs [7, 14, 50]. De plus, en donnant des preuves complètes, nous poursuivons un de nos objectifs : construire une théorie combinatoire des approximants de Padé, ou du moins, jeter les bases de la partie formelle de cette théorie. Le lecteur est donc averti qu'au sein de ce chapitre, cette section ne prétend pas à l'originalité.

Commençons par le lemme suivant, qui ramène au cas où le terme constant de la série est non nul.

Lemme 37. — Soit m un nombre entier. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. On a $c_0 = \dots = c_{m-1} = 0$ et $c_p \neq 0$.
2. Les m premières colonnes de la C-table de f sont identiquement nulles (à l'exception de leur première case) et la $(m+1)^{\text{ème}}$ colonne ne contient aucune case nulle.

Démonstration : supposons vraie la première condition. Mettons en évidence la répartition des coefficients dans le déterminant générique de la C-table :

$$C(p/q) = \begin{vmatrix} & & & c_q \\ & c_i & & . \\ (i < p) & . & . & . \\ & . & c_j & . \\ & . & (j > p) & . \\ c_q & & & . \end{vmatrix}. \quad (2.26)$$

Alors $C(0/l) = \dots = C(p-1/l) = 0$ quel que soit $l \geq 1$ et $C(m/l) = (-1)^{\binom{l}{2}}(c_p)^l$ pour tout l . Nous obtenons la condition 2, ainsi que la valeur des déterminants de la $(m+1)$ ^{ième} colonne.

La réciproque est immédiate car le déterminant $C(l/1)$ vaut c_l .

□

Nous venons de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un bloc rectangulaire infini de zéros, orienté verticalement, à gauche de la C-table de f . En factorisant au besoin t^p dans f , nous sommes ramenés au cas où le terme constant de f est non nul, *ce que nous supposons dans toute la suite de cette section*. La ligne et la colonne zéro de la C-table sont donc entièrement occupées par des déterminants non nuls.

2.5.1 Position des zéros dans la C-table.

Les blocs de zéros sont rectangulaires, éventuellement infinis. Constatons tout d'abord que les quatre motifs de la figure 2.14 sont exclus de la C-table de f . Il suffit, pour chaque motif, d'appliquer l'identité de la croix (2.22) lorsque $C(p/q)$ occupe la case marquée du symbole “ $\neq 0$ ”, et l'on aboutit alors à une contradiction.

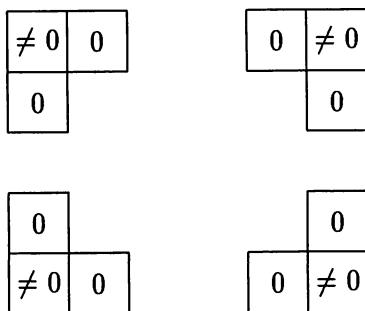


Figure 2.14: quatre motifs exclus de la C-table de f .

Deux cases de la C-table de f sont dites *voisines* si elles ont une arête commune (une case possède quatre voisines, sauf sur le bord). Elles sont dites *proches* si elles ont une arête ou un sommet en commun (une case possède huit proches, sauf sur le bord). Ceci permet de définir deux notions de connexité discrète : la 4-connexité et la 8-connexité, relatives à des chemins formés de cases voisines ou proches, respectivement.

Nous appelons alors *bloc* de la C-table une composante 4-connexe de la partie formée des cases occupées par les déterminants nuls.

En raisonnant sur sa frontière — au sens de la 4-connexité —, on montre facilement qu'un bloc est rectangulaire en s'a aidant des quatre motifs exclus. Cela

signifie qu'il est rectangulaire fini, ou bien qu'il est rectangulaire et infini dans une, voire les deux directions. Puis l'on montre que les cases de sa frontière au sens de la 8-connexité sont occupées par des déterminants non nuls.

Voici alors la situation pour un bloc fini.

$\neq 0$									
$\neq 0$									$\neq 0$
$\neq 0$									$\neq 0$
$\neq 0$									$\neq 0$
$\neq 0$									$\neq 0$
$\neq 0$									

bloc de zéros

Figure 2.15: bloc dont les cases *proches* contiennent des déterminants $\neq 0$.

On montre enfin qu'il existe au plus un bloc de zéros infini dans les deux directions (sinon, le motif $\begin{array}{|c|c|} \hline \neq 0 & 0 \\ \hline 0 & \end{array}$ apparaît).

Les blocs de zéros sont carrés. Nous considérons un bloc rectangulaire de zéros dont la case supérieure gauche appartient à la diagonale s de la C-table, où $s \in \mathbb{Z}$. Nous appelons *sommet* du bloc la case notée A sur la figure 2.16.

Les traits doubles définissent la forme du bloc étudié. Les traits gras délimitent la zone où l'on sait, d'après le corollaire 29, que les approximants de Padé de f existent et sont égaux à celui du sommet du bloc.

Nous supposons dans un premier temps que le bloc n'est pas infini dans les deux directions et nous prouvons qu'il est carré en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il possède l lignes et c colonnes avec $1 \leq l < c \leq \infty$.

- Appliqué à la diagonale s , le corollaire 29 démontre l'existence d'un entier k tel que les cases A et B aient respectivement pour coordonnées $(N_1^{(s)} + \dots + N_k^{(s)} - s, N_1^{(s)} + \dots + N_k^{(s)})$ et $(N_1^{(s)} + \dots + N_{k+1}^{(s)} - s, N_1^{(s)} + \dots + N_{k+1}^{(s)})$. De plus, les approximants de Padé de f des cases A et C existent et sont égaux.
- Appliqué à la diagonale $s + 1$, le même corollaire 29 démontre l'existence d'un entier p tel que les cases C et D aient respectivement pour coordonnées $(N_1^{(s)} + \dots + N_p^{(s)} - s - 1, N_1^{(s)} + \dots + N_p^{(s)})$ et $(N_1^{(s+1)} + \dots + N_{p+1}^{(s+1)} - s - 1, N_1^{(s+1)} + \dots + N_{p+1}^{(s+1)})$. De plus, les approximants de Padé de f des cases C et E existent et sont égaux.

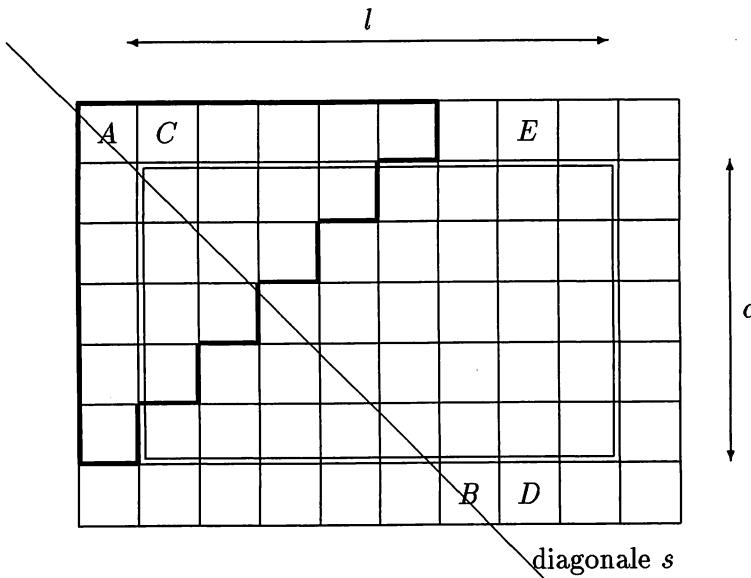


Figure 2.16: déroulement de la preuve de ce qu'un bloc de la C-table est carré.

- Nous en déduisons que $N_{k+1}^{(s)} = N_{p+1}^{(s+1)} = c + 1$ et que l'approximant de Padé de la case E existe et est égal à celui de la case A : ceci est en contradiction avec le fait que $N_{k+1}^{(s)} = c + 1$, toujours d'après le corollaire 29, appliqué à la diagonale s .

Ce qui précède prouve que $c \leq l$. Symétriquement, on prouve que $l \leq c$, et finalement, nous avons $l = c$.

Nous supposons maintenant que ce bloc est infini dans les deux directions. Le corollaire 29 appliqué avec $N_{k+1}^{(s)} = \infty$ montre que tous les approximants Padé de f correspondant aux cases situées dans ce bloc et sur son pourtour existent et sont égaux à celui correspondant au sommet du bloc. Alors f est rationnelle et sa forme irréductible est égale à l'approximant correspondant au sommet du bloc (la réciproque est évidente).

Nous venons de prouver le théorème suivant.

Théorème 38.— 1) *Les déterminants nuls de la C-table de f apparaissent sous forme de blocs carrés finis entourés (au sens de la 8-connexité) par des déterminants non nuls et d'au plus un bloc Carré infini dans les deux directions, entouré lui aussi de déterminants non nuls.*

2) *Il existe un bloc Carré infini de zéros si et seulement si f est la série de Taylor d'une fraction rationnelle F . Dans ce cas, le représentant irréductible de F est l'approximant de Padé correspondant au sommet du bloc infini.*

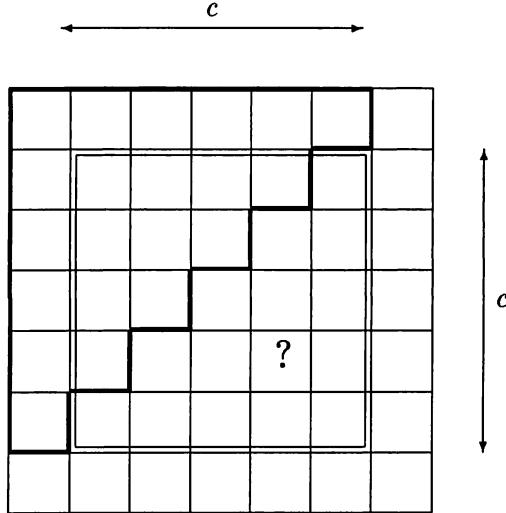


Figure 2.17: ce que l'on sait sur les blocs de la table de Padé après le théorème 38.

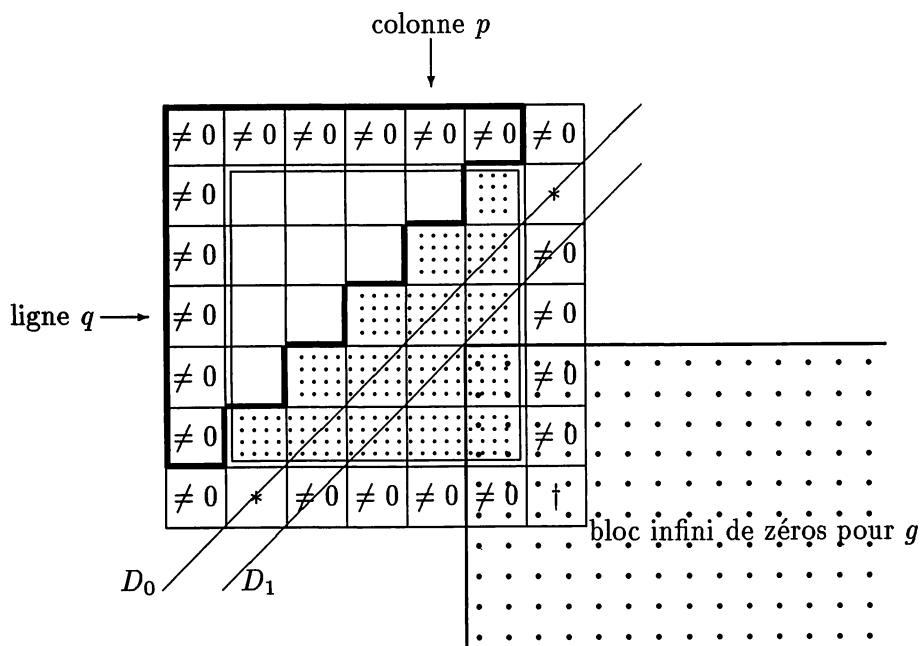
2.5.2 Structure de la table de Padé.

Dans chacune de figures de ce paragraphe, nous avons dessiné des éléments qui appartiennent tantôt à la C-table de f , tantôt à sa table de Padé. Nous savons déjà que, pour une case où $C(p/q)$ n'est pas nul, l'approximant de Padé de f existe. Nous connaissons la structure de la C-table et de la table de Padé d'une fraction rationnelle au voisinage de leur bloc infini. Nous savons enfin qu'à tout bloc carré de zéros de la C-table de côté c , correspond un bloc carré de côté $c+1$ de la table de Padé, comme l'indique la figure 2.17 et le théorème 38.

Il reste à examiner ce qui se passe pour les cases du bloc situées dans la partie inférieure (elles sont recouvertes d'une trame fine dans la figure 2.18). Nous raisonnons par l'absurde et supposons que l'approximant de Padé de f correspondant à la case (p, q) existe et vaut P/Q .

Soit g la série de Taylor de P/Q en 0. Puisque g est une fraction rationnelle, sa C-table comporte un bloc infini de zéros, indiqué par une trame grossière à la figure 2.18. Il se peut que le bloc en question soit plus étendu, pour peu que le degré de P (resp. de Q) soit strictement inférieur à p (resp. à q), mais cela ne modifie en rien la démonstration qui va suivre.

Nous disposons de l'approximation $f - P/Q = f - g = o(t^{p+q})$. Par conséquent, les déterminants $C_f(l/m)$ et $C_g(l/m)$ coïncident tant que le plus grand



Si l'approximant $[p/q]_f$ existe, alors la case marquée d'une † est à la fois nulle et non nulle.

Figure 2.18: visualisation de la preuve du théorème 39.

indice de leurs coefficients reste inférieur ou égal à $p + q$, c'est-à-dire tant que $l + m - 1 \leq p + q$.

Les "antidiagonales" d'équation $l + m = p + q$ et $l + m - 1 = p + q$ sont appelées respectivement D_0 et D_1 et sont tracées à la figure 2.18. Les déterminants $C_f(l/m)$ et $C_g(l/m)$ coïncident donc dans la partie de la C-table située au-dessus de la droite D_1 .

Ce raisonnement prouve en particulier que les déterminants de g et de f occupant les cases marquées d'une astérisque * sont égaux. La C-table de g contient donc le motif suivant, composé de déterminants non nuls sur le pourtour et nuls le long du bord intérieur.

$\neq 0$						
$\neq 0$	0	0	0	0	0	$\neq 0$
$\neq 0$	0					
$\neq 0$	0					
$\neq 0$	0					
$\neq 0$	0					
$\neq 0$	$\neq 0$					

D'après le théorème 38, cette amorce de bloc *se referme*. La C-table de g contient donc *le même* bloc carré que la table de f . La contradiction vient alors de ce que le déterminant $C_g(l/m)$ occupant la case marquée d'une † à la figure 2.18 est à la fois nul et non nul.

Nous venons de prouver que les approximants de Padé de f n'existent pas pour les cases situées dans la partie inférieure d'un bloc. Nous résumons les résultats de ce chapitre par la figure et le théorème suivants.

Théorème 39. — Soit $f \in K[[t]]$ une série formelle de terme constant non nul.

1) La table de Padé de f admet une partition en blocs carrés de côté $c + 1$ correspondant aux blocs de zéros (en traits doubles) de taille c de la C-table de f .

2) Lorsque $c = 0$, c'est-à-dire lorsque le déterminant $C_f(p/q)$ est non nul, l'approximant de Padé de f de type $[p/q]$ existe et il est de degrés génériques : son numérateur est de degré p et son dénominateur de degré q .

3) Lorsque $c > 0$, le bloc de la table de Padé se divise en deux, comme l'indique la figure 2.18.

- Dans la partie supérieure (entourée en gras), les approximants de Padé

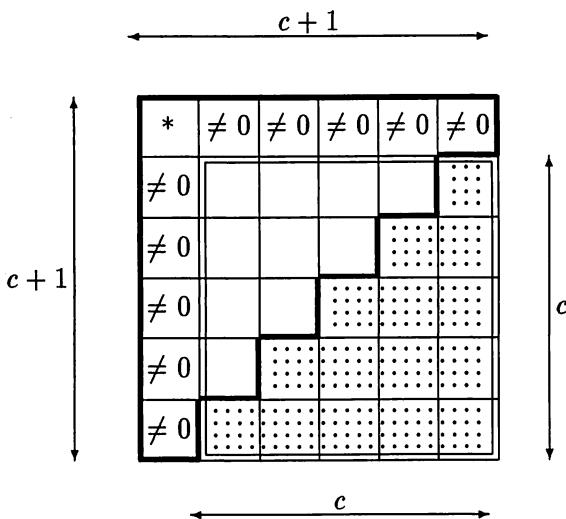


Figure 2.19: structure de la table de Padé.

existent et sont égaux à celui correspondant au sommet du bloc (désigné par le symbole *). Ce dernier est, dans son bloc, le seul de degrés génériques.

- Dans la partie inférieure (grisée), les approximants de Padé de f n'existent pas.

2.6 Un algorithme de calcul des approximants de Padé.

Nous avons vu au corollaire 29 le lien entre les réduites du développement en P-fraction de $t^s f(t)$ et approximants de Padé de la série f , situés le long de la diagonale s . Le théorème 39 nous assure qu'on obtient ainsi *tous* les approximants de Padé de f . Munis de ces deux résultats, nous pouvons affirmer que la méthode ci-dessous répond aux deux questions suivantes : l'approximant $[p/q]_f$ existe-t-il ? Si oui, quelle est sa valeur ?

Méthode :

1. Poser $s = q - p$.
2. Calculer le développement de $t^s f(t)$ en P-fraction jusqu'à ce que l'on soit assuré que

$$N_1^{(s)} + \cdots + N_k^{(s)} \leq q < N_1^{(s)} + \cdots + N_{k+1}^{(s)}. \quad (2.27)$$

3. Si $2(q - N_1^{(s)} - \dots - N_k^{(s)}) \geq N_{k+1}^{(s)}$, l'approximant n'existe pas. Sinon, il existe et vaut $t^{-s} f_{M_k^{(s)} + N_k^{(s)}}^{(s)}(t)$. Il reste alors à l'écrire sous la forme $\frac{P}{Q}$, si besoin est.

Cette section a précisément pour objet de donner un algorithme pour le point 2. Expliquons plus en détail le point 3 : la condition (2.27) dit que q s'écrit $N_1^{(s)} + \dots + N_k^{(s)} + b$ avec $0 \leq b < N_{k+1}^{(s)}$. Il suffit d'appliquer alors le corollaire 29 où a est défini par l'égalité $p = N_1^{(s)} + \dots + N_k^{(s)} - s + a$.

Nous remarquons que cette méthode donne, au fur et à mesure du développement de $t^s f(t)$ en P-fraction, tous les approximants de Padé deux à deux distincts de la diagonale s . Si l'on doit calculer des approximants appartenant à des diagonales différentes, il faut reprendre à chaque fois le développement indiqué au point 2 (ou bien utiliser d'autres méthodes, comme les relations entre approximants voisins [7]).

Cette méthode ramène donc la détermination de l'existence et de la valeur d'un approximant de Padé au développement d'une série de Laurent en P-fraction. Le paragraphe 2.6.1 fournit du même coup la preuve de la proposition 27.

2.6.1 Une vue d'ensemble.

Soit $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$. Si f est la série génératrice de certains P-chemins valués, le polynôme P_0 est nécessairement défini par $P_0(t) = \sum_{n \leq 0} c_n t^n$. Nous allons ensuite résoudre, pour tout $n \geq 1$, les équations

$$c_n = \sum_{\omega \text{ est un P-chemin de longueur } 2n} v(\omega), \quad (2.28)$$

dans lesquelles les inconnues sont les nombres entiers N_k ainsi que les scalaires λ_k et $a_{k,i}$. La possibilité de résoudre successivement ces équations repose sur les remarques suivantes.

Remarques. — 1) Si les nombres N_1, \dots, N_k sont connus et si $M_k < n \leq M_k + N_k$ [ou encore $2(N_1 + \dots + N_{k-1}) + N_k < n \leq 2(N_1 + \dots + N_k)$], il existe un seul P-chemin ω de longueur $2n$ qui atteint le niveau n . Ce chemin est composé de n pas montants, suivis d'un petit pas descendant du niveau n au niveau M_k , suivis de k grands pas descendants, allant successivement du niveau M_j au niveau M_{j-1} pour $j = k, \dots, 1$. Il a la valuation $v(\omega) = a_{k,i} \lambda_k \dots \lambda_1$, où i vaut $n - M_k$.

2) Si le nombre N_{k+1} est connu à son tour et si $n = M_{k+1} = 2(N_1 + \dots + N_{k+1})$, il existe de nouveau un seul P-chemin η de longueur $2n$ qui atteint le niveau n . Ce chemin est composé de n pas montants, suivis de $k+1$ grands pas descendants, allant successivement du niveau M_j au niveau M_{j-1} pour $j = k+1, \dots, 1$. Il a la valuation $v(\omega) = \lambda_{k+1} \lambda_k \dots \lambda_1$.

Voici alors la description de l'étape n de l'algorithme. Nous supposons connus les nombres N_1, \dots, N_k ainsi que les scalaires tous non nuls $\lambda_1 \dots \lambda_k$ et $a_{l,i}$ pour $1 \leq l \leq k$ et $1 \leq i \leq N_l$. L'équation (2.28) s'écrit, respectivement dans le premier et le second cas, sous les formes suivantes :

$$c_n = a_{k,i} \lambda_k \dots \lambda_1 + TC_{k,i}^1, \quad (2.29)$$

$$c_n = \lambda_{k+1} \lambda_k \dots \lambda_1 + TC_k^2, \quad (2.30)$$

où $TC_{k,i}^1$ et TC_k^2 désignent des termes connus puisqu'ils sont donnés par

$$\begin{aligned} TC_i^1 &= \sum_{\substack{|\omega|=2(M_k+i) \\ \omega \text{ est borné au niveau } M_k+i-1}} v(\omega), \\ TC_k^2 &= \sum_{\substack{|\omega|=2M_{k+1} \\ \omega \text{ est borné au niveau } M_k+N_k}} v(\omega). \end{aligned}$$

Seules les valuations $a_{k,i}$ et λ_{k+1} sont inconnues. Ces équations admettent toujours une et une seule solution car les quantités λ_j pour $j \leq k$ sont toutes non nulles par hypothèse.

Il nous reste à indiquer la façon dont nous avons déterminé N_{k+1} . C'est le plus petit nombre entier $i \geq 1$ tel que

$$c_{M_k+N_k+i} \neq TC_{k,N_k+i}^3 \quad (2.31)$$

Comme précédemment, la notation TC_{k,N_k+i}^3 désigne un terme connu, puisqu'il vaut

$$TC_{k,N_k+i}^3 = \sum_{\substack{|\omega|=2(M_k+N_k+i) \\ \omega \text{ est borné au niveau } M_k+N_k}} v(\omega). \quad (2.32)$$

Si $N_{k+1} = \infty$, l'algorithme s'arrête et f est la fraction rationnelle $f_{M_k+N_k}$.

Sous la forme que nous venons de décrire, l'algorithme n'est pas exploitable. Il reste en effet à organiser les calculs des termes dits connus, apparaissant dans les équations (2.29), (2.30) et (2.31). Le paragraphe suivant est consacré à ce problème.

Auparavant, nous prouvons la proposition 27. Ce qui précéde démontre l'existence et l'unicité du quadruplet (N, P_0, λ, a) adéquat lorsque f n'est pas rationnelle. Il nous reste à montrer que le développement d'une fraction rationnelle est nécessairement fini. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 40. — Si la série de Laurent $f = \sum_{n \geq s} c_n t^n$ à coefficients dans K est rationnelle, alors son développement en P-fraction est fini.

Démonstration : si f est rationnelle, il en est de même pour $f - \sum_{n < 0} c_n t^n$. Cette dernière série est par conséquent égale à ses approximants de Padé d'ordre

assez grand. Plus précisément, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f - P_0 = [n + a/n + b]_{f - P_0}$ pour *tous* les entiers a et b positifs. La proposition 28 implique alors que le développement est fini.

□

2.6.2 Le détail des calculs.

Nous adoptons les notations suivantes, dans lesquelles p est nombre entier, éventuellement négatif :

- $D_{k,p}$ est la droite d'équation $x + y = 2(M_k + p)$;
- $h_{k,p,l}$ est la somme $\sum v(\omega)$ portant sur les P-chemins d'origine $(0,0)$ et dont le dernier sommet est le point de $D_{k,p}$ d'ordonnée M_l ;
- $h'_{k,p,l,i}$ désigne la somme précédente restreinte aux chemins bornés au niveau $M_k + i$.

Ainsi, les termes connus $TC_{k,i}^1$, TC_k^2 et TC_{k,N_k+i}^3 du paragraphe précédent sont respectivement donnés par

$$\begin{aligned} TC_{k,i}^1 &= h'_{k,i,0,i-1}, \\ TC_k^2 &= h'_{k,N_k+N_{k+1},0,N_k}, \\ TC_{k,N_k+i}^3 &= h'_{k,N_k+i,0,N_k}. \end{aligned}$$

La figure 2.20 illustre ces définitions. Enfin, nous désignons par Λ_k le produit

$$\Lambda_k = \lambda_1 \dots \lambda_k. \quad (2.33)$$

C'est un auxiliaire de calcul qui évite de faire des multiplications inutiles.

Dans les pages qui suivent, la multiplication des indices ne doit pas cacher qu'une seule idée guide les calculs : pour évaluer une somme $h_{k,p,l}$ ou $h'_{k,p,l,i}$, nous examinons *d'où* sont susceptibles de provenir les P-chemins aboutissant au point en question. A cette fin, nous utilisons les remarques de la page 42, ainsi que l'expression (2.2) des nombres M_k , qui implique notamment la relation $M_k = M_{k-1} + N_{k-1} + N_k$. Ceci nous permet d'écrire l'égalité

$$h_{k,p,l} = h_{k-1,p+N_k+N_{k-1},l},$$

que nous utilisons sans y faire explicitement référence, en particulier lorsqu'il apparaît au cours de l'algorithme que le nombre p est négatif.

Initialisation (étape 0). Les trois assertions suivantes sont claires et ne nécessitent aucun commentaire.

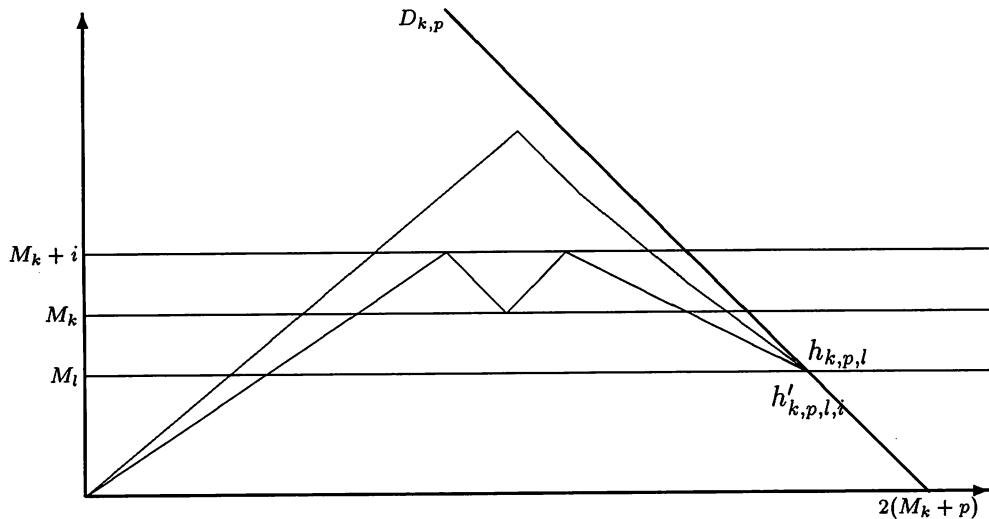


Figure 2.20: les sommes $h_{k,p,l}$ et $h'_{k,p,l,i}$.

- Le polynôme P_0 vaut

$$P_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } s > 0; \\ \sum_{n=s}^0 c_n t^n & \text{si } s \leq 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

- L'entier N_1 est $\min\{n \geq 1, c_n \neq 0\}$. Si $N_1 = \infty$, l'algorithme s'arrête et $f = P_0$.
- Si $N_1 < \infty$, la valuation λ_1 vaut c_{N_1} .

Poser de plus $h_{0,1,0} = 0$ et $\Lambda_1 = \lambda_1$.

Calcul de P_k , de N_{k+1} et de λ_{k+1} (étape k). Nous supposons connus

- les nombres N_1, \dots, N_k ;
- les scalaires tous non nuls $\lambda_1 \dots \lambda_k$;
- les scalaires $a_{l,i}$ pour $1 \leq l \leq k-1$ et $1 \leq i \leq N_l$;
- les nombres $h_{k-1,p,l}$ pour l variant de 1 à $k-1$ et pour $1 + N_k + N_{k-1} - N_l - N_{l+1} \leq p \leq N_{k-1} + N_k$;

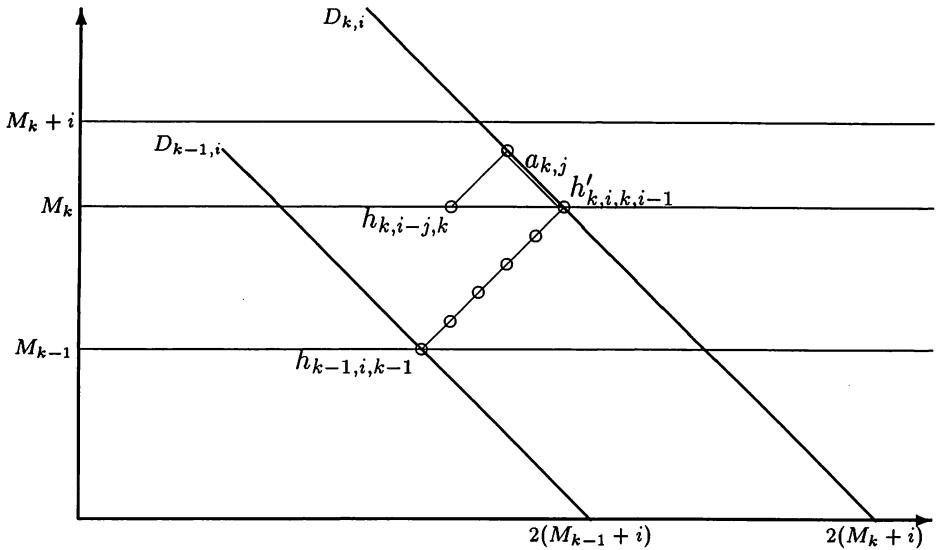


Figure 2.21: le calcul de $h'_{k,i,k,i-1}$.

Calcul de $P_k(t)$. Pour i valant successivement $1, \dots, N_k$, effectuer les instructions suivantes.

1. Calculer la quantité $TC_{k,i}^1 = h'_{k,i,0,i-1}$. Cela se fait en plusieurs étapes que nous regroupons en quatre cas.

(a) Calculer

$$h'_{k,i,k,i-1} = h_{k-1,i,k-1} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{k,j} h_{k,i-j,k} .$$

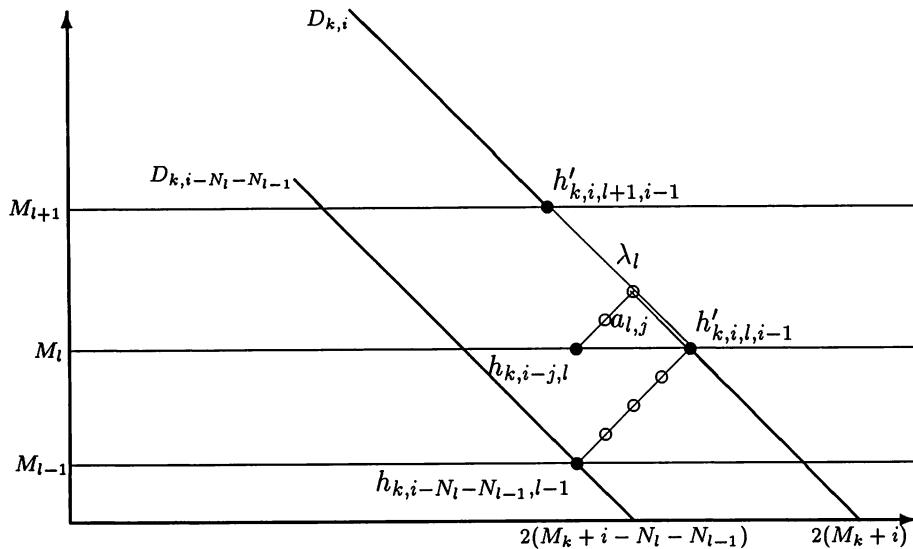
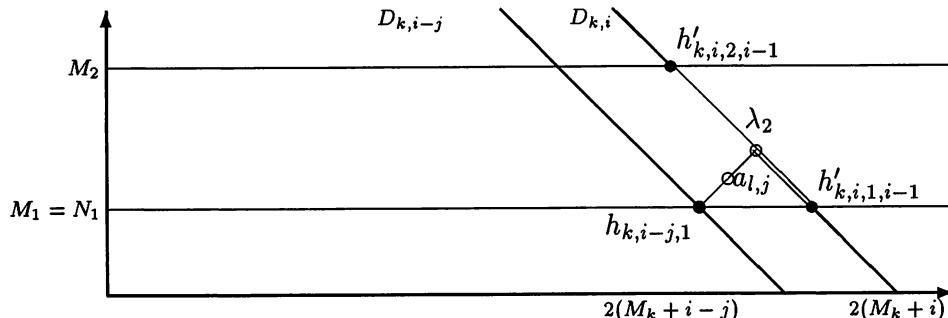
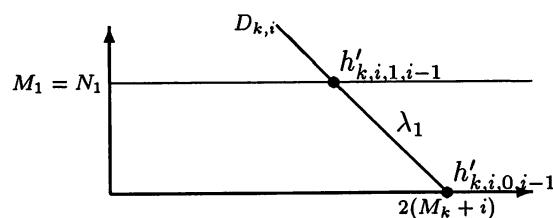
Nous convenons que la somme ci-dessus vaut 0 lorsque $i = 1$.

- (b) Pour l valant successivement $k - 1, \dots, 2$ et dans cet ordre, calculer les $h'_{k,i,l,i-1}$ par

$$h'_{k,i,l,i-1} = h_{k-1,i-N_l-N_{l-1},l-1} + \lambda_{l+1} h'_{k,i,l+1,i-1} + \sum_{j=1}^{N_l} a_{l,j} h_{k,i-j,l} .$$

- (c) Calculer $h'_{k,i,1,i-1} = \lambda_2 h'_{k,i,2,i-1} + \sum_{j=1}^{N_1} a_{1,j} h_{k,i-j,1} .$

- (d) Calculer $h'_{k,i,0,i-1} = \lambda_1 h'_{k,i,1,i-1} .$

Figure 2.22: le calcul de $h'_{k,i,l,i-1}$ lorsque $k-1 \geq l \geq 2$.Figure 2.23: le calcul de $h'_{k,i,1,i-1}$.Figure 2.24: le calcul de $h'_{k,i,0,i-1}$.

2. Calculer $a_{k,i}$ par

$$a_{k,i} = \frac{c_{M_k+i} - h'_{k,i,0,i-1}}{\Lambda_k}, \quad (2.35)$$

en vertu de l'équation (2.29).

3. Mettre à jour les sommes $h_{k,i,l}$ par

$$h_{k,i,l} = h'_{k,i,l,i-1} + a_{k,i} \lambda_k \dots \lambda_{l+1},$$

en convenant que le produit $\lambda_k \dots \lambda_{l+1}$ vaut 1 si $l = k$.

Calcul de N_{k+1} et de λ_{k+1} . Pour i valant successivement 1, 2, ..., effectuer la boucle suivante.

1. Calculer la quantité $TC_{k,N_k+i}^3 = h'_{k,i+N_k,0,N_k}$. Cela se fait en plusieurs étapes que nous regroupons à nouveau en quatre cas. Ces calculs ainsi que les figures susceptibles de les illustrer sont analogues à ceux de la rubrique précédente (il est légitime d'utiliser les sommes $h_{k,j,l}$ pour $1 \leq j \leq N_k$ car nous avons mis à jour leur valeur).

(a) Calculer $h'_{k,i+N_k,k,N_k} = h_{k,i,k-1} + \sum_{j=1}^{N_k} a_{k,j} h_{k,i+N_k-j,k}$.

(b) Pour l valant successivement $k-1, \dots, 2$ et dans cet ordre, calculer

$$\begin{aligned} h'_{k,i+N_k,l,N_k} &= \\ &h_{k,i+N_k-N_l-N_{l-1},l-1} + \lambda_{l+1} h'_{k,i+N_k,l+1,N_k} + \sum_{j=1}^{N_l} a_{l,j} h_{k,i+N_k-j,l}. \end{aligned}$$

(c) Calculer $h'_{k,i+N_k,1,N_k} = \lambda_2 h'_{k,i+N_k,2,N_k} + \sum_{j=1}^{N_2} a_{2,j} h_{k,i+N_k-j,1}$.

(d) Calculer $h'_{k,i+N_k,0,N_k} = \lambda_1 h'_{k,i+N_k,1,N_k}$.

2. Tester si $h'_{k,i+N_k,0,N_k} = c_{M_k+N_k+i}$.

(a) Tant que la réponse est oui, ajouter 1 à i et continuer la boucle après avoir mis à jour les valeurs des sommes $h_{k,i+N_k,l}$ par

$$h_{k,i+N_k,l} = h'_{k,i+N_k,l,N_k}.$$

Si la réponse est affirmative pour toutes les valeurs de $i \geq 1$, c'est que f est une fraction rationnelle et elle vaut $f_{M_k+N_k}$.

(b) Si la réponse est non, les équations (2.30) et (2.31) nous disent que

$$\begin{aligned} N_{k+1} &= i, \\ \lambda_{k+1} &= \frac{c_{M_k+N_k+i} - h'_{k,i+N_k,0,N_k}}{\Lambda_k}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Mettre alors à jour la valeur du produit des λ_i en posant $\Lambda_{k+1} = \lambda_{k+1}\Lambda_k$.

Mettre enfin à jour les valeurs des sommes $h_{k,i+N_k,l} = h_{k+1,0,l}$ par

$$h_{k+1,0,l} = h'_{k,i+N_k,l,N_k} + \lambda_{k+1}\lambda_k \dots \lambda_l,$$

et passer à l'étape $k + 1$.

On peut vérifier que les équations de l'étape k ne nécessitent la connaissance préalable que des $h_{k,l,p}$ mentionnés à la page 72, au début de la rubrique “Étape k ”. Pour l'étape suivante, il conviendra de garder en mémoire les quantités que voici.

- Les valeurs des $h_{k,l,p}$ pour l variant de 2 à $k + 1$ et pour $1 + N_k + N_{k+1} - N_l - N_{l-1} \leq p < N_k + N_{k+1}$ (nous sommes censés les connaître).
- Les valeurs des $h_{k,1,p}$ pour $1 + N_k + N_{k+1} - N_1 \leq p < N_k + N_{k+1}$ (même remarque).

Remarque. — En renversant l'ordre des calculs, on imagine aisément un algorithme qui détermine les coefficients c_n d'une série formelle, connaissant la suite λ et la famille a des coefficients de son développement en P-fraction.

2.6.3 Étude du nombre de divisions.

Durant l'étape k , l'algorithme effectue $N_k + 1$ divisions : les N_k premières sont nécessaires au calcul des $a_{k,i}$ par la formule (2.35), et la dernière sert à calculer λ_{k+1} grâce à (2.36).

Notons $\phi(n)$ le nombre de divisions effectuées par l'algorithme après la lecture des coefficients c_1, \dots, c_n de la série f (nous ne tenons pas compte ici des coefficients c_s, \dots, c_0). L'étude attentive de l'algorithme fournit les valeurs suivantes, dans lesquelles $1 \leq i \leq N_k$ et $1 \leq j < N_{k+1}$.

n	$\phi(n)$
$2(N_1 + \dots + N_{k-1}) + N_k$	$k-1+N_1+\dots+N_{k-1}=k-1+\frac{n}{2}-\frac{N_k}{2}$
$2(N_1 + \dots + N_{k-1}) + N_k + i$	$k-1+N_1+\dots+N_{k-1}+i=k-1+\frac{n}{2}-\frac{N_k-i}{2}$
$2(N_1 + \dots + N_{k-1}) + N_k + N_k + j$	$k-1+N_1+\dots+N_{k-1}+N_k=k-1+\frac{n}{2}-\frac{j}{2}$

Les inégalités satisfaites par i et j conduisent alors à l'encadrement :

$$k - 1 + \frac{n}{2} - \frac{\max\{N_k, N_{k+1}\}}{2} \leq \phi(n) \leq k - 1 + \frac{n}{2}, \quad (2.37)$$

valable pour $M_k \leq n < M_{k+1}$, c'est-à-dire $2(N_1 + \dots + N_{k-1}) + N_k \leq n \leq 2(N_1 + \dots + N_k) + N_{k+1}$. Puisque les N_k sont des entiers strictement positifs,

nous avons $k - 1 \leq N_1 + \cdots + N_{k-1} \leq \frac{n-N_k}{2}$ et, par conséquent, la majoration suivante est toujours valable :

$$\forall n, \quad \phi(n) \leq n - 1.$$

Nous pensons que cette majoration donne une idée de la stabilité numérique de notre algorithme. Ce nombre n est à rapprocher du nombre de divisions qu'effectue le qd-algorithme, de l'ordre de n^2 . Examinons pour terminer trois cas particuliers, qui montrent des comportements asymptotiques distincts pour $\phi(n)$.

1. Le cas des fractions de Jacobi, pour lequel la suite N est constante et vaut 1. Nous avons alors

$$\phi(n) = n - 1,$$

et nous retrouvons un des résultats obtenus par Viennot [84].

2. Le cas où les nombres N_k sont bornés : $1 \leq A \leq N_k \leq B < \infty$. les inégalités (2.37) montrent que nous avons, à un terme constant près :

$$\frac{n}{2} \left(1 + \frac{1}{B} \right) \leq \phi(n) \leq \frac{n}{2} \left(1 + \frac{1}{A} \right).$$

3. Le cas où $N_k \sim k^\alpha$ pour un nombre réel strictement positif α . Nous déduisons de (2.37) le comportement suivant :

$$\phi(n) = \frac{n}{2} + o\left(n^{\frac{1}{\alpha+1}}\right) \sim \frac{n}{2}.$$

Chapitre 3

Approximants de Padé en deux points et T-fractions

La lettre K désigne un corps commutatif dont les éléments sont appelés les scalaires.

3.1 Introduction.

La notion d'*approximant de Padé en deux points* est née du problème consistant à approcher une fonction par une fraction rationnelle, à la fois au voisinage de zéro et de l'infini. Une partie des coefficients de cette fraction rationnelle est utilisée pour faire coïncider son développement de Taylor avec celui de la fonction, alors que les autres coefficients servent à faire coïncider les deux développements asymptotiques.

Définition 41.— Soient A un élément de $K[[t]]$ et B un élément de $K[[t^{-1}]]$ ayant respectivement les formes :

$$A(t) = c_0 + \sum_{n \geq 1} c_n t^n \quad \text{et} \quad B(t) = \sum_{n \leq -1} c_n t^n, \quad (3.1)$$

avec $c_0 \neq 0$. Une fraction rationnelle $F(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ est un approximant de Padé en deux points d'ordre k du couple (A, B) si les trois conditions suivantes sont réalisées.

(i) Les degrés des polynômes P et Q vérifient

$$\deg(P) \leq k - 1 \quad \text{et} \quad \deg(Q) \leq k. \quad (3.2)$$

(ii) En $t = 0$, on a l'approximation

$$A(t) = F(t) + o(t^k), \quad (3.3)$$

c'est-à-dire que les coefficients du développement de Taylor de F en 0 et ceux de A coïncident jusqu'à la puissance k de la variable t .

(iii) En $t = \infty$, on a l'approximation

$$B(t) = F(t) + o(t^{-(k-1)}), \quad (3.4)$$

c'est-à-dire que les coefficients du développement asymptotique de F en ∞ et ceux de B coïncident jusqu'à la puissance $k - 1$ de $\frac{1}{t}$.

On trouvera, à la page 92, un exemple illustrant cette définition, qui porte sur une fonction réelle d'une variable réelle.

Comme l'ont démontré McCabe, Murphy [64] et Jones, Thron [54], les réduites des T-fractions fournissent des approximants de Padé en deux points. En appliquant les résultats du premier chapitre aux arbres en forme de *peigne*, nous présentons à la section 3.2 un modèle combinatoire pour les fractions continues de Thron [78], ou T-fractions, qui s'écrivent sous la forme

$$\frac{\lambda_0}{1 - b_1 t -} \frac{\lambda_1 t}{1 - b_2 t -} \cdots \frac{\lambda_k t}{1 - b_{k+1} t -} \cdots \quad (3.5)$$

Nous appelons aussi T-fraction une fraction continue obtenue à partir de l'expression (3.5) en remplaçant la constante λ_0 par le monôme $\lambda_0 t$. La notion de *T-fraction duale* d'une T-fraction apparaît alors naturellement comme la série génératrice de certains chemins valués sur un arbre en forme de *brosse*.

Nous montrons en section 3.4 comment l'on peut, grâce à la notion de déploiement introduite au premier chapitre, donner un algorithme développement de deux séries formelles en T-fractions duales. A notre connaissance cet algorithme est nouveau, et il permet le calcul des approximants de Padé en deux points.

Par ailleurs, en nous inspirant de l'algorithme quotient différence de Rutishauser [73, 53] et de son interprétation combinatoire par Viennot [84, 87], nous décrivons à la section 3.5 un algorithme transformant une T-fraction en une fraction de Jacobi ou de Stieltjes.

En section 3.6, nous interprétons combinatoirement des développements en T-fraction relatifs à certaines séries hypergéométriques et à leurs q -analogues. Nous retrouvons ainsi des résultats de Dumont, Kreweras [33] et Zeng [91]. L'interprétation repose sur une bijection entre permutations et certaines *histoires* combinatoires. Cette nouvelle bijection joue, pour les T-fractions, le même rôle que celle de Françon et Viennot [42] pour les fractions de Jacobi et que celle de Foata et Zeilberger [40] pour les fractions de Stieltjes [30].

La notion de dualité pour les T-fractions soulève de nouveaux problèmes d'énumération. Deux exemples en sont donnés à la section 3.7, qui conduisent à de surprenants rapprochements relatifs aux séries génératrices de figures planaires appelés *polyominos*.

3.2 Le modèle combinatoire.

3.2.1 Peigne et T-fractions.

Nous appelons *arbre en forme de peigne*, ou plus brièvement *peigne*, l'arbre binaire infini dont tous les enfants gauches sont des feuilles. Nous le notons T dans tout ce chapitre. Nous appelons r_0 sa racine, r_1, \dots, r_n, \dots les descendants à droite successifs de la racine et, pour tout entier non nul n , nous appelons f_n l'enfant à gauche de r_n : voir la figure 3.1.

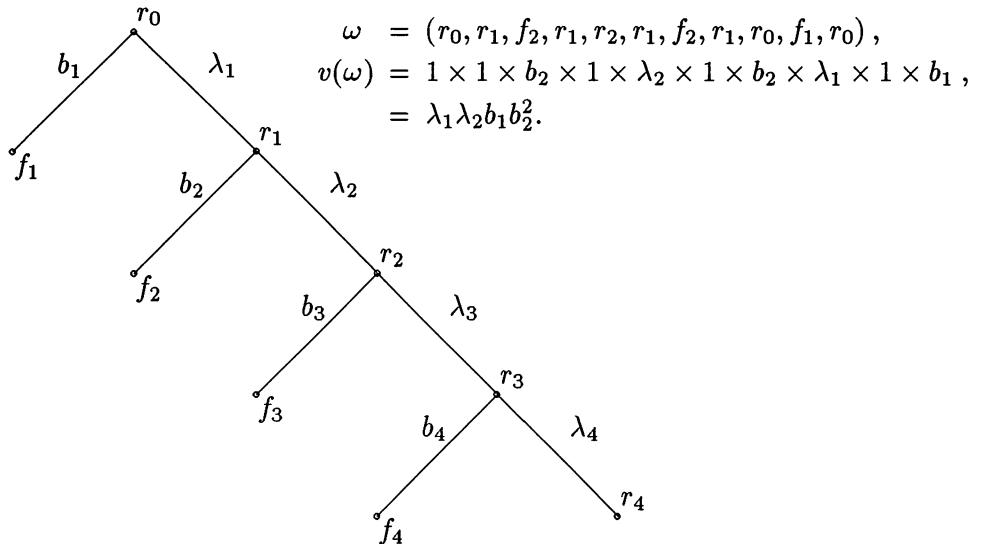


Figure 3.1: l'arbre infini en forme de peigne et la valuation d'un chemin.

Nous considérons des *chemins sans boucle* sur T , c'est-à-dire des suites de sommets (s_0, s_1, \dots, s_n) de T , telles que s_{i+1} soit le parent ou bien l'enfant de s_i , pour $0 \leq i \leq n - 1$. En particulier, deux sommets consécutifs sont distincts, ce qui justifie le qualificatif “sans boucle”.

Si $\omega = (s_0, s_1, \dots, s_n)$ est un tel chemin, l'entier n est sa *longueur*, que l'on note aussi $|\omega|$; le sommet s_0 est son *origine* et le sommet s_n est son *arrivée*, et ces deux sommets sont les *extrémités* de ω . Enfin, les couples (s_i, s_{i+1}) pour $0 \leq i \leq n - 1$ sont les *pas* de ω .

Le *produit* de deux chemins dont l'arrivée du premier est égale à l'origine du second est défini comme la mise bout à bout de leurs sommets. Un chemin de longueur strictement positive apparaît alors comme le produit de ses pas. Un pas (s_i, s_{i+1}) s'éloigne de la racine si s_{i+1} est l'enfant de s_i et s'en rapproche dans le cas contraire.

Nous convenons que le symbole λ_n (*resp.* b_n) désigne la valuation de l'arête $\{r_{n-1}, r_n\}$ (*resp.* de l'arête $\{r_{n-1}, f_n\}$) : cette convention est un abus de notation par rapport au premier chapitre, dans lequel les lettres b dénotaient les valuations des sommets.

La *valuation* d'un pas ξ est définie par

$$v(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \text{ s'éloigne de la racine ,} \\ \lambda_i & \text{si } \xi \text{ est le pas } (r_i, r_{i-1}) , \\ b_i & \text{si } \xi \text{ est le pas } (f_i, r_{i-1}) . \end{cases} \quad (3.6)$$

Enfin, la *valuation* d'un chemin de longueur nulle vaut 1 et celle d'un chemin $\omega = (s_0, \dots, s_n)$ de longueur strictement positive est le produit des valuations de ses pas :

$$v(\omega) = \prod_{i=0}^{n-1} v(s_i, s_{i+1}). \quad (3.7)$$

Toutes ces définitions sont illustrées par la figure 3.1.

Conformément à la définition 21 du premier chapitre, l'arbre partiel d'ordre k , noté T_k , est l'arbre déduit de T en effaçant les sommets r_i et f_i pour $i \geq k$ ainsi que les arêtes adjacentes à ces sommets.

Nous appelons respectivement $f(\lambda, b; t)$ et $f_k(\lambda, b; t)$ les séries génératrices des chemins sur T et sur T_{k+1} , dont les extrémités sont égales à la racine r_0 :

$$f(\lambda, b; t) = \lambda_0 \sum_{\omega \text{ sur } T} v(\omega) t^{\frac{|\omega|}{2}}, \quad (3.8)$$

$$f_k(\lambda, b; t) = \lambda_0 \sum_{\omega \text{ sur } T_{k+1}} v(\omega) t^{\frac{|\omega|}{2}}. \quad (3.9)$$

Nous abrégons ces notations en $f(t)$ et $f_k(t)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les suites $\lambda = (\lambda_k)_{k \geq 0}$ et $b = (b_k)_{k \geq 1}$ et nous parlons de *situation générique* ou de *cas générique* lorsque K est le corps des fractions rationnelles $\mathbb{Q}(\lambda, b)$.

Voici les premiers termes de la série $f(t)$:

$$f(t) = \lambda_0 + \lambda_0(\lambda_1 + b_1)t + \lambda_0(\lambda_1^2 + 2\lambda_1 b_1 + \lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 b_2)t^2 + \dots$$

Désormais, le terme *chemin sur U* désigne un chemin sans boucle sur l'arbre U dont les extrémités sont égales à la racine de U . La proposition suivante donne un développement de $f(t)$ en T-fraction.

Proposition 42. — 1) La série $f_k(t)$ donnée par l'expression (3.9) est une fraction rationnelle et admet le développement en T-fraction suivant :

$$f_k(t) = \frac{\lambda_0}{1 - b_1 t -} \frac{\lambda_1 t}{1 - b_2 t -} \cdots \frac{\lambda_{k-1} t}{1 - b_k t - \lambda_k t}. \quad (3.10)$$

Le degré de son numérateur est inférieur ou égal à $k - 1$ et celui de son dénominateur est inférieur ou égal à k . Ces inégalités sont des égalités dans le cas générique.

2) *L'approximation suivante en $t = 0$ est vérifiée :*

$$f(t) = f_k(t) + o(t^k). \quad (3.11)$$

En d'autres termes, les séries f et f_k coïncident jusqu'à la puissance k . Cette approximation est optimale dans le cas générique.

3) *La série $f(t)$ donnée par l'expression (3.8) admet le développement suivant en T -fraction :*

$$f(t) = \frac{\lambda_0}{1 - b_1 t -} \frac{\lambda_1 t}{1 - b_2 t -} \cdots \frac{\lambda_k t}{1 - b_{k+1} t -} \cdots \quad (3.12)$$

Démonstration : 1) notons δ le *décalage à gauche* défini sur l'ensemble des suites : si $a = (a_n)_{n \geq 0}$ est une suite, le n -ième terme de la suite δa est a_{n+1} . Désignons par $\delta f(\lambda, b; t)$, ou plus simplement $\delta f(t)$, la série formelle $f(\delta\lambda, \delta b; t)$. Cette série admet l'interprétation combinatoire suivante :

$$\delta f(t) = \lambda_1 \sum v(\omega) t^{\frac{|\omega|}{2}},$$

où la somme porte sur les chemins sur le sous-arbre de T issu du sommet r_1 . Vu la structure récursive de l'arbre T et en vertu du théorème 23 du premier chapitre, on obtient

$$\begin{aligned} f(\lambda, b; t) &= \frac{\lambda_0}{1 - b_1 t - t \delta f(\lambda, b; t)}, \\ &= \frac{\lambda_0}{1 - b_1 t - \frac{\lambda_1 t}{1 - b_2 t - t \delta^2 f(\lambda, b; t)}}, \\ &\vdots \\ &= \frac{\lambda_0}{1 - b_1 t -} \frac{\lambda_1 t}{1 - b_2 t -} \cdots \frac{\lambda_k t}{1 - b_{k+1} t - t \delta^{k+1} f(\lambda, b; t)}. \end{aligned}$$

La série $f_k(t)$ s'obtenant à partir de la série $f(t)$ en substituant λ_{k+1} et b_{k+1} par 0, la propriété 1 de la proposition résulte des égalités ci-dessus.

2) L'ensemble des chemins sur T de longueur inférieure ou égale à $2k$ coïncide avec l'ensemble des chemins sur T_{k+1} de longueur inférieure ou égale à $2k$ (rappelons que T_{k+1} est le sous arbre de T constitué des sommets $r_0, \dots, r_k, f_1, \dots, f_k$ et de leurs arêtes adjacentes).

En revanche, l'ensemble des chemins sur T de longueur $2k+2$ contient exactement deux chemins de plus que l'ensemble des chemins sur T_{k+1} de longueur $2k+2$: il s'agit des chemins allant de la racine r_0 au sommet r_k par k pas, faisant un

aller et retour de r_k à r_{k+1} ou bien de r_k à f_k , puis revenant à la racine par k pas. Nous en déduisons que

$$f(t) = f_k(t) + \lambda_1 \dots \lambda_k (\lambda_{k+1} + b_k) t^{k+1} + \dots$$

L'approximation (3.11) et son caractère optimal s'en déduisent.

3) Cela résulte de la convergence formelle de f_k vers f . □

Remarque. — Le calcul des degrés pour f_k et le caractère optimal de l'approximation (3.11) montrent que la réduite $f_k(t)$ n'est pas en général un approximant de Padé de la série $f(t)$.

3.2.2 Chemins de Dyck et T-fractions.

Déploiement des chemins sur le peigne. Nous conservons les deux suites $\lambda = (\lambda_k)_{k \geq 0}$ et $b = (b_k)_{k \geq 1}$ définies précédemment et nous fixons une suite $\beta = (\beta_k)_{k \geq 1}$ dans le corps K . Nous nous proposons, en nous inspirant de la section 1.2 du premier chapitre, de décrire un *déploiement* des chemins sur le peigne susceptible de conduire à un algorithme de développement en T-fraction.

Nous rappelons de façon imagée ce que nous appelons un déploiement : il s'agit d'une “version bidimensionnelle” d'un ensemble de chemins sur un arbre donné. La première dimension (celle des abscisses) représente le temps discret de la succession des sommets, alors que la seconde dimension (celle des ordonnées) représente la position des sommets dans l'arbre. Nous précisons ci-après ce que nous entendons par pic, creux et couple de pas associés dans un chemin de Dyck de la définition 2.

Définition 43. — Soit ω un chemin de Dyck.

1) Un *pic* de ω est un sommet commun à un pas montant et un pas descendant consécutifs dans cet ordre.

2) Un *creux* de ω est un sommet commun à un pas descendant et un pas montant consécutifs dans cet ordre.

3) Un couple de pas associés de ω est un couple constitué d'un pas montant ξ et d'un pas descendant $\bar{\xi}$ tels qu'il existe un chemin de Dyck η vérifiant la propriété suivante : le chemin ω admet la factorisation $\omega = \alpha \xi \eta \bar{\xi} \beta$.

La figure 3.2 illustre ces définitions.

Soit ξ un pas d'un chemin de Dyck ω de longueur non nulle. Soit k le *niveau* de ξ , c'est-à-dire l'ordonnée de son premier sommet (on dit aussi que ξ est issu du niveau k). Nous définissons ainsi la valuation de ξ , notée encore par la lettre v :

$$v(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \text{ est un pas montant,} \\ \beta_k & \text{si } \xi \text{ est un pas descendant et est adjacent à un pic,} \\ \lambda_k & \text{si } \xi \text{ est un pas descendant et n'est pas adjacent à un pic.} \end{cases} \quad (3.13)$$

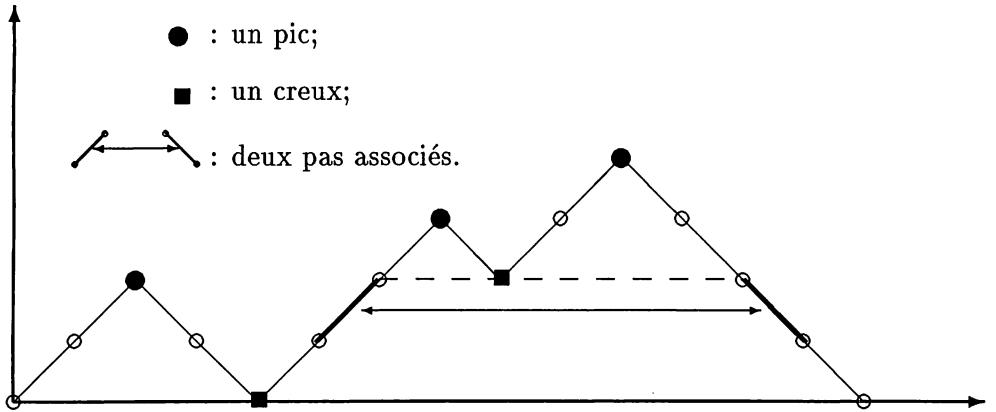


Figure 3.2: pics, creux et pas associés d'un chemin de Dyck.

La valuation du chemin de Dyck ω , encore notée $v(\omega)$, est par définition le produit des valuations de ses pas.

La série génératrice des chemins de Dyck ainsi valués est

$$D(\lambda, \beta; t) = \lambda_0 \sum v(\omega) t^{\frac{|\omega|}{2}}, \quad (3.14)$$

où la somme porte sur tous les chemins de Dyck. Nous abrégeons parfois cette série en $D(t)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. Enfin, nous posons

$$D_k(\lambda, \beta; t) = \lambda_0 \sum_{\omega \text{ borné au niveau } k} v(\omega) t^{\frac{|\omega|}{2}}. \quad (3.15)$$

C'est la série génératrice des chemins de Dyck dont le niveau des sommets est inférieur ou égal à k . Nous l'abrégeons parfois en $D_k(t)$.

Proposition 44.— 1) La série $D_k(t)$ donnée par l'expression (3.15) est une fraction rationnelle et elle vaut :

$$D_k(t) = \frac{\lambda_0}{1 - (\beta_1 - \lambda_1)t -} \frac{\lambda_1 t}{1 - (\beta_2 - \lambda_2)t -} \cdots \frac{\lambda_{k-1} t}{1 - (\beta_k - \lambda_k)t - \lambda_k t}. \quad (3.16)$$

Le degré du numérateur de $D_k(t)$ est inférieur ou égal à $k - 1$ et celui de son dénominateur est inférieur ou égal à k . Ces inégalités sont des égalités dans le cas générique.

2) L'approximation suivante est vérifiée en $t = 0$:

$$D(t) = D_k(t) + o(t^k). \quad (3.17)$$

En d'autres termes, les séries D et D_k coïncident jusqu'à la puissance k . Cette approximation est optimale dans le cas générique.

3) La série $D(t)$ définie par l'expression (3.14) admet le développement en T-fraction :

$$D(t) = \frac{\lambda_0}{1 - (\beta_1 - \lambda_1)t} \frac{\lambda_1 t}{1 - (\beta_2 - \lambda_2)t} \cdots \frac{\lambda_{k-1} t}{1 - (\beta_k - \lambda_k)t - \lambda_k t} \cdots \quad (3.18)$$

Démonstration : nous notons à nouveau δ le *décalage à gauche* défini sur l'ensemble des suites : si $a = (a_n)_{n \geq 0}$ est une suite, le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite δa est a_{n+1} . Nous désignons par $\delta D(\lambda, \beta; t)$, ou plus simplement $\delta D(t)$, la série formelle $D(\delta\lambda, \delta\beta; t)$. La décomposition et la factorisation imagées ci-dessous



se traduisent sur les séries génératrices par l'équation fonctionnelle suivante :

$$D(\lambda, \beta; t) = \lambda_0 + \beta_1 t D(\lambda, \beta; t) + \lambda_1 t \left[\frac{1}{\lambda_1} \delta D(\lambda, \beta; t) - 1 \right] D(\lambda, \beta; t). \quad (3.19)$$

Cette équation se réécrit

$$D(\lambda, \beta; t) = \frac{\lambda_0}{1 - (\beta_1 - \lambda_1)t - t \delta D(\lambda, \beta; t)},$$

et fournit le développement (3.16) par itération, puis substitution de λ_{k+1} et β_{k+1} par zéro.

Les points 2 et 3 s'établissent ensuite comme pour la proposition 42. \square

Nous voyons maintenant le lien entre les séries $f(t)$ donnée par (3.8) et $D(t)$ donnée par (3.14) : elles sont égales si $b_k = \beta_k - \lambda_k$ pour tout $k \geq 1$. De plus, cette condition est nécessaire dans le cas générique. C'est en ce sens que nous pouvons dire que les chemins de Dyck, valués comme l'indique l'expression (3.13), sont un déploiement des chemins sur le peigne, valués comme l'indique l'expression (3.6).

3.2.3 Les problèmes de l'existence et de l'unicité d'un développement en T-fraction.

Soit $f(t) = \sum_{n \geq 0} c_n t^n$ une série formelle. Nous cherchons deux suites λ et β de scalaires telles que $f(t) = D(\lambda, \beta; t)$. La proposition 44 nous dit alors que les $k+1$ premiers coefficients de $D_k(t)$ et de $f(t)$ sont égaux.

Écrire de telles égalités, c'est écrire $k+1$ équations dont les inconnues sont au nombre de $2k$: il s'agit de $\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}, \beta_1, \dots, \beta_k$. Bien que les équations en question ne soient pas linéaires, on peut avancer l'hypothèse que ce problème admet plus d'une solution. L'interprétation de $D_k(t)$ et de $D(t)$ en termes de séries génératrices de chemins de Dyck valués permet de démontrer le résultat plus précis suivant.

Proposition 45. — Soit $f(t) = \sum_{n \geq 0} c_n t^n \in K[[t]]$ avec $c_0 \neq 0$.

Pour toute suite $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ de scalaires tous non nuls, il existe un unique λ_0 et une unique suite de scalaires $(\beta_n)_{n \geq 1}$ tels que $f(t)$ admette le développement suivant :

$$f(t) = \frac{\lambda_0}{1 - (\beta_1 - \lambda_1)t -} \frac{\lambda_1 t}{1 - (\beta_2 - \lambda_2)t -} \cdots \frac{\lambda_k t}{1 - (\beta_{k+1} - \lambda_{k+1})t -} \cdots,$$

autrement dit, tels que $f(t) = D(\lambda, \beta; t)$.

Démonstration : soit $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite de scalaires tous non nuls. Si $f(t) = D(\lambda, \beta; t)$, nous avons nécessairement $\lambda_0 = c_0 \neq 0$. Nous raisonnons ensuite par récurrence sur n pour prouver que chaque β_n existe et est unique.

- Lorsque $\lambda_0 = c_0 \neq 0$ est connu, il existe évidemment un et un seul $\beta_1 \in K$ tel que

$$c_1 = \lambda_0 \sum_{|\omega|=2} v(\omega) = \lambda_0 \beta_1.$$

- Supposons déterminés β_1, \dots, β_n tels que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad c_k = \lambda_0 \sum_{|\omega|=2k} v(\omega).$$

Il existe un seul chemin de Dyck de longueur $2n + 2$ dont la valuation fait intervenir β_{n+1} : il s'agit du chemin en forme de chevron, constitué de $n+1$ pas montants suivis de $n+1$ pas descendants. L'équation d'inconnue β_{n+1}

$$c_{n+1} = \lambda_0 \sum_{|\omega|=2n+2} v(\omega)$$

se réécrit alors sous la forme $c_{n+1} = \beta_{n+1} \lambda_n \dots \lambda_1 \lambda_0 + termes connus$. Elle admet une unique solution car les λ_k sont tous non nuls.

□

Nous notons Υ l'application ainsi définie :

$$\begin{aligned} \Upsilon : (K \setminus \{0\})^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (\lambda_n)_{n \geq 1} &\longrightarrow ((\lambda_n)_{n \geq 0}, (\beta_n)_{n \geq 1}), \end{aligned}$$

arrivant dans l'ensemble des développements en T-fraction de $f(t)$, c'est-à-dire l'ensemble des couples (λ, β) de suites de scalaires telles que $f(t) = D(\lambda, \beta, t)$. Cette application est évidemment injective. De plus, si f n'est pas rationnelle, il est clair que ses développements en T-fractions ne font pas intervenir de λ_n nul. L'application Υ est donc bijective dans ce cas.

La question suivante vient alors immédiatement à l'esprit : si f est une fraction rationnelle, Υ est-elle encore bijective ou bien existe-t-il, comme cela se

produit pour beaucoup d'autres classes de fractions continues, un développement fini de f en T-fraction? Répondre à cette question n'est pas aussi simple que cela paraît.

On peut se reporter pour cela à Lange [60], où l'auteur prouve (théorème 2.4) l'existence d'un *unique* développement fini en δ -fraction régulière pour toute fraction rationnelle appartenant à $\mathbb{C}(t)$. Une δ -fraction est, suivant Lange, une fraction continue de la forme

$$b_0 - \delta_0 t + \frac{d_1 t}{1 - \delta_1 t} + \frac{d_2 t}{1 - \delta_2 t} + \cdots + \frac{d_k t}{1 - \delta_k t} + \cdots, \quad (3.20)$$

où b_0 et les d_k sont des nombres complexes, et où $\delta_k \in \{0, 1\}$. La δ -fraction (3.20) est dite *régulière* si $d_{k+1} = 1$ pour tout k tel que $\delta_k = 1$.

On peut vérifier que la démonstration fournie dans [60] s'étend de \mathbb{C} à un corps commutatif K quelconque. Les δ -fractions (ou plus exactement leurs inverses) étant une sous-famille des T-fractions, nous pouvons conclure : l'application Υ n'est pas bijective lorsque f est rationnelle.

Nous résumons les résultats de cette étude de la manière suivante. Soit $f = \sum_{n \geq 0} c_n t^n$ avec $c_0 \neq 0$.

- Supposons que le corps K soit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'ensemble $(K \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$ est un singleton : son seul élément est la suite constante égale à 1. De plus, toutes les δ -fractions sont régulières. Alors
 - si f est rationnelle, elle admet exactement deux développements en T-fraction : l'un est fini, l'autre est infini;
 - sinon, elle admet un et un seul développement en T-fraction, qui est infini.
- Supposons que le corps K ne soit pas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors toute série formelle à coefficients dans K admet une infinité de développements infinis en T-fractions. Si f est rationnelle, elle admet en outre *un* développement fini : c'est le résultat de Lange (on peut en fait adapter sa démonstration au cas des δ -fractions quelconques et montrer qu'une fraction rationnelle admet *une infinité* de développements finis en T-fraction).

Nous allons maintenant illustrer les définitions des T-fractions par deux exemples.

3.2.4 L'exemple des histoires d'Hermite restreintes.

Ce paragraphe est consacré à un développement en T-fraction d'une série génératrice sur laquelle nous reviendrons à la section 3.6. Nous donnons à cette occasion la définition de certaines *histoires*, notion introduite par Flajolet, Françon, Viennot et Vuillemin dans [38, 42]. Cette notion joue un rôle essentiel dans la

théorie combinatoire des polynômes orthogonaux développée par Viennot dans [84, 85].

Définition 46. — 1) Une histoire d’Hermite est un couple (ω, \mathbf{p}) formé d’un chemin de Dyck ω et d’un $2n$ -uplet $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{2n})$ de nombres entiers, appelés choix. La valeur de p_i dépend du i -ème pas ξ_i de ω , de la façon suivante :

$$p_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi_i \text{ est un pas montant,} \\ 1, 2, \dots \text{ ou } k & \text{si } \xi_i \text{ est un pas descendant issu du niveau } k. \end{cases} \quad (3.21)$$

2) Une histoire d’Hermite est restreinte si elle vérifie la condition supplémentaire suivante : pour tout pas descendant ξ_i adjacent à un pic, le choix p_i vaut 1.

La longueur d’une histoire d’Hermite est par définition celle de son chemin de Dyck. Ces objets combinatoires sont appelés ainsi à cause de leurs liens avec les polynômes d’Hermite. En particulier, le nombre d’histoires d’Hermite de longueur $2n$ est égal au moment d’ordre $2n$ des polynômes d’Hermite : cf. la monographie [84]. En d’autres termes, le nombre d’histoires d’Hermite de longueur $2n$ est $\mu_n = 1 \times 3 \times \dots \times (2n - 1)$, qui est aussi le nombre d’involutions sans points fixes sur $2n$ éléments.

Au vu de la définition 46 et d’après la proposition 44, ce nombre est aussi égal au coefficient de t^n dans la série $D(\lambda, \beta; t)$, dans laquelle les suites sont données par $\lambda_0 = 1$ et $\lambda_k = \beta_k = k$ pour tout entier $k \geq 1$. La fraction continue de Thron correspondante se réduit alors à une fraction continue de Stieltjes et l’on retrouve le résultat bien connu que voici :

$$\text{si } \mu_n = 1 \times 3 \times \dots \times (2n + 1), \quad \text{alors} \quad \sum_{n \geq 0} \mu_n t^n = \frac{1}{1} \frac{1t}{1} \frac{2t}{1} \dots \frac{kt}{1} \dots \quad (3.22)$$

Voyons maintenant ce qu’il en est pour les histoires d’Hermite *restreintes*, qui conduisent à un développement en T-fraction non dégénéré, c’est-à-dire pour lequel les suites λ et β sont distinctes.

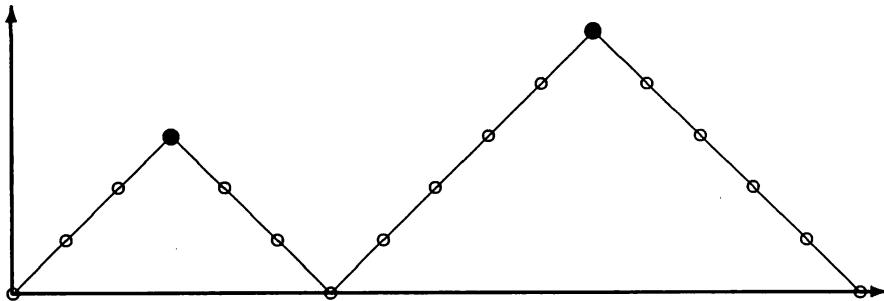
D’après la définition 46 et la proposition 44, le nombre h_n d’histoires d’Hermite restreintes de longueur $2n$ est le coefficient de t^n dans $D(\lambda, \beta; t)$, où $\lambda_0 = 1$, $\lambda_k = k$ et $\beta_k = 1$ pour tout entier $k \geq 1$. La série génératrice des histoires d’Hermite restreintes $H(t) = \sum_{n \geq 0} h_n t^n$ admet donc le développement en T-fraction suivant :

$$H(t) = \frac{1}{1 + 0t} \frac{1t}{1 + 1t} \frac{2t}{1 + 2t} \dots \frac{kt}{1 + kt} \dots \quad (3.23)$$

Voici les nombres h_n pour les premières valeurs de n :

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, \dots$$

Il est tentant de conjecturer que $h_n = n!$. Cette égalité est démontrée “algorithmiquement” à la section 3.5 et “bijectivement” à la section 3.6.



$$\mathbf{p} = (1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 2, 1)$$

Figure 3.3: une histoire d’Hermite (ω, \mathbf{p}) restreinte.

3.2.5 Un quotient lié à la fonction hypergéométrique de Gauss.

Cooper, Jones et Magnus [19] ont explicité un développement en T-fraction d’un *quotient de Gauss* de deux fonctions hypergéométriques ordinaires ${}_2F_1$. Nous donnons ici un q -anologue de leur résultat. Rappelons tout d’abord que la factorielle montante $(a)_n$ est l’expression $a(a+1)\dots(a+n-1)$. La fonction hypergéométrique de Gauss ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| t\right)$ est définie par

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| t\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{t^n}{n!}. \quad (3.24)$$

Les notations $[a; q]_n$ et $[a; q]_n!$ désignent respectivement un q -anologue de $a+n-1$ et un q -anologue de la factorielle montante $(a)_n$:

$$[a; q]_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ a & \text{si } n = 1, \\ a + q + \dots + q^{n-1} & \text{si } n \geq 2, \end{cases} \quad (3.25)$$

$$[a; q]_n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ [a; q]_1[a; q]_2 \dots [a; q]_n & \text{si } n \geq 1. \end{cases} \quad (3.26)$$

Mentionnons enfin deux identités élémentaires :

$$[aq - q; q]_n! = q^n(a-1)[a; q]_{n-1}! \quad \text{pour } n \geq 1, \quad (3.27)$$

$$\left[\frac{a}{q} + 1; q\right]_n! = \frac{[a; q]_{n+1}!}{aq^n} \quad \text{pour } n \geq 0. \quad (3.28)$$

Un q -anologue naturel de ${}_2F_1$ est la fonction suivante :

$${}_2\Omega_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| q; t\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{[a; q]_n! [b; q]_n!}{[c; q]_n!} \frac{t^n}{[1; q]_n!}. \quad (3.29)$$

théorie combinatoire des polynômes orthogonaux développée par Viennot dans [84, 85].

Définition 46. — 1) Une histoire d’Hermite est un couple (ω, \mathbf{p}) formé d’un chemin de Dyck ω et d’un $2n$ -uplet $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{2n})$ de nombres entiers, appelés choix. La valeur de p_i dépend du i -ème pas ξ_i de ω , de la façon suivante :

$$p_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi_i \text{ est un pas montant,} \\ 1, 2, \dots \text{ ou } k & \text{si } \xi_i \text{ est un pas descendant issu du niveau } k. \end{cases} \quad (3.21)$$

2) Une histoire d’Hermite est restreinte si elle vérifie la condition supplémentaire suivante : pour tout pas descendant ξ_i adjacent à un pic, le choix p_i vaut 1.

La longueur d’une histoire d’Hermite est par définition celle de son chemin de Dyck. Ces objets combinatoires sont appelés ainsi à cause de leurs liens avec les polynômes d’Hermite. En particulier, le nombre d’histoires d’Hermite de longueur $2n$ est égal au moment d’ordre $2n$ des polynômes d’Hermite : cf. la monographie [84]. En d’autres termes, le nombre d’histoires d’Hermite de longueur $2n$ est $\mu_n = 1 \times 3 \times \dots \times (2n - 1)$, qui est aussi le nombre d’involutions sans points fixes sur $2n$ éléments.

Au vu de la définition 46 et d’après la proposition 44, ce nombre est aussi égal au coefficient de t^n dans la série $D(\lambda, \beta; t)$, dans laquelle les suites sont données par $\lambda_0 = 1$ et $\lambda_k = \beta_k = k$ pour tout entier $k \geq 1$. La fraction continue de Thron correspondante se réduit alors à une fraction continue de Stieltjes et l’on retrouve le résultat bien connu que voici :

$$\text{si } \mu_n = 1 \times 3 \times \dots \times (2n + 1), \quad \text{alors} \quad \sum_{n \geq 0} \mu_n t^n = \frac{1}{1 -} \frac{1t}{1 -} \frac{2t}{1 -} \dots \frac{kt}{1 -} \dots \quad (3.22)$$

Voyons maintenant ce qu’il en est pour les histoires d’Hermite *restreintes*, qui conduisent à un développement en T-fraction non dégénéré, c’est-à-dire pour lequel les suites λ et β sont distinctes.

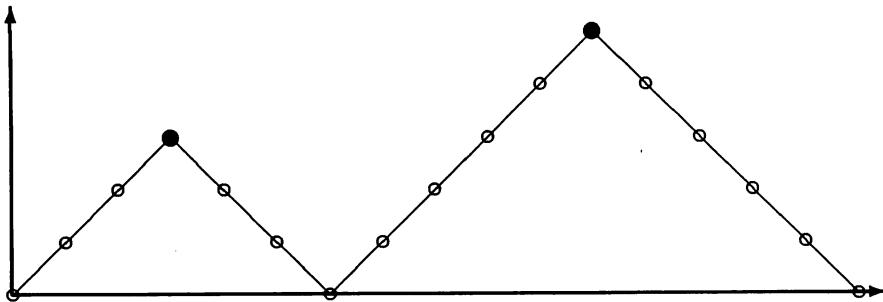
D’après la définition 46 et la proposition 44, le nombre h_n d’histoires d’Hermite restreintes de longueur $2n$ est le coefficient de t^n dans $D(\lambda, \beta; t)$, où $\lambda_0 = 1$, $\lambda_k = k$ et $\beta_k = 1$ pour tout entier $k \geq 1$. La série génératrice des histoires d’Hermite restreintes $H(t) = \sum_{n \geq 0} h_n t^n$ admet donc le développement en T-fraction suivant :

$$H(t) = \frac{1}{1 + 0t -} \frac{1t}{1 + 1t -} \frac{2t}{1 + 2t -} \dots \frac{kt}{1 + kt -} \dots \quad (3.23)$$

Voici les nombres h_n pour les premières valeurs de n :

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, \dots$$

Il est tentant de conjecturer que $h_n = n!$. Cette égalité est démontrée “algorithmiquement” à la section 3.5 et “bijectivement” à la section 3.6.



$$\mathbf{p} = (1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 2, 1)$$

Figure 3.3: une histoire d’Hermite (ω, \mathbf{p}) restreinte.

3.2.5 Un quotient lié à la fonction hypergéométrique de Gauss.

Cooper, Jones et Magnus [19] ont explicité un développement en T-fraction d’un *quotient de Gauss* de deux fonctions hypergéométriques ordinaires ${}_2F_1$. Nous donnons ici un q -anologue de leur résultat. Rappelons tout d’abord que la factorielle montante $(a)_n$ est l’expression $a(a+1)\dots(a+n-1)$. La fonction hypergéométrique de Gauss ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| t\right)$ est définie par

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| t\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{t^n}{n!}. \quad (3.24)$$

Les notations $[a; q]_n$ et $[a; q]_n!$ désignent respectivement un q -anologue de $a+n-1$ et un q -anologue de la factorielle montante $(a)_n$:

$$[a; q]_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ a & \text{si } n = 1, \\ a + q + \dots + q^{n-1} & \text{si } n \geq 2, \end{cases} \quad (3.25)$$

$$[a; q]_n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ [a; q]_1 [a; q]_2 \dots [a; q]_n & \text{si } n \geq 1. \end{cases} \quad (3.26)$$

Mentionnons enfin deux identités élémentaires :

$$[aq - q; q]_n! = q^n (a-1) [a; q]_{n-1}! \quad \text{pour } n \geq 1, \quad (3.27)$$

$$\left[\frac{a}{q} + 1; q\right]_n! = \frac{[a; q]_{n+1}!}{aq^n} \quad \text{pour } n \geq 0. \quad (3.28)$$

Un q -anologue naturel de ${}_2F_1$ est la fonction suivante :

$${}_2\Omega_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| q; t\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{[a; q]_n! [b; q]_n!}{[c; q]_n!} \frac{t^n}{[1; q]_n!}. \quad (3.29)$$

On prendra garde à ne pas confondre $[a; q]_n!$ avec $(a; q)_n$, qui désigne le produit $\prod_{i=0}^{n-1} (1 - aq^i)$: il n'existe en effet pas de relation simple entre ces deux quantités, à l'exception du cas où $a = 1$. Alors nous avons $(1 - q)^n [1; q]_n! = (q; q)_n$, et l'on retrouve dans ce cas le q -analogue usuel de la factorielle $n!$.

Lemme 47. — La fonction ${}_2\Omega_1$ vérifie l'identité

$$\frac{{}_2\Omega_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| q; t \right)}{{}_2\Omega_1 \left(\begin{matrix} a, bq - q \\ cq - q \end{matrix} \middle| q; t \right)} = \left(1 - \frac{a-b}{c-1}t - \frac{b(c-a)}{c(c-1)}t \frac{{}_2\Omega_1 \left(\begin{matrix} a, \frac{b}{q} + 1 \\ \frac{c}{q} + 1 \end{matrix} \middle| q; t \right)}{{}_2\Omega_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| q; t \right)} \right)^{-1}$$

Démonstration : il s'agit de prouver que

$${}_2\Omega_1 = \frac{a-b}{c-1}t {}_2\Omega_1 + \frac{b(c-a)}{c(c-1)}t {}_2\Omega_1 \left(\begin{matrix} a, \frac{b}{q} + 1 \\ \frac{c}{q} + 1 \end{matrix} \middle| q; t \right) + {}_2\Omega_1 \left(\begin{matrix} a, bq - q \\ cq - q \end{matrix} \middle| q; t \right), \quad (3.30)$$

où l'on a omis de préciser les variables lorsque celles-ci valent a, b, q et t . Les termes constants des deux membres de l'égalité (3.30) sont égaux et valent 1. Pour $n \geq 1$, le coefficient de t^n du membre de droite vaut, d'après les relations (3.27) et (3.28) :

$$\begin{aligned} & \frac{a-b}{c-1} \frac{[a;q]_{n-1}! [b;q]_{n-1}!}{[c;q]_{n-1}! [1;q]_{n-1}!} + \frac{b(c-a)}{c(c-1)} \frac{[a;q]_{n-1}! [\frac{b}{q}+1;q]_{n-1}!}{[\frac{c}{q}+1;q]_{n-1}! [1;q]_{n-1}!} + \frac{[a;q]_n! [bq-q;q]_n!}{[cq-q;q]_n! [1;q]_n!} \\ &= \frac{a-b}{c-1} \frac{[a;q]_{n-1}! [b;q]_{n-1}!}{[c;q]_{n-1}! [1;q]_{n-1}!} + \frac{b(c-a)}{c(c-1)} \frac{[a;q]_{n-1}! [b;q]_n!}{[c;q]_n! [1;q]_{n-1}!} \frac{c}{b} + \frac{[a;q]_n! [b;q]_{n-1}!}{[c;q]_{n-1}! [1;q]_n!} \frac{b-1}{c-1} \\ &= \frac{[a;q]_{n-1}! [b;q]_{n-1}!}{[c;q]_n! [1;q]_n!} \left(\frac{a-b}{c-1} [c;q]_n [1;q]_n + \frac{c-a}{c-1} [b;q]_n [1;q]_n + \frac{b-1}{c-1} [a;q]_n [c;q]_n \right). \end{aligned}$$

En écrivant que $c-a = (c-1)+(1-a)$ et que $[c;q]_n = c-1+[1;q]_n$, on montre que le terme entre parenthèses du produit ci-dessus est égal à

$$\begin{aligned} & (a-b)[1;q]_n + \frac{a-b}{c-1}[1;q]^2_n + [b;q]_n[1;q]_n \\ & + \frac{1-a}{c-1}[b;q]_n[1;q]_n + (b-1)[a;q]_n + \frac{b-1}{c-1}[a;q]_n[1;q]_n. \end{aligned}$$

En regroupant le premier, le troisième et le cinquième terme de cette somme d'une part, et le deuxième, le quatrième et le sixième terme d'autre part, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & [a;q]_n [b;q]_n + \frac{[1;q]_n}{c-1} \left[(a-b)[1;q]_n + (1-a)[b;q]_n + (b-1)[a;q]_n \right]. \\ &= [a;q]_n [b;q]_n + \frac{[1;q]_n}{c-1} \left[a([1;q]_n - [b;q]_n) + b([a;q]_n - [1;q]_n) + [b;q]_n - [1;q]_n \right], \\ &= [a;q]_n [b;q]_n + \frac{[1;q]_n}{c-1} \left[a(1-b) + b(a-1) + b-a \right], \\ &= [a;q]_n [b;q]_n. \end{aligned}$$

Finalement le coefficient de t^n du membre de droite de l'égalité (3.30) vaut $\frac{[a;q]_n! [b;q]_n!}{[c;q]_n! [1;q]_n!}$, qui est le coefficient de t^n de ${}_2\Omega_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| q; t \right)$. \square

Proposition 48. — Le quotient de Gauss $\frac{{}_2\Omega_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| q; t \right)}{{}_2\Omega_1 \left(\begin{matrix} a, bq - q \\ cq - q \end{matrix} \middle| q; t \right)}$ admet le développement (3.18) en T-fraction dont les coefficients sont donnés par $\lambda_0 = 1$ et, pour tout $k \geq 1$:

$$\lambda_k = [b; q]_k \frac{[c; q]_k - aq^{k-1}}{[c; q]_{k-1}[c; q]_k}, \quad (3.31)$$

$$\beta_k = aq^{k-1} \frac{c - b}{[c; q]_{k-1}[c; q]_k}. \quad (3.32)$$

Démonstration : il suffit de constater que l’itération de l’identité du lemme 47 — en substituant à chaque étape $\frac{b}{q} + 1$ à b et $\frac{c}{q} + 1$ à c — conduit à la T-fraction voulue. \square

3.3 Approximants de Padé en deux points.

3.3.1 Introduction

Nous avons vu au paragraphe 3.2.3 que, si le corps K est différent de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, une série formelle de terme constant non nul admet une infinité de développements en T-fraction, et nous avons lié ce phénomène au “défaut d’approximation” exprimé par les relations (3.11) et (3.17). Les contraintes permettant de déterminer de façon unique une T-fraction ont été explicitées par McCabe et Murphy [64] en 1976, puis Jones et Thron [54] en 1977, qui ont établi le lien entre ce problème et la théorie des approximants de Padé en deux points. Nous allons retrouver ce lien de façon combinatoire. On peut se reporter à [7, 32, 55] pour une présentation complète des approximants de Padé en deux points.

Nous adoptons les notations de la définition 41. Soit $F = \frac{P}{Q}$ un approximant de Padé en deux point d’ordre k du couple de séries formelles (A, B) . Nous supposons que le terme constant de Q est 1 lorsque nous parlons du dénominateur et du numérateur de F . Nous rappelons qu’une fraction rationnelle $F = P/Q$, vérifiant la condition (3.2), est un approximant de Padé d’une série $S \in K[[t]]$ si $S(t) = F(t) + o(t^{2k-1})$ en $t = 0$.

Exemple. — Soit h l’application définie sur $\mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}]$ par

$$h(t) = \sqrt{\frac{1+2t}{1+2t^3}}.$$

Nous notons A (*resp.* B) le développement de Taylor en 0 de h (*resp.* son développement asymptotique). Nous avons

$$A(t) = 1 + t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^3 + o(t^3);$$

$$B(t) = \frac{1}{t} + o(t^{-1}).$$

L'approximant de Padé $[1/2]_h$ de $h(t)$ existe et vaut $\frac{1+t}{1+t^2/2}$. Il satisfait par définition l'approximation algébrique

$$A(t) - [1/2]_h(t) = o(t^3)$$

en $t = 0$, et l'on peut vérifier qu'il fournit l'approximation uniforme suivante sur \mathbb{R}^+ :

$$\sup_{t \geq 0} |h(t) - [1/2]_h(t)| = 0,467 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

L'approximant de Padé en deux points d'ordre 2 du couple $(A(t), B(t))$ existe et vaut $F^{[1/2]}(t) = \frac{4+3t}{4-t+3t^2}$. On l'obtient par exemple à l'aide de l'algorithme du paragraphe 3.4. Il satisfait par définition les approximations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} A(t) - F^{[1/2]}(t) &= o(t^2) \quad \text{en } t = 0; \\ B(t) - F^{[1/2]}(t) &= o(t^{-1}) \quad \text{en } t = \infty. \end{aligned}$$

On peut en outre vérifier qu'il fournit une meilleure approximation uniforme de h sur \mathbb{R}^+ que l'approximant de Padé ordinaire $[1/2]_h$. En effet, nous avons

$$\sup_{t \geq 0} |h(t) - F^{[1/2]}(t)| = 0,202 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Nous renvoyons le lecteur à Baker [7] pour les propriétés analytiques des approximants de Padé en deux points.

3.3.2 Le lien entre T-fractions et approximants de Padé en deux points.

Nous notons \mathcal{L} l'application qui, au couple de suites $((u_k)_{k \geq 0}, (v_k)_{k \geq 1})$ de scalaires fait correspondre le couple de suites $((u_k)_{k \geq 0}, (v_k - u_k)_{k \geq 1})$.

Nous supposons dans ce paragraphe que les trois suites de scalaires $\lambda = (\lambda_k)_{k \geq 0}$, $\beta = (\beta_k)_{k \geq 1}$ et $b = (b_k)_{k \geq 1}$ sont liées par la relation $\mathcal{L}(\lambda, \beta) = (\lambda, b)$, c'est-à-dire que $b_k = \lambda_k - \beta_k$ pour tout $k \geq 1$. Nous supposons que les b_k sont tous non nuls et nous posons $b_0 = -1$.

Nous nous intéressons à la question suivante : les fractions rationnelles $f_k(t)$ introduites au paragraphe 3.2.1 forment-elles la suite des approximants de Padé en deux points d'un couple de séries formelles? A cette fin, nous allons examiner le comportement de $f_k(t)$ au voisinage de l'infini en évaluant $f_k(t^{-1})$. Définissons tout d'abord les deux suites $\gamma = (\gamma_k)_{k \geq 0}$ et $a = (a_k)_{k \geq 0}$ par :

$$\gamma_k = \frac{\lambda_k}{b_k b_{k+1}}, \tag{3.33}$$

$$a_k = \frac{1}{b_k}. \tag{3.34}$$

Puisque nous avons posé $b_0 = -1$ au début de ce paragraphe, nous avons $\gamma_0 = -\frac{\lambda_0}{b_1}$ et $a_0 = -1$. Nous notons \mathcal{J} l'application ainsi définie, qui envoie le couple (λ, b) sur le couple (γ, a) . Enfin, le couple (γ, α) est donné par :

$$(\gamma, \alpha) = (\mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{J} \circ \mathcal{L})(\lambda, \beta). \quad (3.35)$$

Remarquons que l'application \mathcal{J} — et par suite l'application $\mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{J} \circ \mathcal{L}$ — est une involution. La relation ci-dessus est donc symétrique par rapport aux couples (λ, β) et (γ, α) . Voici écrites explicitement les formules de passage entre les suites λ et β d'une part, et les suites γ et α d'autre part.

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \frac{\lambda_0}{\lambda_1 - \beta_1}, \\ \gamma_k &= \frac{\lambda_k}{(\beta_k - \lambda_k)(\beta_{k+1} - \lambda_{k+1})} \quad \text{pour } k \geq 1, \\ \alpha_k &= \frac{\beta_{k+1} - \lambda_{k+1} + \lambda_k}{(\beta_k - \lambda_k)(\beta_{k+1} - \lambda_{k+1})} \quad \text{pour } k \geq 1.\end{aligned} \quad (3.36)$$

Grâce à l'expression (3.10) et aux notations (3.33) et (3.34), nous obtenons :

$$f_k(t^{-1}) = \frac{\gamma_0 t}{1 - a_1 t -} \frac{\gamma_1 t}{1 - a_2 t -} \cdots \frac{\gamma_{k-2} t}{1 - a_{k-1} t -} \frac{\gamma_{k-1} t}{1 + \frac{\lambda_k}{b_k} - a_k t}, \quad (3.37)$$

Nous voyons naturellement apparaître une T-fraction dans l'expression ci-dessus. Donnons de cette nouvelle T-fraction une interprétation combinatoire, analogue à celle du paragraphe 3.2.1.

Pour cela, nous considérons *l'arbre infini en forme de brosse*, noté B , dont les arêtes sont valuées par γ et a , comme il est indiqué sur la figure 3.4. Nous déduisons des suites γ et a une valuation pour les chemins sans boucle sur B , avec les mêmes règles que pour l'arbre en forme de peigne T (nous renvoyons le lecteur à l'expression (3.6) et (3.7) pour une explication de ces règles).

Pour éviter la confusion avec la valuation v définie sur l'ensemble des chemins sur l'arbre T , nous notons v^* la valuation des chemins sans boucle sur B .

Rappel. — Conformément à la définition 22 du premier chapitre, un chemin sur un arbre U (sans boucle, dont les extrémités sont égales à la racine r de U) est dit *premier* si les seuls sommets égaux à r sont ses extrémités.

Nous appelons $g(\gamma, \alpha; t)$ la série génératrice des chemins valués par v^* et *premiers* sur B , donnée par :

$$g(\gamma, \alpha; t) = \sum_{\omega \text{ premier sur } B} v^*(\omega) t^{\frac{|\omega|}{2}}. \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}\omega &= (s_0, s_1, s_2, s_3, h_4, s_3, s_2, h_3, s_2, s_1, s_0), \\ v^*(\omega) &= 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times a_3 \times \gamma_2 \times 1 \times a_2 \times \gamma_1 \times \gamma_0, \\ &= \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 a_2 a_3.\end{aligned}$$

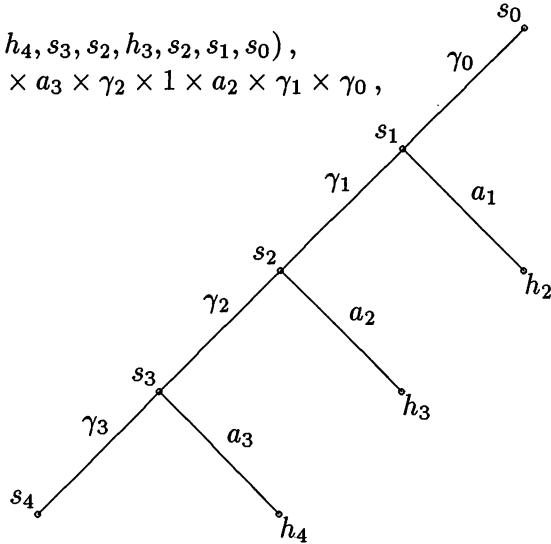


Figure 3.4: l'arbre infini en forme de brosse et la valuation d'un chemin premier.

Enfin, pour $k \geq 1$, nous désignons par $g_k(\gamma, \alpha; t)$ la série formelle

$$g_k(\gamma, \alpha; t) = \sum_{\omega \text{ premier sur } B_{k+1}} v^*(\omega) t^{\frac{|\omega|}{2}}. \quad (3.39)$$

Rappelons à cette occasion que B_{k+1} est le sous-arbre de B obtenu en effaçant les sommets s_i et h_i pour $i \geq k+1$ ainsi que les arêtes adjacents à ces sommets. L'interprétation de g et de g_k en termes de séries génératrices de chemins fournit, comme à la proposition 42, les trois résultats suivants.

1. La série $g_k(t)$ donnée par (3.39) est une fraction rationnelle et elle admet le développement suivant en T-fraction :

$$g_k(t) = \frac{\gamma_0 t}{1 - a_1 t} - \frac{\gamma_1 t}{1 - a_2 t} - \cdots - \frac{\gamma_{k-2} t}{1 - a_{k-1} t - \gamma_{k-1} t}. \quad (3.40)$$

2. L'approximation suivante est vérifiée au voisinage de $t = 0$:

$$g(t) = g_k(t) + o(t^k). \quad (3.41)$$

3. La série $g(t)$ donnée par (3.38) admet le développement suivant en T-fraction :

$$g(t) = \frac{\gamma_0 t}{1 - a_1 t} - \frac{\gamma_1 t}{1 - a_2 t} - \cdots - \frac{\gamma_{k-2} t}{1 - a_{k-1} t - \gamma_{k-1} t} - \cdots \quad (3.42)$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer, à l'aide des modèles combinatoires reposant sur les arbres T et B , le résultat qui lie les réduites des T-fractions et les approximants de Padé en deux points.

Théorème 49. — Soit $f(t)$ la série génératrice des chemins sur le peigne T , valués par v , définie par (3.8). Soit $g(t)$ la série génératrice des chemins premiers sur la brosse B , valués par v^* , définie par (3.38). Soit enfin un nombre entier $k \geq 1$.

La fraction rationnelle $f_k(t)$, série génératrice des chemins valués par v sur le sous-arbre T_{k+1} de T , définie par (3.9), est l'approximant de Padé en deux points d'ordre k du couple de séries formelles $(f(t), g(t^{-1}))$.

Démonstration : nous savons déjà que les deux premières conditions (3.2) et (3.3) de la définition 41 sont réalisées (se reporter à la proposition 42).

Si nous comparons maintenant les derniers dénominateurs, d'une part de l'expression (3.40), et d'autre part de l'expression (3.37), nous obtenons l'approximation

$$g_k(t) = f_k(t^{-1}) + o(t^{k-1}),$$

au voisinage de $t = 0$. Il suffit pour s'en convaincre de penser aux expressions (3.40) et (3.37) en termes de chemins premiers sur B .

Cette approximation se reformule ainsi : nous avons $g_k(t^{-1}) = f_k(t) + o(t^{-(k-1)})$ au voisinage de $t = \infty$. Ce dernier résultat, joint à l'approximation (3.41), montre que la condition (3.4) de la définition 41 est remplie.

□

Le théorème 49, démontré sous sa forme purement algébrique dans [64] et [54], fait naturellement apparaître deux développements en T-fraction : celui de f , donné par (3.12) et celui de g donné par (3.42). Ces deux développements ne sont pas indépendants puisque les quatre suites de coefficients a , b , γ et λ sont soumises aux relations (3.33) et (3.34). Suivant [54], nous donnons alors la définition ci-dessous.

Définition 50. — Soient (λ, b) et (γ, a) deux couples de suites de scalaires liés par la relation $(\gamma, a) = \mathcal{J}(\lambda, b)$, où \mathcal{J} est l'application définie par les formules (3.33) et (3.34). Nous disons que les deux T-fractions

$$\frac{\lambda_0}{1 - b_1 t -} \frac{\lambda_1 t}{1 - b_2 t -} \cdots \frac{\lambda_k t}{1 - b_{k+1} t -} \cdots , \quad (3.43)$$

$$\frac{\gamma_0 t}{1 - a_1 t -} \frac{\gamma_1 t}{1 - a_2 t -} \cdots \frac{\gamma_k t}{1 - a_{k+1} t -} \cdots , \quad (3.44)$$

sont des T-fractions duals.

Remarque. — Le théorème 49 nous indique alors une méthode de calcul des approximants de Padé en deux points : si A et B sont deux séries comme

dans la définition 41 et si nous savons développer $A(t)$ et $B(t^{-1})$ en T-fractions duales, autrement dit si nous savons représenter les coefficients de A et B comme des sommes de valuations (duales) de chemins sur le peigne et la brosse, alors les réduites du développement de A forment la suite des approximants de Padé en deux points du couple $(A(t), B(t))$.

La section 3.4 présente un algorithme de développement en T-fractions duales inspiré de cette remarque. Pour être en mesure de donner une présentation géométrique claire de cet algorithme, nous devons commencer par indiquer un *déploiement* des chemins premiers sur l'arbre B , analogue en tous points à celui du paragraphe 3.2.2.

3.3.3 Déploiement des chemins premiers sur la brosse et T-fractions duales.

En reprenant la construction du paragraphe 3.2.2, nous donnons dans ce qui suit une version déployée des chemins sur l'arbre B . Nous définissons pour cela une valuation sur les chemins de Dyck, notée encore v^* par abus de langage. Soit ξ un pas de niveau k d'un chemin de Dyck ; nous posons

$$v^*(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \text{ est un pas montant,} \\ \alpha_{k-1} & \text{si } \xi \text{ est un pas descendant adjacent à un pic,} \\ \gamma_{k-1} & \text{si } \xi \text{ est un pas descendant non adjacent à un pic.} \end{cases} \quad (3.45)$$

La série génératrice des chemins de Dyck *premiers* ainsi valués est

$$DP(\gamma, \alpha; t) = \sum_{\omega \text{ premier}} v^*(\omega) t^{\frac{1}{2}|\omega|}, \quad (3.46)$$

où la somme porte sur tous les chemins de Dyck premiers. Nous abrégeons $DP(\gamma, \alpha; t)$ en $DP(t)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. Nous posons aussi

$$DP_k(\gamma, \alpha; t) = \sum_{\substack{\omega \text{ premier et borné} \\ \text{à la hauteur } k}} v^*(\omega) t^{\frac{1}{2}|\omega|}, \quad (3.47)$$

où la somme porte sur les chemins de Dyck premiers dont l'ordonnée des sommets est inférieure ou égale à k . Le résultat suivant, analogue à la proposition 44, est clair.

Proposition 51. — 1) La série $DP_k(t)$ définie par (3.47) est une fraction rationnelle et vaut :

$$DP_k(t) = \frac{\gamma_0 t}{1 - (\alpha_1 - \gamma_1)t -} \frac{\gamma_1 t}{1 - (\alpha_2 - \gamma_2)t -} \cdots \frac{\gamma_{k-2} t}{1 - (\alpha_{k-1} - \gamma_{k-1})t - \gamma_{k-1} t}. \quad (3.48)$$

Les degrés du numérateur et du dénominateur de $DP_k(t)$ sont inférieurs ou égaux à $k - 1$. Ces inégalités sont des égalités dans le cas générique (c'est-à-dire

lorsque K est le corps des fractions rationnelles $\mathbb{Q}(\gamma, \alpha)$ en les indéterminées $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \alpha_1, \dots$.

2) L'approximation suivante est vérifiée en $t = 0$:

$$DP(t) = DP_k(t) + o(t^k), \quad (3.49)$$

où $DP(t)$ est la série définie par (3.46). Cette approximation est optimale dans le cas générique.

3) La série $DP(t)$ admet le développement en T-fraction :

$$DP(t) = \frac{\gamma_0 t}{1 - (\alpha_1 - \gamma_1)t -} \frac{\gamma_1 t}{1 - (\alpha_2 - \gamma_2)t -} \cdots \frac{\gamma_{k-1} t}{1 - (\alpha_k - \gamma_k)t -} \cdots \quad (3.50)$$

A l'aide des interprétations basées sur les chemins de Dyck, la définition 50 se réécrit alors de la manière suivante.

Définition 52.— Lorsque les couples de suites (λ, β) et (γ, α) sont liés par les relations (3.36), nous disons que les fractions continues

$$\frac{\lambda_0}{1 - (\beta_1 - \lambda_1)t -} \cdots \frac{\lambda_{k-1} t}{1 - (\beta_k - \lambda_k)t -} \cdots, \quad (3.51)$$

$$\frac{\gamma_0 t}{1 - (\alpha_1 - \gamma_1)t -} \cdots \frac{\gamma_{k-1} t}{1 - (\alpha_k - \gamma_k)t -} \cdots, \quad (3.52)$$

sont des T-fractions duales.

3.4 Un algorithme de développement en T-fractions duales d'un couple de séries formelles.

Nous avons vu comment associer, à un couple (λ, b) (*resp.* (λ, β)) de suites, un couple $(f(t), g(t))$ (*resp.* $(D(t), DP(t))$) de séries formelles, admettant respectivement les développements en T-fraction donnés par (3.51) et (3.52). Nous allons maintenant examiner le problème inverse. Fixons deux séries A et B comme dans la définition 41.

Nous utilisons le modèle combinatoire basé sur les chemins de Dyck et, par conséquent, nous recherchons deux suites λ et β telles que, si $(\gamma, \alpha) = \mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{J} \circ \mathcal{L}(\lambda, \beta)$, l'on ait $A(t) = D(\lambda, \beta; t)$ et $B(t^{-1}) = DP(\gamma, \alpha; t)$.

Les conditions nécessaires et suffisantes assurant l'existence et l'unicité du couple (λ, β) sont connues : elles s'expriment à l'aide de certains déterminants de Hankel des coefficients c_n de $A(t)$ et $B(t)$. On trouve dans [55] les expressions des λ_k et des b_k en fonction de ces déterminants ainsi que la description du *FG-algorithme* — cousin du célèbre *qd-algorithme* — qui calcule les λ_n et les b_n en évitant l'évaluation directe des déterminants de Hankel.

Nous présentons ici un nouvel algorithme qui suit les idées exposées à section 2.6, consacrée au développement en P-fraction d'une série formelle. Il est numériquement plus stable que le *FG*-algorithme car il n'effectue que $3n - 1$ divisions pour le calcul de $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \beta_1, \dots, \beta_n$, au lieu d'un nombre de l'ordre de n^2 .

3.4.1 Une vue d'ensemble.

La description qui suit expose les grandes lignes de l'algorithme. Tout d'abord, on doit avoir $\lambda_0 = c_0$ et donc $c_0 \neq 0$ (à moins que les deux séries $A(t)$ et $B(t)$ de départ soient nulles). Il s'agit ensuite de résoudre pour $n = 1, 2, \dots$, le système (S_n) constitué des deux équations suivantes

$$(S_n) \quad \begin{cases} c_n &= \lambda_0 \sum_{\substack{\omega \text{ chemin de Dyck,} \\ |\omega|=2n}} v(\omega), \\ c_{-n} &= \sum_{\substack{\omega \text{ chemin de Dyck premier,} \\ |\omega|=2n}} v^*(\omega), \end{cases} \quad (3.53)$$

dans lequel les inconnues sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \beta_1, \dots, \beta_n$. La possibilité de résoudre successivement ces systèmes repose sur les remarques suivantes, analogues à celles de la page 69.

Remarques. — Pour tout $n \geq 1$, il existe :

1. Un unique chemin de Dyck ω de longueur $2n$ atteignant le niveau n . Ce chemin, comportant n pas montants suivis de n pas descendants, a la valuation $v(\omega) = \beta_1 \lambda_{n_1} \dots \lambda_1$. Il est tracé en gras à la figure 3.5.
2. Un unique chemin de Dyck premier η de longueur $2n$ atteignant le niveau n . Ce chemin, comportant n pas montants suivis de n pas descendants, a la valuation $v^*(\eta) = \alpha_{n-1} \gamma_{n-2} \dots \gamma_0$. Il est lui aussi tracé en gras à la figure 3.5.

Voici alors la description de l'étape n de l'algorithme. Pour $1 \leq m \leq n-1$, nous supposons connues les valuations des chemins de Dyck valués par v ainsi que celles des chemins de Dyck premiersvalués par v^* , nécessaires à la réalisation des systèmes (S_m) définis par (3.53). Le système (S_n) s'écrit alors

$$c_n = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1} \beta_n + TC_{1,n}, \quad (3.54)$$

$$c_{-n} = \gamma_0 \dots \gamma_{n-2} \gamma_{n-1} + TC_{2,n}, \quad (3.55)$$

où $TC_{1,n}$ et $TC_{2,n}$ désignent des termes connus. Seules les valuations β_n et

$$\gamma_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1}}{(\beta_{n-1} - \lambda_{n-1})(\beta_n - \lambda_n)} \quad (3.56)$$

sont inconnues ou, ce qui revient au même, seules les valuations β_n et λ_n sont inconnues. Ce système admet une et une seule solution, sous réserve que les quantités $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ déjà calculées soient toutes non nulles.

Nous voyons donc apparaître les trois divisions que nécessite cette étape : la première pour calculer β_n à partir de (3.54), la deuxième pour calculer γ_{n-1} à partir de (3.55), et la troisième pour calculer $\beta_n - \lambda_n$ via l'égalité (3.56). Le problème est maintenant de donner une méthode efficace pour calculer les termes dits connus $TC_{1,n}$ et $TC_{2,n}$.

3.4.2 Le détail des calculs.

Nous sommes amenés à tracer sur une même figure des chemins de Dyck valués par v et des chemins de Dyck premiers valués par v^* . Pour une lecture plus aisée, nous convenons de représenter les seconds après leur avoir appliqué une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Soit Δ_n et ∇_n les droites d'équations respectives $x + y = 2n$ et $x - y = 2n$. Pour $0 \leq i \leq n$, nous notons

- $f_{i,n}$ la somme des valuations des chemins de Dyck, valués par v , allant de l'origine au point de Δ_n d'ordonnée i ;
- $f'_{i,n}$ la somme précédente restreinte aux chemins dont tous les sommets sont d'ordonnée inférieure ou égale à $n - 1$ (chemins sont *bornés au niveau $n - 1$*);
- $g_{i,n}$ la somme des valuations des chemins de Dyck premiers, valués par v^* , allant de l'origine au point de Δ_n d'ordonnée i (sur la figure 3.5, ces chemins apparaissent comme arrivant au point de ∇_n d'ordonnée $-i$);
- $g'_{i,n}$ la somme précédente restreinte aux chemins bornés au niveau $n - 1$.

Faisons deux remarques à propos de sommes que nous venons de définir.

1. Les sommes accentuées et les sommes non accentuées ne diffèrent que par la valuation d'un seul chemin (mentionné en gras sur la figure 3.5) et l'on a

$$f_{i,n} = f'_{i,n} + \beta_n \lambda_{n-1} \dots \lambda_{i+1}, \quad (3.57)$$

$$g_{i,n} = g'_{i,n} + \alpha_{n-1} \gamma_{n-2} \dots \gamma_i. \quad (3.58)$$

2. Avec les notations des expressions (3.54) et (3.55), le terme $TC_{1,n}$ vaut $\lambda_0 f'_{0,n}$ tandis que le terme $TC_{2,n}$ vaut $g'_{0,n}$.

L'algorithme consiste alors à calculer $f'_{n,n}$ et $g'_{n,n}$ afin d'en déduire λ_n et β_n pour n valant successivement $1, 2, \dots$. Pour économiser des multiplications, nous

utilisons, dans ce qui suit, deux auxiliaires de calcul, notés Λ_k et Γ_k , qui mémo-
riseront respectivement les valeurs des produits

$$\Lambda_k = \prod_{i=0}^k \lambda_i , \quad (3.59)$$

$$\Gamma_k = \prod_{i=0}^k \gamma_i . \quad (3.60)$$

Initialisation et étape 1. Nous savons que $\lambda_0 = c_0$. Il s'agit de trouver λ_1 et β_1 tels que

$$c_1 = \lambda_0 \beta_1 , \quad (3.61)$$

$$c_{-1} = \gamma_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1 - \beta_1} . \quad (3.62)$$

Cela est possible, et de façon unique, si et seulement si $c_{-1} \neq 0$. Deux divisions sont nécessaires pour exprimer λ_1 et β_1 .

Nous initialisons ensuite la valeur de $f_{0,1}$ à $\frac{c_1}{\lambda_0}$, celle de $g_{0,1}$ à c_{-1} . Puis, vu les expressions (3.59) et (3.60), nous initialisons la valeur de Λ_1 à $\lambda_0 \lambda_1$ et celle de Γ_0 à γ_0 .

Étape $n \geq 2$. Nous supposons connus

- les scalaires $f_{i,n-1}$, $g_{i,n-1}$ et λ_i pour $0 \leq i \leq n-1$,
- les scalaires β_i pour $1 \leq i \leq n-1$,
- les scalaires γ_i pour $0 \leq i \leq n-2$,
- les scalaires α_i pour $1 \leq i \leq n-2$,
- les scalaires Λ_{n-1} et Γ_{n-2} qui sont supposés non nuls.

1. Premier calcul : le système \mathcal{F}_n fournit les nombres $f'_{i,n}$ pour $0 \leq i \leq n-1$ (voir figure 3.5).

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_{n-1,n} = f'_{n-2,n-1} , \\ \vdots \\ f'_{i,n} = \lambda_{i+1} f'_{i+1,n} + (\beta_{i+1} - \lambda_{i+1}) f_{i,n-1} + f_{i-1,n-1} \quad (1 \leq i \leq n-2) , \\ \vdots \\ f'_{0,n} = \lambda_1 f'_{1,n} + (\beta_1 - \lambda_1) f_{0,n-1} . \end{array} \right. \quad (3.63)$$

2. D'après l'équation (3.54) et la remarque 2 ci-dessus, la valeur de β_n est donnée par

$$\beta_n = \frac{c_n - \lambda_0 f'_{0,n}}{\Lambda_{n-1}}. \quad (3.64)$$

3. Première mise à jour : on calcule les nombres $f_{i,n}$ pour $0 \leq i \leq n$ grâce à la relation (3.57). En fait, il est inutile de calculer $f_{0,n}$ qui vaut c_n .

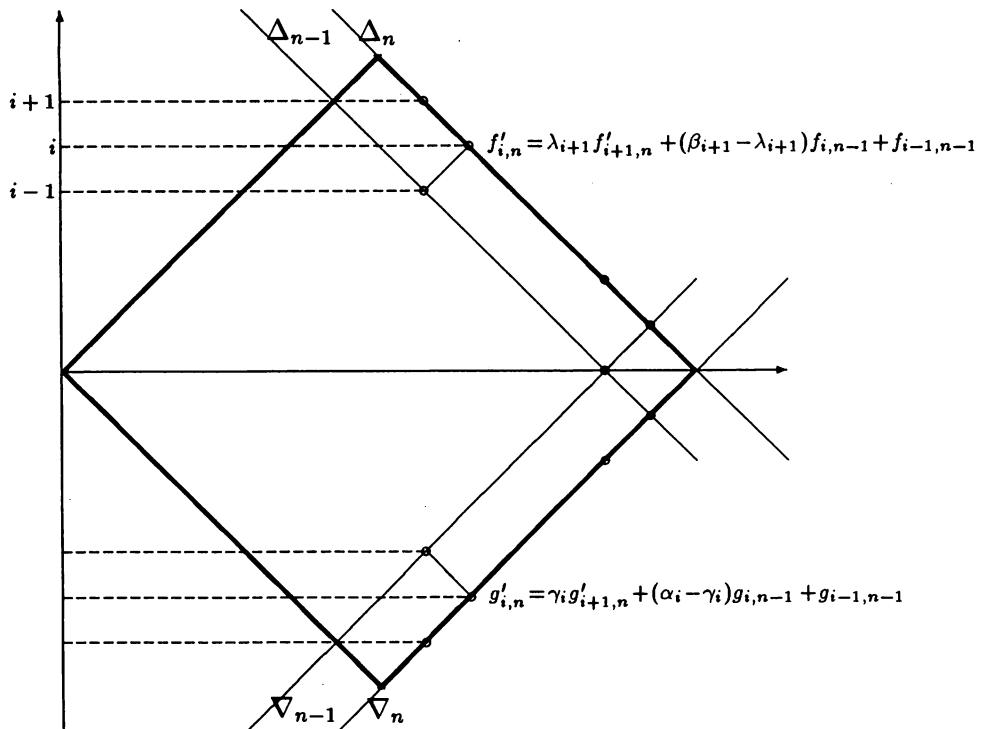


Figure 3.5: les calculs des systèmes \mathcal{F}_n et \mathcal{G}_n .

4. Second calcul : le système \mathcal{G}_n fournit les nombres $g'_{i,n}$ pour $0 \leq i \leq n-1$ (voir la figure 3.5 pour la justification des équations).

$$\left\{ \begin{array}{lcl} g'_{n-1,n} & = & g_{n-2,n-1}, \\ & \vdots & \\ g'_{i,n} & = & \gamma_i g'_{i+1,n} + (\alpha_i - \gamma_i) g_{i,n-1} + g_{i-1,n-1} \quad (2 \leq i \leq n-2), \\ & \vdots & \\ g'_{1,n} & = & \gamma_1 g'_{2,n} + (\alpha_1 - \gamma_1) g_{1,n-1}, \quad (\text{les chemins sont premiers}) \\ g'_{0,n} & = & \gamma_0 g'_{1,n}. \end{array} \right. \quad (3.65)$$

5. Test : on compare les valeurs de $g'_{0,n}$ et de c_{-n} . Si elles sont égales, l'algorithme s'arrête. Sinon, l'équation (3.55) fournit une valeur non nulle pour γ_{n-1} , puis pour λ_n , et permet aussi de calculer α_{n-1} :

$$\gamma_{n-1} = \frac{c_{-n} - g'_{0,n}}{\Gamma_{n-2}}, \quad (3.66)$$

$$\alpha_{n-1} = \gamma_{n-1} + \frac{1}{\beta_{n-1} - \lambda_{n-1}}, \quad (3.67)$$

$$\lambda_n = \beta_n - \frac{\lambda_{n-1}}{\gamma_{n-1}(\beta_{n-1} - \lambda_{n-1})}. \quad (3.68)$$

6. Seconde mise à jour : on calcule les nombres $g_{i,n}$ pour $0 \leq i \leq n$ grâce à (3.58). En fait, il est inutile de calculer $g_{0,n}$ qui vaut c_{-n} . On calcule enfin $\Lambda_n = \lambda_n \Lambda_{n-1}$ et $\Gamma_{n-1} = \gamma_{n-1} \Gamma_{n-2}$.
7. Fin de l'étape n . Le détail des équations permet bien de compter les $3n-1$ divisions annoncées dans la présentation d'ensemble de l'algorithme.

Que se passe-t-il en cas d'arrêt de l'algorithme, qui correspond au cas où $\lambda_n = \gamma_{n-1} = 0$ pour la première fois? Il est clair que les séries génératrices $D(t)$ et $DP(t)$ sont alors des fractions rationnelles.

- Si elles sont respectivement égales aux séries $A(t)$ et $B(1/t)$, l'algorithme s'arrête sur un succès. Ce cas, *a priori* rare, correspond au cas où les séries de départ sont respectivement les développements de Taylor en 0 et asymptotique à l'infini d'une *même* fraction rationnelle. Celle-ci doit vérifier de plus des conditions de non nullité de déterminants de Hankel : voir [55].
- Dans le cas contraire, la conclusion est que le couple de séries formelles $(A(t), B(t))$ n'admet pas de développement en T-fractions duales.

Nous voyons donc que tout couple de séries formelles n'admet pas de développement en T-fractions duales. Achuthan et Ponnuswamy [1] ont récemment donné une généralisation des T-fractions permettant de traiter les cas singuliers, ceux pour lesquels les déterminants susdits s'annulent. Ces fractions continues jouent vis à vis des T-fractions le rôle que jouent les P-fractions du chapitre 2 face aux fractions de Jacobi. Les auteurs retrouvent ainsi la structure de la table de Padé en deux points [20].

Remarque. — Comme au paragraphe 2.6.2, renverser l'ordre des calcul mène à un algorithme qui détermine les coefficients c_n de la série formelle f (*resp.* g) à partir des suites λ et b (*resp.* γ et a) d'un développement en T-fraction.

3.5 Des algorithmes de passage des T-fractions aux séries formelles et aux fractions de Jacobi et de Stieltjes.

Dans cette section, nous nous proposons de résoudre le problème suivant. Soit une fraction continue de Thron, donnée sous la forme (3.18), que nous rappelons ci-dessous :

$$T(t) = \frac{\lambda_0}{1 - (\beta_1 - \lambda_1)t -} \frac{\lambda_1 t}{1 - (\beta_2 - \lambda_2)t -} \cdots \frac{\lambda_{k-1} t}{1 - (\beta_k - \lambda_k)t - \lambda_k t} \cdots, \quad (3.69)$$

et soit $D(\lambda, \beta; t) = 1 + \sum_{n \geq 1} c_n t^n$ la série formelle — qui est une série génératrice de chemins de Dyck comme l'explique le paragraphe 3.2.2 — dont $T(t)$ est un développement. Nous supposons connus les coefficients de $T(t)$, c'est-à-dire les termes des suites $\lambda = (\lambda_k)_{k \geq 0}$ et $\beta = (\beta_k)_{k \geq 1}$. Comment peut-on alors calculer

1. Les coefficients ν_k du développement de $D(\lambda, \beta; t)$ en fraction de Stieltjes, si ce dernier existe?
2. Les coefficients a_k et γ_k du développement de $D(\lambda, \beta; t)$ en fraction de Jacobi, si ce dernier existe?
3. Les coefficients c_n de la série $D(\lambda, \beta; t)$?

Nous utilisons pour ce faire les résultats de la section 3.4 ainsi que ceux de l'annexe B, qu'on trouve à la page 199. Cette annexe, rédigée d'après Viennot [84, 87], décrit de manière combinatoire le qd-algorithme de Rutishauser. Rappelons que cet algorithme permet, les coefficients c_n d'une série formelle f étant connus, de calculer les coefficients ν_k du développement de Stieltjes de f , s'il existe. Nous commençons par répondre aux deux premières questions.

Nous attirons l'attention du lecteur sur les notations employées. Puisqu'il n'est question dans ce paragraphe que *d'une seule* T-fraction (sa duale n'intervenant pas), nous nous sommes permis d'utiliser les lettres a et γ pour désigner les suites des coefficients des fractions de Jacobi :

$$J(t) = \frac{1}{1 - a_0 t -} \frac{\gamma_1 t^2}{1 - a_1 t -} \cdots \frac{\gamma_k t^2}{1 - a_k t -} \cdots,$$

ces lettres étant préalablement réservées à la duale de la T-fraction (3.69).

3.5.1 Des fractions de Thron à celles de Jacobi et de Stieltjes.

L'énoncé du résultat principal (théorème 54) est rendu plus explicite par l'utilisation de graphes dont les sommets sont des éléments de K et dont les faces matérialisent l'existence de certaines relations algébriques entre les éléments en question.

Ces relations sont l'égalité de rapports ou bien l'égalité de différences, ce qui justifie le nom générique d'algorithmes quotient-différence, ou *qd-algorithmes*. Nous indiquons à la figure 3.6 les deux règles régissant le fonctionnement de ces graphes.

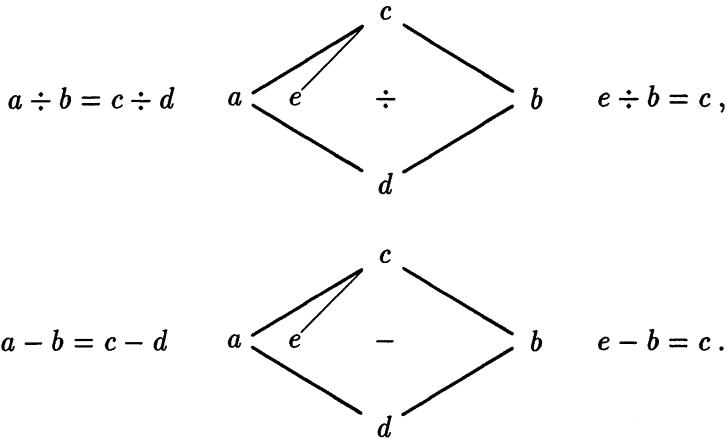


Figure 3.6: les règles du losange (à gauche) et du losange partiel (à droite).

Rappelons enfin que la lettre δ désigne l'application de décalage.

Lemme 53. — Soit $(J_n)_{n \geq 0}$ une suite de fractions de Jacobi dont les coefficients sont donnés par

$$J_n(t) = \frac{1}{1 - a_0^{(n)}t -} \quad \frac{\gamma_1^{(n)}t^2}{1 - a_1^{(n)}t -} \quad \dots \quad \frac{\gamma_k^{(n)}t^2}{1 - a_k^{(n)}t -} \quad \dots$$

Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ une suite de fractions de Stieltjes dont les coefficients sont donnés par

$$S_n(t) = \frac{1}{1 -} \quad \frac{\nu_1^{(n)}t}{1 -} \quad \dots \quad \frac{\nu_k^{(n)}t}{1 -} \quad \dots$$

Soit enfin $(k_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments du corps K .

Les égalités $J_n = S_n$ et $J_{n+1} = 1 + k_n t \delta J_n$ sont vérifiées pour tout $n \geq 0$ si, et seulement si, les coefficients satisfont les relations $a_0^{(n)} = \nu_1^{(n)} = k_{n-1}$ pour tout $n \geq 0$, ainsi que les relations indiquées à la figure 3.7.

Démonstration : d'après le lemme 102 de l'annexe A, les égalités $S_n = J_n$ sont équivalentes aux systèmes suivants, pour $n \geq 0$:

$$a_0^{(n)} = \nu_1^{(n)} \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1 \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a_k^{(n)} & = & \nu_{2k}^{(n)} + \nu_{2k+1}^{(n)}, \\ \gamma_k^{(n)} & = & \nu_{2k-1}^{(n)} \times \nu_{2k}^{(n)}. \end{array} \right. \quad (3.70)$$

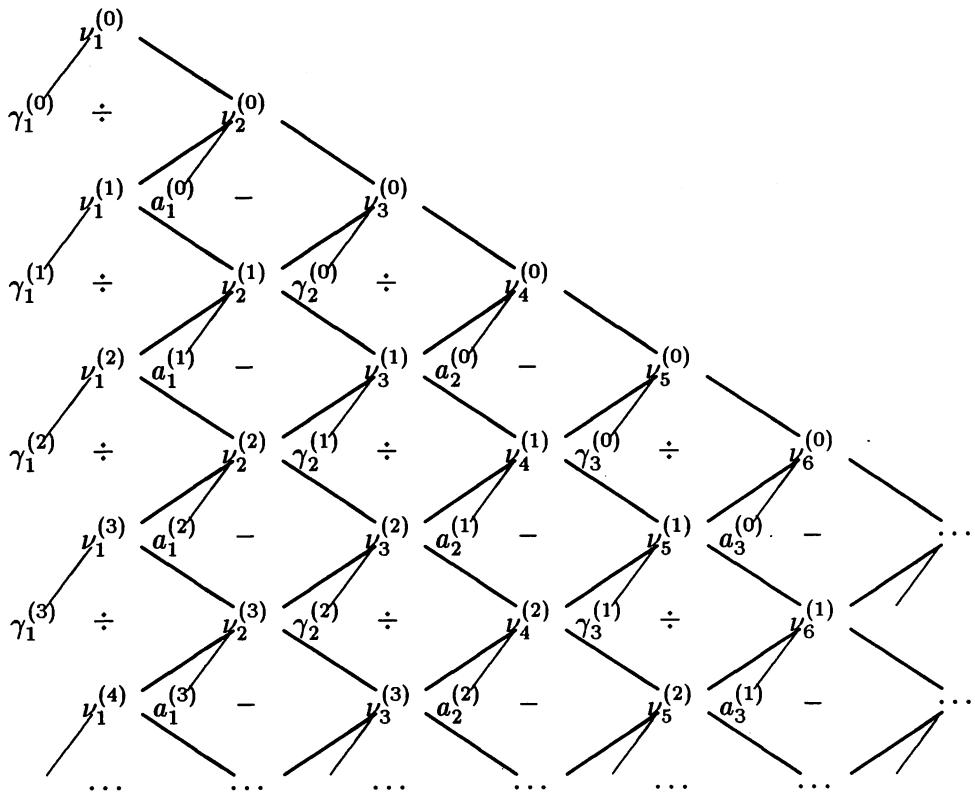


Figure 3.7: l'algorithme quotient-différence du lemme 53.

D'après le lemme 103 de l'annexe A, les égalités $S_{n+1} = 1 + k_n t \delta J_n$ sont équivalentes aux systèmes suivants, pour $n \geq 0$:

$$k_n = \nu_1^{(n+1)} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{k+1}^{(n)} &= \nu_{2k+1}^{(n+1)} + \nu_{2k+2}^{(n+1)} & \forall k \geq 0, \\ \gamma_{k+1}^{(n)} &= \nu_{2k}^{(n+1)} \times \nu_{2k+1}^{(n+1)} & \forall k \geq 1. \end{cases} \quad (3.71)$$

Il suffit ensuite de transcrire ces relations sous la forme usuelle de présentation des qd-algorithmes. □

Attention : ce résultat n'est pas un corollaire du théorème 105. On peut vérifier que les positions des opérations arithmétiques – et \div dans la figure 3.7 sont permutées par rapport à celles de la figure B.3. Cette différence provient de l'opération de décalage δ introduite dans les relations $J_{n+1} = 1 + k_n t \delta J_n$.

Théorème 54. — Soit $(J_n)_{n \geq 0}$ une suite de fractions continues de Jacobi dont les coefficients sont $(a_i^{(n)})_{i \geq 0}$ et $(\gamma_i^{(n)})_{i \geq 0}$.

Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ une suite de fractions continues de Stieltjes dont les coefficients sont $(\nu_i^{(n)})_{i \geq 0}$.

Soit $(k_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments du corps K . Soit enfin T une fraction continue de Thron donnée sous la forme du paragraphe 3.2.2 :

$$T = \frac{1}{1 - (\beta_1 - \lambda_1)t} \frac{\lambda_1 t}{1 - (\beta_2 - \lambda_2)t} \cdots \frac{\lambda_{k-1} t}{1 - (\beta_k - \lambda_k)t - \lambda_k t} \cdots \quad (3.72)$$

1) Les relations suivantes sont vérifiées

$$\forall n \geq 0 \quad \delta^n T = J_{n+1} \quad \text{et} \quad \begin{cases} J_n &= S_n \\ J_{n+1} &= 1 + k_n t \delta J_n \end{cases} \quad (3.73)$$

si, et seulement si, les coefficients satisfont les relations indiquées par la figure 3.8 ainsi que les relations suivantes :

$$a_0^{(0)} = \nu_1^{(0)} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1 \quad \begin{cases} \gamma_1^{(n)} &= \lambda_n \beta_{n+1} \\ k_{n-1} &= a_0^{(n)} = \nu_1^{(n)} = \beta_n \end{cases} \quad (3.74)$$

2) La figure 3.8 fournit un algorithme pour calculer les coefficients des fractions continues de Stieltjes S_1 et de Jacobi J_1 telles que $T = S_1 = J_1$.

Démonstration : la seconde assertion est une conséquence immédiate de la première, que nous prouvons ci-après. Le lemme 53 montre que les seules relations restant à vérifier sont celles qui font intervenir les coefficients λ_i et β_i . Nous disposons des interprétations combinatoires suivantes:

- les fractions de Thron sont vues comme séries génératrices de chemins de Dyck valués ainsi que l'indique le paragraphe 3.2.2;
- les fractions de Jacobi sont vues comme séries génératrices de chemins de Motzkin valués ainsi que l'indique la figure 1.1, au début du premier chapitre.

Ces interprétations permettent, comme à la page 86, d'écrire les équations fonctionnelles suivantes :

$$\begin{cases} T &= 1 + \beta_1 t T + \lambda_1 t (\delta T - 1) T, \\ J_1 &= 1 + a_0^{(1)} t J_1 + \gamma_1^{(1)} t^2 \delta J_1 J_1. \end{cases} \quad (3.75)$$

Par suite, les équations $T = J_1$ et $\delta T = J_2$ sont équivalentes au système

$$\begin{cases} \beta_1 &= a_0^{(1)}, \\ \gamma_1^{(1)} &= k_1 \lambda_1, \\ \delta T &= 1 + \frac{\gamma_1^{(1)}}{\lambda_1} t \delta J_1. \end{cases} \quad (3.76)$$

Connaissant le lemme 53, un raisonnement par récurrence permet alors de démontrer que les relations $\delta^n T = J_{n+1}$ pour tout n sont équivalentes aux systèmes (3.74).

□

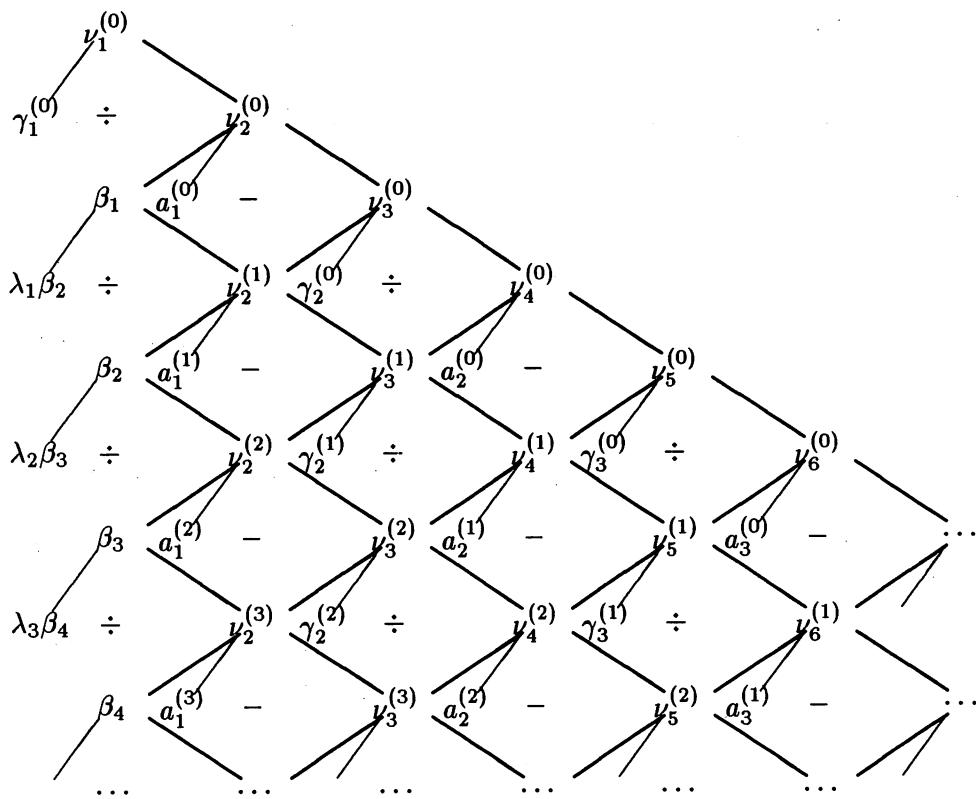


Figure 3.8: passage d'une T-fraction à la J-fraction et à la S-fraction.

“L’entrée” de cet algorithme est constituée des deux colonnes de gauche de la figure 3.8 et sa “sortie” est la bande diagonale supérieure. Les figures 3.10 ci-après et 3.26 à la fin de ce chapitre donnent deux exemples de déroulement de cet algorithme.

3.5.2 De la fraction de Thron à la série formelle.

Le problème étudié ici est le suivant : nous connaissons les valuations λ_k et β_k d’un développement en T-fraction d’une série formelle f et nous voulons calculer les coefficients c_n de cette série.

Comme nous l’avons remarqué à la page 103, il suffit d’extraire de l’algorithme déduit de la section 3.4 les calculs portant uniquement sur une fraction de Thron et sa série.

Résumé. Nous rassemblons les résultats de cette section à la figure 3.9. Les flèches y indiquent le sens de fonctionnement des algorithmes. Une série n'ayant pas un développement unique en T-fraction (sauf dans le cas exceptionnel mentionné à la page 88), il n'est pas possible de faire fonctionner à l'envers l'algorithme déduit de la section 3.4, ni l'algorithme exposé au théorème 54.

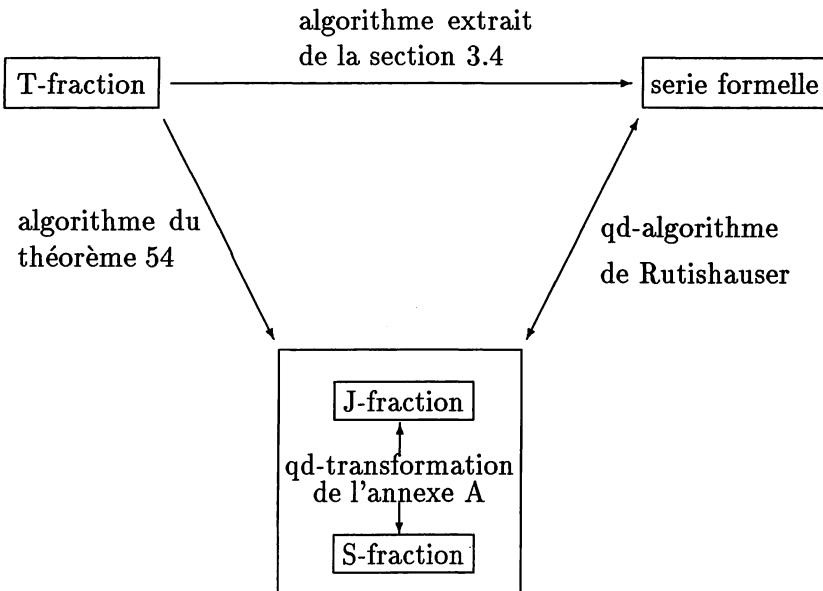


Figure 3.9: passages entre T-fractions, S-fractions, J-fractions et séries formelles.

Le qd-algorithme de Rutishauser peut être utilisé dans les deux sens, à condition que les développements en question existent. Si nous l'appliquons à la suite de l'algorithme du théorème 54, nous obtenons une méthode de calcul “à la quotient-différence” des coefficients de la série formelle correspondant à une T-fraction donnée.

Cette méthode est à la fois plus longue et plus instable numériquement que la flèche directe de la figure 3.9. Elle peut néanmoins présenter un intérêt dans le domaine de la combinatoire énumérative ou de l'arithmétique, pour le calcul explicite des coefficients d'une certaine série dont on connaît seulement un développement en T-fraction. Le paragraphe suivant illustre cette affirmation.

3.5.3 Un exemple d'application : les histoires d'Hermite restreintes.

Ce paragraphe constitue la démonstration “algorithmique” que nous avions annoncée à la page 89 : nous allons prouver que $h_n = n!$. Nous avons vu au paragraphe 3.2.4 que la série génératrice $H(t) = \sum_{n \geq 0} h_n t^n$ des histoires d'Hermite

restreintes admet le développement (3.23) en T-fraction donné par $\lambda_k = k$ et $\beta_k = 1$ pour tout $k \geq 1$. La quantité $\lambda_k \beta_{k+1}$ vaut donc k .

D'après le théorème 54, on obtient les développements de $H(t)$ en fraction continue de Jacobi et de Stieltjes en effectuant le qd-algorithme indiqué à la figure 3.10.

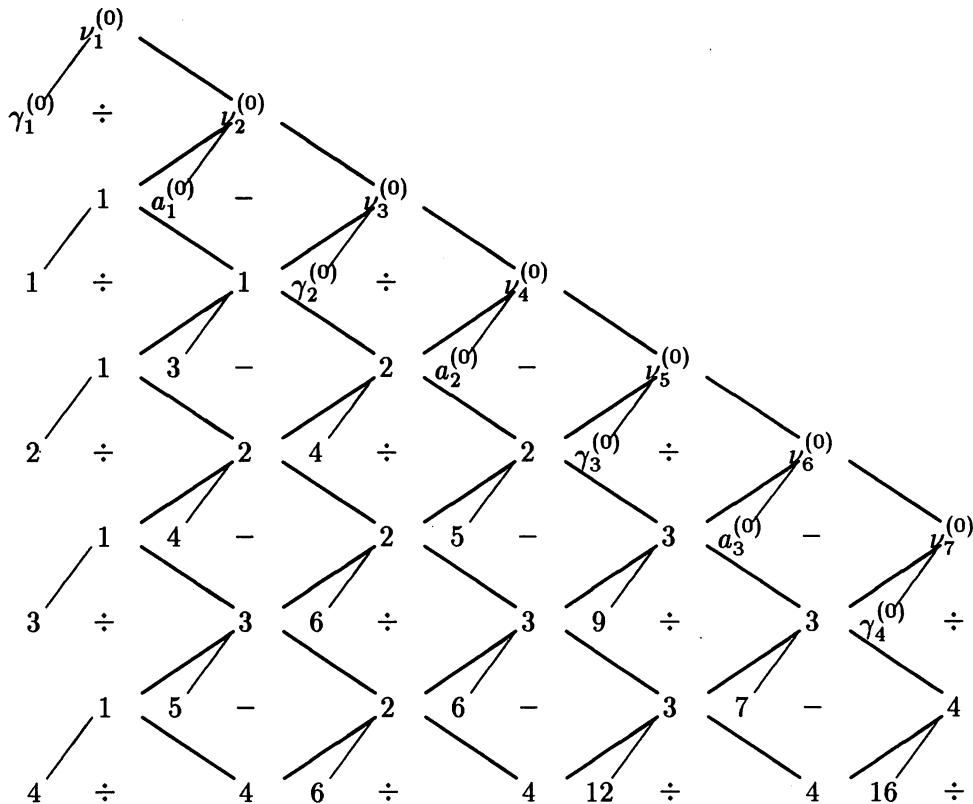


Figure 3.10: Calcul de la S- et de la J-fraction pour la série $H(t)$.

Il est aisé de montrer par récurrence que $\gamma_k^{(1)} = k^2$, $a_k^{(1)} = 2k + 1$ et que $\nu_k^{(1)} = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$. La série $H(t)$ admet donc les développements en fractions de Jacobi et de Stieltjes suivants :

$$H(t) = \frac{1}{1-t-} \frac{t^2}{1-3t-} \cdots \frac{k^2 t^2}{1-(2k+1)t-} \cdots$$

$$H(t) = \frac{1}{1-\frac{t}{1-\frac{2t}{1-\frac{2t}{1-\cdots \frac{kt}{1-\frac{kt}{1-}}}}} \cdots$$

Connaissant l'un de ces deux développements, on peut faire fonctionner le

qd-algorithme usuel pour calculer les coefficients h_n , ou bien interpréter combinatoirement le développement en fraction continue de Jacobi. Cela a déjà été fait : se reporter par exemple à Flajolet [37], Françon et Viennot [42] ou à Viennot [84] pour trouver le terme général de la série $H(t)$. On y lit que $h_n = n!$.

3.6 Une bijection entre les permutations et les histoires d’Hermite restreintes.

Nous notons \mathcal{S}_n le groupe symétrique sur n éléments. Nous supposons dans ce qui suit que les éléments en question sont les nombres entiers $1, 2, \dots, n$. Une permutation appartenant à \mathcal{S}_n est notée comme un *mot* de n lettres distinctes sur l’alphabet $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Ainsi

$$\sigma_0 = 2 \ 3 \ 1 \ 8 \ 5 \ 6 \ 7 \ 4 \quad (3.77)$$

désigne la permutation telle que $\sigma_0(1) = 2$, $\sigma_0(2) = 3$, $\sigma_0(3) = 1$, $\sigma_0(4) = 8$ etc.

Nous avons vu au paragraphe précédent que la série génératrice ordinaire $\sum_{n \geq 0} n!t^n$ des permutations est égale à la série génératrice ordinaire $H(t)$ des histoires d’Hermite restreintes (*cf.* définition 46). Cette égalité a été prouvée par le calcul.

A cette occasion, trois développements de $\sum_{n \geq 0} n!t^n$ en fraction continue ont été donnés. Nous les rappelons ci-dessous :

$$\sum_{n \geq 0} n!t^n = \frac{1}{1-t} \frac{1^2t^2}{1-3t} \frac{2^2t^2}{1-5t} \cdots \frac{k^2t^2}{1-(2k+1)t} \cdots, \quad (3.78)$$

$$= \frac{1}{1} \frac{1t}{1} \frac{2t}{1} \frac{2t}{1} \cdots \frac{kt}{1} \frac{kt}{1} \cdots, \quad (3.79)$$

$$= \frac{1}{1+0t} \frac{1t}{1+1t} \frac{2t}{1+2t} \cdots \frac{kt}{1+kt} \cdots. \quad (3.80)$$

Des interprétations *bijectiones* des développements (3.78) et (3.79) sont déjà connues. Le premier développement correspond à une bijection de Françon et Viennot [42, 84] entre permutations et *histoires de Laguerre*; le second résulte d’une bijection contenue dans un article de Foata et Zeilberger [40] entre permutations et *histoires de Laguerre subdivisées*. Un exposé pédagogique de cette dernière bijection, par de Medicis et Viennot, se trouve dans [30].

Les interprétations bijectives permettent de donner des preuves élégantes d’identités entre séries formelles, ou entre séries formelles et fractions continues. Elles constituent un outil essentiel lorsqu’on veut *raffiner* l’énumération : les séries génératrices (*resp.* les développements en fractions continues) s’enrichissent alors d’autant de variables que de statistiques étudiées.

Nous présentons ci-dessous une bijection permettant d’interpréter et d’enrichir le développement (3.80). Donnons auparavant les définitions nécessaires.

Définition 55.— Soit σ une permutation de S_n écrite sous forme de mot :

$$\sigma = x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n.$$

La lettre x_i est un élément saillant supérieur gauche de σ si $x_j \leq x_i$ pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq i$. Symétriquement, la lettre x_i est un élément saillant inférieur droit de σ si $x_j \geq x_i$ pour tout entier j tel que $i \leq j \leq n$. On dit aussi record et anti-record.

Nous illustrons cette définition sur l'exemple de la permutation (3.77). Les éléments saillants inférieurs droits sont soulignés et les éléments saillants supérieurs gauches sont surlignés :

$$\sigma_0 = \overline{2} \ \overline{3} \ \underline{1} \ \overline{8} \ 5 \ 6 \ 7 \ \underline{4}.$$

Sur la figure 3.11, nous avons signalé par des disques noirs (*resp.* des disques blancs) les éléments saillants supérieurs gauches (*resp.* inférieurs droits) de σ_0 . Les autres sont représentés par des croix.

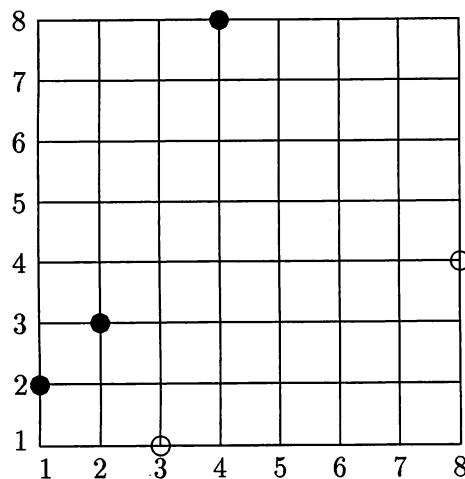


Figure 3.11: les éléments saillants de la permutation $\sigma_0 = 2 \ 3 \ 1 \ 8 \ 5 \ 6 \ 7 \ 4$.

3.6.1 La bijection.

Nous la décomposons en trois étapes; pour chacune d'elle, nous examinons ce que devient la permutation σ_0 de la figure (3.11).

Soit $\sigma \in S_n$ écrite sous la forme $\sigma = x_1 x_2 \dots x_n$. Dans la présentation qui suit, nous commettons l'abus de notation consistant à appeler A ce qui est à la fois la première "étape" et l'application A_n , B la seconde étape et l'application B_n etc.

Étape A. Nous notons i_1, \dots, i_r les positions des éléments saillants inférieurs droits de σ et $u_1 \dots u_r$ la factorisation de σ (en tant que mot), telle que la dernière lettre du mot u_j soit x_{i_j} pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$. Nous définissons les mots v_1, \dots, v_r par

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 \ 2 \ \dots \ (x_{i_2} - 1), \\ v_2 &= x_{i_2} \ (x_{i_2} + 1) \ \dots \ (x_{i_3} - 1), \\ &\vdots \\ v_r &= x_{i_r} \ (x_{i_r} + 1) \ \dots \ n, \end{aligned} \tag{3.81}$$

de sorte que le produit $v_1 v_2 \dots v_r$ soit égal au mot $1 \ 2 \ \dots \ n$. Enfin nous posons

$$A(\sigma) = u_1 v_1 u_2 v_2 \dots u_r v_r. \tag{3.82}$$

Voici la construction du mot $A(\sigma_0)$, pour lequel $r = 2$. Les boîtes tracées ci-dessous délimitent les $2r$ facteurs de la factorisation (3.82) :

$$\begin{array}{ll} u_1 = 2 \ 3 \ 1 & v_1 = 1 \ 2 \ 3, \\ u_2 = 8 \ 5 \ 6 \ 7 \ 4 & v_2 = 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8, \\ A(\sigma_0) = \boxed{2 \ 3 \ 1} \ \boxed{1 \ 2 \ 3} \ \boxed{8 \ 5 \ 6 \ 7 \ 4} \ \boxed{4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8}. \end{array}$$

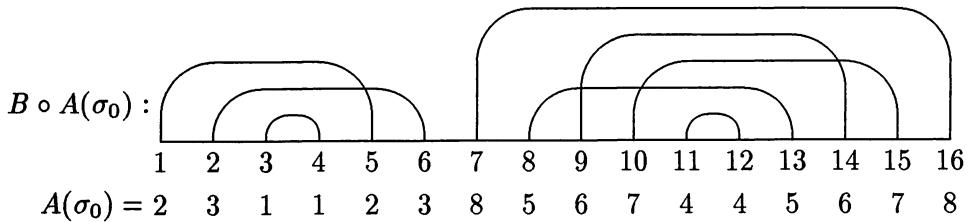
Dans l'ensemble des mots de $2n$ lettres sur l'alphabet $[n] = \{1, \dots, n\}$, le sous-ensemble $\mathcal{M}_n \stackrel{\text{def}}{=} A(\mathcal{S}_n)$ est constitué des mots μ vérifiant les trois propriétés suivantes.

1. Le mot μ contient exactement deux occurrences de chaque élément x de $[n]$.
2. Le sous mot de μ constitué des secondes occurrences des éléments de $[n]$ est $1 \ 2 \ \dots \ n$, ce qui permet de définir la factorisation de μ analogue à (3.82). On a alors $\mu = u_1 v_1 u_2 v_2 \dots u_r v_r$ avec $v_1 v_2 \dots v_r = 1 \ 2 \ \dots \ n$.
3. Dans la factorisation ainsi définie, la dernière lettre d'un mot u_j est identique à la première du mot v_j , pour $1 \leq j \leq r$.

Cette caractérisation prouve le caractère bijectif de $A : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$ et met en évidence l'application inverse A^{-1} .

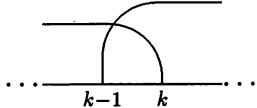
Étape B. Soit μ un mot de $2n$ lettres sur l'alphabet $[n]$ appartenant à $\mathcal{M}_n = A(\mathcal{S}_n)$. Nous définissons une involution sans point fixe $I = B(\mu)$ sur l'ensemble $[2n]$ de la façon suivante : le couple (j, k) forme un cycle de I si une même lettre occupe les positions j et k dans le mot μ . Nous disons alors que cette lettre correspond au cycle (j, k) .

La figure 3.12 donne la représentation graphique, sous forme d'arcs, de $B \circ A(\sigma_0)$. La position de l'extrémité gauche (*resp.* droite) d'un arc est appelé une

Figure 3.12: l'involution sans point fixe $B \circ A(\sigma_0)$.

ouverture (*resp.* une *fermeture*). Les ouvertures de $B \circ A(\sigma_0)$ sont les nombres 1, 2, 3, 7, 8, 10 et 11, alors que ses fermetures sont les nombres 4, 5, 6, 12, 13, 14, 15 et 16.

Compte tenu de la caractérisation de l'ensemble \mathcal{M}_n donnée à l'étape A , nous avons la propriété suivante : dans l'ensemble des involutions sans point fixe sur $[2n]$, le sous-ensemble $\mathcal{I}_n \stackrel{\text{def}}{=} B(\mathcal{M}_n)$ est constitué des involutions I qui ne possèdent pas deux cycles $(j, k-1)$ et (k, l) tels que $j < l$. En d'autres termes, cela signifie que la représentation de I sous forme d'arcs ne contient pas le motif indiqué par la figure 3.13.

Figure 3.13: le motif interdit dans $I = B(\mu)$.

Soit alors I une involution dans \mathcal{I}_n , définie par ses cycles $(j_1, k_1), \dots, (j_n, k_n)$ avec $k_1 < \dots < k_n$ et $j_l < k_l$ pour tout l . Soit $\mu = \mu_1 \cdots \mu_{2n}$ le mot défini par $\mu_p = l$ si $p = j_l$ ou si $p = k_l$. Il est clair que l'application $I \rightarrow \mu$ ainsi définie est la réciproque de l'application $B : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{I}_n$.

Étape C. Cette étape est la restriction aux éléments de \mathcal{I}_n d'une bijection classique [84] entre involutions sans point fixe et histoires d'Hermite. Néanmoins, souhaitant donner un texte complet, nous la rappelons en détail.

Soit I une involution sans point fixe dans $\mathcal{I}_n = B(\mathcal{M}_n)$. Nous construisons un couple $C(I) = (\omega, \mathbf{p})$, où ω est un chemin de Dyck de longueur $2n$ et \mathbf{p} un $2n$ -uplet de nombres entiers strictement positifs, de la manière suivante.

- La succession des pas montants et des pas descendants du chemin de Dyck ω correspond à la succession des ouvertures et des fermetures de I (ces termes sont définis à l'étape B).

- Les éléments de \mathbf{p} sont définis ainsi : si (j, k) est un cycle de I , alors

$$p_j = 1, \quad (3.83)$$

$$p_k = 1 + |\{l \in [2n], j < l < k \text{ et } I(l) > k\}|, \quad (3.84)$$

où $|E|$ désigne le cardinal de l'ensemble E . Autrement dit, $p_k - 1$ est le nombre d'arcs (l, m) de I croisés avec l'arc (j, k) , c'est-à-dire tels que $j < l < k < m$. Attention : la relation “être croisé avec” n'est pas symétrique ! La figure 3.14 indique en gras les deux arcs croisés avec l'arc (j, k) .

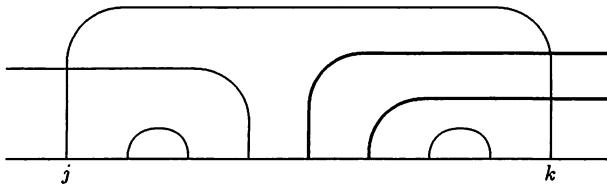


Figure 3.14: deux arcs sont croisés avec (j, k) .

Lemme 56. — *Le couple (ω, \mathbf{p}) ainsi construit est une histoire d'Hermite restreinte de longueur $2n$.*

Démonstration : les nombres p_i correspondant aux pas montants de ω valent 1 par définition. Soit maintenant (j, k) un cycle de I . Le $k^{\text{ième}}$ de ω est alors descendant. Il est issu du niveau h si, et seulement s'il existe $h - 1$ arcs de I de la forme (a, b) avec $a < k < b$. Il y a donc *a fortiori* moins de $h - 1$ arcs croisés avec (j, k) .

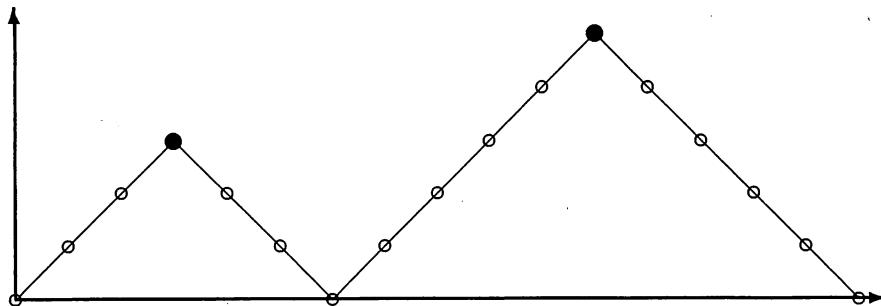
Par suite, nous avons $p_k \leq 1 + (h - 1) = h$. Ceci prouve que (ω, \mathbf{p}) est une histoire d'Hermite.

Si le $(k - 1)^{\text{ième}}$ et le $k^{\text{ième}}$ pas de ω sont respectivement un pas montant et un pas descendant adjacents à un pic, c'est que $k - 1$ est une ouverture de I et que k en est une fermeture. Puisque le motif de la figure 3.13 est interdit dans I , c'est donc que $(k - 1, k)$ est un cycle de I .

D'après la formule (3.84), le nombre p_k vaut 1. Ceci prouve que l'histoire d'Hermite (ω, \mathbf{p}) est restreinte. □

Si la lettre x du mot σ correspond au cycle (j, k) — voir l'étape B — nous disons encore qu'elle *correspond* au $k^{\text{ième}}$ pas de ω et au choix p_k . L'histoire d'Hermite restreinte $C \circ B \circ A(\sigma_0)$ est représentée à la figure 3.15.

Nous allons prouver que C est une bijection de \mathcal{I}_n sur \mathcal{H}_n en construisant son application réciproque.



$$\mathbf{p} = (1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 2, 1)$$

Figure 3.15: l'histoire d'Hermite $C \circ B \circ A(\sigma_0)$.

Soit $(\omega, \mathbf{p}) \in \mathcal{H}_n$. En lisant simultanément le chemin de Dyck ω et le $2n$ -uplet \mathbf{p} de gauche à droite, on ouvre des arcs pour chaque pas montant de ω et on referme certains de ces arcs pour chaque pas descendant.

Lors d'une telle fermeture — supposée se produire en position $k \in [2n]$ — un ou plusieurs arcs encore ouverts à gauche de k se présentent; on les numérote $1, 2, \dots$, de droite à gauche, de sorte que l'arc ouvert le plus proche porte le numéro 1. Le nombre p_k nous indique alors le numéro de l'arc ouvert qu'il faut refermer.

On trouve à la figure 3.16, pour $k = 13$, un “instantané” de ce processus, appliqué à l'histoire d'Hermite restreinte $C \circ B \circ A(\sigma_0)$. La vérification de ce qu'on a effectivement construit l'application réciproque de C est laissée au soin du lecteur, qui peut aussi se reporter à [84].

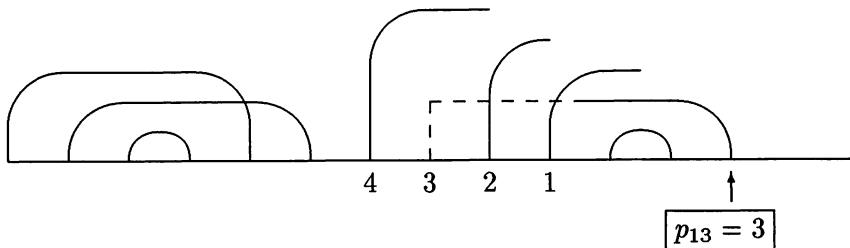


Figure 3.16: un instantané de la construction de C^{-1} .

La bijection ψ . Nous allons maintenant rassembler les propriétés des applications A , B et C . Nous rappelons qu'une permutation σ sur $[n]$ est dite *connexe*

si, pour tout entier m tel que $1 \leq m < n$, la restriction de σ à $[m]$ n'induit pas une permutation. Nous disons que la lettre x du mot σ présente h inversions s'il existe exactement h lettres strictement plus grandes que x situées à la gauche de x dans σ .

Remarque. — Le nombre d'inversions de σ est la somme des nombres d'inversions que présentent ses lettres (nous venons en fait de donner la définition de la *table d'inversion* de σ).

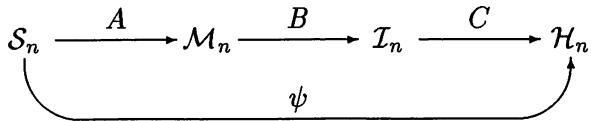


Figure 3.17: l'application ψ .

Le théorème suivant expose les propriétés locales et globales de ψ .

Théorème 57. — Soit ψ l'application $C \circ B \circ A$, comme l'indique la figure 3.17. Soient σ une permutation de S_n et x une lettre du mot σ . Notons ξ (resp. p) le pas descendant (resp. le choix) qui correspond à x dans $\psi(\sigma) = (\omega, p)$. Notons enfin k le niveau du pas ξ .

- 1) L'application ψ est une bijection entre S_n et H_n .
- 2) La permutation σ est connexe si, et seulement si, le chemin de Dyck ω est premier.
- 3) La lettre x est un élément saillant inférieur droit si, et seulement si, le pas ξ est adjacent à un pic de ω .
- 4) La lettre x présente h inversions si, et seulement si, le choix p est égal à $k - h$.
- 5) La lettre x est un élément saillant supérieur gauche de σ si, et seulement si, le choix p est égal à k .

Démonstration : 1) nous avons en effet prouvé, au fur et à mesure de la construction de ψ , le caractère bijectif de chacune des applications A , B et C .

2) Supposons que σ ne soit pas connexe et appelons m le plus petit entier tel que $1 \leq m < n$ et que la restriction de σ à $[m]$ soit une permutation. Notons σ_1 cette restriction, σ_2 la restriction de σ à $\{m + 1, \dots, n\}$ et, avec un abus de notation légitime, $\psi(\sigma_i) = (\omega_i, \bar{p}_i)$ pour $i = 1, 2$. Alors m est un élément saillant inférieur droit de σ , le mot $A(\sigma)$ est égal au produit $A(\sigma_1)A(\sigma_2)$ et $\omega = \omega_1\omega_2$ n'est pas premier. La réciproque se démontre aisément.

3) Supposons que la lettre x soit un élément saillant inférieur droit. Le mot $A(\sigma)$ s'écrit alors $[...]xx[...]$ et, par suite, il existe une position $j \in [2n]$ telle que $(j - 1, j)$ soit un cycle de $B \circ A(\sigma)$ et telle que x corresponde à $(j - 1, j)$.

Le pas descendant ξ est donc précédé d'un pas montant, c'est-à-dire que ξ est adjacent à un pic. De plus, le nombre d'arcs de $B \circ A(\sigma)$ croisés avec $(j-1, j)$ est nul; d'après la formule (3.84), le choix p vaut 1. La réciproque est laissée au lecteur.

4) Nous utilisons ici l'interprétation dynamique des p_i qui permet d'écrire la suite d'équivalences que voici :

la lettre x présente h inversions;

\iff il existe exactement h lettres $y > x$ à gauche de x dans le mot σ ;

\iff il existe exactement h lettres $y > x$ de part et d'autre des deux occurrences de x dans le mot $A(\sigma)$;

\iff il existe exactement h arcs de $B \circ A(\sigma)$ qui recouvrent l'arc auquel x correspond;

\iff le choix p vaut $k - h$.

5) Il suffit de faire $h = 0$ dans la démonstration ci-dessus. □

Nous déduisons du point 1 du théorème 57 la preuve bijective de l'égalité $h_n = n!$, annoncée à la page 89. Dans le paragraphe suivant, nous allons utiliser les autres résultats du théorème 57 pour calculer la série génératrice de la distribution jointe de trois statistiques sur les permutations.

3.6.2 Séries génératrices et T-fractions.

Soit σ une permutation. Nous notons respectivement $inv(\sigma)$, $sid(\sigma)$, $ssg(\sigma)$ son nombre d'inversions, d'éléments saillants inférieurs droits et d'éléments saillants supérieurs gauches. Suivant Dumont et Kreweras [33], nous disons qu'un élément saillant supérieur gauche est *exclusif* s'il n'est pas saillant inférieur droit. Nous définissons de même les éléments saillants inférieurs droits *exclusifs*. Leurs nombres sont respectivement notés $ssge(\sigma)$ et $side(\sigma)$.

Nous définissons les deux séries génératrices F et G par :

$$F(a, b, q, t) = \sum_{n \geq 0} \left[\sum_{\sigma \in S_n} a^{ssg(\sigma)} b^{sid(\sigma)} q^{inv(\sigma)} \right] t^n, \quad (3.85)$$

$$G(a, b, q, t) = \sum_{n \geq 1} \left[\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \text{ connexe}}} a^{ssg(\sigma)} b^{sid(\sigma)} q^{inv(\sigma)} \right] t^n. \quad (3.86)$$

A partir de ces deux séries, nous en définissons quatre autres. Nous notons F^e et G^e les séries F et G dans lesquelles $a^{ssg(\sigma)}$ est remplacé par $a^{ssge(\sigma)}$. Enfin, nous notons F^c et G^c les séries F et G dans lesquelles $b^{sid(\sigma)}$ est remplacé par $b^{side(\sigma)}$.

Le but de ce paragraphe est de donner des développements en T-fraction des six séries que nous venons de définir. Nous renvoyons aux définitions et propriétés (3.25) à (3.28) pour la compréhension des calculs qui vont suivre.

Soit (ω, \mathbf{p}) une histoire d'Hermite restreinte; si ξ est un pas du chemin de Dyck ω , nous rappelons que son *niveau* est l'ordonnée de son premier sommet et que nous notons p_ξ le choix correspondant. Enfin, si \mathcal{P} est une propriété, $\chi(\mathcal{P})$ vaut 1 si \mathcal{P} est vraie et 0 sinon. Nous définissons alors le *poids* de (ω, \mathbf{p}) par

$$\pi(\omega, \mathbf{p}) = \prod_{\xi \text{ pas descendant de } \omega} a^{\chi(\text{niveau}(\xi)=p_\xi)} b^{\chi(\xi \text{ est adjacent à un pic})} q^{\text{niveau}(\xi)-p_\xi}. \quad (3.87)$$

Corollaire 58. — Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ une permutation et soit (ω, \mathbf{p}) l'histoire d'Hermite restreinte $\psi(\sigma)$, où ψ est la bijection définie au théorème 57. Nous avons alors l'égalité

$$\pi(\omega, \mathbf{p}) = a^{sid(\sigma)} b^{ssg(\sigma)} q^{inv(\sigma)}, \quad (3.88)$$

dans laquelle π est le poids défini par (3.87).

Démonstration : l'égalité des exposants de a et b dans les deux membres de (3.88) est une conséquence immédiate des points 3 et 5 du théorème 57. L'égalité des exposants de q résulte du point 4 de ce même théorème et de la remarque de la page 117.

□

Proposition 59. — 1) Les six séries génératrices définies ci-dessus satisfont les relations

$$F = (1 - G)^{-1}, \quad (3.89)$$

$$F^e = (1 - G^e)^{-1} \quad \text{et} \quad F^\epsilon = (1 - G^\epsilon)^{-1}, \quad (3.90)$$

$$G = (ab - b)t + G^e \quad \text{et} \quad G = (ab - a)t + G^\epsilon. \quad (3.91)$$

2) Les séries F , F^e et G^ϵ admettent les développements en T-fraction suivants :

$$F = \frac{1}{1 - (ab - [a;q]_1)t -} \frac{[a;q]_1 t}{1 - (bq - [a;q]_2)t -} \cdots \frac{[a;q]_{k-1} t}{1 - (bq^{k-1} - [a;q]_k)t -} \cdots, \quad (3.92)$$

$$F^e = \frac{1}{1 - (b - [a;q]_1)t -} \frac{[a;q]_1 t}{1 - (bq - [a;q]_2)t -} \cdots \frac{[a;q]_{k-1} t}{1 - (bq^{k-1} - [a;q]_k)t -} \cdots, \quad (3.93)$$

$$G^\epsilon = \frac{[a;q]_1 t}{1 - (bq - [a;q]_2)t -} \cdots \frac{[a;q]_{k-1} t}{1 - (bq^{k-1} - [a;q]_k)t -} \cdots, \quad (3.94)$$

où la notation $[a;q]_n$ désigne le q -analogue de $a + n - 1$ défini par (3.25).

Démonstration : 1) les relations (3.89) et (3.90) résultent de l'existence et de l'unicité de la décomposition d'une permutation (*resp.* d'un chemin de Dyck) en permutations connexes (*resp.* en chemins de Dyck premiers).

Les relations (3.91) résultent de la remarque suivante : les séries G et G^e (*resp.* G^c) ne diffèrent que par leur terme de degré 1, car les éléments saillants supérieurs gauches (*resp.* inférieur droits) d'une permutation connexe sur $[n]$ sont tous exclusifs dès que $n \geq 2$. Il suffit ensuite d'examiner le cas $n = 1$, qui est clair.

2) Pour transformer la série F , nous introduisons la valuation v des chemins de Dyck, comme dans le paragraphe 3.2.2, à partir des suites λ et β que voici :

$$\begin{cases} \lambda_0 &= 1, \\ \lambda_k &= a + q + \cdots + q^{k-1} = [a; q]_k \quad \text{si } k \geq 1, \\ \beta_1 &= ab, \\ \beta_k &= bq^{k-1} \quad \text{si } k \geq 2. \end{cases} \quad (3.95)$$

D'après la définition (3.87) du poids π , la valuation $v(\omega)$ d'un chemin de Dyck vaut aussi

$$v(\omega) = \sum_{\mathbf{p}} \pi(\omega, \mathbf{p}),$$

où la somme porte sur les $2n$ -uplets \mathbf{p} tels que (ω, \mathbf{p}) soit une histoire d'Hermite restreinte.

Le théorème 57 et le corollaire 58 nous permettent alors d'écrire les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} F(a, b, q, t) &= \sum_{n \geq 0} \left[\sum_{\sigma \in S_n} a^{ssg(\sigma)} b^{sid(\sigma)} q^{inv(\sigma)} \right] t^n, \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[\sum_{\substack{(\omega, \mathbf{p}) \text{ histoire d'Hermite} \\ \text{restreinte de longueur } 2n}} \pi(\omega, \mathbf{p}) \right] t^n, \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[\sum_{\substack{\omega \text{ chemin de Dyck} \\ \text{de longueur } 2n}} v(\omega) \right] t^n, \\ &= D(\lambda, \beta; t), \end{aligned}$$

où D est la série génératrice définie par (3.14). Cette dernière égalité et la proposition 44 donnent alors le développement (3.92).

Le changement de $\beta_1 = ab$ en $\beta_1 = b$ permet de compter seulement les éléments saillants supérieurs gauches exclusifs et conduit au développement (3.93). Pour obtenir le développement (3.94), on utilise les identités (3.89) et (3.90) et le développement (3.92) déjà obtenu. \square

Remarque. — Nous retrouvons le développement (3.23) de la page 89 en substituant, dans le développement (3.92), les variables a , b et q par 1.

3.6.3 Séries génératrices et quotients de Gauss de fonctions hypergéométriques.

Nous notons ${}_2\Omega_0 \left(\begin{matrix} a, b \\ q; t \end{matrix} \right)$ le q -analogue suivant de la fonction hypergéométrique ordinaire ${}_2F_0 \left(\begin{matrix} a, b \\ t \end{matrix} \right)$:

$${}_2\Omega_0 \left(\begin{matrix} a, b \\ q; t \end{matrix} \right) = \sum_{n \geq 0} [a; q]_n! [b; q]_n! \frac{t^n}{[1; q]_n!}, \quad (3.96)$$

où les quantités $[x; q]_n!$ sont définies par (3.26). Nous allons donner des expressions des séries du paragraphe précédent sous forme de *quotients de Gauss* de la fonction ${}_2\Omega_0$. Ces expressions sont basées sur le résultat suivant.

Lemme 60. — *La fonction ${}_2\Omega_0$ vérifie l'identité :*

$$\frac{{}_2\Omega_0 \left(\begin{matrix} a, b \\ q; t \end{matrix} \right)}{{}_2\Omega_0 \left(\begin{matrix} aq - q, b \\ q; \frac{t}{q} \end{matrix} \right)} = \left(1 - (b - a)t - at \frac{{}_2\Omega_0 \left(\begin{matrix} \frac{a}{q} + 1, b \\ q; qt \end{matrix} \right)}{{}_2\Omega_0 \left(\begin{matrix} a, b \\ q; t \end{matrix} \right)} \right)^{-1}. \quad (3.97)$$

Démonstration : Il s'agit de montrer, après réécriture, que

$${}_2\Omega_0 = (b - a)t {}_2\Omega_0 + at {}_2\Omega_0 \left(\begin{matrix} \frac{a}{q} + 1, b \\ q : qt \end{matrix} \right) + {}_2\Omega_0 \left(\begin{matrix} aq - q, b \\ q; \frac{t}{q} \end{matrix} \right), \quad (3.98)$$

où l'on a omis de préciser les variables lorsque celles-ci valent a, b, q et t . Les termes constants des deux membres de (3.98) sont égaux à 1. Soit $n \geq 1$; le coefficient de t^n du membre de droite est, d'après les identités (3.27) et (3.28) :

$$\begin{aligned} & (b - a) \frac{[a; q]_{n-1}! [b; q]_{n-1}!}{[1; q]_{n-1}!} + a \frac{\left[\frac{a}{q} + 1 \right]_{n-1}! [b; q]_{n-1}!}{[1; q]_{n-1}!} q^n + \frac{[aq - q; q]_n! [b; q]_n!}{[1; q]_n!} \frac{1}{q^n} \\ &= (b - a) \frac{[a; q]_{n-1}! [b; q]_{n-1}!}{[1; q]_{n-1}!} + \frac{[a; q]_n! [b; q]_{n-1}!}{[1; q]_{n-1}!} + (a - 1) \frac{[a; q]_{n-1}! [b; q]_n!}{[1; q]_n!} \\ &= \frac{[a; q]_{n-1}! [b; q]_{n-1}!}{[1; q]_n!} \left[(b - a)[1; q]_n + [a; q]_n [1; q]_n + (a - 1)[b; q]_n \right]. \end{aligned}$$

Le terme entre crochets est égal à $[a; q]_n [b; q]_n$ et on retrouve le coefficient de t^n du membre de gauche de (3.98). \square

Après avoir remarqué que l'identité ci-dessus conduit, par récurrence, au développement (3.93) en T-fraction, nous pouvons énoncer le corollaire suivant.

Corollaire 61. — *Les six séries génératrices F, F^e, G, G^e, F^e et G^e s'expriment simplement à l'aide de quotients de Gauss de q -fonctions hypergéométriques; on*

a par exemple :

$$\begin{aligned} F^\epsilon &= \frac{{}_2\Omega_0 \left(\begin{matrix} a, b \\ q; t \end{matrix} \right)}{{}_2\Omega_0 \left(\begin{matrix} aq - q, b \\ q; \frac{t}{q} \end{matrix} \right)} \quad \text{et} \quad F^\epsilon = \frac{{}_2\Omega_0 \left(\begin{matrix} a, b \\ q; t \end{matrix} \right)}{{}_2\Omega_0 \left(\begin{matrix} a, bq - q \\ q; \frac{t}{q} \end{matrix} \right)}, \\ G^\epsilon &= at \frac{{}_2\Omega_0 \left(\begin{matrix} \frac{a}{q} + 1, b \\ q; qt \end{matrix} \right)}{{}_2\Omega_0 \left(\begin{matrix} a, b \\ q; t \end{matrix} \right)} \quad \text{et} \quad G^\epsilon = bt \frac{{}_2\Omega_0 \left(\begin{matrix} a, \frac{b}{q} + 1 \\ q; qt \end{matrix} \right)}{{}_2\Omega_0 \left(\begin{matrix} a, b \\ q; t \end{matrix} \right)}. \end{aligned}$$

Les expressions des séries F et G s'en déduisent, à l'aide des relations (3.89) et (3.91).

Les résultats du corollaire 61 pour $q = 1$ ont été démontrés par Dumont et Kreweras [33] par récurrence sur les coefficients de la série G^ϵ , en s'appuyant sur un développement en fraction continue de Stieltjes des quotients de Gauss alternés de ${}_2F_0$, portant tantôt sur une variable, tantôt sur l'autre. Zeng [91] a donné ensuite un “q-analogue” de leur démonstration et a proposé une autre approche en introduisant la notion de permutations discordantes.

3.7 Deux résultats de dualité dans l'énumération des polyominos.

3.7.1 Introduction.

Au cours de l'étude de certaines statistiques sur le groupe symétrique, conduite à la section 3.6, nous n'avons utilisé que les résultats portant sur les développements en T-fraction d'une seule série formelle. La notion de dualité des T-fractions n'apparaissait pas.

Nous présentons ici deux exemples de dualité dans l'énumération des *polyominos parallélogrammes*, puis dans l'énumération des *polyominos convexes dirigés*. Le premier exemple est traité grâce au rapprochement de deux bijections déjà connues [28, 34] et nécessite un certain travail. Le second est plus facile à obtenir : il suffit de substituer les résultats du premier dans une égalité entre séries génératrices déjà établie par plusieurs auteurs. Nous appliquons enfin le qd-algorithme de la section 3.5 pour obtenir des développements en fractions continues de Jacobi et de Stieltjes.

Un *polyomino* est une partie du plan euclidien réel dont l'intérieur est connexe, constituée d'une union finie de carrés, comme l'indique la figure 3.18. Ils apparaissent dans l'étude de certains modèles sur réseaux de la physique statistique, où ils sont aussi connus sous le nom d'*animaux*. De nombreux travaux portant sur l'énumération de certaines classes de polyominos ont paru au cours

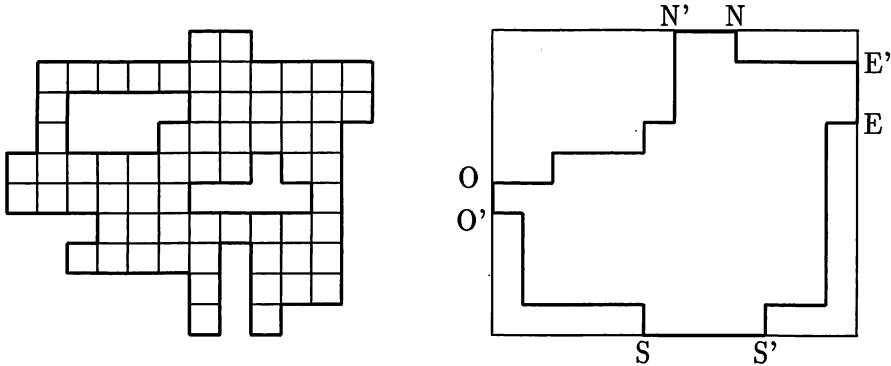


Figure 3.18: un polyomino et un polyomino convexe.

de ces dernières années. Nous renvoyons à l'article de synthèse de Viennot [89] qui contient une centaine de références bibliographiques.

Un polyomino est dit *convexe* si son intersection avec toute droite parallèle aux axes de coordonnées est connexe. Comme le montre la figure 3.18, le rectangle minimal qui contient un polyomino convexe permet de définir les points N, N', O, O', S, S', E et E' . En imposant des conditions à ces huit points, on peut définir des sous-classes de polyominos convexes.

Par exemple, un *polyomino convexe dirigé* est un polyomino convexe tel que $O' = S$ et un *polyomino parallélogramme* est un polyomino convexe tel que $O' = S$ et $E' = N$ (il est donc convexe dirigé). La figure 3.19 donne des exemples de tels objets.

Si P est un polyomino convexe, nous notons $l(P)$ le nombre de ses lignes, $c(P)$ le nombre de ses colonnes, $a(P)$ son aire, c'est-à-dire le nombre des carrés qui le composent, et $p(P)$ son *périmètre de lien*, c'est-à-dire la longueur de son bord (par opposition au *périmètre de site*, autre notion dérivée de la physique statistique, que nous n'étudions pas ici). Dans la suite de cette section, nous parlons simplement de *périmètre*.

Remarquons que P est un polyomino convexe si, et seulement si nous avons la relation

$$p(P) = 2(l(P) + c(P)). \quad (3.99)$$

En particulier, le périmètre $p(P)$ est un nombre pair supérieur ou égal à 4. Posons ensuite

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x, y, q, t) &= \sum x^{c(P)} y^{l(P)} q^{a(P)} t^{\frac{p(P)-2}{2}}, \\ \mathcal{Q}(x, y, q, t) &= \sum x^{c(P)} y^{l(P)} q^{a(P)} t^{\frac{p(P)-2}{2}}, \end{aligned}$$

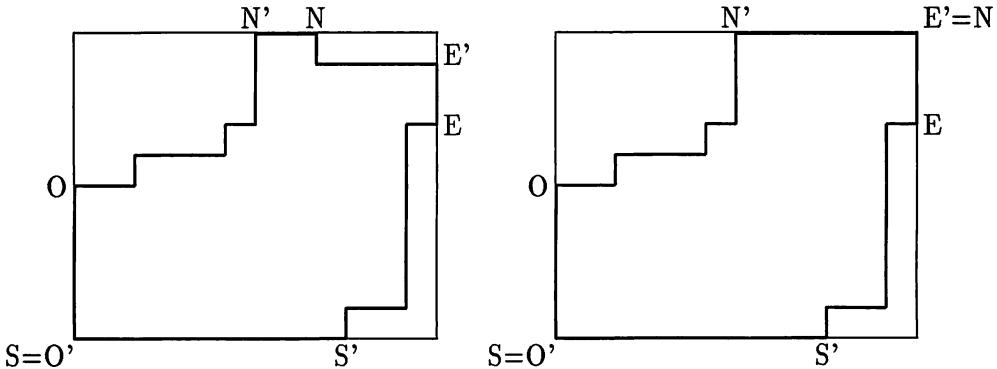


Figure 3.19: un polyomino convexe dirigé et un polyomino parallélogramme.

$$\mathcal{R}(x, y, q, t) = \sum x^{c(P)} y^{l(P)} q^{a(P)} t^{\frac{p(P)-2}{2}},$$

où la première (*resp.* la deuxième, la troisième) somme est étendue à tous les polyominos parallélogrammes (*resp.* convexes dirigés, convexes) comptés à translation près. Voici les premiers termes de ces séries, ordonnés suivant les puissances de la variable t :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= xyqt + (x^2y + xy^2)q^2t^2 + ((x^3y + 2x^2y^2 + xy^3)q^3 + x^2y^2q^4)t^3 + \dots, \\ \mathcal{Q} &= xyqt + (x^2y + xy^2)q^2t^2 + ((x^3y + 3x^2y^2 + xy^3)q^3 + x^2y^2q^4)t^3 + \dots, \\ \mathcal{R} &= xyqt + (x^2y + xy^2)q^2t^2 + ((x^3y + 4x^2y^2 + xy^3)q^3 + x^2y^2q^4)t^3 + \dots. \end{aligned}$$

Grâce à une bijection, due à Delest et Viennot [28], on peut donner un premier développement en T-fraction de la série $y + \mathcal{P}(x, y, q, t)$, considérée comme un élément de $\mathbb{Q}(x, y, q)[[t]]$. Ce développement est noté U . Comme il a été expliqué à la page 88, il en existe une infinité d'autres, et rien ne permet *a priori* de distinguer le développement U .

Par conséquent, nous ne devons pas nous attendre à ce que la série de Taylor de la T-fraction U^* — duale du développement U — possède des propriétés remarquables, comme par exemple “être à coefficients entiers positifs”. La seule chose que nous puissions dire de cette série de Taylor est que coefficient de t^n est une fraction rationnelle non polynomiale en les variables x, y et q .

Cependant, nous obtenons un résultat inespéré : nous sommes capables d’interpréter combinatoirement la T-fraction U^* et de montrer qu’elle compte aussi des polyominos parallélogrammes. Plus précisément, la série de Taylor de U^* est égale à $t + \mathcal{P}(x, t, q, y^{-1})$. C’est une bijection, due à Fédou et Viennot [34], qui permet de prouver ce résultat étonnant.

L'*existence* de ces deux développement n'est pas mystérieuse. En effet, étant donné un couple (f, g) d'éléments de $K[[t]]$, le problème consistant à trouver deux T-fractions duales qui soient respectivement des développements de f et g , admet presque toujours une solution et une seule (voir la section 3.4). Nous avons $K = \mathbb{Q}(x, y, q)$ dans le cadre de cette section, et deux bijections déjà connues nous permettent d'*expliciter* la forme générale des coefficients pour le problème de développement en T-fractions duales relatif aux séries $f(t) = \mathcal{P}(x, y, q, t)$ et $g(t) = \mathcal{P}(x, t, q, y^{-1})$.

Nous ne savons pas résoudre le problème analogue pour les séries $\mathcal{Q}(x, y, q, t)$ et $\mathcal{Q}(x, t, q, y^{-1})$. Les calculs que nous avons effectués à l'aide du logiciel Maple ne semblent pas indiquer de forme simple pour les coefficients des T-fractions duales. Nous obtenons en revanche un résultat simple lorsque nous nous désintéressons du paramètre *aire*, c'est-à-dire lorsque nous considérons les séries $\mathcal{Q}(x, y, 1, t)$ et $\mathcal{Q}(x, t, 1, y^{-1})$.

Enfin, nous ne savons rien dire du problème de développement en T-fractions duales, relatif aux séries $\mathcal{R}(x, y, q, t)$ et $\mathcal{R}(x, t, q, y^{-1})$.

3.7.2 La bijection de Delest et Viennot.

Le codage suivant des polyominos parallélogrammes est proposé dans [28] par Delest et Viennot. Nous renvoyons à cet article pour une démonstration et nous nous contentons de donner le résultat illustré d'un exemple.

Théorème 62 (Delest, Viennot). — *Il existe une bijection g entre l'ensemble des polyominos parallélogrammes de périmètre $2n + 2$ et celui des chemins de Dyck de longueur $2n$, telle que le nombre de pics (resp. la somme des hauteurs des pics) de $g(P)$ soit égale au nombre de colonnes (resp. à l'aire) de P .*

Cette bijection est construite ainsi : si (c_1, c_2, \dots, c_p) est la suite des hauteurs des colonnes — lues de gauche à droite — du polyomino parallélogramme P , si $(a_1, a_2, \dots, a_{p-1})$ est la suite des nombres de cases par lesquelles les colonnes consécutives de P sont adjacentes, alors $g(P)$ est l'unique chemin de Dyck

- dont la suite des hauteurs des pics est égale à (c_1, c_2, \dots, c_p) ;
- dont la suite des hauteurs des creux est égale à $(a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_{p-1} - 1)$;

Les pics et les creux sont définis à la page 84. La figure 3.20 donne un exemple pour lequel la liste des hauteurs des colonnes est $(3, 3, 4, 4, 5, 3)$, le nombre p vaut 6 et la liste des nombres de cases par lesquelles les colonnes consécutives sont adjacentes est $(3, 2, 4, 1, 3)$.

Définissons les suites λ et β par

$$\begin{cases} \lambda_k &= y & \text{si } k \geq 0, \\ \beta_k &= xq^k & \text{si } k \geq 1. \end{cases} \quad (3.100)$$

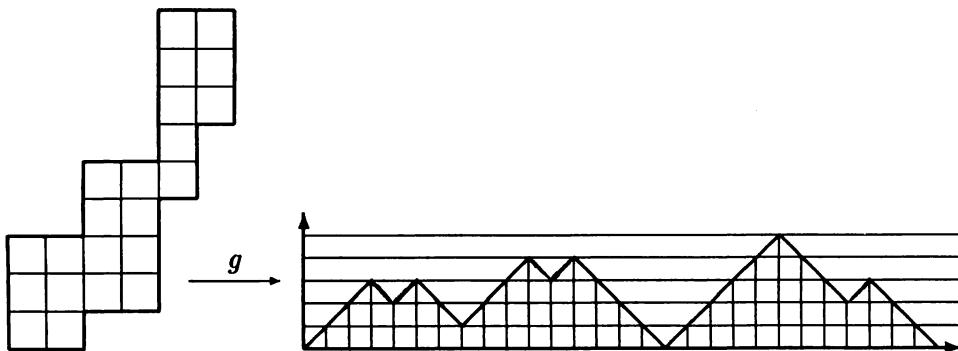


Figure 3.20: un polyomino P et le chemin de Dyck $g(P)$.

et appelons v la valuation correspondante sur les chemins de Dyck. Nous avons alors

$$y v(g(P)) t^{\frac{g(P)}{2}} = x^{c(P)} y^{l(P)} q^{a(P)} t^{\frac{(p(P)-2)}{2}}. \quad (3.101)$$

L'égalité des exposants des variables x, q et t dans les deux membres de (3.101) est une conséquence immédiate du théorème 62. L'égalité des exposants de y résulte de la relation (3.99).

En calculant les séries génératrices correspondant aux deux membres de l'égalité (3.101) et en appliquant le théorème 62, nous obtenons

$$\begin{aligned} y + \mathcal{P}(x, y, q, t) &= y \sum_{\omega} v(\omega) t^{\frac{|\omega|}{2}}, \\ &= D(\lambda, \beta; t), \end{aligned}$$

où D est la série définie par (3.14). La proposition 44 conduit alors au résultat suivant.

Corollaire 63. — *La série $\mathcal{P}^*(x, y, q, t) = y + \mathcal{P}(x, y, q, t)$, admet le développement en T-fraction*

$$U(t) = \frac{y}{1 + (y - xq)t -} \frac{yt}{1 + (y - xq^2)t -} \cdots \frac{yt}{1 + (y - xq^k)t -} \cdots \quad (3.102)$$

Les suites γ et α données par les relations de dualité (3.35) s'expriment simplement en fonction de $z = y^{-1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k = z \frac{xzq^{k+1}}{(1 - xzq^k)(1 - xzq^{k+1})} \text{ pour } k \geq 1, \\ \gamma_0 = \frac{1}{1 - xqz}, \\ \gamma_k = z \frac{1}{(1 - xzq^k)(1 - xzq^{k+1})} \text{ pour } k \geq 1. \end{array} \right. \quad (3.103)$$

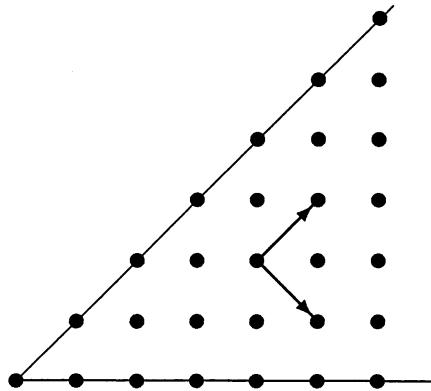


Figure 3.21: le huitième de plan ordonné E .

3.7.3 La bijection de Férou et Viennot.

Dans sa thèse de doctorat, Férou [34] (voir aussi Férou et Viennot [36]) donne une bijection qui transforme les polyominos parallélogrammes en multichaînes dans un huitième de plan. Ces multichaînes sont naturellement portées par des chemins de Dyck, ce qui permet une interprétation combinatoire des coefficients (3.103). Nous rappelons en détail la construction de cette bijection.

Chaînes et multichaînes. Soit (E, \leq) un ensemble partiellement ordonné. Une *chaîne* (*resp.* une *multichaîne*) de E est une suite (s_1, \dots, s_p) croissante au sens strict (*resp.* au sens large) d'éléments de E . Le nombre p est la *longueur* de la chaîne (*resp.* de la multichaîne). Si M est une multichaîne, la *chaîne sous-jacente* à M est obtenue en prenant la suite des sommets de M sans répétition.

Exemple. — Soit E le huitième de plan constitué des points (x, y) de \mathbb{N}^2 tels que $y \leq x$, muni de la relation d'ordre suivante :

$$(x, y) \leq (x', y') \quad \text{si} \quad y + x < y' + x' \quad \text{ou si} \quad y + x = y' + x' \text{ et } y \geq y'.$$

La figure 3.21 donne les sens des points croissants dans E .

La bijection. Soit P un polyomino parallélogramme ayant n lignes et p colonnes. Nous menons la construction de la bijection à l'aide du polyomino P_0 dessiné à la figure 3.22, pour lequel $n = 9$ et $p = 6$. Numérotions les cases de P comme indiqué et appelons $A_i = (a_i, b_i)$ le couple constitué du nombre occupant la case la plus basse de la colonne i et du nombre qui en occupe la case la plus haute.

Il est clair que P est entièrement déterminé par la liste A_1, \dots, A_p . Remarquons qu'une telle liste provient d'un polyomino parallélogramme si et seulement si $a_1 = 1$ et si,

$$\text{pour } 1 \leq i \leq p-1, \quad a_i \leq b_i \text{ et } a_{i+1} \leq b_i. \quad (3.104)$$

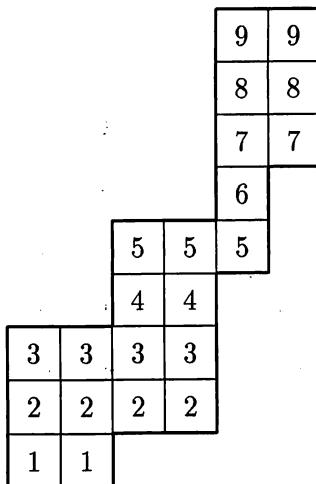


Figure 3.22: la numérotation des cases du polyomino parallélogramme P_0 .

Soit H l'application affine du plan donnée par

$$H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-1 \\ -x+y+1 \end{pmatrix}.$$

Nous définissons une suite de points de \mathbb{Z}^2 en posant

$$\rho(P) = (H(A_1), \dots, H(A_p)). \quad (3.105)$$

Les inégalités (3.104) montrent que $\rho(P)$ est une multichaîne de E . Nous appelons \mathcal{M} le sous-ensemble des multichaînes de E obtenues de cette manière. La multichaîne ainsi construite à partir du polyomino P_0 de la figure 3.22 et représentée dans la partie haute de la figure 3.23. Le lemme suivant est essentiel et nous renvoyons à [34, 36] pour une preuve.

Lemme 64. — Soit M une multichaîne de \mathcal{M} . Il existe un unique chemin de Dyck ω dont M contient tous les pics. De plus, ce chemin de Dyck est premier et il contient tous les sommets de M .

La figure 3.23 illustre cette construction, qui ne dépend en fait que de la chaîne sous-jacente à M . Nous appelons Supp l'application

$$\begin{aligned} \text{Supp} : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{D} \\ M &\longrightarrow \omega \end{aligned} \quad (3.106)$$

ainsi définie. Lorsque $\omega = \text{Supp}(M)$, nous disons que M est portée par ω , ou que ω est le support de M .

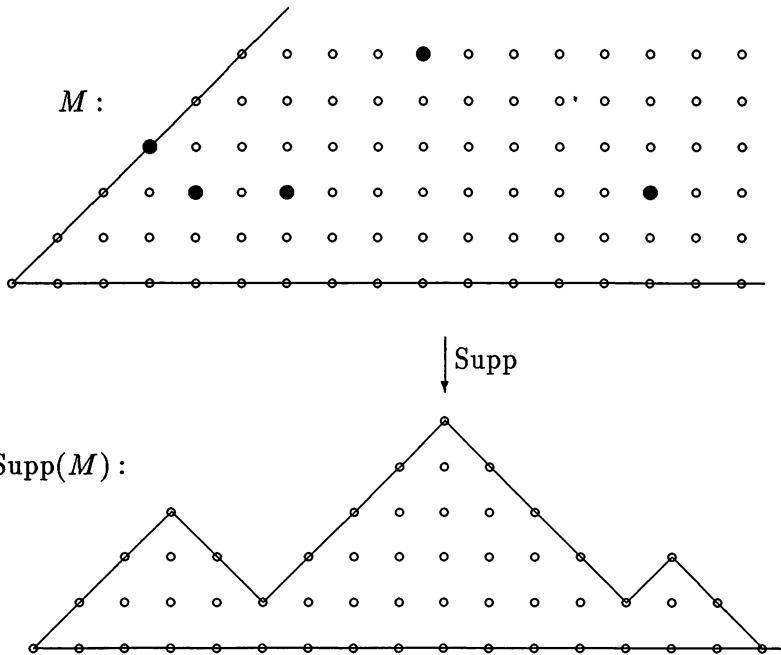


Figure 3.23: une multichaîne $M \in \mathcal{M}$ et le chemin de Dyck premier $\text{Supp}(M)$.

Théorème 65 (Fédou, Viennot). — *L’application ρ définie par (3.105) est une bijection entre l’ensemble des polyominos parallélogrammes et l’ensemble des multichaînes de E appartenant à \mathcal{M} .*

Soit P un polymino parallélogramme ayant n lignes et p colonnes. Soient $M = \rho(P)$ et $\omega = \text{Supp}(M)$. Les propriétés suivantes sont satisfaites.

- 1) La demi longueur de ω est $n = l(P)$.
- 2) La longueur de M est $p = c(P)$.
- 3) La somme des ordonnées des sommets de M est l’aire $a(P)$.

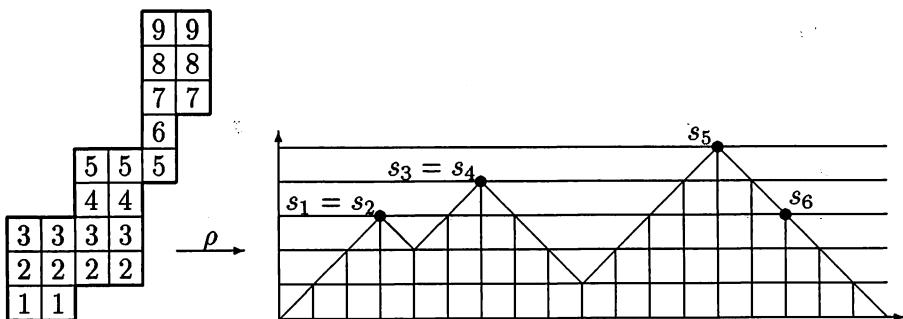
Voici la liste des points A_i pour le polymino parallélogramme P_0 : $A_1 = (1, 3)$, $A_2 = (1, 3)$, $A_3 = (2, 5)$, $A_4 = (2, 5)$, $A_5 = (5, 9)$, $A_6 = (7, 9)$. La multichaîne $\rho(P)$ vaut alors (s_1, \dots, s_6) avec

$$\begin{aligned} s_1 &= s_2 &=& (3, 3), \\ s_3 &= s_4 &=& (6, 4), \\ s_5 &&=& (13, 5), \\ s_6 &&=& (15, 3). \end{aligned}$$

Cette multichaîne est représentée sur les figures 3.23 et 3.24.

3.7.4 Développements en T-fractions duales : les polyominos parallélogrammes.

Dans ce paragraphe, nous supposons que $z = y^{-1}$.

Figure 3.24: la bijection ρ .

Le théorème 65 nous indique une méthode de calcul de la série

$$\mathcal{P}(x, t, q, z) = \sum x^{c(P)} t^{l(P)} q^{a(P)} z^{\frac{p(P)-2}{2}}.$$

Attention à la place des variables! Il s'agit de définir une valuation w sur les multichaînes qui traduit les trois propriétés énoncées dans ce théorème. Si P est un polyomino parallélogramme, si $M = (s_1, \dots, s_p)$ est la multichaîne $\rho(P)$ et si ω est le chemin de Dyck premier $\text{Supp}(M)$, nous posons

$$w(M) = z^{\frac{|\omega|}{2}-1} \prod_{i=1}^p w(s_i),$$

où la valuation d'un point du plan s d'ordonnée k est donné par

$$w(s) = xzq^k. \quad (3.107)$$

Nous déduisons du théorème 65 une relation analogue à la relation (3.101), à savoir :

$$w(\rho(P)) t^{\frac{|\omega|}{2}} = x^{c(P)} t^{l(P)} q^{a(P)} z^{\frac{p(P)-2}{2}}. \quad (3.108)$$

Il s'ensuit que

$$\mathcal{P}(x, t, q, z) = \sum_{\omega} \sum_M w(M) t^{\frac{|\omega|}{2}}, \quad (3.109)$$

où la première somme porte sur les chemins de Dyck premiers ω , et la seconde sur les multichaînes portées par ω et contenant tous ses pics.

Afin d'établir le lien entre $\mathcal{P}(x, t, q, z)$ et la T-fraction U^* , il reste une étape technique à franchir : la transformation de w — valuation définie sur les sommets des chemins de Dyck — en la valuation v^* , définie sur les pas descendants. Ceci se fait en trois temps et la figure 3.25 illustre la construction qui suit.

Fixons un chemin de Dyck premier $\omega = (s_0, \dots, s_{2n})$.

1. Nous constatons que la somme $\sum_{M \in \text{Supp}^{-1}(\omega)} w(M)$ est égale au produit $\prod_{i=1}^{2n-1} w'(s_i)$, où la valuation d'un sommet d'ordonnée k est donnée par

$$w'(s) = \begin{cases} \frac{xzq^k}{1-xzq^k} & \text{si } s \text{ est un pic,} \\ \frac{1}{1-xzq^k} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.110)$$

Il faut pour cela se rappeler la définition de l'application Supp , page 128. Les expressions différentes de $w'(s)$ suivant que s est un pic ou non viennent de ce que M contient nécessairement tous les pics de $\omega = \text{Supp}(M)$.

2. Nous affectons ensuite la valuation $w'(s)$ au pas dont s est l'origine. Chaque pas se trouve ainsi pourvu d'une valuation, à l'exception du premier que nous valuons 1 par convention.
3. Nous affectons enfin la valuation de chaque pas montant au pas descendant qui lui est associé (*cf.* définition 43 et figure 3.2). Nous retrouvons alors *presque* les valuations α et γ données par les formules (3.103) : la seule différence réside dans la valuation du chemin de Dyck premier de longueur 2. La construction que nous venons de faire lui attribue la valuation $\frac{xzq}{1-xzq}$, alors que v^* lui attribue la valuation $\frac{1}{1-xzq}$.

Compte tenu du cas spécial, nous obtenons :

$$\sum_{M \in \text{Supp}^{-1}(\omega)} w(M) = \begin{cases} v^*(\omega) & \text{si } |\omega| \geq 4, \\ v^*(\omega) - 1 & \text{si } |\omega| = 2. \end{cases} \quad (3.111)$$

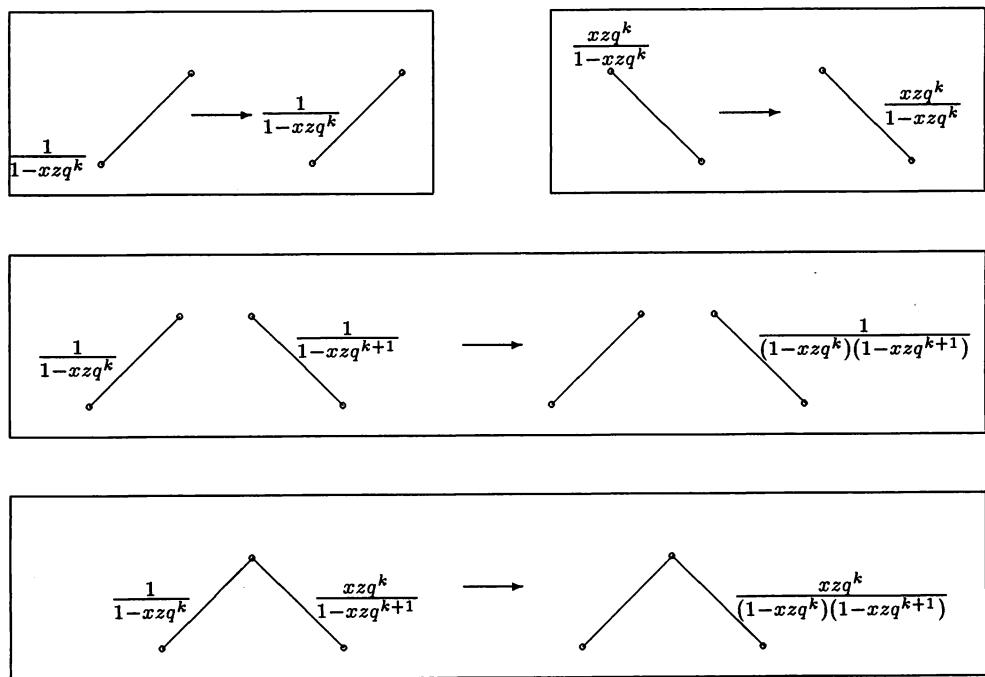
Jointe à l'expression ci-dessus, la formule (3.109) montre que

$$\begin{aligned} t + \mathcal{P}(x, t, q, z) &= \sum v^*(\omega) t^{\frac{|\omega|}{2}}, \\ &= DP(\gamma, \alpha; t), \end{aligned}$$

où DP est la série définie par (3.46). Grâce à la proposition 51 et au corollaire 63, nous avons finalement prouvé le résultat suivant.

Théorème 66. — *La série $\mathcal{P}^\bullet(x, y, q, t) = y + \mathcal{P}(x, y, q, t)$, où \mathcal{P} est la série génératrice des polyominos parallélogrammes définie par (3.100), satisfait les “équations de dualité”*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^\bullet(x, y, q, t) &= U(t), \\ \mathcal{P}^\bullet(x, t, q, y^{-1}) &= U^*(t), \end{aligned}$$

Figure 3.25: la transformation de w en v^* .

dans lesquelles $U(t)$ et $U^*(t)$ sont les deux T-fractions duales données par

$$U(t) = \frac{y}{1 + (y - xq)t -} \frac{yt}{1 + (y - xq^2)t -} \cdots \frac{yt}{1 + (y - xq^k)t -} \cdots,$$

$$U^*(t) = \frac{\frac{yt}{y - xq}}{1 + \frac{t}{y - xq} -} \frac{\frac{yt}{(y - xq)(y - xq^2)}}{1 + \frac{t}{y - xq^2} -} \cdots \frac{\frac{yt}{(y - xq^k)(y - xq^{k+1})}}{1 + \frac{t}{y - xq^{k+1}} -} \cdots.$$

Nous résumons les résultats obtenus par le tableau suivant.

Le paramètre ... de \mathcal{P} est compté	par la variable ... dans le développement en T-fraction de U et	par la variable ... dans le développement en T-fraction de U^*
nombre de colonnes	x	x
nombre de lignes	y	t
aire	q	q
périmètre	t	$z = y^{-1}$

3.7.5 Développements en T-fractions duales : les polyominos convexes dirigés.

Il résulte des travaux de Chang et Lin [17] et Bousquet-Mélou [10] qu'on a

$$\mathcal{P}(x, y, 1, t) = \frac{1 - xt - yt - \sqrt{\Delta}}{2t}$$

$$\mathcal{Q}(x, y, 1, t) = \frac{xyt}{\sqrt{\Delta}},$$

où Δ est le polynôme $1 - 2xt - 2yt - 2xyt^2 + x^2t^2 + y^2t^2$. La relation

$$\mathcal{Q}(x, y, 1, q) = \frac{xyt}{1 - xt - yt - 2t\mathcal{P}(x, y, 1, t)}$$

s'en déduit et se réécrit sous les deux formes

$$y^{-1}\mathcal{Q}(x, y, 1, t) = \frac{xt}{1 - (x - y)t - 2t(y + \mathcal{P}(x, y, 1, t))}, \quad (3.112)$$

$$t^{-1}\mathcal{Q}(x, t, 1, y^{-1}) = \frac{x}{y - x + t - 2(t + \mathcal{P}(x, t, 1, y^{-1}))}. \quad (3.113)$$

Une courte manipulation algébrique et le théorème 66 prouvent alors le résultat suivant.

Théorème 67.— La série $\mathcal{Q}^*(x, y, 1, t) = y^{-1}\mathcal{Q}(x, y, 1, t)$, où \mathcal{Q} est la série génératrice des polyominos convexes dirigés définie par (3.100), satisfait les “équations de dualité”

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^*(x, y, 1, t) &= V(t), \\ \mathcal{Q}^*(x, t, 1, y^{-1}) &= V^*(t),\end{aligned}$$

dans lesquelles $V(t)$ et $V^*(t)$ sont les deux T-fractions duales données par

$$\begin{aligned}V(t) &= \frac{xyt}{1 + (y-x)t -} \frac{2yt}{1 + (y-x)t -} \cdots \frac{yt}{1 + (y-x)t -} \cdots, \\ V^*(t) &= \frac{x(y-x)^{-1}}{1 + (y-x)^{-1}t -} \frac{2y(y-x)^{-2}t}{1 + (y-x)^{-1}t -} \cdots \frac{y(y-x)^{-2}t}{1 + (y-x)^{-1}t -} \cdots.\end{aligned}$$

3.7.6 Fractions de Jacobi et de Stieltjes.

Nous allons appliquer le qd-algorithme du théorème 54 aux développements en T-fractions précédemment obtenus pour la série génératrice des polyominos parallélogrammes. Les notations adoptées ci-dessous respectent celles du théorème 54.

Les polyominos parallélogrammes. Le corollaire 63 nous dit que la série $\mathcal{P}^*(x, y, q, t)$ admet le développement en T-fraction dont les coefficients sont $\lambda_k = y$ pour tout $k \geq 0$ et $\beta_k = xq^k$ pour tout $k \geq 1$. La quantité $\lambda_k\beta_{k+1}$ vaut donc xyq^{k+1} .

Nous cherchons les coefficients des fractions continues de Jacobi J_0 et J_1 ainsi que ceux des fractions continues de Stieltjes S_0 et S_1 , telles que

$$\begin{aligned}U &= y + \mathcal{P}(x, y, q, t), \\ &= y + xyqt \delta J_0, \\ &= y + xyqt \delta S_0, \\ &= J_1, \\ &= S_1,\end{aligned}$$

où U est la fraction de Thron (3.102). D’après le théorème 54, ces coefficients sont obtenus par le qd-algorithme indiqué à la figure 3.26.

Nous retrouvons ainsi un résultat de Gessel [48] : la série génératrice des polyominos parallélogrammes $\mathcal{P}(x, y, q, t)$ admet le développement en fraction continue de Jacobi suivant.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x, y, q, t) &= xyqtJ_0, \\ &= \frac{xyqt}{1 - (x+y)qt -} \frac{xyq^3t^2}{1 - (x+y)q^2t -} \cdots \frac{xyq^{2k+1}t^2}{1 - (x+y)q^{k+1}t -} \quad (3.114)\end{aligned}$$

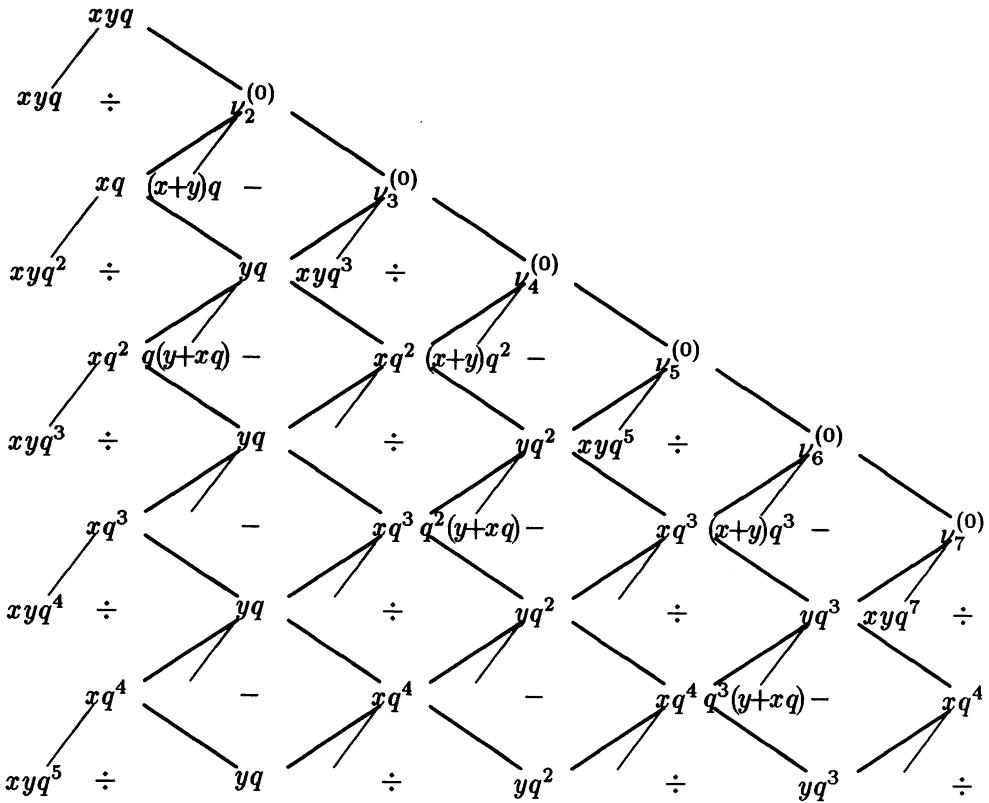


Figure 3.26: calcul de la J- et de la S-fraction pour les polyominos parallélogrammes.

Une démonstration combinatoire de ce résultat est donnée par Viennot [84], grâce à une bijection entre polyominos parallélogrammes et *mots de Motzkin colorés*; voir aussi [28, 11].

Nous n'avons pas explicité les coefficients $\nu_k^{(0)}$ pour $k \geq 1$. Si $\nu_2^{(0)}$ se calcule facilement (il vaut 1), les suivants se compliquent très rapidement et nous n'avons pas trouvé d'expression close pour le terme général.

En revanche, les coefficients des fractions continues J_1 et S_1 sont simples et l'on a:

$$\begin{aligned} U &= y + \mathcal{P}(x, y, q, t), \\ &= \frac{y}{1 - xqt -} \frac{xyq^2t^2}{1 - q(y + xq)t -} \cdots \frac{xyq^{2k}t^2}{1 - q^k(y + xq)t -} \cdots \end{aligned} \quad (3.115)$$

$$= \frac{y}{1 -} \frac{xqt}{1 -} \frac{yqt}{1 -} \cdots \frac{xq^kt}{1 -} \frac{yq^kt}{1 -} \cdots \quad (3.116)$$

Ces développements sont nouveaux, à notre connaissance.

Les polyominos convexes dirigés. Il est inutile de répéter la démarche précédente pour la série génératrice des polyominos convexes dirigés. Il suffit en effet d'utiliser la relation (3.112) et le développement (3.114) pour obtenir le résultat suivant : la série $\mathcal{Q}(x, y, 1, t)$ admet le développement en fraction continue de Jacobi

$$\mathcal{Q}(x, y, 1, t) = \frac{xyt}{1 - (x + y)t -} \frac{2xyt^2}{1 - (x + y)t -} \frac{xyt^2}{1 - (x + y)t -} \cdots \frac{xyt^2}{1 - (x + y)t -} \cdots \quad (3.117)$$

Nous n'avons pas trouvé de formule close pour les coefficients du développement de $\mathcal{Q}(x, y, 1, t)$ en fraction de Stieltjes.

Chapitre 4

Approximants de Padé vectoriels et fractions de Lukasiewicz

Dans tout ce chapitre, la lettre d désigne un nombre entier supérieur ou égal à 1 et K est un corps commutatif.

4.1 Introduction.

Certains approximants de Padé simultanés, dits *vectoriels* ont été introduits par Van Iseghem : voir l'article [80] ou sa thèse de doctorat [83]. Le problème consiste à approcher d séries formelles au même ordre, par des fractions rationnelles de même dénominateur et dont les degrés des numérateurs sont bornés par un même nombre.

D'autres notions d'approximants de Padé simultanés existent et nous renvoyons à de Bruin [26] et à Loxton et Van der Poorten [62] pour un panorama sur cette question.

Définition 68.— Soit $F(t) = (f^0(t), \dots, f^{d-1}(t))$ un vecteur composé de d séries formelles à coefficients dans K . Soient p et q deux nombres entiers. Nous notons r le reste de la division euclidienne de q par d .

Le vecteur $R(t) = (r^0(t), \dots, r^{d-1}(t))$ composé de d fractions rationnelles à coefficients dans K est un approximant de Padé vectoriel de type $[p/q]$ de $F(t)$ s'il existe d polynômes P_0, \dots, P_{d-1} de degrés inférieurs ou égaux à p et un polynôme Q de degré inférieur ou égal à q tels que $r_i(t) = \frac{P_i(t)}{Q(t)}$ et

$$\forall i \in \{0, \dots, d-1\}, \quad f_i(t) - r_i(t) = \begin{cases} o(t^{p+\lfloor \frac{q}{d} \rfloor + 1}) & \text{si } 0 \leq i \leq r-1, \\ o(t^{p+\lfloor \frac{q}{d} \rfloor}) & \text{si } r \leq i \leq d-1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Voici la justification heuristique de cette définition. Supposons que nous cherchions des polynômes P_0, \dots, P_{d-1} et Q vérifiant les conditions de degrés

indiquées dans la définition 68, ainsi qu'un entier m le plus grand possible, tels que

$$\forall i \in \{0, \dots, d-1\}, \quad f_i(t) - \frac{P_i(t)}{Q(t)} = o(t^m). \quad (4.2)$$

Nous pouvons supposer que le terme constant de Q vaut 1.

Grâce à la multiplication par Q des égalités (4.2), le problème se ramène alors à la résolution d'un système linéaire de $(m+1)d$ équations et $q+d(p+1)$ inconnues, qui sont les coefficients des polynômes. Ce système admet en général une solution si $q+d(p+1) \leq (m+1)d$, autrement dit si

$$m \leq p + \frac{q}{d}.$$

Puisque m est un nombre entier, sa valeur optimale est $p + \lfloor \frac{q}{d} \rfloor$, et il y a alors $q - d\lfloor \frac{q}{d} \rfloor = r$ inconnues de plus que d'équations. De là vient l'idée de raffiner d'un cran l'approximation des r premières séries formelles, comme il est indiqué dans les conditions (4.1).

Nous reprenons à la section 4.2 l'étude du modèle combinatoire des chemins de Lukasiewicz, décrit au premier chapitre lors de la présentation des fractions multicontinues. Nous lui donnons une présentation autonome et introduisons la notion de *fraction multicontinue de d -Lukasiewicz*.

Nous montrons, en section 4.2.2, pourquoi le vecteur des séries génératrices des chemins de d -Lukasiewicz bornés au niveau k constitue l'approximant de Padé vectoriel de type $[k/k+1]$ du vecteur des séries génératrices des chemins de d -Lukasiewicz valués. Nous complétons ainsi le schéma général, qui associe un type de fractions continues à chaque type d'approximants de Padé.

Poursuivant la description d'algorithmes entreprise aux deux chapitres précédents, nous donnons en section 4.4 un algorithme de calcul des fractions de d -Lukasiewicz. A notre connaissance il est nouveau, et il permet de calculer les approximants de Padé vectoriels.

Enfin, la section 4.5 est consacrée à une preuve combinatoire d'un résultat "à la Favart-Shohat", établi par Maroni dans [67]. Il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de polynômes soit *orthogonale de dimension d* par rapport à d formes linéaires, notion introduite par Van Iseghem [83].

4.2 Le modèle combinatoire.

4.2.1 Chemins, pavages et formes linéaires.

Dans ce chapitre le terme *chemin* désigne une suite finie $\omega = (s_0, \dots, s_n)$ de points de \mathbb{N}^2 , avec $s_i = (i, y_i)$ pour tout i , et satisfaisant la condition

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \quad y_{i+1} \leq y_i + 1.$$

En d'autres mots, les *pas* du chemin — c'est-à-dire les couples (s_i, s_{i+1}) — sont des pas montants si $y_{i+1} = y_i + 1$ ou des pas descendants de *hauteur* $y_i - y_{i+1}$ sinon. Lorsque $y_i = y_{i+1}$, on parle aussi de pas horizontal. Le *niveau* du pas (s_i, s_{i+1}) est l'ordonnée de son premier sommet, c'est-à-dire y_i .

La longueur de $\omega = (s_0, \dots, s_n)$, notée $|\omega|$, est le nombre n . Le sommet s_0 est son *origine* et s_n est son *arrivée*, ces deux sommets constituant ses *extrémités*.

Définition 69. — *Un chemin de d -Lukasiewicz est un chemin à sommets dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qui vérifie les propriétés suivantes.*

1. *Son origine est $(0, 0)$.*
2. *Son arrivée est de la forme (n, a) où n est un nombre entier et a appartient à l'ensemble $\{0, 1, \dots, d - 1\}$. Nous disons alors que le chemin arrive au niveau a .*
3. *Les hauteurs $y_i - y_{i+1}$ de ses pas descendants sont inférieures ou égales à d .*

La figure 4.1 montre un chemin de d -Lukasiewicz pour lequel l'entier d est un nombre supérieur ou égal à 3 (la figure ne nous renseigne pas davantage).

Remarque. — Lorsque $d = 1$, les chemins de d -Lukasiewicz sont les chemins de Motkin de la définition 2 du premier chapitre.

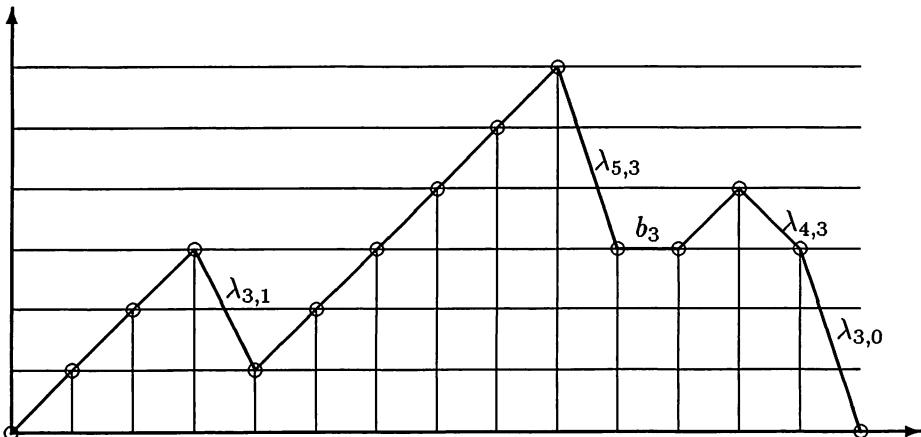


Figure 4.1: un chemin de d -Lukasiewicz arrivant au niveau 0.

Soit $\lambda = (\lambda_{l,k})_{0 \leq l-k \leq d}$ une famille de scalaires. La *valuation* d'un pas ξ d'un chemin de d -Lukasiewicz est donnée par :

$$v(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \text{ est un pas montant;} \\ \lambda_{l,k} & \text{si } \xi \text{ est un pas descendant du niveau } l \text{ au niveau } k. \end{cases} \quad (4.3)$$

La valuation d'un chemin $\omega = (s_0, s_1, \dots, s_n)$, comme dans tous les modèles précédents, est le produit des valuations de ses pas :

$$v(\omega) = \prod_{i=0}^{n-1} v(s_i, s_{i+1}).$$

Par convention, la valuation du chemin de longueur nulle est 1. Pour respecter les notations du cas $d = 1$, nous utilisons parfois la lettre b_n plutôt que $\lambda_{n,n}$ pour désigner la valuation d'un pas horizontal au niveau n . Ainsi avons nous $v(\omega) = b_3\lambda_{3,1}\lambda_{6,3}\lambda_{4,3}\lambda_{3,0}$ si ω désigne le chemin tracé à la figure 4.1.

Définition 70. — Soit a un nombre entier inférieur ou égal à $d - 1$.

- 1) Nous notons μ_n^a la somme $\sum v(\omega)$ des valuations définies par (4.3) des chemins de d -Lukasiewicz de longueur n , arrivant au niveau a .
- 2) La forme linéaire Γ^a sur $K[t]$ est définie par ses moments

$$\Gamma^a(t^n) = \mu_n^a.$$

Nous notons Γ le vecteur $(\Gamma^0, \dots, \Gamma^{d-1})$.

- 3) La série formelle $f^a(\lambda; t)$ de $K[[t]]$ vaut $\sum_{n \geq 0} \mu_n^a t^n$. C'est la série génératrice des chemins de d -Lukasiewicz valués, arrivant au niveau a .

Lorsque $d = 1$, les chemins étudiés sont en fait les chemins de Motzkin. Voici les valeurs des premiers moments μ_n^a pour $d = 2$.

$$\begin{array}{lll} \mu_0^0 = 1, & \mu_0^1 = 0, & \mu_0^2 = 0, \\ \mu_1^0 = b_0, & \mu_1^1 = 1, & \mu_1^2 = 0, \\ \mu_2^0 = b_0^2 + \lambda_{1,0}, & \mu_2^1 = b_0 + b_1, & \mu_2^2 = 1, \\ \mu_3^0 = b_0^3 + 2b_0\lambda_{1,0} + b_1\lambda_{1,0} + \lambda_{2,0}, & \mu_3^1 = b_0^2 + b_0b_1 + \lambda_{2,1}, & \mu_3^2 = b_0 + b_1 + b_2. \end{array}$$

L'interprétation géométrique des moments montre que $\mu_n^a = 0$ lorsque $n < a$, que $\mu_a^a = 1$ et que $\mu_{a+1}^a = b_0 + \dots + b_a$. Les premiers termes de $f^a(\lambda; t)$ sont donc

$$t^a + (b_0 + \dots + b_a)t^{a+1} + \dots$$

La série $f^0(\lambda; t)$ est la série génératrice étudiée au premier chapitre : elle était alors notée $f(\lambda; t)$. Si k est un nombre entier,

$$f_k^a(\lambda; t) = \sum v(\omega)t^{|\omega|} \tag{4.4}$$

désigne la série génératrice des chemins de d -Lukasiewicz, arrivant au niveau a et bornés au niveau k . Si $k < a$, la série $f_k^a(\lambda; t)$ est nulle car il n'y a bien sûr pas de chemin satisfaisant les propriétés requises.

A la section 4.3, nous montrons que les séries f_k^a sont rationnelles et nous donnons une expression de leur dénominateur en termes de polynômes de pavage. Avant d'aborder cette partie, nous allons étudier pour eux-mêmes les polynômes de pavage associés au modèle combinatoire des chemins de d -Lukasiewicz. Nous rappelons ci-dessous leur définition.

Définition 71. — Soient r et s deux nombres entiers tels que $r \leq s$.

1) Une pièce est un sous-ensemble $\{k, \dots, l\}$ de $\{r, r+1, \dots, s\}$ avec $0 \leq l - k \leq d$. Nous la notons aussi $[k, l]$.

2) Un pavage de d -Lukasiewicz de $\{r, r+1, \dots, s\}$ est un ensemble de pièces deux à deux disjointes. Si α est un pavage, nous notons $\text{lib}(\alpha)$ le nombre de ses points libres, c'est-à-dire le nombre des éléments de $\{r, r+1, \dots, s\}$ n'appartenant à aucune pièce de α .

Au prix de l'abus de langage consistant à confondre la pièce $[k, l]$ avec le pas descendant du niveau l au niveau k , nous définissons le *poids* d'un pavage α par

$$w(\alpha) = \prod_{p \in \alpha} (-v(p)). \quad (4.5)$$

Le polynôme de pavage de $\{0, \dots, k-1\}$ est noté P_k et vaut

$$P_k(t) = \sum_{\alpha \text{ pavage de } \{0, \dots, k-1\}} w(\alpha) t^{\text{lib}(\alpha)}. \quad (4.6)$$

Dans les expressions ci-dessus, nous convenons que la valuation du pavage vide ainsi que le polynôme de pavage $P_0(t)$ du segment vide valent 1. Nous pouvons définir de manière analogue le polynôme de pavage de $[r, s]$ et nous constatons qu'il peut s'écrire

$$\delta^r P_{s-r+1}(t),$$

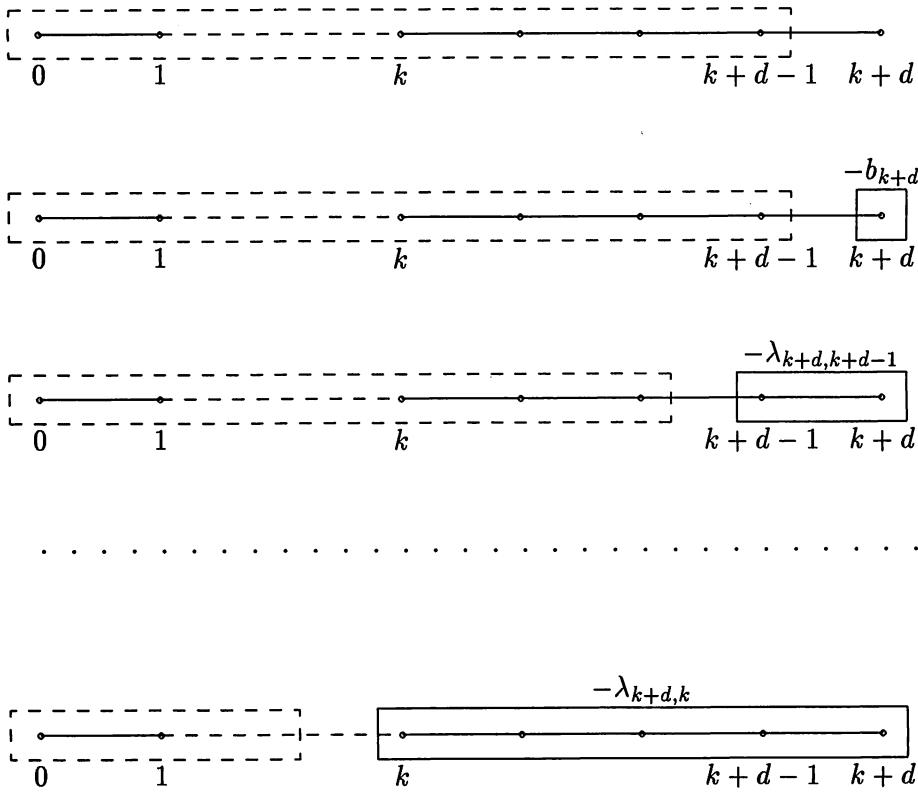
où la lettre δ désigne le prolongement, aux expressions algébriques, de l'application de décalage sur les valuations, qui à $\lambda_{l,k}$ fait correspondre $\lambda_{l+1,k+1}$. La proposition suivante ne présente aucune difficulté.

Proposition 72. — La suite $(P_k)_{k \geq 0}$ des polynômes de pavage, donnés par (4.6), satisfait la relation de récurrence linéaire à $d+2$ termes suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P_{k+d+1}(t) = (t - b_{k+d})P_{k+d}(t) - \sum_{i=1}^d \lambda_{k+d, k+d-i} P_{k+d-i}(t). \quad (4.7)$$

Démonstration : soit α un pavage de $\{0, \dots, k+d\}$. En distinguant à quelle pièce éventuelle appartient le point $k+d$, nous prouvons que α se présente sous une et une seule des formes de la figure 4.2. Dans cette figure, les boîtes en traits pleins représentent les pièces de α tandis que les boîtes en pointillés représentent un pavage quelconque du segment qu'elles entourent.

Il suffit ensuite de traduire sur les polynômes cette disjonction en $d+1$ cas. □

Figure 4.2: les $d + 1$ formes possibles d'un pavage de $\{0, \dots, k + d\}$.

Les conditions initiales de la relation de récurrence (4.7), c'est-à-dire la valeur des polynômes de pavage de $\{0, \dots, a\}$ pour $a \leq d - 1$, sont récursivement données par

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1, \\ P_{a+1}(t) &= (t - b_a)P_a(t) - \sum_{i=1}^a \lambda_{a,a-i} P_{a-i}(t). \end{aligned}$$

4.2.2 Fractions multicontinues de d -Lukasiewicz.

Dans ce paragraphe, grâce à la géométrie des chemins de d -Lukasiewicz, nous donnons des développements en fraction multicontinue des séries $f^a(\lambda; t)$ de la définition 70. La méthode, déjà utilisée de nombreuses fois, consiste à établir des équations fonctionnelles portant sur les séries f^a .

La lettre δ désigne l'application de décalage qui, à la famille $(\lambda_{l,k})_{0 \leq l-k \leq d}$, fait correspondre la famille $(\lambda_{l+1,k+1})_{0 \leq l-k \leq d}$. Le prolongement de cette application aux expressions algébriques est encore désigné par la lettre δ .

Les démonstrations sont les mêmes que celles de la section 2 du premier

chapitre, à ceci près que certaines valuations doivent être substituées par 0. L'argument essentiel est la factorisation unique des chemins de d -Lukasiewicz arrivant au niveau a . Si ω est un tel chemin, il s'écrit de manière unique

$$\omega = \omega_0 u_1 \omega_1 \dots u_a \omega_a ,$$

où les u_i sont des pas montants et les ω_i des chemins de d -Lukasiewicz *translatés*, dont les extrémités sont au niveau i . La figure 4.3 donne un exemple d'une telle factorisation.

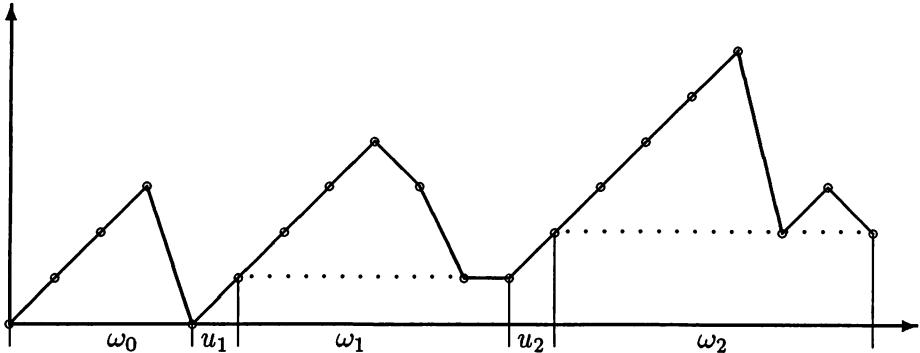


Figure 4.3: la factorisation d'un chemin de d -Lukasiewicz arrivant au niveau $a = 2$.

Nous avons alors les résultats suivants.

Proposition 73.— 1) La série génératrice $f^0(\lambda; t)$ satisfait l'équation fonctionnelle

$$f^0(\lambda; t) = \frac{1}{1 - \lambda_{0,0}t - \sum_{p=1}^d \lambda_{p,0} \prod_{i=1}^p \delta^i f^0(\lambda; t) t^{p+1}}. \quad (4.8)$$

2) Pour $a \in \{0, \dots, d-1\}$, la série génératrice $f^a(\lambda; t)$ satisfait la relation

$$f^a(\lambda; t) = t^a \prod_{i=0}^a \delta^i f^0(\lambda; t). \quad (4.9)$$

3) La série $f^0(t)$ se développe en fraction multicontinue de d -Lukasiewicz (ou L_d -fraction), notée $L(d, \lambda; t)$:

$$\frac{1}{1 - \lambda_{0,0}t - \sum_{p=1}^d \lambda_{p,0} t^{p+1} \prod_{i=1}^p \frac{1}{1 - \lambda_{i,i}t - \sum_{q=1}^d \lambda_{q+i,i} t^{q+1} \prod_{j=1}^q \frac{1}{1 - \lambda_{i+j,i+j}t - \dots}}}, \quad (4.10)$$

issu de l'itération de l'équation fonctionnelle (4.8).

Il est facile d'imaginer ce que donne l'itération de l'équation fonctionnelle (4.8) lorsqu'on l'applique à la relation (4.9) : un produit de développements de la forme (4.10), que nous n'écrirons pas.

4.3 Approximants de Padé vectoriels.

Nous rappelons que $f^a(t) = \sum \mu_n^a t^n$ est la série génératrice des chemins de d -Lukasiewicz valués, arrivant au niveau a , et que $f_k^a(t)$ est la restriction de la série précédente aux chemins bornés au niveau k .

Proposition 74.— 1) La série $f_k^a(t)$ est une fraction rationnelle et elle vaut

$$f_k^a(t) = t^a \frac{\delta^{a+1} P_{k-a}^*(t)}{P_{k+1}^*(t)}, \quad (4.11)$$

où la notation $P_n^*(t)$ désigne le polynôme réciproque $t^n P_n(t^{-1})$ du polynôme de pavage $P_n(t)$, défini par (4.6). Les degrés de son numérateur et de son dénominateur sont respectivement inférieurs ou égaux à k et $k+1$. Ces inégalités sont des égalités dans le cas générique, c'est-à-dire lorsque $K = \mathbb{Q}(\lambda)$.

2) L'approximation suivante est vérifiée en $t = 0$:

$$f^a(t) - f_k^a(t) = o(t^{k+1+\lfloor \frac{k-a}{d} \rfloor}). \quad (4.12)$$

Elle est optimale dans le cas générique.

Démonstration : 1) on peut donner de la relation (4.11), ou plus précisément de la relation $P_{k+1}^*(t)f_k^a(t) = t^a \delta^{a+1} P_{k-a}^*(t)$, une démonstration *ad hoc*, analogue à la preuve de la proposition 78 à venir.

Plus élégamment, toute preuve de rationalité d'une série formelle des chemins bornés d'un modèle combinatoire résulte des théorèmes généraux portant sur les monoïdes d'*empilements de pièces*. On peut se reporter à l'article de Viennot [86]. Les pièces ont en l'occurrence déjà été définies, à la définition 71 : elles sont de la forme $[k, l] \stackrel{\text{rappel}}{=} \{k, k+1, \dots, l\}$ pour k et l entiers, vérifiant $0 \leq l - k \leq d$.

Suivant cet article, il existe une bijection entre

- l'ensemble des chemins de d -Lukasiewicz arrivant au niveau a et bornés au niveau k ;
- l'ensemble des *pyramides* dont la pièce maximale est un chemin de d -Lukasiewicz arrivant au niveau a et ne se recouplant pas, et dont les autres pièces sont des cycles sur $[0, k]$ (une pyramide est un empilement ayant une seule pièce maximale).

De plus, les pièces maximales de l'empilement obtenu en ôtant le chemin ne se recouplant pas sont des cycles qui contiennent au moins un élément de $\{0, \dots, a\}$. Nous notons \mathcal{M}^a l'ensemble des cycles vérifiant cette propriété. Enfin, le chemin ne se recouplant pas est nécessairement le chemin constitué de a pas montants, du niveau 0 au niveau a .

Si nous attribuons à un cycle C dont le support est $[k, l]$ la valuation $V(C) = \lambda_{l,k} t^{l-k+1}$, la série génératrice $f_k^a(t)$ est égale à

$$t^a \sum_{\max(E) \in \mathcal{M}^a} V(E), \quad (4.13)$$

où la somme porte sur tous les empilements E de cycles sur $\{0, \dots, k\}$ à pièces maximales dans \mathcal{M}^a . Un théorème d'inversion, généralisation de l'inversion de Möbius dans les monoïdes partiellement commutatifs (*cf.* Cartier et Foata [16]), nous donne une expression rationnelle de la série (4.13), à savoir

$$t^a \frac{N}{D} = t^a \frac{\sum_{\substack{F \text{ trivial}, \\ \max(F) \cap \mathcal{M}^a = \emptyset}} (-1)^{|F|} V(F)}{\sum_{F \text{ trivial}} (-1)^{|F|} V(F)}.$$

Il est alors facile de reconnaître dans le dénominateur D , le polynôme réciproque du polynôme de pavage de $\{0, \dots, k\}$ et dans le numérateur N , le polynôme réciproque du polynôme de pavage de $\{a+1, \dots, k\}$. L'expression (4.11) s'en déduit. L'assertion concernant les degrés vient de ce que $P_n(t)$ est de degré n et de ce que son terme constant est non nul dans le cas générique.

2) Nous supposons que $k-a = nd+r$ est l'écriture de la division euclidienne de $k-a$ par d . Nous allons examiner quelle est la longueur d'un plus court chemin de d -Lukasiewicz arrivant au niveau a et dépassant strictement le niveau k . Un tel plus court chemin commence nécessairement par $k+1$ pas montants, puis rejoint le niveau a par un nombre minimal de pas descendants. Ces pas descendants doivent ainsi avoir la hauteur la plus grande possible.

Par exemple, n pas descendants de hauteur d amènent le chemin au niveau $a+1+r$ et il manque encore un et un seul pas de hauteur $r+1$ (qui est un entier compris entre 1 et d) pour atteindre le niveau a . Ce pas de hauteur $r+1$ peut évidemment être intercalé avant l'un quelconque des n pas descendants de hauteur d . Nous avons donc déterminé

- d'une part, la longueur minimale cherchée : c'est $k+n+2 = k + \lfloor \frac{k-a}{d} \rfloor + 2$;
- d'autre part, tous les chemins ayant cette longueur, arrivant au niveau a et dépassant strictement le niveau k .

Nous en déduisons que la différence $f^a(t) - f_k^a(t)$ vaut $c t^{k+\lfloor \frac{k-a}{d} \rfloor + 2}$, où le coefficient c est donné par la formule suivante, dans laquelle nous avons mis en évidence la valuation du pas de hauteur $r+1$:

$$\sum_{i=0}^d \lambda_{k+1, k+1-d} \dots \lambda_{k+1-(i-1)d, k+1-id} \lambda_{k+1-id, k-id-r} \lambda_{k-id-r, k-(i+1)d-r} \dots \lambda_{d+a, a}.$$

L'approximation (4.12) et son caractère optimal en résultent immédiatement. \square

Théorème 75. — Soit $F(t) = (f^0(t), \dots, f^{d-1}(t))$ le vecteur des séries génératrices des chemins de d -Lukasiewicz valués arrivant au niveau $a \in \{0, \dots, d-1\}$, données à la définition 70.

Le vecteur $F_k(t) = (f_k^0(t), \dots, f_k^{d-1}(t))$ des fractions rationnelles données par l'expression (4.11) est l'approximant de Padé vectoriel de $F(t)$ de type $[k/k+1]$.

Démonstration : le premier point de la proposition 74 montre que les fractions rationnelles $f_k^a(t)$ ont toutes le même dénominateur $P_{k+1}^*(t)$, de degré inférieur ou égal à $k+1$ et que leurs numérateurs sont de degré k ou moins. Il ne reste alors plus qu'à vérifier les conditions d'approximation (4.1).

Supposons que q et r soient respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $k+1$ par d . Notons que $r-a-1 < d$ pour tout $a \in \{0, \dots, d-1\}$. Nous avons alors $k-a = qd + (r-1-a)$.

Cette dernière expression est l'écriture de la division euclidienne de $k-a$ par d si, et seulement si, $0 \leq r-1-a$, ou encore $a \leq r-1$. Nous en déduisons que

$$k+1+\lfloor \frac{k-a}{d} \rfloor = \begin{cases} k+\lfloor \frac{k+1}{d} \rfloor + 1 & \text{si } 0 \leq a \leq r-1, \\ k+\lfloor \frac{k+1}{d} \rfloor & \text{si } r \leq a \leq d-1. \end{cases}$$

Le second point de la proposition 74 montre alors que les conditions d'approximation 4.1 sont satisfaites. \square

Comme dans les deux chapitres précédents, nous allons maintenant examiner le problème inverse. Étant donné un vecteur $F(t) = (f^0(t), \dots, f^{d-1}(t))$ de séries formelles, connues par leurs coefficients c_n^a , peut-on déterminer si son approximant de Padé vectoriel de type $[k/k+1]$ existe et, si la réponse est oui, peut-on le calculer? Ces questions se reformulent, via notre modèle combinatoire, de la façon suivante : peut-on trouver une famille de valuations $\lambda = (\lambda_{l,k})_{0 \leq l-k \leq d}$ telle que

$$c_n^a = \sum v(\omega),$$

la somme portant sur les chemins de d -Lukasiewicz valués par λ , de longueur n et arrivant au niveau a ?

Pour que la réponse soit positive, une condition nécessaire s'impose immédiatement : la série formelle $f^a(t)$ doit commencer par $t^a + \dots$, comme nous l'avons remarqué à la page 140. Nous ne savons pas comment remédier à ce défaut de généralité. On pourrait par exemple être tenté, les séries $f^a(t)$ étant celles de la définition 70 et des polynômes $p^a(t)$ de degré $a - 1$ étant fixés, d'affirmer que l'approximant de Padé vectoriel de type $[k/k+1]$ de $(f^0, p^1 + f^1, \dots, p^{d-1} + f^{d-1})$ est le vecteur

$$(f_k^0, p^1 + f_k^1, \dots, p^{d-1} + f_k^{d-1}).$$

Les conditions d'approximation (4.1) seraient évidemment satisfaites. Mais, d'après l'expression (4.12), la fraction rationnelle $p^a + f^a$ s'écrirait N/D avec $\deg(N) = k + a - 1$ et les conditions de degré de la définition 68 ne seraient alors pas remplies.

4.4 Un algorithme de calcul des approximants de Padé vectoriels.

4.4.1 Une vue d'ensemble.

La démarche adoptée ici est calquée sur les algorithmes donnés aux chapitres 2 et 3, respectivement consacrés aux approximants de Padé ordinaires et en deux points. Nous allons résoudre successivement les équations suivantes

$$\mathcal{E}_n^a : \sum_{\substack{\omega \text{ chemin de } d\text{-Lukasiewicz de longueur } n, \\ \text{arrivant au niveau } a}} v(\omega) = c_n^a, \quad (4.14)$$

dans l'ordre des entiers n croissants et, pour n fixé, dans l'ordre des entiers a croissants. Les inconnues de ces équations sont les valuations $\lambda_{l,k}$ des chemins de d -Lukasiewicz.

Dans les chapitres précédents, un argument essentiel assurait le bon déroulement de l'algorithme : parmi les termes du membre de gauche d'une équation du type \mathcal{E}_n^a , il était possible d'isoler la valuation $v(\omega)$ d'un unique chemin *dépassant un certain niveau*. L'argument se présente ici sous une forme légèrement différente, que nous allons expliquer.

Un ordre partiel est défini sur les chemins de d -Lukasiewicz de la manière suivante : si ω et η sont deux chemins de même longueur et arrivant au même niveau, nous disons que $\omega \leq \eta$ si, pour tout entier i , le $i^{\text{ème}}$ sommet du premier a une ordonnée inférieure ou égale à celle du $i^{\text{ème}}$ sommet du second. Cet ordre partiel se traduit graphiquement par “ ω est au-dessous de η ”.

Lemme 76.— Soient n et a deux nombres entiers; nous ne supposons pas a priori que $a \in \{0, \dots, d-1\}$. Nous posons

$$p = n - \lceil \frac{n-a}{d+1} \rceil, \quad (4.15)$$

$$q = \lceil \frac{n-a}{d+1} \rceil - 1, \quad (4.16)$$

où $\lceil x \rceil$ désigne le plafond de x , c'est-à-dire le plus petit nombre entier supérieur ou égal à x .

L'ensemble des chemins de d -Lukasiewicz de longueur n et arrivant au niveau a admet un unique maximum. C'est le chemin composé dans l'ordre :

1. de p pas montants;
2. d'un pas descendant du niveau p au niveau $a + qd$, qu'on appelle le pas central;
3. de q pas descendants de hauteur d .

Démonstration : il suffit de chercher à maximiser p et q , lorsque ces deux entiers sont d'une part soumis à l'égalité $p + q + 1 = n$, et assurent d'autre part l'existence d'un chemin vérifiant les conditions 1, 2 et 3 du lemme.

□

Deux de ces chemins sont tracés à la figure 4.4. Celui de gauche (*resp.* de droite) correspond au cas où $n - a$ est (*resp.* n'est pas) divisible par $d + 1$: le *pas central* est dans ce cas un pas descendant de hauteur d (*resp.* strictement inférieure à d). Il est indiqué en gras dans les deux cas.

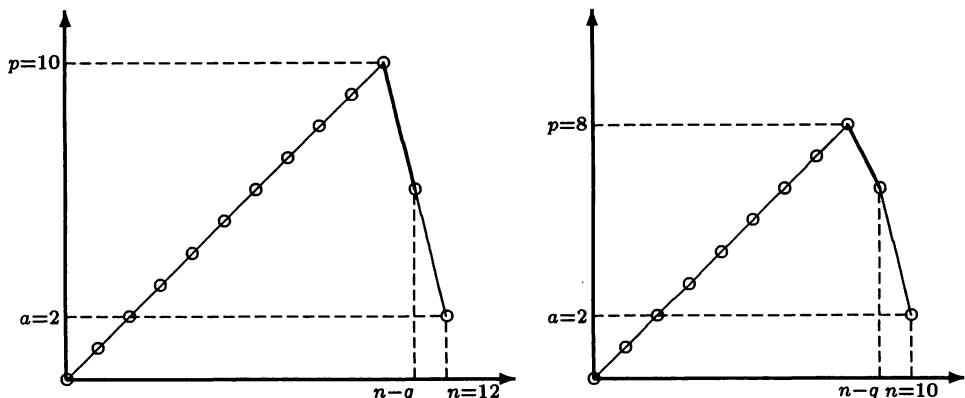


Figure 4.4: deux exemples de chemins maximaux pour $d = 4$.

Voici la description de l'étape (n, a) . Nous supposons connues les valuations nécessaires à la réalisation des égalités \mathcal{E}_m^b définies par (4.14), pour $m < n$

et $b \in \{0, \dots, d-1\}$ d'une part, et pour $m = n$ et $b \in \{0, \dots, a-1\}$ d'autre part. Nous isolons la valuation du chemin maximal dans l'égalité \mathcal{E}_n^a ; cette dernière s'écrit alors

$$\lambda_{p,qd+a} (\lambda_{qd+a,(q-1)d+a} \dots \lambda_{a+d,a}) + \text{termes connus} = c_n^a, \quad (4.17)$$

où seule $\lambda_{p,qd+a}$ est inconnue. Cette équation admet une et une seule solution, à condition que les valuations $\lambda_{qd+a,(q-1)d+a}, \dots, \lambda_{a+d,a}$ précédemment calculées soient toutes non nulles.

Comme aux deux chapitres précédents, l'algorithme ne présente donc qu'une difficulté technique : l'organisation correcte du calcul des "termes connus" de l'équation (4.17).

4.4.2 Le détail des calculs.

Soit $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Nous posons

$$h_{x,y} = \sum v(\omega), \quad (4.18)$$

la somme portant sur les chemins de d -Lukasiewicz dont le dernier sommet est (x, y) . Nous notons $h'_{x,y}$ la somme portant sur les mêmes chemins, à l'exception de l'unique chemin maximal, arrivant au point (x, y) , dont il est question au lemme 76. La quantité $h'_{n,a}$ est ainsi égale aux termes connus de l'équation (4.17).

Nous posons enfin

$$\Lambda_{a,q} = \prod_{j=0}^{q-1} \lambda_{(j+1)d+a, jd+a}, \quad (4.19)$$

pour $a \in \{0, \dots, d-1\}$ et $q \in \mathbb{N}$ (ce produit vaut 1 si $q = 0$). C'est un auxiliaire de calcul qui évite de répéter inutilement des multiplications.

Convention. — Nous posons $h_{x,-1} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{N}$. Nous évitons ainsi les "effets de bord" désagréables dans les calculs à venir.

Initialisation (étape $(1, 0)$). On a évidemment

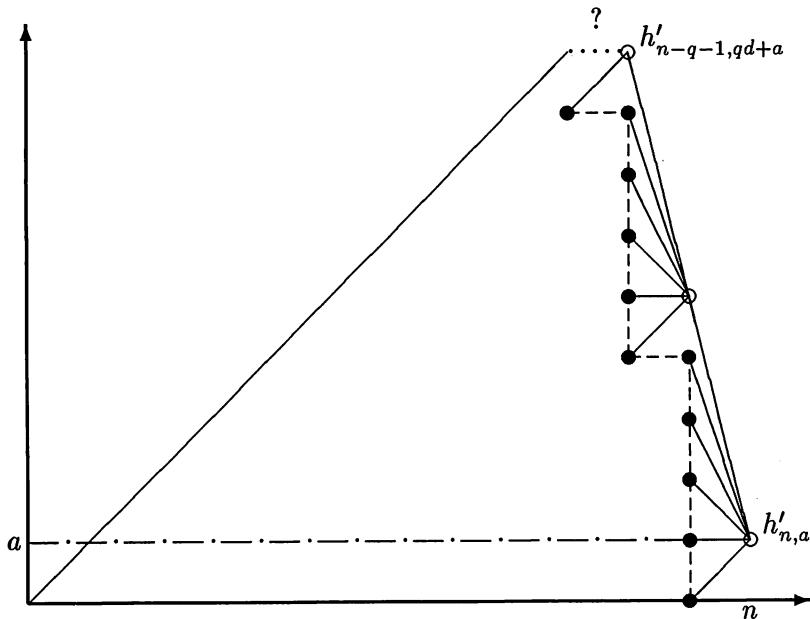
$$\lambda_{0,0} = c_1^0.$$

Nous initialisons ensuite la valeur de $h_{1,0}$ à $\lambda_{0,0}$ et celle de $\Lambda_{0,0}$ à 1.

Étape (n, a) . Les nombres p et q conservent au cours de cette étape les valeurs données par (4.15) et (4.16). En particulier, ils vérifient la relation $p+q+1 = n$, qu'on utilise librement.

Nous supposons connus

- les scalaires $h_{n-q-1,l}$ pour $qd+a-1 \leq l \leq p-1$,

Figure 4.5: le calcul de $\lambda_{p,qd+a}$ lorsque $n - a \equiv 1 \pmod{d+1}$.

- les scalaires $h_{n-i-1,l}$ pour $0 \leq i \leq q-1$ et, à i fixé, pour $id+a-1 \leq l \leq (i+1)d+a$,
- le scalaire $\Lambda_{a,q}$, qui est de plus supposé non nul.

Ces quantités codent des sommes de valuations de chemins dont les extrémités sont réparties sur une ligne brisée en forme d'escalier : les marches de cet escalier sont¹ de largeur 1 et ses contremarches sont toutes de hauteur d . Un tel escalier est indiqué en pointillé aux figures 4.5 et 4.6. Un point noir signale sur ces mêmes figures les extrémités des chemins que nous venons de mentionner. Enfin, le point d'interrogation signale la place du pas portant la valuation inconnue, que nous avons appelé *pas central* au lemme 76.

L'étape (n, a) se déroule ainsi.

1. Calculer $h'_{n,a}$ grâce aux instructions suivantes.

(a) Calculer

$$h'_{n-q,qd+a} = \sum_{j=0}^{p-1-qd-a} \lambda_{qd+a+j,qd+a} h_{n-q-1,qd+a+j} + h_{n-q-1,qd+a-1} .$$

¹ à l'exception éventuelle de la plus haute et de la plus basse, dont la hauteur peut être moindre.

Lorsque $p - 1 - qd - a < 0$, seul le dernier terme de la somme ci-dessus est pertinent. A l'aide des valeurs de p et q , on peut vérifier que cette situation se produit si, et seulement si, $n - a \equiv 1 \pmod{d+1}$. Une illustration en est donnée à la figure 4.5.

- (b) Pour $i = q - 1, \dots, 0$ dans cet ordre, calculer

$$\begin{aligned} h'_{n-i,id+a} &= \lambda_{(i+1)d+a,id+a} h'_{n-i,(i+1)d+a} \\ &+ \sum_{j=0}^{d-1} \lambda_{id+a+j,id+a} h_{n-i-1,id+a+j} + h_{n-i-1,id+a-1}. \end{aligned}$$

Remarquons que q peut être nul, au début de l'algorithme, lorsque $n \leq 2d$. Les calculs ci-dessus n'ont alors pas lieu d'être. D'autre part, lorsque i et a sont nuls, le dernier terme de la somme ci-dessus est $h_{n-1,-1}$; d'après la convention de la page 149, cette quantité vaut zéro, assurant ainsi la validité de cette sous-étape dans tous les cas.

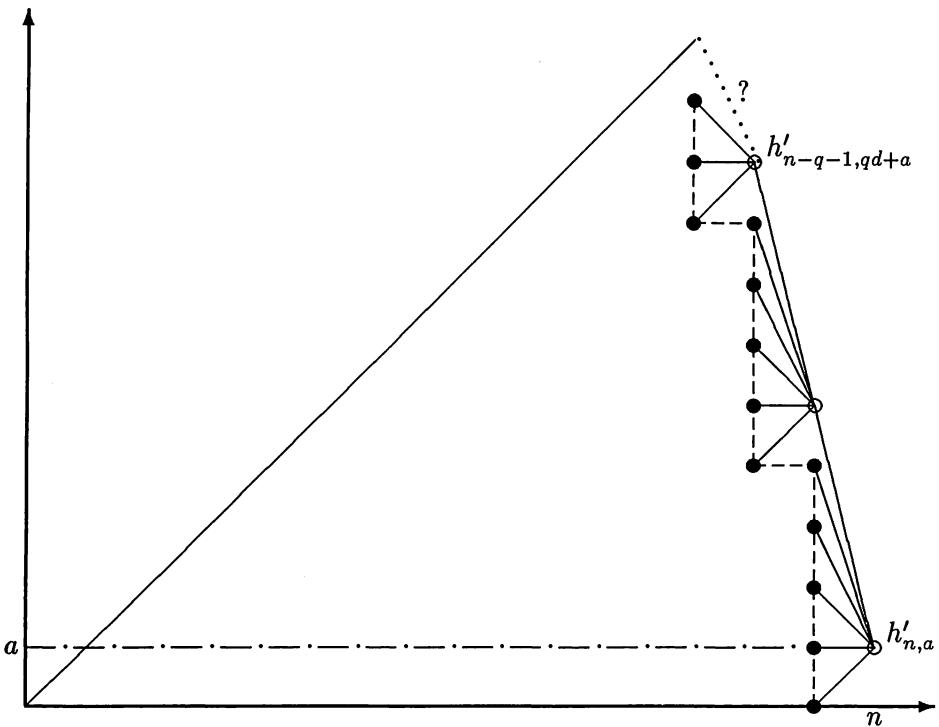


Figure 4.6: le calcul de $\lambda_{p,qd+a}$ lorsque $n - a \not\equiv 1 \pmod{d+1}$.

2. La valuation $\lambda_{p,qd+a}$ est donnée par l'équation (4.17) qui se réécrit

$$\lambda_{p,qd+a} = \frac{c_n^a - h'_{n,a}}{\Lambda_{a,q}},$$

car $\Lambda_{a,q}$ est différent de 0 par hypothèse.

3. Mettre ensuite à jour les sommes $h_{x,y}$ nécessaires à la poursuite de l'algorithme. Pour $i = q, \dots, 0$ et dans cet ordre, calculer

$$h_{n-i,id+a} = h'_{n-i,id+a} + \lambda_{p,qd+a} \prod_{j=i}^{q-1} \lambda_{(j+1)d+a,jd+a}.$$

Dans le cas où $n - a \equiv 1 \pmod{d+1}$, et dans ce cas seulement, tester si $\lambda_{p,qd+a} = 0$.

- (a) Si la réponse est non, poser

$$\Lambda_{a,q+1} = \lambda_{p,qd+a} \Lambda_{a,q}$$

et passer à l'étape suivante, qui est l'étape $(n, a+1)$ ou bien l'étape $(n+1, 0)$.

- (b) Dans le cas contraire, l'algorithme s'arrête.

Le lecteur est invité à se reporter aux figures 4.5 et 4.6 pour se convaincre de la validité de toutes les égalités écrites ci-dessus.

Les conditions d'arrêt de l'algorithme peuvent être décrites en termes de nullité de déterminants de type Hankel, composés des coefficients c_n^a . Ces conditions sont données par Van Iseghem [80, 83]. Nous n'avons pas abordé le problème de leur interprétation combinatoire, à la manière des déterminants de P-chemins de la section 2.4, au deuxième chapitre.

Remarque. — L'algorithme que nous venons d'exposer est destiné au calcul des valuations $\lambda_{l,k}$ connaissant les coefficients c_n^a , mais il peut clairement être utilisé *en sens inverse* : les valuations $\lambda_{l,k}$ étant connues, il permet de calculer les coefficients c_n^a .

4.5 Les propriétés d'orthogonalité des polynômes de pavage.

Une suite de polynômes $(Q_n)_{n \geq 0}$ à coefficients dans K est dite échelonnée en degré si le degré de Q_n est n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans le cas où $d = 1$, la proposition 72 nous dit que la suite $(P_k)_{k \geq 0}$ des polynômes de pavage définis par (4.6) vérifie la relation de récurrence à trois termes suivante :

$$P_{k+1}(t) = (t - b_k)P_k(t) - \lambda_k P_{k-1}(t).$$

Il est alors bien connu que les polynômes sont formellement orthogonaux par rapport à la forme linéaire Γ^0 : voir par exemple Viennot [84] pour une preuve combinatoire.

Supposons maintenant que $d \geq 2$. L'égalité $\Gamma^0(tP_2(t)) = \lambda_{2,0}$ résulte des valeurs des moments μ_n données à la page 140 et de la définition 4.6 des polynômes de pavage. Il s'ensuit que la famille $(P_k)_{k \geq 0}$ n'est pas, en général, orthogonale par rapport à la forme Γ^0 .

Cependant, certaines propriétés subsistent. Nous donnons ci-dessous les définitions de la $\frac{1}{d}$ -orthogonalité stricte et de l'orthogonalité de dimension d d'après Maroni et Van Iseghem [67, 68, 82, 83].

Définition 77. — Soit $(Q_n)_{n \geq 0}$ une suite de polynômes échelonnés en degré.

1) Soit H une forme linéaire sur $K[t]$. La suite $(Q_n)_{n \geq 0}$ est strictement $\frac{1}{d}$ -orthogonale par rapport à la forme H si elle satisfait les conditions suivantes

$$H(Q_n(t)Q_k(t)) = 0 \quad \text{si } k > nd, \quad (4.20)$$

$$H(Q_n(t)Q_k(t)) \neq 0 \quad \text{si } k = nd. \quad (4.21)$$

2) Soit $G = (G^0, \dots, G^{d-1})$ un vecteur constitué de d formes linéaires sur $K[t]$. La suite $(Q_n)_{n \geq 0}$ est orthogonale de dimension d par rapport à G si les conditions suivantes sont satisfaites pour tout $a \in \{0, \dots, d-1\}$:

$$G^a(Q_n(t)Q_k(t)) = 0 \quad \text{si } k > nd + a, \quad (4.22)$$

$$G^a(Q_n(t)Q_k(t)) \neq 0 \quad \text{si } k = nd + a. \quad (4.23)$$

Remarque. — Une suite de polynômes orthogonale de dimension d par rapport au vecteur (G^0, \dots, G^{d-1}) est strictement $\frac{1}{d}$ -orthogonale par rapport à la forme G^0 .

Nous allons démontrer que la suite des polynômes de pavage de d -Lukasiewicz est orthogonale de dimension d dans le cas générique. Au lieu de la quantité $\Gamma^a(P_n(t)P_k(t))$, nous allons interpréter combinatoirement $\Gamma^a(t^n P_k(t))$, car les calculs sont plus simples. Pour conclure, nous mettons à profit le caractère échelonné en degré de la suite P_k .

Proposition 78. — Soit Γ^a la forme linéaire sur $K[t]$ de moments μ_n^a et soit P_k le polynôme de pavage de $\{0, \dots, k-1\}$: cf. les définitions 70 et (4.6). Alors, pour tout nombre entier $a \in \{0, \dots, d-1\}$, nous avons l'égalité

$$\Gamma^a(t^n P_k(t)) = \sum_{\omega} v(\omega), \quad (4.24)$$

où la somme porte sur les chemins de d -Lukasiewicz de longueur $n+k$, arrivant au niveau a , et dont les k premiers pas sont montants.

Démonstration : la définition 70 et la formule (4.6) conduisent *a priori* à l'expression

$$\begin{aligned}\Gamma^a(t^n P_k(t)) &= \sum_{\substack{\alpha \text{ pavage} \\ \text{de } \{0, \dots, k-1\}}} w(\alpha) \Gamma^a \left(t^{n+\text{lib}(\alpha)} \right), \\ &= \sum_{(\alpha, \omega) \in E_{k,n}^a} w(\alpha) v(\omega),\end{aligned}$$

où $E_{k,n}^a$ désigne l'ensemble des couples constitués d'un pavage α de $\{0, \dots, k-1\}$ et d'un chemin ω de d -Lukasiewicz, de longueur $n + \text{lib}(\alpha)$ et arrivant au niveau a . Rappelons que $\text{lib}(\alpha)$ est le nombre d'éléments de $\{0, \dots, k-1\}$ n'appartenant à aucune pièce de α .

Nous désignons par $F_{k,n}^a$ le sous-ensemble de $E_{k,n}^a$ des couples (α, ω) tels que α soit le pavage vide et tels que les k premiers pas de ω soient montants. Il s'agit de montrer que le domaine de la somme (4.25) se réduit à l'ensemble $F_{k,n}^a$.

Nous allons construire sur l'ensemble $E_{k,n}^a \setminus F_{k,n}^a$ une involution Ψ satisfaisant à la condition suivante : si $\Psi(\alpha, \omega) = (\alpha', \omega')$, alors

$$w(\alpha)v(\omega) = -w(\alpha')v(\omega'). \quad (4.25)$$

Il est clair que l'existence d'une telle involution prouve la proposition 78. La condition (4.25) est dite *condition des signes*.

Nous définissons pour cela deux applications : c (pour *cycle*) et p (pour *pavage*) de $E_{k,n}^a$ dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ par :

- $c(\alpha, \omega) = \min\{i, 0 \leq i \leq k-1, \text{le } (i+1)^{\text{ième}} \text{ pas de } \omega \text{ n'est pas un pas montant}\}.$
- $p(\alpha, \omega) = \min\{i, 0 \leq i \leq k-1, \text{le point } i \text{ appartient à une pièce de } \alpha\}.$

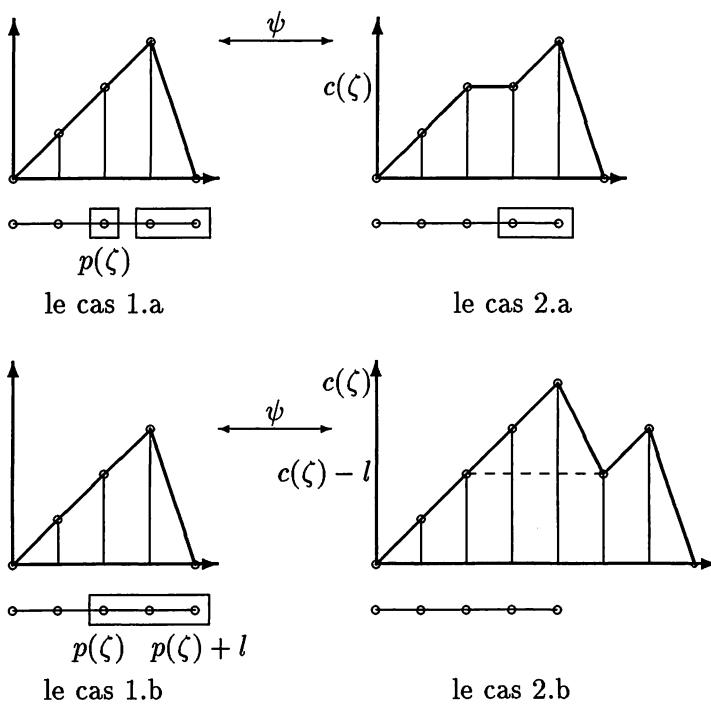
Nous remarquons que $F_{k,n}^a$ est l'ensemble des couples $(\alpha, \omega) \in E_{k,n}^a$ qui vérifient $c(\alpha, \omega) = p(\alpha, \omega) = \infty$. La figure 4.7 illustre la démonstration qui va suivre.

Soit $\zeta = (\alpha, \omega) \in E_{k,n}^a \setminus F_{k,n}^a$; l'un des deux cas suivants se produit nécessairement.

1. Premier cas : $p(\zeta) \leq c(\zeta)$. Puisque ζ n'est pas dans $F_{k,n}^a$, la quantité $p(\zeta)$ est finie. Pour des raisons pédagogiques, nous distinguons deux sous-cas.

- (a) La pièce de α à laquelle $p(\zeta)$ appartient est le monomino $\{p(\zeta)\}$. Nous définissons alors $\Psi(\zeta) = \zeta' = (\alpha', \omega')$ en transformant ce monomino en un pas horizontal, à la suite des $p(\zeta)$ premiers pas montants de ω .
- (b) La pièce de α à laquelle $p(\zeta)$ appartient est égale à $\{p(\zeta), \dots, p(\zeta)+l\}$, avec $l \geq 1$. Nous définissons alors $\Psi(\zeta) = \zeta' = (\alpha', \omega')$ en transformant cette pièce en un chevron

composé de l pas montants

Figure 4.7: l'involution Ψ .

suivis d'un pas descendant du niveau $p(\zeta) + l$ au niveau $p(\zeta)$, le tout étant inséré à la suite des $p(\zeta)$ premiers pas montants de ω .

2. Second cas : $c(\zeta) < p(\zeta)$. Nous distinguons là encore deux sous-cas.

- (a) Le $(c(\zeta)+1)^{\text{ième}}$ pas de ω est horizontal. Nous définissons alors $\Psi(\zeta) = \zeta'$ en ôtant ce pas horizontal à ω et en l'ajoutant sous la forme du monomino $\{c(\zeta)\}$ à α .
- (b) Le $(c(\zeta)+1)^{\text{ième}}$ pas de ω est un pas descendant du niveau $c(\zeta)$ au niveau $c(\zeta) - l$, avec $l \geq 1$. Nous définissons alors $\Psi(\zeta) = \zeta' = (\alpha', \omega')$ en ôtant à ω le chevron constitué de ce pas descendant et des l pas montants qui le précèdent, et en l'ajoutant à α sous la forme de la pièce $\{c(\zeta) - l, \dots, c(\zeta)\}$.

On vérifie aisément que Ψ est une involution qui satisfait la condition des signes (4.25). □

Corollaire 79.— 1) Pour tout nombre entier $a \in \{0, \dots, d-1\}$, nous avons

$$\Gamma^a(P_n(t)P_k(t)) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > nd + a; \\ \lambda_{nd+a, (n-1)d+a} \dots \lambda_{2d+a, d+a} \lambda_{d+a, a} & \text{si } k = nd + a, \end{cases} \quad (4.26)$$

où l'on convient que le produit ci-dessus vaut 1 lorsque $n = 0$.

2) La suite $(P_k)_{k \geq 0}$ est orthogonale de dimension d par rapport à $\Gamma = (\Gamma^0, \dots, \Gamma^{d-1})$ si, et seulement si, les valuations vérifient

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lambda_{k+d, k} \neq 0. \quad (4.27)$$

Démonstration : 1) les pas descendants des chemins de d -Lukasiewicz étant de hauteur inférieure ou égale à d , l'extrémité d'un chemin de longueur $n+k$ et commençant par k pas montants possède une ordonnée supérieure ou égale à $k - nd$. L'ensemble $F_{k,n}^a$ défini à la page 154 est donc vide si $k > nd + a$.

En revanche, lorsque $k = nd + a$, il existe exactement un chemin de d -Lukasiewicz dans cet ensemble : il est formé de k pas montants suivis de n pas descendants de hauteur d , allant successivement des niveaux $id + a$ à $(i-1)d + a$ pour $i = d, \dots, 1$. La valuation de ce chemin est $\prod i = 1^n \lambda_{id+a, (i-1)d+a}$.

Puisque le polynôme de pavage P_k est de degré k pour tout entier k , les conditions (4.22) sont équivalentes aux conditions analogues dans lesquelles on a substitué t^n à $P_n(t)$. De plus, $\Gamma^a(P_n(t)P_{nd+a}(t)) = \Gamma^a(t^n P_{nd+a}(t))$ car les polynômes de pavages sont unitaires. La formule (4.26) s'en déduit.

2) Cela résulte immédiatement de la définition 77 et de la formule (4.26). □

Remarques. — 1) Le corollaire 79 prouve que la famille $(P_k)_{k \geq 0}$ est strictement $\frac{1}{d}$ -orthogonale par rapport à la forme linéaire Γ^0 .

2) La formule (4.24) appliquée avec $n = 0$ prouve que

$$\Gamma^a(P_k(t)) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > a ; \\ 1 & \text{si } k = a . \end{cases} \quad (4.28)$$

D'autre part, la définition même des moments des formes linéaires Γ^a montrent que $\Gamma^a(t^k) = 0$ si $k < a$ (il n'existe pas de chemin de chemin de d -Lukasiewicz de longueur k arrivant au niveau a si $k < a$). Compte tenu de ce que les polynômes P_k sont échelonnés en degré, nous avons alors $\Gamma^a(P_k) = 0$ si $k < a$ et, finalement :

$$\forall a \in \{0, \dots, d-1\}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \Gamma^a(P_k(t)) = \delta_{k,a} .$$

Ceci montre que $\Gamma^0, \dots, \Gamma^{d-1}$ sont les premiers éléments de la base duale de $(P_k)_{k \geq 0}$, considérée comme base de l'espace vectoriel $K[t]$.

2) Lorsqu'une suite de polynômes est orthogonale — au sens usuel — par rapport à une forme linéaire ℓ , l'ensemble des formes pour lesquelles cette suite de polynômes est orthogonale est la droite privée de l'origine $\{\lambda\ell \mid \lambda \in K^*\}$. La condition de normalisation $\Gamma^0(P_0) = 1$ suffit alors à déterminer ℓ .

Cherchons maintenant, la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ et le vecteur $\Gamma = (\Gamma^0, \dots, \Gamma^{d-1})$ étant fixés comme ci-dessus avec $\lambda_{k+d,k} \neq 0$ pour tout k , l'ensemble des vecteurs $G = (G^0, \dots, G^{d-1})$ par rapport auxquels la suite $(P_k)_{k \geq 0}$ est orthogonale de dimension d .

Notons pour cela $K_{a-1}[t] \oplus V_a$ la décomposition en somme directe de $K[t]$ dont les facteurs sont le sous-espace vectoriel des polynômes de degré (*resp.* de valuation) inférieur ou égal à $a-1$ (*resp.* supérieure ou égale à a). Lorsque $a \geq 1$, les égalités (4.22) et (4.23) déterminent, à la condition de normalisation $G^a(P_a) = 1$ près, la forme G^a sur le facteur V_a .

En revanche, la restriction de G^a sur $K_{a-1}[t]$ est quelconque. Nous en déduisons que, pour tout $a \in \{0, \dots, d-1\}$, il existe une forme u^a nulle sur V_a et un scalaire non nul β^a tels que

$$G^a = u^a + \beta^a \Gamma^a .$$

Réiproquement, tout vecteur G constitué de formes linéaires comme ci-dessus convient. L'ensemble cherché forme donc un sous-espace vectoriel de dimension $\binom{d+1}{2}$ de $(\mathcal{L}(K[t], K))^d$, privé de d hyperplans (car les scalaires β^a ne sont pas nuls).

Nous pouvons retrouver aussi, grâce à ce modèle combinatoire, une généralisation du théorème de Favart et Shohat sur les polynômes orthogonaux. Il s'agit de l'implication (i) \implies (ii) du corollaire ci-dessous, établie par Maroni dans [68].

Corollaire 80.— Soit $(Q_n)_{n \geq 0}$ une suite de polynômes unitaires et échelonnés en degré. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) La suite $(Q_n)_{n \geq 0}$ satisfait une relation de récurrence linéaire à $d + 2$ termes :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad Q_{k+d+1}(t) = (t - b_{k+d})Q_{k+d}(t) - \sum_{i=1}^d \lambda_{k+d, k+d-i} Q_{k+d-i}(t) \quad (4.29)$$

telle que les coefficients $\lambda_{k+d, k}$ pour $k \in \mathbb{N}$ soient tous non nuls.

(ii) La suite $(Q_n)_{n \geq 0}$ est orthogonale de dimension d .

Démonstration : la condition (i) implique la condition (ii). Il suffit de prendre les formes linéaires Γ^a dont les moments sont les sommes de valuations de chemins de d -Lukasiewicz donnés à la définition 70 et d'appliquer le corollaire 79. Cette démonstration est nouvelle et constructive, en ce sens que les moments des formes Γ^a peuvent être calculés grâce à l'algorithme de la section précédente : voir la remarque de la page 152.

La condition (ii) implique la condition (i) : cette partie est purement calculatoire. Nous nous contentons d'indiquer la preuve. Notons $G = (G^0, \dots, G^{d-1})$ un vecteur par rapport auquel la suite $(Q_n)_{n \geq 0}$ est orthogonale de dimension d . Puisque les polynômes sont échelonnés en degré, et unitaires, il existe des coefficients $\lambda_{n,k} \in K$ pour $0 \leq k \leq n$ tels que la relation \mathcal{R}_n

$$\mathcal{R}_n \quad : \quad Q_{n+d+1}(t) = tQ_{n+d}(t) - \sum_{i=0}^{n+d} \lambda_{n+d, n+d-i} Q_{n+d-i}(t), \quad (4.30)$$

soit vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par commodité, nous n'avons pas distingué, dans cette relation, les $\lambda_{n,n}$ des autres coefficients).

Il s'agit maintenant de démontrer que les relations \mathcal{R}_n sont de longueur exactement $d + 2$, c'est-à-dire que les coefficients $\lambda_{n,k}$ sont nuls pour $n > k + d$, et que les $\lambda_{n+d,n}$ sont non nuls. Cela se fait “par paquets”, en appliquant simplement les formes linéaires G^0, \dots, G^{d-1} aux relations déduites de \mathcal{R}_n après multiplication par t^j , dans un ordre et pour des entiers j et n bien choisis. Les paquets en question dépendent du quotient et du reste de la division de n par d .

□

Kim [56] a récemment donné une interprétation bijective des *polynômes biorthogonaux* à l'aide de certains chemins dans le plan discret. La biorthogonalité, dont la définition fait intervenir un polynôme de degré d , est une notion différente de l'orthogonalité de dimension d , bien que toutes deux généralisent l'orthogonalité formelle par rapport à une forme linéaire.

Notre travail sur les polynômes vectoriellement orthogonaux s'inscrit donc dans un mouvement d'idées général, visant à construire une théorie combinatoire

des propriétés d'orthogonalité des polynômes [84]. On peut maintenant poser le problème de définir et d'étudier des *familles spéciales* de polynômes orthogonaux de dimension d (ou biorthogonaux), comme cela a été fait depuis plusieurs années pour les polynômes orthogonaux usuels : voir par exemple l'article de synthèse de Foata [39] et les références bibliographiques qui s'y trouvent.

Chapitre 5

Étude des C-fractions

Dans ce chapitre, K est un corps commutatif, dont les éléments seront appelés les scalaires.

5.1 Introduction.

Ce chapitre est consacré à une étude combinatoire des *C-fractions*. Une C-fraction est définie par une suite $a = (a_k)_{k \geq 1}$ de nombres entiers supérieurs ou égaux à 1 et une suite de scalaires $\lambda = (\lambda_k)_{k \geq 1}$:

$$C(t) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{\lambda_1 t^{a_1}}{1 - \cfrac{\lambda_2 t^{a_2}}{\dots \cfrac{\lambda_k t^{a_k}}{1 - \dots}}}} \dots \quad (5.1)$$

Une C-fraction est dite *finie* si l'un des scalaires λ_k est nul. Si le premier d'entre eux qui vaut 0 est λ_{l+1} , nous écrivons la C-fraction (5.1) de cette manière :

$$\cfrac{1}{1 - \cfrac{\lambda_1 t^{a_1}}{1 - \cfrac{\lambda_2 t^{a_2}}{\dots \cfrac{\lambda_{l-1} t^{a_{l-1}}}{1 - \lambda_l t^{a_l}}}}} \dots$$

De telles fractions continues apparaissent naturellement lorsque l'on cherche à pallier l'impossibilité de développer toutes les séries formelles en fraction de Stieltjes. La section 5.2 expose un modèle combinatoire des C-fractions, basé sur des chemins dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ appelés *C-chemins*.

Nous étudions à la section 5.3 les réduites des C-fractions. On sait qu'elles ne sont pas nécessairement des approximants de Padé de la série formelle correspondante. Frank [43] s'est intéressé au cas le plus favorable, dans lequel toutes ces réduites sont des approximants de Padé. Il a donné une condition suffisante pour que cela se produise, étudiée aussi par Wall [90].

Nous présentons une autre condition suffisante et étudions par ailleurs la situation inverse : le cas où aucune réduite d'une C-fraction — sauf la première — n'est un approximant de Padé de la série formelle correspondante. Nous décrivons une famille de telles C-fractions et étudions le *cas le pire*, celui où

l'ordre de l'approximation réalisée par une réduite est la plus petite possible par rapport à la somme des degrés du numérateur et du dénominateur. Nous prouvons que le quotient de ces deux nombres est au pire équivalent à $\frac{1}{2}$, lorsque l'indice de la réduite tend vers l'infini.

Nous différons jusqu'à la section 5.4 une preuve combinatoire de l'existence et de l'unicité du développement en C-fraction. La preuve découle en fait d'un algorithme, qui calcule ce développement. Basé sur la géométrie des C-chemins, il est nouveau à notre connaissance. Trois algorithmes analogues ont déjà été décrits dans les chapitres 2, 3 et 4 de cette thèse.

Compte tenu de ce qu'une fraction rationnelle admet un développement unique et *fini* en C-fraction, nous posons, à la section 5.5, la question suivante : un algorithme de développement C-fraction est-il efficace pour détecter, connaissant les premiers termes d'une série formelle, si cette dernière est rationnelle ? Nous étudions pour ce faire la *C-longueur maximale* d'une fraction rationnelle en fonction des degrés de son numérateur et de son dénominateur (la C-longueur de $F \in K(t)$ est le nombre de coefficients de la série de Taylor de F qui sont nécessaires à la construction de son développement en C-fraction).

Nous démontrons que cette fonction se comporte parfois de manière quadratique par rapport aux degrés en question, ce qui nous permet de donner une réponse négative à la question posée.

Enfin, nous donnons à la section 5.6 trois exemples de développements en C-fraction. Les deux premiers constituent des rappels ; ils sont relatifs à des q -analogues des nombres de Catalan. La série génératrice d'un de ces q -analogues se développe en une C-fraction étudiée par Ramanujan [3, 70, 88]. Le troisième exemple est, à notre connaissance, inédit : il s'agit du développement en C-fraction de la série $\sum_{n \geq 1} (t^{n^2-1} - t^{n^2})$, proche d'une fonction Thêta.

5.2 Le modèle combinatoire.

5.2.1 Les C-chemins.

Dans ce chapitre le terme *chemin* désigne une suite finie $\omega = (s_0, \dots, s_n)$ de points de \mathbb{N}^2 . L'*origine* du chemin (s_0, \dots, s_n) est le sommet s_0 , son *arrivée* est le sommet s_n . Ses *pas* sont les couples (s_i, s_{i+1}) pour $0 \leq i \leq n-1$. Le *niveau* du pas (s_i, s_{i+1}) est l'ordonnée de son premier sommet, c'est-à-dire y_i si le point s_i s'écrit (x_i, y_i) .

Définition 81. — Soit $a = (a_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres entiers et soit $s(a) = (s_k(a))_{k \geq 0}$ la suite des sommes partielles de a , données par

$$\begin{aligned} s_0(a) &= 0, \\ s_n(a) &= a_1 + \cdots + a_n \quad \text{pour } n \geq 1. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Un C-chemin associé à la suite a est un chemin sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vérifiant les trois propriétés suivantes.

1. Son origine est $(0, 0)$.
2. Son arrivée est de la forme $(2n, 0)$ pour $n \geq 0$.
3. Ses pas sont de deux sortes :

- pas montants $((x, h), (x+1, h+1))$ d'un niveau $h \geq 0$ au niveau $h+1$;
- pas descendants $((x, s_k(a)), (x + a_k, s_{k-1}(a)))$ d'un niveau $s_k(a)$ au niveau $s_{k-1}(a)$, pour un nombre entier $k \geq 1$.

L'entier $2n$ de la définition ci-dessus est alors la *longueur* du C-chemin associé à la suite a ; nous la notons $|\omega|$. La longueur d'un C-chemin est donc toujours paire. En général, nous omettons de préciser la suite a et parlons simplement de C-chemins. De même, lorsqu'aucune ambiguïté n'est possible, nous notons $s = (s_k)_{k \geq 1}$ la suite des sommes partielles définie par (5.2).

Un exemple de C-chemin associé à la suite $a = (2, 1, 3, \dots)$ est donné à la figure 5.1. La figure ne nous renseigne pas davantage sur la suite a , car un seul chemin ne suffit pas à la décrire.

Le lecteur ayant lu la section 1.2 du premier chapitre peut vérifier que les C-chemins associés à la suite a sont les images, par l'application de déploiement \mathcal{DC} , des chemins sur \mathbb{N} dont l'ensemble des *transitions* est

$$\mathcal{T} = \{(s_k(a), s_{k-1}(a)) \mid k \geq 1\}.$$

Le modèle combinatoire des C-chemins s'insère donc dans le cadre général de l'interprétation combinatoire des Z-fractions multicontinues.

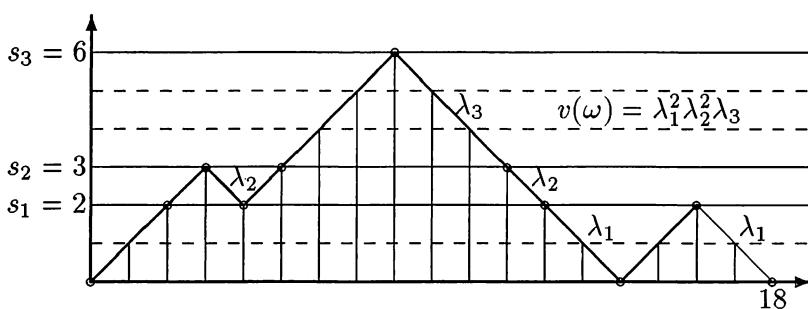


Figure 5.1: un C-chemin et sa valuation.

Soit $\lambda = (\lambda_k)_{k \geq 1}$ une suite de scalaires. Nous définissons la valuation d'un pas ξ d'un C-chemin par:

$$v(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \text{ est un pas montant;} \\ \lambda_k & \text{si } \xi \text{ est le pas descendant } ((x, s_k), (x + a_k, s_{k-1})). \end{cases} \quad (5.3)$$

La valuation d'un C-chemin $\omega = (s_0, \dots, s_p)$, notée aussi par la lettre v , est le produit des valuations de ses pas :

$$v(\omega) = \prod_{i=0}^{p-1} v(s_i, s_{i+1}). \quad (5.4)$$

Cette quantité vaut 1, par convention, lorsque le chemin est réduit à un seul sommet. La série génératrice des C-chemins valués est

$$f(a, \lambda; t) = \sum v(\omega) t^{\frac{|\omega|}{2}}, \quad (5.5)$$

qu'on abrège souvent en $f(t)$. La figure 5.1 montre un C-chemin de longueur 18, de valuation $\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3$. Nous définissons aussi la série génératrice de C-chemins *bornés au niveau s_k* par

$$f_k(a, \lambda; t) = \sum v(\omega) t^{\frac{|\omega|}{2}}, \quad (5.6)$$

où la somme porte sur les C-chemins dont les niveaux (ordonnées) des sommets sont inférieurs ou égaux à s_k . Cette série est souvent notée $f_k(t)$.

Remarque. — Nous aurions pu définir des séries analogues pour les C-chemins bornés au niveau h , pour tous les entiers $h \geq 0$. Mais la définition 81 rend cela inutile : un C-chemin dépassant strictement le niveau s_k atteint nécessairement le niveau s_{k+1} , au vu des contraintes imposées sur les pas descendants. Les notations de ce chapitre sont donc légèrement différentes de celles adoptées au premier chapitre, au cours de l'étude des fractions multicontinues les plus générales, qui ne présentaient pas les contraintes susdites.

Proposition 82. — Soit $a = (a_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres entiers et soit $\lambda = (\lambda_k)_{k \geq 1}$ une suite de scalaires.

1) La série génératrice $f_k(t)$ définie par (5.6) est une fraction rationnelle et vaut

$$f_k(t) = \frac{1}{1 -} \frac{\lambda_1 t^{a_1}}{1 -} \cdots \frac{\lambda_{k-1} t^{a_{k-1}}}{1 - \lambda_k t^{a_k}}. \quad (5.7)$$

2) L'approximation suivante est vérifiée au voisinage de $t = 0$:

$$f(t) - f_k(t) = o(t^{s_{k+1}-1}), \quad (5.8)$$

c'est-à-dire que les séries f et f_k coïcient jusqu'à la puissance $s_{k+1}-1$. Plus précisément, nous avons $f(t) - f_k(t) = \lambda_{k+1} \lambda_k \dots \lambda_1 t^{s_{k+1}} + \dots$ et, par conséquent, l'approximation (5.8) est optimale si et seulement si les λ_i pour $1 \leq i \leq k+1$ sont non nuls.

3) La série génératrice $f(t)$ définie par (5.6) admet le développement en C-fraction suivant :

$$C(t) = \frac{1}{1 -} \frac{\lambda_1 t^{a_1}}{1 -} \cdots \frac{\lambda_k t^{a_k}}{1 -} \cdots. \quad (5.9)$$

Démonstration : 1) si nous spécialisons à 0 les valuations nécessaires dans l'équation fonctionnelle (1.31), nous obtenons

$$f(t) = \frac{1}{1 - \lambda_1 t^{a_1} \delta f(t)}.$$

Le résultat souhaité s'obtient en itérant cette équation et en constatant qu'il est équivalent de borner les C-chemins au niveau s_k ou de substituer λ_{k+1} par 0.

2) Il existe un unique C-chemin de longueur $2s_{k+1}$, composé de s_{k+1} pas montants suivis de $k + 1$ pas descendants, respectivement valués par $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_1$. Par suite, nous avons :

$$f(t) - f_k(t) = \lambda_{k+1} \lambda_k \dots \lambda_1 t^{s_{k+1}} + \dots$$

L'approximation (5.8) en résulte, ainsi que l'étude de son caractère optimal.

3) L'approximation (5.8) prouve la convergence formelle de la suite des $f_k(t)$ vers la série $f(t)$. □

Conformément aux dénominations usuelles, la fraction rationnelle f_k donnée par (5.7) est la *réduite d'ordre k* de la fraction continue (5.9). Nous avons pris soin, comme il est préconisé dans la remarque de la page 32, de distinguer la série $f(t)$ de la fraction $C(t)$. Cette précaution se révèle inutile à la suite de la proposition qui vient.

Proposition 83. — Soit f une série de $K[[t]]$ dont le terme constant vaut 1 qui n'est pas (resp. qui est) une fraction rationnelle.

Il existe alors une unique suite (resp. une unique suite finie) d'entiers strictement positifs $a = (a_k)_{k \geq 0}$ et une unique suite (resp. une unique suite finie) de scalaires non nuls $\lambda = (\lambda_k)_{k \geq 1}$ telles que $f(t) = f(a, \lambda; t)$. Autrement dit, f admet un unique développement en C-fraction et ce développement est fini si, et seulement si, f est une fraction rationnelle.

Démonstration : nous renvoyons le lecteur à la section 5.4 où un algorithme de calcul des suites a et λ est décrit. □

5.2.2 Étude des degrés du numérateur et du dénominateur des réduites.

Ce paragraphe prépare l'étude de la section suivante. Pour vérifier si une réduite f_k donnée par (5.7) est un approximant de Padé de f définie par (5.5), il nous faut comparer l'ordre de l'approximation, à savoir $s_{k+1} - 1$, avec la somme des degrés du numérateur et du dénominateur de f_k . Nous donnons ci-après une interprétation combinatoire de ces deux polynômes.

Définition 84.— Soient $a = (a_k)_{k \geq 1}$ une suite d’entiers strictement positifs et $s = (s_k)_{k \geq 0}$ la suite des sommes partielles définies par (5.2). Soit $\lambda = (\lambda_k)_{k \geq 1}$ une suite de scalaires.

1) Une C-pièce est un ensemble de la forme $\{s_k, \dots, s_{k+1}\}$ pour un nombre entier $k \geq 0$. Un C-pavage est un ensemble fini de C-pièces deux à deux disjointes.

2) La valuation $w(p)$ de la C-pièce $p = \{s_k, \dots, s_{k+1}\}$ est λ_k . La valuation d’un C-pavage α est le produit

$$w(\alpha) = \prod_{p \in \alpha} (-w(p)). \quad (5.10)$$

Soit $k \geq 1$. Le polynôme de pavage de $\{0, \dots, s_k\}$ est la somme

$$P_k(t) = \sum w(\alpha) t^{\text{lib}(\alpha)}, \quad (5.11)$$

qui porte sur les pavages α dont les pièces sont incluses dans $\{0, \dots, s_k\}$, et dans laquelle $\text{lib}(\alpha)$ désigne le nombre de points libres de α , c’est-à-dire le nombre d’éléments de $\{0, \dots, s_k\}$ n’appartenant à aucune pièce de α . On convient que $P_0(t) = 1$

On peut vérifier que la définition 84 des pavages et de leur valuation est conforme aux définitions générales du premier chapitre, section 1.2. En revanche, nous avons adopté des notations différentes pour les polynômes de pavage, pour des raisons analogues à celles exposées dans la remarque de la page 164.

La lettre δ désigne le prolongement aux expressions algébriques de l’application de décalage, qui fait correspondre la suite $(u_{k+1})_{k \geq 1}$ à la suite $(u_k)_{k \geq 1}$. Les polynômes de pavage P_k définis par (5.11) vérifient la relation de récurrence

$$\forall k \geq 2, \quad P_k(t) = t^{a_k} P_{k-1}(t) - \lambda_k P_{k-2}(t), \quad (5.12)$$

ainsi que les conditions initiales $P_0(t) = 1$ et $P_1(t) = t^{a_1} - \lambda_1$ (se reporter par exemple à la figure 4.2 du chapitre précédent pour une idée de démonstration). Cette relation de récurrence “par le haut” se démontre en fait pour les polynômes de pavages généraux, définis au premiers chapitre. Dans le cas particulier des C-pavages, on peut donner une autre relation de récurrence, “par le bas”, car chaque entier n est contenu dans un nombre fini de pièces (et même une seule). Nous avons alors

$$P_k(t) = t^{a_1} \delta P_{k-1}(t) - \lambda_1 \delta^2 P_{k-2}(t), \quad (5.13)$$

où δ a la signification susdite et où les conditions initiales sont les mêmes que précédemment.

Ces deux relations de récurrence permettent, de façon générale, le calcul direct ou rétrograde¹ des réduites de fractions continues : voir par exemple [55]. En particulier, nous avons le résultat suivant.

¹ Forward and backward recurrence algorithms, dans les ouvrages en anglais.

Proposition 85.— La fraction rationnelle $f_k(a, \lambda; t)$ donnée par (5.7), réduite du développement en C-fraction de $f(a, \lambda; t)$ définie par (5.5), s'exprime à l'aide des polynômes de pavages : nous avons

$$f_k(a, \lambda; t) = \frac{\delta P_{k-1}^*(t)}{P_k^*(t)}, \quad (5.14)$$

où la notation $S^*(t)$ désigne le polynôme réciproque $t^n S(t^{-1})$ du polynôme $S(t)$ de degré n .

Démonstration : il suffit de vérifier que le numérateur et le dénominateur satisfont la relation réciproque (au sens des polynômes réciproques) de la relation de récurrence (5.13). On peut aussi donner une démonstration entièrement combinatoire, basée sur un théorème d'inversion dans les monoïdes d'empilement de pièces [86]. C'est la démarche que nous avons adoptée à la proposition 74 du quatrième chapitre pour un problème analogue.

□

Un rapide calcul montre qu'il n'y a pas d'espérance de trouver une formule close pour les degrés de $\delta P_{k-1}^*(t)$ et $P_k^*(t)$ en fonction des a_i . Néanmoins, en nous aidant de la définition 84, nous allons poser ce problème en termes de combinatoire des suites.

Définition 86.— Soit $a = (a_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres entiers supérieurs ou égaux à 1.

Une suite $b = (a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_p}, \dots)$ extraite de a est épanouie² si $n_{p+1} \geq n_p + 2$ pour tout p , c'est-à-dire si elle ne contient pas deux termes consécutifs de la suite a . Lorsque $k \geq 2$, nous posons

$$e_k(a) = \max \left\{ \sum_{x \in b} x \right\}, \quad (5.15)$$

$$e'_k(a) = \max \left\{ \sum_{y \in c} y \right\}, \quad (5.16)$$

où le premier maximum est calculé sur l'ensemble des suites b épanouies extraites de (a_1, a_2, \dots, a_k) alors que le second est calculé sur l'ensemble des suites c épanouies extraites de (a_2, \dots, a_k) .

Ces définitions sont justifiées par le résultat suivant.

Lemme 87.— Le degré du dénominateur P_k^* de la réduite f_{s_k} est inférieur ou égal à $e_k(a)$. Le degré de son numérateur δP_{k-1}^* est inférieur ou égal à $e'_k(a)$. Ces inégalités sont des égalités dans les deux cas suivants, entre autres :

²Nous avons emprunté ce terme à Joseph Esterlé, qui l'utilise dans le cadre géométrique suivant : une partie A de \mathbb{C} est dite épanouie si la distance séparant deux points distincts de A est supérieure ou égale à 2.

1. le cas générique, c'est-à-dire lorsque K est le corps des fractions rationnelles $\mathbb{Q}(\lambda)$;
2. si une seule suite épanouie extraite de (a_1, \dots, a_k) [resp. de (a_2, \dots, a_k)] réalise le maximum pour $e_k(a)$ [resp. pour $e'_k(a)$] et que le produit $\lambda_1 \dots \lambda_k$ est non nul.

Démonstration : d'après la définition du nombre de points libres $\text{lib}(\alpha)$, le degré d'un monôme de P_k^* correspondant à un C-pavage α de $\{0, 1, \dots, s_k\}$ est la somme des longueurs des pièces de α . Deux pièces quelconques d'un pavage étant disjointes, leurs longueurs valent a_l et a_m avec $|l - m| \geq 2$. L'inégalité portant sur le degré de P_k^* en résulte, ainsi que celle portant sur le degré de δP_{k-1}^* , qui correspond aux pavages de $\{a_1, a_1 + 1, \dots, s_k\}$.

Il se peut que plusieurs suites épanouies réalisent le maximum dans les égalités (5.15) et (5.16). Dans ce cas, le coefficient du monôme t^{e_k} ou $t^{e'_k}$ correspondant est un polynôme en les λ_i . Ce polynôme n'est pas nul lorsque les λ_i sont des indéterminées.

Si, au contraire, une seule suite réalise le maximum dans les égalités (5.15) et (5.16), le coefficient du monôme correspondant est un produit de certains scalaires λ_i pour $i \leq k$, et ce produit est non nul par hypothèse. □

5.3 Approximants de Padé et C-fractions.

Nous nous intéressons à la question suivante : les réduites $f_k(t)$ des C-fractions sont-elles des approximants de Padé pour la série formelle $f(t)$? Nous constatons tout d'abord que, si $f(t)$ admet le développement (5.9), elle s'écrit $f(t) = 1 + \lambda_1 t^{a_1} + \dots$. La réduite $f_1(t) = \frac{1}{1 - \lambda_1 t^{a_1}}$ est donc toujours un approximant de Padé de $f(t)$.

Nous définissons tout d'abord un paramètre qui mesure le défaut d'approximation d'une série formelle par une fraction rationnelle.

Définition 88.— Soient une série formelle à coefficients dans K , notée f , et une fraction rationnelle écrite de façon irréductible $R = \frac{P}{Q}$. Notons p et q les degrés respectifs de P et Q . Le défaut de Padé de R par rapport à f est le nombre

$$d(R, f) = \max\{0, p + q - m\}, \quad (5.17)$$

où m est donné par $f(t) - R(t) = ct^{m+1} + \dots$ avec $c \in K \setminus \{0\}$; si $f = R$, on convient que $m = +\infty$.

Dire que la fraction rationnelle R est un approximant de Padé de f , c'est donc dire que son défaut de Padé par rapport à f est nul.

Remarque. — Grâce au lemme 87, le défaut de Padé de la réduite f_{s_k} par rapport à la série f est $\max\{0, e_k + e'_k - (s_{k+1} - 1)\}$ dans le cas générique, ou dans le cas d'unicité des suites épanouies qui réalisent le maximum pour e_k et e'_k (il est toujours vrai que le défaut de Padé est inférieur ou égal à cette valeur).

Les C-fractions les plus simples, obtenues pour la suite a constante égale à 1, sont les fractions de Stieltjes. Nous avons rappelé, au début de ce chapitre, que les réduites $f_k(t)$ des fractions de Stieltjes sont des approximants de Padé de type $\left[\lfloor \frac{k}{2} \rfloor / \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor\right]$ pour tout k . Nous allons maintenant

- déterminer certains cas favorables où, comme pour les fractions de Stieltjes, toutes les réduites d'une C-fraction sont des approximants de Padé;
- montrer qu'il existe a *contrario* des cas où aucune des réduites n'est un approximant de Padé (sauf la première) et étudier le cas le pire, c'est-à-dire celui qui fournit un défaut de Padé le plus grand possible.

Ce programme est réalisé après la démonstration de plusieurs lemmes portant exclusivement sur la combinatoire des suites. Le premier d'entre eux établit des inégalités portant sur $e_k + e'_k$. Les suivants examinent les cas non triviaux d'égalité.

Lemme 89. — 1) Pour tout $k \geq 2$ et toute suite $a = (a_k)_{k \geq 1}$, nous avons

$$s_k \leq e_k + e'_k \leq 2s_k - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor - a_1. \quad (5.18)$$

Nous appelons $m_k = m_k(a) = 2s_k - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor - a_1$ le majorant de (5.18).

2) Les égalités $e_k + e'_k = m_k$ sont réalisées pour tout $k \geq 2$ si, et seulement si, la suite a est constante et égale à 1 à partir du deuxième terme. Dans ce cas, nous avons aussi $s_k = e_k + e'_k$ pour $k \geq 2$.

Démonstration : 1) par définition, nous avons $e_k \geq a_1 + a_3 + \cdots + a_k$ ou $k-1$ et aussi $e'_k \geq a_2 + a_4 + \cdots + a_{k-1}$ ou k . Il suffit d'ajouter ces deux inégalités pour obtenir la première inégalité de (5.18).

Une suite épanouie extraite de $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$ comporte au plus n termes et, par conséquent, nous avons $e_{2n} \leq s_{2n} - n$. De même, une suite épanouie extraite de $(a_1, a_2, \dots, a_{2n+1})$ comporte au plus $n+1$ termes et, par conséquent, nous avons $e_{2n+1} \leq s_{2n+1} - n$.

Une suite épanouie extraite de (a_2, \dots, a_{2n}) comporte au plus n termes et, par conséquent, nous avons $e'_{2n} \leq (s_{2n} - a_1) - (n-1)$. De même, une suite épanouie extraite de (a_2, \dots, a_{2n+1}) comporte au plus n termes et, par conséquent, nous avons $e'_{2n+1} \leq (s_{2n+1} - a_1) - n$.

Nous rassemblons les majorations individuelles de e_k ou e'_k dans la liste suivante :

$$\begin{aligned} e_{2n} &\leq s_{2n} - n, \\ e_{2n+1} &\leq s_{2n+1} - n, \\ e'_{2n} &\leq (s_{2n} - a_1) - (n - 1), \\ e'_{2n+1} &\leq (s_{2n+1} - a_1) - n. \end{aligned} \tag{5.19}$$

La seconde inégalité dans (5.18) résume par une formule plus courte les quatre cas que nous venons d'étudier.

2) Nous allons démontrer par récurrence sur $N \geq 2$ que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) les égalités $a_2 = \dots = a_N = 1$ sont vraies;
- (ii) les égalités $e_k + e'_k = m_k$ sont vraies pour tout $k \in \{2, \dots, N+1\}$.

L'implication (i) \Rightarrow (ii) est établie par un calcul facile.

Démontrons maintenant l'implication réciproque. Supposons que $N = 2$ et que $e_k + e'_k = m_k$ pour $k = 2$ et 3 . La liste (5.19) nous dit que ces égalités sont équivalentes au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \max\{a_1, a_2\} & = & a_1 + a_2 - 1, \\ \max\{a_1 + a_3, a_2\} & = & a_1 + a_2 + a_3 - 1, \\ a_2 & = & (a_1 + a_2 - a_1) - (1 - 1), \\ \max\{a_2, a_3\} & = & (a_1 + a_2 + a_3 - a_1) - 1. \end{array} \right.$$

La troisième égalité n'apporte aucune information. La première nous indique la disjonction suivante.

- Ou bien $a_1 \geq a_2 = 1$ et alors le système est trivialement vrai.
- Ou bien $a_2 > a_1 = 1$ et alors la dernière équation s'écrit $\max\{a_2, a_3\} = a_2 + a_3 - 1$. Puisque $a_2 \geq 2$, c'est donc que $a_2 > a_3$; dans ce cas, a_3 vaut 1. Mais alors la deuxième équation s'écrit $a_2 = a_2 - 1$: c'est impossible.

Nous avons donc prouvé que $a_2 = 1$. Le passage de N à $N+1$ dans la récurrence s'effectue à l'aide d'arguments analogues. La seule différence est la présence d'une suite de "1" entre a_1 et a_{N+1} .

Enfin, il est immédiat de vérifier que, si a est constante et vaut 1 à partir du rang 2, on a $e_k + e'_k = s_k$ pour tout $k \geq 2$. □

Ce lemme nous enseigne la chose suivante : si nous voulons trouver des C-fractions dont la réduite f_k approche le plus mal possible la série formelle associée f , il ne faut pas chercher à rendre systématiquement maximale la quantité $e_k + e'_k$, c'est-à-dire à réaliser pour tout $k \geq 2$ les égalités $e_k + e'_k = m_k$. Il faut plutôt chercher des suites a telles les deux conditions suivantes soient réalisées simultanément :

1. le défaut de Padé de f_k par rapport à f est strictement positif, ou encore, d'après la remarque de la page 169, $e_k + e'_k - (s_{k+1} - 1) > 0$;

2. la quantité $e_k + e'_k$ est proche de m_k .

Le lemme 92 présente la construction d'une telle suite.

Lemme 90. — *Nous supposons que la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ est décroissante au sens large. Alors*

$$e_k = a_1 + a_3 + \cdots + a_k \text{ ou } k-1 ; \quad (5.20)$$

$$e_k = a_2 + a_4 + \cdots + a_{k-1} \text{ ou } k . \quad (5.21)$$

Démonstration : nous prouvons la première égalité (la seconde se prouve de la même façon). Supposons que $x = (a_{n_1}, \dots, a_{n_p})$ soit une suite épanouie extraite de (a_1, \dots, a_k) . Nous allons construire une chaîne

$$x \rightarrow x' \rightarrow x'' \rightarrow \cdots \rightarrow (a_1, a_3, \dots, a_{2p-1})$$

de suites épanouies, extraites de (a_1, \dots, a_k) , dont les sommes des termes vont en croissant.

Nous posons $x' = (a_1, a_{n_2}, \dots, a_{n_p})$, $x'' = (a_1, a_3, a_{n_3}, \dots, a_{n_p}) \dots$: à l'étape i , nous diminuons au maximum l'indice n_i de la suite x de départ pour conserver une suite épanouie. L'éventuelle dernière étape consiste mettre bout à bout les termes de l'avant dernière suite, notée \hat{x} , et les termes de rang impair de la suite initiale x qui figureraient pas encore dans \hat{x} . Il est clair la fonction "sommes des termes" croît le long de la chaîne, et que cela prouve le lemme.

□

Lemme 91. — *Soit $N \geq 2$ un nombre entier. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (i) *Pour tout $n \in \{2, \dots, N\}$, on a $e_k + e'_k = s_k$.*
- (ii) *La suite (a_1, a_2, \dots, a_N) est décroissante au sens large.*

Démonstration : le lemme 90 prouve que (ii) \Rightarrow (i). Nous prouvons l'implication réciproque par récurrence sur N .

Pour toute suite a , nous avons $e_2 = \max\{a_1, a_2\}$ et $e'_2 = a_2$. L'égalité $e_2 + e'_2 = s_2 = a_1 + a_2$ équivaut alors à $a_1 \geq a_2$.

Si l'implication réciproque est vraie pour N et si $N = 2p$ est pair, nous savons déjà que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{2p}$. Alors

$$e_{2p+1} = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2p-1} + a_{2p+1} ,$$

$$e'_{2p+1} = \max\{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2p-2} + a_{2p}, a_2 + a_4 + \cdots + a_{2p-2} + a_{2p+1}\} .$$

Pour établir ces égalités, nous avons raisonné comme au lemme 89 en distinguant deux cas, selon que la sous-suite épanouie de départ contenait ou ne contenait pas le terme a_{2p+1} . L'égalité $e_{2p+1} + e'_{2p+1} = s_{2p+1}$ est, après simplification, équivalente à $\max\{a_{2p}, a_{2p+1}\} = a_{2p}$, c'est-à-dire à $a_{2p} \geq a_{2p+1}$.

Si N est impair, le raisonnement se déroule *mutatis mutandis*.

□

Lemme 92.— Soit $c = (c_k)_{k \geq 1}$ une suite d'entiers strictement positifs telle que $c_1 \geq 3$. Soit a la suite définie par

$$a = (1, c_1, 1, c_2, \dots, 1, c_n, 1, c_{n+1}, 1, \dots). \quad (5.22)$$

Nous rappelons que $m_k(a)$ est le majorant de $e_k(a) + e'_k(a)$ défini par (5.18). Nous avons alors les égalités

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1 \quad e_{2n}(a) + e'_{2n}(a) &= m_{2n}(a), \\ \forall n \geq 1 \quad e_{2n+1}(a) + e'_{2n+1}(a) &= m_{2n+1}(a) - 1. \end{aligned} \quad (5.23)$$

De plus, pour tout entier k , une seule suite épanouie réalise le maximum dans la définition de $e_k(a)$ et de $e'_k(a)$.

Démonstration : la sous-suite des termes de rang pair est la seule suite épanouie extraite de $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$ et de somme maximale. La somme de ses termes est $e_{2n}(a) = \sum_{i=2}^n a_{2i}$. Par ailleurs, $s_{2n}(a) = \sum_{i=2}^n a_{2i} + n$. L'inégalité de la liste (5.19) portant sur $e_{2n}(a)$ est donc une égalité. Le même résultat vaut pour $e'_{2n}(a)$ et la première assertion de (5.23) s'ensuit. Nous remarquons qu'il suffit que $c_1 \geq 2$ pour avoir l'unicité.

Prouvons la seconde inégalité de (5.23) : la sous-suite des termes de rang pair est la seule suite épanouie extraite de $(a_1, a_2, \dots, a_{2n}, a_{2n+1})$ et de somme maximale (ici, le fait que $c_1 \geq 3$ est essentiel pour l'unicité). La somme des ses termes est $e_{2n+1}(a) = \sum_{i=2}^{n+1} a_{2i}$. Par ailleurs, $s_{2n+1}(a) = \sum_{i=2}^n a_{2i} + n + 1$. Contrairement au cas précédent, l'inégalité de la liste (5.19) portant sur $e_{2n}(a)$ est stricte puisqu'on a

$$e_{2n+1}(a) = s_{2n+1}(a) - n - 1.$$

Nous montrons comme précédemment que la sous-suite des termes de rang pair est la seule suite épanouie extraite de $(a_2, \dots, a_{2n}, a_{2n+1})$ de somme maximale et que l'inégalité de la liste (5.19) portant sur $e'_{2n+1}(a)$ est une égalité. □

Théorème 93.— Soit $\lambda = (\lambda_k)_{k \geq 1}$ une suite de scalaires tous non nuls. Soit $a = (a_k)_{k \geq 1}$ une suite d'entiers strictement positifs. Soit enfin f une série formelle admettant le développement infini suivant en C-fraction

$$f(t) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda_1 t^{a_1}}{1 - \frac{\lambda_2 t^{a_2}}{1 - \frac{\lambda_3 t^{a_3}}{\dots}}}} \dots$$

1) Pour que toutes les réduites f_k du développement ci-dessus soient des approximants de Padé de f , il suffit que la suite (a_k) vérifie l'une des propriétés suivantes.

(i) Elle est décroissante au sens large.

(ii) *Elle satisfait $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2k-1} \leq a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k} \leq a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k+1}$ pour tout $k \geq 1$.*

2) *Pour qu'aucune des réduites f_k , à l'exception de la première, ne soit un approximant de Padé de f , il suffit que a soit de la forme indiquée au lemme 92.*

3) *L'ordre effectif de l'approximation de f réalisée par la réduite f_k est, dans le cas le pire, équivalent à $\frac{1}{2}(e_k + e'_k)$ lorsque k tend vers $+\infty$, c'est-à-dire à la moitié de l'ordre correspondant au cas où f_k est un approximant de Padé de f .*

De plus, ces trois assertions sont indépendantes de la suite λ et du corps K .

Démonstration : 1) appliquant le lemme 91, nous obtenons $e_k + e'_k = s_k < s_{k+1}$ lorsque la suite a est décroissante : le défaut de Padé de toutes les réduites est donc nul, d'après la remarque de la page 169. Ceci prouve que la première condition est suffisante.

La preuve du caractère suffisant de la seconde condition est donnée dans un article de Frank [43], où l'auteur indique de plus la position des blocs correspondants dans la table de Padé.

Nous remarquons qu'une suite a vérifie simultanément les deux conditions si et seulement si elle est constante : les fractions de Stieltjes (en la variable t^{a_1}) relèvent donc de ces deux conditions, et ce sont les seules. La condition (i) que nous avons étudiée est en quelque sorte complémentaire de la condition (ii) de Frank.

2) Soit a la suite définie au lemme 92. La remarque de la page 169 montre que le défaut de Padé $d(f_k, f)$ vaut $\max\{0, e_k + e'_k - (s_{k+1} - 1)\}$ lorsque $k \geq 2$, indépendamment du corps K . Or, pour une telle suite a , nous avons :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \quad e_{2n}(a) + e'_{2n}(a) - (s_{2n+1}(a) - 1) &= c_1 + \cdots + c_n - n, \\ \forall n \geq 0, \quad e_{2n+1}(a) + e'_{2n+1}(a) - (s_{2n+2}(a) - 1) &= c_1 + \cdots + c_n - (c_{n+1} + n). \end{aligned}$$

Il suffit donc de trouver une suite c telle que,

$$\text{pour tout } n \geq 1, \quad c_1 + \cdots + c_n > c_{n+1} + n.$$

Il est facile de vérifier que la suite définie par $c_1 = 3$ et $c_n = 1$ pour $n \geq 2$ convient (c'est d'ailleurs la seule suite possible lorsque l'on fixe $c_1 = 3$). Dès que $c_1 \geq 4$, une infinité de possibilités se présentent. Mentionnons par exemple la suite définie par $c_1 = 4$ et $c_n = n$ si $n \geq 2$.

3) L'ordre de l'approximation réalisé par la réduite f_k est $s_{k+1} - 1$ d'après la proposition 82. Le cas le pire est donc le cas où $e_k + e'_k$ est le plus grand possible par rapport à $s_{k+1} - 1$.

D'après l'inégalité (5.18), nous avons $e_k + e'_k \leq 2s_k$. Puisque $s_{k+1} = s_k + a_k \geq s_k + 1$, nous avons, pour toute suite a :

$$e_k + e'_k \leq 2(s_{k+1} - 1).$$

Nous allons maintenant prouver que, dans l'inégalité ci-dessus, la constante "2" est la plus petite possible, ce qui démontre l'assertion 3.

Les lemmes 89 et 92 nous disent qu'il existe des suites a telles que $m_k - 1 \leq e_k + e'_k \leq m_k$, le majorant m_k étant absolu. Or nous avons

$$\begin{aligned} m_k &= 2s_k - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor - a_1, \\ &= 2((s_{k+1} - 1) - a_{k+1} + 1) - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor - a_1. \end{aligned}$$

Pour toutes ces suites, nous avons donc :

$$\begin{aligned} \frac{e_k + e'_k}{s_{k+1} - 1} &= \frac{m_k + \epsilon}{s_{k+1} - 1}, \\ &= 2 - \underbrace{\frac{a_{k+1}}{s_{k+1} - 1}}_{\text{positif}} - \underbrace{\frac{a_{k+1} + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}{s_{k+1} - 1}}_{\text{inférieur ou égal à 1}} - \underbrace{\frac{a_1 + \epsilon - 2}{s_{k+1} - 1}}_{\text{positif}}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

où le nombre ϵ vaut 0 ou 1. Lorsque k tend vers $+\infty$, le dernier terme du membre de droite de (5.24) tend vers 0, car s_{k+1} tend vers $+\infty$. Le deuxième et le troisième (distingués par les accolades) sont positifs et inférieurs ou égaux à 1 pour tout k , car les a_k sont des nombres entiers non nuls. Finalement, nous avons

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{e_k + e'_k}{s_{k+1} - 1} \right) \leq 2,$$

avec égalité lorsque $a_k = o(s_k)$. L'exemple 2 ci-dessous donne une illustration numérique de ce cas. Qui plus est, cet exemple est valable pour tout corps K .

□

Exemples. — 1) Soit a la suite définie par $a_k = k$. Nous appelons fraction continue de Ramanujan une C-fraction associée à la suite a :

$$f(t) = \frac{1}{1 -} \frac{\lambda_1 t}{1 -} \frac{\lambda_2 t^2}{1 -} \cdots \frac{\lambda_k t^k}{1 -} \cdots \quad (5.25)$$

Il est clair que $n^2 = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} \leq n(n+1) = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} \leq a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n+1} = n(n+2)$: la suite a vérifie la condition (ii) de la proposition 93. Les réduites des fractions continues de Ramanujan sont donc toutes des approximants de Padé. On peut aussi le vérifier par un calcul direct, que nous menons ci-après.

La suite s des sommes partielles est donnée par $s_k = \binom{k+1}{2}$. Le tableau ci-dessous donne les valeurs des $e_k(a)$ et des $e'_k(a)$.

$e_{2n}(a) = n(n+1)$	obtenu pour la suite $(2, 4, \dots, 2n)$ et elle seule ,
$e'_{2n}(a) = n(n+1)$	obtenu pour la suite $(2, 4, \dots, 2n)$ et elle seule ,
$e_{2n+1}(a) = (n+1)^2$	obtenu pour la suite $(1, 3, \dots, 2n+1)$ et elle seule ,
$e'_{2n+1}(a) = (n+1)^2 - 1$	obtenu pour la suite $(3, 5, \dots, 2n+1)$ et elle seule .

Nous pouvons alors calculer le défaut de Padé de f_{2n} par rapport à f : il vaut

$$\max\{0, 2n(n+1) - \binom{2n+1}{2}\} = \max\{0, -n-1\} = 0.$$

De même, le défaut de Padé de f_{2n+1} par rapport à f vaut

$$\max\{0, 2(n+1)^2 - 1 - \binom{2n+2}{2}\} = \max\{0, -n-2\} = 0.$$

2) La suite a du lemme 92 avec $c_1 = 4$ et $c_n = n$ pour $n \geq 2$ conduit à une C-fraction qui cumule les propriétés des points 2 et 3 de la proposition 93. En effet, nous avons $s_k \sim \frac{k^2}{2}$ alors que $a_k \leq k$ dès que $k \geq 3$. Par conséquent, les trois derniers termes du membre de droite de l'expression (5.24) tendent vers 0 et, par suite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{e_k + e'_k}{s_{k+1} - 1} \right) = 2.$$

La proposition 93 laisse de côté la question suivante : est-il possible de caractériser simplement, en termes de conditions portant sur la suite a , les C-fractions dont toutes les réduites f_k pour $k \geq 2$ sont des approximants de Padé de f ? Dans [74], Scott et Wall ont montré que, sous l'hypothèse supplémentaire $a_1 = 1$, la condition (ii) de la proposition 93 était nécessaire et suffisante. À notre connaissance, c'est le seul élément de réponse à la question posée.

5.4 Un algorithme de développement en C-fraction.

Nous exposons le dernier des algorithmes de cette thèse de développement d'une série formelle en fraction continue (ici, une C-fraction), qui reposent sur l'interprétation combinatoire des coefficients de la série comme somme de valuations de chemins (ici de C-chemins).

5.4.1 Une vue d'ensemble.

Soit $f(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} c_n t^n$ une série formelle à coefficients dans K . Nous allons résoudre, pour tout $n \geq 1$, les équations

$$c_n = \sum_{\omega \text{ est un C-chemin de longueur } 2n} v(\omega), \quad (5.26)$$

dans lesquelles les inconnues sont les nombres entiers a_k ainsi que les scalaires λ_k . La possibilité de résoudre successivement ces équations repose sur la remarque suivante, qui est le pendant, pour le modèle combinatoire des C-chemins, des remarques des pages 69, 99 et du lemme 76.

Remarque. — Si les nombres a_1, \dots, a_{k+1} sont connus et si $n = s_{k+1} = a_1 + \dots + a_{k+1}$, il existe un seul C-chemin ω de longueur $2n$ qui atteint le niveau n . Ce chemin, en forme de chevron, est composé de n pas montants suivis de $k+1$ pas descendants, qui vont successivement du niveau s_i au niveau s_{i-1} pour $i = k+1, k, \dots, 1$. Ce chemin porte la valuation $v(\omega) = \lambda_{k+1}\lambda_k \dots \lambda_1$.

Voici alors la description de l'étape $k+1$ de l'algorithme. Nous supposons connus les nombres a_1, \dots, a_k ainsi que les scalaires tous non nuls $\lambda_1 \dots \lambda_k$ tels que les équations (5.26) soient satisfaites pour tout $n \in \{1, \dots, s_k\}$. Le nombre a_{k+1} est alors nécessairement égal au plus petit nombre entier $i \geq 1$ tel que

$$c_{s_k+i} \neq TC_{k,i}, \quad (5.27)$$

où $TC_{k,i}$ désigne un terme connu puisqu'il vaut

$$TC_{k,i} = \sum_{\substack{|\omega|=2(s_k+i) \\ \omega \text{ est borné au niveau } s_k}} v(\omega). \quad (5.28)$$

L'équation (5.26) pour $n = s_k + i = s_k + a_{k+1}$ s'écrit alors

$$c_{s_k+a_k} = \lambda_{k+1}\lambda_k \dots \lambda_1 + TC_{k,a_{k+1}}, \quad (5.29)$$

dans laquelle seule λ_{k+1} est inconnue. Par hypothèse, nous avons $TC_{k,a_{k+1}} \neq c_{s_k+a_k}$; par conséquent, l'équation (5.29) admet une unique solution et cette solution est un scalaire non nul.

Tel qu'il est exposé, l'algorithme est inexploitable : il faut encore expliquer comment nous calculons les termes dits connus $TC_{k,i}$ de l'équation (5.28). C'est l'objet du paragraphe 5.4.2.

Cette vue d'ensemble de l'algorithme prouve du même coup la partie de la proposition 83 concernant l'existence et l'unicité d'un développement en C-fraction. Il nous reste seulement à prouver que, si f est rationnelle, alors son développement est fini. C'est chose faite à l'issue du lemme suivant.

Lemme 94. — Soit $f = \frac{P}{Q}$, une fraction rationnelle irréductible, différente de 1, de terme constant égal à 1. Nous supposons que le début de son développement en C-fraction est

$$\frac{1}{1 - \frac{\lambda_1 t^{a_1}}{\dots}}.$$

Alors la fraction rationnelle R définie par $\frac{P-Q}{\lambda_1 t^{a_1}}$ est un polynôme de terme constant égal à 1 et l'on a

$$f(t) = \frac{1}{1 - \lambda_1 t^{a_1} \frac{R}{P}}, \quad (5.30)$$

avec, de plus, $\deg(R) + \deg(P) \leq \deg(P) + \deg(Q) - 1$.

Démonstration : par hypothèse, il existe une série formelle g de terme constant égal à 1 telle que

$$f = \frac{1}{1 - \lambda_1 t^{a_1} g(t)}.$$

Nous en déduisons que $g = \frac{P-Q}{\lambda_1 t^{a_1}}$. Puisque P et Q sont premiers entre eux, c'est que t^{a_1} divise $P - Q$. Ceci prouve que R est un polynôme. La série g étant le développement de Taylor de R en 0, le terme constant de R vaut 1. L'inégalité portant sur les degrés est évidente. \square

La condition de décroissance $\deg(R) + \deg(P) \leq \deg(P) + \deg(Q) - 1$ conduit à un développement fini en C-fraction. La proposition 83 est donc démontrée.

5.4.2 Le détail des calculs.

Nous notons $D_{k,i}$ la droite d'équation $x + y = 2(s_k + i)$ et $h_{k,i,l}$ la somme des valuations des C-chemins d'origine $(0, 0)$ et dont le dernier sommet est le point de $D_{k,i}$ d'ordonnée s_l . La lettre $h'_{k,i,l}$ désigne la somme précédente restreinte aux chemins bornés au niveau s_k . Ainsi les termes connus du paragraphe précédent sont donnés par

$$TC_{k,i} = h'_{k,i,0},$$

pour tout $i \geq 1$. La figure 5.2 illustre ces définitions.

Enfin, nous désignons par Λ_k le produit

$$\Lambda_k = \lambda_1 \dots \lambda_k. \quad (5.31)$$

C'est un auxiliaire de calcul qui évite de faire des multiplications inutiles.

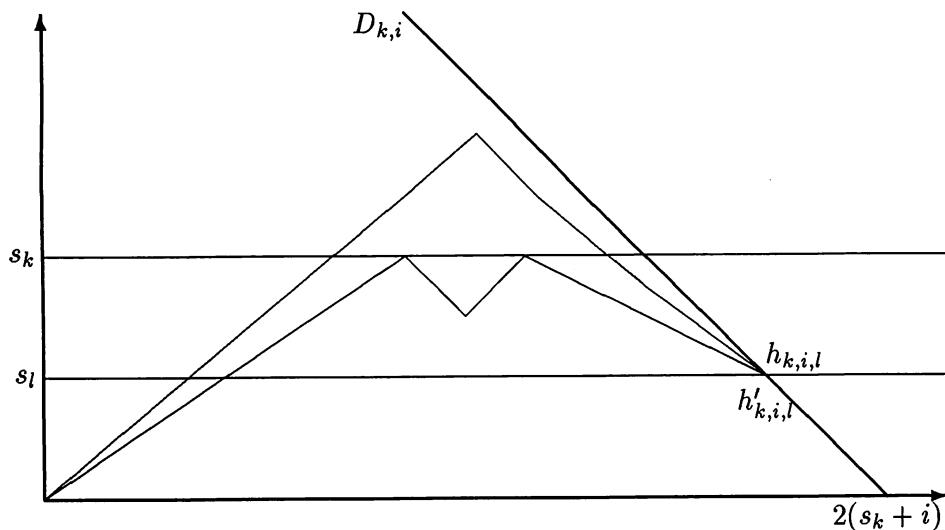
Initialisation (étape 0). Si $f(t) = 1$, l'algorithme s'arrête là. Sinon, $f(t) = 1 + c_m t^m + \dots$. Il est alors clair que $a_1 = m$ et $\lambda_1 = c_m$. Poser enfin $\Lambda_1 = c_m$ et $h_{0,1,0} = 1$.

Calcul de a_{k+1} et de λ_k (étape k). Nous supposons connus

- les entiers a_1, \dots, a_k ,
- les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, donc leur produit Λ_k ,
- les scalaires $h_{k-1,p,l}$ pour l variant de 1 à $k-1$ et, à l fixé, pour $s_k + 1 - a_l \leq p$.

Pour i valant successivement 1, 2, ..., effectuer la boucle suivante.

1. Calculer la quantité $TC_{k,i} = h'_{k,i,0}$. Cela se fait en k étapes que nous regroupons en trois cas.

Figure 5.2: les sommes $h_{k,i,l}$ et $h'_{k,i,l}$.(a) Calculer $h'_{k,i,k} = h_{k-1,i,k-1}$.(b) Pour l valant successivement $k-1, \dots, 1$ et dans cet ordre, calculer

$$h'_{k,i,l} = h_{k-1,i+a_k-a_l,l-1} + \lambda_{l+1} h'_{k,i,l+1}.$$

(c) Calculer $h'_{k,i,0} = \lambda_1 h'_{k,i,1}$.2. Tester si $h'_{k,i,1} = c_{s_k+i}$.(a) Tant que la réponse est oui, ajouter 1 à i et reprendre la boucle après avoir mis à jour la valeur des sommes $h_{k,i,l}$ par

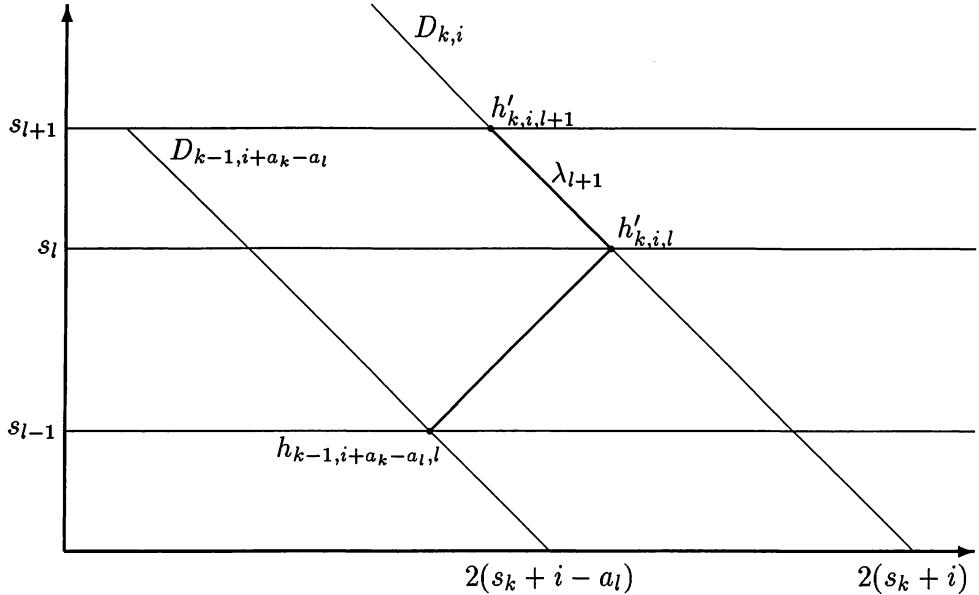
$$h_{k,i,l} = h'_{k,i,l}.$$

Si la réponse est affirmative pour toutes les valeurs de $i \geq 1$, c'est que $f(t)$ est une fraction rationnelle et elle vaut $f_k(t)$.

(b) Si la réponse est non, les équations (5.27) et (5.29) nous disent que

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= i, \\ \lambda_{k+1} &= \frac{c_{s_k+i} - h'_{k,i,0}}{\Lambda_k}. \end{aligned}$$

Mettre alors à jour la valeur du produit des λ_i en posant $\Lambda_{k+1} = \lambda_{k+1} \Lambda_k$.

Figure 5.3: le calcul de $h'_{k,i,l}$.

Mettre enfin à jour les valeurs des sommes $h_{k,i,l}$ par

$$h_{k,i,l} = h'_{k,i,l} + \lambda_{k+1}\lambda_k \dots \lambda_i,$$

et passer à l'étape suivante.

5.5 Fractions rationnelles et C-fractions.

Nous allons étudier la question suivante : le calcul d'un développement en C-fraction est-il une bonne méthode pour “détecter”, connaissant ses premiers termes, si une série formelle est une fraction rationnelle?

Plus précisément, nous nous demandons combien de coefficients de la série de Taylor de $\frac{P}{Q}$ il faut connaître, en fonction des degrés de P et Q , pour retrouver $\frac{P}{Q}$ comme une réduite du développement en C-fraction.

L'algorithme décrit plus haut montre qu'il est nécessaire et suffisant de connaître $s_k = a_1 + \dots + a_k$ coefficients si $f = \frac{P}{Q}$ admet le développement fini suivant :

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{1 - \frac{\lambda_1 t^{a_1}}{1 - \frac{\lambda_2 t^{a_2}}{\dots \frac{\lambda_{k-1} t^{a_{k-1}}}{1 - \lambda_k t^{a_k}}}}} \quad (5.32)$$

Définition 95. — 1) Lorsque $f = \frac{P}{Q} \in K[[t]]$ est irréductible et admet le développement (5.32), nous appelons C-longueur de f la quantité $s_k = a_1 + \dots + a_k$.

2) Nous notons $M(p, q)$ le maximum des C-longueurs des fractions $\frac{P}{Q}$, lorsque $\deg(P) = p$ et $\deg(Q) = q$. Nous convenons que $M(0, 0) = 0$.

Nous avons *a priori* une fonction M pour chaque corps commutatif K et nous verrons, à la proposition 98, que certaines valeurs de M sont différentes suivant que $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou non.

Voici des relations de récurrence qui vont nous permettre d'établir des majorations de la fonction M .

Lemme 96. — *Nous avons l'égalité et les inégalités suivantes :*

$$M(p, q) = \max_{1 \leq a_1 \leq q} \{a_1 + M(q - a_1, p)\} \quad \text{si } p < q, \quad (5.33)$$

$$M(p, q) \leq \max_{1 \leq a_1 \leq p} \left\{ a_1 + \max_{0 \leq b \leq p-a_1} \{M(b, p)\} \right\} \quad \text{si } p = q, \quad (5.34)$$

$$M(p, q) \leq \max_{1 \leq a_1 \leq p} \{a_1 + M(p - a_1, p)\} \quad \text{si } p > q. \quad (5.35)$$

Démonstration : soient P et Q deux polynômes tel qu'au moins un des deux nombres $p = \deg(P)$ ou $q = \deg(Q)$ soit non nul. D'après le lemme 94, le début du développement en C-fraction de $\frac{P}{Q}$ s'écrit

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{1 - \lambda t^{a_1} \frac{R}{P}}, \quad (5.36)$$

avec $R = \lambda^{-1} t^{-a_1} (P - Q) \in K[t]$. Si $p < q$, le degré de R est $\deg(Q) - a_1$. Par conséquent, nous avons

$$M(p, q) \leq \max_{1 \leq a_1 \leq q} \{a_1 + M(q - a_1, p)\}.$$

Pour obtenir l'égalité, il reste à prouver, lorsque a_1 est fixé dans $\{1, \dots, p\}$, que *tous* les polynômes R de degré $q - a_1$ et P de degré p peuvent apparaître dans le début du développement (5.36). Ceci est vrai : pour \hat{R} et \hat{P} ainsi choisis, le polynôme

$$\hat{Q} = \hat{P} + \lambda t^{a_1} \hat{R}$$

est de degré q pour tous les choix possibles du scalaire non nul λ , et $\frac{\hat{P}}{\hat{Q}}$ se développe comme (5.36).

Si $p = q$, le degré de R peut chuter d'avantage : on a $\deg(R) \leq p - a_1$ et l'inégalité (5.34) en résulte. Si $p > q$, nous avons $\deg(R) = p - a_1$, ce qui prouve l'inégalité (5.35).

Nous ne pouvons pas affirmer que cette dernière est une égalité ; contrairement au premier cas, si nous fixons un entier $a_1 \in \{1, \dots, p\}$, un polynôme \hat{R} de degré $p - a_1$ et un polynôme \hat{P} de degré p , il n'est pas toujours³ possible de choisir un scalaire non nul λ tel que le degré de $\hat{Q} = \hat{P} + \lambda t^{a_1} \hat{R}$ soit égal à $q < p$. La même objection vaut pour la relation (5.34).

□

³rarement, en fait.

La proposition 98 donne des exemples de ce “déficit” de croissance de la fonction M . Nous appelons M^* la fonction “sans déficit” des deux variables p et q , définie récursivement par $M^*(0, 0) = 0$ et par les relations

$$M^*(p, q) = \max_{1 \leq a_1 \leq q} \{a_1 + M^*(q - a_1, p)\} \quad \text{si } p < q, \quad (5.37)$$

$$M^*(p, q) = \max_{1 \leq a_1 \leq p} \left\{ a_1 + \max_{0 \leq b \leq p-a_1} \{M^*(b, p)\} \right\} \quad \text{si } p = q, \quad (5.38)$$

$$M^*(p, q) = \max_{1 \leq a_1 \leq p} \{a_1 + M^*(p - a_1, p)\} \quad \text{si } p > q. \quad (5.39)$$

Il est clair que M^* majore M . Le lemme suivant calcule les valeurs de M^* .

Lemme 97. — Soit (p, q) un couple de nombres entiers. Nous avons :

$$M^*(p, q) = \begin{cases} \frac{p(p+3)}{2} & \text{si } p \geq q, \\ \frac{q(q+1)}{2} & \text{si } p < q. \end{cases} \quad (5.40)$$

Démonstration : la preuve se fait par récurrence sur $m = \max\{p, q\}$. Si $m = 0$, c'est évident.

Soit $m \geq 1$. Nous supposons que la propriété est démontrée lorsque $\max\{p, q\} \leq m - 1$ et nous distinguons deux cas.

1. Cas $p < q = m$; l'hypothèse de récurrence et la relation (5.37) montrent que

$$\begin{aligned} M^*(p, q) &= \max_{1 \leq a_1 \leq q} \{a_1 + M^*(q - a_1, p)\}, \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} \max_{1 \leq a_1 \leq q-p} \left\{ a_1 + \frac{(q-a_1)(q-a_1+3)}{2} \right\}, \\ \max_{q-p < a_1 \leq q} \left\{ a_1 + \frac{p(p+1)}{2} \right\} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (5.41)$$

L'expression $a_1 + \frac{(q-a_1)(q-a_1+3)}{2} = \frac{1}{2}(a_1^2 - (2q+1)a_1 + q^2 + 3q)$, considérée comme un polynôme en a_1 , est minimale pour $a_1 = q + \frac{1}{2}$. Par conséquent, le premier maximum figurant dans l'accolade (5.41) est atteint pour $a_1 = 1$ et vaut $\frac{q(q+1)}{2}$.

Le second maximum est évidemment atteint pour $a_1 = q$ et il vaut $q + \frac{p(p+1)}{2} \leq q + \frac{(q-1)q}{2} = \frac{q(q+1)}{2}$ car nous sommes dans le cas $p < q$. Finalement, nous avons prouvé que

$$M^*(p, q) = \frac{q(q+1)}{2}.$$

Nous remarquons en particulier que la valeur de $M(p, q)$ est constante lorsque p parcourt l'ensemble $\{0, \dots, q-1\}$.

2. Cas $m = p \geq q$. La remarque que nous venons de formuler nous permet de rassembler les relations (5.38) et (5.39) sous une forme plus compacte, car nous savons maintenant que l'application $b \rightarrow M^*(b, p)$ est croissante pour $b \in \{0, \dots, p-1\}$. Cette forme compacte est la suivante :

$$M^*(p, q) = \max_{1 \leq a_1 \leq p} \{a_1 + M^*(p - a_1, p)\} \quad \text{si } m = p \geq q. \quad (5.42)$$

De plus, nous savons que $M^*(p - a_1, p) = \frac{p(p+1)}{2}$. Le maximum alors est atteint, dans l'expression (5.42), pour $a = p$ et il vaut $\frac{p(p+3)}{2}$.

□

Si m désigne $\max\{p, q\}$, nous remarquons que $M^*(p, q)$ est équivalent à $\frac{m^2}{2}$ lorsque m tend vers $+\infty$. Nous allons maintenant donner quelques éléments de réponse à la question posée en tête de ce paragraphe, et que nous reformulons ainsi, faute de pouvoir calculer M exactement : la majoration de M par M^* est-elle bonne ou grossière?

En d'autres termes, si $p = \deg P$ et $q = \deg Q$, la majoration de la C-longueur de $\frac{P}{Q}$ par $\frac{p(p+1)}{2}$ ou par $\frac{q(q+3)}{2}$ est-elle bonne ou grossière?

Proposition 98.— 1) Les tableaux suivants donnent les valeurs de $M^*(p, q)$, de $M(p, q)$ lorsque $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et de $M(p, q)$ lorsque $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pour p et q au plus égaux à 3.

$q \backslash p$	0	1	2	3
0	0	2	5	9
1	1	2	5	9
2	3	3	5	9
3	6	6	6	9

 M^*

$q \backslash p$	0	1	2	3
0	0	2	4	8
1	1		5	8
2	3	3	4	7
3	5	6	6	7

 $M \quad (K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

$q \backslash p$	0	1	2	3
0	0	2	4	8
1	1	2	5	8
2	3	3	5	8
3	5	6	6	8

 $M \quad (K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

- 2) La fonction M satisfait les inégalités suivantes, valables sur tout corps K :

$$M(2k, 0) \geq k^2 + 3k, \quad (5.43)$$

$$M(2k + 1, 0) \geq k^2 + 4k + 2, \quad (5.44)$$

$$M(0, 2k) \geq k^2 + 2k, \quad (5.45)$$

$$M(0, 2k + 1) \geq k^2 + 3k + 1. \quad (5.46)$$

Démonstration : 1) la démonstration qui suit est assez fastidieuse. Le lecteur intéressé surtout par le comportement asymptotique de M peut donc passer directement à la page 186.

Nous savons déjà que $M \leq M^*$. Deux arguments distincts sont alors utilisés pour le calcul des valeurs de M .

1. Pour prouver que $M(p, q) = M^*(p, q)$, il suffit d'exhiber une fraction rationnelle ayant un développement en C-fraction adéquat. Comme nous souhaitons, si possible, des résultats valables quel que soit le corps K , la plupart des exemples seront choisis parmi les fractions rationnelles à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et dont le développement ne fait intervenir que des coefficients $\lambda_i \in \{-1, 0, 1\}$. Les identités seront alors vraies aussi dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par projection.
2. Dans le cas contraire (lorsque $M(p, q) < M^*(p, q)$, ou lorsque $M(p, q)$ dépend de K , ou les deux à la fois), nous majorons la valeur de $M(p, q)$ soit par l'examen des divers cas possibles, soit en tenant compte des relations du lemme 96 et des valeurs déjà calculées. Nous obtenons ainsi un majorant de $M(p, q)$ plus fin que $M^*(p, q)$. Nous exhibons par ailleurs une fraction rationnelle dont la C-longueur est égale à ce nouveau majorant.

Nous définissons 19 fractions rationnelles dans le tableau de la page 184. La première colonne comporte, outre le nom de la fraction, les degrés du numérateur et du dénominateur lorsqu'elle est écrite sous forme irréductible. La troisième exprime, autant que faire se peut, la fraction R_i en fonction des R_j pour $j < i$. La quatrième comporte la C-longueur de la fraction rationnelle. Enfin, la dernière colonne indique les corps commutatifs pour lesquels tous les renseignements contenus dans les colonnes précédentes sont vrais.

Le lecteur peut vérifier que toutes les fractions sont irréductibles sur les corps indiqués en dernière colonne. En utilisant le premier argument invoqué à la page 182, on montre facilement que les fractions R_i pour $i \in \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 12, 13\}$ permettent de prouver que $M(p, q) = M^*(p, q)$ pour (p, q) appartenant à

$$\{(0, 1), (1, 0), (0, 2), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (1/3), (2, 3)\},$$

et ceci, quel que soit K . Nous allons maintenant nous intéresser aux autres cas.

Pour éviter les répétitions, nous désignons par *fraction spéciale de type (p/q)* une fraction rationnelle irréductible $\frac{P}{Q}$ telle $\deg(P) = p$, $\deg(Q) = q$ et telle que les termes constants de P et Q valent 1. Remarquons de plus que si $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, les coefficients dominants de P et Q valent 1 eux aussi.

Cas $(p, q) = (1, 1)$. Il n'existe pas de fraction spéciale de type $(1/1)$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ce qui explique la case vide du tableau correspondant. Pour tous les autres corps, la fraction R_3 fournit la valeur $M(1, 1) = 2$.

Cas $(p, q) = (2, 0)$. La fraction R_6 montre que $M(2, 0) \geq 4$ indépendamment de K . Soit maintenant $P = 1 + \alpha t + \beta t^2$ une fraction spéciale de type $(2/0)$.

- Si $\alpha \neq 0$, nous avons

$$P = \frac{1}{1 - \alpha t \frac{1+\alpha^{-1}\beta t}{P}}.$$

R (p/q)	$\frac{P}{Q}$	$\frac{1}{1 -} \frac{\lambda_1 t^{a_1}}{1 -} \cdots \frac{\lambda_{k-1} t^{a_{k-1}}}{1 - \lambda_k t^{a_k}}$	s_k	K
$R_1 (0/1)$	$\frac{1}{1+t}$		1	tous
$R_2 (1/0)$	$1-t$	$\frac{1}{1+tR_1(-t)}$	2	tous
$R_3 (1/1)$	$\frac{1+t}{1-t}$	$\frac{1}{1-2tR_1}$	2	$K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$R_4 (0/2)$	$\frac{1}{1+t-t^2}$	$\frac{1}{1+tR_2}$	3	tous
$R_5 (1/2)$	$\frac{1+t}{1+t+t^2}$	$\frac{1}{1+t^2R_1}$	3	tous
$R_6 (2/0)$	$1+t^2$	$\frac{1}{1-t^2R_1(t^2)}$	4	tous
$R_7 (2/1)$	$\frac{1+t-t^2}{1+t}$	$\frac{1}{1+t^2R_4}$	5	tous
$R_8 (2/2)$	$\frac{1+t-t^2}{1+t-2t^2}$	$\frac{1}{1-t^2R_4}$	5	$K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$R_9 (2/2)$	$\frac{1+t+t^2}{1+t^2}$	$\frac{1}{1+tR_4}$	4	$K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$R_{10} (2/2)$	$\frac{1+t^2}{1+t+t^2}$	$\frac{1}{1+tR_1(t^2)}$	3	$K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$R_{11} (0/3)$	$\frac{1}{1+t+t^3}$	$\frac{1}{1+tR_6}$	5	tous
$R_{12} (1/3)$	$\frac{1+t}{1-t^2+t^3}$	$\frac{1}{1-tR_7}$	6	tous
$R_{13} (2/3)$	$\frac{1+t-t^2}{1+t-t^2+t^3}$	$\frac{1}{1+t^3R_4}$	6	tous
$R_{14} (3/0)$	$1-t^2-t^3$	$\frac{1}{1+} \frac{t^2}{1-} \frac{t}{1-} \frac{t^2}{1+tR_2(-t)}$	8	tous
$R_{15} (3/1)$	$\frac{1+t+t^3}{1+t}$	$\frac{1}{1-t^3R_{11}}$	8	tous
$R_{16} (3/2)$	$\frac{1+2t+t^2-t^3}{1+2t+2t^2}$	$\frac{1}{1+} \frac{t^2}{1+tR_7}$	8	$K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$R_{17} (3/2)$	$\frac{1+t^2+t^3}{1+t^2}$	$\frac{1}{1-} \frac{t^3}{1+t^2R_2(-t)}$	7	$K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$R_{18} (3/3)$	$\frac{1-t^2+t^3}{1+2t^3}$	$\frac{1}{1+t^2R_{12}}$	8	$K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$R_{19} (3/3)$	$\frac{1+t+t^3}{1+t+t^2+t^3}$	$\frac{1}{1+t^2R_{11}}$	7	$K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Puisque l'on sait déjà que $M(1, 2) = 3$, la C-longueur de P est plus petite que 4 dans ce premier cas.

- Si $\alpha = 0$, nous avons

$$P = \frac{1}{1 - \frac{\beta t^2}{1 - \beta t^2}},$$

ce qui montre que la C-longueur de P vaut 4 dans ce second cas.

Cas $(p, q) = (2, 2)$. La fraction R_8 montre que $M(2, 2) = 5$ pour $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Les deux seules fractions spéciales de type $(2/2)$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont R_9 et R_{10} , dont les C-longueurs valent respectivement 4 et 3.

Cas $(p, q) = (0, 3)$. La fraction R_{11} montre que $M(0, 3) \geq 5$ pour tout corps K . Soit maintenant $\frac{1}{P} = \frac{1}{1 + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3}$ une fraction spéciale de type $(0/3)$. Suivant que $\alpha \neq 0$, ou que $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$, ou encore que $\alpha = \beta = 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{1}{P} &= \frac{1}{1 - \alpha t(1 + \alpha^{-1}\beta t + \alpha^{-1}\gamma t^2)}, \\ \frac{1}{P} &= \frac{1}{1 - \beta t^2(1 + \beta^{-1}t)}, \\ \frac{1}{P} &= \frac{1}{1 + \gamma t^3}.\end{aligned}$$

Compte tenu des valeurs de $M(2, 0)$ et de $M(1, 0)$, les C-longueurs de $\frac{1}{P}$ sont respectivement plus petites que 5, 4 et 3.

Cas $(p, q) = (3, 0)$. La fraction R_{14} montre que $M(3, 0) \geq 8$ pour tout corps K . D'autre part, l'inégalité (5.35) nous dit que

$$\begin{aligned}M(3, 0) &\leq \max_{1 \leq a_1 \leq 3} \{a_1 + M(3 - a_1, 3)\} \\ &= \max\{1 + 6, 2 + 6, 3 + 5\} \\ &= 8,\end{aligned}$$

compte-tenu des valeurs déjà calculées.

Cas $(p, q) = (3, 1)$. La fraction R_{12} montre que $M(3, 1) \geq 8$ pour tout corps K . Le même raisonnement que celui tenu au cas précédent montre que $M(3, 0) \leq 8$.

Cas $(p, q) = (3, 2)$. Un raisonnement analogue, portant sur la fraction R_{16} , montre que $M(3, 2) = 8$ lorsque K est différent de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Soit maintenant

$$\frac{P}{Q} = \frac{1 + \alpha t + \beta t^2 + t^3}{1 + \gamma t + t^2}$$

une fraction spéciale à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le raisonnement tenu au cas $(p, q) = (3, 1)$ montre que la C-longueur de $\frac{P}{Q}$ est susceptible de valoir 8 dans les seuls cas où $a_1 = 2$ ou 3. Examinons les.

- Dire que $a_1 = 2$, c'est dire que $\alpha = \gamma$ et que $\beta = 0$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} &= \frac{1}{1 + t^2 \frac{1+t}{1+\alpha t+t^3}}, \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1+t} \frac{t^2}{1+t^2} \frac{t}{1+t^3} \frac{t}{1+t^2} & \text{si } \alpha = 0, \\ \frac{1}{1+t} \frac{t^2}{1+t} \frac{t^3}{1+t} & \text{si } \alpha = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

La longueur de P/Q est donc 6 dans ce premier cas.

- Dire que $a_1 = 3$, c'est dire que $\alpha = \gamma$ et que $\beta = 1$. Nous avons alors

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{1 + t^3 \frac{1}{P}},$$

ce qui montre que la C-longueur de $\frac{P}{Q}$ est plus petite que 7, car nous savons déjà que $M(0, 3) = 4$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Cas $(p, q) = (3, 3)$. Comme précédemment, nous avons $M(3, 3) \leq 8$. Les fractions R_{18} et R_{19} , respectivement pour K différent de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou égal à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, sont de longueur 8, et nous avons terminé le calcul de M pour les petites valeurs de p et q .

2) Notons P_n le polynôme $\sum_{i=0}^n t^i$. Nous avons

$$P_0 = 1,$$

$$P_1 = 1 + t = \frac{1}{1 - \frac{t}{1+t}},$$

$$P_n = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n = \frac{1}{1 - \frac{t^n}{1 + \frac{t^n}{1 + t P_{n-2}}}} \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Il en résulte que la suite a des puissances qui apparaissent dans le développement en C-fraction de P_n est

$$(1, 2k, 1, 1, 2k-2, 1, \dots, 1, 2, 1) \quad \text{si } n = 2k, \\ (1, 2k+1, 1, 1, 2k-1, 1, \dots, 1, 3, 1, 1, 1) \quad \text{si } n = 2k+1. \quad (5.47)$$

La C-longueur de P_{2k} , que l'on obtient en faisant la somme des termes de la première suite, vaut $2k + 2\binom{k+1}{2} = k^2 + 3k$. La C-longueur de P_{2k+1} vaut $3k + 2 + 2\binom{k+1}{2} = k^2 + 4k + 2$. Les minorations (5.43) et (5.44) s'en déduisent immédiatement. Les deux minorations suivantes sont alors des conséquences de l'identité

$$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{1 + tP_{n-1}}.$$

□

Nous sommes désormais certains, grâce aux tableaux de la page 182, que la majoration de M par M^* est stricte. Par ailleurs, les minorations (5.43) et (5.44) sont de l'ordre de $\frac{m^2}{4}$, où m désigne à nouveau le maximum des nombres p et q . Cette estimation doit être rapprochée de l'équivalent calculé pour M^* et qui vaut $\frac{m^2}{2}$. Nous avons donc les inégalités :

$$\frac{m^2}{4} + o(m^2) \leq M(p, q) \leq \frac{m^2}{2} + o(m^2),$$

pour certaines familles de couples d'entiers (p, q) . Nous ne savons rien dire de plus sur le comportement asymptotique de M .

Ces majorations suffisent néanmoins pour comprendre pourquoi le développement en C-fraction n'est pas une bonne méthode pour détecter, connaissant les premiers termes d'une série formelle, si elle est la série de Taylor d'une fraction rationnelle. Le deuxième chapitre nous a en effet montré qu'il existait un algorithme nécessitant la connaissance d'au plus $p + q \leq 2m$ coefficients de la série de Taylor de $\frac{P}{Q}$ pour retrouver son expression rationnelle.

5.6 Trois exemples de développement en C-fraction.

Dans un premier paragraphe, nous donnons sans démonstration les développements en C-fraction de deux séries liées aux nombres de Catalan. Un développement inédit est proposé au second paragraphe.

5.6.1 Nombres de Catalan et q -analogues.

Nous définissons ici le $n^{ième}$ nombre de Catalan C_n comme le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$. Il est bien connu [28, 37, 51] que

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Un premier q -anologue $C_n^{(1)}(q)$ est le polynôme énumérateur des chemins de Dyck de longueur $2n$ suivant la somme des ordonnées des *pics* : voir la définition 43 du troisième chapitre 3.

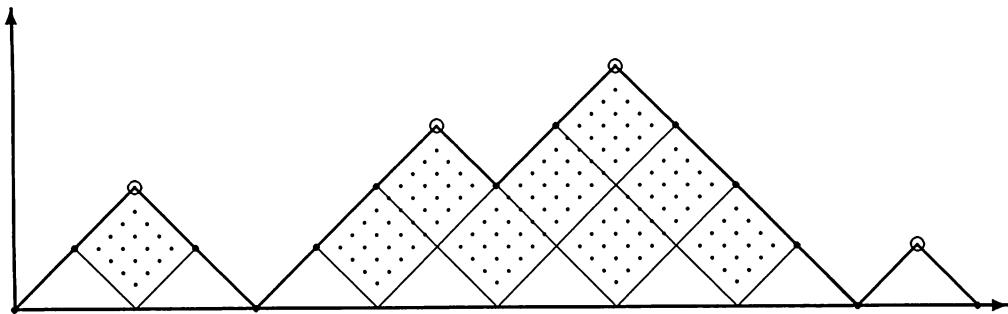


Figure 5.4: un chemin de Dyck d'aire 9.

Un second q -analogue, noté $C_n^{(2)}(q)$, est le polynôme énumérateur des chemins de Dyck de longueur $2n$ suivant leur *aire*, c'est-à-dire le nombre de carrés situés entre l'axe des abscisses et le chemins de Dyck, comme l'indique la figure 5.4.

La série $f^{(1)}(q, t) = \sum_{n \geq 0} C_n^{(1)}(q)t^n$ est, par définition de $C_n^{(1)}(q)$, la série génératrice des chemins de Dyck valués comme l'indique la formule (3.100) de la page 125, avec $y = 1$. C'est aussi la série génératrice des polyominos parallélogrammes comptés suivant l'aire (par q) et le périmètre (par t), d'après le paragraphe 3.7.2. Nous déduisons de la proposition 44 ou directement de l'expression (3.115), le développement suivant de $f^{(1)}(q, 1)$ en C-fraction :

$$f^{(1)}(q, 1) = \frac{1}{1 -} \frac{q}{1 -} \frac{q}{1 -} \frac{q^2}{1 -} \frac{q^2}{1 -} \dots \frac{q^k}{1 -} \frac{q^k}{1 -} \dots \quad (5.48)$$

La série $f^{(2)}(q, t) = \sum_{n \geq 0} C_n^{(2)}(q)t^n$ est la série génératrice des chemins de Dyck valués comme l'indique le paragraphe 1.1.1 du premier chapitre par :

$$\lambda_k = q^{k-1} \quad (5.49)$$

Comme le démontre Viennot dans [88], c'est aussi la série génératrice des *demi-pyramides de dominos*, où la valuation du domino $[i, i+1]$ est q^i . Un théorème d'inversion prouve alors l'identité (5.50) ci-dessous, où $(q; q)_n$ désigne le produit $(1 - q)(1 - q^2) \cdots (1 - q^n)$:

$$f^{(2)}(q, t) = \frac{\sum_{n \geq 0} (-t)^n \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n}}{\sum_{n \geq 0} (-t)^n \frac{q^{n^2-n}}{(q; q)_n}}. \quad (5.50)$$

Nous en déduisons que

$$f^{(2)}(q, -q) = \frac{R_{II}}{R_I},$$

où les séries R_I et R_{II} désignent les membres gauches des deux célèbres identités de Rogers–Ramanujan, que voici :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n} = \prod_{i \geq 0} \frac{1}{(1 - q^{5n+1})(1 - q^{5n+4})}, \quad (5.51)$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2+n}}{(q; q)_n} = \prod_{n \geq 0} \frac{1}{(1 - q^{5n+2})(1 - q^{5n+3})}. \quad (5.52)$$

D'autre part, la proposition 3 du premier chapitre donne le développement de $f^{(2)}(q, t)$ en fraction de Stieltjes, considérée comme une série formelle de la variable t . En substituant t par $-q$ dans le résultat obtenu, nous retrouvons un résultat de Ramanujan [70]; la série $f^{(2)}(q, -q)$ admet le développement en C-fraction donné ci-dessous :

$$f^{(2)}(q, -q) = \frac{R_{II}}{R_I} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2+n}}{(q; q)_n}}{\sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n}} \\ &= \frac{1}{1 +} \frac{q}{1 +} \frac{q^2}{1 +} \frac{q^3}{1 +} \cdots \frac{q^n}{1 +} \cdots \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$= \frac{1}{1 +} \frac{q}{1 +} \frac{q^2}{1 +} \frac{q^3}{1 +} \cdots \frac{q^n}{1 +} \cdots \quad (5.55)$$

Voici les références bibliographiques nécessaires : pour la théorie des *empilements de pièces*, on peut se reporter à Viennot [86]. Des preuves combinatoires de l'identité (5.50), utilisant la théorie des empilements, sont données dans [11] et dans [88]. Les identités (5.51) et (5.52) ont été découvertes indépendamment par Rodgers [72] et Ramanujan [70]. Le développement (5.55) est dû à Ramanujan : voir l'exposé que donne Andrews [3] du *Ramanujan's lost notebook*.

Nous remarquons que (5.48) et (5.55) sont obtenus à partir de développements en fractions de Stieltjes en la variable t , qu'on spécialise ensuite à $t = 1$. Le paragraphe suivant donne un exemple plus authentique de développement en C-fraction.

5.6.2 La série $\sum_{n \geq 1} t^{n^2-1} - t^{n^2}$.

Il est facile de constater, grâce à des exemples simples, que les degrés des numérateurs et des dénominateurs des réduites successives d'une C-fraction ne forment pas une suite croissante. On peut néanmoins se demander si, comme

pour les fractions continues de Stieltjes, Jacobi et Thron, ces degrés tendent vers $+\infty$ lorsque la série formelle correspondante n'est pas rationnelle.

L'exemple qui suit montre qu'il n'en est rien et fournit un développement en C-fraction. À notre connaissance, ce développement est nouveau.

Proposition 99. — Soit f la série suivante :

$$f(t) = \sum_{n \geq 1} t^{n^2-1} - t^{n^2}. \quad (5.56)$$

Elle admet le développement en C-fraction associé aux suites a et λ définies par

$$\begin{aligned} a_{3k} &= 1 & \lambda_{3k} &= -1 \quad \text{si } k \geq 1, \\ a_{3k+1} &= 2k+1 & \lambda_{3k+1} &= -1 \quad \text{si } k \geq 0, \\ a_{3k+2} &= 1 & \lambda_{3k+2} &= 1 \quad \text{si } k \geq 0. \end{aligned}$$

Les numérateurs et dénominateurs N_i et D_i des réduites f_{s_i} sont donnés par

$$\begin{aligned} N_{3k} &= \sum_{i=1}^k t^{i^2-1} - \sum_{i=1}^{k-1} t^{2k+i^2} \quad \text{si } k \geq 1, & D_{3k} &= \sum_{\substack{i=0 \\ 2k+1}}^{2k} t^i \quad \text{si } k \geq 0, \\ N_{3k+1} &= \sum_{i=1}^{k+1} t^{i^2-1} - \sum_{i=1}^k t^{2k+1+i^2}, & D_{3k+1} &= \sum_{i=0}^{2k+1} t^i \quad \text{si } k \geq 0, \\ N_{3k+2} &= \sum_{i=1}^{k+1} t^{i^2-1} - \sum_{i=1}^{k+1} t^{i^2}, & D_{3k+2} &= 1 \quad \text{si } k \geq 0. \end{aligned} \quad (5.57)$$

En particulier, la suite des degrés de D_i ne tend pas vers $+\infty$. De plus, les résultats énoncés ci-dessus sont indépendants du corps K .

Démonstration : soit g la série dont le développement est donné par les suites a et λ . Nous allons prouver, par récurrence sur k , que les numérateurs et les dénominateurs des réduites de g sont donnés par les formules (5.57). Compte-tenu de ce que $D_{3k+2} = 1$, nous avons $g = \lim_{k \rightarrow +\infty} N_{3k+2}$, c'est-à-dire $g = f$.

Nous avons vu plus haut que les dénominateurs Q_n^* des réduites g_{s_n} vérifient les relations de récurrence déduites de l'expression (5.12) :

$$\begin{aligned} Q_0^* &= 1, \\ Q_1^* &= 1+t, \\ Q_n^* &= Q_{n-1}^* - \lambda_n t^{a_n} Q_{n-2}^* \quad \text{si } n \geq 2. \end{aligned}$$

En particulier, $Q_2^* = 1$. Supposons maintenant que les égalités $Q_{3k+r}^* = D_{3k+r}$ sont vraies pour $r \in \{0, 1, 2\}$. Nous avons alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} Q_{3k+3}^* &= Q_{3k+2}^* - \lambda_{3k+3} t^{a_{3k+3}} Q_{3k+1}^* = 1 + t \sum_{i=0}^{2k+1} t^i &= \sum_{i=0}^{2k+2} t^i, \\ Q_{3k+4}^* &= Q_{3k+3}^* - \lambda_{3k+4} t^{a_{3k+4}} Q_{3k+2}^* = \sum_{i=0}^{2k+2} t^i + t^{2k+3} &= \sum_{i=0}^{2k+3} t^i, \\ Q_{3k+5}^* &= Q_{3k+4}^* - \lambda_{3k+5} t^{a_{3k+5}} Q_{3k+3}^* = \sum_{i=0}^{2k+3} t^i - t \sum_{i=0}^{2k+2} t^i &= 1. \end{aligned}$$

De même, les numérateurs δQ_{n+1}^* des réduites g_{s_n} vérifient les relations de récurrence

$$\begin{aligned}\delta Q_1^* &= 1, \\ \delta Q_2^* &= 1 - t, \\ \delta Q_n^* &= \delta Q_{n-1}^* - \lambda_n t^{a_n} \delta Q_{n-2}^* \quad \text{si } n \geq 2.\end{aligned}$$

En particulier, $\delta Q_3^* = 1$. Supposons maintenant que les égalités $\delta Q_{3k+r}^* = D_{3k+r}$ soient vraies pour $r \in \{1, 2, 3\}$. Nous avons alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\delta Q_{3k+4}^* &= \delta Q_{3k+3}^* - \lambda_{3k+4} t^{a_{3k+4}} \delta Q_{3k+2}^*, \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} t^{i^2-1} - \sum_{i=1}^k t^{2k+2+i^2} + t^{2k+3} \left(\sum_{i=1}^k t^{i^2-1} - \sum_{i=1}^{k+1} t^{i^2} \right), \\ &= \sum_{i=1}^{k+2} t^{i^2-1} - \sum_{i=1}^{k+1} t^{2k+3+i^2}, \\ \delta Q_{3k+5}^* &= \delta Q_{3k+4}^* - \lambda_{3k+5} t^{a_{3k+5}} \delta Q_{3k+3}^*, \\ &= \sum_{i=1}^{k+2} t^{i^2-1} - \sum_{i=1}^{k+1} t^{2k+3+i^2} - t \left(\sum_{i=1}^{k+1} t^{i^2-1} - \sum_{i=1}^k t^{2k+2+i^2} \right), \\ &= \sum_{i=1}^{k+2} t^{i^2-1} - \sum_{i=1}^{k+2} t^{i^2}, \\ \delta Q_{3k+6}^* &= \delta Q_{3k+5}^* - \lambda_{3k+6} t^{a_{3k+6}} \delta Q_{3k+4}^*, \\ &= \sum_{i=1}^{k+2} t^{i^2-1} - \sum_{i=1}^{k+2} t^{i^2} + t \left(\sum_{i=1}^{k+2} t^{i^2-1} - \sum_{i=1}^{k+1} t^{2k+3+i^2} \right), \\ &= \sum_{i=1}^{k+2} t^{i^2-1} - \sum_{i=1}^{k+1} t^{2k+4+i^2}.\end{aligned}$$

La vérification des deux premières suites d'égalités est une variation autour du thème $\sum_{i=0}^k 2i + 1 = (k+1)^2$, tandis que la vérification concernant la valeur de δQ_{3k+6}^* est immédiate.

Puisque les coefficients λ_k valent 1 ou -1 , la démonstration ci-dessus, dans laquelle nous avons implicitement supposé que $K = \mathbb{Q}$, vaut pour tout corps K .

□

Annexe A

L'interprétation des déterminants selon Gessel et Viennot

De nombreux déterminants dont les éléments sont des coefficients binomiaux ont été calculés par Gessel et Viennot dans [49]. Leur méthode repose sur une interprétation combinatoire des coefficients binomiaux et se généralise au cas où les éléments sont certaines sommes de valuations de chemins. Le deuxième chapitre de cette thèse utilise abondamment les résultats que nous rappelons ci-dessous. Notre présentation est celle qu'en donne Viennot dans [84].

A.1 Notations.

Soit K un corps commutatif. Soit \mathcal{E} un ensemble dont les éléments seront appelés *points* et soit v une valuation sur $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$, c'est-à-dire une application

$$\begin{aligned} v : \quad \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow K, \\ (s_1, s_2) &\longrightarrow v(s_1, s_2). \end{aligned}$$

Un *chemin* sur \mathcal{E} est une suite $\omega = (s_0, \dots, s_n)$ de points de \mathcal{E} ; sa *longueur* est n , que l'on note aussi $|\omega|$, son *origine* est s_0 et son *arrivée* est s_n . On dit que ω va de s_0 à s_n . Si $\omega = (s_0, \dots, s_n)$ et $\eta = (r_0, \dots, r_m)$ sont deux chemins tels que l'arrivée s_n du premier soit égale à l'origine r_0 du second, on définit ainsi le *produit de concaténation* de ω par η :

$$\omega\eta = (s_0, \dots, s_n, r_1, \dots, r_m).$$

Nous avons alors $|\omega\eta| = |\omega| + |\eta|$. Une expression $\omega = \omega_1 \dots \omega_k$ est une *factorisation* du chemin ω .

Nous définissons une application de l'ensemble des chemins sur \mathcal{E} dans K ,

qui est encore notée v et appelée valuation, en posant

$$v(\omega) = \prod_{i=0}^{n-1} v(s_i, s_{i+1}),$$

lorsque ω est le chemin (s_0, \dots, s_n) . Nous convenons que la valuation d'un chemin de longueur nulle vaut 1.

Fixons un nombre entier $p \geq 1$ et des points A_1, \dots, A_p (*resp.* B_1, \dots, B_p) de \mathcal{E} , deux à deux distincts (mais certains des A_i peuvent être égaux à certains des B_j). Soit Ω un ensemble de chemins sur \mathcal{E} , allant des points A_i aux points B_j . Les sous-ensembles Ω_{ij} de Ω sont définis par

$$\Omega_{ij} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ va de } A_i \text{ à } B_j\}. \quad (\text{A.1})$$

Nous supposons que Ω satisfait les deux hypothèses suivantes, respectivement appelées hypothèse de finitude et hypothèse de stabilité. Cette dernière est illustrée par la figure A.1.

1. Les sous-ensembles Ω_{ij} sont finis pour tous les entiers i et j dans $\{1, \dots, p\}$.
2. Pour tous les entiers i, j, k et l tels que $1 \leq i < k \leq p$ et $1 \leq j < l \leq p$, pour tous les chemins $\omega \in \Omega_{ij}$ et $\eta \in \Omega_{kl}$ ayant un sommet commun, si s désigne le *premier*¹ sommet commun à ω et η , alors les chemins

$$\omega_1\eta_2 \quad \text{et} \quad \omega_2\eta_1$$

appartiennent respectivement à Ω_{il} et à Ω_{kj} , où les chemins $\omega_1, \omega_2, \eta_1$ et η_2 sont définis par les factorisations

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1\omega_2 \quad \text{et} \quad \omega_1 \text{ va de } A_i \text{ à } s, \\ \eta &= \eta_1\eta_2 \quad \text{et} \quad \eta_1 \text{ va de } A_j \text{ à } s. \end{aligned}$$

A.2 Interprétation combinatoire des déterminants.

L'hypothèse de finitude nous permet alors définir des éléments de K en posant

$$a_{ij} = \sum_{\omega \in \Omega_{ij}} v(\omega). \quad (\text{A.2})$$

Si σ est une permutation des entiers $1, \dots, p$, nous notons $\text{inv}(\sigma)$ son nombre d'inversions, c'est-à-dire le nombre de couples (i, j) tels que $1 \leq i < j \leq p$ et $\sigma(j) > \sigma(i)$. La proposition suivante donne une expression du déterminant des a_{ij} .

¹En suivant le chemin ω de A_i à B_j .

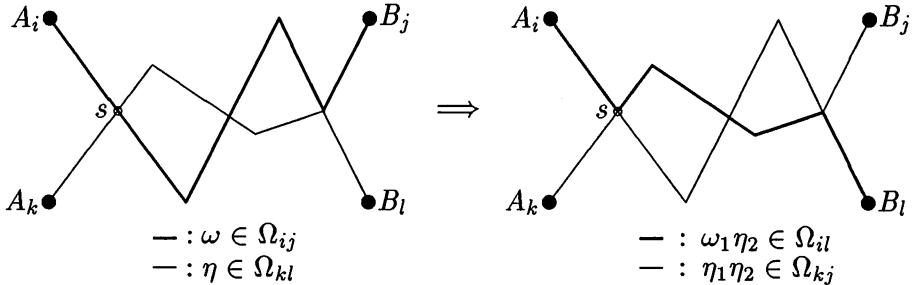


Figure A.1: l'hypothèse de stabilité.

Proposition 100 (Gessel, Viennot). — Soit Ω un ensemble de chemins sur \mathcal{E} vérifiant les hypothèses de finitude et de stabilité. Le déterminant des scalaires a_{ij} définis par (A.2) est égal à

$$\det(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq p} = \sum_{(\sigma; (\omega_1, \dots, \omega_p))} (-1)^{\text{inv}(\sigma)} v(\omega_1) \dots v(\omega_p), \quad (\text{A.3})$$

où la somme porte sur les couples formés d'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_p$ et d'une configuration $(\omega_1, \dots, \omega_p)$ de chemins sans sommets communs telles que, pour tout nombre entier i compris entre 1 et p , le chemin ω_i appartient à Ω et va de A_i à $B_{\sigma(i)}$.

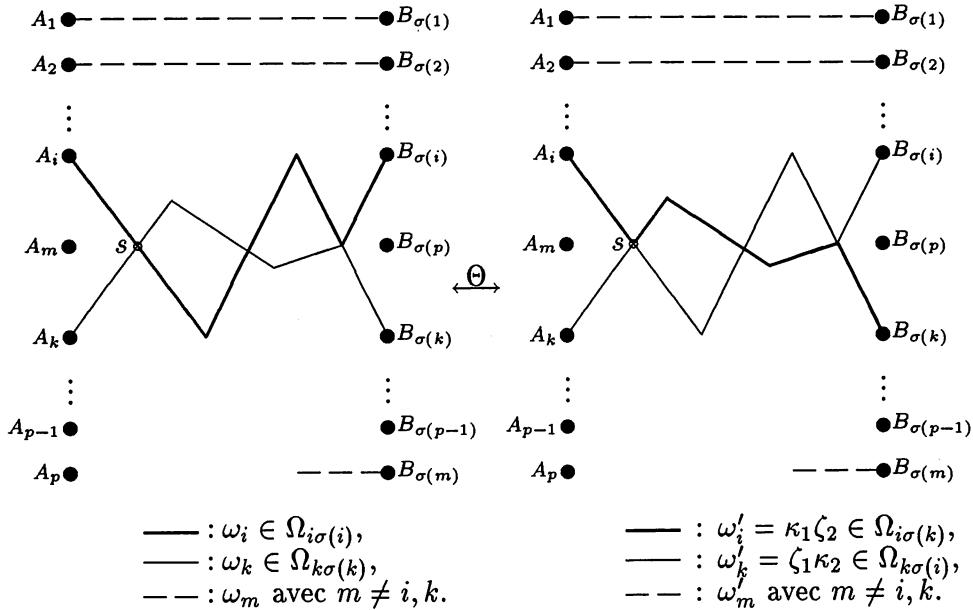
Démonstration : l'expression usuelle d'un déterminant en fonction de ses éléments, ainsi que la définition des scalaires a_{ij} , conduisent aux égalités

$$\begin{aligned} \det(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq p} &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} (-1)^{\text{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \dots a_{p\sigma(p)}, \\ &= \sum_{(\sigma; (\omega_1, \dots, \omega_p)) \in C} (-1)^{\text{inv}(\sigma)} v(\omega_1) \dots v(\omega_p), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

où la somme est étendue à l'ensemble C des couples formés d'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_p$ et d'une configuration $(\omega_1, \dots, \omega_p)$ de chemins telles que, pour tout nombre entier i compris entre 1 et p , le chemin ω_i appartient à $\Omega_{i\sigma(i)}$.

Nous notons \mathcal{NC} le sous-ensemble de C des couples dont la configuration est constituée de chemins *sans sommets communs*. Il s'agit de prouver que le domaine de la somme (A.4) se restreint à \mathcal{NC} . Supposons qu'il existe une involution $\Theta : C \setminus \mathcal{NC} \longrightarrow C \setminus \mathcal{NC}$ vérifiant la condition suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \Theta(\sigma; (\omega_1, \dots, \omega_p)) = (\sigma'; (\omega'_1, \dots, \omega'_p)), \\ \text{alors } (-1)^{\text{inv}(\sigma)} = -(-1)^{\text{inv}(\sigma')} \text{ et } v(\omega_1) \dots v(\omega_p) = v(\omega'_1) \dots v(\omega'_p). \end{array} \right. \quad (\text{A.5})$$

Figure A.2: l'action de l'involution Θ sur les configurations de chemins.

Les termes de la somme (A.4) qui correspondent aux éléments de $C \setminus NC$ se simplifient alors deux à deux, et l'égalité (A.3) est démontrée.

Voici comment nous construisons l'involution Θ . Soit $(\sigma; (\omega_1, \dots, \omega_p))$ un élément de $C \setminus NC$. Nous notons i le plus petit entier $m \in \{1, \dots, p\}$ tel que ω_m possède un sommet commun avec un autre chemin de la configuration $(\omega_1, \dots, \omega_p)$.

Soit alors s le premier sommet de ω_i (en le parcourant de A_i à $B_{\sigma(i)}$) qui appartient à un autre chemin de la configuration $(\omega_1, \dots, \omega_p)$. Soit enfin k le plus petit entier m différent de i tel que le chemin ω_m passe par s . Par construction, l'entier k est en fait strictement supérieur à i .

La situation que nous venons de décrire est tracée dans la partie gauche de la figure A.2. Le chemin ω_i se factorise en $\kappa_1 \kappa_2$ où κ_1 va de A_i à s et κ_2 va de s à $B_{\sigma(i)}$. De même, le chemin ω_k se factorise en $\zeta_1 \zeta_2$ où ζ_1 va de A_k à s et ζ_1 va de s à $B_{\sigma(k)}$. Soit τ la transposition de S_p qui échange $\sigma(i)$ et $\sigma(k)$.

Nous définissons alors le couple $\Theta(\sigma; (\omega_1, \dots, \omega_p)) = (\sigma'; (\omega'_1, \dots, \omega'_p))$ par les égalités suivantes :

$$\sigma' = \tau \sigma, \tag{A.6}$$

$$\omega'_m = \omega_m \text{ pour } m \text{ différent de } i \text{ et } k, \tag{A.7}$$

$$\omega'_i = \kappa_1 \zeta_2, \tag{A.8}$$

$$\omega'_k = \zeta_1 \kappa_2. \tag{A.9}$$

La configuration $(\omega'_1, \dots, \omega'_p)$ est tracée sur la partie droite de la figure A.2.

Le chemin ω'_i est un chemin sur \mathcal{E} allant de A_i à $B_{\sigma(k)} = B_{\sigma'(i)}$. L'hypothèse de stabilité de la page 194 montre alors que $\omega'_i \in \Omega_{i\sigma'(i)}$. Le même raisonnement prouve que $\omega'_k \in \Omega_{k\sigma'(k)}$. De plus, ω'_i et ω'_k ont un sommet commun : le sommet s . L'ensemble d'arrivée de l'application Θ est donc $C \setminus NC$.

Il est facile de montrer ensuite que Θ est une involution et qu'elle vérifie la condition (A.5).

□

A.3 Une variante.

Dans le deuxième chapitre de cette thèse, nous sommes amenés à calculer des déterminants dont les éléments sont des sommes de valuations de certains chemins sur $\mathcal{E} = \mathbb{Z}^2$. L'ensemble Ω de ces chemins ne satisfaisant plus l'hypothèse de stabilité énoncée à la page 194, nous allons donner ci-dessous un résultat analogue à la proposition 100, en modifiant de façon adéquate le domaine de la somme (A.3). Les notations adoptées sont les mêmes qu'au paragraphe précédent.

Notre variante consiste à restreindre le domaine de définition de l'involution Θ . Pour cela, nous disons qu'un couple $(\omega, \eta) \in \Omega_{ij} \times \Omega_{kl}$ — ces notations sont définies par (A.1) — est *stable* s'il vérifie les deux conditions suivantes.

- Les chemins ω et η ont au moins un sommet commun.
- Parmi les sommets communs à ω et η , il en existe un, noté s , tel que les chemins

$$\omega_1 \eta_2 \quad \text{et} \quad \omega_2 \eta_1$$

appartiennent respectivement à Ω_{il} et à Ω_{kj} , où les chemins $\omega_1, \omega_2, \eta_1$ et η_2 sont définis par les factorisations

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1 \omega_2 \quad \text{et} \quad \omega_1 \text{ va de } A_i \text{ à } s, \\ \eta &= \eta_1 \eta_2 \quad \text{et} \quad \eta_1 \text{ va de } A_j \text{ à } s. \end{aligned}$$

Lorsqu'il s'agira de choisir un tel sommet, nous supposerons toujours que s désigne le premier d'entre eux (en parcourant ω de son origine à son arrivée).

Nous notons $S\Omega \subset \Omega^2$ le sous-ensemble des couples stables. Dire que Ω satisfait l'hypothèse de stabilité, c'est donc dire que tous les couples de Ω^2 ayant un sommet commun sont stables.

Nous rappelons que C et NC désignent les ensembles introduits au cours de la démonstration de la proposition 100. Nous notons

$$SNC \subset C \tag{A.10}$$

le sous-ensemble de C dont les éléments $(\sigma; (\omega_1, \dots, \omega_p))$ sont tels que la configuration $(\omega_1, \dots, \omega_p)$ ne contient aucun couple stable. Nous avons les inclusions $\mathcal{NC} \subset \mathcal{SNC} \subset C$. Il y a donc deux sortes de configurations possibles pour les éléments de \mathcal{SNC} : celles qui contiennent exclusivement des chemins sans sommet commun et celles dont les chemins se coupent, mais ne sont pas stables. La proposition suivante généralise la proposition 100.

Proposition 101. — *Soit Ω un ensemble de chemins allant des points A_i aux points B_j et satisfaisant l'hypothèse de finitude. Le déterminant des scalaires a_{ij} définis par (A.2) est égal à*

$$\det(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq p} = \sum_{(\sigma; (\omega_1, \dots, \omega_p)) \in \mathcal{SNC}} (-1)^{\text{inv}(\sigma)} v(\omega_1) \dots v(\omega_p), \quad (\text{A.11})$$

où la somme porte sur les couples formés d'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_p$ et d'une configuration $(\omega_1, \dots, \omega_p)$ appartenant à l'ensemble \mathcal{SNC} défini par (A.10).

Démonstration : il suffit de construire une involution $S\Theta : C \setminus \mathcal{SNC} \longrightarrow C \setminus \mathcal{SNC}$ vérifiant la condition (A.5). La seule différence avec la construction de Θ^2 réside dans la détermination de i et k : ces entiers sont tels que (i, k) est le plus petit couple, pour l'ordre lexicographique usuel, vérifiant la propriété: " (ω_i, ω_k) est stable".

□

Un calcul de déterminant se ramène alors, dans le cas le plus général, à la détermination de l'ensemble \mathcal{SNC} . Cette tâche est évidemment facilitée lorsque la plupart des couples de Ω^2 ayant un sommet commun sont stables. C'est le cas pour les calculs menés au deuxième chapitre.

²Voir la démonstration de la proposition 100 pour toutes les notations utilisées.

Annexe B

Les relations de tassemement et l'algorithme quotient-différence

L'algorithme quotient-différence, ou qd-algorithme, introduit par Rutishauser [73], vise à calculer les coefficients du développement en fraction continue de Stieltjes d'une série formelle f à partir de ses coefficients. Grâce à l'interprétation des fractions continues de Stieltjes et de Jacobi basées sur les chemins valués, Viennot [87] a donné une interprétation combinatoire de cet algorithme, faisant intervenir des opérations de tassemement des chemins. Nous suivons de près son exposé.

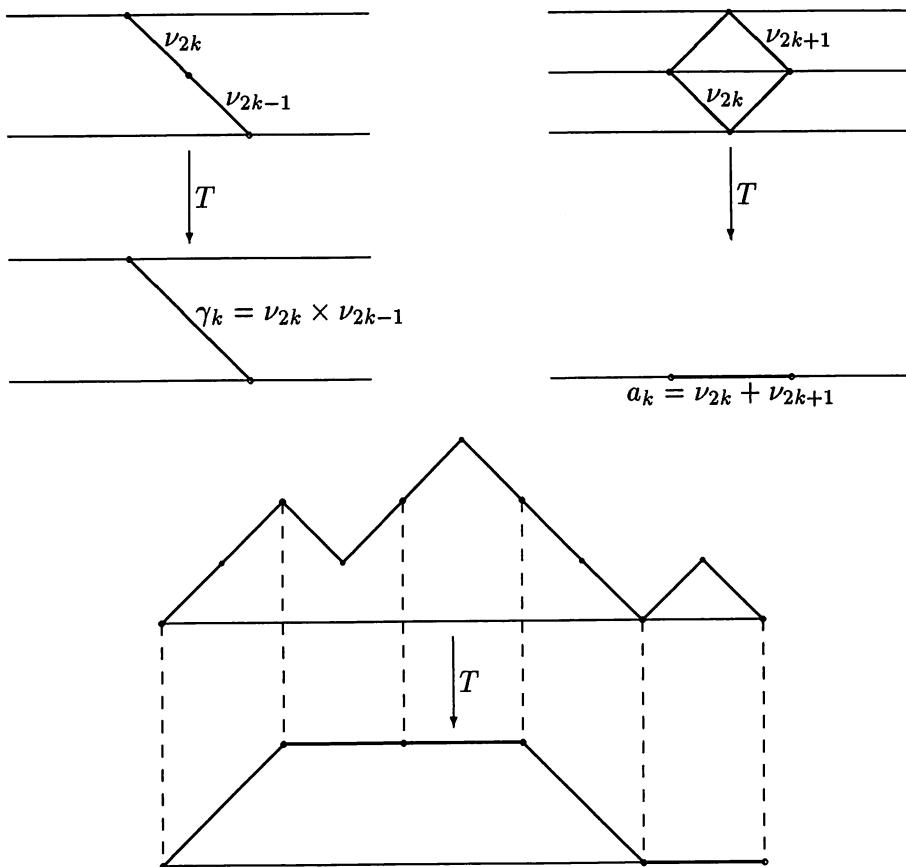
B.1 Tassemements de chemins.

Tasser un chemin de Dyck ω consiste à parcourir ses pas de deux en deux et, pour chaque couple de pas, à définir un pas d'un chemin de Motzkin. Suivant que le parcours débute au premier ou au deuxième sommet de ω , nous obtenons deux applications de tassemement, notées T et T^+ .

B.1.1 Tassemement T .

Si ω est un chemin de Dyck de longueur $2n \geq 2$, le tassemement $\eta = T(\omega)$ est le chemin de Motzkin de longueur $n \geq 1$ défini par la figure B.1 : dans cette figure, la partie supérieure explicite la définition "locale" de T et la partie inférieure donne un exemple. Nous définissons de plus l'image par T du chemin de Dyck de longueur 0 comme étant le chemin de Motzkin de longueur 0.

Nous utilisons cette première application de tassemement pour interpréter l'égalité entre une fraction continue de Stieltjes S et une fraction continue de Jacobi J ,

Figure B.1: le tassemement T .

respectivement données par :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1 -} \frac{\nu_1 t}{1 -} \cdots \frac{\nu_k t}{1 -} \cdots, \\ J &= \frac{1}{1 - a_0 t -} \frac{\gamma_1 t^2}{1 - a_1 t -} \cdots \frac{\gamma_k t^2}{1 - a_k t -} \cdots. \end{aligned}$$

Lemme 102. — L'égalité $J = S$, considérée comme une égalité entre deux séries formelles, est réalisée si et seulement si

$$a_0 = \nu_1 \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1 \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a_k &=& \nu_{2k} + \nu_{2k+1}, \\ \gamma_k &=& \nu_{2k-1} \times \nu_{2k}. \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

Démonstration : la figure B.1 nous indique comment déterminer l'ensemble des antécédents par T d'un chemin de Motzkin η donné. Chaque pas horizontal

au niveau $k \geq 1$ de η provient d'un couple de pas qui sont soit adjacents à un pic, soit adjacents à un creux. En revanche, un pas montant de η (*resp.* un pas descendant, un pas horizontal au niveau 0) provient d'un seul couple de pas montants (*resp.* de pas descendants, de pas adjacents à un pic au niveau 1). Si les suites ν , a et γ satisfont les relations (B.1), il est alors clair que nous avons

$$\nu(\eta) = \sum_{\substack{\omega \text{ chemin de Dyck} \\ |\omega|=2n \text{ et } T(\omega)=\eta}} v(\omega) \quad (\text{B.2})$$

pour tout chemin de Motzkin η de longueur n . L'égalité $S = J$ en résulte immédiatement.

L'implication réciproque résulte de l'unicité du développement d'une série formelle en fraction continue de Stieltjes ou de Jacobi.

□

B.1.2 Tassement T^+ .

Si ω est un chemin de Dyck de longueur $2n+2 \geq 2$, le tassement $\eta = T^+(\omega)$ est un chemin de Motzkin de longueur $n \geq 0$ défini par la figure B.2. En particulier, l'image par T^+ du chemin de Dyck de longueur 2 est le chemin de Motzkin de longueur 0. Nous utilisons cette seconde application de tassement pour interpréter l'égalité $S = 1 + \alpha t J^+$, où α est un élément du corps K et J^+ la fraction continue de Jacobi associée aux suites a^+ et γ^+ .

Lemme 103. — *L'égalité $S = 1 + \alpha t J^+$, considérée comme une égalité entre deux séries formelles, est réalisée si et seulement si*

$$\alpha = \nu_1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_k^+ &= \nu_{2k+1} + \nu_{2k+2} & \forall k \geq 0, \\ \gamma_k^+ &= \nu_{2k} \times \nu_{2k+1} & \forall k \geq 1. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

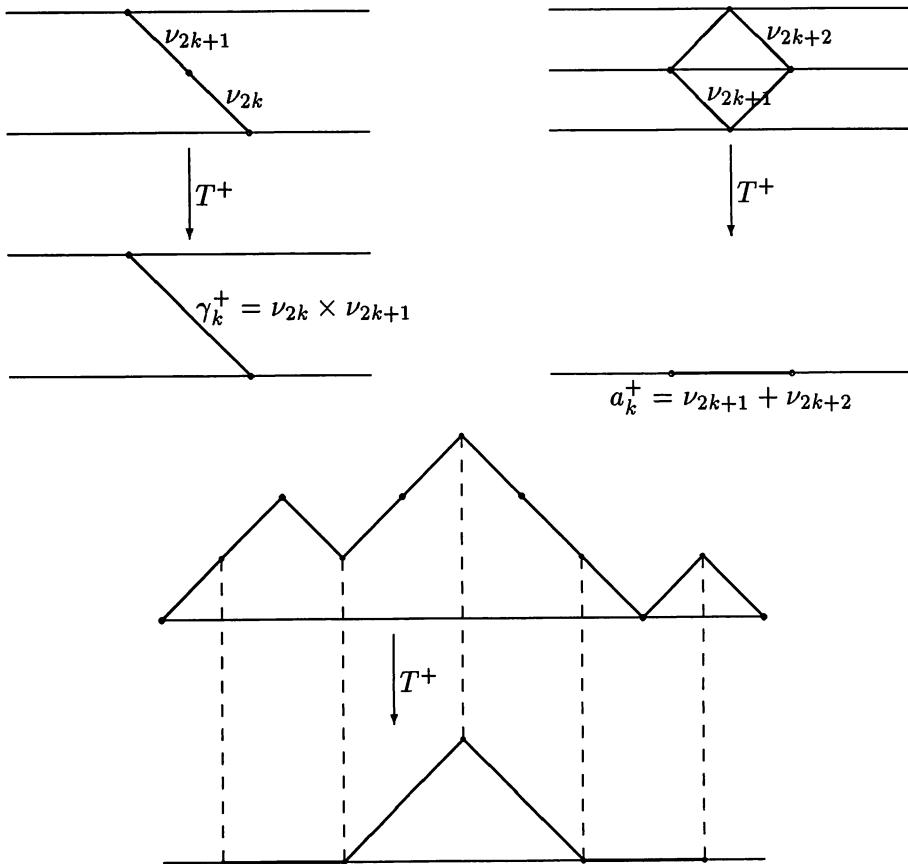
Démonstration : nous supposons que les relations (B.3) sont vérifiées. Alors l'analogue de l'égalité (B.2) est le suivant :

$$\nu_1 v(\eta) = \sum_{\substack{\omega \text{ chemin de Dyck} \\ |\omega|=2n+2 \text{ et } T^+(\omega)=\eta}} v(\omega) \quad (\text{B.4})$$

pour tout chemin de Motzkin η de longueur n . L'égalité $S = 1 + \alpha t J^+$ en résulte immédiatement.

Si maintenant $S = 1 + \alpha t J^+$, nous avons nécessairement $\alpha = \nu_1$: comparer les coefficients de t dans chaque membre. La fin de la démonstration résulte, comme précédemment, de l'unicité du développement d'une série formelle en fraction continue de Stieltjes ou de Jacobi.

□

Figure B.2: le tassemment T^+ .

B.2 Le qd-algorithme.

B.2.1 La qd-transformation.

Munis des lemmes 102 et 103, nous pouvons maintenant décrire une étape élémentaire du qd-algorithme, qui consiste à interpréter l'égalité $S = 1 + \alpha t S^+$, où S et S^+ sont les deux fractions continues de Stieltjes associées aux suites ν et ν^+ .

Lemme 104. — *L'égalité $S = 1 + \alpha t S^+$, considérée comme une égalité entre deux séries formelles, est réalisée si et seulement si*

$$\begin{cases} \alpha &= \nu_1, \\ \nu_1 + \nu_2 &= \nu_1^+, \end{cases} \text{ et } \forall k \geq 1 \begin{cases} \nu_{2k+1} + \nu_{2k+2} &= \nu_{2k}^+ + \nu_{2k+1}^+ & \forall k \geq 0, \\ \nu_{2k} \times \nu_{2k+1} &= \nu_{2k-1}^+ \times \nu_{2k}^+ & \forall k \geq 1. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Démonstration : nous introduisons la fraction de Jacobi J^+ telle que $S^+ = J^+$. D'après le lemme 102, les coefficients de J^+ vérifient

$$a_0^+ = \nu_1^+ \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_k^+ &= \nu_{2k}^+ + \nu_{2k+1}^+ \quad \forall k \geq 0, \\ \gamma_k^+ &= \nu_{2k-1}^+ \times \nu_{2k}^+ \quad \forall k \geq 1. \end{cases}$$

L'égalité $S = 1 + \alpha t S^+$ est alors équivalente à $S = 1 + \alpha t J^+$. Le lemme 103 permet de conclure. \square

Nous remarquons que la condition "exceptionnelle" $\nu_1 + \nu_2 = \nu_1^+$ s'écrit aussi $\nu_1 + \nu_2 = 0 + \nu_1^+$. Ceci permet, en convenant que $\nu_0 = \nu_0^+ = \nu_{-1}^+ = 0$, d'exprimer les conditions (B.5) de façon plus concise. Viennot [87] propose d'appeler *qd-transformation* et de noter QD l'application qui fait correspondre, à la suite $\nu = (\nu_k)_{k \geq 1}$, la suite $\nu^+ = (\nu_k)_{k \geq 1}$ définie (si elle existe) par

$$\forall k \geq 0 \quad \begin{cases} \nu_{2k+1} + \nu_{2k+2} &= \nu_{2k}^+ + \nu_{2k+1}^+, \\ \nu_{2k} \times \nu_{2k+1} &= \nu_{2k-1}^+ \times \nu_{2k}^+, \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

en convenant que $\nu_0 = \nu_0^+ = \nu_{-1}^+ = 0$. Nous pouvons alors énoncer le lemme 104 comme suit : les fractions de Stieltjes S et S^+ vérifient $S = 1 + \nu_1 t S^+$ si et seulement si $\nu^+ = \text{QD}(\nu)$.

B.2.2 Le qd-algorithme.

Traduire l'égalité $S = f$ entre une fraction de Stieltjes et une série formelle se fait en calculant les itérés successifs de la suite des coefficients de S par la qd-transformation. En posant $S = S^{(0)}$ et $\nu^{(n)} = \text{QD}^n(\nu)$, nous obtenons, avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned} f &= S^{(0)}, \\ &= 1 + \nu_1^{(0)} t S^{(1)}, \\ &\vdots \\ &= 1 + \nu_1^{(0)} t + \nu_1^{(0)} \nu_1^{(1)} t^2 + \cdots + \nu_1^{(0)} \nu_1^{(1)} \cdots \nu_1^{(n-1)} t^n S^{(n)}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à identifier les coefficients c_n de f et à appliquer successivement le lemme 104 aux égalités $S^{(n)} = 1 + \nu_1^{(n)} t S^{(n+1)}$ pour obtenir le théorème suivant.

Théorème 105. — Soit $f = \sum_{n \geq 0} c_n t^n$ une série formelle de terme constant $c_0 = 1$. Nous définissons les séries $f^{(n)}$ pour $n \geq 0$ par

$$f = 1 + c_1 t + \cdots + c_n t^n f^{(n)}.$$

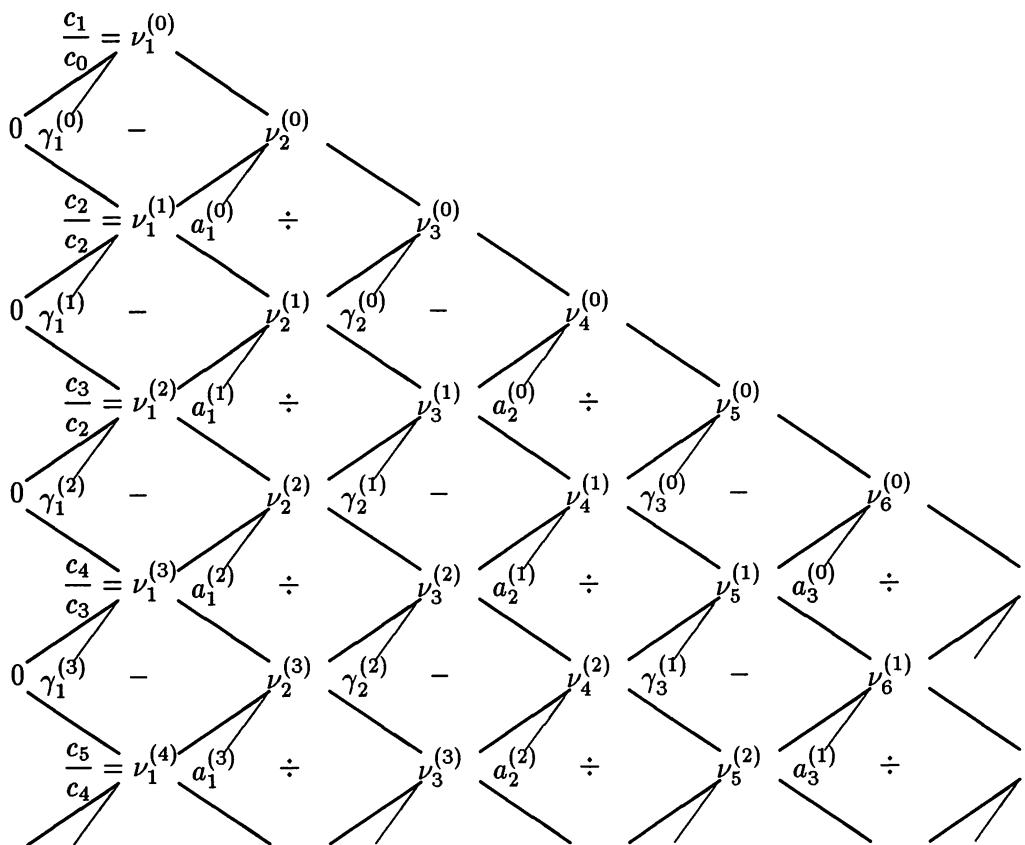


Figure B.3: l'algorithme quotient-différence.

1) Nous supposons que chaque $f^{(n)}$ admet un développement en fraction continue de Stieltjes, noté $S^{(n)}$, dont la suite des coefficients est $\nu^{(n)} = (\nu_k^{(n)})_{k \geq 1}$. Alors les coefficients de $f = f^{(0)}$ et ceux des fractions $S^{(n)}$ sont liés par les relations

$$\forall n \geq 1, \quad \nu_1^{(n)} = \frac{c_{n+1}}{c_n}, \quad (\text{B.7})$$

$$\forall n \geq 0, \quad \forall k \geq 1, \quad \begin{cases} \nu_{2k+1}^{(n)} + \nu_{2k+2}^{(n)} &= \nu_{2k}^{(n+1)} + \nu_{2k+1}^{(n+1)}, \\ \nu_{2k}^{(n)} \times \nu_{2k+1}^{(n)} &= \nu_{2k-1}^{(n+1)} \times \nu_{2k}^{(n+1)}. \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

2) Réciproquement, si une famille $(\nu_k^{(n)})_{n \geq 0, k \geq 1}$ de scalaires non nuls vérifie les relations (B.7) et (B.8), alors chaque $f^{(n)}$ admet un développement en fraction de Stieltjes et la suite des coefficients de son développement est $\nu^{(n)} = (\nu_k^{(n)})_{k \geq 1}$.

La figure B.3 indique la présentation usuelle, sous forme de graphe, des relations (B.7) et (B.8) : les sommets sont les coefficients $\nu_k^{(n)}$ et les faces sont étiquetées par une opération, qui est tantôt le quotient, tantôt la différence. Les relations (B.7) y sont mentionnées en toutes lettres, tandis que les relations (B.8) résultent de l'application des *règles du losange*, mentionnées à gauche dans la figure B.4.

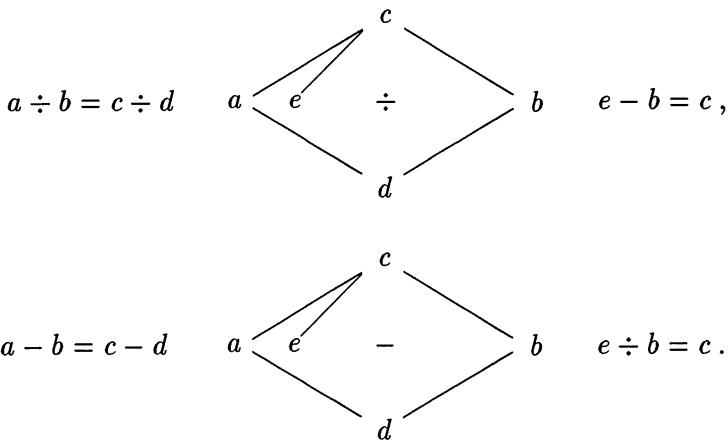


Figure B.4: les règles du losange et du losange partiel.

La figure B.3 donne des renseignements supplémentaires, qui ne figurent pas dans l'énoncé du théorème 105 : il s'agit de la valeur des coefficients $a_k^{(n)}$ et $\gamma_k^{(n)}$ des fractions de Jacobi telles que $f^{(n)} = J^{(n)}$. Il suffit pour les obtenir de transcrire les relations du lemme 102 en convenant pour cela des *règles du losange partiel*, mentionnées à droite sur la figure B.4.

Bibliographie

- [1] Achuthan P. and Ponnuswamy S., On general two-point continued fraction expansions and Padé tables, *J. Approx. Theory* **64** (1991), 291–314.
- [2] Allouche J.-P., Sur le développement en fraction continue de certaines séries formelles, *C. R. Acad. Sc. Paris* **307** (1988), 631–633.
- [3] Andrews G. E., Ramanujan's "lost" notebook III, the Rogers-Ramanujan continued fraction, *Adv. in Math.* **41** (1981), 186–208.
- [4] Arquès D., Les hypercartes planaires sont des arbres très bien étiquetés, *Discrete Math.* **58** (1986), 11–24.
- [5] Arquès D. et Françon J., Arbres bien étiquetés et fractions multicontinues, *Ninth colloquium on trees in algebra and programming*, B. Courcelle ed., Cambridge University Press, Cambridge (1984), pp 51–61.
- [6] Arquès D., Jacques I. et Orieux K., Équations fonctionnelles liant la série génératrice des cartes planaires à celle des mots de Dyck, *Actes du 26^{ème} Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, A. Kerber ed., publications de l'IRMA, Université Louis Pasteur, Strasbourg (1991).
- [7] Baker G. A. et Graves-Morris P., *Padé Approximants*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, G.C. Rota ed., Cambridge University Press, Cambridge (1984).
- [8] Biane Ph., Permutations suivant le type d'excédance et le nombre d'inversions et interprétation combinatoire d'une fraction continue de Heine, *Europ. J. Combinatorics* **14** (1993), 277–284.
- [9] Bousquet-Mélou M., Oeuvres complètes dédicacées par l'auteur sur papier du moulin d'Ambert, reliure en cuir de jeune lama avec incrustation de diamants (édition hors commerce, totalement introuvable de nos jours).
- [10] Bousquet-Mélou M., Convex polyominoes and algebraic languages, *J. Phys. : Math. Gen.* **25** (1992), 1935–1944.

- [11] Bousquet-Mélou M. et Viennot X. G., Empilements de segments et q -énumération de polyominos convexes dirigés, *J. Combin. Theory Ser. A* **60** (1992), 196–224.
- [12] Brezinski C., *Padé-type approximation and orthogonal polynomials*, Birkhäuser, Basel (1980).
- [13] Brezinski C., The long story of continued fractions and Padé approximants in *Padé approximation and its applications*, M. G. de Bruin and H. van Rossum eds, Lecture Notes in Math. n° 888, Springer, Berlin (1981).
- [14] Brezinski C., Outlines of Padé approximation, in *computational aspects of complex analysis*, H. Werner, L. Wuytack, E. Ng and H.J. Brunger ed., NATO advanced studies Reidel Publishing Co., Dordrecht-Boston (1982), pp 1–50.
- [15] Cabay S. and Choi D. K., Algebraic computation of scaled Padé functions, *SIAM J. Comput.*, **15** (1986), 243–270.
- [16] Cartier P. et Foata D., *Problèmes combinatoires de permutations et de réarrangements*, Lecture Notes in Math. n° 85, Springer, Berlin (1969).
- [17] Chang S.J. and Lin K.Y., Rigorous results for the number of convex polygons on square and honeycomb lattices, *J. Phys. A: Math. Gen.* **3** (1988) 2635–2642.
- [18] Christol G., Kamae T., Mendès France M. et Rauzy G., Suites algébriques, automates et substitutions, *Bull Soc. Math. France* **108** (1980), 401–419.
- [19] Cooper S. C., Jones W. B. and Magnus A., General T-fraction expansions for ratio of hypergeometric functions, in *Continued fractions and Padé approximants*, C. Brezinski ed., North Holland, Amsterdam (1990), pp 53–63.
- [20] Cooper S. C., Magnus A. and McCabe J. H., On the non-normal two-point Padé table, *J. Comput. Appl. Math.* **16** (1986), 371–380.
- [21] Cori R., *Un code pour les graphes planaires et ses applications*, Astérisques n° 27, Publications de la Société Mathématique de France (1975).
- [22] Cori R. et Vauquelin B., Planar maps are well labeled trees, *Can J. Math.* **33** (1981), 1023–1042.
- [23] Couperin F., Les baricades mystérieuses, *Second Livre de Clavecin : sixième ordre*, Paris (~1717).
- [24] Cuyt A., A review of multivariate Padé approximation theory, *J. Comp. Appl. Math.* **12** (1985), 221–232.

- [25] Cuyt A. and Verdonk B., A review of branched continued fraction theory for the construction of multivariate rational approximants in *Continued fractions and Padé approximants*, C. Brezinski ed., North Holland, Amsterdam (1990), pp 75–83.
- [26] de Bruin M. G., Simultaneous Padé approximation and orthogonality in *Polynômes orthogonaux et leurs applications*, C. Brezinski, A. Draux, A.P. Magnus, P. Maroni, A. Ronveaux eds, Lecture Notes in Math. n° 1171, Springer, Berlin (1977), pp 139–157.
- [27] Delest M. et Dulucq S., Enumeration of directed column-convex animals with a given perimeter and area, *Croatica Chemica Acta* **66** (1993), 59–80.
- [28] Delest M. et Viennot X. G., Algebraic languages and polyominoes enumeration, *Theor. Comp. Sci.* **34** (1984), 169–206.
- [29] de Medicis A., *Aspects combinatoires des nombres de Stirling, des polynômes orthogonaux de Sheffer et de leurs q-analogues*, thèse de doctorat, publications du LACIM numéro 13, Université du Québec à Montréal (1992).
- [30] de Medicis A. et Viennot X. G., Moments des q -polynômes de Laguerre et la bijection de Foata-Zeilberger, *Adv. Appl. Math.* **3** (1994), 262–304.
- [31] Désarménien J. et Foata D., Fonctions symétriques et séries hypergéométriques basiques multivariées, *Bull. Soc. Math. France* **113** (1985), 3–22.
- [32] Draux A., Two-point Padé type and Padé approximants in a non-commutative algebra, in *Rational approximation and its applications in mathematics and physics*, J. Gilewicz, M. Pindor and W. Siemaszko eds, Lecture Notes in Math. n° 1237, Springer, Berlin (1985), pp 51–62.
- [33] Dumont D. et Kreweras G., Sur le développement d'une fraction continue liée à la série hypergéométrique et son interprétation en termes de records et anti-records dans les permutations, *Europ. J. of Comb.* **9** (1989), 27–32.
- [34] Fédou J.-M., *Grammaires et q-énumération de polyominos*, thèse de doctorat, LaBRI, Université Bordeaux 1 (1989).
- [35] Fédou J.-M. et Delest M., Enumeration of skew Ferrers diagrams, *Discrete Math.* **112** (1993), 65–79.
- [36] Fédou J.-M. et Viennot X. G., Chains in poset and enumeration of skew Ferrers diagrams, prépublication du Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique, **90-05** (1990).
- [37] Flajolet Ph., Combinatorial aspects of continued fractions, *Discrete Math.* **32**, (1980) 125-161.

- [38] Flajolet Ph., Françon J. et Vuillemin J., Sequence of operations analysis for dynamic data structures, *J. of Algorithms* **1** (1980), 111–141.
- [39] Foata D., Combinatoire des identités sur les polynômes orthogonaux, *Proceedings of the international congress of mathematicians*, (Warsaw 1983), 1541–1553.
- [40] Foata D. and Zeilberger D., Denert's permutation statistics is indeed Euler–Mahonian, *Studies in App. Math.* **83** (1990), 31–59.
- [41] Françon J., Arbres bien étiquetés et fractions multicontinues, prépublication de l'université de Haute Alsace **6** (1982).
- [42] Françon J. et Viennot G., Permutations selon les pics, creux, doubles-montées, doubles-descentes, nombres d'Euler et de Genocchi, *Discrete Math.* **28** (1979), 21–35.
- [43] Frank E., Corresponding type continued fractions, *Amer. J. of Math.*, **52** (1946), 89–108.
- [44] Frank E., A new class of continued fraction expansions for the ratios of Heine functions I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **88** (1958), 453–476.
- [45] Frank E., A new class of continued fraction expansions for the ratios of Heine functions II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **95** (1960), 17–26.
- [46] Frank E., A new class of continued fraction expansions for the ratios of Heine functions III, *Trans. Amer. Math. Soc.* **96** (1960), 312–321.
- [47] Geddes K. O., Symbolic computation of Padé approximants, *ACM Trans. Math. Software*, **5** (1979), 218–233.
- [48] Gessel I., A non commutative generalization and q -analog of the Lagrange inversion formula, *Trans. Amer. Math. Soc.* **257** (1980), 455–482.
- [49] Gessel I. and Viennot G., Binomial determinants, paths and hook length formulae, *Adv. in Math.* **58** (1985), 300–321.
- [50] Gilewicz J., *Approximants de Padé*, Lecture Notes in Math. n° 667, Springer, Berlin (1978).
- [51] Goulden I. P. and Jackson D. M., *Combinatorial enumeration*, John Wiley and Sons, New-York (1983).
- [52] Goulden I. P. and Jackson D. M., Path generating functions and continued fractions, *J. Combin. Theory A* **41** (1986), 1–10.
- [53] Gragg W.B., The Padé table and its relation to certain algorithms of numerical analysis, *SIAM Rev.* **14** (1972) 1–62.

- [54] Jones W. B. and Thron W. J., Two-point Padé table and T-fractions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977), 388–390.
- [55] Jones W. B. and Thron W. J., *Continued fractions, Analytic Theory and Applications*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, G.C. Rota ed., Cambridge University Press, Cambridge (1984).
- [56] Kim D., A combinatorial approach to biorthogonal polynomials, *SIAM J. on Discrete Math.* **5** (1992), 413–421.
- [57] Kuchminskaya Kh. I. and Siemaszko W., Rational approximation and interpolation of functions by branched continued fractions, in *Rational approximation and its applications in mathematics and physics*, J. Gilewicz, M. Pindor and W. Siemaszko ed., Lecture Notes in Math. n° 1237, Springer, Berlin (1985), pp 24–40.
- [58] Labelle J., Langages de Dyck généralisés, *Ann. Sci. Math. Québec* **17** (1993), 53–64.
- [59] Labelle J. et Yeh Y.-N., Generalized Dyck paths, *Disc. Math.* **82** (1990), 1–6.
- [60] Lange L. J., δ -fraction expansions of analytic functions, *SIAM J. Math. Anal.* **14** (1983) 323–368.
- [61] Leighton W. and Scott W. T., A general continued fraction expansion, *Bull. Amer. Math. Soc.* **45** (1939), 596–605.
- [62] Loxtion J. H. and Van der Poorten J., Multi-dimensional generalisations of the Padé table, *Rocky Mountains J. Math.* **9** (1979), 385–393.
- [63] McCabe J. H., The quotient-difference algorithm and the Padé table : an alternative form and a general continued fraction, *Math. Comp.* **41** (1993), 183–197.
- [64] McCabe J. H. and Murphy J. A., Continued fractions which correspond to power series expansions at two points, *J. Inst. Maths. Applics.* **17** (1976), 233–247.
- [65] Magnus A., Expansion of power series into P-fractions, *Math. Z.* **80** (1962) 209–216.
- [66] Magnus A., P-fractions and the Padé table, *Rocky Mountains J. Math.* **4** (1974), 257–259.
- [67] Maroni P., Une généralisation du théorème de Favart-Shohat sur les polynômes orthogonaux, *C. R. Acad. Sc. Paris* **293** (1981), 19–22.

- [68] Maroni P., L'orthogonalité et les récurrences de polynômes d'ordre supérieur à deux, *Ann. Fac. Sc. Toulouse* **10** (1989), 105–139.
- [69] Mills W. H. and Robbins D. P., Continued fractions for certain algebraic power series, *J. Number Theory* **23** (1986), 388–404.
- [70] Ramanujan S., *Collected papers*, G. H. Hardy, P. V. Seshu Aiyar and B. M. Wilson eds, Cambridge University Press, London (1927), reprinted by Chelsea Publishing Compagny, New-York (1962).
- [71] Roblet E. et Viennot X. G., Théorie combinatoire des T-fractions et approximants de Padé en deux points, proceedings of the fifth conference *Formal power series and algebraic combinatorics*, A. Barlotti, M. Delest and R. Pinzani eds, Firenze (1993).
- [72] Rogers L. J., Second memoir on the expansion of certain infinite products, *Proc. London Math. Soc.* **25** (1894), 318–343.
- [73] Rutishauser H., Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus, *Z. Angew. Math. Phys.* **5** (1954), 233–251.
- [74] Scott W. T. and Wall W., Continued fraction expansions for arbitrary power series, *Ann. of Math.* **41** (1940), 328–249.
- [75] Siemaszko W., Branched continued fractions for double power fractions, *J. Comp. Appl. Math.* **6** (1980), 121–125.
- [76] Siemaszko W. On some condition for convergence of branched continued fractions, in *Padé approximation and its applications*, H. Werner and H. J. Burger eds, Lecture Notes in Math. n° 888 Springer, Berlin (1981), 363–370.
- [77] Skorobogat'ko V. Ya., Branched continued fractions and convergence acceleration problems, in *Rational approximation and its applications in mathematics and physics*, J. Gilewicz, M. Pindor and W. Siemszko eds, Lecture Notes in Math. n° 1237, Springer, Berlin (1985), pp 46–50.
- [78] Thron W. J., Some properties of continued fraction $1 + d_0 z + K(\frac{z}{1+d_n z})$, *Bull. Amer. Math. Soc.* **54** (1948), 206–218.
- [79] Tutte W. T., A census of planar maps, *Can. J. Math.* **15** (1963), 249–271.
- [80] Van Iseghem J., Vector Padé approximants, in *11th IMACS World Congres Numer. Math. and Appl.*, Vichnevetski and Vignes eds, North Holland, Amsterdam, (1986).
- [81] Van Iseghem J., An extended cross rule for vector Padé approximants, *Appl. Numer. Math.* **2** (1986), 143–155.

- [82] Van Iseghem J., Vector orthogonal relations, Vector qd-algorithm, *J. Comput. Appl. Math.* **19**, (1987), 141–150.
- [83] Van Iseghem J., *Approximants de Padé vectoriels*, thèse de doctorat, Université des sciences et techniques de Lille Flandres-Artois (1987).
- [84] Viennot X. G., *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux*, notes de conférences données à l'UQAM (1983); réédition : hors-série n° 1, Publications du LACIM, Université du Québec à Montréal (1991).
- [85] Viennot X. G., A combinatorial theory for general orthogonal polynomials with extensions and applications in *Polynômes orthogonaux et leurs applications*, C. Brezinski, A. Draux, A.P. Magnus, P. Maroni, A. Ronveaux eds, Lecture Notes in Math. n° 1171, Springer, Berlin (1985), pp 139–157.
- [86] Viennot X. G., Heaps of pieces I : basic definitions and combinatorial lemmas, in *Combinatoire énumérative*, G. Labelle et P. Leroux eds, Lecture Notes in Math. n° 1234, Springer, Berlin (1985), pp 321–350.
- [87] Viennot X. G., A combinatorial interpretation of the quotient-difference algorithm, prépublication du LaBRI I-8611, Université de Bordeaux I, (1986).
- [88] Viennot X. G., Bijection for the Roger-Ramanujan reciprocal, *J. Indian Math. Soc.* **52** (1987), 171–183.
- [89] Viennot X. G., A survey of polyominoes enumeration, *Séries formelles et combinatoire algébrique*, P. Leroux et C. Reutenauer eds, publication du LACIM n° 11, Université du Québec à Montréal (1992), pp 399–420.
- [90] Wall H. S., *Analytic theory of continued fractions*, Chelsea Publishing Company, New-York (1948).
- [91] Zeng J., Records, antirecords et permutations discordantes, *Europ. J. Combinatorics* **10** (1989), 103–109.
- [92] Zeng J., Énumération de permutations et J-fractions continues, *Europ. J. Combinatorics* **14** (1993), 373–382.