

Δεύτερη Εργασία του μαθήματος Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Νίκος Λαδιάς

Μάιος 2021

Περιεχόμενα

1	Θεωρητική ανάλυση του δεδομένου συστήματος για την μέθοδο κλίσης	1
2	Μοντελοποίηση στο MATLAB για την μέθοδο κλίσης	3
2.1	Μοντελοποίηση	3
2.2	Αποτελέσματα και συμπεράσματα	4
3	Σύστημα αναγνώρισης με την μέθοδο Lyapunov	6
3.1	Σύστημα αναγνώρισης με παράλληλη τοπολογία	6
3.2	Σύστημα αναγνώρισης με μεικτή τοπολογία	7
3.3	Σχόλια και συμπεράσματα	9
4	Σύστημα αναγνώρισης με την παράλληλη τοπολογία μεθόδου Lyapunov για σύστημα δεύτερης τάξης	12

1 Θεωρητική ανάλυση του δεδομένου συστήματος για την μέθοδο κλίσης

Η εξίσωση που διέπει το δεδομένο σύστημα είναι η:

$$\dot{x} = -ax + bu, x(0) = 0 \quad (1)$$

Όπου x η κατάσταση του συστήματος και a, b οι σταθερές παράμετροι τις οποίες ζητείται να εκτιμηθούν και $u = 5\sin(3t)$ η είσοδος. Έστω a_m ένας θετικός συντελεστής, τότε αν προσθέσω και αφαιρέσω ταυτόχρονα στο δεξί μέρος της διαφορικής εξίσωσης τον όρο a_mx , τότε η (1) γίνεται:

$$\dot{x} = -ax + a_mx - a_mx + bu \implies \dot{x} + a_mx = (a_m - a)x + bu$$

Εφόσον η αρχική τιμή του x είναι μηδενική Laplace μορφή της εξίσωσης μας είναι.

$$sx + a_m x = (a_m - a) + bu \implies x(s + a_m) = (a_m - a)x + bu \implies x = \frac{1}{s + a_m} [(a_m - a)x + bu]$$

Να σημειωθεί όμως εδώ πως η παραπάνω ανάλυση δεν είναι κάποια αυστηρά μαθηματική προσέγγιση της διαφορικής εξίσωσης (1), αλλά βοηθάει στο να παραχθεί έπειτα η γραμμική παραμετροποίηση του συστήματος την οποία επιθυμούμε. Έτσι ορίζοντας τους παρακάτω πίνακες θ^* και φ :

$$\theta^* = \begin{bmatrix} a_m - a \\ b \end{bmatrix}, \quad \varphi^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{s + a_m} x \\ \frac{1}{s + a_m} u \end{bmatrix}$$

Το σύστημα έτσι μπορεί να γραφεί πλέον σε γραμμικά παραμετρική μορφή :

$$x = \theta^{*T} \varphi$$

Έτσι το σύστημα αναγνώρισης στη μορφή που είναι το μοντέλο του συστήματος γράφεται ως εξής:

$$\hat{x} = \hat{\theta}^T \varphi$$

όπου $\hat{x}, \hat{\theta}$ οι εκτιμήσεις του x και θ αντίστοιχα. Το φ είναι γνωστό διάνυσμα του οποίου ο ορισμός του πόλου a_m αφήνεται στην επιλογή του μοντέλου εκτίμησης. Το σφάλμα ορίζεται ως: $e = x - \hat{x}$. Η μέθοδος της κλίσης στηρίζεται για την εύρεση της αναδρομικής εκτίμησης $\hat{\theta}$ του θ^* στην ελαχιστοποίηση ως προς $\hat{\theta}$ κατάλληλα ορισμένης συνάρτησης κόστους του e , η συνάρτηση που θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα ανάλυση (και που αποτελεί μια τυπική τέτοια συνάρτηση):

$$K(\hat{\theta}) = \frac{e^2}{2} = \frac{(x - \hat{\theta}^T \varphi)^2}{2} \quad (2)$$

Ενώ η μέθοδος της κλίσης έχει την γενική μορφή:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma \nabla K(\hat{\theta}) \quad (3)$$

και το διάνυσμα κλίσης της $K(\hat{\theta})$ είναι:

$$\nabla K = -(x - \hat{\theta}^T \varphi) \varphi = e \varphi \quad (4)$$

Έτσι απο (3) & (4) η μέθοδος που αναπτύσσεται είναι:

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma e \varphi \quad (5)$$

,όπου το e , είναι το σφάλμα και άρα μετρήσιμο μέγεθος , το γ θετική σταθερά που πρέπει να επιλεγεί τυπικά μέσω διαδικασίας σφάλματος και το διάνυσμα φ το οποίο και ορίστηκε παραπάνω. Απο τις δύο συνιστώσες του διανύσματος φ , μπορούν να παραχθούν οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το σύστημα εκτίμησης καθώς και απο την σχέση (5) και τις συνιστώσες του $\hat{\theta}$. Το σύστημα λοιπόν των τεσσάρων εξισώσεων πρώτης τάξης που πρέπει να επιλυθεί προκειμένου να παραχθεί η εκτίμηση των παραμέτρων σε πραγματικό χρόνο είναι:

$$\varphi_1 = \frac{1}{s + a_m} x \implies \dot{\varphi}_1 = -a_m \varphi_1 + x, \varphi_1(0) = 0$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{s + a_m} u \implies \dot{\varphi}_2 = -a_m \varphi_2 + u, \varphi_2(0) = 0$$

και

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma e \varphi_1$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma e \varphi_2$$

2 Μοντελοποίηση στο MATLAB για την μέθοδο κλίσης

2.1 Μοντελοποίηση

Οι 4 παραγόμενες τελικές διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το σύστημα ανίχνευσης πρέπει να μοντελοποιηθούν στο MATLAB για να μπορεί να επιτευχθεί η προσομοίωση του συστήματος ανίχνευσης με την μέθοδο κλίσης σε πραγματικό χρόνο. Για τον σκοπό αυτό , αφού πρώτα προφανώς αρχικοποιηθούν όλες οι δεδομένες μεταβλητές όπως η είσοδος u , οι παράμετροι a, b και οι αρχικές τιμές των εμπλεκόμενων μεγεθών, χρησιμοποιείται η συνάρτηση επίλυσης διαφορικών εξισώσεων ode45.

Η συνάρτηση ode45,εφαρμόζει τη μέθοδο Runge-Kutta (4,5). Μια τέτοια μέθοδος είναι κατάλληλη για την επίλυση συνηθισμένων διαφορικών εξισώσεων με προβλέψεις. Έτσι "χτίζοντας" μια συνάρτηση η οποία μοντελοποιεί στις επιστρεφόμενες καταστάσεις της τις **5 συνολικά διαφορικές που διέπουν το σύστημα**:

$$\dot{x} = -ax + bu, x(0) = 0$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{s + a_m}x \implies \dot{\varphi}_1 = -a_m\varphi_1 + x, \varphi_1(0) = 0$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{s + a_m}u \implies \dot{\varphi}_2 = -a_m\varphi_2 + u, \varphi_2(0) = 0$$

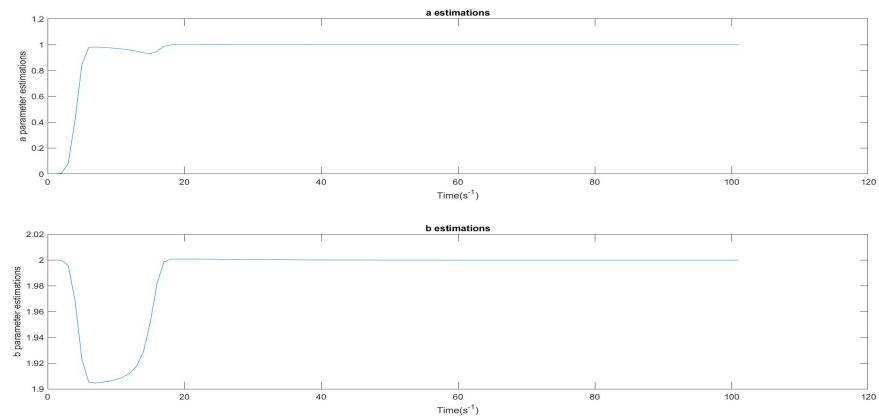
$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \gamma e\varphi_1 \\ \dot{\theta}_2 &= \gamma e\varphi_2\end{aligned}$$

προφανώς για κάποιο αυθαίρετα ορισμένο χρονικό διάστημα, επιλογή του γ συντελεστή καθώς και του a_m . Τότε για τις δεδομένες αρχικές συνθήκες η συνάρτηση ode45 επιστρέφει τα διάνυσματα των 5 μεταβλητών $(x, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \varphi_1, \varphi_2)$ σε ένα πίνακα με 5 στήλες και αριθμό γραμμών ανάλογο της χρονικής διάρκειας και βήματος που επιλέξαμε. Εφόσον το $\hat{\theta}$ διάνυσμα πλέον έχει υπολογιστεί, από τον ορισμό του :

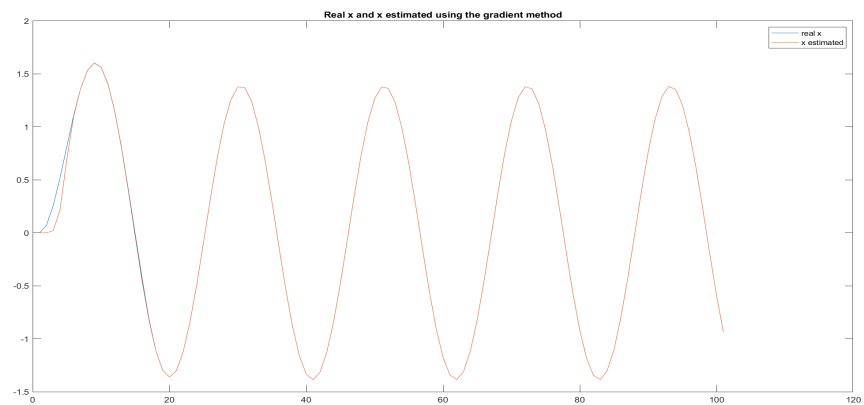
$\theta^* = \begin{bmatrix} a_m - a \\ b \end{bmatrix}$, και δεδομένο a_m , υπολογίζεται για κάθε τιμή της εκτίμησης του διανύσματος θ^* η αντίστοιχη εκτιμώμενη τιμή a και b .

2.2 Αποτελέσματα και συμπεράσματα

Εκτελώντας την προσομοίωση για 10s με βήμα 0.01s, $\gamma = 30$, $a_m = 2$, οι γραφικές παραστάσεις των εκτιμήσεων a, b, \hat{x} καθώς και της πραγματικής τιμής x , παράγονται. Εδώ αξίζει αν σημειωθεί πως μετά από μερικές δοκιμασίες για τα a_m και γ η κατάληξη στις τιμές που αναφέρθηκαν έγινε κατόπιν παρατήρησης της ποιότητας των αποτελεσμάτων. Συγκεκριμένα η ταχύτητα αλλά και η ακρίβεια των εκτιμήσεων διαπιστώθηκε ότι επηρεαζόταν αρνητικά όσο περισσότερο αυξανόταν το a_m από αυτήν την τιμή ενώ επηρεαζόταν θετικά για μεγαλύτερο γ .



(a) Εκτιμήσεις παραμέτρων με την μέθοδο κλίσης



(b) Εκτίμηση x και πραγματική τιμή του x σε κοινό διάγραμμα

Εικόνα 1: Παραγόμενες γραφικές

3 Σύστημα αναγνώρισης με την μέθοδο Lyapunov

Η μέθοδος Lyapunov σε αντίθεση με την μέθοδο κλίσης που εφαρμόζεται σε γραμμικά παραμετροποιημένα συστήματα, εφαρμόζεται σε συστήματα που είναι γραμμένα σε μορφή εξισώσεων κατάστασης. Έτσι το σύστημα θα γραφεί πλέον σε μορφή:

$$\dot{x} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u$$

, όπου θ_1^*, θ_2^* , σταθερές άγνωστες παράμετροι, $\theta_1^* > 0$ για να ικανοποιείται η ευστάθεια του συστήματος, $\theta_2^* \neq 0$ για να διασφαλίζουμε την ύπαρξη της εισόδου. Επιπλέον πρέπει $|u(t)| \leq M, M > 0$. Το σύστημα έχει μια κατάσταση, την x που είναι και η έξοδος του. Ο σχεδιασμός του εκτιμητή έγκειται στην εύρεση των άγνωστων παραμέτρων θ_1^*, θ_2^* , τα οποία ταυτίζονται με τα a, b εδώ προφανώς. Το σύστημα αναγνώρισης μπορεί να έχει δύο τοπολογίες, η μια είναι η παράλληλη και η άλλη η μικτή τοπολογία.

3.1 Σύστημα αναγνώρισης με παράλληλη τοπολογία

Στη παράλληλη τοπολογία το σύστημα αναγνώρισης δέχεται μόνο την κοινή είσοδο και παράγει τον εκτιμητή :

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u, \quad \hat{x}(0) = 0$$

Έτσι το σφάλμα σε αυτήν την περίπτωση είναι:

$$e = x - \hat{x} \implies \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = \dots = -\theta_1^* e + \tilde{\theta}_1 \hat{x} - \tilde{\theta}_2 u$$

όπου $\tilde{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 - \theta_1^*, \tilde{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 - \theta_2^*$, τα παραμετρικά σφάλματα για τα $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$.

Έπειτα επιλέγεται μια συνάρτηση Lyapunov που είναι συνάρτηση όλων των μεταβλητών κατάστασης του συστήματος. Αυτά είναι εδώ το e .

Το e όμως εμπεριέχει και τα $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ τα οποία είναι και αυτά επίσης μεταβλητές κατάστασης του συστήματος αναγνώρισης πλέον. Επομένως επιλέγεται η θετικά ορισμένη V :

$$V = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\tilde{\theta}_2^2$$

όπου τα γ_1, γ_2 είναι γνήσια θετικές σταθερές επιλογής του σχεδιασμού του εκτιμητή. Παραγωγίζοντας την συνάρτηση αυτή και επιλέγοντας κατάλληλες εξισώσεις για τα $\dot{\hat{\theta}}_1, \dot{\hat{\theta}}_2$, έτσι ώστε να οδηγηθεί η παράγωγος της V στο $\dot{V} = -\theta_1^* e^2 \leq 0$ λαμβάνεται:

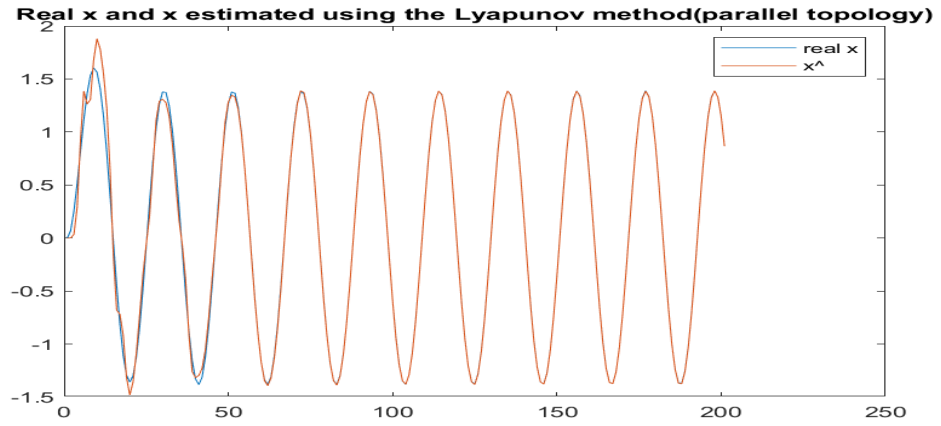
$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 \hat{x} e \quad \gamma_1 > 0 \quad (6)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 u e \quad \gamma_2 > 0 \quad (7)$$

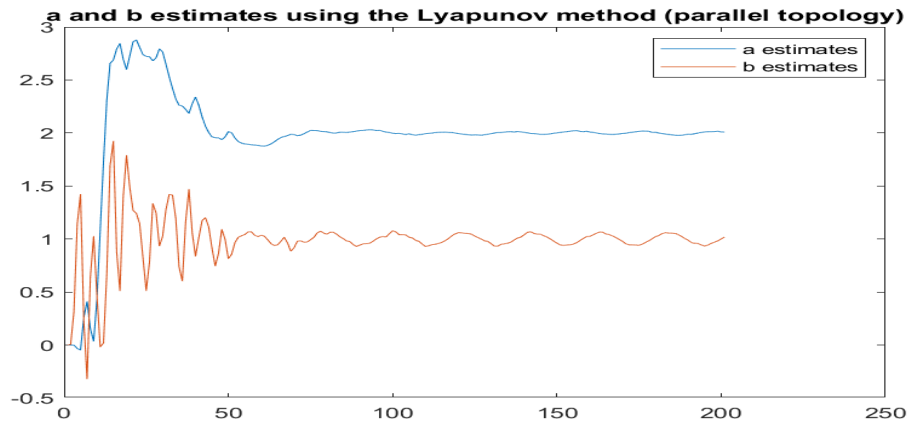
και να αποδειχθούν έπειτα οι ιδιότητες σύγκλισης των ορισμάτων της V τα οποία θα είναι φραγμένα. Αυτό οδηγεί και στο συμπέρασμα πως και τα $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{x}$ είναι φραγμένα. Επιπλέον με το όριο της V στο άπειρο αποδεικνύεται και ότι το σφάλμα e και κατ'επέκταση και το \dot{e} θα είναι και αυτό φραγμένο. Παρόλα αυτά, επειδή δεν αποδεικνύεται ότι οι εκτιμητές $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ θα συγκλίνουν στις πραγματικές παραμέτρους, το πρόβλημα έγκειται στο ότι ο φραγμός της εισόδου $u(t)$ δεν είναι ικανή συνθήκη απο μόνη της για να οδηγήσει τις εκτιμήσεις στις πραγματικές τιμές. Αποδεικνύεται έτσι και εδώ ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την επίτευξη του παραπάνω είναι η συνθήκη επιμέρους διεγερσης, ο έλεγχος της ικανοποίησης αυτής θα επιβεβαιώσει και την σύγκλιση των $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ στις πραγματικές τιμές. Μοντελοποιώντας έτσι το σύστημα στο MATLAB με τον ίδιο τρόπο με πριν χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1),(6) και (7) και για $f = 20, \eta_0 = 0.15$ λαμβάνονται τα παρακάτω για την παράλληλη τοπολογία. Οι τιμές για γ_1, γ_2 επιλέχθηκαν 10 και τα δύο μετά απο διαδικασία trial and error για την επίτευξη του καλύτερου δυνατού αποτελέσματος. Η προσομοίωση αυτή τη φορά τρέχει για 20s για μεγαλύτερη οπτικοποίηση των τελικών αποτελεσμάτων και των ταλαντώσεων γύρω απο τα σημεία ενδιαφέροντος λόγω του θορύβου.

3.2 Σύστημα αναγνώρισης με μεικτή τοπολογία

Η διαδικασία ανάλυσης είναι ακριβώς η ίδια μόνο που αυτή τη φορά η μέθοδος χρησιμοποιεί σήματα που παράγονται τόσο απο το σύστημα αναγνώρισης όσο και απο το πραγματικό σύστημα. Περιγράφεται απο



(a) Απόκριση του προσομοιωμένου συστήματος για την εκτίμηση του x , σε κοινό διάγραμμα με την πραγματική του τιμή με μέθοδο Lyapunov-Παράλληλη τοπολογία



(b) Απόκριση του προσομοιωμένου συστήματος για την εκτίμηση των παραμέτρων με μέθοδο Lyapunov-Παράλληλη τοπολογία

Εικόνα 2: Παραγόμενες γραφικές για $f = 20, \eta_0 = 0.15$

την εξής διαφορική:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u - \theta_m (x - \hat{x}), \quad \hat{x}(0) = 0$$

όπου $\theta_m > 0$ θετική πραγματική σταθερά. Η διαδικασία που ακολουθείται για την παραγωγή των δύο πάλι διαφορικών που θα εκφράζουν τα $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ είναι η ίδια με φυσικά μόνη διαφορά την αλλαγή του $\dot{\hat{x}}$, ενώ τα ίδια ισχύουν και για τα συμπεράσματα που αναφέρθηκαν. Έτσι οι δύο εξισώσεις για τα $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ είναι:

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e x, \quad \gamma_1 > 0$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e u, \quad \gamma_2 > 0$$

και με την βοήθεια αυτών πλέον θα προσομοιωθεί και το σύστημα αναγνώρισης πάλι στο MATLAB. Οι σταθερές γ_1, γ_2 προφανώς παραμένουν ίδιες με αυτές της παράλληλης τοπολογίας για την καλύτερη σύγκριση των δύο μεθόδων, έτσι οι παραγόμενες κυματομορφές των αντίστοιχων μεγεθών απεικονίζονται στην εικόνα 3.

3.3 Σχόλια και συμπεράσματα

Όσο αφορά την μεικτή δομή. Παρατηρήθηκε ότι για το θ_m επιλέχθηκε μια μικρή τιμή στο 0.1 αφού μετά απο δοκιμές βρέθηκε πως μόνο για μικρές τιμές του έχει κάποια σχετικά "καλή συμπεριφορά" το σύστημα αναγνώρισης. Επίσης για τις σταθερές γ_1, γ_2 πως ενώ για κάποιες τιμές υπάρχει μια σχετικά καλή συμπεριφορά για την τιμή του 10 και για τα δύο, ενώ για μικρότερες τιμές ή πολύ μεγαλύτερες τιμές δεν υπήρχε καλή συμπεριφορά. Παρακάτω φαίνονται οι παραγόμενες γραφικές με την χρήση της μεικτής μεθόδου. Οι αποκρίσεις προφανώς παρουσιάζουνε ταλαντώσεις γύρω απο τα σημεία ενδιαφέροντος καθώς η μεταβλητή x μετράται με έναν εισαγόμενο θόρυβο ημιτονοειδής φύσεως.

Όσο αφορά την παράλληλη δομή, οι σταθερές γ_1, γ_2 είναι ίδιες σαν τιμές με της μεικτής όπως αναφέρθηκε, και παρουσιάζει το σύστημα αναγνώρισης και εκεί μια αρκετά καλή επίδοση για την τιμή του 10 και για τις δύο.

Όσο αυξάνεται ο θορύβος, δηλαδή μεγαλώνει το η_0 , τόσο "δυσκολεύεται" η απόκρισης του συστήματος αναγνώρισης να ακολουθήσει την πραγματική τιμή του x αφού το πλάτος των ταλαντώσεων μεγαλώνει και επηρεάζει ακόμα περισσότερο τις μετρήσεις του x . Όσο αυξάνεται η συχνότητα f του θορυβού παρατηρείται πάλι μια χειρότερη σχετικά συμπεριφορά του συστήματος αναγνώρισης καθώς οι ταλαντώσεις γίνονται όλο και πιο συχνές, αυτό παρατηρήθηκε ότι επηρέαζε κυρίως τις εκτιμήσεις των άγνωστων παραμέτρων, ενώ η συμπεριφορά της εκτίμησης του x , \hat{x} δεν φάνηκε να επηρεάζεται τόσο από τις αυξήσεις της συχνότητας (επηρεάστηκε ελαφρώς αρνητικά, για μεγάλες συχνότητες πχ 500). Παρόλα αυτά για μείωση της συχνότητας παρατηρήθηκαν σοβαρές "ζημιές στο σύστημα αναγνώρισης", καθώς και οι εκτιμήσεις των παραμέτρων είχαν χειρότερη συμπεριφορά αλλά και η εκτίμηση του x , \hat{x} , υπέστη σοβαρή βλάβη στη συμπεριφορά της.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός πως, παρόλο που οι δύο τοπολογίες φαινομενικά αλλά και πρακτικά είναι ισοδύναμες γενικά, η απόκριση (για ίδιες δεδομένες παραμέτρους και γ_1, γ_1 όπως και εξετάστηκε), φαίνεται να έχει καλύτερη συμπεριφορά στην περίπτωση της παράλληλης δομής παρά στης μεικτής, στην περίπτωση του **εισαγόμενου θορύβου**. Αυτό συμβαίνει διότι εάν εξεταστούν στην περίπτωση του $x - > x + \eta$, η = θόρυβος, οι διαφορικές εξισώσεις των $\hat{\theta}_1$ (η διαφορική του $\hat{\theta}_2$ παραμένει ίδια και για τις δύο τοπολογίες):

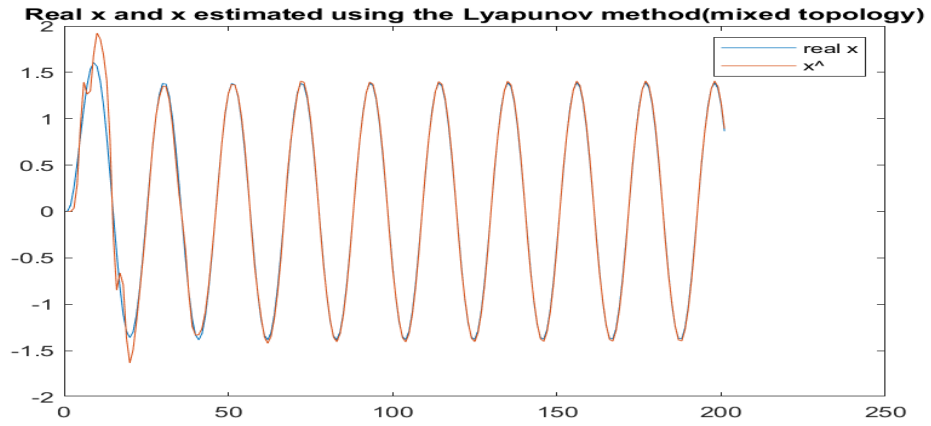
ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΔΟΜΗ

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e \hat{x} = -\gamma_1 (x - \hat{x}) \hat{x} = -\gamma_1 x \hat{x} + \gamma_1 \hat{x}^2$$

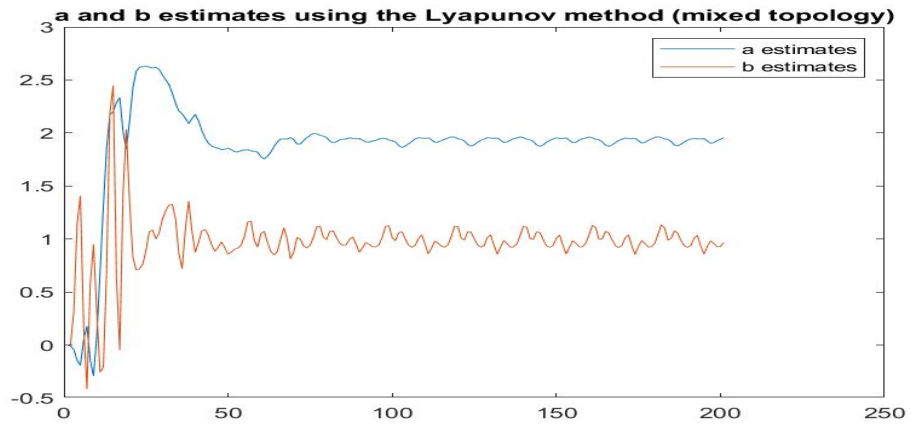
ΜΕΙΚΤΗ ΔΟΜΗ

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e x = -\gamma_1 (x - \hat{x}) x = -\gamma_1 x^2 + \gamma_1 x \hat{x}$$

Παρατηρείται αμέσως το εξής: Ο εκτιμητής \hat{x} , είναι μια μεταβλητή η οποία παράγεται από το υπολογιστικό σύστημα του συστήματος αναγνώρισης και άρα δεν εμφανίζεται ο θόρυβος σε αυτό. Έτσι ο θόρυβος εμφανίζεται μόνο στο x . Στην περίπτωση της παράλληλης δομής αυτός εμφανίζεται εις την πρώτη δύναμη, ενώ στης μεικτής στο τετράγωνο. Αυτό πρακτικά σημαίνει πως η τοπολογία της παράλληλης δομής αναμένεται γενικά να έχει μεγαλύτερη ανθεκτικότητα σε εισαγόμενους θορύβους στα σήματα.



(a) Απόκριση του προσομοιωμένου συστήματος για την εκτίμηση του x , σε κοινό διάγραμμα με την πραγματική του τιμή με μέθοδο Lyapunov-Μεικτή τοπολογία



(b) Απόκριση του προσομοιωμένου συστήματος για την εκτίμηση των παραμέτρων με μέθοδο Lyapunov-Μεικτή τοπολογία

Εικόνα 3: Παραγόμενες γραφικές για $f = 20, \eta_0 = 0.15$

4 Σύστημα αναγνώρισης με την παράλληλη τοπολογία μεθόδου Lyapunov για σύστημα δεύτερης τάξης

Για το δεδομένο γραμμικό σύστημα, οι συντελεστές a και b αντικαθίστανται από τους αντίστοιχους πίνακες A και B . Το γραμμικό αυτό σύστημα θεωρείται έτσι πιο πλήρες ως προς την περιγραφή του με αυτόν τον τρόπο. Ζητούμενο είναι οι εκτιμήσεις των στοιχείων του A και του B , αλλά και προφανώς όπως και στα προηγούμενα και η εκτίμηση των καταστάσεων του διανύσματος στήλη 2×1 πλέον \hat{x} . Η θεωρητική ανάλυση είναι παρόμοια και τα συμπεράσματα καθώς και η επιχειρηματολογία ίδια. Όσο αφορά την μοντελοποίηση στο MATLAB, η διαφορά έγκειται στα διανύσματα που ορίζονται και τους αντίστοιχους πίνακες, για το κάθε μέγεθος στις διαφορικές που αναγράφονται στην συνάρτηση που χρησιμοποιεί η ode για την προσομοίωση του συστήματος. Για περισσότερες λεπτομέρειες ο κώδικας περιέχει όλη την μοντελοποίηση περιγραφικάτα. Οι τύποι προφανώς για τα \dot{A} και \dot{B} δεν είναι ακριβώς οι ίδιοι με αυτών των $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ της παράλληλης τοπολογίας για σύστημα μιας διάστασης, αλλά διαφέρουν. Έτσι με βάση την θεωρία:

$$\dot{A} = \gamma_1 e \dot{x}^T \quad (8)$$

$$\dot{B} = \gamma_2 e U^T \implies \dot{B} = \gamma_2 e u \quad (9)$$

διότι U βαθμωτό μέγεθος.

Έτσι με το δεδομένο σύστημα :

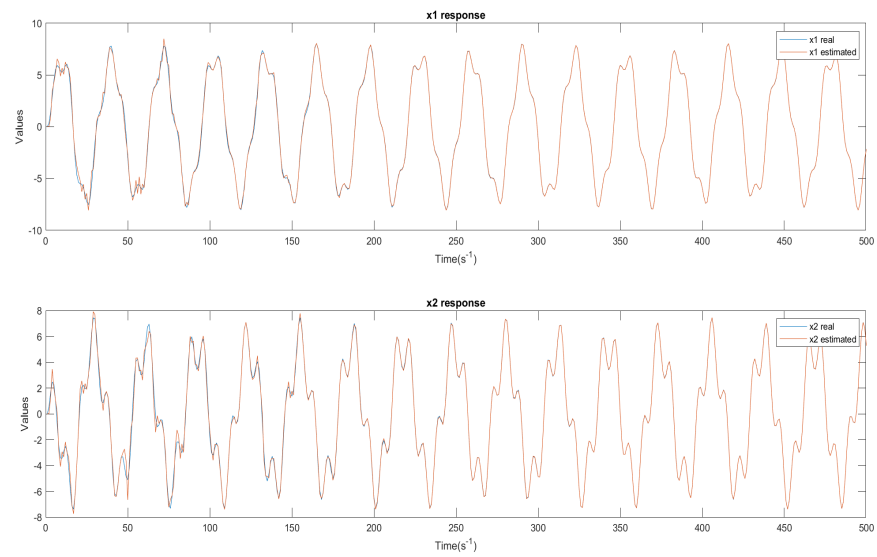
$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (10)$$

$$\text{, τους πίνακες } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 & 3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$$

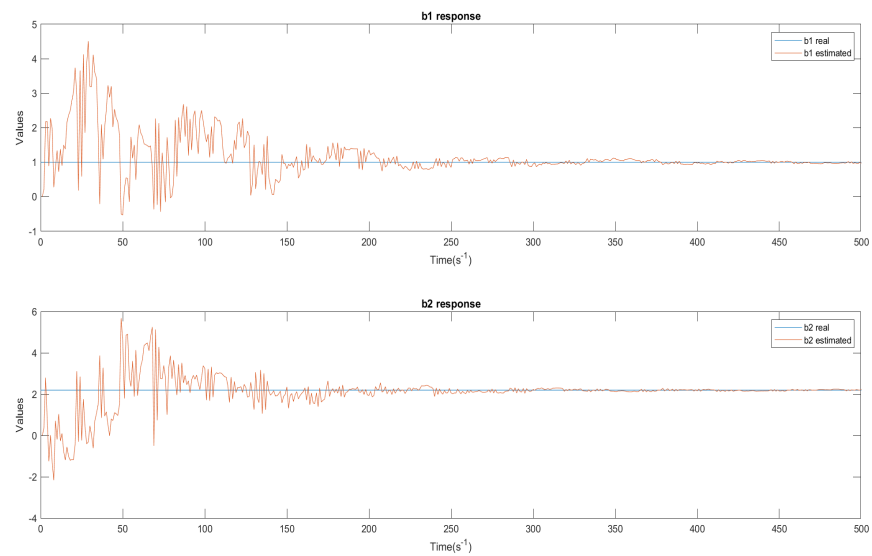
$$\text{και } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.2 \end{bmatrix} \text{ καθώς και την διαφορική εξίσωση για το } \dot{\hat{x}}:$$

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \quad (11)$$

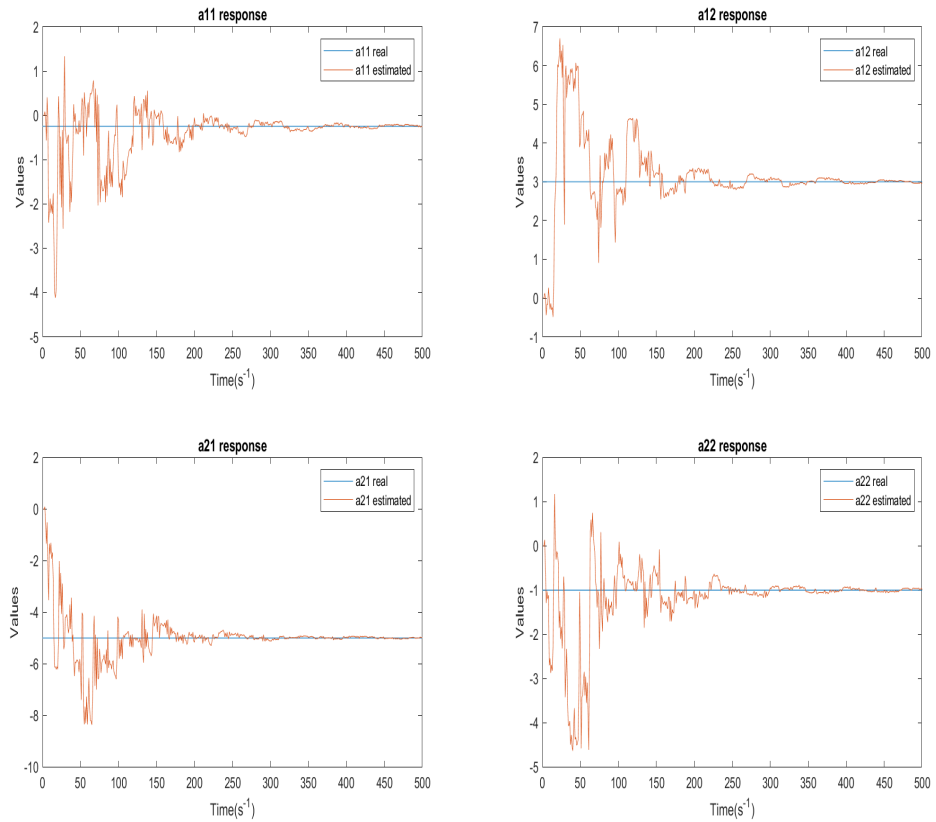
. Αφού προσομοιωθούν οι διαφορικές (8),(9),(10) & (11) με τον τρόπο που αναφέρθηκε παράγονται τα παρακάτω γραφήματα για τις ζητούμενες παραμέτρους.



(a) Απόκριση για τα x_1, x_2 , σε κάθε υποεικόνα απεικονίζεται η πραγματική τιμή καθώς και η εκτιμώμενη



(b) Απόκριση για τις εκτιμήσεις των στοιχείων του B



Εικόνα 5: Απόκριση για τις εκτιμήσεις των στοιχείων του A

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι η προσομοίωση αυτή τη φορά έπρεπε να τρέξει τουλάχιστον 50s(με 0.1s βήμα), για να οπτικοποιηθεί και η στιγμή της σύγκλισης στις πραγματικές τιμές. Επίσης ενδιαφέρον ήταν και πως οι τιμές γ_1, γ_2 πάλι εδώ δέινανε την καλύτερη συμπεριφορά του συστήματος αναγνώρισης για τις ίδιες τιμές, δηλαδή 10.