ERA-Übungsblatt 05

1. a, b, c) siehe ML - mögliche Klausuraufgabe (free Punkte)

> "≡" bezeichnet die logische Äquivalenz (d.h. links und rechts haben den selben Wahrheitswert für alle Belegungen). Formal also genauer als '='
> In ERA aber eig. egal :)

2. a)

$\overline{a\cdot b}+b$

$\equiv \bar a + \bar b + b$ — De Morgan: $\overline{x\cdot y} \equiv \bar x + \bar y$

$\equiv \bar a + 1$ — Komplementärgesetz: $x+\bar x \equiv 1$

$\equiv 1$ — Extremalgesetz: $x+1 \equiv 1$

b)

$\overline{\overline{(x+y)}+\overline{(\bar x+y)}}$

$\equiv \overline{\overline{(x+y)}}\cdot\overline{\overline{(\bar x+y)}}$ — De Morgan (außen)

$\equiv (x+y)\cdot(\bar x+y)$ — Involution: $\bar{\bar a}\equiv a$

$\equiv y \rightarrow$ linke Seite — Kombination: $(a+b)\cdot(\bar a+b) \equiv b$ weil $a\cdot\bar a$ das und zu 0 auswerten würde

$(\bar x+y)\cdot(\bar x+\bar y)$

$\equiv \bar x \rightarrow$ rechte Seite — Kombination

linke Seite $\neq$ rechte Seite $\rightarrow$ nicht äquivalent

c)

$\overline{\overline{(\bar a\cdot b)}+\bar b}$

$\equiv \overline{\overline{(\bar a\cdot b)}}\cdot\bar{\bar b}$ — De Morgan

$\equiv \overline{(\bar a\cdot b)}\cdot b$ — Involution

$\equiv (\bar{\bar a}+\bar b)\cdot b$ — De Morgan

$\equiv (a+\bar b)\cdot b$ — Involution

$\equiv a\cdot b+\bar b\cdot b$ — Distributivität: $(x+y)\cdot z \equiv x\cdot z + y\cdot z$

$\equiv a\cdot b + 0$ — Komplementärgesetz: $x\cdot\bar x \equiv 0$

$\equiv a\cdot b \rightarrow$ linke Seite

$\overline{\bar a + \overline{(b+(\bar a+\bar a\cdot\bar b))}}$

$\equiv \overline{\bar a + \overline{(b+\bar a)}}$ — Absorption: $x+(x\cdot y)\equiv x$

$\equiv \bar{\bar a}\cdot\overline{\overline{(b+\bar a)}}$ — De Morgan

$\equiv a\cdot(b+\bar a)$ — Involution

$\equiv a\cdot b + a\cdot\bar a$ — Distributivität

$\equiv a\cdot b + 0$ — Komplementärgesetz

$\equiv a\cdot b \rightarrow$ rechte Seite

linke Seite = rechte Seite $\longrightarrow$ äquivalent ✓

3. Sei M eine Menge an boolschen Funktionen f_i. M ist funktional vollständig gdw. sich jede boolsche Funktion als Komposition (Nacheinanderausführung) von f_i's darstellen lässt.
Aus der VL wissen wir, dass $\{\wedge, \neg\}$ (AND und Negation) funktional vollständig ist. D.h. falls wir Funktionen finden, mit denen wir $\wedge$ und $\neg$ "nachbauen" (≙ gleiche Wahrheitstabelle) können, dann sind diese auch funktional vollständig.

- NOR (Negation von OR):

a	b	a NOR b
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$\neg$: Wir wissen, dass NOR die Negation von OR ist und nach dem Idempotenzgesetz gilt: $x+x=x$. Damit: $NOR(x,x) = \overline{x+x} = \bar x$ — $NOR(x,x)$ entspr. also $\bar x$

$\wedge$: Wir sehen aus der Wahrheitstabelle sofort, dass NOR die umgekehrte AND-Wahrheitstabelle ist, d.h. wir invertieren die Eingänge: $NOR(NOR(x,x), NOR(y,y)) = NOR(\bar x, \bar y)$: $\overline{\bar x+\bar y} = x\cdot y$

⇒ NOR ist also funktional vollständig

- XOR ($\oplus$): nicht funktional vollständig, Beweis siehe ML

- $\{\neg, \leftrightarrow\}$: Wir wissen, dass $\leftrightarrow$ (XNOR) der Negation von XOR entspricht
  ⇒ nicht funktional vollständig

- $\{\neg, \rightarrow\}$: Aus DS sollte die Umformung der Implikation bekannt sein: $x \rightarrow y \equiv \overline{x} + y$

a	b	a → b
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$\neg$: Bereits in der Menge gegeben

$\wedge$: Negieren wir die Implikation, erhalten wir $\overline{\overline{x} + y}$. Wir invertieren noch y, damit nach De Morgan alles passt:

$\neg(x \rightarrow \overline{y}) \equiv \overline{(\overline{x} + \overline{y})} \equiv \overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{y}} \equiv x \cdot y$

⇒ ist funktional vollständig

4. siehe Webseite