Capítulo 2

VECTORES

2.1 Magnitudes escalares y vectoriales

Se llaman magnitudes escalares a las que para especificarlas basta con dar un número, es decir su magnitud. Ejemplo de cantidades escalares: temperatura, masa, volumen, distancia, etc. Así, decimos 20 ℃, 10 kg, 5 L, 34 m etc.

Se llaman magnitudes vectoriales a las que para especificarlas se debe dar su magnitud y dirección. Ejemplo de cantidades vectoriales: velocidad, aceleración, fuerza, campo eléctrico, campo magnético, etc. Así, cuando decimos que la velocidad de un auto es 60 km/h debemos especificar la dirección, por ejemplo hacia el norte. Cuando se aplica una fuerza de 5 N debemos especificar en qué dirección se aplica la fuerza, ya que dependiendo de la dirección en que se aplique dependerá la manera como se mueva un cuerpo.(ver figura 2.1).

Una cantidad vectorial la representamos mediante una flecha. La longitud de la flecha es proporcional a la magnitud del vector. La dirección en que apunta la flecha representa la dirección del vector. La flecha tiene una cola y una punta.

En los libros, las cantidades vectoriales se escriben con letras y una flecha sobre esta, como por ejemplo $\overrightarrow{A}$. Cuando nos queramos referir a la **magnitud** del vector $\overrightarrow{A}$, utilizaremos la letra simplemente A sin ningún símbolo adicional. A la magnitud de un vector también se le denomina **norma** o **módulo**.

Ejemplo 1. Un auto se mueve a 50 km/h en la dirección 45° al norte del este. El vector $\overrightarrow{v}$ lo representamos como indica la figura 2.2.

La magnitud del vector velocidad $\overrightarrow{v}$ es 50 km/h o de forma abreviada $v = 50$ km/h.

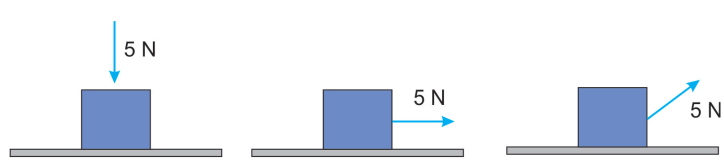


Figura 2.1: Fuerzas de igual magnitud aplicadas en diferentes direcciones

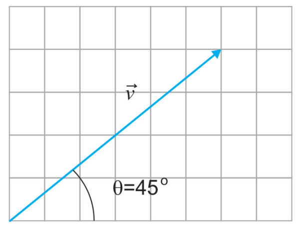


Figura 2.2

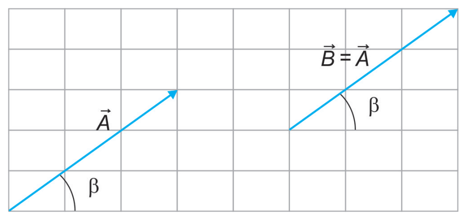


Figura 2.3: Vectores iguales

2.2 Igualdad de vectores

Dos vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ se dice que son iguales cuando tienen igual magnitud y dirección. Nótese que los vectores no necesariamente comienzan en el mismo punto.(Ver figura 2.3)

2.3 Suma de vectores

La suma de dos vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ se define con base a la regla del paralelogramo la cual consiste en: se trasladan los vectores de modo que sus colas coincidan, luego se completa el paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$, (ver figura 2.4). El vector suma $\overrightarrow{S}$ es la diagonal del paralelogramo resultante. La cola de $\overrightarrow{S}$ coincide con las de los vectores sumandos $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$. Simbólicamente, la suma es $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$.

La anterior regla también se puede visualizar de la siguiente manera. Para sumar los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ se toma el vector $\overrightarrow{A}$ y a continuación se coloca el vector $\overrightarrow{B}$ de modo que coincida la punta de $\overrightarrow{A}$ con la cola de $\overrightarrow{B}$ sin cambiar la magnitud ni dirección de $\overrightarrow{B}$. El vector suma $\overrightarrow{S}$ es el vector que resulta de unir la cola de $\overrightarrow{A}$ con la punta de $\overrightarrow{B}$. (ver figura 2.5)

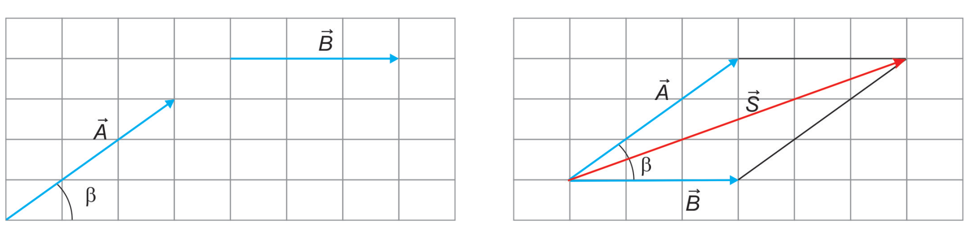


Figura 2.4

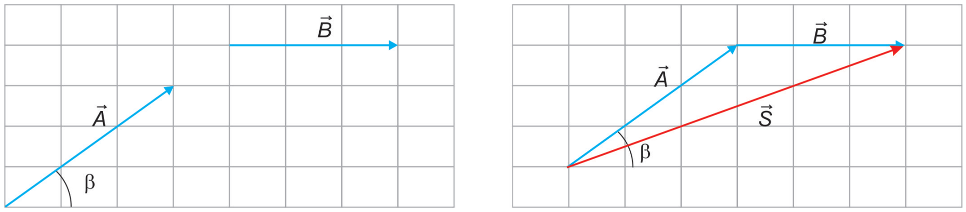


Figura 2.5

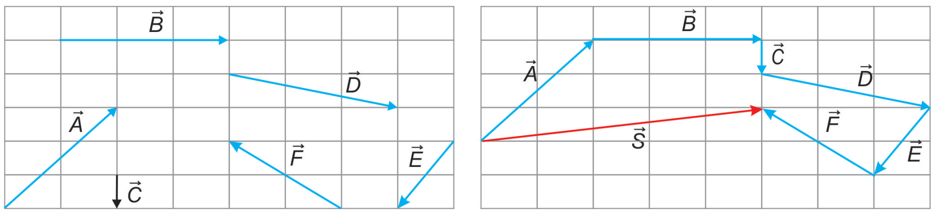


Figura 2.6

El método anterior puede generalizarse para el caso de sumar dos o más vectores. En este caso la suma se realiza colocando un vector a continuación del otro hasta considerar todo los vectores. El vector suma se obtiene de unir la cola del primer vector con la punta del último. La figura formada es un polígono y por eso esta forma de sumar vectores se llama el **método del polígono**.

Del método se desprende que $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A}$, es decir, que la suma de vectores es **conmutativa**. La suma vectorial también es **asociativa**. Con estas dos propiedades resulta entonces que el orden en que se sumen los vectores carece de importancia.

Ejemplo 2. Sume los vectores $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$, $\overrightarrow{D}$, $\overrightarrow{E}$ y $\overrightarrow{F}$ gráficamente, es decir hallar $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} + \overrightarrow{D} + \overrightarrow{E} + \overrightarrow{F}$. El resultado se muestra en la figura 2.6.

Se obtiene el mismo resultado intercambiando el orden en que se tomen los vectores para completar el polígono. Por ejemplo $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{C} + \overrightarrow{E} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{D} + \overrightarrow{F}$. El resultado se muestra en la figura 2.7.

Ejemplo 3. Sume los vectores $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{V}$ gráficamente.(Ver gráfica 2.8)

A la izquierda se realiza $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}$ y a la derecha $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{U}$.

Ejemplo 4. Los términos **distancia** y **desplazamiento** significan cosas distintas en física. Imagínese que Usted sale de su casa y camina 4 km hacia el este y luego camina 3 km hacia el oeste. (ver figura 2.9). En total Usted ha caminado 7 km. Sin embargo, usted se encuentra a 1 km de su casa y no a 7 km.

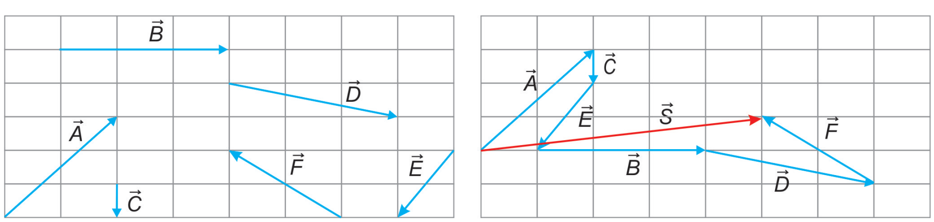


Figura 2.7

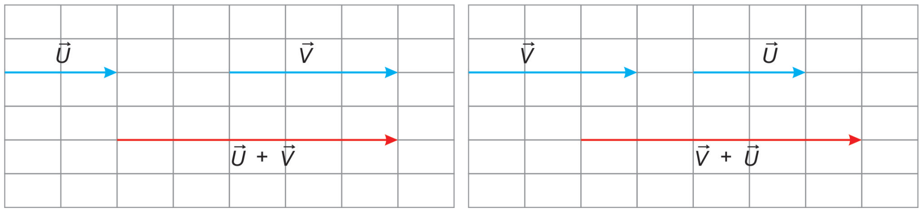


Figura 2.8

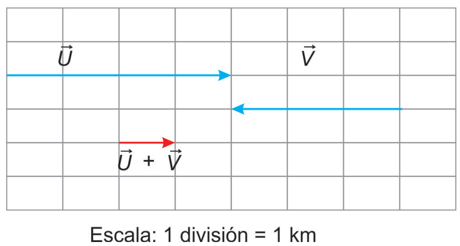


Figura 2.9

La distancia es la cantidad recorrida, es una cantidad escalar. Es la suma escalar de las distancias recorridas. En este caso la distancia es de 7 km. El desplazamiento es la longitud y dirección medida desde el origen hasta la posición final. En el ejemplo, el desplazamiento es de 1 km hacia el este. El desplazamiento es una cantidad vectorial que puede ser muy distinta a la distancia. El recorrido lo representamos por dos desplazamientos: uno de 4 km hacia el este y uno de 3 km hacia el oeste. Estos son dos vectores. El desplazamiento resultante, la suma de ellos es de 1 km hacia el este.

2.4 Multiplicación de un vector por un escalar

Al multiplicar un vector $\overrightarrow{A}$ por un escalar λ, el resultado es un vector **C** con magnitud igual a λ veces la magnitud de $\overrightarrow{A}$, es decir $\overrightarrow{C} = \lambda\overrightarrow{A}$ y dirección igual a la de $\overrightarrow{A}$ si $\lambda > 0$ y dirección opuesta a la de $\overrightarrow{A}$ si $\lambda < 0$. Ejemplos: $\overrightarrow{C} = 2\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{F} = 1{,}5\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{E} = -2\overrightarrow{A}$ significa que los vectores $\overrightarrow{C}$, $\overrightarrow{F}$ y $\overrightarrow{E}$ tienen magnitudes 2; $1,5$ y 2 veces la magnitud de $\overrightarrow{A}$ respectivamente y las direcciones que se indican en la figura 2.10

2.5 Opuesto de un vector

Un caso especial de la multiplicación de un vector por un escalar es cuando $\lambda = -1$. En este caso el vector resultante tiene igual magnitud que el vector $\overrightarrow{A}$ pero su dirección es opuesta. Ejemplo: $\overrightarrow{E} = -1\overrightarrow{A} = -\overrightarrow{A}$. (Ver figura 2.11). Se dice en este caso que el vector $\overrightarrow{E}$ es el opuesto del vector $\overrightarrow{A}$.

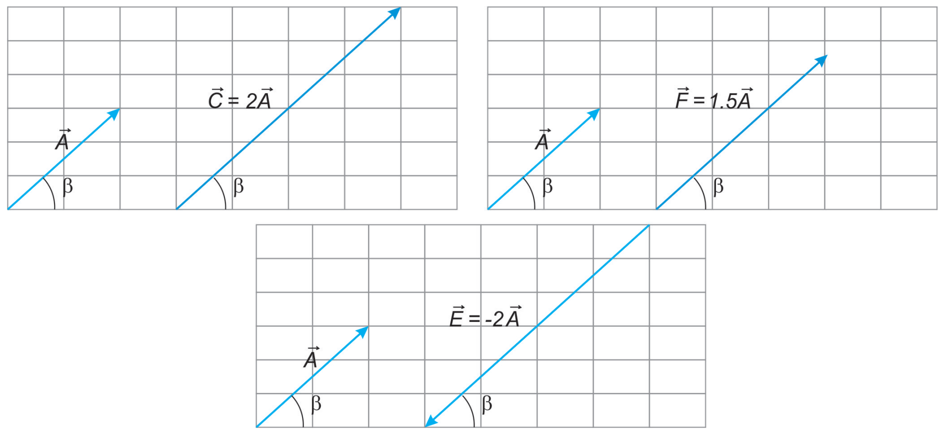


Figura 2.10

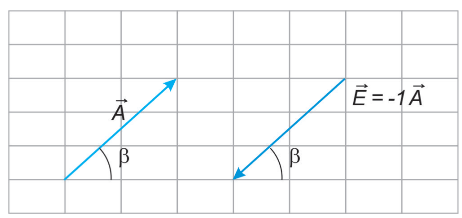


Figura 2.11

2.6 Resta de vectores

Se define la resta entre los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$, notada $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$ como $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{A} + (-1\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{A} + (-\overrightarrow{B})$. Es decir, la resta $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$ se convierte en una suma con la condición de que al vector $\overrightarrow{A}$ se le sume el opuesto de $\overrightarrow{B}$. Ver figura 2.12

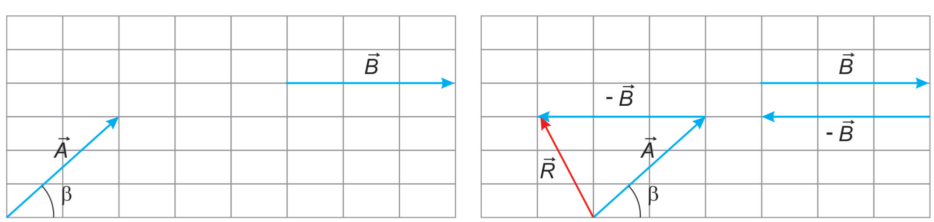


Figura 2.12

Ejemplo 5. Dados los vectores $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{V}$. Realice gráficamente $\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V}$ y $\overrightarrow{V} - \overrightarrow{U}$. (ver figura 2.13)

A la izquierda se realiza $\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V}$ y a la derecha $\overrightarrow{V} - \overrightarrow{U}$. De la definición de resta de vectores se desprende que la resta vectorial no es conmutativa.

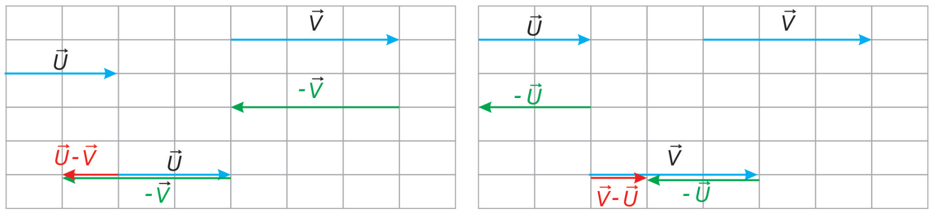


Figura 2.13

2.7 Teorema del coseno

El teorema del coseno establece que el si el ángulo entre dos vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ es θ (ver figura 2.14), la magnitud del vector suma $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ es dada por la expresión

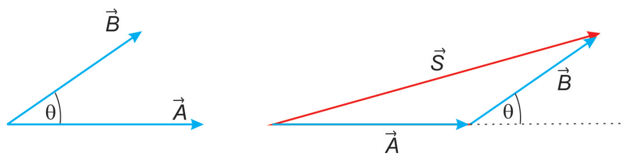


Figura 2.14

$$S = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \tag{2.1}$$

donde S, A y B denotan las magnitudes de los vectores $\overrightarrow{S}$, $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ respectivamente. Note que el ángulo θ es el ángulo formado entre los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ cuando sus orígenes coinciden.

Ejemplo 6. Encuentre la magnitud del vector suma entre dos vectores de igual magnitud F y que forman un ángulo α entre ellos. Aplicamos la ecuación (2.1) con $A = B = F$ y $\theta = \alpha$. Así, $S = \sqrt{F^2 + F^2 + 2F \cdot F\cos\alpha} = \sqrt{2F^2(1+\cos\alpha)} = \sqrt{2F^2(2\cos^2\frac{1}{2}\alpha)} = 2F\cos\frac{1}{2}\alpha$. (Identidad trigonométrica: $2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x$)

A partir del anterior resultado, es fácil encontrar la magnitud del vector resta o diferencia definido como $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$, ver figura 2.15. Para ello, simplemente construimos el opuesto del vector $\overrightarrow{B}$ y se lo sumamos al vector $\overrightarrow{A}$, pues $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} + (-\overrightarrow{B})$. En otras palabras, la resta vectorial se convierte en una suma con tal que al primer vector le sumemos el opuesto del segundo vector. Pero obsérvese que el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{A}$ y $-\overrightarrow{B}$ es $\pi - \theta$ y por tanto al aplicar la ecuación (2.1) resulta:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(\pi-\theta)} = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta} \tag{2.2}$$

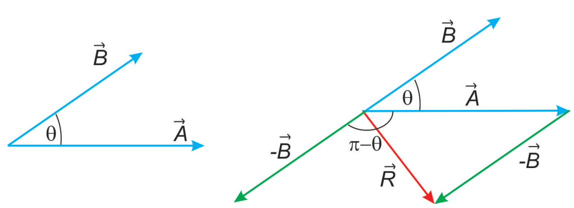


Figura 2.15

Ejemplo 7. Encuentre la magnitud del vector resta o diferencia entre dos vectores de igual magnitud F y que forman un ángulo α entre ellos. Aplicamos la ecuación (2.2) con $A = B = F$ y $\theta = \alpha$. Así, $S = \sqrt{F^2 + F^2 - 2F \cdot F \cos\alpha} = \sqrt{2F^2(1 - \cos\alpha)} = \sqrt{2F^2(2\sin^2 \frac{1}{2}\alpha)} = 2F \sin \frac{1}{2}\alpha$. (Identidad trigonométrica: $2\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$)

2.8 Componentes de un vector

La componente de $\overrightarrow{v_a}$ de un vector $\overrightarrow{v}$ es la proyección del mismo sobre una recta a del espacio. La componente yace sobre la recta a y es un vector. Podríamos visualizar también la componente de $\overrightarrow{v}$ sobre a como la sombra sobra la recta que proyecta un haz de luz orientado perpendicularmente a la recta a.(ver figura 2.16)

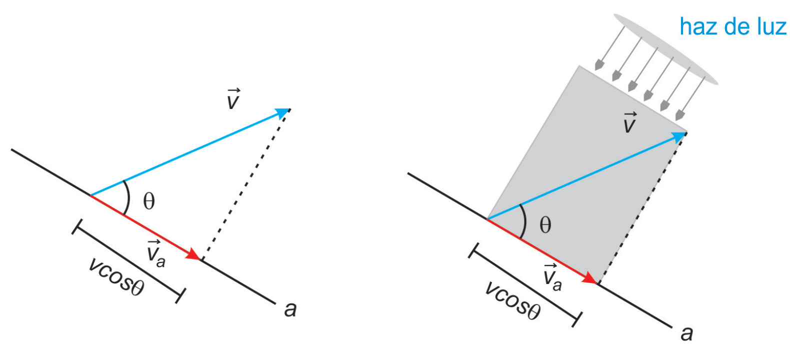


Figura 2.16

Cuando la proyección se realiza sobre un eje del sistema de coordenadas cartesiano, tal proyección de denomina componente rectangular o cartesiana. En la figura 2.17 se muestra el vector $\overrightarrow{A}$ en el plano cartesiano y sus dos componentes rectangulares $\overrightarrow{A}_x$ y $\overrightarrow{A}_y$, las cales son vectores! Obsérvese que el vector $\overrightarrow{A}$ es la suma de sus vectores componentes rectangulares $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y}$. Podemos también trasladar los vectores $\overrightarrow{A_x}$ y $\overrightarrow{A_y}$ sobre rectas paralelas a los ejes de coordenadas x y y. Lo anterior se generaliza a tres dimensiones.

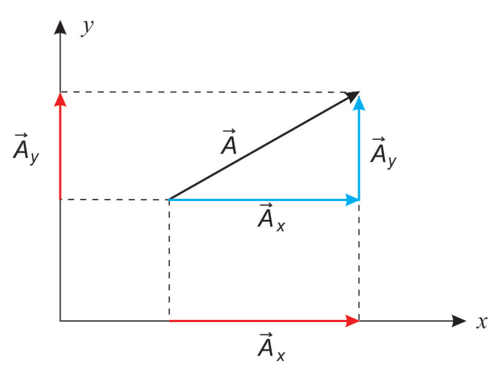


Figura 2.17

Ejemplo 8. Un pájaro vuela describiendo una trayectoria curva. En el punto A su velocidad es $8,0\,\mathrm{m/s}$ como indica en la figura 2.18. ¿Con qué velocidad el pájaro se acerca a la pared?

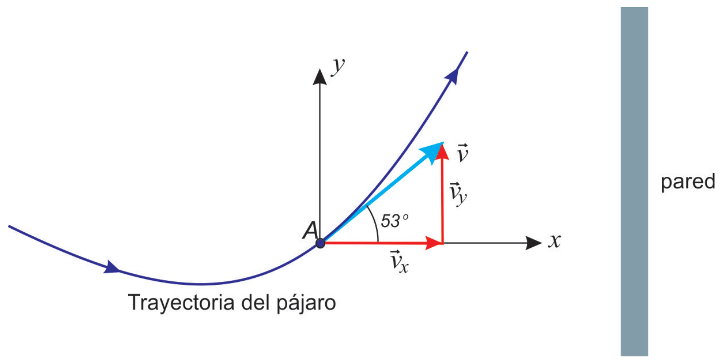


Figura 2.18

Solución: La velocidad de acercamiento del ave a la pared es la componente de la velocidad perpendicular a la pared, es decir $v_x = 8\cos 53^\circ = 4{,}8\,\text{m/s}$. ¿Qué representaría la componente $v_y = 8\sin 53^\circ = 6{,}4\,\text{m/s}$? Representa la velocidad con la cual el pájaro se mueve en dirección paralela a la pared.

Por definición, cada vector componente yace a lo largo de los ejes x y y del plano cartesiano, por lo que basta con dar un número para describirlo.(ver figura 2.19). Si el vector componente $\overrightarrow{A_x}$ apunta hacia la dirección positiva del eje x, entonces $\overrightarrow{A_x}$ es positivo; si apunta en la dirección negativa del eje x entonces $\overrightarrow{A_x}$ es negativo. $\overrightarrow{A_y}$ se define de manera similar. Se dice entonces que $\overrightarrow{A_x}$ y $\overrightarrow{A_y}$ son las componentes de $\overrightarrow{A}$ y estas son sólo números que pueden ser positivos o negativos. Por esta razón las componentes de un vector se simbolizan con letras cursivas sin flechas. Las componentes del vector $\overrightarrow{A}$ en términos del ángulo θ que forma con el eje x vienen dadas por

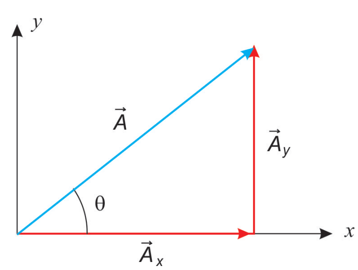


Figura 2.19

$$A_x = A\cos\theta \qquad (2.3a)$$

$$A_y = A\sin\theta \qquad (2.3b)$$

NOTA: Las ecuaciones 2.3 son correctas sólo si el ángulo θ se mide desde el eje x positivo en la dirección contraria de giro de las manecillas del reloj.
Al aplicar el teorema de Pitágoras (ver figura 2.19), la magnitud del vector $\overrightarrow{A}$ en términos de sus componentes es

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad (2.4)$$

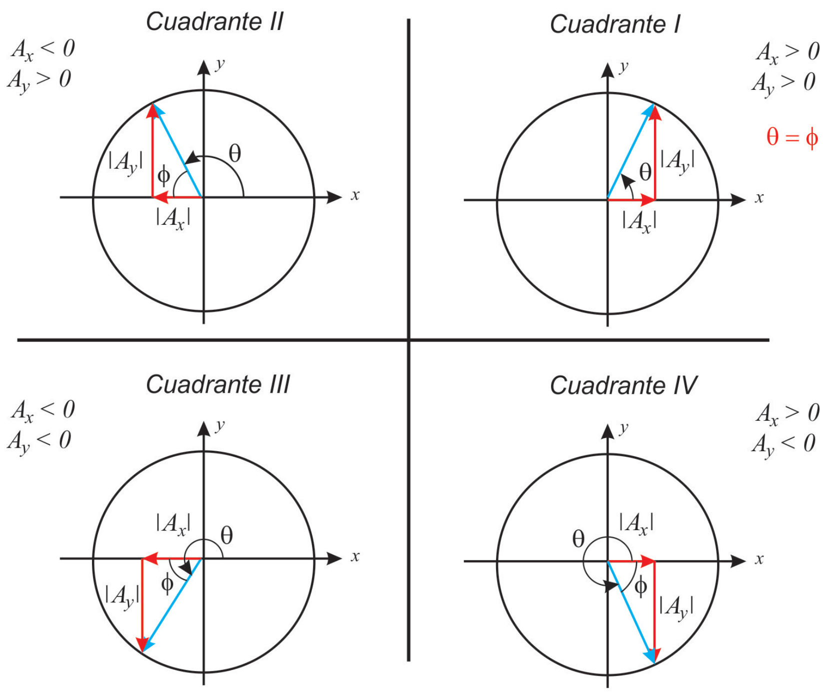


Figura 2.20

La expresión para la dirección del vector se obtiene de la definición de la tangente de un ángulo. Si el ángulo θ se mide desde el eje x positivo en la dirección contraria de giro de las manecillas del reloj, ver 2.20, entonces:

$$\theta = \arctan \frac{A_y}{A_x} \tag{2.5}$$

Se debe tener cuidado al usar la ecuación 2.5, pues el valor de la función arctan que retorna la calculadora es $-90^\circ < \theta < +90^\circ$ y esto puede conducir a un error cuando $90^\circ \leq \theta < 360^\circ$. Un método para determinar la respuesta correcta es calcular el ángulo ϕ como

$$\phi = \arctan \frac{|A_y|}{|A_x|} \tag{2.6}$$

Dependiendo de los signos de A_x y A_y, identificamos el cuadrante donde yace el vector $\overrightarrow{A}$ tal como se indica en la figura 2.20. Una vez que se identifique el cuadrante el valor de θ se calcula usando la tabla 2.1.

Signo de A_x	Signo de A_y	Cuadrante	Valor de θ
+	+	I	$\theta = \phi$
-	+	II	$\theta = 180^\circ - \phi$
-	-	III	$\theta = 180^\circ + \phi$
+	-	IV	$\theta = 360^\circ - \phi$

tabla 2.1: Valor de θ a partir de ϕ teniendo en cuenta los signos de A_x y A_y.

Ejemplo 9. Halle las componentes de los vectores de la figura 2.21.

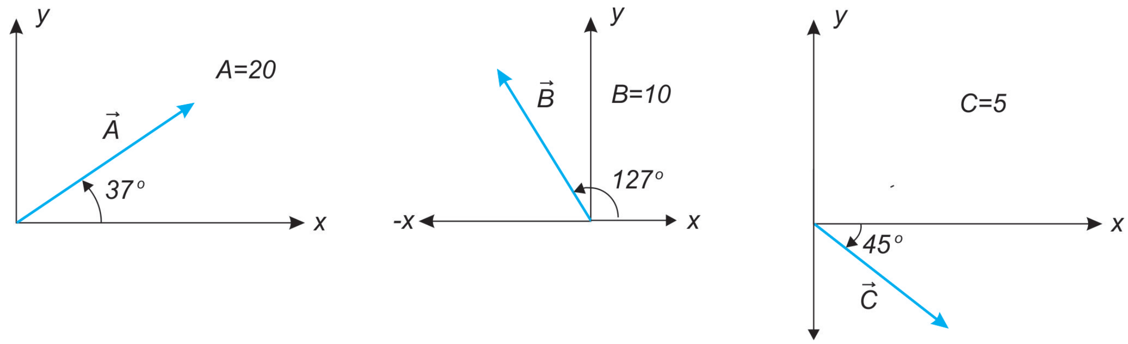


Figura 2.21

Solución: Nótese que los ángulos dados para el caso de los vectores $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{C}$ no son dados con respecto al eje x positivo. Por tanto debemos encontrar los ángulos con respecto a este eje antes de aplicar las ecuaciones 2.3. Ver figura 2.22.
Las componentes rectangulares del vector $\overrightarrow{A}$ son:

$$A_x \quad = \quad = 20\cos 37^\circ = 15{,}97 \qquad A_y = 20\sin 37^\circ = 12{,}04$$

Las componentes rectangulares del vector $\overrightarrow{B}$ son:

$$B_x \quad = \quad 10\cos 127^\circ = -6{,}02 \qquad B_y = 10\sin 127^\circ = 7{,}99$$

Las componentes rectangulares del vector $\overrightarrow{C}$ son:

$$C_x = 5\cos 315^\circ = 3{,}53 \quad \text{y} \quad C_y = 5\sin 315^\circ = -3{,}53$$

Ejemplo 10. Las componentes cartesianas de un vector $\overrightarrow{A}$ son $A_x = -10$ y $A_y = -10$.

a) Represente el vector $\overrightarrow{A}$ en el plano xy

b) Determine el ángulo que forma $\overrightarrow{A}$ con el eje x.

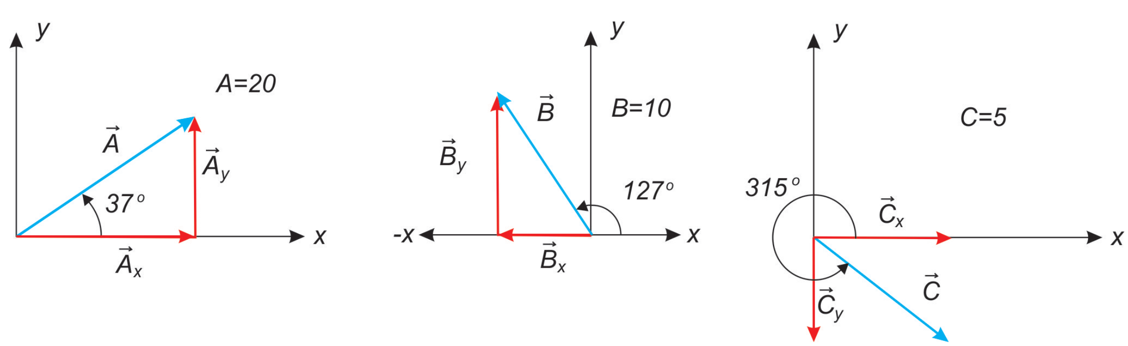


Figura 2.22

Solución:

a) La magnitud del vector es $A = \sqrt{(-10)^2 + (-10)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ y sus componentes cartesianas de muestran en la figura 2.23a.

(a) (b)

Figura 2.23

b) De acuerdo a la ecuación 2.6 se tiene $\phi = \arctan\frac{|A_y|}{|A_x|} = \arctan\frac{|-10|}{|-10|} = \arctan\frac{10}{10} = 45^\circ$, y el ángulo θ que forma con el eje x de acuerdo a la tabla 2.1 es $\theta = 180^\circ + \phi = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$, pues el vector yace en el tercer cuadrante, ver figura 2.23b.

2.9 Vectores unitarios

Un vector unitario es un vector cuya magnitud es 1, que apunta en una determinada dirección y no tiene significado físico. Los vectores unitarios en las direcciones positivas de los ejes x, y y z de un sistema de coordenadas diestro se denotan com $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ respectivamente. La magnitud de cada uno de estos vectores es uno, es decir,

$$|\hat{i}| = 1, \qquad |\hat{j}| = 1, \qquad |\hat{k}| = 1$$

Los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$, son mutuamente perpendiculares entre si. (ver figura 2.24).

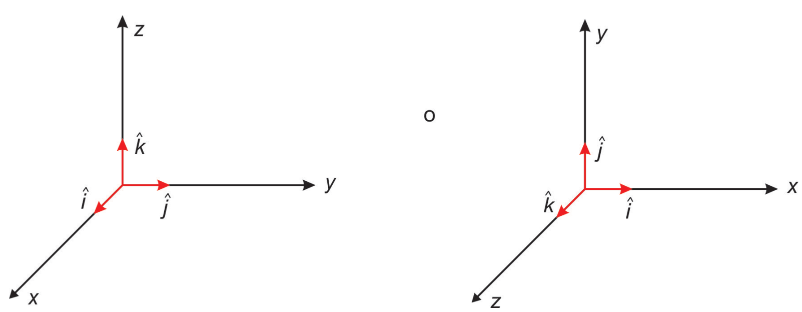
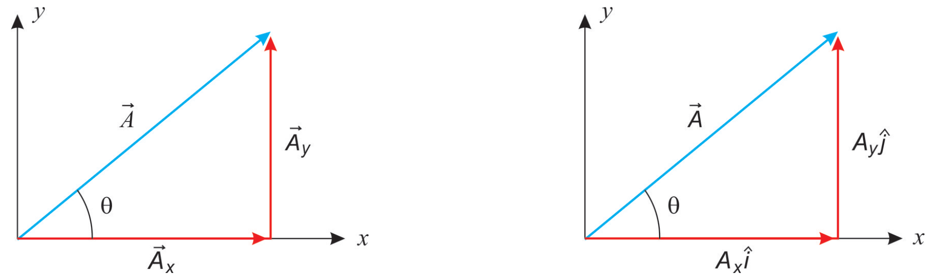


Figura 2.24

Consideremos el vector $\overrightarrow{A}$ de la figura 2.25a el cual tiene componentes $\overrightarrow{A}_x$ y $\overrightarrow{A}_y$, es decir, $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{A}_x + \overrightarrow{A}_y$. Estas mismas componentes en términos de los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$, ver figura 2.25b, quedan escritas como $\overrightarrow{A}_x = A_x\hat{i}$ y $\overrightarrow{A}_y = A_y\hat{j}$. .

$$\overrightarrow{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \tag{2.7}$$

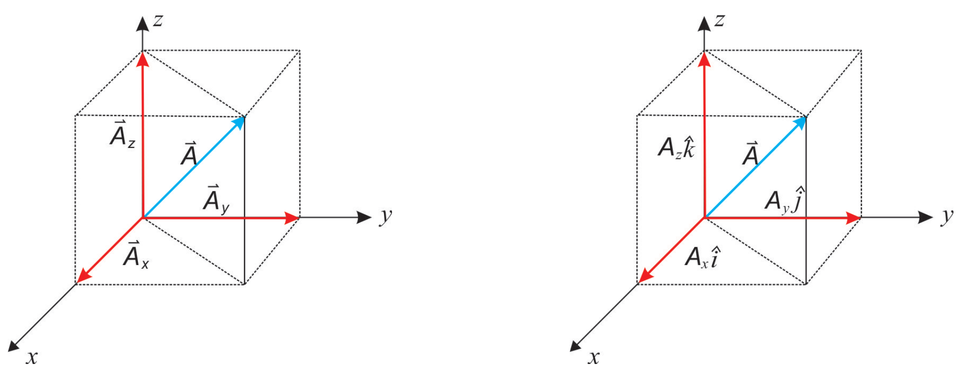


(a) (b)

Figura 2.25

De manera similar, en tres dimensiones, (ver figura 2.26), el vector $\overrightarrow{A}$ en términos de los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ se escribe como

$$\overrightarrow{A} \quad = \quad A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + +A_z\hat{k} \tag{2.8}$$



(a) (b)

Figura 2.26

Ejemplo 11.

- Un auto se mueve a 100 km/h a lo largo del eje x en dirección positiva. Esta misma información representada en forma vectorial: $\overrightarrow{v} = 100\hat{i}$ km/h.
- Un motociclista avanza a 120 km/h a lo largo del eje x en dirección negativa. Esta misma información representada en forma vectorial: $\overrightarrow{v} = 120(-\hat{i})$ km/h $= -120\hat{i}$ km/h.

Ejemplo 12. Escriba los vectores del Ejemplo 8 en términos de vectores unitarios.
Solución:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A} &= 15{,}97\hat{i} + 12{,}04\hat{j} \\
\overrightarrow{B} &= 6{,}02(-\hat{i}) + 7{,}99\hat{j} = -6{,}02\hat{i} + 7{,}99\hat{j} \\
\overrightarrow{C} &= 3{,}53\hat{i} + 3{,}53(-\hat{j}) = 3{,}53(\hat{i}) - 3{,}53\hat{j}
\end{aligned}$$

2.10 Suma de vectores por medio de componentes

Los vectores se pueden sumar o restar analíticamente descomponiéndolos primero en sus componentes. En la figura 2.27 se muestra el uso de las componentes en la suma de los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ que se encuentran en el plano xy.

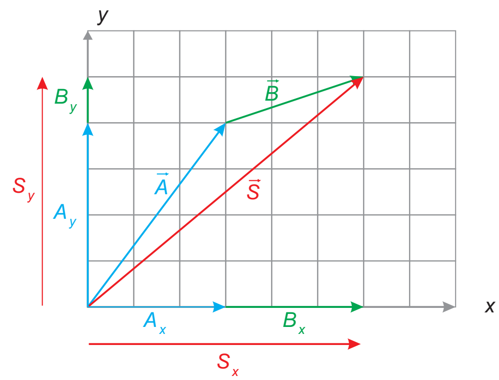


Figura 2.27

Vemos que la suma $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ implica también que

$$S_x = A_x + B_x \qquad \text{y} \qquad S_y = A_y + B_y$$

Ejemplo 13. Sume los vectores del Ejemplo 8.
Solución: Completamos el polígono con los vectores dados, ver figura 2.28. El vector suma o resultante es $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}$. Las componentes cartesianas de los vectores $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{C}$ son respectivamente:

$$\begin{array}{lcl}
A_x = 20\cos 37^\circ = 15{,}97 & \text{y} & A_y = 20\sin 37^\circ = 12{,}04 \\
B_x = 10\cos 127^\circ = -6{,}02 & \text{y} & B_y = 10\sin 127^\circ = 7{,}97 \\
C_x = 5\cos 315^\circ = 3{,}53 & \text{y} & C_y = 5\sin 315^\circ = -3{,}53
\end{array}$$

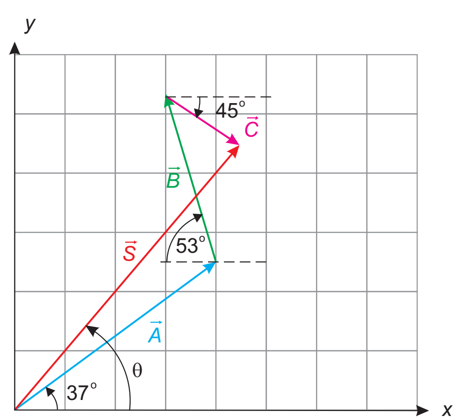


Figura 2.28

Las componentes del vector suma o resultante $\overrightarrow{S}$ son:

$$S_x = A_x + B_x + C_x = 15{,}97 - 6{,}02 + 3{,}53 = 13{,}48$$

$$S_y = A_y + B_y + C_y = 12{,}04 + 7{,}97 - 3{,}53 = 16{,}48$$

La magnitud del vector $\overrightarrow{S}$ es: $S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{(12{,}48)^2 + (16{,}48)^2} = 21{,}29$. El ángulo ϕ según la ecuación 2.6 es:

$$\phi = \arctan\left(\frac{|S_y|}{|S_x|}\right) = \arctan\left(\frac{16{,}48}{13{,}48}\right) = 0{,}88\,\mathrm{rad} = 50{,}72^\circ$$

dado que $S_x > 0$ y $S_y > 0$, el vector $\overrightarrow{S}$ se encuentra en el primer cuadrante; considerando el resultado de la tabla 2.1, el ángulo que forma $\overrightarrow{S}$ con el eje x es: $\theta = \phi = 50{,}72^\circ$.

2.10.1 Teorema d Lami

Teorema de Lami: establece que si la suma de tres vectores no nulos y coplanares es cero, es decir, $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} = 0$, entonces el cociente entre la magnitud de un vector y el seno del ángulo que forman los otros dos vectores es constante, ver figura 2.29a.

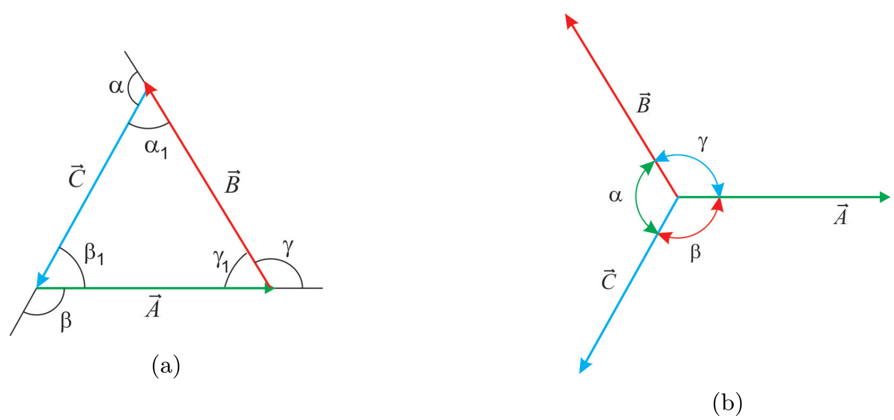


Figura 2.29

$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma} \quad \text{o} \quad \frac{A}{\sin\alpha_1} = \frac{B}{\sin\beta_1} = \frac{C}{\sin\gamma_1} \tag{2.9}$$

Otra manera de enunciar el teorema es: Si se tienen tres fuerzas coplanarias, concurrentes y no colineales $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{C}$, que mantienen un objeto en equilibrio, entonces el cociente entre la magnitud de una fuerza y el seno del ángulo que forman las otras dos fuerzas es constante, ver figura 2.29b.

Ejemplo 14. Dados los vectores $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{C}$ tales que $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} = \overrightarrow{0}$. Además, $A = B$ y $C = \sqrt{2}A = \sqrt{2}B$. Encontrar los ángulos entre los vectores.
Solución: Dado $A = B$ y $C = \sqrt{2}A = \sqrt{2}B$, de la figura 2.29a se sigue que $\alpha_1 = \beta_1$ y $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 =$

$180^\circ \therefore \gamma_1 = 180^\circ - 2\alpha_1$. Al aplicar el teorema de Lami

$$\begin{aligned}
\frac{A}{\sin\alpha_1} &= \frac{C}{\sin\gamma_1} \\
\frac{A}{\sin\alpha_1} &= \frac{\sqrt{2}A}{\sin(180^\circ - 2\alpha_1)} \\
\frac{1}{\sin\alpha_1} &= \frac{\sqrt{2}}{\sin 2\alpha_1} \Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha_1} = \frac{\sqrt{2}}{2\sin\alpha_1\cos\alpha_1} \therefore \cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \therefore \alpha_1 = 45^\circ
\end{aligned}$$

De esta manera $\beta_1 = 45^\circ$ y $\gamma_1 = 180^\circ - 2\alpha_1 = 90^\circ$.

Ejemplo 15. Un cuerpo de 200 N de peso está suspendido mediante cuerdas tal como indica la figura 2.30a. Encontrar la magnitudes de las fuerzas que ejercen las cuerdas sobre el nudo que une las tres cuerdas.
Solución: Denotemos por $\overrightarrow{T_1}$, $\overrightarrow{T_2}$ y $\overrightarrow{T_3}$ las fuerzas que ejercen las cuerdas sobre el nudo, donde $|\overrightarrow{T_3}| = T_3 = 200\,\text{N}$. Dado que el nudo se encuentra en equilibrio, $\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + \overrightarrow{T_3} = \overrightarrow{0}$.

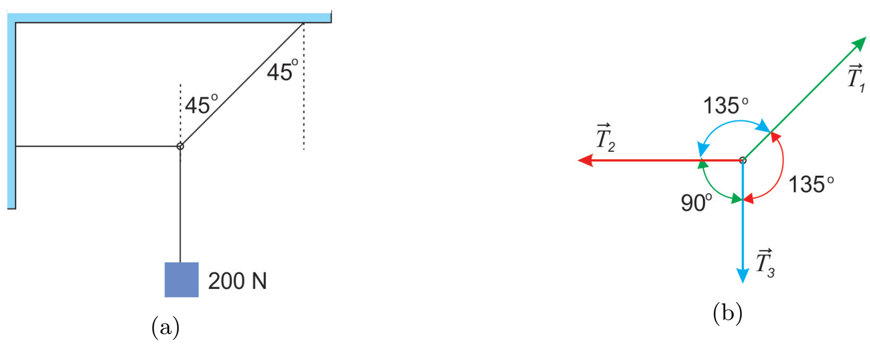


Figura 2.30

Al aplicar el teorema de Lami (ver ecuaciones 2.9) a las fuerzas que actúan sobre el nudo mostrado en la figura 2.30b resulta

$$\frac{T_1}{\sin 90^\circ} = \frac{200}{\sin 135^\circ} = \frac{T_2}{\sin 135^\circ}$$

De estas ecuaciones se sigue que $T_2 = 200\,\text{N}$ y $T_1 = \frac{200}{\sin 135^\circ} = 282{,}84\,\text{N}$.

2.11 Construcción de un vector unitario

Consideremos un vector $\overrightarrow{A}$ expresado en componentes cartesianas, $\overrightarrow{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$, siempre es posible construir un vector que tenga la misma dirección de $\overrightarrow{A}$, que lo denotamos por $\hat{a}$ y es dado por

$$\hat{a} = \frac{\overrightarrow{A}}{A} = \frac{A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \tag{2.10}$$

Ejemplo 16. Dados los vectores $\overrightarrow{A} = 3\hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k}$ y $\overrightarrow{B} = 2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$, construya vectores unitarios paralelos a $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ respectivamente.
Solución: Usando la ecuación 2.10 resulta

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{\overrightarrow{A}}{A} = \frac{3\hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k}}{\sqrt{3^2+2^25^2}} = \frac{3\hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k}}{\sqrt{38}} \\ \hat{b} &= \frac{\overrightarrow{B}}{B} = \frac{2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 17. La figura 2.31 muestra un paralelepípedo de lados $a = 1$, $b = 2$ y $c = 1$. Si A y B son puntos, construya un vector unitario $\hat{u}$ que apunte de A a B

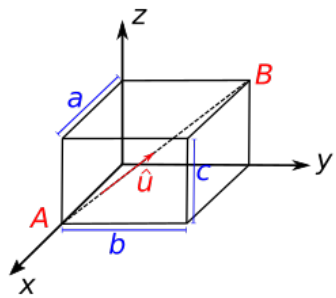


Figura 2.31

Solución: Un vector unitario que apunta del punto $A = (x_1, y_1, z_1)$ al punto $B = (x_2, y_2, z_2)$ se construye como $\hat{u} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$ donde $\vec{R} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$. En nuestro caso $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 1)$ y $\vec{R} = (0-1)\hat{i} + (2-0)\hat{j} + (1-0)\hat{k} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 1\hat{k}$. La magnitud de $\vec{R}$ es $|\vec{R}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$. Luego, $\hat{u} = \frac{-\hat{i}+2\hat{j}+1\hat{k}}{\sqrt{6}}$.

Ejemplo 18. La figura 2.32 muestra un paralelepípedo de lados $a = 1$, $b = 2$ y $c = 1$. Si A y B son puntos, construya un vector unitario $\hat{u}$ que apunte de A a B

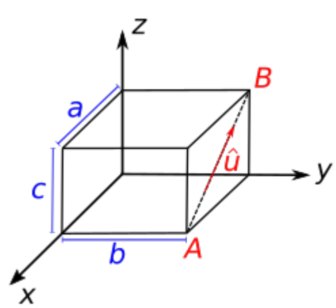


Figura 2.32

Solución: Un vector unitario que apunta del punto $A = (x_1, y_1, z_1)$ al punto $B = (x_2, y_2, z_2)$ se construye como $\hat{u} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$ donde $\vec{R} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$. En nuestro caso $A = (1, 2, 0)$, $B = (0, 2, 1)$ y $\vec{R} = (0-1)\hat{i} + (2-2)\hat{j} + (1-0)\hat{k} = -\hat{i} + 0\hat{j} + 1\hat{k}$. La magnitud de $\vec{R}$ es $|\vec{R}| = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$. Luego, $\hat{u} = \frac{-\hat{i}+\hat{k}}{\sqrt{2}}$.

2.12 Producto escalar o punto

Dados los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$, los cuales forman un ángulo θ entre sí, se define el producto escalar o punto entre los vectores como

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = AB\cos\theta \tag{2.11}$$

donde A y B representan las magnitudes de los mismos. Nótese, que el resultado del producto escalar es un número real.

2.12.1 Propiedades del producto escalar

Dados los vectores $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{C}$ y los números reales a_1, a_2

a) Commutativa: $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{A}$

b) Distributiva con respecto a la suma: $\overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}$.

c) Multiplicación por un escalar: $(a_1\overrightarrow{A}) \cdot (a_2\overrightarrow{B}) = a_1 a_2 \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$

d) Bilineal: $\overrightarrow{A} \cdot (a_1\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) = a_1(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}) + \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}$.

2.12.2 Producto escalar entre vectores unitarios

Al aplicar la ecuación 2.11, el resultado del producto escalar entre vectores los unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, y $\hat{k}$ se ilustra en la tabla 2.2

Producto escalar entre vectores unitarios
$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = (1)(1)\cos(90^\circ) = 0$
$\hat{\imath} \cdot \hat{k} = (1)(1)\cos(90^\circ) = 0$
$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = (1)(1)\cos(0^\circ) = 1$
$\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} = (1)(1)\cos(90^\circ) = 0$
$\hat{\jmath} \cdot \hat{k} = (1)(1)\cos(90^\circ) = 0$
$\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = (1)(1)\cos(0^\circ) = 1$
$\hat{k} \cdot \hat{\imath} = (1)(1)\cos(90^\circ) = 0$
$\hat{k} \cdot \hat{\jmath} = (1)(1)\cos(90^\circ) = 0$
$\hat{k} \cdot \hat{k} = (1)(1)\cos(0^\circ) = 1$

tabla 2.2

Por otra parte, si los vectores están dados en términos de sus componentes cartesianas, su producto escalar es dado por

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{2.12}$$

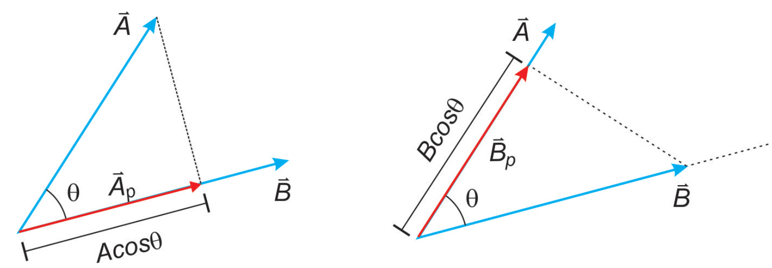


Figura 2.33: Proyección de un vector

2.12.3 Proyección de un vector

De la figura 2.33, se define la proyección del vector $\overrightarrow{A}$ sobre el vector $\overrightarrow{B}$ como

$$A\cos\theta = \frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{B} \tag{2.13}$$

De igual manera, se define la proyección de $\overrightarrow{B}$ sobre $\overrightarrow{A}$ como

$$B\cos\theta = \frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{A} \tag{2.14}$$

Si la proyección es positiva, el vector proyectado tiene la misma dirección que el vector sobre el cual se hace la proyección y si es negativa, el vector proyectado tiene dirección opuesta al vector sobre el cual se hace la proyección. Los vectores proyección $\overrightarrow{A}_p$ y $\overrightarrow{B}_p$ vienen dador por

$$\overrightarrow{A}_p = A\cos\theta\hat{u}_B = A\cos\theta\frac{\overrightarrow{B}}{B} = \frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{B}\frac{\overrightarrow{B}}{B} = \left(\frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{B^2}\right)\overrightarrow{B} \tag{2.15}$$

$$\overrightarrow{B}_p = B\cos\theta\hat{u}_A = B\cos\theta\frac{\overrightarrow{A}}{A} = \frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{A}\frac{\overrightarrow{A}}{A} = \left(\frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{A^2}\right)\overrightarrow{A} \tag{2.16}$$

Ejemplo 19. Dados los vectores $\overrightarrow{A} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ y $\overrightarrow{B} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$. Encuentre:

a) La proyeccción de $\overrightarrow{A}$ sobre $\overrightarrow{B}$

b) La proyección de $\overrightarrow{A}$ sobre $\overrightarrow{B}$ en forma vectorial.

c) La proyeccción de$\overrightarrow{B}$ sobre $\overrightarrow{A}$

d) La proyección de $\overrightarrow{B}$ sobre $\overrightarrow{A}$ en forma vectorial.

Solución:

a) De la ecuación 2.13:

$$A\cos\theta = \frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{B} = \frac{(3\hat{\imath}+2\hat{\jmath})\cdot(2\hat{\imath}+4\hat{\jmath})}{\sqrt{2^2+4^2}} = \frac{(3)(2)+(2)(4)}{\sqrt{20}} = \frac{6+8}{2\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

b) De la ecuación 2.15:

$$\vec{A}_p = \left(\frac{(3\hat{i}+2\hat{j})\cdot(2\hat{i}+4\hat{j})}{(\sqrt{2^2+4^2})^2}\right)(2\hat{i}+4\hat{j}) = \left(\frac{(3)(2)+(2)(4)}{20}\right)(2)(\hat{i}+2\hat{j}) = \frac{7}{5}(\hat{i}+2\hat{j})$$

c) De la ecuación 2.14:

$$B\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A} = \frac{(3\hat{i}+2\hat{j})\cdot(2\hat{i}+4\hat{j})}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{(3)(2)+(2)(4)}{\sqrt{13}} = \frac{6+8}{\sqrt{13}} = \frac{14}{\sqrt{13}}$$

d) De la ecuación 2.16:

$$\vec{B}_p = \left(\frac{(3\hat{i}+2\hat{j})\cdot(2\hat{i}+4\hat{j})}{(\sqrt{2^2+3^2})^2}\right)(3\hat{i}+2\hat{j}) = \left(\frac{(3)(2)+(2)(4)}{13}\right)(3\hat{i}+2\hat{j}) = \frac{14}{13}(3\hat{i}+2\hat{j})$$

2.12.4 Angulo entre dos vectores

Utilicemos los resutados anteriores para determinar el ángulo entre dos vectores que estan dados en componentes cartesianas. $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{j}$ y $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{j}$, ver figura 2.34

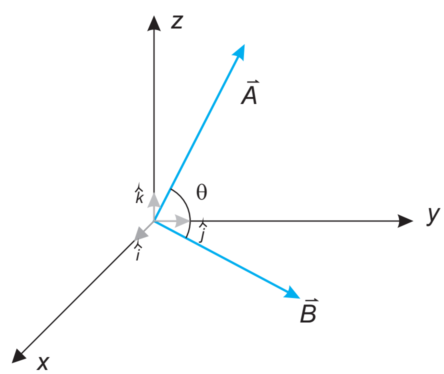


Figura 2.34

De las ecuaciones 2.11 y 2.12 $AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$, de donde

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB} \tag{2.17}$$

Ejemplo 20. Dados los vectores $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}$ y $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$. a) Determine el ángulo θ entre los vectores, b) calcule la proyección de $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$ y c) la proyección del vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$.
Solución:

a) De la ecuación 2.17 se sigue que $\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$, donde $A = \sqrt{3^2+2^2+5^2} = \sqrt{9+4+25} = \sqrt{38}$ y $B = \sqrt{2^2+1^2+(2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$ respectivamente. Por otra parte, $\vec{A}\cdot\vec{B} = (3)(2)+(2)(1)+(5)(2) = 6+2+10 = +18$. Así, $\cos\theta = \frac{18}{3\sqrt{38}} = \frac{6}{\sqrt{38}}$ o $\theta = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{38}}\right) = 13{,}3°$.

b) La proyección de $\overrightarrow{A}$ sobre $\overrightarrow{B}$ viene dada por la ecuación 2.13 $A\cos\theta = \frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{B} = \frac{18}{3} = 6$. El signo positivo significa que la dirección de la proyección está en la misma dirección del vector $\overrightarrow{B}$.

c) La proyección de $\overrightarrow{B}$ sobre $\overrightarrow{A}$ es dada por la ecuación 2.14 $B\cos\theta = \frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{A} = \frac{18}{\sqrt{38}} = 2{,}92$.

2.12.5 ¿En qué podría utilizarse el producto punto?

a) Para encontrar el ángulo entre 2 vectores o 2 líneas rectas, el ángulo entre 2 planos que se intersectan, el ángulo entre el plano y la línea recta.

b) Para encontrar la proyección de un vector sobre otro vector. Aplicaciones incluyen por ejemplo encontrar la proyección de una fuerza sobre un eje específico.

c) Para verificar si 2 vectores son perpendiculares (Si el producto punto entre dos vectores es cero, los vectores son paralelos).

d) Para definir algunas cantidades en física como por ejemplo el trabajo hecho por una fuerza.

2.13 Producto vectorial o cruz entre vectores

Dados los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ los cuales forman un ángulo $\theta < 180°$ entre sí y se encuentran contenidos en el plano P (ver figura 2.35a), se define el producto vectorial o cruz entre los vectores y se denota como $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ como un nuevo vector cuya magnitud es $AB\sin\theta$ y dirección es perpendicular al plano P. Dado que existen dos posibles direcciones, se elige la dirección determinada por la regla de la mano derecha o del sacacorchos o tornillo,(ver figura 2.35b). Esta regla establece que cuando el tornillo se coloca perpendicular al plano P y se hace girar en la dirección de $\overrightarrow{A}$ hacia $\overrightarrow{B}$, el sentido de avance del tornillo es la dirección de $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$. Obsérvese que no importa como se coloque el tornillo, lo importante es que sea $\perp$ al plano P. Asì, es claro que $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ es perpendicular tanto a $\overrightarrow{A}$ como a $\overrightarrow{B}$ simultáneamente.

2.13.1 Propiedades del producto vectorial

Dados los vectores $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{C}$ y los números reales a_1, a_2

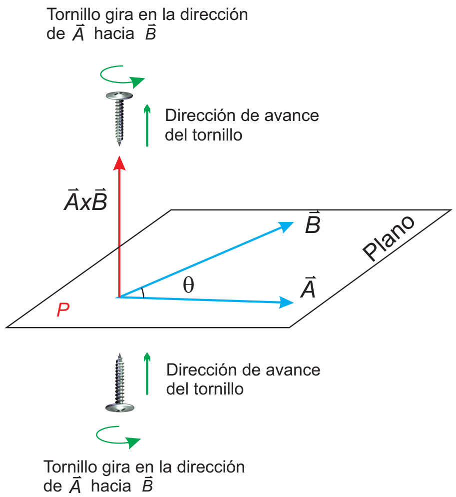
a) Anticonmutatividad: $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = -\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A}$

b) Distributiva con respecto a la suma:

- $\overrightarrow{A} \times (\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C}$.
- $(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) \times \overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C} + \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}$.

c) Multiplicación por un escalar: $(a_1\overrightarrow{A}) \times (a_2\overrightarrow{B}) = (a_1a_2)\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$

d) Bilineal: $\overrightarrow{A} \times (a_1\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) = a_1(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) + \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C}$.



(a) Producto vectorial

(b) Tornilo de rosca derecha

Figura 2.35

2.13.2 Producto vectorial entre vectores unitarios

Al aplicar la definición de producto vectorial entre vectores los unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, y $\hat{k}$, el resultado se muestra en la tabla 2.3

Producto vectorial entre vectores unitarios
$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$
$\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$
$\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}$
$\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$
$\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$
$\hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$
$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{0}$
$\hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{0}$
$\hat{k} \times \hat{k} = \hat{0}$

tabla 2.3

El producto vectorial no es conmutativo (figura 2.36) pues $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} \neq \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A}$, en realidad se cumple que $\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A} = -\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$

Por otra parte, si los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ están dados en componentes cartesianas el producto vectorial se define como

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{\imath} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{\jmath} + (A_x B_y - A_y B_z)\hat{k} \tag{2.18}$$

Ejemplo 21. Dados los vectores $\overrightarrow{A} = \hat{\imath}+2\hat{\jmath}+3\hat{k}$ y $\overrightarrow{B} = 4\hat{\imath}+5\hat{\jmath}+6\hat{k}$. a) Calcule el producto vectorial entre $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$, b) verifique que $\overrightarrow{A}$ es perpendicular ($\perp$) a $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ y c) verifique que $\overrightarrow{B} \perp \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$

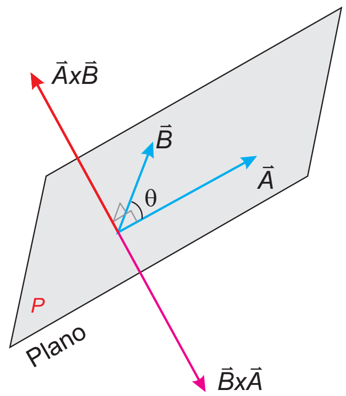


Figura 2.36

Solución:

a)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} &= [A_yB_z - A_zB_y]\hat{\imath} + [A_zB_x - A_xB_z]\hat{\jmath} + [A_xB_y - A_yB_z]\hat{k}\\ &= [(2)(6) - (5)(3)]\,\hat{\imath} + [(3)(4) - (6)(1)]\,\hat{\jmath} + [(1)(5) - (4)(2)]\,\hat{k}\\ &= -3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 3\hat{k}\end{aligned}$$

b) Si $\overrightarrow{A}$ es perpendicular a $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} \rightarrow \overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) = 0$. Veamos,
$(\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}) \cdot (-3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 3\hat{k}) = (1)(-3) + (2)(6) + (3)(-3) = 0$

c) Si $\overrightarrow{B}$ es perpendicular a $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} \rightarrow \overrightarrow{B} \cdot (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) = 0$. Veamos,
$(4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 6\hat{k}) \cdot (-3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 3\hat{k}) = (4)(-3) + (5)(6) + (6)(-3) = 0$

Ejemplo 22. Dados los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$, donde $|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}| = \sqrt{29}$ y además $\overrightarrow{A} \times (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}) = (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}) \times \overrightarrow{B}$, pruebe que $(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) \cdot (-7\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}) = \pm 4$.
Solución:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} \times (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}) &= (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}) \times \overrightarrow{B}\\ \overrightarrow{A} \times (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}) - (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}) \times \overrightarrow{B} &= \overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{A} \times (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}) + (\overrightarrow{B}(2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k})\times &= \overrightarrow{0}\\ (\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) \times (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}) &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

Lo anterior significa que $(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})$ es paralelo a $(2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k})$, es decir,

$$(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) = \pm\lambda(2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k})$$

donde λ es un número real. Al tener en cuenta la condición $|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}| = \sqrt{29}$ se tiene

$$|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}| = \pm\lambda|(2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k})| = \pm\lambda\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \pm\lambda\sqrt{29}$$

de donde $\lambda = \pm 1$. De esta manera

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \pm(2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k})$$

Luego, $(2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}) \cdot (-7\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}) = (2)(-7) + (3)(2) + (4)(3) = \pm 4$.

2.13.3 ¿En qué podría utilizarse el producto vectorial?

a) Para determinar cuándo dos vectores son paralelos (si el producto vectoriall es cero, los vectores son paralelos)

b) Para construir un vector perpendicular al plano que contiene una par de vectores.

c) Para definir algunas cantidades en física como por ejemplo el momento de una fuerza o torque.

d) Para calcular el área de un triángulo dadas las coordenadas cartesianas de sus vértices.

2.14 PROBLEMAS ADICIONALES SOLUCIONADOS

Ejemplo 23. Las componentes cartesianas de un vector $\overrightarrow{A}$ son $A_x = -10$ y $A_y = 20$.

a) La magnitud del vector es $A = \sqrt{(-10)^2 + (20)^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$ y sus componentes cartesianas de muestran en la figura 2.37a.

b) Determine el ángulo que forma $\overrightarrow{A}$ con el eje x.

Solución:

a) La figura 2.37a muestra las componentes cartesianas de $\overrightarrow{A}$.

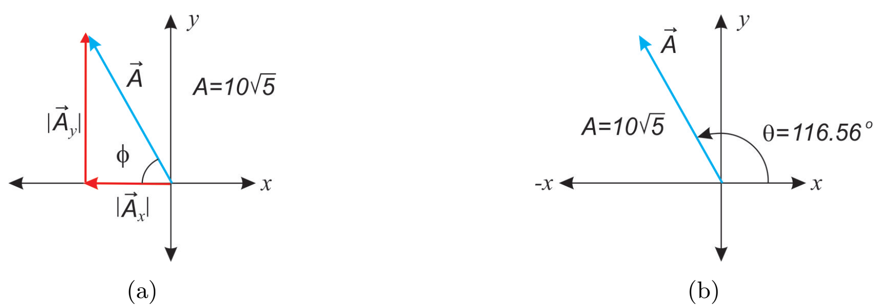


Figura 2.37

b) De acuerdo a la ecuación 2.6 se tiene $\phi = \arctan \frac{|A_y|}{|A_x|} = \arctan \frac{|20|}{|-10|} = \arctan \frac{20}{10} = 63{,}43^\circ$, y el ángulo θ que forma con el eje x de acuerdo a la tabla 2.1 es $\theta = 180^\circ - \phi = 180^\circ - 63{,}43^\circ = 116{,}56^\circ$, pues el vector yace en el segundo cuadrante, ver figura 2.37b.

Ejemplo 24. Las componentes cartesianas de un vector $\overrightarrow{A}$ son $A_x = 10$ y $A_y = -20$.

a) Represente el vector $\overrightarrow{A}$ en el plano xy

b) Determine el ángulo que forma $\overrightarrow{A}$ con el eje x.

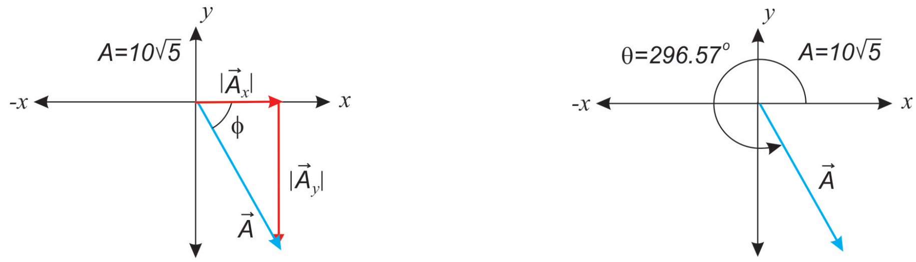
Solución:

a) La magnitud del vector es $A = \sqrt{(10)^2 + (-20)^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$ y sus componentes cartesianas de muestran en la figura 2.38a.

b) De acuerdo a la ecuación 2.6 se tiene $\phi = \arctan \frac{|A_y|}{|A_x|} = \arctan \frac{|-20|}{|10|} = \arctan \frac{20}{10} = 63{,}43^\circ$, y el ángulo θ que forma con el eje x de acuerdo a la tabla 2.1 es $\theta = 360^\circ - \phi = 360^\circ - 63{,}43^\circ = 296{,}57^\circ$, pues el vector yace en el cuarto cuadrante, ver figura 2.38b.

Ejemplo 25. Las componentes cartesianas de un vector $\overrightarrow{A}$ son $A_x = 10$ y $A_y = 10$.

a) La magnitud del vector es $A = \sqrt{(10)^2 + (20)^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$ y sus componentes cartesianas de muestran en la figura 2.39a.



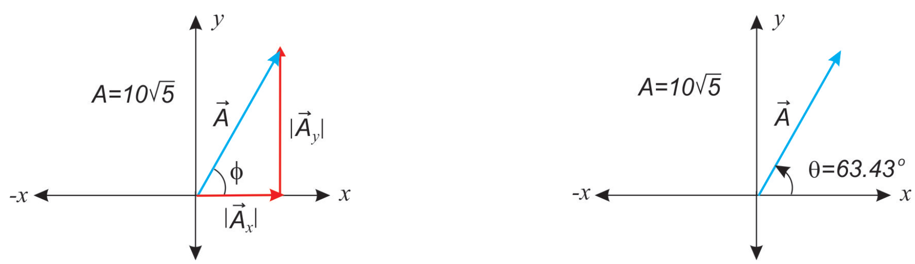
(a) (b)

Figura 2.38

b) Determine el ángulo que forma $\overrightarrow{A}$ con el eje x.

Solución:

a) La figura 2.39a muestra las componentes cartesianas de $\overrightarrow{A}$.



(a) (b)

Figura 2.39

b) De acuerdo a la ecuación 2.6 se tiene $\phi = \arctan \frac{|A_y|}{|A_x|} = \arctan \frac{|20|}{|10|} = \arctan \frac{10}{10} = 63{,}43^\circ$, y el ángulo θ que forma con el eje x de acuerdo a la tabla 2.1 es $\theta = \phi = 63{,}43^\circ$, pues el vector yace en el primer cuadrante, ver figura 2.39b.

Ejemplo 26. Un cuerpo de masa m reposa sobre la superficie de un plano inclinado que forma un ángulo θ como se muestra en la figura 2.40a. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son la fuerza normal $\overrightarrow{N}$, el peso $m\overrightarrow{g}$ y la fuerza de rozamiento $\overrightarrow{f}$ que existe entre el plano y el cuerpo. Las magnitudes de la fuerza normal y la de rozamiento están relacionadas mediante la ecuación $f = \mu N$, siendo μ el coeficiente de rozamiento estático. Utilice el teorema de Lami para demostrar que: $f = mg \sin\theta$, $N = mg\cos\theta$ y $\mu = \tan\theta$.

Solución: De la figura 2.40b y al aplicar el teorema de Lami (ver ecuaciones 2.9),

$$\frac{N}{\sin(90^\circ + \theta)} = \frac{f}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{mg}{\sin 90^\circ}$$

De estas ecuaciones se desprende que $f = mg\sin\theta$ y $N = mg\cos\theta$. Hemos utilizado las identidades $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$ y $\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$. Al dividir lados izquierdos entre si y lados derechos entre si de estas ecuaciones resulta $\frac{f}{N} = \frac{mg\sin\theta}{mg\cos\theta} \Leftrightarrow \frac{\mu N}{N} = \tan\theta \therefore \mu = \tan\theta$.

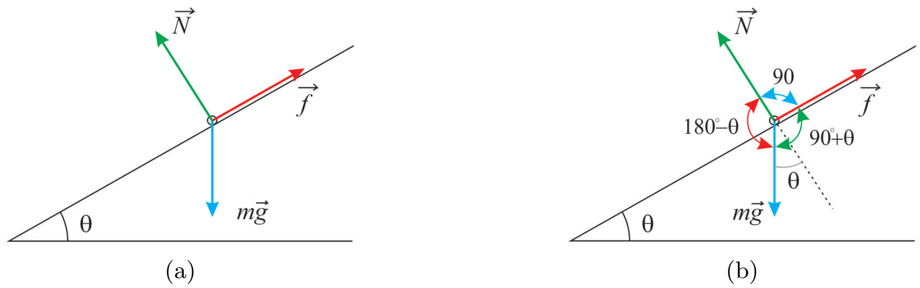


Figura 2.40

Ejemplo 27. Una esfera pequeña de masa m y carga eléctrica q se encuentra suspendida de una cuerda ligera. Cuando se activa un campo eléctrico uniforme $\overrightarrow{E}$, la partícula experimenta una fuerza $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$ dirigida hacia la derecha haciendo que la partícula se desplace, la cuerda forme un ángulo θ y alcance una posición de equilibrio, ver figura 2.41a. Las otras dos fuerzas que actúan sobre la esfera son el peso $m\overrightarrow{g}$ dirigido hacia abajo y la tensión de la cuerda $\overrightarrow{T}$. Demuestre que $q = \frac{mg\tan\theta}{E}$ y $T = \frac{mg}{\cos\theta}$.

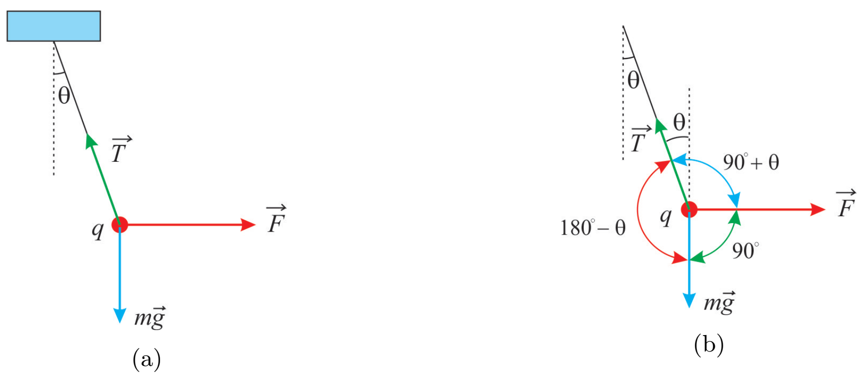


Figura 2.41

Solución: De la figura 2.41b y al aplicar el teorema de Lami (ver ecuaciones 2.9),

$$\frac{F}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{mg}{\sin(90^\circ + \theta)} = \frac{T}{\sin 90^\circ}$$

De estas ecuaciones se desprende que $F = mg\frac{\sin(180^\circ-\theta)}{\sin(90^\circ+\theta)} = mg\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = mg\tan\theta$ y $T = mg\frac{\sin 90^\circ}{\sin(90^\circ+\theta)}) = \frac{mg}{\cos\theta}$. Hemos utilizado las identidades $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$ y $\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$. Al usar la primera ecuación derivada y teniendo en cuenta que $F = qE$, resulta $q = \frac{mg\tan\theta}{E}$.

Ejemplo 28. Demuestre que los vectores $\overrightarrow{A} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$, $\overrightarrow{B} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ y $\overrightarrow{C} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}$ forman los lados de un triángulo rectángulo.
Solución: Los vectores dados forman parte de un triángulo si uno de ellos es igual a la suma de los otros dos vectores. Se puede verificar fácilmente que $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}$. Los vectores dados forman

un triángulo rectángulo si el producto punto de dos de los tres vectores dados es cero.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} &= (3\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+\hat{k})\cdot(\hat{\imath}-3\hat{\jmath}+5\hat{k}) = (3)(1)+(-2)(-3)+(1)(5) = 14\\
\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C} &= (\hat{\imath}-3\hat{\jmath}+5\hat{k})\cdot(2\hat{\imath}+\hat{\jmath}-4\hat{k}) = (1)(2)+(-3)(1)+(5)(-4) = -21\\
\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{A} &= (2\hat{\imath}+\hat{\jmath}-4\hat{k})\cdot(3\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+\hat{k}) = (2)(3)+(1)(-2)+(-4)(1) = 0
\end{aligned}$$

dado que $\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{A}=0$, $\overrightarrow{A}$ es perpendicular a $\overrightarrow{C}$

Ejemplo 29. Dos vectores de igual magnitud forman un ángulo igual a 30°. Si la magnitud del vector suma es 60, calcule la magnitud de los vectores.
Solución: Del teorema del coseno, la magnitud del vector suma es $S=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}$, siendo θ el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$. Por las condiciones del problema $A=B$, luego, $S=\sqrt{A^2+A^2+2A^2\cos\theta}=\sqrt{2A^2(1+\cos\theta)}$, de donde $A=\sqrt{\frac{S^2}{2(1+\cos\theta)}}=\sqrt{\frac{60^2}{2(1+\cos 30)}}=31{,}06$

Ejemplo 30. Dos vectores de igual magnitud forman un ángulo igual a 30°. Si la magnitud del vector diferencia es 60, calcule la magnitud de los vectores.
Solución: Del teorema del coseno, la magnitud del vector resta es $R=\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}$, siendo θ el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$. Por las condiciones del problema $A=B$, luego, $R=\sqrt{A^2+A^2-2A^2\cos\theta}=\sqrt{2A^2(1-\cos\theta)}$, de donde $A=\sqrt{\frac{R^2}{2(1-\cos\theta)}}=\sqrt{\frac{60^2}{2(1-\cos 30)}}=115{,}91$

Ejemplo 31. Determine un vector $\overrightarrow{C}$ tal que cuando se le sume a la resultante de los vectores $\overrightarrow{A}=3\hat{\imath}-5\hat{\jmath}+7\hat{k}$ y $\overrightarrow{B}=2\hat{\imath}+4\hat{\jmath}-3\hat{k}$, dé un vector unitario a lo largo de la dirección $+y$.
Solución: El vector resultante de $\overrightarrow{A}$ y B es $\overrightarrow{R}=\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}=(3\hat{\imath}-5\hat{\jmath}+7\hat{k})+(2\hat{\imath}+4\hat{\jmath}-3\hat{k})=(3+2)\hat{\imath}+(-5+4)\hat{\jmath}+(7-3)\hat{k}=5\hat{\imath}-\hat{\jmath}+4\hat{k}$. Se requiere que $\overrightarrow{C}+\overrightarrow{R}=\hat{\jmath}\therefore\overrightarrow{C}=\hat{\jmath}-\overrightarrow{R}=\hat{\jmath}-(5\hat{\imath}-\hat{\jmath}+4\hat{k})=\hat{\jmath}-5\hat{\imath}+\hat{\jmath}-4\hat{k}=-5\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-4\hat{k}$.

Ejemplo 32. Si $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{C}$ son vectores tales que $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}=\overrightarrow{0}$ y $|\overrightarrow{A}|=1$, $|\overrightarrow{B}|=2$ y $|\overrightarrow{C}|=3$, demuestre que $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}+\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C}+\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{A}=-7$.
Solución:

$$(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C})\cdot(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C})=\overrightarrow{0}\cdot\overrightarrow{0}=0$$

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C})\cdot(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}) &= \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}+\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}+\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}+\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{B}+\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C}+\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{A}+\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{C}\\
A^2+B^2+C^2+2(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}+\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C}+\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{A}) &= 0
\end{aligned}$$

donde $A^2+B^2+C^2=1^2+2^2+3^2=14$, luego $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}+\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C}+\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{A}=-\frac{14}{2}=-7$.

Ejemplo 33. Si $|\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}|=|\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}|$, pruebe que los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ son perpendiculares.
Solución:

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}| &= |\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}|\\
|\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}|^2 &= |\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}|^2\\
(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B})\cdot(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}) &= (\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B})\cdot(\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B})\\
A^2+B^2+2\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} &= A^2+B^2-2\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}\\
\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} &= 0
\end{aligned}$$

Luego, $\overrightarrow{A} \perp \overrightarrow{B}$.

Ejemplo 34. Si $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ son vectores no colineales, es decir, no se cumple que $\overrightarrow{A} = \lambda\overrightarrow{B}$, para ningún un número real λ. Por otra parte si $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ son independientes entonces estos no son colineales y además si $\alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$, siendo α y β reales entonces $\alpha = \beta = 0$. Demuestre que valor de γ para el cual $\overrightarrow{u} = (\gamma - 2)\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{v} = (2 + 3\gamma)\overrightarrow{A} - 3\overrightarrow{B}$ son colineales es $\frac{2}{3}$.
Solución: Si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son colineales entonces

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} &= \lambda\overrightarrow{v} \\ (\gamma - 2)\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} &= \lambda((2 + 3\gamma)\overrightarrow{A} - 3\overrightarrow{B}) \\ (\gamma - 2 - 2\lambda - 3\lambda\gamma)\overrightarrow{A} + (1 + 3\lambda)\overrightarrow{B} &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ son independientes, luego $\gamma - 2 - 2\lambda - 3\lambda\gamma = 0$ y $1 + 3\lambda = 0$. De estas ecuaciones resulta $\lambda = -\frac{1}{3}$ y $\gamma = \frac{2}{3}$.

Ejemplo 35. Si $A^2 = |\overrightarrow{A}|^2 = 60$ y $\overrightarrow{A} \times (\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}) = \overrightarrow{0}$. Demuestre que el valor de $\overrightarrow{A} \cdot (-7\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = 12\sqrt{2}$.
Solución: Supongamos que $\overrightarrow{A} = x\hat{i} + y\hat{i} + z\hat{k}$ donde x, y y z son las componentes cartesianas de $\overrightarrow{A}$ entonces

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A} \times (\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}) &= \overrightarrow{0} \\ (\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}) \times (\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}) &= \overrightarrow{0} \\ (5y - 2z)\hat{i} + (z - 5x)\hat{j} + (2x - y) &= 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} \end{aligned}$$

lo anterior significa que $5y - 2z = 0$, $z - 5x = 0$ y $2x - y = 0$. De estas dos primeras ecuaciones resulta $y = \frac{2}{5}z$ y $x = \frac{z}{5}$. Reemplazando estos valores en $|\overrightarrow{A}|^2 = 60 = x^2 + y^2 + z^2$ resulta $(\frac{z}{5})^2 + (\frac{2}{5}z)^2 + z^2 = \frac{6}{5}z^2 = 60$, de donde $z = \pm 5\sqrt{2}$. Ultilizando las anteriores relaciones para x y y se encuentra que $x = \sqrt{2}$, $y = 2\sqrt{2}$ y $z = +5\sqrt{2}$. Así, $\overrightarrow{A} = \sqrt{2}\hat{i} + 2\sqrt{2}\hat{j} + 5\sqrt{2}\hat{k}$ y por consiguiente $\overrightarrow{A} \cdot (-7\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = (\sqrt{2}\hat{i} + 2\sqrt{2}\hat{j} + 5\sqrt{2}\hat{k}) \cdot (-7\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = -7\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 15\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

Ejemplo 36. Si $\overrightarrow{A} = \alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \hat{k}$, $A = |\overrightarrow{A}| = 2$, $\overrightarrow{B} = \hat{i} + \hat{j}$ y $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = 0$, demuestre que $\alpha = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ y $\beta = \sqrt{\frac{3}{2}}$.
Solución: $A = 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 1 = 4$. Por otra parte, $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = 0 \Leftrightarrow (\alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i} + \hat{j}) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0 \therefore \alpha = -\beta$. Al reemplazar este valor de α en la ecuación $\alpha^2 + \beta^2 + 1 = 4$ resulta $\beta = \sqrt{\frac{3}{2}}$ y por tanto $\alpha = -\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Ejemplo 37. Si $|\overrightarrow{A}| = 2$, $|\overrightarrow{B}| = 3$ y $|2\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}| = 5$ pruebe que $|2\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}| = 5$.
Solución:

$$\begin{aligned} |2\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}| &= 5 \\ |2\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}|^2 &= 5^2 \\ (2\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}) \cdot (2\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}) &= 25 \\ 4\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A} - 2\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} - 2\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B} = 4|\overrightarrow{A}|^2 - 4\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} + |\overrightarrow{B}|^2 &= 25 \\ 16 - 4\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} + 9 &= 25 \\ \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = 0. & \end{aligned}$$

De manera similar, si $x = |2\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}|$ entonces $x^2 = 4|\overrightarrow{A}|^2 + 4\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} + |\overrightarrow{B}|^2$. Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = 0$ resulta $x^2 = 4|\overrightarrow{A}|^2 + |\overrightarrow{B}|^2 = 4(2^2) + 3^2 = 25 \quad \therefore \quad x = 5$.

Ejemplo 38. Si $|\overrightarrow{A}| = 1$, $|\overrightarrow{B}| = 1$, $|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}| = \sqrt{2}$, demuestre que $|\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}| = 1$.
Solución:

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}| &= \sqrt{2} \\
|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}|^2 &= (\sqrt{2})^2 \\
(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})\cdot(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) &= 2 \\
\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A} + \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} + \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{B} &= 2 \\
\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} + \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{B} &= 2 \\
|\overrightarrow{A}|^2 + |\overrightarrow{B}|^2 + 2|\overrightarrow{A}||\overrightarrow{B}|\cos\theta &= 2 \\
(1)^2 + (1)^2 + 2(1)(1)\cos\theta &= 2 \\
\cos\theta = 0 \quad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Luego $|\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}| = AB\sin\theta = (1)(1)\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Ejemplo 39. Si $|\overrightarrow{A}| = 1$, $|\overrightarrow{B}| = 1$, $|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}| = \sqrt{3}$, $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B} + 3(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B})$ demuestre que $2|\overrightarrow{C}| = \sqrt{55}$.
Solución:

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}| &= \sqrt{3} \\
|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}|^2 &= (\sqrt{3})^2 \\
(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})\cdot(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) &= 3 \\
A^2 + B^2 + 2\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} &= 3 \\
1^2 + 1^2 + 2\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} &= 3 \quad \therefore \quad \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow AB\cos\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
x &= 2|\overrightarrow{C}| \\
x^2 &= 4|\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B} + 3(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B})|^2 \\
x^2 &= 4(\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B} + 3(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}))\cdot(\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B} + 3(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B})) \\
x^2 &= 4[A^2 + 4\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} + 6\overrightarrow{A}\cdot(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}) + 4B^2 + 12\overrightarrow{B}\cdot(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}) + 9|\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}|^2]
\end{aligned}$$

pero $\overrightarrow{A}\cdot(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{0}$ y $\overrightarrow{B}\cdot(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{0}$ y $|\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}| = |AB\sin\frac{\pi}{3}| = (1)(1)\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, luego

$$\begin{aligned}
x^2 &= 4[A^2 + 4\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} + 4B^2 + 9|\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}|^2] \\
x^2 &= 4[1^2 + 4(\frac{1}{2}) + 4(1^2) + 9\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2] = 4[1 + 2 + 4 + 9(\frac{3}{4})] = 55 \quad \therefore \quad x = \sqrt{55}
\end{aligned}$$

Ejemplo 40. Si $|\overrightarrow{A}| = |\overrightarrow{B}| = |\overrightarrow{C}| = 1$ y $\overrightarrow{A} - \sqrt{3}\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} = \overrightarrow{0}$, demuestre que el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{C}$ es $\frac{\pi}{3}$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
\vec{A} - \sqrt{3}\vec{B} + \vec{C} &= \vec{0} \\
\vec{A} + \vec{C} &= = \sqrt{3}\vec{B} \\
(\vec{A} + \vec{C}) \cdot (\vec{A} + \vec{C}) &= (\sqrt{3}\vec{B}) \cdot (\sqrt{3}\vec{B}) \\
A^2 + C^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{C} &= 3B^2 \\
(1)^2 + (1)^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{C} &= 3(1)^2 \\
\vec{A} \cdot \vec{C} &= \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (1)(1)\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 41. Si $\hat{u}_1$, $\hat{u}_2$ son vectores unitarios y además $|\hat{u}_1 + \hat{u}_2| = 1$, demuestre que $|\hat{u}_1 - \hat{u}_2| = \sqrt{3}$.
Solución:
$|\hat{u}_1 + \hat{u}_2|^2 = 1 \Leftrightarrow (\hat{u}_1 + \hat{u}_2) \cdot (\hat{u}_1 + \hat{u}_2) = 1 + 2\hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 + 1 = 1 \therefore \hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 = -\frac{1}{2}$. Ahora, $|\hat{u}_1 - \hat{u}_2|^2 = (\hat{u}_1 - \hat{u}_2) \cdot (\hat{u}_1 - \hat{u}_2) = 1 - 2\hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 + 1$. Teniendo en cuenta el anterior resultado para $\hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2$ se tiene que $|\hat{u}_1 - \hat{u}_2|^2 = 1 - 2(-\frac{1}{2}) + 1 = 3 \therefore |\hat{u}_1 - \hat{u}_2| = \sqrt{3}$.

Ejemplo 42. Encuentre la suma de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que se muestran en la figura 2.42 usando el producto escalar

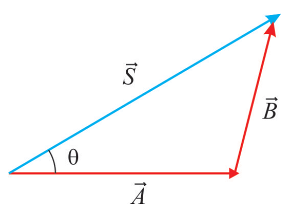


Figura 2.42

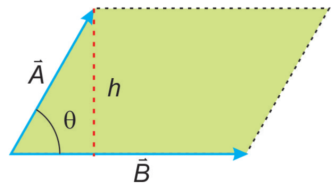
Solución:

$$
\begin{aligned}
|\vec{S}| &= |\vec{A} + \vec{B}| \\
|\vec{S}|^2 &= |\vec{A} + \vec{B}|^2 \\
&= (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) \\
&= \vec{A} \cdot \vec{A} + 2\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{B} \\
&= A^2 + B^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B} \quad \therefore \quad S = \sqrt{A^2 + B^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B}}
\end{aligned}
$$

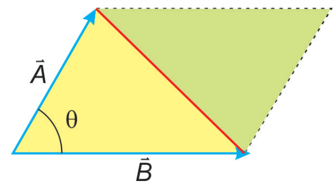
Ejemplo 43. Demuestre que si dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ forman los lados adyacentes de un paralelogramo entonces $|\vec{A} \times \vec{B}|$ = área del paralelogramo.
Solución: Consideremos la figura 2.43a, la altura h del paralelogramo es $h = A\sin\theta$ y su área $\mathsf{A} = Bh = BA\sin\theta = |\vec{A} \times \vec{B}|$

Ejemplo 44. Demuestre que si dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ forman dos de los lados de un triángulo, entonces el área del triángulo es $\mathsf{A} = \frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$.
Solución: El resultado se desprende de manera inmediata del Ejemplo 43.

Ejemplo 45. Calcule el área del triángulo determinado por los vectores $\vec{A} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ y $\vec{B} = 4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 6\hat{k}$.



(a)



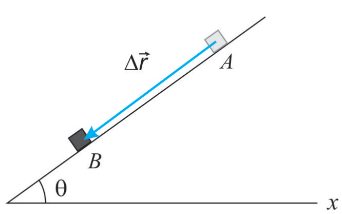
(b)

Figura 2.43

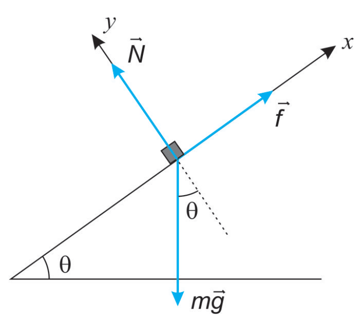
Solución: El área del triángulo viene dada por:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}| = \frac{1}{2}|[A_yB_z - A_zB_y]\hat{\imath} + [A_zB_x - A_xB_z]\hat{\jmath} + [A_xB_y - A_yB_z]\hat{k}| \\ &= \frac{1}{2}|\,[(2)(6) - (5)(3)]\,\hat{\imath} + [(3)(4) - (6)(1)]\,\hat{\jmath} + [(1)(5) - (4)(2)]\,\hat{k}| \\ &= \frac{1}{2}| - 3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 3\hat{k}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{54} = \frac{3}{2}\sqrt{6}\,\text{unidades de área} \end{aligned}$$

Ejemplo 46. El trabajo W realizado por una fuerza $\overrightarrow{F}$ constante sobre un cuerpo se define como el producto escalar entre la fuerza $\overrightarrow{F}$ y el desplazamiento $\Delta\overrightarrow{r}$ del cuerpo, es decir, $W_F = \overrightarrow{F} \cdot \Delta\overrightarrow{r}$, en el SI el trabajo se expresa en julios. Consideremos el caso de un cuerpo de masa m que desciende por un plano inclinado tal como se muestra en la figura 2.44a, en esta se muestra el vector desplazamiento del cuerpo cuando este va del punto A al punto B. Sobre el cuerpo actúan tres fuerzas: el peso $\overrightarrow{W} = m\overrightarrow{g}$, la fuerza normal $\overrightarrow{N}$ y la fuerza de rozamiento $\overrightarrow{f}$ entre el cuerpo y la superficie del plano, ver figura 2.44b. La relación entre f y N es dada por $f = \mu N = \mu mg\cos\theta$. Calcule el trabajo realizado por cada una de las fuerzas cuando el cuerpo se desplaza del punto A al punto B.



(a)



(b)

Figura 2.44

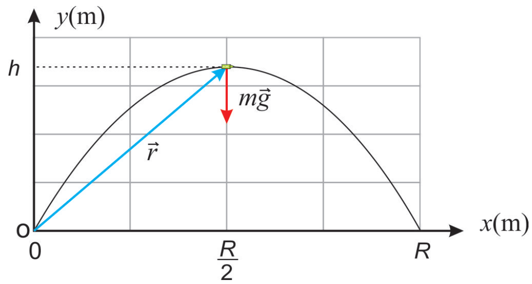
Solución:

a) El trabajo realizado por la fuerza normal es $W_N = \overrightarrow{N} \cdot \Delta\overrightarrow{r} = N\Delta r\cos 90^\circ = 0$

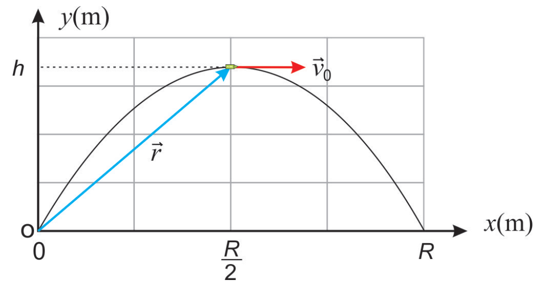
b) El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es $W_f = \overrightarrow{f} \cdot \Delta\overrightarrow{r} = f\Delta r\cos 180^\circ = \mu mg\cos\theta\Delta r(-1) = -mg\Delta r\cos\theta$

c) El trabajo realizado por el peso es $W_{mg} = m\overrightarrow{g} \cdot \Delta\overrightarrow{r} = mg\Delta r\cos(90^\circ - \theta) = mg\Delta r\sin\theta = mgh$, siendo h la distancia que desciende el cuerpo. El término mgh se denomina energía potencial gravitacional y se mide en julios.

Ejemplo 47. El momento de fuerza o torque $\overrightarrow{\tau}$ con respecto a un punto O debido a una fuerza $\overrightarrow{F}$, se define como $\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$, donde $\overrightarrow{r}$ es el vector que va desde el punto O hasta el punto donde se aplica la fuerza. Demuestre que el momento de fuerza del peso $m\overrightarrow{g}$ que actúa sobre un proyectil en el punto de máxima altura de su trayectoria parabólica es dado por $\tau = -\frac{mgR}{2}\hat{k}$, ver figura 2.45a. El vector posición del proyectil en su punto de máxima altura es $\overrightarrow{r} = \frac{R}{2}\hat{\imath} + h\hat{\jmath}$, donde R es al alcance horizontal máximo y h es la altura máxima alcanzada.



(a)



(b)

Figura 2.45

Solución: Por definición $\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$, donde $\overrightarrow{r} = \frac{R}{2}\hat{\imath} + h\hat{\jmath}$ y $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{g} = mg\hat{\jmath}$. Así,

$$\overrightarrow{\tau} = (\frac{R}{2}\hat{\imath} + h\hat{\jmath}) \times (-mg\hat{\jmath}) = -\frac{R}{2}mg(\hat{\imath} \times \hat{\jmath}) + mgh(\hat{\jmath} \times \hat{\jmath}) = -\frac{mgR}{2}\hat{k}$$

donde hemos utilizado $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$ y $\hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \overrightarrow{0}$.

Ejemplo 48. La cantidad de momiviento angular $\overrightarrow{L}$ con respecto a un punto O de una partícula de masa m y que se mueve con velocidad $\overrightarrow{v}$ se define como $\overrightarrow{\mathrm{L}} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p}$, donde $\overrightarrow{r}$ es el vector que va desde el punto O hasta el punto donde se encuentra la partícula y $\overrightarrow{p}$ es la cantidad de movimiento lineal $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$. Demuestre que la cantidad de movimiento angular medido con respecto al origen de coordenadas, para un proyectil en el punto de máxima altura de su trayectoria parabólica es dado por $\overrightarrow{L} = -mhv_0\hat{k}$, ver figura 2.45b. El vector posición del proyectil en su punto de máxima altura es $\overrightarrow{r} = \frac{R}{2}\hat{\imath} + h\hat{\jmath}$, donde R es alcance horizontal máximo y h es la altura máxima alcanzada por el proyectil.

Solución: Por definición $\overrightarrow{\mathrm{L}} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p}$, donde $\overrightarrow{r} = \frac{R}{2}\hat{\imath} + h\hat{\jmath}$ y $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v_0} = mv_0\hat{\imath}$. Así,

$$\overrightarrow{L} = (\frac{R}{2}\hat{\imath} + h\hat{\jmath}) \times (mv_0\hat{\imath}) = \frac{R}{2}mv_0(\hat{\imath} \times \hat{\imath}) + mv_0h(\hat{\jmath} \times \hat{\imath}) = -mhv_0\hat{k}$$

donde hemos utilizado $\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}$ y $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \overrightarrow{0}$.

2.15 PROBLEMAS PROPUESTOS

Problema 1. Si $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$, además $\overrightarrow{C} \perp \overrightarrow{A}$ y $|\overrightarrow{A}| = |\overrightarrow{C}|$. Demuestre que el ángulo entre $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ es $\frac{3\pi}{4}$, ver figura 2.46.

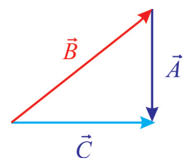


Figura 2.46

Problema 2. Si cada lado de la cuadrícula (ver figura 2.47) es de 1 cm, la magnitud del vector resultante (vector suma) en centímetros es:

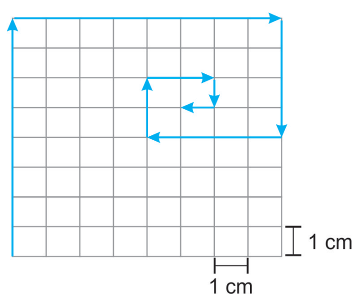


Figura 2.47

Problema 3. Cuatro vectores se encuentran sobre un hexágono regular como indica la figura 2.48. El hexágono está inscrito en una circunferencia de radio $R = 5\,\text{cm}$. Halle la magnitud del vector resultante (vector suma). (El problema se soluciona fácilmente si se aplica el método del polígono).

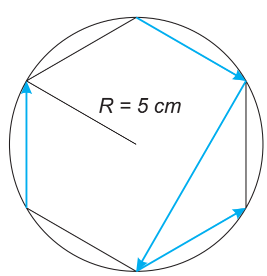


Figura 2.48

Problema 4. Considere los vectores de la figura 2.49. Escriba expresiones para cada uno de los vectores a) $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{D}$ en términos de $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{C}$, b) $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ en términos de $\overrightarrow{C}$ y $\overrightarrow{D}$. c) Demuestre que los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ son perpendiculares, es decir, $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = 0$.

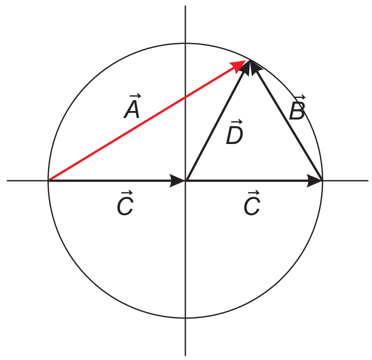


Figura 2.49: Círculo de radio R

Respuesta: a) $\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{C} + \overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}$ y b) $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{C} + \overrightarrow{D}$ y $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{C}$, c) $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = (\overrightarrow{C} + \overrightarrow{D}) \cdot (\overrightarrow{D} - \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{D} - \overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{C} + \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{D} - \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{C} = R^2 - R^2 = 0$, pues $\overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{D} = \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{C}$ y $\overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{D} = \overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{C} = R^2$.

Problema 5. El triángulo de la figura 2.50 está formado por los vectores $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{C}$. Si el vector $\overrightarrow{D}$ se traza de modo que su comienzo se encuentra a una distancia $\frac{3}{4}|\overrightarrow{B}|$ del comienzo de $\overrightarrow{B}$ y su final a $\frac{1}{4}|\overrightarrow{A}|$ del comienzo de $\overrightarrow{A}$, demuestre que $\overrightarrow{D} = \frac{3}{4}\overrightarrow{C}$.

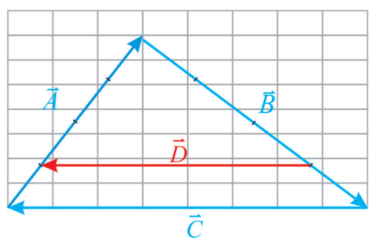


Figura 2.50

Respuesta: Del método del polígono se observa que $\frac{3}{4}\overrightarrow{A} + \frac{3}{4}\overrightarrow{D} = \overrightarrow{0}$ y $\overrightarrow{D} = \frac{1}{4}\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} + \frac{1}{4}\overrightarrow{A}$. De estas ecuaciones al despejar $\overrightarrow{D}$ en cada una de ellas e igualarlos se encuentra $\overrightarrow{C} = -(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})$. Al reeemplazar el valor de $\overrightarrow{C}$ en la segunda ecuación se tiene finalmente $\overrightarrow{D} = \frac{3}{4}\overrightarrow{C}$.

Problema 6. La figura 2.51 muestra los vectores velocidad $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$, y $\overrightarrow{v}_3$ de una partícula puntual que se mueve a lo largo de una circunferencia con una rapidez constante de 6 m/s en tres posiciones diferentes. Demuestre que a) $|\overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v}_1| = |\overrightarrow{v}_3 - \overrightarrow{v}_2| = \sqrt{72}\,\mathrm{m/s}$, b) $(\overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v}_1) \cdot (\overrightarrow{v}_3 - \overrightarrow{v}_2) = 0$.

Problema 7. Un insecto vuela del punto A al punto B como indica la figura 2.52. La magnitud del desplazamiento realizado por el insecto es: (*Recuerde*: el vector desplazamiento es un vector que va desde el punto inicial A hasta el punto final B, no importa que trayectoria se siga al ir de A a B).

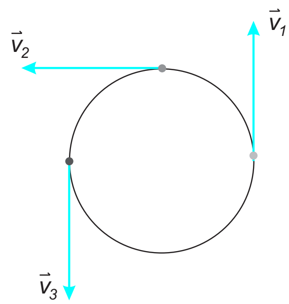


Figura 2.51

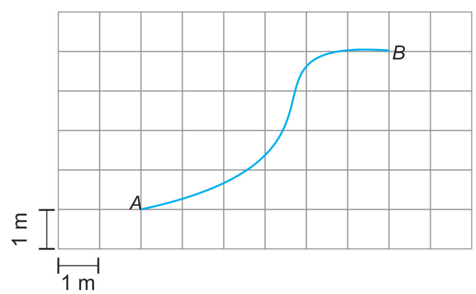


Figura 2.52

a) 16 m b) 36 m c) $\sqrt{52}$ m d) $\sqrt{34}$ m e) 24 m

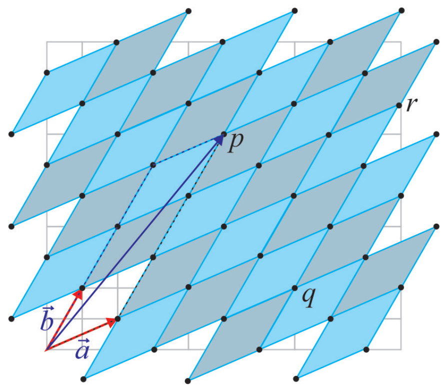
Problema 8. Los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ de la figura 2.53a se denominan vectores primitivos, pues cualquier punto de la red que generan se localiza dando un vector que se escribe como combinación lineal de ellos o simplemente dando sus coordenadas no cartesianas las cuales son números enteros. Los vectores primitivos son importantes en cristalografía pues permiten identificar las posiciones de átomos en una determinada red. Dependiedo de la escogencia de los vectores primitivos se pueden generar diferentes estructuras cristalinas. Así, por ejemplo el punto p señalado en la figura queda especificado como $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ o simplemente como(1,3). Demuestre que los vectores que localizan los puntos q y r son $\overrightarrow{q} = 3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{r} = 4\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$ o que sus coordenadas son (3,-1) y (4,2). De igual manera demuestre que las coordenadas de los átomos p y q en la estructura cristalina de la figura 2.53b son (3,1) y (2,2) respectivamente

Problema 9. Una fuerza de magnitud 100 N forma un ángulo θ con el eje x tal como muestra la figura 2.54. La fuerza tiene una componente y de valor 30 N. Demueste que la componente x de la fuerza es $F_x = 95{,}4\,\mathrm{N}$ y que $\theta = 17{,}5^\circ$.

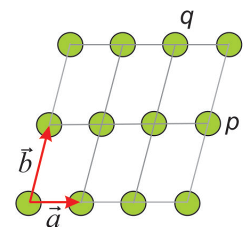
Problema 10. Use el método del polígono para demostrar que la resultante de los cinco vectores que se muestran en la figura 2.55 tiene una magnitud igual a $\sqrt{10}$ cm y forma un ángulo igual a 18,43° con el eje $+x$.

Problema 11. Verifique que el vector $\overrightarrow{SR}$ de la figura 2.56) en términos de $\vec{r}$, $\vec{s}$ y $\vec{t}$ es $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OR} = -\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OR} = -\vec{s} + \vec{r} = \vec{r} - \vec{s}$

Problema 12. Basándose en la figura 2.57, la única ecuación vectorial correcta es:



(a)



(b)

Figura 2.53

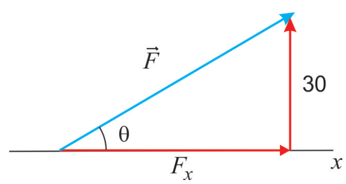


Figura 2.54

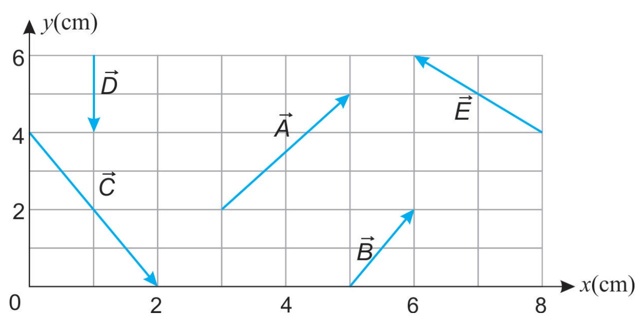


Figura 2.55

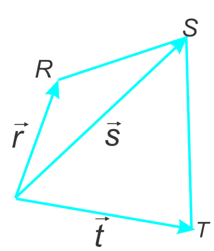


Figura 2.56

a) $\vec{s} = \vec{u} + \vec{p} - \vec{q} + \vec{r} + \vec{t}$

b) $\vec{u} + \vec{t} + \vec{q} + \vec{r} = \vec{p} + \vec{s}$

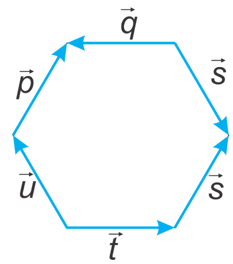


Figura 2.57

c) $\vec{t}+\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}=\vec{u}+\vec{s}$

d) $\vec{u}+\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}=\vec{t}+\vec{s}$

Respuesta: Teniendo en cuenta el método poligonal para la suma de vectores, se deduce que la opción correcta es d)

Problema 13. Basándose en la figura 2.58, la única ecuación vectorial correcta es:

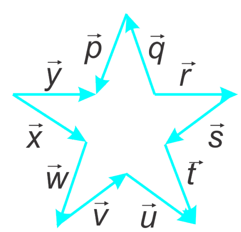


Figura 2.58

a) $\vec{y}+\vec{r}+\vec{s}+\vec{t}=\vec{p}+\vec{q}+\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}+\vec{x}$

b) $\vec{x}+\vec{r}+\vec{s}+\vec{p}=\vec{t}+\vec{q}+\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}+\vec{y}$

c) $\vec{p}+\vec{q}+\vec{s}+\vec{t}=\vec{y}+\vec{r}+\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}+\vec{x}$

d) $\vec{y}+\vec{w}+\vec{p}+\vec{q}=\vec{s}+\vec{t}+\vec{u}+\vec{v}+\vec{r}+\vec{x}$

Respuesta: Teniendo en cuenta el método poligonal para la suma de vectores, se deduce que la opción correcta es a)

Problema 14. Una partícula que se lanza cerca de la superficie terrestre formando su velocidad inicial $\vec{v}_o$ un ángulo con el horizonte describe una trayectoria parabólica como indica la figura 2.59. El vector velocidad de una partícula sin importar el tipo de movimiento que realice es siempre tangente a su trayectoria.

a) Compruebe que las componentes en x de la velocidad de la partícula en los puntos A y B son iguales.

b) Compruebe que las componentes en y de la velocidad de la partícula en los puntos A y B son opuestas.

c) Escriba las componentes en x y y de la velocidad inicial v_o de la partícula.

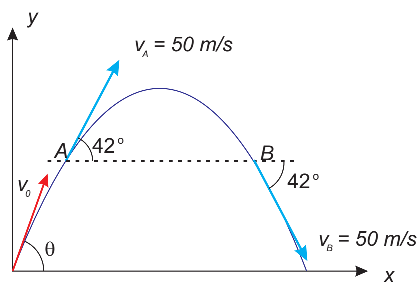


Figura 2.59

Problema 15. Tres fuerzas que actúan sobre una partícula vienen dadas por $\overrightarrow{F_1} = 20\hat{\imath} - 36\hat{\jmath} + 73\hat{k}\,\mathrm{N}$, $\overrightarrow{F_2} = -17\hat{\imath} + 21\hat{\jmath} - 46\hat{k}\,\mathrm{N}$ y $\overrightarrow{F_3} = -12\hat{k}\,\mathrm{N}$, demuestre que la magnitud de la fuerza neta sobre la partícula es $F = 21{,}4\,\mathrm{N}$.

Problema 16. El momentum $\overrightarrow{p}$ de una partícula se define como el producto de su masa m por velocidad $\overrightarrow{v}$. Al ser la velocidad un vector entonces $\overrightarrow{p}$ también lo es. (Fíjese que $\overrightarrow{p}$ es el producto del vector $\overrightarrow{v}$ por el escalar m; por tanto $\overrightarrow{p}$ y $\overrightarrow{v}$ tienen la misma dirección). Así, $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$.

a) Halle las dimensiones de $\overrightarrow{p}$ y sus unidades en el sistema internacional.

b) Halle la componente del momentum perpendicular a la pared de un artefacto de masa $m = 10\,\mathrm{kg}$ que se mueve con rapidez de $100\,\mathrm{km/h}$ como indica la figura 2.60.

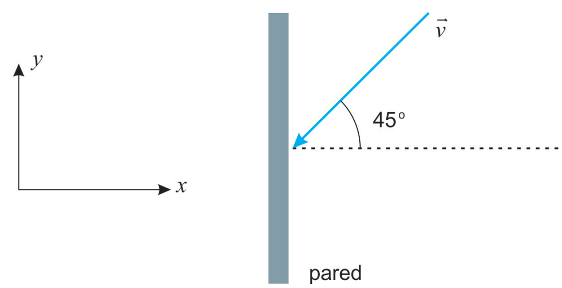


Figura 2.60

Problema 17. Para solucionar este problema, ver antes el problema 2. Un automóvil de 1000 kg avanza a 120 km/h formando un ángulo de 30°con el eje x positivo. Demuestre que la componente x del momentum del automóvil es: $p_x = 2{,}9 \times 10^4\,\mathrm{kgm/s}$.

Problema 18. Para solucionar este problema, ver antes problema 2. Una pelota de masa $m = 0,5\,\mathrm{kg}$ choca contra un piso con rapidez de $30\,\mathrm{m/s}$, su momentum antes del choque es $\overrightarrow{p_1}$. (Ver figura 2.61). El choque es elástico, es decir la magnitud de la velocidad es la misma después del choque. El momentum después del choque es $\overrightarrow{p_2}$. La fuerza que el piso ejerce sobre la pelota es proporcional al cambio del momentum $\Delta\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}$. Halle la magnitud y dirección de $\Delta\overrightarrow{p}$

Problema 19. Para solucionar este problema, ver antes problema 2. Una pelota de masa 10 kg choca contra una pared como se indica en la figura 2.62. Antes del choque, la magnitud de la velocidad (rapidez) de la pelota es $v_1 = 20\,\mathrm{m/s}$. Después del choque la rapidez de la pelota es $v_2 = 20\,\mathrm{m/s}$. La fuerza media que ejerce la pared sobre la pelota es proporcional al cambio del momentum $\Delta\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}$. Halle:

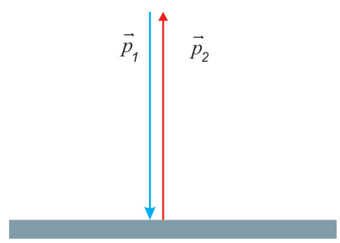


Figura 2.61

a) Componente x de la velocidad y el momentum de la pelota antes del choque.
b) Componente x de la velocidad y el momentum de la pelota después del choque.
c) Componente y de la velocidad y el momentum de la pelota antes del choque.
d) Componente y de la velocidad y el momentum de la pelota después del choque.
e) Magnitud y dirección de $\Delta\overrightarrow{p}$.

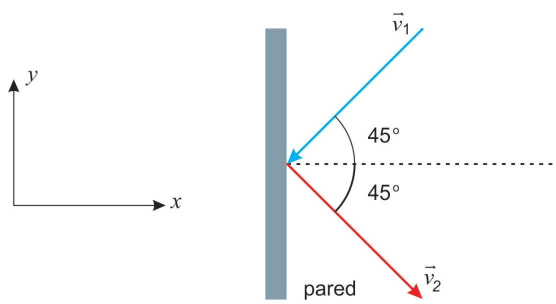


Figura 2.62

a) 30 b) 8 c) $7\sqrt{3}$ d) $5\sqrt{2}$ e) $11,5$

Problema 20. Cuatro fuerzas $\overrightarrow{F_1}$, F_2, F_3 y F_4 actúan sobre un nudo como indica la figura 2.63. Halle magnitud F de la fuerza resultante (vector suma) y el ángulo θ que forma la resultante con el eje x.

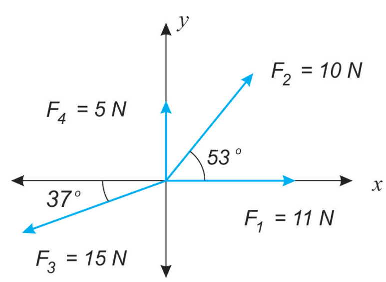


Figura 2.63

Problema 21. Las magnitudes de los vectores mostrados en la figura 2.64 son $F_1 = F_2 = F_6 = 10\,\mathrm{N}$, $F_3 = F_4 = F_7 = 6\,\mathrm{N}$, $F_8 = 3\,\mathrm{N}$ y $F_5 = 8\,\mathrm{N}$; complete los espacios de la tabla 2.4, donde F_R

representa la magnitud de $\overrightarrow{F}_R = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{F}_3 + \overrightarrow{F}_4 + \overrightarrow{F}_5 + \overrightarrow{F}_6 + \overrightarrow{F}_7 + \overrightarrow{F}_8$ y θ el ángulo que forma $\overrightarrow{F}_R$ con el eje x.

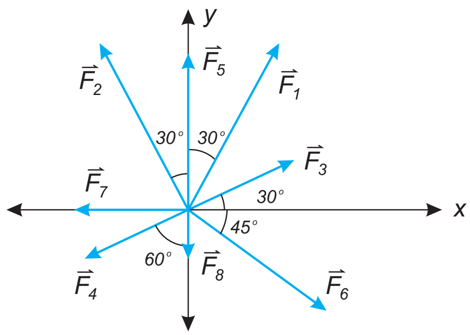


Figura 2.64: Componentes cartesianas de vectores

Fuerzas	$\overrightarrow{F_1}$	$\overrightarrow{F_2}$	$\overrightarrow{F_3}$	$\overrightarrow{F_4}$	$\overrightarrow{F_5}$	$\overrightarrow{F_6}$	$\overrightarrow{F_7}$	$\overrightarrow{F_8}$	**Sumatoria**
F_x									
F_y									

F_R	
θ	

tabla 2.4: Componentes cartesianas de vectores.

Problema 22. La figura 2.65 muestra una caja de dimensiones $4 \times 5 \times 3$ unidades. a) Dibuje los vectores $\overrightarrow{A} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}$ y $\overrightarrow{B} = 5\hat{j} + 3\hat{k}$, b) Determine las magnitudes de $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$, c) calcule el producto $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$, c) calcule el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$, d) encuentre un vector $\overrightarrow{C}$ tal que $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} = \overrightarrow{0}$, e) construya un vector unitario paralelo a $\overrightarrow{C}$, f) encuentre un vector perpendicular a $\overrightarrow{B}$, cuantos más se pueden construir?

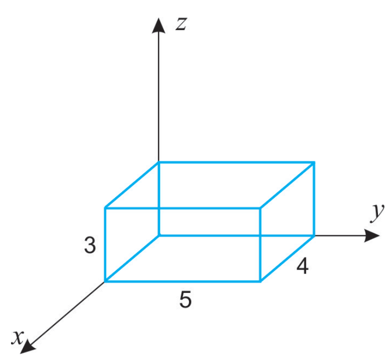


Figura 2.65: Caja de dimensiones $3 \times 4 \times 2$ unidades

Problema 23. Una partícula se encuentra en reposo sobre un plano inclinado como indica la figura 2.66. Dado que la partícula se encuentra en equilibrio la suma de las fuerzas que actúan sobre ésta es cero. La fuerza $\overrightarrow{F}$ es la fuerza de rozamiento entre la partícula y el plano inclinado, $\overrightarrow{N}$ es la fuerza de reacción que ejerce el plano sobre la partícula; y $\overrightarrow{W}$ es la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre ésta y está dirigida hacia abajo. Si la magnitud de $\overrightarrow{W}$ es 10 N, halle las magnitudes de $\overrightarrow{N}$ y $\overrightarrow{F}$.

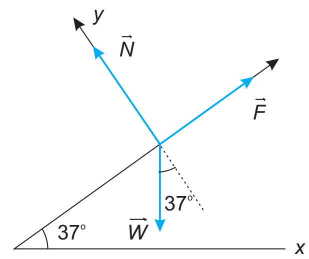


Figura 2.66

Problema 24. Un motociclista avanza a 120 km/h formando un ángulo de 30° con el eje x positivo. Demuestre que el vector velocidad del motociclista es: $\overrightarrow{v} = 28{,}86\hat{\imath} + 16{,}66\hat{\jmath}$ m/s.

Problema 25. Un vector tiene una componente a lo largo del eje x igual a 25 unidades y a lo largo del eje y igual a 60 unidades. Encuentre la magnitud y dirección del vector.

Respuesta: Magnitud=65 unidades y el ángulo θ que forma con el eje x satisface $\tan\theta = \frac{60}{25} = 2{,}4$

Problema 26. Las magnitudes de los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ mostrados en la figura 2.67 son iguales a 10; y se define $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$. a) Dibuje el vector $\overrightarrow{R}$, b) encuentre las componentes cartesianas de los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$, c) encuentre la magnitud de $\overrightarrow{R}$, d) determine un vector de magnitud 1 y paralelo a $\overrightarrow{R}$ y e)encuentre el ángulo que forma $\overrightarrow{R}$ con el eje x

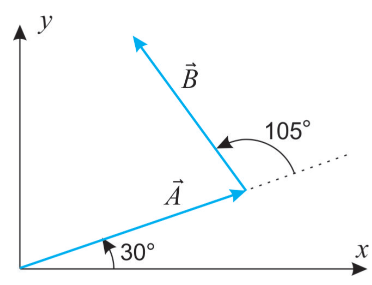


Figura 2.67

Problema 27. Dados los vectores $\overrightarrow{A} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$ y $\overrightarrow{B} = -4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$, a) use el producto punto entre vectores para demostrar que $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ son perpendiculares. Si $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$, muestre que C y D son también perpendiculares.

Problema 28. Si $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}$ es perpendicular a $\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V}$ demuestre que $|\overrightarrow{U}| = |\overrightarrow{V}|$ o $U = V$.

Problema 29. La figura 2.68 muestra un vector $\overrightarrow{A}$ sobre la superficie de un cono cirular recto. El origen de A y el ápice del cono se encuentran en el origen de coordenadas. Determine: a) la magnitud de $\overrightarrow{A}$, b) la componente z de $\overrightarrow{A}$, c) la componente de $\overrightarrow{A}$ que yace sobre la base circular del cono.

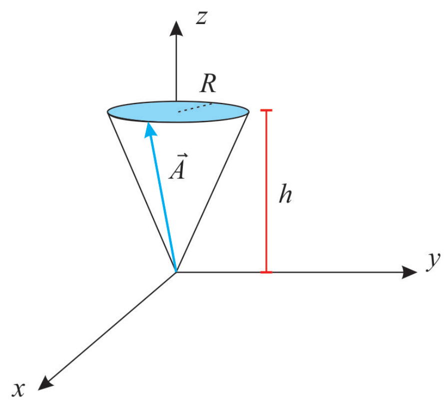


Figura 2.68: Cono de altura h y radio R, con eje principal a lo largo del eje z

Problema 30. Una partícula puntual de masa m describe una trayectoria circular de radio r como indica la figura 2.69. En el punto p se muestran los vectores velocidad $\overrightarrow{v}$ y aceleración $\overrightarrow{a}$, los cuales tienen magnitudes de $10\,\mathrm{m/s}$ y $12\,\mathrm{m/s^2}$ respectivamente y forman un ángulo $\theta = 80°$ entre sí. En general, la dirección del vector velocidad de la partícula es siempre tangente a su trayectoria. Determine la componente de $\overrightarrow{a}$ tangente a la trayectoria, a igual que la componente radial en el punto p

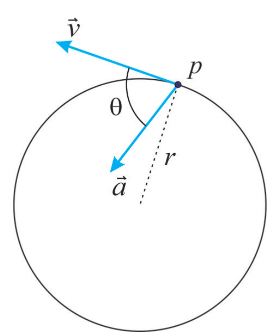


Figura 2.69: Partícula puntual acelerada

Problema 31. Cuando un cuerpo se lanza al aire cerca de la superficie terrestre con velocidad $\overrightarrow{v}_0$ y formando un ángulo θ, este describe una trayectoria parabólica como indica la figura 2.70. Una característica de este movimiento, es que la componente horizontal de la velocidad del cuerpo se mantiene constante en el tiempo durante todo su movimiento en el aire, es decir, $v_0 \cos\theta =$ constante. Si $|\overrightarrow{v}_0| = 30\,\mathrm{m/s}$ y $\theta = 30°$, encuentre: a) la magnitud de la velocidad en su punto más alto de la trayectoria (punto a, donde la dirección de la velocidad es horizontal y b) la magnitud del vector velocidad en el punto b, si se sabe que $\alpha = 15°$.

Problema 32. Se tienen dos sistemas de coordenadas cartesianos, xy y XY, éste último rotado un ángulo θ como indica la figura 2.71. También se muestran dos vectores $\overrightarrow{g}$ y $\overrightarrow{v}$ con direcciones vertical y horizontal con respecto al sistema xy respectivamente. Demuestre que:

a) Las componentes cartesianas de $\overrightarrow{g}$ y $\overrightarrow{v}$ con respecto el sistema de coordenadas xy son $g_x = 0$, $g_y = -g$ y $v_x = v$, $v_y = 0$

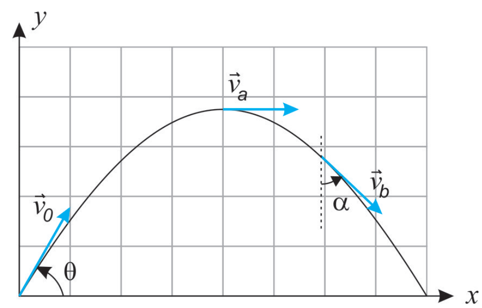


Figura 2.70: Trayectoria parabólica seguida por el cuerpo

b) Las componentes cartesianas de $\overrightarrow{g}$ y $\overrightarrow{v}$ con respecto el sistema de coordenadas XY son $g_X = -g\sin\theta$, $g_Y = -g\cos\theta$ y $v_X = v\cos\theta$, $v_Y = -v\sin\theta$

c) Demuestre que la magnitud de los vectores $\overrightarrow{g}$ y $\overrightarrow{v}$ es la misma en los dos sistemas de coordenadas. (Identidad: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$)

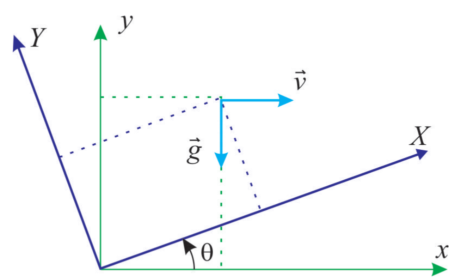


Figura 2.71: Sistemas de coordenadas XY rotado un ángulo θ con respecto al sistema xy

Problema 33. La figura 2.72 muestra dos partículas puntuales con masas m_1 y m_2, posiciones con coordenadas cartesianas (2,4) y (6,2) y vectores posición $\overrightarrow{r_1} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$, $\overrightarrow{r_2} = 6\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ respectivamente. El centro de masa del sistema compuesto por las dos partículas se define como $\overrightarrow{r}_{\text{cm}} = \frac{m_1\overrightarrow{r_1} + m_2\overrightarrow{r_2}}{m_1+m_2}$. Si $m_1 = 1\,\text{kg}$ y $m_2 = 3\,\text{kg}$,

a) Demuestre que $\overrightarrow{r}_{\text{cm}} = 5\,\overrightarrow{i} + \frac{5}{2}\overrightarrow{j}$.

b) Si $\overrightarrow{d_1} = \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r}_{\text{cm}}$ y $\overrightarrow{d_2} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r}_{\text{cm}}$, demuestre que $\overrightarrow{d_1} = -\frac{m_2(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1})}{m_1+m_2} = -\frac{3}{2}(2\hat{\imath} - \hat{\jmath})$ y $\overrightarrow{d_2} = \frac{m_1(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1})}{m_1+m_2} = \frac{1}{2}(2\hat{\imath} - \hat{\jmath})$, es decir estos vectores tienen direcciones opuestas, y yacen a lo largo de la línea que pasa por los puntos donde se encuentran las masas. De lo anterior, justifique el diagrama vectorial de la figura 2.72b. ¿Es correcto afirmar que la masa de 1 kg se encuentra a una distancia 3 veces mayor del centro de masa que la masa de 3 kg?

Problema 34. Los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ de la figura 2.73 tienen magnitudes iguales a 10 y 12 m respectivamente. Si $\theta = 30^\circ$ determine la magnitud de los vectores: a) $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ y b) $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$.

Problema 35. Dos fuerzas $\overrightarrow{F}_1$ y $\overrightarrow{F}_2$ cuyas magnitudes están en la proporción $3:5$ al sumarlas la magnitud de su resultante es $28\,\text{N}$, si el ángulo entre las fuerzas es 60°, demuestre que $F_1 = 12\,\text{N}$ y $F_2 = 20\,\text{N}$.

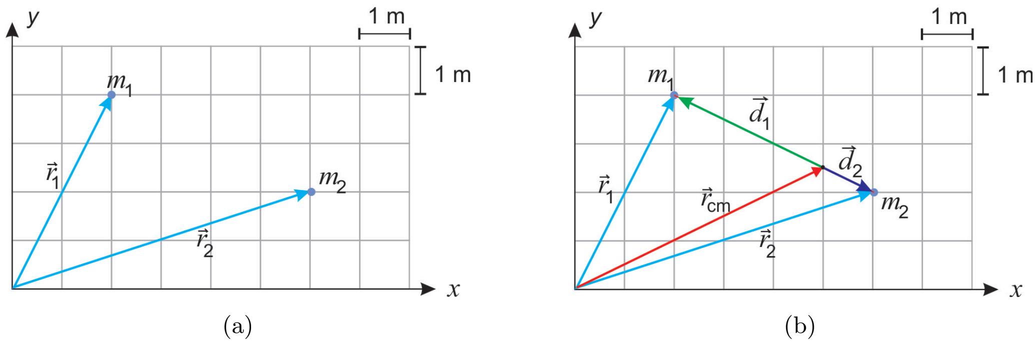


Figura 2.72

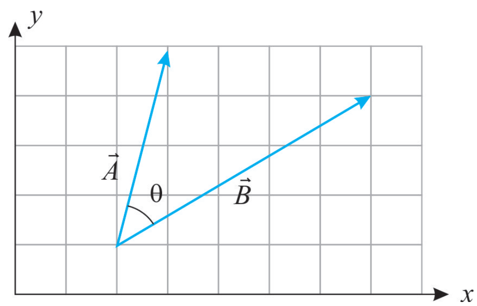


Figura 2.73

Problema 36. Demuestre que el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{A} = 5\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-3\hat{\jmath}$ y $\overrightarrow{B} = -10\hat{\imath}-4\hat{\jmath}+6\hat{\jmath}$ es 180°.

Problema 37. Sobre una partícula actúan tres fuerzas como indica la figura 2.74. La suma de las tres fuerzas es cero, lo que significa que la partícula se encuentra en equilibrio. a) Justifique el por qué los tres vectores forman un triángulo rectángulo como indica la figura adjunta. b) Demuestre que $T\cos\theta = W$ y $T\sin\theta = F$ y por tanto $F = W\tan\theta$.

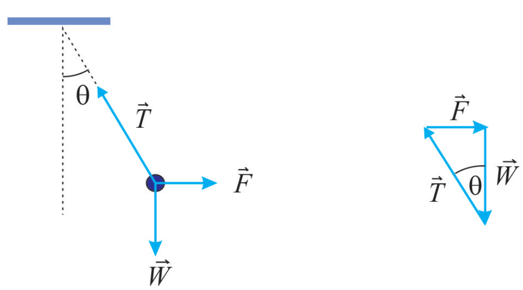


Figura 2.74: Partícula en equilibrio

Problema 38. Dados los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ de la figura 2.75, encuentre la proyección de: a) $\overrightarrow{A}$ sobre $\overrightarrow{B}$ y b) $\overrightarrow{B}$ sobre $\overrightarrow{A}$

Problema 39. Demuestre que el vector unitario $\hat{a} = \frac{5\hat{\imath}+\hat{\jmath}-2\hat{k}}{\sqrt{30}}$ es paralelo al vector $\overrightarrow{A} = 5\hat{\imath}+\hat{\jmath}-2\hat{k}$.

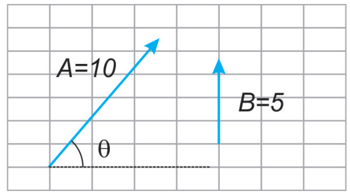


Figura 2.75

Problema 40. La figura 2.76 muestra un paralelepípedo de lados $a = 1$, $b = 2$ y $c = 1$. Si A y B son puntos, demuestre que el vector unitario $\hat{u}$ que apunta de A a B es $\hat{u} = \frac{-2\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{5}}$.

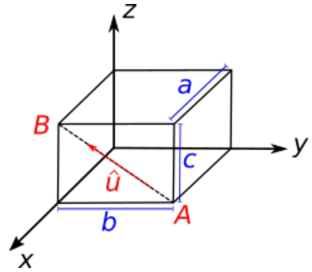


Figura 2.76

Problema 41. La figura 2.77 muestra una estructura formada por vigas delgadas de madera de dimensiones $a \times b \times c$ unidades. Los puntos A y B se encuentran en los puntos medios de las respectivas vigas. Una fuerza de magnitud 100 N se aplica a la estructura de modo que va dirigida del punto A al punto B. Encuentre la representación vectorial de esta fuerza.

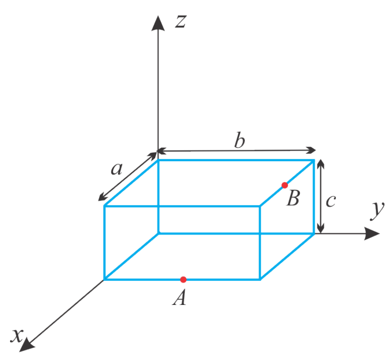


Figura 2.77: Caja de dimensiones $a \times b \times c$ unidades

Respuesta: La fuerza viene dada por $\vec{F} = 100\,\hat{u}\,\mathrm{N}$, donde $\hat{u}$ es un vector unitario que apunta desde el punto A hasta el punto B, ver figura **??**. Calculemos $\hat{u}$. Un vector que va del punto A al punto B es dado por $\vec{R} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$, donde $\vec{r}_A = a\hat{i} + \frac{b}{2}\hat{j}$ y $\vec{r}_B = \frac{a}{2}\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$. Así, $\vec{R} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = -\frac{a}{2}\hat{i} + \frac{b}{2}\hat{j} + c\hat{k}$. El vector unitario es: $\hat{u} = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{-\frac{a}{2}\hat{i}+\frac{b}{2}\hat{j}+c\hat{k}}{(-\frac{a}{2})^2+(-\frac{b}{2})^2+c^2}$. Luego, $\vec{F} = 100\,\frac{-\frac{a}{2}\hat{i}+\frac{b}{2}\hat{j}+c\hat{k}}{\frac{a^2}{4}+(\frac{b^2}{4})+c^2}\,\mathrm{N}$

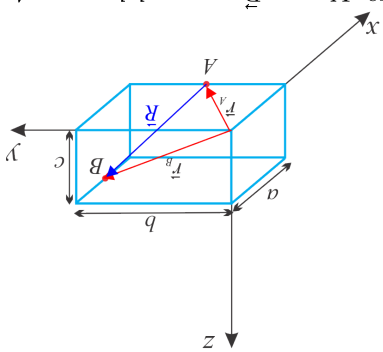


Figura 2.78: Vector $\vec{R}$ que va del punto A al punto B

Problema 42. Si $\overrightarrow{A} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 7\hat{k}$, $\overrightarrow{B} = \hat{\imath} + 2\hat{k}$ y $\overrightarrow{C} = \hat{\jmath} - \hat{k}$, demuestre que $\overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) = 0$

Problema 43. Demuestre que $\overrightarrow{A} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 7\hat{k}$ y $\overrightarrow{B} = 4\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + 14\overrightarrow{k}$ son papralelos.

Respuesta: Método 1: Observe que $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}$ y método 2: $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$

Problema 44. Si $\overrightarrow{A} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, $\overrightarrow{B} = \hat{\imath} + \hat{k}$ y $\overrightarrow{C} = \hat{\jmath} + \hat{k}$, a) verifique que $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = -\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A}$, b) construya un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C}$ y en la dirección de $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$.

Problema 45. Determine las componentes cartesianas de los tres vectores que se muestran en la figura 2.79, si se sabe que las magnitudes de los vectores son iguales a 10 unidades.

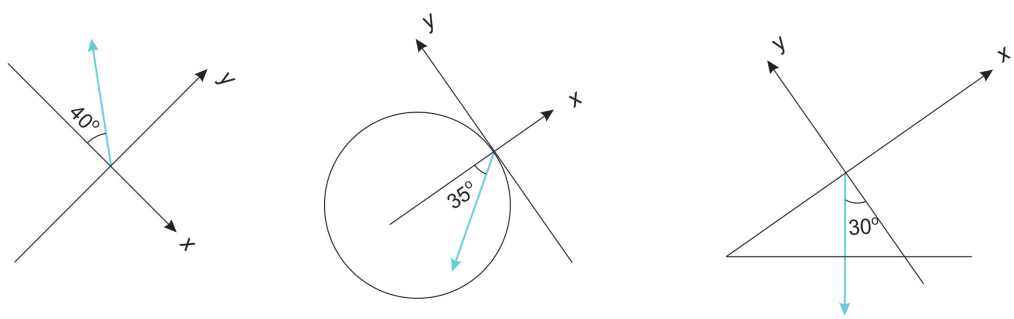


Figura 2.79

Problema 46. Cinco vectores se encuentran distribuidos sobre un polígono regular de lado a como indica la figura 2.80. Determine la magnitud del vector resultante en términos de a.

Problema 47. Si $|\overrightarrow{A}| = 4$, $|\overrightarrow{B}| = 2$ y el ángulo entre $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ es $\frac{\pi}{6}$, demuestre que el valor de $|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}|^2 = 16$.

Problema 48. Dados los vectores $\overrightarrow{A} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 4\hat{k}$ y $\overrightarrow{B} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + \hat{k}$. a) Calcule el producto vectorial entre $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$, b) verifique que $\overrightarrow{A}$ es perpendicular ($\perp$) a $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ y c) verifique que $\overrightarrow{B} \perp \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$

Problema 49. Si $|\overrightarrow{A}| = 1$, $|\overrightarrow{B}| = 2$, $|\overrightarrow{C}| = 4$ y $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} = \overrightarrow{0}$ demuestre que $4\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} + 3\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{C} + 3\overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{A} = -26$. Sugerencia: pruebe que $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \frac{11}{2}$, $\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{C} = -\frac{19}{2}$ y $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C} = -\frac{11}{2}$.

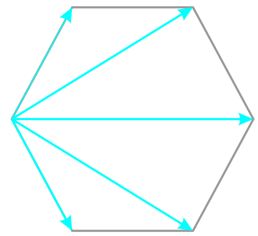


Figura 2.80

Problema 50. Si $\overrightarrow{A} = 3\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} - \hat{k}$, $\overrightarrow{B} = \hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ y $\overrightarrow{C} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 12\hat{k}$ demuestre que la proyección de $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ sobre $\overrightarrow{C}$ es -14.

Problema 51. Si $\overrightarrow{B} = 3\hat{\jmath} + 4\hat{k} = \overrightarrow{B}_{\parallel} + \overrightarrow{B}_{\perp}$, siendo $\overrightarrow{B}_{\parallel}$ y $\overrightarrow{B}_{\perp}$ las componentes de $\overrightarrow{B}$ paralela y perpendicular al vector $\overrightarrow{A} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$, compruebe que $\overrightarrow{B}_{\parallel} \times \overrightarrow{B}_{\perp} = 6\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + \frac{9}{2}\hat{k}$.

Problema 52. Si $\hat{a}$, $\hat{b}$ y $\hat{c}$ son vectores unitarios en el espacio tridimensional, demuestre que el mínimo valor de $|\hat{a} + \hat{b}| + |\hat{b} + \hat{c}| + |\hat{a} + \hat{c}|$ es 3. Sugerencia $|\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}| \geq 0$.

Problema 53. Demuestre que $(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) \cdot (2\overrightarrow{A} - 3\overrightarrow{B}) = 2A^2 - 3B^2 - AB\cos\theta$, siendo θ el ángulo entre $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$.

Problema 54. Si $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \overrightarrow{C}$, $|\overrightarrow{A}| = 4$, $|\overrightarrow{A}| = 4$ y $|\overrightarrow{A}| = 4$, demuestre que el ángulo entre $\overrightarrow{A}$ es $\theta = 60^\circ$.

Problema 55. La velocidad de un cuerpo que gira es dada por $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$, donde $\overrightarrow{\omega}$ y $\overrightarrow{r}$ son los vectores velocidad angular y posición respectivamente. Si $\overrightarrow{\omega} = (\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k})\,\mathrm{rad/s}$ y $\overrightarrow{r} = (4\hat{\jmath} - 3\hat{k})\,\mathrm{m}$, demuestre que $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{221}\,\mathrm{m/s}$

Problema 56. Un cuerpo se mueve en el plano xy, ver figura 2.81; en cierto instante de tiempo t el cuerpo se encuentra en el punto A y su vector posición es $\overrightarrow{r_1}$, el cual forma un ángulo θ_1 con el eje x. En un tiempo $t + \Delta t$ posterior, el cuerpo se mueve al punto B, de modo que ahora su vector posición es $\overrightarrow{r_2}$, el cual forma un ángulo θ_2 con el eje x. El desplazmiento del cuerpo se define como $\Delta\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$. Si $r_1 = 3\,\mathrm{m}$, $r_2 = 4\,\mathrm{m}$, $\theta_1 = 75^\circ$ y $\theta_2 = 15^\circ$, demuestre que $|\Delta\overrightarrow{r}| = \sqrt{13}\,\mathrm{m}$

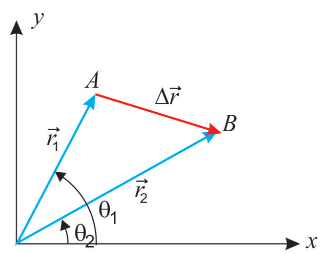


Figura 2.81

Problema 57. Dados los vectores $\overrightarrow{a} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath}$, $\overrightarrow{b} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ y $\overrightarrow{A} = 6\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$, demuestre que si $\overrightarrow{A} = m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b}$, siendo m y n números reales, entonces $m = \frac{4}{5}$ y $n = \frac{7}{5}$.

Problema 58. Se tienen tres vectores en el plano xy: $\vec{A} = A\hat{\imath}$, $\vec{B} = B\hat{\imath}$ y $\vec{C}$, donde A y B son números reales diferentes y diferentes de cero que cumplen: $\vec{A}+\vec{C}$ y $\vec{B}+\vec{C}$ forman ángulos θ y β con el eje $+x$ respectivamente, demuestre que las componentes cartesianas de $\vec{C}$ son: $C_x = \frac{B\tan\beta - A\tan\theta}{\tan\theta - \tan\beta}$ y $C_y = \frac{(B-A)\tan\theta\tan\beta}{\tan\theta-\tan\beta}$.
Ayuda: $\vec{A}+\vec{C} = (A+C_x)\hat{\imath} + C_y\hat{\jmath} \therefore \tan\theta = \frac{C_y}{A+C_x}$ y $\vec{B}+\vec{C} = (B+C_x)\hat{\imath} + C_y\hat{\jmath} \therefore \tan\beta = \frac{C_y}{B+C_x}$.
Si $A = 12$, $B = -14$, $\theta = 30^\circ$ y $\beta = 120^\circ$ entonces $C_x = 7{,}5$ y $C_y = 11{,}3$

Problema 59. Si $|\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}| = 4\sqrt{7}$, $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = -48$ y $A = \frac{2}{3}B$ demuestre que $A = 8$ y $B = 12$.
Ayuda: Calcule $|\vec{A}+\vec{B}|^2 = (\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})$ y reeemplace los valores de $\vec{A}\cdot\vec{B}$ y A dados por la segunda y tercera expresión para hallar una ecuación en B.

Problema 60. Si $(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B})\cdot(\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}) = 0$, demuestre que $A = B$.

Problema 61. Dados los vectores $\overrightarrow{a} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ y $\overrightarrow{b} = 2\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + m\hat{k}$, siendo m un número real, demuestre que si los vectores son perpendiculares, es decir, $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 0$, entonces $m = 6$.

Problema 62. Demuestre que el área del triángulo determinado por los vectores $\overrightarrow{A} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$ y $\overrightarrow{B} = -3\hat{\imath} + 7\hat{\jmath}$ es igual a $\frac{33}{2}$ unidades de área.

Problema 63. Demuestre que el área del paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores $\overrightarrow{A} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ y $\overrightarrow{B} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}$ es igual a $\sqrt{195}$ unidades de área.

Problema 64. Demuestre que el área del triángulo determinado por los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ de la figura 2.82a es igual a $5\,\mathrm{m}^2$.

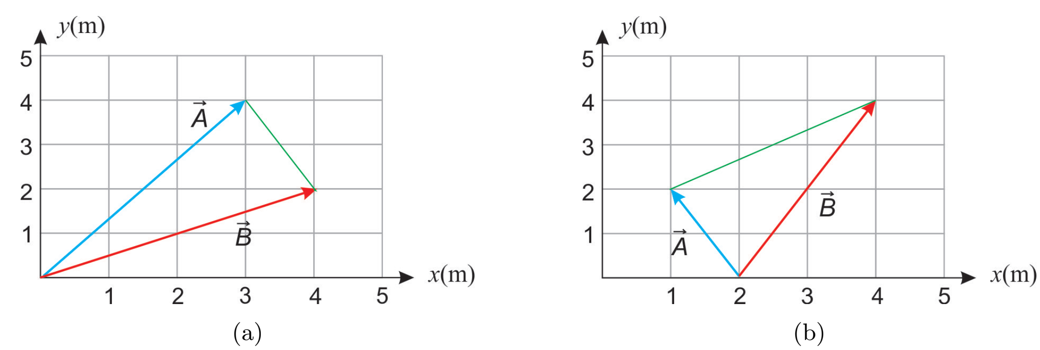


Figura 2.82

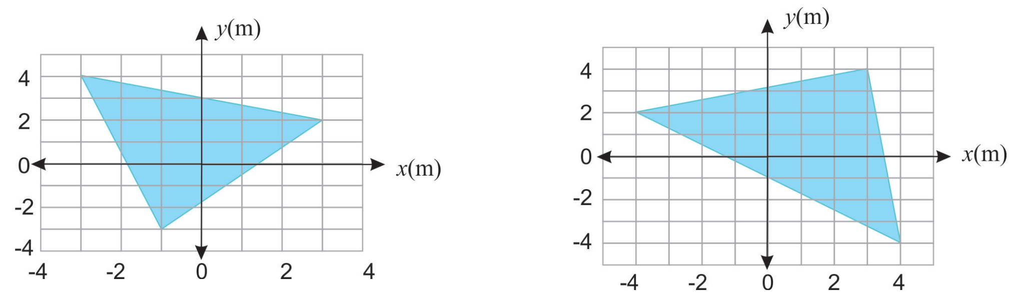
Problema 65. Demuestre que el área del triángulo determinado por los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ de la figura 2.82b es igual a $4\,\mathrm{m}^2$.

Problema 66. Demuestre mediante métodos vectoriales que las áreas de los triángulos mostrados en las figuras 2.83a y 2.83b son iguales a $12\,\mathrm{m}^2$ y $29\,\mathrm{m}^2$ respectivamente.

Problema 67. Demuestre que el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{A} = 8\hat{\imath}+3\hat{\jmath}$ y $\overrightarrow{B} = -5\hat{\imath}-7\hat{\jmath}$ es $146{,}1^\circ$

Problema 68. Demuestre que el producto vectorial de $\overrightarrow{A} = 8\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ y $\overrightarrow{B} = -5\hat{\imath} - 7\hat{\jmath}$ es $-41\,\hat{k}$.

Problema 69. Use el producto vectorial para encontrar el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{A} = 8\hat{\imath}+3\hat{\jmath}$ y $\overrightarrow{B} = -5\hat{\imath} - 7\hat{\jmath}$. Compare su resultado con el obtenido al usar el producto escalar. Explique la diferencia en los resultados.



(a) (b)

Figura 2.83

Problema 70. La ecuación $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}$ permite calcular la fuerza sobre una partícula con carga eléctrica q que se mueve con velocidad $\overrightarrow{v}$ en un campo magnético uniforme $\overrightarrow{B}$. Demuestre que la magnitud de la fuerza sobre un protón con $q = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C, que se mueve con velocidad $\overrightarrow{v} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) \times 10^5$ m/s en un campo magnético $\overrightarrow{B} = 0{,}5\,\hat{k}$ tesla, es $F = 2{,}88 \times 10^{-14}$ N (Las unidades dadas dan la fuerza en newtones.)

Problema 71. Demuestre que la magnitud de la cantidad de movimiento angular definida en el Ejemplo 48 $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p}$, se puede escribir como $L = mr_{\perp}v$, siendo $r_{\perp}$ la magnitud de la componente de $\overrightarrow{r}$ perpendicular a $\overrightarrow{p}$. Ayuda: considere la figura 2.84.

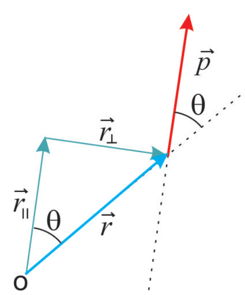


Figura 2.84

Problema 72. Un cohete de masa 200 kg se encuentra en movimiento y en cierto punto de su trayectoria, su altura y velocidad son 500 m y $\overrightarrow{v_0} = 300\hat{i}$ m/s como indica la figura 2.85. Demuestre que la cantidad de movimiento angular del cohete con respecto al punto o es $\overrightarrow{L} = -3 \times 10^7\,\hat{k}\,\frac{\mathrm{kg}m^2}{\mathrm{s}}$.

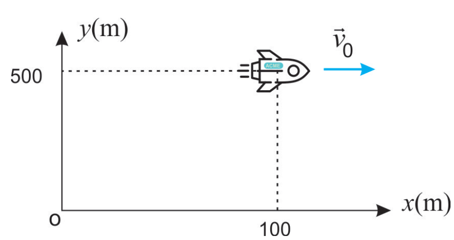


Figura 2.85

Problema 73. En un modelo semi clásico del del átomo de hidrógeno, el electrón gira alrededor del núcleo y el radio de su primera órbita es igual a 0,53 Å, donde Å $= 10^{-10}$ m, ver figura 2.86. Si la magnitud de la cantidad de movimiento angular del electrón alrededor del núcleo es $L = \hbar = \frac{h}{2\pi}$, donde $h = 6{,}62 \times 10^{-34}\,\frac{\mathrm{m^2 kg}}{\mathrm{s}}$, demuestre que la velocidad lineal v del electrón es $v = 2{,}16 \times 10^6$ m/s. (masa del electrón $m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg)

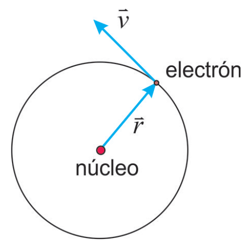


Figura 2.86

Problema 74. Dos cuerpos pequeños están conectados mediante una barra rígida no conductora de longitud d como indica la figura 2.87. Los cuerpos tienen cargas eléctricas $+q$ y $-q$. Este sistema de dos cargas iguales pero de signos contrarios se denomina un dipolo eléctrico. Cuando el dipolo se encuentra en un campo eléctrico $\overrightarrow{E}$ cada una de las cargas experimenta una fuerza en magnitud igual a $F = qE$, y en consecuencia, el dipolo tiende a girar alrededor del punto o. Si definimos el momento dipolar eléctrico como $\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{r}$, siendo $\overrightarrow{r}$ un vector que va de la carga negativa a la positiva, demuestre que el momento de fuerza o torque sobre el dipolo eléctrico con respecto al punto o es $\overrightarrow{\tau} = qdE\sin\theta\hat{k}$.

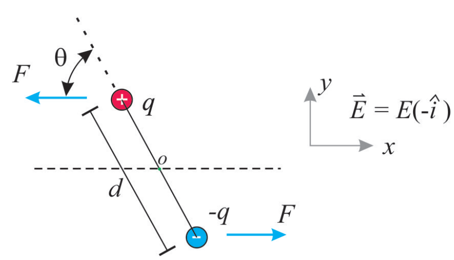


Figura 2.87

Problema 75. Dados los vectores $\overrightarrow{A} = 3\widehat{i} + \widehat{j}$, $\overrightarrow{B} = 2\widehat{i} - \widehat{j} + \widehat{k}$ y $\overrightarrow{C} = \widehat{i} - \widehat{j} + 2\widehat{k}$. Verifique:

a) 1) $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = 5$
   2) $\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{C} = 5$
   3) $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C} = 2$

b) 1) $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \widehat{i} - 3\widehat{j} - 5\widehat{k}$
   2) $\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C} = -\widehat{i} - 3\widehat{j} - \widehat{k}$
   3) $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C} = 2\widehat{i} - 6\widehat{j} - 4\widehat{k}$

c) $\overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{B} \cdot (\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{A}) = \overrightarrow{C} \cdot (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) = -6$

d) 1) $\overrightarrow{A} \times (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) = -\widehat{i} + 3j - 8\widehat{k}$
   2) $(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) \times \overrightarrow{C} = -11\widehat{i} - 7\widehat{j} + 2\widehat{k}$
   3) $\overrightarrow{B} \times (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C}) = 10\widehat{i} + 10\widehat{j} - 10\widehat{k}$

e) 1) $\overrightarrow{A} \times (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) = (\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C})\overrightarrow{B} - (\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B})\overrightarrow{C} = -\widehat{i} + 3\widehat{j} - 8\widehat{k}$
   2) $(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) \times \overrightarrow{C} = (\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C})\overrightarrow{B} - (\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{C})\overrightarrow{A} = -11\widehat{i} - 7\widehat{j} + 2\widehat{k}$

f) Identidad de Lagrange:
   $\overrightarrow{A} \times (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) + \overrightarrow{B} \times (\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{A}) + \overrightarrow{C} \times (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{0}$

g) Identidad de Jacobi: $(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) \times \overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} \times (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) - \overrightarrow{B} \times (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C})$