Mathematik

Lars Bogner

21 September, 2020

Inhaltsverzeichnis

Analysis

Funktionstypen

ganzrationale Funktionen

Unter ganzrationalen Funktionen versteht man einen Typ von Funktionen, welcher eine Summe aus Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten sind. Sie sind also wie folgt aufgebaut:

$$f(x) = a_n * x^n + ... + a_1 * x^1 + a_0; \qquad n \in \mathbb{N}$$

. Dabei gibt n an, von welchem Grad diese Funktion ist. n ist immer äquivalent mit dem größten Exponenten. Auch wird der Faktor vor der Potenz mit höchstem Exponent Leitkoeffizient genannt. Beispielsweise ist $f(x) = -2x^3 + 4$ vom Grad 3 und besitzt den Leitkoeffizient -2.

Eine Funktion vom Grad n kann dabei des Weiteren maximal n Nullstellen besitzen.
Auch ist eine ganzrationale Funktion mit ausschließlich geradzahligen Exponenten immer achsensymmetrisch zur y-Achse und eine mit nur ungeradzahligen Exponenten punktsymmetrisch zum Ursprung.

Exponentialfunktionen

Der Begriff Exponentialfunktion bezeichnet eine Funktion, welche die Variable im Exponenten hat. Somit können diese zu $f(x) = a^x$ vereinfacht werden. Im Abitur werden nur natürliche Exponentialfunktionen abgefragt, dass heißt, dass als Basis die eulersche Zahl (e) verwendet wird. Somit sind die Exponentialfunktionen welche behandelt werden wie folgt aufgebaut:

$$f(x) = e^x$$

.

trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen beschreiben das Verhältnis zwischen der Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks. Zu ihnen gehören $\sin, \cos, \tan$. All diese Funktionen sind periodisch und haben in ungestrecktem Zustand eine Periodenlänge von 2π bei Sinus und Kosinus, bzw. π beim Tangens, im Bogenmaß (`rad`).
Sie beschreiben dabei das Verhältnis der folgenden Seiten:

$$\sin(x) = \frac{|Gegenkathete|}{|Hypotenuse|}$$

$$\cos(x) = \frac{|Ankathete|}{|Hypotenuse|}$$

$$\tan(x) = \frac{|Gegenkathete|}{|Ankathete|} (= \frac{\sin(x)}{\cos(x)})$$

.

Verallgemeinert können die trigonometrischen Funktionen am Beispiel des Sinus zu folgender Gleichung:

$$f(x) = a * \sin(b * (x - c)) + d; \qquad a, c, d \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$$

. Dabei verändern die Parameter die Graphen wie folgt (vgl. Abschnitt Wirkung von Parametern:

a Es kommt zu Streckung ($|a| > 1$), bzw. Stauchung ($|a| < 1$) in y-Richtung. Bei $a < 0$ kommt es zur Spiegelung an der x-Achse.

> Der Graph der Sinusfunktion wurde um den Faktor $|a|$, bzw. $\frac{1}{|a|}$ in y-Richtung gestreckt/gestaucht. Die entstandene Amplitude entspricht a.
> Der Graph wurde an der x-Achse gespiegelt

b Es kommt zu Streckung ($b < 1$), bzw. Stauchung ($b > 1$) in x-Richtung. Die Periode der Funktion beträgt dabei immer $p = \frac{2\pi}{b}$. $\rightarrow$ **desto kleiner b, desto größer die Periodenlänge**

> Der Graph der Sinusfunktion wurde um den Faktor $1/b$, bzw. b in y-Richtung gestreckt/gestaucht. Die entstandene Periodendauer entspricht $\frac{2\pi}{b}$.

c Es kommt zur Verschiebung in x-Richtung, nach links ($c < 0$) bzw. rechts ($c > 0$).

> Der Graph der Sinusfunktion wurde um $|c|$ nach links/rechts verschoben.

d Es kommt zur Verschiebung in y-Richtung nach oben ($d > 1$), bzw. unten ($d < 1$).

Der Graph der Sinusfunktion wurde um $|d|$ nach oben/unten verschoben.

Abbildung(vgl. Abbildung trigonometrische Funktionen) der trigonometrischen Funktionen im Koordinatensystem. $f(x) = \sin(x);\qquad g(x) = \cos(x);\qquad h(x) = \tan(x)$

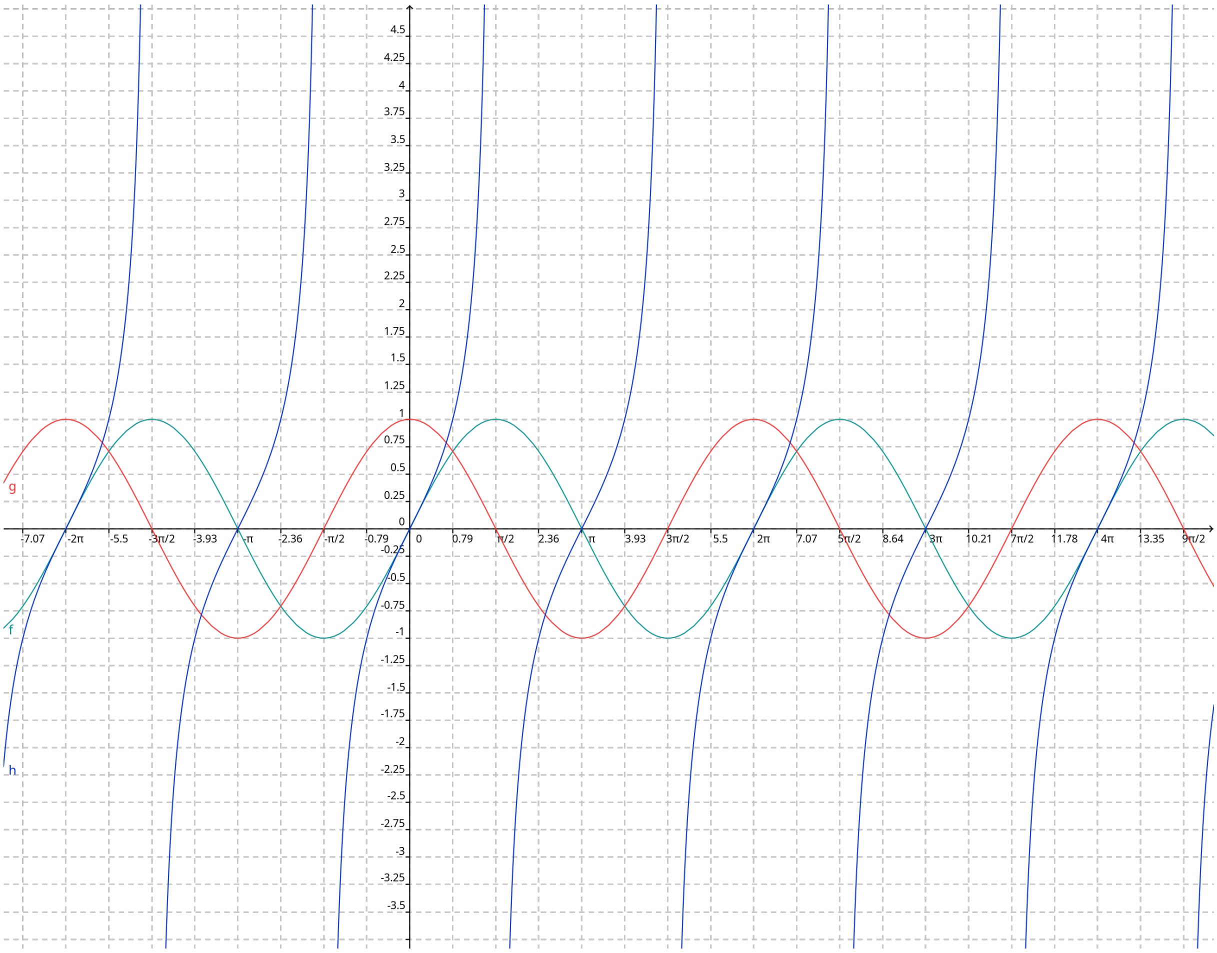

Abbildung 1: trigonometrische Funktionen

wichtige Werte der trigonometrischen Funktionen:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0,707$	-1	0	1
$\tan(x)$	0	1	$\pm\infty$	-1	0	$\pm\infty$	0

Potenzfunktionen

Potenzfunktionen sind Funktionen nach dem folgenden Schema:

$$f(x) = a * x^n; \qquad n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$$

. Sie sind die Basis ganzrationaler Funktionen.

gebrochen-rationale Funktionen

Unter einer gebrochen-rationalen Funktion versteht man einen Quotienten zweier ganzrationaler Funktionen. Also verallgemeinert folgendes:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_{n_1} * x^{n_1} + ... + a_1 * x^1 + a_0}{a_{n_2} * x^{n_2} + ... + a_1 * x^1 + a_0}; \qquad n_1, n_2 \in \mathbb{N}$$

. Beim Rechnen mit diesen muss insofern aufgepasst werden, dass wenn der Nenner 0 wird, eine Definitionslücke entsteht (für genaueres siehe Abschnitt zu Definitionslücken).

Wirkung von Parametern

Bei einer veränderten Funktion $g(x)$ ausgehend von $f(x)$, nach dem folgenden Schema:

$$g(x) = a * f(b * (x - c)) + d; \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

.

a Es kommt zu Streckung ($|a| > 1$), bzw. Stauchung ($|a| < 1$) in y-Richtung. Bei $a < 0$ kommt es zur Spiegelung an der x-Achse.

b Es kommt zu Streckung ($|b| < 1$), bzw. Stauchung ($|b| > 1$) in x-Richtung (**umgekehrte Richtung wie bei a**). Bei $b < 0$ kommt es zur Spiegelung an der x-Achse.

c Es kommt zur Verschiebung in x-Richtung, nach links ($c < 0$) bzw. rechts ($c > 0$).

d Es kommt zur Verschiebung in y-Richtung nach oben ($d > 1$), bzw. unten ($d < 1$).

Zusammengesetzte Funktionen

Summen/Differenzen von Funktionen

Unter einer Summe, bzw. einer Differenz von Funktionen versteht man eine Verkettung von einzelnen Funktionen durch Addition, bzw. Subtraktion. Also wie folgt:

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \pm ....$$

. Es gilt des weiteren, dass

$$g(x) + h(x) + ... = (g + h + ...)(x)$$

. Dies gilt ebenfalls bei der Subtraktion von Funktionen.
Kombination aus beidem sind auch möglich, mit den gleichen Regeln.
Bei dieser Art der Verkettung gelten die üblichen Regeln zur Addition und Subtraktion (Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, ...).

Produkte/Quotienten von Funktionen

Unter einem Produkt, bzw. einem Quotienten von Funktionen versteht man eine Verkettung durch Multiplikation, bzw. Division. Dies geschieht nach dem Schema:

$$f(x) = g(x) * h(x) * ....$$

, bzw.

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x) * ...}$$

. Dabei gilt, dass

$$g(x) * h(x) * ... = (g * h * ...)(x)$$

, bzw. mit Division bei einem Quotienten.
Es sind auch Kombinationen aus Produkt und Quotient möglich, dabei gelten die selben Regeln.
Bei dieser Art der Verkettung gelten die üblichen Regeln zur Multiplikation und Division (Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, ...).

verkettete Funktionen

Von einer Verkettung von Funktionen spricht man, wenn die Funktionswerte der einen Funktion die x-Werte der anderen bilden. Am Beispiel der Verkettung der Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ also wie folgt:

$$f(x) = g(h(x))$$

. Um den endgültigen Funktionsterm zu bilden, werden dabei alle x durch $h(x)$ in diesem Beispiel ersetzt. Dies kann auch wie folgt aufgeschrieben werden:

$$g(h(x)) = g \circ h$$

.

Bestimmung von Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften

Bestimmung ganzrationaler Funktionen

Um eine ganzrationale Funktion mit gewünschten Eigenschaften zu erhalten, muss zunächst eine Grundfunktion aufgestellt werden. Diese ist immer nach dem Muster aller ganzrationalen Funktionen (vgl. Abschnitt ganzrationale Funktionen): $f(x) = a_n * x^n + ... + a_1 * x^1 + a_0; \qquad n \in \mathbb{N}$.
Nun müssen die allgemeinen Eigenschaften verallgemeinert werden. Beispiele hierfür wären:

- Hochpunkt bei $HP(2|3)$ wird zu $f'(2) = 0$, $f(2) = 3$ und $f''(2) < 0$

- Funktion 3. Grades bedeutet, dass $n = 3$ gilt

- Achsensymmetrie bedeutet, dass nur geradzahlige Exponenten vorkommen dürfen, Punktsymmetrie, dass nur ungeradzahlige Exponenten

Alle somit erhaltenen Eigenschaften müssen nun verarbeitet werden. Dabei gilt als Faustformel, dass Eigenschaften des Funktionsterms (Bsp.: “nur ungeradzahlige Exponenten”) direkt auf diesen angewendet werden, Gleichungen die man erhält in ein lineares Gleichungssystem (LGS) übernommen werden und Ungleichungen zur Probe des finalen Terms genutzt werden. **Wenn eine Probe möglich ist, darf diese nicht vergessen werden.**

Funktionenscharen

Eine Funktionenschar ist eine Menge an Funktionen, wobei diese Funktionen durch einen Parameter variiert werden. Eine Funktionenschar wird wie folgt dargestellt:

$$f_t(x) = ...$$

. Dabei ist t der Parameter. Ein mögliches Beispiel wäre hier $f_t(x) = x^2 - tx$. Beim Rechnen mit einer solchen Schar von Funktionen wird t als konstante Zahl betrachtet und entsprechend mit diesem vorgegangen. So lassen sich dann beispielsweise auch Integrale oder Extrempunkte bestimmen in Abhängigkeit von t, wobei das t in das Ergebnis übernommen wird.

Bestimmung gemeinsamer Punkte

Um herauszufinden, welche Punkte alle Funktionen der Schar gemein haben, wird die folgende Gleichung gelöst:

$$f_a(x) = f_b(x); \qquad a \neq b$$

. Somit erhält man alle Stellen, an welchen die Funktionen den gleichen y-Wert unabhängig von ihrem Parameter besitzen und somit alle Funktionen einen gemeinsamen Punkt haben. Um diesen Punkt zu berechnen muss lediglich der x-Wert in $f_t(x)$ eingesetzt werden, wobei der Parameter vernachlässigt werden kann.

Bestimmung der Ortskurve besonderer Punkte

Unter der Ortskurve versteht man die Funktion, auf welcher sich alle besonderen Punkte (Hoch-, Tief- und Wendepunkte) sich bei Variation des Parameters bewegen.
Um diese zu bestimmen muss zuerst der Punkt in Abhängigkeit von dem Parameter bestimmt werden. Dafür wird wie bei der sonstigen Bestimmung von Extrem-, bzw. Wendepunkten vorgegangen. Nun kann der x-Wert des Punktes in die Ursprungsfunktionenschar eingesetzt werden und man erhält eine Funktion, welche lediglich Parameter enthält und keine "xe". Dies ist die Ortskurve $f(k)$, diese kann nun zu beispielsweise $g(x)$ umbenannt werden.

Ableitung

Die Ableitung ist der Grenzwert des Differenzenquotienten, bei kleiner werdendem Intervall.

Differenzenquotient

Der Differenzenquotient gibt die Steigung der Sekante zwischen den beiden Grenzwerten des Intervalls an, oder in anderen Worten die mittlere Änderungsrate im Intervall. Er kann wie folgt im Intervall $I = [a; b]$ berechnet werden:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}; \qquad a < b$$

.

Berechnung des Grenzwertes

Zur Berechnung der Ableitung, also des Grenzwertes des Differenzenquotienten wird die Größe des Intervalls mithilfe des Limes gegen 0 bewegt. Hierfür wird die mittlere Änderungsrate im Intervall $[a; a + h]$ bei kleiner werdendem h betrachtet. Somit ergibt sich die Ableitung an der Stelle a als folgender Zusammenhang:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} m([a; a+h]) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

. Dies entspricht der Steigung der Tangente an der Stelle a, bzw. der momentanen Änderungsrate an der Stelle a.

Ableitungsfunktion

Wenn alle Ableitungen einer Funktion f zu einer neuen Funktion zusammengefasst werden, so nennt man die entstandene Funktion eine Ableitungsfunktion, oder kurz f'. Diese kann entweder wie im vorigen Abschnitt gebildet werden, oder durch Verwendung der Ableitungsregeln. Wenn von einer Ableitungsfunktion eine Ableitung gebildet wird, so nennt man das die zweite Ableitung, bzw. eine höhere Ableitung — also alle Ableitungen über der ersten Ableitung. Diese werden $f''(x), f'''(x), ...f'^{n}(x)$ genannt.

Ableitungsregeln

Summenregel Wenn eine Summe abgeleitet werden soll, so kann jede Teilfunktion individuell abgeleitet werden. Es gilt also:

$$f(x) = g(x) + h(x); \qquad f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Faktorregel Ein Vorfaktor bleibt bei der Ableitung bestehen und unbeeinflusst. Somit gilt:

$$f(x) = k * g(x); \qquad f'(x) = k * g'(x)$$

Potenzregel Eine Potenz wird abgeleitet, indem der Exponent um 1 reduziert wird und der Ursprungsexponent als Vorfaktor hinzugefügt wird. Dies bedeutet folgendes:

$$f(x) = x^b; \qquad f'(x) = b * x^{b-1}$$

Produktregel Ein Produkt aus zwei Teilfunktionen wird wie folgt abgeleitet:

$$f(x) = g(x) * h(x) \qquad f'(x) = g'(x) * h(x) + g(x) * h'(x)$$

Dieser Fall unterscheidet sich von der Faktorregel darin, dass in beiden Faktoren die Variable x einen Einfluss nimmt.

Quotientenregel Hieraus folgt sogleich auch ein Zusammenhang für die Ableitung einer

Division hervor. Dieser ist wie folgt:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}; \qquad f'(x) = \frac{g'(x) * h(x) - g(x) * h'(x)}{(h(x))^2}$$

Kettenregel Eine Verkettung von Funktionen (vgl. Abschnitt verkettete Funktionen) wird wie folgt abgeleitet:

$$f(x) = g(h(x)); \qquad f'(x) = h'(x) * g'(h(x))$$

besondere Ableitungsfunktionen

$$f(x) = c; \qquad f'(x) = 0$$

$$f(x) = x^n; \qquad f'(x) = n * x^{n-1}$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}; \qquad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}; \qquad f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sin(x); \qquad f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x); \qquad f'(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = e^x; \qquad f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln(x); \qquad f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

Tangente, Sekante und Normale

In der folgenden Abbildung (vgl. Abbildung Tangente, Sekante und Normale) ist die Sekante zwischen den Punkten $A(0|f(0))$ und $B(2,5|f(2,5))$, als auch die Tangente und Sekante durch den C(1|f(1)) eingezeichnet. Die Gleichung der Funktion f lautet $f(x) = -x^3 + 3x^2$.

Sekante

Unter einer Sekante versteht man eine Gerade durch zwei Punkte auf einem Graphen. Die allgemeine Sekantengleichung durch die Punkte $A(a_1|a_2)$ und $B(b_1|b_2)$ lautet:

$$y = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} * (x - a_1) + a_2$$

.

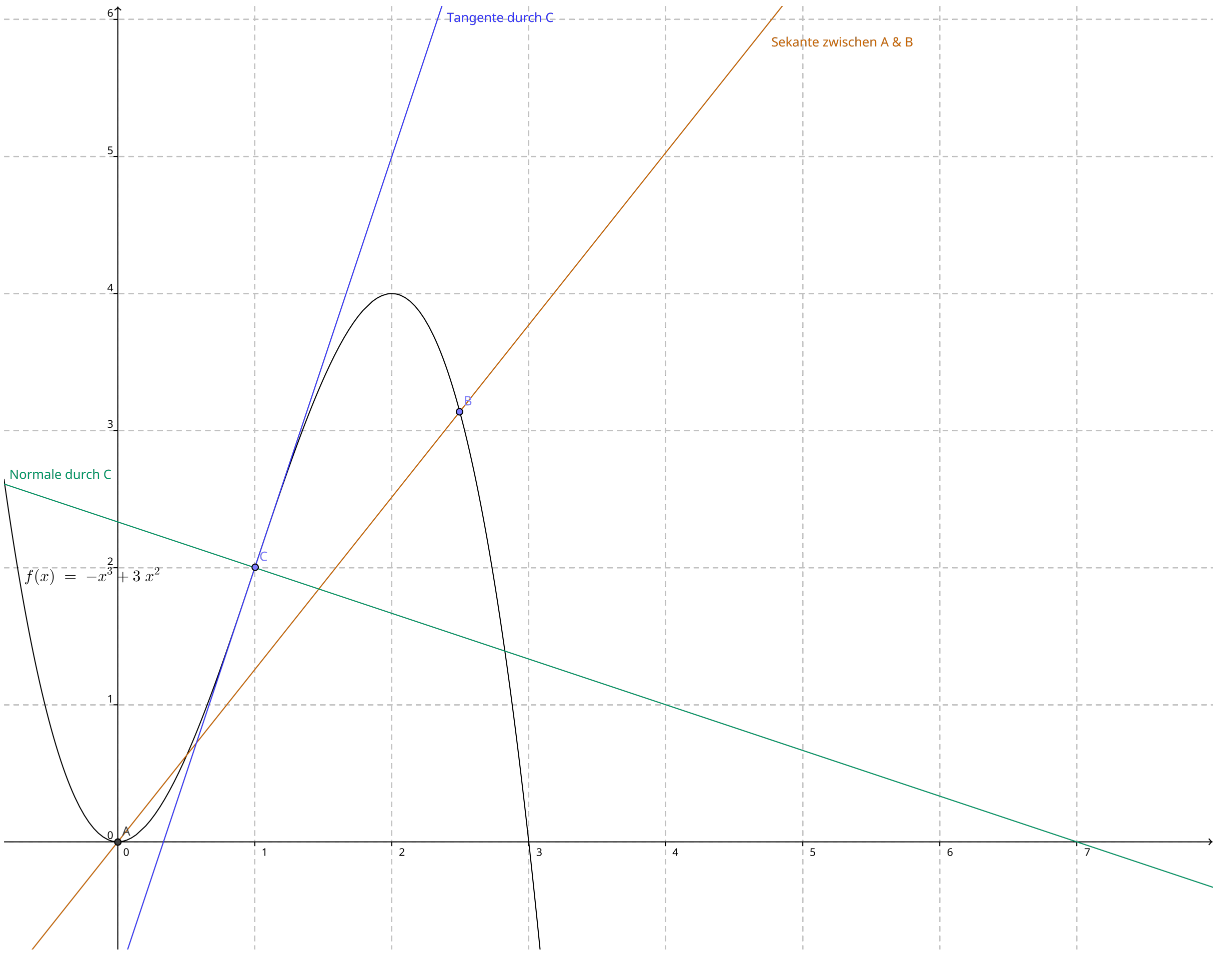

Abbildung 2: Tangente, Sekante und Normale

Tangente

Eine Tangente ist eine gerade, welche einen Berührpunkt mit einer Funktion f besitzt und die Steigung dieser am Berührpunkt hat. Somit ist die Steigung einer Tangente gleich der momentanen Änderungsrate von f im Berührpunkt. Allgemein kann die Gleichung einer Tangente wie folgt angegeben werden:

$$t : y = f'(u) * (x - u) + f(u)$$

, wobei u dem x-Wert des Berührpunkts entspricht.

Es kann in drei Fälle unterschieden werden, bei der Suche einer Tangentengleichung:

1. Es ist die Tangente in einem Punkt $B(u|f(u))$ des Graphen gesucht. Es ist die Funktion f und der Berührpunkt gegeben. Hierfür muss lediglich u in die allgemeine Tangentengleichung eingesetzt werden, um die Lösung zu erhalten.
2. Es ist die Tangente parallel zu einer Geraden gesucht. Hierfür muss die Funktion f und die Gerade g gegeben sein. Hierfür wird nun zunächst der Berührpunkt gesucht, indem man die Gleichung $m_g = f'(u)$ nach u auflöst. Durch den Erhalt von u kann nun ähnlich wie gerade vorgegangen werden und u in die allgemeine Tangentengleichung eingesetzt werden.
3. Es wird die Tangente gesucht, welche durch einen Punkt $P(p_1|p_2)$ verläuft, welcher nicht auf der Funktion liegt. Hierfür muss erneut die Funktion f und der Punkt P gegeben sein. Hierfür wird die allgemeine Tangentengleichung genutzt und man ersetzt x durch die x-Koordinate von P und setzt dies dem y-Wert von P gleich. Somit erhält man dann die Gleichung $p_2 = f'(u) * (p_1 - u) + f(u)$ und muss diese lediglich nach u umstellen. u kann nun verwendet werden um die Tangentengleichung durch einsetzen in die allgemeine Tangentengleichung zu erhalten.

Normale

Unter einer Normalen versteht man eine Gerade, welche eine Funktion in einem Punkt orthogonal schneidet. Somit ist sie zudem orthogonal zur Tangenten an der gleichen Stelle. Die Steigung einer Tangente verhält sich hierdurch wie folgt zur Steigung der Tangenten, bzw. der Ableitung der Funktion an der Stelle u:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(u)}$$

. Die allgemeine Normalengleichung an der Stelle u ist des Weiteren wie folgt:

$$n : y = -\frac{1}{f'(u)} * (x - u) + f(u)$$

. Hierdurch können sehr ähnliche Aufgaben wie bei der Suche der Tangenten gelöst werden. Dabei wird genauso wie bei der Tangentensuche vorgegangen, nur dass die allgemeine Normalengleichung, statt der allgemeinen Tangentengleichung genutzt wird.

Kurvendiskussion

Definitions- und Wertemenge

Die Definitionsmenge gibt an, für welche Werte eine Funktion definiert ist. Das heißt, welche x-Werte einsetzbar sind. Die Wertemenge gibt an, welche Werte die Funktion annehmen kann.
So wird beispielsweise die Definitions- und Wertemenge von $e^x, \ln(x)$ und $\frac{1}{x}$ im Folgenden genauer betrachtet:

- Es gilt $f(x) = e^x$. Da e^x für alle reellen Zahlen definiert ist gilt: $D_f = \mathbb{R}$. Und da die Funktion nur oberhalb der x-Achse verläuft und diese nie berührt gilt: $W_f = (0; \infty) = \mathbb{R}^+$.
- Es gilt $g(x) = \ln(x)$. Da der natürliche Logarithmus nur für alle reellen Zahlen, welche größer als 0 sind, definiert ist gilt: $D_g = (0; \infty) = \mathbb{R}^+$. Da der natüriche Logarithmus alle reellen Zahlen annehmen kann gilt: $W_g = \mathbb{R}$.
- Es gilt $h(x) = \frac{1}{x}$. Da $h(x)$ für alle reellen Zahlen außer 0 definiert ist gilt: $D_h = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Da die Funktion alle reellen Zahlen annehmen kann gilt: $W_h = \mathbb{R}$.

Nullstellen

Zur Bestimmung der Nullstellen einer Funktion f muss folgende Gleichung nach x aufgelöst werden:

$$f(x) = 0$$

. Man erhält alle Nullstellen, bzw. alle x-Koordinaten der Nullpunkte, welche zu einem Punkt, bzw. Punkte $NP(x|0)$ umgeformt werden können.
Wenn man in der Lösungsmenge eine Nullstelle doppelt vorkommt, so handelt es sich um eine doppelte Nullstelle, bei 3 Vorkommen eine dreifache, usw.. Bei einer zwei-, vier-, sechs-, ... -fachen Nullstelle nähert sich die Kurve dabei nur der x-Achse an und berührt diese, durchstößt diese jedoch nicht. Ein-, drei-, fünf- .... -fache Nullstellen durchstoßen diese. Allgemein lässt sich sagen, dass sich der Graph in der Nähe einer n-fachen Nullstelle

genauso verhält, wie eine Potenzfunktion vom Grad n.

Symmetrie

Eine Funktion f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn gilt, dass

$$f(-x) = -f(x)$$

. Die Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn gilt, dass

$$f(-x) = f(x)$$

. Andere Formen der Symmetrie sind für das Abitur nicht relevant.

Grenzverhalten und Asymptoten

allgemeine Hinweise für das Rechnen mit dem Limes

Der Limes wird genutzt, um das Verhalten einer Funktion für einen Wert zu bestimmen, welcher nicht eingesetzt werden darf, da es sich beispielsweise um eine Definitionslücke, bzw. -grenze handelt oder der zu überprüfende Wert ∞ ist.
Wenn der Limes einer Summe bestimmt werden soll, so kann lediglich das Verhalten des Bestandteils mit dem höchsten Exponenten betrachtet werden, wobei eine Exponentialfunktion immer den höchsten Exponenten besitzt. Wenn es sich um ein Produkt oder einen Quotienten handelt, muss jedes Bestandteil hinsichtlich der Vorzeichen betrachtet werden, wobei auch hier gilt, dass der Bestandteil mit dem höchsten Exponenten entscheidet, ob es sich beispielsweise 0 oder ∞ annähert.
Eine weitere schnelle Methode um solch ein Verhalten zu überprüfen ist, dass man in den Taschenrechner die Funktion eingibt und das Verhalten für einen x-Wert nahe an der Grenze betrachtet und so auf das Grenzverhalten schließt.

Verhalten für extremale x-Werte und waagerechte Asymptoten

Von einer gegebenen Funktion f kann das Verhalten für x gegen $\pm\infty$ untersucht werden. Dafür wird folgende Gleichung gelöst für das Verhalten gegen ∞:

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

, und

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

für das Verhalten gegen negativ ∞. Mögliche Lösungen sind dabei: $\{0; k; \infty; -\infty\}; k \in \mathbb{R}$. Wenn dabei $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) \neq \pm\infty$ gilt, dann gibt es eine waagrechte Asymptote bei $\lim_{x\to\infty} f(x)$, bzw. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Dies kann dann als Gleichung der waagerechten Asymptoten wie folgt angegeben werden: $y = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Vereinfacht werden kann diese Untersuchung mit den folgenden Verallgemeinerungen bei gebrochen-rationalen Funktionen (Grad des Zählers wird mit z abgekürzt, der des Nenners mit n):

- Wenn $z < n$ gilt, dann gibt es eine waagrechte Asymptote bei $y = 0$.
- Wenn $z = n$ gilt, dann gibt es eine waagerechte Asymptote bei $y = c; c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, wobei c dem Quotienten der Leitkoeffizienten entspricht.
- Wenn $z > n$ gilt, dann gibt es keine waagrechte Asymptote.

Definitionslücken und senkrechte Asymptoten

Wenn eine Funktion f an einer Stelle nicht definiert ist, so spricht man von einer Definitionslücke. Dies geschieht vor allem, wenn man für das Ergebnis durch 0 teilen müsste.
In diesem Fall überprüft man welchen Wert der Zähler annimmt, wenn der Nenner eine Nullstelle besitzt. Ist das Ergebnis "$= 0$" handelt es sich um eine hebbare Definitionslücke und es gibt keine senkrechte Asymptote. Anderenfalls handelt es sich um eine Definitionslücke mit Polstelle, das heißt es gibt auch eine senkrechte Asymptote an der Stelle. Nun kann noch überprüft werden, ob es sich um eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel handelt, indem von beiden Seiten der Definitionslücke mithilfe des Limes das Grenzverhalten überprüft wird.

Monotonie und Krümmungsverhalten

Monotonie

Eine Funktion f ist immer dann streng monoton wachsend in einem Intervall I, wenn gilt, dass

$$f(a) < f(b); \qquad a, b \in I; a < b$$

. Sie ist streng monoton fallend, wenn gilt, dass

$$f(a) > f(b); \qquad a, b \in I; a < b$$

. Dies bedeutet in einer anderen Formulierung, dass eine Funktion streng monoton wachsend ist, wenn für alle $x \in I$ gilt, dass $f'(x) > 0$ und umgekehrt für streng monoton fallend. Diese zweite Formulierung nennt man auch den Monotoniesatz.
Des Weiteren gibt es den Fall, dass eine Funktion f im Intervall I lediglich monoton

wachsend oder fallend ist, wenn nur gilt, dass $f'(x) \leq 0$, bzw. $f'(x) \geq 0$.
So wäre die Funktion $f(x) = x^3$ zwar nicht streng monoton wachsend, da die Ableitung an der Stelle 0, 0 entspricht, jedoch monoton wachsend.

Krümmungsverhalten

Wenn die Ableitung einer Funktion f, also f' auf einem Intervall I streng monoton fallend ist, so ist f in diesem Intervall rechtsgekrümmt. Wenn f' in diesem Intervall streng monoton wachsend ist, so ist f in diesem Intervall linksgekrümmt.
Dies bedeutet, wenn $f''(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist f rechtsgekrümmt und linksgekrümmt im umgekehrten Fall.

Extrem- und Wendepunkte

Extrem- und Sattelpunkte

Zur Bestimmung der Extrempunkte einer Funktion f, müssen zuerst die Extremstellen bestimmt werden durch die Lösung der Gleichung

$$f'(x) = 0$$

, wobei gelten muss, dass

$$f''(x) \neq 0$$

. Wenn diese Stelle(n) bestimmt sind, so können die entsprechenden Punkte nach dem Schema $EP(x|f(x))$ bestimmt werden. Wenn $f''(x) = 0$ gilt, so handelt es sich bei der Stelle um eine Sattelstelle und nach dem gleichen Vorgehen kann auch der Sattelpunkt berechnet werden.

Wendepunkte

Wenn die Wendepunkte einer Funktion f berechnet werden sollen, müssen zunächst die Wendestellen mittels lösen der folgenden Gleichung bestimmt werden:

$$f''(x) = 0$$

, wobei wiederum gelten muss, dass

$$f'''(x) \neq 0$$

ist. Nun kann der Wendepunkt WP nach dem folgenden Schema bestimmt werden: $WP(x|f(x))$.

Extremwertbestimmung mit Nebenbedingungen

Zunächst muss der Term bestimmt werden, welcher extremal werden soll. Wenn dieser mehrere Variablen enthält muss mittels der Zusammenhänge zwischen den Variablen einer gefunden werden, mit einer Variable. Diese Funktion nennt man Zeilfunktion. Außerdem muss das Intervall bekannt sein, in welchem die Zielfunktion auf Extrembedingungen untersucht werden soll. Nun kann die Zielfunktion auf Extremwerte untersucht werden, welche im Intervall liegen. Auch muss durch überprüfen der Ränder des Intervalls gesichert werden, dass diese keine höheren (oder sonstigen extremen) Werte besitzen. Nun kann zum Schluss das Ergebnis formuliert werden, wobei angegeben wird, ob der extremste Wert an den Rändern oder in dem Intervall liegt.

Stammfunktionen

Wenn man die kumulierten Werte einer Funktion bis zu einem Punkt erhalten möchte, so kann man eine Funktion $f(x)$ aufleiten und ihre Stammfunktion $F(x)$ erhalten. Die Aufleitung, bzw. Stammfunktion ist das umgekehrte zur Ableitung einer Funktion. Deshalb gilt auch, dass $F'(x) = f(x)$.
Des Weiteren ist zu beachten, dass es immer eine unendliche Anzahl an Aufleitungen gibt, da ein konstanter Summand hinzugefügt werden kann, welcher die Stammfunktion nach oben verschiebt. Somit gilt, dass die Stammfunktion von f,

$$F(x) + c; \qquad c \in \mathbb{R}$$

entspricht.

Ähnlich zur Ableitung gibt es auch sogenannte Aufleitungsregeln, und zwar folgende:

Potenzregel Wenn eine Potenzfunktion aufgeleitet werden soll, so muss der Exponent um 1 erhöht werden, und ein Vorfaktor vom Kehrwert des neuen Exponenten hinzugefügt werden. Dies kann wie folgt dargestellt werden:

$$f(x) = x^b; \qquad F(x) = \frac{1}{b+1} * x^{b+1}; \qquad b \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

Summenregel Wenn eine Summe von Funktionen aufgeleitet werden soll, kann auch jede Teilfunktion einzeln aufgeleitet werden. Somit gilt:

$$f(x) = g(x) + h(x); \qquad F(x) = G(x) + H(x)$$

Faktorregel Wenn eine Funktion mit Vorfaktor aufgeleitet werden soll, so bleibt dieser bestehen und wird nicht verändert. Oder allgemein ausgedrückt:

$$f(x) = k * g(x); \qquad F(x) = k * G(x)$$

lineare Substitution Wenn eine verkettete Funktion nach dem Schema $f(x) = g(a*x+b)$ aufgeleitet werden soll, so gilt:

$$f(x) = g(a * x + b); \qquad F(x) = \frac{1}{a} * G(a * x + b)$$

Des Weiteren gibt es folgende Sonderfälle bei der Aufleitung:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}; \qquad F(x) = \ln(|x|)$$

$$f(x) = \sin(x); \qquad F(x) = -\cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x); \qquad F(x) = sin(x)$$

$$f(x) = e^x; \qquad F(x) = e^x$$

rekonstruierter Bestand

Die Stammfunktion kann beispielsweise verwendet werden, um einen absoluten Wert für einen x-Wert zu bestimmen, wenn lediglich eine Funktion vorhanden ist, welche die Änderungsrate beschreibt. Hierfür wird einerseits die Funktion f benötigt, welche die Änderungsrate beschreibt, als auch der Anfangsbestand c. Dann gilt, dass der absolute Bestand B zu einem Punkt x wie folgt berechnet werden kann:

$$B(x) = F(x) + c$$

Integral

Das Integral wird genutzt, um die Fläche zwischen einer Funktion und der x-Achse zu bestimmen. Diese nennt man auch den orientierten Flächeninhalt. Es muss beachtet werden, dass wenn der Graph unterhalb der x-Achse verläuft, dass die Fläche negativ betrachtet wird. Das Integral wird immer in einem Intervall $[a; b]$ bestimmt. Notiert wird das Integral der Funktion $f(x)$ im Bereich von a bis b wie folgt:

$$\int_a^b f(x)dx$$

. Beim Rechnen mit Integralen kann ein Integral in mehrere Teilintegrale wie folgt zerlegt werden:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx; \qquad a < b < c$$

. Des Weiteren kann ein Faktor auch aus dem Integral isoliert werden, wie folgt:

$$\int_a^b k * f(x)dx = k * \int_a^b f(x)dx$$

. Zur Berechnung eines Integrals kann die Stammfunktion wie folgt verwendet werden:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

. Dies ist durch den ersten Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung (vgl. Abschnitt dazu) definiert.

Hauptätze der Differenzial- und Integralrechnung

1. Ist die Funktion f im Intervall $[a; b]$ integrierbar und ist F eine Stammfunktion im Intervall $[a; b]$, so gilt
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
2. Sind F und G verschiedene Stammfunktionen von f im Intervall I so unterscheiden sich $F(x)$ und $G(x)$ nur um eine Konstante c, das heißt es gilt
$$F(x) = G(x) + c; \qquad x \in I; c \in \mathbb{R}$$

Integralfunktionen

Man kann auch eine Funktion mithilfe eines Integrals erstellen, indem man eine der Grenzen variabel auslegt. Meist wird die festgesetzte Grenze als Index angegeben. Somit wäre die Integralfunktion von f zur unteren Grenze u wie folgt:

$$J_u(x) = \int_u^x f(t)dt = F(x) - F(u)$$

. Dabei gelten die folgenden Grundsätze:

- jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion der Ursprungsfunktion, aber nicht zwangsläufig umgekehrt
- die untere Grenze ist immer eine Nullstelle der Funktion

Berechnung von Flächeninhalten

gesamter Flächeninhalt

Wenn statt dem orientierten Flächeninhalt der gesamte Flächeninhalt berechnet werden soll, so muss das Integral $I = [a; b]$ an allen Nullstellen der Funktion f geteilt werden. Dann kann der Flächeninhalt wie folgt berechnet werden:

$$A = |\int_a^{x_0} f(x)dx| + |\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx| + ... + |\int_{x_n}^{b} dx|$$

Fläche zwischen Graphen

Wenn die Funktionen keinen Schnittpunkt besitzen kann mit der folgenden Formel der Flächeninhalt der von den Funktionen f und g im Intervall $[a; b]$ berechnet werden:

$$A = |\int_a^b (f(x) - g(x))dx|$$

. Ansonsten muss das Integral analog zum vorigen Abschnitt in Teilintervalle zerlegt werden und dann die Summe berechnet werden.

unbegrenzter Flächeninhalt

Wenn man die Fläche einer Funktion f in einem Intervall mit offener Grenze berechnen will, so nennt man dies eine unbegrenzte Fläche. Hierzu wird zunächst das Integral mit einer variablen Grenze z in die Richtung, in welche das Intervall geöffnet ist, bestimmt. Nun wird das Grenzverhalten dieses Integrals mithilfe des Limes (vgl. Abschnitt Grenzverhalten) berechnet. Wenn das Integral dabei einen endlichen Grenzwert hat, so nennt man das Integral uneigentlich. Der Flächeninhalt eines uneigentlichen Integrals im Intervall $I = [u; w]$, welches nach w unbegrenzt ist, ist somit:

$$A = \lim_{z \to w} \int_u^z f(x)dx$$

Mittelwert von Funktionen

Um den Mittelwert einer Funktion f auf einem Intervall $I = [a; b]$ zu bestimmen kann die folgende Formel verwendet werden:

$$\bar{m} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Volumen von Rotationskörpern

Wenn man eine Funktion f um die x-Achse rotieren lässt, so entsteht ein sogenannter Rotationskörper. Dessen Volumen läst sich ähnlich zu dem eines Zylinders, im Integral $[a;b]$ mit

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

berechnen. Im Falle, dass ein Körper mit freiem Kern entstehen soll, muss beachtet werden, dass der Kern nicht vor der Berechnung des Integrals von der Funktion subtrahiert werden darf, da sonst eine Verschiebung der Funktion nach unten geschieht und das Volumen nicht mehr stimmt.

Geometrie

Stochastik

Anhang

Grundwissen

Lösen von Gleichungen

(vgl. Aufschrieb von Herrn Frey)

Lineare Gleichungen

Für diese Art von Gleichungen nutzt man Äquivalenzumformungen. Dabei muss lediglich beachtet werden, dass nie "durch x geteilt" werden darf, da ansonsten mögliche Lösungen verschwinden, da die Gleichungen nur noch für $x \neq 0$ gelten. Eine Beispielrechnung geht wie folgt:

$$7x + 25 = -3x - 5 \mid +3x$$

$$10x + 25 = -5 \mid -25$$

$$10x = -30 \mid : 10$$

$$x = -3$$

Satz vom Nullprodukt Mithilfe des Satzes vom Nullprodukt kann eine Multiplikation von zwei Teilfunktionen mit einer Variable 0 gleichgesetzt werden. Wird diese Regel verwendet, so muss die Verwendung des Satz vom Nullprodukt angegeben werden. Ein Beispiel hierfür wäre.

$$(x + 5) * (x - 3) = 0$$

Verwendung des Satz vom Nullprodukt

$$x + 5 = 0 \rightarrow x_1 = -5; \qquad x - 3 = 0 \rightarrow x_2 = 3$$

Ausklammern

Wenn eine Summe von Produkten besteht, bei welchen alle Summanden einen gleichen Faktor im Produkt haben, so darf dieser mithilfe des Distributivgesetz "ausgeklammert" werden. Eine Beispielrechnung hier für wäre wie folgt aufgebaut:

$$x^3 - 2x^2 = 0$$

$$x^2 * (x - 2) = 0$$

Nun kann mithilfe des Satzes vom Nullprodukt weiter verfahren werden.

quadratische Gleichungen

Gleichungen nach dem Muster $ax^2 + bx + c = 0; a, b, c \in \mathbb{R}$ können relativ elegant mithilfe der Mitternachtsformel gelöst werden. So können immer alle Lösungen einer solchen Gleichung mit der folgenden Formel bestimt werden:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Substitution

Allgemein verkette Funktionen, welche Teil einer Gleichung sind, aber vor allem biquadratische Gleichungen lassen sich mithilfe der Technik der Substitution lösen. Dies wird an einem Beispiel einer biquadratischen Gleichung gezeigt:

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$$

Substituieren mit $z = x^2$

$$z^2 - 7z + 12 = 0$$

$z_{1/2}$ *mithilfe der Mitternachtsformel bestimmen*

$$z_1 = 3; z_2 = 4$$

Rücksubstitution:

$$z_1 = 3 = x^2 \to x_{1/2} = \pm\sqrt{3}; \qquad z_2 = 4 = x^2 \to x_{3/4} = \pm 2$$

Potenzgleichungen

Gleichungen mit einer einmalig vorkommenden Potenz zur Basis der Variable können mithilfe einfacher Äquivalenzumformungen und der Verwendung der $n$ten-Wurzel gelöst werden. Eine Beispielrechnung hierfür geht wie folgt:

$$x^3 + 7 = -20 \mid -7$$

$$x^3 = -27 \mid \sqrt[3]{}$$

$$x = -3$$

. Dabei muss darauf geachtet werden, dass geradzahlige Wurzeln immer zwei Lösungen besitzen.

Exponentialgleichungen

Gleichungen mit einer Variable im Exponenten lassen sich mithilfe des Logarithmus lösen. Dies wird hier an einem Beispiel gezeigt:

$$5^x = 125 \mid \log_5$$

$$x = \log_5(125) = 3$$

Satz von Vieta

Wenn eine quadratische Gleichung nach dem Schema $ax^2 + bx + c = 0; a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a = 1$ gelöst werden soll, so kann der Weg etwas verkürzt werden, wenn man folgende Gleichung im Kopf an die zu lösende Gleichung mittels Veränderung von p und q angleicht:

$$x_1 = p; x_2 = q$$

$$x^2 - (q + p) * x + (p * q)$$

. **Hierbei muss immer angegeben werden, dass der Satz von Vieta verwendet wurde.**

Abiturrichtlinien

Für genaue Informationen siehe Dokument[1] des Regierungspräsidiums.

[1]Regierungspräsidium Baden-Württemberg. Leistungsfach Mathematik Schriftliche Abiturprüfung 2021 Und 2022. Regierungspräsidium Baden-Württemberg, 2019, https://rp.baden-wuerttemberg.de/rps/Abt7/Ref75/Fachberater/Documents/Mathe/2021-LF-Konvolut.pdf.