Egyenletrendszer megoldhatósága (Fredholm lemma)

Kérdés, hogy hogyan tudjuk eldönteni, hogy egy egyenletrendszer megoldható-e vagy sem?

Tétel

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek ($\mathbf{x}$ változóra nincsenek nemnegativitási megkötések) akkor és csak akkor van megoldása, ha nincs az $\mathbf{y}^T A = \mathbf{0}^T$, $\mathbf{y}^\mathbf{T}\mathbf{b} \neq 0$ feladatnak.

Biz. (Frank András): A két rendszer egyszerre nem megoldható, mert, ha létezik olyan $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$, hogy $\mathbf{x}$ az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ feladat megoldása, $\mathbf{y}$ pedig a $\mathbf{y}^T A = \mathbf{0}$, $\mathbf{y}^\mathbf{T}\mathbf{b} \neq 0$ feladaté, akkor:

$$0 = (\mathbf{y}^T A)\mathbf{x} = \mathbf{y}^T(A\mathbf{x}) = \mathbf{y}^\mathbf{T}\mathbf{b} \neq 0 ,$$

azaz ellentmondásra jutottunk.

Fredholm lemma - bizonyítás

Most már csak azt kell belátni, hogy az egyik feladatnak van megoldása. Az A mátrix oszlopai szerint fogjuk indukcióval belátni. Ha A-ban csak 0 elemek vannak, akkor az állítás triviális. Tehát feltételezzük, hogy az A mátrixnak vannak nem 0 elemei is. Nézzük először azt az esetet, ha az A mátrix csak egyetlen oszlopból áll, ekkor $\mathbf{x}$ is egy elemet tartalmaz (tulajdonképpen egyváltozós egyenletrendszer). Ekkor az egyenletrendszernek csak akkor lesz megoldása, ha $\mathbf{b} = \alpha A$, ahol α tetszőleges valós szám.

Ha nem létezik olyan α valós szám, amelyre $\mathbf{b} = \alpha A$ fennáll (A egyetlen oszlopvektora és $\mathbf{b}$ lineárisan független), akkor legyen $\mathbf{b}'$ vektor a $\mathbf{b}$ vektor A-ra vonatkozó merőleges vetülete és legyen $\mathbf{y} = \mathbf{b} - \mathbf{b}'$. Ekkor $\mathbf{y}$ merőleges A-ra, tehát $\mathbf{y}^T A = 0$. Ha $\mathbf{y}^T\mathbf{b}$ is 0 lenne, akkor $\mathbf{b}$ merőleges lenne a $\mathbf{b} - \mathbf{b}'$ vektorra, ami azt jelentené, hogy teljesülnie kellene $\mathbf{b} = \alpha A$ egyenletnek valamilyen α-ra.

3

Fredholm lemma - bizonyítás

Tegyük fel, hogy $m-1$-re már igaz az állítás, belátjuk m-re is.
Legyen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$$

Sorműveletekkel (és szükség esetén oszlopok felcserélésével) el tudjuk érni, hogy a_{11} nem 0, A_{21} mátrix pedig csak 0 elemekből áll.
Az indukciós feltétel szerint az

$$A_{22}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$$

egyenletrendszerre a Fredholm lemma valamelyik állítása igaz.

4

Fredholm lemma - bizonyítás

Tegyük fel, hogy létezik egy $\mathbf{x}_2^*$ megoldás. Legyen $x_1^* = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - A_{12}\mathbf{x}_2^*)$! Ekkor $\begin{pmatrix} x_1^* \\ \mathbf{x}_2^* \end{pmatrix}$ vektor kielégíti ez eredeti egyenletrendszert.

Ha az $A_{22}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$ feladatnak nem létezik megoldása, akkor létezik olyan $\mathbf{y}_2^*$, hogy $(\mathbf{y}_2^*)^T A_{22} = \mathbf{0}^T$, és $(\mathbf{y}_2^*)^T \mathbf{b}_2 \neq 0$.
Ekkor

$$(0|\mathbf{y}_2)^T \begin{pmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{0}^T , \quad \text{és} \quad (0|\mathbf{y}_2)^T \begin{pmatrix} b_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \neq 0 .$$

Egyenletrendszer - példa

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ -1x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	b
e_1	$\boxed{2}$	1	−1	4
e_2	−1	3	1	5
e_3	0	1	2	3
e_4	2	2	1	3

Egyenletrendszer - példa

	e_1	x_2	x_3	b
x_1	0, 5	0, 5	−0, 5	2
e_2	0, 5	$\boxed{3{,}5}$	0, 5	7
e_3	0	1	2	3
e_4	−1	1	2	−1

	e_1	e_2	x_3	b
x_1	0, 429	−0, 143	−0, 571	1
x_2	0, 143	0, 286	0, 143	2
e_3	−0, 143	−0, 286	$\boxed{1{,}857}$	1
e_4	−1, 143	−0, 286	1, 857	−3

7

Egyenletrendszer - példa

	e_1	e_2	e_3	b
x_1	$0,385$	$-0,231$	$0,308$	$1,308$
x_2	$0,154$	$0,308$	$-0,077$	$1,923$
x_3	$-0,077$	$-0,154$	$0,538$	$0,538$
e_4	-1	0	-1	-4

Tehát az egyenletrendszernek nem létezik megoldása. Az utolsó sor erre a bizonyíték: sorműveletekkel elértük, hogy minden komponens 0, de a b vektor oszlopában nem 0 szerepel.

Hogyan tudjuk előállítani y vektor koordinátáit? Az utolsó sorból leolvasható: az első egyenletet vegyük -1-szeres súllyal, a másodikat 0-val, a harmadikat megint -1-szeressel, a negyediket pedig egyszeressel.

8

Farkas lemma

Szeretnénk a Fredholm lemmához hasonló állítást egyenlőtlenség rendszerek megoldásához is. Erről szól a Farkas lemma.

Tétel

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ egyenletrendszernek pontosan akkor van megoldása, ha nincs az $\mathbf{y}^T A \geq \mathbf{0}^T$, $\mathbf{y}^\mathbf{T}\mathbf{b} < 0$ feladatnak.

Megjegyzés: **b** vektorra nincs nemnegativitási kikötés, tehát bármilyen egyenlőtlenségrendszert át tudunk alakítani erre a formára.

Biz. (Frank András): a két rendszernek egyszerre nem lehet megoldása:

$$0 \leq (\mathbf{y}^T A)\mathbf{x} = \mathbf{y}^T (A\mathbf{x}) = \mathbf{y}^\mathbf{T}\mathbf{b} < 0 \ ,$$

tehát ellentmondásra jutottunk.

Farkas lemma - bizonyítás

Szeretnénk belátni, hogy valamelyik rendszernek van megoldása. Ha A-ban csak 0 elemek vannak, akkor az állítás triviális. Tehát feltételezzük, hogy az A mátrixnak vannak nem 0 elemei is.
Álljon most is először A egyetlen oszlopból!
Ha van megoldás, akkor a Fredholm lemmához hasonlóan most is igaz, hogy $\mathbf{b} = \alpha A$ de most $\alpha \geq 0$ szám szükséges. Ha α negatív, akkor legyen $\mathbf{y} = A$. Ekkor $\mathbf{y}^T A = \mathbf{y}^T \mathbf{y} > 0$ és
$\mathbf{y}^T \mathbf{b} = \mathbf{y}^T \alpha \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{y}^T \mathbf{y}) < 0$.

Ha nem létezik olyan α valós szám, amelyre $\mathbf{b} = \alpha A$ fennáll (A egyetlen oszlopvektora és $\mathbf{b}$ lineárisan független), akkor legyen $\mathbf{b}'$ vektor a $\mathbf{b}$ vektor A-ra vonatkozó merőleges vetülete és legyen $\mathbf{y} = \mathbf{b} - \mathbf{b}'$. Ekkor $\mathbf{y}$ merőleges A-ra, tehát $\mathbf{y}^T A = 0$. Ha $\mathbf{y}^T \mathbf{b}$ pozitív lenne, akkor tekintsük az $\mathbf{y}' = -\mathbf{y}$ vektort, ami már megfelel a kívánalmaknak.

Farkas lemma - bizonyítás

Most is teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. Tegyük fel, hogy ha A oszlopvektorainak száma maximum $m-1$, akkor igaz az állítás. Belátjuk, hogy igaz m-re is.

Legyen most is:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$$

Most azt tesszük fel, hogy $a_{11} > 0$. (Az A összes eleme nem lehet 0, sor- és oszlopcserékkel el tudjuk érni, hogy a_{11} ne legyen 0. Ha $a_{11} < 0$, akkor szorozzuk az első egyenlet mindkét oldalát -1-gyel.)

Ezután sorműveletekkel el lehet érni azt is, hogy A_{21} csupa 0 elemekből álljon.

Farkas lemma - bizonyítás

Tekintsük az

$$\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}$$

egyenletrendszert. Az indukciós feltétel szerint erre az állításra a Farkas lemma igaz. Tegyük fel, hogy létezik nemnegatív megoldása az egyenletrendszernek ($\mathbf{x}_2^*$). Ekkor $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{x}_2^* \end{pmatrix}$ megoldása az eredeti egyenletrendszernek.

Ha nincs megoldása az $\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}$ rendszernek, akkor van megoldása az $\mathbf{y}^T \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}^T$, $\mathbf{y}^T \mathbf{b} < 0$ rendszernek.

Amennyiben $\mathbf{y}^T \begin{pmatrix} a_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} \geq 0$ teljesül, akkor $\mathbf{y}$ megoldás az eredeti feladatra is.

Farkas lemma - bizonyítás

Ha $\mathbf{y}^T \begin{pmatrix} a_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} < 0$, akkor tekintsük az $A_{22}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$ egyetlenrendszert! Az indukciós feltétel szerint erre az egyenletrendszerre is igaz a Farkas lemma valamelyik állítása.

Most először tegyük fel, hogy nincs nemnegatív megoldása az egyenletrendszernek. Ekkor van olyan $\mathbf{y}_2^*$, hogy $(\mathbf{y}_2^*)^T A_{22} \geq \mathbf{0}^T$, $(\mathbf{y}_2^*)^T \mathbf{b}_2 < 0$. Ekkor $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{y}_2^* \end{pmatrix}$ megoldás az eredeti feladat esetén a komplementer feladatra.

13

Farkas lemma - bizonyítás

Ha ez sem teljesül, akkor $A_{22}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$ egyenletrendszernek van nemnegatív megoldása ($\mathbf{x}_2^*$), és legyen $x_1^* = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - A_{12}\mathbf{x}_2^*)$. Állítjuk, hogy x_1^* nemnegatív, és a $\begin{pmatrix} x_1^* \\ \mathbf{x}_2^* \end{pmatrix}$ nemnegatív megoldása az eredeti feladatnak. Ha negatív lenne, akkor van egy olyan $\mathbf{x}$ vektorunk, hogy első komponense negatív, a többi pedig nemnegatív, van továbbá olyan $\mathbf{y}$ vektorunk is, hogy az $\mathbf{y}^T A$ szorzat első tagja negatív, a többi pedig nemnegatív. Ekkor

$$0 < (\mathbf{y}^T A)\mathbf{x} = \mathbf{y}^T(A\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T\mathbf{b} < 0 \ ,$$

tehát ellentmondásra jutnánk.

14

Farkas lemma

Tétel

Az $A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$ (mindegyik korlát '$\le$' korlát), $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$ egyenletrendszernek pontosan akkor van megoldása, ha nincs a $\mathbf{y}^T A \ge \mathbf{0}^T$, $\mathbf{y}^\mathbf{T}\mathbf{b} < 0$, $\mathbf{y} \ge \mathbf{0}$ feladatnak.

Biz. (Frank András): legyen $A' = \begin{pmatrix} A \\ -E \end{pmatrix}$, ahol E az egységmátrix, továbbá legyen $\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

Az $A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$ egyenletrendszer pontosan akkor megoldható, ha megoldható a $A'\mathbf{x} \le \mathbf{b}'$ egyenletrendszer ($\mathbf{x}'$ vektorra nincs előjelkikötés).

15

Farkas lemma - bizonyítás

Tekintsük ezután a $A'' = (A'|\mathbf{b}')$. Tekintsük az

$$\left(\mathbf{y}''^T A''\right)^T = A''^T \mathbf{y}'' = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -1 \end{pmatrix} ,\mathbf{y}'' \geq 0$$

feladatot! A Farkas tétel egyenlőségekre kimondott alakja szerint vagy ennek a rendszernek, vagy a komplementer faladatnak van megoldása.

Ha létezik ilyen $\mathbf{y}''$, akkor $\begin{pmatrix} A^T & -E \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{0}^T \end{pmatrix} \mathbf{y}'' = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -1 \end{pmatrix}$, amiből következik, hogy létezik $\mathbf{y}$, amire $\mathbf{y}^T A \geq \mathbf{0}^T$, $\mathbf{y}^T \mathbf{b} < 0$

16

Farkas lemma - bizonyítás

Ha nem létezik ilyen $\mathbf{y}''$, amire az

$$A''^T \mathbf{y}'' = \mathbf{0} \ ,\mathbf{y}'' \geq 0$$

rendszer megoldható, akkor létezik olyan $\mathbf{x}''$ (a Farkas tétel egyenlőségekre kimondott alakja szerint), amire

$$\mathbf{x}''^T A''^T = \left(A''\mathbf{x}''\right)^T \geq \mathbf{0}^T \ ,\mathbf{x}''^T \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -1 \end{pmatrix} < 0 \ .$$

Látható, hogy $\mathbf{x}''$ vektor pozitív konstanssal beszorozva is megoldás marad, ezért feltehetjük, hogy a vektor utolsó komponense abszolút értékben 1.

Ekkor: $\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ -E & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{x}'' \geq \mathbf{0}$, amiből $\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ -E & \mathbf{0} \end{pmatrix} (-\mathbf{x}'') \leq \mathbf{0}$, $(-\mathbf{x}''^T) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -1 \end{pmatrix} > 0$ is következik. Amiből már látható $\mathbf{x}$ nemnegativitása, másrészről az $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ egyenlőtlenségrendszer teljesülése is.

17

Primál - duál feladatpár

Definíció

Tekintsük az

$$\begin{array}{rcr} \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \to & \max \\ A\mathbf{x} & \leq & \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geq & 0 \end{array}$$

LP feladatot. Ekkor az ehhez a feladathoz tartozó

$$\begin{array}{rcr} \mathbf{y}^T\mathbf{b} & \to & \min \\ \mathbf{y}^T A & \geq & \mathbf{c}^T \\ \mathbf{y} & \geq & 0 \end{array}$$

feladatot az eredeti (primál) feladat duáljának hívjuk.

18

Primál - duál feladatpár

Állítás

Amennyiben mind a primál, mind a duál feladatnak létezik lehetséges megoldása, akkor a duál feladat esetén a célfüggvény értéke nagyobb vagy egyenlő, mint a primál feladat célfüggvényértéke. (Gyenge dualitási tétel)

Biz.:

$$\mathbf{y}^T\mathbf{b} \geq \mathbf{y}^T(A\mathbf{x}) = (\mathbf{y}^T A)\mathbf{x} \geq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

Következmény

Ha a primál feladat célfüggvénye nem korlátos, a duál feladatnak nincs lehetséges megoldása.

Következmény

Ha a duál feladat célfüggvénye nem korlátos, a primál feladatnak nincs lehetséges megoldása.

Primál - duál feladatpár

Fontos megjegyzés, hogy abból, hogy a primál (duál) feladatnak nincs lehetséges megoldása, nem következik, hogy a duál (primál) feladat célfüggvénye nem korlátos, mert elképzelhető, hogy egyiknek sincs lehetséges megoldása.

Erős dualitási tétel

Tétel

Amennyiben mind a primál, mind a duál feladatnak van lehetséges megoldása, akkor mind a két feladatnak van optimális megoldása is, továbbá a célfüggvények értékei megegyeznek.

Biz.: Írjuk fel a duál feladatot s következő formában:

$$\begin{array}{rcr} \mathbf{y}^T\mathbf{b} & \rightarrow & \min \\ -\mathbf{y}^T A & \leq & -\mathbf{c}^T \\ \mathbf{y} & \geq & 0 \end{array}$$

Legyen $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \\ -\mathbf{c} & \mathbf{b} \end{pmatrix}$, valamint $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{c} \\ 0 \end{pmatrix}$

Erős dualitási tétel - bizonyítás

Tekintsük ezek után a $B\mathbf{z} \leq d$, $\mathbf{z} \geq 0$ feladatot.

Ha ennek a feladatnak van megoldása, akkor készen vagyunk a bizonyítani kívánt állítással.

Ha nincs, akkor a Farkas tétel értelmében van a $\mathbf{v}^T B \geq \mathbf{0}^T$, $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{v}^T \mathbf{d} < 0$ feladatnak.

A könnyebb kezelhetőség kedvéért jelöljük $\mathbf{v}$ vektor komponenseit a következő módon: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}' \\ \mathbf{x}' \\ v_0 \end{pmatrix}$

Erős dualitási tétel - bizonyítás

Nézzük először azt az esetet, amikor v_0 0. Ekkor $\mathbf{v}^T B \geq \mathbf{0}^T$ feltételből következik, hogy $\mathbf{x}'^T \left(-A^T\right) \geq \mathbf{0}^T$, amit inkább írjunk $A\mathbf{x}' \leq \mathbf{0}$ módon.

Ha $\mathbf{c}^T \mathbf{x}'$ pozitív lenne, akkor nem lenne korlátos a célfüggvény, hiszen minden pozitív α számra $\alpha \mathbf{x}'$ is lehetséges megoldás lenne, tehát nem lenne korlátos a primál feladat célfüggvénye; a duál feladatnak nem lenne lehetséges megoldása, ami ellentétben áll a kiinduló feltételezésünkkel.

Tehát $\mathbf{c}^T \mathbf{x}' \leq 0$.

Hasonlóan: $\mathbf{y}'^T A \geq \mathbf{0}^T$. Ha $\mathbf{y}'^T \mathbf{b}$ negatív lenne, akkor a duál feladat célfüggvénye nem lenne korlátos. Tehát $\mathbf{y}'^T \mathbf{b} \geq 0$. Ekkor viszont

$$0 \leq \mathbf{y}'^T \mathbf{b} - \mathbf{c}^T \mathbf{x}' = \mathbf{v}^T \mathbf{d} < 0 \ ,$$

Tehát ellentmondásra jutottunk.

23

Erős dualitási tétel - bizonyítás

Nézzük azt az esetet, amikor v_0 pozitív. A $\mathbf{v}$ vektor beszorozható tetszőleges pozitív számmal, ezért feltehetjük, hogy $v_0 = 1$.

Ekkor a feltételekből következik, hogy $\mathbf{y}'^T A \geq \mathbf{c}$ és $A\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}$ (tehát $\mathbf{x}$ a primál, $\mathbf{y}$ a duál feladat lehetséges megoldása), a gyenge dualitási tétel alapján $\mathbf{y}^T\mathbf{b}' \geq \mathbf{c}^T\mathbf{x}'$. Ekkor viszont

$$0 \leq \mathbf{y}^T\mathbf{b}' - \mathbf{c}^T\mathbf{x}' = \mathbf{v}^T\mathbf{d} < 0 \ ,$$

tehát megint csak ellentmondásra jutottunk.

24

Erős dualitási tétel - következmény

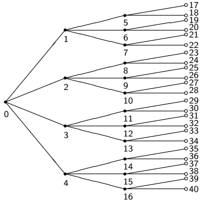
Az erős dualitási tétel alapján állíthatjuk, hogy ha mind a primál, mind a duál feladatnak van lehetséges megoldása, akkor:

$$\mathbf{y}^T\mathbf{b} = \mathbf{y}^T(A\mathbf{x}) = (\mathbf{y}^T A)\mathbf{x} = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \ ,$$

amiből következik, hogy ha valamelyik sorra egyenlőtlenségként teljesül a feltétel, akkor ez ehhez a sorhoz tartozó duál változó értéke 0, valamint fordítva is: ha valamelyik duál változó értéke pozitív, akkor az oszlophoz tartozó primál változó értéke 0, (azaz nembázis váltózó, de degeneráció esetén nem ilyen egyértelmű a helyzet)

Szcenárió fák

Az alábbi ábra egy példát mutat a szcenárió fákra. Egy ilyen fát (gráfot) szeretnénk leírni matematikailag.



Az ábrán a körök a világállapotokat jelentik, a vonalak pedig a világállapotok közötti átmeneteket

Szcenárió fák

Jelölje $t = 0, ..., T$ a vizsgált időpontokat. Jelölje $\mathcal{N}_t$ a t. időpontban lehetséges világállapotok (csúcspontok, angolul node) halmazát. Pl.: $\mathcal{N}_1 = \{1, 2, 3, 4\}$. Az összes csúcsot $\mathcal{N}$ módon jelöljük. A gyökért kivéve a fában minden csúcspontnak van egy elődje (parent node),ezt jelölje $a(n)$. A mi példánkban $a(1) = 0$ és pl.: $a(23) = 8$. Minden csúcsponthoz, ami nem végpont tartoznak leszármazott csúcspontok (child nodes), ezeket jelölje $\mathcal{C}(n)$. A mi példánkban $\mathcal{C}(0) = \{1, 2, 3, 4\}$ és pl.: $\mathcal{C}(8) = \{23, 24\}$.

A csúcspontokhoz rendelhetünk valószínűségeket is (bár nem feltétlenül szükséges). Ezeket a valószínűségeket p_n módon jelöljük. Természetesen minden t-re

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_t} p_n = 1 ,$$

továbbá

$$\sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p_m = p_n .$$

Sztochasztikus folyamatok

Ezen a szcenárió fán értelmezhetünk sztochasztikus folyamatokat. Legyen $[X_t]$ egy sztochasztikus folyamat, amelynek értékét meg tudjuk mondani minden $n \in \mathcal{N}$ csúcspontra (X_n).

Ennek a folyamatnak a várható értéke: $E^P[X_t] = \sum_{n \in \mathcal{N}_t} p_n X_n$

$[X_t]$ folyamatnak $\mathcal{N}_t$-re vonatkozó feltételes várható értéke:

$$E^P[X_{t+1}|\mathcal{N}_t] = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} \frac{p_m}{p_n} X_m$$

Értékpapírok

A döntéshozó $J+1$ értékpapír közül választhat, $j = 0, ...J$. Az j-edik értékpapír értékét az n csúcspontban jelöljük S_n^j módon. Az n csúcsban az összes értékpapírt tartalmazó vektort $\mathbf{S}_n$.

Tegyük fel, hogy van egy értékpapír, aminek minden csúcspont esetén pozitív az értéke, ez az értékpapír legyen a 0. Ekkor legyen

$$Z_n^j = \frac{S_n^j}{S_n^0}$$

29

Portfólió

A döntéshozó az n csúcspontban a j-edik értékpapírból birtokolt mennyiségét jelölje θ_n^j. A döntéshozó portfólióját az n csúcspontban $\boldsymbol{\theta}_n$ jelöli. Ennek a portfóliónak az értéke

$$\mathbf{Z}_n\boldsymbol{\theta}_n = \sum_{j=0}^{J} Z_n^j \theta_n^j \ .$$

30

Arbitrázs

Két típusú arbitrázst különböztessünk meg:

- **Type-1 Arbitrage** is a trading strategy that generates a strictly positive cash flow between 0 and T in at least one state with positive probability and does not require an outflow of funds at any date, that is a trading strategy that produces something from nothing. A simple example of this kind of arbitrage is the opportunity to borrow and lend at two different rates of interest.
- **Type-2 Arbitrage** generates a net future cash flow of at least zero for sure, with the arbitrageur getting his profits up front. This kind of arbitrage is referred to as free lunch. The simultaneous purchase and sale of the same or essentially similar security in two different markets for advantageously different prices may illustrate this case.

Arbitrázs

A második típusú arbitrázst könnyebb megfogni a felírt szcenárió fán. Kell egy önfinanszírozó stratégiát mutatni, ami nem igényel tőkét induláskor sem és később sem, nem áll fenn a veszteség kockázata soha sem, mégis pozitív a várható értéke lejáratkor.

Képletekkel:

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{Z}_0\boldsymbol{\theta}_0 & = & 0 & \\ \mathbf{Z}_n\boldsymbol{\theta}_n & = & \mathbf{Z}_n\boldsymbol{\theta}_{a(n)} & \forall n > 0 \\ \mathbf{Z}_n\boldsymbol{\theta}_n & \geq & 0 & \forall n \\ \sum_{n\in\mathcal{N}_T} \mathbf{Z}_n\boldsymbol{\theta}_n & > & 0 & \end{array}$$

Arbitrázs

Állítás

Az arbitrázs definíciójában elég csak a végső állapotokban kikötni a nemnegativitást.

Biz.: tegyük fel, hogy létezik egy olyan kereskedési stratégia, amire teljesül, hogy

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{Z}_0\boldsymbol{\theta}_0 & = & 0 & \\ \mathbf{Z}_n\boldsymbol{\theta}_n & = & \mathbf{Z}_n\boldsymbol{\theta}_{a(n)} & \forall n > 0 \\ \mathbf{Z}_n\boldsymbol{\theta}_n & \geq & 0 & \forall n \in \mathcal{N}_T \\ \sum_{n\in\mathcal{N}_T} \mathbf{Z}_n\boldsymbol{\theta}_n & > & 0 & \end{array}$$

de létezik olyan $n > 0$, $n \notin \mathcal{N}_T$ világállapot, amire $\mathbf{Z}_n\boldsymbol{\theta}_n < 0$. Megmutatjuk, hogy létezik egy olyan $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ kereskedési stratégia, amelyre teljesülnek az előző dián megfogalmazott feltételek.

Arbitrázs

Tekintsünk egy olyan $\overline{n}$ világállapotot, amire $\mathbf{Z}_{\overline{n}}\boldsymbol{\theta}_{\overline{n}} = -a < 0$ teljesül, de minden leszármazott csúcspontra (és leszármazottak leszármazottaira ...) $\mathbf{Z}_n\boldsymbol{\theta}_n \geq 0$. (Ha belegondolunk ez egy első típusú arbitrázs)
Definiáljunk a $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ kereskedési stratégiát a következő módon: az $\overline{n}$ csúcsponthoz tartozó részfát leszámítva $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$. Az $\overline{n}$ csúcsponthoz tartozó részfában

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n := \begin{cases} \theta_n^0 + \frac{a}{S_n^0} & \\ \theta_n \ , & \text{ha} \ \ j \geq 1 \end{cases}$$

Az $\overline{n}$ csúcsponthoz tartozó részfán kívül a feltételek teljesülése triviális. Könnyen látni azt is, $\mathbf{Z}_{\overline{n}} = 0$, tehát az önfinanszírozás feltétele teljesül az $\overline{n}$ csúcspontra is. Az eredteti $\boldsymbol{\theta}$ stratégia önfinanszírozó volt, és nyilvánvalóan önfinanszírozó az $\frac{a}{S_n^0}$ stratégia is. A végpontok esetén $(n \in \mathcal{N}_T)$ a $\boldsymbol{\theta}_n$ strtégia nemnegatív volt, ehhez hozzájön a $\frac{a}{S_n^0}$ érték, ami pozitív.

Arbitrázs

Most már fel tudjuk írni az arbitrázs feladatot LP feladatként (zárójelben a duál feladat változói szerepelnek):

$$\begin{array}{lclll}
\sum\limits_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \mathbf{Z}_n \boldsymbol{\theta}_n & \to & \max\limits_{\boldsymbol{\theta}} & & \\
\mathbf{Z}_0 \boldsymbol{\theta}_0 & = & 0 & & (y_0) \\
\mathbf{Z}_n(\boldsymbol{\theta}_n - \boldsymbol{\theta}_{a(n)}) & = & 0 & \forall n > 0 & (y_n) \\
\mathbf{Z}_n \boldsymbol{\theta}_n & \geq & 0 & \forall n \in \mathcal{N}_T & (x_n)
\end{array}$$

Fontos megjegyzés, hogy a $\boldsymbol{\theta}$ változókra nincs előjelmegkötés.

Ha nem létezik arbitrázs, akkor a célfüggvény optimális értéke 0, ha létezik arbitrázs, akkor a célfüggvény nem korlátos.

Arbitrázs - duál feladat

Írjuk fel az előző oldalon szereplő feladat duálját (a döntési változók előjelkötetlenek, ezért a duál feladatban a korlátok egyenlőségként teljesülnek)!

$$\begin{aligned} y_n \mathbf{Z}_n - \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} y_m \mathbf{Z}_m &= \mathbf{0} && n \in \mathcal{N}_t, t \leq T-1 \\ (y_n + x_n)\mathbf{Z}_n &= p_n \mathbf{Z}_n && n \in \mathcal{N}_T \end{aligned}$$

A végpontok esetén nagyobb vagy egyenlő korlátok vannak, tehát az ehhez tartozó x változók nempozitívak ($x_n \leq 0$), $n \in \mathcal{N}_T$, a többi korlát egyenlőséggel adott korlát, tehát az y változók előjelkötetlenek.

A feladat célfüggvénye konstans 0, tehát ha létezik lehetséges megoldása a duál feladatnak, akkor az optimális is.

Arbitrázs - kockázatsemleges mérték

Nézzük meg, hogy mit kaptunk a duál feladatban: Mivel x változók nempozitívak, ezért ha $p_n > 0$, akkor y_n is nagyobb, mint 0.

$Z_n^0 = 1$, minden n-re, ebből következik, hogy:

$$y_n = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} y_m \ ,$$

amiből már következik az is, hogy

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_t} y_n = y_0 \ .$$

y_0 értéke nem feltétlenül 1, de ebből már tudunk valószínűséget definiálni: $q_n = \frac{y_n}{y_0}$.

37

Arbitrázs - kockázatsemleges mérték

Osszuk le az $y_n \mathbf{Z}_n = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} y_m \mathbf{Z}_m$ egyenlőséget, y_0-nal:

$$q_n \mathbf{Z}_n = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q_m \mathbf{Z}_m \ ,$$

amit írhatunk a

$$[\mathbf{Z}_t] = E^Q[\mathbf{Z}_{t+1} | \mathcal{N}_t] \ ,$$

módon is, ami azt jelenti, hogy $[\mathbf{Z}_t]$ martingál a Q mérték szerint.

Megjegyzések:

- Nem állítjuk, hogy a Q mérték egyedi.
- A P (statisztikai) mérték nem játszik lényeges szerepet, csak annyi a lényeg, hogy 0 vagy pozitív.

38

Arbitrázs - kockázatsemleges mérték

Most már megfogalmazhatjuk az eszközárazás első alaptételét (szcenáriófák esetén)

Tétel

Az $\mathcal{N}$ szcenáriófán értelmezhető $[\mathbf{Z}_t]$ (vektorértékű) sztochasztikus folyamat arbitrázsmentes ár (folyamat) akkor és csak akkor, ha létezik legalább egy P (statisztikai) mértékkel ekvivalens Q (kockázatsemleges) mérték, amelyre viszonyítva $[\mathbf{Z}_t]$ (diszkrét) martingál.

Biz.: azt már beláttuk, hogy ha nem létezik arbitrázs, akkor a duál feladat alapján definiált Q mértékre vonatkoztatva $[\mathbf{Z}_t]$ martingál.

Arbitrázs - kockázatsemleges mérték

Nézzük a visszafele irányt. Tegyük fel, hogy van egy kockázatsemleges mérték, és mutassuk meg, hogy nincs arbitrázslehetőség a piacon.

Tehát létezik egy Q mérték, amire $[\mathbf{Z}_t]$ martingál. Legyen

$$y_0 = \max_{n \in \mathcal{N}_t} \frac{p_n}{q_n} \ ,$$

továbbá legyen $y_n = q_n y_0$. Legyen $x_n = p_n - y_n$. Állítható, hogy x változók nempozitívak:

$$x_n = p_n - y_n = p_n - q_n y_0 \leq p_n - q_n \frac{p_n}{q_n} = 0 \ .$$

Találtunk a duál feladatnak egy lehetséges megoldását. A primál feladatnak a $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ lehetséges megoldása, tehát az erős dualitási tétel értelmében a primál feladatnak is van optimális megoldása, aminek értéke 0. Ez viszont azt jelenti, hogy nincs arbitrázslehetőség a piacon.