

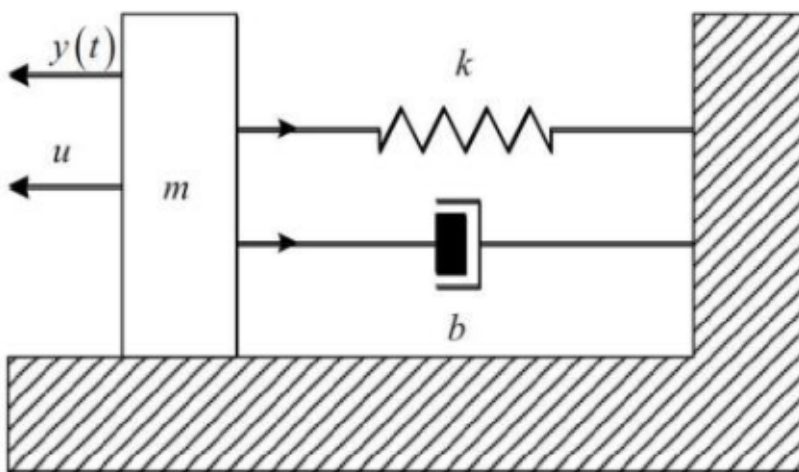
# Πρώτη Εργασία του μαθήματος Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Νίκος Λαδιάς

Μάρτιος 2021

## Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	2
2	Θέμα 1	2
2.1	Θεωρητική ανάλυση πρώτο ερώτημα . . . . .	2
2.2	Αλγόριθμος ελαχίστων τετραγώνων . . . . .	3
2.3	Παραγόμενα γραφήματα . . . . .	4
3	Θέμα 2	5
3.1	Θεωρητική ανάλυση . . . . .	5
3.2	Εκτίμηση εξόδου του συστήματος, έρευνα εκτιμήσεων σε περιπτώσεις σφαλμάτων . . . . .	7



Εικόνα 1: Δεδομένο σύστημα

# 1 Εισαγωγή

Σε αυτήν την εργασία καλούμαστε να υλοποιήσουμε δύο δυναμικά συστήματα στο προγραμματιστικό περιβάλλον του MATLAB, ένα με ένα σώμα , αποσβεστήρα και ελατήριο και ένα κύκλωμα με αντίσταση , πηνίο και πυκνωτή. Τα αρχεία κώδικα που υλοποιήθηκαν για την κάθε άσκηση είναι:

1. Θέμα 1: Exercise1.m για την υλοποίηση της άσκησης και model.m για την υλοποίηση των καταστάσεων της διαφορικής εξίσωσης που διέπει το σύστημα
2. Θέμα 2: Exercise2.m για την υλοποίηση της άσκησης και model2.m για την υλοποίηση των καταστάσεων της διαφορικής εξίσωσης που διέπει το σύστημα

## 2 Θέμα 1

### 2.1 Θεωρητική ανάλυση πρώτο ερώτημα

Στο πρώτο ερώτημα ζητείται μια θεωρητική ανάλυση για το γραμμικά παραμετροποιημένο μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει την δυναμική συμπεριφορά του δεδομένου συστήματος

Απο τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, όπου  $y$  η μετατόπιση του σώματος και  $u$  η εξωτερική δύναμη που δέχεται και τις κατάλληλες πράξεις καταλήγουμε στην εξής διαφορική εξίσωση που περιγράφει το δεδομένο μας σύστημα:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{b}{m} \frac{dy}{dt} - \frac{k}{m}y + \frac{1}{m}u$$

Έτσι ορίζουμε τους παρακάτω ζητούμενους πίνακες , απαραίτητους για να προχωρήσουμε στην ανάλυση μας:

$$\theta^* = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} \\ \frac{k}{m} \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \theta_1^* = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} \\ \frac{k}{m} \end{bmatrix}, \theta_2^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \Delta = \begin{bmatrix} -\frac{dy}{dt} \\ -y \\ u \end{bmatrix}$$

Συνεπώς,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\theta^* \Delta$$

Αν μόνο τα  $u, y$  είναι διαθέσιμα προς μέτρηση η παραπάνω μορφή δεν μπορεί να υλοποιηθεί , το πρόβλημα ξεπερνιέται φιλτράροντας με ένα

ευσταθές φίλτρο δεύτερης τάξης  $\frac{1}{\Lambda(s)}$ , με  $\Lambda(s) = s^2 + 2s + 3$ , με

$$\lambda^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}. \text{ Το φίλτρο αυτό είναι ευσταθές καθώς σύμφωνα και}$$

με το κριτήριο Ruth-Hurwitz αν όλοι οι συντελεστές του δεύτερης τάξης αυτού πολυωνύμου είναι ομόσημοι του συντελεστή του όρου στο τετράγωνο τότε είναι ευσταθές, αφού οι πόλοι του βρίσκονται ουσιαστικά στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Και τότε έχουμε:

$$y = \theta_\lambda^T \zeta$$

όπου

$$\theta_\lambda = \begin{bmatrix} \theta_1^* - \lambda^* \\ \theta_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} - 2 \\ \frac{k}{m} - 3 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \zeta = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)}y \\ \frac{\Delta_0^T(s)}{\Lambda(s)}u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{[s \ 1]}{\Lambda(s)}y \\ \frac{1}{\Lambda(s)}u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{s}{s^2+2s+3}y \\ -\frac{1}{s^2+2s+3}y \\ \frac{1}{s^2+2s+3}u \end{bmatrix}$$

## 2.2 Αλγόριθμος ελαχίστων τετραγώνων

Για το γραμμικά παραμετροποιημένο μοντέλο όπου  $\theta$  το διάνυσμα άγνωστων παραμέτρων διάστασης  $d=3$  και  $\zeta$  το διάνυσμα των φιλτραρισμένων σημάτων της μετατόπισης  $y$  και της εξωτερικής δύναμης  $u$ . Έστω οι μετρήσεις της μετατόπισης και της εξωτερικής δύναμης που

$$\text{εφαρμόζεται στο σώμα : } Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ \dots \\ y(N) \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} u(1) \\ u(2) \\ u(3) \\ \dots \\ u(N) \end{bmatrix} \text{ Τότε έχουμε τον}$$

Ζ πίνακα, τον προηγούμενο πίνακα  $\zeta$ , όπου σε κάθε μια απο τις τρεις στήλες του θα έχει τα φιλτραρισμένα σήματα  $y$  και  $u$  αντίστοιχα με τον

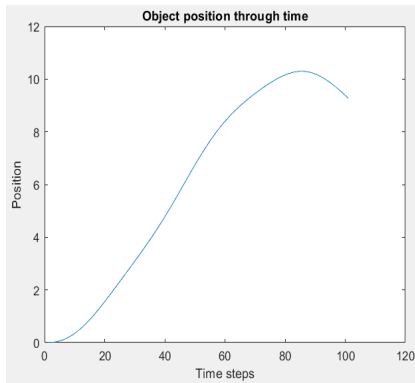
τρόπο που ορίστηκε. Έτσι, :  $Z_{N \times 3} = \begin{bmatrix} -\frac{s}{s^2+2s+3}y(1) & -\frac{1}{s^2+2s+3}y(1) & \frac{1}{s^2+2s+3}u(1) \\ -\frac{s}{s^2+2s+3}y(2) & -\frac{1}{s^2+2s+3}y(2) & \frac{1}{s^2+2s+3}u(2) \\ -\frac{s}{s^2+2s+3}y(3) & -\frac{1}{s^2+2s+3}y(3) & \frac{1}{s^2+2s+3}u(3) \\ \dots & \dots & \dots \\ -\frac{s}{s^2+2s+3}y(N) & -\frac{1}{s^2+2s+3}y(N) & \frac{1}{s^2+2s+3}u(N) \end{bmatrix}$

Έτσι με βάση την θεωρία ο τύπος που θα μας δώσει τον  $\theta$  πίνακα για τον υπολογισμό των άγνωστων παραμέτρων είναι:

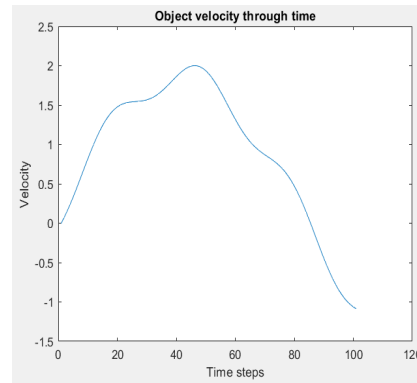
$$\theta = Y^T Z (Z^T Z)^{-1}$$

Το οποίο θα επιστρέψει τις εκτιμήσεις του διανύσματος  $\theta_\lambda$ . Οι εκτιμήσεις μας προφανώς και εξαρτώνται από τους πόλους του φίλτρου το οποίο ενσωματώνουμε για να λύσουμε το πρόβλημα της υλοποίησης της γραμμικής μας παραμετροποίησης για το σύστημα. Αυτό έχει να κάνει με την φυσική συχνότητα των συστημάτων, εδώ το μηχανικό σύστημα έχει αρκετά μεγάλη περίοδο οπότε χρειαζόμαστε πόλους κοντά στον άξονα για να φιλτράρουμε ενώ αντίθετα όσο μεγαλώνουν οι πόλοι μεγαλώνει και το  $\omega_n$ . Έτσι πρόκειται για ένα φίλτρο για υψίσυχνα συστήματα.

## 2.3 Παραγόμενα γραφήματα



(a) Θέση σώματος



(b) Ταχύτητα σώματος

Εικόνα 2: Θέση και ταχύτητα σώματος για 10s με time step=0.1s

## 3 Θεμα 2

### 3.1 Θεωρητική ανάλυση

Απο το κύκλωμα μας προκύπτουν οι εξής εξισώσεις , οι οποίες με συνδυασμό τους θα μας βοηθήσουν να βρούμε την διαφορική εξίσωση που διέπει το κύκλωμα μας. Για εξόδους τις τάσεις  $V_C, V_R$  και εισόδους τις τάσεις  $u_1, u_2$ :

$$u_1(t) = V_R + L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (1)$$

$$V_C = L \frac{di_L(t)}{dt} + u_2(t) \quad (2)$$

$$i_2(t) = C \frac{dV_C}{dt} \quad (3)$$

$$i_1(t) = \frac{V_R}{R} \quad (4)$$

$$i_L(t) = i_2(t) - i_1(t) \quad (5)$$

όπου  $i_1$  το ρεύμα που διαρρέει την  $R$  αντίσταση και  $i_2$  το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή  $C$ . Από τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει ότι :  $V_R = u_1(t) + u_2(t) - V_C$  , ενώ επίσης με αντικατάσταση της (5) στην (2) και με αντικατάσταση έπειτα των επιμέρους εξισώσεων (3) και (4) για τα ρεύματα καθώς και της έκφρασης της  $V_R$  που παράγαμε, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{dV_c^2}{dt^2} &= -\frac{1}{RC} \frac{dV_C}{dt} - \frac{1}{LC} V_C + \frac{1}{RC} \frac{du_1}{dt} + \frac{1}{CL} u_2 + \frac{1}{RC} \frac{du_2}{dt} \implies \\ \frac{dV_c^2}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC} V_C &= \frac{1}{RC} \frac{du_1}{dt} + \frac{1}{LC} u_2 + \frac{1}{RC} \frac{du_2}{dt} \quad (6) \end{aligned}$$

Όπου ο τελευταίος όρος που εμπεριέχει την παράγωγο της  $u_2$  είναι ίσος με το μηδέν καθώς η τάση  $u_2$  είναι σταθερή.

Προχωρώντας στην θεωρητική μας ανάλυση ομοίως με την πρώτη

άσκηση , πρέπει να ορίσουμε τον  $\theta^*$  πίνακα μας :  $\vartheta^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} - 100 \\ \frac{1}{LC} - 150 \\ \frac{1}{RC} \\ 0 \\ \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix}$ 
 $\mu\epsilon, \theta_1^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix}$ 
 $, \theta_2^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \\ \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix}$

Αφού ορίσουμε το φίλτρο  $\Lambda(s)$  μας , θα προχωρήσουμε στον ορισμό του  $\zeta$  πίνακα. Το φίλτρο που θα επιλέξουμε θα έχει πόλους το 100 και το 150 και θα είναι δεύτερης τάξης. Άρα  $\Lambda(s) = s^2 + 100s + 150$ . Το φίλτρο μας όπως και στην προηγούμενη άσκηση θα είναι δεύτερης τάξης αφού στη διαφορική εξίσωση κάνουμε γραμμική παραμετροποίηση ως προς το  $Vc$  και εμφανίζεται μέχρι και δεύτερη παράγωγος γενικά στο συγκεκριμένο σύστημα. Το φίλτρο είναι ευσταθές καθώς απο κριτήριο Ruth-Hurwitz, όλοι οι συντελεστές του είναι ομόσημοι του  $s^2$ . Ο  $\zeta$  πίνακας αυτή τη φορά διαφοροποιείται για το μοντέλο μας, το οποίο πλέον διαθέτει δύο εισόδους και μια έξοδο, αφού κάνουμε γραμμική παραμετροποίηση **ως προς το  $Vc$**  και δεχόμαστε στο σύστημα μας τις εισόδους  $u_1(t), u_2(t)$ . Έτσι έχουμε λόγω του δι-

$$\text{ανύσματος εισόδων αυτή τη φορά: } \zeta = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)}y \\ \frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)}u_1 \\ \frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)}u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{[s \ 1]}{\Lambda(s)}y \\ \frac{[s \ 1]}{\Lambda(s)}u_1 \\ \frac{[s \ 1]}{\Lambda(s)}u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{s}{L(s)} * Vc \\ -\frac{1}{\Lambda(s)} * Vc \\ \frac{s}{\Lambda(s)} * u_1 \\ \frac{1}{\Lambda(s)} * u_1 \\ \frac{s}{\Lambda(s)} * u_2 \\ \frac{1}{\Lambda(s)} * u_2 \end{bmatrix}$$

και θεωρώντας έξοδο όπως προαναφέραμε την τάση  $Vc$  έχουμε ότι :

$$y = \begin{bmatrix} Vc(1) \\ Vc(2) \\ Vc(3) \\ \dots \\ Vc(N) \end{bmatrix} \quad \text{Έτσι με τον τύπο}$$

$$\theta = y^T \zeta (\zeta^T \zeta)^{-1}$$

Ολοκληρώνουμε τον αλγόριθμο ελαχίστων τετραγώνων και υπολογίζουμε τον πίνακα  $\theta$  ο οποίος ταυτίζεται με τον θεωρητικό  $\theta^*$ . Έχοντας τις τιμές των συντελεστών  $\frac{1}{RC}$ ,  $\frac{1}{LC}$  μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε τον Laplace μετασχηματισμό της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματός μας. Στη διαφορική εξίσωση (σχέση (6)) που παράγαμε για μηδενικές αρχικές συνθήκες έχουμε:

$$\begin{aligned} Y(s)s^2 + \frac{1}{RC}Y(s)s + \frac{1}{LC}Y(s) &= \frac{1}{RC}sU(s) + \frac{1}{LC}U(s) + \frac{1}{RC}sU(s) \implies \\ Y(s)(s^2 + \frac{1}{RC}s + 1) &= U(s)(\frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} + \frac{1}{RC}s) \implies \\ H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{\frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} + \frac{1}{RC}s}{s^2 + \frac{1}{RC}s + 1} \end{aligned}$$

το οποίο ονομάζεται και πίνακας μεταφοράς του συστήματος μας. Έτσι ο πίνακας μεταφοράς είναι πλέον υπολογίσιμος καθώς οι συντελεστές  $\frac{1}{RC}$ ,  $\frac{1}{LC}$  είναι γνωστοί με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

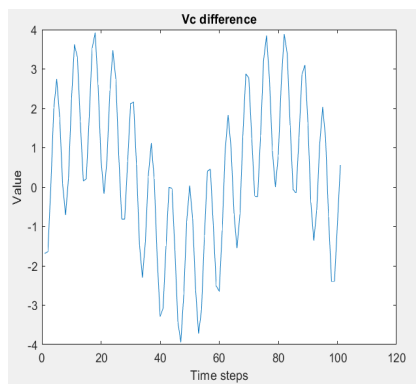
### 3.2 Εκτίμηση εξόδου του συστήματος, έρευνα εκτιμήσεων σε περιπτώσεις σφαλμάτων

Αφού έχουμε υπολογίσει τις μεταβλητές R,L,C με την βοήθεια του  $\theta$  πίνακα, προσομοιώνουμε το σύστημα μας με τις τιμές που βρήκαμε. Επιλέγουμε απο τον πίνακα  $\theta$  που βγάλαμε απο την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων πχ την 5η και 6η θέση του πίνακα όπου ισούται με τους συντελεστές  $\frac{1}{RC}$ ,  $\frac{1}{LC}$  και τους διαλέγουμε για να τους περάσουμε σαν παραμέτρους στο δυναμικό μοντέλο μας. Η προσομοίωση του συστήματος έγινε με βήμα χρόνου=0.0001s για να μπορέσουμε να πιάσουμε

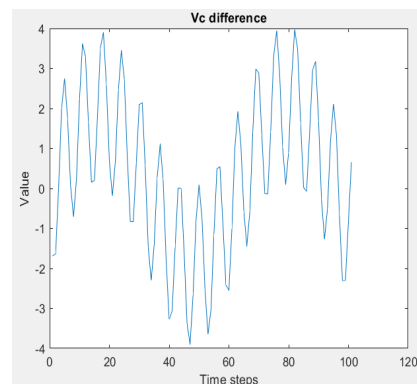
κάποιες υψίσυχνες ταλαντώσεις των  $V_r, V_c$ . Επαληθεύουμε τις τιμές που προκύπτουν με τις πραγματικές μετρήσεις της τάσης  $V_c$  και  $V_r$  απο το αρχείο v.p.

Έτσι, είμαστε σε θέση τώρα, να παράγουμε γραφήματα για τα σφάλματα στις εκτιμήσεις των τάσεων(εξόδους τους συστήματος)  $V_c$  και  $V_r$ .

Παράγουμε τα γραφήματα και παρατηρούμε πως κυμαίνεται σε αρ-

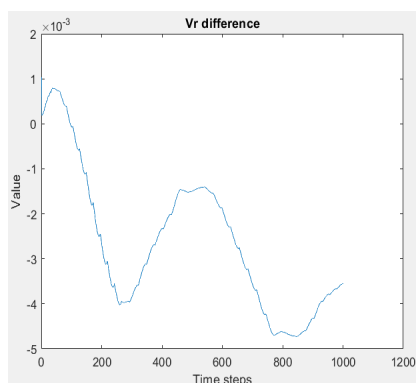


(a) Κατανομή χωρίς τυχαία σφάλματα

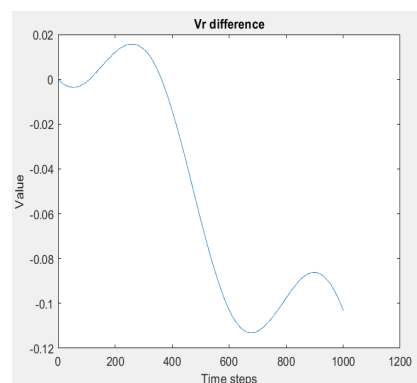


(b) Κατανομή με τυχαία σφάλματα

Εικόνα 3: Κατανομή σφάλματος  $V_c$  με και χωρίς τυχαία ενσωματωμένα σφάλματα



(a) Κατανομή χωρίς τυχαία σφάλματα



(b) Κατανομή με τυχαία σφάλματα

Εικόνα 4: Κατανομή σφάλματος  $V_r$  με και χωρίς τυχαία ενσωματωμένα σφάλματα

κετά χαμηλές τιμές για την τάση  $V_r$ , ενώ για την  $V_c$  παλινδρομεί διαρκώς σε διαστήματα  $[+2 -2], [0 +4], [-4 0]$ . Είναι μια μερικώς καλή



εκτίμηση. Στα γραφήματα επιλέχτηκαν σημεία ανα 1000 τιμές για την προσομοιωμένη  $V_c$  και ανα 100 για την  $V_i$ , έτσι ώστε να είναι πιο εύκολα εμφανής οι γραφικές παραστάσεις λόγω πυκνών ταλαντώσεων των εκτιμήσεων, που έχουμε οι οποίες γεμίζουν πολύ την εικόνα με αποτέλεσμα να μην έχουμε καλή εικόνα να συγκρίνουμε. Διαλέγοντας ανα 1000 και 100 σημεία αναιρούμε αυτό το πρόβλημα αναπαράστασης. Αυτό που μπορούμε να πούμε στην περίπτωση κάποιων ενσωματωμένων επίτηδες σφαλμάτων(3 συγκεκριμένα σε τυχαίες επιλεγμένες θέσεις πινάκων  $V_i$  και  $V_c$ ), με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων είναι πως υπάρχει εμφανώς μεγαλύτερο πρόβλημα στα σφάλματα για το  $V_i$ . Στις εικόνες 1 και 3, για το  $V_c$ , βλέπουμε πως δεν έχει επηρεαστεί τόσο η κατανομή των σφαλμάτων, παρόλα αυτά σε ένα πίνακα για τις μέσες τιμές των σφαλμάτων αυτών παρατηρούμε ότι εισάγοντας τα τυχαία σφάλματα, η μέση τιμή της διαφοράς  $V_c$  αυξάνεται. Παρότι δεν συμβαίνει το ίδιο για την  $V_i$  είναι αρκετά κοντά οι μέσες τιμές των σφαλμάτων και ενδεχομένως για μεγαλύτερο χρόνο προσομοίωσης να καταλήγαμε σε παρόμοια αποτελέσματα και για αυτήν. Χρόνο πολύ όμως για προσομοίωση δεν έχουμε διότι ούτε μεγάλη υπολογιστική ισχύ έχουμε εύκολα αλλά ούτε και είναι πρακτικό αυτό. Γι αυτό και τα 10 δευτερόλεπτα προσομοίωσης είναι αρκετά.