Domácí úkol ARI
Domácí úkol z přednášky 1

Josef Čech

25. února 2018

Úkol 1

Příkazem

```
[A, B, C, x0] = hw_1_std(23,06,96);
```

vygenerujeme osobní zadání a získáme matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 9 & -10 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 12 & 4 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 15 \\ 13 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Úkol 2

Mějme lineární dynamický systém ve stavovém popisu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \tag{5}$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \tag{6}$$

kde matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ odpovídají předchozímu úkolu.
Podle identity

$$\lambda_i = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \tag{7}$$

spočteme vlastní čísla matice $\mathbf{A}$

$$\lambda_i = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 9 & -10-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(-10-\lambda) - (-9) = \lambda^2 + 10\lambda + 9 \tag{8}$$

řešením této kvadratické rovnice dostaneme dvojici vlastních čísel

$$\lambda_1 = -1 \tag{9}$$

$$\lambda_2 = -9. \tag{10}$$

V MATLABu snadno ověříme pomocí příkazu

```
lambda = eig(A);
```

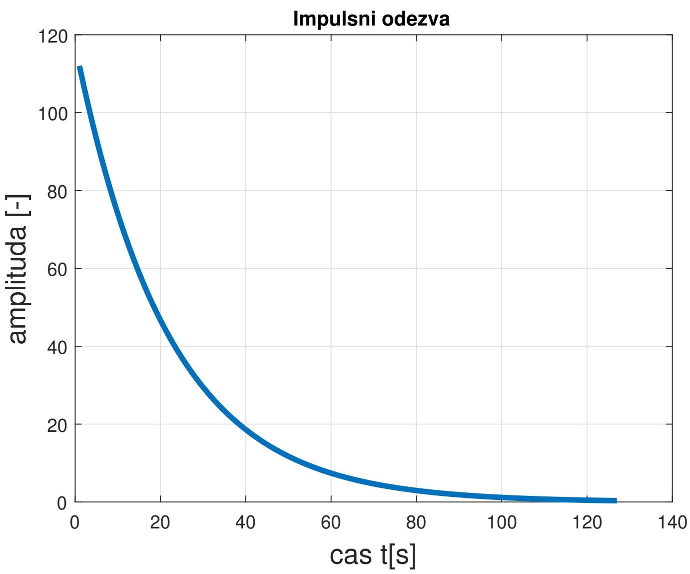
Úkol 3

Nejprve je třeba konvertovat matice do stavového popisu příkazem

```
state_space = ss(A, B, C, 0);
```

nyní již můžeme vykreslit impulsovou odezvu systému, a to pomocí příkazů

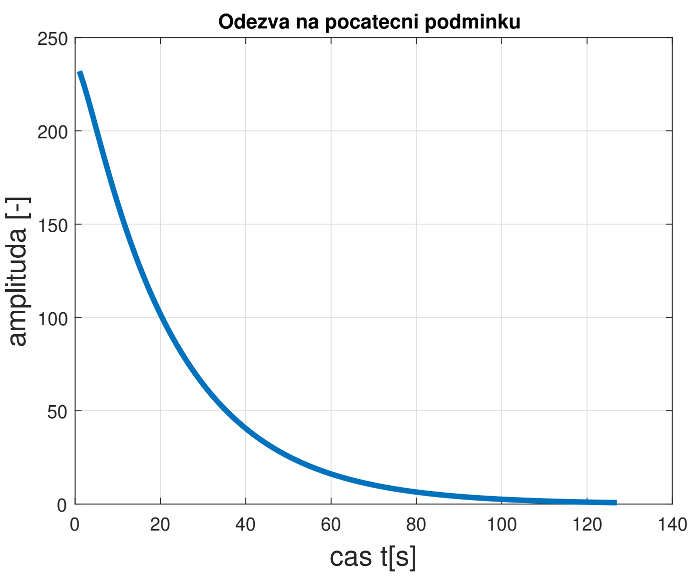
```
plot(impulse(state_space));
```



Obrázek 1: Impulsová odezva systému

dále vykreslíme odezvu systému na počáteční podmínku

```
plot(initial(state_space, x0));
```



Obrázek 2: Odezva systému na počáteční podmínku

Úkol 4

Zadané stavové rovnice převedeme Laplaceovou transformací do frekvenční oblasti

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \tag{11}$$
$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) \tag{12}$$

Vyřešíme rovnici (11) pro $\mathbf{X}(s)$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s) \tag{13}$$
$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) \tag{14}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice. Dosazením za $\mathbf{X}(s)$ do rovnice (12) dostaneme

$$Y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) \tag{15}$$

jednoduchou úpravou získáme

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \tag{16}$$

za matice řízení dosadíme vygenerované hodnoty a získáme výsledný přenos

$$G(s) = \frac{112s + 1008}{s^2 + 10s + 9}. \tag{17}$$

Úkol 5

Se známou přenosovou funkcí $G(s)$ vypočteme odezvu systému na jednotkový skok ve spektrální oblasti. Nejprve nalezneme Laplaceův obraz vstupu

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{\mathbb{1}(t)\} = \frac{1}{s} \tag{18}$$

a vyjádříme obraz odezvy

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{112s + 1008}{s^2 + 10s + 9}\frac{1}{s} \tag{19}$$

provedeme inverzní Laplaceovu transformaci pomocí reziduí

$$res_0(Y(s)e^{st}) = 112 \tag{20}$$
$$res_{-1}(Y(s)e^{st}) = -112e^{-t} \tag{21}$$
$$res_{-9}(Y(s)e^{st}) = 0 \tag{22}$$

součtem reziduí dostaneme odezvu v časové oblasti

$$y(t) = 112 - 112e^{-t}. \tag{23}$$

Úkol 6

Přenosovou funkci v MATLABu pomocí Control Systems Toolboxu určíme jako

```
[b, a] = ss2tf(A, B, C, 0);
G_cst = tf(b, a);
```

kde první příkaz vrátí vektor koeficientů čitatele a jmenovatele a durhý z nich sestaví přenosovou funkci. Výsledkem je

```
112 s + 1008
---------------- .
s^2 + 10 s + 9
```

Druhá metoda pomocí Polynomial Toolboxu

```
G_pol = sdf(A, B, C, 0);
```

s výsledkem

```
1.1e+02
--------
1 + s
```

při které došlo ke zkrácení dvojčlenu $(s + 9)$.

Úkol 7

Z přenosové funkce

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{112s + 1008}{s^2 + 10s + 9} \tag{24}$$

určíme zpět stavový model z obrazu diferenciální rovnice

$$s^2Y(s) + 10sY(s) + 9Y(s) = 112sU(s) + 1008U(s) \tag{25}$$

kde z koeficientů sestavíme kanonický tvar řiditelnosti

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -10 \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1008 & 112 \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}. \tag{29}$$

V dalším kroku ověříme náš výpočet v MATLABu příkazem

```
[a, b, c, d] = abcd(G_cst);
```

s výsledkem

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & -9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 112 & 1008 \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \tag{33}$$

což je alternativní tvar při obráceném značení stavů.