Domácí úkol ARI x

Vaše jméno

February 24, 2018

Úloha 1

1. Zosilnenie systému môžeme hľadať iba v prípade, že je stabilný. Systém je stabilný pokiaľ sa všetky jeho póly nachádzajú v ľavej polrovine roviny rozdelenou osou Y (ich reálna časť je záporná).
   Keďže korene menovateľa prenosu, a teda póly, sú všetky záporné (-4,-2,-1), tento systém je stabilný a môžeme teda spočítať statické zosilenie.

   $$\lim_{s \to 0} s \frac{1}{s} G(s)$$

   Potom statické zosilnenie K systému môžeme vypočítať:

   $$K = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{s} \frac{(-0.2s + 5)}{(s+4)(s+2)(s+1)} = \frac{1}{2}$$

2. Aby sme daný vstup

   $$u(t) = 5$$

   mohli využiť, musíme ho previesť do Laplaceovej oblasti.

   $$U(s) = \frac{5}{s}$$

   Keďže daný systém je stabilný použijeme vetu o koncovej hodnote.

   $$\lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} sU(s)G(s)$$

   A po dosadení dostaneme

   $$\lim_{s \to 0} s \frac{5}{s} \frac{(-0.2s + 5)}{(s+4)(s+2)(s+1)} = \frac{5}{2}$$

3. Za vstup sme dostali Diracov impulz

   $$u(t) = \delta$$

   O jeho Laplaceovom obraze vieme, že je rovný 1

   $$U(s) = 1$$

   A teda postupujeme ako v predošlej časti za využitia vety o koncovej hodnote.

   $$\lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} sU(s)G(s)$$

   Po dosadení dostaneme

   $$\lim_{s \to 0} s1 \frac{(-0.2s + 5)}{(s+4)(s+2)(s+1)} = 0$$

Úloha 2

1. Zadanie sústavy rovníc

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -2x_1(t) + 20x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{2}x_1(t)$$

Počiatočné podmienky

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rovnice prevedieme do Laplaceovej oblasti

$$sX_1(s) - x_1(0) = -2X_1(s) + 20X_2(s)$$

$$sX_2(s) - x_2(0) = -\frac{1}{2}X_1(s)$$

Dosadím počiatočné podmienky

$$sX_1(s) - 6 = -2X_1(s) + 20X_2(s)$$

$$sX_2(s) - 0 = -\frac{1}{2}X_1(s)$$

Z druhej rovnice si vyjadrím $X_2(s)$

$$X_2(s) = -\frac{1}{2s}X_1(s)$$

a dosadím do prvej rovnice.

$$sX_1(s) - 6 = -2X_1(s) - 20\frac{1}{2s}X_1(s)$$

Ďalej upravujeme rovnicu, aby sme si vyjadrili $X_1(s)$

$$sX_1(s) + 2X_1(s) + 20\frac{1}{2s}X_1(s) = +6$$

$$X_1(s) = \frac{6s}{(s+1)^2 + 3^2}$$

A teda $X_2(s)$ je

$$X_1(s) = \frac{-3}{(s+1)^2 + 3^2}$$

Keď na tieto rovnice použijeme inverznú Laplaceovu transformáciu, dostaneme ich obraz v časovej oblasti.

$$x_1(t) = 6e^{-t}\cos(3t) - 2e^{-t}\sin(3t)$$

$$x_2(t) = -e^{-t}\sin(3t)$$

2.

Úloha 3

1. Máme zadané rovnice:

$$\dot{x_1} = x_2$$

$$\dot{x_2} = -2\sin(x_1) - \frac{1}{10}x_2 + u$$

$$y = x_1$$

Hľadáme rovnovážny pracovný bod za podmienky, že $u_p(t) = 2$ Z teórie vieme, že derivácie v okolí pracovného bodu sú nulové a tak pokračujeme

$$0 = x_2$$

$$0 = -2\sin(x_1) - \frac{1}{10}x_2 + u$$

$$y = x_1$$

$x_2 = 0$ dosadíme do druhej rovnice a vypočítame x_1

$$0 = -2\sin(x_1) - 0 + 2$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2}$$

A teda jednoducho dostaneme, že

$$y = \frac{\pi}{2}$$

Pracovný bod je teda

$$P = [\frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2}]$$

2.

$$\Delta x = A\Delta x + B\Delta u$$

$$\Delta y = C\Delta x + D\Delta u$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\cos(x_1) & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x_1} = x_2$$

$$\dot{x_2} = -\frac{1}{10}x_2 + u$$

$$y = x_1$$

3.

Úloha 4

1.

2. toto nie je dobry vysledok

$$K = \lim_{s \to 0} s\frac{1}{s}\frac{(-0.2s + 5)}{(s + 4)(s + 2)(s + 1)} = \frac{1}{2}$$

Úloha 5

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & -2 \\ -9 & 9 & 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}x$$

$$sX(s) = \mathbf{A}X(s) + \mathbf{B}U(s)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}X(s)$$

$$X(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

$$G(s) = \frac{4}{(s+4)}$$

Úloha 6

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ 1 & 2 & 0-\lambda \end{bmatrix}$$

Vlastne cisla $\lambda_1 = -1 + \sqrt{3}, \lambda_2 = -1 - \sqrt{3}, \lambda_3 = 1$

Úloha 7

1.

2.

Úloha 8

1.

2.

Úloha 9

1.

2.

Úloha 10

1.

2.

Úloha 11

1.

2.

Úloha 12

1.
2.

References

[1] Leslie Lamport, *LaTeX: A Document Preparation System*. Addison Wesley, Massachusetts, 2nd Edition, 1994.

[2] LaTeXtutorials, http://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/

[3] Studenti předmětu ARI 2011, *ARI song (videoklip)* http://www.youtube.com/watch?v=5gDfQK7dD7c