Domácí úkol ARI
Opakování předmětu SAS

Josef Čech

24. února 2018

Úkol 1

doplnit čeho je to funkce tzn u x1 udělat x1(t)

překontrolovat okdazy na rovnice (1), (2)

Je dán systém

$$G(s) = \frac{-0.2s + 4}{(s+4)(s+2)(s+1)} \tag{1}$$

Póly přenosu jsou: $-4, -2, -1$.
Všechny póly mají reálnou část zápornou, tj. leží v levé polorovině, proto je systém stabilní a má smysl počítat statické zesílení a koncovou hodnotu.

Úkol 1.1

$$K = \lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{-0.2s + 4}{(s+4)(s+2)(s+1)} = \frac{1}{2} \tag{2}$$

Statické zesílení K je $\frac{1}{2}$.

Úkol 1.2

Odezvu na vstup $u(t) = 5$ můžeme nalézt v časové oblasti pomocí konvoluce s impulsní odezvou nebo snáze ve frekvenční oblasti jako součin přenosové funkce $G(s)$ a Laplaceova obrazu vstupu (označme $U(s)$).
Nejprve tedy určíme obraz vstupu

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{5 * \mathbb{1}(t)\} = \frac{5}{s} \tag{3}$$

a vyjádříme obraz odezvy

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{-0.2s + 4}{(s+4)(s+2)(s+1)} \frac{5}{s} \tag{4}$$

dále využijeme větu o koncové hodnotě pro stabilní systémy

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s) \tag{5}$$

kde $F(s)$ je Laplaceův obraz funkce $f(t)$.
Ustálená hodnota odezvy je tedy

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{-0.2s + 4}{(s+4)(s+2)(s+1)} \frac{5}{s} = \frac{5}{2}. \tag{6}$$

Úkol 1.3

Postup nalezení odezvy na $u(t) = \delta(t)$ je stejný jako v předchozím případě. Víme, že

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \tag{7}$$

pak obraz vstupu

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{-0.2s + 4}{(s+4)(s+2)(s+1)} \tag{8}$$

a podle věty o koncové hodnotě je ustálená hodnota odezvy

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{-0.2s + 4}{(s+4)(s+2)(s+1)} = 0. \tag{9}$$

Úkol 2

Je dána soustava diferenciálních rovnic

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -2x_1(t) + 20x_2(t) \tag{10}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{2}x_1(t) \tag{11}$$

s počátečními podmínkami $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Úkol 2.1

Pomocí Laplaceovy transformace vyřešíme zadanou soustavu diferenciálních rovnic.
Nejprve naleznu Laplaceovy obrazy rovnic

$$sX_1(s) - 6 = -2X_1(s) + 20X_2(s) \tag{12}$$

$$sX_2(s) = -\frac{1}{2}X_1(s) \tag{13}$$

z rovnice (5) plyne

$$X_1(s) = -2sX_2(s) \tag{14}$$

dosazením do rovnice (4) dostaneme

$$-2s^2X_2(s) - 6 = 4sX_2(s) + 20X_2(s) \tag{15}$$

nyní již snadno nahlédneme dvojici řešení a upravíme doplněním jmenovatele na čtverec pro snadnější provedení zpětné transformace

$$X_1(s) = \frac{6s}{s^2+2s+10} = 6\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} - 2\frac{3}{(s+1)^2+3^2} \tag{16}$$

$$X_2(s) = \frac{-3}{s^2+2s+10} = \frac{-3}{(s+1)^2+3^2} \tag{17}$$

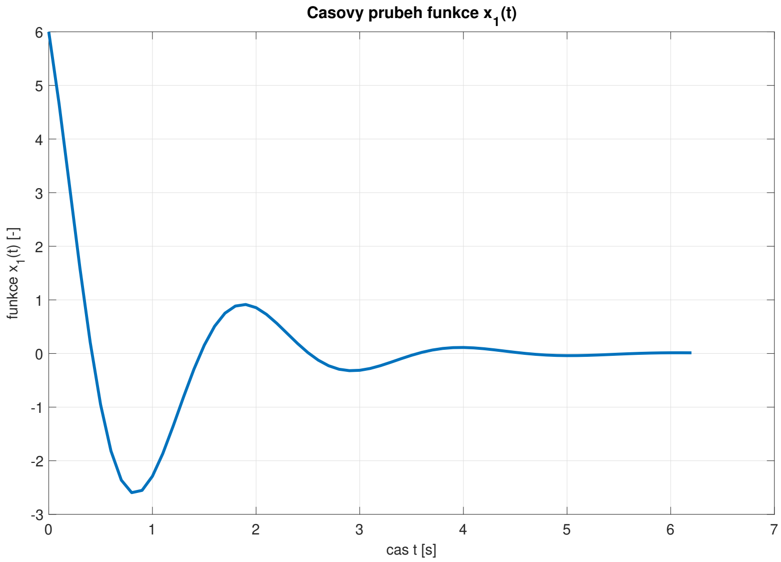
Provedeme inverzní Laplaceovu transformaci a dostaneme výsledné funkce v časové oblasti

$$x_1(t) = 6e^{-t}\cos(3t) - 2e^{-t}\sin(3t) \tag{18}$$

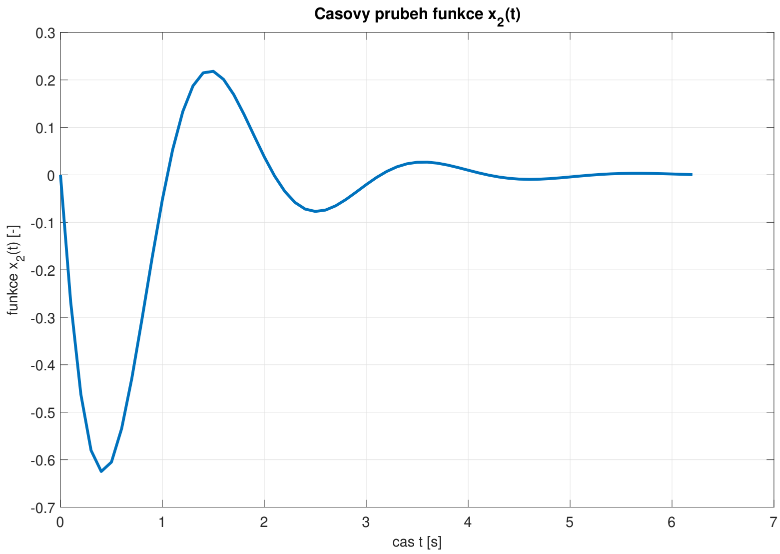
$$x_2(t) = -e^{-t}\sin(3t). \tag{19}$$

Úkol 2.2

Nyní v Matlabu vykreslíme spočtené funkce.



(a) Graf funkce $x_1(t)$



(b) Graf funkce $x_2(t)$

Obrázek 1: Vykreslení dvojice funkcí $x_1(t)$ a $x_2(t)$ v Matlabu

Úkol 3

Je zadaný systém

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{20}$$

$$\dot{x}_2 = -2\sin(x_1) - \frac{1}{10}x_2 + u \tag{21}$$

$$y = x_1 \tag{22}$$

Úkol 3.1

Nalezneme rovnovážný pracovní bod $P = \begin{bmatrix} x_{1p} & x_{2p} & y_p & u_p \end{bmatrix}$ pro $u_p(t) = 2$.
Jelikož se jedná o rovnovážný bod víme, že $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ a proto z rovnice (13) plyne

$$x_{2p} = 0 \tag{23}$$

dosazením tohoto výsledku do rovnice (14) dostaneme

$$x_{1p} = \frac{\pi}{2} \tag{24}$$

poslední rovnost (15) nám dá kompletní výsledek

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 & \frac{\pi}{2} & 2 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Úkol 3.2

Nyní nalezneme linearizovaný model v pracovním bodě P.
Zavedeme pomocné pojmenování nelineárních funkcí

$$f_1 = x_2 \tag{26}$$

$$f_2 = -2\sin(x_1) - \frac{1}{10}x_2 + u \tag{27}$$

$$g = x_1 \tag{28}$$

a určíme matice řízení

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\cos(x_1) & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}\Bigg|_P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}\Bigg|_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Big|_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \end{bmatrix}\Big|_P = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{32}$$

obecný tvar linearizovaného přírustkového modelu má v maticovém zápisu tvar

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = A\Delta\mathbf{x} + B\Delta u \tag{33}$$

$$\Delta y = C\Delta\mathbf{x} + D\Delta u \tag{34}$$

a pro naše spočtené matice dostaneme

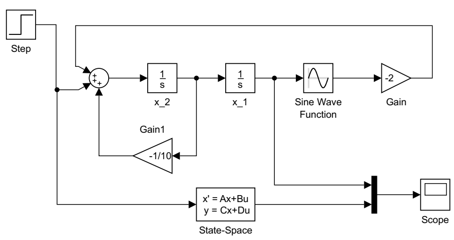
$$\Delta\dot{x}_1 = \Delta x_2 \tag{35}$$

$$\Delta\dot{x}_2 = -\frac{1}{10}\Delta x_2 + \Delta u \tag{36}$$

$$\Delta y = \Delta x_1. \tag{37}$$

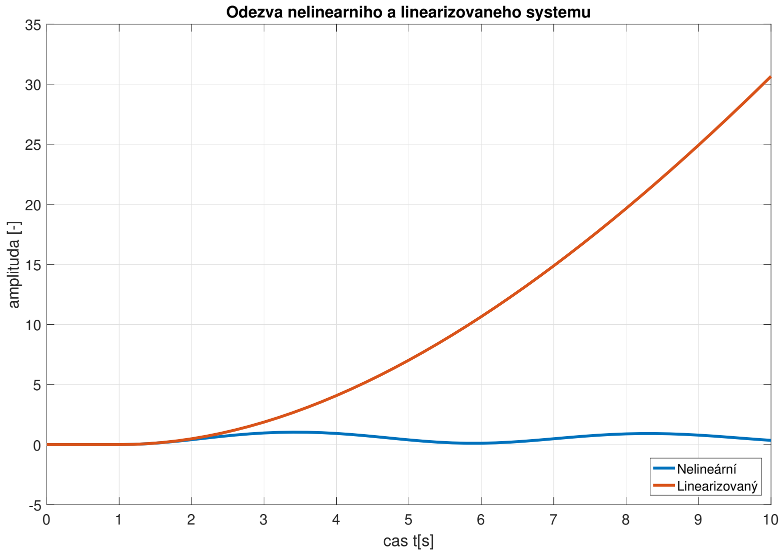
Úkol 3.3

V Simulinku namodelujeme nelineární a linearizovaný systém

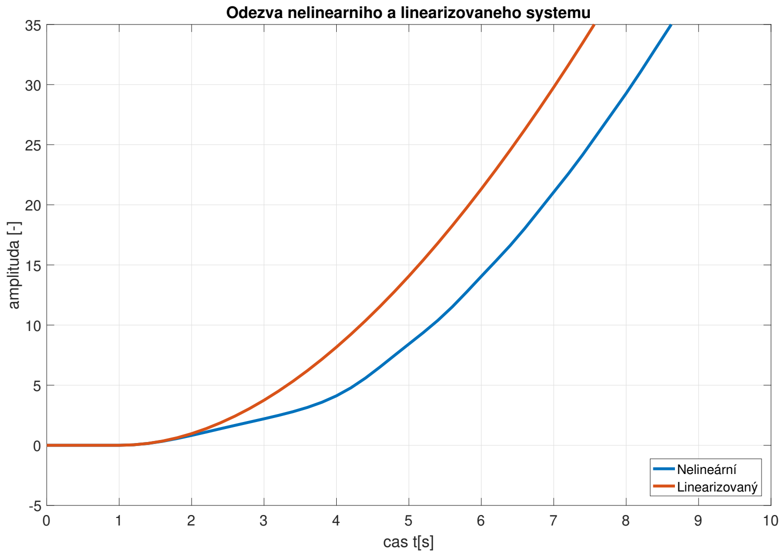


Obrázek 2: enter some koment

dále vykreslíme grafy s porovnáním odezev nelineárního a linearizovaného systému pro zadané vstupy



(a) Odezvy na vstup $u(t) = 1$



(b) Odezvy na vstup $u(t) = 2.001$

Obrázek 3: Porovnání odezev na různé vstupy pro nelineární a linearizovaný systém

Úkol 4

Úkol 4.1

Je dána přenosová funkce systému

$$G_1(s) = \frac{s+1}{(s+10)^2} \tag{38}$$

vlozit ofocenou charakteristiku

Úkol 4.2

Zadaná frekvenční charakteristika odpovídá systému

$$G_2(s) = -\frac{(1 - \frac{s}{10^{-1}})(1 + \frac{s}{10})}{(1 + \frac{s}{10^{-3}})(1 + \frac{s}{10^3})} \tag{39}$$

if time –> diskuse jednotlivých kroků AND upravit do lepsiho tvaru

Úkol 5

Máme zadaný vnitřní popis systému

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & -2 \\ -9 & 9 & 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \tag{40}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \tag{41}$$

Tedy symbolicky

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \tag{42}$$

$$y(t) = C\mathbf{x}(t) \tag{43}$$

Převedeme jej Laplaceovou transformací do frekvenční oblasti

$$s\mathbf{X}(s) = A\mathbf{X}(s) + BU(s) \tag{44}$$

$$Y(s) = C\mathbf{X}(s) \tag{45}$$

Vyřešíme rovnici (37) pro $\mathbf{X}(s)$

$$(sI - A)\mathbf{X}(s) = BU(s) \tag{46}$$

$$\mathbf{X}(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \tag{47}$$

kde I je jednotková matice. Dosazením za $\mathbf{X}(s)$ do rovnice (38) dostaneme

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) \tag{48}$$

jednoduchou úpravou získáme

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B \tag{49}$$

Využitím Matlabu dosadíme zadané matice a vyjádříme výsledný přenos

$$G(s) = \frac{4s^3 - 8s^2 - 20s + 24}{s^4 + s^3 - 6s^2 - 4s + 8} \tag{50}$$

Úkol 6

Je zadaný systém

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{51}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \tag{52}$$

Systém je asymptoticky stabilní, pokud reálná část všech vlastních čásel matice řízení **A** jsou záporná. Matice **A** je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{53}$$

podle identity

$$\lambda_i = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \tag{54}$$

vypočteme její vlastní čísla

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{3} \tag{55}$$

$$\lambda_3 = 1 \tag{56}$$

systém tedy není asymptoticky stabilní, protože $\Re(\lambda_3) > 0$.

Úkol 7

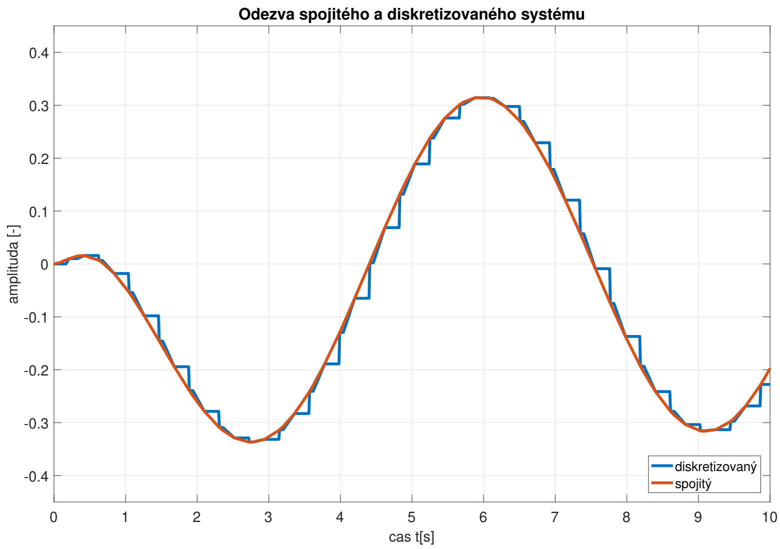
Je zadaný systém

$$G(s) = \frac{s-3}{(s+1)(s+7)} \tag{57}$$

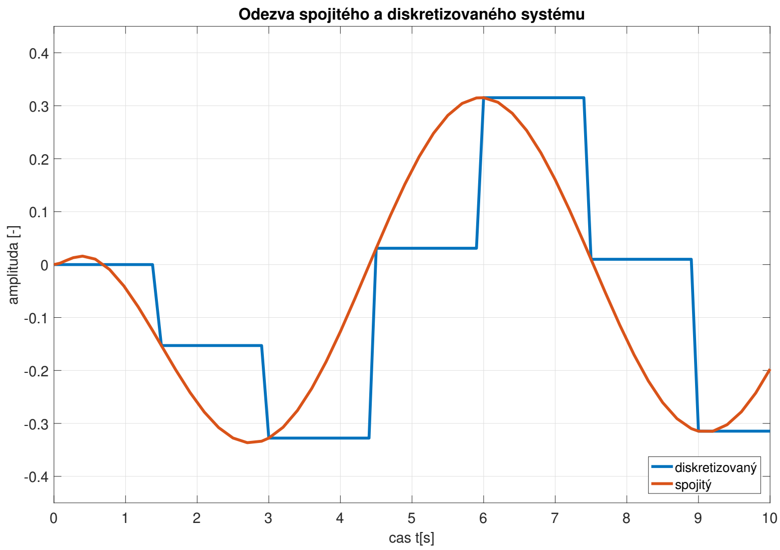
Nejprve systém diskretizujeme metodou *zero order hold*

$$G(z) = z^{-3}\frac{0.05642z - 0.07695}{z^2 - 1.401z + 0.4493} \tag{58}$$

Jako vhodný vzorkovací krok zvolíme 0.21 s a jako špatný vzorkovací krok 1.5 s. Na vstupu necháme působit sinus o periodě 1 rad/s.
V Matlabu vykreslíme grafy jednotlivých průběhů



(a) Odezva na sinus s vzorkovacím krokem 0.21 s



(b) Odezva na sinus s vzorkovacím krokem 1.5 s

Obrázek 4: Porovnání odezev pro různé vzorkovací kroky

Úkol 8

Systém je stabilní, pokud všechny reálné části pólů přenosu (kořeny jmenovatele) jsou záporné. Je astatický, má-li pól v nule a násobnost určuje řád astatismu. Kmitá, existuje-li pól s netriviální imaginární částí.

Úkol 8.1

$$G_1(s) = -\frac{s-12}{(s+1)(5s+2)(s+3)} \tag{59}$$

Jednodyché póly přenosu jsou: $-1, -\frac{2}{5}, -3$.
Systém je stabilní, statický a nekmitavý.

Úkol 8.2

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s - 1} \tag{60}$$

Jednodyché póly přenosu jsou: $-1.28078, 0.780776$.
Systém je nestabilní, statický a nekmitavý.

Úkol 8.3

$$G_3(s) = \frac{1}{s^2} \tag{61}$$

Dvojnásobný pól přenosu je: 0.
Systém je nestabilní, astatický (astatismus 2. řádu), nekmitavý.

Úkol 8.4

$$G_4(s) = \frac{s+2}{s^2-2} \tag{62}$$

Jednoduché póly přenosu: $\pm\sqrt{2}$.
Systém je nestabilní, statický, nekmitavý.

Úkol 9

Jsou dány dva systémy

$$G_1(s) = \frac{s-1}{s+1}, G_2(s) = \frac{1}{s} \tag{63}$$

Úkol 9.1

Pro paralelní zapojení platí

$$H(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{s^2+1}{s(s+1)} \tag{64}$$

Úkol 9.2

Pro sériové zapojení platí

$$H(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{s-1}{s(s+1)} \tag{65}$$

Úkol 9.3

Pro zadané zpětnovazební zapojení vytvoříme pomocnou proměnnou na vodiči za sčítačkou $x(s)$

$$x(s) = r(s) - y(s) \tag{66}$$

vyjádříme výstup $y(s)$ pomocí naší pomocné proměnné a následně za ní dosadíme

$$y(s) = x(s)G_1(s)G_2(s) = r(s)G_1(s)G_2(s) - y(s)G_1(s)G_2(s) \tag{67}$$

nyní již snadno určíme výsledný přenos

$$H(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)} = \frac{s-1}{s^2+2s-1}. \tag{68}$$

Úkol 9.4

Stejně jako v předchozím případě využijeme pomocné proměnné $x(s)$ za sčítačkou, pro kterou bude nyní platit

$$x(s) = r(s) - y(s)G_2(s) \tag{69}$$

vyjádříme výstup $y(s)$ a dosadíme

$$y(s) = x(s)G_1(s) = r(s)G_1(s) - y(s)G_1(s)G_2(s) \tag{70}$$

a vyjádříme výsledný přenos systému

$$H(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{s(s-1)}{s^2 + 2s - 1}. \tag{71}$$

Úkol 10

Je zadán diskrétní systém

$$3y(k) - y(k-1) + \frac{1}{2}y(k-2) = u(k-1) - u(k-2) \tag{72}$$

Úkol 10.1

Pomocí Z-transformace převedeme rovnost do frekvenční oblasti

$$3Y(z) - z^{-1}Y(z) + \frac{1}{2}z^{-2}Y(z) = z^{-1}U(z) - z^{-2}U(z) \tag{73}$$

$$Y(z)(3 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}) = U(z)(z^{-1} - z^{-2}) \tag{74}$$

a vyjádříme přenosovou funkci

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{3 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{z-1}{3z^2 - z + \frac{1}{2}} \tag{75}$$

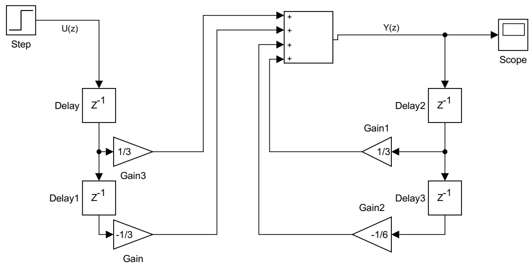
Úkol 10.2

Póly přenosu (kořeny jmenovatele funkce H(z)) jsou jednonásobné $p_{1,2} = \frac{1}{6} \pm i\frac{\sqrt{5}}{6}$.
Diskrétní systém je stabilní, pokud je modul všech pólů ostře menší než jedna, tj. leží v jednotkové kružnici.
Jelikož platí

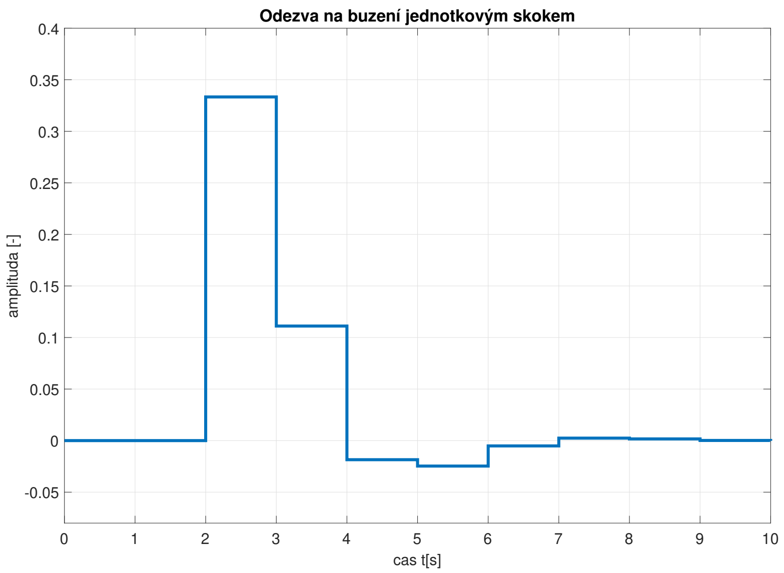
$$|p_1| = |p_2| = \frac{\sqrt{6}}{6} \approx 0.408 \tag{76}$$

je systém stabilní.

Úkol 10.3



Obrázek 5: Simulinkové schéma realizace zadaného přenosu



Obrázek 6: Odezva systému na $\mathbb{1}(t)$ se vzorkovací periodou $h = 1$

Úkol 11

Úkol 11.1

Přiřazení přechodových charakteristik impulzním charakteristikám

- (a) ↔ (f)
- (b) ↔ (d)
- (c) ↔ (e).

Úkol 11.2

co je prechodova charakteristika » je to to same jako odezva na jednotkovy skok? pak to zminit v komentari a ponechat vysledek

Vztah mezi impulzní odezvou $h(t)$ a přechodovou charakteristikou $w(t)$

$$h(t) = \frac{dw(t)}{dt} \tag{77}$$

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau. \tag{78}$$

Úkol 12

Úkol 12.1

Přiřazení odpovídajících frekvenčních charakteristik

- (a) $\leftrightarrow$ (f)
- (b) $\leftrightarrow$ (d)
- (c) $\leftrightarrow$ (e).

Úkol 12.2

Zesílení dostaneme z Nyqistovy frekvenční charakteristiky jako modul vektoru s počátečním bodem v počátku a koncovým na vykreslené křivce.
V našem případě to bude vektor, který leží ve 4. kvadrantu a svírá s kladnou reálnou poloosou 45°, tj. $-45°$ při standardním značení.
Systém tedy má v $-45°$ zesílení asi -3 dB.

Reference

[1] Leslie Lamport, *LaTeX: A Document Preparation System.* Addison Wesley, Massachusetts, 2nd Edition, 1994.

[2] LaTeXtutorials, http://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/

[3] Studenti předmětu ARI 2011, *ARI song (videoklip)* http://www.youtube.com/watch?v=5gDfQK7dD7c