Relációk

Definíció: Legyen 𝐴 egy halmaz. Az 𝑅 ⊆ 𝐴 × 𝐴 halmazt az 𝐴 halmaz elemei közötti (bináris) relációnak nevezzük.

Legyen 𝑥, 𝑦, 𝑧 ∈ 𝐴, 𝑅 ⊆ 𝐴 × 𝐴.

Azt mondjuk, hogy az 𝑅 reláció

• reflexív: ha 𝑥𝑅𝑥 minden 𝑥 ∈ 𝐴 esetén,

• irreflexív: ha 𝑥𝑅𝑦-ból következik, hogy 𝑥 ≠ 𝑦,

• szimmetrikus: ha 𝑥𝑅𝑦-ból következik, hogy y𝑅𝑥 minden 𝑥, 𝑦 ∈ 𝐴 esetén,

• aszimmetrikus : ha 𝑥𝑅𝑦-ból következik, hogy y𝑅𝑥 ( azaz 𝑦, 𝑥 ∉ 𝑅 ) minden 𝑥, 𝑦 ∈ 𝐴 esetén,

• antiszimmetrikus : ha 𝑥𝑅𝑦 és y𝑅𝑥-ből következik, hogy 𝑥 = 𝑦,

• tranzitív: ha 𝑥𝑅𝑦 és y𝑅𝑧-ből következik, hogy 𝑥𝑅𝑧 minden 𝑥, 𝑦, 𝑧 ∈ 𝐴 esetén,

• teljes: ha 𝑥𝑅𝑦 és y𝑅𝑥 közül legalább az egyik fennáll minden 𝑥, 𝑦 ∈ 𝐴 esetén.

Legyen 𝑅 ⊆ 𝐴 × 𝐴.

Azt mondjuk, hogy az 𝑅 reláció

• félig rendezés: ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív;

• szigorú féligrendezésa: ha irreflexív, aszimmetrikus és tranzitív;

• (teljes) rendezés: ha féligrendezés és teljes;

• ekvivalencia: ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív;

Függvények

Definíció: Legyen 𝑓 ⊆ 𝐴 × 𝐵 egy reláció.

Azt mondjuk, hogy 𝑓 egy (totális) függvény, ha

1. minden 𝑥 ∈ 𝐴 esetén létezik 𝑦 ∈ 𝐵, amelyikre 𝑥𝑓𝑦;

2. minden 𝑥 ∈ 𝐴 és 𝑦1, 𝑦2 ∈ 𝐵 esetén, ha 𝑥𝑓𝑦1 és 𝑥𝑓𝑦2, akkor 𝑦1 = 𝑦2.

Definíció:

Legyen 𝑓 ⊆ 𝐴 × 𝐵.

Azt mondjuk, hogy 𝑓 egy parciális függvény, ha

1. minden 𝑥 ∈ 𝐴 és 𝑦1, 𝑦2 ∈ 𝐵 esetén, ha 𝑥𝑓𝑦1 és 𝑥𝑓𝑦2, akkor 𝑦1 = 𝑦2

Definíció (tulajdonságok)

Legyen 𝑓: 𝐴 → 𝐵.

Azt mondjuk, hogy 𝑓 injektív, ha

minden 𝑥1, 𝑥2 ∈ 𝐴 esetén, ha 𝑓 𝑥1 = 𝑓(𝑥2), akkor 𝑥1 = 𝑥2.

Azt mondjuk, hogy 𝑓 szürjektív, ha

minden 𝑦 ∈ 𝐵 esetén létezik a 𝑥 ∈ 𝐴, amelyikre 𝑓 𝑥 = 𝑦.

Azt mondjuk, hogy 𝑓 bijektív, ha injektív és szürjektív.

Boole-függvények Definíció

Egy 𝑓: {0,1}n → 0,1 függvényt 𝑛-változós Boole-függvénynek nevezünk.

Definíció (nulladrendű logikai nyelv, predikátumkalkulus)

Legyen 𝑉 szimbólumok egy (véges vagy megszámlálhatóan végtelen) halmaza

𝑂𝑝 = {¬,∧,∨, ⊃}

ℒ0 𝑂𝑝, 𝑉 a legszűkebb olyan halmaz, amelyre

1. 𝑉 ⊆ ℒ0 (𝑂𝑝, 𝑉)

2. Ha 𝑃,𝑄 ∈ ℒ0 (𝑂𝑝, 𝑉) , akkor

a) (¬𝑃) ∈ ℒ0 (𝑂𝑝, 𝑉)

b) (𝑃 ∧ 𝑄) ∈ ℒ0 (𝑂𝑝, 𝑉)

c) (𝑃 ∨ 𝑄) ∈ ℒ0 (𝑂𝑝, 𝑉)

d) (𝑃 ⊃ 𝑄) ∈ ℒ0 (𝑂𝑝, 𝑉)

ℒ0 𝑂𝑝, 𝑉 elemeit (szavait) (ítéletlogikai) formuláknak, 𝑉 elemeit atomi formuláknak (prímformuláknak) nevezzük.

Tétel (Szerkezeti indukció elve)

Legyen 𝑇 egy tulajdonság, amely egy 𝑃 ∈ ℒ0 (𝑂𝑝, 𝑉) -re vagy teljesül, vagy nem.

Ha

1. 𝑇 teljesül minden 𝑃 ∈ 𝑉-re és

2. amennyiben 𝑃,𝑄 ∈ ℒ0 (𝑂𝑝, 𝑉) és 𝑇 teljesül 𝑃,𝑄-ra abból következik, hogy teljesül (¬𝑃) , (𝑃 ∧ 𝑄) , (𝑃 ∨ 𝑄) és (𝑃 ⊃ 𝑄) -re is, akkor 𝑇 teljesül minden 𝑃 ∈ ℒ0 (𝑂𝑝, 𝑉) -re

Definíció (közvetlen részformula)

1. Ha 𝐴 ∈ 𝑉, akkor nincs közvetlen részformulája;

2. (¬𝑃) egyetlen közvetlen részformulája 𝑃;

3. az (𝑃 ∧ 𝑄) , (𝑃 ∨ 𝑄) és (𝑃 ⊃ 𝑄) formulák közvetlen részformulái az 𝑃 és 𝑄 formulák.

Definíció

Egy 𝑃 formula részformuláinak halmaza az a legszűkebb halmaz [jelölés: 𝑅𝐹(𝑃)], amelyre teljesül, hogy

1. 𝑃 ∈ 𝑅𝐹(𝑃),

2. ha 𝑄 ∈ 𝑅𝐹(𝑃) és 𝑅 közvetlen részformulája 𝑄-nak, akkor 𝑅 ∈ 𝑅𝐹(𝐴)

Definíció (szerkezetfa)

A 𝑃 formula szerkezeti fáján egy olyan véges rendezett fát értünk, amelynek csúcsai 𝑅𝐹 (𝑃) formulái: 1. gyökere a 𝑃 formula;

2. (¬𝑄) alakú csúcsának egyetlen gyermeke a 𝑄 formula;

3. a (𝑄 ∧ 𝑅) , (𝑄 ∨ 𝑅) és (𝑄 ⊃ 𝑅) alakú csúcsainak két gyermekét (bal és jobboldali) a 𝑄 és 𝑅 formulák alkotják;

4. levelei atomi formulák.

Definíció

Legyen Γ ⊆ ℒ0 (𝑂𝑝, 𝑉) egy formulahalmaz és 𝑃 ∈ ℒ0 (𝑂𝑝, 𝑉) .

Azt mondjuk, hogy 𝑃 logikai következménye Γ-nak, ha Γ ∪ {¬𝑃} kielégíthetetlen.

Jelölés: Γ ⊨ 𝑃

Definíció

Legyen Γ ⊆ ℒ0 (𝑂𝑝, 𝑉) egy formulahalmaz, ℐ: 𝑉 → {0,1} egy interpretációja ℒ0 (𝑂𝑝, 𝑉) -nek.

Azt mondjuk, hogy ℐ modellje a Γ formulahalmaznak, ha minden 𝑃 ∈ Γ esetén |𝑃| ℐ = 1.

Definíció

Legyen 𝑃,𝑄 ∈ ℒ0 (𝑂𝑝, 𝑉) . Azt mondjuk, hogy 𝑃 és 𝑄 logikailag ekvivalensek, ha 𝑃 ⊨ 𝑄 és 𝑄 ⊨ 𝑃. Jelölés: 𝑃 ⇔ Q

𝑃 ⇔ 𝑄 pontosan akkor, ha ℒ0 (𝑂𝑝, 𝑉) minden interpretációjában ugyanazokat az értékeket veszik fel.

Tétel

Ha egy 𝑃 formulában az egyik részformulát egy vele ekvivalens formulával helyettesítjük, a 𝑃-vel ekvivalens formulát kapunk. pl. 𝑃 ∨ (𝑄 ⊃ 𝑅) ⇔ 𝑃 ∨( ¬𝑄 ∨ R)

Definíció

Legyen ℒ0 (𝑂𝑝, 𝑉) -ben 𝐴 ∈ 𝑉. Ekkor az 𝐴 és ¬𝐴 formulákat literálnak nevezzük.

Tétel

Legyen 𝐴 ∈ ℒ0 (𝑂𝑝, 𝑉) . Ekkor léteznek olyan 𝐵, 𝐶 ∈ ℒ0 (𝑂𝑝, 𝑉) formulák, amelyekre 𝐴 ⇔ 𝐵

és 𝐴 ⇔ 𝐶, valamint 𝐵 egy KNF, 𝐶 pedig egy DNF.