FOGALMAK

1. Relációk

Tulajdonságok

• **reflexív**: ha 𝑥𝑅𝑥 minden 𝑥 ∈ 𝐴 esetén,

• **irreflexív**: ha 𝑥𝑅𝑦-ból következik, hogy 𝑥 ≠ 𝑦,

• **szimmetrikus**: ha 𝑥𝑅𝑦-ból következik, hogy y𝑅𝑥 minden 𝑥, 𝑦 ∈ 𝐴 esetén,

• **aszimmetrikus** : ha 𝑥𝑅𝑦-ból következik, hogy y𝑅𝑥 ( azaz 𝑦, 𝑥 ∉ 𝑅 ) minden 𝑥, 𝑦 ∈ 𝐴 esetén,

• **antiszimmetrikus** : ha 𝑥𝑅𝑦 és y𝑅𝑥-ből következik, hogy 𝑥 = 𝑦,

• **tranzitív**: ha 𝑥𝑅𝑦 és y𝑅𝑧-ből következik, hogy 𝑥𝑅𝑧 minden 𝑥, 𝑦, 𝑧 ∈ 𝐴 esetén,

• **teljes**: ha 𝑥𝑅𝑦 és y𝑅𝑥 közül legalább az egyik fennáll minden 𝑥, 𝑦 ∈ 𝐴 esetén.

Kategóriák

• félig(**parciális)rendezés**: ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív;

• szigorú **féligrendezésa**: ha irreflexív, aszimmetrikus és tranzitív;

• (teljes) rendezés: ha féligrendezés és teljes;

• **ekvivalencia**: ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív

Tétel

Az 𝑅 ⊆ 𝐴 × 𝐴 ekvivalencia-reláció osztályozást indukál az 𝐴 halmazon.

Osztályozás: 𝐴 diszjunkt (ekvivalencia-)osztályokra bomlik.

2. Függvények

Azt mondjuk, hogy 𝑓 egy (totális) függvény, ha

1. minden 𝑥 ∈ 𝐴 esetén létezik 𝑦 ∈ 𝐵, amelyikre 𝑥𝑓𝑦;

2. minden 𝑥 ∈ 𝐴 és 𝑦1, 𝑦2 ∈ 𝐵 esetén, ha 𝑥𝑓𝑦1 és 𝑥𝑓𝑦2, akkor 𝑦1 = 𝑦2.

Azt mondjuk, hogy 𝑓 egy parciális függvény, ha

1. minden 𝑥 ∈ 𝐴 és 𝑦1, 𝑦2 ∈ 𝐵 esetén, ha 𝑥𝑓𝑦1 és 𝑥𝑓𝑦2, akkor 𝑦1 = 𝑦2.

Tulajdonságok

injektív, ha minden 𝑥1, 𝑥2 ∈ 𝐴 esetén, ha 𝑓 𝑥1 = 𝑓(𝑥2), akkor 𝑥1 = 𝑥2.

(különböző elemek képe különböző)

szürjektív, ha minden 𝑦 ∈ 𝐵 esetén létezik a 𝑥 ∈ 𝐴, amelyikre 𝑓 𝑥 = 𝑦.

(minden elem képpé válik)

bijektív, ha injektív és szürjektív.

leképzése: xfy A=Z, B=Z

Boole-függvények

Egy 𝑓: {0,1}𝑛 → {0,1} függvényt 𝑛-változós Boole-függvénynek nevezünk.

többváltozós fv

több bemenete is lehet

3. Formális nyelvek

Legyen 𝐴 egy véges, nem üres halmaz (ábécé), elemei betűk (jelek, szimbólumok, karakterek,…).

* (**Véges) szó**: az 𝐴 elemeiből képzett (véges hosszúságú) sorozat.
* **Üres szó**: 𝜆 az a szó, amelyik egyetlen betűt sem tartalmaz.
* **Összefűzés** (konkatenáció): ha 𝑤 = 𝑤1 … 𝑤𝑛 , 𝑢 = 𝑢1 … 𝑢𝑚 akkor 𝑤 ⋅ 𝑢 = 𝑤𝑢 = 𝑤1 … 𝑤𝑛𝑢1 … 𝑢𝑚 .
* 𝐴∗ : az 𝐴 ábécé fölötti véges szavak halmaza (a konkatenáció lezárása).
* 𝐴+ = 𝐴∗ ∖ {𝜆}
* (Formális) nyelv: 𝐿 ⊆ 𝐴∗

4. Nulladrendű logika, Ítéletlogika

Egy olyan formális nyelv, melynek szavai bizonyos szabályos állítások.

A nyelvhez (mint általában) értelmezést fogunk rendelni (igazságértékelés).

Elemei (szavai): ítéletek (állítások);

Hétköznapi megfogalmazás: olyan értelmes, zárt kijelentő mondatok, amelyek egyértelműen igazak vagy hamisak.

- Egy ítélet nem lehet egyszerre igaz és hamis. (ellentmondástalanság elve)

- Nincs olyan ítélet, amely se nem igaz, se nem hamis. (kizárt harmadik elve)

- Ha egy ítélet nem hamis (nem igaz, hogy nem igaz), akkor az az ítélet igaz. (kettős tagadás elve)

Legyen 𝑉 szimbólumok egy (véges vagy megszámlálhatóan végtelen) halmaza.

V:logikai változó

Op: logikai konstans

¬ - negáció (nem)

∧ - konjukcióó (és)

∨ - diszjunkció (vagy)

⊃ - implikáció

ℒ0 𝑂𝑝, 𝑉 a legszűkebb olyan halmaz, amelyre

1. 𝑉 ⊆ ℒ0 𝑂𝑝, 𝑉

2. Ha 𝑃,𝑄 ∈ ℒ0 𝑂𝑝, 𝑉 , akkor

a) ¬𝑃 ∈ ℒ0 𝑂𝑝, 𝑉)

b) 𝑃 ∧ 𝑄 ∈ ℒ0 𝑂𝑝, 𝑉)

c) 𝑃 ∨ 𝑄 ∈ ℒ0 𝑂𝑝, 𝑉)

d) 𝑃 ⊃ 𝑄 ∈ ℒ0 𝑂𝑝, V)

ℒ0 𝑂𝑝, 𝑉 elemeit (szavait) (ítéletlogikai) formuláknak, 𝑉 elemeit atomi formuláknak (prímformuláknak) nevezzük.

ℒ0 𝑂𝑝, 𝑉 \𝑉: összetett formulák.

Tétel (Szerkezeti indukció elve)

Legyen 𝑇 egy tulajdonság, amely egy 𝑃 ∈ ℒ0 𝑂𝑝, 𝑉 -re vagy teljesül, vagy nem.

Ha

1. 𝑇 teljesül minden 𝑃 ∈ 𝑉-re és

2. amennyiben 𝑃,𝑄 ∈ ℒ0 𝑂𝑝, 𝑉 és 𝑇 teljesül 𝑃,𝑄-ra abból következik, hogy teljesül

¬𝑃, 𝑃 ∧ 𝑄 , 𝑃 ∨ 𝑄 és 𝑃 ⊃ 𝑄 -re is, akkor 𝑇 teljesül minden 𝑃 ∈ ℒ0 𝑂𝑝, 𝑉 -re.

Közvetlen részformula

1. Ha 𝐴 ∈ 𝑉, akkor nincs közvetlen részformulája;

2. ¬𝑃 egyetlen közvetlen részformulája 𝑃;

3. az 𝑃 ∧ 𝑄 , 𝑃 ∨ 𝑄 és 𝑃 ⊃ 𝑄 formulák közvetlen részformulái az 𝑃 és 𝑄 formulák.

Egy formula elsődleges (fő-) logikai összekötő jele a közvetlen részformulái közötti jel. (Ha létezik.)

Ha 𝑄 közvetlen részformulája 𝑃-nek, akkor 𝑃-t a 𝑄 szülőformulájának nevezzük.

Zárójelelhagyási konvenció

precedencia: ¬ ≻ ∧,∨ ≻ ⊃

1. Egy összetett formula külső zárójele elhagyható.

2. Egy részformula zárójele elhagyható, ha elsődleges művelete jele előrébb szerepel a precedencia-sorban, mint a szülőformulájának logikai összekötő jele.

3. Az ∧ (∨, ¬) logikai összekötő jelek által meghatározott részformula zárójele elhagyható, ha az őt közvetlenül magában foglaló formula műveleti jele ugyanaz. (Csoportosítás.)

Szerkezetfa

A 𝑃 formula szerkezeti fáján egy olyan véges rendezett fát értünk, amelynek csúcsai 𝑅𝐹 𝑃 formulái:

1. gyökere a 𝑃 formula;

2. (¬𝑄) alakú csúcsának egyetlen gyermeke a 𝑄 formula;

3. a 𝑄 ∧ 𝑅 , 𝑄 ∨ 𝑅 és 𝑄 ⊃ 𝑅 alakú csúcsainak két gyermekét (balés jobboldali) a 𝑄 és 𝑅 formulák alkotják;

4. levelei atomi formulák

Egy formula mélysége a hozzá tartozó szerkezeti fa mélysége (leghosszabb út).

Egy formula összetettsége a hozzá tartozó szerkezeti fa azon csúcsainak száma, amelyek nem levélelemek.

Igazságérték

Azt mondjuk, hogy ℐ modellje a Γ formulahalmaznak, ha minden 𝑃 ∈ Γ esetén |𝑃| ℐ = 1.

Azt mondjuk, hogy Γ

1. kielégíthető: ha létezik modellje. (Van olyan interpretációja ℒ0 𝑂𝑝, 𝑉 -nek, amelyben Γ minden formulája igaz.)

2. kielégíthetetlen: ha nem létezik modellje (≈ ellentmondásos).

𝑃 ∈ ℒ0 𝑂𝑝, 𝑉 logikai törvény, ha ℒ0 𝑂𝑝, 𝑉 minden interpretációjában igaz.

Formula igazságértéke a szerkezettől függ

ha atomi formula: igazságértéke=interpetáció

ha összetett formula:

* ellentét: ¬P
* P ∧ Q alakú: kisebbik
* P ∨ Q alakú: nagyobbik
* P ⊃ Q alakú: egy esetben hamis – 1 → 0

Néhány fontosabb ekvivalencia:

|  |  |
| --- | --- |
| Kettős tagadás: | ¬¬𝑃 ⇔ 𝑃 |
| Implikáció és diszjunkció: | 𝑃 ⊃ 𝑄 ⇔ ¬𝑃 ∨ 𝑄 |
| de Morgan-azonosságok: | 𝑃 ∨ 𝑄 ⇔ ¬(¬𝑃 ∧ ¬𝑄)  𝑃 ∧ 𝑄 ⇔ ¬(¬𝑃 ∨ ¬𝑄) |
| (Következménye): | 𝑃 ⊃ 𝑄 ⇔ ¬ 𝑃 ∧ ¬𝑄  𝑃 ⊃ 𝑄 ⇔ ¬𝑄 ⊃ ¬𝑃 |
| Disztributivitás: | 𝑃 ∧ 𝑄 ∨ 𝑅 ⇔ 𝑃 ∧ 𝑄 ∨ 𝑃 ∧ R)  𝑃 ∨ 𝑄 ∧ 𝑅 ⇔ 𝑃 ∨ 𝑄 ∧ 𝑃 ∨ R) |

Ha egy 𝑃 formulában az egyik részformulát egy vele ekvivalens formulával helyettesítjük, a 𝑃-vel ekvivalens formulát kapunk.

Boole-föggvény tulajdonság

1. **monotonítás**:ha valamelyik változóját növeljük, a fv értéke nem csökken (szig növekedés)

* ∧,∨ - monoton
* implikáció: A ⊃ B fv értéke lecsökken → nincs monotonítási tulajdonság

1. **számláló függvény** (negáció) : egy adott változó értékének megváltoztatásával nem befolyásolja a fv értékét vagy ha igen akkor teljes mértékben

* ∧,∨ nem számláló
* ⊃ nem számláló
* ¬ számláló fv

1. **önduális** (negáció): adott felállásban minden változót megváltoztatunk => fv értéke is megváltozik

* ¬ önduális
* ∧ nem önduális
* xor nem önduális
* nandnem önduális

1. **igazságőrző**: minden változó 1 → igaz

* ¬,∧,∨,⊃ mind ilyen

1. **hazugságőrző**: minden változó 0 → hamis

* ∧,∨ hazugságőrző

Post’s

Egy ilyen F funkc. teljes ha minden tulajdonság esetén van legalább egy fv ami nem rendelkezik ezzel a tulajdonságga, nem részhalmaza egyiknek se (5.)

¬, ∧ - teljes

¬, xor - teljes, ha minden tulajdonság esetén

nand – nem rendelkezik 5-ösből, nem részhalmaza egyiknek se

Literár

Legyen ℒ0 𝑂𝑝, 𝑉 -ben 𝐴 ∈ 𝑉. Ekkor az 𝐴 és ¬𝐴 formulákat literálnak nevezzük.

* elemi konjukció: 𝐴1 ∧ 𝐴2 ∧ ⋯ ∧ 𝐴n
* elemi diszjunkció: 𝐴1 ∨ 𝐴2 ∨ ⋯ ∨ 𝐴n

Egy formula konjunktív normálalakban van (KNF), ha 𝐷1 ∧ 𝐷2 ∧ ⋯ ∧ 𝐷𝑘 alakú, ahol 𝐷𝑖  egy elemi diszjunkció minden 𝑖 = 1, … , 𝑘 esetén.

Egy formula diszjunktív normálalakban van (DNF), ha 𝐾1 ∨ 𝐾2 ∨ ⋯ ∨ 𝐾𝑘 alakú, ahol 𝐾𝑖 egy elemi konjunkció minden 𝑖 = 1, … , 𝑘 esetén.