

# Laboratorní úloha ARI

Milan Zongor & Ladislav Štefka

## ÚKOL 1. OVĚŘTE KOMUNIKACI LABORATORNÍHO MODELU S MATLABEM

Komunikace s modelem fungovala, ale občas pokulhávala. Výsledky byly jednotné asi tak, jako použitý jazyk v této práci.

## ÚKOL 2. SEZNAMTE SE S MATEMATICKÝM MODELEM VAŠEHO TYPU VODÁRNY

Vycházet můžeme z rovnic zadaných v simulační úloze "Odstředivá vodáren". Tam byl systém opísaný nasledujúcimi rovnicami:

$$\dot{S}h_1(t) = S_u \operatorname{sgn}[k_c(u(t) - u_N)^2 - \rho g(h_1(t) - h_{1off})] \sqrt{\frac{2}{\rho} |k_c(u(t) - u_N)^2 - \rho g(h_1(t) + h_{1off})|} - v_T S_T \operatorname{sgn}(h_1(t) - h_2(t)) \sqrt{2g |h_1(t) - h_2(t)|} \quad (1)$$

$$\dot{S}h_2(t) = v_T S_T \operatorname{sgn}(h_1(t) - h_2(t)) \sqrt{2g |h_1(t) - h_2(t)|} - v_o S_o \sqrt{2g(h_2(t) + h_{2off})} \quad (2)$$

kde  $S$ ,  $S_o$ ,  $S_u$  a  $S_t$  [ $m^2$ ] je po rade prierez oboch valcov, ventilov a čerpadla.

Konstanty  $v_o$ ,  $v_t$  jsou míry otevření ventilů.

Konstanta  $k_c$  [ $PaV^{-2}$ ] je konstanta čerpadla,  $g$  [ $ms^{-2}$ ] je gravitačné zrýchlenie,  $\rho$  [ $kgm^{-3}$ ] je hustota vody,  $u_N$  [ $V$ ] je necitlivost čerpadla.

**Vstupy:**  $u(t)$ ,  $v_T(t)$ ,  $v_o(t)$

**Výstupy:**  $h_1(t)$ ,  $h_2(t)$

## ÚKOL 3. PROVEĎTE LINEARIZACI MODELU VE VHODNĚ ZVOLENÉM PRACOVNÍM BODĚ

Za pracovní bod sme si zvolili

$$P = [h_1 \quad h_2 \quad u \quad v_T \quad v_o] = [0.16 \quad 0.14 \quad 0.4 \quad 0.5 \quad 0].$$

POZNÁMKA: Pracovní bod jsme vybrali tak, aby se z nádrže neodčerpalo moc vody -  $h_{1off}$  zůstal konstantní a proporciální ventil se nenacházel v zasaturované oblasti, nebo pásmu necitlivosti. Bohužel jsme pro tento pracovní bod nenaměřili vhodná data, a proto jsme jej v úkolu 7 změnili.

Předpokládáme tieto 2 veci, a tým sa nám rovnice zjednodušia:

$$h_1 > h_2 \rightarrow \operatorname{sgn}(h_1 - h_2) = 1$$

$$k_c(u(t) - u_N)^2 > \rho g(h_1(t) - h_{1off}) \rightarrow \operatorname{sgn}[k_c(u(t) - u_N)^2 - \rho g(h_1(t) - h_{1off})] = 1$$

Tedy hladina první nádrže je ve vyšší výšce, než druhá nádrž a tlak v čerpadlu je větší než hydrostatický tlak

první nádrže - hladina roste.

Potom môžeme nelineárny model zapísať ako:

$$\dot{h}_1(t) = \sqrt{2g} \frac{S_u}{S} \sqrt{\frac{2}{\rho} k_c(u(t) - u_N)^2 - (h_1(t) + h_{1off})} - \sqrt{2g} v_T \frac{S_T}{S} \sqrt{(h_1(t) - h_2(t))} \quad (3)$$

$$\dot{h}_2(t) = \sqrt{2g} v_T \frac{S_T}{S} \sqrt{(h_1(t) - h_2(t))} - \sqrt{2g} v_o \frac{S_o}{S} \sqrt{(h_2(t) + h_{2off})} \quad (4)$$

Následne prevedieme linearizáciu.

$$\frac{\partial \dot{h}_1}{\partial h_1} = -\frac{S_u}{S} \sqrt{2g} \frac{1}{2\sqrt{\frac{k_c}{\rho g}(u_0 - u_N)^2 - (h_{10} + h_{1off})}} - \frac{v_T S_T \sqrt{2g}}{S} \frac{1}{2\sqrt{h_{10} - h_{20}}}$$

$$\frac{\partial \dot{h}_1}{\partial h_2} = \frac{v_T S_T \sqrt{2g}}{S} \frac{1}{2\sqrt{h_{10} - h_{20}}}$$

$$\frac{\partial \dot{h}_2}{\partial h_1} = \frac{v_T S_T \sqrt{2g}}{S} \frac{1}{2\sqrt{h_{10} - h_{20}}}$$

$$\frac{\partial \dot{h}_2}{\partial h_2} = -\frac{v_T S_T \sqrt{2g}}{S} \frac{1}{2\sqrt{h_{10} - h_{20}}} + \frac{v_o S_o \sqrt{2g}}{S} \frac{1}{2\sqrt{h_{20}}}$$

$$\frac{\partial \dot{h}_1}{\partial u} = \frac{S_u}{S} \sqrt{2g} \frac{\frac{k_c}{\rho g}(u_0 - u_N)}{\sqrt{\frac{k_c}{\rho g}(u_0 - u_N)^2 - (h_{10} + h_{1off})}}$$

$$\frac{\partial \dot{h}_1}{\partial v_T} = -\frac{S_T}{S} \sqrt{2g(h_{10} - h_{20})}$$

$$\frac{\partial \dot{h}_1}{\partial v_o} = 0$$

$$\frac{\partial \dot{h}_2}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial \dot{h}_2}{\partial v_T} = \frac{S_T}{S} \sqrt{2g(h_{10} - h_{20})}$$

$$\frac{\partial \dot{h}_2}{\partial v_o} = -\frac{S_o}{S} \sqrt{2g(h_{20} + h_{2off})}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{h}_1}{\partial h_1} & \frac{\partial \dot{h}_1}{\partial h_2} \\ \frac{\partial \dot{h}_2}{\partial h_1} & \frac{\partial \dot{h}_2}{\partial h_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{h}_1}{\partial u} & \frac{\partial \dot{h}_1}{\partial v_T} & \frac{\partial \dot{h}_1}{\partial v_o} \\ \frac{\partial \dot{h}_2}{\partial u} & \frac{\partial \dot{h}_2}{\partial v_T} & \frac{\partial \dot{h}_2}{\partial v_o} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ÚKOL 4. IDENTIFIKUJTE VŠECHNY STATICKÉ  
NELINEARITY MODELU TYPU SATURACE VSTUPŮ A  
STAVŮ A PÁSMO NECITLIVOSTI

**Saturácie**

**Vstupy:**

$$u(t) > 1$$

Saturaci napětí jsme zjistili měřením doby náběhu hladiny do určité výšky. Dokud se čas měnil (zmenšoval), vstup nebyl saturován.

$$v_T(t) > 0.7$$

Saturaci ventilu jsme měřili při konstantním napětí postupným upravováním hodnoty ventilu a pozorováním změny výšky hladiny u druhé nádrže.

$$v_o(t)$$

Digitální ventil může nabývat pouze dvou hodnot, proto nemá smysl mluvit o saturaci a pásmu necitlivosti.

**Výstupy:**

$$h_1(t) - < -0.05, 0.71 >$$

$$h_2(t) - < 0, \sim >$$

Vrchní hranice nešla u druhé nádrže pořádně určit, protože v zásobníku nebylo již dostatek vody. Saturace druhé nádrže byla určena její výškou.

**Pásma necitlivosti**

**Vstupy:**

$$u(t) - < 0, 0.05 >$$

Necitlivost napětí jsme měřili postupným přidáváním napětí, dokud jsme nepozorovali nárůst hladiny.

$$v_T(t) - < 0, 0.3 > \cup < 0.7, 1 >$$

Necitlivost ventilu jsme měřili postupným otevíráním, dokud voda nezačala proudit z první nádrže do druhé.

**Offset senzoru:**

$$Left = 0.78; \quad Right = 0.68$$

Offsety senzoru jsme vypočítali tak, aby nulová hladina souhlasila s nulovou hodnotou v Matlabu. Offsety se ale při každém měření měnili a celkově jejich hodnoty je třeba brát pouze orientačně.

**Offsety hladiny:**

$$h_{1off} = 0.048; \quad h_{2off} = 0$$

Offsety hladiny jsme určili z hodnot při nulovém napětí. Offset levé nádrže je výška vodního sloupce, kterou musí čerpadlo vytlačit, než se dostane na nulovou hladinu.

ÚKOL 5. NAVRHNĚTE A USKUTEČNĚTE EXPERIMENTY  
PRO ZJIŠTĚNÍ SKUTEČNÝCH PARAMETRŮ  
NELINEÁRNÍHO MODELU

**A. Určení  $k_c$  - statická charakteristika**

Konstantu  $k_c$  jsme identifikovali z ustáleného stavu (levá strana rovnic nulová) a při zavřeném proporcionální ventilu  $v_T$ .

Konstanty jsme sdružili do jedné a rovnice se nám zjednodušily na tvar.

$$0 = \frac{\sqrt{2g}S_u}{S} \sqrt{\frac{k_c}{\rho g}(u(t) - u_N)^2 - (h_1(t) + h_{1off})} \quad (5)$$

$$0 = \sqrt{k(u(t) - u_N)^2 - (h_1(t) + h_{1off})} \quad (6)$$

Po úpravě této rovnice získáme jednoduchý vztah:

$$k = \frac{(h_{1ust} + h_{1off})}{(u(t) - u_N)^2} \quad (7)$$

$$k = 1.72 \quad (8)$$

$h_{1ust}$  ...ustálená hodnota hladiny

POZNÁMKA: Při určování konstanty  $k_c$  jsme si ale všimli první nedokonalosti dodaného matematického modelu.  $k_c$  totiž vůbec není konstanta, ale silně závisí na výšce hladiny a míře otevření proporcionálního ventilu. Jakmile se totiž zvyšuje hladina v nádržích, klesá výška hladiny v zásobníku, a tak se zvyšuje offset první nádrže, na kterém je  $k_c$  přímo úměrné.

Všechny následující konstanty budeme určovat stejným způsobem. Nejdříve zjednodušíme rovnice, které se vždy zjednoduší tak, aby v nich zbyla pouze jedna konstanta, kterou určujeme. Dále si v Matlabě vypočítáme derivaci  $h_1$  nebo  $h_2$  jako tangens úhlu, tedy podíl změny hladiny a změny času. Následně si danou konstantu na celém průběhu vyjádříme - jedná se o rovnici o jedné neznámé. Na určitém intervalu, který je nejméně zasažený digitálním šumem (typicky na začátku průběhu), vypočítáme výslednou hodnotu jako RMS.

**B. Určení  $a$  - konstanty čerpadla**

Experiment: vypouštění levé nádrže při uzavřeném proporcionálním ventilu

Pri vypúšťaní ľavej nádrže sa nám prvá rovnica zjednoduší nasledovne:

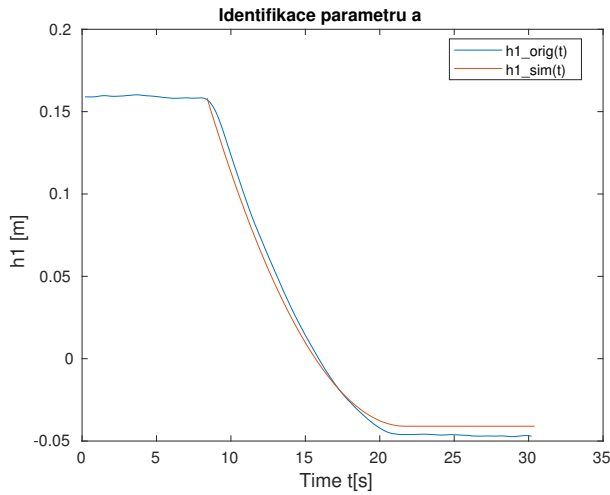
$$u = 0; v_T = 0$$

$$\dot{h}_1(t) = \frac{S_u}{S} \sqrt{2g} \sqrt{h_1(t) + h_{1off}} = a \sqrt{h_1(t) + h_{1off}}$$

$$a(t_n) = \frac{\dot{h}_1(t_n)}{\sqrt{h_1(t_n) + h_{1off}}} \quad (9)$$

POZNÁMKA:  $a(t_n)$  je hodnota konstanty v určitém diskretním čase (dán vzorkovací frekvencí)

$$a = 0.075 \quad (10)$$



Obr. 1: Určení konstanty čerpadla

### C. Určení $b$ - konstanty digitálního ventilu

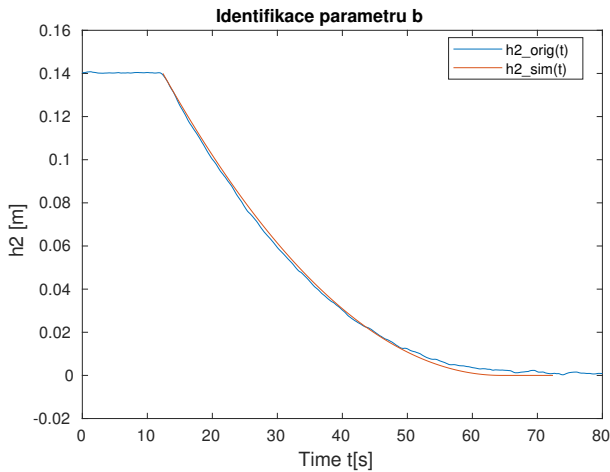
Experiment: vypouštění pravé nádrže přes digitální ventil při uzavřeném proporcionálním ventilu  
 Při vzpouštění pravé nádrže sa nám druhá rovnica zjednoduší nasledovne:

$$v_T = 0$$

$$\dot{h}_2(t) = \frac{S_o}{S} \sqrt{2g} \sqrt{h_2(t) + h_{2off}} = -b \sqrt{h_2(t) + h_{2off}}$$

$$b(t_n) = \frac{\dot{h}_2(t_n)}{\sqrt{h_2(t_n) + h_{2off}}} \quad (11)$$

$$b = 0.013 \quad (12)$$



Obr. 2: Určení konstanty digitálního ventilu

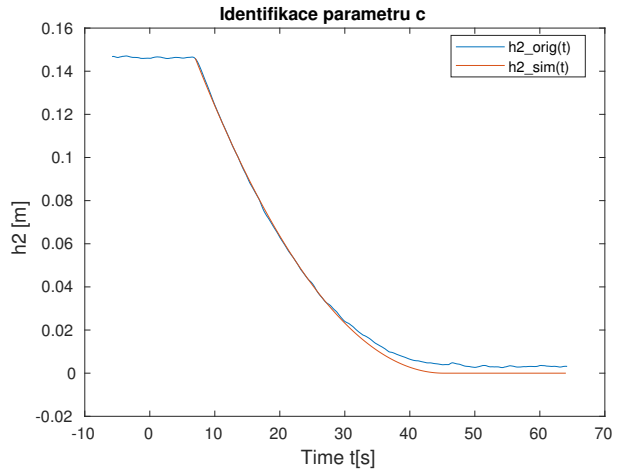
### D. Určení $c$ - konstanty proporcionálního ventilu

Experiment: vypouštění pravé nádrže přes plně otevřený proporcionální ventil při uzavřeném digitálním ventilu  
 Při prepouštění vody z pravej do ľavej nádrže sa nám druhá rovnica zjednoduší nasledovne:

$$\dot{h}_2(t) = \frac{S_T}{S} \sqrt{2g} \sqrt{h_{10} - h_2(t)} = c \sqrt{h_{10} - h_2(t)}$$

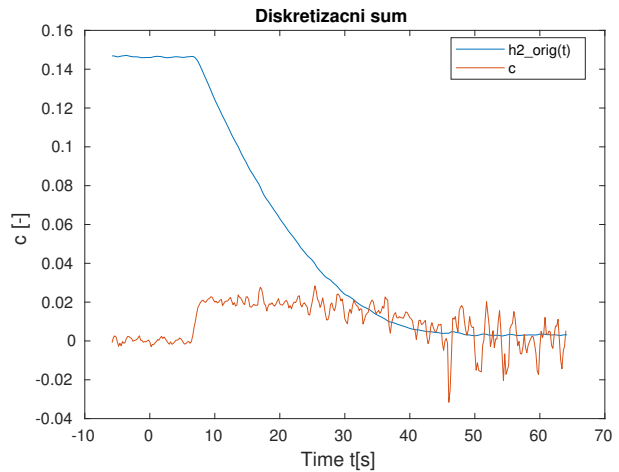
$$c(t_n) = \frac{\dot{h}_2(t_n)}{\sqrt{-h_2(t_n) + h_{10}}} \quad (13)$$

$$c = 0.02 \quad (14)$$



Obr. 3: Určení konstanty proporcionálního ventilu

Vliv digitálního šumu byl při určování konstant velmi patrný, zejména na konci průběhu, což dokazuje tento obrázek. Jednotlivé konstanty jsme proto vypočítávali jako střední hodnotu na co nejméně zarušeném intervalu.



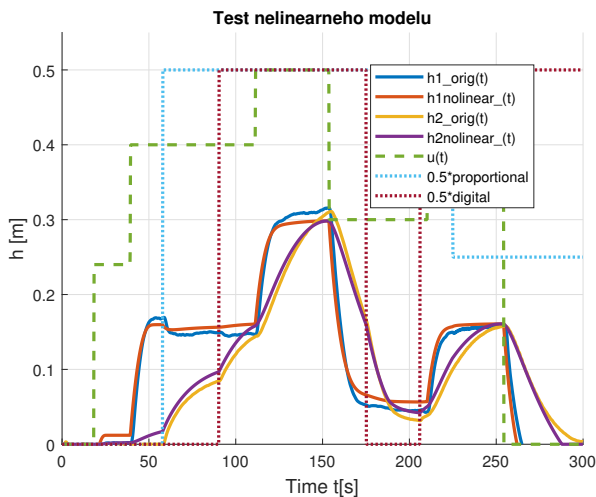
Obr. 4: Ukázka vlivu digitálního šumu na vypočítanou konstantu ventilu

### ÚKOL 6. VYTVOŘTE V SIMULINKU NELINEÁRNÍ A LINEARIZOVANÝ MODEL VČETNĚ VŠECH OMEZENÍ A NECITLIVOSTÍ

V simulinku jsme vytvořili modely dva, oba jsou uloženy v zip archivu jako *MIMO\_linearized\_simulink\_model* a *MIMO\_simulink\_model*.

ÚKOL 7. POROVNEJTE ODEZVY NELINEÁRNÍHO, LINEARIZOVANÉHO A LABORATORNÍHO MODELU NA VHDNĚ ZVOLENÉ VSTUPNÍ SIGNÁLY A POČÁTEČNÍ PODMÍNKY

A. Odezva nelineárního systému



Obr. 5: Komplexní test nelineárního modelu

Nelineární model jsme otestovali poměrně komplexním testem, kde jsme střídavě měnili všechny vstupy. Systém dobře kopíroval originální model, průběhy si navzájem odpovídaly.

U levé nádrže se ovšem model odlišoval od reálného díky konstantě zesílení  $k_c$ , což jak jsme se již přesvědčili v úkolu 2, není vůbec konstanta. Průběhy se díky tomu lišily ve svých ustálených hodnotách v rozmezí kolem jednoho centimetru a to zejména pro vyšší hladiny  $h_1$ .

U pravé nádrže jsme se setkali s mírným offsetem celého průběhu, který může být způsoben nepřesným určením konstanty proporcionálního ventilu.

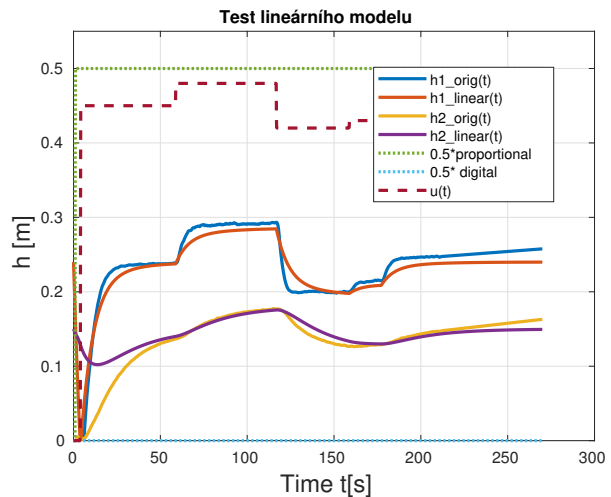
B. Odezva lineárního systému

U lineárního modelu jsme se přesvědčili o tom, že jej testovat není vůbec lehké. Nejdříve jsme zapomněli na to, že náš pracovní bod je určen pro otevřený digitální ventil, a pokud jej v průběhu testu uzavřeme, budeme se dopouštět obrovské chyby.

Bohužel jsme pro námi určený pracovní bod nenaměřili žádná vhodná data a konečný test jsme určili pro matice spočítané pro pracovní bod

$$P = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & u & v_T & v_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.14 & 0.45 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

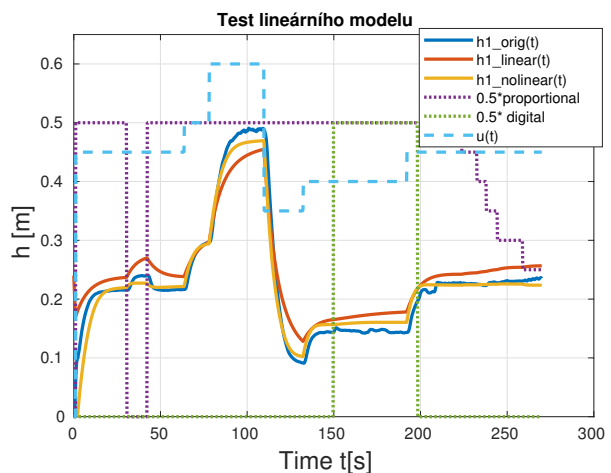
kde předpokládáme plné otevření ventilů po celou dobu průběhu.



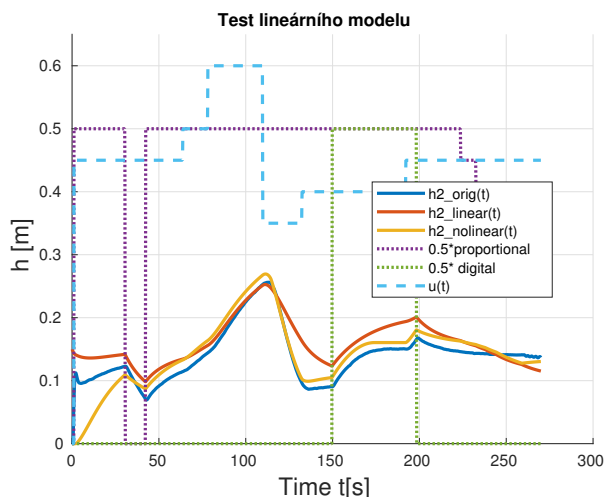
Obr. 6: Test lineárního modelu

Zpočátku napouštění nádrže je možné v grafu pozorovat přechodový děj, kdy se systém musí vychýlit z pracovního bodu, než se v něm znovu ustálí. Jakmile se systém ustálil, kopíroval poměrně dobře průběh reálného systému. Hladiny si navzájem odpovídali, problém nastal pouze u přechodových dějů, kdy systém díky své linearitě reaguje pomaleji než nelineární systém.

C. Porovnání nelineárního a lineárního systému



Obr. 7: Porovnání původního, nelineárního a lineárního modelu pro levou nádrž



Obr. 8: Porovnání původního, nelineárního a lineárního modelu pro pravou nádrž

Původní, lineární a nelineární model jsme porovnali ve finálním testu, kde se ukázaly rozdíly mezi modely a také slabiny lineárního modelu.

Nelineární model věrohodněji kopíroval model původní, jeho náběhy byly rychlejší a směrodatné odchylky menší. Lineární model velmi zaostával, což bylo způsobeno zejména velkými odchylkami od pracovního bodu - zejména zavřením digitálního ventilu, kdy odchylka ihned velmi vzrostla.

Nutno ovšem říct, že ani nelineární model nebyl u pravé nádrže příliš věrohodný, což bylo zřejmě způsobeno již zmíněnými problémy s konstantou zesílení  $k_c$  a konstantou proporcionálního ventilu  $v_t$ .

## ÚKOL 8. ZÁVĚR

Závěrem je nutno říci, že model nesedí s reálným systémem tak dobře jako v simulační úloze, kde se jednalo o model matematický, a nebyl tudíž zatížený reálnými vlastnostmi. Při ladění konstant ani nelze dosáhnout nulové odchylky, protože popis systému nezahrnuje mnoho fyzikálních aspektů - například viskozitu vody, zahřívání čerpadla, nekonstantní výšku hladiny v zásobníku a zejména nelinearitu čerpadla a ventilu....

U modelu jsme vypočtené konstanty museli vždy v průběhu experimentálně doladit - zejména proporcionální ventil, kdy jsme nelinearitu rozsahu zahrnuli velmi jednoduchým způsobem do modelu. Vlastnosti laboratorního modelu se také výrazně změnili v průběhu našich měření. Zejména po dolití vody, přestaly původně naměřené offsety fungovat. Velký problém představovala konstanta čerpadla, která se výrazně měnila v závislosti na teplotě a "zvíření vody". Pozorovali jsme, že mezi dvěma měřeními ten jistý den dosahoval rozdíl naměřených dat i přes 10%.

Linearizovaný model jsme vytvořili až potom, co jsme naměřili data, což jak se ukázalo, nebylo moudré rozhodnutí. Přesvědčili jsme se totiž, že u odchylkového modelu je velmi důležité pohybovat se v malém okolí pracovního bodu, což v našich naměřených datech nebylo pravdou, a proto jsme dostávali velké odchylky. Například otevření digitálního ventilu (pracovní bod jsme uvažovali při zavřeném) zanesl do modelu tak výraznou chybu, že se výsledky lišily až o 5 cm.

Musíme říct, že použití reálného modelu nám velmi pomohlo uvědomit si důležitost dodržení daných předpokladů pro práci se systémem, zlepšit fyzikální odhad a celkově pochopit danou látku (o velké dávce trpělivosti nemluvně). Práce v týmu nám vyhovovala a já sám jsem svoje znalosti rozšířil o mnoho nových slovenských slovíček.