Automatické řízení – simulační úloha
Kulička v obruči

Jiří Kubík
České Vysoké Učení Technické v Praze,
Fakulta elektrotechnická,
Email: kubikji2@fel.cvut.cz

1. Zadání

Laboratorní model představený v této simulační úloze je nelineární stabilní systém s jedním vstupem ($u(t)$ [V]) popisující stejnosměrné napětí na motoru a se třemi výstupy úhlová rychlost otáčení obruče ($\omega(t)$ [rad/s]), úhel natočení obruče ($\varphi(t)$ [rad]) a poloha kuličky v obruči ($\psi(t)$ [rad]).

1.1. Modelování

Systém kuličky v obruči je možné popsat pomocí následujících rovnic:

$$J_h\ddot{\varphi}(t) + m(R-r)^2\ddot{\psi}(t) + b_h\dot{\varphi}(t) + \\ + mg(R-r)\sin(\psi)(t) = M(t) \quad (1)$$

$$\frac{J_bR}{r^2}\ddot{\varphi}(t) - \left(\frac{J_b}{r^2} + \frac{m(R-r)^2}{R^2}\right)R\ddot{\psi}(t) + \\ + \frac{b_b}{r^2}R\left(\dot{\varphi}(t) - \psi(t)\right) - mg\frac{R-r}{R}\sin\psi(t) = 0 \quad (2)$$

Úpravou a užitím substituce

$$k_1 = m(R-r)^2 \quad (3)$$

$$k_2 = mg(R-r) \quad (4)$$

$$k_3 = \frac{J_bR}{r^2} \quad (5)$$

$$k_4 = \left(\frac{J_b}{r^2} + \frac{m(R-r)^2}{R^2}\right)R \quad (6)$$

$$k_5 = \frac{b_bR}{r^2} \quad (7)$$

$$k_6 = k_1k_3 + k_4J_h \quad (8)$$

dostáváme z rovnic (1) a (2):

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{k_1}{k_6}\left(\frac{k_4b_h}{k_1} + k_5\right)\dot{\varphi}(t) + \\ + k_5\frac{k_1}{k_6}\dot{\psi}(t) + k_2\frac{k_1}{k_6}\left(\frac{1}{R} - \frac{k_4}{k_1}\right)\sin\psi(t) + \frac{k_1}{k_6}\frac{k_3}{J_h}M(t) \quad (9)$$

$$\ddot{\psi}(t) = \frac{J_h}{k_6}\left(-\frac{k_3b_h}{J_h} + k_5)\right)\dot{\varphi}(t) - \\ - k_5\frac{J_h}{k_6}\dot{\psi}(t) + k_2\frac{J_h}{k_6}\left(-\frac{1}{R} - \frac{k_3}{J_h}\right)\sin\psi(t) + \frac{J_h}{k_6}\frac{k_3}{J_h}M(t) \quad (10)$$

2. Úlohy

Substitucí za příslušné koeficienty před jednotlivými derivacemi a užitím lineární závislosti motoru $M(t) = bu(t)$ dostáváme soustavu diferenciálních rovnic:

$$\ddot{\varphi}(t) = c_1\dot{\varphi}(t) + c_2\dot{\psi}(t) + c_3\sin\psi(t) + c_4u(t) \quad (11)$$

$$\ddot{\psi}(t) = d_1\dot{\varphi}(t) + d_2\dot{\psi}(t) + d_3\sin\psi(t) + d_4u(t) \quad (12)$$

2.1.

Napište stavové rovnice popisující systém s obecnými parametry a zjednodušte je za předpokladu $R \gg r$. Pokuste se sdružit konstanty u jednotlivých členů do jedné.

Substituce:

$$\ddot{\varphi}(t) = \dot{x}_1 \leftrightarrow \dot{\varphi}(t) = x_1 \quad (13)$$

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{x}_2 \leftrightarrow \varphi(t) = x_2 \quad (14)$$

$$\ddot{\psi}(t) = \dot{x}_3 \leftrightarrow \dot{\psi}(t) = x_3 \quad (15)$$

$$\dot{\psi}(t) = \dot{x}_4 \leftrightarrow \psi(t) = x_4 \quad (16)$$

Použitím výše uvedených rovnic rovnic (11) a (12) následující soustavu stavových rovnic:

$$\dot{x}_1 = c_1x_1 + c_2x_3 + c_3\sin(x_4) + c_4u(t) \quad (17)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 \quad (18)$$

$$\dot{x}_3 = d_1x_1 + d_2x_3 + d_3\sin(x_4) + d_4u(t) \quad (19)$$

$$\dot{x}_4 = x_3 \quad (20)$$

Za předpokladu $R \gg r$ přibližně platí pro konstanty k_{1-6}:

$$k_1 = m(R-r)^2 \rightarrow k_1' = mR^2 \tag{21}$$

$$k_2 = mg(R-r) \rightarrow k_2' = mgR \tag{22}$$

$$k_3 = \frac{J_b R}{r^2} \rightarrow k_3' = \frac{2}{5} mR \tag{23}$$

$$k_4 = \left(\frac{J_b}{r^2} + \frac{m(R-r)^2}{R^2}\right) R \rightarrow k_4' = \frac{7}{5} mR \tag{24}$$

$$k_5 = \frac{b_b R}{r^2} \rightarrow k_5' = \frac{b_b R}{r^2} \tag{25}$$

$$k_6 = \frac{1}{k_1 k_3 + k_4 J_h} \rightarrow k_6' = \frac{5}{mR(2R^2 m + 7J_h)} \tag{26}$$

Dosazením upravených konstant k_{1-6}' do rovnic (11) a (12) získáváme:

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{7b_h r^2 + 5b_b R^2}{r^2(2mR^2 + 7J_h)}\dot{\varphi}(t) + \\ + \frac{5b_b R^2}{2mR^2 + 7J_h}\dot{\psi}(t) - \frac{mg(5R^2 - 7)}{2mR^2 + 7J_h}\sin\psi(t) + \\ + \frac{7b}{2mR^2 + 7J_h}u(t) \tag{27}$$

$$\ddot{\psi}(t) = \frac{5J_h b_b - 2mb_h r^2}{r^2 m(2mR^2 + 7J_h)}\dot{\varphi}(t) - \\ - \frac{5J_h b_b}{mr^2(2mR^2 + 7J_h)}\dot{\psi}(t) + \frac{g(5J_h + mR^2)}{R(2mR^2 + 7J_h)}\sin\psi(t) + \\ + \frac{2b}{2mR^2 + 7J_h}u(t) \tag{28}$$

2.2.

Model z bodu 1 linearizujte v rovnovážném stavu a s vytvořte linearizovaný model s obecnými parametry.

Pro lineární aproximaci v okolí pracovního bodu platí:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_p(t) + \Delta\vec{x}(t) \tag{29}$$

$$\vec{u}(t) = \vec{u}_p(t) + \Delta\vec{u}(t) \tag{30}$$

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_p(t) + \Delta\vec{y}(t) \tag{31}$$

V našem případě pro rovnovážný stav P platí, že $\vec{x}_p = [0\ 0\ 0\ 0]$, $\vec{u}_p = [0]$ a $\vec{y}_p = [0\ 0\ 0]$. Zadefinujeme-li $\vec{y} = [\omega\ \varphi\ \psi]$, pak aproximací nelineárních rovnic (17)-(20), užitím substitucí (13), (14) a (16) a za znalosti vztahu $\omega = \dot{\varphi}$ dostáváme vektorové rovnice:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) \tag{32}$$

$$\vec{y}(t) = \vec{h}(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) \tag{33}$$

které v mají po rozepsání tvar:

$$\dot{x}_1 = c_1 x_1 + c_2 x_3 + c_3 \sin(x_4) + c_4 u(t) \tag{34}$$

$$\dot{x}_2 = x_1 \qquad \dot{x}_4 = x_3 \tag{35}$$

$$\dot{x}_3 = d_1 x_1 + d_2 x_3 + d_3 \sin(x_4) + d_4 u(t) \tag{36}$$

$$y_1 = x_1 \qquad y_2 = x_2 \qquad y_3 = x_4 \tag{37}$$

Výše uvedené rovnice je možné po linearizaci vyjádřit maticovém tvaru:

$$\Delta\dot{\vec{x}}(t) = \mathbf{A}\Delta\vec{x}(t) + \mathbf{B}\Delta\vec{u}(t) \tag{38}$$

$$\Delta\dot{\vec{y}}(t) = \mathbf{C}\Delta\vec{x}(t) + \mathbf{C}\Delta\vec{u}(t) \tag{39}$$

Podle počtu vstupů, výstupů a počtu stavových proměnných systému je vidět, že $\mathbf{A} \in \mathbb{M}^{4\times4}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{M}^{4\times1}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{M}^{3\times4}$ a $\mathbf{D} \in \mathbb{M}^{3\times1}$, pro které platí následující vztahy:

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{x}}\right|_{\vec{x}_p,\vec{u}_p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4 5}{\partial x_4} \end{bmatrix}_{\vec{x}_p,\vec{u}_p} \tag{40}$$

(41)

$$\mathbf{B} = \left.\frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{u}}\right|_{\vec{x}_p,\vec{u}_p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{bmatrix}_{\vec{x}_p,\vec{u}_p} \tag{42}$$

(43)

$$\mathbf{C} = \left.\frac{\partial\vec{h}}{\partial\vec{x}}\right|_{\vec{x}_p,\vec{u}_p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \frac{\partial h_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_3} & \frac{\partial h_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial h_3}{\partial x_1} & \frac{\partial h_3}{\partial x_2} & \frac{\partial h_3}{\partial x_3} & \frac{\partial h_3}{\partial x_4} \end{bmatrix}_{\vec{x}_p,\vec{u}_p} \tag{44}$$

(45)

$$\mathbf{D} = \left.\frac{\partial\vec{h}}{\partial\vec{u}}\right|_{\vec{x}_p,\vec{u}_p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} \\ \frac{\partial h_3}{\partial u} \end{bmatrix}_{\vec{x}_p,\vec{u}_p} \tag{46}$$

Výpočtem parciálních derivací uvnitř matic **A**, **B**, **C** a **D** dostáváme:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & c_2 & c_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & d_2 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} c_4 \\ 0 \\ d_4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{47}$$

Zpětnou substitucí za konstanty c_{1-4} a d_{1-4} s použitím zjednodušených konstant k'_{1-6} získáváme matice **A**, **B**, **C** a **D** ve tvaru:

$$\mathbf{A} =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{7b_h r^2+5b_b R^2}{r^2(2mR^2+7J_h)} & 0 & \frac{5b_b R^2}{2mR^2+7J_h} & -\frac{2mgR}{2mR^2+7J_h} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5J_h b_b-2mb_h r^2}{r^2 m(2mR^2+7J_h)} & 0 & -\frac{5J_h b_b}{mr^2(2mR^2+7J_h)} & -\frac{g(5J_h+2mR^2)}{R(2mR^2+7J_h)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{7b}{2mR^2+7J_h} \\ 0 \\ \frac{2b}{2mR^2+7J_h} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{48}$$

Už při prvním pohledu na matice **A**, **B**, **C** a **D** se nejvýrazněji nabízí sdružení konstant $2mR^2 + 7J_h$ do jedné a dále sdružení konstant $5J_h b_b$ a $5b_b R^2$ do dalších dvou individuálních konstant.

2.3.

Identifikujte všechny statické nelinearity – saturace vstupů a stavů a pásma necitlivosti vstupu.

Motor má pásmo necitlivosti pro napětí u ∈ <-0,5;0,5>, ve kterém ani jeden ze výstupů nereaguje na výstup. Dále jsem identifikoval saturaci *omega*, kdy v intervalu vstupního napětí u ∈ (10;∞) hodnota úhlové rychlosti nepřesahovala $\omega = 830$ [ot/min] a pro hodnoty vstupního napětí u ∈ (-∞;-10) nepřesahovala $\omega = -830$ [ot/min]. S úhlovou rychlostí ω souvisel samozřejmě i úhel φ, který rostl odhadem rychlostí 4000 [°/s], což by i přibližně odpovídalo s odečtenou úhlovou rychlostí ω.

2.4.

Pomocí vhodných experimentů na původním systému identifikujte parametry obruče. Předpokládejte, že vliv kuličky na obruč je zanedbatelný.

Vyjdeme z zlinearizované rovnice:

$$\ddot{\varphi}(t) = c_1\dot{\varphi}(t) + c_2\dot{\psi}(t) + c_3\psi(t) + c_4 u(t) \tag{49}$$

která popisuje chování obruče.
Zanedbáním vlivu kuličky na obruč, tj. zanedbáním křížového členu získáváme rovnici ve tvaru:

$$\ddot{\varphi}(t) = c_1\dot{\varphi}(t) + c_4 u(t) \tag{50}$$

Provedeme Laplaceovu transformaci:

$$Ys^2 = c_1 Ys + c_4 U \tag{51}$$

Úpravou dostáváme:

$$Y(s^2 - c_1 s) = c_4 U \tag{52}$$

Nyní můžeme vyjádřit přenos:

$$H(s) = \frac{Y}{U} = \frac{c_4}{s(s-c_1)} = \frac{\frac{-c_4}{c_1}}{s(1-\frac{1}{c_1}s)} \tag{53}$$

Výše uvedený přenos je pro případ identifikace možné zjednodušit na případ hledání přenosu ve tvar:

$$G(s) = \frac{k}{1+Ts} \tag{54}$$

Pól v nule je na mezi stability tudíž kmitá okolo výše uvedeného „nosného přenosu“. Zavede tedy substituci:

$$k = -\frac{c_4}{c_1} \qquad T = -\frac{1}{c_1} \tag{55}$$

Odečtením z grafu odezvy této části systému na jednotkový skok dostáváme:

$$k = 8,6917 \quad T = 0,912 \rightarrow G(s) = \frac{52,29}{1+0,912s} \tag{56}$$

2.5.

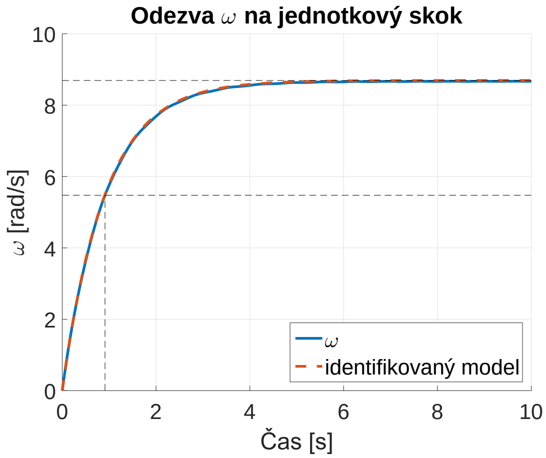
Pomocí vhodných experimentů identifikujte parametry kuličky jako odezvu na počáteční podmínky při pevně chycené obruči. Koeficient útlumu a přirozená frekvence vychází stejně pro odezvu na skok i počáteční podmínky.

Vyjdeme ze zlinearizované rovnice:

$$\ddot{\psi}(t) = d_1\dot{\varphi}(t) + d_2\dot{\psi}(t) + d_3\psi(t) + d_4 u(t) \tag{57}$$

která popisuje chování kuličky uvnitř obruče. Je-li obruč pevně chycená, pak je její úhel neměnný a tudíž je jeho derivace nulová, využitím tohoto faktu dostáváme:

$$\ddot{\psi}(t) = d_2\dot{\psi}(t) + d_3\psi(t) + d_4 u(t) \tag{58}$$



Obrázek 1: Odměření jednotlivých konstant a odezva identifikovaného systému

Nyní provedeme Laplaceovu transformaci:

$$Ys^2 = d_2Ys + d_3Y + d_4U \tag{59}$$

Úpravou získáváme:

$$Y(s^2 - d_2s - d_3) = d_4U \tag{60}$$

Přenos píšeme ve tvaru:

$$H(s) = \frac{Y}{U} = \frac{d_4}{s^2 - d_2s - d_3} \tag{61}$$

čímž dostáváme přenos systému ve tvaru:

$$G(s) = k\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{62}$$

Nyní použijeme logaritmickou metodu identifikace pro kmitavý systém druhého řádu, oproti metodě použité na přednášce má tu výhodu, že není třeba zjišťovat dobu, kdy naposledy křivka překročí hodnotu ±2 %.

V prvním kroku z grafu odečteme A_1 a A_2, které odpovídají prvnímu a druhému maximálnímu peaku odezvy. Dále si zjistíme první a druhý sestupný průchod grafu skrz hodnotu skrz ustálenou hodnotu, která je v našem případě nula stupňů (ovšem nutno dodat, že $y(\infty) = 1$, protože hodnoty grafu jsou posunuty o $-\frac{\pi}{180}$ rad), z nichž vypočteme interval T_d.

Ze získaných hodnot $y(\infty)$, A_1, A_2 a T_d vypočteme logaritmický dekrement útlumu μ, ζ, ω_n a k podle následujících vztahů:

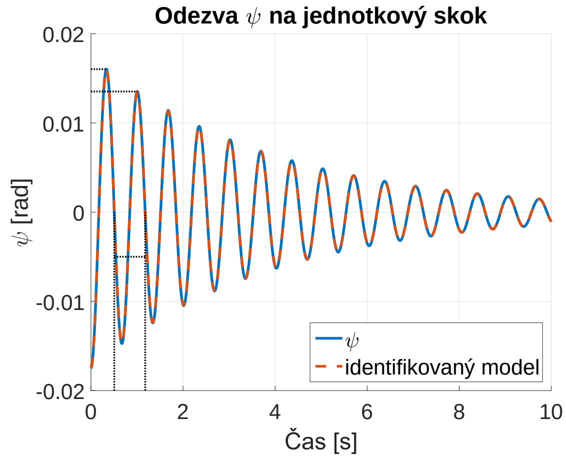
$$\mu = \ln\frac{A_1}{A_2} \qquad \zeta = \frac{\mu}{\sqrt{4\pi^2 + \mu^2}} \tag{63}$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_d\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad k = \frac{y(\infty)}{u(\infty)} \tag{64}$$

Výpočtem z hodnot v grafu podle výše uvedených vztahů získáváme:

$$k = 0,0175 \qquad \zeta = 0,027 \qquad \omega_n = 9,36 \tag{65}$$

$$G(s) = 0,0175\frac{87,66}{s^2 + 0,5061s + 87,66} \tag{66}$$



Obrázek 2: Odměření jednotlivých konstant a odezva identifikovaného systému

2.6.

Určete křížové členy mezi kuličkou a obručí a naopak.

Při určování křížových členů vyjdeme z konstant k'_{1-6} předpokládajících $R \gg r$, ze substituce provedené pro c_{1-4} a d_{1-4} a z vlastností systémů (konstant k, T a k, ζ, ω_n) identifikovaných v bodě 2.4 a 2.5. Po sestavení soustavy rovnic a jejím vyřešení dostáváme pro křížové členy (tj. výrazy c_2, c_3 a d_1):

$$c_2 \doteq 0,8386 \qquad c_3 \doteq -34,9426 \qquad d_1 \doteq 0,4324 \tag{67}$$

Všechny konstanty (c_{1-4} a d_{1-4}) včetně fyzikálních parametrů uvádí následující tabulka (všechny soustavy byly řešeny numerickými metodami).

$c_1 \doteq -1,0965$	$c_2 \doteq 0,8386$
$c_3 \doteq -34,9427$	$c_4 \doteq 7,9268$
$d_1 \doteq 0,4324$	$d_2 \doteq -0,5061$
$d_3 \doteq 87,6600$	$d_4 \doteq 4,7836$
$J_h \doteq 10,4561$	$R \doteq 23,2691$
$b_b \doteq 1,0725 \times 10^{-8}$	$b_h \doteq 0,0154$

2.7.

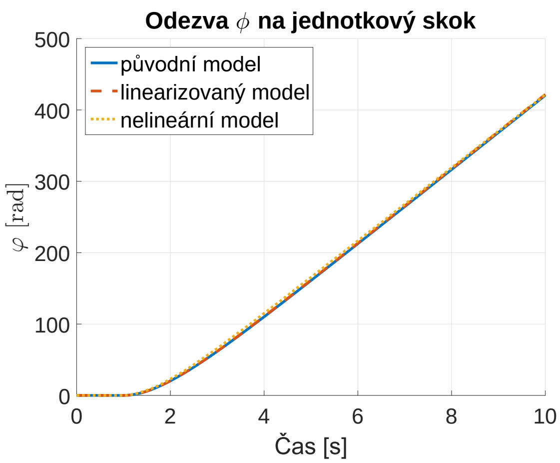
Vytvořte v Simulinku nelineární (včetně všech statických nelinearit) a linearizovaný model.

Ze stavových rovnic (17)-(20) jsem sestavil schéma v Simulinku, do kterého jsem dosadil za konstanty (c_{1-4} a d_{1-4}) hodnoty vypočtené v bodě 2.6. Dále jsme tento nelineární model doplnil o saturace identifikované v bodě 2.3.

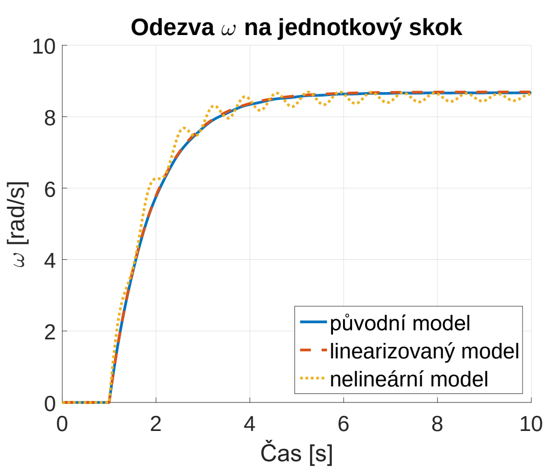
V případě linearizovaného modelu jsem použil přenosové rovnice sestavené v bodech 2.4 a 2.5.

2.8.

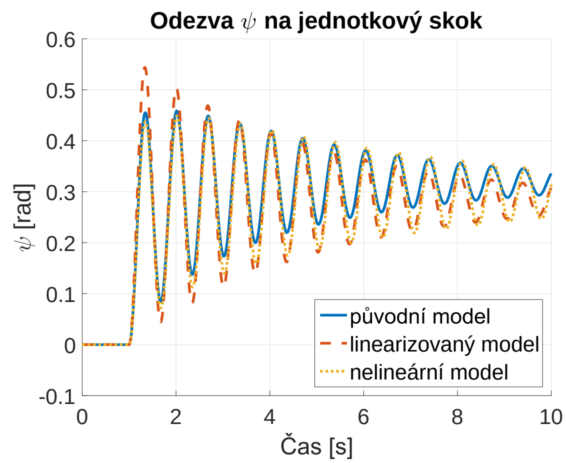
Porovnejte odezvy (obou výstupů) z modelu z bodu 7. skutečného systému na vámi (vhodně) zvolené vstupní signály a počáteční podmínky. Do grafů nezapomeňte uvést vstupní signál. Zhodnoťte úlohu.



Obrázek 3: Odezva systému (φ) na jednotkový skok (v čase $t = 1$ s) při nulových počátečních podmínkách



Obrázek 4: Odezva systému (ω) na jednotkový skok (v čase $t = 1$ s) při nulových počátečních podmínkách



Obrázek 5: Odezva systému (ψ) na jednotkový skok (v čase $t = 1$ s) při nulových počátečních podmínkách

Výše uvedené grafy, ve kterých byl vstupním signálem jednotkový skok v čase $t = 1$ s a počáteční podmínky byly pro všechny systémy nastaveny na nulu ($\varphi = 0$ rad, $\omega = 0$ rad/s a $\psi = 0$ rad), ukazují, že nejlépe byl systém identifikován pro výstup φ, což vzhledem k jednoduchosti příslušné části systému není překvapivé.

Zajímavější (tzn. méně přesná) je pak identifikace výstupu ω, kde linearizovaný model kolem nekmitá vůbec, ale naopak lineární model kmitá až příliš. Osobně přikládám tyto odchylky od skutečného modelu nepřesnostmi zapřičiněné použitou metodou (tj. postupný zanedbáním křížových členů) a následným numerickým řešením soustav rovnic.

Nejméně přesně pak vychází identifikace výstupu ψ, kde sice jak linearizovaný a nelineární mají se zadaným modelem shodnou frekvenci, v amplitudě a v ustálené hodnotě se odlišují, pravděpodobně byl nepřesně určen koeficient útlumu (logaritmický dekrement útlumu).

Poděkování

Předně patří mé vřelé díky Ing. Miloslavu Čapkovi, Ph.D. a jeho kolegům z katedry elektromagnetického pole, kteří nás ve volitelném předmětu Matlab naučili elementárním znalostem Matlabu, které nám nikdo v povinných předmětech nepředal. Dále patří mé díky ostatním studentům, se kterými jsem mohl své postupy a řešení konzultovat, jmenovitě Janu Machálkovi a Lukáši Majerovi.