

# Цифровые системы передачи информации на основе сигнала с одной несущей частотой (Одночастотные системы связи)

Лекция: Частотная синхронизация

# Частотное смещение одночастотного сигнала

- Пусть  $x(k)$  - исходный сигнал, с передатчика, до согласованной фильтрации. Тогда помехи и частотное рассогласование можно описать с помощью формулы:

$$r(k) = x(k)e^{j(2\pi\Delta f k T_s + \theta(k))} + n(k)$$

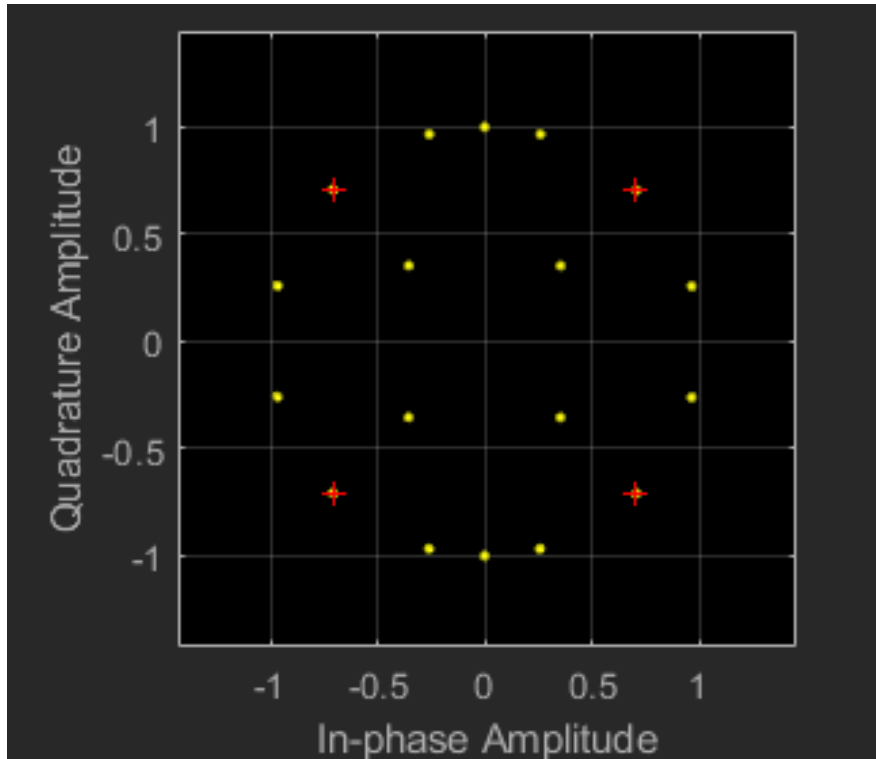
- $\Delta f$  – Частотно смещение сигнала (частотное рассогласование между приёмником и передатчиком)
- $T_s$  - длительность одного символа
- $\theta(k)$  - фазовая ошибка, которая возникает в следствии фазовых шумов, или ошибки передискретизации на приёме
- $n(k)$  - функция аддитивного гауссовского шума

# Частотное смещение одночастотного сигнала

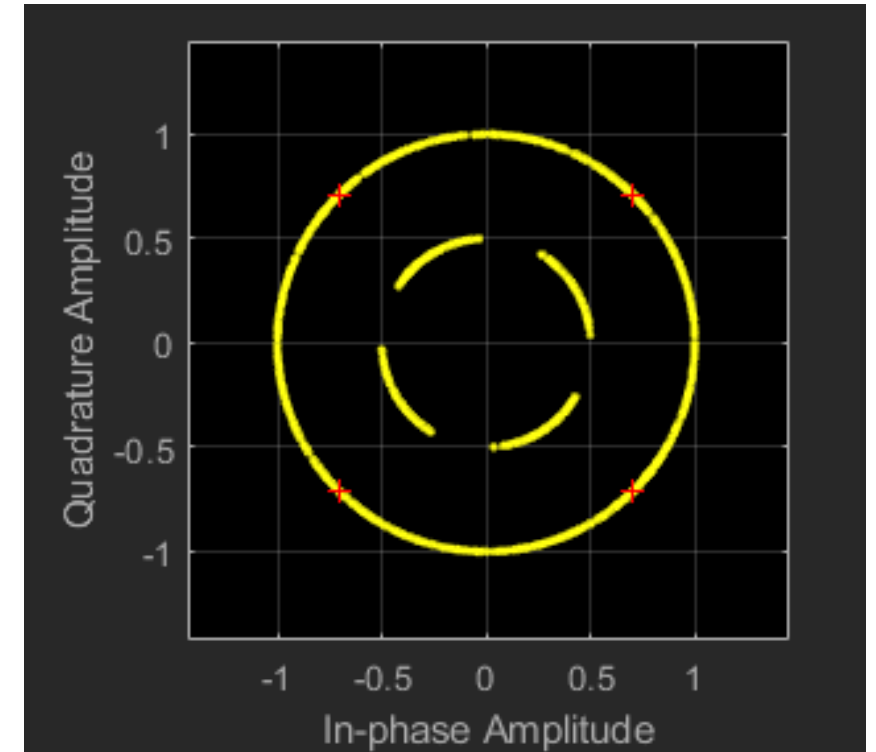
- Задача частотной синхронизации заключается в минимизации частотного смещения  $\Delta f$  в принятом сигнале. Но данное значение неизвестно на приёме. Это приводит к тому, что необходимо некоторыми методами **оценивать** частотный сдвиг в сигнале.
- Точность оценки зависит от метода, его параметров и уровня фазовых шумов в сигнале. А это значит, что каждый метод имеет свои области применения, в зависимости от условий канала.

# Частотное смещение одночастотного сигнала

16-APSK с пилотами в позициях  $\frac{\pi}{2}$  и  $-\frac{\pi}{2}$



16-APSK с пилотами в позициях  $\frac{\pi}{2}$  и  $-\frac{\pi}{2}$   
при частотной рассинхронизации



# Схема синхронизации DVB-S2

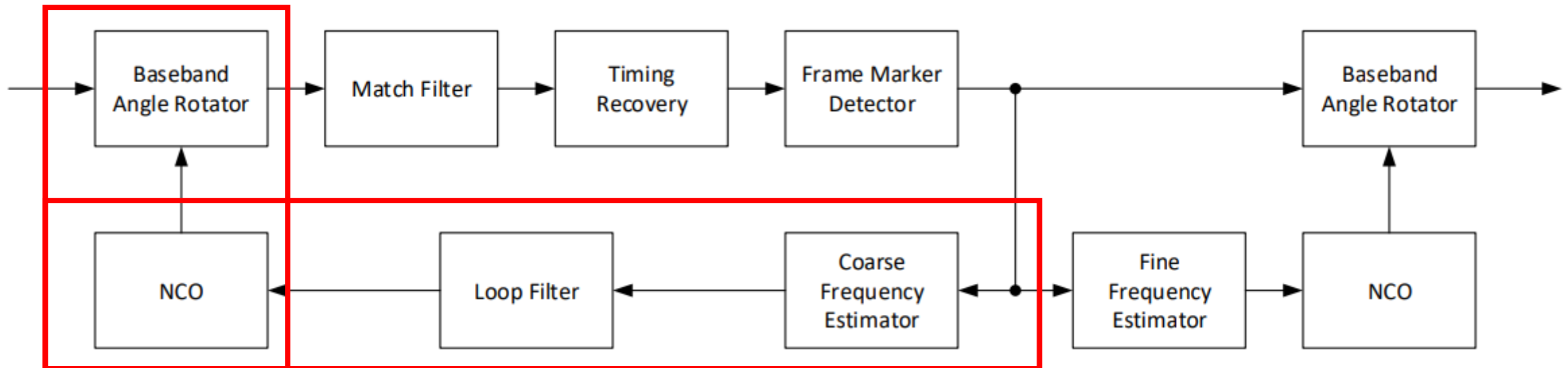


Частотная синхронизация происходит только в выделенной части

# Схема синхронизации DVB-S2

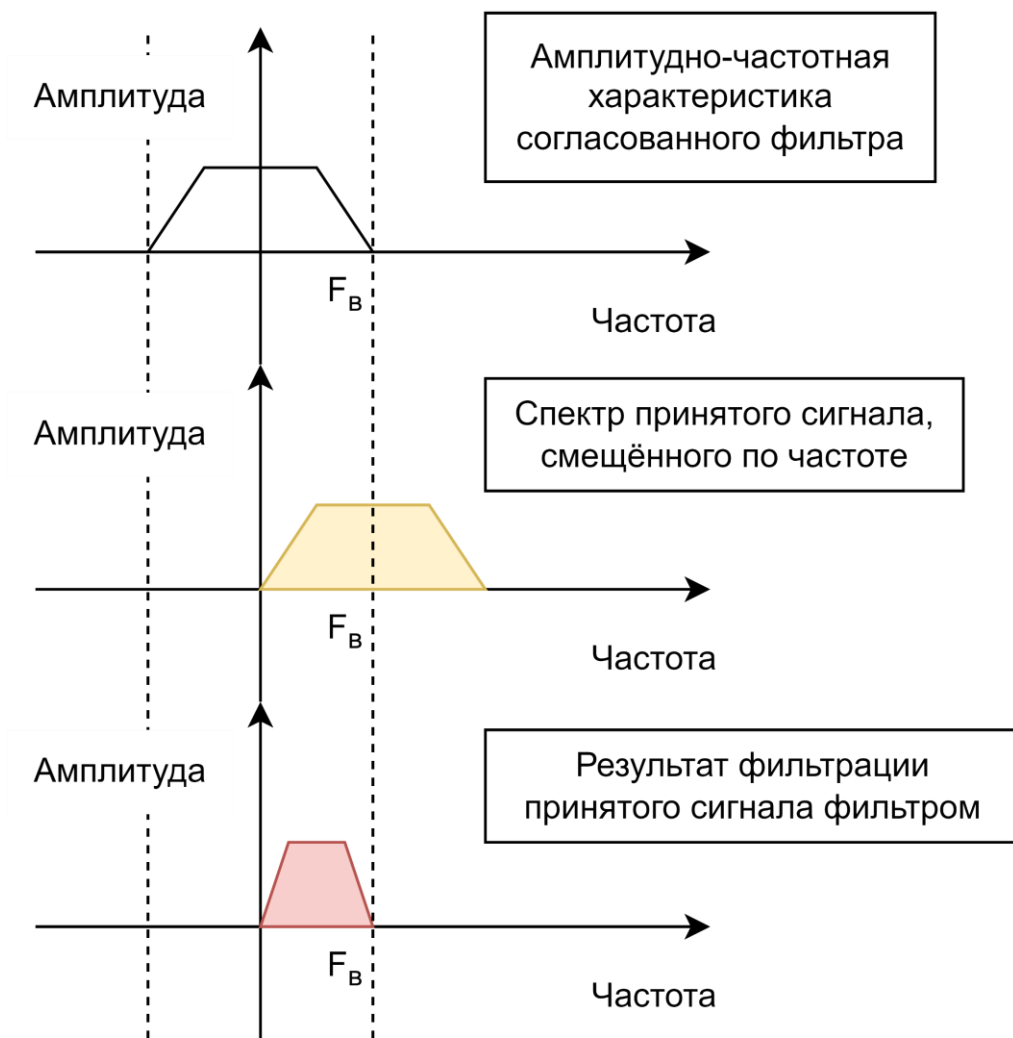


# Схема синхронизации DVB-S2



- В данной схеме синхронизация происходит в двух режима:
- Грубая частотная синхронизация посылает сигнал на компенсатор (Baseband Angle Rotator) в обратную связь (feedback). Так как компенсатор находится раньше блок оценки частотного смещения. Это требуется, чтобы избежать потерь на согласованной фильтрации (Match Filter) при частотной рассинхронизации сигналов

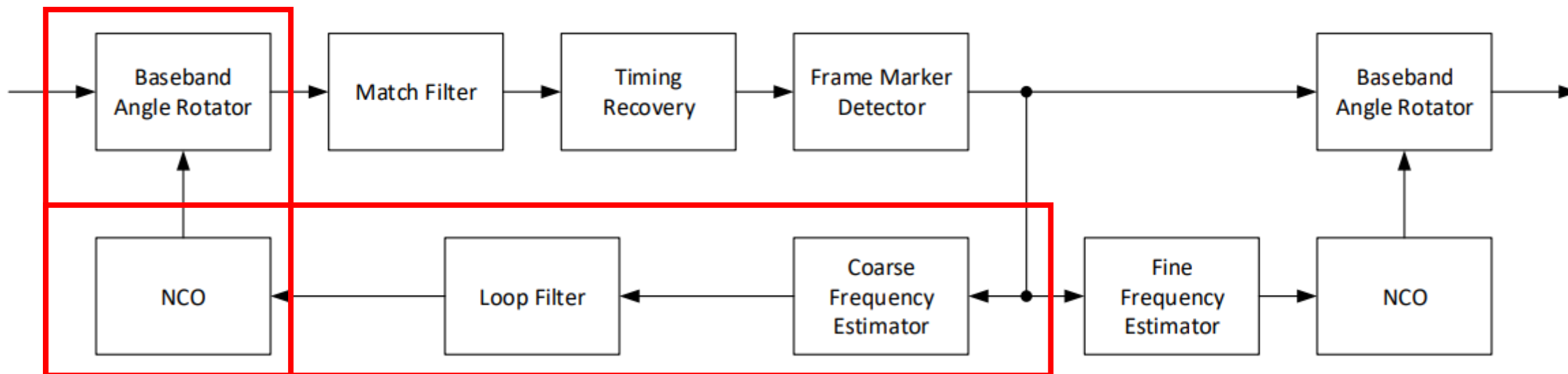
# Схема синхронизации DVB-S2



- Наличие этой обратной связи требуется, чтобы избежать потерь на согласованной фильтрации (Match Filter) при частотной рассинхронизации сигналов

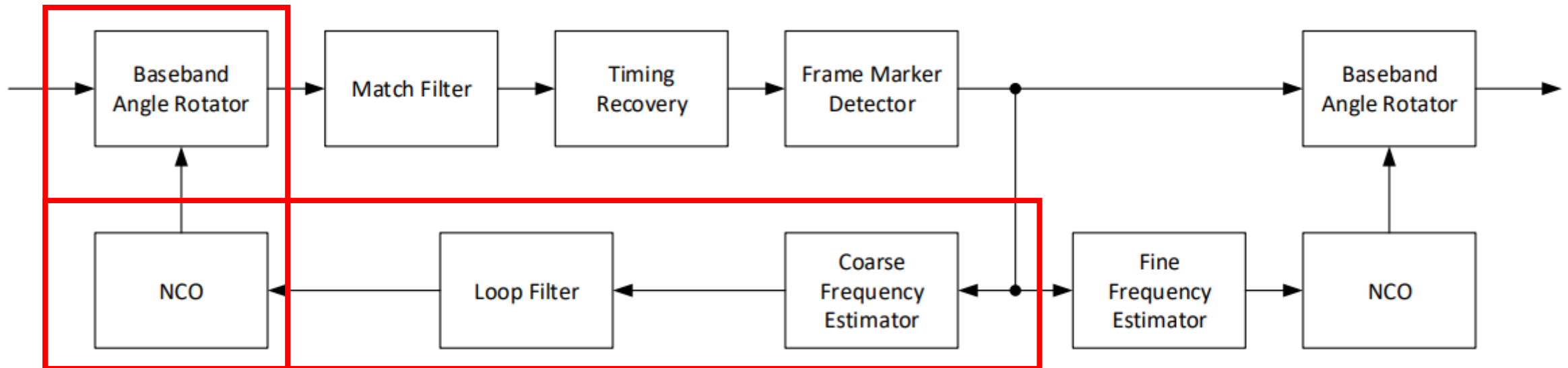


# Схема синхронизации DVB-S2



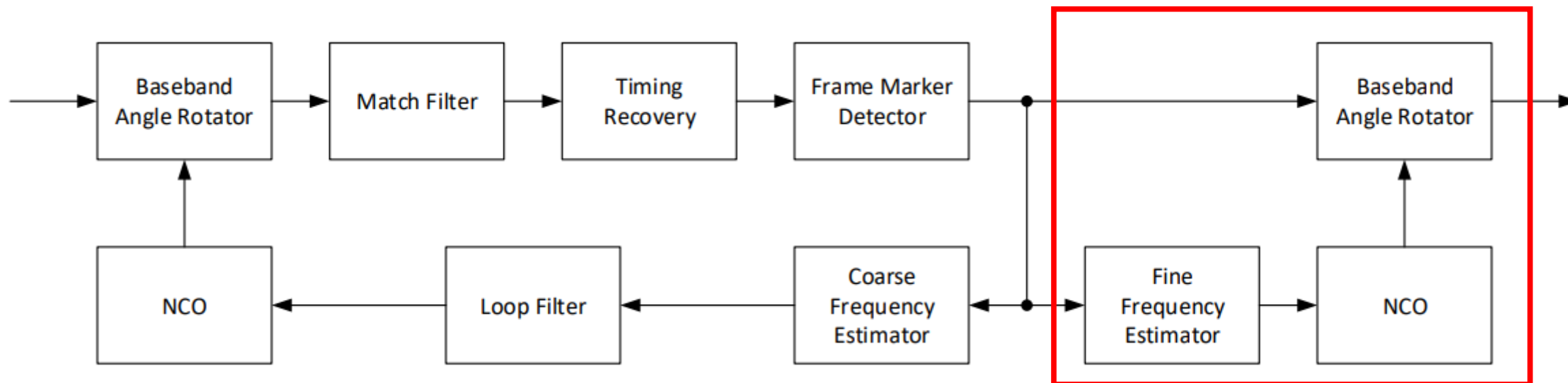
- Подобный режим обладает своими минусами:
- Высока задержка между блоком оценки частотного сдвига (Coarse Frequency Estimator) и компенсации (Rotator). Эта оценка будет равна линии задержки согласованного фильтра, символьной синхронизации и кадровой синхронизации. Подобная задержка может вносить некоторую инертность оценки, из-за чем точность оценки может колебаться и быть ошибка может быть большой

# Схема синхронизации DVB-S2



- Второй недостаток обратной связи – отсутствие устойчивости без применение фильтрации оценки частотного сдвига. При наличии сильного шума, оценка без фильтрации будет вносить дополнительные сильные отклонения в частотный сдвиг сигнала
- Часто можно слышать жаргонное обозначение: оценка начинает «гоняться» за шумами (шум оценки намного более мощный, чем истинная оценка)

# Схема синхронизации DVB-S2



- Второй режим:
- Тонкая частотная синхронизация, которая применяет оценку к текущему сигналу, то есть в режиме прямой связи (feedforward). В таком режиме не требуется выполнять условие на устойчивость системы, тем самым, нет нужды применять фильтрацию оценки, кроме той, что предусматривается блоком оценки частотного сдвига

# Фазовая автоподстройка частоты

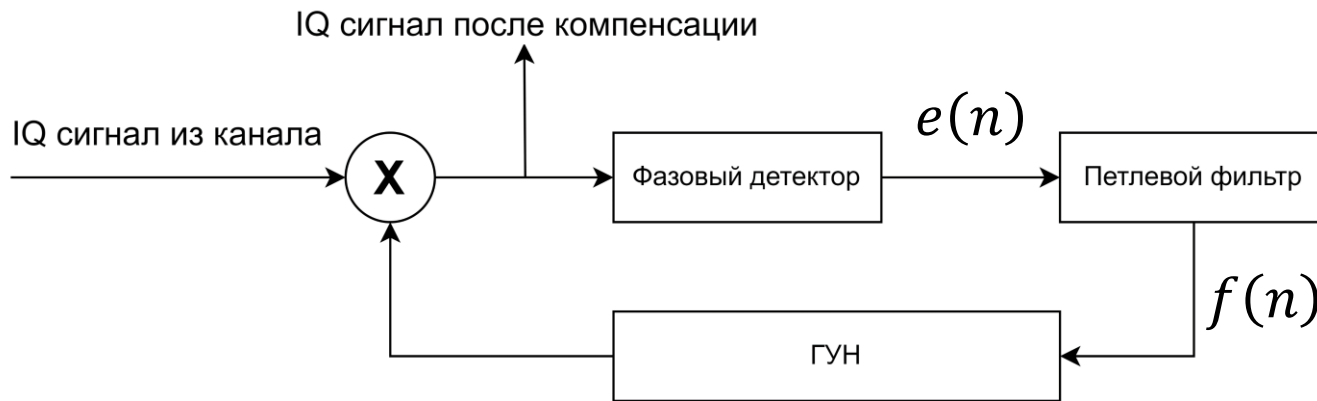
- Рассмотрим для начала часть частотной синхронизации, отвечающая за грубую частотную синхронизацию.
- В общем смысле этого слова, данный част приёмника организована на основе фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ).

# Фазовая автоподстройка частоты

- Рассмотрим для начала часть частотной синхронизации, отвечающая за грубую частотную синхронизацию.
- В общем смысле этого слова, данный част приёмника организована на основе фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ).

# Фазовой автоподстройки частоты

## Общая схема



Восстановление несущей основано на блоке фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ)

- Фазовый детектор (или частотный детектор)
- Петлевой фильтр – обеспечивающий сглаживание оценки
- ГУН - генератора, управляемого напряжением для аналоговых систем или
- Numerically Controlled Oscillator (NCO) – блок генерации корректирующего сигнала для входного для цифровых систем

# Фазовой автоподстройки частоты

*Классификация. Цифровой или аналоговый*

- Так как система ФАПЧ определена как и для аналоговых сигналов, так и для цифровых сигналов, первая возможная классификация систем ФАПЧ исходит из того, с какими сигналами работает каждый блок внутри ФАПЧ

Тип ФАПЧ	Фазовый детектор	Петлевой фильтр	Контрольный осциллятор
Линейный ФАПЧ (Л-ФАПЧ)	Аналоговый умножитель	RC - контур	Регуляция напряжения
Цифровой ФАПЧ (Ц-ФАПЧ)	Цифровое детектирование	RC - контур	Регуляция напряжения
Полностью цифровой ФАПЧ	Цифровое детектирование	Цифровой фильтр	Цифровая регуляция

# Фазовой автоподстройки частоты

*Классификация. Порядок фильтра*

- Вторая классификация относится к внутреннему строению петлевого фильтра. В зависимости от количества коэффициентов, которым описывается данный фильтр определяется порядок фильтра и порядок ФАПЧ.
- Так, например, ФАПЧ 2 порядка – это ФАПЧ, фильтр которого описывается с помощью 2 коэффициентов



# Фазовой автоподстройки частоты

## Фазовый детектор



- Начнём разбор работы блока частотно синхронизации с обзора методов фазового/частотного детектирования частотного смещения сигнала

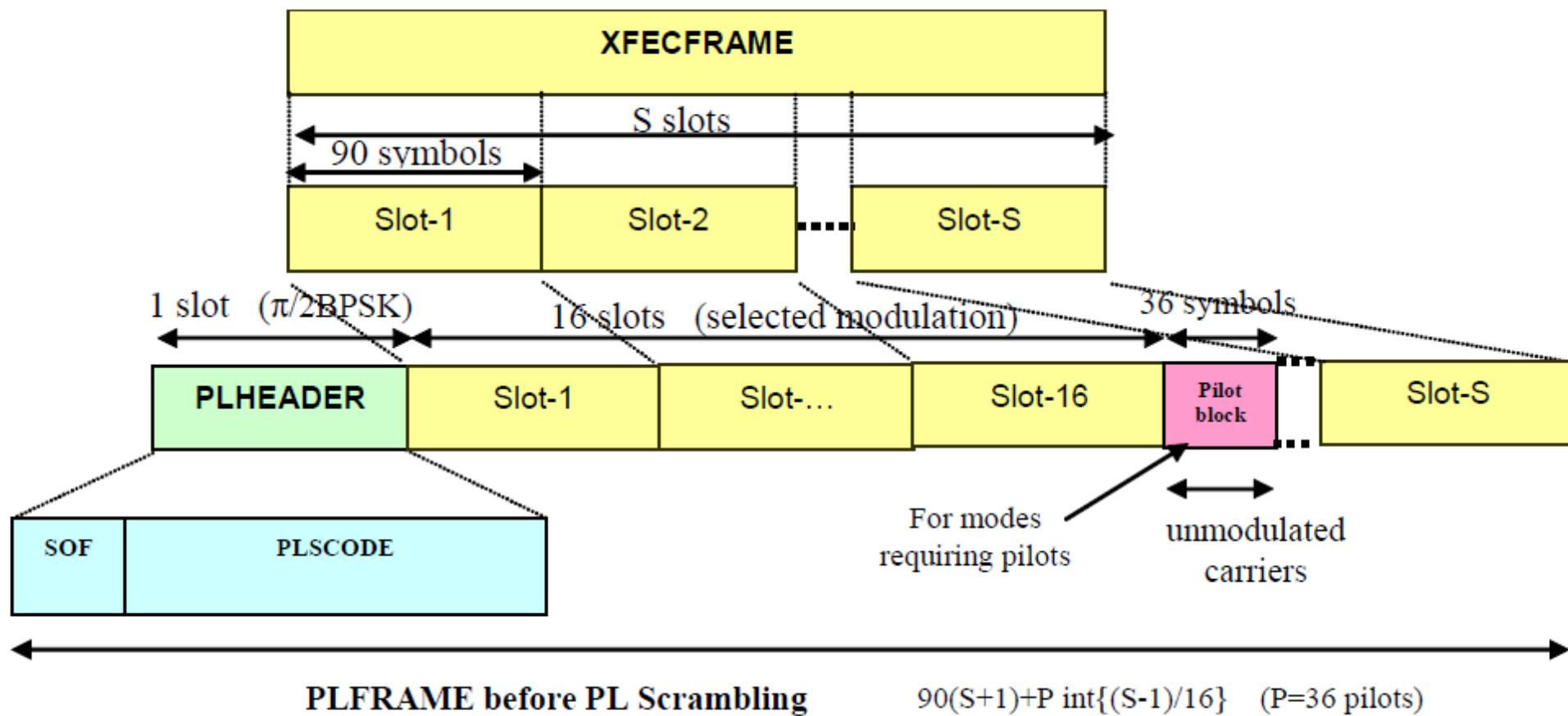
# Структура кадра физического уровня DVB-S2

*Полная схема*

- Прежде, чем приступить к классификации и описанию фазовых детекторов, стоит вспомнить, что наш сигнал обладает некоторой кадровой структурой. В следствии чего, не каждый момент времени с помощью простых методов можно оценить частотный сдвиг сигнала, так как не всегда известная ожидаемая полная фаза принятого сигнала.

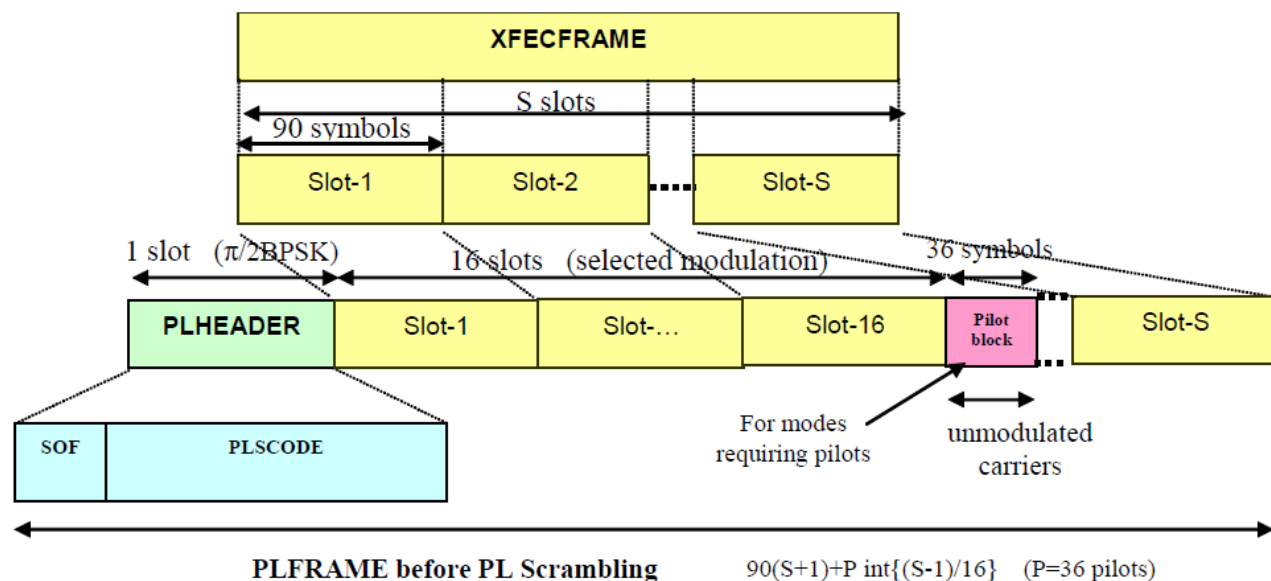
# Структура кадра физического уровня DVB-S2

Полная схема



# Структура кадра физического уровня DVB-S2

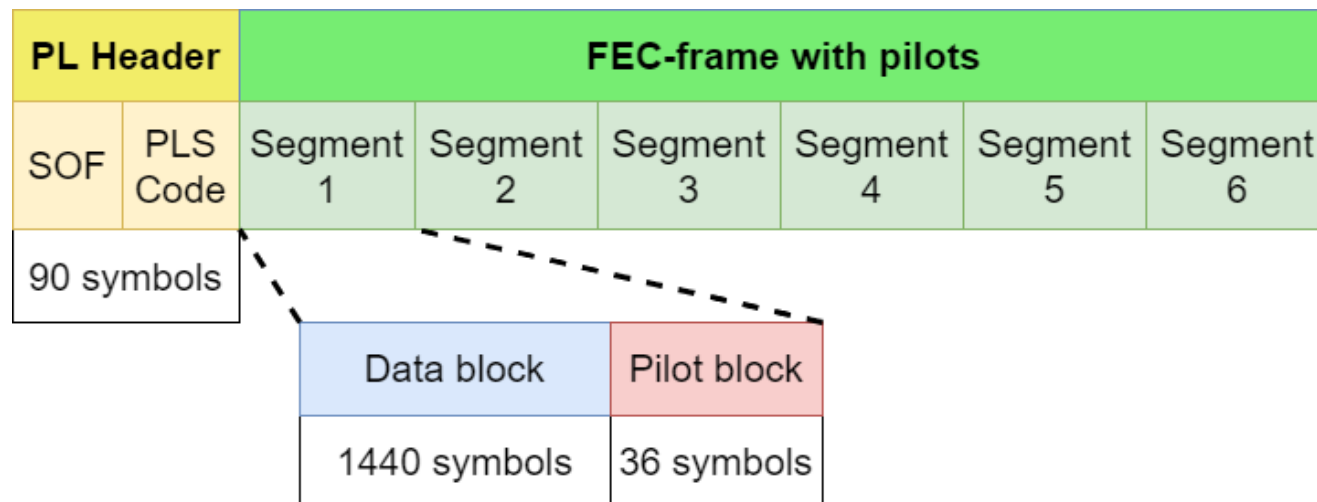
Полная схема



- Каждый **слот** состоит из 90 IQ СИМВОЛОВ
- Каждый кадр начинается с заголовка физического уровня, **PLHEADER**. Он содержит:
- Start-of-Frame (**SOF**) – первые 36 IQ символов, статичные для любых кадров, сформированные на основе M-последовательности
- **PLSCODE** - 54 IQ символов сигнализации физического уровня. Здесь передаётся информация о том, с какими параметрами передаётся информация в данном кадре: наличие пилотов в кадре, и выбранный **MODCODE** (тип модуляции, размер кадра и так далее)

# Структура кадра физического уровня DVB-S2

*Упрощённая схема и оценка*

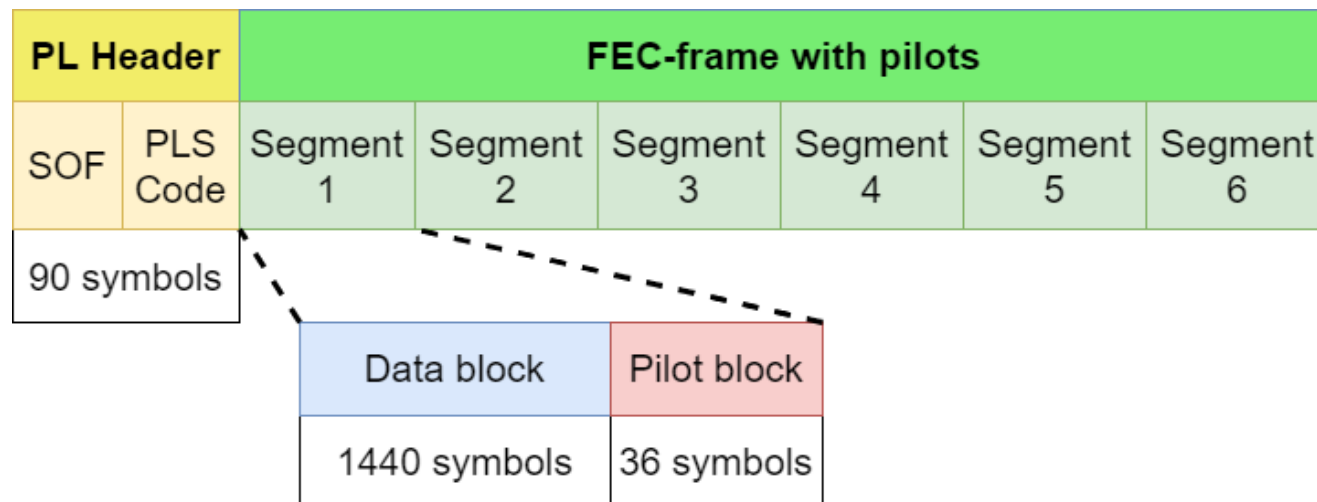


- SOF – **Start-Of-Frame** фиксированная символьная последовательность для кадровой синхронизации
- PLS - **Physical Layer Signalling** – последовательность символов для сигнализации
- FEC - **Forward Error Correction** – упреждающая коррекция ошибок

- Если немного упростить иллюстрацию кадровой структуры для сигнала DVB-S2 для кадра. Пусть выбран кадр normal (16 200 бит).
- Созвездие QPSK (2 бита на символ), тогда приблизительно один кадр физического уровня будет иметь 5 сегментов, общей длительностью 1476 символов.
- Последний сегмент будет короче остальных (900 символов данных).

# Структура кадра физического уровня DVB-S2

*Упрощённая схема и оценка*

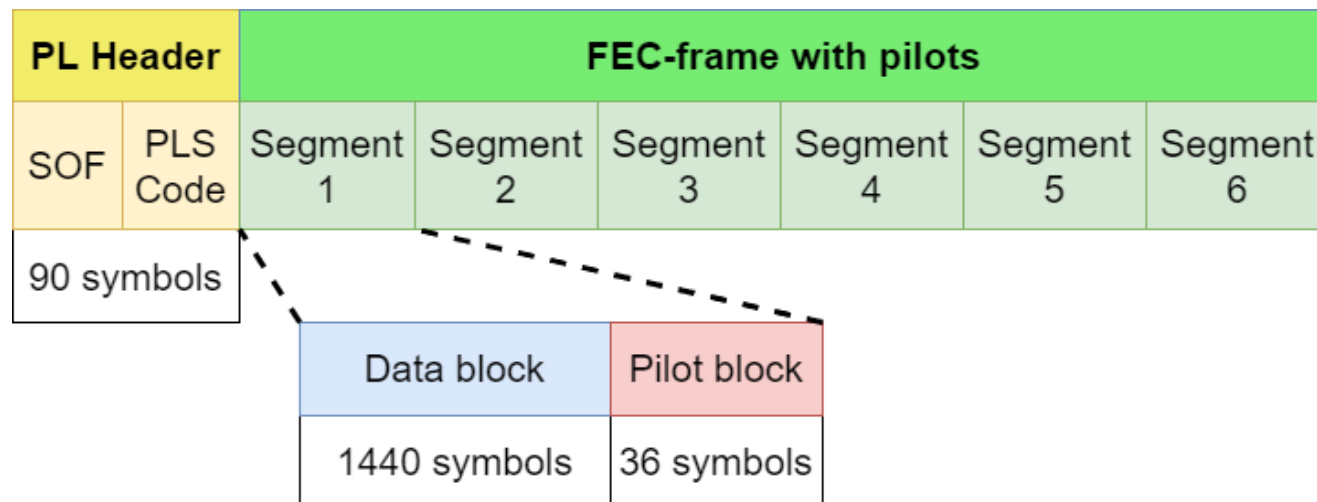


- SOF – **Start-Of-Frame** фиксированная символьная последовательность для кадровой синхронизации
- PLS - **Physical Layer Signalling** – последовательность символов для сигнализации
- FEC - **Forward Error Correction** – упреждающая коррекция ошибок

- Более того, пилот-блоки опциональны в сигнале, что означает, что не в каждом кадре у нас будет возможность их использовать.
- Это приводит к тому, что даже в упрощённом виде, заведомо известных блоков информации в сигнале намного меньше, чем блоков данных.

# Структура кадра физического уровня DVB-S2

Упрощённая схема и оценка



- SOF – **Start-Of-Frame** фиксированная символьная последовательность для кадровой синхронизации
- PLS - **Physical Layer Signalling** – последовательность символов для сигнализации
- FEC - **Forward Error Correction** – упреждающая коррекция ошибок

- Допустим, оценка частотного смещения обновляется каждый пилот-блок или заголовок. То есть на протяжении блока данных, компенсации частотного сдвига фиксируется и ошибки оценки составляет:

$$f_{error} = 10^{-6}$$

- Тогда разница фаз между 2 пилотными блоками с учётом ошибки будет:

$$\Delta\phi = 2 \cdot \pi \cdot f_{error} \cdot 1440 = 0.0009 \text{ rad}$$

- Если

$$f_{error} = 10^{-4}$$

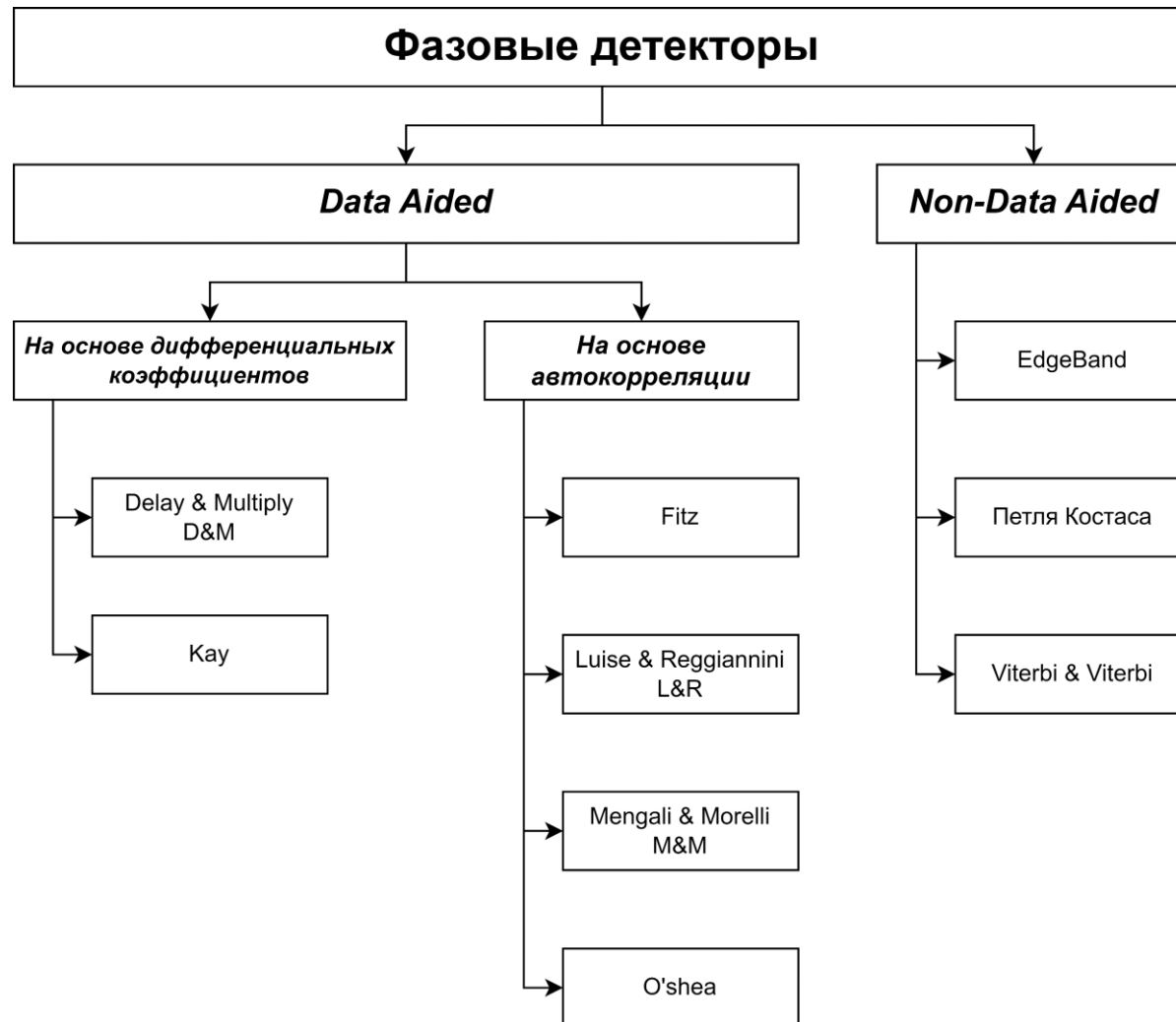
- Тогда

$$\Delta\phi = 0.9 \text{ rad}$$

- Что соответствует повороту созвездия на более чем на  $\frac{\pi}{4}$

# Фазовый детектор

## Классификация



- Из-за кадровой структуры сигнала, можно попытаться рассмотреть 2 основным подхода, в работе фазовых детекторов:
  - На основе встроенных в передачу сигналов (пилот-сигналы): **Data aided (DA)**
  - На основе неизвестного потока передаваемой информации, **Non-data aided (NDA)**



# Дифференциальные коэффициенты

- Пусть есть отправленный пилот-сигнал  $s(k)$  и принятый сигнал  $r(k)$ . Тогда можно получить так называемый сигнал с удалённой несущей  $z(k)$ :

$$z(k) = r(k) s^*(k)$$

- В текущей задаче, нас будет интересовать только фаза комплексной экспоненты, а амплитуда – нет:

$$z(k) = e^{i(2\pi(\Delta f k) + \varphi)}$$

# Дифференциальные коэффициенты

- Тогда можно рассчитать дифференциальный коэффициент для изменения фазы комплексной экспоненты сигнала с удалённой информационной составляющей будет выглядеть:

$$dif(1) = z(k) * conj(z(k - 1)) =$$

$$e^{i(2\pi\Delta f k + \varphi)} e^{-i(2\pi f k - \Delta f + \varphi)} =$$

$$= e^{i2\pi\Delta f}$$

- Где  $\Delta f$  – оценка частотного смещения

# Дифференциальные коэффициенты

- Дифференциальные коэффициенты можно рассматривать не только между соседними отсчётам, но и рассматривать разницу на различных расстояниях между отсчётами:

$$\begin{aligned} dif(1) &= z(k) * conj(z(k - 1)) = e^{i2\pi\Delta f} \\ dif(2) &= z(k) * conj(z(k - 2)) = e^{i2\pi2\Delta f} \\ dif(3) &= z(k) * conj(z(k - 3)) = e^{i2\pi3\Delta f} \end{aligned}$$

- В общем виде, для произвольного расстояния  $n$  дифференциальные коэффициенты можно представить как:

$$dif(n) = z(k) * conj(z(k - n)) = e^{i2\pi n\Delta f}$$

# Фазовый детекторы

*Data Aided. D&M*

- Одним из часто используемых фазовых детекторов на основе априорно известного пилот-сигнала (или заголовка) является D&M. Он рекомендуется для использования для грубой оценки частотного сдвига в стандарте DVB-S2. Его популярность обуславливается широким диапазоном детектирования частотного сдвига в сигнале:

$$|\hat{f}| < \frac{1}{2D}$$

- Здесь  $\hat{f} = \frac{\Delta f}{S_{rate}}$  - нормированная частотная
- $S_{rate}$  - символьная скорость сигнала
- $D$  – параметр данного фазового детектора, определяющий расстояние между отсчётами между которыми рассматривается дифференциальный коэффициент. В системах DVB-S2 для грубо

# Фазовый детекторы

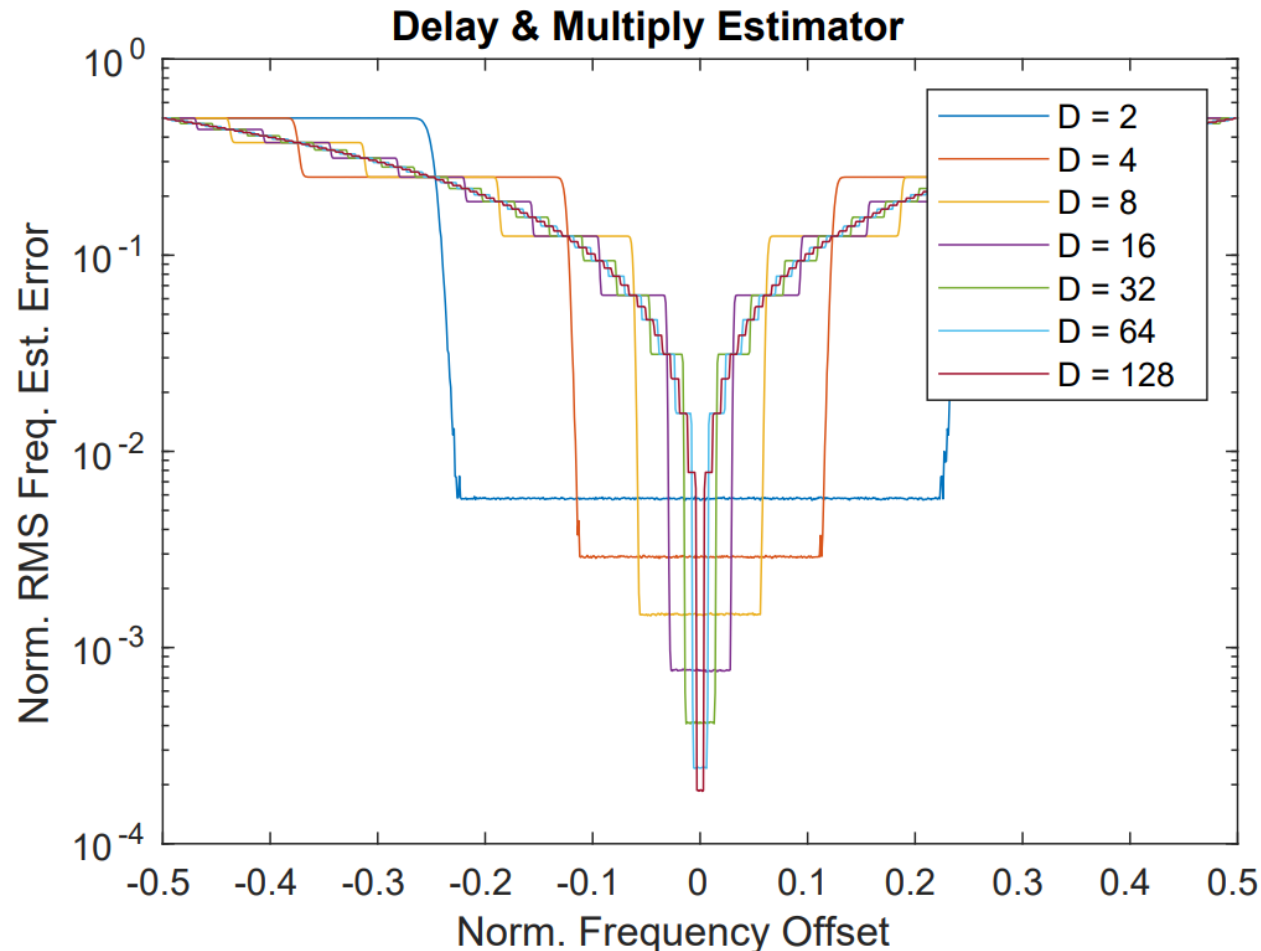
*Data Aided. D&M*

- Оценку частотного сдвига можно описать следующий образом

$$\hat{f} = \frac{1}{2\pi D} \arg \left[ \sum_{k=D}^{L-1} z(k) z^*(k - D) \right]$$

# Фазовый детекторы

*Data Aided. D&M*



- Как было сказано ранее, при помощи параметр  $D$  можно регулировать величину максимального частотного сдвига сигнала.
- Кроме того, параметр  $D$  определяет точность этой оценки
- Это хорошо иллюстрируется на графике среднеквадратичной ошибки от величины нормированного на полосу сигнала частотного сдвига

# Фазовый детекторы

*Data Aided. Kay*

- Вторым методом, на основе расчёта дифференциальных коэффициентов является алгоритм оценки Кау. Оценка частотного сдвига в данном фазовом детекторе представляет собой перемножение дифференциальных коэффициентов с некоторой весовой функцией. Подобный подход позволяет без сильного усложнения расчётов повысить точность оценки.

# Фазовый детекторы

*Data Aided. Kay*

- Сама оценка выглядит следующим образом:

$$\hat{f} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{L-1} w(k) \arg\{z(k)z^*(k-1)\}$$

- Где  $w(k)$  - весовая функция:

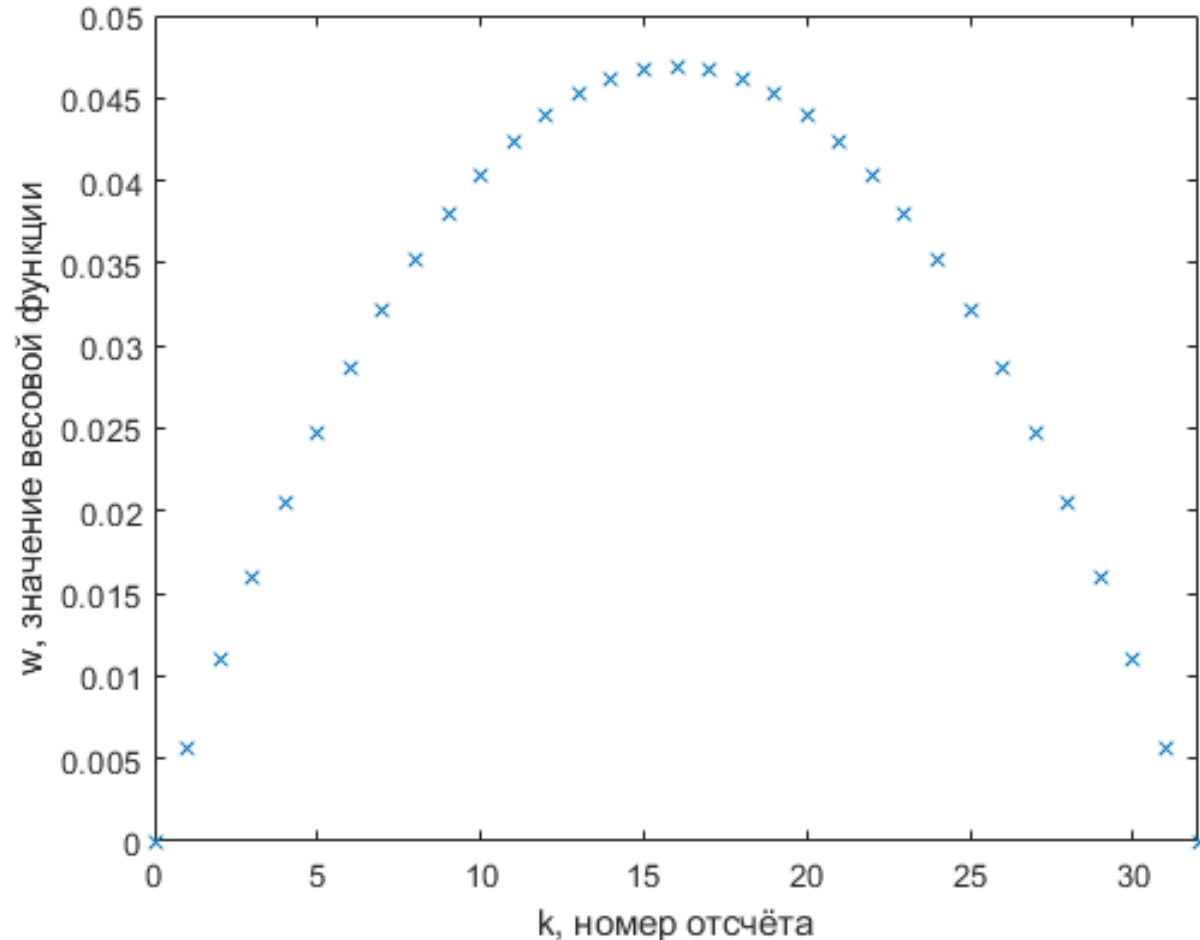
$$w(k) = \frac{3}{2} \frac{L}{L^2 - 1} \left[ 1 - \left( \frac{2k - L}{L} \right)^2 \right]$$

- $L$  – размер априорно известного сигнала (заголовок или пилот-сигнал)



# Фазовый детекторы

*Data Aided. Kay*



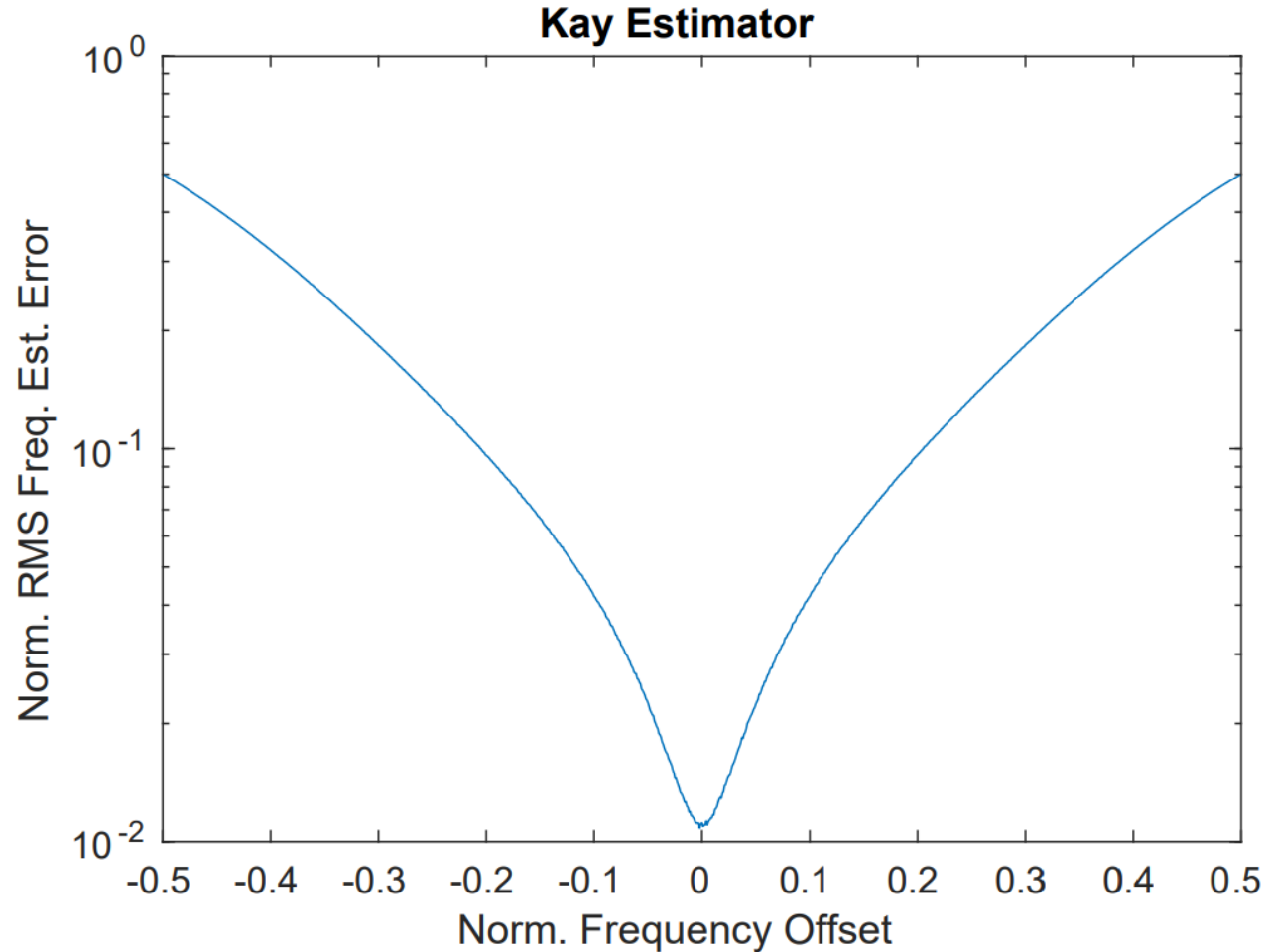
- Весовая функция:

$$w(k) = \frac{3}{2} \frac{L}{L^2 - 1} \left[ 1 - \left( \frac{2k - L}{L} \right)^2 \right]$$

- На графике слева иллюстрируется поведение коэффициентов весовой функции, при  $L = 32$

# Фазовый детекторы

*Data Aided. Kay*

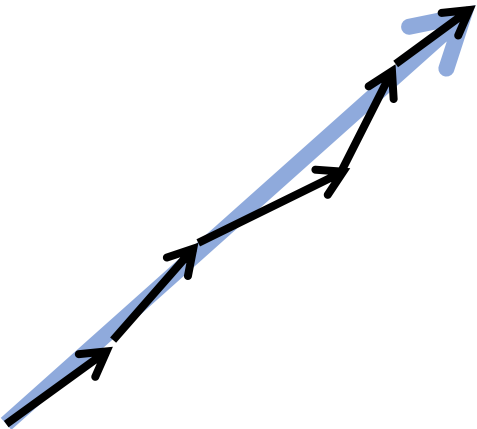


- Как видно, у данного метода, по сути, нет никакого параметра, который бы позволял изменять точность оценки.
- Точность работы фазового детектора показана на графике среднеквадратичной ошибки от нормированной частоты

# Автокорреляция

- Зная значения дифференциальных коэффициентов  $dif(n)$  можно оценить поведения функции корреляции:

$$R(i) = \sum dif(i)$$



- Используя накопление дифференциальных коэффициентов (функцию автокорреляции), можно ослабить влияние случайных процессов (шума)

# Фазовый детекторы

*Data Aided. Fitz*

- Первым для анализа DA алгоритмов фазового/частотного детектирования будет Fitz. Основная идея заключается в накоплении автокорреляции дифференциальных коэффициентов с различным расстоянием между отсчётами. Сама оценка описывается следующим образом:

$$\hat{f} = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{N(N+1)} \sum_{n=1}^N \arg(R(n))$$

- Где  $R(m)$  - автокорреляционная функция:

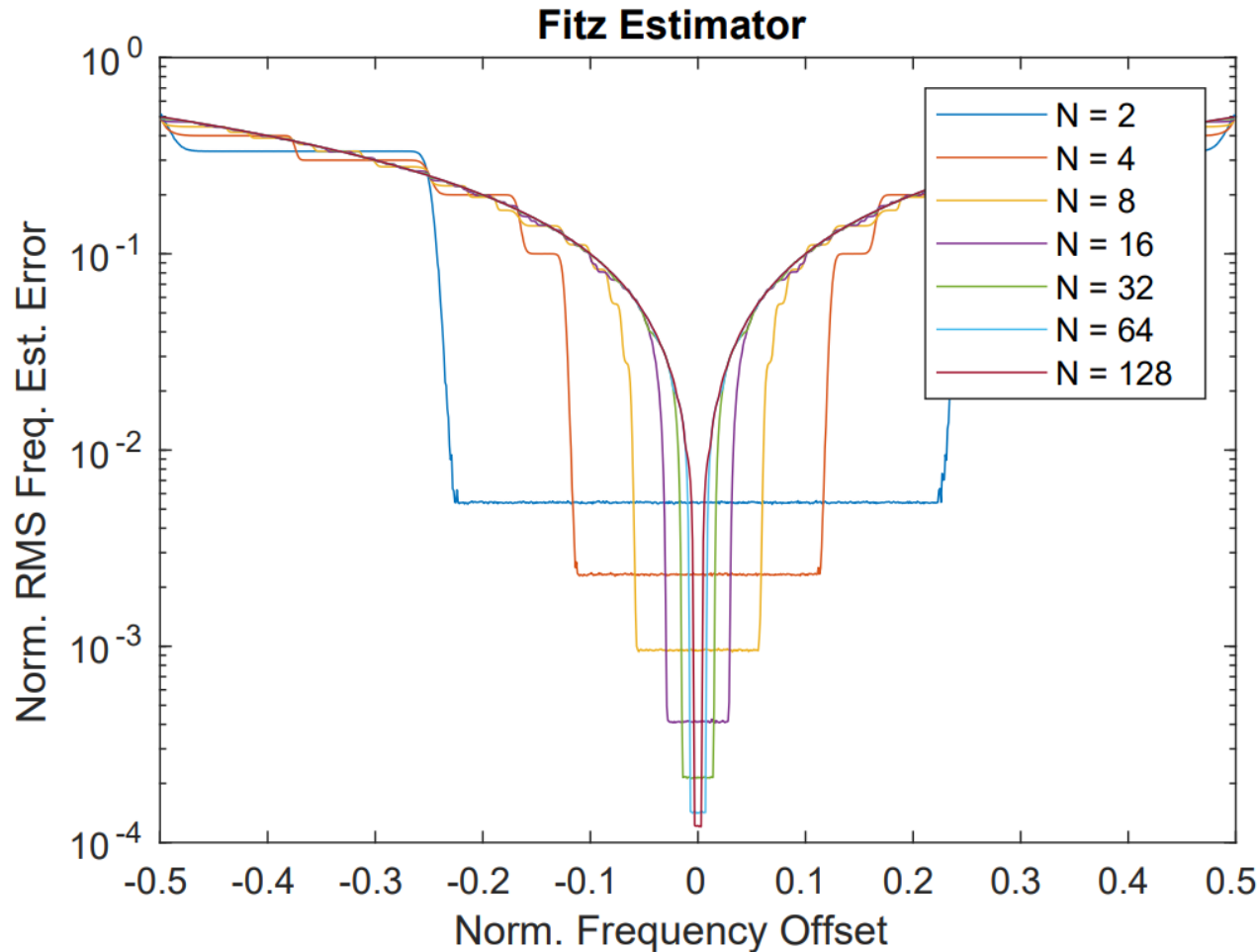
$$R(m) = \frac{1}{L-m} \sum_{k=m}^{L-1} z(k) z^*(k-m)$$

- У данного фазового детектора есть границы применения, максимальное значение нормированного частотного сдвига  $\hat{f}$ , который он способен захватить и он зависит от количество элементов автокорреляционной функции, которые участвуют в оценке:

$$|\hat{f}| < \frac{1}{2N}$$

# Фазовый детекторы

*Data Aided. Fitz*



- График среднеквадратичной ошибки алгоритма Fitz от величины нормированного на полосу сигнала частотного сдвига при различных параметрах  $N$

# Фазовый детекторы

*Data Aided. Luise and Reggiannini*

- Следующий DA алгоритма – Luise and Reggiannini (L&R). Он сильно схож с алгоритмом Fitz:

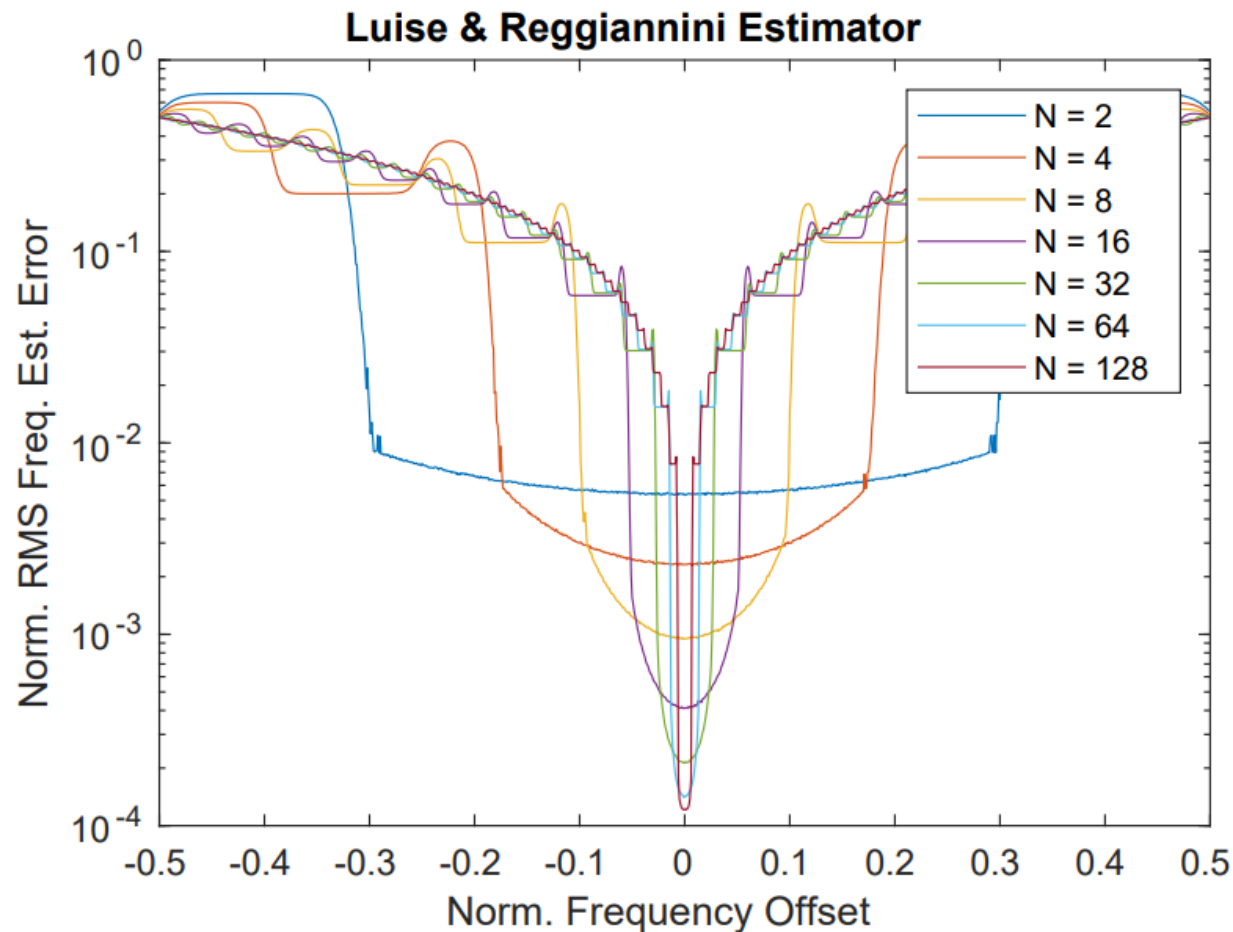
$$\hat{f} = \frac{1}{\pi(N+1)} \arg \left\{ \sum_{m=1}^N R(m) \right\}$$

- В данном случае разница заключается в том, что с точки зрения встраивания, подобную формулу можно заменить на применение Ких-фильтра, что позволяет его применять при тонкой частотной синхронизации в режиме прямой связи (feedforward).
- Также предоставляет более широкий диапазон захвата смещения частоты при низких ошибках:

$$|\hat{f}| < \frac{1}{N+1}$$

# Фазовый детекторы

*Data Aided. Luise and Reggiannini*



- График среднеквадратичной ошибки алгоритма L&R от величины нормированного на полосу сигнала частотного сдвига при различных параметрах N

# Фазовый детекторы

*Data Aided. Mengali and Morelli*

- DA алгоритма – Mengali and Morelli (M&M):

$$\hat{f} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^N w(m) \arg\{R(m)R^*(m-1)\}$$

- Где  $w(k)$  - весовая функция, описываемая следующим образом:

$$w(m) = \frac{3((L-m)(L-m-1) - N(L-N))}{N(4N^2 - NL + 3L^2 - 1)}$$

- Широкий диапазон захвата смещения частоты и при этом не зависит от параметров фазового детектора:

$$|\hat{f}| < \frac{1}{2}$$



# Фазовый детекторы

*Data Aided. Mengali and Morelli*

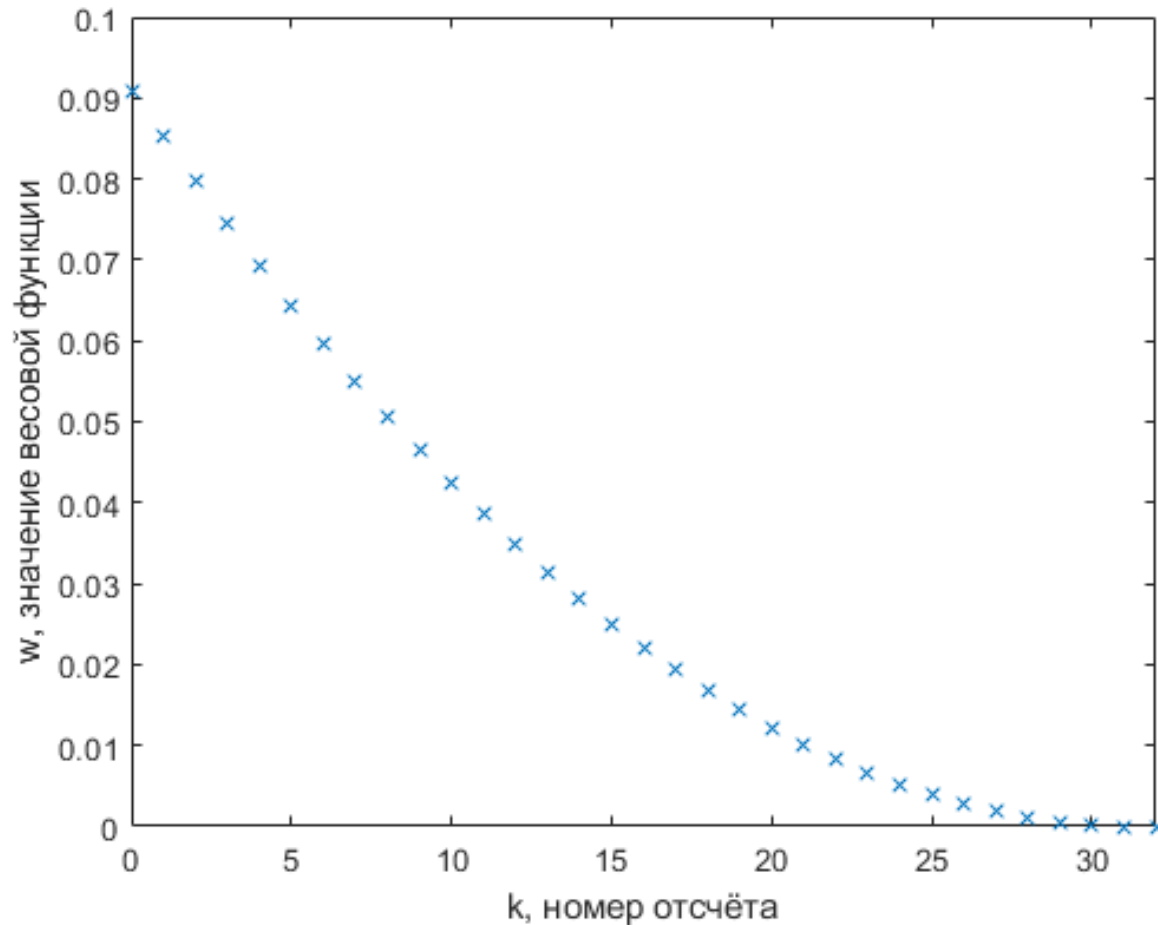
- Для уменьшения сложности расчёта можно прибегнуть к следующей формуле, которая даст точно такой же результат, но будет требовать меньше вычислений:

$$\hat{f} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^N w(k) [\arg\{R(m)\} - \arg\{R(m-1)\}]_{2\pi}$$

- Где  $[\cdot]_{2\pi}$  деление по модулю  $2\pi$

# Фазовый детекторы

*Data Aided. Menqali and Morelli*



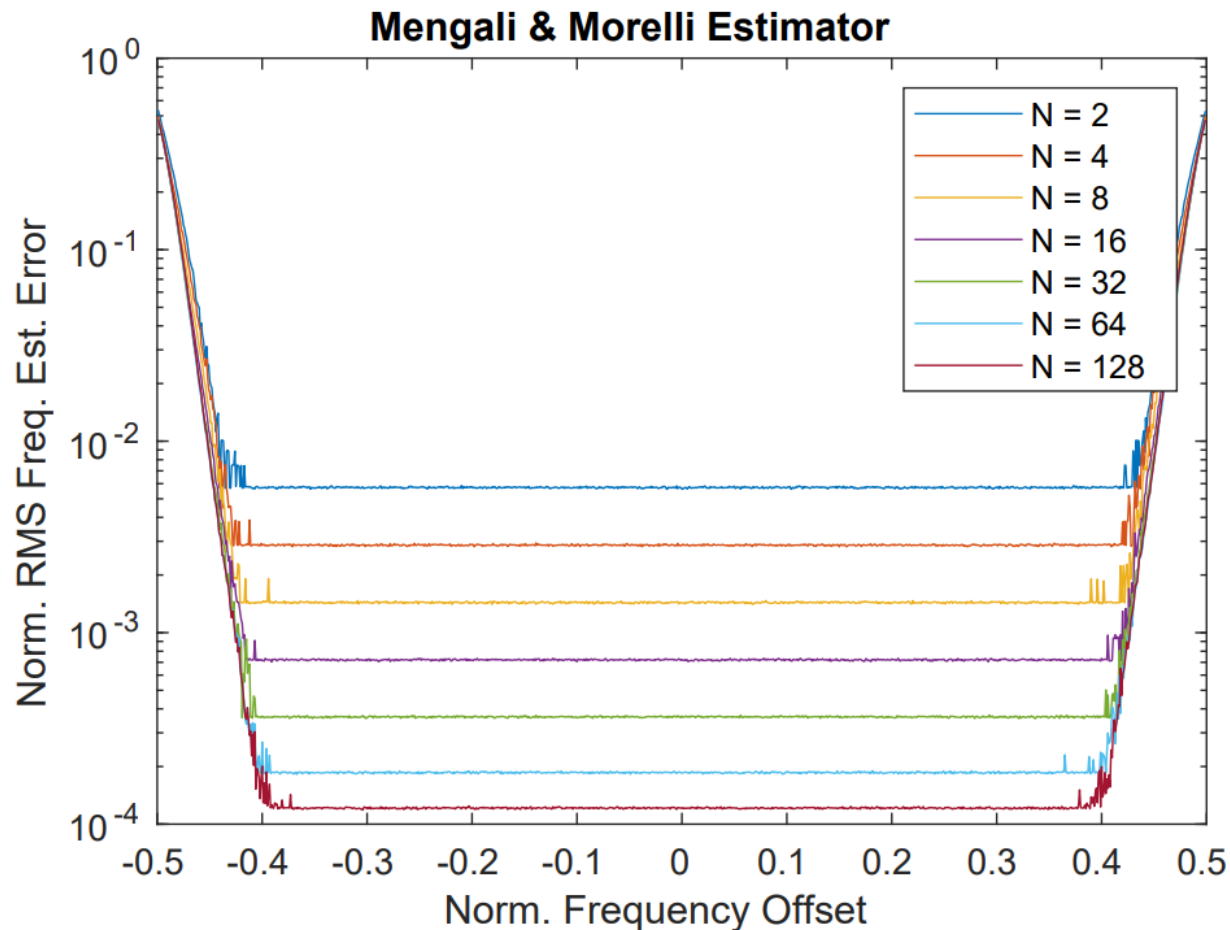
- Весовая функция при, описываемая следующим образом:

$$w(m) = \frac{3((L - m)(L - m - 1) - N(L - N))}{N(4N^2 - NL + 3L^2 - 1)}$$

- На графике слева значения весовой функции при  $L=N=32$

# Фазовый детекторы

*Data Aided. Mengali and Morelli*



- График  
среднеквадратичной  
ошибки алгоритма M&M  
от величины  
нормированного на  
полосу сигнала частотного  
сдвига при различных  
параметрах N

# Фазовый детекторы

*Data Aided. O'Shea*

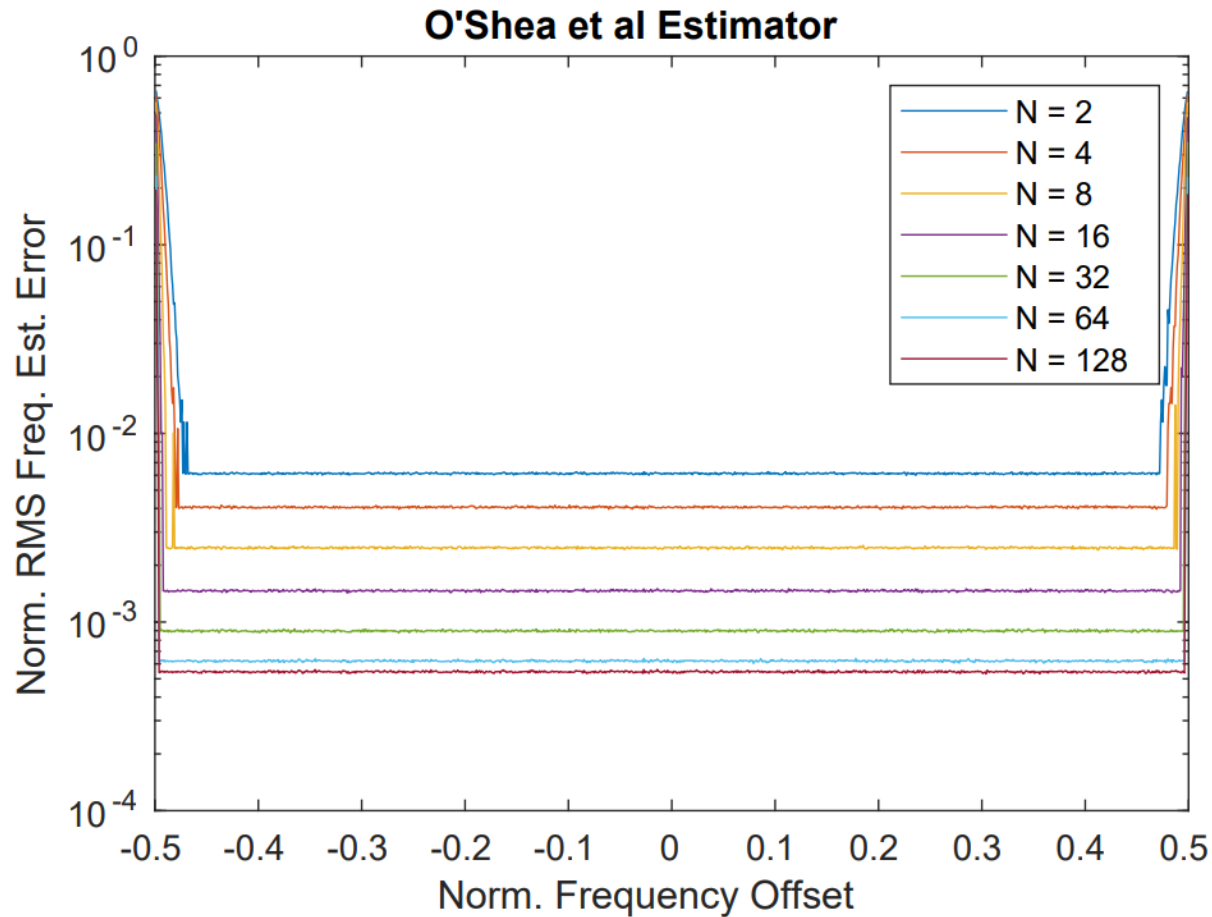
- Алгоритм O'Shea по сравнению с M&M меняет местами суммирование и взятие аргумента у комплексного числа:

$$\hat{f} = \frac{1}{2\pi} \arg \left\{ \sum_{m=1}^N w(k) R(m) R^*(m-1) \right\}$$

- Такая замена позволяет сократить количество операций расчёта арктангенса комплексного числа (фаза комплексного числа), при сохраняя такую же широкую полосу захвата, как и в случае M&M.

# Фазовый детекторы

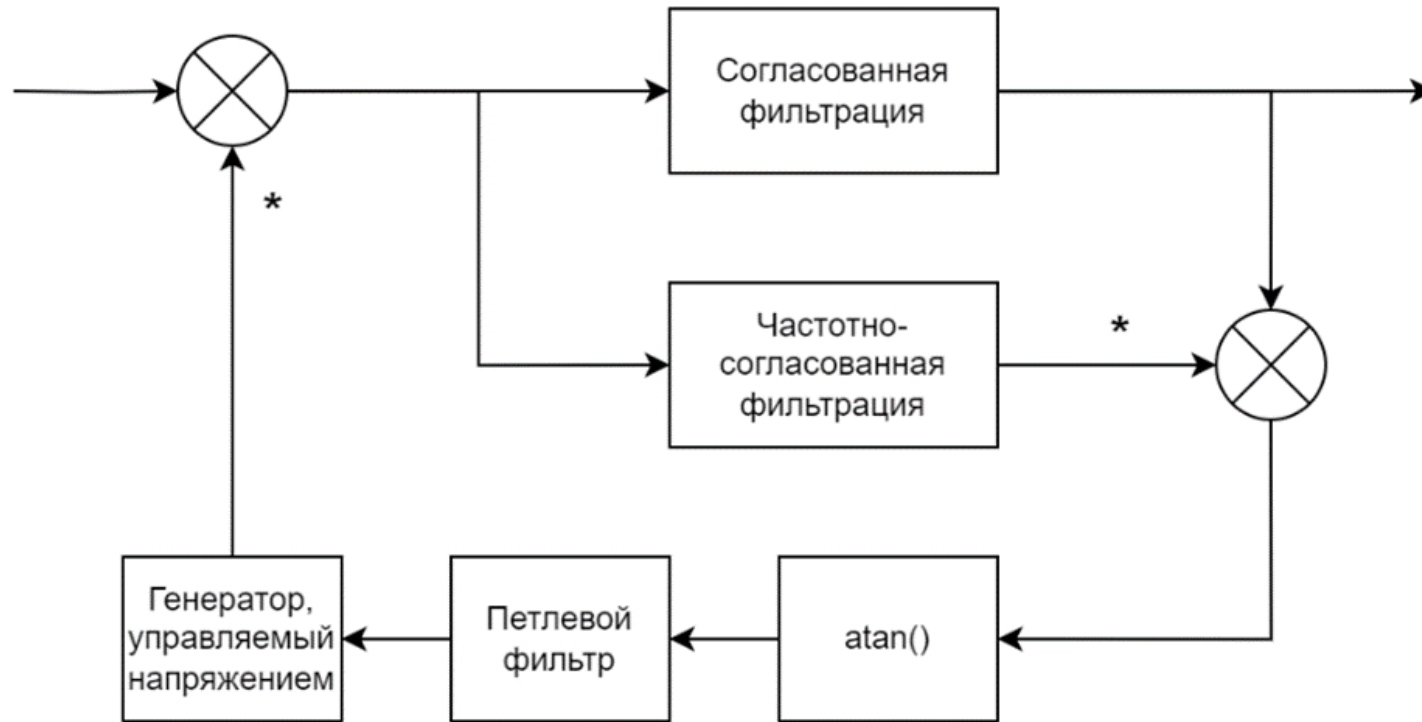
*Data Aided. O'Shea*



- График среднеквадратичной ошибки алгоритма O'Shea от величины нормированного на полосу сигнала частотного сдвига при различных параметрах N

# Фазовый детекторы

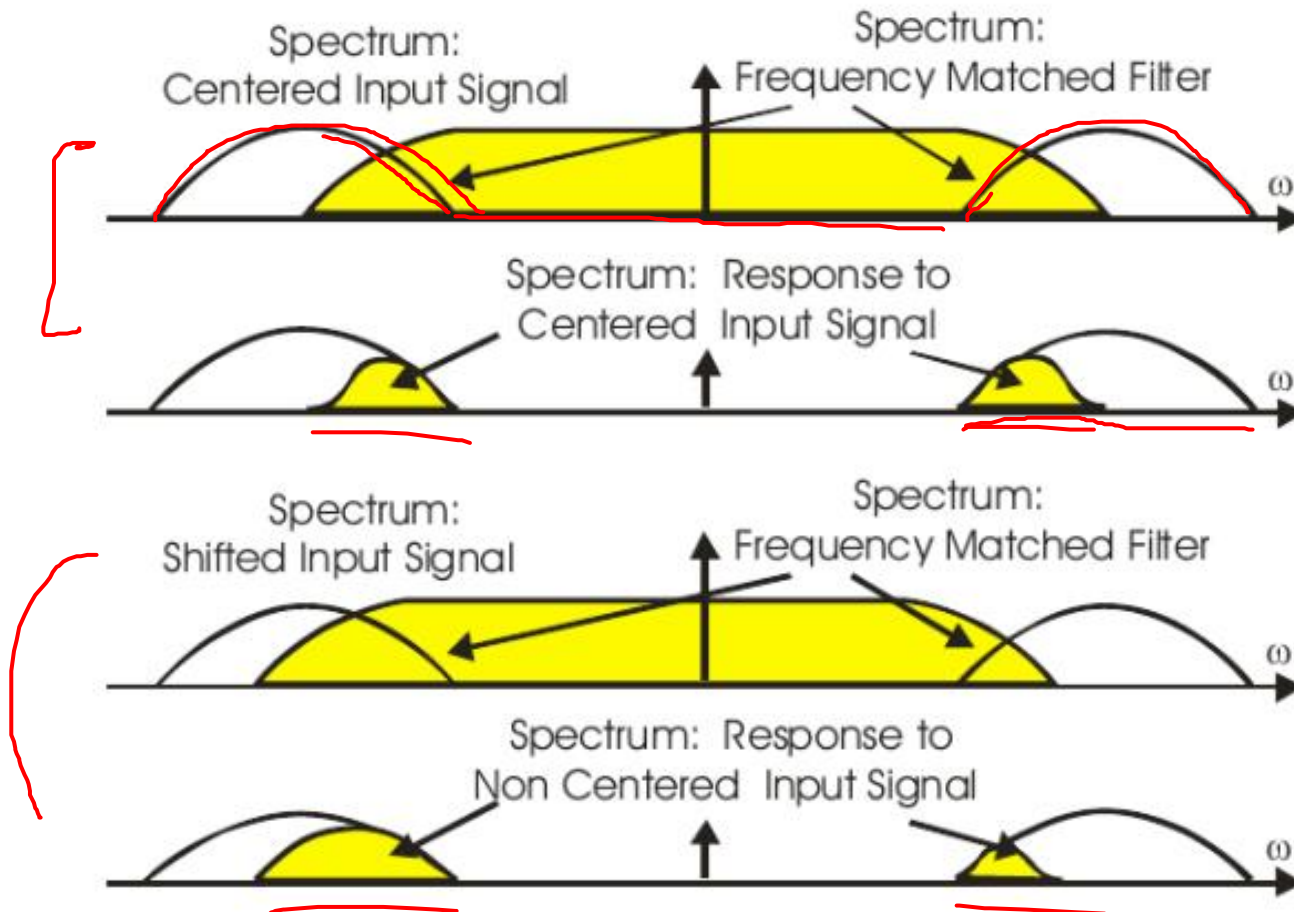
*Non-Data Aided. EdgeBand*



- Идея заключается в том, что зная конфигурацию согласованного фильтра и полосу сигнала, можно построить такой фильтр, выход которого позволял бы оценивать направление смещения спектра принятого сигнала

# Фазовый детекторы

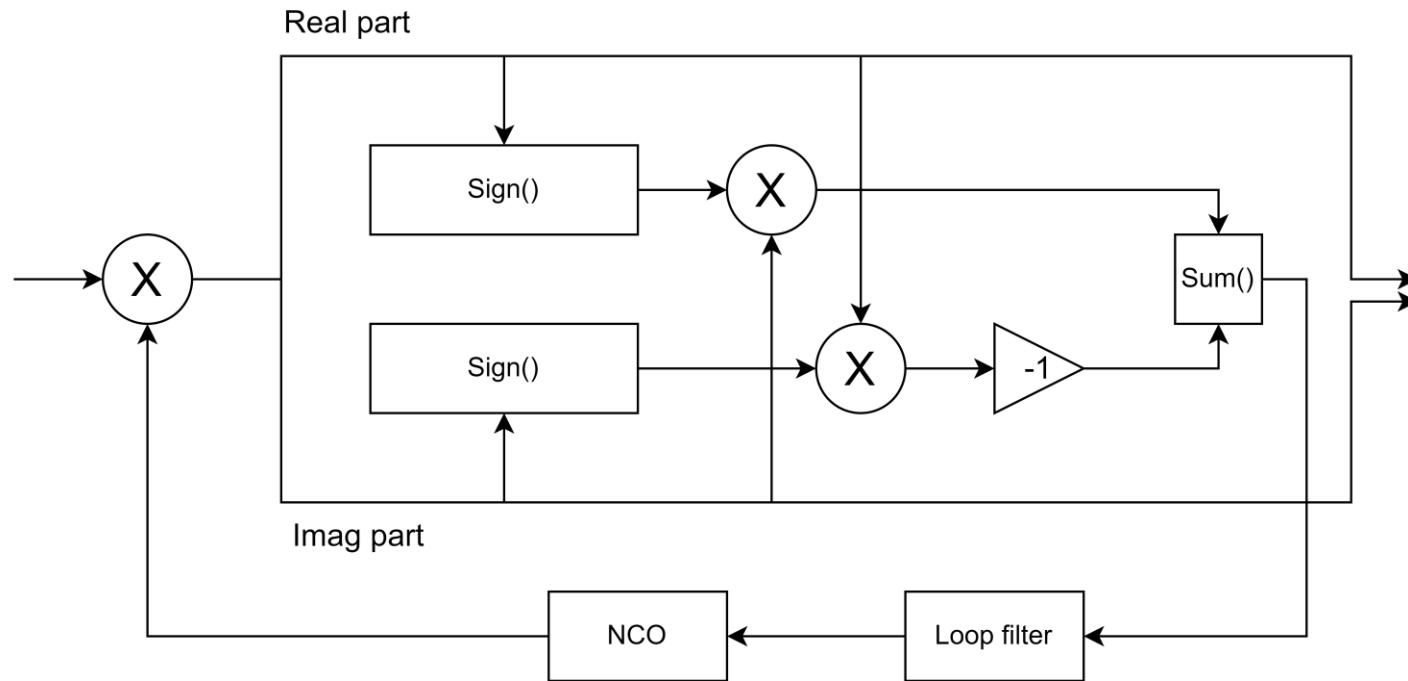
*Non-Data Aided. EdgeBand*



- Задача подобного алгоритма частотной синхронизации заключается в оценке смещения частоты путём фильтрации сигнала узким полосовым фильтром. В зависимости от знака и разницы по энергии между областью положительных частот и отрицательных частот, можно оценить величину и направление частотного сдвига сигнала. Величина частотного сдвига, который способен оценить алгоритм, характеризуется шириной полосы этого фильтра

# Фазовый детекторы

*Non-Data Aided. Петля Костаса*

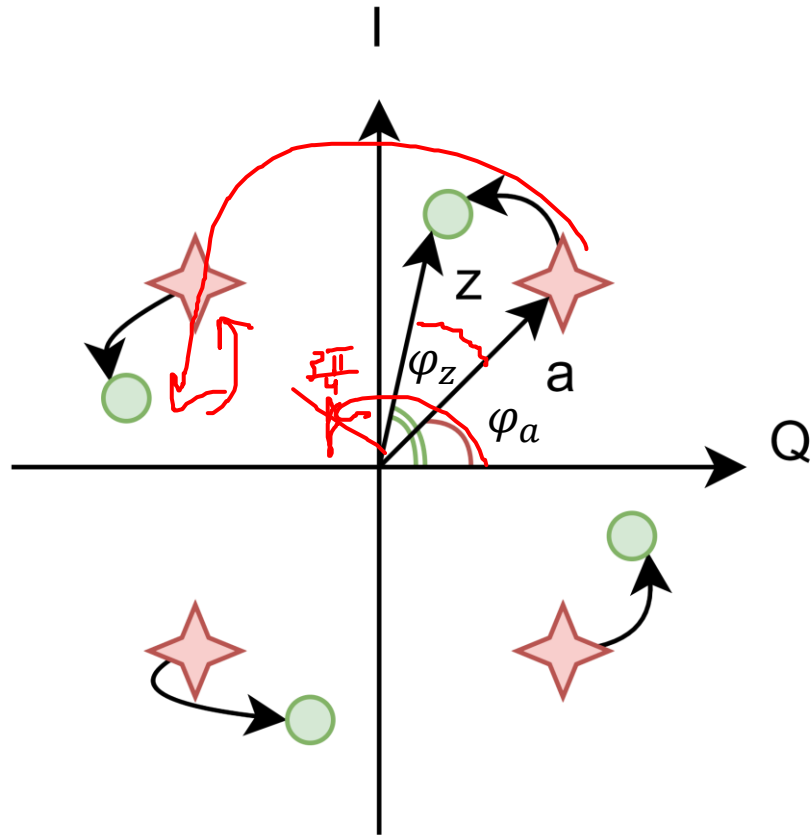


- Данный алгоритм требует знания о выбранном созвездии. Его принципиальная схема будет отличаться для разных созвездий. Оценивается разница между I компонентой и Q компонентой. В случае QPSK созвездия, подобная разница должна быть равна нулю, во всех остальных случаях при наличии фазового смещения петля Костаса будет оценивать насколько несбалансированы компоненты между собой



# Фазовый детекторы

*Non-Data Aided. Петля Костаса*



- Пусть сигнал от времени в системе после частотного сдвига, сигнал описывается следующим образом

$$z(t) = A e^{j(2\pi(f-f_0)t+\varphi)}$$

- Первоначальная точка созвездия

$$a = a_I + j a_Q = abs(a) e^{j \varphi_a}$$

- Пришедшая точка созвездия

$$z = x_I + j y_Q = abs(z) e^{j \varphi_z}$$

- Тогда искомый угол поворота:

$$\theta = \varphi_z - \varphi_a = \angle\{z a^*\} = \tan^{-1} \frac{Im[z a^*]}{Re[z a^*]}$$

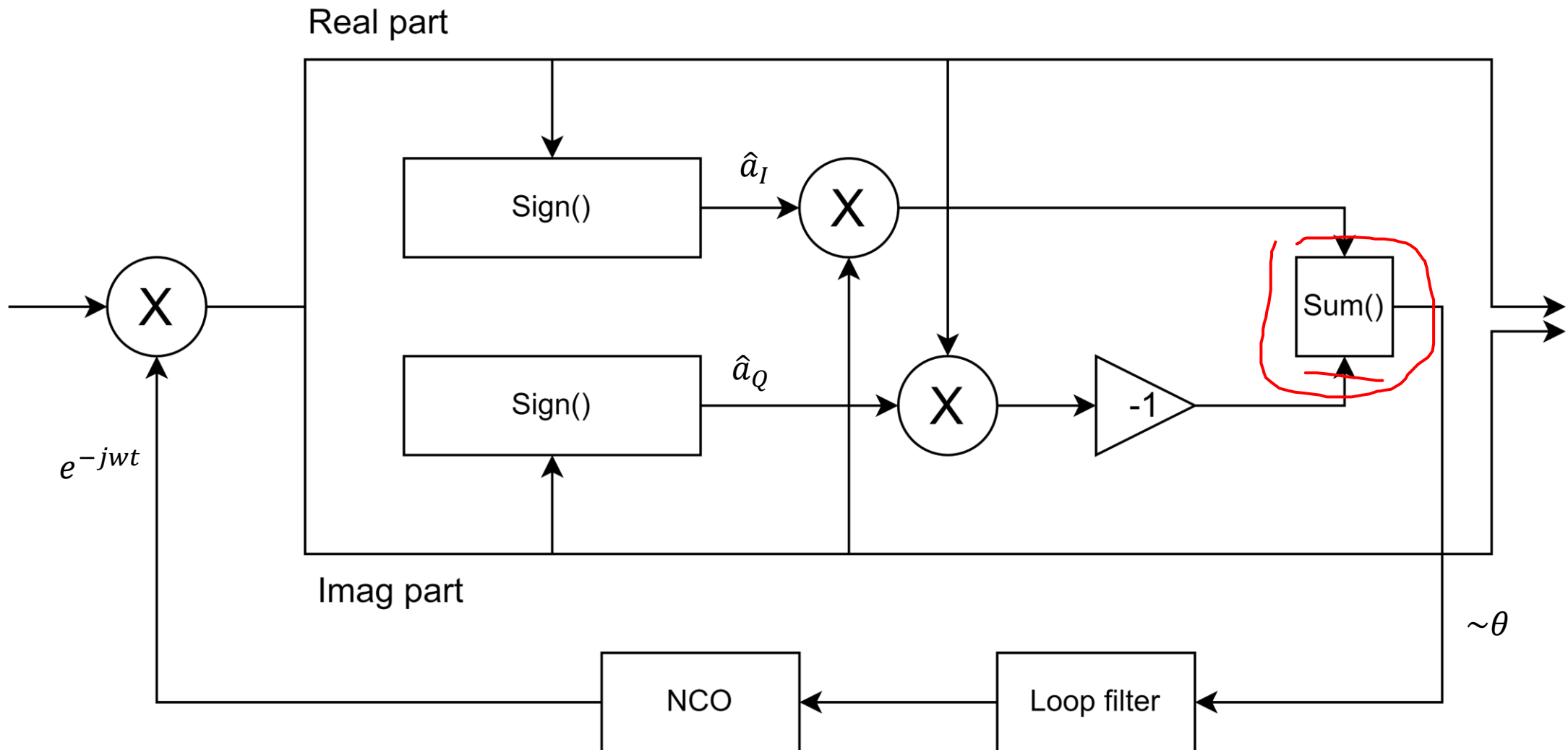
- Но  $\tan \theta \sim \theta \sim \sin \theta \sim \theta \sim \tan^{-1} \theta$

- Тогда можно воспользоваться приближением:

$$\theta \approx Im[z a^*] = y a_I - x a_Q$$

# Фазовый детекторы

*Non-Data Aided. Петля Костаса*



# Фазовый детекторы

*Non-Data Aided. Viterbi & Viterbi*

- Если мы знаем, что поток IQ символов является случайным и каждая точка равновероятна, то можно применить V&V алгоритм.
- Основная идея алгоритма заключается в умножении фазы разностного IQ-сигнала на 4. Зная что фаза комплексного числа определена на промежутке  $[0, 2\pi]$ , можно воспользоваться остатком от деления на  $N 2\pi$  результата умножения фазы сигнала на 4

# Фазовый детекторы

*Non-Data Aided. Viterbi & Viterbi*

- Сигнал на основе QPSK созвездия можно описать как:

$$x_n = \rho_n e^{j\varphi_n}$$

- В таком случае смещения фазы  $\Delta\theta$  с помощью V&V алгоритма можно описать следующим образом

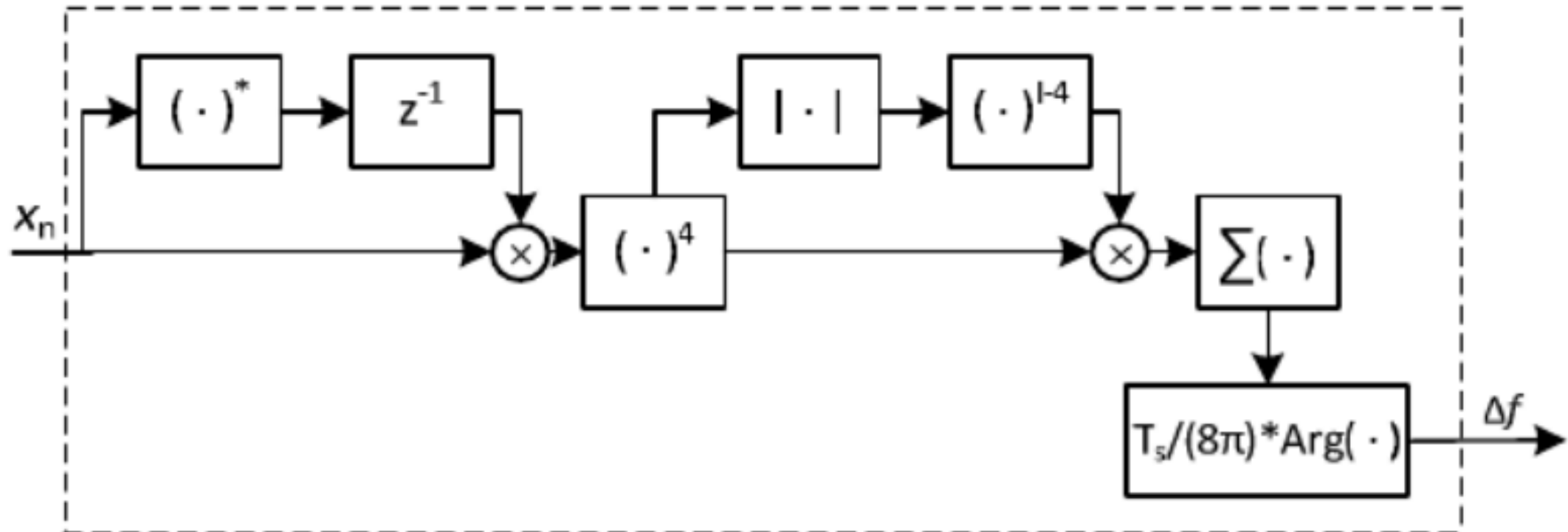
$$\Delta\theta = \frac{1}{4} \arg \left[ \sum_{n=0}^{N-1} (\rho_n \rho_{n-1})^4 e^{j4(\varphi_n - \varphi_{n-1})} \right].$$

- Оценку частотного сдвига с учётом символьного периода  $T_s$  можно представить как

$$\hat{f} = \frac{1}{2\pi} T_s \frac{1}{4} \arg \left[ \sum_{n=0}^{N-1} (\rho_n \rho_{n-1})^4 e^{j4(\varphi_n - \varphi_{n-1})} \right].$$

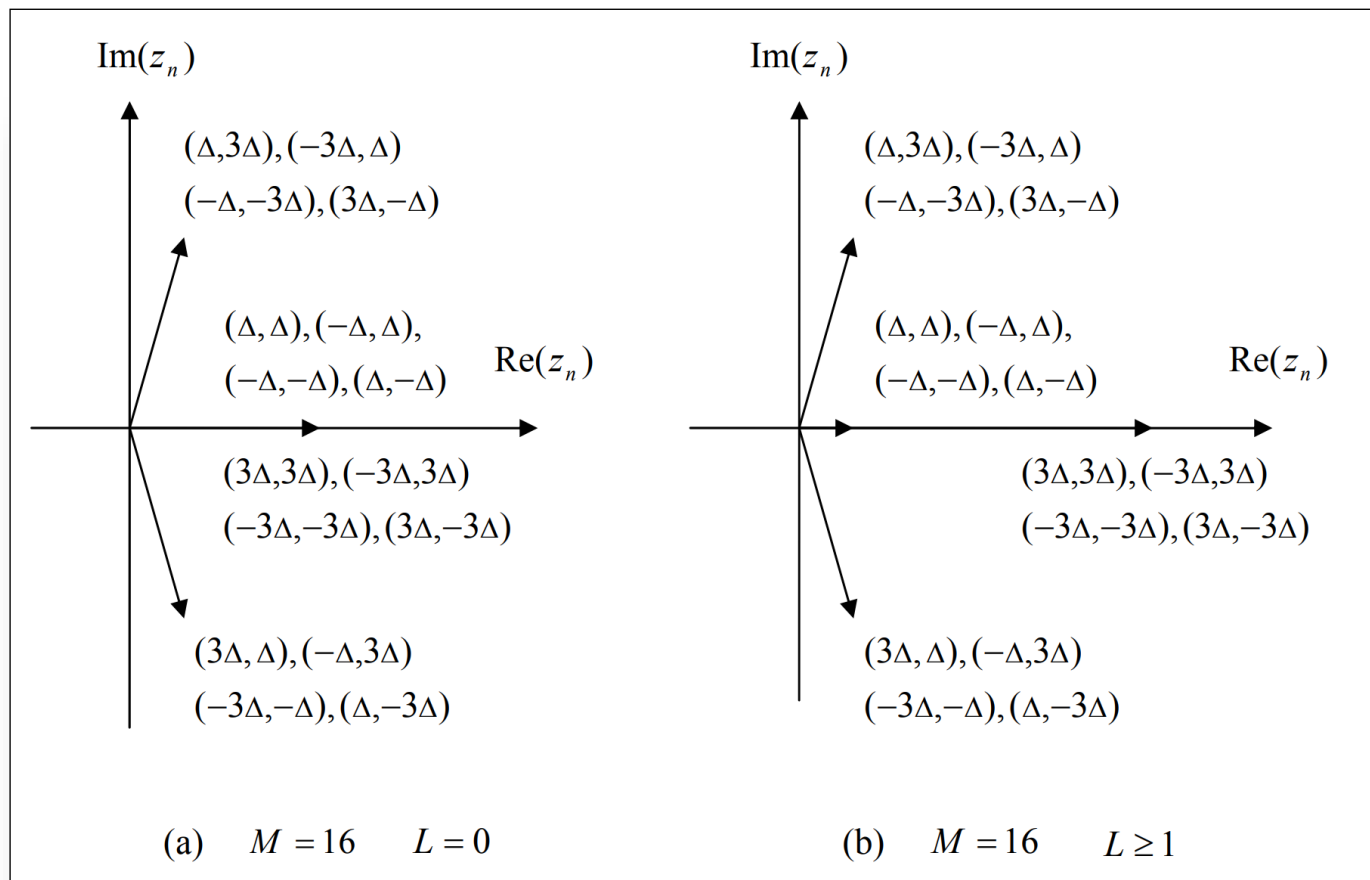
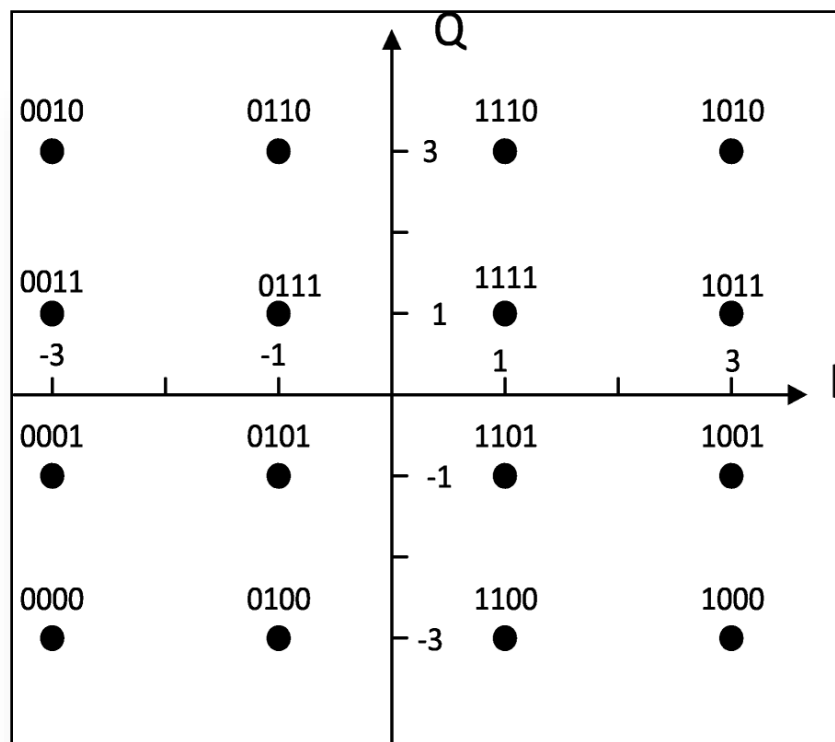
# Фазовый детекторы

*Non-Data Aided. Viterbi & Viterbi*



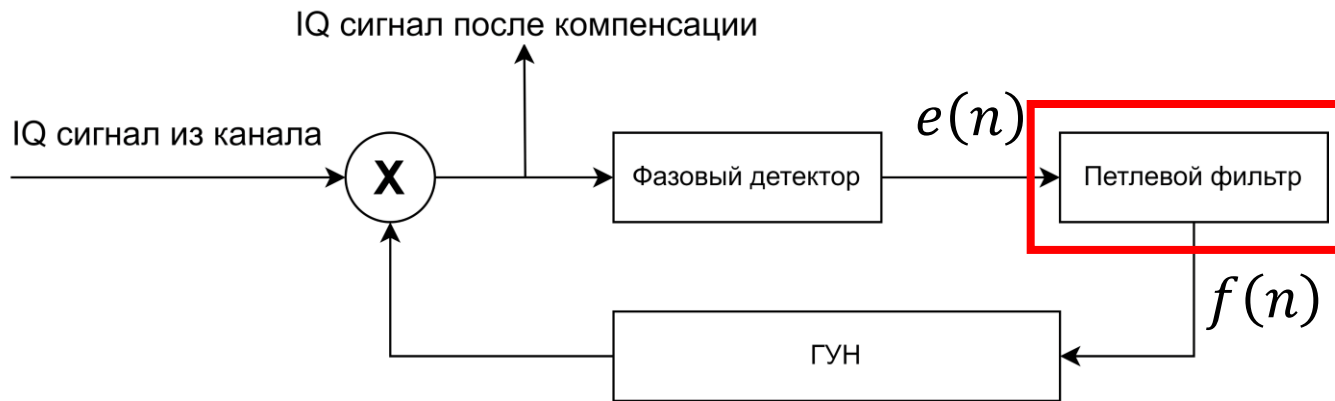
# Фазовый детекторы

*Non-Data Aided. Viterbi & Viterbi*



# Фазовой автоподстройки частоты

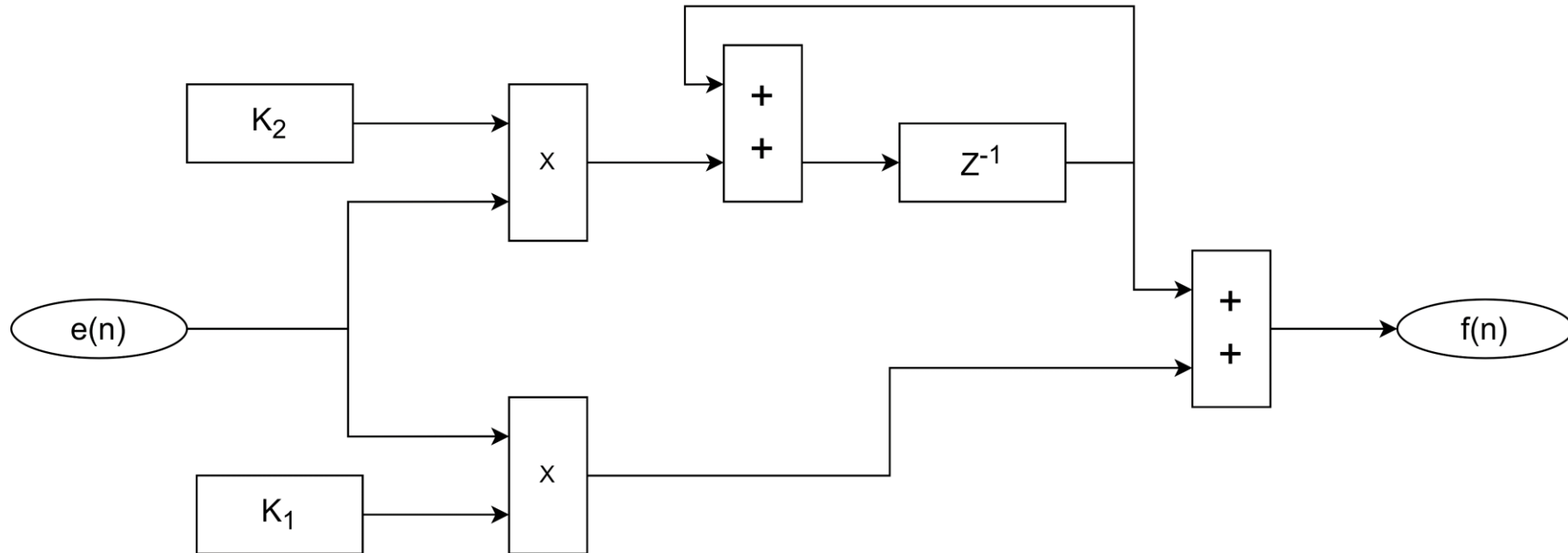
## Петлевой фильтр



- Петлевой фильтр производит сглаживание функции  $e(n)$ , с выхода фазового детектора, для того, чтобы выходная функция  $f(n)$  была меньше подвержена случайным отклонениям из-за шума

# Фазовой автоподстройки частоты

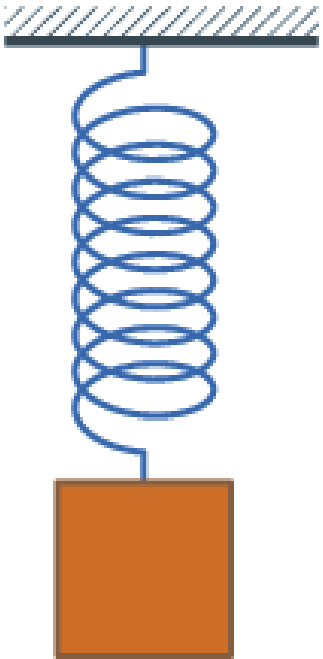
*Петлевой фильтр*



- Блок схема работы петлевого фильтра 2 порядка
- $K_1$  – коэффициент пропорционального звена
- $K_2$  – коэффициент интегрального звена



# Затухающие колебания пружинного маятника



Система, состоящая из пружины (подчиняющейся закону Гука), один конец которой жёстко закреплён, а на другом находится тело массой  $m$ . Колебания совершаются в среде, где сила сопротивления пропорциональна скорости с коэффициентом  $c$ .

2ой закон Ньютона  $m\vec{a} = \vec{F}_c + \vec{F}_y$ ,

$$F_c = -cv, F_y = -kx, \text{ то есть}$$

$$ma + cv + kx = 0,$$

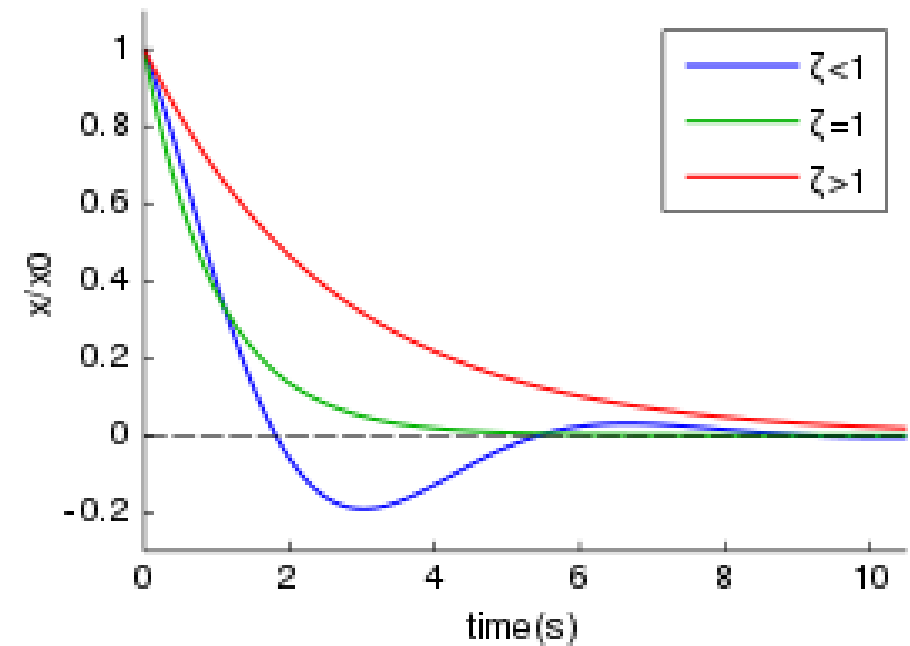
Дифференциальный вид  $\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ ,

Собственная частота, коэффициент затухания  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$

Замена  $x = e^{\lambda t}$

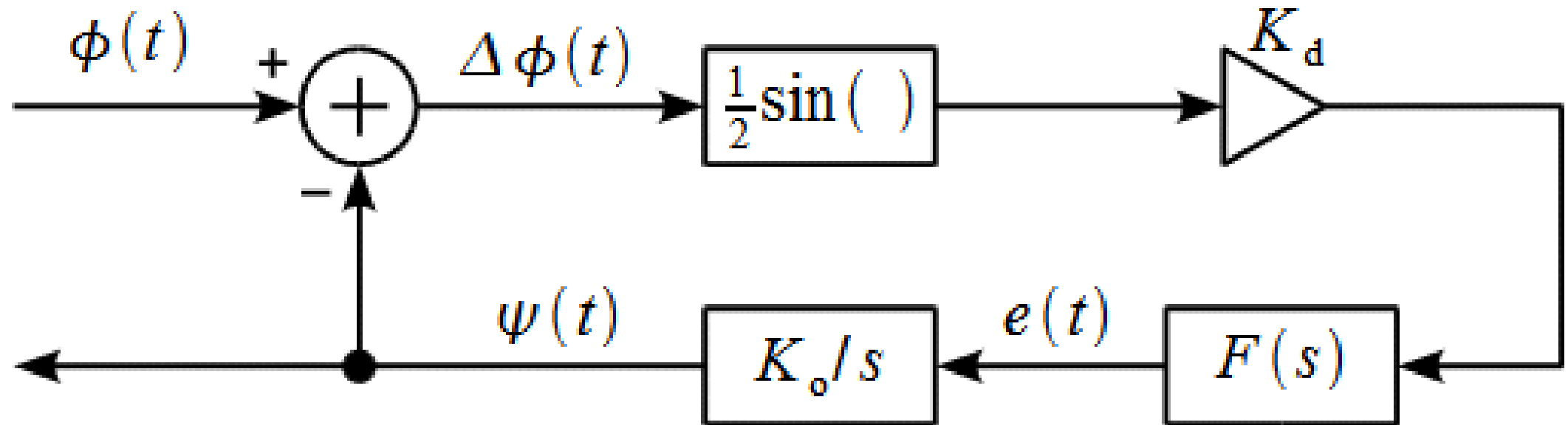
$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Корни уравнения  $\lambda_{\pm} = \omega_0(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})$



# Фазовой автоподстройки частоты

Модель контура ФАПЧ



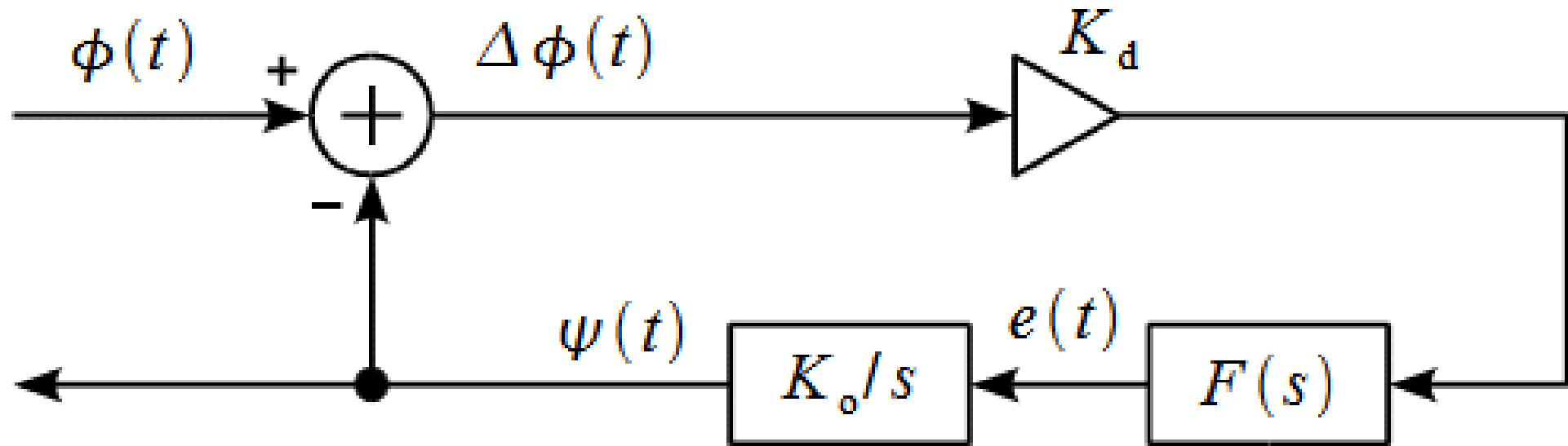
$$\psi(t) = K_o \cdot \int_0^t e(t) dt,$$

$$\Delta\phi(t) = \phi(t) - \psi(t) \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{2}\sin(\Delta\phi(t)) \approx \frac{1}{2}\Delta\phi(t)$$

# Фазовой автоподстройки частоты

Линеаризация модели контура ФАПЧ



$$\Psi(s) = (\Phi(s) - \Psi(s)) \cdot \frac{K_d \cdot K_o \cdot F(s)}{s}$$

$$\Psi(s) = \Phi(s) \cdot \frac{K_d \cdot K_o \cdot F(s)}{s} - \Psi(s) \cdot \frac{K_d \cdot K_o \cdot F(s)}{s},$$

Передаточная характеристика

$$H(s) = \frac{\Psi(s)}{\Phi(s)} = \frac{K_d \cdot K_o \cdot F(s) / s}{1 + K_d \cdot K_o \cdot F(s) / s} = \frac{K_d \cdot K_o \cdot F(s)}{s + K_d \cdot K_o \cdot F(s)}$$

# Фазовой автоподстройки частоты

Передаточная функция петлевого фильтра

$$H(s) = \frac{\Psi(s)}{\Phi(s)} = \frac{K_d \cdot K_o \cdot F(s)/s}{1 + K_d \cdot K_o \cdot F(s)/s} = \frac{K_d \cdot K_o \cdot F(s)}{s + K_d \cdot K_o \cdot F(s)}$$

Петлевой фильтр:

$$F(s) = K_p + \frac{K_i}{s}, \quad H(s) = \frac{K_d \cdot K_o \cdot K_p + \frac{K_d \cdot K_o \cdot K_i}{s}}{s + K_d \cdot K_o \cdot K_p + \frac{K_d \cdot K_o \cdot K_i}{s}} = \frac{K_d \cdot K_o \cdot K_p \cdot s + K_d \cdot K_o \cdot K_i}{s^2 + K_d \cdot K_o \cdot K_p \cdot s + K_d \cdot K_o \cdot K_i}.$$

Замена:

$$K_d \cdot K_o \cdot K_i = \omega_p^2, \quad K_d \cdot K_p \cdot K_o = 2 \cdot \zeta \cdot \omega_p, \quad H(s) = \frac{2 \cdot \zeta \cdot \omega_p \cdot s + \omega_p^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_p \cdot s + \omega_p^2}.$$

$\omega_p$  - резонансная частота,

$\zeta$  - коэффициент затухания (damping factor)

# Фазовой автоподстройки частоты

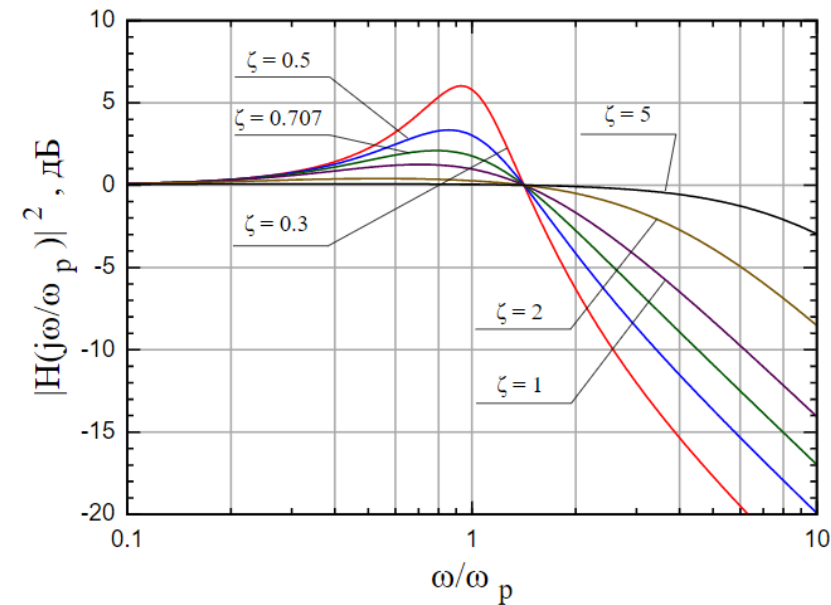
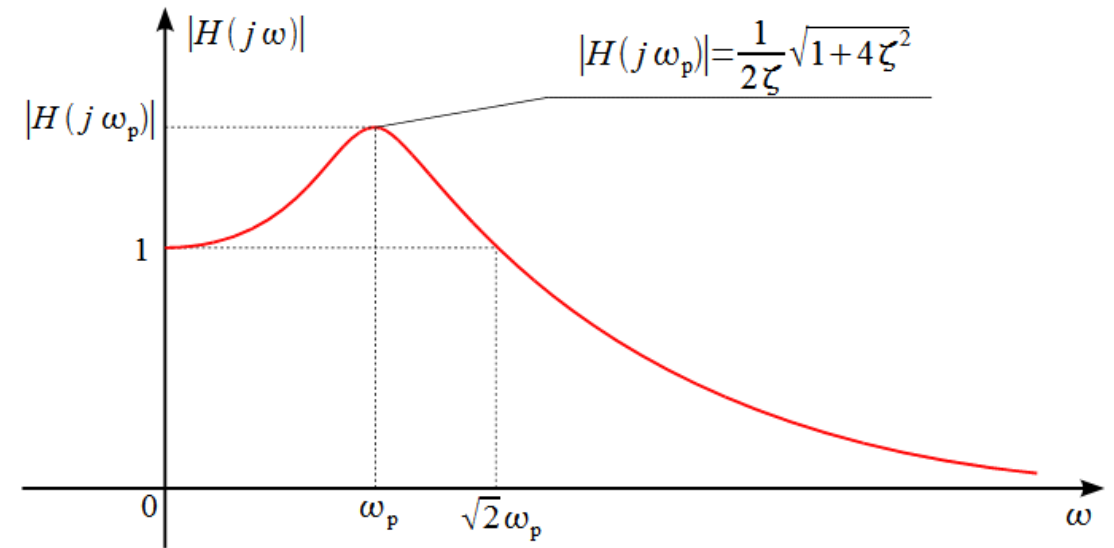
АЧХ петлевого фильтра

Комплексный коэффициент передачи:

$$H(j\omega) = \frac{\omega_p^2 + j \cdot 2 \cdot \zeta \cdot \omega_p \cdot \omega}{\omega_p^2 - \omega^2 + j \cdot 2 \cdot \zeta \cdot \omega_p \cdot \omega}$$

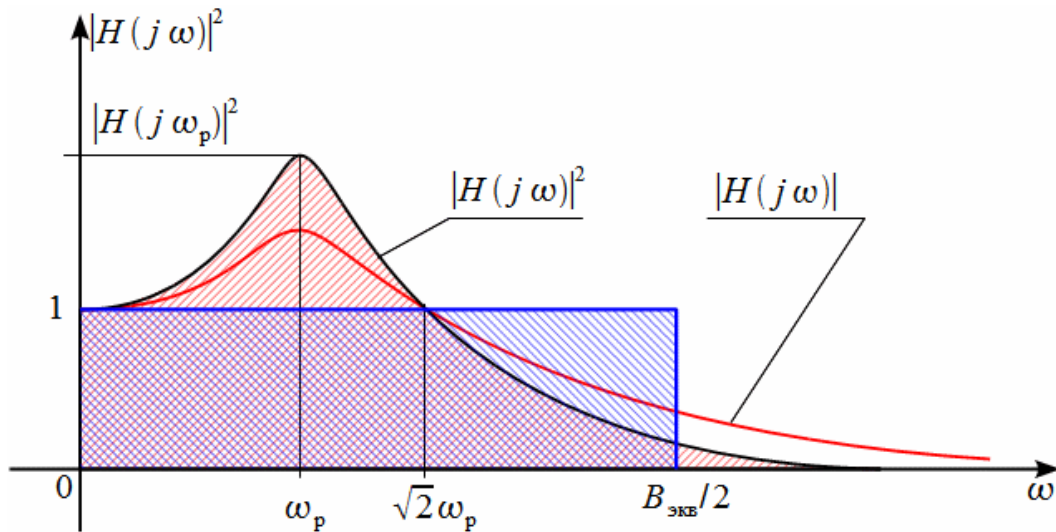
АЧХ:

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{\omega_p^4 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \omega_p^2 \cdot \omega^2}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \omega_p^2 \cdot \omega^2}}$$



# Фазовой автоподстройки частоты

*Петлевой фильтр*



Т.к. полоса захвата фильтра одновременно зависит и от фактора затухания и от натуральной частоты удобнее будет ввести понятие:

Эквивалент шумовой полосы

$$B_n = 2 \pi \omega_n \left( \xi + \frac{1}{4\xi} \right)$$

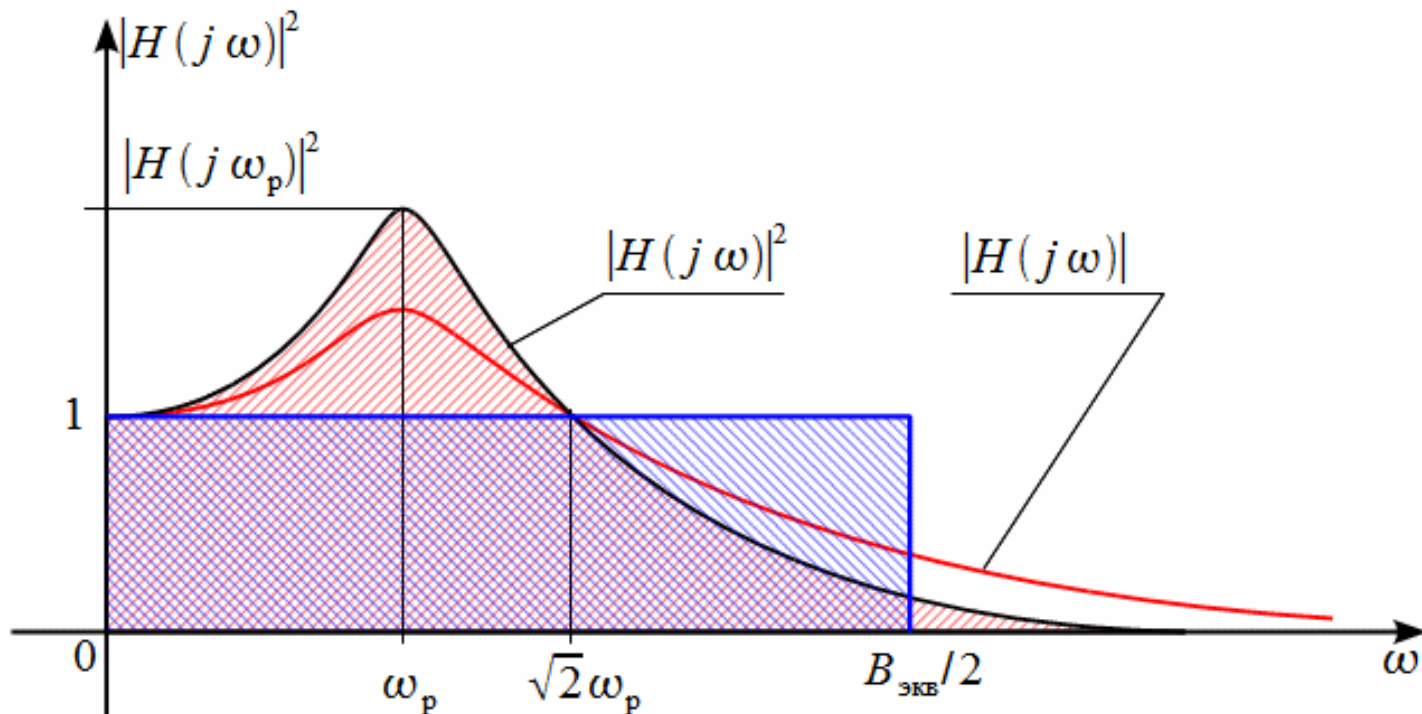
Требование на выбор полосы:

$$B_n \ll F_S$$

$F_S$  - частота дискретизации входящего сигнала

# Фазовой автоподстройки частоты

АЧХ петлевого фильтра



$$B_{\text{ЭКВ}} = \frac{2}{|H(j0)|^2} \cdot \int_0^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega.$$

$$B_{\text{ЭКВ}} = 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{\omega_p^4 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \omega_p^2 \cdot \omega^2}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \omega_p^2 \cdot \omega^2} d\omega.$$

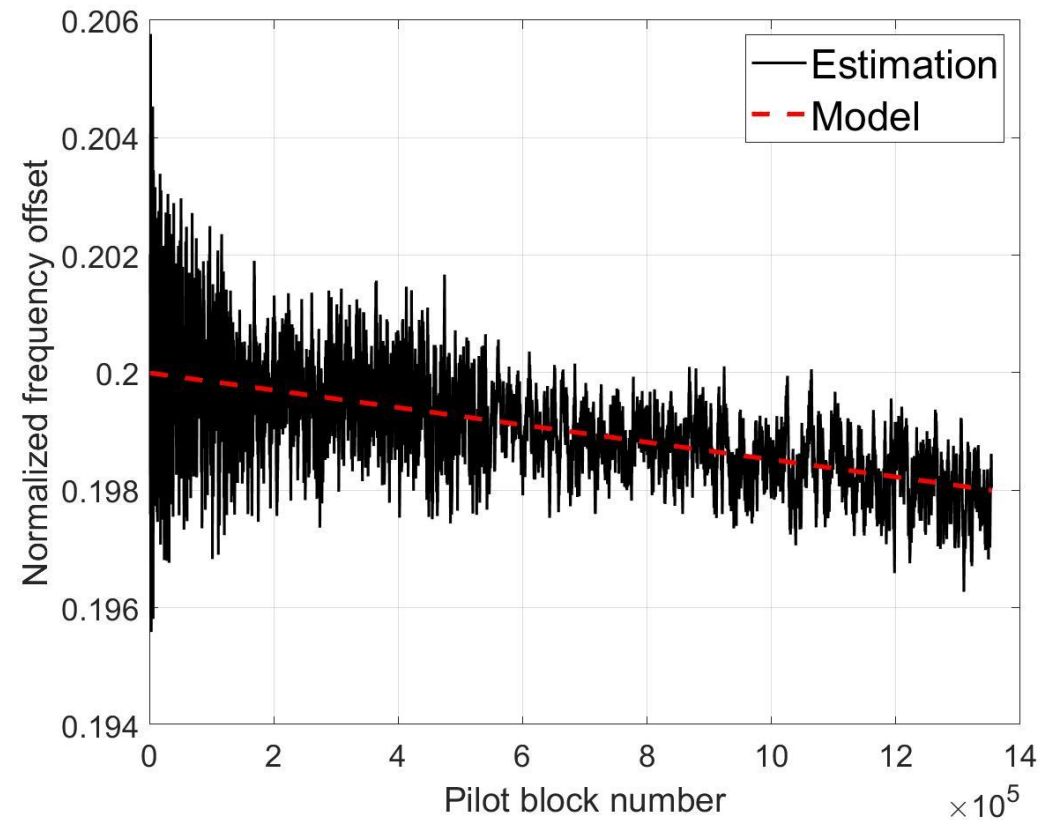
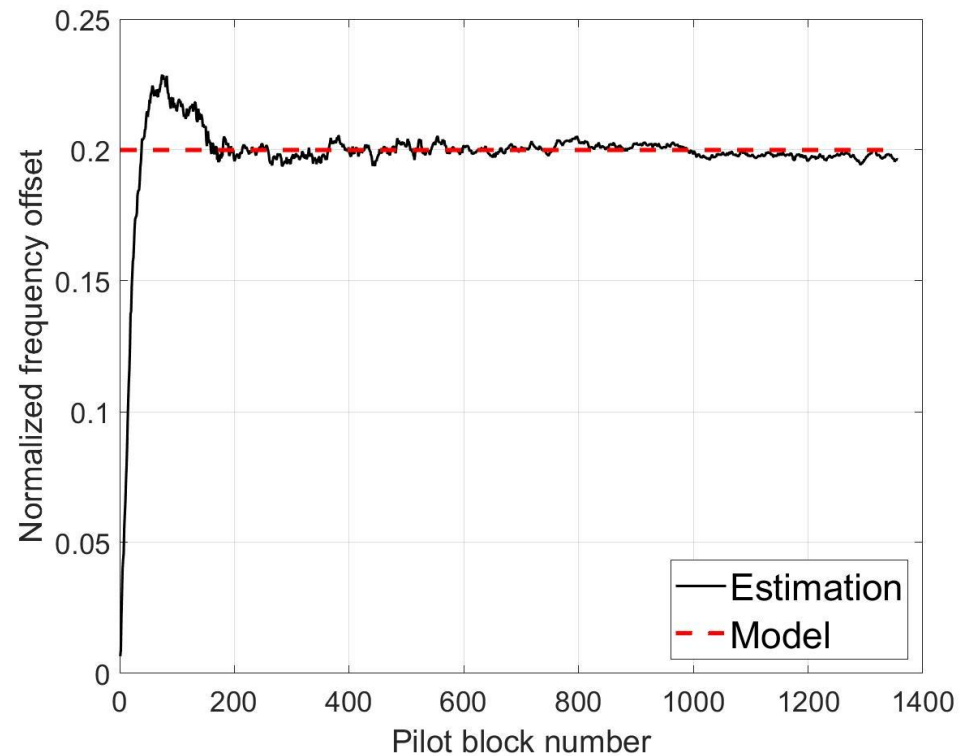
$$B_{\text{ЭКВ}} = 2 \cdot \pi \cdot \omega_p \cdot \left( \zeta + \frac{1}{4 \cdot \zeta} \right). \text{ [рад/с]}$$

Нормализованная полоса:

$$B_n T_s = \frac{B_{\text{ЭКВ}} T_s}{2\pi}$$

# Фазовой автоподстройки частоты

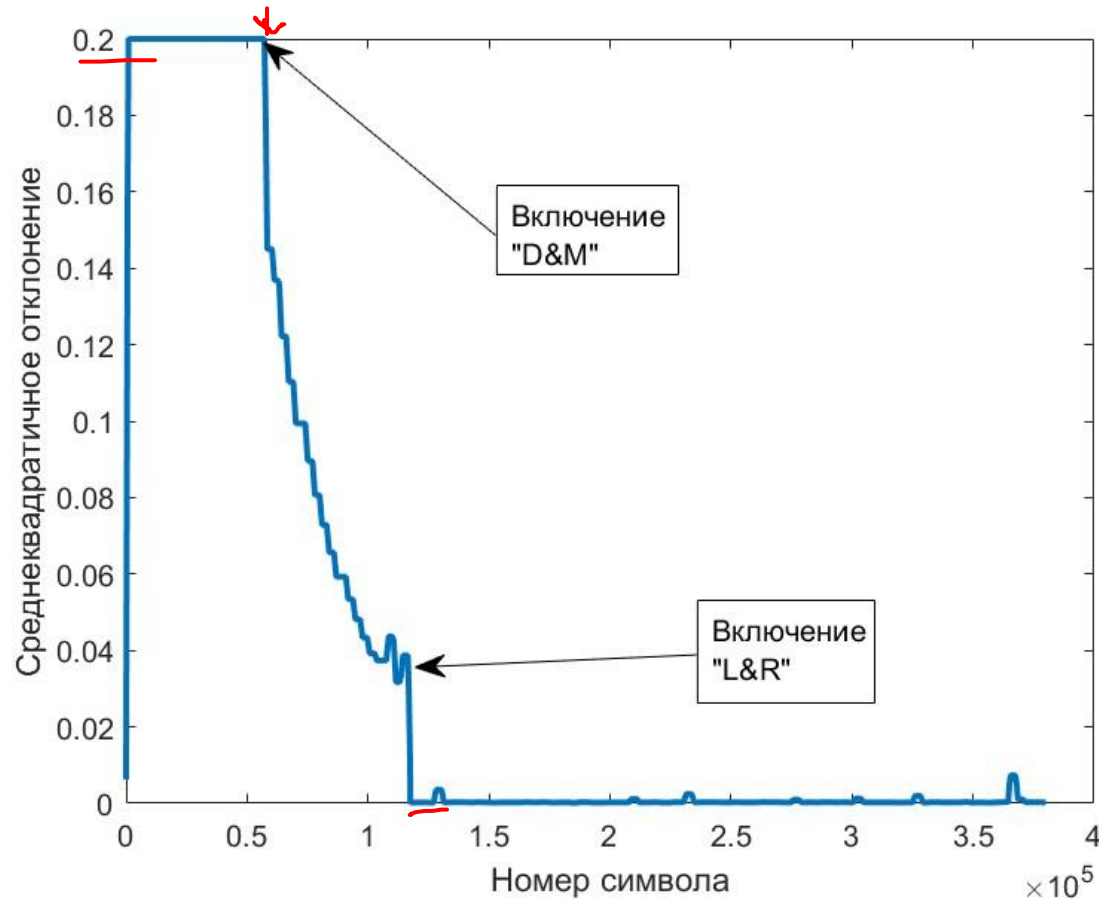
*Поведение частотной синхронизации при изменяющемся частотном сдвиге*





# Фазовой автоподстройки частоты

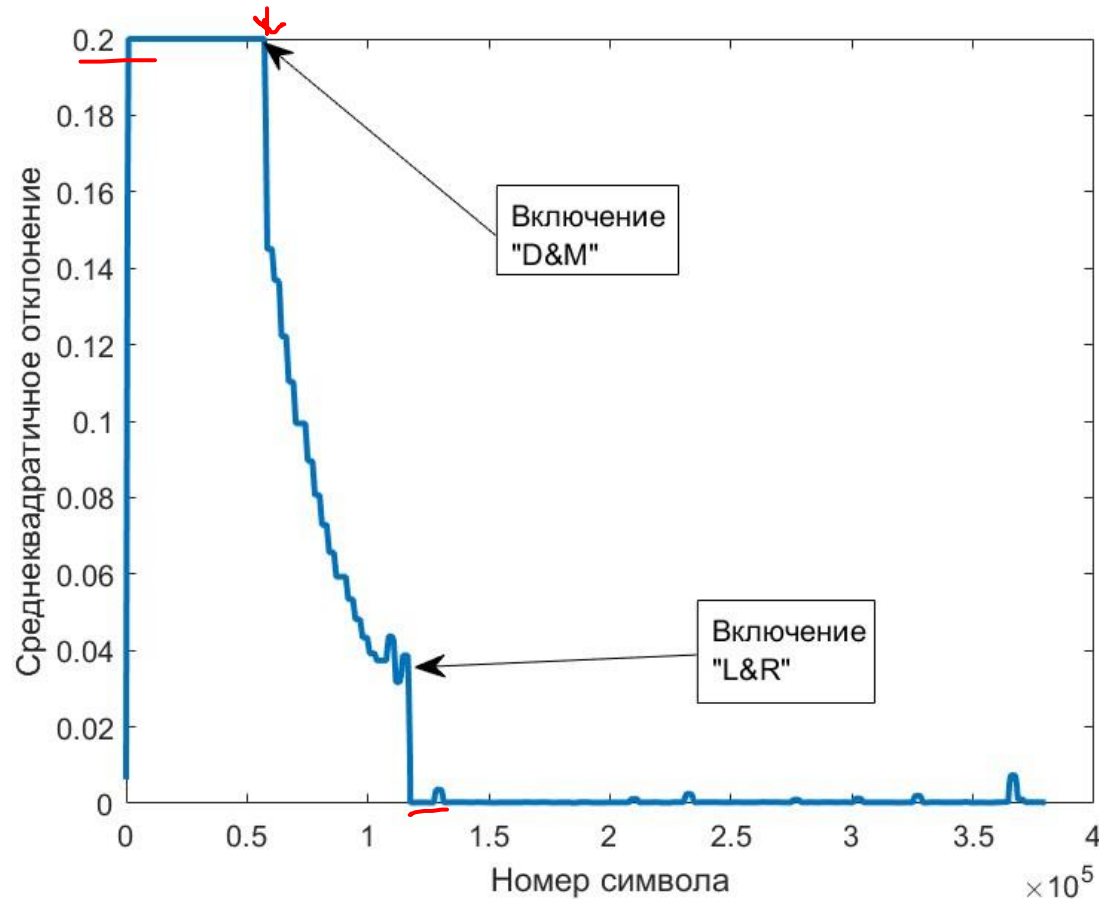
*Примеры проектировки системы синхронизации*



- При использовании на приёме алгоритмов частотно синхронизации только на основе ДА алгоритмов, приводит увеличению времени синхронизации (замедление синхронизации), так как в таком случае требуется осуществить все предыдущие этапы синхронизации (кадровая, символьная)
- Кроме того, нельзя добиться одновременно и «высокой точности синхронизации по частоте» и «высокая скорость синхронизации», и «широкая полоса захвата», и «низкая вычислительная сложность».

# Фазовой автоподстройки частоты

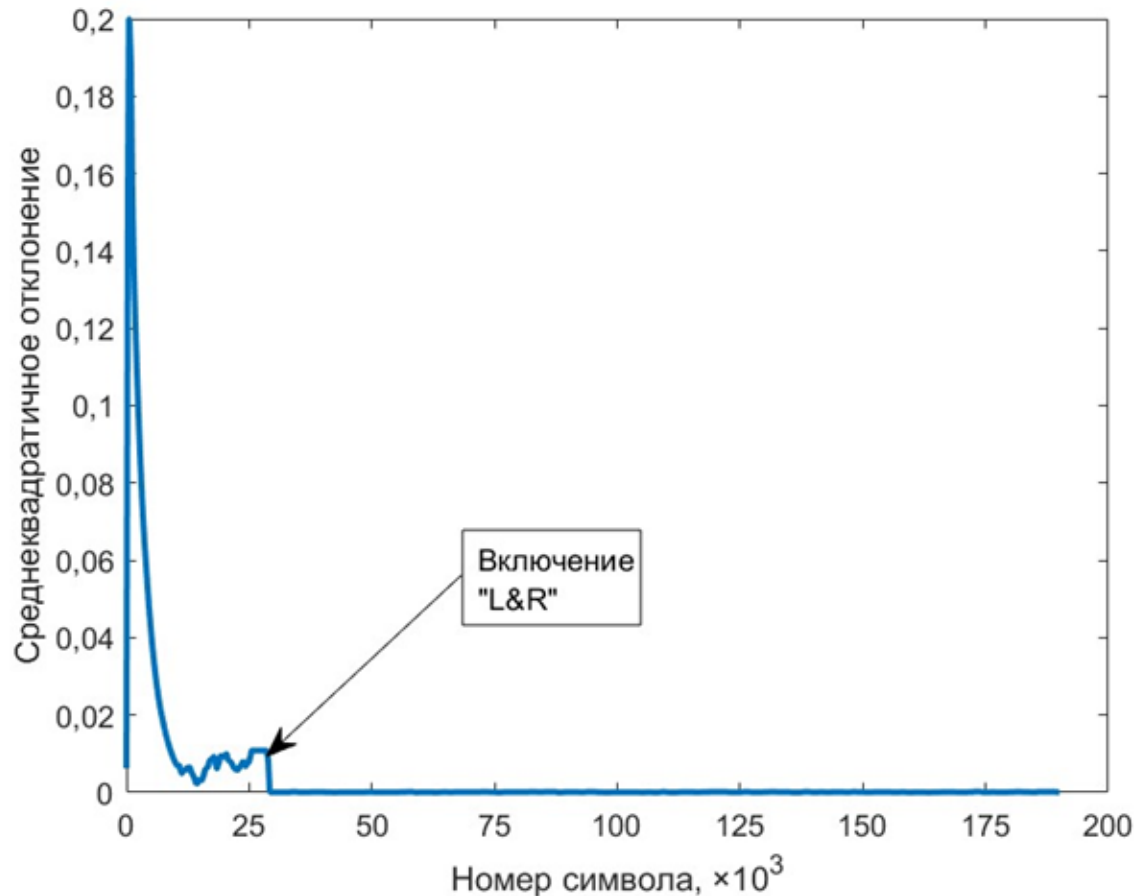
*Примеры проектировки системы синхронизации*



- Приходится выбирать что-то одно из двух. Поэтому в системах связи зачастую встраивается и грубая частотная синхронизация (компенсация высокого частотного сдвига, но низкая по качеству), и тонкая (для сильного снижения ошибки, но оставшейся ошибки, но не возможность работать с широким диапазоном частотных сдвигов)
- Среднеквадратичное отклонение частотного сдвига на основе алгоритмов синхронизации «D&M» как грубая частотная синхронизация и «L&R» как тонкая при  $E_s/N_0 = 33$  дБ

# Фазовой автоподстройки частоты

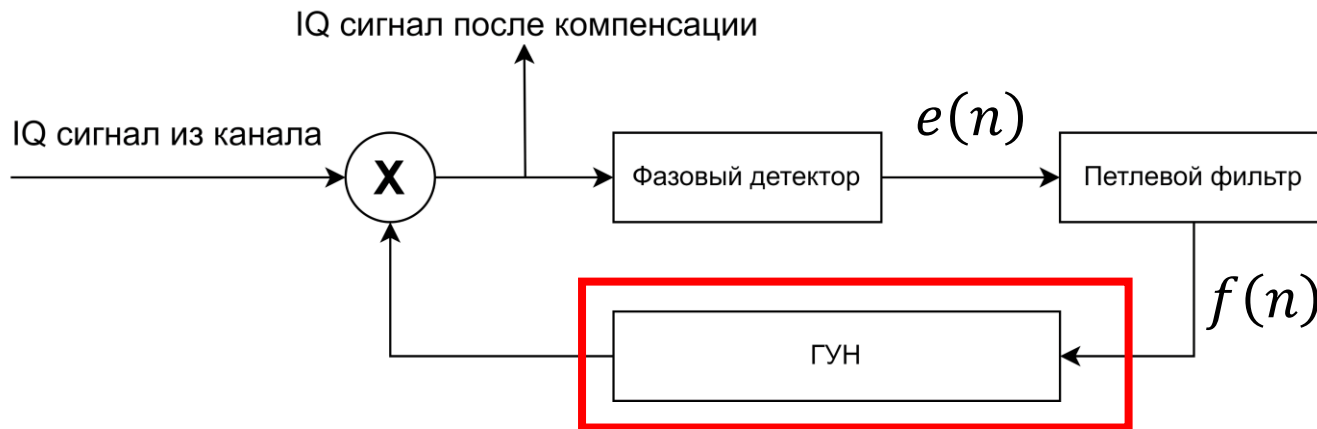
*Примеры проектировки системы синхронизации*



- Ещё одним из возможных способов улучшения синхронизации является комбинация DA и NDA методов. Например, для грубой частотной синхронизации можно применять NDA алгоритмы, тем самым значительно сократить время синхронизации, не дожидаясь кадровой и символьной синхронизации, а для обеспечения более высокой точности при шумах в системе использовать DA алгоритмы как тонкая синхронизация
- Среднеквадратичное отклонение частотного сдвига на основе алгоритмов синхронизации «EdgeBand» как грубая частотная синхронизация и «L&R» как тонкая при  $E_s/N_0 = 33$  дБ

# Фазовой автоподстройки частоты

*Numerically controlled oscillator*

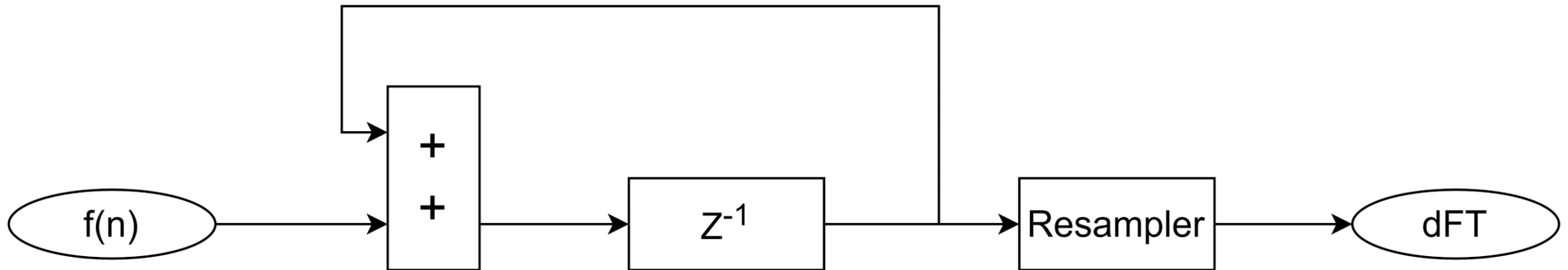


- Генератор управления напряжением (ГУН) или в нашем случае (цифровом) блок управления осциллятора (NCO).
- Так как нам необходимо получить функцию в формате  $e^{2\pi j\omega t}$ , то блок NCO производит суммирование ошибок частоты после петлевого фильтра :

$$dFT = \sum_{i=1}^n f(i)$$

# Фазовой автоподстройки частоты

*Numerically controlled oscillator*



- Блок схема работы NCO
- Resampler – блок передискретизации фазовой ошибки