Domácí úkol ARI 01

Ladislav Štefka

25. února 2018

Úkol a) Vlastní zadání

Nejdříve vygeneruji vlastní zadání podle data narození.

```
[A, B, C, x0] = hw_1_std(02,02,97)
```

Funkce nám poskytla tyto údaje

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -15 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 15 \\ 11 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Úkol b) Vlastní čísla matice systému A

Vlastní čísla matice lze obecně vypočítat pomocí rovnice $det(A - \lambda E) = 0$, kde E je jednotková matice.

$$det\left(\begin{bmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 3 & -15-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \tag{2}$$

Následnou úpravou dostávám kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou hledaná vlastní čísla.

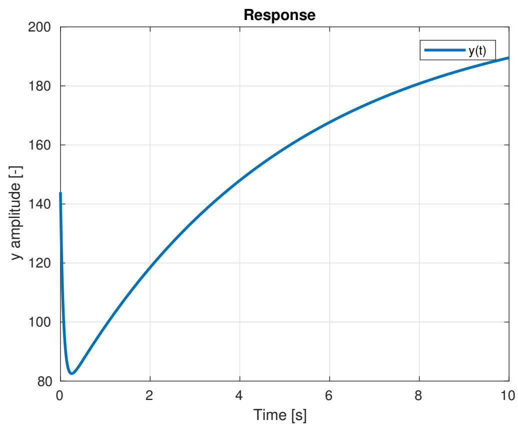
$$\lambda^2 + 15\lambda + 3 = 0 \tag{3}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-15 + \sqrt{213}) \doteq -0.2027 \tag{4}$$

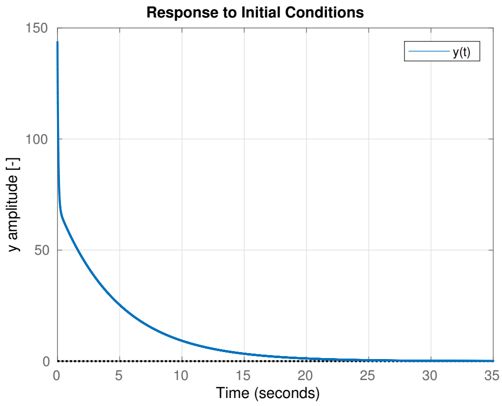
$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-15 - \sqrt{213}) \doteq -14.7973 \tag{5}$$

Výsledky jsme zaokrouhlil na 4 desetinná místa jako Matlab.

Úkol c) Odezva a odezva na počáteční stav



(a) Odezva systému na jednotkový skok



(b) Odezva systému na počáteční stav

Poznámka: v zadání je uvedeno pouze slovo odezva (bez bližší specifikace, zda jde o impuls, nebo skok).

Samotné grafy jsem vykreslil pomocí příkazů.

```
sys = ss (A,B,C,D);
initial (sys, x0)
----------------------------------------------------------
t = 0:0.01:10; %do the simulation from 0 to 2 seconds with step 0.01
u = ones(1,numel(t)); %step
[y,x] = lsim(A,B,C,D,u,t,x0);
plot(t,y)
```

Úkol d) Přenos systému

Obecně lze stavový popis SISO systému vyjádřit

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \tag{6}$$
$$\dot{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t). \tag{7}$$

Pro přenos obecně platí

$$Y(s) = \left[\mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right] + \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x_0}. \tag{8}$$

Pro výpočet samotného přenosu systému se ale uvažují nulové počáteční podmínky a matice D je nulová, a proto dostáváme

$$H(s) = \frac{Y(s}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}. \tag{9}$$

Do rovnice dosadím, pro samotný numerický výpočet použiji Matlab.

```
syms s;
H = C *inv((s * eye(2) -A))* B
```

$$H(s) = \frac{108s + 621}{s^2 + 15s + 3} \tag{10}$$

Úkol e) Odezva systému na jednotkový skok při nulových počátečních podmínkách

Díky nulovým počátečním podmínkám použít přenos ve tvaru (9).
Odezvu systému na jednotkový skok vypočítáme nejdříve v s rovině - jako násobení přenosu a Laplaceova obrazu jednotkového skoku.

$$W(s) = H(s)U(s) = H(s)\frac{1}{s} = \frac{108s + 621}{s(s^2 + 15s + 3)} \tag{11}$$

Do časové oblasti převedeme pomocí zpětné Laplaceovy transformace.

$$w(t) = \mathcal{L}^-1\left\{W(s)\right\} \tag{12}$$

Póly $W(s)$

$$p_1 = -14.7973 \tag{13}$$
$$p_2 = -0.2027 \tag{14}$$
$$p_3 = 0. \tag{15}$$

Výslednou odezvu vypočítáme metodou residuí.

$$res_{p_1}(W(s)e^{st}) = -4.5245 \tag{16}$$
$$res_{p_2}(W(s)e^{st}) = -202.4755 \tag{17}$$
$$res_{p_3}(W(s)e^{st}) = 207 \tag{18}$$

Výsledky jsem dostal pomocí funkcí v matlabu roots() a residue().
Výsledná odezva:

$$w(t) = -4.5245e^{-14.7973t} - 202.4755e^{-0.2027t} + 207 \tag{19}$$

Úkol f) Přenos vypočtený Matlabem

1. Přenos vypočtený **Control Systems Toolboxem**

```
close all;
[A, B, C, x0] = hw_1_std(02,02,97);
D=0;
sys = ss (A,B,C,D);
[b_p,a_p] = ss2tf(A,B,C,D); %b--polynom v citateli %a -- polynom ve jmenovateli
H_sys = tf(b_p,a_p)
```

2. Přenos vypočtený **Polynomial Toolboxem**

```
close all;
[A, B, C, x0] = hw_1_std(02,02,97);
D=0;
H_pol = sdf(A,B,C,D)
```

3. Přenos vypočtený matematickými operacemi

```
close all;
[A, B, C, x0] = hw_1_std(02,02,97);
D=0;
H = C *inv((s * eye(2) -A))* B
```

Ve všech případech vychází přenos stejně, což je dobrá zpráva.

Úkol g) Sestavení stavového modelu zpět

Z přenosové funkce určíme zpět stavový model přes diferenciální rovnici.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{108s + 621}{s^2 + 15s + 3} \tag{20}$$

$$108sY(s) + 621Y(s) = s^2U(s) + 15sU(s) + 3U(s) \tag{21}$$

Z koeficientů této rovnice určíme stavový popis jako Frobeniův kanonický tvar.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -15 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 621 & 108 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Výsledek poté ověřím pomocí Matlabu.

```
[ a, b, c, d ] = abcd (H_pol) %polynomial toolbox
[ a, b, c, d ] = tf2ss (b_p,a_p)  %system toolbox
```

V obou případech dostávám stejné výsledky, pouze zapsané v alternativním tvaru, kde jsou koeficienty diff. rovnice v prvním řádku matice A.

Reference

[1] Leslie Lamport, *LaTeX: A Document Preparation System*. Addison Wesley, Massachusetts, 2nd Edition, 1994.

[2] LaTeXtutorials, http://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/

[3] Studenti předmětu ARI 2011, *ARI song (videoklip)* http://www.youtube.com/watch?v=5gDfQK7dD7c