

## Cache-oblivious algoritmy a dátové štruktúry

V tejto kapitole popíšeme niekoľko *cache-oblivious* algoritmov a dátových štruktúr, spolu s ich pamäťovou analýzou v *cache-oblivious* modeli. Miestami tiež uvedieme ekvivalentnú *cache-aware* dátovú štruktúru pre vzájomné porovnanie efektívnosti.

### 1.1 Základné algoritmy

Na demonštráciu *cache-oblivious* algoritmov a ich analýzy v *external-memory* modeli použijeme jednoduchý algoritmus, ktorý počíta agregáčnú funkciu nad hodnotami uloženými v poli.

#### 1.1.1 Popis algoritmu

simplify

Majme pole  $A$  veľkosti  $|A| = N$  a označme jeho prvky  $A = \{a_1, \dots, a_N\} \in X^N$ . Chceme vypočítať hodnotu  $f_g(A)$ , kde  $g : X \times Y \rightarrow Y$  je agregáčná funkcia,  $g_0 \in Y$  je počiatočná hodnota a  $f_g : X^\infty \rightarrow Y$  je rozšírenie agregáčnej funkcie definované nasledovne:

$$\begin{aligned} f_g(\{a_1, \dots, a_k\}) &= g(a_k, f(\{a_1, \dots, a_{k-1}\})) \\ f_g(\emptyset) &= g_0 \end{aligned}$$

Túto funkciu je možné implementovať jednoducho ako jeden cyklus. Schematickú verziu implementácie uvádzame v algoritme 1.1.

Tento algoritmus s použitím vhodnej funkcie  $g$  a hodnoty  $g_0$  je možné použiť na rôzne, často užitočné výpočty, ako napríklad maximum, minimum, suma a podobne:

Správna notácia pre x infinity?

**Algoritmus 1.1** Implementácia agregáčnej funkcie  $f_g$ 


---

```

1: function AGGREGATE( $g, g_0, A$ )
2:    $y \leftarrow g_0$ 
3:   for  $i \leftarrow 1, \dots, |A|$  do
4:      $y \leftarrow g(A[i], y)$ 
5:   return  $y$ 

```

---

$$\begin{aligned}
g^{\max}(x, y) &= \max(x, y) & g_0^{\max} &= -\infty \\
g^{\text{sum}}(x, y) &= x + y & g_0^{\text{sum}} &= 0
\end{aligned}$$

**1.1.2 Analýza zložitosti****Časová analýza**

Klasická časová analýza tohto algoritmu je triviálna ak uvažujeme *RAM model*. Keďže prístup ku každému prvku  $A[i]$  zaberie konštantný čas a za predpokladu, že čas na výpočet funkcie  $g$ ,  $T_g$ , je nezávislý na vstupe, bude výsledný čas na výpočet tejto funkcie

$$T(N) = \mathcal{O}(1) + N[\mathcal{O}(1) + T_g + \mathcal{O}(1)] = T_g \cdot \mathcal{O}(N)$$

**Pamäťová analýza**

V prípade *cache-aware* algoritmu by sme pole  $A$  mali uložené v  $\lceil \frac{N}{B} \rceil$  blokoch veľkosti  $B$ . Pri výpočte by sme postupne tieto bloky načítali do cache a pracovali s nimi. V rámci jedného bloku počas výpočtu nedochádza k pamäťovým presunom. Zároveň stačí každý prvok spracovať raz a teda celkový počet pamäťových operácií bude presne rovný počtu blokov,  $\lceil \frac{N}{B} \rceil$ . Tento algoritmus však požaduje znalosť parametra  $B$  a explicitný presun blokov.

Jednoducho však vieme dosiahnuť (takmer) rovnakú zložitosť aj v prípade *cache-oblivious* algoritmu 1.1, ktorý žiadne parametre pamäte zjavne nevyužíva a nepozná. Budeme predpokladať, že pole  $A$  je uložené v súvislom úseku pamäte - to je možné dosiahnuť aj bez znalosti parametrov pamäte. Zvyšok algoritmu prebieha rovnako ako v predchádzajúcom prípade. Každý blok obsahujúci nejaký prvok poľa  $A$  bude teda presunutý do cache práve raz, a žiadne iné presuny nenastanú. Ostáva zistiť, koľko takých blokov môže byť.

Keďže nepoznáme veľkosti blokov v pamäti, nevieme pri ukladaní prvkov poľa zaručiť zarovnanie so začiatkom bloku. V najhoršom prípade uložíme do prvého bloku iba jeden prvok. Potom bude nasledovať  $\lfloor \frac{N}{B} \rfloor$  plných blokov a nakoniec ešte najviac jeden blok, ktorý opäť nie je plný. Spolu máme teda  $\lfloor \frac{N}{B} \rfloor + 2$  blokov.

Pokiaľ  $\lfloor \frac{N}{B} \rfloor < \lceil \frac{N}{B} \rceil$  máme spolu najviac  $\lceil \frac{N}{B} \rceil + 1$  blokov. V opačnom prípade  $B$  delí  $N$ , teda v prvom a poslednom bloku je spolu presne  $B$  prvkov a medzi nimi sa nachádza najviac  $\frac{N-B}{B} = \frac{N}{B} - 1$  plných. Teda blokov je vždy najviac  $\lceil \frac{N}{B} \rceil + 1$ .

Zostrojili sme teda *cache-oblivious* algoritmus s asymptoticky rovnakou zložitou  $\mathcal{O}(\frac{N}{B})$  ako optimálny *cache-aware* algoritmus, ktorého implementácia je však jednoduchšia, keďže nemusí explicitne spravovať presun blokov do cache. Parameter  $B$  sme použili len počas analýzy, v samotnom návrhu algoritmu nie.

## 1.2 Vyhľadávanie v statických dátach

Častým problémom v informatike je nutnosť rýchlo a efektívne vyhľadávať prvok v nejakej statickej množine prvkov. V tejto sekcii popíšeme niekoľko algoritmov a dátových štruktúr, ktoré tento problém riešia. Všetky majú v *RAM* modeli časovú zložitost  $\mathcal{O}(N)$ , kde  $N$  je počet prvkov v prehľadávanej množine, no v *cache-aware* a *cache-oblivious* modeloch sa budú líšiť počtom pamäťových presunov, ktoré vykonajú.

### 1.2.1 Binárne vyhľadávanie

Pozrime sa najskôr na binárne vyhľadávanie, ktoré je asi najznámejšie. V algoritme 1.2 uvádzame implementáciu, ktorá nájde prvok  $K$  v usporiadanom poli  $A[0, \dots, N-1]$ , pre ktoré platí  $\forall i, j; 0 \leq i < j < N : A[i] \leq A[j]$ .

---

#### Algoritmus 1.2 Implementácia binárneho vyhľadávania

---

```

1: function FIND( $A, K$ )
2:    $left \leftarrow 0$ 
3:    $right \leftarrow N$ 
4:   while  $left < right$  do
5:      $mid \leftarrow \lfloor \frac{left+right}{2} \rfloor$ 
6:     if  $A[mid] = K$  then
7:       return  $mid$ 
8:     else if  $A[mid] > K$  then
9:        $right \leftarrow mid$ 
10:    else
11:       $left \leftarrow mid + 1$ 
12:    return  $-1$   $\triangleright K \notin A$ 

```

---

Vidíme, že algoritmus nikde nepožaduje znalosť parametrov  $B$  ani  $M$  a teda ide o *cache-oblivious* algoritmus, tak ako v prípade agregáčného algoritmu 1.1.

### Analýza zložitosti

Pri každej iterácii zmenšíme oblasť, ktorú treba preskúmať na polovicu. Iterácií bude teda  $\mathcal{O}(\log N)$  a zložitosť bude riešenie rekurentného vzťahu

$$T(N) = T(N/2) + \mathcal{O}(1)$$

V prípade časovej analýzy je bázou rekurencie  $T(1) = \mathcal{O}(1)$  a výsledná časová zložitosť bude  $\mathcal{O}(\log N)$ .

Pri pamäťovej analýze bude bázou  $T(B) = \mathcal{O}(1)$ , pretože po zredukovaní prehľadávaného intervalu na veľkosť  $B$  vieme všetky potenciálne prvky načítať v  $\mathcal{O}(1)$  blokoch a k ďalším presunom už nedôjde. Riešením a celkovou pamäťovou zložitosťou teda bude  $\mathcal{O}(\log N - \log B) = \mathcal{O}(\log \frac{N}{B})$ .

Ako však uvidíme v ďalšej sekcii, toto riešenie nie je optimálne.

#### 1.2.2 *Cache-aware* riešenie

V prípade, že poznáme veľkosť blokov  $B$  v cache, môžeme problém vyhľadávacích stromov riešiť B-stromom s vetvením  $\Theta(B)$ . Každý vrchol teda vieme načítať s použitím  $\mathcal{O}(1)$  pamäťových presunov. Výška takého B-stromu, ktorý má  $N$  listov, bude  $\mathcal{O}(\log_B N)$ . Celkovo teda vyhľadávanie v tomto strome vykoná  $\mathcal{O}(\log_B N)$  pamäťových presunov.

Toto je lepší výsledok ako dosahuje binárne vyhľadávanie. Stále však zostáva otázka, či neexistuje ešte efektívnejšie riešenie. Pozrime sa teda na spodnú hranicu tohto problému.

#### 1.2.3 Spodná hranica pre vyhľadávanie

Ukážeme odvodenie minimálneho počtu pamäťových presunov rovnako ako v [6] technikou informačnej zložitosti. Na nájdenie daného prvku v množine obsahujúcej  $N$  položiek potrebujeme získať  $\lg(2N + 1)$  informačných bitov reprezentujúcich pozíciu tohto prvku -  $N$  možných existujúcich prvkov a  $N + 1$  pozícií medzi nimi (a na okrajoch) pre neexistujúci prvok. V každom pamäťovom presune načítame jeden blok veľkosti  $B$ , ktorý môže obsahovať najviac  $\lg(2B + 1)$  bitov informácie. V najlepšom prípade je teda potrebných aspoň

$$\frac{\lg(2N + 1)}{\lg(2B + 1)} = \frac{\lg N + \mathcal{O}(1)}{\lg B + \mathcal{O}(1)} = \log_B N + \mathcal{O}(1)$$

pamäťových presunov.

Vidíme teda, že na rozdiel od *cache-oblivious* binárneho vyhľadávania, *cache-aware* B-strom je asymptoticky optimálnym riešením tohto problému. Chceli by sme teraz nájsť *cache-oblivious* dátovú štruktúru, ktorá tiež dosahuje túto hranicu.

### 1.2.4 Naivné *cache-oblivious* riešenie

Predtým ako popíšeme efektívne *cache-oblivious* riešenie, pozrime sa na klasický binárny vyhľadávací strom. Asi najjednoduchší spôsob, ako usporiadať uzly (statického) binárneho stromu v pamäti, je nasledovný. Koreň uložíme na pozíciu 1. Ľavého a pravého potomka vrcholu na pozícii  $x$  uložíme na pozície  $2x$  a  $2x + 1$ . Otec vrcholu  $x$  bude na pozícii  $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ . Toto usporiadanie voláme *BFS usporiadanie* (z anglického *breadth-first search* – prehľadávanie do šírky), keďže pozície vrcholov sa zvyšujú v rovnakom poradí ako by prebiehalo prehľadávanie tohto stromu do šírky. Príklad takto uloženého stromu je na obrázku 1.2(a).

Výhodou tohto usporiadania sú implicitné vzťahy medzi vrcholmi. Na udržiavanie stromu stačí jednorozmerné pole kľúčov. Na prechod medzi nimi môžeme použiť triviálne funkcie uvedené v algoritme 1.3.

**Algoritmus 1.3** Algoritmy pre získanie pozícií ľavého syna, pravého syna a rodiča vrcholu na pozícii  $x$

1: <b>function</b> LEFT( $x$ )	1: <b>function</b> RIGHT( $x$ )	1: <b>function</b> PARENT( $x$ )
2: <b>return</b> $2x$	2: <b>return</b> $2x + 1$	2: <b>return</b> $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$

Nevýhodou je však vysoký počet pamäťových presunov pri vyhľadávaní. Výška tohto stromu je<sup>1</sup>  $\mathcal{O}(\log N)$ . Pri načítaní vrcholu na pozícii  $x$  sa v rovnakom bloku nachádzajú vrcholy na pozíciách

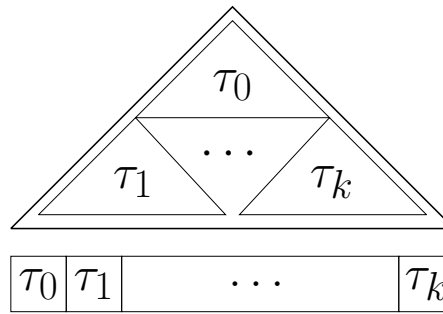
$$x - k, \dots, x - 1, x, x + 1, \dots, x + l$$

kde  $k + l < B$ . Pri ďalšom kroku vyhľadávania budeme potrebovať vrchol  $2x$  alebo  $2x + 1$  a teda nás pozície menšie ako  $x$  nezaujímajú. V najlepšom prípade teda bude  $k = 0$  a  $l = B - 1$ . Aby sa v tomto intervale nachádzali požadované vrcholy musí platiť

$$\begin{aligned} 2x + 1 &\leq x + l = x + B - 1 \\ x &\leq B - 2 \end{aligned}$$

To znamená, že pre pozície  $x > B - 2$  už bude potrebný pamäťový presun pre každý vrchol. Vrchol s pozíciou  $B - 2$  bude mať hĺbku  $\mathcal{O}(\log B)$  a teda počet vrcholov na ceste z koreňa do listu, ktorých pozície v pamäti sú väčšie ako  $B - 2$  bude  $\Omega(\log N - \log B)$ . Pre každý z nich je potrebné vykonať pamäťový presun a teda vyhľadávanie v takto usporiadanom binárnom strome vykoná  $\Omega(\log \frac{N}{B})$  pamäťových presunov, čo je rovnako ako binárne vyhľadávanie horšie v porovnaní s *cache-aware* B-stromom.

<sup>1</sup>Nejde o vyvažovaný binárny strom a teda by výška mohla byť až  $\mathcal{O}(N)$ . Keďže však pracujeme so statickými dátami, môžeme ich vopred usporiadať a vyrobiť vyvážený statický strom



Obrázok 1.1: Schematické znázornenie rekurzívneho delenia pri *van Emde Boas* usporiadaní. Podstromy  $\tau_0, \dots, \tau_k$  sa uložia do súvislého pola.

### 1.2.5 Statický *cache-oblivious* vyhľadávací strom

Problémom predošlého riešenia je neefektívne usporiadanie v pamäti - pri prístupe ku vrcholu sa spolu s ním v rovnakom bloku nachádzajú vrcholy, ktoré nie sú pre ďalší priebeh algoritmu podstatné.

Riešením je takzvané *van Emde Boas usporiadanie* (*van Emde Boas layout*, nazvané podľa *van Emde Boas* stromov s podobnou myšlienkou), popísané v [3, 6, 15] ktoré funguje následovne. Uvažujme úplný binárny strom výšky  $h$ . Ak  $h = 1$  tak máme iba jeden vrchol  $v$  a výstupom usporiadania bude  $(v)$ .

Pre  $h > 1$  označme  $m = \max_{i \in \mathbb{N}} \{2^i \mid 2^i < h\}$ , teda najväčšiu mocninu dvoch menšiu ako  $h$ . Rozdelíme vstupný strom na podstrom  $\tau_0$  výšky  $h - m$ , ktorého koreňom je koreň pôvodného stromu. Zostanú nám podstromy  $\tau_1, \dots, \tau_k$  výšky  $m$ , ktorých korene sú potomkovia listov  $\tau_0$  a listy sú listy vstupného stromu. Rekurzívne ich uložíme do *van Emde Boas* usporiadania a následne uložíme za seba, výstupom teda bude poradie  $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k)$ . Schéma tohto delenia je na obrázku 1.1 a príklad takto usporiadaného stromu na obrázku 1.2(b).

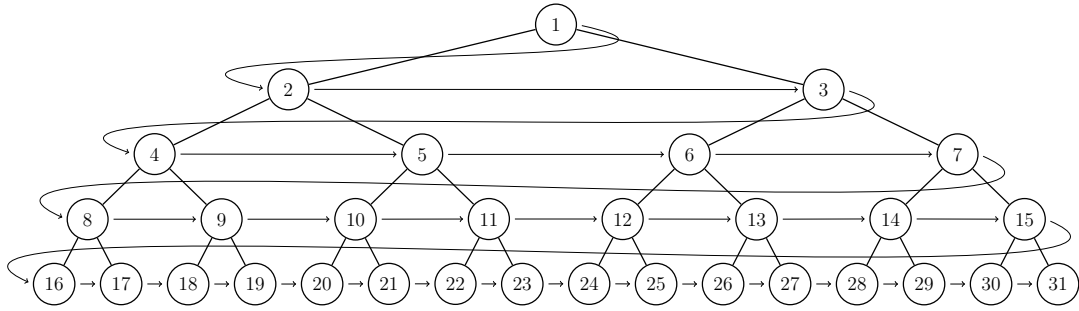
Tieto podstromy majú veľkosť  $\Theta(\sqrt{N})$  kde  $N$  je veľkosť vstupného stromu, keďže ich výška je  $\frac{h}{2} = \frac{1}{2} \lg N = \lg \sqrt{N}$ .

BFS - thickness, arrows go through nodes, ...

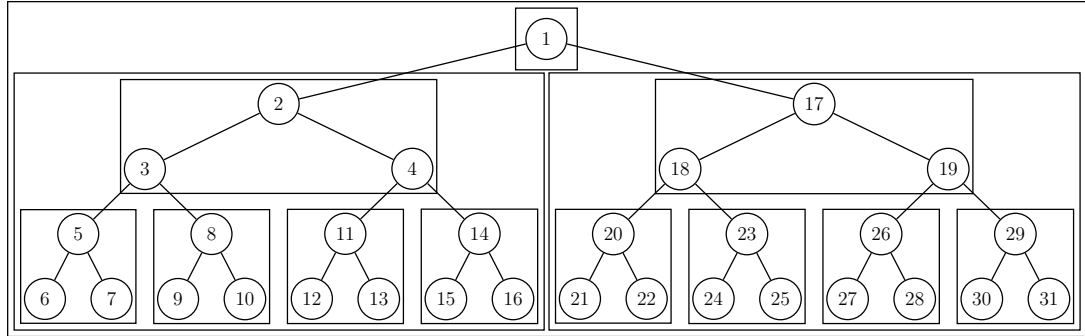
vEB - boxes overlap, use non-pt units?

#### Prechod stromom v pamäti

Na rozdiel od klasického *BFS* usporiadania nie je pri takomto usporiadaní v pamäti triviálne zistiť, na akej pozícii sa nachádzajú potomkovia alebo rodič aktuálneho vrcholu. Jedným možným riešením je spolu s každým vrcholom ukladať aj *pointer* (ukazovateľ, adresa v pamäti) na tieto relevantné vrcholy. Tým znížime počet vrcholov, ktoré sa zmestia do jedného bloku o konštantný násobok - v prípade, že je kľúč rovnako veľký ako *pointer*, bude počet vrcholov v jednom bloku štvrtina pôvodného počtu.



(a) Klasické usporiadanie



(b) van Emde Boas usporiadanie

Obrázok 1.2: Porovnanie klasického a *van Emde Boas* usporiadania na úplnom binárnom strome výšky 5. Čísla vo vrchoch určujú poradie v pamäti.

Iným riešením je vnútorne pracovať s *BFS* usporiadaním a prechádzať medzi pozíciami funkciami uvedenými v algoritme 1.3. Pri prístupe k vrcholu túto *BFS* pozíciu prevedieme na ekvivalentnú pozíciu vo *van Emde Boas* usporiadaní. Pri strome s  $N$  vrcholmi je možné túto konverziu realizovať v čase  $\mathcal{O}(\log \log N)$  [11].

## Vyhľadávanie

Pri analýze vyhľadávania sa pozrieme na také podstromy predošlého delenia, že ich veľkosť je  $\Theta(B)$ . Ďalšie delenie a preusporiadanie je už zbytočné, no to *cache-oblivious* algoritmus nemá ako vedieť. Keďže ale po rekurzívnom volaní získame len iné usporiadanie, ktoré uložíme v súvislom úseku pamäte, bude stále možné tento podstrom načítať v  $\mathcal{O}(1)$  blokoch.

Majme teda vyhľadávací strom zložený z takýchto podstromov, ktorých veľkosť je medzi  $\Omega(\sqrt{B})$  a  $\mathcal{O}(B)$ . Ich výška je teda  $\Omega(\log B)$ . Pri strome výšky  $\mathcal{O}(\log N)$  teda prejdeme cez  $\mathcal{O}(\frac{\log N}{\log B})$  takých podstromov a každý vyžaduje konštantný počet pamäťových presunov a spolu sa ich teda vykoná  $\mathcal{O}(\log_B N)$ , čo zodpovedá spodnej hranici tohto problému.

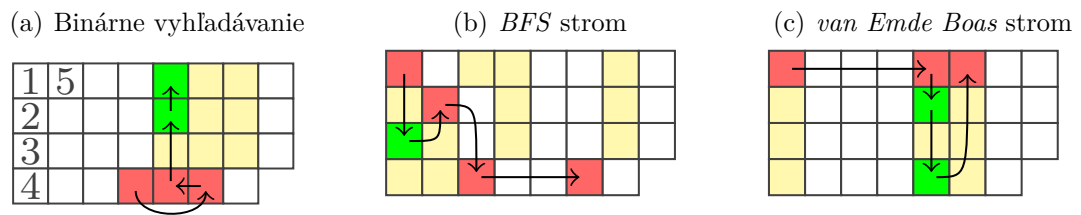
Máme teda vyhľadávanie, ktoré je rovnako ako pri *cache-aware* B-stromoch optimálne. Problémom tejto dátovej štruktúry je však nemožnosť efektívne vkladať či odoberať prvky - pri každej zmene by bolo potrebné strom preusporiadať. Máme teda

*cache-oblivious* ekvivalent statických *cache-aware* B-stromov.

Na úpravu tohto statického stromu tak, aby efektívne zvládala operácie pridávania a odoberania, budeme potrebovať pomocnú dátovú štruktúru, ktorú popíšeme v sekcii 1.3.

### 1.2.6 Rozdiely v prístupe ku pamäti

Rozdiely medzi binárnym vyhľadávaním a statickými vyhľadávacími stromami v *BFS* a *van Emde Boas* usporiadaníach sú vizuálne znázornené na obrázkoch 1.4 a 1.5 na strane 10. Pozrime sa však najskôr na menší obrázok 1.3, na ktorom vysvetlíme princíp tejto vizualizácie.



Obrázok 1.3: Porovnanie prístupov ku pamäti v rôznych štruktúrach pri vyhľadávaní hodnoty 17 medzi 31 prvkami

Jednotlivé políčka sú hodnoty poľa respektíve kľúče vo vrcholoch stromov, pričom v pamäti sú usporiadané v poradí zhora nadol a zľava doprava. Vo všetkých prípadoch vyhľadávame prvok v množine  $\{1, \dots, 2^h - 1\}$  čo je počet vrcholov úplného binárneho stromu výšky  $h$ . Farby označujú stav políčka v simulovanej *cache* s veľkosťou bloku  $B = 4$ .

Červená farba reprezentuje prvky, ktoré sa v momente prístupu nenachádzali v *cache* a bolo potrebné ich načítať (*cache miss*). Zelená naopak označuje prvky, ktoré už v *cache* boli (*cache hit*) – načítali sa spolu s nejakým červeným prvkom v rovnakom bloku. Ostatné prvky, ktoré sa načítali ako súčasť bloku ale neboli použité, sú označené žltou farbou.

V malom obrázku 1.3 (výška stromu  $h = 5$ ) šípky určujú poradie, v akom vyhľadávanie pristupovalo k jednotlivým prvkom. Vo veľkých obrázkoch 1.4 a 1.5 (výška stromu  $h = 9$ ) sú šípky pre prehľadnosť vynechané a políčko s bodkou označuje pozíciu, na ktorej bol napokon požadovaný prvok nájdený. Rozdiely medzi týmito tromi prístupmi k vyhľadávaniu je lepšie vidieť práve na väčších obrázkoch.

Keďže všetky hľadané hodnoty (17, 243 a 427) boli zvolené ako listy týchto vyhľadávacích stromov, pristúpili operácie vyhľadávania vo všetkých troch prípadoch práve k  $h$  prvkom. Rozdiel je však v pomere počtu červených (ktoré v *cache* neboli a bolo ich potrebné načítať) a zelených (na ktoré nebol potrebný pamäťový presun) prvkov.



Ako ľahko vidieť, binárne vyhľadávanie začne v strede a presúva sa medzi prvkami, ktoré sú od seba čoraz menej vzdialené až do momentu, kedy už je prehľadávaný interval dostatočne malý na to, aby sa zmestil do bloku.

Naopak strom v *BFS* usporiadaní robí stále väčšie a väčšie *skoky* a porovnávané prvky sa do jedného bloku zmestia iba na začiatku.

Avšak strom vo *van Emde Boas* usporiadaní potom čo pristúpi k nejakému prvku v ďalších krokoch pristupuje k prvkom, ktoré sú v pamäti blízko a veľký *skok*, ktorý pristúpi mimo *cache* vykonáva menej často. Vďaka tomu dosahuje v oboch prípadoch najviac zelených políčok.

## 1.3 Usporiadané pole

Problémom *údržby usporiadaného poľa* (z anglického *ordered-file maintenance*) budeme volať problém spočívajúci v udržiavaní zoradenej postupnosti prvkov, do ktorej možno pridávať nové prvky medzi ľubovoľné dva existujúce a tiež prvky odstraňovať. Dátovou štruktúrou, ktorá tento problém rieši efektívne je *štruktúra zhustenej pamäte* (*packed-memory structure*). Táto štruktúra udržiava prvky v súvislom poli veľkosti  $\mathcal{O}(N)$  s *medzerami* medzi prvkami veľkosti  $\mathcal{O}(1)$ . Vďaka tomu bude načítanie  $K$  po sebe idúcich prvkov vyžadovať  $\mathcal{O}(\frac{K}{B})$  pamäťových presunov.

### 1.3.1 Popis štruktúry

Popíšeme dátovú štruktúru z [3] s malými úpravami. Celá dátová štruktúra pozostáva z jedného poľa veľkosti  $T = 2^k$ . To (pomyselne) rozdelíme na *bloky* veľkosti  $S = 2^l$  tak, že  $S = \Theta(\log N)$ . Počet blokov tak bude tiež mocnina dvoch.

Nad týmito blokmi zostrojíme (imaginárny) úplný binárny strom (obrázok 1.6), ktorého listy sú bloky udržiavaného poľa. *Hĺbkou* vrchola označíme jeho vzdialenosť od koreňa, pričom koreň má hĺbku 0 a listy majú hĺbku  $d = k - l$ .

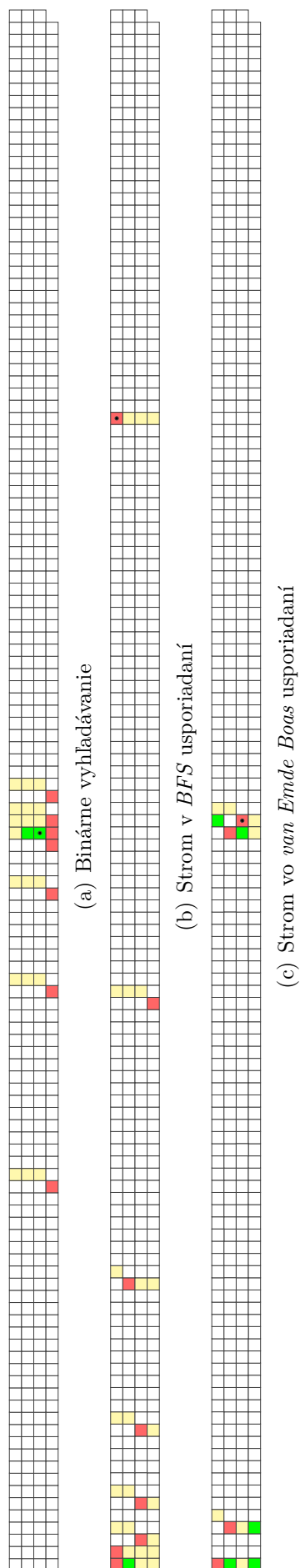
### 1.3.2 Definície

*Kapacitou* vrchola  $v$ ,  $c(v)$ , označíme počet položiek (aj prázdnych, teda aj s medzerami) poľa patriacich do blokov v podstrome začínajúcom v tomto vrchole. Kapacita listov bude teda  $S$ , ich rodičov  $2S$  a kapacita koreňa bude  $T$ . Podobne budeme počet neprázdnych položiek v podstrome vrcholu  $v$  volať *obsadnosť* a značiť  $o(v)$ .

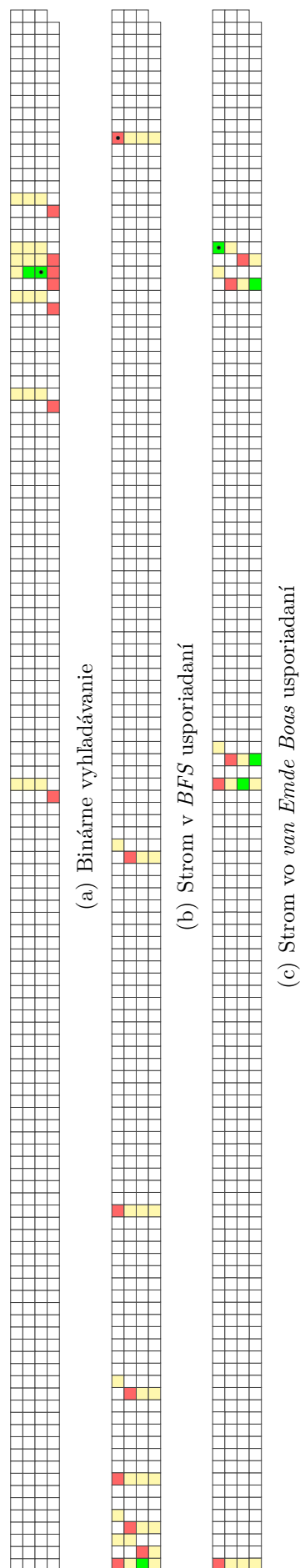
Ďalej *hustotou*,  $0 \leq d(v) \leq 1$ , označíme  $d(v) = \frac{o(v)}{c(v)}$ . Zvoľme ľubovoľné konštanty

$$0 < \rho_d < \rho_0 < \tau_o < \tau_d < 1$$

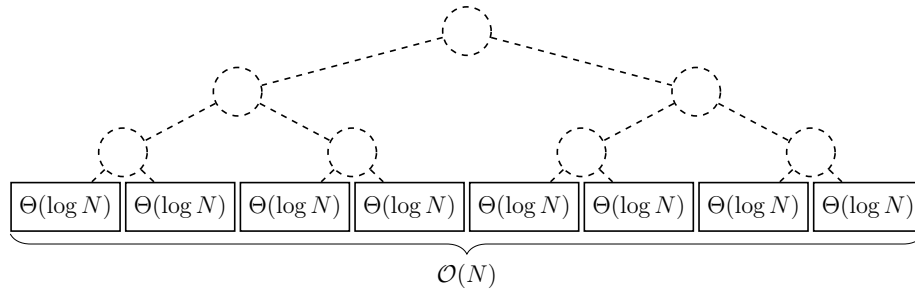
a definujme pre vrchol s hĺbkou  $k$  *dolnú* a *hornú hranicu hustoty*  $\rho_k$  a  $\tau_k$  tak, že dostaneme postupnosť hraníc pre všetky hĺbky, pričom platí  $(\rho_i, \tau_i) \subset (\rho_{i+1}, \tau_{i+1})$  a



Obrázok 1.4: Porovnávanie prístupov ku pamäti v rôznych štruktúrach pri vyhľadávaní hodnoty 243 medzi 511 prvkami



Obrázok 1.5: Porovnávanie prístupov ku pamäti v rôznych štruktúrach pri vyhľadávaní hodnoty 427 medzi 511 prvkami



Obrázok 1.6: Usporiadané pole veľkosti  $N$ . Strom nad blokmi je len imaginárny a nezostrojuje sa v pamäti.

teda sa tieto intervaly smerom od listov ku koreňu zmenšujú:

$$\rho_k = \rho_0 + \frac{k}{d}(\rho_d - \rho_0) \quad \tau_k = \tau_0 - \frac{k}{d}(\tau_0 - \tau_d)$$

$$0 < \rho_d < \rho_{d-1} < \dots < \rho_0 < \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_d < 1$$

Hovoríme, že vrchol  $v$  hĺbky  $k$  je v hraniciach hustoty ak platí  $\rho_k \leq d(v) \leq \tau_k$ .

### 1.3.3 Operácie

#### Vkladanie

Implementácia operácie vkladania sa skladá z niekoľkých krokov. Najskôr zistíme, do ktorého bloku  $v$  spadá pozícia, na ktorú vkladáme. Pozrieme sa, či je tento blok v hraniciach hustoty. Ak áno tak platí  $d(v) < 1$  a teda  $o(v) < c(v)$ , čiže v tomto bloku je voľné miesto. Môžeme teda zapísať novú hodnotu do tohto bloku, pričom môže byť potrebné hodnoty v bloku popresúvať, avšak zmení sa najviac  $S$  pozícií.

V opačnom prípade je tento blok mimo hraníc hustoty. Budeme postupovať hore v strome dovtedy, kým nenájdeme vrchol v hraniciach. Keďže strom je iba pomyselný, budeme túto operáciu realizovať pomocou dvoch súčasných prechodov k okrajom poľa. Počas tohto prechodu si udržiavame počet neprázdnych a všetkých pozícií a zastavíme v momente, keď hustota dosiahne požadované hranice.

Po nájdení takéhoto vrchola v hraniciach rovnomerne rozdelíme všetky hodnoty v blokoch prislúchajúcich danému podstromu. Keďže intervaly pre hranice sa smerom ku listom iba rozširujú budú po tomto popresúvaní všetky vrcholy tohto podstromu v hraniciach hustoty a teda aj požadovaný blok bude obsahovať aspoň jednu prázdnu pozíciu. Môžeme teda novú hodnotu vložiť ako v prvom kroku.

Ak nenájdeme taký vrchol, ktorého hustota by bola v hraniciach, a teda aj koreň je mimo hraníc, je táto štruktúra príliš plná. V takom prípade zostrojíme nové pole dvojnásobnej veľkosti a všetky existujúce položky, s pridanou novou, rovnomerne rozmiestnime do nového poľa.

## Odstraňovanie

Operácia odstraňovania prebieha analogicky. Ako prvé požadovanú položku odstránime z prislúchajúceho bloku. Ak je tento blok aj naďalej v hraniciach hustoty tak skončíme, inak postupujeme nahor v strome, kým nenájdeme vrchol v hraniciach. Následne rovnomerne prerozdělíme položky blokoch daného podstromu.

Pokiaľ taký vrchol nenájdeme, je pole príliš prázdne a zostrojíme nové polovičnej veľkosti a rovnomerne do neho rozmiestnime zostávajúce položky pôvodného.

### 1.3.4 Analýza

Pri vložení aj odstraňovaní sa upraví súvislý interval  $I$ , ktorý sa skladá z niekoľkých blokov. Nech pri nejakej operácii došlo k prerozdeleniu prvkov v blokoch prislúchajúcich podstromu vrchola  $u$ . Teda pred týmto prerozdelením bol vrchol  $u$  v hĺbke  $k$  v hraniciach hustoty ( $\rho_k \leq d(u) \leq \tau_k$ ) ale nejaký jeho potomok  $v$  nebol.

Po prerozdelení budú všetky vrcholy v danom podstromu v hraniciach hustoty, avšak nie len v svojich ale aj v hraniciach pre hĺbku  $k$ , ktoré sú tesnejšie. Bude teda platiť  $\rho_k \leq d(v) \leq \tau_k$ . Najmenší počet operácii vloženia,  $q$ , potrebný na to, aby bol vrchol  $v$  opäť mimo hraníc je

$$\begin{aligned} \frac{o(v)}{c(v)} = d(v) &\leq \tau_k & \frac{o(v) + q}{c(v)} &> \tau_{k+1} \\ o(v) &\leq \tau_k c(v) & o(v) + q &> \tau_{k+1} c(v) \\ q &> (\tau_{k+1} - \tau_k) c(v) \end{aligned}$$

Podobne pre prekročenie dolnej hranice je potrebných aspoň  $(\rho_k - \rho_{k+1})c(v)$  operácii odstránenia.

Pri úprave intervalu blokov v podstromu vrcholu  $u$  je potrebné upraviť najviac  $c(u)$  položiek, avšak táto situácia nastane pokiaľ sa potomok  $v$  ocitne mimo hraníc hustoty. Priemerná veľkosť intervalu, ktorý treba preusporiadať pri vložení do podintervalu prislúchajúceho vrcholu  $v$  teda bude

$$\frac{c(u)}{(\tau_{k+1} - \tau_k)c(v)} = \frac{2c(v)}{(\tau_{k+1} - \tau_k)c(v)} = \frac{2}{\tau_{k+1} - \tau_k} = \frac{2d}{\tau_d - \tau_0} = \mathcal{O}(\log T)$$

keďže  $\tau_d$  a  $\tau_0$  sú konštanty a výška stromu  $d$  s  $T$  listami je  $d = \Theta(\log T)$ . Podobným spôsobom dostaneme rovnaký odhad pre odstraňovanie.

Pri vkladaní a odstraňovaní prvku ovplyvníme najviac  $d$  podintervalov - tie, ktoré prislúchajú vrcholom na ceste z daného listu (bloku) do koreňa. Spolu teda bude veľkosť upraveného intervalu v priemernom prípade  $\mathcal{O}(\log^2 T)$ .

worstcase bounds? conjectured lowerbound?

amortizacia double/half rebuildu

Táto dátová štruktúra teda udržiava  $N$  usporiadaných prvkov v poli veľkosti  $\mathcal{O}(N)$  a podporuje operácie vkladania a odstraňovania, ktoré upravujú súvislý interval priemernej veľkosti  $\mathcal{O}(\log^2 N)$  a je ich teda možné realizovať pomocou  $\mathcal{O}(\frac{\log^2 N}{B})$  pamäťových presunov.

## 1.4 Dynamický B-strom

V tejto sekcii popíšeme dynamickú verziu *cache-oblivious* vyhľadávacieho stromu. Prvá verzia tejto štruktúry pochádza z [3, 4], bola avšak značne komplikovaná. Preto použijeme zjednodušenú verziu z [5], ktorá dosahuje rovnaké výsledky ale jej popis a analýza sú podstatne jednoduchšie.

### 1.4.1 Cache-aware riešenie

V prípade *cache-aware* modelu použijeme opäť B-strom s vetvením  $\Theta(B)$  ako v časti 1.2.2. Rovnako ako pre vyhľadávanie bude na vkladanie potrebných  $\mathcal{O}(\log_B N)$  pamäťových presunov.

odvodení

### 1.4.2 Popis *cache-oblivious* štruktúry

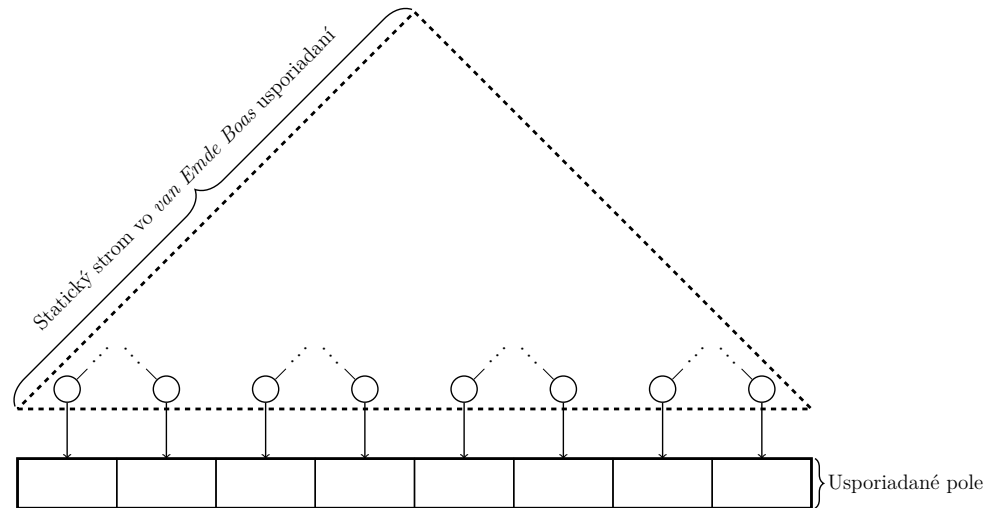
Táto dátová štruktúra vznikne zložením predchádzajúcich dvoch - statického stromu (1.2.5) a usporiadaného pola (1.3.1) - jednoduchým spôsobom. Majme usporiadané pole veľkosti  $\Theta(N)$ . Keďže počet položiek v usporiadanom poli je mocnina dvoch, môžeme nad ním vybudovať statický vyhľadávací strom uložený vo *van Emde Boas* usporiadaní. Listy tohto stromu budú bijektívne spárované s položkami v usporiadanom poli (obrázok ??).

Kľúče, ktoré táto štruktúra obsahuje, sú uložené v usporiadanom poli (s medzerami). Listy statického stromu obsahujú v svojich kľúčoch rovnakú hodnotu ako k ním prislúchajúce položky usporiadaného pola. Medzeru reprezentujeme hodnotou, ktorá je pri použití usporiadání najmenšia. Ostatné vrcholy stromu obsahujú ako kľúč maximum z kľúčov svojich synov.

### 1.4.3 Vyhľadávanie

Vyhľadávanie v tejto štruktúre prebieha jednoducho. Začínajúc od koreňa, porovnáme hľadaný kľúč s kľúčom v ľavom synovi. Pokiaľ je hľadaný väčší, bude v pravom podstrome (keďže maximum z celého ľavého podstromu je práve kľúč ľavého syna), ktorý rekurzívne prehľadáme. V opačnom prípade prehľadáme ľavý podstrom. Keď dosiahneme list, porovnáme jeho kľúč s hľadaným. Ak sa zhodujú tak sme požadovanú položku našli, inak sa v štruktúre nenachádza.

dokaz  
ze  
tam  
nie je



Obrázok 1.7: Dynamický strom, ktorý vznikne spojením statického stromu vo *van Emde Boas* usporiadaní a usporiadaného pola. Šípky znázorňujú spárovanie listov a položiek pola.

### Analýza

Toto prehľadávanie prechádza cestu od koreňa k listu v strome hĺbky  $\mathcal{O}(\log N)$  uloženom vo *van Emde Boas* usporiadaní a teda rovnako ako v časti 1.2.5 vykoná  $\mathcal{O}(\log_B N)$  pamäťových presunov.

#### 1.4.4 Vkladanie

Zaujímavejšou operáciou je vkladanie, ktoré v pôvodnom statickom strome nebolo možné. Prvým krokom je nájdenie pozície, na ktorú tento kľúč patrí. To dosiahneme podobne ako v predošlej sekcii. Budeme ale hľadať predchádzajúci a nasledujúci kľúč. Tým nájdeme v usporiadanom poli dvojicu pozícií, medzi ktoré chceme vložiť novú hodnotu.

Vloženie do usporiadaného pola zmení súvislý interval veľkosti  $K$ . Následne bude potrebné aktualizovať kľúče v statickom strome, aby opäť obsahovali maximum zo svojich synov. Túto aktualizáciu dosiahneme takzvaným *post-order* prechodom, kedy sa vrchol aktualizuje až po tom, čo boli aktualizovaný jeho synovia. Tým máme zaručené, že po aktualizácii vrchol obsahuje výslednú, korektnú hodnotu. Implementácia takéhoto prechodu je naznačená v algoritme 1.4.

#### 1.4.5 Analýza vkladania

Túto analýzu rozdelíme na tri časti (obrázok 1.7), v ktorých sa postupne pozrieme na rôzne úrovne v statickom strome, ktoré treba po vložení do usporiadaného pola aktualizovať.

**Algoritmus 1.4** Implementácia *post-order* prechodu na aktualizáciu statického stromu

---

```

1: function UPDATE( $v, I$ )                                ▷  $v$  je vrchol stromu, ktorý práve aktualizujeme
                                                         ▷  $I$  je zmenený interval v usporiadanom poli

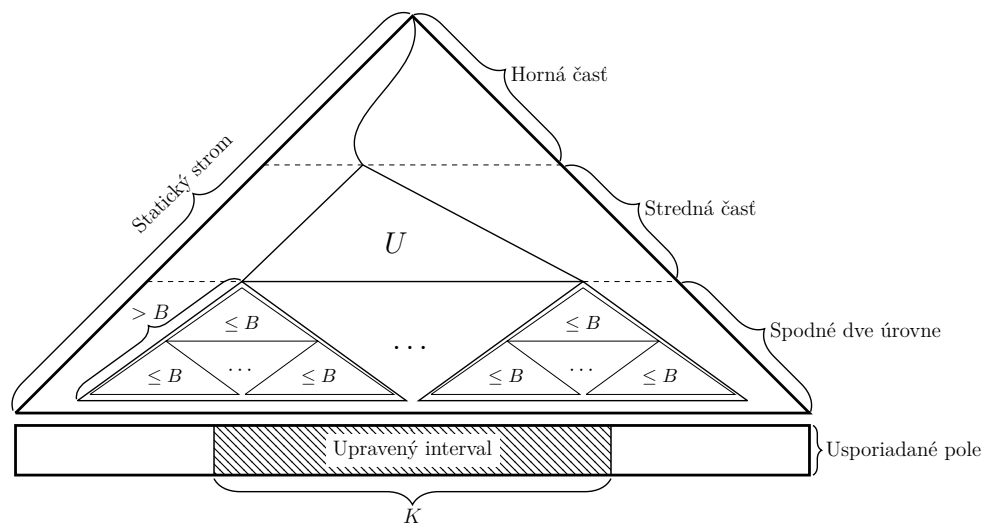
2:   if  $v$ .podstrom  $\cap I = \emptyset$  then                  ▷ pokiaľ sa zmena tohto vrcholu
3:     return                                              ▷ určite nedotkla, tak ho môžeme preskočiť

4:   if  $v$  je list then
5:      $v$ .kľúč  $\leftarrow$  hodnota z usporiadaného poľa
6:   else
7:     UPDATE( $v$ .ľavý)                                    ▷ najskôr aktualizujeme ľavého
8:     UPDATE( $v$ .pravý)                                    ▷ a pravého syna

9:    $v$ .kľúč  $\leftarrow \max(v$ .ľavý.kľúč,  $v$ .pravý.kľúč)    ▷ až potom tento vrchol

```

---



Obrázok 1.8: Rozdelenie statického stromu na tri časti pri analýze počtu pamäťových presunov.

### Spodné dve úrovne

Uvažujme najskôr ako v časti 1.2.5 také podstromy *van Emde Boas* delenia, ktoré sa ako prvé zmestia do bloku *cache* a teda ich veľkosť je medzi  $\sqrt{B}$  a  $B$ . Pozrime sa na spodné dve úrovne takýchto podstromov. Listy spodnej teda budú listy celého statického stromu a korene spodnej spodnej úrovne budú synovia listov hornej úrovne. Zvyšok stromu pokračuje nad týmito úrovňami a vrátime sa k nemu neskôr.

Podstromy v tomto delení sa zmestia do najviac dvoch blokov a vieme ich teda načítať pomocou  $\mathcal{O}(1)$  pamäťových presunov. Označme podstromy, ktoré vznikli rekurzívnym *van Emde Boas* delením z podstromu  $T$  veľkosti viac než  $B$ , rovnako, ako v časti 1.2.5:  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k$ . Tu  $\tau_0$  je podstrom v hornej úrovni a  $\tau_1, \dots, \tau_k$  sú podstromy v spodnej úrovni, ktorých korene sú potomkovia listov  $\tau_0$ .

Pri *post-order* prechode cez podstrom  $T$  budeme prejdeme najskôr cez ľavých synov

od koreňa  $\tau_0$  cez  $\tau_1$  až do listu. Následne bude *post-order* prechod prebiehať v podstrome  $\tau_1$ , až kým nebudú všetky jeho vrcholy a napokon aj koreň aktualizované. Potom sa vrátíme do  $\tau_0$  a k  $\tau_1$  už pristupovať nebudeme ale prejdeme nasledovný podstrom,  $\tau_2$ . Takto postupne aktualizujeme všetky podstromy, pričom postupnosť navštívených podstromov bude

$$\tau_0, \tau_1, \tau_0, \tau_2, \dots, \tau_0, \tau_i, \tau_0, \dots, \tau_k, \tau_0$$

Vidíme, že pokiaľ dokážeme udržať v *cache* aspoň dva také podstromy, teda za predpokladu  $M \geq 4B$ , sme schopný takýto *post-order* prechod zrealizovať pomocou  $\mathcal{O}(1)$  pamäťových operácii pre každý podstrom veľkosti  $\leq B$ . Takéto podstromy majú  $\mathcal{O}(B)$  listov, pričom nimi potrebujeme pokryť interval veľkosti  $K$  (podstromy, ktorých žiaden list neleží v upravenom intervale nie je potrebné aktualizovať) a teda celkový počet podstromov na spodných dvoch úrovniach, ktoré potrebujeme načítať a upraviť je  $\mathcal{O}(\frac{K}{B})$  a stačí nám na to  $\mathcal{O}(\frac{K}{B})$  pamäťových presunov.

### Stredná úroveň - najbližší spoločný predok

Označme ako  $T_1, \dots, T_l$  tie stromy veľkosti  $> B$  obsahujúce podstromy veľkosti  $\leq B$  na spodných dvoch úrovniach, ktoré boli v predošlej časti aktualizované. Platí teda  $l = \mathcal{O}(\frac{K}{B})$ . Označme  $U$  taký podstrom statického stromu, ktorého koreň je najbližší spoločný predok koreňov  $T_1, \dots, T_l$ . Ak je tento koreň v hĺbke  $h$  tak  $U$  obsahuje všetky vrcholy hĺbky  $\geq h$ , ktoré treba aktualizovať - tie mimo  $U$  nie sú predkovia upravených vrcholov a teda hodnoty kľúčov ich synov neboli v prvej časti zmenené.

Počet vrcholov  $U$  je najviac dvojnásobok počtu listov a teda  $|U| = \mathcal{O}(l) = \mathcal{O}(\frac{K}{B})$ . Keďže pri *post-order* prechode navštívime každý vrchol  $\mathcal{O}(1)$  krát (najprv pri prechode z koreňa ku listom, pričom následne rekurzívne prejdeme ľavého a pravého syna, a potom pri návrate z rekurzie) a teda celkovo budeme potrebovať  $\mathcal{O}(\frac{K}{B})$  pamäťových presunov na aktualizáciu  $U$ .

### Horná úroveň - cesta z najbližšieho spoločného predka do koreňa

Posledná množina vrcholov, ktoré je potrebné aktualizovať je cesta z koreňa  $U$  do koreňa statického stromu. Dĺžka tejto cesty je obmedzená výškou stromu  $\mathcal{O}(\log N)$  a pri aktualizovaní prechádzame cez jej vrcholy postupne. Podobne ako pri vyhľadávaní (časť 1.4.3) bude potrebných  $\mathcal{O}(\log_B N)$  pamäťových presunov.



## Výsledná zložitosť

Sčítaním nasledovných zložítostí počtu pamäťových operácií

Nájdenie pozície v usporiadanom poli:	$\mathcal{O}(\log_B N)$
Vloženie do usporiadaného poľa:	$\mathcal{O}(\frac{K}{B})$
Aktualizácia spodných dvoch úrovní:	$\mathcal{O}(\frac{K}{B})$
Aktualizácia strednej úrovne:	$\mathcal{O}(\frac{K}{B})$
Aktualizácia hornej úrovne:	$\mathcal{O}(\log_B N)$

dostávame celkovú zložitosť  $\mathcal{O}(\log_B N + \frac{K}{B})$ . Keďže amortizovaná veľkosť upraveného intervalu je  $K = \mathcal{O}(\log^2 N)$  dostávame výslednú amortizovanú zložitosť počtu pamäťových operácií pri vkladaní:  $\mathcal{O}(\log_B N + \frac{\log^2 N}{B})$ .

### 1.4.6 Odstraňovanie

Algoritmus odstraňovania je analogický, po nájdení prvku v usporiadanom poli ho odstránime, čím sa zmení súvislý amortizovanej veľkosti  $\mathcal{O}(\log^2 N)$ . Následne aktualizujeme kľúče v statickom poli rovnako ako pri vkladaní. Výsledná zložitosť bude taktiež rovnaká.

## 1.5 Vylepšený dynamický B-strom

Oproti *cache-aware* B-stromom ma pri vkladaní *cache-oblivious* dynamický strom popísaný v predchádzajúcej sekcii navyše  $\mathcal{O}(\frac{\log^2 N}{B})$  pamäťových presunov. Odstrániť ho môžeme jednoduchou modifikáciou.

Vezmeme  $N$  kľúčov a rozdelíme ich do  $\Theta(\frac{N}{\log N})$  blokov veľkosti  $\Theta(\log N)$ . Minimum z každej skupiny použijeme ako kľúče v predchádzajúcej dátovej štruktúre, ktorej veľkosť bude  $\Theta(\frac{N}{\log N})$ .

### 1.5.1 Vyhľadávanie

Najskôr vyhladáme požadovaný blok v B-strome, čo zaberie  $\mathcal{O}(\log_B \frac{N}{\log N}) = \mathcal{O}(\log_B N - \log_B \log N) = \mathcal{O}(\log_B N)$  pamäťových presunov. Následne prejdeme daný blok celý a nájdeme v ňom požadovaný kľúč. To vyžaduje  $\mathcal{O}(\frac{\log N}{B})$  pamäťových presunov - zanedbateľné voči hľadaniu v B-strome - a spolu teda vyhľadávanie vyžaduje rovnako veľa pamäťových presunov ako neupravený B-strom:  $\mathcal{O}(\log_B N)$ .

### 1.5.2 Vkladanie a odstraňovanie

Po nájdení požadovaného bloku vykonáme vloženie prípadne odstránenie z neho kompletným prepísaním, čo vyžaduje  $\mathcal{O}(\frac{\log N}{B})$  presunov. Zároveň budeme udržiavať veľkosti blokov medzi  $\frac{1}{4} \log N$  a  $\log N$ . Príliš malé skupiny môžeme spojiť do väčších a veľké rozdeliť na niekoľko menších. Skupina prekročí svoje hranice najskôr po  $\Omega(\log N)$  operáciách. V takom prípade po rozdelení alebo spojení bude potrebné vykonať vloženie alebo odstránenie z B-stromu. Vydelením dostaneme amortizovanú zložitosť vkladania a odstraňovania v takto upravenej štruktúre:  $\mathcal{O}(\log_B N)$ .

Opäť sme teda dosiahli rovnaký počet operácií ako ekvivalentná *cache-aware* dátová štruktúra, avšak tentokrát v amortizovane.

# Literatúra

- [1] AGGARWAL, Alok ; VITTER, Jeffrey u. a.: The input/output complexity of sorting and related problems. In: *Communications of the ACM* 31 (1988), Nr. 9, S. 1116–1127
- [2] BAYER, Rudolf: Binary B-trees for Virtual Memory. In: *Proceedings of the 1971 ACM SIGFIDET (Now SIGMOD) Workshop on Data Description, Access and Control*. New York, NY, USA : ACM, 1971 (SIGFIDET '71), 219–235
- [3] BENDER, Michael A. ; DEMAINE, Erik D. ; FARACH-COLTON, Martin: Cache-Oblivious B-Trees. In: *Proceedings of the 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2000)*. Redondo Beach, California, November 12–14 2000, S. 399–409
- [4] BENDER, Michael A. ; DEMAINE, Erik D. ; FARACH-COLTON, Martin: Cache-Oblivious B-Trees. In: *SIAM Journal on Computing* 35 (2005), Nr. 2, S. 341–358
- [5] BENDER, Michael A. ; DUAN, Ziyang ; IACONO, John ; WU, Jing: A locality-preserving cache-oblivious dynamic dictionary. In: *Proceedings of the thirteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms* Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002, S. 29–38
- [6] DEMAINE, Erik D.: Cache-Oblivious Algorithms and Data Structures. In: *Lecture Notes from the EEF Summer School on Massive Data Sets*. BRICS, University of Aarhus, Denmark, June 27–July 1 2002
- [7] DREPPER, Ulrich: What every programmer should know about memory. In: *Red Hat, Inc* 11 (2007)
- [8] FRIGO, Matteo ; LEISERSON, Charles E. ; PROKOP, Harald ; RAMACHANDRAN, Sridhar: Cache-oblivious algorithms. In: *Foundations of Computer Science, 1999. 40th Annual Symposium on* IEEE, 1999, S. 285–297
- [9] INTEL CORPORATION: *Intel® 64 and IA-32 Architectures Optimization Reference Manual*. 2014 ( 248966-029)

- [10] INTEL CORPORATION: *Intel® 64 and IA-32 Architectures Software Developer's Manual*. 2014 ( 325462-050US)
- [11] KASHEFF, Zardosht: *Cache-oblivious dynamic search trees*, Massachusetts Institute of Technology, Diss., 2004
- [12] KOTRLOVÁ, Katarína: *Vizualizácia háld a intervalových stromov*, Univerzita Komenského v Bratislave, bakalárska práca, 2012
- [13] KOVÁČ, Jakub: *Vyhľadávacie stromy a ich vizualizácia*, Univerzita Komenského v Bratislave, bakalárska práca, 2007
- [14] LUKČA, Pavol: *Perzistentné dátové štruktúry a ich vizualizácia*, Univerzita Komenského v Bratislave, bakalárska práca, 2013
- [15] PROKOP, Harald: *Cache-oblivious algorithms*, Massachusetts Institute of Technology, Diss., 1999
- [16] TOMKOVIČ, Viktor: *Vizualizácia stromových dátových štruktúr*, Univerzita Komenského v Bratislave, bakalárska práca, 2012