1. Teoría de Errores

1.1. Introducción

En la ciencia y la ingeniería siempre que se realizan mediciones de cantidades directas e indirectas, estas están sujetas a errores y por tanto se hace necesario aprender a expresar y reportar los resultados para que la comunidad científica pueda estimar su confiabilidad.

1.2. Objetivo

El objetivo de esta práctica es aprendar a reportar de manera correcta el resultado de mediciones experimentales. En particular, se determina el diámetro de una esfera, el área total de la superficie y volumen de un paralelepípedo teniendo en cuenta la teoría de errores.

1.3. Material para la práctica

- Una esfera.
- Una paralelepípedo.
- Un pie de rey o calibrador.

1.4. Resumen teórico

Siempre que se realiza la medición de una cantidad física, inevitablemente existen errores. Aun si se repiten las mediciones, siempre encontraremos que los resultados de las diferentes mediciones, en general, no coinciden. Surge entonces la pregunta: cómo se puede determinar el verdadero valor de una cantidad física? La respuesta es que no se puede saber con certeza. No obstante, si las mediciones se realizan con cuidado y se aplican métodos experimentales refinados, entonces podemos reducir los errores y, por tanto, tener mayor certeza de que las mediciones están más cerca del valor verdadero. La teoría de errores se encarga del estudio de las incertidumbres de las cantidades físicas y suministra métodos que permiten su tratamiento.

1.4.1. Definiciones básicas

El error experimental es la diferencia entre una medida y su verdadero valor o entre dos valores medidos. El error experimental mismo se mide por su exactitud y precisión.

La **exactitud** mide qué tan cerca un valor medido se encuentra del valor verdadero o valor aceptado. Dado que el valor verdadero o aceptado de una cantidad física usualmente se desconoce, la exactitud de una medición no se puede determinar.

La **precisión** mide cuánto concuerdan dos o más mediciones de una misma cantidad. La precisión está relacionada con la repetitividad o reproducibilidad. Así, una medida que es altamente reproducible tiende a dar valores muy cercanos entre sí.

Las figuras 1 y 2 muestran una analogía de la definición de exactitud y precisión con las flechas que hace impacto sobre un blanco y con mediciones representadas sobre el eje horizontal.

`Aclaración:` cuando un científico o ingeniero hace referencia a errores experimentales no se refiere a equivocaciones, cálculos mal hechos, metidas de pata, etc. Por ejemplo, el medir un ancho cuando lo que se requería medir una longitud; el olvidar dividir el diámetro por 2 antes de calcular el área de un circulo en la formula $A = \pi r^2$; el usar la temperatura en grados Celsius en una expresión donde la temperatura se debe expresar en grados Kelvin, etc. Este tipo de errores son significativos pero se pueden eliminar al repetir el experimento cuidadosamente.

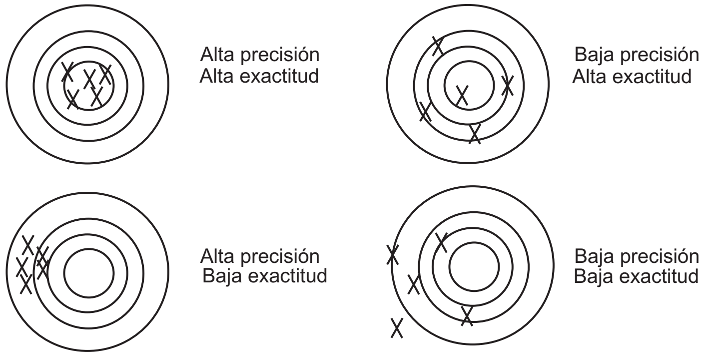

Figura 1: Exactitud y precisión.

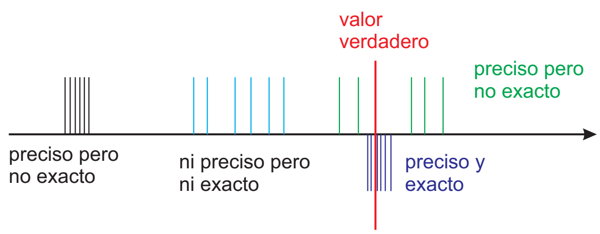

Figura 2: Exactitud y precisión.

1.5. Tipos de errores experimentales: sistemáticos y aleatorios

- Los errores sistemáticos afectan la exactitud de la medición. Ejemplo de fuentes errores sistemáticos: un instrumento mal calibrado, error debido al paralaje en la lectura de una escala con aguja, variaciones de frecuencia, variaciones de la tensión de la fuente de alimentación, variación de temperatura, variación de humedad, envejecimiento de componentes, etc. Este tipo de errores no puede analizarse usando la teoría de errores, pueden ser difíciles de detectar, pero una vez detectados se pueden reducir usando un método de medición mas refinado.

- Los errores aleatorios afectan la precisión de la medición. Estos errores se presentan cuando al hacer multiples mediciones de la misma cantidad fisica obtenemos valores diferentes debido al azar, es decir a variaciones impredecibles en el proceso de medición, sus causas o leyes de variación son desconocidas. Este tipo de errores puede analizarse usando la teoría de errores. La precisión de una medición sujeta solo a errores aleatorios se puede mejorar al repetir muchas veces las medición o usando un método mas refinado en la medición.

1.5.1. Calculo de errores experimentales

Cuando un científico o ingeniero reporta los resultados un experimento, el reporte debe incluir la exactitud y precisión de las mediciones. Veamos como se realizan estos estimativos.

1.5.2. Cifras significativas

El dígito menos significativo en una medición depende de la unidad mas pequeña del instrumento de medición usado. La precisión de la medida queda determinada por el numero de cifras significativas con la cual se reporta la medida. Como norma, una medida se reporta con una precisión igual a $\frac{1}{10}$ de la división mas pequeña del instrumento. Por ejemplo, una medida de longitud usando una regla graduada en milímetros se reporta con una precisión de $\pm 0{,}1$ mm. Una medición de un volumen usando una probeta graduada en mililitros se reporta con una precisión de $\pm 0{,}1$ ml.

Los instrumentos digitales se tratan de manera diferente a menos que que fabricante suministre la precisión. La precisión de una medición hecha con un instrumento digital se reporta con una precisión de $\pm\frac{1}{2}$ del valor de la unidad mas pequeña que el instrumento puede medir. Por ejemplo, un voltímetro digital indica 1.493 voltios; la precisión de la lectura del voltaje es $\pm\frac{1}{2}$ de 0.001 voltios o 0.0005 voltios.

Error porcentual: mide la exactitud de la medición y se define como

$$\%\ Error = \frac{\mid E - A \mid}{A} \times 100$$

donde E representa el valor medido o experimental y A representa el valor verdadero o aceptado.

Diferencia porcentual: mide la precisión de dos mediciones E_1 y E_2, y se define como

$$\%\ diferencia = \frac{\mid E_1 - E_2 \mid}{\frac{E_1+E_2}{2}}$$

1.5.3. Media y desviación estandar

Cuando una medición se realiza varias veces, se observa que los valores obtenidos se agrupan o distribuyen alrededor de un valor central. Este agrupamiento o distribución se describe suministrando dos numeros: la media o promedio la cual mide el valor central y la desviación estándar la cual describe al ancho o desviación de los valores medidos alrededor de la media.

Para un conjunto de N mediciones de una cantidad fíisica x , la media o promedio de x se representa con el símbolo $< x >$ o $\overline{x}$ y se calcula como

$$< x >= \overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_{N-1} + x_N) \tag{1}$$

donde representa x_i el i-esimo valor medido de x.

La desviación estándar de los valores medidos se representa por el símbolo σ_x y es dado por la fórmula

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2} \tag{2}$$

La desviación estándar tambien se le denomina la desviación cuadrática media y mide que tan dispersos se encuentran los datos medidos a lado y lado de la media o promedio. El significado σ_x es el siguiente: para mediciones sujetas solamente a errores aleatorios un desviación estándar de σ_x significa que el 68 % de los valores medidos se encuentran en el intervalo $< x > -\sigma_x$ y $< x > +\sigma_x$, que el 95 % de los valores medidos se encuentran en el intervalo $< x > -2\sigma_x$ y $< x > +2\sigma_x$ y que el 99 % de los valores medidos se encuentran en el intervalo $< x > -3\sigma_x$ y $< x > +3\sigma_x$.

Así, los resultados de una cantidad fisica x se deben reportar indicando su valor medio o promedio y la desviación estándar

$$x = \overline{x} \pm \sigma_x$$

Ejemplo 1: Supongamos que un científico o ingeniero necesita reportar el valor de la masa de una muestra. Para ello, el realiza 30 mediciones de la masa y consigna sus resultados en la tabla 1

1.09	1.01	1.10	1.14	1.16
1.11	1.04	1.16	1.13	1.17
1.14	1.03	1.17	1.09	1.09
1.15	1.06	1.12	1.08	1.20
1.08	1.07	1.14	1.11	1.05
1.06	1.12	1.00	1.10	1.07

Cuadro 1: Mediciones para determinar la masa de la muestra. Masa dada en kg.

Para las 30 mediciones el valor de la media es

$$< x >= \overline{x} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} x_i = \frac{1}{30}(33{,}04 \text{ kg}) = 1{,}10 \text{ kg}$$

La desviación estandar es

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{30-1}\sum_{i=1}^{30}(x_i - 1{,}10)^2} = 0{,}05 \text{ kg}$$

El resultado del valor de la muestra se debería reportar como

$$m = 1{,}10 \ \pm 0{,}05 \text{ kg}$$

Otro ejemplo: https://www.youtube.com/watch?v=g5dSFQQ3I68

2. Manera de reportar el resultado de una medición

En general, el resultado de la medición de una cantidad física se expresa en la forma

$$x = x_0 \pm \Delta x \tag{3}$$

Δx se le denomina incertidumbre absoluta

$\frac{\Delta x}{x_0} \times 100$ se le denomina error relativo o porcentaje de incertidumbre

El valor de x_0 proviene del resultado de una sola medición o del promedio de una serie de mediciones.

3. Reglas para el manejo de incertidumbres en cálculos

Si $a = a_0 \pm \Delta a$, $b = b_0 \pm \Delta b$, $c = c_0 \pm \Delta c$ y $d = d_0 \pm \Delta d$, y m, n, o, p son números reales:

1. Suma: $x = a + b$, debemos escribir $x = x_0 \pm \Delta x$, donde $x_0 = a_0 + b_0$ y $\Delta x = \Delta a + \Delta b$
2. Resta $y = a - b$, debemos escribir $y = y_0 \pm \Delta y$, donde $y_0 = a_0 - b_0$ y $\Delta y = \Delta a + \Delta b$
3. Multiplicación: $x = ab$ debemos escribir $x = x_0 \pm \Delta x$, donde $x_0 = a_0 b_0$ y $\Delta x = x_0\left(\frac{\Delta a}{a_0} + \frac{\Delta b}{b_0}\right)$. La cantidad $\frac{\Delta x}{x_0}$ se denomima error relativo.
4. División: $y = \frac{a}{b}$, debemos escribir $y = y_0 \pm \Delta y$, donde $y_0 = \frac{a_0}{b_0}$ y $\Delta y = y_0\left(\frac{\Delta a}{a_0} + \frac{\Delta b}{b_0}\right)$.
5. Caso general: $q = \frac{a^m b^n}{c^o d^p}$, debemos escribir $q = q_0 \pm \Delta q$, donde $q_0 = \frac{a_0^m b_0^n}{c_0^o d_0^p}$ y $\Delta q = q_0\left(m\frac{\Delta a}{a_0} + n\frac{\Delta n}{n_0} + o\frac{\Delta o}{o_0} + p\frac{\Delta d}{d_0}\right)$.
6. Caso especial 1: Si $x = x_0 \pm \Delta x$, entonces $\frac{\Delta(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \frac{\Delta x}{x}$ o $\Delta(\frac{1}{x}) = \frac{\Delta x}{x^2}$.
7. Caso especial 2: Si $x = x_0 \pm \Delta x$, entonces $\frac{\Delta(x^n)}{x^n} = n\frac{\Delta x}{x}$ o $\Delta(x^n) = nx^{n-1}\Delta x$.

Si $a = 5{,}0 \pm 0{,}1$, $b = 2{,}0 \pm 0{,}2$, $c = 3{,}0 \pm 0{,}3$ y $d = 4{,}0 \pm 0{,}1$

Ejemplo 1.

1. Uso de regla 1. El valor de $a+b$ se debe expresar como $a+b = (5{,}0+2{,}0)\pm(0{,}1+0{,}2) = 7{,}0\pm0{,}3$. El error relativo o porcentaje de incertidumbre es: $\frac{0{,}3}{7{,}0} \times 100\,\% = 42{,}9\,\%$

2. Uso de regla 2. El valor de $a-b$ se debe expresar como $a-b = (5{,}0-2{,}0)\pm(0{,}1+0{,}2) = 3{,}0\pm 0{,}3$. El error relativo o porcentaje de incertidumbre es: $\frac{0{,}3}{3{,}0} \times 100\,\% = 10{,}0\,\%$

3. Uso des reglas 1 y 2. El valor de $a+b-c$ se debe expresar como $a+b-c = (5{,}0+2{,}0-3{,}0)\pm(0{,}1+0{,}2+0{,}3) = 4{,}0\pm 0{,}6$. El error relativo o porcentaje de incertidumbre es: $\frac{0{,}6}{4{,}0} \times 100\,\% = 15{,}0\,\%$

4. Uso de regla 3. El valor de ab se debe expresar como $x = ab = x_0 \pm \Delta x$, donde $x_0 = 5{,}0\times 2{,}0 = 10{,}0$ y $\Delta x = x_0(\frac{\Delta a}{a_0} + \frac{\Delta b}{b_0}) = 10{,}0(\frac{0{,}1}{5{,}0} + \frac{0{,}2}{2{,}0}) = 10{,}0(0{,}02+0{,}1) = 10{,}0(0{,}12) = 1{,}2$. De esta manera, $(5{,}0\pm 0{,}1)\times(2{,}0\pm 0{,}2) = 10{,}0\pm 1{,}2$. El error relativo o porcentaje de incertidumbre es: $\frac{1{,}2}{10{,}0} \times 100\,\% = 12{,}0\,\%$

5. Uso de regla 4. El valor de $\frac{a}{b}$ se debe expresar como $y = \frac{a}{b} = y_0 \pm \Delta y$, donde $y_0 = \frac{5{,}0}{2{,}0} = 2{,}5$ y $\Delta y = y_0(\frac{\Delta a}{a_0} + \frac{\Delta b}{b_0}) = 2{,}5(\frac{0{,}1}{5{,}0} + \frac{0{,}2}{2{,}0}) = 2{,}5(0{,}02+0{,}1) = 2{,}5(0{,}12) = 0{,}3$. De esta manera, $\frac{5{,}0\pm 0{,}1}{2{,}0\pm 0{,}2} = 2{,}5\pm 0{,}3$. El error relativo o porcentaje de incertidumbre es: $\frac{0{,}3}{2{,}5} \times 100\,\% = 12{,}0\,\%$

6. Uso de regla 5. El valor de $\frac{a^2 b}{d}$ se debe expresar como $q = q_0 \pm \Delta q$, donde $q_0 = \frac{a_0^2 b_0}{d_0} = \frac{5{,}0^2 2{,}0}{4{,}0} = 12{,}5$ y $\Delta q = q_0(2\cdot\frac{\Delta a}{a_0} + \frac{\Delta b}{b_0} + \frac{\Delta d}{d_0}) = 10{,}0(2\cdot\frac{0{,}1}{5{,}0} + \frac{0{,}2}{2{,}0} + \frac{0{,}1}{4{,}0}) = 12{,}5(0{,}04+0{,}1+0{,}025) = 12{,}5(0{,}165) = 2{,}0625 \approx 2{,}1$. De esta manera, $\frac{(5{,}0\pm 0{,}1)^2(2{,}0\pm 0{,}2)}{4{,}0\pm 0{,}1} = 12{,}5\pm 2{,}1$. El error relativo o porcentaje de incertidumbre es: $\frac{2{,}1}{12{,}5} \times 100\,\% = 16{,}8\,\%$

7. Uso de regla 5. El valor de $\frac{ab^2}{d^3}$ se debe expresar como $q = q_0 \pm \Delta q$, donde $q_0 = \frac{a_0 b_0^2}{d_0^3} = \frac{5{,}0\times 2{,}0^2}{4{,}0^3} = 0{,}3125 \approx 0{,}3$ y $\Delta q = q_0(1\cdot\frac{\Delta a}{a_0} + 2\cdot\frac{\Delta b}{b_0} + 3\cdot\frac{\Delta d}{d_0}) = 0{,}3(\frac{0{,}1}{5{,}0} + 2\cdot\frac{0{,}2}{2{,}0} + 3\cdot\frac{0{,}1}{4{,}0}) = 0{,}3(0{,}04+0{,}2+0{,}075) = 0{,}3(0{,}315) = 0{,}0945 \approx 0{,}1$. De esta manera, $\frac{(5{,}0\pm 0{,}1)(2{,}0\pm 0{,}2)^2}{(4{,}0\pm 0{,}1)^3} = 0{,}3\pm 0{,}1$. El error relativo o porcentaje de incertidumbre en la medida es $\frac{0{,}1}{0{,}3} \times 100\,\% = 33{,}3\,\%$.

8. Uso de regla 1. Se mide el perímetro de un rectángulo y los resultados de las mediciones son $a = 5{,}2\pm 0{,}1\,\mathrm{m}$ y $b = 3{,}4\pm 0{,}1\,\mathrm{m}$. El valor del perímetro P lo debemos expresar como $P = P_0 \pm \Delta P$, donde $P_0 = 5{,}2\,\mathrm{m}+5{,}2\,\mathrm{m}+3{,}4\,\mathrm{m}+3{,}4\,\mathrm{m} = 17{,}2\,\mathrm{m}$ y $\Delta P = 0{,}1\,\mathrm{m}+0{,}1\,\mathrm{m}+0{,}1\,\mathrm{m}+0{,}1\,\mathrm{m} = 0{,}4\,\mathrm{m}$. Así, el valor de la medición del perímetro es $P = 17{,}2\,\mathrm{m} \pm 0{,}4\,\mathrm{m}$.

9. Uso de regla 6. El resultado de la medición de cierta cantidad se expresa como $Q = 3{,}4\pm 0{,}5$. Exprese $\frac{1}{Q}$ con la correspondiente incertidumbre.
$\frac{1}{Q} = \frac{1}{3{,}4} = 0{,}294118$. Por otro lado, $\Delta(\frac{1}{Q}) = \frac{\Delta Q}{Q^2} = \frac{0{,}5}{3{,}4^2} = 0{,}04325$. Luego, $\frac{1}{Q} = 0{,}29\pm 0{,}04$.

10. Uso de regla 7. El resultado de la medición de cierta cantidad se expresa como $Q = 3{,}4\pm 0{,}5$. Exprese Q^2 con la correspondiente incertidumbre.
$Q^2 = 3{,}4^2 = 11{,}56$. Por ptro lado, $\Delta(Q^2) = 2Q\times\Delta Q = 2\times 3{,}4\times 0{,}5 = 3{,}4$. Luego, $Q^2 = 11{,}6\pm 3{,}4$.

11. Uso de regla 4. Se desea determinar la densidad ρ de un sólido, para ello se mide su volumen V y masa m, los valores de estas cantidades resultan ser $V = 1{,}2\,\mathrm{cm}^3 \pm 0{,}2\,\mathrm{cm}^3$ y $m = 8{,}5\,\mathrm{g}\pm 0{,}1\,\mathrm{g}$. Exprese la densidad como $\rho = \rho_0 \pm \Delta\rho$.
De la definición de densidad se tiene que $\rho = \frac{m}{V}$, luego $\Delta\rho = \rho_0\left(\frac{\Delta m}{m_0} + \frac{\Delta V}{V_0}\right)$, donde $\rho_0 = \frac{8{,}5\,\mathrm{g}}{1{,}2\,\mathrm{cm}^3} = 7{,}1\,\mathrm{g/cm}^3$. Así, $\Delta\rho = (7{,}1\,\mathrm{g/cm}^3)\left(\frac{0{,}1}{8{,}5} + \frac{0{,}2}{1{,}2}\right) = 1{,}3\,\mathrm{g/cm}^3$. El valor de la densidad es por tanto $\rho = 7{,}1\,\mathrm{g/cm}^3 \pm 1{,}3\,\mathrm{g/cm}^3$. El error relativo o porcentaje de incertidumbre en la medida de es $\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \times 100\,\% = \frac{1{,}3}{7{,}1} \times 100\,\% = 18{,}3\,\%$.

Ejemplo 2.

1. El volumen de un cilindro de radio r y altura H es dado por la expresión $V = \pi r^2 H$. Las mediciones de su radio y altura vienen dadas por $r = 5{,}0\pm 0{,}1\,\mathrm{cm}$ y $H = 12{,}0\pm 0{,}2\,\mathrm{cm}$. Exprese el volumen del cilindro en la forma $V = V_0 \pm \Delta V$.

Solución:

Se tiene que $V = V_0 \pm \Delta V$, donde $V_0 = \pi r^2 H = \pi(5{,}0\,\text{cm})^2(12{,}0\,\text{cm}) = 942{,}5\,\text{cm}^3$ y $\Delta V = V_0\left(2 \cdot \frac{\Delta r}{r_0} + \frac{\Delta H}{H_0}\right) = 942{,}5 \times \left(2 \cdot \frac{0{,}1}{5{,}0} + \frac{0{,}2}{12{,}0}\right) = 53{,}4\,\text{cm}^3$. De esta manera, el volumen del cililindro es $V = 942{,}5\,\text{cm}^3 \pm 53{,}4\text{cm}^3$

2. El periodo d oscilación de una masa que se encuentra suspendida de un resorte de constante elástica k es dado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Determine el porcentaje de incertidumbre del periodo si la masa se mide con un porcentaje de incertidumbre del 4 % y la constante k con un porcentaje de incertidumbre del 6 %.

   Solución: Se tiene que $T = T_0 \pm \Delta T$. Nos están pidiendo hallar $\frac{\Delta T}{T_0}$. Hallemos ΔT, para ello note que la expresión dada equivale a $T = 2\pi\frac{m^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}}$, luego $\Delta T = T_0\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta m}{m_0} + \frac{1}{2}\frac{\Delta k}{k_0}\right) = T_0\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta m}{m_0} + \frac{\Delta k}{k_0}\right) = T_0\frac{1}{2}\left(0{,}04 + 0{,}06\right) = 0{,}05T_0$, de donde $\frac{\Delta T}{T_0} = 0{,}05$ o lo que es lo mismo, el porcentaje de incertidumbre en el periodo es del 5 %.

3.1. Mediciones

1. Determine la longitud de la esfera suministrada y exprese su diámetro de manera correcta usando la teoría de errores.
2. Determine el volumen del paralelepípedo suministrado y determine su
   - superficie (área) total.
   - volumen.

Exprese sus resultados de acuerdo a la teoría de errores.

4. Bibliografía

Referencias

[1] John R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements*, 2d Edition, University Science Books, 1997.

[2] Philip R. Bevington and D. Keith Robinson, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, 2d Edition, WCB/McGraw-Hill, 1992.