

Domácí úkol ARI 02

Ladislav Štefka

4. března 2018

Úkol 1 Stabilita systému

Systém je stabilní pokud pro všechna vlastní čísla matice systému A platí, že jejich reálná část je menší než nula.

Vlastní čísla můžeme vypočítat ručně, jako kořeny rovnice $\det(A - \lambda E) = 0$, nebo použít Matlab a funkci $\text{eig}(A)$.

$$\lambda_{1,2} = \pm 2.1587 \quad (1)$$

$$\lambda_{3,4} = \pm 1.8626i \quad (2)$$

$$\lambda_{5,6} = \pm 1.7862i \quad (3)$$

Mezi vlastními čísly tedy existuje takové, jehož reálná část je větší než nula, a proto je systém nestabilní.

Úkol 2 Řiditelnost systému s jedním vstupem

Matice řiditelnosti:

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad n = \dim(A) \quad (4)$$

Systém je úplně řiditelný, pokud matice řiditelnosti je regulární, tedy neztrácí hodnotu.

Matici řiditelnosti vypočítám pro každý vstup pomocí Matlabu a spočítám její hodnotu.

Kód v Matlabu:

```
B1= [0 0 0 1 0 0];
B2= [0 0 0 0 1 0];
B3= [0 0 0 0 0 1];
B = [B1.' B2.' B3.'];
for i=1:3
    Bi = B(:,i)
    C= [Bi A*Bi A^2*Bi A^3*Bi A^4*Bi A^5*Bi]
    rank(C)
end
```

Úkol 2.1 $B = B_1 \approx \xi$

Vstup:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Matice řiditelnosti:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3.3809 & 0 & 20.1921 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2.3810 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3.3809 & 0 & 20.1921 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2.3810 & 0 & -35.1688 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Hodnota matice:

$$\text{rank}(C) = 4 \quad (7)$$

Úkol 2.2 $B = B_2 \approx \zeta$

Vstup:

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Matice řiditelnosti:

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 2.3810 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6.1904 & 0 & 8.7975 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2.3810 & 0 & 35.1688 \\ 1 & 0 & -6.1904 & 0 & 8.7975 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Hodnost matice:

$$\text{rank}(C) = 4 \quad (10)$$

Úkol 2.3 $B = B_3 \approx \eta$

Vstup:

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Matice řiditelnosti:

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3.1904 & 0 & 10.1787 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3.1904 & 0 & 10.1787 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Hodnost matice:

$$\text{rank}(C) = 2 \quad (13)$$

Pro každý vstup platí, že matice řiditelnosti je singulární, a proto samostatně žádným z nich není systém říditelný.

Úkol 3 Přenos systému s jedním vstupem

Přenos systému vypočítáme podle vzorce

$$H(s) = (sE - A)^{-1}B. \quad (14)$$

Kód v Matlabu:

```

B1= [0 0 0 1 0 0];
B2= [0 0 0 0 1 0];
B3= [0 0 0 0 0 1];
B = [B1.' B2.' B3.'];
for i=1:3
    Bi = B(:,i);
    H = inv(s*eye(6) - A)*Bi;
end

```

Úkol 3.1 $B = B_1 \approx \xi$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad H_1 = \begin{bmatrix} \frac{s^4+5.4s^2+7}{s^6+2s^4-20s^2-52} \\ \frac{-2s^3-6.4s}{s^6+2s^4-20s^2-52} \\ 0 \\ \frac{s^5+5.4s^3+7s}{s^6+2s^4-20s^2-52} \\ \frac{-2s^4-6.4s^2}{s^6+2s^4-20s^2-52} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Úkol 3.2 $B = B_2 \approx \zeta$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} \frac{2s^3+6.4s}{s^6+2s^4-20s^2-52} \\ \frac{s^4-4.2s^2-24}{s^6+2s^4-20s^2-52} \\ 0 \\ \frac{2s^4+6.4s^2}{s^6+2s^4-20s^2-52} \\ \frac{s^5-4.2s^3-24s}{s^6+2s^4-20s^2-52} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Úkol 3.3 $B = B_3 \approx \eta$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad H_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{s^4+1.2s^2-16}{s^6+2s^4-20s^2-52} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{s^5-1.2s^3-16s}{s^6+2s^4-20s^2-52} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Pro každou matici přenosu na stav platí, že obsahuje nulový řádek, a proto systém není říditelný.

Úkol 4 Řiditelnost celého systému se třemi vstupy

Vstup:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Matice říditelnosti:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3.38 & 0 & 0 & 0 & 2.38 & 0 & 20.19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -6.19 & 0 & -2.38 & 0 & 0 & 0 & 8.80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10.18 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3.38 & 0 & 0 & 0 & 2.38 & 0 & 20.19 & 0 & 0 & 0 & 35.17 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -6.19 & 0 & -2.38 & 0 & 0 & 0 & 8.80 & 0 & -35.17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10.18 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Poznámka: výsledky jsou zaokrouhlené na dvě desetinná místa.

Hodnost matice:

$$\text{rank}(C) = 6 \quad (20)$$

Matice říditelnosti je regulární, tedy všemi třemi vstupy současně lze systém úplně řídit.

Úkol 5 Přenos celého systému se třemi vstupy

Samotný výpočet jsem provedl pomocí Matlabu stejně jako v úkolu 3, přičemž vstup je stejný jako v úkolu 4.

$$H = \frac{1}{-52 - 20s^2 + 2s^4 + s^6} \begin{bmatrix} 7 + 5.4s^2 + s^4 & 6.4s + 2s^3 & 0 \\ -6.4s - 2s^3 & -24 - 4.2s^2 + s^4 & 0 \\ 0 & 0 & -16 - 1.2s^2 + s^4 \\ 7s + 5.4s^3 + s^5 & 6.4s^2 + 2s^4 & 0 \\ -6.4s^2 - 2s^4 & -24s - 4.2s^3 + s^5 & 0 \\ 0 & 0 & -16s - 1.2s^3 + s^5 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Matice přenosu na stav neobsahuje nulové řádky, což je nutná podmínka k tomu, aby byl systém říditelný. O jeho říditelnosti, ale takto nemůžeme rozhodnout.

Reference

- [1] Leslie Lamport, *L^AT_EX: A Document Preparation System*. Addison Wesley, Massachusetts, 2nd Edition, 1994.
- [2] L^AT_EXtutorials, <http://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/>
- [3] Studenti předmětu ARI 2011, *ARI song (videoklip)* <http://www.youtube.com/watch?v=5gDfQK7dD7c>