

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

FONCTIONS DE BESSEL ET COMBINATOIRE

THÈSE  
PRÉSENTÉE  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

PAR

FRANCIS GASCON

SEPTEMBRE 2000

## REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur François Bergeron qui en 1995 m'a persuadé d'entreprendre un doctorat et qui, depuis lors, n'a ménagé ni ses encouragement ni ses idées. Je dois aussi ajouter qu'il est à l'origine du financement (via le LaCIM) que j'ai reçu au cours de mes cinq années de thèse. Sans lui, ce travail n'aurait pas été possible.

Je remercie également les membres de mon jury: François Bergeron, Serge Dulucq, Luc Favreau, Gilbert Labelle, et Pierre Leroux (qui a tenu le rôle de président du jury). Leurs commentaires et suggestions me fourniront du travail pour de nombreuses années.

Je veux aussi remercier tous ceux qui m'ont aidé et supporté d'une façon ou d'une autre:

- les professeurs de mathématiques de l'UQÀM et le personnel de soutien qui m'ont fait apprécier les mathématiques pendant plus de dix ans;
- les techniciens du LaCIM: Stéphanie Lanthier et François Strasbourg;
- mes amis Michel Bousquet et Bernard Wagneur, sans lesquels j'aurais étudié en biologie;
- les autres amis Martin et Sébastien Gascon, Hugues Fournier, Michel Fournier Francis Brousseau et tous les autres...
- mes parents, Nicole et Jean, les héros obscurs de cette affaire;
- finalement, ma conjointe Marie-Josée et mes deux petits amours Maude et Mathieu avec qui tout est possible.

## TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ .....	v
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE I	
SÉRIE DE BESSEL	
1.1 Définitions et résultats .....	5
1.2 Les séries de $q$ -Bessel .....	13
1.3 Séries différentiellement finies et $P$ -récursivité .....	17
1.4 Ordre et degré de l'équation différentielle satisfaite par $I_0^k I_1^n$ .....	21
CHAPITRE II	
FONCTIONS SYMÉTRIQUES ET TABLEAUX	
2.1 Diagrammes et tableaux .....	30
2.2 Fonctions symétriques .....	33
2.3 Déterminants de Gordon et identités .....	37
2.4 Fonctions symétriques différentiellement finies .....	44
2.5 $P$ -réurrences liées aux nombres $\tau_h(n)$ et $\tau_h^{(2)}(n)$ .....	46
2.6 Simplifications des séries $y_h(x)$ et $Y_h(x)$ .....	51
2.7 $q$ -Analogue .....	59
CHAPITRE III	
ÉNUMÉRATION DE TABLEAUX DE HAUTEUR BORNÉE	
3.1 Ordre des équations différentielles satisfaites par $y_h(x)$ et $Y_h(x)$ .....	61
3.2 Degré de l'équation différentielle dans le cas pair .....	63
3.3 Degré de l'équation différentielle dans le cas impair .....	73
3.4 Degré de l'équation différentielle dont $Y_h(x)$ est solution .....	77
3.5 Formules explicites .....	78

**CHAPITRE IV**  
**ESPÈCES DE BESSEL**

4.1 Espèces sur des couples d'ensembles de même cardinalité .....	87
4.2 Somme, produit et substitution .....	90
4.3 Propriétés des opérations .....	96
4.4 Autres opérations : pointage et dérivée .....	97
4.5 Couples de structures isomorphes .....	99
4.6 Théorème de dissymétrie pour les couples d'arbres isomorphes .....	105
4.7 Endofonctions de Bessel .....	109
4.8 Dénombrement de couples de $(q, t)$ -arborescences .....	112
4.9 Dénombrement d'espèces de Bessel via la décomposition moléculaire ..	114
<b>CONCLUSION</b> .....	118
<b>APPENDICE I</b> .....	119
<b>APPENDICE II</b> .....	127
<b>APPENDICE III</b> .....	132
<b>BIBLIOGRAPHIE</b> .....	135

## RÉSUMÉ

Les principaux sujets abordés dans cette thèse concernent l'énumération de tableaux standards de hauteur bornée ainsi que le dénombrement d'espèces de structures sur des couples d'ensembles de même cardinalité, les espèces de Bessel.

Le premier chapitre comporte les définitions et identités concernant les séries de Bessel modifiées de première espèce. On y rappelle également des résultats de la théorie des fonctions différentiellement finies et des suites  $P$ -récursives. On termine ce chapitre en énonçant des résultats originaux concernant l'ordre et le degré d'équations différentielles dont certains produits de séries de Bessel sont des solutions.

Le deuxième chapitre traite des fonctions symétriques. En particulier, on rappelle les liens entre les fonctions symétriques et les tableaux standards ainsi que la notion de fonctions symétriques différentiellement finies. On y présente ensuite des conjectures (voir [6]) sur la forme particulière des  $P$ -réurrences satisfaites par les suites de nombres  $\tau_h(n)$  et  $\tau_h^{(2)}(n)$ , respectivement le nombre de tableaux standards de hauteur bornée par  $h$  et le nombre de couples de tableaux standards de hauteur bornée par  $h$ . La fin de ce chapitre est consacrée à l'étude de certains paramètres des séries génératrices associées.

Le sujet du troisième chapitre est l'énumération des tableaux standards de hauteur bornée par  $h$  et des couples de tableaux standards de hauteur bornée par  $h$ . On démontre que leur série génératrice associée sont solutions d'équations différentielles d'ordre  $h/2 + 1$  et de degré  $2(h/2 + 1)$  et dans le cas des couples de tableaux, d'ordre  $h + 1$  et de degré  $2(h + 1)$ . Ce qui nous permet d'obtenir des bornes pour le degré des polynômes ainsi que pour le nombre de termes des  $P$ -réurrences satisfaites par les nombres  $\tau_h(n)$  et  $\tau_h^{(2)}(n)$ . Ces nouvelles bornes correspondent, à une constante près, aux conjectures énoncées au chapitre 2. On termine ce chapitre en proposant des nouvelles formules explicites pour  $\tau_6(n)$ .

Le quatrième chapitre porte sur les espèces de structures sur des couples d'ensembles de même cardinalité. On énonce les définitions de base et on définit des opérations de somme, produit et substitution sur ces espèces. On associe à chacune de ces espèces une série génératrice de type Bessel. On démontre ensuite plusieurs résultats permettant le dénombrement effectif de couples de structures isomorphes, en particulier pour les espèces des couples isomorphes d'arborescences, d'arbres, d'endofonctions et de graphes simples connexes. Finalement, on utilise la décomposition moléculaire d'espèces usuelles afin de dénombrer des espèces de couples de structures isomorphes. Cette approche permet d'associer ces dénombrements à une étape du calcul de la variance du nombre moyen de structures par type d'isomorphie.

## INTRODUCTION

Les fonctions de Bessel apparaissent naturellement comme fonctions propres d'opérateurs différentiels liés à l'étude de certaines équations de la physique mathématique. Elles font partie des principales familles de fonctions spéciales de la physique. Cependant, il est étonnant de constater que leur développement en série intervient aussi de façon importante en combinatoire énumérative.

Dans ce travail, nous allons mettre en lumière cet autre rôle important. Dans un premier temps, nous montrerons comment les fonctions de Bessel permettent d'obtenir des formules d'énumération pour des problèmes difficiles de combinatoire, en particulier concernant l'énumération de tableaux de Young de hauteur bornée. Puis, nous allons proposer un contexte combinatoire pour l'étude de couples de structures combinatoires isomorphes en montrant comment on peut en déduire l'énumération via des séries formelles généralisant les séries de Bessel.

L'étude des tableaux de Young est liée à de nombreux domaines des mathématiques et de la physique. En particulier, l'énumération de ces objets (formules et récurrences) est liée au calcul de caractères de représentations du groupe symétrique, à l'étude des fonctions symétriques, au dénombrement de mots, d'arbres, de graphes, de partages plans etc.

Notre premier sujet d'étude concerne l'énumération des tableaux de Young (standards) de hauteur bornée. Via la théorie des fonctions symétriques, et une évaluation pléthystique de celles-ci, on peut obtenir des séries génératrices pour le nombre de tableaux standards de hauteur bornée. Comme nous le verrons, ces séries génératrices peuvent s'exprimer en termes de séries de Bessel.

Le second sujet abordé dans cette thèse est le dénombrement de couples d'espèces de structures isomorphes. À cette fin, on définit la notion d'espèces de structures sur des couples d'ensembles de même cardinalité. On introduit également les opérations ainsi que les séries génératrices (de type Bessel) qui leur sont associées. Cette étude est en partie motivée par le fait que le dénombrement de couples de

structures isomorphes est associé au calcul de la variance du nombre moyen de structures par types d'isomorphie.

Le chapitre 1 contient les définitions ainsi que les identités de base sur les séries de Bessel dites combinatoires, c'est-à-dire à la normalisation suivante des séries de Bessel :

$$I_k(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+k}}{n! (n+k)!},$$

où  $k = 0, 1, 2, \dots$

Nous montrerons comment exprimer toutes séries de Bessel combinatoire comme polynômes en  $I_0(x)$  et  $I_1(x)$  à coefficient dans  $\mathbb{Z}(x)$  (l'anneau des fractions rationnelles à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ ). En guise de préparation pour les développements de la suite de notre travail, on étudiera l'effet d'opérateurs différentiels  $x^j D^i = x^j d^i/dx^i$  sur les séries  $I_0^k(x) I_1^n(x)$ . Ces résultats nous permettront, entre autres, d'obtenir des bornes pour le degré et pour l'ordre des équations différentielles dont les  $I_0^k(x) I_1^n(x)$  sont solutions.

On développera aussi une même problématique pour les  $q$ -analogues des séries de Bessel combinatoires :

$$I_k(x; q) := \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+k}}{n!_q (n+k)!_q},$$

où  $k = 0, 1, 2, \dots$

La première partie du deuxième chapitre est consacrée aux rappels sur les tableaux et les fonctions symétriques. En particulier, on s'intéresse à un théorème de Gordon (voir [21]) permettant d'écrire la somme des fonctions de Schur indiquées par des partages de hauteur bornée en terme de déterminant. C'est à partir de ce résultat que Gessel (voir [18]) a obtenu des formules explicites pour les séries génératrices pour les tableaux standards de hauteur bornée ainsi que pour les couples de tableaux de hauteur bornée. On utilisera ces formules à plusieurs reprises.

Par la suite, on présente les conjectures énoncées par Bergeron, Favreau et Krob sur la forme des  $P$ -réurrences satisfaites par le nombre de tableaux, et le nombre

de couples de tableaux standards de hauteur bornée par  $h$  :  $\tau_h(n)$  et  $\tau_h^{(2)}(n)$  respectivement.

À partir de ces conjectures, on peut obtenir des  $P$ -réurrences explicites (voir [5] et [6]). Dans un premier temps, on démontrera une partie de ces conjectures en calculant explicitement les équations différentielles associées dans lesquelles on substitue les séries génératrices de Gessel que l'on aura au préalable simplifiées. On termine ce chapitre en donnant un résultat général concernant les simplifications des séries génératrices de Gessel pour les tableaux de hauteur bornée.

Le troisième chapitre traite de différents problèmes d'énumération pour les tableaux de hauteur bornée et les couples de tableaux de hauteur bornée. Tout d'abord, on obtient des résultats concernant les  $P$ -réurrences satisfaites par les nombres  $\tau_h(n)$  et  $\tau_h^{(2)}(n)$  en utilisant certains résultats énoncés dans les deux premiers chapitres. On donne ensuite de nouvelles formules explicites.

Le quatrième chapitre est consacré aux espèces de structures sur des couples d'ensembles de même cardinalité que l'on nomme les espèces de Bessel. Ces espèces permettent, entre autres, de formaliser l'étude combinatoire des couples de structures isomorphes. On associe à une espèce  $P$  de Bessel une série génératrice  $P((x))$  qui permet de dénombrer les  $P$ -structures. On définit des opérations de somme, de produit et de substitution pour ces espèces. On montre que ces opérations sont compatibles avec le passage aux séries.

Pour chaque espèce usuelle  $F$  (voir [7]), on introduit des espèces de Bessel particulières : les couples de  $F$ -structures isomorphes que l'on note  $F^\square$ . On étudie par la suite différentes techniques permettant le dénombrement des couples de structures isomorphes. En particulier, on s'intéressera aux espèces de Bessel des couples isomorphes d'arbres, d'arborescences, d'endofonctions et de pieuvres.

En utilisant la décomposition moléculaire d'une espèce usuelle  $F$ , on peut dénombrer l'espèce des couples de structures isomorphes associée  $F^\square$ . Ceci met en lumière le fait que le dénombrement de couples de structures isomorphes

correspond à une étape du calcul de la variance du nombre moyen de structures par type d'isomorphie.

# CHAPITRE I

## SÉRIES DE BESSEL

Les fonctions de Bessel sont utilisées dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique où elles apparaissent comme solutions d'équations différentielles (voir [1] et [32]). On s'intéressera ici aux fonctions de Bessel modifiées de première espèce et plus particulièrement à leur écriture sous forme de séries à coefficients positifs. Ce chapitre contient les notations et résultats de base concernant les séries de Bessel qui seront utilisés tout au long de ce travail.

### 1.1 Définitions et résultats

*La fonction de Bessel modifiée de première espèce, notée  $I_\nu$ , est définie comme étant la solution de l'équation différentielle :*

$$z^2 y''(z) + z y'(z) - (z^2 + \nu^2) y(z) = 0,$$

où  $\nu$  est un nombre réel.

La solution de cette équation différentielle admet le développement suivant en série autour de l'origine :

$$I_\nu(z) = \left(\frac{1}{2} z\right)^\nu \sum_{k \geq 0} \frac{(1/4 z^2)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}. \quad (1.1)$$

Nous utiliserons la version combinatoire de ces séries que l'on obtient en posant  $z = 2x$  dans (1.1) et en considérant uniquement des valeurs entières non-négatives de  $\nu$ . On notera  $I_n(x)$  les séries de Bessel combinatoires,

$$I_n(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k+n}}{k! (k+n)!}, \quad (1.2)$$

où  $n \geq 0$ .

Cette série satisfait donc l'équation différentielle :

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (-n^2 - 4x^2) y(x) = 0.$$

Les séries de Bessel combinatoires  $I_n(x)$  possèdent de nombreuses propriétés obtenues directement de celles concernant les séries  $I_\nu(z)$ . Pour la suite de ce travail, on utilisera plus particulièrement les identités classiques ci-dessous.

Tout d'abord, on a une série génératrice pour les  $I_\nu(x)$  avec  $\nu \in \mathbb{Z}$ , à savoir

$$e^{x(t+1/t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t^k I_k(x). \quad (1.3)$$

Si on considère seulement les termes avec une puissance de  $t$  positive dans (1.3), on obtient une série génératrice pour les séries de Bessel combinatoires. En dérivant par rapport à  $t$  et en prenant le coefficient de  $t^n$  de chaque côté de l'identité (1.3), on obtient la récurrence :

$$x I_n(x) = (1 - n) I_{n-1}(x) + x I_{n-2}(x), \quad (1.4)$$

avec  $n \geq 2$ .

De la même façon, mais en dérivant par rapport à  $x$ , on obtient :

$$x I'_n(x) = 2x I_{n-1}(x) - n I_n(x), \quad (1.5)$$

avec  $n \geq 1$ .

En combinant ces récurrences, on trouve

$$I'_n(x) = I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x), \quad (1.6)$$

avec  $n \geq 1$ .

Mentionnons également les formules de dérivation classiques ainsi qu'une formule de multiplication.

$$I'_0(x) = 2I_1(x) \quad (1.7)$$

$$I'_1(x) = 2I_0 - \frac{1}{x} I_1(x) \quad (1.8)$$

$$I_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} I_{n-k+2j}(x) \quad (1.9)$$

$$I_i(x) I_j(x) = \sum_{l \leq 0} \binom{2l+i+j}{l} \binom{2l+i+j}{l+j} \frac{x^{2l+i+j}}{(2l+i+j)!}. \quad (1.10)$$

On remarque qu'en utilisant récursivement l'identité (1.4), on peut écrire les séries  $I_n(x)$  en termes de  $I_0(x)$  et  $I_1(x)$ . Par exemple :

$$\begin{aligned} I_5(x) &= -6 \frac{(x^2 + 4) I_0(x)}{x^3} + \frac{(x^4 + 18x^2 + 24) I_1(x)}{x^4} \\ I_6(x) &= \frac{(x^4 + 36x^2 + 120) I_0(x)}{x^4} - 3 \frac{(3x^4 + 32x^2 + 40) I_1(x)}{x^5}. \end{aligned}$$

En général, on a

**Lemme 1.1.1.** Soit  $n \geq 0$  un entier, alors

$$I_n(x) = \frac{P_n(x)I_0(x)}{x^{n-2}} + \frac{Q_n(x)I_1(x)}{x^{n-1}},$$

où  $P_n$  et  $Q_n$  sont des polynômes satisfaisant la récurrence

$$a_n = x^2 a_{n-2} - (n-1) a_{n-1} \quad (1.11)$$

avec les conditions initiales  $P_0 = x^{-2}$ ,  $P_1 = 0$ ,  $Q_0 = 0$  et  $Q_1 = 1$ . Il en résulte que  $P_n$  et  $Q_n$  sont à coefficients entiers.

**Preuve.** On procède par récurrence sur  $n$ . On suppose que l'énoncé est vrai pour toute valeur plus petite ou égale à  $n-1$ , c'est-à-dire

$$I_{n-1} = \frac{P_{n-1}}{x^{n-3}} I_0 + \frac{Q_{n-1}}{x^{n-2}} I_1,$$

où

$$P_{n-1} = x^2 P_{n-3} - (n-2) P_{n-2}$$

$$Q_{n-1} = x^2 Q_{n-3} - (n-2) Q_{n-2}.$$

On applique à  $I_n$  l'identité (1.4) et l'hypothèse de récurrence donne

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{P_{n-2}}{x^{n-4}} I_0 + \frac{Q_{n-2}}{x^{n-3}} I_1 - \frac{n-1}{x} \left( \frac{P_{n-1}}{x^{n-3}} I_0 + \frac{Q_{n-1}}{x^{n-2}} I_1 \right) \\
&= \left( \frac{P_{n-2}}{x^{n-4}} - \frac{(n-1)P_{n-1}}{x^{n-2}} \right) I_0 + \left( \frac{Q_{n-2}}{x^{n-3}} - \frac{(n-1)Q_{n-1}}{x^{n-1}} \right) I_1.
\end{aligned}$$

On obtient alors l'égalité désirée avec  $P_n$  et  $Q_n$ , des polynômes à coefficients entiers, en multipliant chacune de identités suivantes par le dénominateur de son membre de gauche.

$$\frac{P_n}{x^{n-2}} = \frac{P_{n-2}}{x^{n-4}} - \frac{(n-1)P_{n-1}}{x^{n-2}}$$

et

$$\frac{Q_n}{x^{n-1}} = \frac{Q_{n-2}}{x^{n-3}} - \frac{(n-1)Q_{n-1}}{x^{n-1}}.$$

■

**Corollaire 1.1.2.** Les degrés des polynômes  $P_n$  et  $Q_n$  sont donnés par les formules suivantes.

$$\deg(P_n) = \begin{cases} n-2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n-3 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\deg(Q_n) = \begin{cases} n-2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n-1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les coefficients dominants de  $P_n$  et  $Q_n$  sont donnés par

$$[x^{n-2}](P_n) = 1 \quad \text{si } n \text{ est pair,}$$

$$[x^{n-3}](P_n) = -\frac{(n^2-1)}{4} \quad \text{si } n \text{ est impair}$$

$$[x^{n-2}](Q_n) = -\frac{n}{2} \quad \text{si } n \text{ est pair,}$$

$$[x^{n-1}](Q_n) = 1 \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Les coefficients constants de  $P_n$  et  $Q_n$  sont donnés par

$$P_n(0) = -Q_n(0) = (-1)^n(n-1)!.$$

**Preuve.** On procède par récurrence sur  $n$ , posant le résultat vrai pour toute valeur  $\leq n - 1$ . Supposons que  $n$  soit pair, donc  $n - 1$  est impair (le cas  $n$  impair se traite de la même façon). Le degré de  $P_n$  est donné par

$$\begin{aligned}\deg(P_n) &= 2 + \deg(P_{n-2}) \\ &= 2 + n - 4 \\ &= n - 2,\end{aligned}$$

car  $P_n = x^2 P_{n-2} - (n - 1) P_{n-1}$ .

On vérifie, pour  $n$  impair (le cas  $n$  pair est semblable), que le coefficient dominant de  $P_n$  est

$$\begin{aligned}[x^{n-3}](P_n) &= -(n - 1) [x^{n-3}](P_{n-1}) + [x^{n-3}](P_{n-2}) \\ &= -(n - 1) - \frac{((n - 2)^2 - 1)}{4} \\ &= \frac{-4n + 4}{4} - \frac{(n^2 - 4n + 4 - 1)}{4} \\ &= \frac{-(n^2 - 1)}{4}\end{aligned}$$

Finalement, le coefficient constant de  $P_n$  est donné par

$$\begin{aligned}P_n(0) &= -(n - 1) P_{n-1}(0) \\ &= (n - 1)(n - 2) P_{n-2}(0) \\ &= (-1)^n (n - 1)!\end{aligned}$$

De la même façon, on vérifie que  $Q_n$  possède les bonnes propriétés. ■

Pour la suite de ce travail, il sera utile de connaître l'effet d'opérateurs différentiels de la forme  $x^i D^j = x^i d^i/dx^i$  sur les séries

$$\frac{I_0^k(x) I_1^n(x)}{x^m} = \frac{I_0^k I_1^n}{x^m}.$$

Par exemple,

$$D \left( \frac{I_0^2 I_1}{x^5} \right) = 2 \frac{I_0^3}{x^5} - 6 \frac{I_0^2 I_1}{x^6} + 4 \frac{I_0 I_1^2}{x^5},$$

$$x D^2 \left( \frac{I_0^2 I_1}{x^5} \right) = -22 \frac{I_0^3}{x^5} + 42 \frac{I_0^2 I_1}{x^6} + 28 \frac{I_0^2 I_1}{x^4} - 52 \frac{I_0 I_1^2}{x^5} + 8 \frac{I_1^3}{x^4},$$

$$\begin{aligned} x^2 D^3 \left( \frac{I_0^2 I_1}{x^5} \right) &= 216 \frac{I_0^3}{x^5} + 56 \frac{I_0^3}{x^3} - 336 \frac{I_0^2 I_1}{x^6} - 508 \frac{I_0^2 I_1}{x^4} + 584 \frac{I_0 I_1^2}{x^5} \\ &\quad + 160 \frac{I_0 I_1^2}{x^3} - 168 \frac{I_1^3}{x^4}. \end{aligned}$$

□

Pour une étude exhaustive des propriétés des algèbres d'opérateurs linéaires, le lecteur est référé à [9]. En général, on a les résultats suivants.

**Lemme 1.1.3.** Soit  $D^i = \frac{d^i}{dx^i}$  et  $k, n$  et  $m$  des entiers positifs, on a

$$\begin{aligned} x^{i-1} D^i \left( \frac{I_0^k I_1^n}{x^m} \right) &= \sum_{j=1}^{\min\{i,n\}} \sum_{l=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} d_{j,l} \frac{I_0^{k+j} I_1^{n-j}}{x^{m-2l}} + \sum_{j=0}^{\min\{i,n\}} \sum_{l=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} d_{j,l} \frac{I_0^{k-j} I_1^{n+j}}{x^{m-2l+1}}, \\ &= \sum_{j,l} d_{j,\nu} \frac{I_0^{k+j} I_1^{n-j}}{x^{\nu+m}}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

où, dans la dernière égalité,  $1 - i \leq \nu \leq 1$  et  $-\min\{k, i\} \leq j \leq \min\{i, n\}$ . Les coefficients  $d_{j,l}$  sont des constantes de dérivation qui dépendent également des paramètres  $i, k$  et  $m$ .

**Preuve.** On procède par récurrence sur  $i$ . Les identités (1.7) et (1.8) permettent de vérifier que

$$\left( \frac{I_0^k I_1^n}{x^m} \right)' = \frac{2k}{x^m} I_0^{k-1} I_1^{n+1} + \frac{2n}{x^m} I_0^{k+1} I_1^{n-1} - \frac{m+n}{x^{m+1}} I_0^k I_1^n.$$

On suppose  $i \leq n$  (le cas  $i \geq n$  se traite de la même façon) ; on suppose également que le résultat est vrai pour  $i - 1$ . On a alors

$$\begin{aligned} x^{i-1} D^{(i)} \left( \frac{I_0^k I_1^n}{x^m} \right) &= x^{i-1} D \left( D^{(i-1)} \left( \frac{I_0^k I_1^n}{x^m} \right) \right) \\ &= x^{i-1} D \left( \sum_{j=-\lfloor i-1 \rfloor}^{i-1} \sum_{\nu=2-i}^1 d_{j,\nu}^{(i-1)} \frac{I_0^{k+j} I_1^{n-j}}{x^{\nu+m+i-2}} \right), \end{aligned}$$

où  $d_{j,\nu}^{(i-1)}$  est le coefficient obtenu en dérivant  $i - 1$  fois  $I_0 I_1 / x^m$ .

Pour conclure, il suffit de calculer  $\left( \frac{I_0^{k+j} I_1^{n-j}}{x^{\nu+m+i-2}} \right)'$ . On a

$$\frac{2(k+j)I_0^{k+j-1}I_1^{n-j+1}}{x^{\nu+m+i-2}} + \frac{2(n-j)I_0^{k+j+1}I_1^{n-j-1}}{x^{\nu+m+i-2}} - \frac{(\nu+m+i+2-n-j)I_0^{k+j}I_1^{n-j}}{x^{\nu+m+i-2+1}}$$

En multipliant par  $x^{i-1}$ , on obtient :

$$\frac{2(k+j)I_0^{k+j-1}I_1^{n-j+1}}{x^{\nu+m-1}} + \frac{2(n-j)I_0^{k+j+1}I_1^{n-j-1}}{x^{\nu+m-1}} - \frac{(\nu+m+i-2+n-j)I_0^{k+j}I_1^{n-j}}{x^{\nu+m}}.$$

Ces derniers calculs impliquent que  $x^{i-1} D^{(i)} \left( \frac{I_0^k I_1^n}{x^m} \right)$  est égal à

$$\sum_{j=-i-1}^{i-1} \sum_{\nu=2-i}^1 d_{j,\nu}^{(i-1)} \left( \frac{2(k+j)I_0^{k+j-1}I_1^{n-j+1}}{x^{\nu+m-1}} + \frac{2(n-j)I_0^{k+j+1}I_1^{n-j-1}}{x^{\nu+m-1}} - \frac{(\nu+m+i-2+n-j)I_0^{k+j}I_1^{n-j}}{x^{\nu+m}} \right).$$

On peut alors réécrire cette dernière somme de façon à obtenir (1.12). ■

**Lemme 1.1.4.** Lorsqu'on applique l'opérateur  $x^{i-1} D^i$  à la série  $I_0^k I_1^n / x^m$ , avec  $k \neq 0$  et  $i \leq n$  (le cas  $i \geq n$  est semblable), on obtient, en développant le membre de droite de l'identité (1.12),

$$\sum_{j,\nu} d_{j,\nu} \frac{I_0^{k+j} I_1^{n-j}}{x^{\nu+m}} = d_{0,1} \frac{I_0^k I_1^n}{x^{m+1}} + \cdots + d_{1,0} \frac{I_0^{k+1} I_1^{n-1}}{x^m} + \cdots + d_{i,1-i} \frac{I_0^{k+i} I_1^{n-i}}{x^{m-i+1}} + \cdots$$

Pour  $k = 0$ , on a

$$\sum_{j,l} d_{j,\nu} \frac{I_1^{n-j}}{x^{\nu+m}} = d_{0,1} \frac{I_1^n}{x^{m+1}} + \cdots + d_{1,0} \frac{I_0 I_1^{n-1}}{x^m} + \cdots + d_{i,-i} \frac{I_0^i I_1^{n-i}}{x^{m-i}} + \cdots,$$

où les autres termes de ces développements, pour un numérateur  $I_0^{k+j} I_1^{n-j}$  fixé, ont une puissance de  $x$  au dénominateur plus petite.

**Preuve.** Afin d'obtenir une puissance maximale au dénominateur des termes ayant au numérateur  $I_0^k I_1^n$ , on doit, lorsqu'on effectue les dérivées successives

sur  $I_0^k I_1^n / x^m$ , ne garder en mémoire que les termes obtenus en dérivant  $I_1$  ou  $x^{-m}$ , puisque ce sont les seuls pouvant générer un facteur  $x^{-1}$ , ce qui est une conséquence des identités (1.7) et (1.8). En général, pour obtenir une puissance maximale de  $x$  au dénominateur d'un terme ayant au numérateur  $I_0^{k+s} I_1^{n-s}$ , on doit choisir, lorsqu'on effectue les dérivées successives sur  $I_0^k I_1^n / x^m$ , exactement  $i-s$  fois des termes obtenus en dérivant  $I_1$  ou  $x^{-m}$ . ■

**Corollaire 1.1.5.** Soit  $c \neq 0$  un entier ; si  $j = c\nu$ , alors on a que  $d_{j,\nu} = 0$ . ■

Mentionnons également qu'il est possible de trouver des formules explicites pour les nombres  $d_{j,\nu}$  pour certains paramètres  $i, j, k$  et  $\nu$  fixés. En particulier, les coefficients  $d_{j,1-j}$  avec  $0 \leq j \leq i$  peuvent être calculés pour certaines valeurs de  $j$ . En général, on a la récurrence suivante pour les nombres  $d_{j,1-j}^{(i)}$ .

**Corollaire 1.1.6.** Les nombres  $d_{j,1-j}^{(i)}$ , obtenus en dérivant  $i$  fois  $I_0^k I_1^n / x^m$ , avec  $0 \leq j \leq i$ , satisfont la récurrence :

$$d_{j,1-j}^{(i)} = 2(n-j+1) d_{j-1,2-j}^{(i-1)} + (2s-n-m-i) d_{j,1-j}^{(i-1)}. \quad (1.13)$$

**Preuve.** Le lemme (1.2.4) implique que les coefficients  $d_{j,1-j}$  sont obtenus en sommant les coefficients de  $I_0^{k+j} I_1^{n-j} / x^{m+i-j}$  dans les termes

$$\left( \frac{I_0^{k+j} I_1^{n-j}}{x^{m+i-j}} \right)' \text{ et } \left( \frac{I_0^{k+j-1} I_1^{n-(s-1)}}{x^{m+i-(s-1)}} \right)'.$$

En effet, pour  $j \leq i \leq n$ , on a

$$\begin{aligned} x^{i-1} D^{(i)} \left( \frac{I_0^{k+j} I_1^{n-j}}{x^{l+m}} \right) &= \left( d_{0,1}^i \frac{I_0^k I_1^n}{x^{m+1}} + \cdots + d_{j,1-j}^i \frac{I_0^{k+j} I_1^{n-j}}{x^{m-j+1}} + \cdots \right) \\ &= x^{i-1} D \left( d_{0,1}^{i-1} \frac{I_0^k I_1^n}{x^{m+i}} + \cdots + d_{j,1-j}^{(i-1)} \frac{I_0^{k+j} I_1^{n-j}}{x^{m+i-j}} \right. \\ &\quad \left. + d_{j-1,2-j}^{i-1} \frac{I_0^{k+j-1} I_1^{n-(j-1)}}{x^{m+i-(j-1)}} \cdots \right). \end{aligned}$$

Finalement, on calcule

$$\begin{aligned} D\left(\frac{I_0^{k+j} I_1^{n-j}}{x^{m+i-j}}\right) &= ((j-n)-(m+i-j)) \frac{I_0^{k+j} I_1^{n-j}}{x^{m+i-j+1}} + \dots, \\ D\left(\frac{I_0^{k+j-1} I_1^{n-j+1}}{x^{m+i-j+1}}\right) &= (2(n-j+1)) \frac{I_0^{k+j} I_1^{n-j}}{x^{m+i-j+1}} + \dots. \end{aligned}$$

En multipliant par  $x^i$ , on trouve le résultat désiré :

$$d_{j,1-j}^{(i)} = 2(n-j+1) d_{j-1,2-j}^{(i-1)} + (2j-n-m-i) d_{j,1-j}^{(i-1)}. \quad \blacksquare$$

## 1.2 Les séries de $q$ -Bessel

Nous aurons également besoin, dans ce qui suit, d'un  $q$ -analogue des séries de Bessel combinatoires, à savoir

$$I_n(x; q) := \sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k+n}}{k!_q (k+n)!_q}, \quad (1.14)$$

où  $n \geq 0$  est un entier et  $k!_q = (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)(1-q)^{-k}$ .

Mentionnons également que d'autres  $q$ -analogues des séries de Bessel sont liés à certains problèmes d'énumération concernant, entre autres, les diagrammes de Ferrer gauches et les polyominos. Pour plus de détails le lecteur est référé à [3], [13] et [15].

On peut montrer que  $I_n(x; q)$  possède des propriétés similaires à celles déjà vues dans le cas des séries  $I_n$ . Pour ce faire, on rappelle d'abord les règles de base de la  $q$ -Dérivation.

Soit  $f(x)$  une fonction quelconque. On définit la  $q$ -dérivée de  $f$  de la façon suivante :

$$D_q(f(x)) := \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}.$$

Soit  $f$  et  $h$  des fonctions, on a les formules classiques suivantes :

$$D_q(f(x)h(x)) = h(qx)D_q(f(x)) + f(x)D_q(h(x)), \quad (1.15)$$

$$D_q(f(x)h(x)) = h(x)D_q(f(x)) + f(qx)D_q(h(x)), \quad (1.16)$$

$$D_q(f(x) + h(x)) = D_q(f(x)) + D_q(h(x)). \quad (1.17)$$

En particulier, on a

$$D_q \left( \frac{x^n}{n!_q} \right) = \frac{(qx)^n - x^n}{(qx - x) n!_q} = \frac{(q^n - 1) x^n}{(q - 1) x n!_q} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!_q}$$

et pour le terme général des  $q$ -séries de Bessel combinatoire,  $I_0(x, q)$  et  $I_1(x, q)$ , on a

$$\begin{aligned} D_q \left( \frac{x^{2n}}{n!_q^2} \right) &= \frac{1-q^{2n}}{1-q^n} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!_q (n)!_q} \\ &= (1+q^n) \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!_q (n)!_q}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_q \left( \frac{x^{2n+1}}{(n+1)!_q (n)!_q} \right) &= \frac{1-q^{2n+1}}{1-q^{n+1}} \frac{x^{2n}}{(n)!_q^2} \\ &= (1+q^n) \frac{x^{2n}}{(n)!_q^2} - \frac{1}{x} q^n \frac{x^{2n+1}}{(n+1)!_q n!_q}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi des  $q$ -analogues des identités (formules de dérivation) (1.7) et (1.8) de la section(1.2) :

$$D_q (I_0(x; q)) = I_1(x; q) + q^{\frac{1}{2}} I_1(q^{\frac{1}{2}} x; q) \quad (1.18)$$

$$D_q (I_1(x; q)) = I_0(x; q) + I_0(q^{\frac{1}{2}} x; q) - \frac{1}{q^{\frac{1}{2}} x} I_1(q^{\frac{1}{2}} x; q). \quad (1.19)$$

Il est également possible d'obtenir des  $q$ -analogues des équations différentielles satisfaites par  $I_0$  et  $I_1$ . Pour ce faire, on calcule les  $q$ -dérivées d'ordre deux de  $I_0(x; q)$  et  $I_1(x; q)$ .

$$\begin{aligned} D_q^{(2)}(I_0(x; q)) &= I_0(x; q) + (q+1) I_0(q^{\frac{1}{2}} x; q) + q I_0(qx; q) - \frac{1}{x} (I_1(qx; q) + q^{-\frac{1}{2}} I_1(q^{\frac{1}{2}} x; q)) \\ D_q^{(2)}(I_1(x; q)) &= D_q \left( I_0(x; q) + I_0(q^{\frac{1}{2}} x; q) - \frac{q^{-\frac{1}{2}}}{x} I_1(q^{\frac{1}{2}} x; q) \right) \\ &= (I_1(x; q) + 2q^{\frac{1}{2}} I_1(q^{\frac{1}{2}} x; q) + q^{\frac{1}{2}} I_1(qx; q)) \\ &\quad - \frac{1}{qx} (I_0(q^{\frac{1}{2}} x; q) + I_0(qx; q)) + \frac{1}{q^2 x^2} (q^{\frac{1}{2}} I_1(q^{\frac{1}{2}} x; q) + I_1(qx; q)). \end{aligned}$$

On a donc les  $q$ -équations différentielles suivantes satisfaites par une famille de  $q$ -analogues de  $I_0$  et de  $I_1$  respectivement :

$$x D_q^{(2)} (I_0(x; q)) + \frac{1}{q} D_q (I_0(q^{\frac{1}{2}} x; q)) - x (I_0(x; q) + (1+q) I_0(q^{\frac{1}{2}} x; q) + q I_0(qx; q)) = 0,$$

$$x^2 D_q^2(I_1(x; q)) + q^{-3/2} x D_q(I_1(\sqrt{q} x; q)) - x^2 ((I_1(x; q) + 2\sqrt{q} I_1(\sqrt{q} x; q) + \sqrt{q} I_1(x; q)) \\ - q^{-3/2} I_1(q x; q) + q^{-3/2} I_1(\sqrt{q} x; q) + q^{-2} I_1(q x; q)) = 0.$$

□

Pour obtenir une fonction génératrice pour les  $I_n(x; q)$ , on utilise le  $q$ -analogue de la série exponentielle :

$$e_q(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!_q}.$$

La  $q$ -série génératrice des  $q$ -séries de Bessel est obtenue en prenant les puissances positives de la série  $e_q(x t) e_q(\frac{x}{t})$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} e_q(x t) e_q\left(\frac{x}{t}\right) &= \left( \sum_{k \leq 0} \frac{(xt)^k}{k!_q} \right) \left( \sum_{k \leq 0} \frac{x^k t^{-k}}{k!_q} \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k+j=n} \frac{t^k}{k!_q} \frac{t^{-j}}{j!_q} \right) x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k+j=n} \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q t^{k-j} \right) \frac{x^n}{n!_q}, \end{aligned}$$

où en regroupant les termes tels que les  $k \geq j$ , et en posant  $k - j = i$ , on obtient

$$\begin{aligned} e_q(x t) e_q\left(\frac{x}{t}\right) &= \sum_{i \geq 0} \left( \sum_{j \geq 0} \left[ \begin{matrix} 2j+i \\ i+j \end{matrix} \right]_q \frac{x^{2j+i}}{(2j+i)!_q} \right) t^i + \dots \\ &= \sum_{i \geq 0} I_i(x; q) t^i + \dots \end{aligned} \tag{1.20}$$

où les autres termes de cette série correspondent aux puissances négatives de  $t$ .

On peut utiliser (1.20) afin d'obtenir des identités concernant les  $q$ -séries de Bessel. Les  $q$ -dérivées par rapport à  $t$  des fonctions  $e_q(x t)$  et  $e_q(\frac{x}{t})$  sont

$$\begin{aligned} D_q(t)(e_q(x t)) &= x e_q(x t), \\ D_q(t)\left(e_q\left(\frac{x}{t}\right)\right) &= -\frac{x}{q t^2} e_q\left(\frac{x}{q t}\right). \end{aligned}$$

Si on calcule les  $q$ -dérivées par rapport à  $t$  du produit  $e_q(xt) e_q(\frac{x}{t})$  avec la formule (1.15), on obtient :

$$\begin{aligned} D_q(t) \left( e_q(xt) e_q\left(\frac{x}{t}\right) \right) &= -\frac{x}{q t^2} e_q(xt) e_q\left(\frac{x}{q t}\right) + x e_q\left(\frac{x}{q t}\right) e_q(xt) \\ &= x \left( 1 - \frac{1}{q t^2} \right) e_q\left(\frac{x}{q t}\right) (e_q(xt)). \end{aligned}$$

On a donc l'identité suivante :

$$\sum_{i \geq 0} D_q(t) (I_i(x; q) t^i) + \dots = x \left( 1 - \frac{1}{q t^2} \right) \sum_{k \geq 0} q^{\frac{k}{2}} I_k(q^{-\frac{1}{2}} x; q) t^k + \dots \quad (1.21)$$

En comparant les coefficients de  $t^n$  de chaque membre de l'égalité (1.21), on trouve la  $q$ -réurrence suivante :

$$q^{\frac{i}{2}} x I_{i+2}(q^{\frac{i}{2}} x; q) = x q^{\frac{i}{2}} I_i(q^{-\frac{1}{2}} x; q) - \frac{1 - q^{i+1}}{1 - q} I_{i+1}(x; q). \quad (1.22)$$

On peut aussi utiliser la formule (1.16) afin d'obtenir une autre  $q$ -réurrence.

$$x I_n(x; q) + q^{-n} \left( \frac{q^n - 1}{q - 1} - 1 \right) I_{n-1}(x; q) - \frac{x}{q^{n-1}} I_{n-2}(x; q) = 0. \quad (1.23)$$

De la même façon, mais en  $q$ -dérivant par rapport à  $x$ , on obtient

$$\begin{aligned} D_q(x) \left( e_q(xt) e_q\left(\frac{x}{t}\right) \right) &= \frac{1}{t} e_q(xt) e_q(xt^{-1}) + t e_q(xt^{-1} q) e_q(xt) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_q(x) (I_k(x; q)) t^k, \end{aligned}$$

d'où la récurrence :

$$D_q(x) (I_k(x; q)) = I_{k+1}(x; q) + q^{\frac{-(k-1)}{2}} I_{k-1}(q^{\frac{1}{2}} x; q). \quad (1.24)$$

Les identités (1.22) et (1.23) sont des  $q$ -analogues de la formule (1.4). On peut également utiliser (1.22), (1.23) et (1.24) afin d'obtenir des  $q$ -analogues de l'identité (1.6).

### 1.3 Séries différentiellement finies et $P$ -récursivité

Le but de cette section est de rappeler les principaux résultats sur la notion de séries différentiellement finies et leur lien avec les suites  $P$ -récursives (voir [9],[39] et [43] pour une étude plus complète).

On dit d'une série formelle  $f(x)$  qu'elle est *différentiellement finie* ou *D-finie* (on dit aussi holonome) si elle satisfait une équation différentielle homogène avec coefficients polynomiaux, c'est-à-dire

$$p_l(x)f^{(l)}(x) + p_{l-1}(x)f^{(l-1)}(x) + \cdots + p_0(x)f(x) = 0,$$

où  $f^{(i)}(x)$  est la dérivée d'ordre  $i$  de  $f$ , avec  $p_k(x) \in \mathbb{Q}[x]$ .

De façon équivalente, la série  $f$  est *D-finie* si  $f$  et ses dérivées successives forment un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{Q}(x)$  (le corps des fractions rationnelles en  $x$ ).

Une équation différentielle linéaire à coefficients dans  $\mathbb{Q}[x]$ , admettant comme solution  $f$  une série formelle, est *d'ordre*  $l$ , si  $l$  est la dimension de l'espace engendré par  $f, f', f'', \dots$ . On dit qu'elle est de *degré*  $n$  si  $n$  est le maximum des degrés des coefficients polynomiaux qui y apparaissent. Concernant l'ordre des équations différentielles, on a le résultat suivant.

**Lemme 1.3.7.** Soit  $D_1$  et  $D_2$ , deux opérateurs différentiels d'ordre  $n$  et  $k$  respectivement. Soit  $y_1(x)$  et  $y_2(x)$ , deux séries formelles telles que

$$D_1(y_1(x)) = 0 \quad \text{et} \quad D_2(y_2(x)) = 0,$$

alors il existe des opérateurs différentiels  $D^+$  et  $D^*$ , d'ordre  $\leq n+k$  et  $\leq n \cdot k$  respectivement, qui admettent  $y_1(x)y_2(x)$  et  $y_1(x) + y_2(x)$  comme solutions respectives.

**Preuve.** Puisque l'ordre de l'équation différentielle correspond à la dimension de l'espace associé, il suffit de montrer que pour  $y = y_1 + y_2$ , l'espace vectoriel engendré par  $y$  et ses dérivées de tout ordre,  $V_y$ , est de dimension inférieure ou

égale à la somme des dimensions des espaces engendrés par  $y_1$  et ses dérivées et par  $y_2$  et ses dérivées. On a que  $y, y', y'', \dots \in V_{y_1} \oplus V_{y_2}$ , ce qui implique

$$\dim V_y \leq \dim V_{y_1} + \dim V_{y_2}.$$

Pour le produit, soit  $V_{y_1 y_2}$  l'espace engendré par

$$y_1 y_2, (y_1 y_2)', \dots, (y_1 y_2)^{(i)}, \dots$$

et soit

$$g : V_{y_1} \times V_{y_2} \rightarrow \mathbb{C}((x)),$$

où  $\mathbb{C}((x))$  est l'espace vectoriel des séries formelles sur  $\mathbb{C}(x)$ , une transformation bilinéaire telle que  $g(v, w) = v w$  pour tout  $v \in V_{y_1}$  et  $w \in V_{y_2}$ . Il existe alors une unique transformation linéaire

$$\tilde{g} : V_{y_1} \otimes V_{y_2} \rightarrow \mathbb{C}((x)),$$

où  $V_{y_1} \otimes V_{y_2}$  est le produit tensoriel de  $V_{y_1}$  et  $V_{y_2}$ , telle que

$$\tilde{g}(v \otimes w) = g(v, w) = v w.$$

Donc,  $\tilde{g}(y_1^{(i)} \otimes (y_2^{(j)}) = y_1^{(i)} y_2^{(j)}$ , ce qui implique  $V_{y_1 y_2} \subset \tilde{g}(V_{y_1} \otimes V_{y_2})$ , d'où la conclusion :

$$\dim V_z \leq \dim V_{y_1} \otimes \dim V_{y_2} \leq (\dim V_{y_1})(\dim V_{y_2}). \quad \blacksquare$$

Il est à remarquer qu'il existe des procédures effectives pour calculer ces équations différentielles (voir [37]).

Soit  $u_n$  une fonction définie sur les entiers positifs :  $u_n$  est dite  $P$ -récursive s'il existe des polynômes  $q_i(n)$  pour  $0 \leq i \leq m$  tels que

$$\sum_{i=0}^m q_i(n) u_{n+i} = 0.$$

Notons que les  $P$ -réurrences peuvent être utilisées afin de calculer efficacement les nombres  $u_{n+d}$ . Elles peuvent également être utilisées pour déterminer si deux expressions sont égales (voir [33]). Le théorème suivant fait le lien entre les concepts de séries  $D$ -finies et la  $P$ -récurivité.

**Théorème 1.3.8.** (voir Stanley [39]) Soit  $f = \sum_n f_n x^n$  une série formelle en une variable, alors on a que  $f$  est différentiellement finie si et seulement si  $f_n$  est  $P$ -réursive.

**Preuve.** Supposons que  $f$  est  $D$ -finie,

$$p_l(x)f^{(l)}(x) + p_{l-1}(x)f^{(l-1)}(x) + \cdots + p_0(x)f(x) = 0, \quad (1)$$

on a

$$p_i(x)f^{(i)} = a_0 f^{(i)} + a_1 x f^{(i)} + \cdots + a_k x^k f^{(i)},$$

où

$$\begin{aligned} x^k f^{(i)} &= \sum_{n \geq i} n(n-1)\cdots(n-i+1) f_n x^{n-i+j} \\ &= \sum_{n \geq i} (n)_i f_n x^{n-i+j} \\ &= \sum_{n \geq 0} (n+i-k)_i f(n+i-k) x^n. \end{aligned}$$

Donc, si on extrait le coefficient de  $x^n$  de chaque membre de l'équation (1), on obtient

$$P_j(n) f_{n+j} + P_{j-1}(n) f_{n-j-1} + \cdots + P_0(n) f_n = 0,$$

où  $P_s(n)$  sont des polynômes en  $n$ . Donc  $f$  est  $P$ -réursive.

Supposons maintenant que  $f$  est  $P$ -réursive,

$$P_i(n) f_{n+i} + P_{i-1}(n) f_{n-i-1} + \cdots + P_0(n) f_n = 0. \quad (2)$$

Les polynômes  $P_i(n)$  peuvent s'écrire comme des combinaisons linéaires des polynômes  $(n+i)_j$  pour un certain  $j \geq 0$  :

$$P_i(n) = c_1 (n+i)_j + c_2 (n+i)_j + \cdots + c_k (n+i)_j \quad (3)$$

En multipliant par  $f_{n+i} x^n$  et en sommant sur  $n$  l'équation (3), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} P_i(n) f_{n+i} x^n &= \sum_{n \geq 0} f_{n+i} \left( \sum_{k=0}^{l_i} c_k (n+i)_j \right) x^n \\ &= \sum_{k=0}^{l_i} c_k \left( \sum_{n \geq 0} f(n+i)(n+i)_j x^n \right), \end{aligned}$$

où

$$\sum_{n \geq 0} f(n+i)(n+i)_j x^n = x^{j-i} f^{(j)}.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{l_i} c_k \left( \sum_{n \geq 0} f(n+i)(n+i)_j x^n \right) = r_i(x) f^{(j)}.$$

où  $r_i(x)$  est une fraction rationnelle en  $x$ . Pour conclure, il suffit de multiplier par  $x^n$  l'équation (2), de sommer ensuite sur  $n$  et de multiplier par une puissance de  $x$  suffisante, on obtient ainsi une équation de la forme

$$p_l(x)f^{(l)}(x) + p_{l-1}(x)f^{(l-1)}(x) + \cdots + p_0(x)f(x) + P(x) = 0,$$

où  $P(x)$  est un polynôme, ce qui implique que  $f$  est  $D$ -finie. ■

On peut étendre les définitions précédentes au cas des séries formelles de plusieurs variables (voir [9] et [43]). On s'intéresse ici plus particulièrement aux séries différentiellement finies à plusieurs variables ; pour les notions de  $P$ -récurseur correspondantes, le lecteur est référé à [29]. Posons  $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$  et  $F(\mathbf{x})$  une série formelle dans  $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ . La série  $F(\mathbf{x})$  est dite *différentiellement finie*, en les variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  si l'ensemble des dérivées partielles de  $F$  engendre un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ . Concernant ce type de séries, on a les faits suivants.

### Lemme 1.3.9.

1. L'ensemble des séries  $F(\mathbf{x})$  différentiellement finies forme une sous-algèbre de  $\mathcal{D}[[\mathbf{x}]]$ , où  $\mathcal{D}$  est un domaine d'intégrité.
2. Si  $F(\mathbf{x})$  est différentiellement finie en les variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , alors elle l'est aussi pour tout sous-ensemble de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .
3. Si  $F(\mathbf{x})$  est différentiellement finie en les variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et si, pour  $0 \leq i \leq n$ ,  $q_i$  est un polynôme en les variables  $y_1, y_2, \dots, y_m$  (pouvant inclure les variables  $x_i$ ), alors  $F(q_1, q_2, \dots, q_n)$  est différentiellement finie si elle est bien définie comme série formelle.
4. Si  $P(\mathbf{x})$  est un polynôme en les variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , alors  $e^{P(\mathbf{x})}$  est différentiellement finie.

5. Soit  $F(\mathbf{x})$  et  $G(\mathbf{x})$  des séries différentiellement finies, alors l'égalité entre ces séries est décidable. ■

Soit

$$F(\mathbf{x}) = \sum_I f_I \mathbf{X}^I \quad \text{et} \quad G(\mathbf{x}) = \sum_I g_I \mathbf{X}^I,$$

où  $I = i_1 i_2 \cdots i_n$  et  $\mathbf{X}^I = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$  des séries formelles. Le produit d'Hadamard  $F \odot G$  est défini comme suit :

$$F \odot G = \sum_I f_I g_I \mathbf{X}^I.$$

Concernant cette opération, on a le résultat suivant.

**Lemme 1.3.10.** (Lipshitz, (voir [29])) Soit  $F(\mathbf{x})$  et  $G(\mathbf{x})$  des séries formelles différentiellement finies, alors le produit d'Hadamard  $F \odot G$  selon les variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  est différentiellement fini. ■

En adaptant la définition de séries différentiellement finies au fonctions symétriques, on pourra utiliser les résultats ci-dessus afin de vérifier si certaines expressions contenant des fonctions symétriques sont  $D$ -finies.

#### 1.4 Ordre et degré de l'équation différentielle satisfaite par $I_0^k I_1^n$

Des récurrences pour les coefficients des séries  $I_0^k I_1^n$  ont été obtenues expérimentalement par Guttmann (voir [26]). Il est cependant facile d'obtenir, avec démonstration, des récurrences explicites pour ces séries puisque  $I_0$  et  $I_1$  sont  $D$ -finies. Par exemple, étant donné que

$$x I_0(x)'' + I_0(x)' - 4x I_0(x) = 0$$

et

$$x^2 I_1(x)'' + x I_1(x)' - (1 + 4x^2) I_1(x) = 0,$$

on peut construire une équation différentielle pour  $I_0 I_1$  d'ordre  $\leq 4$  :

$$p_4(x)(I_0 I_1)^{(4)} + p_3(x)(I_0 I_1)''' + p_2(x)(I_0 I_1)'' + p_1'(x)(I_0 I_1)' + p_0(x) I_0 I_1 = 0$$

où les  $p_i(x)$  sont des polynômes à déterminer.

En appliquant la procédure décrite dans la preuve du lemme (1.3.7), on obtient l'équation différentielle :

$$x^4 y^{(4)} + 6x^3 y''' + (-16x^4 + 5x^2) y'' + (-64x^3 - x) y' + (-32x^2 + 1) y = 0$$

En général, la borne correspondant au lemme (1.3.7) donne  $2^{k+n}$  pour l'ordre. Mais on peut faire mieux. En effet, on a les résultats suivants.

**Lemme 1.4.11.** Les séries  $I_0^k I_1^n / x^m$ , avec  $k + n$  fixé, considérées comme éléments de  $\mathbb{Q}((x))$ , sont linéairement indépendantes.

**Preuve.** Supposons que, pour  $k + n = h$  fixé, les vecteurs  $I_0^k I_1^n / x^m$  soit linéairement dépendants. Alors, puisque  $n - m$  doit être constant, on a

$$\sum_{i=0}^h c_i \frac{I_0^i I_1^{h-i}}{x^{M-i}} = 0,$$

où les  $c_i$  ne sont pas tous nuls et  $M = m + k$ .

Ce qui est équivalent à

$$c_0 x^{-h} I_1^h I_0^{-h} + c_1 x^{-h+1} I_1^{h-1} I_0^{-h+1} + \cdots + c_h = 0.$$

Comme les fonctions de Bessel sont des fonctions continues, il existe donc  $\epsilon \neq 0$  tel que  $\epsilon^{-1} I_0^{-1}(\epsilon) I_1(\epsilon) = \pi$ , ce qui donne

$$c_0 \pi^h + c_1 \pi^{h-1} + \cdots + c_h = 0,$$

d'où la contradiction. On doit donc conclure que les  $I_0^k I_1^n / x^m$  sont linéairement indépendants. ■

**Lemme 1.4.12.** La série  $I_0^k I_1^n$  satisfait une équation différentielle d'ordre au plus  $k+n+1$ .

**Preuve.** Soit  $W$  l'espace vectoriel (sur  $\mathbb{Q}(x)$ ) engendré par l'ensemble suivant

$$\{I_0(x)^m I_1(x)^{k+n-m} \mid 0 \leq m \leq k+n\}.$$

Il est clair que  $I_0^k I_1^n \in W$ . Considérons  $V$  l'espace engendré par  $I_0^k I_1^n$  et toutes ses dérivées. Puisque le lemme (1.2.3) implique que  $W$  est fermé pour la dérivation, on a que  $V$  est contenu dans l'espace engendré par  $W$ . Ce qui implique que  $\dim V \leq k + n + 1$ . Mais comme les  $I_0^k I_1^n / x^m$  sont linéairement indépendants, on a que  $\dim V = k + n + 1$ . ■

Afin d'obtenir des équations différentielles explicites pour les séries  $I_0^k I_1^n$ , on peut utiliser un processus classique de coefficients indéterminés, en supposant que le degré de l'opérateur cherché est borné par un entier  $K$  à déterminer. Si on suppose donc que

$$\Theta_K = \sum_{i=0}^{n+k+1} Q_i^k(x) D^{(i)}, \quad (1.25)$$

avec les  $Q_i^k(x)$  des polynômes avec des coefficients formels  $q_{i,j}$ , de la forme

$$Q_i^K(x) = q_{i,K} x^K + q_{i,K-1} x^{K-1} + \cdots + q_{i,i-1} x^{i-1}.$$

Il suffit ensuite de résoudre le système d'équations linéaires homogènes correspondant en les variables  $q_{i,j}$ . On obtient alors des équations différentielles explicites, d'ordre  $k + n + 1$  admettant comme solution la série  $I_0^k I_1^n$ . Par exemple, pour  $I_0 I_1$  et  $K = 3$  on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^3 Q_i(x) D^{(i)}(I_0 I_1) = & ((2q_{10} - 2q_{21} + 6q_{32}) + (2q_{11} - 2q_{22} + 6q_{33})x + (2q_{12} - 2q_{23} + 32q_{32})x^2 \\ & + (2q_{13} + 32q_{33})x^3) I_0^2 \\ & ((-q_{10} + 2q_{21} - 6q_{32})x^{-1} + (q_{00} - q_{11} + 2q_{22} - 6q_{33}) \\ & + (q_{01} - q_{12} + 2q_{23} + 16q_{21} - 48q_{32})x + (q_{02} - q_{13} + 16q_{22} - 48q_{33})x^2 \\ & + (q_{03} + 16q_{23})x^3) I_0 I_1 \\ & ((2q_{10} - 6q_{21} + 22q_{32}) + (2q_{11} - 6q_{22} + 22q_{33})x + (2q_{12} - 6q_{23} + 32q_{32})x^2 \\ & + (2q_{13} + 32q_{33})x^3) I_1^2, \end{aligned}$$

puisque'on suppose que  $Q_i(x) = q_{i,3} x^3 + q_{i,2} x^2 + \cdots + q_{i,i-1}$ .

On construit la matrice des coefficients (notée  $C_{k,n}^{(K)}$ ), associés aux équations linéaires obtenues ci-dessus, de la façon suivante : on ordonne les variables  $q_{i,j}$  selon l'ordre croissant de la différence  $j - i$  des indices et selon l'ordre croissant du premier indice pour un  $j - i$  fixé. Pour  $K = 3$ , on a

$$q_{03}, q_{02}, q_{13}, q_{01}, q_{12}, q_{23}, q_{00}, q_{11}, q_{22}, q_{33}, q_{10}, q_{21}, q_{32}.$$

Les lignes de cette matrice correspondent aux coefficients d'un terme  $x^j I_0^a I_1^b$  où  $-1 \leq j \leq 3$  et  $a+b=2$ . On les ordonne ensuite selon les puissances décroissantes de  $I_1$  et de  $x$ . On obtient ainsi

$$C_{1,1}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & -48 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

À partir de la  $l$ -réduite échelonnée de la matrice ci-dessus, on trouve une équation différentielle (de degré minimum) qui sera satisfaite par  $I_0 I_1$  :

$$x^3 y''' + 4x^2 y'' + (-16x^3 + x) y' + (-32x^2 - 1) y = 0.$$

De la même façon, si on note  $\theta_{i,j}$  l'opérateur différentiel de degré minimum tel que  $\theta_{i,j}(I_0^i I_1^j) = 0$ , on trouve

$$\begin{aligned} \theta_{2,1} &= (-3x^6 + x^4) D^{(4)} + (-18x^5 + 8x^3) D^{(3)} + (120x^6 - 43x^4 + 13x^2) D^{(2)} \\ &\quad + (360x^5 - 161x^3 + x) D^{(1)} + (-432x^6 - 72x^4 - 159x^2 - 1) D^{(0)} \\ \theta_{1,2} &= \left(-\frac{3}{2}x^5 + x^3\right) D^{(4)} + (-9x^4 + 8x^2) D^{(3)} + \left(60x^5 - \frac{89}{2}x^3 + 9x\right) D^{(4)} \\ &\quad + \left(180x^4 - \frac{391}{2}x^2 - 9\right) D^{(1)} + (-216x^5 + 288x^3 - 96x) D^{(0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{2,2} &= (-9x^6 + x^4) D^{(5)} + (-108x^5 + 14x^3) D^{(4)} + (720x^6 - 353x^4 + 49x^2) D^{(3)} \\
&\quad + (5472x^5 - 745x^3 + 27x) D^{(2)} + (-9216x^6 + 8416x^4 - 1591x^2 - 27) D^{(1)} \\
&\quad + (-18432x^5 + 4736x^3 - 512x) D^{(0)} \\
\theta_{0,3} &= x^4 D^{(4)} + 6x^3 D^{(3)} + (-40x^4 - 3x^2) D^{(2)} + (-120x^3 - 9x) D^{(1)} \\
&\quad + (144x^4 + 24x^2 + 9) D^{(0)}, \\
\theta_{3,0} &= x^3 D^{(4)} + 6x^2 D^{(3)} + (-40x^3 + 7x) D^{(2)} + (-120x^2 + 1) D^{(1)} \\
&\quad + (144x^3 - 48x) D^{(0)}.
\end{aligned}$$

□

Reste à trouver une borne pour le degré. Nous allons voir que celle-ci s'obtient de la borne pour l'ordre (bien qu'a priori le degré dépende des scalaires de l'espace vectoriel engendré par  $I_0^k I_1^n$  et ces dérivées). Pour ce faire, on définit

$$\Pi_m(x^j I_0^a I_1^b) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq m, \\ I_0^a I_1^b & \text{si } j = m. \end{cases}$$

On a le résultat suivant.

**Lemme 1.4.13.** Les séries  $I_0^k I_1^n$  avec  $k \neq 0$  et  $n \neq 0$  satisfont des équations différentielles de degré

$$\begin{aligned}
&\leq 2(k+n+1) \quad \text{si } k \text{ est pair et } n \text{ est impair,} \\
&\leq 2(k+n)+1 \quad \text{sinon.}
\end{aligned}$$

**Preuve.** Supposons que  $k$  soit pair et  $n$  impair (les autres cas se traitent de la même façon). Le lemme (1.4.12) implique qu'il existe une équation différentielle d'ordre  $k+n+1$  qui admet comme solution  $I_0^k I_1^n$ . On applique un opérateur de la forme (1.25) à  $I_0^k I_1^n$ . On obtient le système

$$\sum_{i=0}^l \sum_{j=i}^K q_{i,j} x^j (I_0^k I_1^n)^{(i)} = 0,$$

où  $l = k+n+1$ .

Pour un  $K$  suffisamment grand, la matrice  $C_{k,n}^{(K)}$  des coefficients associée au système ci-dessus est de rang maximal, ce qui implique qu'on doit avoir des

solutions non-triviales. Posons

$$\Theta_K(I_0^k I_1^n) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=i}^K q_{i,j} x^j D^{(i)}(I_0^k I_1^n) = \sum_{m=0}^K \theta_m(I_0^k I_1^n) = 0,$$

où

$$\theta_m = \sum_{i=0}^l q_{i,m} x^m D^{(i)}$$

et  $q_{i,m} = 0$  si  $m < i - 1$ .

Le lemme (1.1.3) implique que pour engendrer des termes  $x^m I_0^a I_1^b$ , il faut utiliser des opérateurs  $x^s D^{(i)}$  avec  $m \leq s \leq m + l$ . Donc, les termes  $x^K I_0^a I_1^b$  ne sont engendrés que par les opérateurs  $x^K D^{(i)}$ . Il s'en suit que

$$\begin{aligned} \Pi_K(\theta_K(I_0^k I_1^n)) &= \Pi_K \left( \sum_{i=0}^l q_{i,K} x^K D^{(i)}(I_0^k I_1^n) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De la même façon, les termes  $x^{K-s} I_0^a I_1^b$  avec  $0 \leq s \leq l$  peuvent seulement être engendrés par les opérateurs

$$\sum_{i=0}^l x^{K-s} D^{(i)}, \sum_{i=0}^l x^{K-s+1} D^{(i)}, \dots, \sum_{i=0}^l x^K D^{(i)}.$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \Pi_{K-s} \left( \sum_{m=K-s}^K \theta_m(I_0^k I_1^n) \right) &= \Pi_{K-s} \left( \sum_{m=K-s}^K \sum_{i=0}^l q_{i,m} x^m D^{(i)}(I_0^k I_1^n) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'opérateur  $x^m$  avec  $0 \leq m \leq K$  ne fait que décaler l'effet de l'opérateur  $D^{(i)}$ , ce qui se traduit aussi par le fait que la  $i$ -ème colonne de la matrice  $C_{k,n}$  des coefficients du système est la même que la  $i + l$ -ième décalée de  $l$  lignes.

La matrice  $C_{k,n}^{2l}$  doit admettre au moins une variable libre, car on retrouve alors les mêmes équations à partir desquelles on sait qu'il existe une solution

non-triviale. Ce qui implique qu'il existe une équation différentielle de degré  $\leq 2(k + n + 1)$  dont  $I_0^k I_1^n$  est solution. ■

Mentionnons également que le lemme (1.1.3) implique que la forme générale de l'équation différentielle satisfaite par  $I_0^k I_1^n$  est, pour  $k$  pair et  $n$  impair,

$$\left( \sum_{j=0}^{l/2} b_{l,4+2j} x^{4+2j} \right) y^{(l)} + \cdots + \left( \sum_{j=0}^l b_{0,2j} x^{2j} \right) y = 0$$

et autrement

$$\left( \sum_{j=0}^L b_{l,4+2j-1} x^{4+2j-1} \right) y^{(l)} + \cdots + \left( \sum_{j=1}^l b_{0,2j-1} x^{2j-1} \right) y = 0,$$

où  $L = (l - 1)/2 + 1$  et les  $b_{i,j} \in \mathbb{Q}$ .

Il est à noter que, dans certains cas particuliers, on peut construire une équation différentielle, dont  $I_0^k I_1^n$  est solution, de degré plus petit que la borne donnée au lemme (1.1.13). Par exemple, les lemmes (1.1.3) et (1.1.13) impliquent que la série  $I_0^k(x)$ , pour  $k$  pair, est solution d'une équation de la forme :

$$\begin{aligned} & x^k y^{(k+1)} + b_{k,k-1} x^{k-1} y^{(k)} + (b_{k-1,k} x^k + b_{k-1,k-1} x^{k-1}) y^{(k-1)} + \dots \\ & + \sum_{i=0}^k b_{1,i} x^i y' + \sum_{i=1}^{k-1} b_{0,i} x^i y = 0, \end{aligned} \tag{1.26}$$

où  $b_{i,j} \in \mathbb{Z}$ . Pour  $k$  impair, on a un résultat semblable.

De la même façon,  $I_1^n(x)$  est solution d'une équation différentielle semblable à (1.26) mais de degré  $n + 1$ . □

On peut également calculer des récurrences pour les coefficients des séries  $I_0^k I_1^n$ . Pour ce faire, on définit les nombres  $\gamma_k(2j + n)$  :

$$\sum_{j \geq 0} \gamma_k(2j + n) x^{2j+n} := I_0^k(x) I_1^n(x).$$

En utilisant des règles de calcul des séries formelles :

$$\gamma_k(2j + n) = [x^{2j+n}] \left( \left( \sum_{i \geq 0} \frac{x^{2i}}{(i!)^2} \right)^k \left( \sum_{i \geq 0} \frac{x^{2i+1}}{(i+1)! i!} \right)^n \right)$$

$$= [x^{2j}] \left( \sum_{i \geq 0} \sum_{(i_1 + \dots + i_k) = i} \binom{i}{i_1, i_2, \dots, i_k}^2 \frac{x^{2i}}{i!^2} \times \right. \\ \left. \times \sum_{i \geq 0} \sum_{(i_1 + \dots + i_n) = i} \frac{1}{i_1 + 1} \cdots \frac{1}{i_n + 1} \binom{i}{i_1, i_2, \dots, i_n}^2 \frac{x^{2i}}{i!^2} \right).$$

Si on pose

$$\alpha_{i,k} = \sum_{(i_1 + \dots + i_k) = i} \binom{i}{i_1, i_2, \dots, i_k}^2,$$

$$\beta_{i,n} = \sum_{(i_1 + \dots + i_n) = i} \frac{1}{i_1 + 1} \cdots \frac{1}{i_n + 1} \binom{i}{i_1, i_2, \dots, i_n}^2.$$

On obtient la formule :

$$j!^2 \gamma_k(2j+n) = \sum_{\nu=0}^j \binom{j}{\nu}^2 \alpha_{\nu,k} \beta_{j-\nu,n}.$$

On peut calculer, à partir des équations différentielles, des récurrences pour les  $\gamma_k(2j+n)$ . Par exemple :

**Lemme 1.4.14.** Les coefficients  $\gamma_1(2j+1)$  de la série  $I_0 I_1$  satisfont la  $P$ -référence suivante :

$$(-16n - 32) \gamma_1(n) + (n^3 + 7n^2 + 15n + 9) \gamma_1(n+2) = 0,$$

où  $\gamma_1(0) = 0$  et  $n = 2j+1$ .

**Preuve.** De la même façon que pour la preuve du théorème 1.4.8, on calcule

$$\begin{aligned} [x^{2n+3}] (x^3 (I_0 I_1)''') &= (2n+3)(2n+2)(2n+1) \gamma_1(2n+3) x^{2n+3} \\ 4 [x^{2n+3}] (x^2 (I_0 I_1)'') &= 4(2n+3)(2n+2) \gamma_1(2n+3) x^{2n+3} \\ [x^{2n+3}] (x (I_0 I_1)') &= (2n+3) \gamma_1(2n+3) x^{2n+3} \\ -16 [x^{2n+3}] (x^3 (I_0 I_1)') &= -16(2n+1) \gamma_1(2n+1) x^{2n+3} \\ -32 [x^{2n+3}] (x^2 (I_0 I_1)) &= -32n \gamma_1(2n+1) x^{2n+3} \\ - [x^{2n+3}] (x^2 (I_0 I_1)) &= -\gamma_1(2n+3) x^{2n+3}. \end{aligned}$$

Le coefficient du membre de gauche de (\*) est donc

$$(2n+3)(2n+2)(2n+1)\gamma_1(2n+3) + 4(2n+3)(2n+2)\gamma_1(2n+3) \\ + (2n+3)\gamma_1(2n+3) - 16(2n+1)\gamma_1(2n+1) \\ - 32n\gamma_1(2n+1) - \gamma_1(2n+3)$$

En regroupant selon les  $\gamma_1(2n+m)$ , on obtient la récurrence cherchée

$$(-32n - 48)\gamma_1(2n+1) + (30n + 24 + 7(2n+1)^2 + (2n+1)^3) \\ \gamma_1(2n+3) = 0,$$

ou en posant  $2n+1=n$

$$(-16n - 32)\gamma_1(n) + (n^3 + 7n^2 + 15n + 9)\gamma_1(n+2) = 0.$$

■

Il est à remarquer que si on connaît l'équation différentielle associée à une série  $f$ , on peut alors obtenir directement la  $P$ -récurrence satisfaite par les coefficients de  $f$  avec Maple, Gfun (voir [37]).

En général, le théorème (1.3.8) implique que si  $f(x) = \sum_n f_n x^n$  satisfait une équation différentielle d'ordre  $o$  et de degré  $d$ , alors les nombres  $f_n$  satisfont une  $P$ -récurrence d'ordre (nombre de termes)  $\leq o+d$  et de degré (maximum des degrés des polynômes de la récurrence)  $\leq o$ . On a donc le résultat suivant.

**Proposition 1.4.15.** Les nombres  $\gamma_k(m)$  satisfont une  $P$ -récurrence de la forme :

$$\sum_{i=0}^N p_i(m) \gamma_k(m+i) = 0,$$

où  $N \leq 3(k+n+1)$  et le degré des polynômes  $p_i(m)$  est au plus  $k+n+1$ . ■

## CHAPITRE II

### FONCTIONS SYMÉTRIQUES ET TABLEAUX

On présente ici les concepts de base de la théorie des fonctions symétriques ainsi que leurs liens avec la notion de séries différentiellement finies. On y présente également la méthode utilisée par Gessel (voir [18]) afin d'obtenir des séries génératrices pour les tableaux de hauteur bornée. Nous verrons également des  $P$ -réurrences conjecturées par Bergeron, Favreau et Krob (voir [6]) concernant les tableaux de hauteur bornée ainsi qu'une façon de les démontrer pour plusieurs cas particuliers.

#### 2.1 Diagrammes et tableaux

Un *diagramme*  $d$  est un ensemble fini compris dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  dont les éléments sont appelés des cases. Une case  $(i, j)$  est représentée géométriquement dans le plan par un carré  $1 \times 1$  dont le coin inférieur gauche est situé au point de coordonnées  $(i, j)$ .

Un *partage*  $\mu$  est un diagramme tel que si  $(a, b) \in \mu$  et  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  avec  $i \leq a$  et  $j \leq b$  alors  $(i, j) \in \mu$ . Les parts  $\mu_i$  de  $\mu$  sont les entiers définis comme suit :

$$\mu_i = |\{c \mid c \in \mu, c = (x, i-1)\}|.$$

Soit  $k$  le plus grand entier tel que  $\mu_k > 0$ , alors les entiers  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  caractérisent le partage  $\mu$ . On écrit alors

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k).$$

Lorsque  $n = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k$ , on dit que  $\mu$  est un partage de  $n$  et on écrit dans ce cas  $\mu \vdash n$ . La *hauteur*  $l(\mu)$  de  $\mu$  est le nombre de parts de  $\mu$ . Le *conjugué* d'un partage  $\mu$ , noté  $\mu'$ , est le partage défini de la façon suivante : la case  $(i, j) \in \mu'$

si et seulement si  $(j, i) \in \mu$ . La part  $\mu'_i$  est donc le nombres de cases dans la  $i$ -ème colonne de  $\mu$ .

Pour  $\mu \subseteq \lambda$ , le *partage gauche*,  $\lambda/\mu$ , est le diagramme obtenu en retranchant du partage  $\lambda$  les cases du partage  $\mu$ . On définit la hauteur d'un partage gauche comme précédemment. On désigne par 0 le partage vide et il est clair que  $\lambda/0 = \lambda$ .

Pour  $\mu \vdash n$ , un *tableau*  $t$ , de forme  $\mu$ , est une fonction à valeur dans  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  :

$$t : \mu \rightarrow [n].$$

On dit d'un tableau  $t$  qu'il est *standard* si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$t(i, j) < t(i + 1, j) \text{ et } t(i, j) < t(i, j + 1).$$

Un tableau standard de forme  $\mu$  est de hauteur au plus  $h$  si  $l(\mu) \leq h$ . Par exemple, les tableaux standards de hauteur au plus 2, sur 5 cases, sont

$\boxed{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5}$
$\boxed{5} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{2}$
$\boxed{1 \ 2 \ 3 \ 4}, \boxed{1 \ 2 \ 4 \ 5}, \boxed{1 \ 2 \ 3 \ 5}, \boxed{1 \ 3 \ 4 \ 5}$
$\boxed{4 \ 5} \quad \boxed{2 \ 5} \quad \boxed{3 \ 5} \quad \boxed{2 \ 4} \quad \boxed{3 \ 4}$
$\boxed{1 \ 2 \ 3}, \boxed{1 \ 3 \ 4}, \boxed{1 \ 2 \ 4}, \boxed{1 \ 3 \ 5}, \boxed{1 \ 2 \ 5}$

La cocharge  $c(t)$  d'un tableau  $t$  est définie comme étant la somme suivante. En lisant les nombres apparaissant dans  $t$  dans l'ordre croissant, on additionne un 0 pour chaque case jusqu'à ce qu'on passe à une ligne supérieure. Ensuite, on additionne un 1 pour chaque case jusqu'à ce qu'on passe de nouveau à une ligne supérieure et ainsi de suite. Par exemple, pour

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 7 & & \\ \hline & 3 & 4 & \\ \hline 1 & 2 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 2 & 7 & \\ \hline & 1 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 1 & 6 \\ \hline \end{array}$$

on trouve  $c(t) = 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 6$ .

□

Concernant le dénombrement des tableaux standards, mentionnons les deux résultats classiques suivants : pour  $\mu$  un partage fixé, le nombre de tableaux standards  $f_\mu$  est donné par la *formule des équerres*

$$f_\mu = \frac{n!}{\prod_c e_c},$$

où le produit est effectué sur toutes les cases  $c = (i, j)$  du partage  $\mu$  et où

$$e_c = (\mu_i - i) + (\mu'_j - j) + 1, \quad (2.1)$$

est l'équerre de la case  $c$ .

On a également que le nombre de couples de tableaux standards de même forme est  $n!$ , c'est-à-dire :

$$\sum_{\mu \vdash n} f_\mu^2 = n!.$$

On peut démontrer cette dernière identité combinatoirement via la correspondance de Robinson-Schensted, mais c'est aussi une identité classique de la théorie de la représentation.

Ces formules admettent les  $q$ -analogues suivants :

$$f_\mu(q) := \sum_t q^{c(t)} = \frac{n!_q}{\prod_c [e_c]_q},$$

où la somme est effectuée sur tous les tableaux standards de forme  $\mu$  et où  $[n]_q = (1 - q^n)/(1 - q)$ .

On a aussi

$$\sum_{\mu \vdash n} f_\mu f_\mu(q) = n!_q.$$

□

Un tableau est dit *semi-standard* si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$t(i, j) \leq t(i+1, j) \text{ et } t(i, j) < t(i, j+1).$$

Le contenu d'un tel tableau est le partage  $\nu$  dont les parts  $\nu_i$  correspondent au nombre de fois qu'apparaît  $i$  dans le tableau (réordonnées, s'il y a lieu, en ordre décroissant). Par exemple,

4			
3	4		
1	2	3	3

est un tableau semi-standard de forme  $\lambda = (4, 2, 1)$  et de contenu  $\nu = (3, 2, 1, 1)$ .

□

Concernant le dénombrement des tableaux semi-standards de hauteur bornée, mentionnons les résultats suivants Le nombre de tableaux semi-standards de hauteur au plus  $h$  est :

$$\varphi_h(n) = \prod_{1 \leq i, j \leq n} \frac{h + i + j - 1}{i + j - 1}. \quad (2.2)$$

Soit  $\phi_{2h}(n)$  le nombre de tableaux semi-standards ayant seulement des parts de longueur paire et de hauteur au plus  $2h$ . Concernant ces nombres, on a le résultat suivant :

$$\phi_{2h}(n) = \prod_{1 \leq i, j \leq n} \frac{2h + i + j}{i + j}. \quad (2.3)$$

□

Desainte-Catherine et Viennot ont donné une preuve bijective (... ou presque) de cette dernière identité (voir [10]). Mentionnons également que des résultats ont été obtenus concernant d'autres objets (les tableaux oscillants et les compositions standards) qui sont proches des tableaux standards de hauteur bornée. Pour plus de détails, le lecteur est référé à [4] et [12].

## 2.2 Fonctions symétriques

On rappelle d'abord certains résultats concernant les fonctions symétriques (pour une présentation plus complète, voir [30]). On présentera ensuite un résultat de Gordon (théorème 2.2.1) permettant d'obtenir des séries génératrices pour le nombre de tableaux standards de hauteur bornée.

On définit une action du groupe symétrique sur l'ensemble des polynômes à  $n$  variables de la façon suivante. Pour  $P(\mathbf{x})$ , un polynôme à  $n$  variables ( $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$ ) et  $\sigma \in S_n$ , on pose  $\sigma \mathbf{x} = x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}$  et

$$\sigma P(\mathbf{x}) = P(\sigma \mathbf{x}).$$

On dit d'un polynôme  $P$  qu'il est *symétrique* si  $P(\mathbf{x}) = \sigma P(\mathbf{x})$  pour tout  $\sigma \in S_n$ . L'ensemble des polynômes symétriques en  $n$  variables forme un anneau noté  $\Lambda_n$ . Pour des raisons pratiques, il est préférable d'utiliser un nombre infini de variables. On remplace alors le terme polynôme symétrique par celui de *fonction symétrique* et on obtient ainsi *l'anneau des fonctions symétriques*  $\Lambda$ . Dans le présent travail, on s'intéressera plus particulièrement aux familles de fonctions symétriques définies ci-dessous.

Les *fonctions symétriques homogènes complètes*  $h_\lambda$  sont définies comme suit :

$$h_n(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}.$$

Pour  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  un partage de  $n$ , on pose  $h_\lambda := h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots h_{\lambda_k}$ .

Les *sommes de puissances*  $p_\lambda$  sont définies comme suit :

$$p_n(x_1, \dots) = \sum_{i \geq 1} x_i^n,$$

pour  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ , on pose  $p_\lambda := p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_k}$ .

Soit  $\lambda$  un partage, on peut définir la fonction de symétrique de Schur,  $s_\lambda$ , de la façon suivante :

$$s_\lambda := \sum_t X^t,$$

où la somme est effectuée sur l'ensemble des tableaux semi-standards  $t$  de forme  $\lambda$  et où

$$X^t = \prod_{(i,j) \in \lambda} x_{t(i,j)}.$$

On peut vérifier que  $s_\lambda$  est effectivement symétrique. Il est également classique de vérifier que  $\{h_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ ,  $\{p_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$  et  $\{s_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$  forment des bases de  $\Lambda_n$ .

Soit  $\lambda/\mu$  un partage gauche, on peut définir, de même façon, le polynôme symétrique de *Schur gauche*

$$s_{\lambda/\mu} := \sum_t X^t,$$

où la somme est effectuée sur l'ensembles des tableaux semi-standards de forme  $\lambda/\mu$ .

Soulignons que le coefficient de  $x_1 x_2 \cdots x_n$  dans le polynôme de Schur gauche, noté  $[x_1 x_2 \cdots x_n](s_{\lambda/\mu})$ , est le nombre de tableaux standards de forme  $\lambda/\mu$ .

Afin de d'introduire un produit scalaire pour les fonctions symétriques, on utilise la base des fonctions sommes de puissances, et on pose

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle := z_\lambda \delta_{\lambda \mu},$$

où  $\delta_{\lambda \mu}$  est le delta de Kronecker et où  $z_\lambda = 1^{m_1} m_1! 2^{m_2} m_2! \cdots n^{m_n} m_n!$ , si  $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots n^{m_n})$ .

On vérifie que pour ce produit scalaire (voir [30]), on a

$$\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda \mu}.$$

De plus, pour  $f$  une fonction symétrique quelconque, le coefficient de  $x_{i_1}^{\lambda_1} \cdots x_{i_k}^{\lambda_k}$  dans  $f$  est donné par  $\langle f, h_\lambda \rangle$ . En particulier, on a

$$\langle f, h_1^n \rangle = \langle f, p_1^n \rangle = [x_1 \cdots x_n](f).$$

On peut maintenant énoncer le résultat de Gordon (voir [21]) permettant d'obtenir toutes sortes d'identités et en particulier des séries génératrices pour les tableaux standards de hauteur bornée.

**Théorème 2.2.1.** (Gordon) Soit  $c_i = \sum_{n \geq 0} h_n h_{n+i}$  et  $H = \sum_{n \geq 0} h_n$ , alors

$$\sum_{\substack{\lambda \\ l(\lambda) \leq h}} s_\lambda = \begin{cases} \det(c_{|i-j|} + c_{i+j-1})_{1 \leq i,j \leq h/2}, & \text{si } h \text{ est pair,} \\ H \det(c_{|i-j|} - c_{i+j})_{1 \leq i,j \leq (h+1)/2}, & \text{si } h \text{ est impair.} \end{cases} \quad (2.4).$$

■

Il est à noter qu'il y a un résultat plus général à propos de  $\sum_\lambda s_{\lambda/\mu}$  où  $l(\lambda) \leq h$  (voir [22]). Dans ce qui suit, on notera

$$D_h = \sum_{\substack{\lambda \\ l(\lambda) \leq h}} s_\lambda.$$

On peut également obtenir un résultat similaire au théorème (2.1.2) ci-dessus pour des fonctions symétriques sur deux ensembles de variables indépendants. On utilisera, par la suite, ce résultat pour obtenir des séries génératrices pour les couples de tableaux de hauteur bornée. Posons  $x = (x_1, x_2, \dots)$  et  $y = (y_1, y_2, \dots)$ , on définit  $S_h(x, y)$  comme étant

$$S_h(x, y) := \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x) s_{\lambda}(y),$$

où la somme est effectuée sur tous les partages  $\lambda$  de hauteur au plus  $h$ . Concernant  $S_h(x, y)$ , on a le résultat suivant.

**Proposition 2.2.2.** (Gessel, voir [18]) Soit  $i$  un entier, posons

$$A_i = \sum_{j \geq 0} h_{j+i}(x) h_j(y),$$

alors

$$S_h(x, y) = \det(A_{j-i}). \quad (2.5)$$

■

### 2.3 Déterminants de Gordon et identités

En général, pour un homomorphisme (linéaire et multiplicatif)

$$\psi : \Lambda \rightarrow \mathcal{A}[[x]], \quad (2.6)$$

de l'anneau des fonctions symétriques vers celui des séries formelles (avec  $\mathcal{A}$  un anneau intègre), on obtient des identités en appliquant cet homomorphisme aux déterminants de Gordon

$$\sum_{\substack{\lambda \\ l(\lambda) \leq h}} \psi(s_\lambda) = \begin{cases} \det(\psi(c_{|i-j|}) + \psi(c_{i+j-1}))_{1 \leq i,j \leq h/2}, & \text{si } h \text{ est pair,} \\ \psi(H) \det(\psi(c_{|i-j|}) - \psi(c_{i+j}))_{1 \leq i,j \leq (h+1)/2}, & \text{si } h \text{ est impair,} \end{cases}$$

où  $c_i = \sum_n h_n h_{n+i}$  et  $H = \sum_{n \geq 0} h_n$ .

Cette idée a été utilisée, entre autres, par Stembridge [41] afin d'obtenir des identités sur les caractères des groupes  $SO_{2n+1}(\mathbb{C})$  et  $SO_{2n}(\mathbb{C})$ . Cette technique permet également de prouver plusieurs identités concernant certaines familles de partages plans (voir, entre autres, [21] et [30]). Ainsi, Gessel [18] a obtenu une formule pour la série génératrice du nombre de tableaux standards de hauteur bornée. Il définit donc l'homomorphisme permettant d'extraire de  $D_h$  le coefficient de  $[x_1 \cdots x_n]$ . En effet, soit  $\theta : \Lambda \rightarrow \mathcal{A}[[x]]$ , tel que :

$$\theta(p_n) = \begin{cases} x & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, pour  $f$  une fonction symétrique homogène de degré  $n$ , en développant  $f$  dans la base des sommes de puissances

$$f = \sum_{\lambda \vdash n} \alpha_\lambda p_\lambda,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \theta(f) &= \sum_{\lambda \vdash n} \alpha_\lambda \theta(p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_k}) \\ &= \alpha_{1^n} \theta(p_1^n) \\ &= \alpha_{1^n} x^n, \end{aligned}$$

d'où

$$\alpha_{1^n} = [x_1 x_2 \cdots x_n] \frac{(f)}{n!} = \frac{1}{n!} \langle f, p_1^n \rangle.$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \theta\left(\sum_{n \geq 0} h_n\right) &= \sum_{n \geq 0} \langle h_n, p_1^n \rangle \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left\langle \sum_{\lambda \vdash n} \frac{p_\lambda}{z_\lambda}, p_1^n \right\rangle \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Pour  $\lambda \vdash n$ , on a

$$\theta(s_\lambda) = \langle s_\lambda, p_1^n \rangle \frac{x^k}{k!} = f_\lambda \frac{x^n}{n!},$$

où  $f_\lambda$  est le nombre de tableaux standards de forme  $\lambda$ .

Puisque que le coefficient de  $x_1 x_2 \cdots x_n$  dans  $D_h$  est le nombre de tableaux standards de hauteur au plus  $h$ , on obtient en appliquant  $\theta$  sur  $D_h$ , les séries génératrices (de type exponentiel) :

$$\theta(D_h) = \sum_{n \geq 0} \tau_h(n) \frac{x^n}{n!},$$

où

$$\tau_h(n) := \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ l(\lambda) \leq h}} f_\lambda.$$

Il s'en suit que  $\tau_h(n)$  est le nombre de tableaux standards ayant  $n$  cases et de hauteur bornée par  $h$ . En utilisant le théorème (2.2.1), et en posant  $y_h(x) := \theta(D_h)$ , on obtient le résultat suivant.

**Proposition 2.3.3.** (Gessel) Soit  $h \leq 2$  un entier,

$$y_h(x) = \begin{cases} \det(I_{|i-j|}(x) + I_{i+j-1}(x))_{1 \leq i,j \leq h/2} & \text{si } h \text{ est pair} \\ e^x \det(I_{|i-j|}(x) - I_{i+j}(x))_{1 \leq i,j \leq (h+1)/2} & \text{si } h \text{ est impair,} \end{cases} \quad (2.7)$$

où

$$I_n(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k+n}}{k!(k+n)!},$$

est la fonction de Bessel combinatoire (voir chapitre 1).

**Preuve.** On a

$$\theta(c_i) = \theta \left( \sum_{n \geq 0} h_n h_{n+i} \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+i}}{n! (n+i)!}. \quad \blacksquare$$

En utilisant les identités sur les fonctions de Bessel  $I_n$  vues au chapitre 1 on trouve, après simplifications, des formules explicites, pour  $h \leq 5$ , pour les coefficients des séries  $y_h(x)$  :

$$\tau_2(n) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \tag{2.8}$$

$$\tau_3(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} C_i \tag{2.9}$$

$$\tau_4(n) = C_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} C_{\lceil (n+1)/2 \rceil} \tag{2.10}$$

$$\tau_5(n) = 6 \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} C_i \frac{(2i+2)!}{(i+2)!(i+3)!}. \tag{2.11}$$

□

Pour les identités (2.10) et (2.11), Gouyou-Beauchamps a donné des preuves bijectives (voir [25]). Pour  $h$  quelconque, il est également possible de simplifier, dans une certaine mesure,  $y_h(x)$  afin d'obtenir des formules, mais cela est moins automatique. La méthode utilisée sera décrite au chapitre 3.

Dans le cas des couples de tableaux standards de hauteur bornée, on définit les homomorphismes  $\theta_x$  et  $\theta_y$  comme précédemment, c'est-à-dire

$$\theta_x(h_n(x)) = x^n/n! \quad \text{et} \quad \theta_y(h_n(y)) = y^n/n!.$$

Lorsqu'on applique ces deux homomorphismes sur le déterminant  $S_h(x, y)$ , on obtient une série de puissance en  $xy$ . On peut alors poser  $x = y$ , et  $Y_h(x) = \theta_x \theta_x(S_h(x, x))$ .

Ainsi  $Y_h(x)$  est la série génératrice des couples de tableaux standards de hauteur bornée par  $h$  :

$$Y_h(x) = \sum_{n \geq 0} \tau_h^{(2)}(n) \frac{x^{2n}}{(n!)^2},$$

avec

$$\tau_h^2(n) := \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ l(\lambda) \leq h}} f_\lambda^2.$$

En terme de déterminant, on a l'identités suivante.

**Proposition 2.3.4.** (Gessel) Soit  $h \leq 2$  un entier,

$$Y_h(x) = \det (I_{|i-j|})_{1 \leq i,j \leq h}. \quad (2.12)$$

Un fait important à remarquer à propos des nombres  $\tau_h^{(2)}(n)$  est que la correspondance de Schensted [35] implique que  $\tau_h^{(2)}(n)$  est égal au nombre de permutations de  $S_n$  ayant des sous-suites croissantes de longueur au plus  $h$ , où  $S_n$  est le groupe symétrique sur  $n$  éléments (voir [36] et [38]). Comme pour le cas précédent, on peut simplifier ce déterminant :

$$\tau_2^{(2)}(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \quad (2.13)$$

$$\tau_3^{(2)}(n) = 2 \sum_{k \geq 0} \binom{2k}{k} \binom{n}{k}^2 \frac{3k^2 + 2k + 1 - 2kn}{(k+1)^2(k+2)(n-k+1)}. \quad (2.14)$$

La première formule est de MacMahon [31], la seconde de Gessel [18]. Mentionnons également que certains cas particuliers ont été étudiés par Rogers [35].

Il est à remarquer qu'une façon d'obtenir un homomorphisme comme (1.6) est de substituer certaines valeurs (variables ou paramètres) aux variables d'une fonction symétrique. L'homomorphisme  $\theta$  défini ci-dessus équivaut à effectuer la substitution

$$x_1 = \frac{x}{n}, x_2 = \frac{x}{n}, \dots, x_n = \frac{x}{n} \text{ et } x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = 0$$

et à faire tendre  $n$  vers l'infini.

Afin de produire d'autres identités à partir du théorème (2.2.1), on introduit les  $\lambda$ -*substitution*. Pour définir une  $\lambda$ -substitution, on doit considérer les fonctions symétriques comme des opérateurs sur les polynômes. Puisque les sommes de puissances forment une base, il suffit de définir l'effet de la  $\lambda$ -substitution sur celles-ci :  $p_k$  est l'opérateur qui élève les variables à la puissance  $k$ , c'est-à-dire

$$p_k[x_1 + x_2 + \cdots + x_n] = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k.$$

Il est à remarquer que, pour  $c$  un paramètre, on pose  $p_k[c] = c$ . On a également  $p_k[p_j] = p_{kj}$ .

Pour obtenir un  $q$ -analogue de l'homomorphisme  $\theta$ , il suffit de poser pour  $f$  une fonction symétrique quelconque (voir [18]),

$$\Theta_q(f) := f \left[ \frac{x}{1-q} \right]_{x \leftarrow x(1-q)}.$$

Si  $f$  est homogène de degré  $n$ , alors

$$\Theta_q(f) := (1-q)^n f \left[ \frac{x}{1-q} \right].$$

L'effet de  $\Theta_q$  sur les fonctions symétriques sommes de puissances est

$$\Theta_q(p_k) = (1-q)^k \frac{x^k}{1-q^k},$$

et

$$\lim_{q \rightarrow 1} \Theta_q(p_k) = \theta(p_k) = \begin{cases} x & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, on peut calculer l'effet  $\Theta_q$  sur les fonctions symétriques homogènes :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \Theta_q(h_n) z^n &= \exp \left( \sum_{k \geq 0} \Theta_q(p_k) z^k / k \right) \\ &= \exp \left( \sum_{k \geq 0} (1-q)^k x^k z^k / (k(1-q^k)) \right) \\ &= \prod_{j \geq 0} \exp \left( \sum_{k \geq 0} q^{jk} (1-q)^k x^k z^k / (k(1-q^k)) \right) \\ &= \prod_{j \geq 0} \left( \frac{1}{1 - q^j (1-q) x z} \right). \end{aligned}$$

On trouve alors

$$\begin{aligned}\Theta_q(h_n) &= \frac{(1-q)^n x^n}{(1-q) \cdots (1-q^n)} \\ &= \frac{x^n}{[n]!_q}.\end{aligned}$$

En appliquant ce  $q$ -homomorphisme aux déterminants  $D_h$ , on obtient des séries dont les coefficients sont un  $q$ -comptage des tableaux standards de hauteur bornée. D'une part, il est connu (voir [31]) que pour  $\lambda \vdash k$

$$\begin{aligned}s_\lambda \left[ \frac{x}{1-q} \right]_{x \leftarrow x(1-q)} &= q^{n(\lambda)} \left( \prod_{c \in \lambda} (1 - q^{e(c)})^{-1} x^k \right)_{x \leftarrow x(1-q)} \\ &= q^{n(\lambda)} (1-q)^k \prod_{c \in \lambda} (1 - q^{e(c)})^{-1} x^k \\ &= f_\lambda(q) \frac{x^k}{k!_q},\end{aligned}$$

où  $n(\lambda) = \sum_{i \geq 1} \binom{\lambda'_i}{2}$  et  $e(c) = e(i, j)$  est l'équerre (voir (2.1)) issue de la case  $c = (i, j) \in \lambda$ .

D'autre part, si  $h$  est pair on a

$$\begin{aligned}&\det \left( c_{|i-j|} \left[ \frac{x}{1-q} \right]_{x \leftarrow x(1-q)} + c_{i+j-1} \left[ \frac{x}{1-q} \right]_{x \leftarrow x(1-q)} \right), \\ &= \det (I_{|i-j|}(x; q) + I_{i+j-1}(x; q)),\end{aligned}$$

car

$$c_i \left[ \frac{x}{1-q} \right]_{x \leftarrow x(1-q)} = \sum_n \frac{x^{2n+i}}{[n]! [n+i]!} = I_i(x; q)$$

où  $I_i(x; q)$  est  $q$ -série de Bessel (voir section 1.2).

Si  $h$  est impair,

$$\begin{aligned}H \left[ \frac{x}{1-q} \right]_{x \leftarrow x(1-q)} &\det \left( c_{|i-j|} \left[ \frac{x}{1-q} \right]_{x \leftarrow x(1-q)} - c_{i+j} \left[ \frac{x}{1-q} \right]_{x \leftarrow x(1-q)} \right), \\ &= H \det (I_{|i-j|}(x; q) - I_{i+j}(x; q)),\end{aligned}$$

où

$$H \left[ \frac{x}{1-q} \right]_{x \leftarrow x(1-q)} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{[n]!} = e_q(x).$$

Donc, le théorème (2.2.1) implique :

$$\sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ l(\lambda) \leq h}} f_\lambda(q) \frac{x^k}{k!_q} = \begin{cases} \det(I_{|i-j|}(x; q) + I_{i+j-1}(x; q)) & \text{si } h \text{ pair} \\ e_q(x) \det(I_{|i-j|}(x; q) - I_{i+j}(x; q)) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.15)$$

**Lemme 2.3.5.** Soit  $y_h(x; q)$  la  $q$ -série génératrice des tableaux de hauteur bornée par  $h$  obtenue de la  $q$ -formule de Gessel (2.15) :

$$y_h(x; q) = \sum_{n \geq 0} \tau_h(n; q) \frac{x^n}{n!_q}.$$

Alors les polynômes  $\tau_h(n; q)$  sont donnés par

$$\tau_h(n; q) = \sum_{\substack{t \in T \\ l(t) \leq h}} q^{c(t)}$$

où  $c(t)$  est la cocharge du tableau  $t$  et où  $T$  est l'ensemble des tableaux standards.

**Preuve.**

$$f_\lambda(q) = \sum_{t \vdash \lambda} q^{c(t)}. \quad \blacksquare$$

Par exemple, on calcule les premiers termes de la série  $y_4(x; q)$  :

$$\begin{aligned} y_4(x; q) = & 1 + x + (q+1) \frac{x^2}{2!_q} + (q^2+1)(q+1) \frac{x^3}{3!_q} + (q^2+1)(q^4+q^3+q^2+q+1) \frac{x^4}{4!_q} \\ & + (q^4+q^3+q^2+q+1)(q^5+q^4+q^3+q^2+1) \frac{x^5}{5!_q} + \dots \end{aligned}$$

On peut obtenir plusieurs autres identités à partir du théorème (2.2.1). Par exemple, si on effectue la  $\lambda$ -substitution  $p[x(1-u)]$ , on obtient :

$$s_\lambda[x(1-q)] = \begin{cases} x^n (-q^i)(1-q) & \text{si } \lambda = 1^i(n-i) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc, pour  $h$  pair :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ l(\lambda) \leq h}} s_\lambda[x(1-q)] &= (1-q) \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^h (-q)^j x^n \\ &= \det(c_{|i-j|}[x(1-q)] + c_{i+j-1}[x(1-q)]), \quad (2.16) \end{aligned}$$

où

$$c_i[x(1-q)] = \sum_{n \geq 0} h_n[x(1-q)] h_{n+i}[x(1-q)],$$

avec  $h_0[x(1-q)] = 1$  et  $h_n[x(1-q)] = (1-q)x^n$  si  $n \neq 0$ . Donc

$$c_i[x(1-q)] = \begin{cases} (1-q)x^i \left( 1 + (1-q) \sum_{n \geq 1} x^{2n} \right) & \text{si } i \neq 0, \\ 1 + (1-q)^2 \sum_{n \geq 1} x^{2n} & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

On obtient aussi des formules en utilisant la substitution  $p[\frac{x}{1-q}]$ . On a pour  $h$  pair

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ l(\lambda) \leq h}} s_\lambda \left[ \frac{x}{1-q} \right] &= q^{n(\lambda)} \left( \prod_{c \in \lambda} (1 - q^{e(c)})^{-1} x^k \right) \\ &= \det \left( c_{|i-j|} \left[ \frac{x}{1-q} \right] + c_{i+j-1} \left[ \frac{x}{1-q} \right] \right), \end{aligned} \tag{2.17}$$

où

$$c_i \left[ \frac{x}{1-q} \right] = \sum_{n \geq 0} h_n \left[ \frac{x}{1-q} \right] h_{n+i} \left[ \frac{x}{1-q} \right]$$

De la même façon, on obtient des identités pour  $h$  impair. □

## 2.4 Fonctions symétriques différentiellement finies

Pour ce qui est de la classification des séries  $y_h$ , il a été démontré que les séries  $y_2(x)$  et  $y_3(x)$  (voir [34]) sont algébriques. Pour  $y_4(x)$  et  $y_5(x)$ , Gouyou-Beauchamps (voir [25]) a prouvé qu'elles étaient non-algébriques. Mais il est clair, puisque des sommes et des produits de séries différentiellement finies sont différentiellement finis, qu'on a le résultat suivant (voir proposition 2.3.3).

**Proposition 2.4.6.** Les séries  $y_h(x)$  sont différentiellement finies. ■

**Corollaire 2.4.7.** Soit  $\tau_h(n)$  le nombre de tableaux standards de hauteur bornée par  $h$ , alors la fonction définie par les nombres  $\tau_h(n)$  est P-réursive. ■

Il est également clair que  $Y_h$  est différentiellement finie, puisque qu'elle peut s'écrire comme un déterminant de séries de Bessel.

**Lemme 2.4.8.** La série  $Y_h(x)$  est différentiellement finie et les nombres  $\tau_h^{(2)}$  sont  $P$ -récurrents. ■

Ces résultats ont d'abord été obtenus par Zeilberger [43], puis ont été déduits par Gessel [18] de résultats de Gordon en adaptant la notion de série formelle différentiellement finie aux fonctions symétriques.

Soit  $f$  une série formelle sur  $X$  un ensemble infini de variables. On dit que  $f$  est différentiellement finie si pour tout  $Y$  sous-ensemble fini de  $X$   $f_Y$  la restriction de  $f$  par rapport à  $Y$ , obtenu de  $f$  en posant toutes les variables dans  $X - Y$  égales à zéro, est différentiellement finie. On peut alors vérifier que les résultats du lemme (1.3.9) restent vrais pour ce type de séries.

**Théorème 2.4.9.** (Gessel)  $D_h$  est différentiellement fini.

**Preuve.** Les  $D_h$  peuvent s'écrire en termes de fonctions symétriques homogènes  $h$  et des fonctions symétriques  $c_i = \sum_{n \geq 0} h_n h_{n+1}$ . Mais les  $c_i$  sont  $D$ -finies puisqu'elles sont obtenues en effectuant un produit d'Hadamard :

$$\sum_{n \geq 0} h_n t^{n+i} \odot \sum_{n \geq 0} h_n t^n.$$

Le lemme (1.3.10) implique alors le résultat. ■

Pour le cas des fonctions symétriques sur deux ensembles de variables, on peut étendre le produit scalaire par linéarité :

$$\langle f_1(x) f_2(y), g_1(x) g_2(y) \rangle = \langle f_1(x), g_1(x) \rangle \langle f_1(y), g_1(y) \rangle.$$

Toute fonction  $f(x, y)$ , symétrique en les  $x$  et en les  $y$ , peut s'exprimer en termes des sommes de puissances :

$$\sum_{\lambda, \mu} c_{\lambda \mu} p_{\lambda}(x) p_{\mu}(y).$$

On dit de cette fonction qu'elle est  $D$ -finie si elle est  $D$ -finie en les  $p_i(x)$  et en les  $p_j(y)$ . On peut maintenant énoncer le résultat concernant les fonctions symétriques  $S(x, y)$ .

**Proposition 2.4.10.** (Gessel) Les fonctions  $S_h(x, y)$  sont  $D$ -finies. ■

De plus, Gessel a utilisé cette notion de fonctions symétriques  $D$ -finies pour démontrer que les séries génératrices de certains types de graphes sont  $D$ -finies (voir [17]).

On vérifie également que la propriété  $D$ -finie est compatible avec certaines  $\lambda$ -substitutions. En effet, le lemme (1.3.9, partie 3) implique que lorsqu'on substitue des polynômes dans une série formelle en un nombre fini de variables, la propriété d'être différentiellement finie est préservée. Donc les séries en les variables  $q$  et  $x$  de l'identité (2.16) sont  $D$ -finies.

## 2.5 P-réurrences liées aux nombres $\tau_h(n)$ et $\tau_h^{(2)}(n)$

Puisque les nombres  $\tau_h(n)$  sont P-récurrsifs, ils doivent satisfaire une récurrence de la forme

$$\sum_{k=0}^m p_k(n) \tau_h(n-k) = 0.$$

Bergeron, Favreau et Krob (voir [6]) ont énoncé des conjectures sur le nombre de termes  $m$  dans cette récurrence ainsi que sur la forme des polynômes  $p_k(n)$ , à savoir que

$$m = \lfloor h/2 \rfloor + 1 \tag{2.18}$$

$$\deg(p_k(n)) \leq h/2 \tag{2.19}$$

$$p_k(n) = q_k(n) \prod_{i=1}^{k-1} (n-i), \quad 1 \leq k \leq m \tag{2.20}$$

$$p_0(n) = \prod_{k=1}^{\lfloor h/2 \rfloor} (n + k(h - k)) \tag{2.21}$$

où les  $q_k(n)$  sont des polynômes de degré au plus  $\lfloor h/2 \rfloor - k + 1$ .

Pour  $h = 2m + 1$  un nombre impair, il y a deux conjectures supplémentaires :

$$\deg(q_k(n)) = m - k + 1, \tag{2.22}$$

$$-p_1(n) = n p_0(n) - (n-1) p_0(n-1). \tag{2.23}$$

Dans ce qui suit on appellera ces conjectures *les conjectures BFK*.

En utilisant une méthode de coefficients indéterminés, on peut calculer des  $P$ -réurrences explicites que l'on note  $R_h$ . Ces réurrences sont aisément vérifiées pour  $h = 2, 3, 4$  et  $5$  : on utilise pour ce faire les formules (2.8), (2.9), (2.10) et (2.11) vues ci-dessus.

**Lemme 2.5.11.** Pour  $h = 2, 3, 4$  et  $5$ , on a

$$(n+1)\tau_2(n) - 2\tau_2(n-1) - 4(n-1)\tau_2(n-2) = 0,$$

$$(n+2)\tau_3(n) - (2n+1)\tau_3(n-1) - 3(n-1)\tau_3(n-2) = 0, \quad (*)$$

$$(n+3)(n+4)\tau_4(n) - 4(2n+3)\tau_4(n-1) - 16(n-1)n\tau_4(n-2) = 0$$

$$(n+4)(n+6)\tau_5(n) - (3n^2 + 17n + 15)\tau_5(n-1) - (n-1)$$

$$(13n+9)\tau_5(n-2) + 15(n-1)(n-2)\tau_5(n-3) = 0$$

■

Mentionnons que Dulucq et Penaud ont donné une interprétation combinatoire de la récurrence  $(*)$  ci-dessus (voir [11]).

Pour démontrer la validité de ces réurrences pour  $h \geq 6$ , on peut procéder comme suit. Soit  $R_h$  la récurrence obtenue des conjectures BFK. On construit à partir de  $R_h$  une équation différentielle (de type exponentielle) et on montre que la série génératrice  $y_h$  est solution de cette équation.

Plus précisément, on obtient l'équation différentielle désirée de la façon suivante : on construit une récurrence  $\tilde{R}_h$  pour les nombres  $\tau_h(n)/n!$ , en divisant chaque terme de  $R_h$  par  $n!$ , on utilise ensuite le théorème (1.3.8). Par exemple, pour  $h = 4$  on a

$$(n+3)(n+4)\frac{\tau_4(n)}{n!} - 4(2n+3)\frac{\tau_4(n-1)}{n(n-1)!} - 16(n-1)n\frac{\tau_4(n-2)}{n(n-1)(n-2)!} = 0.$$

En simplifiant, on obtient

$$(n+3)(n+4)n\frac{\tau_4(n)}{(n)!} - 4(2n+3)\frac{\tau_4(n-1)}{(n-1)!} - 16n\frac{\tau_4(n-2)}{(n-2)!} = 0.$$

Ce qui nous donne l'équation différentielle :

$$x^2 y''' + 10x y'' - 4(4x^2 + 2x - 5) y' - 4(8x + 5) y = 0.$$

Lorsqu'on substitue  $y_h(x)$  dans l'équation différentielle correspondante, on obtient bien zéro. Bien que ces calculs soient effectués, dans ce cas et dans les suivants, par Maple, ils correspondent à des algorithmes effectifs et donnent des démonstrations rigoureuses.

Si l'on veut pouvoir calculer effectivement, avant de substituer la série génératrice  $y_h(x)$  dans les équations différentielles correspondantes, il est crucial de simplifier  $y_h(x)$ , à l'aide de la récurrence (1.4). Nous verrons (section (2.6)) quelle forme en général prend  $y_h(x)$  en termes de  $I_0(x)$  et  $I_1(x)$ .

Par exemple, pour  $h = 6$ , on a sans simplification

$$\begin{aligned} y_6(x) &= \det \begin{pmatrix} I_0(x) + I_1(x) & I_1(x) + I_2(x) & I_2(x) + I_3(x) \\ I_1(x) + I_2(x) & I_0(x) + I_3(x) & I_1(x) + I_4(x) \\ I_2(x) + I_3(x) & I_1(x) + I_4(x) & I_0(x) + I_5(x) \end{pmatrix} \\ &= 2I_2(x)I_3(x)I_1(x) + I_1(x)I_3(x)I_5(x) + 2I_2(x)I_3(x)I_4(x) \\ &\quad - I_3(x)^2I_0(x) - 2I_0(x)I_1(x)^2 + I_1(x)I_0(x)^2 + I_3(x)I_0(x)^2 \\ &\quad - I_0(x)I_4(x)^2 + I_0(x)^3 - I_1(x)^3 - 2I_2(x)^2I_0(x) \\ &\quad + I_1(x)I_3(x)I_0(x) - 2I_1(x)I_2(x)I_0(x) \\ &\quad - 2I_1(x)I_2(x)I_5(x) + 2I_1(x)I_2(x)I_4(x) + 2I_1(x)I_3(x)I_4(x) \\ &\quad + I_1(x)I_0(x)I_5(x) - I_2(x)^2I_3(x) - I_3(x)^3 \\ &\quad - 2I_2(x)I_3(x)I_0(x) + I_0(x)I_3(x)I_5(x) - 2I_0(x)I_1(x)I_4(x) \\ &\quad - I_2(x)^2I_5(x) + 2I_2(x)^2I_1(x) \\ &\quad + 2I_2(x)^2I_4(x) + I_0(x)^2I_5(x) - 2I_1(x)^2I_4(x) - I_1(x)I_4(x)^2 \\ &\quad - I_1(x)^2I_5(x) + 2I_2(x)I_1(x)^2 + 2I_3(x)I_1(x)^2 - 2I_2(x)I_3(x)^2, \end{aligned}$$

mais après simplifications, cette expression devient

$$\begin{aligned} y_6(x) &= -4 \frac{(4x - 3)I_0(x)^3}{x^4} - 4 \frac{(4x^2 - 3x + 6)I_1(x)I_0(x)^2}{x^5} \\ &\quad + 4 \frac{(4x^3 - x^2 + 3)I_1(x)^2I_0(x)}{x^6} + 4 \frac{(4x^3 - x^2 + 5x + 1)I_1(x)^3}{x^6}. \end{aligned}$$

On a donc les résultats suivants.

**Lemme 2.5.12.** Pour  $6 \leq h \leq 12$ , les  $P$ -réurrences BFK sont satisfaites par les nombres  $\tau_h(n)$ . Explicitement, on a les réurrences suivantes :

$$\begin{aligned}
& (n+5)(n+8)(n+9)\tau_6(n) - (336 + 20n^2 + 184n)\tau_6(n-1) \\
& - (n-1)(40n^2 + 232n + 132)\tau_6(n-2) + 144(n-1)(n-2)\tau_6(n-3) \\
& + 144(n-1)(n-2)(n-3)\tau_6(n-4) = 0, \\
& (n+6)(n+10)(n+12)\tau_7(n) - (4n^3 + 78n^2 + 424n + 495) \\
& \tau_7(n-1) - (n-1)(34n^2 + 280n + 305)\tau_7(n-2) + (n-1)(n \\
& - 2)(76n + 290)\tau_7(n-3) + 105(n-1)(n-2)(n-3) \\
& \tau_7(n-4) = 0 \\
& (n+7)(n+12)(n+15)(n+16)\tau_8(n) - (18480 + 40n^3 \\
& + 1084n^2 + 8684n)\tau_8(n-1) - (n-1)(80n^3 + 1712n^2 + 9760n + 9600) \\
& \tau_8(n-2) + (n-1)(n-2)(6144 + 1024n)\tau_8(n-3) + (n-1) \\
& (n-2)(n-3)(1024n + 4096)\tau_8(n-4) = 0 \\
& (n+8)(n+14)(n+18)(n+20)\tau_9(n) - (5n^4 + 230n^3 \\
& + 3574n^2 + 20663n + 29393)\tau_9(n-1) - (n-1)(70n^3 + 1862n^2 \\
& + 13433n + 18991)\tau_9(n-2) + (n-1)(n-2)(230n^2 + 3934n + 13587) \\
& \tau_9(n-3) + (n-1)(n-2)(n-3)(789n + 4242)\tau_9(n-4) \\
& - 945(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\tau_9(n-5) = 0,
\end{aligned}$$

etc. ■

On s'arrête ici à  $h = 9$  pour des raisons d'espace, mais les calculs s'effectuent en temps très raisonnable. Par la suite, nous obtiendrons, dans le cas général (voir chap. 3), des bornes pour l'ordre et le degré des équations différentielles qui correspondent aux conjectures BFK (2.18) et (2.19).

Les nombres  $\tau_h^{(2)}(n)$ , sont également  $P$ -réursifs : selon les conjectures établies par Bergeron, Favreau et Krob, ils doivent satisfaire une récurrence de la forme

$$\sum_{k=0}^{\lfloor h/2 \rfloor + 1} p_k(n) \tau_h^{(2)}(n-k) = 0,$$

où  $n > h$  (pour  $n \leq h$  on a tout simplement  $\tau_h^{(2)}(n) = n!$ ).

Les polynômes  $p_k(n)$  sont de degré  $\leq n$  et de la forme

$$p_0(n) = \prod_{k=1}^{\lfloor h/2 \rfloor} (n + k(h - k))^2 \quad (2.24)$$

$$p_k(n) = q_k(n) \prod_{i=1}^{k-1} (n - i)^2, \quad (2.25)$$

où les polynômes  $q_k(n)$  sont de degré  $\leq (h - 2k)$ .

De plus le coefficient dominant de  $q_k(n)$  est le coefficient de  $z^k$  dans

$$\prod_{j=0}^m (1 - 2j + 1)z, \quad (2.26)$$

où  $h = 2m + 1$ .

Ces conjectures sont vérifiées pour  $h \leq 3$  en utilisant les formules (2.13) et (2.14). On a donc les résultats suivants.

**Lemme 2.5.13.** Les nombres  $\tau_2^{(2)}(n)$  et  $\tau_3^{(2)}(n)$  satisfont respectivement les récurrences

$$(n+1)^2 \tau_2^{(2)}(n) = (4n^2 + 2n - 2) \tau_2^{(2)}(n-1)$$

$$(n+2)^2 \tau_3^{(2)}(n) = (10n^2 + 2n - 3) \tau_3^{(2)}(n-1) - 9(n-1)^2 \tau_3^{(2)}(n-2).$$

On appelle également ces conjectures *les conjectures BFK*. On peut aussi démontrer que les conjectures BFK sont vraies pour  $h \leq 12$  en utilisant la même technique que précédemment : on écrit les séries génératrices  $Y_h(x)$  des nombres  $\tau_h^{(2)}(n)$  en terme de  $I_0$  et  $I_1$  et on substitue  $x \leftarrow x^{1/2}$ , (et ce afin d'avoir une série génératrice avec des termes  $\tau_h^{(2)}(n) x^n / n!^2$  plutôt que des termes  $\tau_h^{(2)}(n) x^{2n} / n!^2$ ). On substitue alors ces séries dans les équations différentielles associées et on obtient les résultats ci-dessous.

**Lemme 2.5.14.** Pour  $h \leq 12$ , les conjectures BFK concernant les nombres  $\tau_h^{(2)}(n)$  sont vérifiées. Explicitement, on a les récurrences suivantes :

$$(n+3)^2(n+4)^2\tau_4^{(2)}(n) = (20n^4 + 142n^3 + 270n^2 + 64n - 96)\tau_4^{(2)}(n-1) \\ - (n-1)^2(64n^2 + 256n)\tau_4^{(2)}(n-2)$$

$$(n+4)^2(n+6)^2\tau_5^{(2)}(n) = (35n^4 + 322n^3 + 843n^2 + 400n - 375)\tau_5^{(2)}(n-1) \\ - (n-1)^2(259n^2 + 622n + 45)\tau_5^{(2)}(n-2) \\ + 225(n-1)^2(n-2)^2\tau_5^{(2)}(n-3).$$

(Voir appendice (1) pour les récurrences concernant les nombres  $\tau_6^{(2)}(n)$  et  $\tau_7^{(2)}(n)$ ). ■

## 2.6 Simplifications des séries $y_h(x)$ et $Y_h(x)$

On peut simplifier, en général, les déterminants associés aux séries génératrices des nombres  $\tau_h(n)$  et  $\tau_h^{(2)}(n)$ . En effet, il est aisé de vérifier que  $y_h(x)$  peut s'écrire en terme de  $I_0(x)$  et  $I_1(x)$  les séries de Bessel combinatoires de base. Ces simplifications sont obtenues à partir du fait que la série de Bessel  $I_n(x)$  peut s'écrire en terme de  $I_0(x)$  et  $I_1(x)$ , voir lemme (1.1.1). Plus précisément, on a les résultats suivants.

**Lemme 2.6.15.** Soit  $h = 2g$ , alors

$$y_h(x) = \det(I_{|i-j|}(x) + I_{i+j-1}(x))_{1 \leq i,j \leq g} \\ = \sum_{k \geq 0}^g P_k(x) \frac{I_0^k(x) I_1^{g-k}(x)}{x^{m_k}}, \quad (2.27)$$

où

1. Le degré de  $P_k(x)$  pour  $k \neq 0$  est donné par

$$n_k = \begin{cases} \frac{1}{2}g(g-1) - (k-1) & \text{si } g \text{ est impair} \\ \frac{1}{2}g(g-1) - (k-1) - \frac{1}{2}(1 + (-1)^{k+1}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour  $k = 0$ , on a

$$n_0 = \frac{1}{2}g(g-1).$$

2.  $P_k(x)$  est un polynôme à coefficients entiers tel que  $P_k(0) \neq 0$ .
3.  $m_k$  est donnée par

$$m_k = \begin{cases} g(g-1) - (k-1) & \text{si } k \neq 0 \\ g(g-1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Preuve.**

1. On utilise le résultat du théorème (2.6.18) et du lemme (2.6.19).
2. Le lemme (1.1.1) implique que les  $a_{i,j}$  sont des entiers pour tout  $i, j$ .
3. On a

$$\begin{aligned} & \det(I_{|i-j|}(x) + I_{i+j-1}(x))_{1 \leq i, j \leq g} \\ &= \det \left[ \left( \frac{P_{|i-j|} I_0(x)}{x^{|i-j|-2}} + \frac{Q_{|i-j|} I_1(x)}{x^{|i-j|-1}} \right) + \left( \frac{P_{i+j-1} I_0(x)}{x^{i+j-3}} + \frac{Q_{i+j-1} I_1(x)}{x^{i+j-2}} \right) \right] \\ &= \sum_{\sigma \in S_{h/2}} \prod_{n=1}^{h/2} \left[ \tilde{P}_{n,\sigma(n)} I_0(x) + \tilde{Q}_{n,\sigma(n)} I_1(x) \right], \end{aligned}$$

où

$$\tilde{P}_{i,\sigma(i)} = \frac{P_{|i-\sigma(i)|}(x)}{x^{|i-\sigma(i)|-2}} + \frac{P_{i+\sigma(i)-1}(x)}{x^{i+\sigma(i)-3}}$$

et

$$\tilde{Q}_{i,\sigma(i)} = \frac{Q_{|i-\sigma(i)|}(x)}{x^{|i-\sigma(i)|-1}} + \frac{Q_{i+\sigma(i)-1}(x)}{x^{i+\sigma(i)-2}},$$

où  $P_k$  et  $Q_l$  sont des polynômes en  $x$  tels que définis par le lemme (1.1.1).

Pour obtenir le coefficient de  $I_0(x)^{h/2}$ , on doit toujours choisir le premier terme dans le produit

$$\prod_{n=1}^{h/2} \left[ \tilde{P}_{n,\sigma(n)} I_0(x) + \tilde{Q}_{n,\sigma(n)} I_1(x) \right].$$

Ce qui donne

$$\sum_{\sigma \in S_n} \tilde{P}_{1,\sigma(1)} \tilde{P}_{2,\sigma(2)} \tilde{P}_{3,\sigma(3)} \cdots \tilde{P}_{h/2,\sigma(h/2)}.$$

Afin d'obtenir la plus grande puissance possible de  $x$  au dénominateur d'un terme contenant  $I_0(x)^{h/2}$ , on doit choisir pour chaque facteur du produit précédent le deuxième terme du membre de droite de l'égalité suivante :

$$\tilde{P}_{i,\sigma(i)} = \frac{P_{|i-\sigma(i)|}(x)}{x^{|i-\sigma(i)|-2}} + \frac{P_{i+\sigma(i)-1}(x)}{x^{i+\sigma(i)-3}},$$

et ce, puisque

$$i + \sigma(i) - 3 \geq |i - \sigma(i)| - 2,$$

pour tout  $1 \leq i, \sigma(i) \leq h/2$ , sauf dans le cas où  $i + \sigma(i) = 2$ , car on a alors  $P_1 = 0$ . Pour un  $\sigma$  fixé, s'il n'existe pas de  $i$  tel que  $\sigma(i) = i$ , on doit toujours choisir le terme

$$\frac{P_{i+\sigma(i)-1}(x)}{x^{i+\sigma(i)-3}}$$

pour obtenir la plus grande puissance de  $x$  au dénominateur d'un terme ayant au numérateur  $I_0(x)^{h/2}$ . Donc, dans ce cas, le maximum est

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{h/2} (i + \sigma(i) - 3) &= h/2(h/2 + 1) - 3h/2 \\ &= h/2((h/2 + 1) - 3) \\ &= h/2(h/2 - 2). \end{aligned}$$

Si on prend  $\sigma \in h/2$  tel qu'il existe un  $i$  tel que  $\sigma(i) = i$  (on peut prendre  $i = 1$ ), alors pour obtenir la plus grande puissance de  $x$  au dénominateur d'un terme ayant au numérateur  $I_0(x)^{h/2}$ , on doit choisir une fois le terme  $x^2 P_0(x) = 1$  et le reste comme précédemment, ce qui donne

$$\sum_{i=2}^{h/2} (i + \sigma(i) - 3) = h/2(h/2 - 2) + 1.$$

On obtient ainsi le maximum et on pose

$$m_{h/2} = h/2(h/2 - 2) + 1.$$

Pour  $m_k$  avec  $1 \leq k \leq h/2 - 1$ , on trouve de la même façon

$$\begin{aligned} m_k &= h/2(h/2 - 1) - h/2 + 1 + (h/2 - k) \\ &= h/2(h/2 - 1) - k + 1. \end{aligned}$$

Finalement, pour  $k = 0$ , on trouve  $m_0 = h/2(h/2 - 1)$ . ■

On obtient ainsi

$$y_{2g}(x) = \sum_{k=0}^g \sum_{i=0}^{n_k} a_{k,i} \frac{I_0^k(x) I_1^{g-k}(x)}{x^{m_k-i}}, \quad (2.28)$$

où les nombres  $a_{k,i}$  sont des entiers et les paramètres  $m_k$  et  $n_k$  sont tels que définis ci-dessus.

On peut utiliser les nombres  $\gamma_k(j)$  (tels que définis au chapitre 1) afin de simplifier l'écriture de certaines relations entre les coefficients  $a_{i,j}$  apparaissant dans la simplification de la série génératrice  $y_{2g}(x)$ . On remarque d'abord que l'équation (2.28) nous permet d'écrire les nombres  $\tau_h(n)/n!$  comme combinaisons linéaires des  $\gamma_k(j)$ . Par exemple pour  $h = 4$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\tau_4(2n+1)}{(2n+1)!} &= 2\gamma_0(2n+1) + 2\gamma_1(2n-1) - 2\gamma_2(2n-1) \\ \frac{\tau_4(2n)}{(2n)!} &= \gamma_0(2n) \end{aligned}$$

Pour  $h = 6$ , on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\tau_6(2n)}{(2n)!} &= -16\gamma_2(2n+1) - 24\gamma_2(2n+3) - 4\gamma_1(2n+2) + 20\gamma_0(2n+3) \\ &\quad + 12\gamma_3(2n+2) + 16\gamma_0(2n+1) + 12\gamma_1(2n+4) \\ \frac{\tau_6(2n+1)}{(2n+1)!} &= 4\gamma_0(2n+7) + 16\gamma_1(2n+3) + 12\gamma_2(2n+5) \\ &\quad - 16\gamma_3(2n+4) + 0\gamma_1(2n+6) - 4\gamma_0(2n+5). \end{aligned}$$

Concernant les nombres  $a_{i,0}$ , on a la formule suivante.

**Lemme 2.6.16.** Pour tout  $g \leq 2$  et  $0 \leq j \leq g - 1$ , on a

$$a_{j+1,0} = (-1)^{g-j-1} K \binom{g-1}{j}, \quad (2.29)$$

où  $K$  est une constante qui ne dépend pas de  $j$ .

**Preuve.** Conséquence du lemme (1.1.1) et corollaire (1.1.2). ■

Le résultat précédent implique que, pour tout  $g \geq 1$ , on a

$$\sum_{k=1}^g a_{k,0} = 0.$$

Concernant les autres coefficients  $a_{i,j}$  avec  $i \neq 0$ , il reste à déterminer s'ils satisfont des identités telles que (2.29). Néanmoins, puisque  $y_{2,g}(x)$  doit être une série contenant seulement des puissances positives de  $x$ , on a les relations suivantes. Pour tout  $1 \leq 2p \leq (g-1)^2 - 1$ ,

$$\begin{aligned} [x^{-(g-1)^2+2p}] (y_{2,g}(x)) &= \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^g \gamma_k(2(p-i)+n) a_{k,2i} + \sum_{i=1}^p \gamma_0(2(p-i)+n) a_{0,2i-1} \\ &= \sum_{k=1}^g \gamma_k(2p+n) a_{k,0} \\ &\quad + \sum_{k=1}^g (\gamma_k(2(p-1)+n) a_{k,2} + \gamma_0(2(p-1)+n) a_{0,1}) \\ &\quad + \cdots + \sum_{k=1}^g (\gamma_k(n) a_{k,2} + \gamma_0(n) a_{0,p+1}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

où  $n = g - k$ .

De la même façon, on a

$$\begin{aligned} [x^{-(g-1)^2+2p-1}] (y_{2,g}(x)) &= \sum_{i=0}^p \sum_{k=1}^g \gamma_k(2(p-i)+n) a_{k,2i-1} + \gamma_0(2(p-i)+n) a_{0,2i-2} \\ &= \sum_{k=1}^g (\gamma_k(2(p-1)+n) a_{k,2} + \gamma_0(2(p-1)+n) a_{0,1}) \\ &\quad + \cdots + \sum_{k=1}^g (\gamma_k(n) a_{k,2} + \gamma_0(n) a_{0,p+1}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

où  $n = g - k$ .

Ce qui nous permet de déduire, en posant  $p = 1$ , que

$$\sum_{i=1}^g a_{i,1} = -a_{0,0}. \quad (2.30)$$

Par exemple, les coefficients des puissances de  $x$  négatives de  $y_6(x)$  en termes des  $\gamma_i(j)$  sont donnés par

$$\begin{aligned} y_6(x) = & (-24\gamma_2(1) + 12\gamma_1(2) + 12\gamma_3(0))x^{-4} + (4\gamma_0(3) + 12\gamma_2(1) - 16\gamma_3(0))x^{-3} \\ & + (20\gamma_0(3) + 12\gamma_1(4) - 4\gamma_1(2) + 12\gamma_3(2) - 16\gamma_2(1) - 24\gamma_2(3))x^{-2} \\ & + (-4\gamma_0(3) - 16\gamma_3(2) + 4\gamma_0(5) + 12\gamma_2(3) + 16\gamma_1(2))x^{-1} + \dots \end{aligned}$$

□

De la même façon, les séries génératrices  $y_{2h+1}(x)$  peuvent s'exprimer en termes de  $I_0$  et  $I_1$ . Par exemple, on a

$$\begin{aligned} y_7(x) = & e^x \det(I_{|i-j|}(x) + I_{i+j}(x))_{1 \leq i,j \leq 3} \\ = & -I_2(x)I_0(x)^2 - I_0(x)I_5(x)^2 + I_4(x)^3 - 2I_3(x)I_4(x)I_5(x) \\ & - 2I_1(x)I_3(x)I_6(x) + 2I_3(x)I_2(x)I_5(x) + I_2(x)I_0(x)I_6(x) \\ & + I_0(x)I_4(x)I_6(x) + 3I_2(x)I_4(x)I_0(x) - I_2(x)I_4(x)I_6(x) \\ & + I_2(x)I_5(x)^2 + I_1(x)^2I_6(x) - I_0(x)^2I_6(x) - I_4(x)I_0(x)^2 \\ & + 2I_1(x)I_4(x)I_5(x) + I_3(x)^2I_6(x) - 2I_2(x)I_4(x)^2 \\ & + 2I_1(x)I_0(x)I_5(x) + 2I_1(x)I_3(x)I_0(x) - 4I_1(x)I_2(x)I_5(x) \\ & + 2I_1(x)I_3(x)I_4(x) - 2I_2(x)I_3(x)I_1(x) - I_0(x)I_4(x)^2 \\ & + I_2(x)^2I_4(x) + 3I_2(x)I_1(x)^2 - 2I_1(x)^2I_4(x) + I_0(x)^3 \\ & - 2I_0(x)I_1(x)^2 - I_3(x)^2I_0(x) - I_2(x)^2I_0(x) - I_3(x)^2I_0(x) \\ & - I_2(x)^2I_0(x) \\ = & e^x \left( 24 \frac{(4x^4 + 7x^2 + 1)I_1(x)^3}{x^9} - 72 \frac{(x-1)(x+1)I_0(x)I_1(x)^2}{x^8} \right. \\ & \left. - 24 \frac{(4x^2 + 9)I_0(x)^2I_1(x)}{x^7} + 120 \frac{I_0(x)^3}{x^6} \right). \end{aligned}$$

Les déterminants associés aux séries génératrices des tableaux standards de hauteur bornée par un nombre impair peuvent se simplifier comme suit.

**Lemme 2.6.17.** Soit  $h = 2g + 1$ , alors

$$\begin{aligned} y_{2g+1}(x) &= e^x \det(I_{|i-j|(x)} + I_{i+j}(x))_{1 \leq i,j \leq g} \\ &= e^x \left( \sum_{k \geq 0}^g \tilde{P}_k(x) \frac{I_0^k(x) I_1^{g-k}(x)}{x^{M_k}} \right), \end{aligned} \quad (2.31)$$

où

1. le degré de  $\tilde{P}_k(x)$  pour  $k \neq 0$  est donné par

$$N_k = \left\lfloor \frac{(h-1)^2}{8} \right\rfloor - 2 \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil;$$

2.  $\tilde{P}_k(x)$  est un polynôme à coefficients entiers tel que  $\tilde{P}_k(0) \neq 0$ ;

3. la puissance de  $x$  au dénominateur  $M_k$  est donnée par

$$M_k = \left\lfloor \frac{(h-1)^2}{4} \right\rfloor - k.$$

**Preuve.** De la même façon que pour le cas pair. ■

Comme dans le cas pair, les coefficients des polynômes  $\tilde{P}_k$  satisfont certaines propriétés. Puisque la série  $y_{2g+1}(x)$  n'a pas de singularité en 0, on a

$$[x^{-r}](y_{2g+1}(x)) = 0.$$

pour  $1 \leq r \leq M_0$ .

Par exemple, les coefficients des puissances négatives de  $y_7(x)$  en terme des  $\gamma_i(j)$  sont donnés par

$$\begin{aligned} y_7(x) &= \left( 24 \gamma_0(3) + 120 \gamma_3(0) - 216 \gamma_2(1) + 72 \gamma_1(2) \right) x^{-6} \\ &\quad + \left( 24 \gamma_0(3) + 120 \gamma_3(0) - 216 \gamma_2(1) + 72 \gamma_1(2) \right) x^{-5} \\ &\quad + \left( 24 \gamma_0(5) + 180 \gamma_0(3) + 72 \gamma_1(4) - 36 \gamma_1(2) + 120 \gamma_3(2) \right. \\ &\quad \left. - 216 \gamma_2(3) - 204 \gamma_2(1) + 60 \gamma_3(0) \right) x^{-4} \\ &\quad + \left( 172 \gamma_0(3) + 20 \gamma_3(0) - 132 \gamma_2(1) - 60 \gamma_1(2) + 24 \gamma_0(5) + \right. \\ &\quad \left. 72 \gamma_1(4) + 120 \gamma_3(2) - 216 \gamma_2(3) \right) x^{-3} \\ &\quad + (24 \gamma_0(7) + 180 \gamma_0(5) + 181 \gamma_0(3) + 72 \gamma_1(6) - 36 \gamma_1(4)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 216 \gamma_2(5) - 204 \gamma_2(3) + 120 \gamma_3(4) + 5 \gamma_3(0) - 57 \gamma_2(1) \\
& - 33 \gamma_1(2) + 60 \gamma_3(2)) x^{-2} \\
& + \left( 621/5 \gamma_0(3) + \gamma_3(0) - 89/5 \gamma_2(1) - 57/5 \gamma_1(2) \right. \\
& \left. + 24 \gamma_0(7) + 172 \gamma_0(5) + 72 \gamma_1(6) - 60 \gamma_1(4) - 216 \gamma_2(5) - \right. \\
& \left. 132 \gamma_2(3) + 120 \gamma_3(4) + 20 \gamma_3(2) \right) x^{-1} + \dots
\end{aligned}$$

□

Les séries génératrices pour les couples de tableaux de hauteur bornée  $Y_h(x)$  peuvent également être simplifiées en utilisant la même technique. Par exemple, pour  $h = 4$  on a

$$\begin{aligned}
Y_4 &= \det(I_{|i-j|})_{1 \leq i,j \leq 4} \\
&= I_0(x)^4 - 3 I_0(x)^2 I_1(x)^2 + 4 I_0(x) I_2(x) I_1(x)^2 - 2 I_2(x)^2 I_0(x)^2 + I_1(x)^4 \\
&\quad - 2 I_3(x) I_1(x)^3 - 2 I_2(x)^2 I_1(x)^2 + 4 I_1(x) I_2(x) I_3(x) I_0(x) + I_2(x)^4 \\
&\quad - 2 I_2(x)^2 I_3(x) I_1(x) - I_3(x)^2 I_0(x)^2 + I_3(x)^2 I_1(x)^2 \\
&= -4 \frac{I_0(x)^4}{x^2} + 8 \frac{I_1(x) I_0(x)^3}{x^3} + 4 \frac{(2x^2 - 1) I_1(x)^2 I_0(x)^2}{x^4} - 8 \frac{I_1(x)^3 I_0(x)}{x^3} \\
&\quad - \frac{(2x - 1)(2x + 1) I_1(x)^4}{x^4}
\end{aligned}$$

Le résultat suivant permet de lier les séries  $Y_h(x)$  et  $y_h(x)$ .

**Théorème 2.6.18.** (voir [42]) Soit  $Y_{2g}(x)$ , la série génératrice du nombre de couples de tableaux standards de hauteur bornée par  $2g$  : pour  $g \geq 1$ , on a

$$\begin{aligned}
Y_{2g}(x) &= \sum_{k \geq 0} \tau_{2g}^{(2)} \frac{x^{2k}}{n!^2} \\
&= y_{2g}(x) y_{2g}(-x).
\end{aligned}$$

■

On a également un résultat similaire dans le cas impair :

$$Y_{2g+1}(x) = y_{2g+1}(x) Z_{2g+1}(-x),$$

où la série exponentielle  $Z_{2g+1}(x)$  est à coefficients entiers positifs.

Donc, en général, le déterminant associé à  $Y_h(x)$  se simplifie comme suit.

**Lemme 2.6.19.** Pour  $h$  un entier positif, on a

$$\begin{aligned} Y_h(x) &= \det(I_{|i-j|})_{1 \leq i,j \leq h}, \\ &= \sum_{k=0}^h Q_k(x) \frac{I_0^k I_1^n}{x^{\omega_k}}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

où

1. le degré de  $Q_k(x)$  pour  $k \neq 0$  est donné par

$$\eta_k \leq \begin{cases} 2n_k & \text{si } h \text{ pair,} \\ 2N_k & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.  $Q_k(x)$  est un polynôme à coefficients entiers tel que  $Q_k(0) \neq 0$ ;
3. la puissance de  $x$  au dénominateur  $\omega_k$  est donnée par

$$\omega_k \leq \begin{cases} 2m_k & \text{si } h \text{ pair,} \\ 2M_k & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Preuve.** La conjonction du théorème (2.6.18) et des lemmes (2.6.15), (2.6.17) donne les résultats (2) et (3). Pour (1), on applique le lemme (1.1.1) au déterminant (2.32). On pose ensuite  $I_1 = 0$  et on obtient, par récurrence sur  $h$ , le degré du polynôme  $Q_h$ . On peut alors déduire le degré des autres polynômes  $Q_k$ , ■

Comme précédemment, les coefficients des polynômes  $Q_k$  satisfont certaines identités, car la série  $Y_h(x)$  n'admet pas de singularité en 0.

## 2.7 $q$ -Analogue

On peut utiliser la  $q$ -référence (1.23) afin de simplifier les séries  $y_h(x; q)$  et  $Y_h(x; q)$  associées à la  $q$ -formule de Gessel (2.15). Par exemple,

$$y_2(x, q) = I_0(x; q) + I_1(x; q),$$

$$y_3(x; q) = e_q(x) \left( \frac{(q-1) I_0(x; q)}{q} + \frac{I_1(x; q)}{q x} \right)$$

$$y_4(x; q) = \frac{((q-1)^2 q x^2 + (q-1) x + q+1) I_0(x; q) I_1(x; q)}{q^3 x^2} \\ + \frac{(q+1)((q-1) q x - 1) I_0(x; q)^2}{q^3 x} - \frac{((q-1)(q+1) q x^2 - 2q^2 x - 1) I_1(x; q)^2}{q^3 x^2}$$

Pour les couples de  $q$ -tableaux, on obtient des résultats de la même façon.  $\square$

Dans le cas général, on s'attend à des résultats semblables à (2.6.15), (2.6.17) et (2.6.19). De plus, il est clair que ces  $q$ -séries satisfont des  $q$ -équations différentielles que l'on obtient de la même façon que celles obtenues pour  $I_0(x; q)$  et  $I_1(x; q)$  (voir section (1.2)). Les paramètres comme le degré et l'ordre restent à déterminer. Toutefois, il est permis de croire que l'ordre sera  $\leq h/2 + 1$  comme dans le cas usuel.

## CHAPITRE III

### ÉNUMÉRATION DE TABLEAUX DE HAUTEUR BORNÉE

Dans un premier temps, on vérifie, en utilisant des outils de la théorie générale des séries  $D$ -finies, que l'ordre de l'équation différentielle satisfaite par  $y_h(x)$  est plus petit ou égal à  $\lfloor h/2 \rfloor + 1$ . Par la suite, à l'aide de résultats vus aux chapitres 1 et 2, on démontrera que l'équation différentielle dont  $y_h$  est solution est de la forme

$$\sum_{i=0}^l \sum_{j=i-1}^{2l} b_{i,j} x^j y^{(i)} = 0,$$

où  $l = \lfloor h/2 \rfloor + 1$ .

On verra également des résultats semblables dans le cas des séries  $Y_h(x)$ . Ce qui permettra d'établir de nouvelles bornes concernant le nombre de termes et le maximum des degrés des polynômes apparaissant dans les récurrences satisfaites par les nombres  $\tau_h(n)$  et  $\tau_h^{(2)}(n)$ .

Finalement, on utilisera le lemme (1.1.1) et la formule (1.10) afin d'obtenir des formules pour les coefficients de  $y_6(x)$ .

#### 3.1 Ordre des équations différentielles dont $y_h(x)$ et $Y_h(x)$ sont solutions

Une première approche pour déterminer une borne pour l'ordre de l'équation différentielle dont  $y_h$  est solution consiste à utiliser le résultat du lemme (1.3.7). Par exemple, en calculant directement à partir des équations différentielles satisfaites par  $I_0$  et  $I_1$ , on peut obtenir une équation différentielle pour  $y_2(x)$  :

$$x^2 y^{(4)} + 6x y''' + (-8x^2 + 6) y'' - 24x y' + (16x^2 - 12) y = 0$$

En général, il découle de la théorie générale des séries  $D$ -finies qu'il existe une équation différentielle satisfaite par  $y_h(x)$  d'ordre au plus  $(\lfloor h/2 \rfloor)!2^h$ . En effet, pour  $h$  pair, le déterminant,

$$y_h(x) = \det [I_{|i-j|} + I_{i+j-1}] ,$$

contient  $(h/2)! 2^{h/2}$  termes et chaque terme, de la forme  $I_{\nu_1} I_{\nu_2} \cdots I_{\nu_{h/2}}$ , est solution d'une équation différentielle d'ordre au plus  $2^{h/2}$ . De la même façon, on vérifie que cette borne est valide pour  $h$  impair.

On peut améliorer ce résultat en montrant qu'il existe une équation différentielle d'ordre au plus  $\lfloor h/2 \rfloor + 1$  qui sera satisfaite par  $y_h(x)$ .

**Proposition 3.1.1.** Soit  $V_h$  l'espace vectoriel, sur  $\mathbb{Q}(x)$ , engendré par les dérivées de tout ordre de  $y_h(x)$ , alors  $\dim V_h \leq l(h)$ , où  $l(h) = \lfloor h/2 \rfloor + 1$ .

**Preuve.** On procède de la même façon que pour le lemme (1.4.12). ■

**Corollaire 3.1.2.** Pour tout  $h > 0$  un entier, il existe une équation différentielle d'ordre plus petit ou égal à  $\lfloor h/2 \rfloor + 1$  satisfaite par la série  $y_h(x)$ .

**Preuve.** La proposition précédente implique que l'ensemble

$$\{y_h, y'_h, y''_h, \dots, y_h^{l(h)}\}$$

est linéairement dépendant dans l'espace  $V_h$ . En multipliant par une puissance appropriée de  $x$ , on aura

$$Q_0(x) y_h + Q_1(x) y'_h + Q_2(x) y''_h + \dots + Q_{l(h)} y_h^{l(h)} = 0,$$

où  $Q_i$  est un polynôme à coefficients entiers. ■

Le théorème (1.3.8) implique alors le corollaire suivant.

**Corollaire 3.1.3.** Les nombres  $\tau_h(n)/n!$  satisfont une  $P$ -récurrence telle que le maximum des degrés des coefficients est plus petit ou égal à  $\lfloor h/2 \rfloor + 1$ . ■

De façon semblable au cas précédent, on a la borne suivante pour l'ordre de l'équation différentielle satisfaite par la série génératrice  $Y_h(x)$  des couples de tableaux standards de hauteur bornée par  $h$ .

**Lemme 3.1.4.** La série  $Y_h(x)$  satisfait une équation différentielle d'ordre au plus  $h + 1$ . ■

**Corollaire 3.1.5.** La série  $Y_h(x^{1/2})$  satisfait une équation différentielle d'ordre au plus  $h + 1$ .

**Preuve.** Concernant les séries  $I_0^k(x^{1/2})$  et  $I_1^n(x^{1/2})$ , on a des résultats semblables aux identités (1.4), (1.7) et (1.8). ■

**Corollaire 3.1.6.** Les nombres  $\tau_h^{(2)}(n)/n!^2$  satisfont une  $P$ -réurrence telle que le maximum des degrés des polynômes y apparaissant est plus petit ou égal à  $h + 1$ . ■

### 3.2 Degré de l'équation différentielle dans le cas pair

Afin d'obtenir des équations différentielles avec un degré le plus petit possible, dont  $y_h$  est solution, on procédera comme dans le cas des séries  $I_0^k I_1^n$  vu au chapitre 1. Soit  $\theta_h^{(K)}$  un opérateur différentiel formel :

$$\theta_h^{(K)} = \sum_{i=0}^l \left( \sum_{j=i-1}^K q_{i,j} x^j \right) D^i, \quad (3.1)$$

où  $l = h/2 + 1$ .

Concernant cet opérateur, on a le résultat suivant.

**Lemme 3.2.7.** Lorsqu'on applique  $\theta_h^{(K)}$  à  $y_h(x)$ , on obtient une expression de la forme

$$\theta_h^{(K)}(y_h(x)) = R(h, K) = \sum_{k=0}^{h/2} \sum_{i=0}^{m_0/2+K+1} c_{k,i}^{(K,h)} \frac{I_0(x)^k I_1(x)^{h/2-k}}{x^{m_k-i+1}},$$

où  $m_k$  est donné par le lemme (2.6.15) et les  $c_{k,i}^{(K,h)}$  sont des combinaisons linéaires en les variables  $q_{ij}$ .

**Preuve.** On utilise les lemmes (1.1.3), (2.6.15) et on conclut avec  $m_k - i + 1 = m_{k-i} + 1$ . ■

Par exemple, pour  $h = 4$ , on a la série génératrice

$$y_4(x) = -2 \frac{I_0(x)^2}{x} + 2 \frac{I_1(x) I_0(x)}{x^2} + \frac{(1 + 2x) I_1(x)^2}{x^2},$$

et l'opérateur différentiel, avec  $K = 2$ ,

$$\begin{aligned} \theta_4^{(2)} &= (q_{32} x^2) D^3 + (q_{22} x^2 + q_{21} x) D^2 + \\ &\quad (x^2 q_{12} + x q_{11} + q_{10}) D^1 + (q_{02} x^2 + q_{01} x + q_{00}) D^0. \end{aligned}$$

Lorsqu'on applique cet opérateur à  $y_4(x)$ , on obtient

$$R(4, K) = \sum_{k=0}^2 \sum_{i=0}^{m_0/2+K+1} c_{k,i}^{(K,4)} \frac{I_0^k I_1^{2-k}}{x^{m_k-i+1}},$$

où

$$m_k = \begin{cases} 3 - k & \text{si } k \neq 0, \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On montrera que pour tout  $K \geq h + 2$ , le système  $S_{K,h} := c_{k,i}^{(K,h)} = 0$  admet des solutions non-triviales. Mais d'abord, voyons comment on peut présenter la matrices des coefficients du système  $S_{K,h}$ . On ordonne les variables ainsi que les équations du système afin que la matrice des coefficients du système soit la plus simple possible (bloc diagonale). Puisque les équations du système correspondent aux coefficients de  $x^{-m} I_0^a I_1^b$  dans  $R(h, K)$ , on peut les regrouper selon le paramètre  $m$ . Par exemple, pour  $h = 4$ , on fait correspondre la  $j$ -ième ligne du système aux coefficients de l'équation

$$\left[ \frac{I_0^a I_1^{2-a}}{x^m} \right] (R(4, K)) = 0,$$

où

$$a = a(j) = j + \nu - 1 - 3 \left\lfloor \frac{j+\nu-1}{3} \right\rfloor$$

et

$$m = m(j) = 4 \left\lfloor \frac{j+\nu-1}{3} \right\rfloor + 4 - (j + \nu - 1) - 2K$$

avec  $\nu = 3(K - 2)$ . On ordonne les variables  $q_{i,j}$  (voir chapitre 1) selon l'ordre croissant de la différence  $j - i$  des indices et selon l'ordre croissant du premier

indice pour un  $j - i$  fixé. On obtient ainsi une matrice associée aux coefficients des équations  $c_{k,i}^{(K,4)} = 0$ , telle que pour  $K = 2$ , on a

$$C_4^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 32 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 64 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & -2 & -4 & 0 & 8 & -88 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & 4 & -28 & 0 & 16 & -160 \\ 0 & -2 & 6 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 20 & -2 & -4 & 68 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 24 & 4 & -28 & 192 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 & -24 & 0 & 8 & -72 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 20 & -120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 24 & -120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -24 & 120 \end{pmatrix}$$

et pour  $K = 3$

$$C_4^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 64 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & -2 & -4 & 0 & 0 & 8 & -88 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & 4 & -28 & 0 & 0 & 16 & -160 & 0 & 0 & 64 \\ 0 & -2 & 6 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 20 & 2 & -2 & -4 & 68 & 0 & 8 & -88 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 24 & 0 & 4 & -28 & 192 & 0 & 16 & -160 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 & -24 & 0 & 0 & 8 & -72 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 20 & -120 & -2 & -4 & 68 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 24 & -120 & 4 & -28 & 192 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 6 & -24 & 120 & 0 & 8 & -72 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 20 & -120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 24 & -120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -24 & 120 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices sont blocs diagonale et lorsque  $K$  augmente de 1, on ajoute au système  $h/2 + 2$  variables et  $h/2 + 1$  équations, avec  $h=4$ . Dans les exemples précédents on a que  $C_4^{(2)}$  est de format  $9 \times 12$  et que  $C_4^{(3)}$  est de format  $13 \times 15$ . Il y aura donc éventuellement plus de variables que d'équations. Ce qui implique que le système  $S_{K,4}$  possède des solutions non-triviales pour un certain  $K$ . Mentionnons également que les matrices situées sur la diagonale principale de  $C_4^{(K)}$  sont de rang au plus 2.

En prenant  $K = 6$ , on est certain qu'il existe des solutions non-triviales (avec possiblement plus d'une variable libre) pour le système  $c_{i,j}^{(6,4)} = 0$ . Plus

précisément, le système  $c_{k,j}^{(6,4)}$  admet des solutions non-triviales avec comme variables libres  $q_{2,3} q_{3,3} \dots, q_{3,6}$  (on a construit le système de façon à obtenir ce résultat, voir matrice  $l$ -réduite échelonnée ci-dessous).

Si on pose  $q_{3,2} = q_{3,3} = \dots = q_{3,5} = 0$  et  $q_{3,6} = 1$ , les variables potentiellement non-nulles seront

$$q_{0,6}, q_{0,5}, q_{1,6}, q_{0,4}, , q_{1,5}, q_{2,6}, q_{0,3}, q_{1,4}, q_{2,5}.$$

Donc on a que  $y_4(x)$  satisfait une équation différentielle de la forme

$$x^6 y''' + (b_{2,6} x^6 + b_{2,5} x^5) y'' + (b_{1,6} x^6 + b_{1,5} x^5 + b_{1,4} x^4) y' + (b_{0,6} x^6 + b_{0,5} x^5 + b_{0,4} x^4 + b_{0,3} x^3) y = 0.$$

En divisant par  $x^3$ , on obtient

$$x^3 y''' + (b_{2,6} x^2 + b_{2,5} x) y'' + (b_{1,6} x^2 + b_{1,4} x + b_{1,3}) y' + (b_{0,6} x^3 + b_{0,5} x^2 + b_{0,4} x + b_{0,3}) y = 0.$$

On remarque que les nombres  $b_{0,3}$  et  $b_{1,3}$  égalent 0. Ce qui est équivalent à dire que le système  $c_{i,j}^{(2)}$  admet aussi des solution non-triviales. Finalement, la solution obtenue correspond à celle obtenue via les conjectures BFK. En effet, on a vu (chapitre 2) que  $y_4(x)$  satisfaisait l'équation différentielle

$$x^2 y(x)''' + 10x y(x)'' - 4(4x^2 + 2x - 5) y(x)' - 4(8x + 5) y(x) = 0.$$

□

Afin d'obtenir une première borne pour le degré de l'équation différentielle dont  $y_h(x)$  est solution, on procède de la même façon que dans l'exemple précédent. Soit  $S_{h,K}$  le système formé des équations  $c_{i,j}^{(K,h)} = 0$  : on ordonne les variables  $q_{i,j}$  (apparaissant dans les coefficients  $c_{i,j}^{(K,h)}$ ) selon l'ordre croissant de la différence  $j - i$  et selon l'ordre croissant du premier indice pour un  $j - i$  fixé, c'est-à-dire

$$q_{0,K}, (q_{0,K-1}, q_{1,K-2}), \dots, (q_{0,0}, \dots, q_{l,l}), (q_{1,0}, \dots, q_{l,l-1})$$

où  $l = h/2 + 1$ .

On a donc regroupé les variables selon leur degré, c'est-à-dire la différence de leurs indices,  $\deg(q_{i,j}) = j - i$  : cela nous permettra de découper en blocs la matrice associée aux coefficients du système  $S_{K,h}$  :

$$C_h^{(K)} = (W_1 \quad W_2 \quad \cdots \quad W_{K+1} \quad W_{K+2})$$

où  $W_i$  est le bloc correspondant aux variables de degré  $K - i + 1$ . On ordonne comme précédemment les lignes du systèmes, c'est-à-dire que la  $j$ -ième ligne correspond aux coefficients de l'équation

$$\left[ \frac{I_0^a I_1^{h/2-a}}{x^m} \right] (R(h, K)) = 0,$$

où

$$a = j + \nu - 1 - (h/2 + 1) \left\lfloor \frac{j + \nu - 1}{(h/2 + 1)} \right\rfloor \quad (3.2)$$

et

$$m = ((h/2 + 2) \left\lfloor \frac{j + \nu - 1}{(h/2 + 1)} \right\rfloor + h^2/4 - (j + \nu - 1) - 2K) \quad (3.3)$$

avec  $\nu = ((1 + (K - h/2)) - h/4(h/2 - 1))(h/2 + 1)$ .

Ces différents paramètres sont établis à partir des résultats des lemmes (2.6.15) et (3.2.7). On note  $C_h^{(K)}$  la matrice ainsi obtenue. Le nombre de lignes (non-nulles) de la matrice  $C_h^{(K)}$  est au plus

$$\mathcal{L}(h, k) = \frac{h}{16} (h^2 + 8K + 12) + K + 2 \quad (3.4)$$

et le nombre de colonnes est

$$\mathcal{C}(h, k) = \frac{K(h+4)}{2} - \frac{h(-2+h)}{8} + 2. \quad (3.5)$$

On remarque que les premières lignes des matrices  $C_h^{(K)}$  sont toujours les même peu importe la valeur de  $K$ . On note  $P_h^{(K)}$  la matrice obtenue de  $C_h^{(K)}$  en retranchant les  $n$  premières lignes où

$$n = \frac{1}{16} h(h-2)(h+2).$$

Concernant les matrices  $P_h^{(K)}$ , on a le résultat suivant :

**Lemme 3.2.8.** Pour tout  $h$  un nombre pair et  $K \geq h/2$ , la matrice  $P_h^{(K)}$  est de la forme

$$P_h^{(K)} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \cdots & A_{1,K+2} \\ 0 & A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,K+1} \\ 0 & 0 & A_{3,1} & \cdots & A_{3,K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{K+2,1} \end{pmatrix},$$

où les matrices  $A_{k,n}$  sont de format

$$\begin{cases} l \times n & \text{si } n \leq l \\ l \times l+1 & \text{si } l+1 \leq n \leq K+1 \\ l \times l & \text{si } n = K+2, \end{cases}$$

où  $l = h/2 + 1$ .

**Preuve.** Les entrées de la sous-matrice  $A_{K+2,1}$  sont obtenues des coefficients

$$\left[ x^{-(m_a+1)} I_0^a I_1^{h/2-a} \right] (R(h, K)).$$

Soit  $\pi$  une projection qui permet d'extraire les termes de  $R(h, K)$  contenant les plus grandes puissances de  $x$  au dénominateur. On définit  $\pi$  comme suit :

$$\pi_k \left( \frac{I_0^a I_1^b}{x^m} \right) := \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq m, \\ \frac{I_0^a I_1^b}{x^m} & \text{si } k = m. \end{cases}$$

Ainsi, en prenant  $k = m_a + 1$  avec  $0 \leq a \leq h/2$ , le lemme (1.1.4) implique que

$$\pi_{m_a+1} \left( \theta_h^{(K)}(y_h(x)) \right) = \sum_{i=0}^l \pi_{m_a+1} (q_{i,i-1} x^{i-1} D^i(y_h(x)))$$

où  $m_a$  est tel que défini par le lemme (2.6.15). En général, on a

$$\pi_{m_a-s+1} \left( \theta_h^{(K)}(y_h(x)) \right) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=i-1}^{s+i-1} \pi_{m_a-s+1} (q_{i,j} x^j D^i(y_h(x))),$$

où  $\theta_h^{(K)}$  est donné par (3.1).

On conclut en rappelant que les variables du systèmes  $c_{i,j}^{(K,h)}$  sont regroupées selon leur degré. Ce qui implique également qu'on a le bon format pour les matrices  $A_{i,j}$ . ■

Mentionnons également que pour tout  $j$ , on a la conjecture : les sous-matrices  $A_{j,1}$  sont de rang  $\leq 2$ . □

Le lemme (3.2.8) ci-dessus implique que la  $l$ -réduite échelonnée associée à la matrice  $C_h^{(K)}$  admet une variable libre, disons  $q_{l,K-j} \in W_{l+j-1}$  avec  $K-j \neq l-1$  si et seulement si la série  $y_h(x)$  est solution d'une équation différentielle de la forme

$$\sum_{i=l}^{l+j} b_{l,i} x^i y^{(l)} + \cdots + \sum_{i=0}^{l+j} b_{0,i} x^i y = 0, \quad (3.6)$$

où  $l = h/2 + 1$ .

Si la variable  $q_{l,l-1} \in W_{K+2}$  est libre, alors on a

$$\sum_{i=l-1}^K \beta_{l,i} x^i y^{(l)} + \cdots + \sum_{i=0}^K \beta_{0,i} x^i y = 0. \quad (3.7)$$

On peut maintenant vérifier que le système  $S_{h,K}$  admet, pour un certain  $K$ , des solutions non-triviales.

**Lemme 3.2.9.** Pour  $h$  un nombre entier pair, il existe un  $K$  tel que le système  $c_{k,j}^{(K,h)} = 0$  admet des solutions non-triviales.

**Preuve.** Pour s'assurer qu'il existe des solutions non-triviales au système  $c_i, j^{(K)} = 0$ , il suffit de faire  $\mathcal{C}(h, k) - \mathcal{L}(h, k) = 1$ , et de solutionner pour  $K$ . On aura ainsi plus de variables que d'équations. On obtient donc

$$K = \frac{h^3}{16} + \frac{h^2}{8} + \frac{h}{2} + 1. \quad (3.8)$$

■

De façon semblable à la preuve du lemme (1.4.13) vue au chapitre 1, on peut démontrer que le degré de l'équation différentielle dont  $y_h(x)$  est solution peut être borné par  $h + 2$ , c'est-à-dire deux fois la valeur de l'ordre.

**Lemme 3.2.10.** Le système  $c_{k,j}^{(h+2)} = 0$  admet également des solutions non-triviales.

**Preuve.** On peut supposer qu'il n'existe pas de variables libres parmi les  $l(l - 1)/2$  premières colonnes ; s'il en existe le résultat est évident. Pour un terme de  $y_h(x)$ ,  $x^{-s} I_0^a I_1^b$ , avec la plus petite puissance possible de  $x$  au dénominateur, on vérifie comme dans le cas des séries  $I_0^k I_1^n$ , que seuls les opérateurs  $x^K D^l, x^K D^{l-1}, \dots$  et  $x^K D^0$  génèrent des termes de la forme  $x^{K-s} I_0^a I_1^b, \dots, x^{K-s-l} I_0^a I_1^b$ . D'où la conclusion. ■

On sait que pour  $K = h + 2$ , le système admet des solutions. Si on prend  $K = h + 3$ , la  $l$ -réduite échelonnée de  $C_h^{h+3}$  contient alors deux variables libres  $q_{l,h+2}$  et  $q_{l,h+3}$  séparées par  $h/2$  variables pivots. Ces deux variables libres génèrent les mêmes équations différentielles (de degré  $h + 2$ ) car il suffit de multiplier la première par  $x$  pour obtenir la seconde. Ce qui implique que dans l'équation (1.7), on a  $b_{0,0} = 0$  et que, dans l'équation (1.6), on doit avoir  $\beta_{i,j} = 0$  si  $j = h + 3$ . Donc, toutes les variables libres génèrent la même équation différentielle (voir la matrice  $l$ -réduite échelonnée à la page suivante). La forme de l'équation différentielle dont  $y_h$  est solution est

$$\sum_{i=l-1}^{h+2} b_{l,i} x^i y^{(l)} + \cdots + \sum_{i=0}^{h+2} b_{0,i} x^i y = 0. \quad (3.9)$$

$l$ -réduite échelonnée de la matrice  $C_h^{(K)}$

$$\left( \begin{array}{cccccccccccccccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

□

Donc en vertu du théorème (1.3.8), on a

**Proposition 3.2.11.** Pour  $h \geq 2$  un nombre pair, les nombres  $\tau_h(n)$  satisfont une P-récurrence de la forme

$$\sum_{k=0}^m p_k(n) \tau_h(n-k) = 0,$$

où

$$m = 3(h/2 + 1) \quad \text{et} \quad \deg(p_k(n)) \leq h + 1.$$

Ce qui est équivalent, à une constante près, aux conjectures BFK (2.18) et (2.19).

**Preuve.** Le théorème (1.3.8) implique qu'il existe une  $P$ -récurrence satisfait par les nombres  $\tau_h(n)/n!$  ayant au plus  $3(h/2 + 1)$  termes, c'est-à-dire

$$p_0(n) \frac{\tau_h(n)}{n!} = p_1(n) \frac{\tau_h(n-1)}{(n-1)!} + \cdots + p_{3l-1}(n) \frac{\tau_h(n-3l-1)}{(n-3l-1)!}, \quad (3.10)$$

où

$$\deg(p_i(n)) \leq \begin{cases} h/2 + 1 & \text{si } i \leq h/2, \\ h/2 + 1 - j & \text{si } i = h/2 + j. \end{cases}$$

En effet, la forme de ces polynômes est obtenue comme suit. Les termes  $x^{h+2} D^{(l)}, \dots, x^{h+2-l} D^{(0)}$ , de l'opérateur différentiel associé à (3.9), génèrent le polynôme  $p_0(n)$ , on a donc

$$p_0(n) = c_1(n)_l + c_2(n)_{l-1} + \dots + c_{l-1}n + c_l.$$

De la même façon, les opérateurs  $x^{h+1} D^{(l)}, \dots, x^{h+1-l} D^{(0)}$  génèrent le polynôme  $p_1(n) = k_1(n)_l + k_2(n)_{l-1} + \dots + k_{l-1}n + k_l$  et ainsi de suite, jusqu'à  $p_{h/2}$  engendré par  $x^{l-1} D^{(l)}, \dots, D^1 : p_{h/2} = n(j_1(n)_l + j_2(n)_{l-1} + \dots + j_{l+1})$ . Il s'en suit que, en multipliant par  $(n)!$  chaque membre de l'égalité ci-dessus (3.10), on obtient une  $P$ -réurrence pour les nombres  $\tau_{2g}(n)$ , où le degré des polynômes est  $\leq h+1$ . ■

Mentionnons la conjecture suivante concernant les solutions du système  $S_{h,h/2}$ .

**Conjecture.** Le système homogène  $c_{i,j}^{(h/2,h)} = 0$  admet des solutions non-triviales. De plus, cette solution peut s'écrire de la façon suivante :

$$S = \begin{cases} a \left( \begin{matrix} 0, & \underbrace{*}, \dots, *, & 0 & \underbrace{*}, \dots, *, & 0, & \underbrace{*}, \dots, * \\ & h/2 & & h & & h/2 \end{matrix} \right)^T & \text{si } h/2 \text{ est pair,} \\ \alpha \left( \begin{matrix} *, \dots, *, & 0 & \underbrace{*}, \dots, *, & 0, & \underbrace{*}, \dots, * \\ h/2-1 & & h & & h/2 \end{matrix} \right)^T & \text{si } h/2 \text{ est impair} \end{cases}$$

où  $a$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  et les \* sont des nombres entiers quelconques. □

La conjecture ci-dessus implique que les polynômes  $Q_i$  apparaissant dans l'équation différentielle

$$\sum_{i=0}^l x^{i-1} Q_i(x) y^{(i)} = 0,$$

dont  $y_h(x)$  est solution, sont de degré

$$\deg(Q_i) = \begin{cases} h/2 - i + 1 & \text{si } h/2 - i + 1 \text{ est pair} \\ h/2 - i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce qui est équivalent aux conjectures BFK (2.18) et (2.19). En effet, il suffit de revoir la preuve de la proposition (3.2.11) avec  $m = h/2 + 1$  et  $\deg(p_k(n)) \leq h/2$ . ■

### 3.3 Degré de l'équation différentielle dans le cas impair

On procède ici essentiellement de la même façon que pour le cas pair. La différence réside dans le fait que le facteur  $e^x$  donne a priori une infinité d'équations (les coefficients de  $x^s I_0^a I_1^b$ ) à résoudre si on construit un système d'équations linéaires comme à la section précédente. Mais puisque le corollaire (3.1.2) assure l'existence d'une solution non-triviale, on pourra considérer un nombre fini d'équations.

Si on applique  $\theta_h^{(K)}$ , en posant  $h/2 \leftarrow \lfloor h/2 \rfloor$  tel que défini à la section précédente, à  $y_h(x)$  avec  $h$  impair, on obtient une expression de la forme

$$\theta_h^{(K)}(y_h(x)) = \sum_{k=0}^{\lfloor h/2 \rfloor} \sum_{i=0}^{M_k/2+K-1} \tilde{c}_{k,i}^{(K)} \frac{I_0(x)^k I_1(x)^{\lfloor h/2 \rfloor - k}}{x^{M_k-i+1}},$$

où  $c_{k,i}^{(K)}$  sont des combinaisons linéaires en les variables  $q_{ij}$ .

On montrera, pour tout  $K \geq h+2$ , que le système  $\tilde{c}_{k,i}^{(K)} = 0$  admet des solutions non-triviales.

Voyons d'abord un exemple. Pour  $h=5$ , on a la série

$$y_5(x) = e^x \left( -4 \frac{I_0(x)^2}{x^2} + 2 \frac{I_1(x) I_0(x)}{x^3} + 2 \frac{(2x^2 + 1) I_1(x)^2}{x^4} \right)$$

et l'opérateur différentiel  $\theta_5^{(K)}$  tel que défini à la section précédente, avec  $K = 2$  :

$$\begin{aligned} \theta_5^{(2)} &= (q_{3,2} x^2) D^3 + (q_{2,2} x^2 + q_{2,1} x) D^2 \\ &\quad + (q_{1,2} x^2 + q_{1,1} x + q_{1,0}) D + (q_{0,2} x^2 + q_{0,1} x + q_{0,0}) D^0. \end{aligned}$$

On applique cet opérateur à  $y_5(x)$ , on obtient

$$R(5, 2) = \theta_5^{(2)}(y_5(x)) = \sum_{k=0}^2 \sum_{i=0}^{M_0/2+1} \tilde{c}_{k,i}^{(2)} \frac{I_0^k I_1^{2-k}}{x^{M_k-i+1}},$$

où  $M_k$  est donné par le lemme (2.6.17).

En ordonnant les variables  $q_{i,j}$  et en ordonnant les lignes de ce système, comme dans le cas pair, on obtient la matrice blocs diagonale associée au système  $\tilde{c}_{k,i}^{(K)} = 0$ . Soit  $l_j$  la  $j$ -ème équation du système :

$$l_j = \begin{bmatrix} I_0^a & I_1^b \\ x^M \end{bmatrix} (\tilde{R}(5, K)$$

où  $a$  et  $m$  sont semblables au cas pair (voir (3.2) et (3.3)).

Soit  $C_5^{(K)}$  la matrice des coefficients du système partiel des  $\tilde{c}_{k,i}^{(K)} = 0$ , on a pour  $K = 2$  et  $3$ , les matrices suivantes :

On retrouve encore une fois au moins une variable libre par bloc de format  $3 \times 4$  du système  $\tilde{c}_{i,j}^{(4)} = 0$  (voir la matrice  $l$ -réduite échelonnée ci-dessous). On pose  $q_{3,2} = \dots = q_{3,4-1} = 0$  et  $q_{3,4} = 1$  et on obtient, puisque les variables sont ordonnées comme précédemment, que  $y_5(x)$  satisfait une équation différentielle de la forme

$$\begin{aligned} x^4 y''' + (b_{2,4} x^4 + b_{2,3} x^3) y'' + (b_{1,4} x^4 + b_{1,3} x^3 + b_{1,2} x^2) y' \\ + (b_{0,4} x^4 + b_{0,3} x^3 + b_{0,2} x^2 + b_{0,1} x) y = 0, \end{aligned}$$

où  $b_{i,j} \in \mathbb{Z}$ .

En divisant chaque membre de l'équation ci-dessus par  $x^2$ , on trouve

$$\begin{aligned} x^2 y''' + (b_{2,4} x^2 + b_{2,3} x) y'' + (b_{1,4} x^2 + b_{1,3} x + b_{1,2}) y' \\ + (b_{0,4} x^2 + b_{0,3} x + b_{0,2}) y = 0. \end{aligned}$$

Les solutions trouvées correspondent à la solution obtenue via les conjectures BFK (voir chap.2). On a que  $y_5(x)$  est solution de l'équation différentielle

$$x^2 y''' - (3x - 13) x y'' - (13x^2 + 26x - 35) y' + 5 (3x^2 - 7x - 7) y = 0.$$

En effet, la  $l$ -réduite échelonnée de  $C_5^{(4)}$  est

$$\left( \begin{array}{cccccccccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & 0 & 0 & 0 & 35 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -35 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -13 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

□

Pour le cas général, on utilise la même approche que dans le cas pair. Soit  $\tilde{P}_h^{(K)}$  la matrice obtenue de la matrice associée au système  $\tilde{S}_{h,K} := \tilde{c}_{k,i}^{(K)} = 0$ , en retranchant les  $\frac{1}{16} h(h-2)(h+2)$  premières lignes, on a les résultats suivants.

**Lemme 3.3.12.** Pour tout  $h=2g+1$  un nombre impair et  $K \geq g$ , la matrice  $\tilde{P}_h^{(K)}$  est de la forme

$$\tilde{P}_h^{(K)} = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & \cdots & B_{1,K+2} \\ 0 & B_{2,1} & B_{2,2} & \cdots & B_{2,K+1} \\ 0 & 0 & B_{3,1} & \cdots & B_{3,K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{K+2,1} \end{pmatrix},$$

où le format des matrices  $B_{i,j}$  est

$$\begin{cases} l \times j & \text{si } j \leq l \\ l \times l + 1 & \text{si } l + 1 \leq j \leq K + 1 \\ l \times l & \text{si } j = K + 2, \end{cases}$$

où  $l = (h - 1)/2 + 1$ .

**Preuve.** Comme pour le cas pair (voir lemme (3.2.8)). ■

**Lemme 3.3.13.** Le système  $\tilde{c}_{i,j}^K = 0$ , pour  $K \geq h + 2$ , admet des solutions non-triviales.

**Preuve.** Comme dans le cas pair (voir lemme (3.2.10)).

**Corollaire 3.3.14.** Les nombres  $\tau_h(n)$ , avec  $h$  un nombre impair, satisfont une  $P$ -réurrence d'au plus  $3((h - 1)/2 + 1)$  termes dont les polynômes sont de degré au plus  $h + 1$ .

**Preuve.** On procède de la même façon que pour la proposition (3.2.11) et on obtient le résultat. ■

**Conjecture.** Le système homogène  $\tilde{S}_{h,(h-1)/2}$ , avec  $h$  un nombre impair, admet des solutions non-triviales de la forme :

$$S = (*, \dots, *, 0, 0, *, \dots, *, 0, 0, \dots, 0, *, *)^T,$$

où les \* sont des nombres entiers quelconques. □

Cette conjecture impliquerait que la série génératrice  $y_{2g+1}(x)$ , pour  $g$  un entier quelconque, est solution d'une équation différentielle d'ordre  $g+1$  et de degré  $g$  de la forme

$$\sum_{i=0}^l x^{i-1} \tilde{Q}_i(x) y^{(i)} = 0,$$

où  $l = \lfloor h/2 \rfloor + 1$  et  $\tilde{Q}_i$  est un polynôme à coefficients entiers tel que son degré est  $\deg(Q_i) \leq \lfloor h/2 \rfloor - i + 1$ . Ce qui est équivalent, pour le cas impair, aux conjectures BFK (2.18) et (2.19).

Il est à remarquer que dans le cas pair comme dans le cas impair, les conjectures BFK (2.20) (2.21), (2.22) et (2.23) dépendent des relations entre les coefficients des polynômes  $P_k$  et  $\tilde{P}_k$  apparaissant dans (2.27) et (2.31).

### 3.4 Degré de l'équation différentielle dont $Y_h(x)$ est solution

Pour obtenir une borne pour le degré des équations différentielles satisfaites par les séries génératrices  $Y_h(x)$  pour les couples de tableaux de hauteur bornée, on peut procéder de la même façon que dans les cas pair et impair. Voyons d'abord un exemple. Pour  $h = 3$ , on applique l'opérateur différentiel  $\theta_6^{(K)}$  (voir (3.1)) à  $Y_3(x^{1/2})$ ; on obtient, pour  $K = 3$ , la matrice des coefficients associée au système :

$$C_3^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 5 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 12 & 0 & 0 & 2 & -12 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -7 & 0 & 0 & -2 & 11 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 24 & 0 & 0 & 2 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -6 & 0 & -2 & 5 & -12 & 0 & 0 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 12 & -48 & 0 & 2 & -12 & 84 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -7 & 22 & 0 & -2 & 11 & -56 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 24 & -120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -6 & 24 & -2 & 5 & -12 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 12 & -48 & 240 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -7 & 22 & -86 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 24 & -120 \end{pmatrix}$$

D'où on obtient l'équation différentielle (voir  $l$ -réduite échelonnée ci-dessous)

$$x^3 y^{(4)} + 10x^2 y''' - (10x - 23)x y'' - (32x - 9)y' + 9(x - 1)y = 0.$$

$$\mathcal{C}_3^{(3)} \sim \left( \begin{array}{cccccccccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

□

Dans le cas général, on a les résultats suivants.

**Lemme 3.4.15.** Le degré de l'équation différentielle dont  $Y_h(x^{1/2})$  est solution est au plus  $2h + 2$  ■

**Corollaire 3.4.16.** Les nombres  $\tau_h^{(2)}(n)$  satisfont une  $P$ -référence ayant  $3h+3$  termes dont les polynômes sont de degré au plus  $2h + 2$ . ■

Ce qui encore une fois correspond, à une constante près, aux conjectures BFK concernant le nombre de termes et le degré des polynômes de la  $P$ -référence satisfaite par les nombres  $\tau_h^{(2)}(n)$ . Pour obtenir exactement les conjectures BFK (2.24), (2.25) et (2.26), il faut utiliser les relations entre les coefficients des polynômes donnés par (2.32).

### 3.5 Formules explicites

Il est possible d'obtenir des formules via le théorème (2.2.1) pour les nombres

$\tau_h(n)$  et  $\tau_h^{(2)}(n)$ . On a pour  $(n-3)/2 \leq h \leq n-1$

$$\begin{aligned}\tau_h(n) &= \text{Inv}(n) - \sum_{\substack{i,j,l \geq 0 \\ 2i+2l+j=n-m-1}} (-1)^i (n)_{i+j} \frac{\text{Inv}(j)}{i! j!}, \\ \tau_h^{(2)}(n) &= n! - \sum_{\substack{i,j,l \geq 0 \\ i+l+j \leq n-m-1}} (-1)^{i+j} (n)_{i+l} (n)_{j+l} \frac{(n-m-i-j-l)}{i! j! l!}.\end{aligned}$$

où  $\text{Inv}(j)$  est le nombre d'involution sur  $j$  objets (voir [23] pour plus de détails).

On peut également effectuer des simplifications permettant d'obtenir des formules pour  $\tau_h(n)$  en utilisant le lemme (1.1.1) et la formule (1.10). On peut procéder d'au moins deux façons. Premièrement en utilisant le développement de Laplace selon la dernière ligne du déterminant associé à  $y_h(x)$ . On obtiendra ainsi des formules de la forme

$$\tau_h(n) = \sum_{n_1, n_2} (I_{n_1} + I_{n_2}) \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \tau_{h-1}^{(n_1, n_2)}(k), \quad (3.11)$$

où les  $\tau_{h-1}^{(n_1, n_2)}(k)$  sont des nombres proches de  $\tau_{h-1}(k)$  (voir exemple ci-dessous).

Deuxièmement, on peut décomposer directement  $y_h(x)$  en blocs contenant uniquement des termes avec des puissances de  $x$  toutes paires ou toutes impaires. Ce faisant on obtient des formules de la même forme que (2.11), mais plus compactes comme on le verra dans le cas  $h = 6$ .

### Première approche

On désigne par  $M_{ij} = M_{i,j}(A)$  le mineur, c'est-à-dire la sous-matrice obtenue en enlevant la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne de  $A$ . Pour

$$A = (I_{|i-j|} + I_{i+j-1})_{1 \leq i,j \leq h/2},$$

on note  $y_h^{(j)}(x) = (-1)^{i+j} \det(M_{h/2, j})$  le cofacteur de  $A$  d'ordre  $(h/2, j)$ .

Par exemple, pour  $h = 6$ , on effectue le développement de Laplace selon la

dernière ligne du déterminant correspondant :

$$\begin{aligned}
y_6(x) &= \det \begin{pmatrix} I_0(x) + I_1(x) & I_1(x) + I_2(x) & I_2(x) + I_3(x) \\ I_1(x) + I_2(x) & I_0(x) + I_3(x) & I_1(x) + I_4(x) \\ I_2(x) + I_3(x) & I_1(x) + I_4(x) & I_0(x) + I_5(x) \end{pmatrix} \\
&= (I_2 + I_3) \det \begin{pmatrix} I_1(x) + I_2(x) & I_2(x) + I_3(x) \\ I_0(x) + I_3(x) & I_1(x) + I_4(x) \end{pmatrix} \\
&\quad - (I_1 + I_4) \det \begin{pmatrix} I_0(x) + I_1(x) & I_2(x) + I_3(x) \\ I_1(x) + I_2(x) & I_1(x) + I_4(x) \end{pmatrix} \\
&\quad + (I_0 + I_5) \det \begin{pmatrix} I_0(x) + I_1(x) & I_1(x) + I_2(x) \\ I_1(x) + I_2(x) & I_0(x) + I_3(x) \end{pmatrix}, \\
&= (I_2 + I_3) y_6^{(1)}(x) + (I_1 + I_4) y_6^{(2)}(x), + (I_0 + I_5) y_6^{(3)}(x).
\end{aligned}$$

Pour chaque cofacteur, on peut calculer le coefficient de  $x^n$  en utilisant la formule (1.10) concernant la multiplication de deux séries de Bessel. On obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
y_6^{(1)}(x) &= \det \begin{pmatrix} I_1(x) + I_2(x) & I_2(x) + I_3(x) \\ I_0(x) + I_3(x) & I_1(x) + I_4(x) \end{pmatrix} \\
&= 2 \frac{(2x+1) I_0(x)^2}{x^2} - 4 \frac{I_0(x) I_1(x)}{x^3} - 2 \frac{(2x^3+2x-1) I_1(x)^2}{x^4}.
\end{aligned}$$

Les premiers termes de cette série sont

$$y_6^{(1)}(x) = \frac{x^2}{2!} + 2 \frac{x^3}{3!} + 8 \frac{x^4}{4!} + 20 \frac{x^5}{5!} + 70 \frac{x^6}{6!} + 196 \frac{x^7}{7!} + 672 \frac{x^8}{8!} + 2016 \frac{x^9}{9!} + 6930 \frac{x^{10}}{10!} \dots$$

On trouve alors les coefficients suivants :

$$\frac{[x^{2n}]}{(2n)!} (y_6^{(1)}(x)) = \frac{2n}{n+3} C_{n+1} C_n = \frac{2n}{n+3} \tau_4(2n),$$

et

$$\frac{[x^{2n-1}]}{(2n-1)!} (y_6^{(1)}(x)) = \frac{2(n-1)}{n+2} C_n^2 = \frac{2(n-1)}{n+2} \tau_4(2n-1),$$

où  $C_n$  est le  $n$ -ième nombre de Catalan et  $\tau_4(i)$  le nombre de tableaux standards de hauteur au plus 4.

De la même façon,

$$\begin{aligned}
 y_6^{(2)}(x) &= -\det \begin{pmatrix} I_0(x) + I_1(x) & I_2(x) + I_3(x) \\ I_1(x) + I_2(x) & I_1(x) + I_4(x) \end{pmatrix} \\
 &= -2 \frac{(3+x) I_0(x)^2}{x^2} - 2 \frac{(-3+x) I_1(x) I_0(x)}{x^3} + \frac{(2x^2 + 4 + 3x) I_1(x)^2}{x^3} \\
 &= -\left(\frac{x}{1!} + 2 \frac{x^2}{2!} + 6 \frac{x^3}{3!} + 15 \frac{x^4}{4!} + 45 \frac{x^5}{5!} + 126 \frac{x^6}{6!} + 392 \frac{x^7}{7!} + 1176 \frac{x^8}{8!}\right. \\
 &\quad \left.+ 3780 \frac{x^9}{9!} + 11880 \frac{x^{10}}{10!} + \dots\right).
 \end{aligned}$$

On trouve alors les coefficients suivants :

$$\frac{[x^{2n}]}{(2n)!} (y_6^{(2)}(x)) = -\frac{3n}{n+2} C_{n+1} C_n = -\frac{3n}{n+2} \tau_4(2n)$$

et

$$\frac{[x^{2n-1}]}{(2n-1)!} (y_6^{(2)}(x)) = -\frac{3n}{n+2} C_n^2 = -\frac{3n}{n+2} \tau_4(2n-1).$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}
 y_6^{(3)}(x) &= \det \begin{pmatrix} I_0(x) + I_1(x) & I_1(x) + I_2(x) \\ I_1(x) + I_2(x) & I_0(x) + I_3(x) \end{pmatrix} \\
 &= -2 \frac{I_0(x)^2}{x} + 2 \frac{I_1(x) I_0(x)}{x^2} + \frac{(2x+1) I_1(x)^2}{x^2} \\
 &= 1 + \frac{x}{1!} + 2 \frac{x^2}{2!} + 4 \frac{x^3}{3!} + 10 \frac{x^4}{4!} + 25 \frac{x^5}{5!} + 70 \frac{x^6}{6!} + 196 \frac{x^7}{7!} + 588 \frac{x^8}{8!} \\
 &\quad + 1764 \frac{x^9}{9!} + 5544 \frac{x^{10}}{10!} + \dots \\
 &= y_4(x).
 \end{aligned}$$

où  $y_4(x)$  est la série génératrice des tableaux de hauteur au plus 4.

Il s'en suit que le coefficient de  $x^n$  dans  $y_4^{(3)}(x)$  est

$$\frac{[x^{2n}]}{(2n)!} (y_6^{(3)}(x)) = C_{n+1} C_n = \tau_4(2n)$$

et

$$\frac{[x^{2n-1}]}{(2n-1)!} (y_6^{(3)}(x)) = C_n^2 = \tau_4(2n-1).$$

La conjonction de ces résultats donne

$$\begin{aligned}
 y_6(x) &= (I_2 + I_3) y_6^{(1)}(x) + (I_1 + I_4) y_6^{(2)}(x) + (I_0 + I_5) y_6^{(3)}(x) \\
 &= (I_2 + I_3) \left( \sum_{n \geq 0} \frac{2n}{n+3} \tau_4(2n) \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n \geq 1} \frac{2(n-1)}{n+2} \tau_4(2n-1) \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right) \\
 &\quad - (I_1 + I_4) \left( \sum_{n \geq 0} \frac{3n}{n+2} \tau_4(2n) \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n \geq 1} \frac{3n}{n+2} \tau_4(2n-1) \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right) \\
 &\quad + (I_0 + I_5) \left( \sum_{n \geq 0} \tau_4(2n) \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n \geq 1} \tau_4(2n-1) \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right)
 \end{aligned}$$

Mais en utilisant de nouveau le lemme (1.1.1), on obtient :

$$\begin{aligned}
 y_6(x) &= \left( \frac{(x-2) I_0(x)}{x} + \frac{(x^2-x+2) I_1(x)}{x^2} \right) y_6^{(1)} \\
 &\quad + \left( \frac{(x^2+6) I_0(x)}{x^2} + \frac{(x^3-4x^2-6) I_1(x)}{x^3} \right) y_6^{(2)} \\
 &\quad + \left( \frac{(x^3-6x^2-24) I_0(x)}{x^3} + \frac{(x^4+18x^2+24) I_1(x)}{x^4} \right) y_6^{(3)}
 \end{aligned}$$

On développe partiellement les coefficients de  $y_h^{(i)}(x)$  pour  $i = 1, 2$ , et  $3$  dans la formule ci-dessus :

$$\begin{aligned}
 y_6(x) &= y_6^{(1)} \left( I_0 - \frac{I_1}{x} \right) - \frac{2}{x} y_6^{(1)} \left( I_0 - \frac{I_1}{x} \right) + y_6^{(1)} I_1 \\
 &\quad + y_6^{(2)} \left( I_0 - \frac{4I_1}{x} \right) + \frac{6}{x^2} y_6^{(2)} \left( I_0 - \frac{I_1}{x} \right) + y_6^{(2)} I_1 \\
 &\quad - \frac{6}{x} y_6^{(3)} \left( I_0 - \frac{3I_1}{x} \right) - \frac{24}{x^3} y_6^{(3)} \left( I_0 - \frac{I_1}{x} \right) + y_6^{(3)} (I_0 + I_1).
 \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, chaque terme est évidemment une série en  $x$ . On peut les regrouper selon la puissance de  $x$  du premier terme ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 y_6(x) &= -\frac{6}{x} y_6^{(3)} \left[ \frac{4}{x^2} \left( I_0 - \frac{I_1}{x} \right) + \left( I_0 - \frac{3I_1}{x} \right) \right] + y_6^{(3)} I_0 + y_6^{(3)} I_1 \\
 &\quad y_6^{(2)} \left[ \frac{6}{x^2} \left( I_0 - \frac{I_1}{x} \right) + \left( I_0 - \frac{4I_1}{x} \right) \right] + y_6^{(2)} I_1 \\
 &\quad - \frac{2}{x} y_6^{(1)} \left( I_0 - \frac{I_1}{x} \right) + y_6^{(1)} \left( I_0 - \frac{I_1}{x} \right) + y_6^{(1)} I_1
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 \left[ \frac{4}{x^2} \left( I_0 - \frac{I_1}{x} \right) + \left( I_0 - \frac{3I_1}{x} \right) \right] &= \frac{4}{x^2} \sum_{n \geq 0} \frac{n}{n+1} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n \geq 0} \frac{n-2}{n+1} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{4}{n+2} C_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n \geq 0} (n-2) C_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n+2} C_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
 \left[ \frac{6}{x^2} \left( I_0 - \frac{I_1}{x} \right) + \left( I_0 - \frac{4I_1}{x} \right) \right] &= \sum_{n \geq 0} \frac{6}{n+2} C_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n \geq 0} (n-3) C_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)}{n+2} C_n \frac{x^{2n}}{(2n)!}
 \end{aligned}$$

En simplifiant davantage, on trouve :

$$\begin{aligned}
 y_6(x) &= \left( \sum_{n \geq 0} \frac{n}{2} C_{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n \geq 0} n C_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right) y_6^{(1)} \\
 &\quad + \left( \sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)}{n+2} C_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n \geq 0} \binom{2n+1}{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) y_6^{(2)} \\
 &\quad + \left( \sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)}{2(n+3)} C_{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right) y_6^{(3)}
 \end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'extraire les coefficients de  $x^{2n}$  et  $x^{2n+1}$  du membre de droite de la dernière équation pour obtenir des formules pour  $\tau_6(n)$ .

On trouve alors les formules suivantes pour le nombre de tableaux standards de hauteur  $\leq 6$  pour un nombre pair de cases :

$$\begin{aligned}
 \tau_6(2n) &= \sum_{k=0}^n \left( \left( \frac{(n-k)(k-1)}{k+2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2(n-2)k+6} \right) C_{n-k+1} - \frac{3k}{k+2} \tau_2(2(n-k)+1) \right) \binom{2n}{2k-1} \tau_4(2k-1) \\
 &\quad + \sum_{k=0}^n \left( \left( \frac{2k(n-k)}{k+3} - \frac{3k(n-k)(n-k-1)}{(n-k+2)(k+2)} \right) C_{n-k} + \tau_2(2(n-k)) \right) \binom{2n}{2k} \tau_4(2k)
 \end{aligned}$$

et pour un nombre impair de cases :

$$\begin{aligned}\tau_6(2n-1) = & \sum_{k=0}^n \left( \left( \frac{k(n-k-1)}{k+3} + \frac{(n-k-1)(n-k-2)}{2(n-2)k+4} \right) C_{n-k} - \frac{3k}{k+2} \tau_2(2(n-k)-1) \right) \binom{2n-1}{2k} \tau_4(2k) \\ & + \sum_{k=0}^n \left( \left( \frac{2(n-k)(k-1)}{k+2} - \frac{3k(n-k)(n-k-1)}{(n-k+2)(k+2)} \right) C_{n-k} + \tau_2(2(n-k)) \right) \binom{2n-1}{2k-1} \tau_4(2k-1).\end{aligned}$$

□

**Conjecture.** Les nombres  $\tau_h(n)$ , pour  $h$  quelconque, sont donnés par une formule de la forme

$$\sum_{k=0}^n \left( \frac{P(k, n)}{Q(k, n)} \tau_{h-2}(n-k) \right) \tau_{h-1}(k),$$

où  $P_i$  et  $Q_i$  sont des polynômes en  $n$  et  $k$ . □

### Deuxième approche

On rappelle que la série génératrice des tableaux standards de hauteur au plus 6, en termes de  $I_0$  et  $I_1$ , est

$$\begin{aligned}y_6(x) = & \frac{16x^3 - 4x^2 + 20x + 4}{x^6} I_1^3 + \frac{16x^3 - 4x^2 + 12}{x^6} I_0 I_1^2 + \\ & \frac{-16x^2 + 12x - 24}{x^5} I_0^2 I_1 + \frac{-16x + 12}{x^4} I_0^3.\end{aligned}$$

On décompose  $y_6(x)$  en parties élémentaires que l'on regroupe selon leur parité.

On obtient :

$$\begin{aligned}y_6(x) = & \left[ \left( \frac{12}{x^6} I_0 I_1^2 - \frac{24}{x^5} I_0^2 I_1 + \frac{12}{x^4} I_0^3 \right) + \left( \frac{16}{x^3} I_1^3 \right) \right. \\ & + \left. \left( \frac{20x}{x^6} I_1^3 - \frac{4x^2}{x^6} I_0 I_1^2 - \frac{16x^2}{x^5} I_0^2 I_1 \right) \right] + \left[ \left( \frac{-4}{x^6} I_1^3 + \frac{12x}{x^5} I_0^2 I_1 \right) \right. \\ & \left. + \left( \frac{-4x^2}{x^6} I_1^3 + \frac{16x^3}{x^6} I_0 I_1^2 \right) - \left( \frac{16}{x^3} I_0^3 \right) \right].\end{aligned}$$

Les trois premiers termes de l'équation ci-dessus sont des séries en  $x$  contenant uniquement des puissances paires de  $x$  et les trois derniers des puissances impaires de  $x$ . Les parties paire et impaire de  $y_6(x)$  sont données par :

$$\begin{aligned}y_6^{(p)}(x) = & \frac{12I_0}{x^4} \left( \frac{1}{x^2} I_1^2 - \frac{2}{x} I_0 I_1 + I_0^2 \right) + \frac{4I_1}{x^3} \left( \frac{5}{x^2} I_1^2 + \frac{4}{x} I_0 I_1 - 4I_0^2 \right) \\ & + \frac{16I_1}{x^3} (I_1^2).\end{aligned}$$

$$y_6^{(i)} = \frac{4I_1}{x^4} \left( \frac{1}{x^2} I_1^2 + 3 I_0^2 \right) + \frac{4I_1}{x^3} \left( -\frac{1}{x^4} I_1^2 - \frac{4}{x^3} I_0^2 \right) - \frac{16I_0}{x^3} (I_0^2).$$

On pose

$$\nu_0 = \frac{I_1^2}{x^2} - 2 \frac{I_0 I_1}{x} + I_0^2, \quad \nu_2 = 5 \frac{I_1^2}{x^2} - \frac{I_0 I_1}{x} - 4 I_0^2, \quad \nu_4 = \frac{I_1^2}{x^2}$$

On peut calculer le coefficient de  $x^{2k}$  des séries  $\nu_0$ ,  $\nu_2$  et  $\nu_4$  à l'aide de l'identité (1.10) :

$$[x^{2k}](\nu_0) = \frac{1}{(2k+2)!} \binom{2k+2}{k} \binom{2k+2}{k+1} - 2 \frac{1}{(2k+1)!} \binom{2k+1}{k} \binom{2k+1}{k+1} + \frac{1}{(2k)!} \binom{2k}{k}^2$$

$$[x^{2k}](\nu_2) = \frac{5}{(2k+2)!} \binom{2k+2}{k} \binom{2k+2}{k+1} - \frac{1}{(2k+1)!} \binom{2k+1}{k} \binom{2k+1}{k+1} - \frac{4}{2k!} \binom{2k}{k}^2$$

$$[x^{2k}](\nu_4) = \frac{1}{(2k+2)!} \binom{2k+2}{k} \binom{2k+2}{k+1}.$$

On obtient alors pour la partie paire de la série  $y_6(x)$  :

$$y_6^{(p)}(x) = \frac{12I_0}{x^4} \left( \sum_{k \geq 0} \frac{k(k^2-1)C_k^2}{(k+2)} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right) - \frac{4I_1}{x^3} \left( \sum_{k \geq 0} \frac{k f(k) C_k^2}{(k+2)} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right) + \frac{16I_1}{x^3} \left( \sum_{k \geq 0} 2 \frac{(2k+1)C_k^2}{(k+2)} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right),$$

où  $f(k) = (4k^2 + 18k + 5)$  et  $C_k$  est le  $k$ -ième nombre de Catalan.

Les premiers termes de cette série sont :

$$2 \frac{x^2}{2!} + 10 \frac{x^4}{4!} + 76 \frac{x^6}{6!} + 756 \frac{x^8}{8!} + 9096 \frac{x^{10}}{10!} + 126060 \frac{x^{12}}{12!} + 1948232 \frac{x^{14}}{14!} + \dots$$

On obtient ainsi une formule pour le nombre de tableaux standards de hauteur au plus 6 :

$$\begin{aligned}\tau_6(2n) = & 12 \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{(2n-2k)!} \binom{2n+2k+2}{n-k} \frac{((k+2)^2-1)(k+2)C_{k+2}^2}{(2k+4)!(k+4)} \\ & - 4 \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{(2n-2k+1)!} \binom{2n-2k+1}{n-k} \frac{(k+1)f(k+1)C_{k+1}^2}{(2k+2)!(k+3)} \\ & 32 \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{(2n-2k+1)!} \binom{2n-2k+1}{n-k} \frac{(2k+1)C_k^2}{(2k)!(k+2)},\end{aligned}$$

où  $C_k$  est le  $k$ -ième nombre de Catalan.

En simplifiant davantage, on trouve

$$\tau_6(2n) = 6 \sum_{k=0}^n \frac{(2n)! (10n-13k+8) C_{k+1}}{(n-k+2)! (n-k)! (k+4)! k!} \quad (3.12)$$

Mentionnons également qu'en termes de  $\tau_4(n)$ , on a :

$$\begin{aligned}\tau_6(2n) = & \sum_{k=0}^n \left( \frac{(k-1)k(k+1)}{4(2k+1)n} \binom{2n-2k}{n-k} \binom{2n}{2k} \tau_4(2k) \right. \\ & \left. - \frac{4k^3+18k^2+k-2}{k+2} \binom{2n-2k-1}{n-k} \binom{2n-1}{2k} \tau_4(2k-1) \right).\end{aligned}$$

Pour  $\tau_6(2n+1)$ , on obtient également des formules, mais moins compactes.  $\square$

Pour les couples de tableaux standards de hauteur bornée par  $h \leq 6$ , on peut obtenir des formules pour  $\tau_h^{(2)}(n)$  en utilisant le théorème (2.6.18). Par exemple, on a

$$\begin{aligned}\frac{\tau_4^{(2)}(n)}{n!} &= \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{(2n-k)!} (-1)^k \tau_4(k) \tau_4(n-k), \\ &= \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{(2n-k)!} (-1)^k C_{\lfloor s/2 \rfloor} C_{\lceil s/2 \rceil} C_{\lfloor t/2 \rfloor} C_{\lceil t/2 \rceil},\end{aligned}$$

où  $s = k + 1$  et  $t = n - k + 1$ .

$$\frac{\tau_6^{(2)}(n)}{n!} = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{(2n-k)!} (-1)^k \tau_6(k) \tau_6(n-k).$$

$\square$

## CHAPITRE IV

### ESPÈCES DE BESSEL

On présente ici différents résultats concernant les couples de structures isomorphes et les séries formelles qui leur sont associées (les séries de type Bessel). Dans un premier temps, on rappelle les définitions de base et les différents contextes auxquels elles sont liées. Par la suite, nous explorons différentes méthodes permettant le dénombrement effectif de certaines de ces structures.

#### 4.1 Espèces sur des couples d'ensembles de même cardinalité

Nous introduisons un contexte combinatoire qui permet de rendre compte des constructions sur des couples d'ensembles de même cardinalité. Ce contexte permettra, entre autres, de formaliser l'étude combinatoire des couples de structures isomorphes.

On note  $B\text{-Esp}$  l'ensemble des espèces de structures usuelles (voir [7]) et  $B^\square\text{-Esp}$  celui des espèces de structures sur un couple d'ensembles de même cardinalité : *les espèces de Bessel*. Plus précisément, on désigne par  $B^\square$  la catégorie dont les objets sont les couples d'ensembles de même cardinalité avec comme flèches  $\varphi : (U, U') \rightarrow (V, V')$ , les couples de bijections  $\varphi = (f, f')$ , où  $f : U \rightarrow V$  et  $f' : U' \rightarrow V'$  que l'on compose composante à composante. L'identité  $\text{Id}_{(U, U')}$  est le couple  $(1_U, 1_{U'})$ .

Les définitions suivantes sont des analogues de celles que l'on a pour les  $B$ -espèces.

Une  *$B^\square$ -espèce de structure sur deux ensembles de même cardinalité*, notée  $P$ , est une règle qui

- i) associe à chaque couple  $(U, U')$ , où  $U$  et  $U'$  sont deux ensembles finis de même cardinalité, un ensemble fini  $P[U, U']$  ;

ii) associe à chaque bijection  $\sigma : (U, U') \mapsto (V, V')$ , une fonction

$$P[\sigma] : P[U, U'] \mapsto P[V, V'],$$

avec les conditions suivantes : si  $\tau : (V, V') \mapsto (W, W')$ , alors

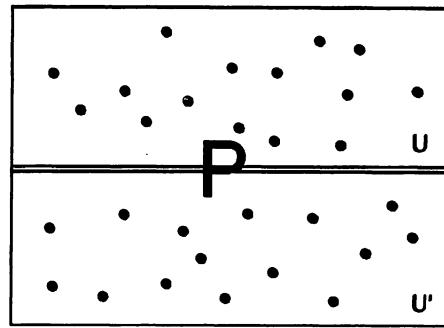
$$P[\sigma \circ \tau] = P[\sigma] \circ P[\tau]$$

$$P[\text{Id}_{(U, U')}] = \text{Id}_{P[U, U']}$$

où  $\text{Id}_{(U, U')}$  est la fonction identité sur  $(U, U')$  et  $\text{Id}_{P[U, U']}$  est la fonction identité sur  $P[U, U']$ .  $\square$

Autrement dit, une  $B^\square$ -espèce est un foncteur  $\mathcal{P} : B^\square \rightarrow E$  de la catégorie  $B^\square$  dans celle des ensembles finis. La fonction  $P[\sigma]$  est appelée le *transport* des  $P$ -structures le long de  $\sigma$ .

On représente graphiquement une espèce de Bessel de façon semblable au cas des  $B$ -espèces :



#### 4.1 Structure de $B^\square$ -Esp $P$ sur $(U, U')$

$\square$

On associe à une espèce de Bessel  $P$  la série génératrice (de Bessel) suivante :

$$P((x)) = \sum_{n \geq 0} p_n \frac{x^n}{(n!)^2},$$

où  $p_n = |P[n]|$ , le nombre de  $P$  structures sur deux ensembles de même cardinalité  $n$ .

Par exemple, soit  $E^\square$  et  $C^\square$  les  $B^\square$ -espèces des couples d'ensembles et des couples de cycles :

$$E^\square((x)) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n!)^2}, \quad C^\square((x)) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$$

□

La série de Bessel des types d'isomorphie est donnée par

$$\tilde{P}(x) = \sum_{n \geq 0} \tilde{p}_n x^n,$$

où  $\tilde{p}_n$  est le nombre de types de structures.

La série indicatrice des cycles dans le contexte des espèces de Bessel peut être définie comme suit

$$Z_P^\square(x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots) := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!^2} \left( \sum_{(\alpha, \beta)} \text{fix}P[\alpha, \beta] x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \dots \right),$$

où  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n$ .

Concernant cette série, on a l'identité suivante :

$$Z_P^\square(x, 0, \dots; 1, 0, \dots) = P((x)).$$

L'équipotence de deux espèces de Bessel  $P$  et  $T$  est une famille de bijections  $\sigma$  telle que, pour tout couple d'ensembles de même cardinalité  $(U, U')$ , on a

$$\sigma_{U, U'} : P[U, U'] \xrightarrow{\sim} T[U, U'].$$

Autrement dit, les espèces  $P$  et  $T$  sont équivalentes,  $P \equiv T$ , si et seulement si  $P((x)) = T((x))$ .

Soit  $P$  et  $T$  deux  $B^\square$ -espèces de structures, un isomorphisme de  $P$  à  $T$  est une famille de bijections,  $\alpha_{(U, U')} : P[U, U'] \mapsto T[U, U']$ , avec la condition suivante :

pour toute bijection  $\sigma : (U, U') \mapsto (V, V')$ , le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 P[U, U'] & \xrightarrow{\alpha_{(U, U')}} & T[U, U'] \\
 P[\sigma] \downarrow & & \downarrow T[\sigma] \\
 P[V, V'] & \xrightarrow{\alpha_{(V, V')}} & T[V, V'].
 \end{array}$$

On écrit alors  $P = T$ . Ce concept est compatible avec le passage aux séries :  $P = T$  implique  $P(\!(x)\!) = T(\!(x)\!)$ .

#### 4.2 Somme, produit et substitution

Il est possible de construire des espèces de Bessel plus complexes à partir d'espèces de Bessel de base à l'aide de certaines opérations (comme dans le cas des espèces usuelles). On introduit à cette fin les opérations de somme, de produit et de substitution entre  $B^\square$ -espèces. Puisque l'effet de ces opérations sur les flèches de  $B^\square$  est évident, il n'est pas explicitement décrit.

Tout d'abord, on a besoin d'adapter les concepts de dissection et de partition d'un ensemble au cas des couples ensembles de même cardinalité.

Soit  $(U_1, U_2)$  et  $(U'_1, U'_2)$  tels que  $U_1 \cup U_2 = U$  et  $U'_1 \cup U'_2 = U'$  (réunion disjointe),  $|U_1| = |U'_1|$  et  $|U_2| = |U'_2|$ . On dit alors que  $((U_1, U'_1), (U_2, U'_2))$  est une *dissection* de  $(U, U')$  et on écrit

$$(U, U') = (U_1, U'_1) \cup (U_2, U'_2).$$

Une *partition ordonnée* de  $(U, U')$  est une famille de couples d'ensembles de même cardinal (non nul) disjoints deux à deux :  $\Pi_\sigma = (\pi, \pi')_\sigma$ , où  $\pi$  est une partition de  $U$  et  $\pi'$  une partition de  $U'$ , telle que

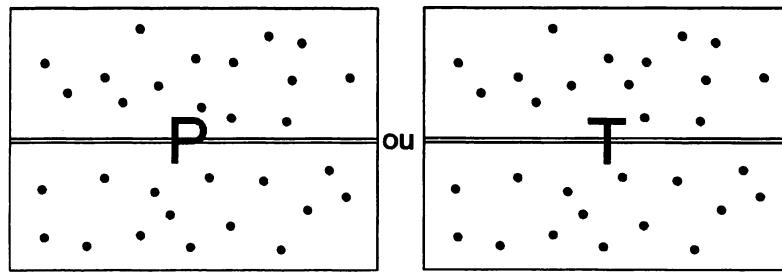
$$\sum_{(V, V') \in \Pi_\sigma} (V, V') = (U, U').$$

La bijection  $\sigma : \pi \mapsto \pi'$  détermine le couplage des classes de la partition  $\pi$  avec les classes de la partition  $\pi'$ . Donc,  $\sigma(V) = (V')$  implique  $|V| = |V'|$ .

**Définition 4.2.1.** Soit  $P$  et  $T \in B^\square\text{-Esp}$  : *la somme de  $P$  et  $T$  est la  $B^\square$ -espèce, notée  $P + T$ , définie comme suit :*

$$(P + T)[U, U'] = P[U, U'] + T[U, U'],$$

c'est-à-dire qu'une  $(P + T)$ -structure est une  $P$ -structure ou (exclusif) une  $T$ -structure. On peut représenter cette opération de la façon suivante :



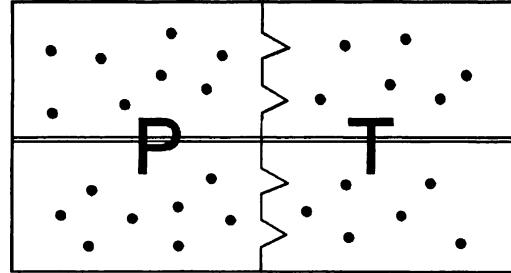
#### 4.2 La somme des espèces $P$ et $T$

□

**Définition 4.2.2.** Soit  $P$  et  $T \in B^\square\text{-Esp}$  : *le produit de  $P$  avec  $T$  est la  $B^\square$ -espèce, notée  $P \cdot T$ , définie de la façon suivante :*

$$(P \cdot T)[U, U'] = \sum_{(U_1, U'_1) \cup (U_2, U'_2)} P[U_1, U'_1] \times T[U_2, U'_2]$$

où la somme (union disjointe) est effectuée sur l'ensemble des dissections de  $(U, U')$ . En d'autres mots, on découpe  $U$  et  $U'$  en deux parties, droite et gauche, telles que la partie droite de  $U$  soit de même cardinalité que la partie droite de  $U'$ . On place alors une  $P$ -structure (au sens des  $B^\square$ -espèces) sur la partie droite et une  $T$ -structure sur la partie gauche de chacun des ensembles.



#### 4.3 Le produit de $P$ avec $T$

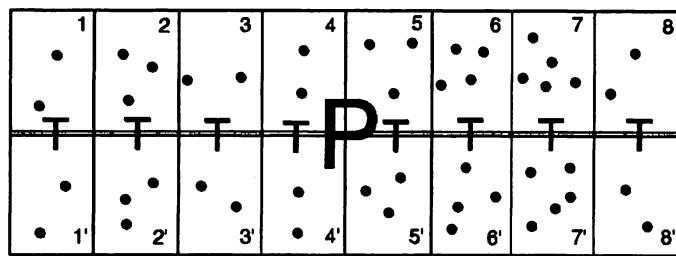
□

**Définition 4.2.3.** Soit  $P$  et  $T \in B^\square\text{-Esp}$ , telles que  $T[\emptyset, \emptyset] = \emptyset$ . La substitution de  $T$  dans  $P$  est la  $B^\square$ -espèce  $P \odot T$  définie comme suit :

$$(P \odot T)[U, U'] = \sum_{(\pi, \pi')} \left( P[\pi, \pi'] \times \prod_{(p, p') \in (\pi, \pi')} T[p, p'] \right)$$

où la somme est effectuée sur toutes les partitions ordonnées de  $(U, U')$ .

En d'autres mots, pour chaque partition ordonnée  $\Pi_\sigma$  du couple d'ensembles  $(U, U')$ , on place des  $T$ -structures sur chaque couple de classes et une  $P$ -structure sur l'ensemble des classes de  $\Pi_\sigma$ .



#### 4.4 La substitution de $T$ dans $P$

□

Le passage aux séries génératrices de Bessel est compatible avec les opérations somme et produit. En effet, on a le résultat suivant :

**Proposition 4.2.1.** Soit  $P$  et  $T$  des  $B^\square$ -espèces, les séries associées aux espèces  $P + T$  et  $P \cdot T$  satisfont

$$(P + T)(\langle x \rangle) = P(\langle x \rangle) + T(\langle x \rangle),$$

$$(P \cdot T)(\langle x \rangle) = P(\langle x \rangle) \cdot T(\langle x \rangle). \quad \blacksquare$$

Afin de définir une opération de substitution compatible avec le passage aux séries ainsi qu'au concept de couple d'espèces isomorphes (voir section 4.5), on introduit les espèces de Bessel *sous-tensorielles* : soit  $P \in B^\square$ , on dit que  $P$  est *sous-tensorielle* si

$$P \hookrightarrow [F, G] = F \otimes G$$

où

$$P[U, U'] \subseteq [F, G](U, U') = F[U] \times G[U'].$$

L'ensemble des espèces de Bessel sous-tensorielles, noté  $B_\otimes^\square$ -Esp, est fermé pour pour les opérations de somme, produit et substitution telles que définies précédemment, car on peut considérer les constructions sur  $U$  et  $U'$  d'une espèce  $P \in B_\otimes^\square$ -Esp comme des  $B$ -Esp.

Soit  $P$  et  $T \in B_\otimes^\square$ -Esp, on définit une nouvelle opération de substitution

$$(P \square T)[U, U'] := (P \odot T)[U, U'] \Big/ \sim$$

où  $\sim$  est une relation d'équivalence définie comme suit : pour  $(s_1, s'_1)$  et  $(s_2, s'_2)$  des  $(P \odot T)$ -structures, on a  $(s_1, s'_1) \sim (s_2, s'_2)$  si  $(F_1 \circ F_2)[\text{Id}](s_1) = s_2$  et  $(F_1 \circ F_2)[\text{Id}](s'_1) = s'_2$  (s'il s'agit des mêmes  $B$ -structures).

On vérifie alors que  $P \square T$  est bien une espèce de Bessel, c'est-à-dire qu'elle satisfait les conditions de fonctorialité :

$$(P \square T)[\sigma \circ \tau] = (P \square T[\sigma] \circ (P \square T[\tau]$$

$$(P \square T[\text{Id}_{(U, U'}])] = \text{Id}_{(P \square T[U, U'])}.$$

Afin d'obtenir une opération de substitution au niveau des séries associées aux  $B_\otimes^\square$ -espèces, on définit la *fonction multinomiale quadratique*  $q_n$ , sur un anneau

$A$  (domaine d'intégrité de caractéristiques 0) :

$$q_n(\{a_1, \dots, a_k\}) := \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_k}^2 a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k},$$

où les  $a_i \in A$ .

On peut étendre cette définition aux parties infinies dénombrables de l'anneau :

$$\begin{aligned} q_n(\{a_1, a_2, \dots\}) &:= ((a_1 + a_2 + \cdots))^n \\ &:= \sum_{n_1 + n_2 + \cdots = n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots}^2 a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots. \end{aligned}$$

Si on prend  $A = D[[x]]$ , l'anneau des séries formelles, on définit la substitution de Bessel comme suit.

**Définition 4.2.4.** Soit  $F$  et  $G \in D[[x]]$  : on définit la *substitution de Bessel* de séries formelles à une variable comme étant :

$$F((G((x)))) := \sum_{n \geq 0} f_n ((G((x))))^n,$$

où  $((G((x))))^n$  est donné par

$$\begin{aligned} ((G((x))))^n &:= q_n(\{g_0, g_1 x, g_2 x^2, \dots\}) \\ &= ((g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots + g_k x^k + \cdots))^n \\ &= \sum_{n_0 + n_1 + \cdots = n} \binom{n}{n_0, n_1, \dots}^2 g_0^{n_0} g_1^{n_1} \cdots x^{n_1+2n_2+\cdots}. \end{aligned}$$

Cette définition a un sens, car toujours sommable. □

**Proposition 4.2.2.** Soit  $P$  et  $T \in B_\otimes^\square$ -Esp telles que  $T[\emptyset] = \emptyset$  : la série  $(P \circ T)((x))$  satisfait l'égalité

$$(P \circ T)((x)) = P((T((x)))).$$

**Preuve.** D'une part, en utilisant la définition 4.4.6, le membre de droite est donné par

$$\begin{aligned} P((T((x)))) &= \sum_{n \geq 0} \frac{p_n}{n!^2} \left( \sum_{n_1+n_2+\dots=n} \binom{n}{n_1, n_2 \dots}^2 \frac{(t_1)^{n_1}}{(1!)^{2n_1}} \frac{(t_2)^{n_2}}{(2!)^{2n_2}} \dots x^{n_1+2n_2+\dots} \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{p_n}{n!^2} \left( \sum_{n_1+n_2+\dots=n} (j!)^2 \frac{(n!)^2}{(n_1!)^2, (n_2!)^2 \dots} \frac{(t_1)^{n_1}}{(1!)^{2n_1}} \frac{(t_2)^{n_2}}{(2!)^{2n_2}} \dots \frac{x^j}{(j!)^2} \right) \end{aligned}$$

où  $j = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots$

D'autre part, soit  $(U, U')$  un couple d'ensembles de cardinalité  $j$ . On construit la série de Bessel du membre de gauche en regroupant les partitions  $(\pi, \pi')$  de  $(U, U')$  selon leur nombre de parts. Pour un nombre donné  $n$  de parts, soit  $n_1, n_2 \dots$  tels que  $n_i = \#\text{parts de } i \text{ éléments}$ , on a donc que  $n = n_1 + n_2 + \dots$  et  $j = n_1 + 2n_2 + \dots$ . Et

$$(P \circ T)((x)) = \sum_{n \geq 0} p_n \sum_{n_1+n_2+\dots=n} \frac{(j!)^2}{(n_1!)^2 (1!)^{2n_1} (n_2!)^2 (2!)^{2n_2} \dots} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots \frac{x^j}{(j!)^2},$$

car le nombre de partitions d'un ensemble de  $j$  éléments où  $n_k$  est le nombre de sous-ensembles contenant  $k$  éléments est

$$\frac{(j!)^2}{(n_1!)^2 (1!)^{2n_1} (n_2!)^2 (2!)^{2n_2} \dots},$$

ce qui termine la preuve. ■

Rappelons que la substitution usuelle de  $G$  dans  $F$ , des séries formelles de type Bessel :  $F((x)) = \sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!^2}$  et  $G((x)) = \sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!^2}$ , est donnée par la formule

$$(F \circ G)((x)) = \sum_{n \geq 0} \frac{f_n}{n!^2} \left( \sum_{n_1+n_2+\dots=n} \binom{n}{n_1, n_2 \dots} \frac{(g_1)^{n_1}}{(1!)^{2n_1}} \frac{(g_2)^{n_2}}{(2!)^{2n_2}} \dots x^{n_1+2n_2+\dots} \right).$$

### 4.3 Propriétés des opérations

Comme pour les opérations correspondantes sur les B-espèces, les opérations définies ci-dessus satisfont certaines propriétés (les égalités ci-dessous correspondent à des isomorphismes naturels). Soit  $P$ ,  $T$  et  $H$  des  $B^\square$ -espèces :

$$P + T = T + P$$

$$P \cdot T = T \cdot P$$

$$P + (T + H) = (P + T) + H$$

$$P \cdot (T \cdot H) = (P \cdot T) \cdot H$$

C'est-à-dire, on a la commutativité, l'associativité et la distributivité pour les opérations de somme et de produit.

De plus, pour  $P$ ,  $T$  et  $H$  des  $B_\otimes^\square$ -espèces :

$$(P + T) \circ H = (P \circ H) + (T \circ H).$$

Mais, en général,

$$P \circ T \neq T \circ P$$

$$P \circ (T \circ H) \neq (P \circ T) \circ H$$

$$(P \cdot T) \circ H \neq (P \circ H) \cdot (T \circ H).$$

**Lemme 4.3.3.** Soit  $(U, U')$ , un couple d'ensembles de même cardinalité, tel que  $4 < |U| = |U'|$  :

$$(P \circ (T \circ S)) [U, U'] \subset ((P \circ T) \circ S) [U, U'],$$

où  $T[\emptyset, \emptyset] = S[\emptyset, \emptyset] = \emptyset$ .

**Preuve.** Il suffit de montrer que pour  $|U| = |U'| > 4$ , on a

$$\left| ((E^\square \circ E_+^\square) \circ E_+^\square) [U, U'] \right| > \left| (E^\square \circ (E_+^\square \circ E_+^\square)) [U, U'] \right| \quad (*)$$

où  $E^\square$  est l'espèce des couples d'ensembles et  $E_+^\square$  l'espèce des couples d'ensembles non-vides.

La définition (4.2.5) implique que les premiers coefficients de la série correspondant à l'espèce apparaissant dans le membre de gauche de (\*) sont

$$1, 1, 3, 30, 510, 10678, 329311, 13829714, 749450834, 50104068531 \dots$$

Tandis que, pour le membre de droite, on a

$$1, 1, 3, 30, 348, 6528, 175511, 5684640, 237624862, 12458278947 \dots \blacksquare$$

Finalement, les différents éléments neutres pour les opérations somme, produit et substitution sont

$$P + 0 = 0 + P = P$$

$$P \cdot 1 = 1 \cdot P = P$$

$$P \square X^\square = X^\square \square P = P,$$

où 1 est l'espèce des couples d'ensembles vides définie par

$$1[U, U'] = \begin{cases} (U, U') & \text{si } U = U' = \emptyset \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'espèce de Bessel vide, notée 0, est définie par  $0[U, U'] = \emptyset$  pour tout  $(U, U')$  et  $X^\square$  est, bien entendu, l'espèce des couples de singltons.

Il est à remarquer que les propriétés ci-dessus concernant uniquement les opérations de somme et de produit sont aussi valables dans  $B^\square$ -Esp.

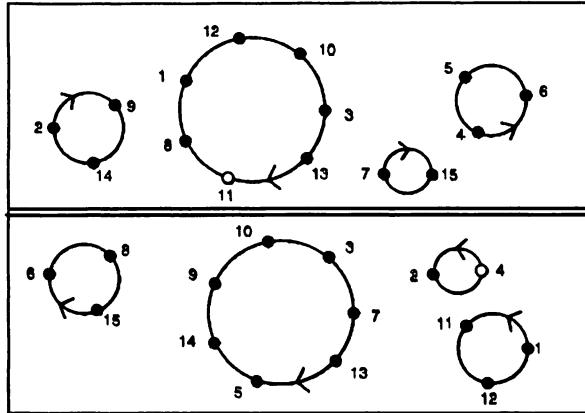
#### 4.4 Autres opérations : pointage et dérivée

Soit  $(U, U')$ , des ensembles de même cardinalité ; le *pointage* d'une  $B^\square$ -espèce  $P[U, U']$ , noté  $P^\bullet[U, U']$ , est la  $B^\square$ -espèce obtenue de  $P$  en distinguant un élément quelconque dans chaque ensemble sous-jacent. On définit de la même façon le pointage dans un seul ensemble, celui de droite et celui de gauche, respectivement noté  $P^{\bullet_d}$  et  $P^{\bullet_g}$ .

Soit  $P$  une espèce de Bessel telle que  $|P[n]| = p_n$ , alors les séries associées aux espèces  $P^\bullet$  et  $P^{\bullet_g}$  sont

$$P^\bullet((x)) = \sum_{n \geq 0} n^2 p_n \frac{x^n}{n!^2} \quad \text{et} \quad P^{\bullet_g}((x)) = \sum_{n \geq 0} n p_n \frac{x^n}{n!^2}.$$

Mentionnons également que  $P^{\bullet_g}((x)) = P^{\bullet_d}((x))$ .



#### 4.5 Couple de permutations pointées (point blanc)

□

La dérivée d'une espèce de Bessel  $P$  sur  $(U, U')$  est l'espèce, notée  $P'[U, U']$ , définie comme étant une  $P$ -structure sur  $(U \cup \{*\}, U' \cup \{*\})$ , c'est-à-dire telle que  $|P'[n]| = |P[n + 1]|$ .

On remarque que cette construction ne correspond pas à la dérivée usuelle de la série associée  $\frac{d}{dx} P((x))$ . En effet, on a

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{n \geq 0} p_n \frac{x^n}{n!^2} \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{p_{n+1}}{n+1} \frac{x^n}{n!^2}.$$

Afin d'obtenir une opération aux niveau des séries correspondant à la construction de l'espèce dérivée, on définit  $D^\square$  un opérateur tel que

$$D^\square(x^n) = n^2 x^{n-1}.$$

Mentionnons que l'opérateur  $D^\square$  est linéaire et qu'il satisfait l'identité suivante :

$$D^\square(x^j) = \frac{d}{dx} \left( x \left( \frac{d}{dx} x^j \right) \right).$$

La série associée à l'espèce de Bessel  $P'$  satisfait donc l'égalité

$$D^\square(P((x))) = P'((x)).$$

On remarque également que les opérations de pointage et de dérivée d'espèces de Bessel sont reliées par l'équation suivante :

$$P^\bullet = X P'.$$

Cette identité est obtenue par l'isomorphisme décrit par la figure (4.6). Concernant le pointage dans un seul ensemble, on remarque que

$$P^{\bullet s}((x)) = x \frac{d}{dx} P((x)).$$

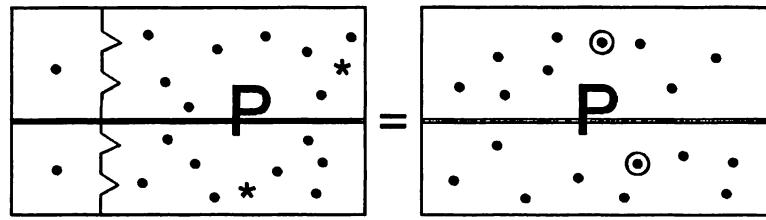


Figure 4.6

□

#### 4.5 Couples de structures isomorphes

À chaque  $B$ -espèce  $F$ , on peut associer une espèce de Bessel, notée  $F^\square$ , en posant, pour tous les couples d'ensembles finis  $U$  et  $U'$  de même cardinalité,

$$F^\square[U, U'] = \left\{ (s_1, s_2) \mid s_1 \in F[U], s_2 \in F[U'] \text{ et } \exists \sigma \text{ telle que } F[\sigma](s_1) = s_2 \right\},$$

où  $\sigma : U \rightarrow U'$  est une bijection.

Soit  $\psi : U_1 \rightarrow U_2$  et  $\psi' : U'_1 \rightarrow U'_2$  des bijections : le transport de ces  $B^\square$ -espèces s'effectue comme dans le cas des espèces usuelles, c'est-à-dire

$$F^\square[\psi, \psi'](s_1, s_2) = (\psi \cdot s_1, \psi' \cdot s_2).$$

Ainsi définie,  $F^\square$  est l'espèce de Bessel des *couples de  $F$ -structures isomorphes*. Cette association respecte les opérations de somme, de produit et dans un cas particulier celle de la substitution dans  $B_\otimes^\square$ -Esp.

**Proposition 4.5.4.** Soit  $F$  et  $G$  deux  $B$ -espèces de structure :

$$(F + G)^\square = F^\square + G^\square \quad (4.1)$$

$$(F \cdot G)^\square = F^\square \cdot G^\square \quad (4.2)$$

$$(E \circ F)^\square = E^\square \circ F^\square \quad (4.3)$$

où  $E^\square$  est l'espèce des couples d'ensembles de même cardinalité et où, pour la dernière identité, on doit avoir  $F[\emptyset] = \emptyset$ . Dans le membre de gauche des identités (4.1), (4.2) et (4.3), les opérations sont celles définies dans les  $B$ -espèces (voir [7]).

**Preuve.** On démontre (3), les cas (1) et (2) se prouvent de la même façon. Afin de construire une  $(E^\square \circ F^\square)$ -structure sur  $(U, U')$ , on construit d'abord  $s$  une  $(E^\square \odot F^\square)$ -structure. On considère une partition ordonnée  $\Pi_\alpha$  de  $(U, U')$ . Pour obtenir  $s$ , on place une  $F^\square$ -structure sur chaque couple  $(p, p') \in \Pi_\alpha$  : si  $s_1$  est la  $F$ -structure sur  $p$  et  $s_2$  est la  $F$ -structure sur  $p'$ , alors il existe  $\sigma$  telle que  $F[\sigma](s_1) = s_2$ . On place ensuite une  $E^\square$ -structure sur  $\Pi_\alpha$ . En oubliant le couplage des blocs de la partition sous-jacente de la structure  $s$ , on obtient une  $E^\square \circ F^\square$ -structure et, puisque les composantes connexes doivent être isomorphes deux à deux, on conclut qu'il s'agit bien d'un couple de structures isomorphes, c'est-à-dire une  $(E \circ F)^\square$ -structure. Inversement on peut vérifier qu'une  $(E \circ F)^\square$ -structure est bien une  $(E^\square \circ F^\square)$ -structure.

Il est également aisément vérifiable que les bijections décrites en (4.1), (4.2) et (4.3) sont des isomorphismes naturels de  $B^\square$ -espèces, c'est-à-dire qu'ils commutent avec les transports de structures. ■

Par exemple, pour  $a$ , l'espèce des arbres et  $C$  l'espèce des cycles, la figure (4.7) représente une  $a^\square \cdot C^\square$ -structure qui est également une  $(a \cdot C)^\square$ -structure.

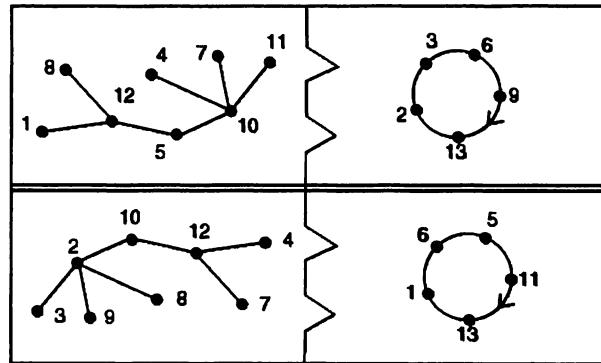


Figure 4.7

Soit  $L$  l'espèce usuelle des listes, La figure (4.8) représente une  $E^\square \circ L^\square$ -structure qui est également une  $(E \circ L)^\square$ -structure.

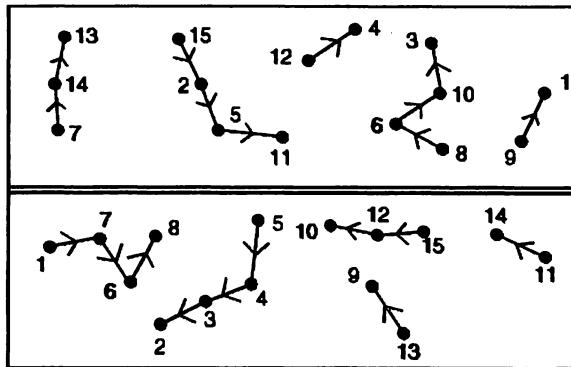


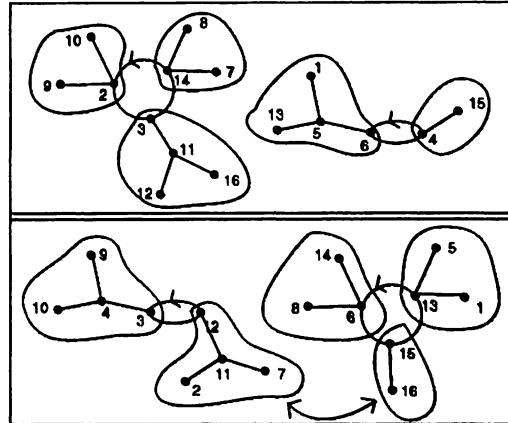
Figure 4.8

□

On remarque que pour une espèce  $F$  différente de  $E$ ,  $(F^\square \circ G^\square)$  n'est pas en général un couple de structures isomorphes. C'est-à-dire

$$(F \circ G)^\square \neq F^\square \circ G^\square.$$

On obtient plutôt un couple de structures isomorphes, à une permutation près des membres des assemblées, comme on peut le constater sur la figure (4.9).

4.9 Une  $(S \circ A)^{\square}$ -structure

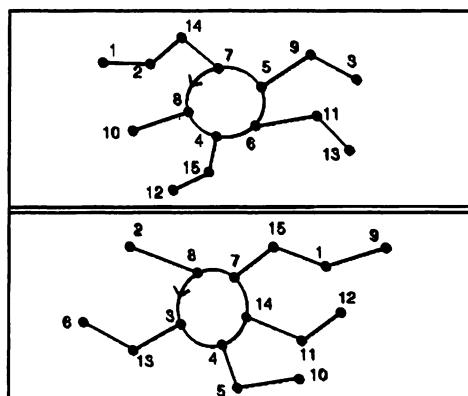
Dans la figure ci-dessus, la permutation sous-jacente de l'ensemble de droite est isomorphe à celle de l'ensemble de gauche et les structures d'arborescences sont isomorphes deux-à-deux ; mais le tout n'est pas un couple de structures (endofonctions) isomorphes, la flèche sur la figure (4.9) indiquant la permutation d'arborescences.  $\square$

Autre exemple : soit  $\text{Pieu} = C \circ L_+$ . On a

$$\text{Pieu}^{\square} = (C \circ L)^{\square} \neq (C^{\square} \circ L^{\square}).$$

Néanmoins, la proposition (4.5.4) implique que les  $\text{Pieu}^{\square}$ -structures satisfont l'équation combinatoire

$$\text{Pieu}^{\square}(X) + C(X)^{\square} = C(2X)^{\square}. \quad (4.4)$$



4.10 Couple de pieuvres isomorphes

L'opération  $(\cdot)^\square$  permet d'obtenir des identités au niveau des séries associées aux espèces de Bessel. En associant les propositions (4.2.1), (4.2.2) et (4.5.4), on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 4.5.5.** Soit  $E^\square$ , l'espèce de Bessel des ensembles, et  $F$ ,  $G$  et  $H$ , des espèces usuelles telle que  $H[\emptyset] = \emptyset$ . On a

$$\begin{aligned}(F + G)^\square((x)) &= F^\square((x)) + G^\square((x)), \\ (F \cdot G)^\square((x)) &= F^\square((x)) \cdot G^\square((x)), \\ (E^\square H)^\square((x)) &= (E^\square \circ H^\square)(x).\end{aligned}$$

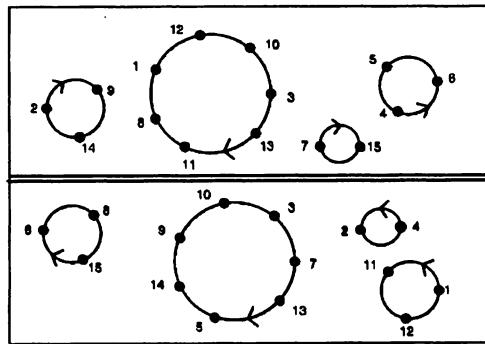
■

Les résultats précédents permettent d'obtenir des formules pour le dénombrement des couples de  $F^\square$ -structures isomorphes.

Par exemple, pour  $S$ , l'espèce des permutations, on a la formule suivante :

$$\begin{aligned}S^\square((x)) &= E^\square(C^\square((x))) \\ &= \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{n_1+2n_2+\dots=n} \frac{n!^2}{1^{2n_1} n_1!^2 2^{2n_2} n_2!^2 \dots} \right) \frac{x^n}{(n!)^2}.\end{aligned}$$

La figure (4.11) ci-dessous représente une  $S^\square$ -structure sur 15 points.



4.11 Couple de permutations isomorphes

Pour ce qui est des couples de pieuvres isomorphes, l'identité (4.4) et le résultat (4.15) de la section (4.9) donnent les premiers termes de la série  $\text{Pieu}^\square((x))$

$$\text{Pieu}^\square((x)) = x + 9 \frac{x^2}{2!^2} + 76 \frac{x^3}{3!^2} + 1908 \frac{x^4}{4!^2} + \dots$$

Autre exemple : soit  $A^\square$ , l'espèce de Bessel des couples d'arborescences isomorphes, on a l'égalité combinatoire

$$A^\square = X^\square(E^\square \circ A^\square). \quad (4.5)$$

Pour dénombrer les  $A^\square$ -structures, on peut utiliser le corollaire (4.5.5). On obtient

$$A^\square((x)) = x E^\square((A^\square((x)))) \quad (4.6)$$

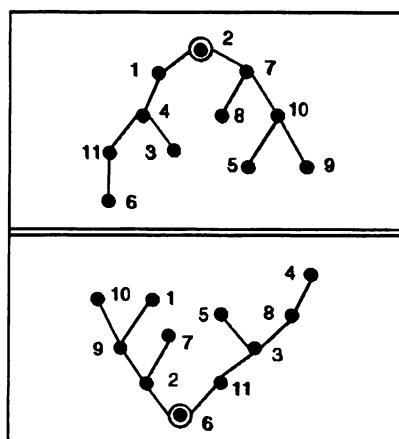
À partir de cette équation, on peut, en utilisant une procédure récursive (voir appendice (2)), calculer les premiers termes de la série de Bessel des couples d'arborescences isomorphes. On a

$$A^\square(x) = x + x^2 + \frac{5}{4}x^3 + \frac{41}{18}x^4 + \frac{2321}{576}x^5 + \frac{58663}{7200}x^6 + \frac{8704837}{518400}x^7 + \dots$$

Les premiers termes de la suite  $(|A^\square[n]|)_{n \geq 1}$  sont donc

$$1, 4, 45, 1312, 58025, 4223736, 426537013 \dots$$

Pour plus de termes, consulter l'appendice (2).



#### 4.12 Couple d'arborescences isomorphes

La série définie par

$$\mathcal{A}((x)) = x \cdot (H(x) \square \mathcal{A}((x))) \quad (4.7)$$

où  $H = 1 + h_1 x + \cdots + h_n x^n + \cdots$  (une série formelle à coefficients indéterminés) donne un inverse générique : si  $a_n$  est le coefficient de  $x^n/n!^2$  dans  $\mathcal{A}((x))$ , on a

$$a_n = \sum_{O_p \in \text{Orb}} |O_p|^2 \omega_p.$$

où Orb l'ensemble des orbites, c'est-à-dire l'ensemble des types d'isomorphie et  $\omega_p$  est le poids d'un élément de l'orbite  $O_p$  :  $\omega_p = h_1 h_2 \cdots$  où  $h_i$  est le nombre de sommets possédant  $i$  fils.

Mentionnons également que (4.7) est liée aux *parking functions* de même type (voir [40] pour le cas usuel). Les premières valeurs pour les coefficients  $a_n$  sont

$$\begin{aligned} & 1 \\ & h_1 \\ & h_1^2 + h_2 \\ & 5h_2 h_1 + h_1^3 + h_3 \\ & 10h_2 h_1^2 + 4h_2^2 + h_1^4 + 10h_3 h_1 + h_4 \\ & 28h_2^2 h_1 + 18h_2 h_1^3 + 13h_3 h_2 + h_1^5 + 28h_3 h_1^2 + 17h_4 h_1 + h_5. \end{aligned}$$

Pour les premiers termes de la série  $f((g((x))))$  avec  $f$  et  $g$  des séries de type Bessel avec coefficients indéterminés (la substitution de Bessel générique), consulter l'appendice 2.

#### 4.6 Théorème de dissymétrie pour les couples d'arbres isomorphes

Dans cette section, on verra qu'il est également possible de calculer les premiers termes des séries associées à l'espèce des couples d'arbres isomorphes. On rappelle d'abord le *théorème de dissymétrie* classique pour les arbres (voir [28]).

**Théorème 4.6.6.** (Leroux et Miloudi) Soit  $A$  et  $a$ , les espèces des arborescences et des arbres respectivement. On a l'identité combinatoire suivante :

$$A + E_2(A) = a + A^2, \quad (4.8)$$

où  $E_2$  est l'espèce des ensembles à deux éléments. ■

C'est le concept de centre d'un arbre qui permet de démontrer l'égalité combinatoire (4.8). On définit *le centre* d'un arbre comme étant le sommet ou l'arête obtenue en émondant récursivement les feuilles de l'arbre. On remarque que le centre ainsi défini est préservé par les isomorphismes.

Soit  $a^\square$ , l'espèce de Bessel des couples d'arbres isomorphes. Pour dénombrer les couples d'arbres isomorphes, on peut adapter le théorème de dissymétrie. Tout d'abord, afin de lier les  $a^\square$ -structures aux  $A^\square$ -structures, on a besoin d'une opération de pointage qui doit respecter les isomorphismes. On définit ce pointage comme suit : une  $(F^\square)^\odot$ -structure est un couple de  $F^\bullet$ -structures isomorphes. On a donc l'équation

$$(F^\square)^\odot = (F^\bullet)^\square;$$

en particulier, on a

$$(a^\square)^\odot = (a^\bullet)^\square = A^\square.$$

Il est à noter que pour certaines espèces atomiques (voir [7]), on a l'égalité

$$(F^\square)^\odot = (F^\square)^\bullet.$$

**Proposition 4.6.7.** Soit  $A^\square$  et  $a^\square$ , les espèces des couples d'arborescences et d'arbres isomorphes :

$$A^\square + (E_2^\square \circ A^\square) = a^\square + (A^\square)^2, \quad (1)$$

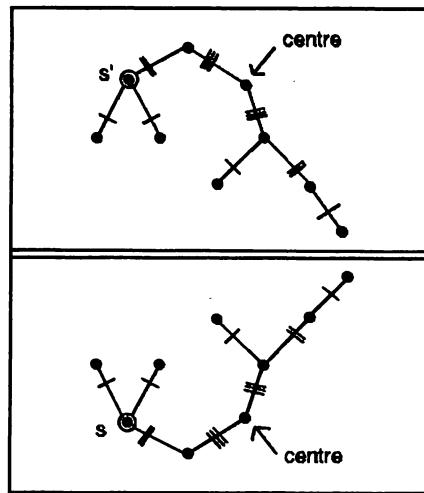
où  $E_2^\square(A^\square)$  est l'espèce des couples d'arbres isomorphes avec une arête distinguée dans chaque arbre (les arêtes choisies ne devant pas briser l'isomorphisme entre les deux structures).

**Preuve.** On peut utiliser les égalités (4.1), (4.2) et (4.3) afin d'obtenir le résultat :

$$\begin{aligned}
 (A + E_2(A))^\square &= A^\square + (E_2^\square \circ A^\square) \\
 &= (a + A^2)^\square \\
 &= a^\square + (A^\square)^2.
 \end{aligned}$$

On peut également utiliser le concept de centre d'un arbre afin de décrire un isomorphisme (voir [28] pour le cas usuel).

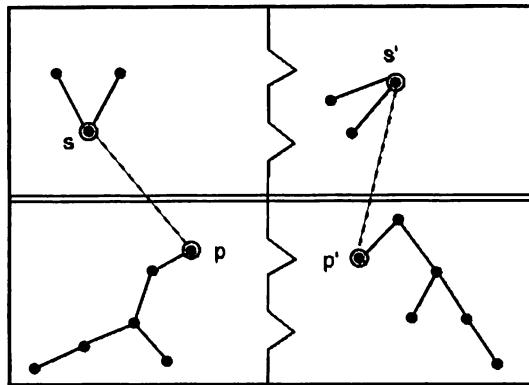
D'une part, le membre de gauche de l'équation (1) représente des couples d'arbres pointés en un sommet (arborescences) ou des arbres pointés en une arête ( $(E_2^\square \circ A^\square)$ ). D'autre part, le membre de droite représente des couples d'arbres pointés en leur centre ou des couples de couples d'arborescences. Les figures suivantes décrivent l'isomorphisme recherché.



4.13 Couple d'arbres pointés en un sommet

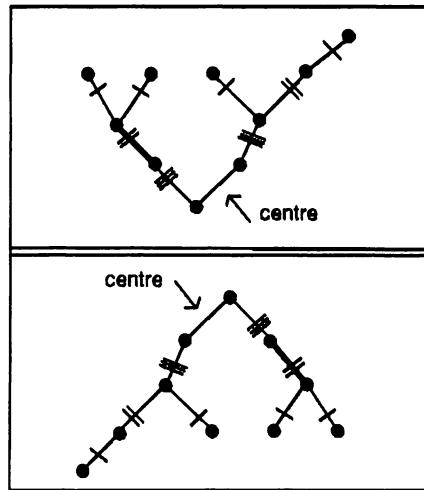
Tout d'abord, considérons un couple d'arbres pointés (isomorphes) chacun en un sommet,  $s$  et  $s'$ , distinct du centre (figure 4.13). On coupe, dans chaque arbre, les arêtes issues de  $s$  et de  $s'$  en direction du centre.

On obtient ainsi une  $(A^\square)^2$  structure (figure 4.14).



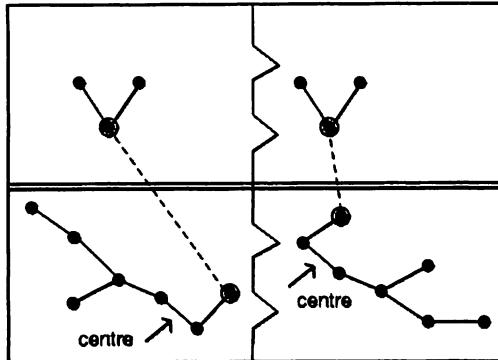
4.14 Une  $(A^\square)^2$ -structure

Considérons maintenant un couple d'arbres où chaque arbre est pointé en une arête distincte du centre (figure 4.15), c'est-à-dire une  $E_2^\square(A^\square)$ -structure.



4.15 Couple d'arbres avec une arête distinguée

On coupe l'arête distinguée de chaque arbre et on place les arborescences contenant les centres en dessous (dans la dissection). On obtient ainsi une structure de couples de couples d'arborescences isomorphes. (figure 4.16). ■



#### 4.16 Une $((A^\square)^2)$ -structure

Le théorème de dissymétrie, version espèces de Bessel, nous permet de calculer les premiers termes de la série génératrice des couples d'arbres isomorphes. On a

$$a^\square((x)) = A^\square((x)) + E_2^\square((A^\square((x)))) - (A^\square)^2((x)).$$

En utilisant le résultat obtenu pour les couples d'arborescences isomorphes, on obtient

$$a^\square((x)) = x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{18}x^4 + \frac{289}{576}x^5 \dots$$

Les premiers termes de la suite  $(|a^\square[n]|)_{n \geq 1}$  sont donc

$$1, 1, 9, 160, 7225, 346536, 44893849, 3819839360 \dots$$

Pour plus de termes, consulter l'appendice (2). □

#### 4.7 Endofonctions de Bessel

Dans les espèces usuelles, l'espèce des endofonctions est liée, entre autres, à l'interprétation combinatoire des formules d'inversion de Lagrange. Mentionnons que l'espèce des endofonctions partielles,

$$\text{End}_p = (E \circ A) \cdot \text{End}$$

est également utilisée à cette fin (voir [7]).

On rappelle que la formule classique d'inversion de Lagrange donne des formules explicites pour les coefficients de l'inverse (usuel)  $f^{(-1)}(x)$  :

$$f^{(-1)}(x) = \sum_{n \leq 1} \left( \frac{d}{dt} \right)^{n-1} \left( \frac{t}{f(t)} \right)^n \Big|_{t=0} \frac{x^n}{n!}.$$

Des analogues de ces résultats, au niveau des espèces de Bessel restent à trouver.

On s'intéresse ici plus particulièrement à la formule de Polya-Szegö qui peut s'interpréter combinatoirement à l'aide de la bijection

$$(F(A) \cdot \text{End})[n] \xrightarrow{\sim} (F \cdot E^n)[n], \quad (4.9)$$

où  $F$  est une  $B$ -espèce et  $A$  l'espèce des arborescences usuelles.

On rappelle qu'une  $E^n$ -structure sur un ensemble de  $k$  éléments peut être considérée comme une fonction dont le domaine et le codomaine contiennent respectivement  $k$  et  $n$  éléments. Pour  $F = E$ , on peut obtenir un analogue de la bijection (4.9) au niveau des espèces de Bessel.

De l'égalité combinatoire

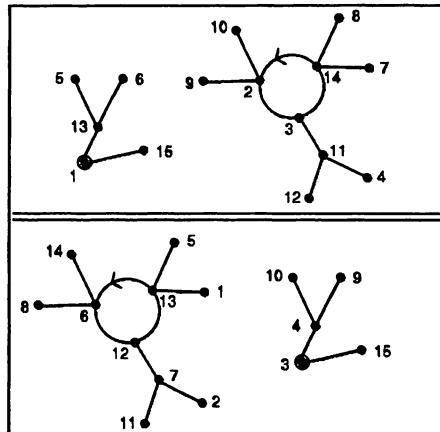
$$\text{End}_p^\square = (E^\square \circ A^\square) \cdot \text{End}^\square, \quad (4.10)$$

on obtient la bijection

$$((E^\square \circ A^\square) \cdot \text{End}^\square)[n] \xrightarrow{\sim} (E^\square \cdot \mathcal{E}^n)[n]. \quad (4.11)$$

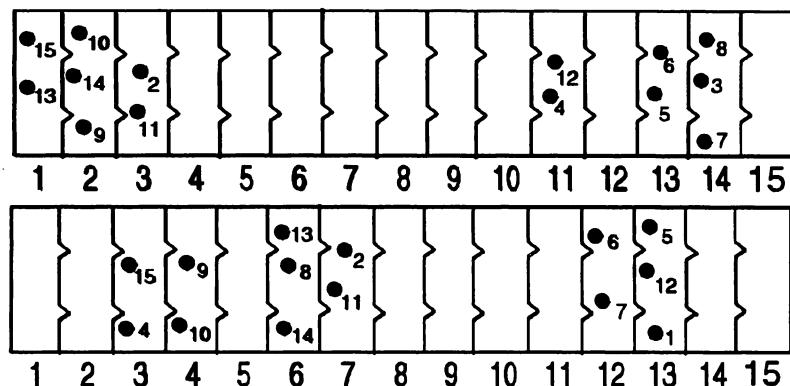
où l'espèce de Bessel  $\mathcal{E}^n$  est définie comme suit : une  $\mathcal{E}^n$ -structure sur  $(U, U')$  est un couple  $s = (s_1, s_2)$ , où  $s_1$  et  $s_2$  sont des  $E^n$ -structures sur respectivement  $U$  et  $U'$ , telles que  $s_2$ , est obtenue en permutant à la fois le domaine et le codomaine de  $s_1$ .

Par exemple, considérons l'endofonction partielle de la figure (4.17).



4.17 Couple d'endofonctions partielles

On trouve alors la  $\mathcal{E}^n$ -structure associée :



4.18 Une  $\mathcal{E}^n$ -structure sur 14 points, avec  $n = 15$

Le dénombrement des structures  $\mathcal{E}^n$  demeure un problème ouvert. Cependant, on peut calculer les premiers termes de leur série génératrice (de type Bessel) en utilisant les résultats (4.9.11) et (4.16). On obtient ainsi

$$\text{End}_p = 1 + 10 \frac{x^2}{2!^2} + 230 \frac{x^3}{3!^2} + 8898 \frac{x^4}{4!^2} + \dots$$

#### 4.8 Dénombrement de couples de $(q, t)$ -arborescences

Dans cette section, on construit à partir des polynômes de Bell-Bessel, des polynômes permettant de dénombrer des couples d'arborescences isomorphes selon le nombre d'inversions (pour le cas usuel voir [19]).

On considère ici des couples d'arborescences isomorphes sur des ensembles totalement ordonnés de même cardinalité ( $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  et  $[n'] = \{1', 2', \dots, n'\}$ ) tels que  $1$ , et  $1'$  sont les étiquettes des racines.

On rappelle qu'une *inversion* dans une arborescence  $s$  est une paire de sommets  $i, j$  telle que  $i > j$  et  $i$  est sur l'unique chemin  $1 - j$  (de la racine vers  $j$ ) dans  $s$ . On note  $\text{inv}(s)$  le nombre total d'inversions dans  $s$ .

Soit  $A_{\text{ord}}^\square[n]$  l'ensemble de tous ces couples. On peut maintenant définir  $\mathcal{J}_n(q, t)$ , le *polynôme compteur d'inversions* pour les couples d'arborescences isomorphes :

$$\mathcal{J}_n(q, t) = \sum_{s_1, s_2} q^{\text{inv}(s_1)} t^{\text{inv}(s_2)}, \quad (4.12)$$

où  $(s_1, s_2) \in A_{\text{ord}}^\square[n]$ .

Soit  $X = x_1, x_2, \dots$  et  $Y = y_1, y_2, \dots$ . Les polynômes de Bell-Bessel sont définis comme suit :

$$B_n(X, Y) = \left[ \frac{t^n}{n!^2} \right] (E^\square(\langle T_{xy}(\langle t \rangle) \rangle)), \quad (4.13)$$

$$\text{où } E^\square(\langle x \rangle) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!^2} \quad \text{et} \quad T_{xy}(\langle t \rangle) = \sum_{m \geq 1} x_m y_m \frac{t^m}{m!^2}.$$

**Proposition 4.8.8.** Le polynôme compteur d'inversions pour les couples d'arborescences isomorphes  $\mathcal{J}_{n+1}(q, t)$  s'obtient en évaluant le polynôme de Bell-Bessel  $B_n(X, Y)$  de la façon suivante :

$$\mathcal{J}_{n+1}(q, t) = B_n(1_q \mathcal{J}_1(q, t), \dots, n_q \mathcal{J}_n(q, t); 1_t \mathcal{J}_1(q, t), \dots, n_t \mathcal{J}_n(q, t))$$

où  $i_q$  et  $i_t$  sont respectivement le  $q$ -anologue et le  $t$ -anologue de  $i$ .

**Preuve.** De façon semblable au cas usuel (voir [19]).

La proposition précédente nous permet donc de calculer explicitement les polynômes  $\mathcal{J}_n(q, t)$ . Par exemple, pour  $n \leq 5$  on trouve

$$\mathcal{J}_1(q, t) = 1$$

$$\mathcal{J}_2(q, t) = 1$$

$$\mathcal{J}_3(q, t) = 1 + (1 + q)(1 + t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_4(q, t) = & q^3 t^3 + 2 q^3 t^2 + 2 q^2 t^3 + 2 q^3 t + 5 q^2 t^2 + 2 q t^3 + q^3 \\ & + 5 q^2 t + 5 q t^2 + t^3 + 3 q^2 + 14 q t + 3 t^2 + 12 q + 12 t + 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_5(q, t) = & q^6 t^6 + 3 q^6 t^5 + 3 q^5 t^6 + 5 q^6 t^4 + 10 q^5 t^5 + 5 q^4 t^6 + 6 q^6 t^3 \\ & + 17 q^5 t^4 + 17 q^4 t^5 + 6 q^3 t^6 + 5 q^6 t^2 + 21 q^5 t^3 + 38 q^4 t^4 \\ & + 21 q^3 t^5 + 5 q^2 t^6 + 3 q^6 t + 18 q^5 t^2 + 54 q^4 t^3 + 54 q^3 t^4 \\ & + 18 q^2 t^5 + 3 q t^6 + q^6 + 11 q^5 t + 49 q^4 t^2 + 98 q^3 t^3 \\ & + 49 q^2 t^4 + 11 q t^5 + t^6 + 4 q^5 + 37 q^4 t + 108 q^3 t^2 \\ & + 108 q^2 t^3 + 37 q t^4 + 4 t^5 + 16 q^4 + 93 q^3 t \\ & + 160 q^2 t^2 + 93 q t^3 + 16 t^4 + 44 q^3 + 156 q^2 t \\ & + 156 q t^2 + 44 t^3 + 84 q^2 + 202 q t + 84 t^2 \\ & + 126 q + 126 t + 90. \end{aligned}$$

On remarque que les  $\mathcal{J}_n(q, t)$  peuvent être interprétés comme le dénombrement de couples de forêts d'arborescences  $q, t$  pondérés isomorphes. En effet, si on effectue la substitution  $q \leftarrow 1, t \leftarrow 1$  dans  $\mathcal{J}_n(q, t)$ , on obtient la suite de nombres

$$1, 1, 5, 82, 2321, 117326, 8704837, 919972992 \dots$$

Ce qui correspond au nombre de couples de forêts isomorphes sur  $n = 1, 2, \dots, 9$  points. Il est à noter que l'espèce de Bessel des couples de forêts isomorphes satisfait l'égalité combinatoire

$$\mathcal{F}^\square = E^\square \circ A^\square.$$

De plus, puisque les forêts sont liées aux *fonctions de parking*, voir [40],  $\mathcal{J}_n(q, t)$  correspond également au  $(q, t)$ -dénombrement de couples de fonctions de parking isomorphes (isomorphes au sens des forêts d'arborescences associées).

Rappelons que, dans le cas usuel, le polynôme compteur d'inversions pour les arborescences  $J_n(q)$  satisfait l'identité

$$\exp \left( \sum_{n \geq 1} (q-1)^n J_n(q) \frac{t^n}{n!} \right) = \sum_{n \geq 0} q^{\binom{n}{2}} \frac{t^n}{n!} \quad (4.14)$$

De cette identité, on peut déduire que  $J_n(q)$ , lorsque qu'évalué en  $q = 1/2$  ou  $q = 2$ , correspond à l'énumération de certains types de graphes (voir [19]). Il reste à déterminer à quoi correspondent des évaluations en  $q$  et  $t$  (distinctes de  $q = t = 1$ ) dans les polynômes  $\mathcal{J}_n(q, t)$ .

#### 4.9 Dénombrement d'espèces de Bessel via la décomposition moléculaire

On rappelle d'abord quelques définitions et résultats concernant les espèces moléculaires (pour plus de détails, voir [2], [7],[8] et []).

Soit  $F$  et  $G$  des espèces usuelles. On dit que  $G$  est une *sous-espèce* de  $F$  si  $G[U] \subseteq F[U]$  pour tout ensemble fini  $U$  et si  $G[\sigma] = F[\sigma]_{G[U]}$  pour tout  $\sigma : U \xrightarrow{\sim} V$ .

Une espèce usuelle  $M$  est dite *moléculaire* si deux  $M$ -structures quelconques sont isomorphes. Par exemple, les espèces  $E_n$ ,  $C_n$  et  $L_n$ , respectivement les ensembles sur  $n$  points, les cycles orientés sur  $n$  points et les listes sur  $n$  points, sont moléculaires. Concernant les espèces moléculaires, on a les résultats suivants.

**Proposition 4.9.9.** Une espèce  $M$  est moléculaire si, et seulement si, pour toutes espèces  $F$  et  $G$ , telles que  $M = F + G$ , on doit avoir  $F + 0$  ou  $G = 0$ . ■

**Proposition 4.9.10.** La décomposition moléculaire de toute espèce  $F$  peut s'écrire de la façon suivante :

$$F = \sum_{M \in \mathcal{M}} f_M M,$$

où  $\mathcal{M}$  est l'ensemble des espèces moléculaires (à isomorphismes d'espèces près) et  $f_M \in \mathbb{N}$  est le nombre de sous-espèces moléculaires de  $F$  isomorphes à  $M$ . ■

Tout d'abord, on remarque que l'espèce  $F^\square$  peut être considérée comme étant une  $B$ -espèce. On note  $B_{\text{iso}}^\square$ -Esp le sous-ensemble de  $B^\square$ -Esp contenant les couples de structures isomorphes. On a que  $B_{\text{iso}}^\square$ -Esp  $\subset B$ -Esp. En effet, pour  $F$  une  $B$ -espèce, telle que

$$F = \sum_{M \in \mathcal{M}} f_M M,$$

on a

$$F^\square = \sum_{M \in \mathcal{M}} f_M M^\square = \sum_{M \in \mathcal{M}} f_M (M \times M)$$

où  $M \times M$  est le produit cartésien de l'espèce  $M$  avec elle même. Il s'en suit que

$$F^\square = \sum_{M \in \mathcal{M}} \bar{f}_M M.$$

On peut aussi utiliser la décomposition en espèces moléculaires d'une  $F$ -structure afin de dénombrer les couples de  $F$ -structures isomorphes.

**Lemme 4.9.11.** Soit  $F$  une espèce usuelle, telle que

$$F = \sum_{M \in \mathcal{M}} f_M M;$$

alors le nombre de  $F^\square$ -structures sur un couple d'ensembles de  $n$  éléments chacun est donné par

$$|F^\square[n]| = \sum_{M \in \mathcal{M}_n} f_M |M[n]|^2.$$

**Preuve.** Puisque  $M$  est moléculaire, on a que  $|M^\square[n]| = |M[n]|^2$ . La proposition (4.9.10) implique alors le résultat. ■

Il est à remarquer que le lemme (4.9.11) ci-dessus implique que le dénombrement des espèces de Bessel correspond à une partie du calcul de la variance du nombre moyen de structures par type d'isomorphie.

Par exemple, soit  $a$  l'espèce des arbres et  $A$  l'espèce des arborescences. Les premiers termes de leur décomposition moléculaire sont

$$\begin{aligned} a &= X + E_2(X) + XE_2(X) + XE_3(X) + E_2(X^2) + X^3E_2(X) + XE_4(X) + XE_2(X^2) \dots \\ A &= X + X^2 + X^3 + XE_2(x) + 2X^4 + X^2E_2(X) + XE_3(X) + 3X^5 + 3X^3E_2(X) + X^2E_3(X) \\ &\quad + XE_4(x) + X(E_2(X^2)) \dots \end{aligned}$$

Le lemme (4.9.11) permet de calculer les premières valeurs pour  $|a^\square[n]|$  et  $|A^\square[n]|$ .

DÉCOMPOSITION MOLÉCULAIRE DE  $a$  ET  $|a^\square[n]|$  POUR  $n \leq 5$

$n$	$a_n$	$ a[n] $	$ a^\square[n] $
1	$X$	1	1
2	$E_2(X)$	1	1
3	$XE_2(X)$	3	9
4	$XE_3(X) + E_2(X^2)$	$4 + 12 = 16$	$4^2 + 12^2 = 160$
5	$X^3E_2(X) + XE_4(X) + XE_2(X^2)$	$60 + 5 + 60 = 125$	$60^2 + 5^2 + 60^2 = 7225$

DÉCOMPOSITION MOLÉCULAIRE DE  $A$  ET  $|A^\square[n]|$  POUR  $n \leq 5$

$n$	$A_n$	$ A[n] $	$ A^\square[n] $
1	$X$	1	1
2	$X^2$	2	4
3	$X^3 + XE_2(x)$	$6 + 3 = 9$	$6^2 + 3^2 = 45$
4	$2X^4 + X^2E_2(X) + XE_3(X)$	$2 \cdot 24 + 12 + 4 = 64$	$2 \cdot 24^2 + 12^2 + 4^2 = 1312$
5	$3X^5 + 3X^3E_2(X) + X^2E_3(X) + XE_4(x) + X(E_2(X^2))$	$3 \cdot 120 + 3 \cdot 60 + 20 + 5 + 60 = 625$	$3 \cdot 120^2 + 3 \cdot 60^2 + 5^2 + 20^2 + 60^2 = 58025$

□

Il est également possible de décrire explicitement la décomposition moléculaire de certaines espèces. Par exemple, pour les  $C(X + Y)$ -structures, on a

$$C_3(X + Y) = C_3(X) + X^2Y + XY^2 + C_3(Y)$$

$$C_4(X + Y) = C_4(X) + X^3Y + X^2Y^2 + E_2(XY) + XY^3 + C_4(Y).$$

Pour  $X = Y$ , on trouve :

$$C_3(2X) = 2C_3(X) + 2X^3$$

$$C_4(2X) = 2C_4(X) + 3X^4 + E_2(X^2)$$

D'où

$$C(2X)^{\square} = 2x + 10 \frac{x^2}{2!^2} + 80 \frac{x^3}{3!^2} + 1944 \frac{x^4}{4!^2} + \dots \quad (4.15)$$

En général, soit  $M$ , une espèce moléculaire. La décomposition moléculaire de  $M(X + Y)$  donne lieu à une généralisation de la formule du binôme.

Il est possible d'obtenir des décompositions moléculaires via l'ordinateur pour certaines familles de  $B$ -espèces (voir [2]). Par exemple, les premiers termes de la décomposition moléculaire de l'espèce des End-structures sont

$$\begin{aligned} \text{End} = & X + (2E_2(X) + X^2) + (2XE_2(X) + C_3(X) + E_3(X) + 3X_3) \\ & + (XE_3(X) + C_3(X)X + 5X^2E_2(X) + E_2(X)^2 + E_2(E_2(X))) \\ & + E_4(x) + 2E_2(X^2) + 6X^4 + C_4(X) + \dots \end{aligned}$$

On obtient alors les premiers termes de la série des couples d'endofonctions isomorphes :

$$\text{End}^{\square}((x)) = x + 6 \frac{x^2}{2!^2} + 131 \frac{x^3}{3!^2} + 4410 \frac{x^4}{4!^2} + \dots \quad (4.16)$$

## CONCLUSION

Des résultats nouveaux concernant les équations différentielles dont les séries  $I_0^k I_1^n$  sont solutions ont été obtenus d'une part en utilisant la théorie des fonctions différentiellement finies et d'autre part en utilisant des propriétés des séries de Bessel combinatoires. Mentionnons également que, pour des cas particuliers, nous avons obtenu un  $q$ -anologue de ces résultats.

Pour les  $P$ -réurrences satisfaites par les nombres  $\tau_h(n)$  et  $\tau_h^{(2)}(n)$ , nous avons démontré que le nombre de termes est  $\leq 3(h/2+1)$  et que le degré des polynômes est  $\leq h/2+1$ . Ces résultats ont été obtenus de façon semblable au cas précédent et ce grâce aux séries génératrices de Gessel pour  $\tau_h(n)$  et  $\tau_h^{(2)}(n)$ .

À partir des séries génératrices de Gessel et de la récurrence pour les séries de Bessel combinatoire :

$$x I_n = (1 - n) I_{n-1} - x I_{n-2},$$

nous avons obtenu des nouvelles formules pour  $\tau_6(n)$ . Pour  $h > 6$  des simplifications semblables sont possibles quoique difficiles, mais tout le processus peut être automatisé. On a la conjecture :

$$\tau_h(n) = \sum_{k \geq 0} \frac{P(k, n)}{Q(k, n)} \tau_j(n - k) \tau_{h-j}(k),$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes à coefficients entiers.

Finalement, concernant les couples de structures isomorphes, nous avons obtenu le dénombrement effectif de certaines espèces de Bessel. En particulier, pour les couples de structures isomorphes d'arbres, d'arborescences, d'endofonctions et de pieuvres et autres. Ce qui constitue autant de nouveaux résultats. Néanmoins une formule d'inversion de Lagrange-Bessel reste à trouver. L'approche via la décomposition moléculaire nous a permis d'associer le dénombrement des couples de structures isomorphes d'une partie du calcul de la variance du nombre moyen de structures par type d'isomorphie.

## APPENDICE I

### 1.1 Construction des $P$ -réurrences $R_h$

La procédure **recurrence** (code en Maple) permet de calculer la récurrence  $R_h$  satisfait par les nombres  $\tau_h(n)$  (voir chap. 2).

```
recurrence :=  
proc (h) local substit, rech, vals, nom, i ;  
    nom :=cat(u,h) ;  
    rech := rec(h) ;  
    substit := {seq(nom(i) = tau(i,h), i = 0 .. 2+nbind(rech))} ;  
    vals :=solve({seq(subs(substit,subs(n=i,rech)),  
        i=1..2+nbind(rech))}) ;  
    subs(vals,rech)  
end
```

La procédure **rec** construit une première version de la récurrence  $R_h$  :

```
rec :=proc (h) local nom, i ;  
    option remember ;  
    nom := cat(u,h) ;  
    map(factor,coeff1(h)*nom(n)+  
        convert([seq((-1)^floor((i+1)/2)*decfac(n,i-1)*  
            poly(n,i,'c',floor(h/2)-i+1,h)*nom(n-i),i  
            = 1 .. floor(h,2)+1)], '+'))  
end
```

Par exemple,

$$\begin{aligned}\text{rec}(4) = & (n+3)(n+4)u_4(n) - (c_{10}n^2 + c_{11}n + c_{12})u_4(n-1) - (n-1) \\ & (c_{20}n + c_{21})u_4(n-2) + (n-1)(n-2)c_{30}u_4(n-3),\end{aligned}$$

où les  $c_{ij}$  sont des indéterminés.

La procédure **nbnd** calcule le nombre d'indéterminés dans la récurrence  $R'_h = \text{rec}(h)$ .

Le coefficient de  $u_h(n)$  dans la récurrence  $R_h$  est

$$\text{coeff1}(h) = [u_h(n)](R_h) := \prod_{i=1}^{\lfloor h/2 \rfloor} n + i(h - i)$$

Le coefficient de  $\text{decfac}(n, k) u_h(n - i)$  dans  $R'_h$  est le polynôme construit par la procédure

```
poly :=proc (var, indice, indet, degre, h) local j ;
    convert([seq(indet[indice,j]*
        var^(degre-j),j=0..degre)], '+')
end
```

C'est-à-dire

$$\text{poly}(n, i, c, l - i, h) = p_h(n) := \sum_{j=0}^{l-i} c_{ij} n^{l-i-j}$$

où  $l = \lfloor h/2 \rfloor + 1$ .

Finalement les fonctions  $\text{tau}(n, h)$  et  $\text{decfac}(n, k)$  sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \text{tau}(n, h) &= \tau_h(n) := \begin{cases} \left[ \frac{x^n}{n!} \right] (\mathbf{e}^{x+(1/2)x^2}) & \text{si } n \leq h, \\ \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ l(\lambda) \leq h}} f_\lambda & \text{sinon .} \end{cases} \\ \text{decfac}(n, k) &= (n-1)_k := \prod_{i=1}^k (n-i). \end{aligned}$$

où  $f_\lambda$  est le nombre de tableaux standards de forme  $\lambda$ ; on peut le calculer en utilisant la formule des équerres (voir chap. 1).

De façon semblable, on peut construire des procédures permettant le calcul effectif des récurrences associées aux couples de tableaux standards de hauteur bornée.

Les équations différentielles, de type exponentielle associées aux récurrences  $R_h$ , peuvent être obtenues en solutionnant un système d'équations linéaires homogènes (voir chap.3). On utilise les procédures de Gfun `rec*rec` et `rectodiffeq`:

```

eqdiffexp := proc(h) local reck, Reck ;
    reck := subs(cat(b, h) = a, recurrence(h)) ;
    Reck := map(factor,
        'rec*rec'(reck, a(n)-(n+1)*a(n+1), a(n))) ;
    subs(seq(_C[i] = 0, i = 0 .. floor(1/2*h)),
        equat(rectodiffeq(Reck, a(n), y(x)))) ;
    sort(map(factor, %), [seq(diff(y(x), '$' (x,
        floor(i/2)+1-i)), i=0..floor(i/2)), y(x)]) ;
end

```

### 1.2 Séries génératrices et $P$ -réurrences pour $\tau_h(n)$ et $\tau_h^{(2)}(n)$

Les séries génératrices  $y_h(x)$ , pour les tableaux standards de hauteur bornée par  $h$ , peuvent être obtenues comme suit :

```

y :=proc(h)
    if irem(h, 2) = 0 then simplifI(det(matrix(1/2*h, 1/2*h,
        (i,j)->I[abs(i-j)](x) + I[i+j-1](x))), 2*h)
    else exp(x)*simplifI(det(matrix(1/2*h - 1/2, 1/2*h-1/2,
        (i, j)->I[abs(i-j)](x) - I[i+j](x))), 2*h)
    fi
end

```

où `simplifI` est la procédure permettant d'écrire  $y = y_h(x)$  en termes de  $I_0(x)$  et  $I_1(x)$  (voir chap. 1).

```

simplifI=proc(expr, n)
local k, rep ;
rep := expr ;
for k from 0 to n - 2 do rep := subs(I[n-k](x) =
    I[n-k-2](x) - ((n-k-1)*I[n-k-1](x))/x,
    rep)
od ;
collect(rep, [I[0](x), I[1](x)], distributed) ;
sort(map(factor, %))

```

```
end
```

Pour vérifier le résultat du lemme (2.5.12), il suffit de calculer

```
for i from 6 to 12 do
```

```
    y[i](x)=y(i) ;
```

```
    Theta[i]=eqdiffexp(i) ;
```

```
    simplify(subs(y=
```

```
        subs(I[0]=BesselI(0,2*x),I[1]=BesselI(1,2*x),y(i)),
```

```
        eqdiffexp(i)))) ;od ;
```

On obtient les résultats suivants :

$$y_6(x) = -4 \frac{(4x-3) I_0^3}{x^4} - 4 \frac{(-3x+6+4x^2) I_0^2 I_1}{x^5} + 4 \frac{(3+4x^3-x^2) I_0 I_1^2}{x^6} + 4 \frac{(5x+1+4x^3-x^2) I_1^3}{x^6}$$

$$\Theta_6 = 7x^3 \frac{d^4}{dx^4} y + 28x^2 \frac{d^3}{dx^3} y - 10(4x^2 + 2x - 23)x \frac{d^2}{dx^2} y - 4(108x^2 + 61x - 135) \frac{dy}{dx} y \\ + 36(2x+5)(2x^2 - 3x - 3)y$$

$$\Theta_6(y_6(x)) = 0$$

$$y_7(x) = e^x \left( 120 \frac{I_0^3}{x^6} - 24 \frac{(4x^2+9) I_0^2 I_1}{x^7} - 72 \frac{(x-1)(x+1) I_0 I_1^2}{x^8} + 24 \frac{(4x^4+7x^2+1) I_1^3}{x^9} \right)$$

$$\Theta_7 = x^3 \frac{d^4}{dx^4} y - 2(2x-17)x^2 \frac{d^3}{dx^3} y - (34x^2 + 102x - 343)x \frac{d^2}{dx^2} y + (76x^3 - 450x^2 - 686x + 1001) \frac{dy}{dx} y \\ + 7(15x^3 + 74x^2 - 143x - 143)y$$

$$\Theta_7(y_7(x)) = 0$$

$$\begin{aligned}
y_8(x) = & 48 \frac{(16x^3 + 8x^2 + 51x - 12)I_0^4}{x^9} - 192 \frac{(8x^3 - 7x^2 + 24x - 9)I_0^3 I_1}{x^{10}} \\
& - 96 \frac{(16x^5 + 16x^4 + 27x^3 + 27x^2 - 21x + 18)I_0^2 I_1^2}{x^{11}} + 192 \frac{(8x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 2x^2 + 3)I_0 I_1^3}{x^{12}} \\
& + 48 \frac{(16x^6 + 24x^5 + 15x^4 + 52x^3 - 10x^2 + 26x + 3)I_1^4}{x^{12}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_8 = & x^4 \frac{d^5}{dx^5} y(x) + 60x^3 \frac{d^4}{dx^4} y(x) - 2(40x^2 + 20x - 619)x^2 \frac{d^3}{dx^3} y(x) - 4(608x^2 + 331x - 2567)x \frac{d^2}{dx^2} y(x) \\
& + 8(128x^4 + 128x^3 - 2480x^2 - 1527x + 3536) \frac{d}{dx} y(x) + 128(64x^3 + 72x^2 - 286x - 221)y(x)
\end{aligned}$$

$$\Theta_8(y_8(x))=0$$

$$\begin{aligned}
y_9(x) = & e^x \left( 576 \frac{(16x^4 + 37x^2 - 54)I_0^4}{x^{12}} - 576 \frac{(16x^4 - 35x^2 - 156)I_0^3 I_1}{x^{13}} - 576 \frac{(32x^6 + 94x^4 + 87x^2 + 144)I_0^2 I_1^2}{x^{14}} \right. \\
& \left. + 576 \frac{(16x^6 - 23x^4 - 79x^2 + 36)I_0 I_1^3}{x^{15}} + 576 \frac{(16x^8 + 61x^6 + 117x^4 + 94x^2 + 6)I_1^4}{x^{16}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_9 = & x^4 \frac{d^5}{dx^5} y - 5(x-14)x^3 \frac{d^4}{dx^4} y - (70x^2 + 280x - 1693)x^2 \frac{d^3}{dx^3} y + (230x^3 - 2492x^2 - 5079x + 16535)x \frac{d^2}{dx^2} y \\
& + (789x^4 + 5544x^3 - 24073x^2 - 33070x + 53865) \frac{d}{dx} y - 27(35x^4 - 274x^3 - 1017x^2 + 1995x + 1995)y
\end{aligned}$$

$$\Theta_9(y_9(x))=0$$

$$\begin{aligned}
y_{10}(x) = & 4608 \frac{(64x^6 - 128x^5 + 168x^4 - 681x^3 - 231x^2 - 828x + 90)I_0^5}{x^{16}} \\
& + 4608 \frac{(64x^7 - 128x^6 + 664x^5 - 93x^4 + 2055x^3 + 75x^2 + 2430x - 360)I_0^4 I_1}{x^{17}} \\
& - 2304 \frac{(256x^8 - 384x^7 + 544x^6 - 1508x^5 - 1419x^4 + 1200x^3 - 1860x^2 + 4680x - 1080)I_0^3 I_1^2}{x^{18}} \\
& - 2304 \frac{(256x^9 - 384x^8 + 2400x^7 + 92x^6 + 6107x^5 + 1956x^4 + 4740x^3 + 1860x^2 - 1440x + 720)I_0^2 I_1^3}{x^{19}} \\
& + 2304 \frac{(128x^{10} - 128x^9 + 240x^8 - 194x^7 - 815x^6 + 2308x^5 - 1281x^4 + 3450x^3 - 150x^2 + 180)I_0 I_1^4}{x^{20}} \\
& + 2304 \frac{(128x^{10} - 128x^9 + 1104x^8 + 262x^7 + 2307x^6 + 1579x^5 + 1219x^4 + 1668x^3 - 258x^2 + 462x + 36)I_1^5}{x^{20}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_{10} = & x^5 \frac{d^6}{dx^6} y + 110x^4 \frac{d^5}{dx^5} y - 2(70x^2 + 35x - 2269)x^3 \frac{d^4}{dx^4} y - 4(2268x^2 + 1211x - 21752)x^2 \frac{d^3}{dx^3} y \\
& + 4(1036x^4 + 1036x^3 - 48033x^2 - 27900x + 191477)x \frac{d^2}{dx^2} y \\
& + 8(14300x^4 + 15542x^3 - 185404x^2 - 121352x + 303875) \frac{d}{dx} y \\
& - 200(72x^5 + 108x^4 - 3262x^3 - 3987x^2 + 14960x + 12155)y
\end{aligned}$$

$$\Theta_{10}(y_{10}(x))=0$$

$$\begin{aligned}
y_{11}(x) = & e^x \left( -\frac{1935360}{x^{20}} \frac{(32x^6 + 177x^4 + 198x^2 - 72)I_0^5}{x^{20}} + \frac{1105920}{x^{21}} \frac{(16x^8 + 256x^6 + 825x^4 + 585x^2 - 495)I_0^4 I_1}{x^{21}} \right. \\
& + \frac{552960}{x^{22}} \frac{(192x^8 + 833x^6 + 495x^4 + 135x^2 + 1440)I_0^3 I_1^2}{x^{22}} \\
& - \frac{138240}{x^{23}} \frac{(256x^{10} + 3648x^8 + 10799x^6 + 9690x^4 + 1980x^2 + 3600)I_0^2 I_1^3}{x^{23}} \\
& - \frac{691200}{x^{24}} \frac{(64x^{10} + 190x^8 - 77x^6 + 114x^4 + 504x^2 - 144)I_0 I_1^4}{x^{24}} \\
& \left. + \frac{138240}{x^{25}} \frac{(128x^{12} + 1632x^{10} + 4557x^8 + 5482x^6 + 4158x^4 + 2052x^2 + 72)I_1^5}{x^{25}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_{11} = & x^5 \frac{d^6}{dx^6} y - (6x - 125)x^4 \frac{d^5}{dx^5} y - (125x^2 + 625x - 5873)x^3 \frac{d^4}{dx^4} y \\
& + 2(270x^3 - 4611x^2 - 11746x + 64252)x^2 \frac{d^3}{dx^3} y \\
& + (3319x^4 + 30166x^3 - 223422x^2 - 385512x + 1293125)x \frac{d^2}{dx^2} y \\
& - (7734x^5 - 104329x^4 - 493828x^3 + 1987124x^2 + 2586250x - 4697275) \frac{dy}{dx} \\
& - 11(945x^5 + 11343x^4 - 62023x^3 - 204012x^2 + 427025x + 427025)y
\end{aligned}$$

$$\Theta_{11}(y_{11}(x)) = 0$$

De la même façon, on peut vérifier le résultat du lemme (2.5.14) concernant les couples de tableaux standards de hauteur bornée. Pour ce faire, on utilise des procédures semblables aux cas précédents :

$$\begin{aligned}
Y_4 = & -4 \frac{I_0^4}{x^2} + 8 \frac{I_0^3 I_1}{x^3} - 8 \frac{I_0 I_1^3}{x^3} + 4 \frac{(2x^2 - 1)I_0^2 I_1^2}{x^4} - \frac{(2x - 1)(2x + 1)I_1^4}{x^4} \\
Y_5 = & -32 \frac{I_0^5}{x^4} + 56 \frac{I_0^4 I_1}{x^5} + 4 \frac{(16x^2 - 3)I_0^3 I_1^2}{x^6} - 16 \frac{(5x^2 + 1)I_0^2 I_1^3}{x^7} + 12 \frac{(2x^2 + 1)I_1^5}{x^7} \\
& - 4 \frac{(8x^4 - x^2 - 1)I_0 I_1^4}{x^8} \\
Y_6 = & -16 \frac{(4x - 3)(4x + 3)I_0^6}{x^8} - 576 \frac{I_0^5 I_1}{x^9} + 48 \frac{(16x^4 + 11x^2 + 18)I_0^4 I_1^2}{x^{10}} \\
& + 32 \frac{(13x^2 - 18)I_0^3 I_1^3}{x^{11}} + 96 \frac{(x^2 + 5)I_0 I_1^5}{x^{11}} - 48 \frac{(16x^6 + 27x^4 + 24x^2 - 3)I_0^2 I_1^4}{x^{12}} \\
& + 16 \frac{(4x^3 + x^2 + 5x - 1)(4x^3 - x^2 + 5x + 1)I_1^6}{x^{12}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_7 = & -960 \frac{(16x^2+21)I_0^7}{x^{12}} - 384 \frac{(32x^4+154x^2+207)I_0^6 I_1}{x^{13}} - 576 \frac{(48x^4-53x^2-201)I_0^5 I_1^2}{x^{14}} \\
& + 192 \frac{(192x^6+732x^4+617x^2-372)I_0^4 I_1^3}{x^{15}} + 192 \frac{(48x^6-541x^4-914x^2+63)I_0^3 I_1^4}{x^{16}} \\
& - 1152 \frac{(32x^8+98x^6+47x^4-65x^2-3)I_0^2 I_1^5}{x^{17}} + 192 \frac{(4x^4+7x^2+1)(16x^4+13x^2-11)I_1^7}{x^{17}} \\
& + 192 \frac{(16x^8+285x^6+363x^4-13x^2-3)I_0 I_1^6}{x^{18}}. \\
Y_8 = & 2304 \frac{(16x^3-8x^2+51x+12)(16x^3+8x^2+51x-12)I_0^8}{x^{18}} - 73728 \frac{(4x^2+9)(8x^4+35x^2-3)I_1 I_0^7}{x^{19}} \\
& - 9216 \frac{(256x^8+864x^6-323x^4-2691x^2+540)I_1^2 I_0^6}{x^{20}} + 36864 \frac{(192x^8+1096x^6+1301x^4-159x^2+180)I_1^3 I_0^5}{x^{21}} \\
& + 4608 \frac{(768x^{10}+1056x^8-6209x^6-11660x^4-645x^2-1080)I_1^4 I_0^4}{x^{22}} \\
& + 36864 \frac{(64x^{10}+280x^8+264x^6-7x^4-22x^2-39)I_1^7 I_0}{x^{23}} \\
& - 36864 \frac{(192x^{10}+952x^8+969x^6-107x^4+108x^2-54)I_1^5 I_0^3}{x^{23}} \\
& + 2304 \frac{(16x^6-24x^5+15x^4-52x^3-10x^2-26x+3)(16x^6+24x^5+15x^4+52x^3-10x^2+26x+3)I_1^8}{x^{24}} \\
& - 9216 \frac{(256x^{12}+32x^{10}-2751x^8-4309x^6-1451x^4-579x^2+36)I_1^6 I_0^2}{x^{24}}.
\end{aligned}$$

En substituant dans les séries génératrices ci-dessus  $x \leftarrow x^{1/2}$ , et en substituant les séries ainsi obtenues dans les équations différentielles correspondantes, on démontre la validité des récurrences pour  $\tau_h^{(2)}(n)$  pour  $4 \leq h \leq 8$  :

$$\begin{aligned}
(n+3)^2 (n+4)^2 \tau_4^{(2)}(n) = & (20n^4 + 142n^3 + 270n^2 + 64n - 96) \tau_4^{(2)}(n-1) \\
& - (n-1)^2 (64n^2 + 256n) \tau_4^{(2)}(n-2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(n+4)^2 (n+6)^2 \tau_5^{(2)}(n) = & (35n^4 + 322n^3 + 843n^2 + 400n - 375) \tau_5^{(2)}(n-1) \\
& - (n-1)^2 (259n^2 + 622n + 45) \tau_5^{(2)}(n-2) \\
& + 225(n-1)^2 (n-2)^2 \tau_5^{(2)}(n-3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(n+5)^2 (n+8)^2 (n+9)^2 \tau_6^{(2)}(n) = & (56n^6 + 1596n^5 + 17188n^4 + 85268n^3 + 182284n^2 + 89880n - 84672) \tau_6^{(2)}(n-1) \\
& - (n-1)^2 (784n^4 + 13488n^3 + 70556n^2 + 115788n + 15984) \tau_6^{(2)}(n-2) \\
& - (n-1)^2 (n-2)^2 (-2304n^2 - 24192n - 31104) \tau_6^{(2)}(n-3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(n+6)^2(n+10)^2(n+12)^2 \tau_7^{(2)}(n) = & \left( 84n^6 + 2940n^5 + 38958n^4 + 238440n^3 + 634756n^2 + 429858n - 343035 \right) \tau_7^{(2)}(n-1) \\
& - (n-1)^2 \left( 1974n^4 + 36336n^3 + 213240n^2 + 407840n + 82425 \right) \tau_7^{(2)}(n-2) \\
& + (n-1)^2(n-2)^2 \left( 12916n^2 + 85292n + 99750 \right) \tau_7^{(2)}(n-3) \\
& - 11025(n-1)^2(n-2)^2(n-3)^2 \tau_7^{(2)}(n-4).
\end{aligned}$$

## APPENDICE II

### 2.1 Espèces de Bessel

La procédure puisscarre permet de calculer, pour  $f(x)$  une série formelle, les premiers termes de la série  $((f))^n$  (voir chap. 4).

**puisscarre :=**

```

proc(s, n, x)
    local k, s0, n0, res, premier, reste, m;
    option remember;
    m := order(s);
    n0 := nops(s);
    if n0 = 2 then
        res := series(s^n, x, m)
    else
        res := 0;
        premier := op(1, s)*x^op(2, s);
        reste := series(s - premier, x, m);
        for k from 0 to n do
            res := series(res + binomial(n, k)^2*premier^k*
                puisscarre(reste, n - k, x), x, m)
        od
    fi
end

```

Pour  $g(x) = \sum_{k \geq 1} g_k x^k$  on a, par exemple, pour  $n = 2, 4$ ,

$$\begin{aligned}
\text{puisscarre}(g, 2, x) &= ((g(x)))^2 \\
&= g_1^2 x^2 + 4 g_1 g_2 x^3 + (g_2^2 + 4 g_1 g_3) x^4 \\
&\quad + (4 g_2 g_3 + 4 g_1 g_4) x^5 + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{puisscarre}(g, 4, x) &= ((g(x)))^4 \\
&= g_1^4 x^4 + 16 g_1^3 g_2 x^5 + (36 g_1^2 g_2^2 + 16 g_1^3 g_3) x^6 \\
&\quad + (16 g_1^3 g_4 + 144 g_1^2 g_2 g_3 + 16 g_1 g_2^3) x^7 \dots
\end{aligned}$$

La procédure subscarre calcule les premiers termes de la série  $f((g))$  où  $f$  et  $g$  sont des séries formelles (voir chap.4).

**subscarre** :=

```

proc(f, g, x)
local i, f0, res, m;
m := min(order(f), order(g));
f0 := series(f, x, m);
res := 0;
for i from 0 to m - 1 do
  res :=series(res + coeff(f0, x, i)
  *puisscarre(g, i, x), x, m)
od;
res
end

```

Par exemple, pour  $f(x) = \sum_{k \geq 0} f_k x^k$  et  $g(x) = \sum_{k \geq 0} g_k x^k$ ,

on peut calculer les premiers termes de la série  $f((g(x)))$  avec

```

for c from 0 to 5 do
  expand(coeff(subscarre(f,g,x),x,c));
od;

```

$$f_0$$

$$f_1 g_1$$

$$f_1 g_2 + f_2 g_1^2$$

$$f_1 g_3 + 4 f_2 g_1 g_2 + f_3 g_1^3$$

$$f_1 g_4 + f_2 g_2^2 + 4 f_2 g_1 g_3 + 9 f_3 g_1^2 g_2 + f_4 g_1^4$$

$$4 f_2 g_2 g_3 + 4 f_2 g_1 g_4 + f_1 g_5 + 9 f_3 g_1 g_2^2 + 9 f_3 g_1^2 g_3 + 16 f_4 g_1^3 g_2 + f_5 g_1^5$$

En comparaison, la substitution usuelle  $f(g(x))$  donne

```

for c from 0 to 5 do
    expand(coeff(Subst(f,g,x),x,c)) ;
od ;

```

$$f_0$$

$$f_1 g_1$$

$$f_1 g_2 + f_2 {g_1}^2$$

$$2 f_2 g_1 g_2 + f_1 g_3 + f_3 {g_1}^3$$

$${f_2}^2 + 2 f_2 g_1 g_3 + f_1 g_4 + 3 {f_3} {g_1}^2 g_2 + f_4 {g_1}^4$$

$$2 f_2 g_2 g_3 + 2 f_2 g_1 g_4 + f_1 g_5 + 3 {f_3} {g_1} {g_2}^2 + 3 {f_3} {g_1}^2 g_3 + 4 f_4 {g_1}^3 g_2 + f_5 {g_1}^5$$

La procédure suivante permet le calcul des premiers termes de  $A^\square((x))$ , la série génératrice associée aux couples d'arborescences isomorphes (voir chap. 4). On rappelle que cette série satisfait l'équation  $A^\square((x)) = X E((A^\square))$ . On a

```

ArboBessel := proc(k)
    A(k) - x*subscarre(series(E, x, k), A(k), x) ;
    series(%, x, k) ;
    resoudre(%, x) ;
    subs(%, A(k))
end

```

où

$$E = E((x)) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!^2} \quad \text{et} \quad A(k) = \sum_{n=1}^k \frac{a_n x^n}{n!^2}.$$

La procédure **resoudre** permet de calculer les indéterminés  $a_i$

```

resoudre :=proc(y, x)
    local A, i ;
    solve({seq(coeff(y, x, i), i = 0 .. order(y) - 1)})
end

```

Les premiers termes de la série de Bessel associée à l'espèce des couples d'arborescences isomorphes sont

$$\begin{aligned}
 A^{\square}((x)) = & x + x^2 + \frac{5}{4}x^3 + \frac{41}{18}x^4 + \frac{2321}{576}x^5 + \frac{58663}{7200}x^6 + \frac{8704837}{518400}x^7 + \frac{2395763}{66150}x^8 + \frac{127623477697}{1625702400}x^9 \\
 & + \frac{11625412865099}{65840947200}x^{10} + \frac{5241157606828901}{13168189440000}x^{11} + \frac{13051947711658763}{14226347520000}x^{12} \\
 & + \frac{97265742783311580221}{45888506560512000}x^{13} + \frac{48243332051938308153073}{9693947010908160000}x^{14} + \frac{8080416576462872780006647}{690914041504727040000}x^{15} \\
 & + \frac{11904499291416875756068303069}{427503063181049856000000}x^{16} + \frac{1934926224052350723084458339311}{29184209113159670169600000}x^{17} \\
 & + \frac{10089314451851514882910832302029683}{6325677325277358509260800000}x^{18} + \frac{1430185444000597004850668135617807343}{3726399006163389376364544000000}x^{19} \\
 & + \frac{16884410410250811380844168287134415791}{18134228496905415702872064000000}x^{20} + \dots
 \end{aligned}$$

De plus, soit  $\alpha_n^{\square}$ , le nombre de couples d'arborescences isomorphes sur  $n$  points.  
Les premiers termes de la suite  $(\alpha_j^{\square})_{j \geq 1}$  sont :

$$\begin{aligned}
 & 1, 4, 45, 1312, 58025, 4223736, 426537013, 58878271488, 10337501693457, \\
 & 2325082573019800, 634180070426297021, 210501812693632529664, \\
 & 82189552651898285286745, 37822772328719633592009232, 19999031026745610130516451325, \\
 & 12190207274410880774213942342656, 8387905181266940384571126900913185, \\
 & 6537875764799781644126219331715234584, 5679266398126370706262003166538312959053, \\
 & 5511071557905864834707536528920673314182400
 \end{aligned}$$

Pour l'espèce des couples d'arbres isomorphes, on a l'identité combinatoire

$$a^{\square} = A^{\square} + E_2((A)) - (A^{\square})^2.$$

On peut donc calculer, à l'aide des procédures précédentes, les premiers termes de la série de Bessel associée à l'espèce  $a^{\square}$ . On a

```
arbreBessel := i->series(Arbo(i) + subscarre(x^2/4, ArboBessel(i), x)
                           -ArboBessel(i)^2), x, i) :
```

d'où

$$\begin{aligned}
 a^{\square}((x)) = & x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + \frac{5}{18} x^4 + \frac{289}{576} x^5 + \frac{4813}{7200} x^6 + \frac{916201}{518400} x^7 + \frac{5968499}{2540160} x^8 + \frac{9968547457}{1625702400} x^9 \\
 & + \frac{666408456293}{65840947200} x^{10} + \frac{350202316307401}{13168189440000} x^{11} + \frac{35682809765060761}{796675461120000} x^{12} \\
 & + \frac{5592443895648221357}{45888506560512000} x^{13} + \frac{4207074475337899018081}{19387894021816320000} x^{14} \\
 & + \frac{4456256112489835639531001}{7600054456551997440000} x^{15} + \frac{21200758889355043039422427}{19431957417320448000000} x^{16} \\
 & + \frac{714404487094563746239293607}{241191810852559257600000} x^{17} + \frac{359276090665525577880628387047677}{63256773252773585092608000000} x^{18} \\
 & + \frac{637298960424616484489355091364702089}{40990389067797283140009984000000} x^{19} \\
 & + \frac{224614125708212522024784672690587557717}{7398765226737409606771802112000000} x^{20} + \dots
 \end{aligned}$$

De plus, soit  $a_n^{\square}$ , le nombre de couples d'arbres isomorphes sur  $n$  points. Les premiers termes de la suite  $(a_j^{\square})_{j \geq 1}$  sont

$$\begin{aligned}
 & 1, 1, 9, 160, 7225, 346536, 44893849, 3819839360, 807452344017, 133281691258600, \\
 & 42374480273195521, 10276649212337499168, 4725615091822747046665, \\
 & 1649173194332456415087752, 1002657625310213018894475225, \\
 & 477610696259390409592108435456, 374730157638146994633627872147745, \\
 & 232810906751260574466647194806894696, 230064924713286550900657187982657454129, \\
 & 179691300566570017619827738152470046173600.
 \end{aligned}$$

## APPENDICE III

### 3.1 Matrices de coefficients

La matrice des coefficients du système  $\sum_{i=0}^{n+k+1} Q_i^K(x) D^{(i)}(I_0^k I_1^n) =,0$  pour  $K = 5, k = 1$  et  $n = 1$  est

On peut trouver des équations différentielles explicites pour toutes expressions s'exprimant en termes des séries de Bessel combinatoires, car on peut toujours déterminer, au préalable, l'ordre de ces équations différentielles (voir lemme (1.4.12)).

On peut vérifier que les matrices apparaissant sur la diagonale de  $C_h^{(K)}$ , pour  $h \leq 12$  sont de rang  $\leq 2$ . Par exemple pour  $h = 4$ , on a

$$A_{i,1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 20 & -120 \\ 2 & -6 & 24 & -120 \\ -2 & 6 & -24 & 120 \end{pmatrix}.$$

$$A_{i,1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -12 & 120 \\ 0 & 1 & -8 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour  $h = 8$ , on trouve

$$A_{i,1} = \begin{pmatrix} 144 & -2304 & 39168 & -705024 & 13395456 & -267909120 \\ 576 & -8640 & 138240 & -2350080 & 42301440 & -803727360 \\ -1728 & 25920 & -414720 & 7050240 & -126904320 & 2411182080 \\ 1728 & -25920 & 414720 & -7050240 & 126904320 & -2411182080 \\ -576 & 8640 & -138240 & 2350080 & -42301440 & 803727360 \end{pmatrix}$$

$$A_{i,1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -240 & 8160 & -220320 & 5581440 \\ 0 & 1 & -32 & 816 & -19584 & 465120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Conjecture.** Les matrices apparaissant sur la diagonale de  $C_h^{(K)}$  pour  $K$  et  $h$  quelconques seront de rang  $\leq 2$ .  $\square$

Mentionnons également qu'on peut obtenir des formules pour les coefficients de dérivation apparaissant dans (1.12). Avec les même notations que pour le lemme (1.1.3) et si on pose  $d_{j,1-j} = d_j$ . Par exemple,

$$d_0 = (-1)^i (n+m)^{*}*$$

$$d_{i-1} = 4i (n)_{i-1} ((2^{i-2}(n+m) - 2^{n-2}(n+1))$$

où  $n + k = h$  un nombre entier positif et où

$$\begin{aligned} a^{**} &= a(a+1)\cdots(a+b-1), \\ (a)_b &= (a(a-1)\cdots(a-b+1)). \end{aligned}**$$

On peut démontrer ces formules à partir de la règle de dérivation

$$D^{(i)} \left( \frac{I_0^k I_1^n}{x^m} \right) = \sum_{i_1+i_2+i_3=i} \binom{i}{i_1, i_2, i_3} (I_0^k)^{(i_1)} (I_1^n)^{(i_2)} (x^{-m})^{(i_3)}.$$

## RÉFÉRENCES

- [1] M. Abramowitz et I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover publications, New York, (1972) 355-436.
- [2] P. Auger, *Analyse d'équations combinatoires en théorie des espèces*, Publications du LaCIM, UQAM, (2000).
- [3] E. Barcucci, A. Del Lungo, J.M. Fedou et R. Pinzani, *Steep Polyominoes,  $q$ -Motzkin Numbers and  $q$ -Bessel Functions*, rapport Labri-Université Bordeaux I (France), 111196, (1996).
- [4] F. Bergeron, M. Bousquet-Mélou et S. Dulucq, *Standard paths in the composition poset*, Ann. Sci. Québec 19, (1995), 139-151.
- [5] F. Bergeron et F. Gascon, *Counting Young Tableaux of Bounded Height*, Elec. Jour. of Integer Sequences, vol 3, 2000, 00.1.7.
- [6] F. Bergeron, L. Favreau et D. Krob, *Conjectures on the Enumeration of Tableaux of bounded height*, Discrete Math, 139 (1995), 257-285.
- [7] F. Bergeron, G. Labelle et P. Leroux, *Combinatorial species and tree-like structures*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Vol 67, Cambridge Univ. Press, (1997).
- [8] Y. Chiricota, *Structures combinatoires et calcul symbolique*, Publications du LaCIM, UQAM, 13, (1993).
- [9] F. Chyzak, *Fonctions holonomes en calcul formel*, Thèse de doctorat, École polytechnique, Paris, (1998).
- [10] M. Desainte-Catherine et G. Viennot, *Enumeration of Certain Young Tableaux with bounded Height*, Colloque de Comb. Enum. UQAM, 1-8613, (1985).
- [11] S. Dulucq et J.G. Penaud, *Interprétation bijective d'une récurrence des nombres de Motzkin*, Colloque LaCIM 2000, (2000).
- [12] L. Favreau, *Combinatoire des tableaux oscillants et des polynômes de Bessel*, thèse Ph. D., Université de Bordeaux I, (1991).

- [13] J.M. Fédou, *Enumeration of skew Ferrers Diagrams and Bessel Functions*, J. of Statistical Planning and Inference, 13, (1993), 107-123.
- [14] J.M. Fédou, *Somme de carré de multinomiaux*, manuscrit, (1992).
- [15] J.M. Fédou et N. Rouillon, *Polyominos et  $q$ -analogues des fonctions de Bessel, une preuve combinatoire*, Actes du 7-ième Colloque Séries Formelles et Comb. Algébrique, Univ. de Marne-la-Vallé, (1995).
- [16] A.M. Garsia and M.Haiman, *A Remarkable  $q, t$ -Catalan Sequence and  $q$ -Lagrange Inversion*, Jour. of Alg. Comb. 5, (1996), 191-244.
- [17] I.M. Gessel, *Enumerative Applications of Symmetric Functions*, Publ. I.R.M.A. Strasbourg, Actes 17<sup>e</sup> Séminaire Lotharingien, 5-21, (1987).
- [18] I.M. Gessel, *Symmetric Functions and P-recursiveness*, J. Comb. Th. Series A, 53, (1990), 257-285.
- [19] I.M. Gessel, B. Sagan et Y. Yeh, *Enumeration of Trees by Inversion*, Jour. of graph theory, 19, (1995), 435-459.
- [20] I.M. Gessel, J. Weinstein et H.S. Wilf, *Lattice Walks in  $\mathbb{Z}^d$  and Permutations with no Long Ascending Subsequences*, Elec. J. of Comb. 5, #R2, (1998).
- [21] B. Gordon, *Notes on Plane Partitions*, J. Comb. Th. 11 (1971), 157-168.
- [22] B. Gordon and L. Houten, *Notes on plane partitions, II* Jour. Comb. Theor. 4, (1968), 81-99.
- [23] I.P. Goulden, *Exact values for degree sums over strips of Young diagrams*, Research Report, Corr 88-20, Faculty of Math. Univ. of Waterloo, (1988).
- [24] D. Gouyou-Beauchamps, *Codages par des mots et des chemins : problèmes combinatoires et algorithmes*, thèse Ph. D., Université de Bordeaux I, (1985).
- [25] D. Gouyou-Beauchamps, *Standard Young Tableau of Height 4 and 5*, European J. Comb. 10, (1989), 62-82.
- [26] A.J. Guttmann et T. Prellberg, *Staircase polygons, Elliptic integrals, Heun functions and Lattice Green functins*, manuscrit, (1992).

- [27] C. Krattenthaler, *Advanced Determinant Calculus*, Séminaire Lotharingien Comb. 42, B42q, 67 pp (1999).
- [28] P. Leroux et B. Miloudi, *Généralisations de la formule d'Otter*, Annales des sciences du Québec, 16, 1992, 53-80.
- [29] L. Lipshitz, *D-finite Power Series* Jour. of Alg. 122, 353-373, (1989).
- [30] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Clarendon press, Oxford, (1979).
- [31] P. A. MacMahon, *Combinatory Analysis*, Chelsea, (1960).
- [32] A. Nikiforov et V. Ouvarov, *Fonctions spéciales de la physique mathématique*, Édition Mir, Moscou, (1983).
- [33] M. Petkovsek, H.S. Wilf et D. Zeilberger, *A = B*, Lib. of Cong. Cataloging-in-Publication Data, (1996).
- [34] A. Regev, *Asymptotic values for Degree of Young Diagrams Associated with Strips*, A. Math. 41 (1982).
- [35] A. Rogers, *Ascending Sequences in Permutations*, Discrete Math. 22 (1978), 35-40.
- [36] B. Sagan, *The Symmetric group* Wadsworth, (1991).
- [37] B. Salvy and P. Zimmermann, *Gfun : A package for the Manipulation of Generating and Holomic Functions in one Variable*, ACM Trans on Math. Software, 20, (1994).
- [38] C. Schensted, *Longest Increasing and Decreasing Subsequences*, Canad. J. Math. 13 (1961), 179-191.
- [39] R.P. Stanley, *Differentiably Finite Power Series*, European J. Comb. (1980), 175-188.
- [40] R.P. Stanley, *Parking Functions and Noncrossing Partitions*, Elec. Jour. of Comb. 4 no 2, (1997).
- [41] J. R. Stembridge, *Nonintersecting Paths, Pfaffians and Plane Partitions*, Adv. in Math. #83, (1990), 96-131.

- [42] H.S. Wilf, *Ascending Subsequences of Permutations and the Shapes of Tableaux*, J. Comb. Th. Series A, (1992), 155-157.
- [43] D, Zeilberger, *A holomic System Approach to Special Functions*, J. Comput. and App. Math. 32, (1990).