1. OSCILACIONES FORZADAS EN SISTEMA MASA-RESORTE

1.1. Objetivo

El propósito de esta práctica es estudiar el fenómeno de la resonancia en un sistema masa-resorte que realiza oscilaciones verticales al mover su punto de suspensión armónicamente. Se asume que la fuerza f de rozamiento sobre la masa es proporcional a su velocidad v, es decir $f = -bv$, donde b es la constante de amortiguamiento. A partir de las mediciones de la frecuencia de excitación, la amplitud de las oscilaciones y del modelo desarrollado en la guía se encuentra el valor de b.

1.2. Materiales

- Un kit con el sistema masa-resorte y fuente de voltaje DC variable.
- Una regla.
- Un soporte.
- Una balanza.

1.3. Requisitos

- Manejo competente del software TRACKER, el cual es un software de dominio público, que se encuentra instalado en el computador de la mesa de trabajo.

1.4. Resumen teórico

Sistemas tanto mecánicos como eléctricos manifiestan un fenómeno interesante cuando estos son perturbados por fuerzas o señales periódicas respectivamente. La respuesta de estos sistemas crece notablemente cuando la frecuencia de excitación aplicada es próxima a la frecuencia natural de ellos. La frecuencia para la cual la respuesta es máxima se denomina frecuencia de resonancia. Entre menos rozamiento tengan estos sistemas, la frecuencia de resonancia tiende a coincidir con la frecuencia natural. Sistemas mecánicos simples tales el sistema masa-resorte poseen una frecuencia de resonancia que depende de la masa, constante elástica del resorte y la resistencia que ofrezca el medio al movimiento de la masa. Sistemas complejos pueden tener varias frecuencias de resonancia.

1.5. Descripción del problema

Consideremos el sistema mostrado en la figura 1, el cual consta de una masa m conectada a un resorte ligero de constante elástica k y longitud natural x_0; el extremo superior del resorte pende del punto p que se mueve verticalmente y realiza oscilaciones armónicas con frecuencia γ y amplitud η_0 con respecto al punto fijo o, es decir $\eta(t) = \eta_0 \cos \gamma t$.

Las fuerzas que actúan sobre la masa se indican en la figura 2; donde F es la fuerza elástica del resorte dada por $F = -k(x - x_0)$ y $f = -b\frac{dx}{dt}$ es la fuerza de amortiguamiento sobre la masa, siendo b la constante de amortiguamiento. La posición vertical de la masa se denota por la variable x y su posición de equilibrio es dada por $x_1 = \frac{mg}{k} + x_0$, la cual se deriva de la condición $mg = k(x_1 - x_0)$.

Al aplicar la segunda ley de Newton a la masa m en sentido vertical, una vez que el punto p se encuentra en movimiento resulta:

$$-mg - k(x - \eta - x_0) - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{1}$$

ó

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}(x - x_0 - \frac{mg}{k}) - \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} = \frac{k}{m}\eta \tag{2}$$

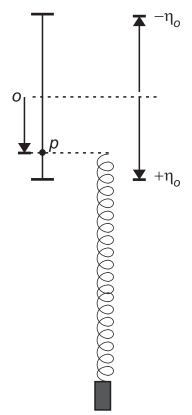

Figura 1: Arreglo experimental para determinar la constante de amortiguamiento del sistema masa resorte forzado cuyo punto de suspensión realiza oscilaciones armónicas con frecuencia γ y amplitud η_0

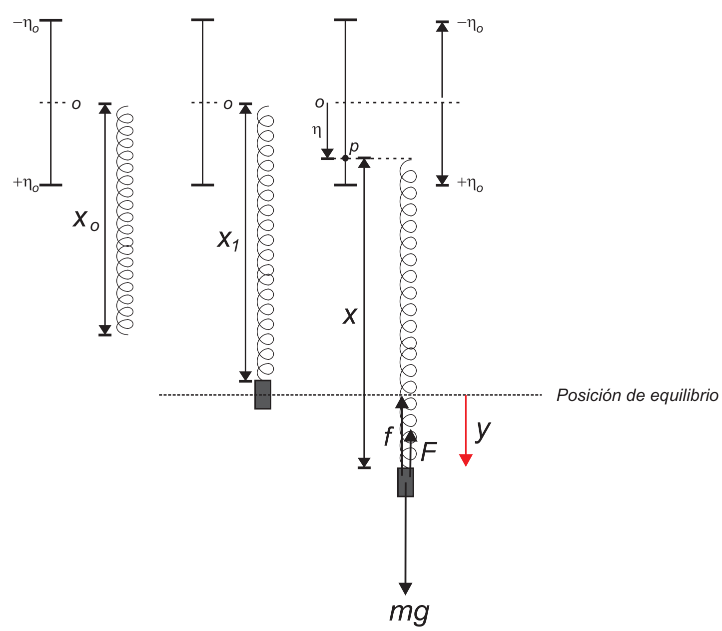

Figura 2: Fuerzas y coordenadas sobre la masa del sistema masa-resorte.

al definir $y = x - x_0 - \frac{mg}{k}$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$, $2\lambda = \frac{b}{m}$ y teniendo en cuenta que $\eta(t) = \eta_0 \cos\gamma t$, la ecuación (2) se convierte en:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 = \omega^2\eta_0\cos\gamma t \tag{3}$$

la solución de la ecuación (3) en el régimen estacionario es dada por:

$$x(t) = A(\gamma)\cos(\omega t - \phi) \tag{4}$$

donde

$$A(\gamma) = \frac{\omega^2\eta_0}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2 + (2\lambda\gamma)^2}} \tag{5}$$

y

$$\tan\phi = \frac{2\lambda\gamma}{\omega^2 - \gamma^2} \tag{6}$$

Obsérvese que tanto la amplitud A de las oscilaciones resultantes como la fase ϕ dependen de la frecuencia angular γ del punto de suspensión p del resorte. Se puede demostrar que la amplitud A presenta un máximo cuando $\gamma = \gamma_r = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}}$. Es decir, la frecuencia en Hertz para la cual la amplitud es máxima es dada por:

$$f_r = \frac{\gamma_r}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}} \tag{7}$$

la cual se denomina frecuencia de resonancia del sistema.

1.6. Mediciones

Realice el montaje que se muestra en la figura 3, el cual consiste de una masa-resorte dentro de un tubo de vidrio con escala lineal graduada en milímetros grabada sobre su superficie. El resorte se encuentra suspendido de un cuerda ligera, la cual pasa por un sistema de tres ruedas esferadas pequeñas y se conecta en la parte inferior a un punto sobre una rueda plástica; dicho punto se encuentra a una distancia η_0 del centro de la rueda. La rueda misma está conectada al eje de un motor pequeño de corriente continua y voltaje de operación máximo 12 V. La frecuencia de revolución del motor se fija al variar el voltaje del motor en el rango comprendido entre [0..12] V. Note que al variar la frecuencia de revolución del motor la amplitud de las oscilaciones del sistema masa resorte cambia. Utilice solamente la masa suministrada (conjunto de arandelas) y ***no exceda*** el voltaje del motor en 12 V. El usar masas de mayor valor a la proporcionada hace que se deteriore el sistema mecánico.

1. Mida el valor de la masa m del sistema masa resorte mediante la balanza suminsitrada.

2. Determine el valor de la constante elástica k del resorte, al medir su elongación al suspenderle la masa m.

3. Mida el valor de η_0.

4. Mida la amplitud A de las oscilaciones de la masa como función de la frecuencia de las oscilaciones de la masa. Registre el valor de la frecuencia $\gamma = 2\pi f$ y la correspondiente en la tabla 1, ver nota de pie de página[1]. Repita el procedimiento anterior para diferentes frecuencias (por lo menos 15).

[1]Para la medición de la amplitud y frecuencia de las oscilaciones utilice el software TRACKER instalado en el computador de su mesa de trabajo. Para ello, grabe un video de 5 segundos de duración para cada valor de frecuencia de revolución del motor. Inicie el programa TRACKER y cargue el video grabado. Analice el video y a partir de la gráfica de amplitud en función del tiempo obtenida, determine la amplitud y la frecuencia promedio de las oscilaciones. El video puede ser grabado con la cámara de video del celular o tablet de alguno de los miembros del grupo.

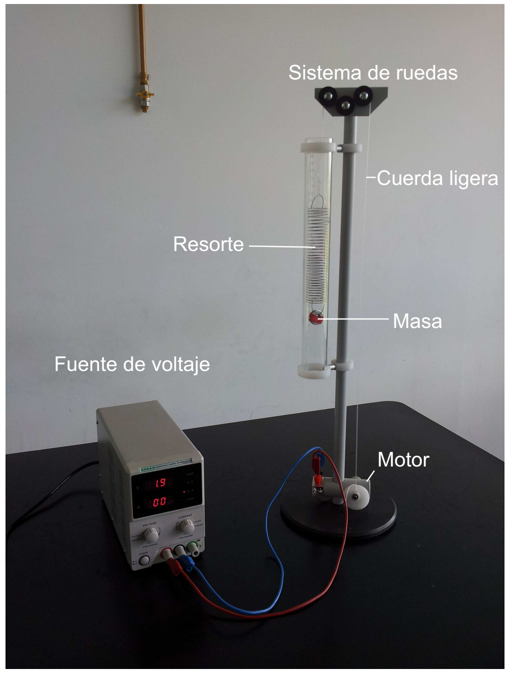

Figura 3: Arreglo experimental para determinar la constante de amortiguamiento del péndulo forzado.

Frecuencia f(Hz)	Amplitud (cm)

Tabla 1: Datos experimentales para determinar η_0 y b

5. A partir de los datos de la tabla 1 grafique A en función de $\gamma = 2\pi f$. Describa el comportamiento de la gráfica. Determine el valor de la frecuencia γ_r para el cual la amplitud de las oscilaciones es máxima.

6. Obtenga el valor de la constante de amortiguamiento b a partir de la ecuación (7), usando los valores de m, k y γ_r obtenidos en los incisos 1, 2 y 5 respectivamente.

7. Grafique A en función de $\gamma = 2\pi f$, ecuación (5), usando los valores de m, k , η_0 y b obtenidos en los incisos 1, 2, 3 y 6 respectivamente. Superponga ésta gráfica con la obtenida en el inciso 5. La gráfica obtenida se ajusta o se superpone perfectamente a la obtenida en el inciso 5? Explique las discrepancias.

Referencias

[1] Serway, R., *FISICA para ciencias e ingeniería*, McGraw-Hill, Tomo 2, México, 2000.