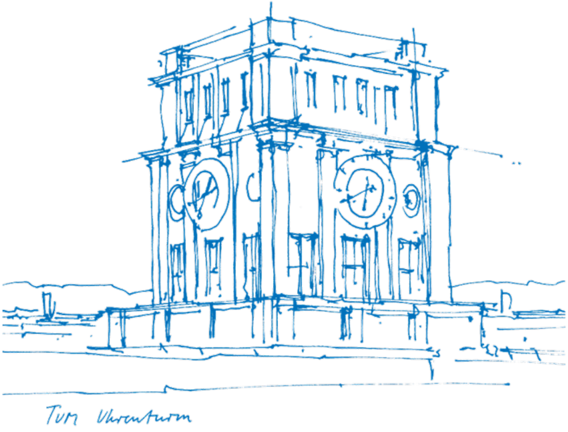
Übung 13: Optimierung

Einführung in die Rechnerarchitektur

Niklas Ladurner

School of Computation, Information and Technology
Technische Universität München

23. Januar 2026



Keine Garantie für die Richtigkeit der Tutorfolien.

Bei Unklarheiten/Unstimmigkeiten haben VL/ZÜ-Folien recht!

Logiksynthese

- Logiksynthese: Realisierung boolsche Funktion in Hardware
- naive Synthese (direkte Übertragung der Wahrheitstabelle) nicht skalierbar
- verschiedene Verfahren zur Optimierung und Reduktion von Funktionen auf ihr Minimalpolynom $\rightarrow$ optimale Schaltung

Minimalpolynom

Ein Polynom p ist Minimalpolynom einer booleschen Funktion f, falls $\psi(p) \equiv f$ (d.h. p eine Formel für f ist) und es keine weitere Vereinfachungen gibt.

Karnaugh-Veitch-Diagramme[1]

- rechteckiges Schema, in dem alle Literalkombinationen (positiv und negativ) vorkommen
- nebeneinander liegende Zeilen/Spalten dürfen sich immer nur in 1 Bit unterscheiden (Gray-Code)!
- Zusammenfassen von Einsen in 2^n-Blöcken, Don't Care können als 0 oder 1 gewählt werden.
- jedes maximal große Päckchen steht für einen Primimplikanten der Funktion $\rightarrow$ minimale Mengen von Päckchen die alle 1en abdeckt ergibt ein Minimalpolynom

ab \ cd	00	01	11	10
00	-	-	0	1
01	1	1	0	0
11	0	1	1	1
10	1	0	1	1

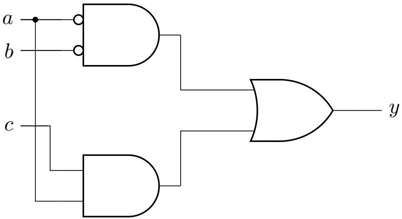
$$f = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{d} + ac + b\bar{c}d$$

[1] Oft auch als K-Maps bezeichnet

Logik-Hazards

- Glitches (kurzzeitige Signaländerung) am Ausgang, die durch Gatterlaufzeit auftritt
- kann zu Problemen führen (z.B. Oszillation)
- in K-Map: Zwei nebeneinanderliegende Einsen, die nicht durch ein gemeinsames Päckchen abgedeckt sind
- Lösung: Hinzufügen von zusätzlichem Päckchen $\rightarrow$ kein Minimalpolynom!

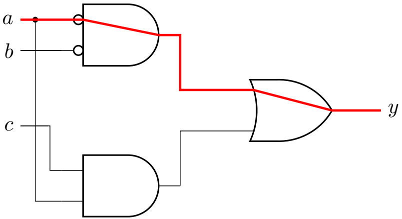
a \ bc	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	0	1	1	0



Logik-Hazards

- Glitches (kurzzeitige Signaländerung) am Ausgang, die durch Gatterlaufzeit auftritt
- kann zu Problemen führen (z.B. Oszillation)
- in K-Map: Zwei nebeneinanderliegende Einsen, die nicht durch ein gemeinsames Päckchen abgedeckt sind
- Lösung: Hinzufügen von zusätzlichem Päckchen $\rightarrow$ kein Minimalpolynom!

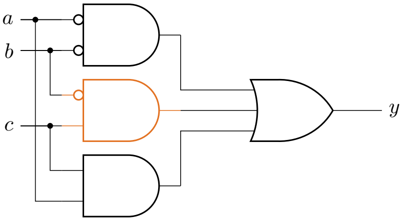
a \ bc	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	0	1	1	0



Logik-Hazards

- Glitches (kurzzeitige Signaländerung) am Ausgang, die durch Gatterlaufzeit auftritt
- kann zu Problemen führen (z.B. Oszillation)
- in K-Map: Zwei nebeneinanderliegende Einsen, die nicht durch ein gemeinsames Päckchen abgedeckt sind
- Lösung: Hinzufügen von zusätzlichem Päckchen $\rightarrow$ kein Minimalpolynom!

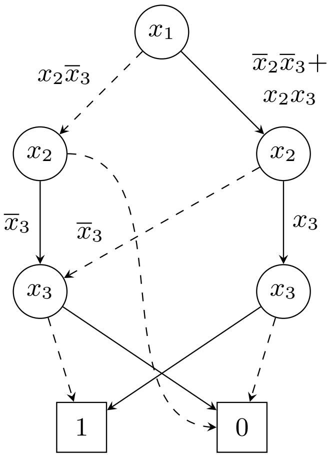
a \ bc	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	0	1	1	0



Binary Decision Diagrams (BDDs)

- Darstellung einer boolschen Funktion als gerichteter azyklischer Graph (DAG)
- Knoten repräsentieren Teilfunktionen, 2 ausgehende Kanten: 0 (low), 1 (high)
- Aufbau bspw. mittels Shannon-Zerlegung: $f(x_0, x_1) \rightarrow f_{x_0=0}(x_1), f_{x_0=1}(x_1)$
- Reduced Ordered BDD: Alle möglichen Reduktionen angewandt, festgelegte Variablenordnung
- **ROBDDs sind kanonisch (eindeutig)**

$\overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 + x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 + x_1 x_2 x_3$

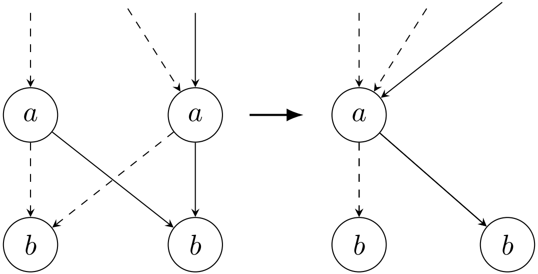


Variablenordnung: $x_1 \prec x_2 \prec x_3$

BDDs: Reduktionen

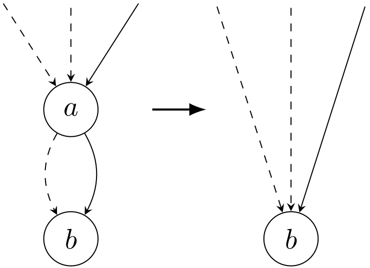
I-Reduktion

Zusammenführung isomorpher Knoten

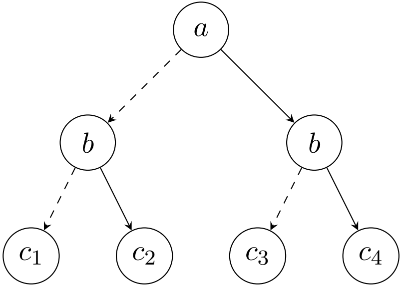


S-Reduktion

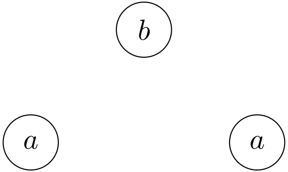
Entfernen von überflüssigen Knoten



BDDs: Umordnungsalgorithmus

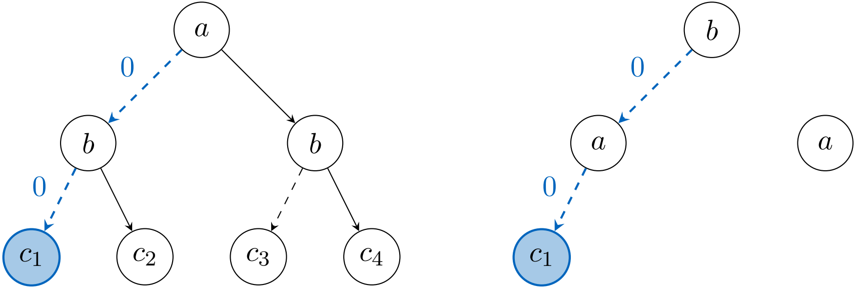


$a \prec b \prec c$



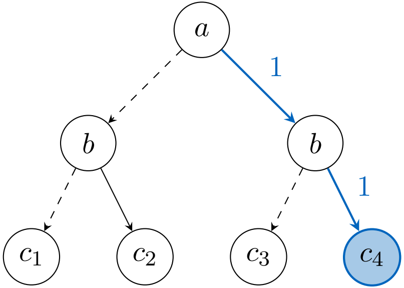
$b \prec a \prec c$

BDDs: Umordnungsalgorithmus

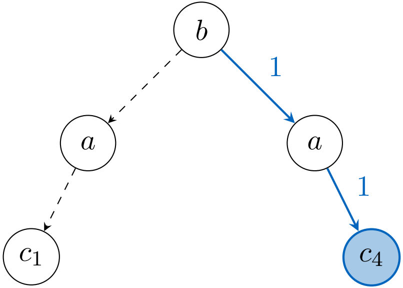


$a \prec b \prec c$ $\qquad$ $b \prec a \prec c$

BDDs: Umordnungsalgorithmus

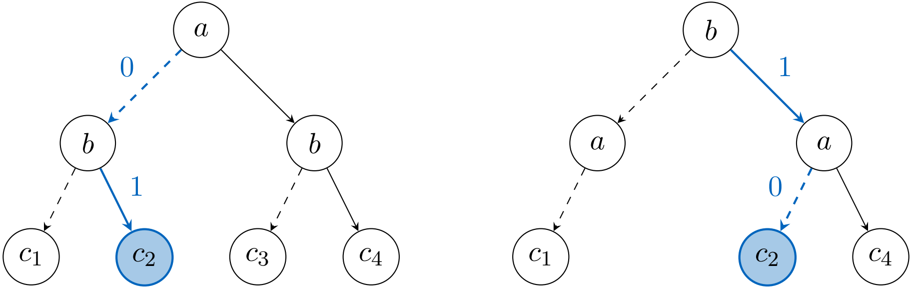


$a \prec b \prec c$



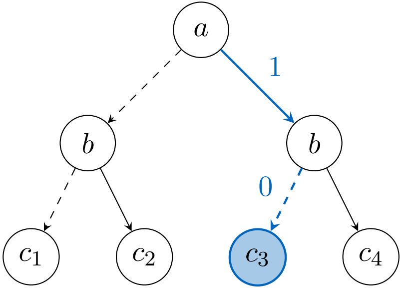
$b \prec a \prec c$

BDDs: Umordnungsalgorithmus

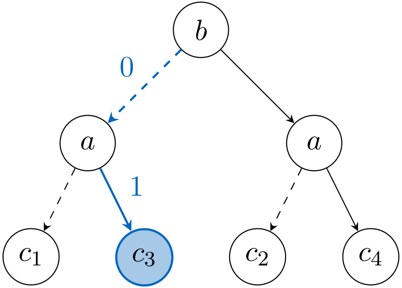


$a \prec b \prec c$ $\qquad$ $b \prec a \prec c$

BDDs: Umordnungsalgorithmus

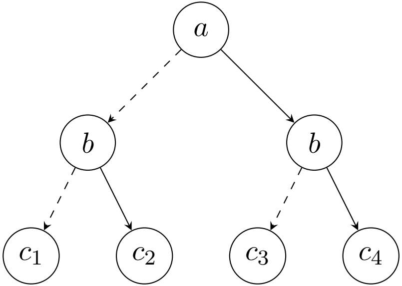


$a \prec b \prec c$

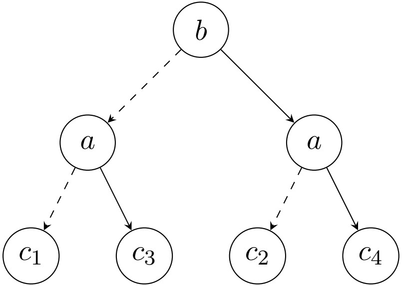


$b \prec a \prec c$

BDDs: Umordnungsalgorithmus



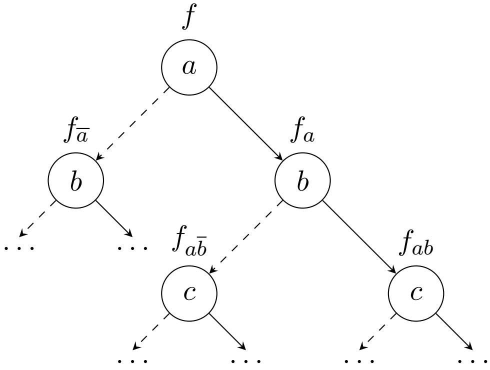
$a \prec b \prec c$



$b \prec a \prec c$

If-Then-Else-Operator (ITE)

- Ternärer Operator $\mathrm{ITE}(a, b, c) \equiv ab + \overline{a}c$; falls a, dann b, sonst c
- alle booleschen Operatoren können als ITE dargestellt werden, z.B.
  1. $\mathrm{NOT}(f) \equiv \mathrm{ITE}(f, 0, 1)$
  2. $\mathrm{OR}(f, g) \equiv \mathrm{ITE}(f, 1, g)$
  3. $\mathrm{AND}(f, g) \equiv \mathrm{ITE}(f, g, 0)$
- Zusammenhang mit BDDs: High-Kind im True-Fall, Low-Kind im False-Fall
- ITE-Algorithmus: Verknüpfung mehrerer BDDs mittels eines Operators



$$f \equiv \mathrm{ITE}(a, f_a, f_{\overline{a}})$$
$$\equiv \mathrm{ITE}(a, \mathrm{ITE}(b, f_{ab}, f_{a\overline{b}}), f_{\overline{a}})$$

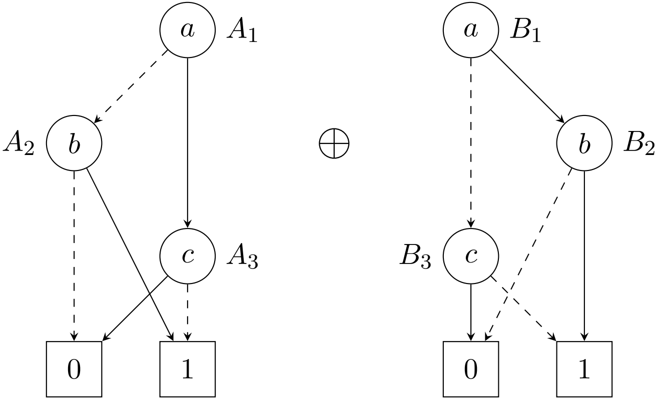
BDDs: ITE-Algorithmus

Am Beispiel der Verknüpfung von zwei BDDs A, B mittels $\oplus$:

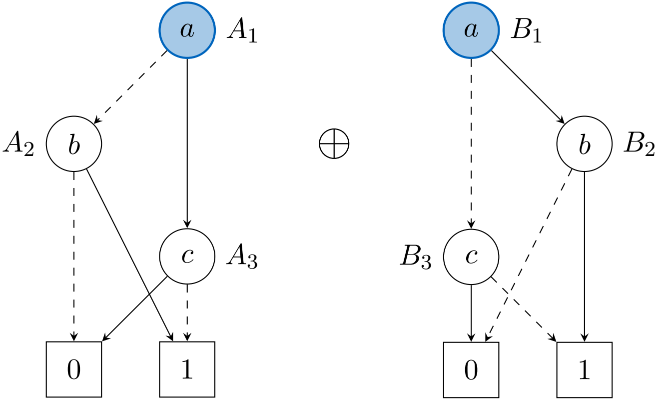
1. Bezeichne alle Knoten mit einem eindeutigen Bezeichner
2. Erzeuge im Ergebnis-BDD einen Knoten $A_0 \oplus B_0$
3. Solange noch nicht alle Knoten besucht wurden:
   (a) Falls Terminalfall (d.h. A_i und B_i sind Terminalknoten), Rückgabewert berechnen und im Ergebnis-BDD an der aktuellen Stelle einen neuen Terminalknoten $A_i \oplus B_i$ erzeugen
   (b) Top-Variable t anhand der Variablenordnung bestimmen
   (c) Für alle mit t bezeichneten Knoten: Abstieg ins Low-Kind, erzeuge im Ergebnis-BDD an der aktuellen Stelle den Kindknoten $A_{i,t=0} \oplus B_{i,t=0}$
   (d) Für alle mit t bezeichneten Knoten: Abstieg ins High-Kind, erzeuge im Ergebnis-BDD an der aktuellen Stelle den Kindknoten $A_{i,t=1} \oplus B_{i,t=1}$
4. Während der Konstruktion Knoten mit gleicher Teilformel direkt zusammenfassen

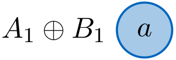
Danke an Bjarne Hansen für dieses treffende Bild

BDDs: ITE-Algorithmus



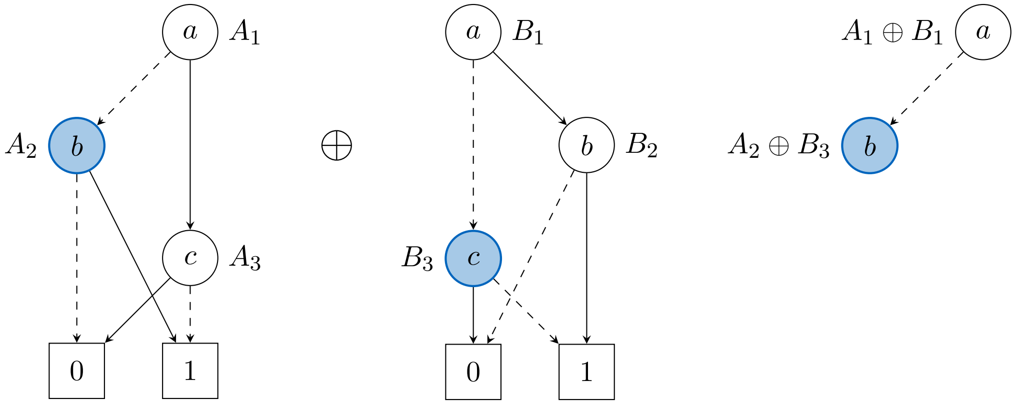
BDDs: ITE-Algorithmus





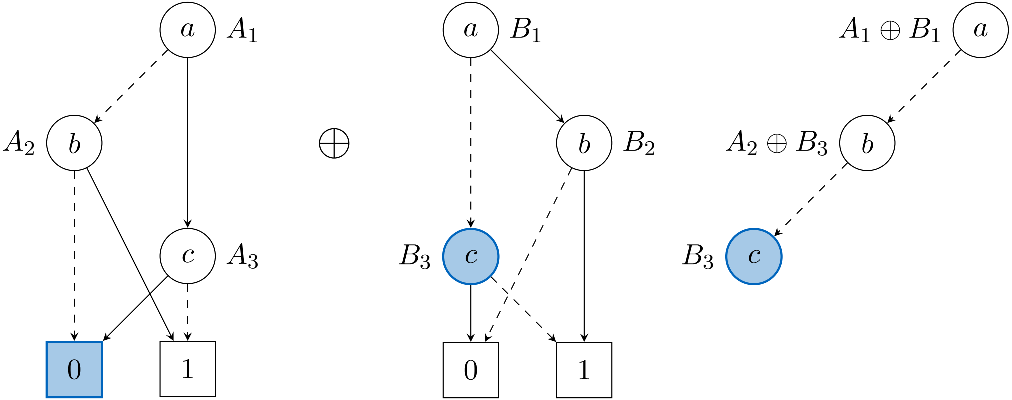
Top-Variable a

BDDs: ITE-Algorithmus



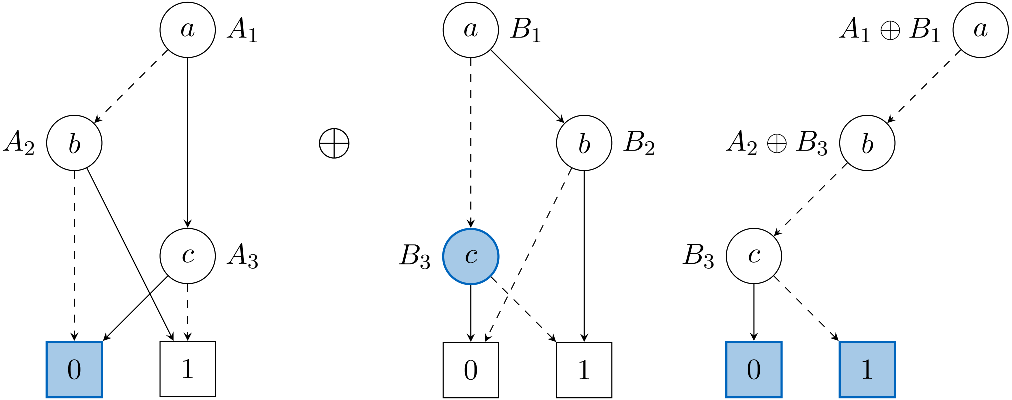
Abstieg ins Low-Kind, neue Top-Variable b

BDDs: ITE-Algorithmus



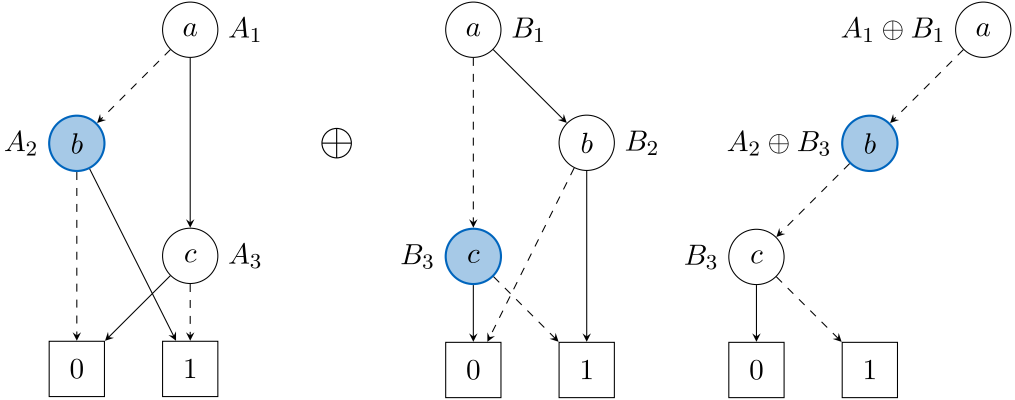
Abstieg ins Low-Kind, neue Top-Variable c

BDDs: ITE-Algorithmus



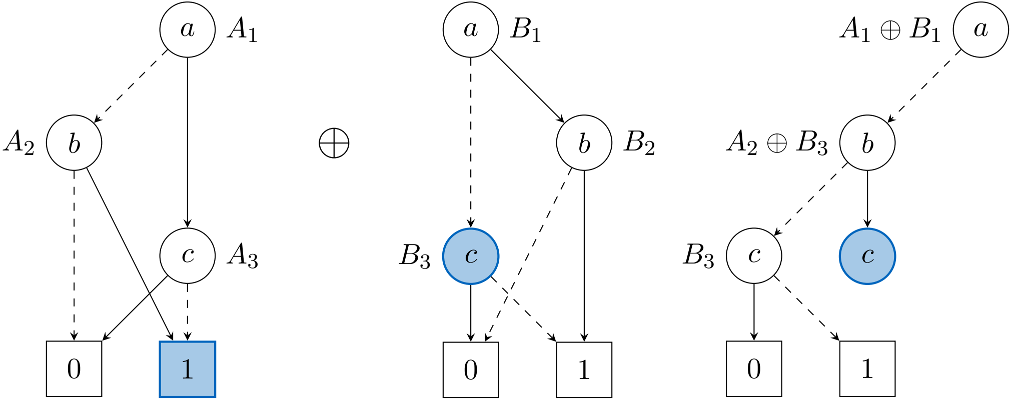
Abkürzung: $0 \oplus B_3 \equiv B_3$

BDDs: ITE-Algorithmus



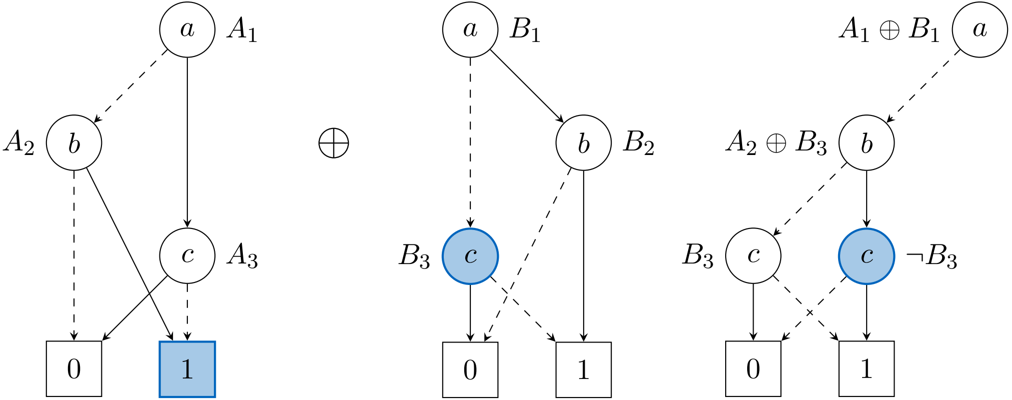
Backtrack: Top-Variable b

BDDs: ITE-Algorithmus



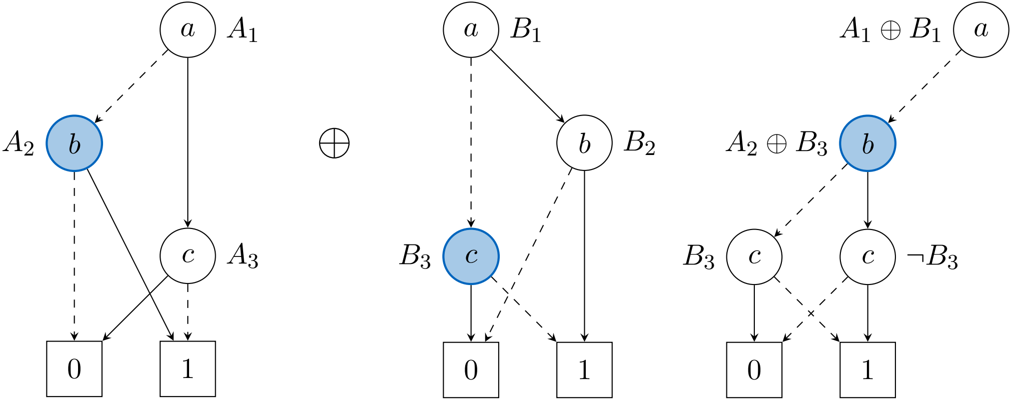
Abstieg ins High-Kind, neue Top-Variable c

BDDs: ITE-Algorithmus



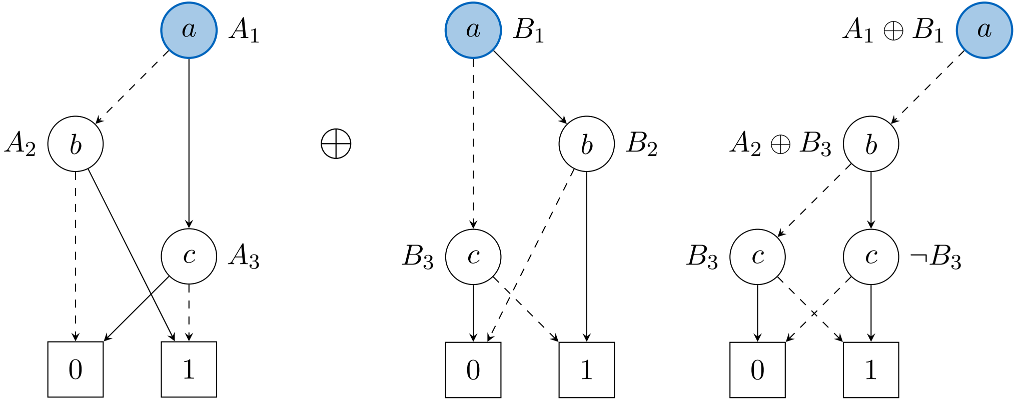
Abkürzung: $1 \oplus B_3 \equiv \neg B_3$

BDDs: ITE-Algorithmus



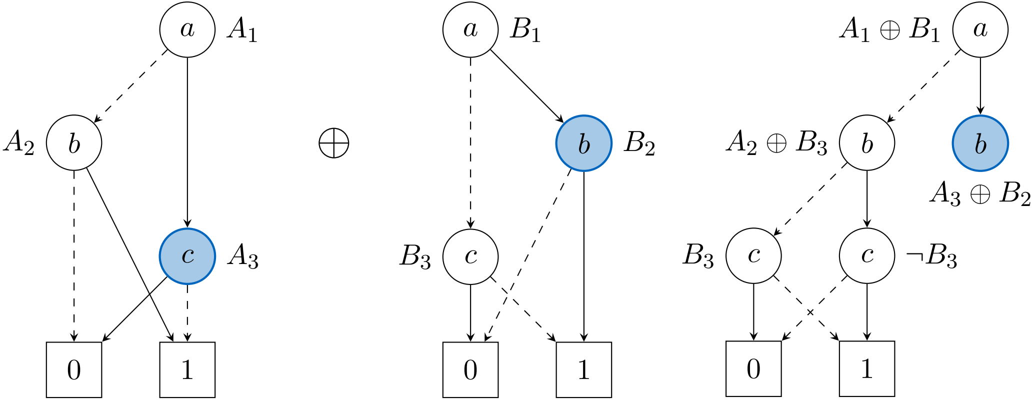
Backtrack: Top-Variable b

BDDs: ITE-Algorithmus



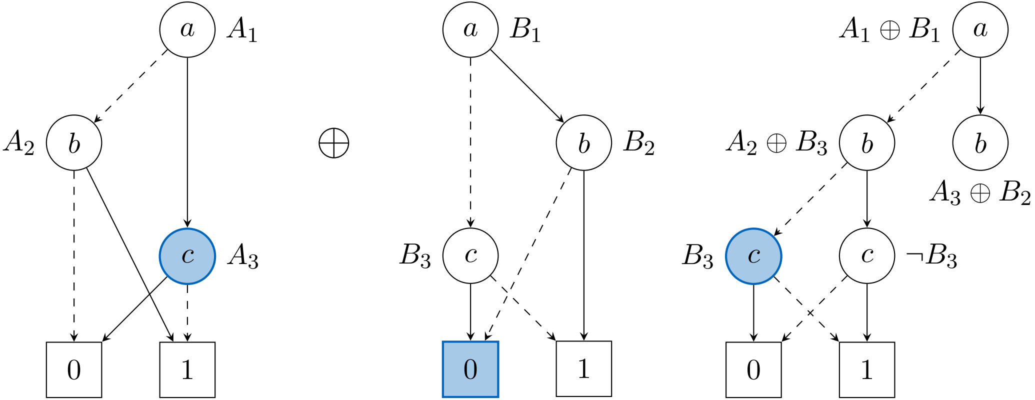
Backtrack: Top-Variable a

BDDs: ITE-Algorithmus



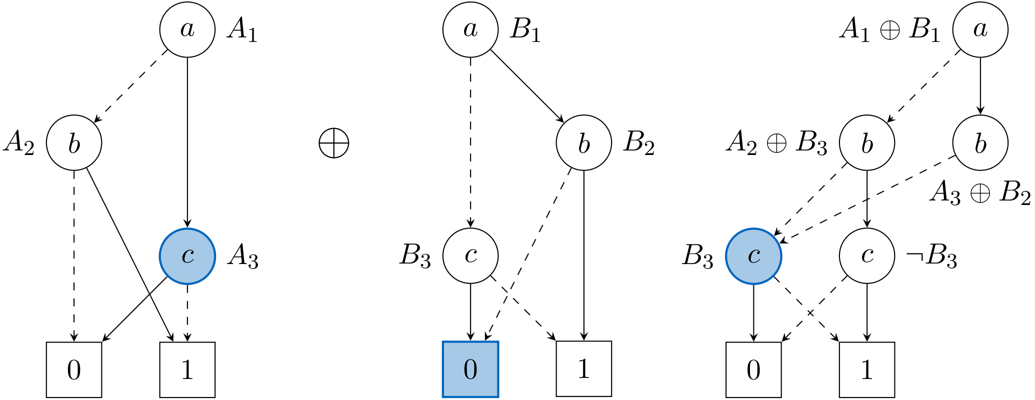
Abstieg ins High-Kind, neue Top-Variable b

BDDs: ITE-Algorithmus



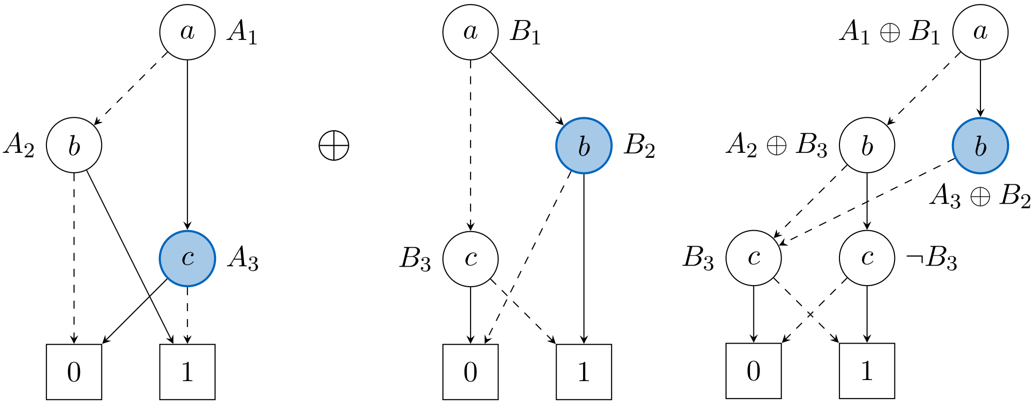
Abstieg ins Low-Kind, neue Top-Variable c

BDDs: ITE-Algorithmus



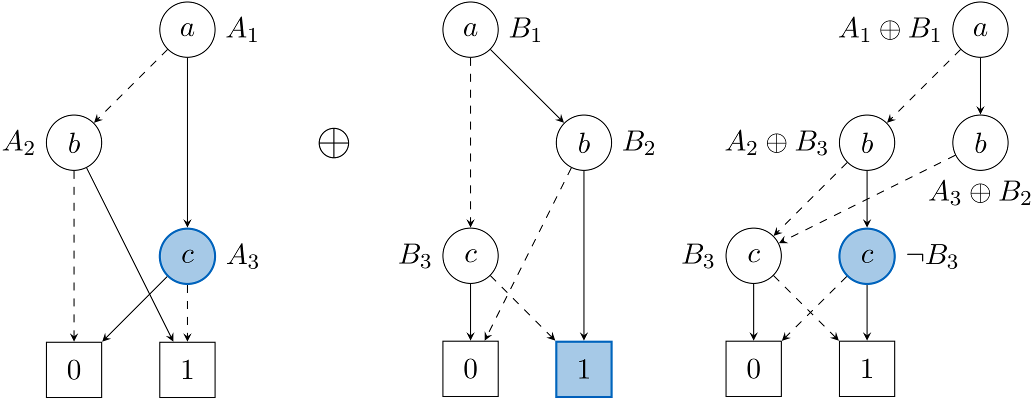
Abkürzung: $A_3 \oplus 0 \equiv A_3 \equiv B_3$

BDDs: ITE-Algorithmus



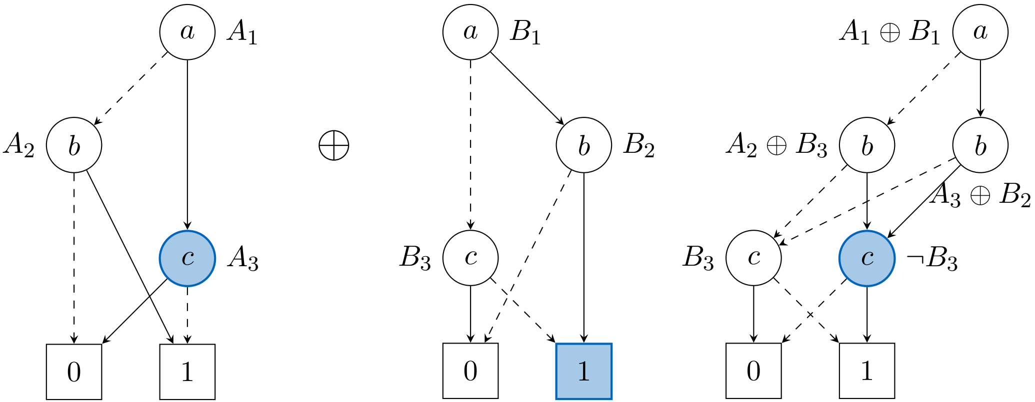
Backtrack: Top-Variable b

BDDs: ITE-Algorithmus



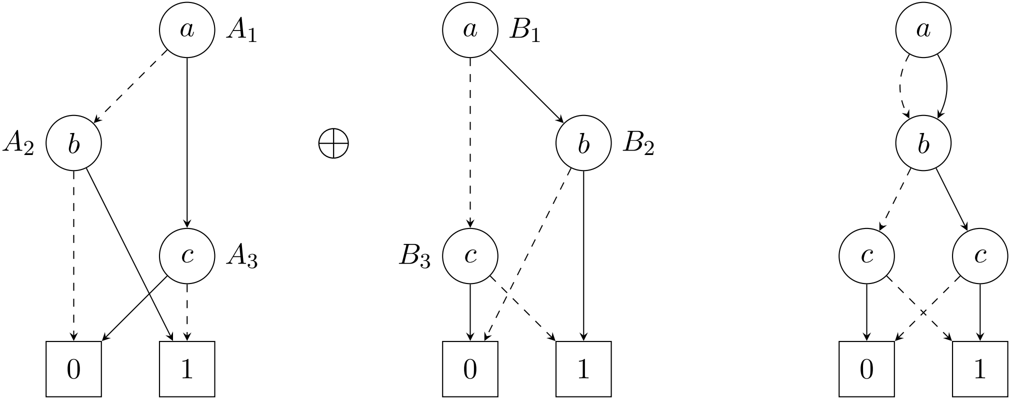
Abstieg ins High-Kind, neue Top-Variable c

BDDs: ITE-Algorithmus



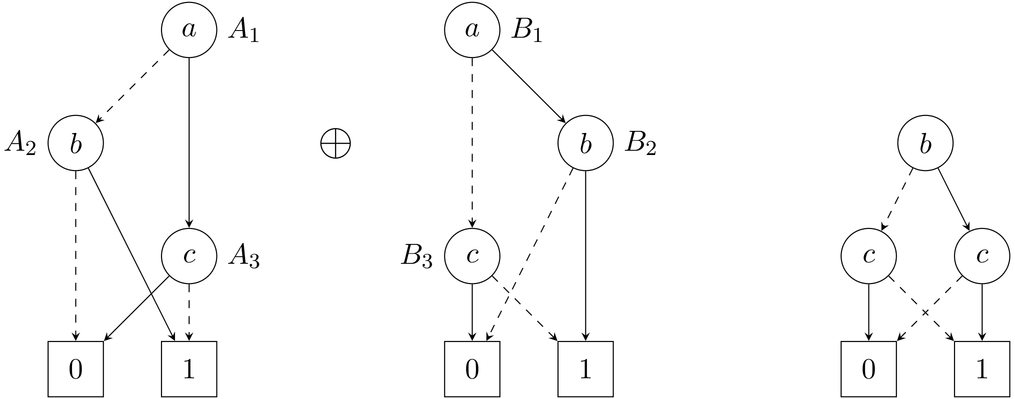
Abkürzung: $A_3 \oplus 1 \equiv \neg A_3 \equiv \neg B_3$

BDDs: ITE-Algorithmus



Ergebnis nach I-Reduktion

BDDs: ITE-Algorithmus



Ergebnis nach S-Reduktion

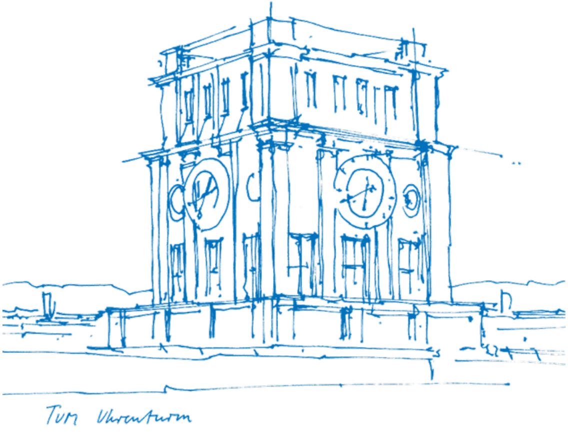
Fragen?

Links

- Zulip: „ERA Tutorium – Mi-1600-3“ bzw. „ERA Tutorium – Fr-1500-1“
- ERA-Moodle-Kurs
- ERA-Artemis-Kurs
- Wikipedia zu BDDs

Übung 13: Optimierung

Einführung in die Rechnerarchitektur



Niklas Ladurner

School of Computation, Information and Technology
Technische Universität München

23. Januar 2026