Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Cache-oblivious algoritmy a ich vizualizácia

Bakalárska práca

2014 **Ladislav Pápay**

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Cache-oblivious algoritmy a ich vizualizácia

Bakalárska práca

Študijný program: Informatika
Študijný odbor: 2508 Informatika
Školiace pracovisko: Katedra Informatiky FMFI
Vedúci práce: Mgr. Jakub Kováč, PhD.

2014 **Ladislav Pápay**

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Ladislav Pápay
Študijný program: informatika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.2.1. informatika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Cache-oblivious algoritmy a ich vizualizácia / *Cache-oblivious algorithms and their visualization*

Cieľ: Cieľom práce je uviesť prehľad a implementovať vizualizácie vybraných cache-oblivious algoritmov a dátových štruktúr.

Kľúčové slová: cache-oblivious algoritmy, visualizácia

Vedúci: Mgr. Jakub Kováč, PhD.
Katedra: FMFI.KI - Katedra informatiky
Vedúci katedry: doc. RNDr. Daniel Olejár, PhD.

Dátum zadania: 30.10.2013

Dátum schválenia: 30.10.2013 doc. RNDr. Daniel Olejár, PhD.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Poďakovanie

Za návrh témy a odbornú pomoc pri jej spracovaní patrí vďaka môjmu školiteľovi Jakubovi Kováčovi. Ďalej ďakujem svojím priateľom za testovanie a spätnú väzbu počas spracúvania tejto práce. V neposlednom rade ďakujem rodine za podporu a poskytnuté možnosti vzdelávania.

Čestne prehlasujem, že prácu *Cache-oblivious algoritmy a ich vizualizácia* som vypracoval samostatne na základe vlastných teoretických a praktických poznatkov s použitím odborných zdrojov, ktorých úplný prehľad je uvedený v zozname použitej literatúry.

Ladislav Pápay

Abstrakt

V tejto práci sa zaoberáme modelom externej pamäte, ktorý vystihuje hierarchické pamäte v dnešných výpočtových systémoch. Ďalej uvádzame upravenú verziu tohto modelu, takzvaný *cache-oblivious model*. Pre tento model uvádzame niekoľko algoritmov a dátových štruktúr spolu s ich pamäťovou analýzou. Napokon v poslednej časti práce popisujeme funkcionalitu a používanie vizualizácií vytvorených ako súčasť tejto práce.

Výsledkom práce sú vizualizácie pre niekoľko vybraných *cache-oblivious* dátových štruktúr, ktoré sú implementované ako rozšírenie aplikácie *Gnarley Trees*, ktorá vznikla ako súčasť bakalárskej práce Jakuba Kováča v roku 2007. Na priloženom CD sa nachádza zdrojový kód a spustiteľná verzia tejto aplikácie.

Kľúčové slová: dátové štruktúry, pamäťová analýza, cache, cache-oblivious, vizualizácia

Abstract

In this thesis we consider the external memory model, which depicts the hierarchical memory used in today's computer systems. Next we introduce a modification of this model, the so called *cache-oblivious model*. We describe several algorithms and data structures in this model together with their memory analyses. In the last part we describe the features and usage of visualizations created as a part of this work.

The result of this thesis are visualizations of several selected *cache-oblivious* data structures implemented as an extension of the *Gnarley Trees* application, which was created as a part of bachelor's thesis by Jakub Kováč in 2007. The attached CD contains source code and executable version of this application.

KEYWORDS: data structures, memory analyis, cache, cache-oblivious, visualizations

Obsah

Zoznam obrázkov

KAPITOLA 1

Cache-oblivius algoritmy a dátové štruktúry

V tejto kapitole popíšeme niekoľko *cache-oblivious* algoritmov a dátových štruktúr, spolu s ich pamäťovou analýzou v *cache-oblivious* modeli. Zároveň uvedieme ekvivalentnú *cache-aware* dátovú štruktúru a vzájomne ich porovnáme. Najskôr sa však pozrieme na jeden jednoduchý príklad, ako túto analýzu riešime.

1.1 Základný algoritmus

Na demonštráciu *cache-oblivious* algoritmov a ich analýzy v *external-memory* modeli použijeme jednoduchý algoritmus, ktorý počíta agregačnú funkciu nad hodnotami uloženými v poli. Uvažujeme pole $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a danú funkciu g s počiatočnou hodnotou g_0. Chceme vypočítať hodnotu $f_g(A)$, kde f_g je rozšírenie agregačnej funkcie definované následovne:

$$f_g(\{a_1, \ldots, a_k\}) = g(a_k, f(\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}))$$
$$f_g(\emptyset) = g_0$$

Túto funkciu je možné implementovať jednoducho ako jeden cyklus. Schematickú verziu implementácie uvádzame v algoritme 1.1. Tento algoritmus s použitím vhodnej funkcie g a hodnoty g_0 je možné použiť na rôzne, často užitočné výpočty, ako napríklad maximum, minimum, suma a podobne:

$$g^{\max}(x, y) = \max(x, y) \qquad g_0^{\max} = -\infty$$
$$g^{\text{sum}}(x, y) = x + y \qquad g_0^{\text{sum}} = 0$$

Algoritmus 1.1 Implementácia agregačnej funkcie f_g

```
1: function AGGREGATE(g, g_0, A)
2:     y ← g_0
3:     for i ← 1, ..., |A| do
4:         y ← g(A[i], y)
5:     return y
```

1.1.1 Analýza zložitosti

Časová analýza

Klasická časová analýza tohto algoritmu je triviálna ak uvažujeme *RAM* model. Keďže prístup ku každému prvku `A[i]` zaberie konštantný čas a za predpokladu, že čas na výpočet funkcie g je nezávislý na vstupe, bude výsledný čas na výpočet tejto funkcie lineárny od veľkosti poľa N, teda $T(N) = \mathcal{O}(N)$.

Analýza počtu pamäťových presunov

V prípade *cache-aware* algoritmu by sme pole A mali uložené v $\lceil \frac{N}{B} \rceil$ blokoch veľkosti B. Pri výpočte by sme postupne tieto bloky načítali do cache a pracovali s nimi. V rámci jedného bloku počas výpočtu nedochádza k pamäťovým presunom. Zároveň stačí každý prvok spracovať raz a teda celkový počet pamäťových operácií bude presne rovný počtu blokov, $\lceil \frac{N}{B} \rceil$. Tento algoritmus však požaduje znalosť parametra B a zarovnať pole v pamäti tak, aby zabralo najmenší potrebný počet blokov.

Jednoducho však vieme dosiahnuť (takmer) rovnakú zložitosť aj v prípade *cache-oblivious* algoritmu 1.1, ktorý žiadne parametre pamäte zjavne nevyužíva a nepozná. Budeme predpokladať, že pole A je uložené v súvislom úseku pamäte - to je možné dosiahnuť aj bez znalosti parametrov pamäte. Zvyšok algoritmu prebieha rovnako ako v predchádzajúcom prípade. Každý blok obsahujúci nejaký prvok poľa A bude teda presunutý do cache práve raz, a žiadne iné presuny nenastanú. Ostáva zistiť, koľko takých blokov môže byť.

Keďže nepoznáme veľkosti blokov v pamäti, nevieme pri ukladaní prvkov poľa zaručiť zarovnanie so začiatkom bloku. V najhoršom prípade uložíme do prvého bloku iba jeden prvok. Potom bude nasledovať $\lfloor \frac{N}{B} \rfloor$ plných blokov a nakoniec ešte najviac jeden blok, ktorý opäť nie je plný. Spolu máme teda $\lfloor \frac{N}{B} \rfloor + 2$ blokov.

Pokiaľ $\lfloor \frac{N}{B} \rfloor < \lceil \frac{N}{B} \rceil$ máme spolu najviac $\lceil \frac{N}{B} \rceil + 1$ blokov. V opačnom prípade B delí N, teda v prvom a poslednom bloku je spolu presne B prvkov a medzi nimi sa nachádza najviac $\frac{N-B}{B} = \frac{N}{B} - 1$ plných. Teda blokov je vždy najviac $\lceil \frac{N}{B} \rceil + 1$.

Zostrojili sme teda *cache-oblivious* algoritmus s asymptoticky rovnakou zložitosťou $\mathcal{O}(\frac{N}{B})$ ako optimálny *cache-aware* algoritmus, ktorého implementácia je však jednoduchšia, keďže nemusí explicitne spravovať presun blokov do cache. Parameter B sme použili len počas analýzy, v samotnom návrhu algoritmu nie.

1.2 Vyhľadávanie v statickej množine

Častým problémom v informatike je nutnosť rýchlo a efektívne vyhľadávať prvok v nejakej statickej množine prvkov. Tento problém by šiel riešiť hašovaním, budeme však uvažovať usporiadanú množinu, v ktorej chceme vedieť efektívne pristúpiť k predchádzajúcemu a nesledujúcemu prvku. V tejto sekcii popíšeme niekoľko algoritmov a dátových štruktúr, ktoré tento problém riešia. Všetky majú v *RAM* modeli časovú zložitosť $\mathcal{O}(\log N)$, kde N je počet prvkov v prehľadávanej množine, no v *cache-aware* a *cache-oblivious* modeloch sa budú líšiť počtom pamäťových presunov, ktoré vykonajú.

Tento rozdiel je spôsobený iným usporiadaním prvkov v pamäti. Keďže majú všetky uvedené prístupy logaritmickú časovú zložitosť bude počet presunutých blokov najviac $\mathcal{O}(\log N)$. V tomto odhade však nevystupujú žiadne parametre *cache* a teda ich zväčšenie tento algoritmus nemusí urýchliť. Ukážeme ale dátovú štruktúru, ktorá dosahuje podstatne lepší výsledok $\mathcal{O}(\log_B N)$ a bude nám tiež slúžiť ako základ pri riešení dynamickej verzie tohto problému.

1.2.1 Binárne vyhľadávanie

Ako prvé popíšeme binárne vyhľadávanie, ktoré je asi najznámejšie. V algoritme 1.2 uvádzame implementáciu, ktorá nájde prvok K v usporiadanom poli $\texttt{A}[0, \ldots, N-1]$, pre ktoré platí $\forall i, j;\ 0 \leq i < j < N : \texttt{A}[i] \leq \texttt{A}[j]$.

Algoritmus 1.2 Implementácia binárneho vyhľadávania

```
1:  function FIND(A, K)
2:      left ← 0
3:      right ← N
4:      while left < right do
5:          mid ← ⌊(left+right)/2⌋
6:          if A[mid] = K then
7:              return mid
8:          else if A[mid] > K then
9:              right ← mid
10:         else
11:             left ← mid + 1
12:     return K ∉ A
```

Vidíme, že táto implementácia binárneho vyhľadávania nikde nepožaduje znalosť parametrov B ani M a teda ide o *cache-oblivious* algoritmus, tak ako v prípade agregačného algoritmu 1.1.

Analýza zložitosti

Pri každej iterácií zmenšíme oblasť, ktorú treba preskúmať na polovicu. Počet iterácií a celková zložitosť bude teda riešenie rekurentného vzťahu

$$T(N) = T(N/2) + \mathcal{O}(1)$$

V prípade časovej analýzy je bázou rekurencie $T(1) = \mathcal{O}(1)$ a výsledná časová zložitosť bude $T(N) = \mathcal{O}(\log N)$.

Pri pamäťovej analýze bude bázou $T(B) = \mathcal{O}(1)$, pretože po zredukovaní prehľadávaného intervalu na veľkosť B vieme všetky potenciálne prvky načítať v $\mathcal{O}(1)$ blokoch a k ďalším presunom už nedôjde. Riešením a celkovou pamäťovo zložitosťou teda bude $T(N) = \mathcal{O}(\log N - \log B) = \mathcal{O}(\log \frac{N}{B})$.

Ako však uvidíme v ďalšej sekcii, toto riešenie nie je optimálne.

1.2.2 *Cache-aware* riešenie

V prípade, že poznáme veľkosť blokov B v cache, môžeme problém vyhľadávacích stromov riešiť B-stromom [5] s vetvením $\Theta(B)$. Každý vrchol teda vieme načítať s použitím $\mathcal{O}(1)$ pamäťových presunov. Výška takého B-stromu, ktorý má N listov, bude $\mathcal{O}(\log_B N)$. Celkovo teda vyhľadávanie v tomto strome vykoná $\mathcal{O}(\log_B N)$ pamäťových presunov.

Toto je lepší výsledok ako dosahuje binárne vyhľadávanie. Stále však zostáva otázka, či neexistuje ešte efektívnejšie riešenie. Pozrime sa teda na spodnú hranicu tohto problému.

1.2.3 Spodná hranica pre vyhľadávanie

Pri vyhľadávaní potrebujeme pristúpiť k aspoň $\Omega(\log N)$ prvkom. Tie by v ideálnom prípade boli uložené v $\Omega(\frac{\log N}{B})$ blokoch, čo tvorí spodnú hranica počtu pamäťových presunov. Tento odhad je ale príliš optimistický – ako ukážeme odvodením väčšej spodnej hranice, nie je možné ho dosiahnuť.

Toto odvodenie spravíme rovnako ako v [10] technikou informačnej zložitosti. Na nájdenie daného prvku v množine obsahujúcej N položiek potrebujeme získať $\lg(2N+1)$ informačných bitov reprezentujúcich pozíciu tohto prvku – N možných existujúcich prvkov a $N+1$ pozícií medzi nimi (a na okrajoch) pre neexistujúci prvok. V každom pamäťovom presune načítame jeden blok veľkosti B, ktorý môže obsahovať najviac $\lg(2B+1)$ bitov informácie – hľadaný prvok je jeden z týchto B prvkov alebo patrí v usporiadaní niekam medzi ne. V najlepšom prípade je teda potrebných aspoň

$$\frac{\lg(2N+1)}{\lg(2B+1)} \geq \frac{\lg N}{\lg B} = \Omega(\log_B N)$$

pamäťových presunov. Tento odhad je na rozdiel od predchádzajúceho dosiahnuteľný, napríklad práve *cache-aware* B-stromami.

Vidíme teda, že na rozdiel od *cache-oblivious* binárneho vyhľadávania, je *cache-aware* B-strom asymptoticky optimálnym riešením tohto problému. Chceli by sme teraz nájsť *cache-oblivious* dátovú štruktúru, ktorá tiež dosahuje túto hranicu.

1.2.4 Naivné *cache-oblivious* riešenie

Predtým ako popíšeme efektívne *cache-oblivious* riešenie, sa pozrime na klasický binárny vyhľadávací strom. Asi najjednoduchší spôsob, ako usporiadať uzly (statického) binárneho stromu v pamäti, je nasledovný. Koreň uložíme na pozíciu 1. Ľavého a pravého potomka vrcholu na pozícii x uložíme na pozície $2x$ a $2x+1$. Otec vrcholu x bude teda na pozícii $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$. Toto usporiadanie voláme *BFS usporiadanie* (z anglického *breadth-first search* – prehľadávanie do šírky), keďže pozície vrcholov sa zvyšujú v rovnakom poradí ako by prebiehalo prehľadávanie tohto stromu do šírky. Príklad takto uloženého stromu je na obrázku 1.2(a).

Výhodou tohto usporiadania sú implicitné vzťahy medzi vrcholmi. Na udržiavanie stromu stačí jednorozmerné pole kľúčov. Na prechod medzi nimi môžeme použiť triviálne funkcie uvedene v algoritme 1.3.

Algoritmus 1.3 Funkcie pre získanie pozícií ľavého syna, pravého syna a rodiča vrcholu na pozícii x

```
1: function LEFT(x)          1: function RIGHT(x)          1: function PARENT(x)
2:     return 2x             2:     return 2x + 1          2:     return ⌊x/2⌋
```

Nevýhodou je však vysoký počet pamäťových presunov pri vyhľadávaní. Výška tohto stromu je[1] $\mathcal{O}(\log N)$. Pri načítaní vrcholu na pozícii x sa v rovnakom bloku nachádzajú vrcholy na pozíciach

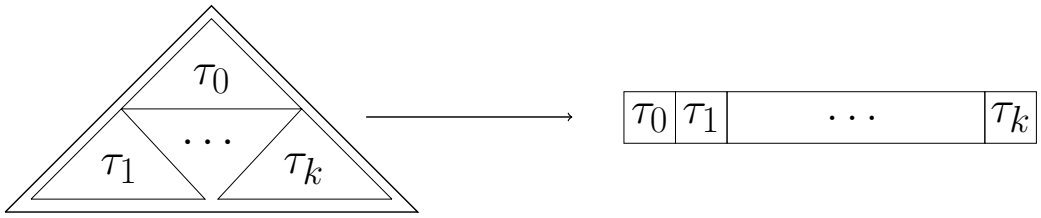
$$x-k, \ldots, x-1, x, x+1, \ldots, x+\ell$$

kde $k+\ell = B-1$. Pri ďalšom kroku vyhľadávania budeme potrebovať vrchol $2x$ alebo $2x+1$ a teda nás pozície menšie ako x nezaujímajú. V najlepšom prípade teda bude $k=0$ a $\ell = B-1$. Aby sa v tomto intervale nachádzali požadované vrcholy, musí platiť

$$2x+1 \leq x+\ell = x+B-1$$
$$x \leq B-2$$

To znamená, že pre pozície $x > B-2$ už bude potrebný pamäťový presun pre každý vrchol. Vrchol s pozíciou $B-2$ bude mať hĺbku $\mathcal{O}(\log B)$ a teda počet vrcholov na ceste

[1] Nejde o vyvažovaný binárny strom a teda by výška mohla byť až $\mathcal{O}(N)$. Keďže však pracujeme so statickými dátami, môžeme ich vopred usporiadať a vyrobiť vyvážený statický strom



Obrázok 1.1: Schematické znázornenie rekurzívneho delenia pri *van Emde Boasovom* usporiadaní. Podstromy $\tau_0, \ldots, \tau_k$ sa uložia do súvislého úseku pamäte.

z koreňa do listu, ktorých pozície v pamäti sú väčšie ako $B-2$ bude $\Omega(\log N - \log B)$. Pre každý z nich je potrebné vykonať pamäťový presun a teda vyhľadávanie v takto usporiadanom binárnom strome vykoná $\Omega(\log \frac{N}{B})$ pamäťových presunov, čo je rovnako ako binárne vyhľadávanie horšie v porovnaní s *cache-aware* B-stromom.

1.2.5 Vyhľadávací strom vo *van Emde Boasovom* usporiadaní

Problémom predošlého riešenia je neefektívne usporiadanie v pamäti - pri prístupe ku vrcholu sa spolu s ním v rovnakom bloku nachádzajú vrcholy, ktoré nie sú pre ďalší priebeh algoritmu podstatné.

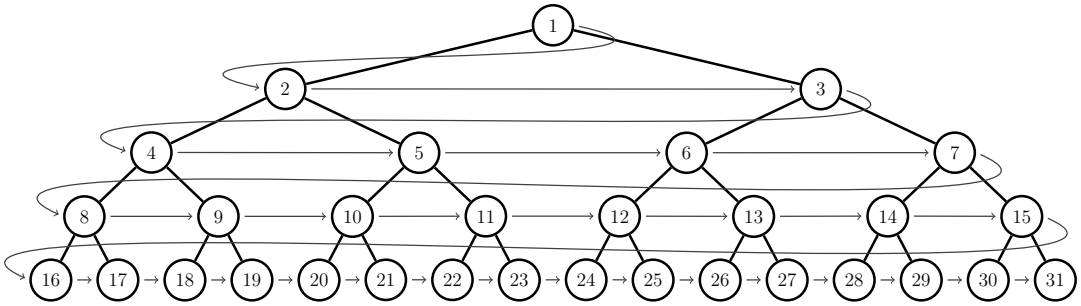
Možným riešením je takzvané *van Emde Boasovo usporiadanie* (*van Emde Boas layout*, nazvané podla *van Emde Boasových* stromov s podobnou myšlienkou), ktoré popísali Bender et al. [6, 7]. Toto usporiadanie vznikne rekurzívnym delením, ktoré schéma je na obrázku 1.1 a príklad takto uloženého stromu na obrázku 1.2(b).

Uvažujme úplný binárny strom výšky h. Ak $h = 1$ tak máme iba jeden vrchol v a výstupom usporiadania bude poradie (v).

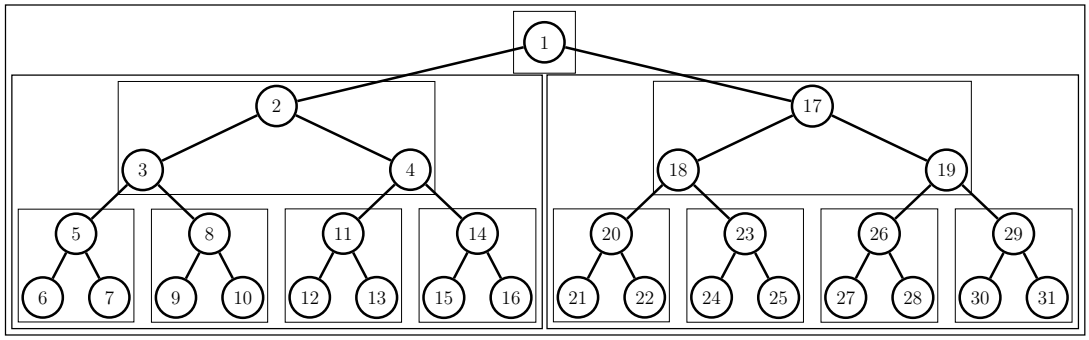
Pre $h > 1$ označme $m = \max_{i \in \mathbb{N}}\{2^i \mid 2^i < h\}$, teda najväčšiu mocninu dvoch menšiu ako h. Rozdelíme vstupný strom na podstrom τ_0 výšky $h - m$, ktorého koreňom je koreň pôvodného stromu. Zostanú nám podstromy $\tau_1, \ldots, \tau_k$ výšky m (obrázok 1.1). Korene týchto podstromov sú potomkovia listov τ_0 a ich z listy sú listy vstupného stromu. Všetky tieto podstromy majú približne polovičnú výšku a teda ich veľkosť je $\Theta(\sqrt{N})$ kde N je veľkosť vstupného stromu, keďže $\frac{h}{2} = \frac{1}{2}\lg N = \lg\sqrt{N}$. Rekurzívne ich uložíme do *van Emde Boasovho* usporiadania a následne uložíme za seba, výstupom teda bude poradie $(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k)$.

Prechod stromom v pamäti

Na rozdiel od klasického *BFS* usporiadania nie je pri takomto usporiadaní v pamäti triviálne zistiť, na akej pozícii sa nachádzajú potomkovia alebo rodič aktuálneho vrcholu. Jedným možným riešením je spolu s každým vrcholom ukladať aj ukazovateľ na tieto relevantné vrcholy. Tým znížime počet vrcholov, ktoré sa zmestia do jedného bloku o konštantný násobok – v prípade, že je kľúč rovnako veľký ako ukazovateľ, bude počet vrcholov v jednom bloku štvrtina pôvodného počtu.



(a) Klasické usporiadanie



(b) *van Emde Boasovo* usporiadanie

Obrázok 1.2: Porovnanie klasického a *van Emde Boasovho* usporiadania na úplnom binárnom strome výšky 5. Čísla vo vrcholoch určujú poradie v pamäti.

Iným riešením je vnútorne pracovať s *BFS* usporiadaním a prechádzať medzi pozíciami funkciami uvedenými v algoritme 1.3. Pri prístupe k vrcholu túto *BFS* pozíciu prevedieme na ekvivalentnú pozíciu vo *van Emde Boasovom* usporiadaní. Pri strome s N vrcholmi je možné túto konverziu realizovať v čase $\mathcal{O}(\log \log N)$ [15].

Vyhľadávanie

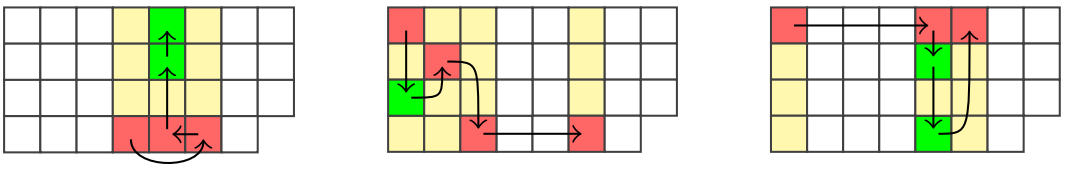
Pri analýze vyhľadávania sa pozrime na také podstromy predošlého delenia, že ich veľkosť je $\Theta(B)$. Ďalšie delenie a preusporiadanie je už zbytočné, no to *cache-oblivious* algoritmus nemá ako vedieť. Keďže ale po rekurzívnom volaní získame len iné usporiadanie, ktoré uložíme v súvislom úseku pamäte, bude stále možné tento podstrom načítať v $\mathcal{O}(1)$ blokoch.

Majme teda vyhľadávací strom zložený z takýchto podstromov, ktorých veľkosť je medzi $\Omega(\sqrt{B})$ a $\mathcal{O}(B)$. Ich výška je teda $\Theta(\log B)$. Pri strome výšky $\mathcal{O}(\log N)$ teda prejdeme cez $\mathcal{O}(\frac{\log N}{\log B})$ takých podstromov a každý vyžaduje konštantný počet pamäťových presunov. Spolu sa ich teda vykoná $\mathcal{O}(\log_B N)$, čo zodpovedá spodnej hranici tohto problému.

1.2.6 Rozdiely v prístupe ku pamäti

Rozdiely medzi binárnym vyhľadávaním a statickými vyhľadávacími stromami v *BFS* a *van Emde Boas* usporiadaniach vizuálne znázorňujú obrázky 1.4 a 1.5 na strane 10. Pozrime sa však najskôr na menší obrázok 1.3, na ktorom vysvetlíme princíp tejto vizualizácie.

(a) Binárne vyhľadávanie (b) *BFS* strom (c) *van Emde Boasov* strom



Obrázok 1.3: Porovnávanie prístupov ku pamäti v rôznych štruktúrach pri vyhľadávaní hodnoty 17 medzi 31 prvkami

Jednotlivé políčka sú položky poľa, pričom v pamäti sú usporiadané v poradí zhora nadol a zľava doprava. Samotné kľúče (vo vrcholoch stromov) sú však usporiadané inak a preto sú tieto prístupy inak efektívne. Vo všetkých prípadoch vyhľadávame prvok v množine $\{1, \ldots, 2^h - 1\}$, čo je počet vrcholov úplného binárneho stromu výšky h. Farby označujú stav políčka v simulovanej *cache* s veľkosťou bloku $B = 4$. Bloky sú v zarovnané tak, že jeden stĺpec predstavuje jeden blok a teda sa pri načítaní ľubovolného políčka spolu s ním načíta celý príslušný stĺpec.

Červená farba reprezentuje prvky, ktoré sa v momente prístupu nenachádzali v *cache* a bolo potrebné ich načítať (*cache miss*). Zelená naopak označuje prvky, ktoré už v *cache* boli (*cache hit*) – načítali sa spolu s nejakým červeným prvkom v rovnakom bloku. Ostatné prvky, ktoré sa načítali ako súčasť bloku ale neboli použité, sú označené žltou farbou. V tejto simulácii je počet blokov v *cache* ($\frac{M}{B}$) pre jednoduchosť neobmedzený.

V malom obrázku 1.3 (výška stromu $h = 5$) šípky určujú poradie, v akom vyhľadávanie pristupovalo k jednotlivým prvkom. Vo veľkých obrázkoch 1.4 a 1.5 (výška stromu $h = 9$) sú šípky pre prehľadnosť vynechané a políčko s bodkou označuje pozíciu, na ktorej bol napokon požadovaný prvok nájdený. Rozdiely medzi týmito troma prístupmi k vyhľadávaniu je lepšie vidieť práve na väčších obrázkoch.

Keďže všetky hľadané hodnoty boli zvolené ako listy týchto vyhľadávacích stromov, pristúpili operácie vyhľadávania vo všetkých troch prípadoch práve k h prvkom. Rozdiel je však v pomere počtu červených (ktoré v *cache* neboli a bolo ich potrebné načítať) a zelených (na ktoré nebol potrebný pamäťový presun) prvkov.

Ako ľahko vidieť, binárne vyhľadávanie začne v strede a presúva sa medzi prvkami, ktoré sú od seba čoraz menej vzdialené až do momentu, kedy už je prehľadávaný interval dostatočne malý na to, aby sa zmestil do bloku.

Naopak strom v *BFS* usporiadaní robí stále väčšie a väčšie *skoky* a porovnávané prvky sa do jedného bloku zmestia iba na začiatku.

Avšak strom vo *van Emde Boasovom* usporiadaní potom čo pristúpi k nejakému prvku v ďalších krokoch pristupuje k prvkom, ktoré sú v pamäti blízko a veľký *skok*, ktorý pristúpi mimo *cache*, vykonáva menej často. Vďaka tomu dosahuje v oboch príkladoch najlepší počet zásahov do *cache*, teda najviac zelených políčok.

1.2.7 Dynamická verzia vyhľadávacieho stromu

V časti 1.2.5 sme popísali štruktúru, ktorá dokáže vyhľadávať v usporiadanej statickej množine optimálne, rovnako ako *cache-aware* B-stromy. Problémom tejto dátovej štruktúry je však nemožnosť efektívne vkladať či odoberať prvky - pri každej zmene by bolo potrebné strom preusporiadať. Dostávame tak *cache-oblivious* ekvivalent statických *cache-aware* B-stromov.

Na úpravu tohto statického stromu tak, aby efektívne zvládal operácie pridávania a odstraňovania, budeme potrebovať pomocnú dátovú štruktúru, ktorú popíšeme v následovnej sekcii.

1.3 Usporiadané pole

Problémom *údržby usporiadaného poľa* (z anglického *ordered-file maintenance*) budeme volať problém spočívajúci v udržiavaní zoradenej postupnosti N prvkov vo forme súvislého poľa veľkosti $\mathcal{O}(N)$. V tomto poli teda môžu byť *medzery* veľkosti najviac $\mathcal{O}(1)$, vďaka čomu bude načítanie K po sebe idúcich prvkov vyžadovať $\mathcal{O}(\frac{K}{B})$ pamäťových presunov. Do tejto postupnosti musí byť možné efektívne vkladať prvky na ľubovoľnú danú pozíciu a tiež odstraňovať existujúce prvky.

Dátovou štruktúrou, ktorá tento problém rieši efektívne je *štruktúra zhustenej pamäte* (*packed-memory structure*). Myšlienka tejto štruktúry spočíva v zostrojení binárneho stromu nad prvkami tohto poľa a udržiavaní *hustoty* – podielu plných a všetkých pozícií – pre každý vrchol v konštantných hraniciach. Tým zaručíme, že štruktúra nebude ani príliš plná, čo by spôsobovalo pri vkladaní nutnosť presúvať veľké množstvo existujúcich prvkov na uvoľnenie miesta, a ani príliš prázdna, čo by spôsobovalo pomalé prechádzanie kvôli veľkým medzerám.

1.3.1 Popis štruktúry

Budeme používať verziu z [6] s malými úpravami. Celá dátová štruktúra pozostáva z jedného poľa veľkosti $T = 2^h$. To (pomyselne) rozdelíme na *bloky* veľkosti $S = \Theta(\log N)$, tak aby $S = 2^\ell$. Počet blokov tak bude tiež mocnina dvoch.

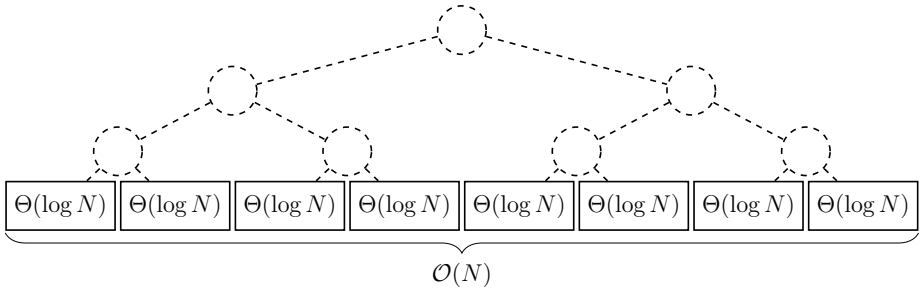
Nad týmito blokmi zostrojíme (imaginárny) úplný binárny strom (obrázok 1.6). *Hĺbkou* vrcholu označíme jeho vzdialenosť od koreňa, pričom koreň má hĺbku 0 a listy

(a) Binárne vyhľadávanie (b) Strom v *BFS* usporiadaní (c) Strom vo *van Emde Boasovom* usporiadaní

Obrázok 1.4: Porovnávanie prístupov ku pamäti v rôznych štruktúrach pri vyhľadávaní hodnoty 243 medzi 511 prvkami

(a) Binárne vyhľadávanie (b) Strom v *BFS* usporiadaní (c) Strom vo *van Emde Boasovom* usporiadaní

Obrázok 1.5: Porovnávanie prístupov ku pamäti v rôznych štruktúrach pri vyhľadávaní hodnoty 427 medzi 511 prvkami



Obrázok 1.6: Usporiadané pole veľkosti N. Strom nad blokmi je len imaginárny a nezostrojuje sa v pamäti.

majú hĺbku $d = h - \ell$. Na popis operácií budeme potrebovať definície *hustoty* a *hraníc hustoty*, ktoré uvedieme v nasledovnej časti.

1.3.2 Definícia hustoty

Kapacitou vrcholu v, $c(v)$, označíme počet položiek (aj prázdnych) poľa patriacich do blokov v podstrome začínajúcom v tomto vrchole. Kapacita listov bude teda S, ich rodičov $2S$ a kapacita koreňa bude T. Podobne budeme počet neprázdnych položiek v podstrome vrcholu v volať *obsadnosť* a značiť $o(v)$.

Hustotou, $0 \leq d(v) \leq 1$, označíme $d(v) = \frac{o(v)}{c(v)}$. Zvoľme ľubovoľné konštanty $\rho_0, \tau_0, \rho_d, \tau_d$ spĺňajúce

$$0 < \rho_d < \rho_0 < \tau_0 < \tau_d < 1$$

Z týchto konštánt definujeme pre vrchol s hĺbkou k *dolnú* a *hornú hranicu hustoty* (ρ_k a τ_k) následovne:

$$\rho_k = \rho_0 + \frac{k}{d}(\rho_d - \rho_0) \qquad \tau_k = \tau_0 - \frac{k}{d}(\tau_0 - \tau_d)$$

Dostaneme tak postupnosť hraníc pre všetky hĺbky, pričom platí $(\rho_i, \tau_i) \subset (\rho_{i+1}, \tau_{i+1})$ a teda sa tieto intervaly smerom od listov ku koreňu zmenšujú:

$$0 < \rho_d < \rho_{d-1} < \cdots < \rho_0 < \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_d < 1$$

Hovoríme, že vrchol v hĺbky k je v *hraniciach* hustoty ak platí $\rho_k \leq d(v) \leq \tau_k$.

1.3.3 Operácie

Vkladanie

Implementácia operácie vkladania sa skladá z niekoľkých krokov. Najskôr zistíme, do ktorého bloku v spadá pozícia, na ktorú vkladáme. Pozrieme sa, či je tento blok v hraniciach hustoty. Ak áno tak platí $d(v) < 1$ a teda $o(v) < c(v)$, čiže v tomto bloku

je voľné miesto. Môžeme teda zapísať novú hodnotu do tohto bloku, pričom môže byť potrebné hodnoty v bloku popresúvať, avšak zmení sa najviac $S = \Theta(\log N)$ pozícii.

V opačnom prípade je tento blok mimo hraníc hustoty. Budeme postupovať hore v strome dovtedy, kým nenájdeme vrchol v hraniciach. Keďže strom je iba pomyselný, budeme túto operáciu realizovať pomocou dvoch súčasných lineárnych prechodov k okrajom poľa. Počas tohto prechodu si udržiavame počítadlá neprázdnych a všetkých pozícii, ktoré inicializujeme podľa tohto bloku. Ďalej postupujeme následovne.

V prípade, že je hustota (podiel počítadiel) podstromu reprezentujúceho práve prejdený interval mimo hraníc hustoty, posunieme sa v pomyselnom strome nahor. To dosiahneme prechodom doľava alebo doprava o práve toľko pozícií ako je veľkosť už prejdeného intervalu. Tento postup ukončíme v momente, keď hustota dosiahne požadované hranice.

Po nájdení takéhoto vrcholu v hraniciach rovnomerne rozdelíme všetky hodnoty v blokoch prislúchajúcich danému podstromu. Keďže intervaly pre hranice sa smerom k listom iba rozširujú budú po tomto popresúvaní všetky vrcholy tohto podstromu v hraniciach hustoty a teda aj požadovaný blok bude obsahovať aspoň jednu prázdnu pozíciu. Môžeme teda novú hodnotu vložiť ako v prvom kroku.

Ak nenájdeme taký vrchol, ktorého hustota by bola v hraniciach, a teda aj koreň je mimo hraníc, je táto štruktúra príliš plná. V takom prípade zostrojíme nové pole dvojnásobnej veľkosti a všetky prvky rovnomerne rozmiestnime do nového poľa.

Odstraňovanie

Operácia odstraňovania prebieha analogicky. Ako prvé požadovanú položku odstránime z prislúchajúceho bloku. Ak je tento blok aj naďalej v hraniciach hustoty tak skončíme, inak postupujeme nahor v strome, kým nenájdeme vrchol v hraniciach. Následne rovnomerne prerozdelíme položky blokoch daného podstromu.

Pokiaľ taký vrchol nenájdeme, je pole príliš prázdne a zostrojíme nové polovičnej veľkosti a rovnomerne do neho rozmiestnime zostávajúce položky pôvodného.

1.3.4 Analýza

Pri vkladaní aj odstraňovaní sa upraví súvislý interval I, ktorý sa skladá z niekoľkých blokov. Nech pri nejakej operácii došlo k prerozdeleniu prvkov v blokoch prislúchajúcich podstromu vrcholu u v hĺbke k. Teda pred týmto prerozdelením bol vrchol u v hraniciach hustoty ($\rho_k \leq d(u) \leq \tau_k$) ale nejaký jeho potomok v nebol.

Po prerozdelení budú všetky vrcholy v danom podstrome v hraniciach hustoty, avšak nie len v svojich, ale keďže sme prerozdelili podstrom vrcholu u, tak aj v hraniciach pre hĺbku k, ktoré sú tesnejšie. Bude teda platiť $\rho_k \leq d(v) \leq \tau_k$. Najmenší počet operácii vloženia, q, potrebný na to, aby bol vrchol v opäť mimo hraníc je

$$\frac{o(v)}{c(v)} = d(v) \leq \tau_k \qquad \frac{o(v)+q}{c(v)} > \tau_{k+1}$$
$$o(v) \leq \tau_k c(v) \qquad o(v)+q > \tau_{k+1}c(v)$$
$$q > (\tau_{k+1} - \tau_k)c(v)$$

Podobne pre prekročenie dolnej hranice je potrebných aspoň $(\rho_k - \rho_{k+1})c(v)$ operácii odstránenia.

Pri úprave intervalu blokov v podstrome vrcholu u je potrebné upraviť najviac $c(u)$ položiek, avšak táto situácia nastane až keď sa potomok v ocitne znovu mimo hraníc hustoty. Priemerná veľkosť intervalu, ktorý treba preusporiadať pri vložení do podintervalu prislúchajúceho vrcholu v teda bude

$$\frac{c(u)}{(\tau_{k+1} - \tau_k)c(v)} = \frac{2c(v)}{(\tau_{k+1} - \tau_k)c(v)} = \frac{2}{\tau_{k+1} - \tau_k} = \frac{2d}{\tau_d - \tau_0} = \mathcal{O}(\log T)$$

keďže τ_d a τ_0 sú konštanty a výška úplného binárneho stromu d s T listami je $d = \Theta(\log T)$. Podobným spôsobom dostaneme rovnaký odhad pre odstraňovanie.

Pri vkladaní a odstraňovaní prvku ovplyvníme najviac d podintervalov – tie, ktoré prislúchajú vrcholom na ceste z daného listu (bloku) do koreňa. Spolu teda bude veľkosť upraveného intervalu v priemernom prípade $\mathcal{O}(\log^2 T)$.

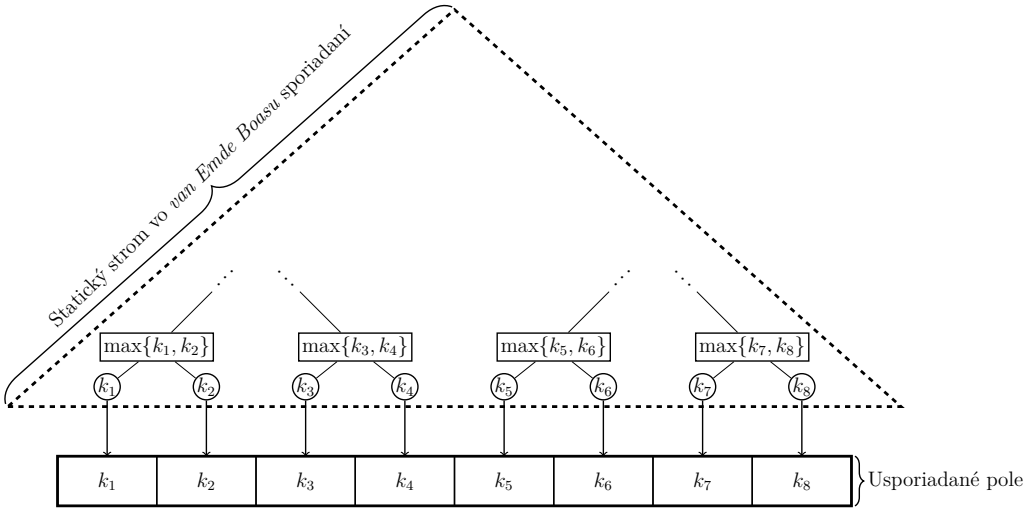
V prípade, že je aj koreň mimo hraníc hustoty, je potrebné vytvoriť pole dvojnásobnej veľkosti. Do spôsobí zmenu intervalu veľkosti $\mathcal{O}(N)$, avšak najbližších N operácií vkladania môže prebehnúť bez nutnosti zväčšovať pole. Preto je amortizovaná veľkosť týmto spôsobom upraveného intervalu iba $\mathcal{O}(1)$ a podobne aj pre odstraňovanie.

Táto dátová štruktúra teda udržiava N usporiadaných prvkov v poli veľkosti $\mathcal{O}(N)$ a podporuje operácie vkladania a odstraňovania, ktoré upravujú súvislý interval amortizovanej veľkosti $\mathcal{O}(\log^2 N)$ a je ich teda možné realizovať pomocou $\mathcal{O}(\frac{\log^2 N}{B})$ pamäťových presunov.

Existujú tiež verzie tejto štruktúry [9], ktoré dosahujú rovnaký počet pamäťových operácií nie v amortizovanom, ale najhoršom prípade. V tejto práci sa im však nebudeme venovať.

1.4 Dynamický B-strom

V tejto sekcií popíšeme dynamickú verziu *cache-oblivious* vyhľadávacieho stromu. Prvá verzia tejto štruktúry, ktorú navrhli Bender, Demaine et al. v [6] a neskôr podrobne popísali v [7], bola však značne komplikovaná a preto uvedieme zjednodušenú verziu. Tú navrhli Bender, Duan et al. v [8] a dosahuje rovnaké výsledky ale jej popis a analýza sú podstatne jednoduchšie.



Obrázok 1.7: Dynamický strom, ktorý vznikne spojením usporiadaného poľa a statického stromu vo *van Emde Boasovom* usporiadaní. Šipky znázorňujú spárovanie listov a položiek pola.

1.4.1 *Cache-aware* riešenie

V prípade *cache-aware* modelu môžeme na riešenie tohto problému opäť použiť B-strom s vetvením $\Theta(B)$ ako v časti 1.2.2. Rovnako ako pre vyhľadávanie bude na vkladanie potrebných $\mathcal{O}(\log_B N)$ pamäťových presunov.

1.4.2 Popis *cache-oblivious* štruktúry

Túto dátovú štruktúru vytvoríme zložením predchádzajúcich dvoch – statického stromu (1.2.5) a usporiadaného poľa (1.3.1) – jednoduchým spôsobom. Majme usporiadané pole veľkosti $\Theta(N)$. Keďže počet položiek v usporiadanom poli je mocnina dvoch, môžeme nad ním vybudovať úplný binárny statický vyhľadávací strom uložený vo *van Emde Boasovom* usporiadaní. Listy tohto stromu budú prvky usporiadaného poľa (pozri obrázok 1.7).

Kľúče, ktoré táto štruktúra obsahuje, sú uložené v usporiadanom poli (s medzerami). Listy statického stromu obsahujú v svojich kľúčoch rovnakú hodnotu ako k ním prislúchajúce položky usporiadaného poľa. Medzeru reprezentujeme hodnotou, ktorá je pri použitom usporiadaní najmenšia (v prípade číselných kľúčov $-\infty$). Ostatné vrcholy stromu obsahujú ako kľúč maximum z kľúčov svojich synov.

1.4.3 Vyhľadávanie

Vyhľadávanie v tejto štruktúre prebieha jednoducho. Začínajúc od koreňa, porovnáme hľadaný kľúč s kľúčom v ľavom synovi. Pokiaľ je hľadaný prvok väčší, bude v pravom podstrome (keďže maximum z celého ľavého podstromu je práve kľúč ľavého syna), ktorý rekurzívne prehľadáme. V opačnom prípade prehľadáme ľavý podstrom. Keď

dosiahneme list, porovnáme jeho kľúč s hľadaným. Ak sa zhodujú, našli sme požadovanú položku a v opačnom prípade sa v štruktúre nenachádza.

Analýza

Toto prehľadávanie prechádza cestu od koreňa k listu v strome hĺbky $\mathcal{O}(\log N)$ uloženom vo *van Emde Boasovom* usporiadaní a teda, rovnako ako v časti 1.2.5, vykoná $\mathcal{O}(\log_B N)$ pamäťových presunov.

1.4.4 Vkladanie

Zaujímavejšou operáciou je vkladanie, ktoré v pôvodnom statickom strome nebolo možné. Prvým krokom je nájdenie pozície, na ktorú tento kľúč patrí. To dosiahneme podobne ako v predošlej sekcii. Budeme ale hľadať predchádzajúci a nasledujúci kľúč. Tým nájdeme v usporiadanom poli dvojicu pozícii, medzi ktoré chceme vložiť novú hodnotu.

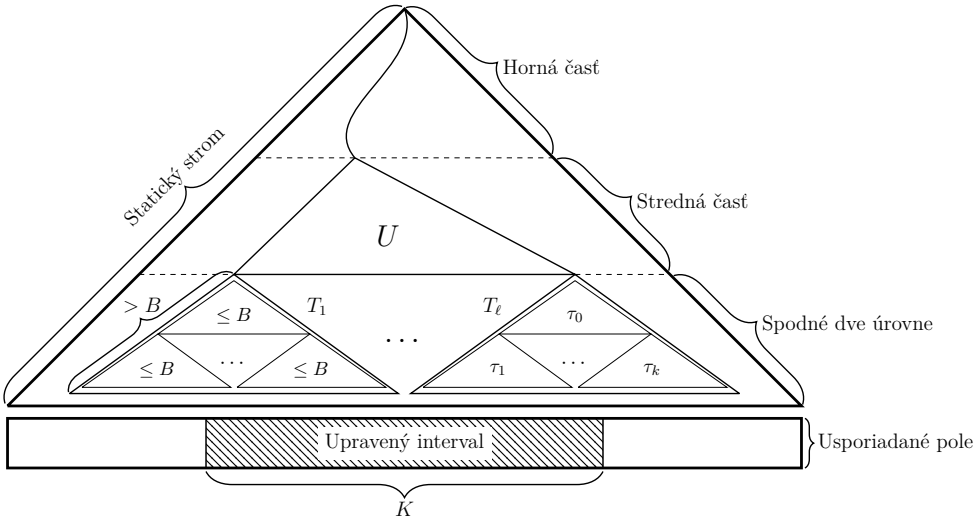
Vloženie do usporiadaného pola zmení súvislý interval veľkosti K. Následne bude potrebné aktualizovať kľúče v statickom strome, aby opäť obsahovali maximum zo svojich synov. Túto aktualizáciu dosiahneme takzvaným *post-order* prechodom, kedy sa vrchol aktualizuje až po tom, čo boli aktualizovaní jeho synovia. Tým máme zaručené, že po aktualizácii vrchol obsahuje výslednú, korektnú hodnotu. Implementácia takéhoto prechodu je naznačená v algoritme 1.4.

Algoritmus 1.4 Implementácia *post-order* prechodu na aktualizáciu statického stromu

```
1: function UPDATE(v, I)          ▷ v je vrchol stromu, ktorý práve aktualizujeme
                                  ▷ I je zmenený interval v usporiadanom poli

2:     if v.podstrom ∩ I = ∅ then          ▷ pokiaľ sa zmena tohto vrcholu
3:         return                          ▷ určite nedotkla, tak ho môžeme preskočiť

4:     if v je list then
5:         v.kľuč ← hodnota z usporiadaného poľa
6:     else
7:         UPDATE(v.ľavý)                  ▷ najskôr aktualizujeme ľavého
8:         UPDATE(v.pravý)                 ▷ a pravého syna

9:         v.kľúč ← max(v.ľavý.kľúč, v.pravý.kľúč)   ▷ až potom tento vrchol
```

1.4.5 Analýza vkladania

Túto analýzu rozdelíme na tri časti (obrázok 1.8), v ktorých sa postupne pozrieme na rôzne úrovne v statickom strome, ktoré treba po vložení do usporiadaného pola aktualizovať. Budeme predpokladať, že veľkosť zmeneného intervalu v usporiadanom



Obrázok 1.8: Rozdelenie statického stromu na tri časti pri analýze počtu pamäťových presunov.

poli je K. Pre jednotlivé úrovne spočítame počet potrebných pamäťových presunov a nakoniec ich sčítaním získame výslednú zložitosť operácie vkladania.

Spodné dve úrovne

Uvažujme najskôr ako v časti 1.2.5 také podstromy *van Emde Boasovho* delenia, ktorých veľkost je medzi $\sqrt{B}$ a B, a teda sa zmestia do najviac dvoch blokov v *cache*. Pozrime sa na spodné dve úrovne takýchto podstromov (na obrázku 1.8 reprezentovan0 najmenšími trojuholníkmi). Listy spodnej úrovne budú listy celého statického stromu a korene spodnej spodnej úrovne budú synovia listov hornej úrovne. Zvyšok stromu pokračuje nad týmito úrovňami a vrátime sa k nemu neskôr.

Podstromy v tomto delení sa zmestia do najviac dvoch blokov a vieme ich teda načítať pomocou $\mathcal{O}(1)$ pamäťových presunov. Tieto podstromy vznikli rekurzívnym *van Emde Boasovým* delením z podstromu T veľkosti viac než B. Označme ich, rovnako, ako v časti 1.2.5, $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k$, pričom τ_0 je podstrom v hornej úrovni a $\tau_1, \ldots, \tau_k$ sú podstromy v spodnej úrovni, ktorých korene sú potomkovia listov τ_0.

Pri *post-order* prechode cez podstrom T prejdeme najskôr cez ľavých synov od koreňa τ_0 cez τ_1 až do listu. Následne bude *post-order* prechod prebiehať v podstrome τ_1, až kým nebudú všetky jeho vrcholy a napokon aj koreň aktualizované. Až potom sa vrátime do τ_0 a k τ_1 už viac pristupovať nebudeme, ale prejdeme nasledovný podstrom, τ_2. Takto postupne aktualizujeme všetky podstromy, pričom postupnosť navštívených podstromov bude

$$\tau_0, \tau_1, \tau_0, \tau_2, \ldots, \tau_0, \tau_i, \tau_0, \ldots, \tau_k, \tau_0$$

Vidíme, že pokiaľ dokážeme udržať v *cache* aspoň dva také podstromy, teda za predpokladu $M \geq 4B$, sme schopný takýto *post-order* prechod zrealizovať pomocou

$\mathcal{O}(1)$ pamäťových operácii pre každý podstrom veľkosti $\leq B$. Takéto podstromy majú $\mathcal{O}(B)$ listov, pričom nimi potrebujeme pokryť interval veľkosti K (podstromy, ktorých žiaden list neleží v upravenom intervale nie je potrebné aktualizovať) a teda celkový počet podstromov na spodných dvoch úrovniach, ktoré potrebujeme načítať a upraviť je $\mathcal{O}(\frac{K}{B})$ a stačí nám na to $\mathcal{O}(\frac{K}{B})$ pamäťových presunov.

Stredná časť – najbližší spoločný predok

Označme ako $T_1, \ldots, T_\ell$ tie stromy, ktoré obsahujú aktualizované podstromy veľkosti najviac B na spodných dvoch úrovniach. Platí teda $\ell = \mathcal{O}(\frac{K}{B})$. Označme U taký podstrom statického stromu, ktorého koreň je najbližší spoločný predok koreňov $T_1, \ldots, T_\ell$. Ak je tento koreň v hĺbke h tak U obsahuje všetky vrcholy hĺbky aspoň h, ktoré treba aktualizovať - tie mimo U nie sú predkovia upravených vrcholov a teda hodnoty kľúčov ich potomkov neboli v prvej časti zmenené, alebo už boli aktualizované ako súčasť nejakého podstromu T_i na spodnej úrovni.

Počet vrcholov U je najviac dvojnásobok počtu listov a teda $|U| = \mathcal{O}(l) = \mathcal{O}(\frac{K}{B})$. Keďže pri *post-order* prechode navštívime každý vrchol $\mathcal{O}(1)$ krát (najprv pri prechode z koreňa ku listom, pričom následne rekurzívne prejdeme ľavého a pravého syna, a potom pri návrate z rekurzie) a teda celkovo budeme potrebovať $\mathcal{O}(\frac{K}{B})$ pamäťových presunov na aktualizáciu U.

Horná časť – cesta z najbližšieho spoločného predka do koreňa

Posledná množina vrcholov, ktoré je potrebné aktualizovať, je cesta z koreňa U do koreňa statického stromu. Dĺžka tejto cesty je obmedzená výškou stromu $\mathcal{O}(\log N)$ a pri aktualizovaní prechádzame cez jej vrcholy postupne. Podobne ako pri vyhľadávaní (časť 1.4.3) bude potrebných $\mathcal{O}(\log_B N)$ pamäťových presunov.

Výsledná zložitosť

Sčítaním nasledovných zložitostí počtu pamäťových operácii

Nájdenie pozície v usporiadanom poli:	$\mathcal{O}(\log_B N)$
Vloženie do usporiadaného poľa:	$\mathcal{O}(\frac{K}{B})$
Aktualizácia spodných dvoch úrovní:	$\mathcal{O}(\frac{K}{B})$
Aktualizácia strednej úrovne:	$\mathcal{O}(\frac{K}{B})$
Aktualizácia hornej úrovne:	$\mathcal{O}(\log_B N)$

dostávame celkovú zložitosť $\mathcal{O}(\log_B N + \frac{K}{B})$. Keďže amortizovaná veľkosť upraveného intervalu je $K = \mathcal{O}(\log^2 N)$ dostávame výslednú amortizovanú zložitosť počtu pamäťových operácii pri vkladaní: $\mathcal{O}(\log_B N + \frac{\log^2 N}{B})$.

1.4.6 Odstraňovanie

Algoritmus odstraňovania je analogický, po nájdení prvku v usporiadanom poli ho odstránime, čím sa zmení súvislý interval amortizovanej veľkosti $\mathcal{O}(\log^2 N)$. Následne aktualizujeme kľúče v statickom poli rovnako ako pri vkladaní. Výsledná zložitosť bude taktiež rovnaká.

1.5 Vylepšený dynamický B-strom

> Any problem in computer science can be solved with another level of indirection.
>
> David Wheeler

Oproti *cache-aware* B-stromom má pri vkladaní *cache-oblivious* dynamický strom popísaný v predchádzajúcej sekcii naviac $\mathcal{O}(\frac{\log^2 N}{B})$ pamäťových presunov. V prípade, že $B = \Theta(\log N \log\log N)$, bude tento člen zanedbateľný a dosiahneme rovnaký výsledok ako *cache-aware* B-stromy. Jednoduchou modifikáciou však môžeme tento člen môžeme odstrániť bez nutnosti tohto predpokladu.

Vezmeme N kľúčov a rozdelíme ich do $\Theta(\frac{N}{\log N})$ blokov veľkosti $\Theta(\log N)$. Minimum z každej skupiny použijeme ako kľúče v predchádzajúcej dátovej štruktúre, ktorej veľkosť bude $\Theta(\frac{N}{\log N})$.

1.5.1 Vyhľadávanie

Najskôr vyhľadáme požadovaný blok v B-strome, čo zaberie $\mathcal{O}(\log_B \frac{N}{\log N}) = \mathcal{O}(\log_B N)$ pamäťových presunov. Následne prejdeme daný blok celý a nájdeme v ňom požadovaný kľúč. To vyžaduje $\mathcal{O}(\frac{\log N}{B})$ pamäťových presunov - zanedbateľné voči hľadaniu v B-strome - a spolu teda vyhľadávanie vyžaduje rovnako veľa pamäťových presunov ako neupravený B-strom: $\mathcal{O}(\log_B N)$.

1.5.2 Vkladanie a odstraňovanie

Po nájdení požadovaného bloku vykonáme vloženie prípadne odstránenie z neho kompletným prepísaním, čo vyžaduje $\mathcal{O}(\frac{\log N}{B})$ presunov. Zároveň budeme udržiavať veľkosti blokov medzi $\frac{1}{4}\log N$ a $\log N$. Príliš malé skupiny môžeme spojiť do väčších a veľké rozdeliť na niekoľko menších. Skupina prekročí svoje hranice najskôr po $\Omega(\log N)$ operáciách. V takom prípade po rozdelení alebo spojení bude potrebné vykonať vloženie alebo odstránenie z B-stromu. Vydelením dostávame amortizovanú zložitosť vkladania a odstraňovania:

$$\mathcal{O}(\frac{\log_B N + \frac{\log^2 N}{B}}{\log N}) = \mathcal{O}(\frac{\log N}{B})$$

Najskôr však musíme nájsť blok, ktorý budeme aktualizovať. Teda výsledná zložitosť bude $\mathcal{O}(\log_B N)$ rovnako ako pri *cache-aware* B-strome. Opäť sme teda dosiahli rovnaký počet operácií ako ekvivalentná *cache-aware* dátová štruktúra, avšak tentokrát nie v najhoršom ale amortizovanom prípade.

Literatúra

[1] Alok Aggarwal, Jeffrey Vitter, et al.: *The input/output complexity of sorting and related problems*, in: *Communications of the ACM* 31.9 (1988), pp. 1116–1127.

[2] Alfred V Aho, John E Hopcroft: *Design & Analysis of Computer Algorithms*, Pearson Education India, 1974.

[3] Lars Arge: *The buffer tree: A new technique for optimal I/O-algorithms*, Springer, 1995.

[4] Lars Arge, G Brodal, Rolf Fagerberg: *Cache-oblivious data structures*, in: *Handbook of Data Structures and Applications* 27 (2005).

[5] Rudolf Bayer: *Binary B-trees for Virtual Memory*, in: *Proceedings of the 1971 ACM SIGFIDET (Now SIGMOD) Workshop on Data Description, Access and Control*, SIGFIDET '71, San Diego, California: ACM, 1971, pp. 219–235.

[6] Michael A. Bender, Erik D. Demaine, Martin Farach-Colton: *Cache-Oblivious B-Trees*, in: *Proceedings of the 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2000)*, Redondo Beach, California, 2000, pp. 399–409.

[7] Michael A. Bender, Erik D. Demaine, Martin Farach-Colton: *Cache-Oblivious B-Trees*, in: *SIAM Journal on Computing* 35.2 (2005), pp. 341–358.

[8] Michael A Bender et al.: *A locality-preserving cache-oblivious dynamic dictionary*, in: *Proceedings of the thirteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002, pp. 29–38.

[9] Michael A Bender et al.: *Two simplified algorithms for maintaining order in a list*, in: *Algorithms—ESA 2002*, Springer, 2002, pp. 152–164.

[10] Erik D. Demaine: *Cache-Oblivious Algorithms and Data Structures*, in: *Lecture Notes from the EEF Summer School on Massive Data Sets*, BRICS, University of Aarhus, Denmark, 2002.

[11] Ulrich Drepper: *What every programmer should know about memory*, in: *Red Hat, Inc* 11 (2007).

[12] Matteo Frigo et al.: *Cache-oblivious algorithms*, in: *Foundations of Computer Science, 1999. 40th Annual Symposium on*, IEEE, 1999, pp. 285–297.

[13] Intel Corporation: *Intel® 64 and IA-32 Architectures Optimization Reference Manual*, 248966-029, 2014.

[14] Intel Corporation: *Intel® 64 and IA-32 Architectures Software Developer's Manual*, 325462-050US, 2014.

[15] Zardosht Kasheff: *Cache-oblivious dynamic search trees*, PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2004.

[16] Katarína Kotrlová: *Vizualizácia háld a intervalových stromov*, bakalárska práca, Univerzita Komenského v Bratislave, 2012.

[17] Jakub Kováč: *Vyhľadávacie stromy a ich vizualizácia*, bakalárska práca, Univerzita Komenského v Bratislave, 2007.

[18] Pavol Lukča: *Perzistentné dátové štruktúry a ich vizualizácia*, bakalárska práca, Univerzita Komenského v Bratislave, 2013.

[19] Rasmus Pagh: *Basic external memory data structures*, in: *Algorithms for Memory Hierarchies*, Springer, 2003, pp. 14–35.

[20] Harald Prokop: *Cache-oblivious algorithms*, PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1999.

[21] Ladislav Pápay: *Príloha k bakalárskej práci - spustiteľná verzia*, 2014, DOI: 10.5281/zenodo.10082, URL: http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.10082.

[22] Ladislav Pápay et al.: *Príloha k bakalárskej práci - zdrojový kód*, 2014, DOI: 10.5281/zenodo.10080, URL: http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.10080.

[23] Viktor Tomkovič: *Vizualizácia stromových dátových štruktúr*, bakalárska práca, Univerzita Komenského v Bratislave, 2012.

[24] Jeffrey Scott Vitter: *Algorithms and data structures for external memory*, in: *Foundations and Trends® in Theoretical Computer Science* 2.4 (2008), pp. 305–474.

Kolofón

Sadzba tejto práce bola vykonaná systémom XeLaTeX s použitím šablóny memoir. Literatúra bola spravovaná systémom BibTeX. Ilustrácie sú vyrobené pomocou balíčkov TikZ/PGF.

Zdrojový text tejto práce spolu so všetkými ilustráciami je dostupný na stránke `https://github.com/lacop/thesis`.