OPERAČNÍ PROGRAM PRAHA
ADAPTABILITA

PRAHA PRAGUE PRAGA PRAG

EVROPSKÁ UNIE

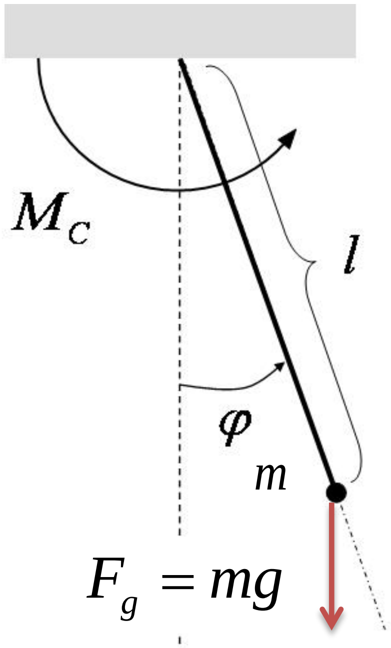
Příklady k přednášce
1. Úvod

Michael Šebek

Automatické řízení 2018

19-2-18

Kyvadlo řízené momentem



- Pohybová rovnice (2. Newtonův zákon pro rotaci)

$$J\ddot{\varphi} = \sum M \quad \text{pro moment setrvačnosti } J = ml^2$$
$$= M_c - F_g l \sin\varphi$$
$$= M_c - mgl\sin\varphi$$

- Nelineární model vstup-výstup s $y = \varphi, u = M_c$

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = M_c$$
$$ml^2\ddot{y} + mgl\sin y = u$$

- Nelineární stavový model s $x_1 = \varphi = y, x_2 = \dot{\varphi} = \dot{y}, u = M_c$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin x_1 + \frac{1}{ml^2}u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

Jen pro zajímavost: přesné řešení?

- Při hledání řešení (Mathieuovy) rovnice $ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0$
- „první integrál pohybu“ (výpočtem rychlosti z kinetické energie)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\varphi - \cos\varphi_0\right)}$$

- Dále bychom postupovali metodou separace proměnných

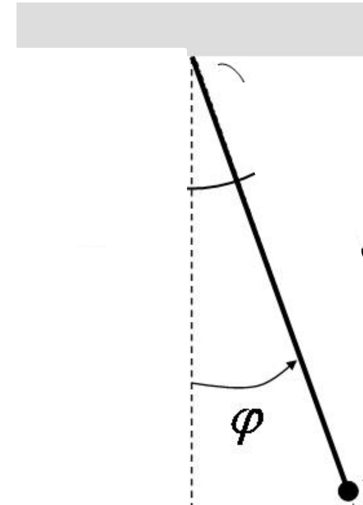
$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\varphi - \cos\varphi_0\right)}} = dt \;\rightarrow\; \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\varphi - \cos\varphi_0\right)}} = t + C_1$$

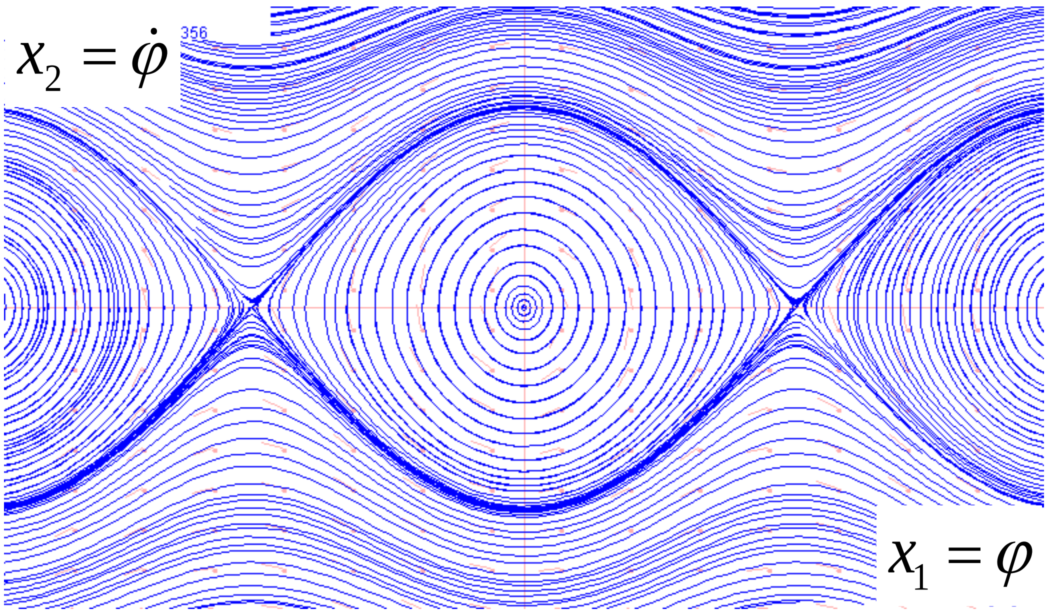
- To ale vede na eliptický integrál, který patří mezi tzv. neelementární (je dokázáno, že ho nelze sestavit z elementárních funkcí)
- Přesné řešení tak jednoduché rovnice (v uzavřeném tvaru) tedy neexistuje!

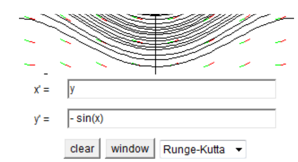
Fázový portrét

- Řešení nelineárních stavových rovnic ve „fázovém prostoru“ - pro 2. řád je 2D

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\sin x_1$$







- Složité křivky, nelze je popsat elementárními funkcemi
- SW: http://www.bae.ncsu.edu/people/faculty/seaboch/phase/newphase.html

Linearizace stavového modelu pro SISO 2. řád

nelineární stavový model

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u)$$
$$y = h(x_1, x_2, u)$$

pracovní bod

$$x_{1,p}, x_{2,p}, u_p$$

pozor: musí platit

$$\dot{x}_{1,p} = f_1(x_{1,p}, x_{2,p}, u_p)$$
$$\dot{x}_{2,p} = f_2(x_{1,p}, x_{2,p}, u_p)$$
$$y_p = h(x_{1,p}, x_{2,p}, u_p)$$

lineární odchylková aproximace

$$\boxed{\begin{aligned}
\Delta\dot{x}_1 &= \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\substack{x_{1,p}\\x_{2,p}\\u_p}} \Delta x_1 + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\substack{x_{1,p}\\x_{2,p}\\u_p}} \Delta x_2 + \left.\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|_{\substack{x_{1,p}\\x_{2,p}\\u_p}} \Delta u \\
\Delta\dot{x}_2 &= \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{\substack{x_{1,p}\\x_{2,p}\\u_p}} \Delta x_1 + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\substack{x_{1,p}\\x_{2,p}\\u_p}} \Delta x_2 + \left.\frac{\partial f_2}{\partial u}\right|_{\substack{x_{1,p}\\x_{2,p}\\u_p}} \Delta u \\
\Delta y &= \left.\frac{\partial h}{\partial x_1}\right|_{\substack{x_{1,p}\\x_{2,p}\\u_p}} \Delta x_1 + \left.\frac{\partial h}{\partial x_2}\right|_{\substack{x_{1,p}\\x_{2,p}\\u_p}} \Delta x_2 + \left.\frac{\partial h_2}{\partial u}\right|_{\substack{x_{1,p}\\x_{2,p}\\u_p}} \Delta u
\end{aligned}}$$

protože pracovní bod je řešením rovnic!

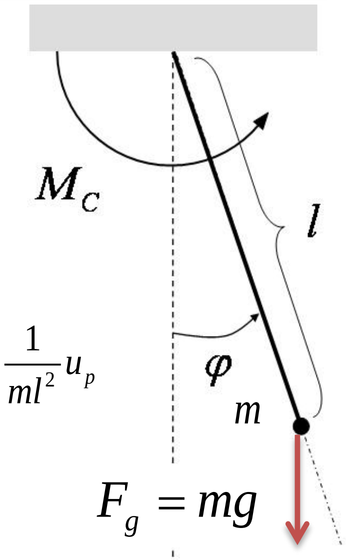
Kyvadlo – stavová linearizace v obecné poloze

Nelineární stavový model

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 + \frac{1}{ml^2}u$$
$$y = x_1$$

$$x_1 = \varphi = y$$
$$x_2 = \dot{\varphi}$$
$$u = M_c$$

$$\dot{x}_{1,p} = x_{2,p}$$
$$\dot{x}_{2,p} = -\frac{g}{l}\sin x_{1,p} + \frac{1}{ml^2}u_p$$
$$y_p = x_{1,p}$$



V obecném pracovním bodě $x_{1,p}, x_{2,p}, u_p, y_p$

$$\Delta\dot{x}_1 = 0\times\Delta x_1 + 1\times\Delta x_2 + 0\times\Delta u$$
$$\Delta\dot{x}_2 = \left(-\frac{g}{l}\cos x_{1,p} + 0\right)\times\Delta x_1 + (0+0)\times\Delta x_2 + \left(0 + \frac{1}{ml^2}\right)\times\Delta u$$
$$\Delta y = 1\times\Delta x_1 + 0\times\Delta x_2 + 0\times\Delta u$$

a lineární odchylková aproximace je

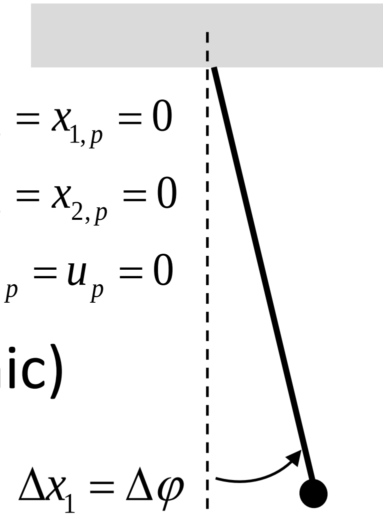
$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\dot{x}_1 &= \Delta x_2\\ \Delta\dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\cos x_{1,p}\Delta x_1 + \frac{1}{ml^2}\Delta u\\ \Delta y &= \Delta x_1\end{aligned}}$$

Kyvadlo – stavová linearizace v dolní poloze

- pracovní bod v dolní poloze

$$x_{1,p} = 0, x_{2,p} = 0, u_p = 0$$

$$\varphi_p = x_{1,p} = 0$$
$$\dot{\varphi}_p = x_{2,p} = 0$$
$$M_p = u_p = 0$$



- je ekvilibrium $\dot{x}_{1,p} = 0, \dot{x}_{2,p} = 0$
  (plyne z označení stavů a nelineárních rovnic)
- dále $\cos x_{1,p} = \cos 0 = 1$, takže

- lineární odchylková aproximace
  je

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\dot{x}_1 &= \Delta x_2\\ \Delta\dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\Delta x_1 + \frac{1}{ml^2}\Delta u\\ \Delta y &= \Delta x_1\end{aligned}}$$

$$\xleftarrow{\quad x_{1,p} = x_{2,p} = u_p = 0 \quad}$$

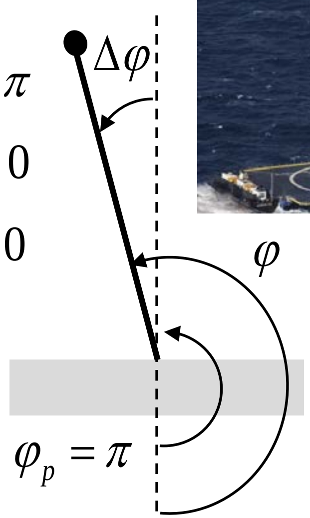
$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin x_1 + \frac{1}{ml^2}u\\ y &= x_1\end{aligned}}$$

Kyvadlo – stavová linearizace v horní poloze

- pracovní bod horní poloze

$$x_{1,p}=\pi, x_{2,p}=0, u_p=0$$

$$\varphi_p = x_{1,p} = \pi$$
$$\dot{\varphi}_p = x_{2,p} = 0$$
$$M_p = u_p = 0$$



- je také ekvilibrium $\dot{x}_{1,p}=0, \dot{x}_{2,p}=0$ (plyne z označení stavů a nelineárních rovnic)
- dále $\cos x_{1,p} = \cos\pi = -1$, takže

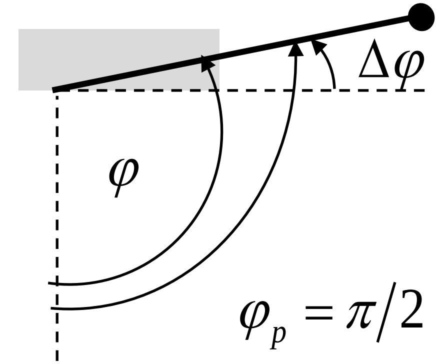
- lineární odchylková aproximace je

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\dot{x}_1 &= \Delta x_2 \\ \Delta\dot{x}_2 &= \frac{g}{l}\Delta x_1 + \frac{1}{ml^2}\Delta u \\ \Delta y &= \Delta x_1 \end{aligned}}$$

$$\xleftarrow[\;x_{2,p}=u_p=0\;]{\;x_{1,p}=\pi\;}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin x_1 + \frac{1}{ml^2}u \\ y &= x_1 \end{aligned}}$$

Kyvadlo – stavová linearizace ve vodorovné poloze



- pracovní bod ve vodorovné poloze doprava

  $$x_{1,p} = \pi/2,\, x_{2,p} = 0,\, u_p = mgl$$

- je také ekvilibrium $\dot{x}_{1,p} = 0, \dot{x}_{2,p} = 0$
  (plyne z označení stavů a nelineárních rovnic)
- neboť klidový moment vyrovnává tíhové zrychlení
- dále $\cos x_{1,p} = \cos \pi/2 = 0$, takže
- lineární odchylková aproximace
  je

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x}_1 &= \Delta x_2\\ \Delta\dot{x}_2 &= \frac{1}{ml^2}\Delta u\\ \Delta y &= \Delta x_1\end{aligned}$$

$$\xleftarrow{\;x_{1,p} = \pi/2,\; x_{2,p} = 0,\; u_p = mgl\;}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin x_1 + \frac{1}{ml^2}u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

- „volný pád“ pro konstantní Δu

Linearizace vnějšího modelu pro SISO 2. řád

V případě SISO systému 2.řádu má IO model skalární tvar

$$D(\ddot{y},\dot{y},y)=N(\ddot{u},\dot{u},u)$$

Lineární odchylková aproximace v pracovním bodě

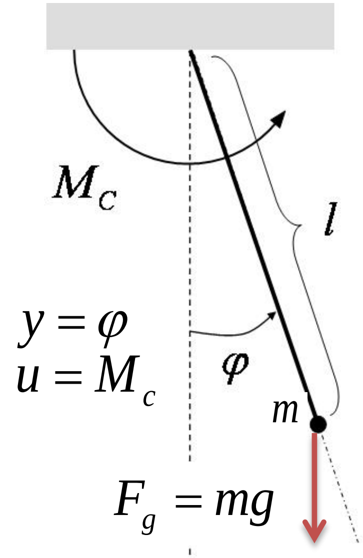
$$\ddot{y}_p,\dot{y}_p,y_p,\ddot{u}_p,\dot{u}_p,u_p$$

je pak

$$\left.\frac{\partial D}{\partial \ddot{y}}\right|_p \Delta\ddot{y}+\left.\frac{\partial D}{\partial \dot{y}}\right|_p \Delta\dot{y}+\left.\frac{\partial D}{\partial y}\right|_p \Delta y=\left.\frac{\partial N}{\partial \ddot{u}}\right|_p \Delta\ddot{u}+\left.\frac{\partial D}{\partial \dot{u}}\right|_p \Delta\dot{u}+\left.\frac{\partial D}{\partial u}\right|_p \Delta u$$

Kyvadlo – vnější linearizace v obecné poloze

Nelineární model $ml^2\ddot{y} + mgl\sin y = u$



V obecném pracovním bodě $\ddot{y}_p, \dot{y}_p, y_p, \ddot{u}_p, \dot{u}_p, u_p$,
který splňuje $ml^2\ddot{y}_p + mgl\sin y_p = u_p$

$$ml^2 \times \Delta\ddot{y} + 0 \times \Delta\dot{y} + mgl\cos y_p \times \Delta y = 0 \times \Delta\ddot{u} + 0 \times \Delta\dot{u} + 1 \times \Delta u$$

a lineární odchylková aproximace je

$$\boxed{ml^2\Delta\ddot{y} + mgl\cos y_p \Delta y = \Delta u} \xleftarrow[\ddot{u}_p, \dot{u}_p, u_p]{\ddot{y}_p, \dot{y}_p, y_p} \boxed{ml^2\ddot{y} + mgl\sin y = u}$$

Kyvadlo – vnější linearizace v dolní poloze

- pracovní bod dolní poloze

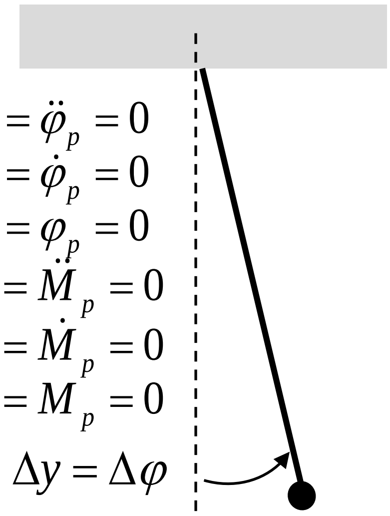
$$\ddot{y}_p = 0, \dot{y}_p = 0, y_p = 0, \ddot{u}_p = 0, \dot{u}_p = 0, u_p = 0$$

- je ekvilibrium
- protože $\cos y_p = \cos 0 = 1$, takže

- lineární odchylková aproximace

$$\begin{aligned} \ddot{y}_p &= \ddot{\varphi}_p = 0 \\ \dot{y}_p &= \dot{\varphi}_p = 0 \\ y_p &= \varphi_p = 0 \\ \ddot{u}_p &= \ddot{M}_p = 0 \\ \dot{u}_p &= \dot{M}_p = 0 \\ u_p &= M_p = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta y = \Delta \varphi$$



$$\boxed{ml^2 \Delta\ddot{y} + mgl \Delta y = \Delta u} \longleftarrow \boxed{ml^2 \ddot{y} + mgl \sin y = u}$$

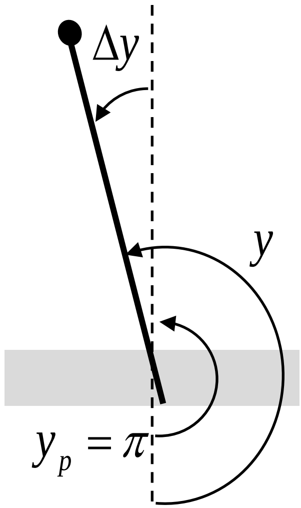
$$\begin{aligned} \ddot{y}_p &= 0, \dot{y}_p = 0, y_p = 0 \\ \ddot{u}_p &= 0, \dot{u}_p = 0, u_p = 0 \end{aligned}$$

Kyvadlo – vnější linearizace v horní poloze

- pracovní bod horní poloze

$$\ddot{y}_p = 0, \dot{y}_p = 0, y_p = \pi, \ddot{u}_p = 0, \dot{u}_p = 0, u_p = 0$$

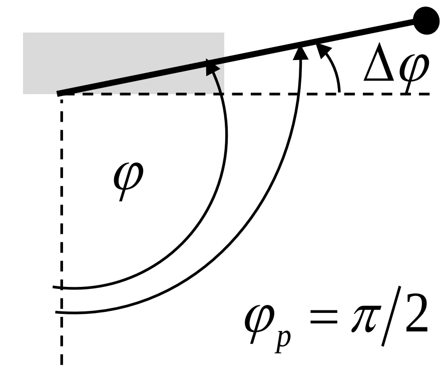
- je také ekvilibrium
- dále $\cos y_p = \cos\pi = -1$, takže
- lineární odchylková aproximace je



$$\begin{aligned} \ddot{y}_p &= \ddot{\varphi}_p = 0 \\ \dot{y}_p &= \dot{\varphi}_p = 0 \\ y_p &= \varphi_p = \pi \\ \ddot{u}_p &= \ddot{M}_p = 0 \\ \dot{u}_p &= \dot{M}_p = 0 \\ u_p &= M_p = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{ml^2\Delta\ddot{y} - mgl\Delta y = \Delta u} \xleftarrow[\ddot{u}_p = 0, \dot{u}_p = 0, u_p = 0]{\ddot{y}_p = 0, \dot{y}_p = 0, y_p = \pi} \boxed{ml^2\ddot{y} + mgl\sin y = u}$$

Kyvadlo – vnější linearizace ve vodorovné poloze



- pracovní bod ve vodorovné poloze doprava

  $$\ddot{y}_p = 0, \dot{y}_p = 0, y_p = \pi/2, \ddot{u}_p = 0, \dot{u}_p = 0, u_p = mgl$$

- je také ekvilibrium, neboť klidový moment vyrovnává vliv tíhového zrychlení
- dále $\cos\varphi_p = \cos\pi/2 = 0$, takže
- lineární odchylková aproximace je

$$\boxed{ml^2\Delta\ddot{y} = \Delta u} \xleftarrow[\substack{\ddot{y}_p = 0, \dot{y}_p = 0, y_p = \pi/2 \\ \ddot{u}_p = 0, \dot{u}_p = 0, u_p = mgl}]{\qquad\qquad} \boxed{ml^2\ddot{y} + mgl\sin y = u}$$

- „volný pád“ pro konstantní Δu

Kyvadlo – ještě jednou totéž maticově

$$x_1 = \varphi = y, x_2 = \dot{\varphi} = \dot{y}, u = M_c$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 + \frac{1}{ml^2}u$$

$$y = x_1$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \mathbf{f}\left(\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}, u\right) = \begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2,u)\\ f_2(x_1,x_2,u)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2\\ -\frac{g}{l}\sin x_1 + \frac{1}{ml^2}u\end{bmatrix}$$

$$y = \mathbf{h}\left(\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}, u\right) = h(x_1,x_2,u) = x_1$$

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)} = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p}} = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ -\frac{g}{l}\cos x_{1,p} & 0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)} = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}\end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p}} = \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{ml^2}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)} = \begin{bmatrix}\frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p}} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)} = \begin{bmatrix}\frac{\partial h}{\partial u}\end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p}} = 0$$

$$\Delta\dot{x}_1 = \Delta x_2$$

$$\Delta\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\cos x_{1,p}\Delta x_1 + \frac{1}{ml^2}\Delta u(t)$$

$$\Delta y(t) = \Delta x_1$$

Kyvadlo - aproximace v obecné poloze

$$x_1 = \varphi = y, x_2 = \dot{\varphi} = \dot{y}, u = M_c$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 + \frac{1}{ml^2}u$$
$$y = x_1$$

$$\Delta\dot{x}_1 = \Delta x_2$$
$$\Delta\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\cos x_{1,p}\Delta x_1 + \frac{1}{ml^2}\Delta u(t)$$
$$\Delta y(t) = \Delta x_1$$

Nelineární

Lineární

dole $x_{1,p} = y_p = \varphi_p = 0 \quad x_{2,p} = \dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0 \quad \rightarrow \quad \cos 0 = 1$

nahoře $x_{1,p} = y_p = \varphi_p = \pi \quad x_{2,p} = \dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0 \quad \rightarrow \quad \cos\pi = -1$

vodorovně $x_{1,p} = y_p = \varphi_p = \pi/2 \quad x_{2,p} = \dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0 \quad \rightarrow \quad \cos\pi/2 = 0$

Kyvadlo - aproximace IO v obecné poloze

$$ml^2\ddot{y} + mgl\sin y = u$$

$$\mathbf{D}(\ddot{y}, \dot{y}, y) = \mathbf{N}(u)$$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{y}}\right|_p = mgl\cos y_p, \quad \left.\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right|_p = 0, \quad \left.\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \ddot{\mathbf{y}}}\right|_p = ml^2, \quad \left.\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}}\right|_p = 1$$

$$ml^2\Delta\ddot{y} + mgl\cos y_p \Delta y = \Delta u$$

dole $\quad x_{1,p} = y_p = \varphi_p = 0 \quad x_{2,p} = \dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0 \quad \rightarrow \quad \cos 0 = 1$

nahoře $\quad x_{1,p} = y_p = \varphi_p = \pi \quad x_{2,p} = \dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0 \quad \rightarrow \quad \cos\pi = -1$

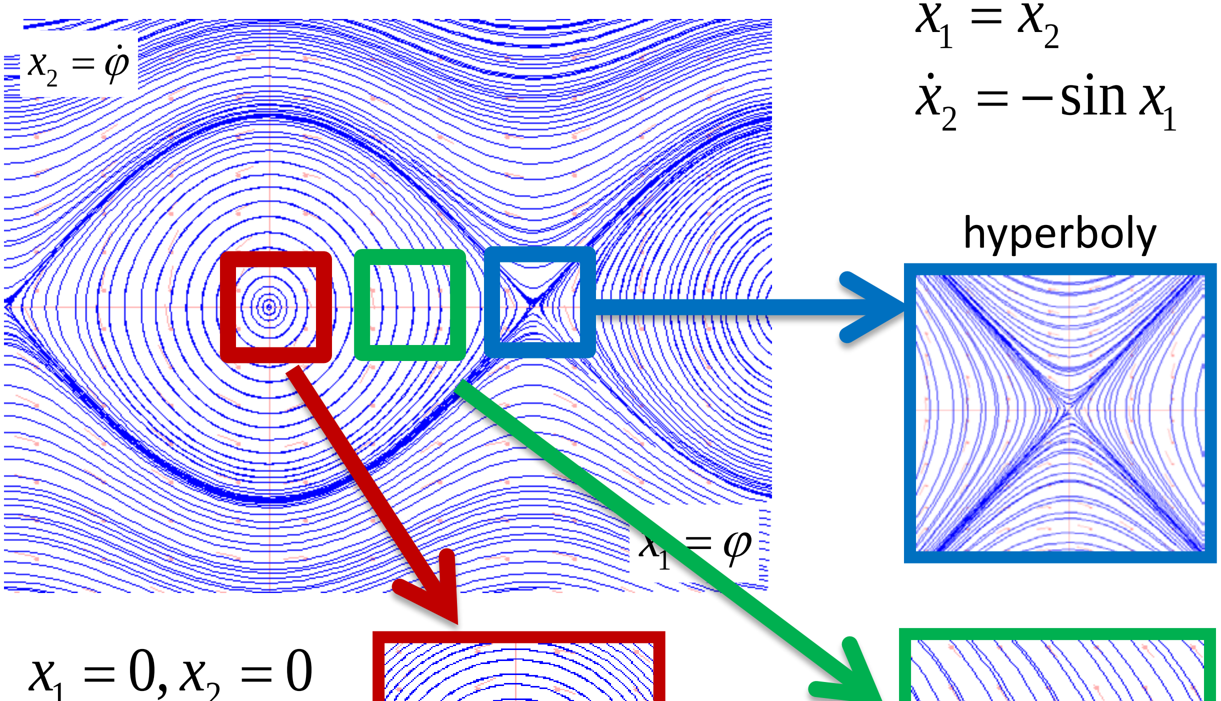
vodorovně $\quad x_{1,p} = y_p = \varphi_p = \pi/2 \quad x_{2,p} = \dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0 \quad \rightarrow \quad \cos\pi/2 = 0$

Geometrická interpretace

- Linearizace ve fázovém portrétu

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\sin x_1$$

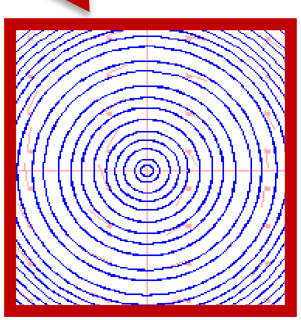
hyperboly



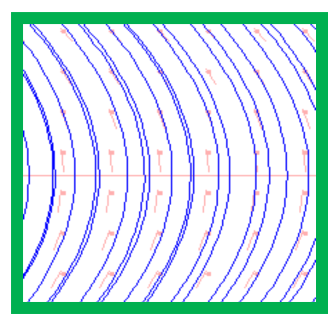
$$x_{1p} = \pi, x_{2p} = 0$$
$$\Delta\dot{x}_1 = \Delta x_2$$
$$\Delta\dot{x}_2 = \Delta x_1$$

$$x_1 = 0, x_2 = 0$$

$$\Delta\dot{x}_1 = \Delta x_2$$
$$\Delta\dot{x}_2 = -\Delta x_1$$



kružnice

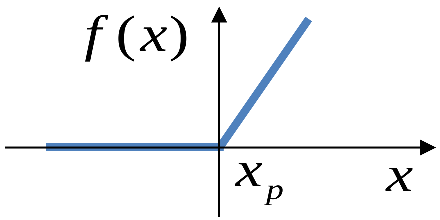


paraboly

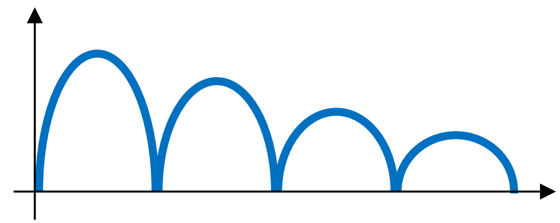
$$x_{1p} = \frac{\pi}{2}, x_{2p} = 0$$
$$\Delta\dot{x}_1 = \Delta x_2$$
$$\Delta\dot{x}_2 = -1$$
$$(\Delta u = -1)$$

Někdy lineární aproximace neexistuje

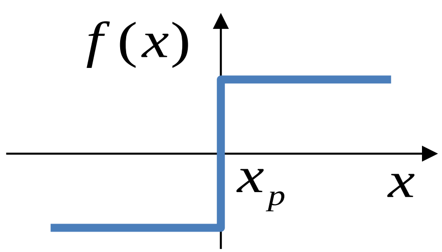
- Nehladká funkce:
  diody, tlumiče

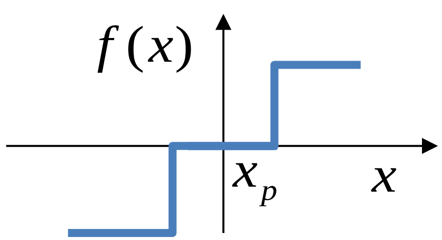


- Různé funkce, přepínání, (event-driven)
  skákající míč

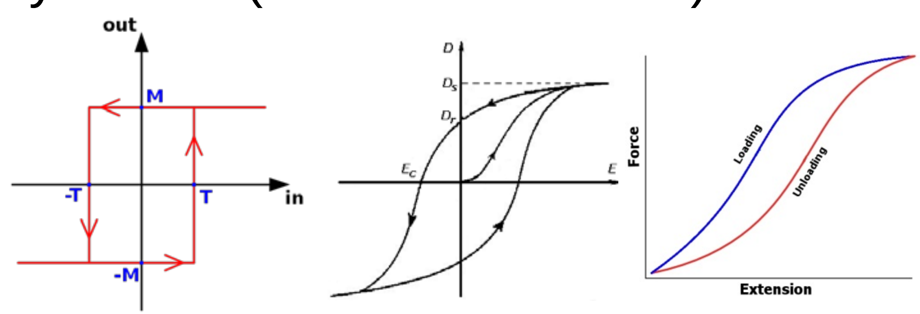


- Nespojitá funkce:
  relé, Coulombovo tření





- Není to funkce (v matematickém smyslu):
  hystereze (závislost na dráze)

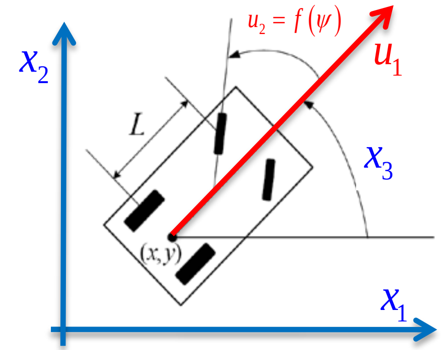


elektrická: feroelektrický materiál
elastická: gumička
termostat, Schmidtův spínač

Někdy lineární aproximace existuje, ale nepomůže

- Některé nelineární soustavy nepomůže lineárně aproximovat
- Příklad: kinematika auta v rovině

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 \cos x_3 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \sin x_3 \\ \dot{x}_3 &= u_2\end{aligned}$$



- Přibližná linearizace v okolí bodu (0,0,0) je

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= 0 \\ \dot{x}_3 &= u_2\end{aligned}$$

není řiditelná

$$\mathbf{A} = \mathbf{0}_{3\times 3}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Con} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

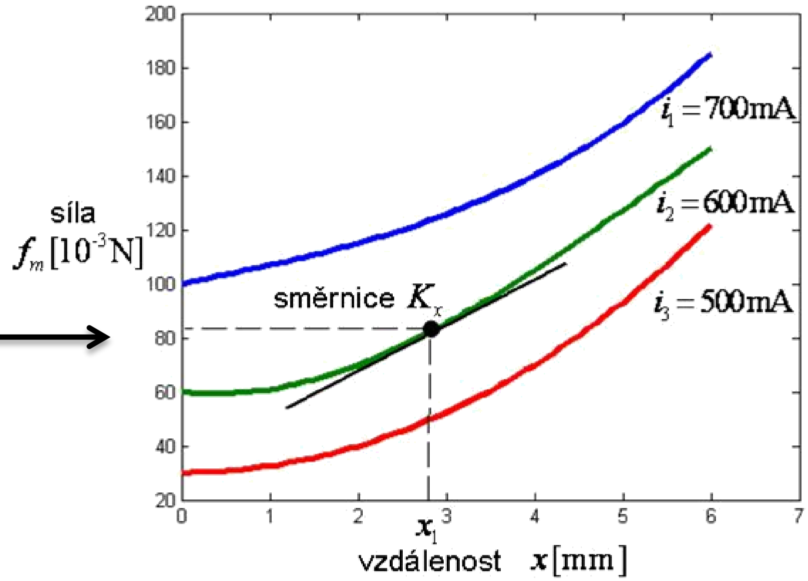
- Intuitivně známý fakt: autem nelze přímo pohnout „do strany“
- Můžeme popojíždět vpřed-vzad s střídavým natáčením kol, ale to už je nelineární řízení
- To plyne z tzv. ne-holonomického omezení $\dot{x}_1 \sin x_3 - \dot{x}_2 \cos x_3 = 0$ které platí, pokud kola nekloužou do strany

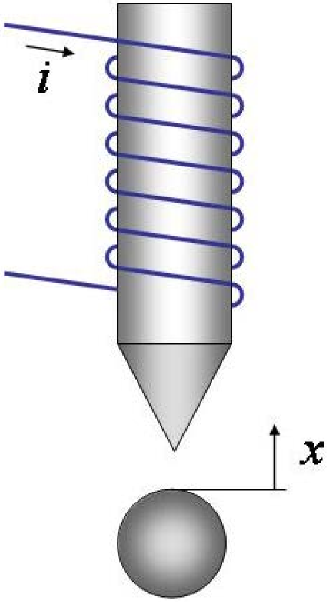
Aproximace pro nelinearity dané grafem

Magnetický levitátor s kuličkou (zjednodušené magnetické ložisko)

- rovnice pohybu kuličky $m\ddot{x} = f_m(x,i) - mg$ kde síla elektromagnetu je teoreticky $f_m(x,i) \approx 1/x^2$, ale prakticky složitější
- experimentálně změřené křivky (kulička *d* = 1cm, *m* = 8,4.10^{-3} kg)

$$mg = 0.084\,\mathrm{mN}$$

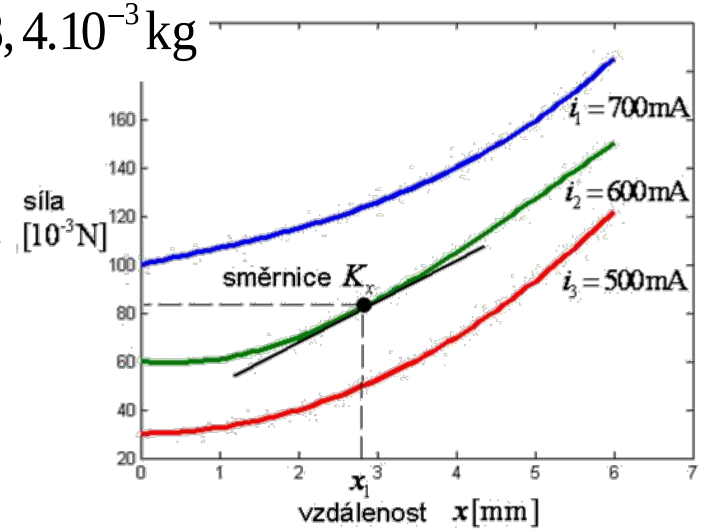




- ekvilibrium = magnetická síla vyruší gravitaci

pokračování

$$\ddot{x}_p = 0, i_p = 600\,\mathrm{mA}, x_p \approx 3\mathrm{mm},\ f_m(x_p, i_p) = mg, m = 8{,}4.10^{-3}\,\mathrm{kg}$$



$$m\ddot{x} = f_m(x,i) - mg$$

$$m\left(0 + \Delta\ddot{x}\right) = f_m(x_p, i_p) + \left.\frac{\partial f_m}{\partial x}\right|_{\substack{x_p\\ i_p}} \Delta x + \left.\frac{\partial f_m}{\partial i}\right|_{\substack{x_p\\ i_p}} \Delta i - mg$$

$$m\Delta\ddot{x} = \left.\frac{\partial f_m}{\partial x}\right|_{\substack{x_p\\ i_p}} \Delta x + \left.\frac{\partial f_m}{\partial i}\right|_{\substack{x_p\\ i_p}} \Delta i$$

určíme z grafu jako směrnici

odhadneme z grafu

$$\left.\frac{\partial f_m}{\partial x}\right|_{x_p, i_p} \cong 14\,\mathrm{N/m}$$

$$\left.\frac{\partial f_m}{\partial i}\right|_{x_p, i_p} \cong \frac{f(x_p, i_1) - f(x_p, i_3)}{i_1 - i_3} = \frac{122\times 10^{-3} - 42\times 10^{-3}}{(700-500)\times 10^{-3}} = 0.4\,\mathrm{N/A}$$

Lineární aproximace je $\boxed{\Delta\ddot{x} = 1667\Delta x + 47{,}6\Delta i}$

kde signály jsou v jednotkách SI $\Delta x[\mathrm{m}], \Delta i[A]$

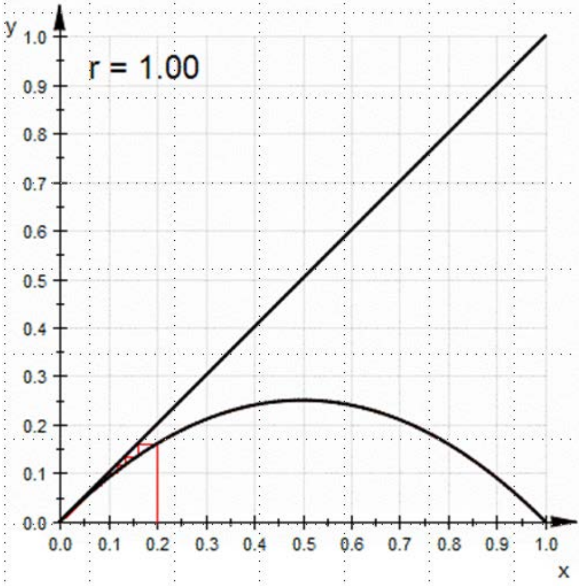
Nelineární diskrétní systém

- Logistické zobrazení

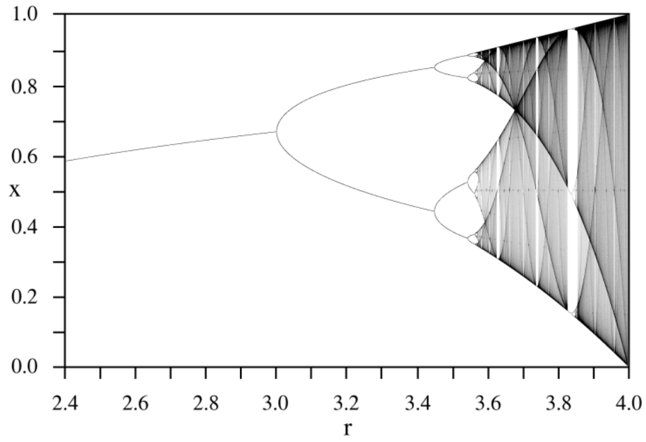
$$x(k+1) = rx(k)(1 - x(k))$$

- Demografický model - vystihuje 2 jevy: pro malé populace optimismus (míra růstu roste úměrně s velikostí populace), pro velké populace vyhladovění (míra růstu klesá úměrně rozdílu „úživnost prostředí“ minus velikost populace)
- Chování silně závisí na parametru *r*

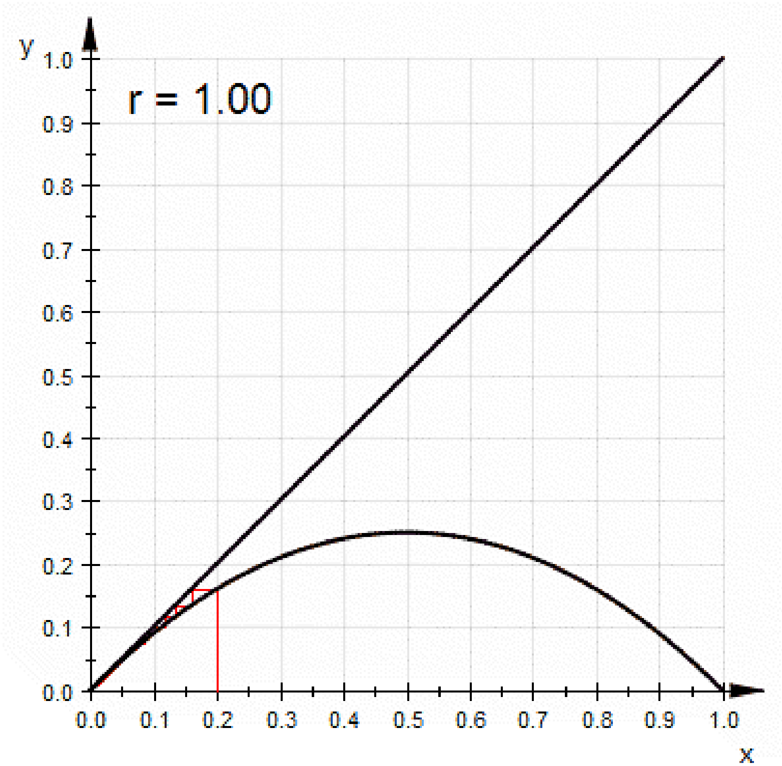
  řešení pavučinovým diagramem



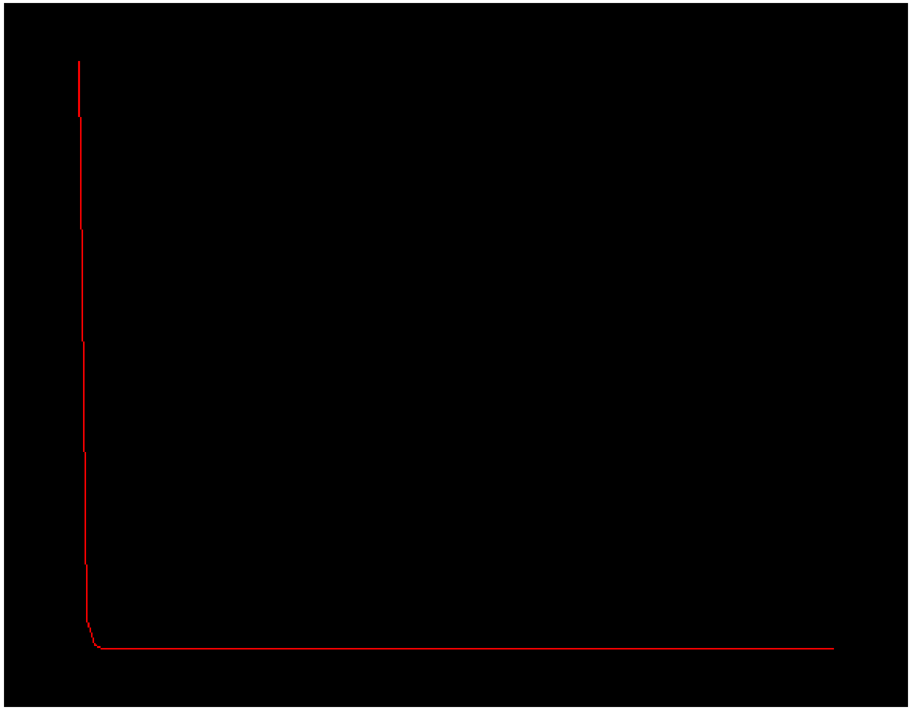
- bifurkace



Nelineární diskrétní systém



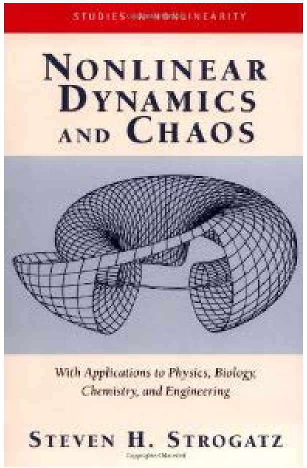
Pavučinový diagram: Opakovaná řešení pro různá r (ekvilibria, oscilace s různou periodou, chaos)



Simulace: Opakovaná řešení (vždy 100 kroků) pro různá r (od r = 0 (červená) do r= 4 (purpurová)

Další čtení a hraní

- Různé nelineární modely v Simulinku
  http://www.hedengren.net/research/models.htm
- Aplet kreslící fázové portréty
  http://www.bae.ncsu.edu/people/faculty/seaboch/phase/newphase.html
- Kyvadlo na Wikipedii
  http://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_(mathematics)
- Hezká a čtivá (odborná) kniha o nelineárních systémech a chaosu - na Amazonu



- Složitější „matematické“ knihy, ale ty jsou spíš až pro magisterský kurz NES, nebo doktorské kurzy