ERA - Übungsblatt 05

> "≡" bezeichnet die logische Äquivalenz (d.h. links und rechts haben den selben Wahrheitswert für alle Belegungen). Formal also genauer als '='
> In ERA aber eig. egal :)

1. a, b, c) siehe ML - mögliche Klausuraufgabe (free Punkte)

2. a)

$\overline{a\cdot b}+b$
$\equiv \bar a+\bar b+b$ — De Morgan: $\overline{x\cdot y}\equiv \bar x+\bar y$
$\equiv \bar a+1$ — Komplementärgesetz: $x+\bar x\equiv 1$
$\equiv 1$ — Extremalgesetz: $x+1\equiv 1$

b)

$\overline{\overline{(x+y)}+\overline{(\bar x+y)}}$
$\equiv \overline{\overline{(x+y)}}\cdot\overline{\overline{(\bar x+y)}}$ — De Morgan (außen)
$\equiv (x+y)\cdot(\bar x+y)$ — Involution: $\bar{\bar a}\equiv a$
$\equiv y+(x\cdot\bar x)$ — Distributivität
$\equiv y+0$ — Komplementärgesetz
$\equiv y$ → linke Seite — Idempotenz

$(\bar x+y)\cdot(\bar x+\bar y)$
$\equiv \bar x+(y\cdot\bar y)$ — Distributivität
$\equiv \bar x+0$ — Komplementärgesetz
$\equiv \bar x$ → rechte Seite

Linke Seite ≠ rechte Seite → nicht äquivalent

c)

$\overline{(\bar a\cdot b)+\bar b}$
$\equiv \overline{(\bar a\cdot b)}\cdot\bar{\bar b}$ — De Morgan
$\equiv \overline{(\bar a\cdot b)}\cdot b$ — Involution
$\equiv (\bar{\bar a}+\bar b)\cdot b$ — De Morgan
$\equiv (a+\bar b)\cdot b$ — Involution
$\equiv a\cdot b+\bar b\cdot b$ — Distributivität: $(x+y)\cdot z\equiv x\cdot z+y\cdot z$
$\equiv a\cdot b+0$ — Komplementärgesetz: $x\cdot\bar x\equiv 0$
$\equiv a\cdot b$ → linke Seite

$\overline{\bar a+\overline{(b+(\bar a+\bar a\cdot\bar b))}}$
$\equiv \overline{\bar a+\overline{(b+\bar a)}}$ — Absorption: $x+(x\cdot y)\equiv x$
$\equiv \bar{\bar a}\cdot\overline{\overline{(b+\bar a)}}$ — De Morgan
$\equiv a\cdot(b+\bar a)$ — Involution
$\equiv a\cdot b+a\cdot\bar a$ — Distributivität
$\equiv a\cdot b+0$ — Komplementärgesetz
$\equiv a\cdot b$ → rechte Seite

Linke Seite = rechte Seite ⟶ äquivalent ✓

3. Sei M eine Menge an boolschen Funktionen f_i. M ist funktional vollständig gdw. sich jede boolsche Funktion als Komposition (Nacheinanderausführung) von f_i's darstellen lässt.
Aus der VL wissen wir, dass $\{\wedge,\neg\}$ (AND und Negation) funktional vollständig ist. D.h. falls wir Funktionen finden, mit denen wir $\wedge$ und $\neg$ "nachbauen" (≙ gleiche Wahrheitstabelle) können, dann sind diese auch funktional vollständig.

- NOR (Negation von OR):

a	b	a NOR b
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$\neg$: Wir wissen, dass NOR die Negation von OR ist und nach dem Idempotenzgesetz gilt: $x+x=x$. Damit: $NOR(x,x)=\overline{x+x}=\bar x$ — $NOR(x,x)$ entspr. also $\bar x$

$\wedge$: Wir sehen aus der Wahrheitstabelle sofort, dass NOR die umgekehrte AND-Wahrheitstabelle ist, d.h. wir invertieren die Eingänge: $NOR(NOR(x,x),NOR(y,y))=NOR(\bar x,\bar y):\ \overline{\bar x+\bar y}=x\cdot y$

⇒ NOR ist also funktional vollständig

- XOR ($\oplus$): nicht funktional vollständig, Beweis siehe ML

- $\{\neg, \leftrightarrow\}$: Wir wissen, dass $\leftrightarrow$ (XNOR) der Negation von XOR entspricht
  ⇒ nicht funktional vollständig

- $\{\neg, \rightarrow\}$: Aus DS sollte die Umformung der Implikation bekannt sein: $x \rightarrow y \equiv \overline{x} + y$

a	b	a → b
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$\neg$: Bereits in der Menge gegeben

$\wedge$: Negieren wir die Implikation, erhalten wir $\overline{\overline{x} + y}$. Wir invertieren noch y, damit nach De Morgan alles passt:

$\neg(x \rightarrow \overline{y}) \equiv \overline{(\overline{x} + \overline{y})} = \overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{y}} = x \cdot y$

⇒ ist funktional vollständig

4. siehe Webseite