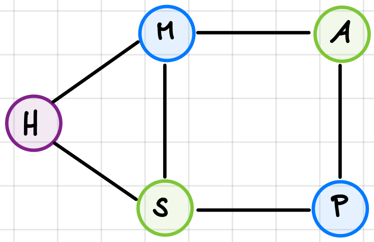
ERA - Übungsblatt 13

1. siehe ML

2. a) Das Problem ist offensichtlich ein Graphfärbungsproblem:
   - Straßen entsprechen den Knoten
   - Motive entsprechen der Knotenfärbung
   - benachbarte Straßen entsprechen benachbarten Knoten

   eine mögliche Färbung:



Für die Formalisierung als SAT verwenden wir 3 Variablen pro Straße. Bspw. $x_{H,1}$; $x_{H,2}$; $x_{H,3}$. Dabei steht $x_{v,f}$ für „Knoten (Straße) v wird mit Farbe (Motiv) f gefärbt". Diese Variablen können wahr oder falsch sein.
Die Menge aller SAT-Variablen ist also:

$$S = \{H, M, A, S, P\},\quad F = \{1,2,3\},\quad V = \{x_{v,f} \mid v \in S,\ f \in F\}$$

Die Constraints werden wie folgt modelliert:
- Jeder Knoten wird mit mindestens 1 Farbe gefärbt. Ein Knoten kann möglicherweise mit mehreren gültigen Farben gefärbt werden (bspw. Knoten A), d.h. in einem solchen Fall können wir eine Farbe wählen.

$$\bigwedge_{v \in S} (x_{v,1} \vee x_{v,2} \vee x_{v,3})$$

- Benachbarte Knoten dürfen nicht dieselbe Farbe haben.

$$E = \{\{H,M\}, \{H,S\}, \{M,S\}, \{M,A\}, \{S,P\}, \{A,P\}\}$$

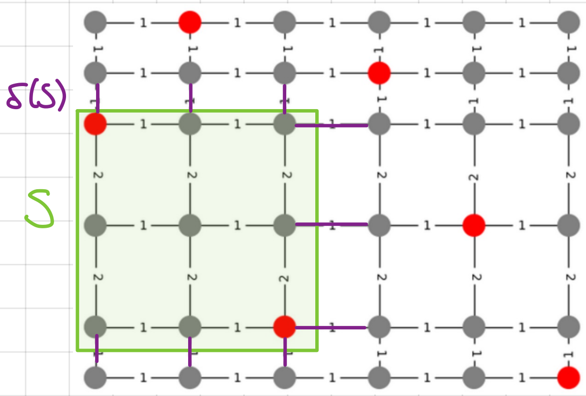
$$\bigwedge_{\{u,v\} \in E} \bigwedge_{f \in F} \overline{(x_{u,f} \wedge x_{v,f})} \overset{\text{de Morgan}}{\equiv} \bigwedge_{\{u,v\} \in E} \bigwedge_{f \in F} (\overline{x_{u,f}} \vee \overline{x_{v,f}})$$

Wir können nun die Klauseln der beiden Constraints verunden und erhalten die finale KNF.

b) siehe ML

3. a,b,c) siehe ML

d) Zur Formulierung des MILP betrachten wir alle Hanan-Punkte und Terminale.



Wir definieren einige Variablen:
V... alle Hanan-Punkte und Terminale (alle Knoten)
T... Terminale (rote Knoten)
E... Menge aller Kanten

Zusätzlich definieren wir eine binäre Variable $x_e \in \{0,1\}$ für alle $e \in E$, die darstellt, ob Kante e zum minimalen Steinerbaum gehört oder nicht.

Die Kostenfunktion (objective function) soll minimiert werden:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{|E|}} \sum_{e \in E} c(e) \cdot x_e$$

Unser Lösungsvektor $x = (x_1, x_2, \dots x_{|E|})$ besteht aus $|E|$ (Anzahl Kanten) vielen reellwertigen Einträgen ($x \in \mathbb{R}^{|E|}$). Die Gesamtkosten für den Steinerbaum entspricht der Summe aller gewählten Kanten ($\sum_{e \in E}$), wobei die Kosten einer Kante den Kosten $c(e)$ multipliziert mit 0 oder 1 entspricht, basierend darauf, ob die Kante im Steinerbaum vorkommt oder nicht (x_e).

Dieser Lösungsvektor soll minimiert werden, allerdings mit zusätzlichen Bedingungen ("subject to", "s.t."):

$$\forall S \subseteq V, \quad \emptyset \neq S \cap T \neq T : \quad \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 .$$

D.h. sodass für alle Teilmengen von Knoten ($S \subseteq V$) die mindestens ein Terminal, aber nicht alle Terminale enthalten, folgendes gilt: Von allen aus S ausgehenden Kanten ($e \in \delta(S)$) muss mindestens eine Kante x_e gewählt werden. Das lässt sich intuitiv erklären: Da S nicht alle Terminalknoten enthält, muss es einen Terminalknoten außerhalb von S geben. Allerdings liegt in S auch mindestens ein Terminalknoten. Der Steinerbaum muss diese beiden Knoten über irgendeinen Pfad verbinden, daher muss er mind. eine der "Übergangskanten" in δ(S) verwenden.

Durch Lösen des MILP-Problems erhalten wir einen garantiert optimalen Steinerbaum.

e,f,g) siehe ML