Domácí úkol ARI 00

Ladislav Štefka

24. února 2018

Úkol 1 Ustálená odezva

Systém popsán rovnicí:

$$G(s) = \frac{(-0.2s + 4)}{(s + 4)(s + 2)(s + 1)}$$

Nejdříve ověříme stabilitu systému, což je nutný předpoklad pro výpočet ustálené hodnoty a statického zesílení.
póly: $-4, -2, -1 \rightarrow$ vidíme, že systém je stabilní, protože reálná část všech pólů je menší než nula

Úkol 1.1

Statické zesílení systému:

$$DCgain = G(s)|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

Úkol 1.2

Ustálená hodota odezvy na vstup $u(t) = 5$

Využiji přenosové funkce a výstup (v s rovině) vyjádřím jako konvoluci vstupu a přenosové funkce.

$$Y(s) = U(s) \cdot G(s)$$

Nejdříve převedu vstup do s roviny - "zlaplaceuji"

$$U(s) = \frac{5}{s}$$

$$Y(s) = \frac{5(-0.2s + 4)}{s(s + 4)(s + 2)(s + 1)}$$

Využiji věty o koncové hodnotě, vím, že systém je stabilní a vyjádřím $y(t \rightarrow \infty)$.

$$y(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = 5 \cdot DCgain = \frac{5}{2}$$

Úkol 1.3

Ustálená hodnota odezvy na jednotkový skok $\delta = 1$
Výpočet provedu jako v předchozím úkolu.

$$U(s) = 1$$

$$Y(s) = G(s) = \frac{(-0.2s + 4)}{(s + 4)(s + 2)(s + 1)}$$

$$y(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = 0$$

Výsledek můžeme odůvodnit jednoduše tím, že pokud je systém stabilní, musí vždy být ustálená hodnota impulsové odezvy nulová.

Úkol 2 Laplaceova Transformace

Zadaná soustava rovnic

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -2x_1(t) + 20x_2(t) \qquad (1)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{2}x_1(t) \qquad (2)$$

Počáteční podmínky

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Úkol 2.1

Převod do s roviny

$$sX_1(s) - x_1(0) = -2X_1(s) + 20X_2(s)$$

$$sX_2(s) - x_2(0) = -\frac{1}{2}X_1(s)$$

Dosazení počátečních podmínek

$$sX_1(s) - 6 = -2X_1(s) + 20X_2(s)$$

$$sX_2(s) - 0 = -\frac{1}{2}X_1(s)$$

Řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých

$$X_2(s) = -\frac{1}{2s}X_1(s)$$

$$sX_1(s) - 6 = -2X_1(s) - 20\frac{1}{2s}X_1(s)$$

Výsledné řešení

$$X_1(s) = \frac{6s}{(s+1)^2 + 3^2}$$

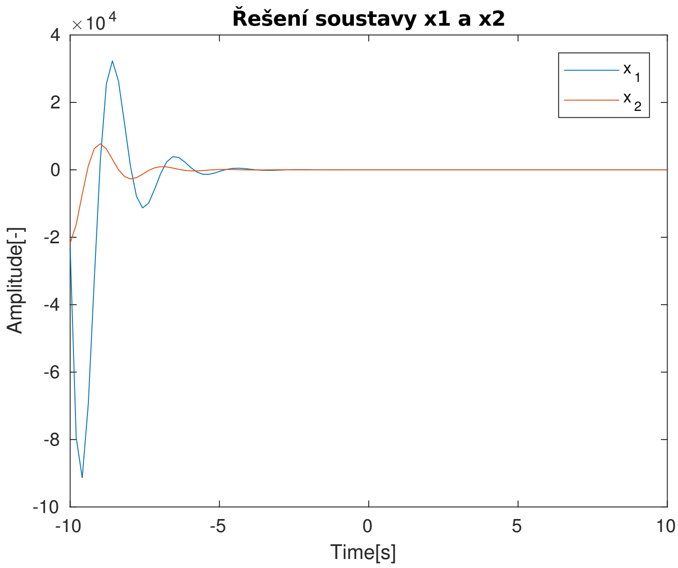
$$X_2(s) = \frac{-3}{(s+1)^2 + 3^2}$$

Převod do časové oblasti pomocí inverzní Laplaceovy transformace

$$x_1(t) = 6e^{-t}\cos(3t) - 2e^{-t}\sin(3t)$$

$$x_2(t) = -e^{-t}\sin(3t)$$

Úkol 2.2



Obrázek 1: Průběhy nalezených funkcí

Úkol 3 Linearizace

Zadané rovnice

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3}$$
$$\dot{x}_2 = -2\sin(x_1) - \frac{1}{10}x_2 + u \tag{4}$$
$$y = x_1 \tag{5}$$

Úkol 3.1 Nalezení pracovního bodu

Podmínka: $u_0(t) = 2$
Derivace stavových proměných jsou v okolí pracovního bodu nulové.

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= -2\sin(x_1) - \frac{1}{10}x_2 + u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Vyjádříme všechny zbylé počáteční hodnoty a dostaneme výsledný pracovní bod

$$P_0 = [x_{10}, x_{20}, y_0, u_0] = \left[\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 2\right]$$

Úkol 3.2 Linearizace systému v pracovním bodě

Obecný tvar linearizovaného přírustkového modelu

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\mathbf{x}} &= A\Delta\mathbf{x} + B\Delta u \\ \Delta y &= C\Delta\mathbf{x} + D\Delta u \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{P_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\cos(x_{1_0}) & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{P_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

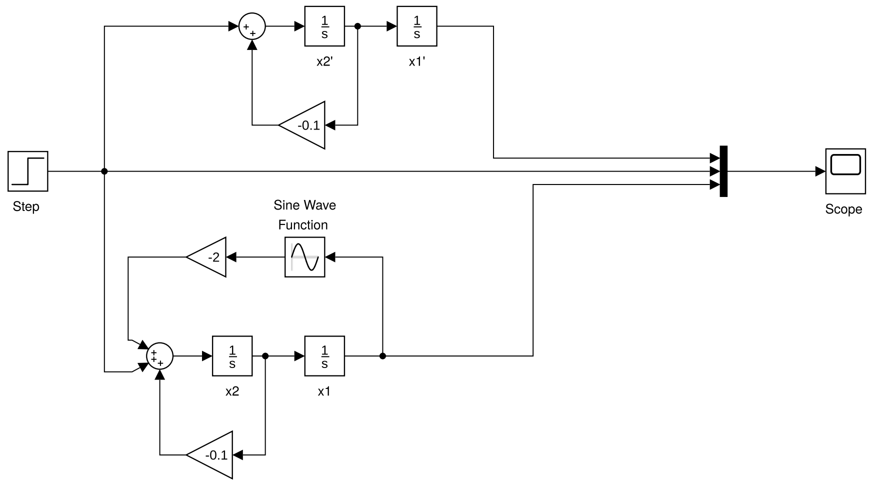
$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

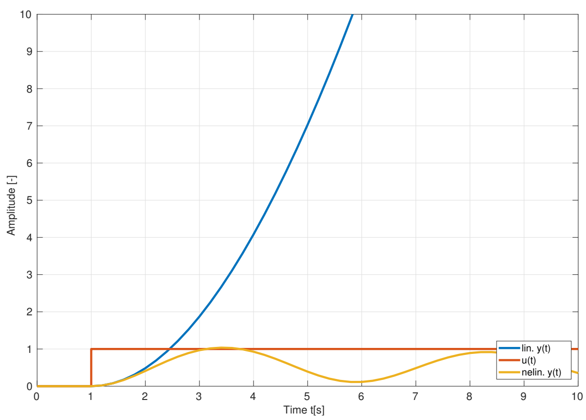
Výsledná linearizovaná soustava rovnic

$$\Delta \dot{x}_1 = x_2$$
$$\Delta \dot{x}_2 = -\frac{1}{10} x_2 + u$$
$$\Delta y = x_1$$

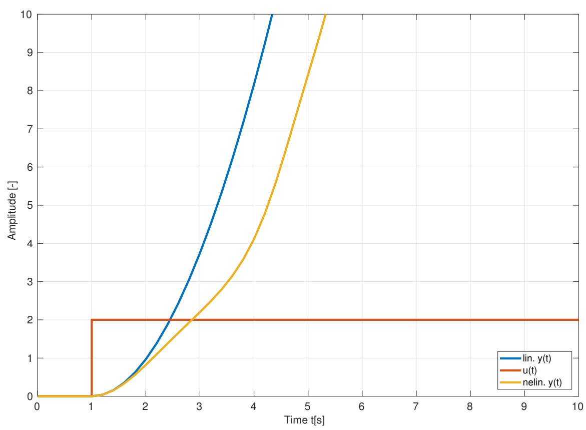
Úkol 3.3 Odezvy systému na skok



Obrázek 2: Model v simulinku



(a) Odezva systému na skok $u = 1$



(b) Odezva systému na skok $u = 2.001$

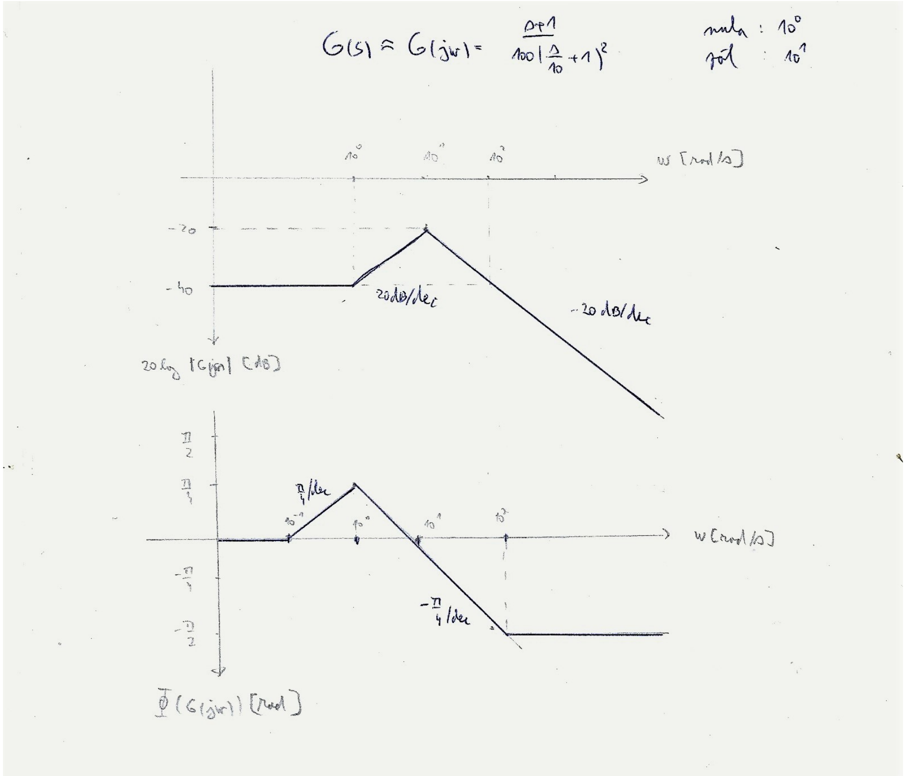
Obrázek 3: Lišící se odezvy linearizovaného a nelinearizovaného modelu

Úkol 4 Bodeho charakteristiky

Úkol 4.1

Přenosová funkce systému

$$G_1(s) = \frac{s+1}{(s+10)^2}$$



Obrázek 4: Bodeho aproximovaná charakteristika

Úkol 4.2

Zadaná frekvenční charakteristika odpovídá systému

$$G_2(s) = -\frac{(1 - \frac{s}{10^{-1}})(1 + \frac{s}{10})}{(1 + \frac{s}{10^{-3}})(1 + \frac{s}{10^{3}})}$$

Úkol 5 Převod do přenosového popisu

Zadaný vnitřní popis systému

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & -2 \\ -9 & 9 & 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

Obecně stavový popis systému

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Převod do s roviny Laplaceovou transformací

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

Dosadím a vyjádřím přenosovou funkci

$$H(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Pro výpočet použiji Matlab

```
A = [-4 2 0 0; -6 4 0 0; -3 3 2 -2; -9 9 2 -3];
B = [1 ; 0.5; 0 ;-1];
C = [4 0 0 0];
syms s
H = C *inv((s * eye(4) -A))* B
```

$$H(s) = \frac{4s^3 - 8s^2 - 20s + 24}{s^4 + s^3 - 6s^2 - 4s + 8}$$

Úkol 6 Stabilita

Systém:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Systém je stabilní pokud pro všechna vlastní čísla matice systému A platí, že reálná část jejích vlastních čísel je záporná.
Vlastní čísla vypočítáme jako řešení rovnice $det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice.

```
A = [1 0 0; 2 -2 -2; 1 2 0]
lambda = eig(A)
```

Vlastní čísla:

$$\lambda_1 = -1.0000 + 1.7321i$$
$$\lambda_2 = -1.0000 - 1.7321i$$
$$\lambda_3 = 1.0000$$

Závěr: Systém není stabilní, protože reálná část λ_3 je větší než 0.

Úkol 7 Diskretizace

Systém popsán rovnicí:

$$G(s) = \frac{(s-3)}{(s+1)(s+7)}$$

Zero order hold:

1. S obraz odezvy na jednotkový skok

$$W(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{(s-3)}{s(s+1)(s+7)}$$

2. Odezva na jednotkový skok $w(t)$

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{5}{21}e^{-7t} - \frac{3}{7}$$

3. Převod do diskrétní oblasti substitucí $t = nT$

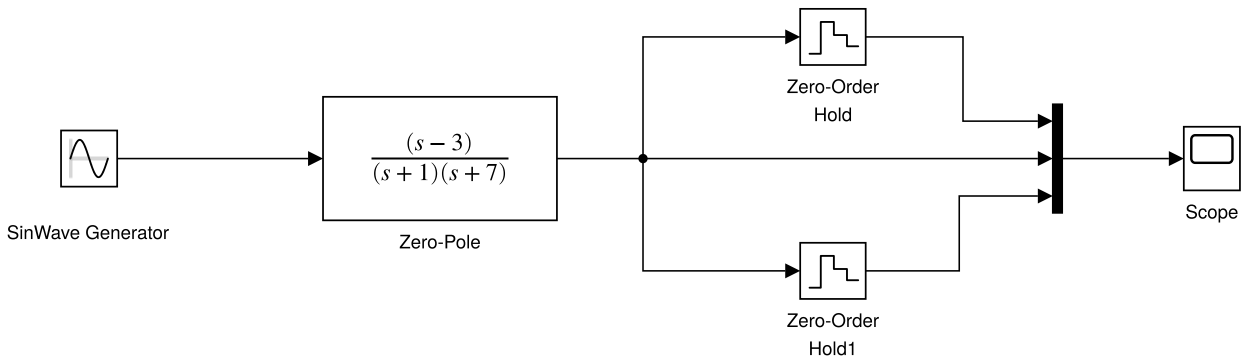
$$w(n) = \frac{2}{3}e^{-nT} - \frac{5}{21}e^{-7nT} - \frac{3}{7}$$

4. Z obraz odezvy na jednotkový skok $W(z)$

$$W(z) = \frac{2}{3}\frac{z}{z - e^{-T}} - \frac{5}{21}\frac{z}{z - e^{-7T}} - \frac{3}{7}\frac{z}{z-1}$$

5. Výsledná přenosová funkce $H(z)$

$$G(z) = \frac{W(z)}{\mathcal{Z}^{-1}\{1(t)\}} = \frac{z-1}{z}W(z)$$
$$G(z) = \frac{2}{3}\frac{z-1}{z - e^{-T}} - \frac{5}{21}\frac{z-1}{z - e^{-7T}} - \frac{3}{7}$$

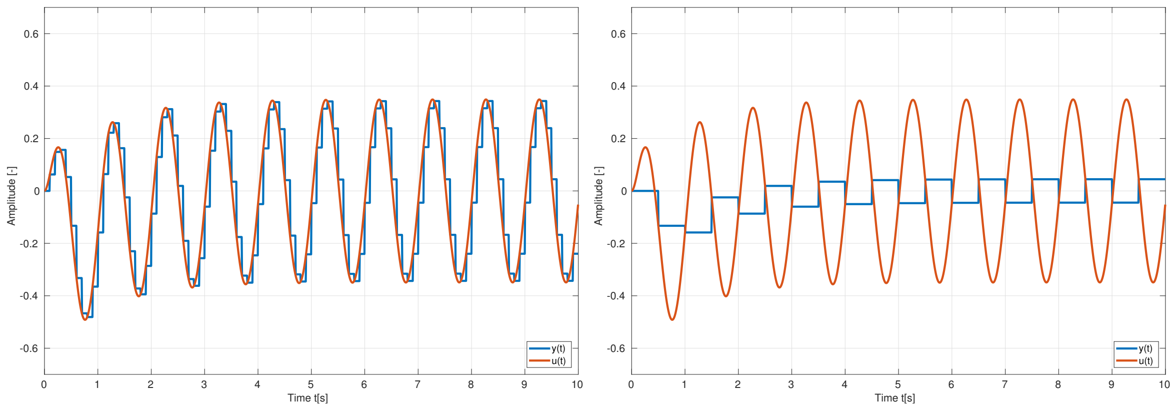


Obrázek 5: Model v simulinku

Vzorkovaí teorém říká, že vzorkovací frekvence, musí být více, než 2x větší, než nejvyšší harmonická frekvence signálu, kterou chceme rekonstruovat.

$$f_s > 2f_{max}$$

Jako vstup zvolím sinus o frekvenci $f = 1Hz$.
Pro demonstraci dostatečného vzorkování zvolím vzorkovací frekvenci $f_s = 10Hz$. Pro demonstraci nedostatečného vzorkování zvolím vzorkovací frekvenci $f_s = 2Hz$.



(a) Vzorkování $f_s = 10Sa/s$ (b) Nedostatečné vzorkování $f_s = 2Sa/s$

Obrázek 6: Výstup spojitého systému a diskrétního systému pro vhodné a nevhodné vzorkování

Úkol 8 Vlastnosti přenosů

Systém je **stabilní**, pokud je reálná část všech pólů větší než nula.
Systém je **astatický**, pokud má pól, který leží v nule.
Systém je **kmitavý**, pokud má komplexní pól (tím pádem i komplexně sdružený).

1. $G(s) = -\frac{(s-12)}{(s+1)(5s+2)(s+3)} \rightarrow$ systém je stabilní, statický a nekmitavý.
2. $G(s) = \frac{1}{s^2+0.5s-1} \rightarrow$ systém je nestabilní, statický a nekmitavý.
3. $G(s) = \frac{1}{s^2} \rightarrow$ systém je nestabilní, astatický a nekmitavý.
4. $G(s) = \frac{(s+2)}{s^2-2} \rightarrow$ systém je je nestabilní, statický a nekmitavý.

Úkol 9 Spojování dynamických systémů

$$G_1(s) = \frac{(s-1)}{s+1} \qquad G_2(s) = \frac{1}{s}$$

Úkol 9.1 Paralelní spojení

$$H(s) = G_1 \cdot G_2 = \frac{s-1}{s(s+1)}$$

Úkol 9.2 Sériové spojení

$$H(s) = G_1 + G_2 = \frac{s^2+1}{s(s+1)}$$

Úkol 9.3 Zpětnovazební zapojení se zápornou zpětnou vazbou, G_1 a G_2 v přímé vazbě

$$y = x \cdot G_1 \cdot G_2$$
$$x = r - y$$
$$H(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G_1 \cdot G_2}{1 + G_1 \cdot G_2} = \frac{s-1}{s^2+2s-1}$$

Úkol 9.4 Zpětnovazební zapojení se zápornou zpětnou vazbou, pouze G_1 v přímé vazbě

$$y = x \cdot G_1$$
$$x = r - y \cdot G_2$$
$$H(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G_1}{1 + G_1 \cdot G_2} = \frac{s(s-1)}{s^2+2s-1}$$

Úkol 10 Diskrétní systém

$$3y(k) - y(k-1) + 0.5y(k-2) = u(k-1) - u(k-2)$$

Úkol 10.1 Přenos systému

Provedu Z transformaci

$$3Y(z) - z^{-1}Y(z) + 0.5z^{-2}Y(z) = z^{-1}U(z) - z^{-2}U(z)$$
$$H(z) = \frac{Y(z}{U(z)} = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{3 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

Přenosová funkce systému

$$H(z) = \frac{z-1}{3z^2 - z + 0.5}$$

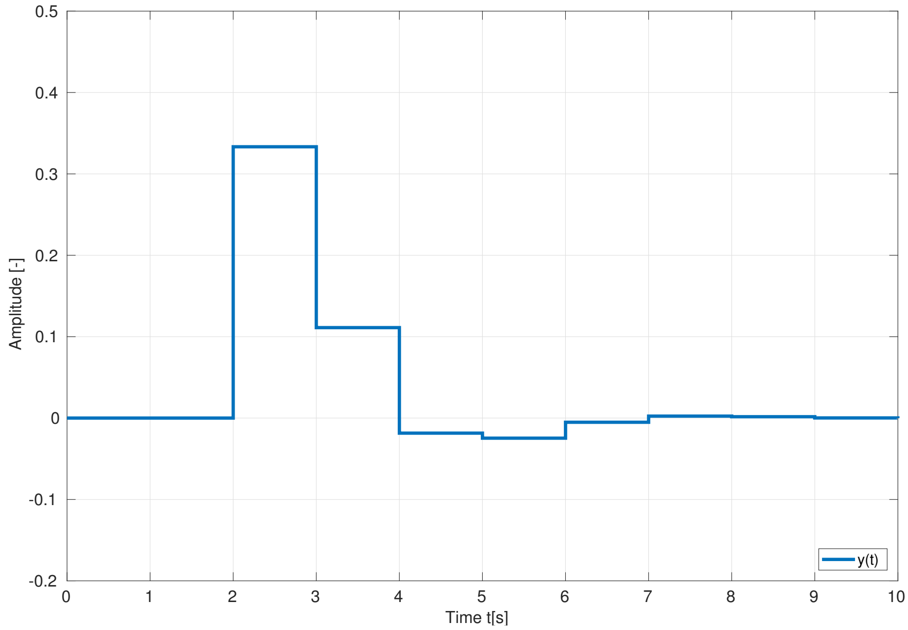
Úkol 10.2 Stabilita systému

Póly:

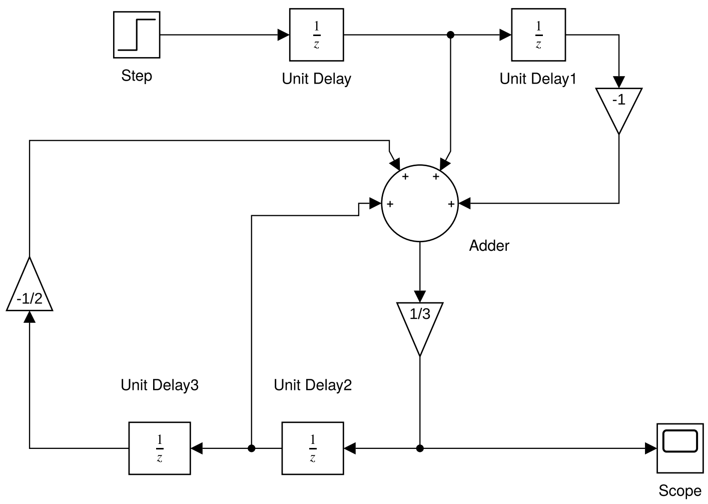
$$p_1 = 0.1667 + 0.3727i$$
$$p_2 = 0.1667 - 0.3727i$$

Systém je stabilní, protože modul všech pólů je menší než jedna. Tedy všechny póly leží v jednotkové kružnici.

Úkol 10.3 Simulinkové schéma



Obrázek 7: Odezva systému na jednotkový skok



Obrázek 8: Model v simulinku

Úkol 11 Přechodové a impulsní charakteristiky

Úkol 11.1 Přiřazení charakteristik

- $a \to f$
- $b \to d$
- $c \to e$

Úkol 11.2 Obecný vztah

Impulsní charakteristika je derivací přechodové charakteristiky.

Úkol 12 Frekvenční charakteristiky

Úkol 12.1 Přiřazení charakteristik

- $a \rightarrow f$
- $b \rightarrow d$
- $c \rightarrow e$

Úkol 12.2 Amplituda zesílení systému

Zesílení dostaneme z Nyqistovy frekvenční charakteristiky jako modul vektoru s koncovým bodem na vykreslené křivce při úhlu $-45\,\text{deg}$.
Zesílení systému jde ale s lehkostí určit přímo z příslušné Bodeho charakteristiky - $-3dB$.