Цифровые системы передачи информации на основе сигнала с одной несущей частотой (Одночастотные системы связи)

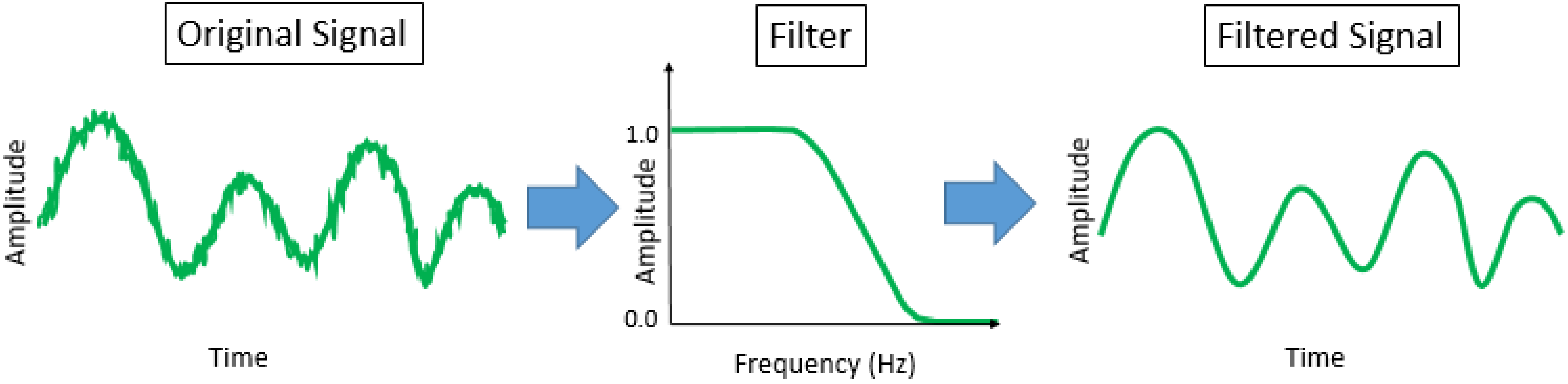
Фильтрация

План лекции

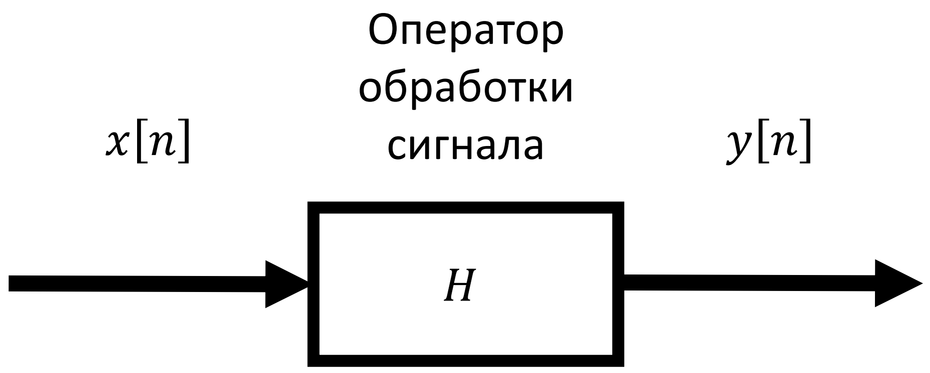
- Идея фильтрации
- Свёртка
- КИХ
- БИХ
- Приподнятый косинус
- Домашнее задание

Идея фильтрации.

Удаление внеполосового шума



Фильтрация



$$y[n] = H\{x[n]\}$$

- H – линейный оператор обработки сигнала, если

$$H\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aH\{x_1[n]\} + bH\{x_2[n]\}\ , a, b \epsilon \mathbb{C}$$

- Оператор H является инвариантным, если при пропускании сигнала с задержкой, то сигнал на выходе задержан на величину начальной задержки

$$y[n] = H\{x[n]\} \Leftrightarrow H\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0]$$

- Фильтры дискретных сигналов являются частным случаем линейных инвариантных систем

Импульсный отклик системы

- Линейная инвариантная система однозначно характеризуется своим откликом на дискретную дельта-последовательность. Тогда импульсная характеристика:

$$h(n) = H\{\delta[n]\}$$

- Так как
- $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$
- Тогда результат обработки сигнала можно описать как:
- $\text{y}[n] = H\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$

Импульсный отклик системы

- Линейная инвариантная система однозначно характеризуется своим откликом на дискретную дельта-последовательность. Тогда импульсная характеристика:

$$h(n) = H\{\delta[n]\}$$

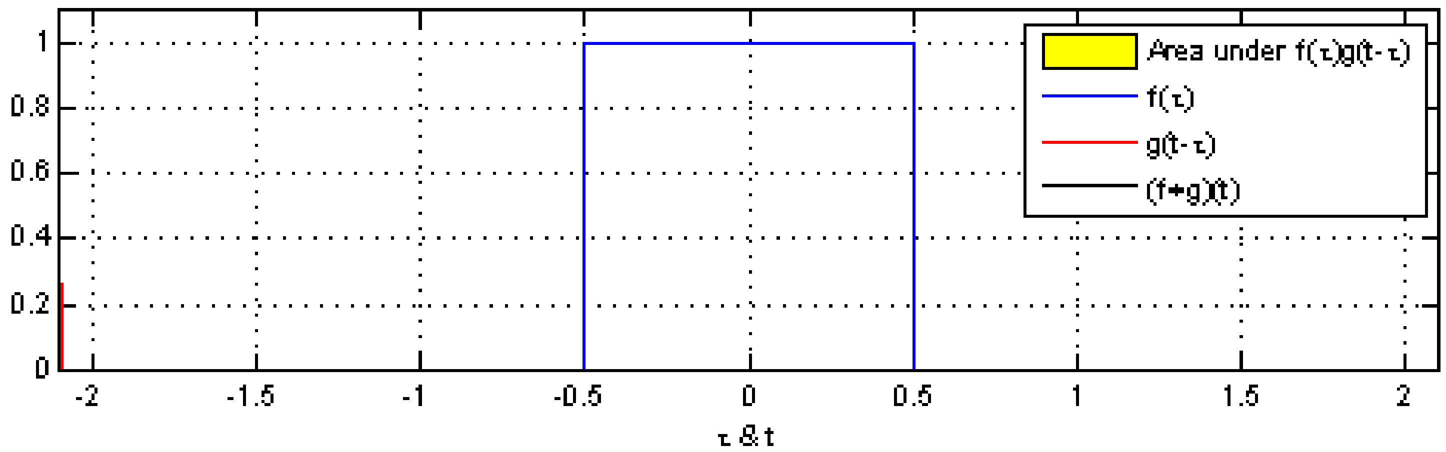
- Так как

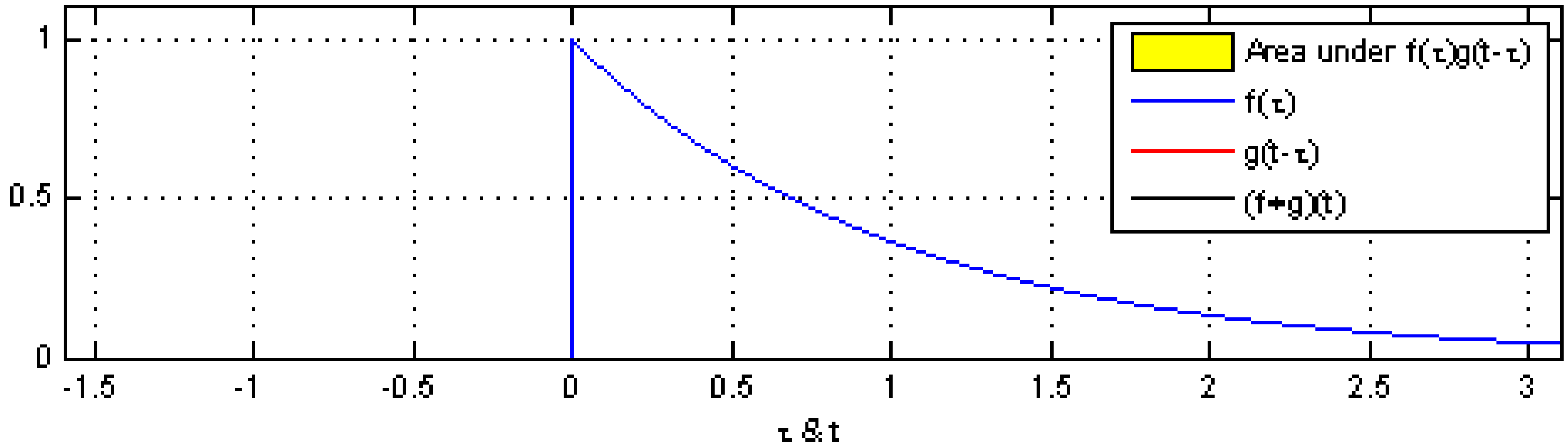
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- Тогда результат обработки сигнала можно описать как:

$$\mathrm{y}[n] = H\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Свертка (Convolution)





Свёртка

- Свёртка последовательности сигнала с импульсной характеристикой

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

- Линейность

$$*$$

- Инвариантность

$$*$$

- Коммутативность

$$*$$

- Ассоциативность

$$*$$

Свойства свёртки

- Свёртка последовательности сигнала с импульсной характеристикой

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

- Линейность

$$x[n] * (\alpha\, y[n] + \beta\, w[n]) = a\, x[n] * y[n] + \beta\, x[n] * w[n]$$

- Инвариантность

$$w[n] = x[n] * y[n] \Leftrightarrow x[n] * y[n-k] = w[n-k]$$

- Коммутативность

$$x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$$

- Ассоциативность

$$(x[n] * h[n]) * w[n] = x[n] * (h[n] * w[n])$$

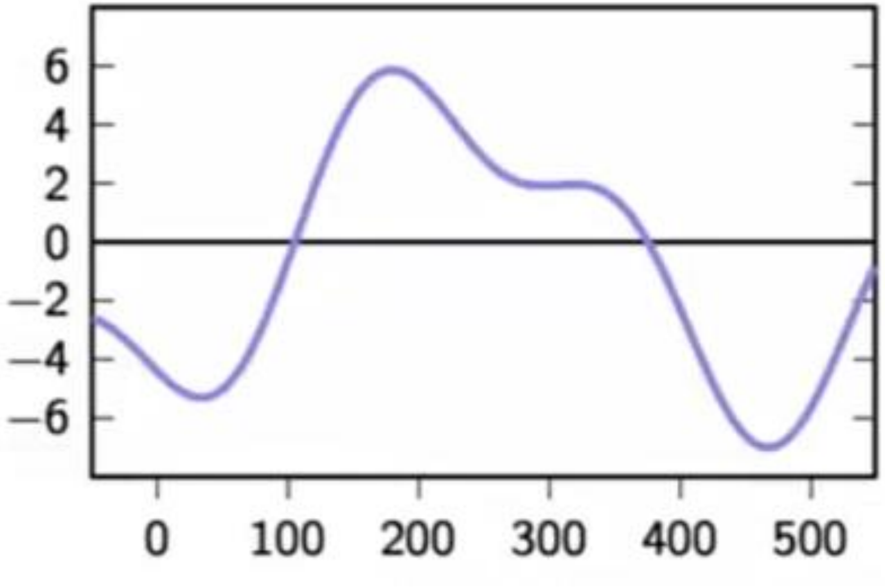
Свойства импульсного отклика

- Импульсный отклик имеет бесконечную размерность

  - IIR – infinite impulse response– фильтра с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ). $h[n]$ имеет бесконечное число ненулевых элементов
  - FIR – finite impulse response filters– фильтра с конечной импульсной характеристикой (КИХ). $h[n]$ имеет конечное количество ненулевых элементов
    - Всегда цифровые, устойчивые и нерекурсивные.

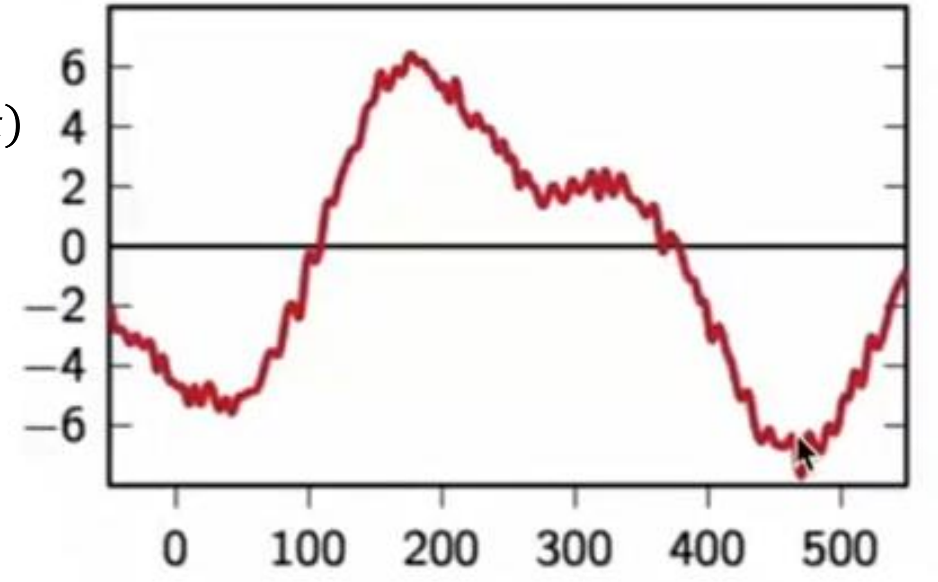
- Если при $n < 0$ $h[n] = 0$, фильтр называется казуальным (не зависит от предыстории)

FIR-фильтра. Скользящее среднее



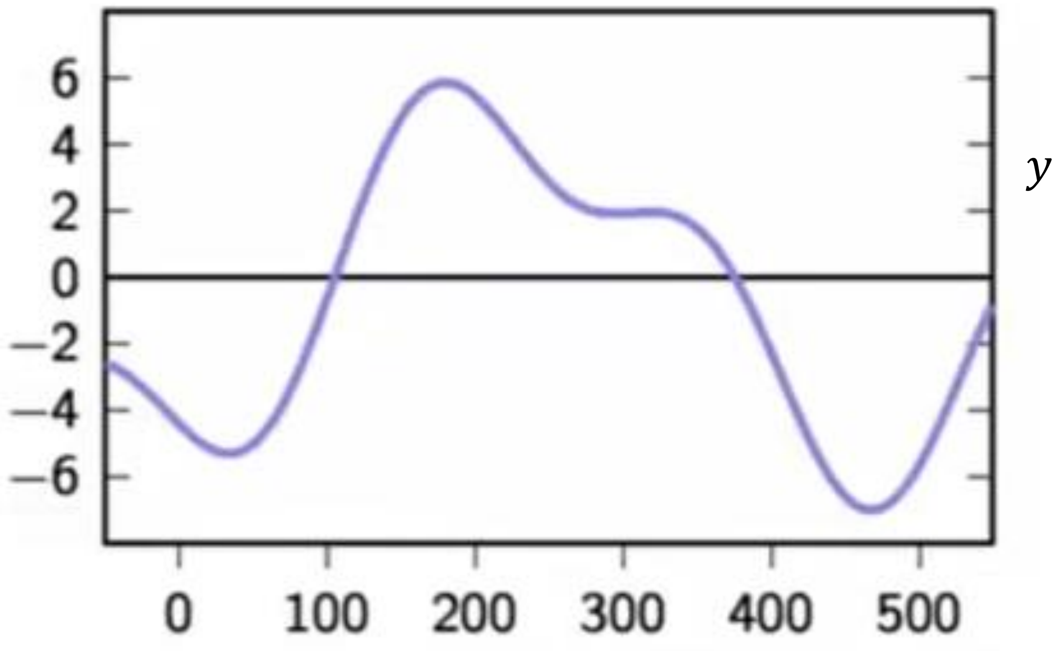
$x(t)$. Полезный сигнал

$$y(t) = x(t) + n(t)$$



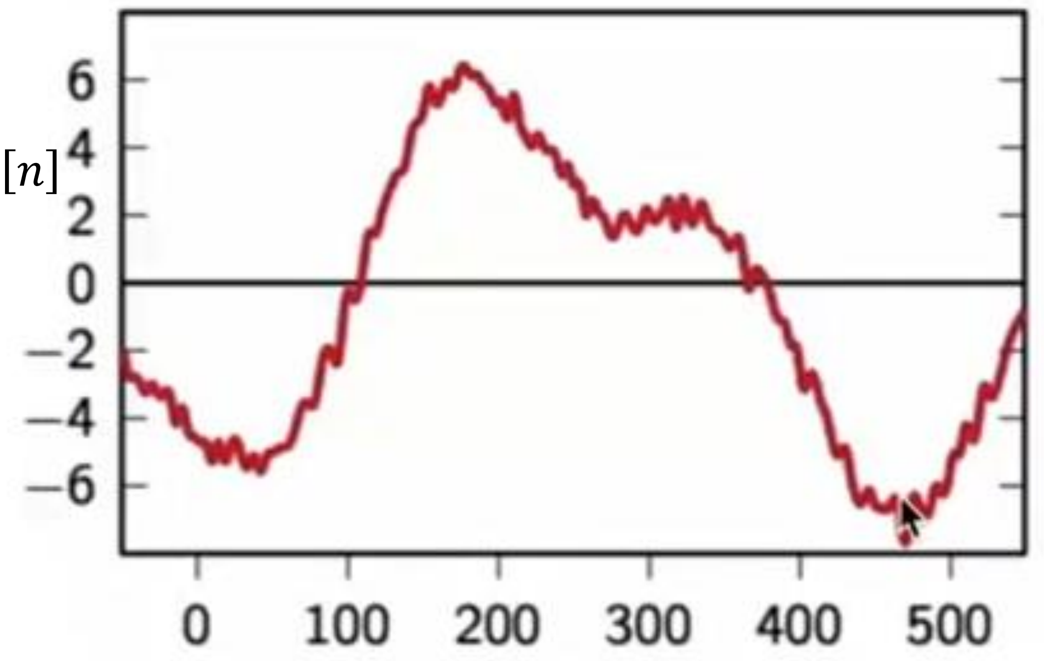
$y(t)$ Зашумлённый сигнал

FIR-фильтра. Скользящее среднее



$x(t)$. Полезный сигнал

$$y[n] = x[n] + noise[n]$$



$y(t)$ Зашумлённый сигнал

Заменим 1 значение каждого отсчёта (Сэмпла) локальным средним:

$$y[n] = \frac{x[n] + x[n-1]}{2}$$

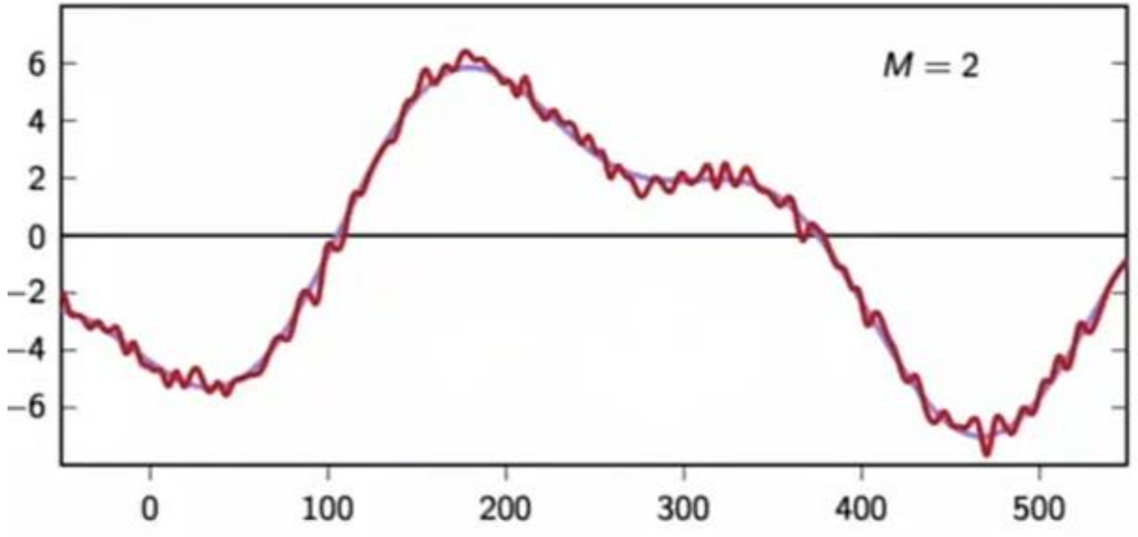
FIR-фильтра. Скользяшее среднее

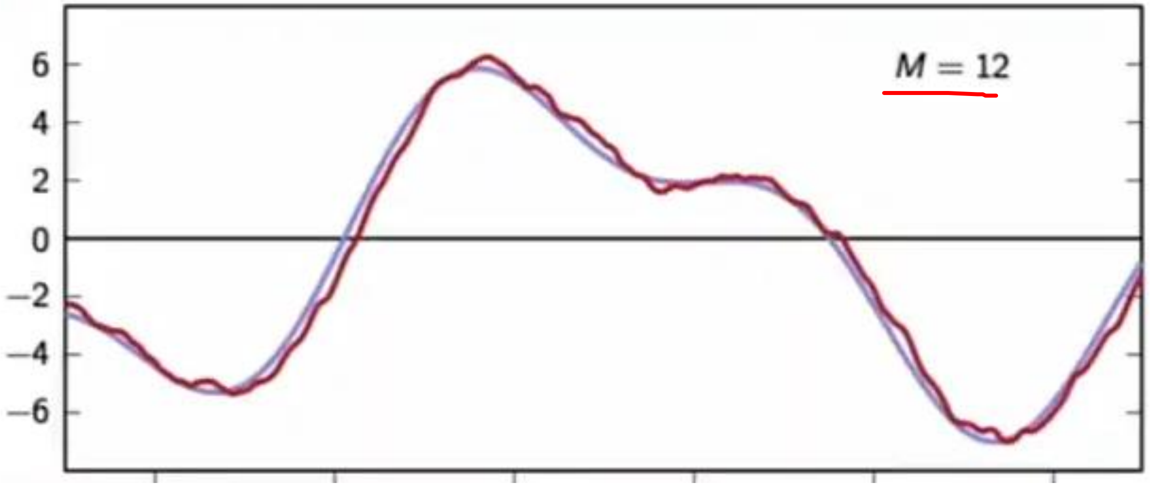
Заменим 1 значение каждого отсчёта (Сэмпла) локальным средним:

$$y[n] = \frac{x[n] + x[n-1]}{2} \qquad \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$$

Равносильная запись:

$$\boxed{y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]}$$

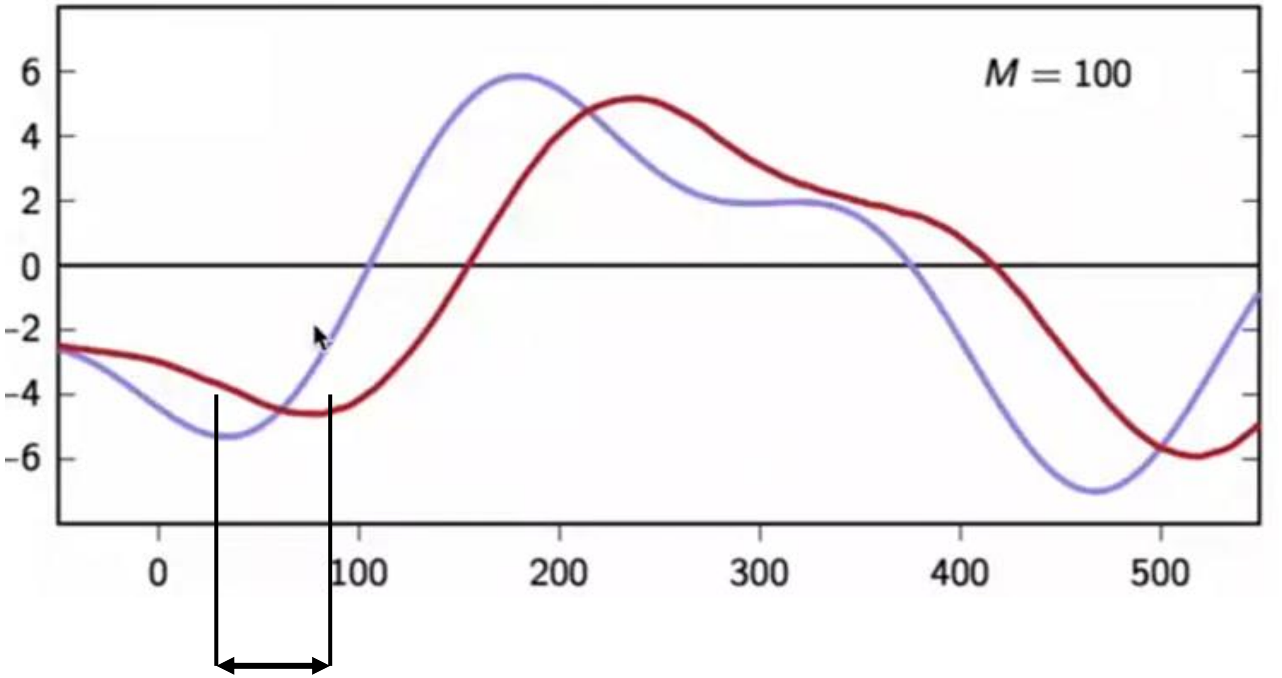




FIR-фильтра. Скользящее среднее

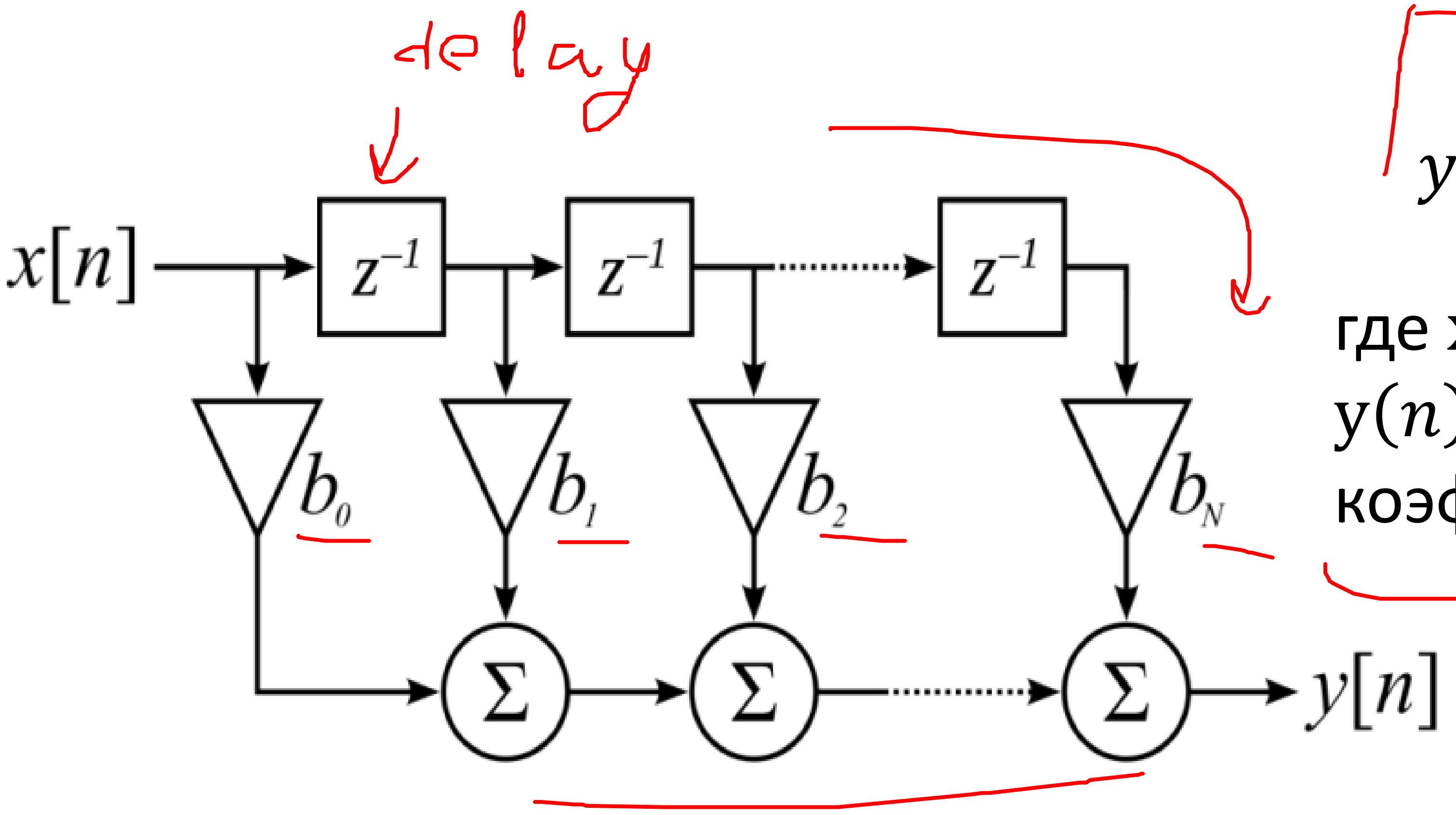
:

$$h[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\delta[n-k] \; = \begin{cases} \frac{1}{M}, 0 \le n \le M \\ 0, n < 0 \;\; n \ge M \end{cases}$$



Задержка выходного сигнала

Фильтр с конечной импульсной характеристикой



$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} b(k)x(n-k)$$

где $\mathrm{x}(n)$ - входной сигнал, $\mathrm{y}(n)$ - выходной сигнал, $b(k)$ - коэффициенты фильтра.

IIR-фильтры

Сглаживание тем лучше, чем выше M
Но чем выше M, тем больше требуется памяти для подсчёта выходного сигнала

Скользящее среднее для предыдущего отсчёт

$$y_M[n-1] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} x[n-(k+1)] = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} x[n-k]$$

Фильтр скользящего среднего длины M-1

$$y_{M-1}[n] = \frac{1}{M-1}\sum_{k=0}^{M-2} x[n-k]$$

Фильтр скользящего среднего длины M-1 для предыдущего отсчёте

$$y_{M-1}[n-1] = \frac{1}{M-1}\sum_{k=1}^{M-1} x[n-k]$$

IIR-фильтры

Тогда можно вывести формулу для IIR фильтра:

$$\sum_{k=0}^{M} x[n-k] = \sum_{k=1}^{M} x[n-k] + x[n]$$

$$y_M[n] = \frac{M-1}{M} y_{M-1}[n-1] + \frac{1}{M} x[n] = \lambda y_{M-1}[n-1] + (1-\lambda)x[n]$$

$$\lambda = \frac{M-1}{M}$$

$$M \to \infty \Rightarrow y_{M-1} \approx y_M$$

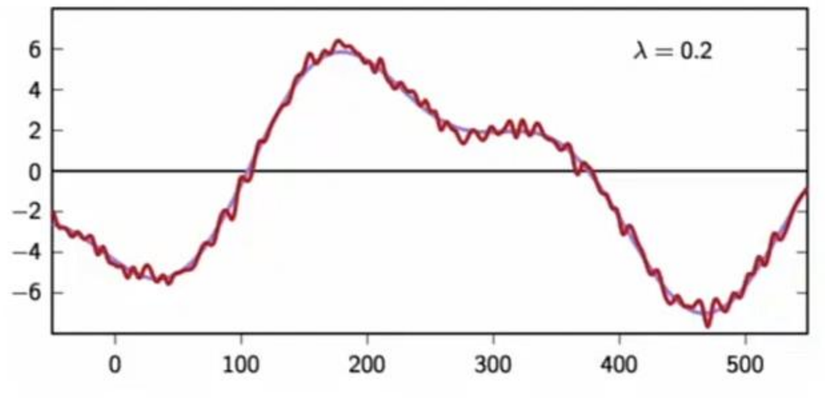
Тогда фильтра можно представить в рекурсивной форме:

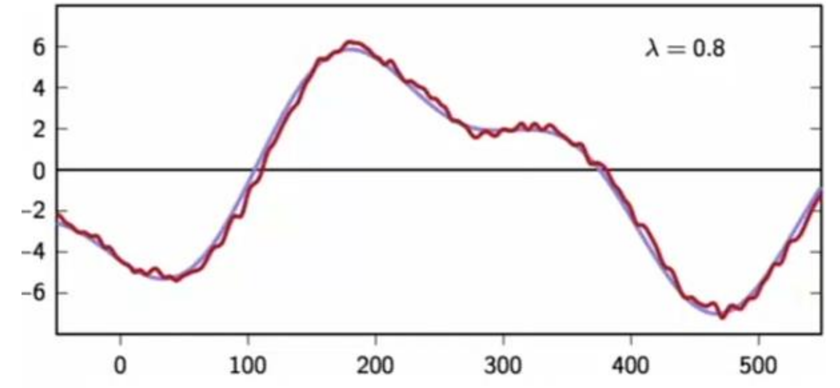
$$\mathrm{y}[n] = \lambda y[n-1] + (1-\lambda)x[n]$$

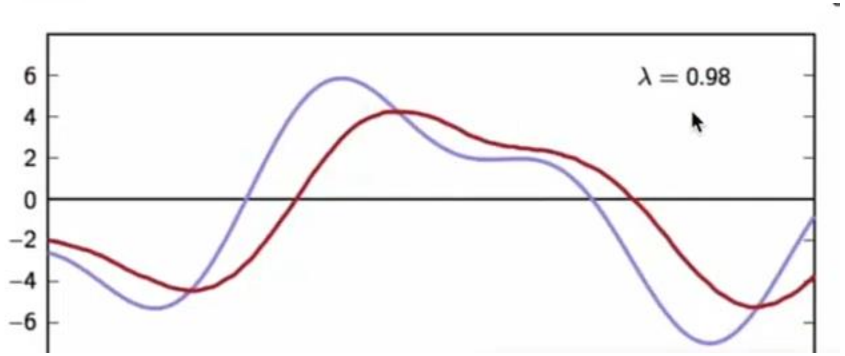
IIR-фильтры

$$\mathrm{y}[n] = \lambda y[n-1] + (1-\lambda)x[n]$$

Для расчёта требуется 3 операции







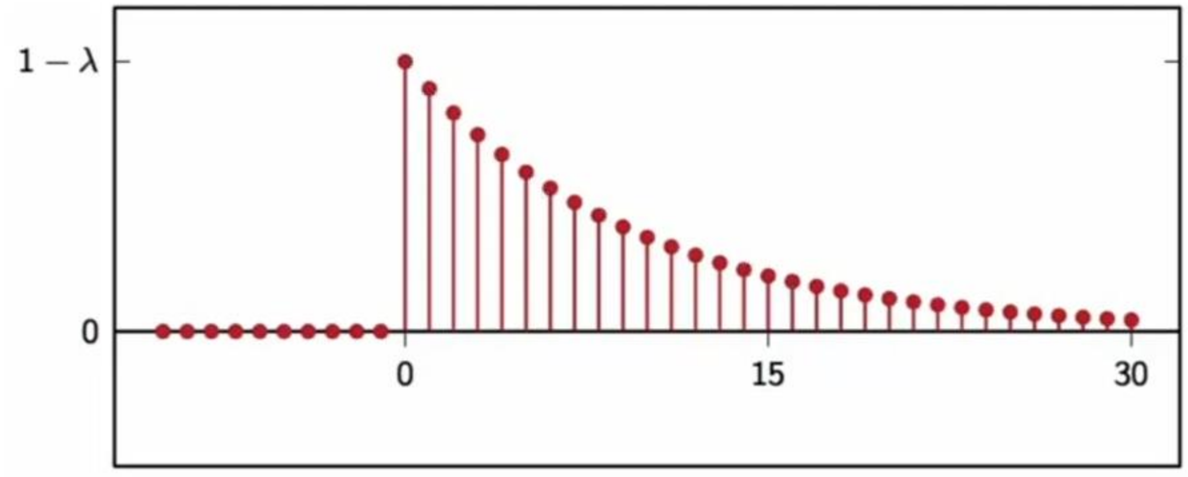
IIR-фильтры

Оценка импульсной характеристики фильтра $(x[n] = \delta[n])$:

Сам фильтр действует по следующей формуле

$$y[n] = \lambda y[n-1] + (1-\lambda)\delta[n]$$

$$y[n] = 0 \text{ при } n < 0$$
$$y[0] = \lambda y[-1] + (1-\lambda)\delta[0] = (1-\lambda)$$
$$y[1] = \lambda y[0] + (1-\lambda)\delta[1] = \lambda(1-\lambda)$$
$$y[2] = \lambda y[1] + (1-\lambda)\delta[2] = \lambda^2(1-\lambda)$$
$$y[3] = \lambda y[2] + (1-\lambda)\delta[3] = \lambda^3(1-\lambda)$$



Тогда формула для импульсной характеристики можно описать:

$$h[n] = (1-\lambda)\lambda^n u[n]$$

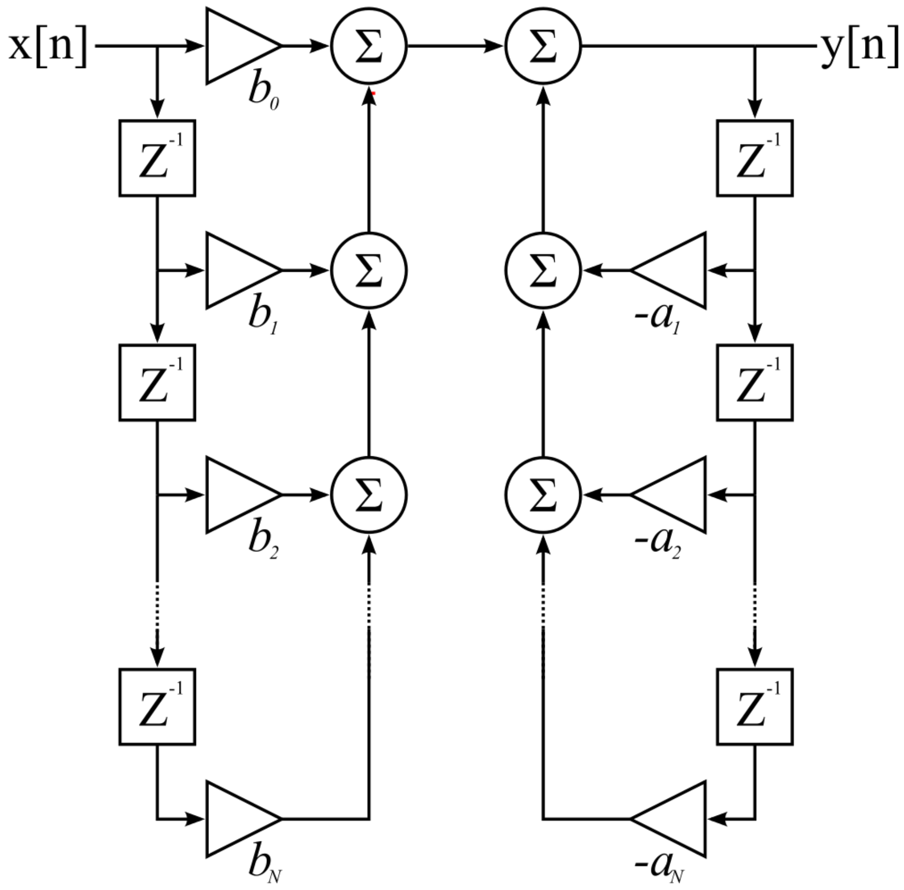
Где:

$$u[n] = 0 \text{ при } n<0$$
$$u[n] = 1 \text{ при } n>=0$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \lim_{n\to\infty} |1-\lambda| \frac{1-|\lambda|^{n+1}}{1-|\lambda|}$$

Фильтра устойчив при $\lambda < 1$

Фильтр с бесконечной импульсной характеристикой



$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} b(k)x(n-k) + \sum_{j=0}^{P} a(j)y(n-j)$$

где x(n) - входной сигнал, y(n) - выходной сигнал, $b(k)$, $a(j)$ - коэффициенты фильтра.

Частотная характеристика фильтра

Пусть входной сигнал – экспоненциальная последовательность частой ω_0.
Тогда линейный инвариантный отклик системы будет:

$$\aleph\left\{e^{j\omega_0 n}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 k} h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{j\omega_0 (n-k)} =$$

$$= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j\omega_0 k} = H\left(e^{j\omega_0}\right) e^{j\omega_0 n}$$

Частотная характеристика фильтра

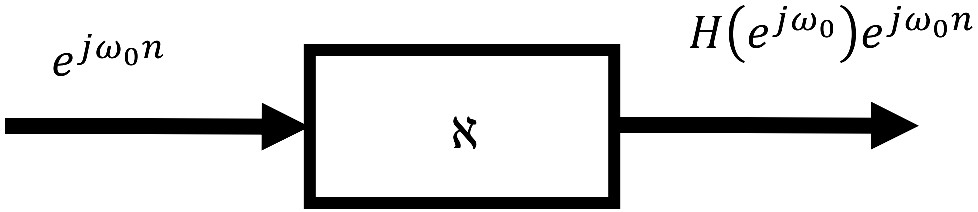
Пусть входной сигнал – экспоненциальная последовательность частой ω_0.
Тогда линейный инвариантный отклик системы будет:

$$\aleph\{e^{j\omega_0 n}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 k} h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{j\omega_0 (n-k)} =$$

$$= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j\omega_0 k} = \boxed{H\left(e^{j\omega_0}\right)} e^{j\omega_0 n}$$

Частотный отклик фильтра на частоте ω_0
DTFT – преобразование сигнала $h[n]$ при частоте $\omega = \omega_0$

Частотная характеристика фильтра



Пусть

$$H\left(e^{j\omega_0}\right) = A_0 e^{j\vartheta_0}$$

Тогда

$$\aleph\left\{e^{j\omega_0 n}\right\} = A_0 e^{j(\omega_0 n + \vartheta_0)}$$

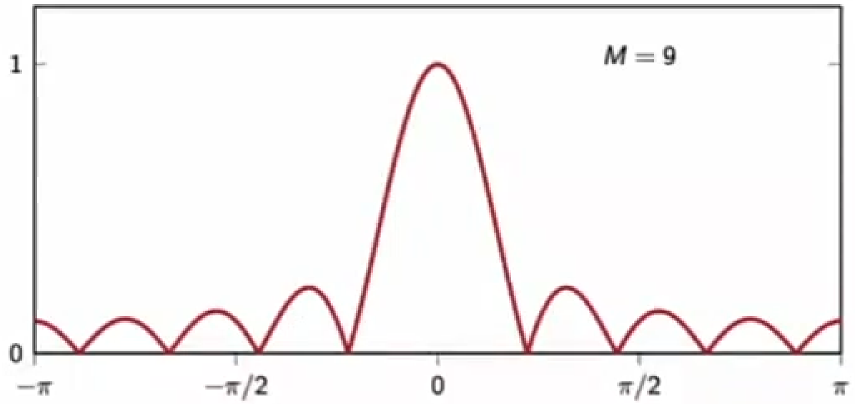
Амплитуда:
Усиление при (A>1)
Ослабление сигнала (A<1)

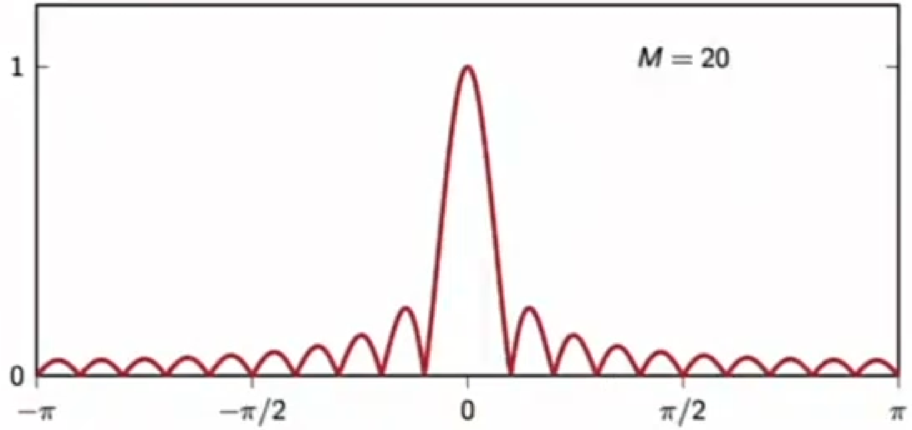
Сдвиг фазы
$-\pi \leq \vartheta_0 \leq \pi$

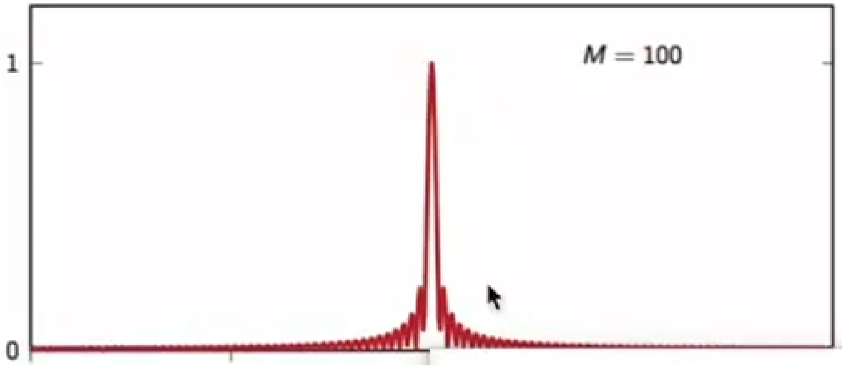
Такая система не меняет частоту, но сдвигает фазу и изменяет амплитуду

Частотная отклик скользящего среднего

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{M}\left|\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}M\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|$$

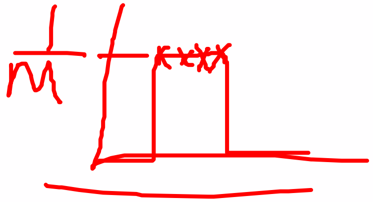


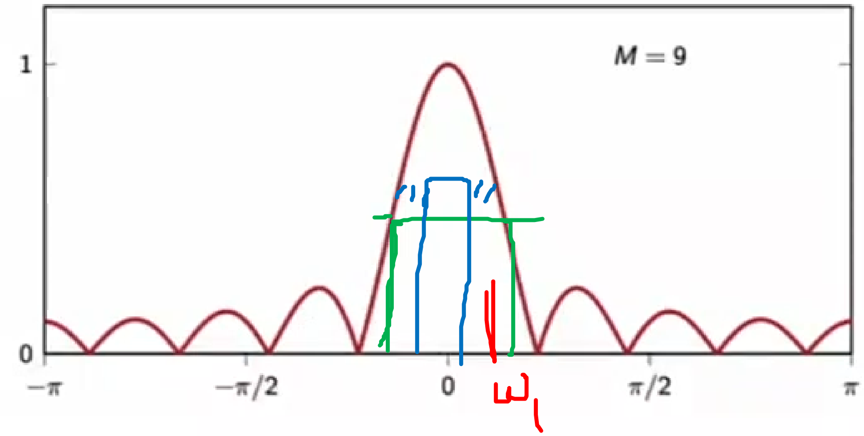


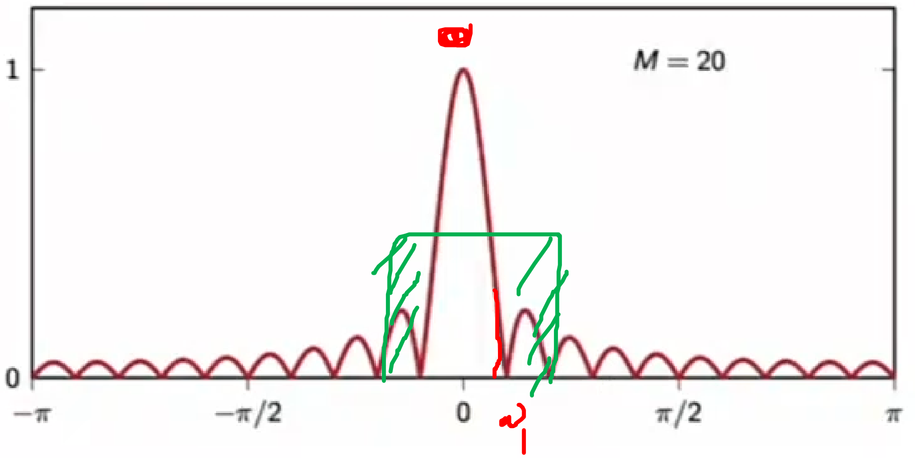


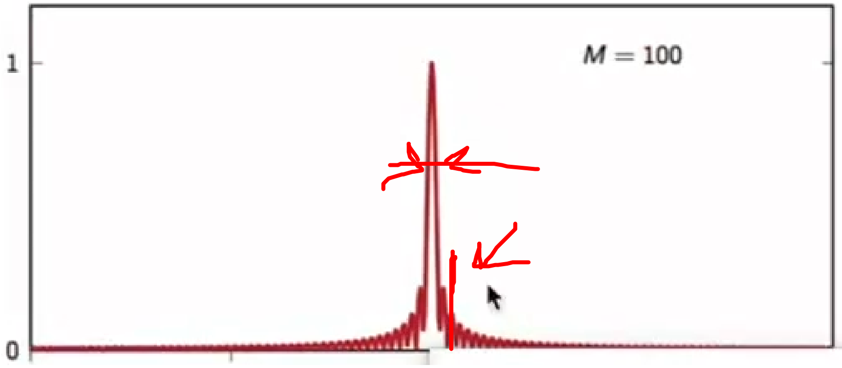
Частотная отклик скользящего среднего

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{M}\left|\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}M\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|$$





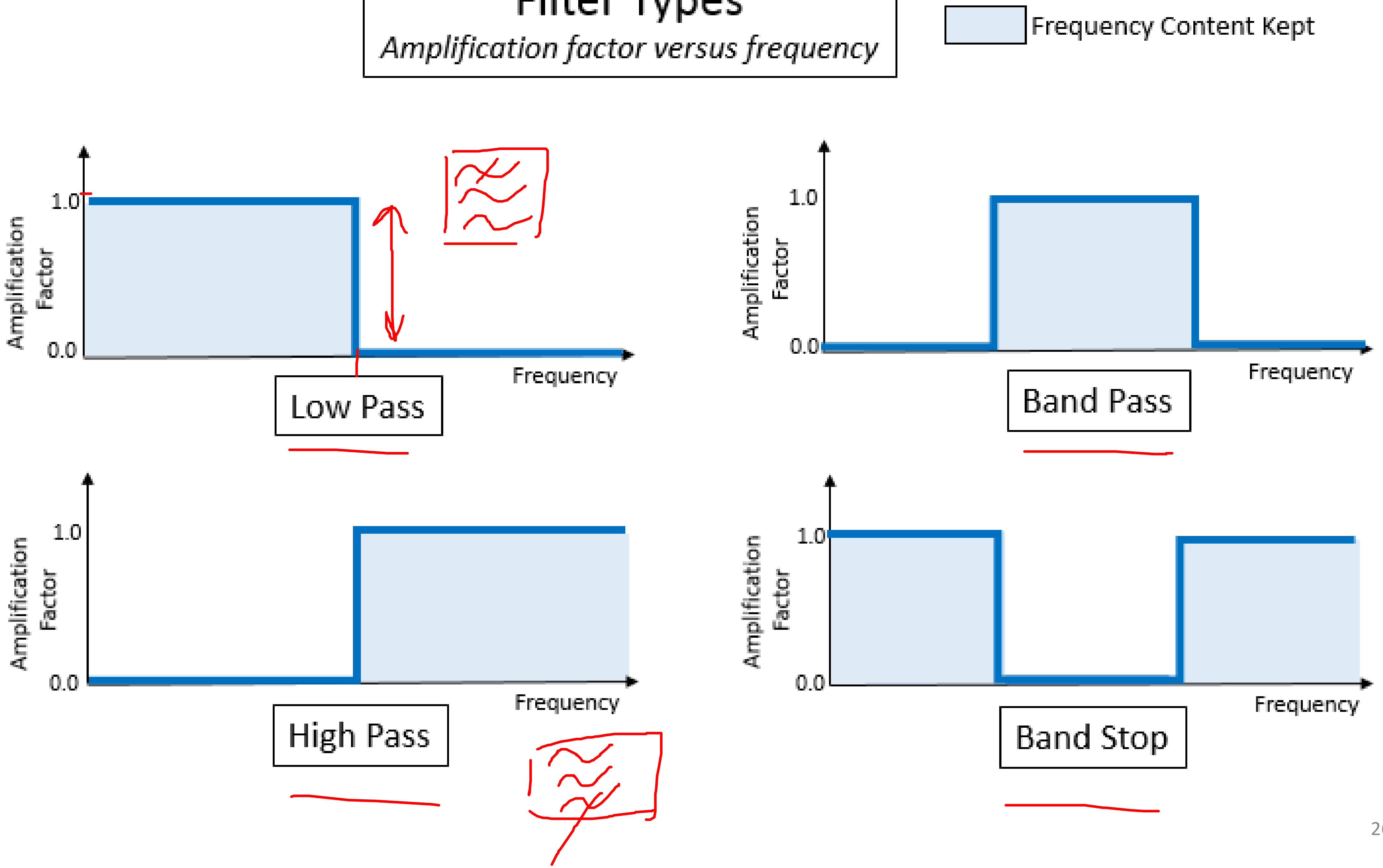




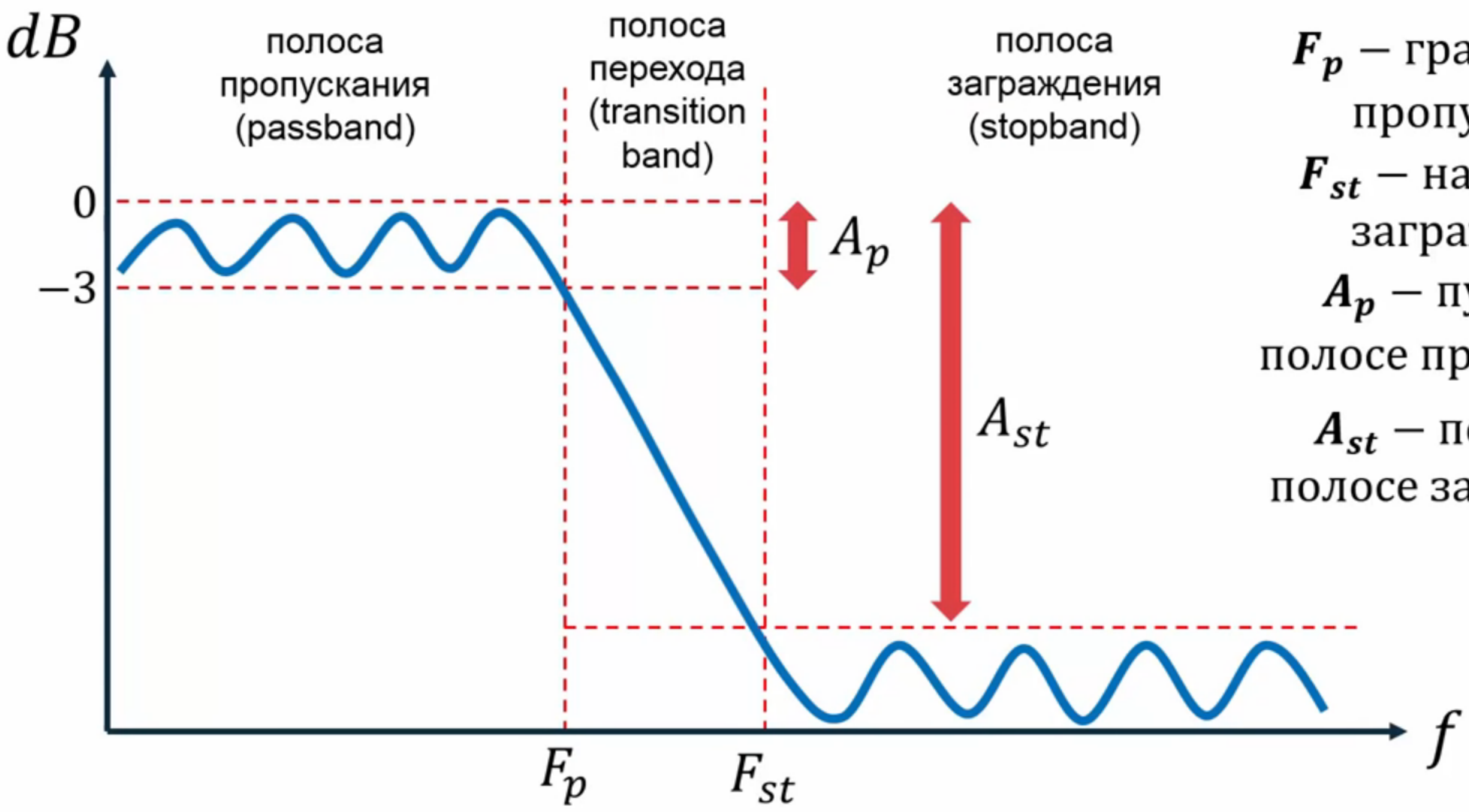
ω_1 ω_2

Filter Types

Amplification factor versus frequency



Спецификация фильтра – пример ФНЧ



$\boldsymbol{F_p}$ – граница полосы пропускания, Гц

$\boldsymbol{F_{st}}$ – начало полосы заграждения, Гц

$\boldsymbol{A_p}$ – пульсации в полосе пропускания, дБ

$\boldsymbol{A_{st}}$ – подавление в полосе заграждения, дБ

Фильтры

Фильтр с бесконечной импульсной характеристикой Infinite Impulse Response (IIR)

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} b(k)x(n-k) + \sum_{j=0}^{P} a(j)y(n-j)$$

где $\mathrm{x}(n)$ - входной сигнал, $\mathrm{y}(n)$ - выходной сигнал, $b(k)$, $a(j)$ - коэффициенты фильтра.

- Бывают цифровые и аналоговые;
- Могут быть не устойчивы (обратная связь);
- Нелинейность по фазе и задержке;
- Меньший порядок многочленов (по сравнению с FIR фильтрами) при схожих характеристиках.

Фильтр с конечной импульсной характеристикой Finite Impulse Response (FIR)

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} b(k)x(n-k)$$

где $\mathrm{x}(n)$ - входной сигнал, $\mathrm{y}(n)$ - выходной сигнал, $b(k)$ - коэффициенты фильтра.

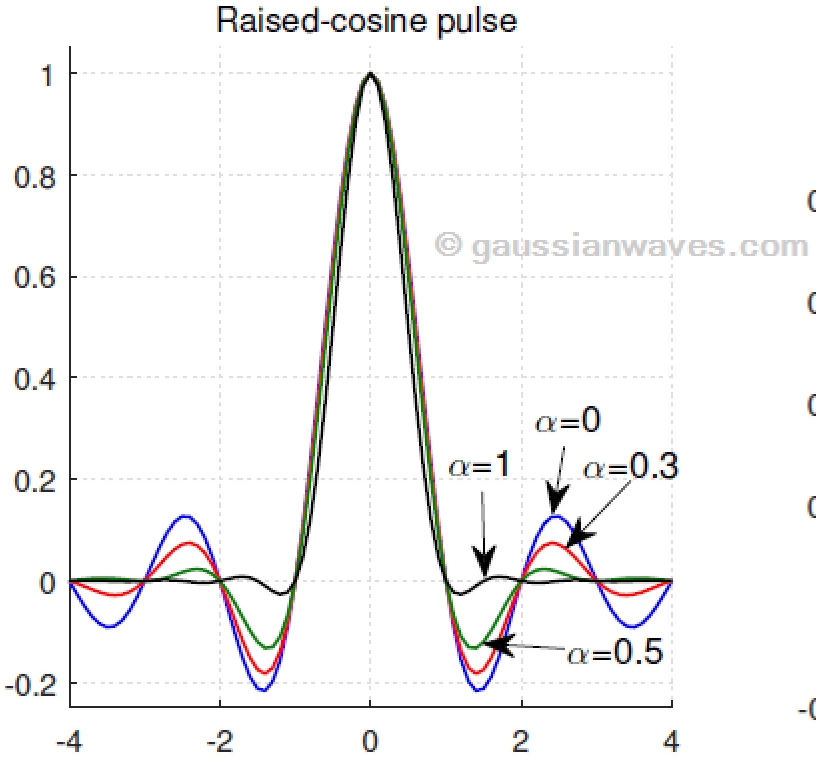
- Бывают только цифровые;
- Всегда устойчивы (нет обратной связи);
- Линейная фаза и постоянная задержка;
- Больший порядок многочленов (по сравнению с IIR фильтрами) при схожих характеристиках.

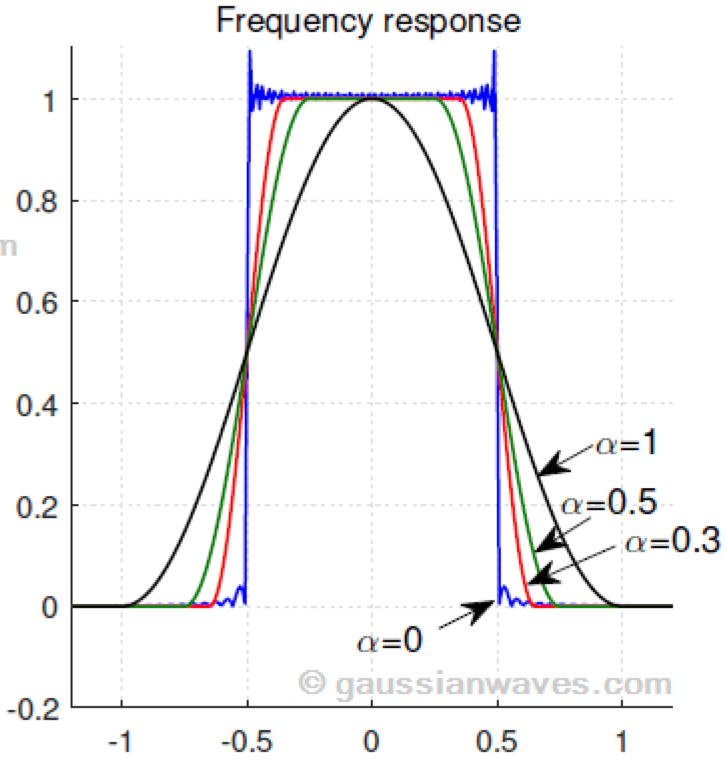
Согласованная фильтрация

- Частотная-избирательная система, выполняющая обработку суммы сигнала и шума наилучшим образом – оптимальный линейный фильтр
- Критерии «оптимальности» и «наилучшести»:
  - Максимум ОСШ (SNR)
  - Минимум среднеквадратической ошибки воспроизведения сигнала на выходе фильтра

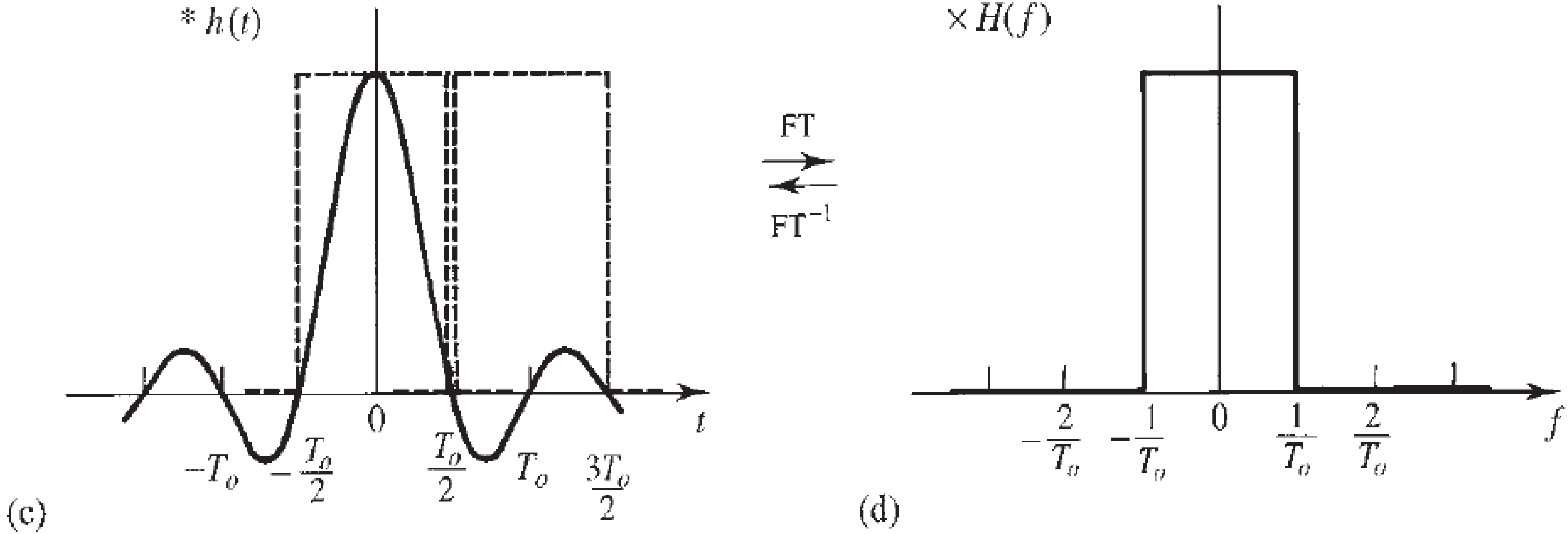
Фильтр приподнятый косинус

$$P(f) = \begin{cases} 1\,, & |f| \le \dfrac{1-\alpha}{2} \\ \dfrac{1}{2}\left[1 + cos\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\left[|f| - \dfrac{1-\alpha}{2}\right]\right)\right], & \dfrac{1-\alpha}{2} \le |f| \le \dfrac{1+\alpha}{2} \\ 0, & |f| \ge \dfrac{1+\alpha}{2} \end{cases}$$



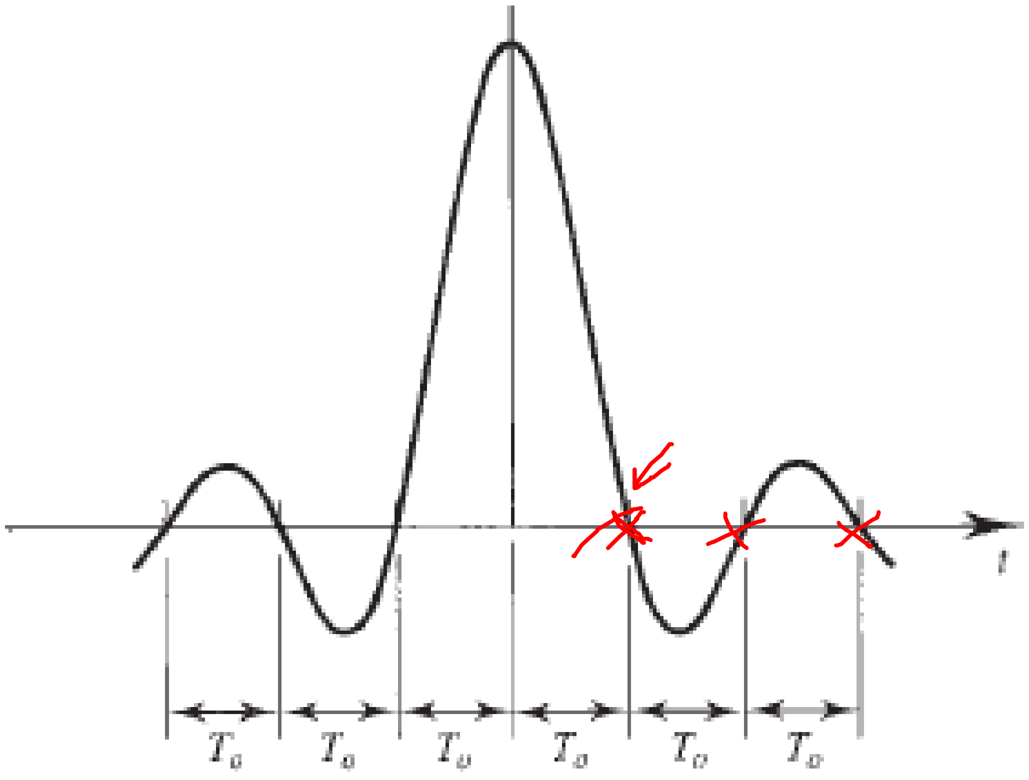


Функция sinc

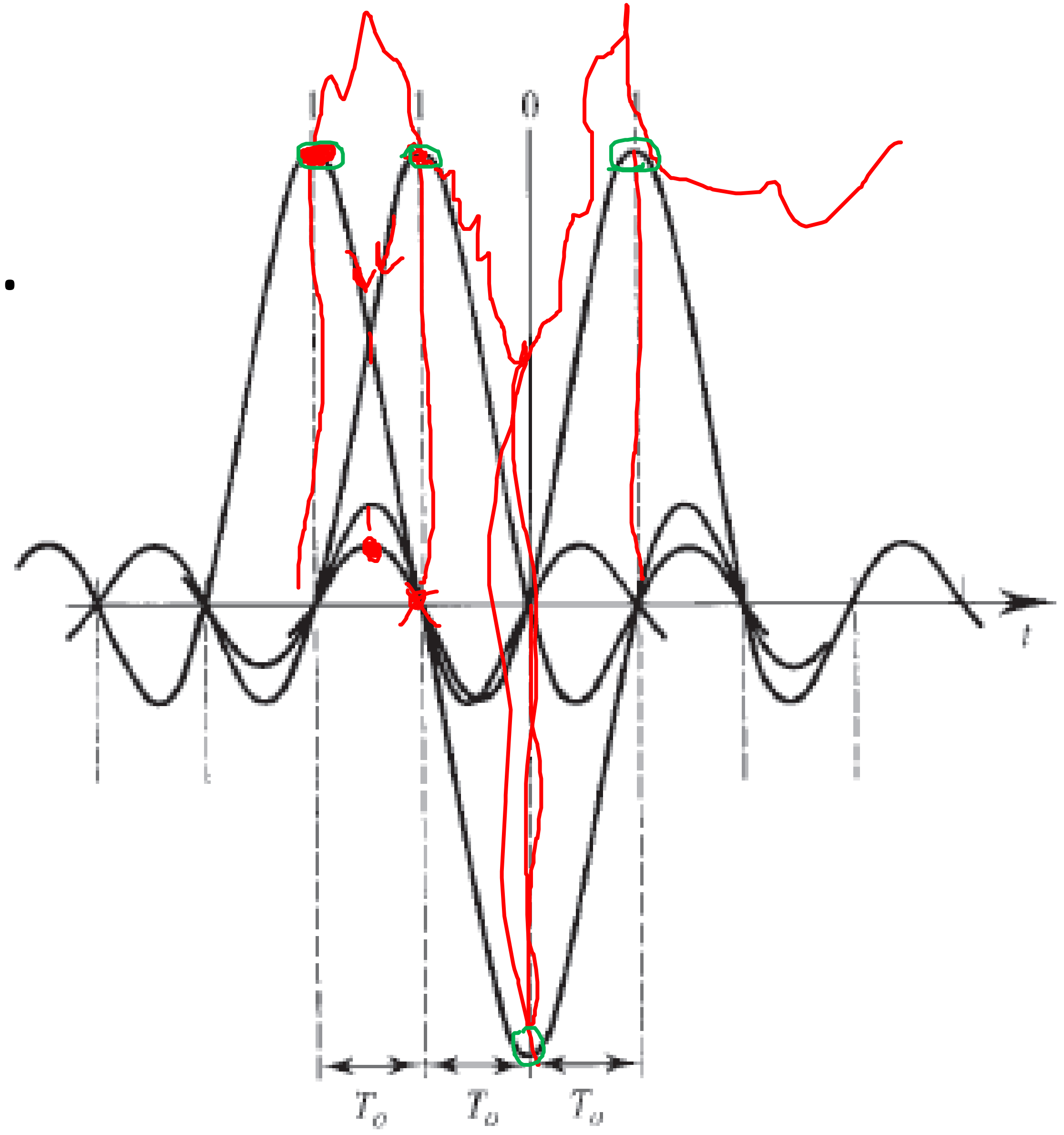


Ian A. Glover, Peter M. Grant “Digital Communications”

Идея фильтрации. Формирование сигнала.

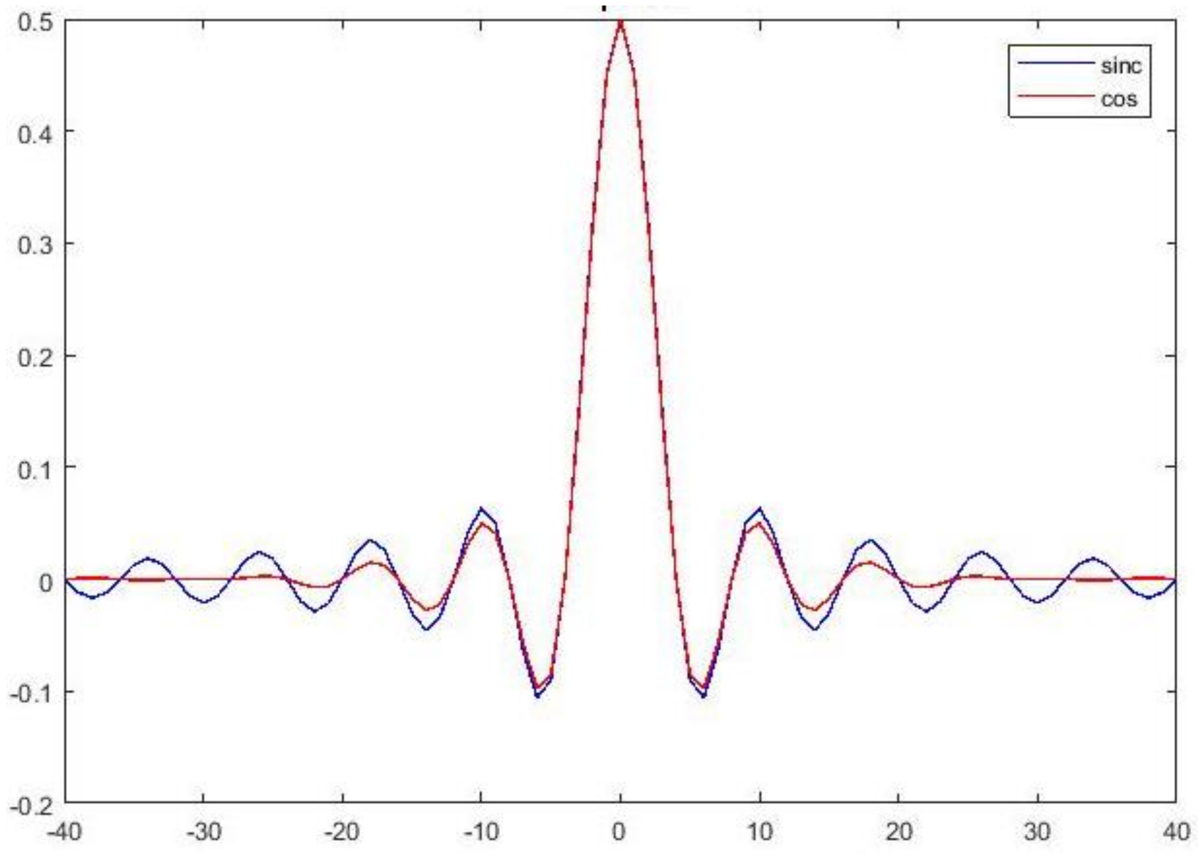


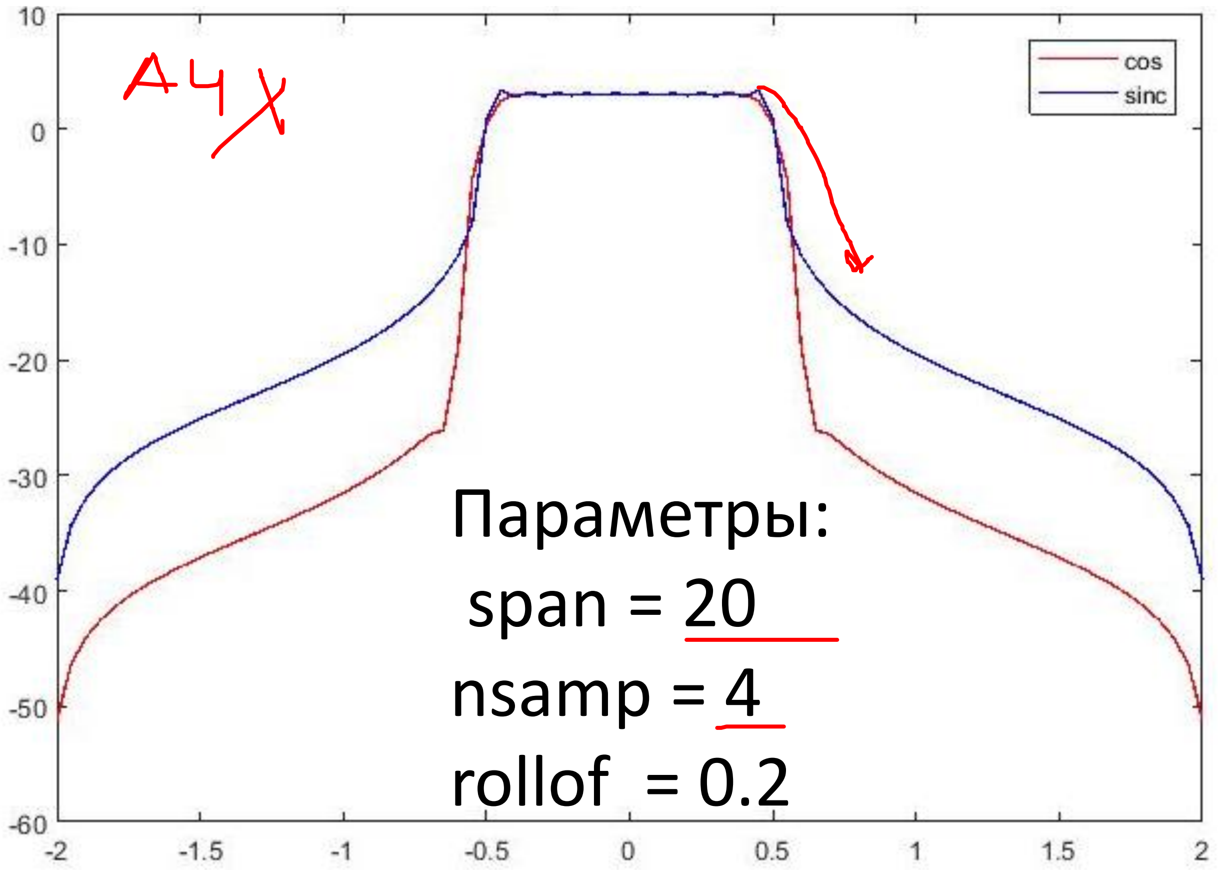
(a) sinc pulse



(b) sinc pulse signalling

Сравнение фильтр приподнятый косинус и sinc





Параметры:
span = 20
nsamp = 4
rollof = 0.2

Импульсная характеристика фильтра приподнятый косинус

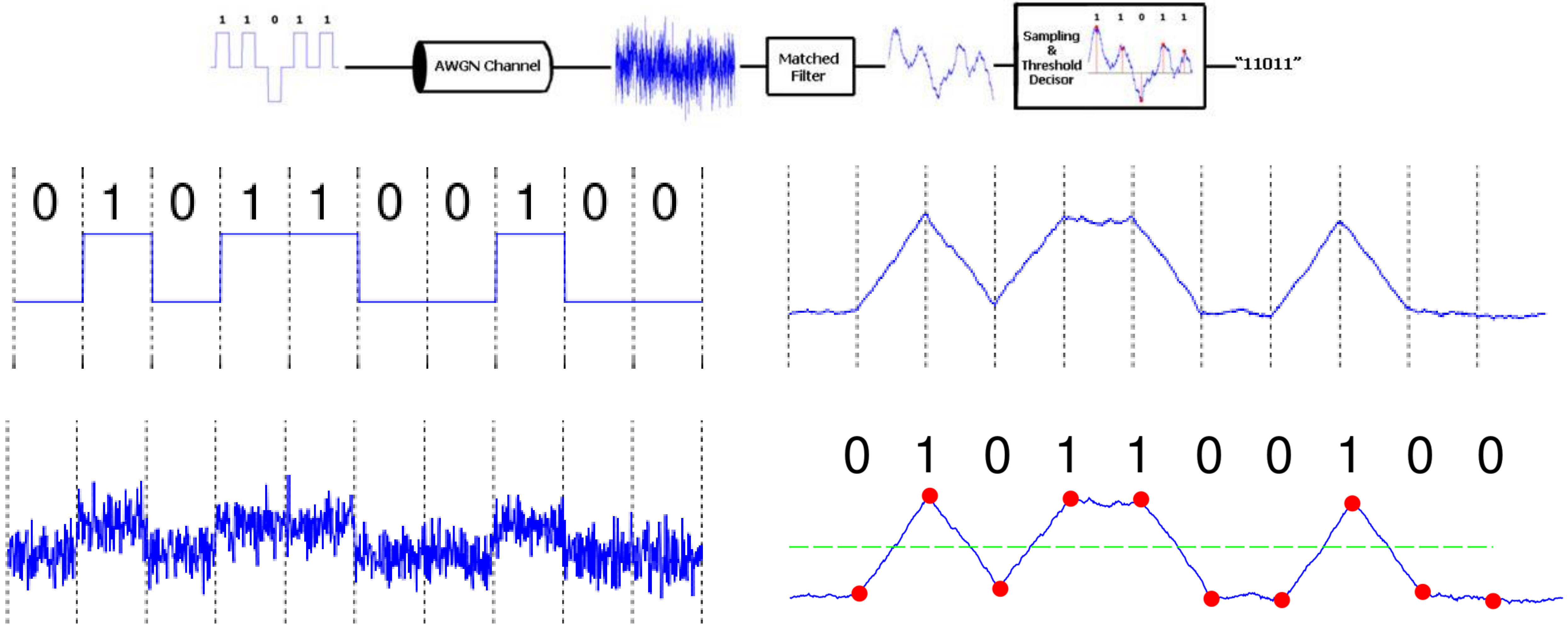
$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{T_{sym}}} \frac{sin\left(\frac{\pi t}{T_{sym}}\right)}{\frac{\pi t}{T_{sym}}} \frac{\cos\left(\frac{\pi \alpha t}{T_{sym}}\right)}{1 - \left(\frac{2\alpha t}{T_{sym}}\right)^2}$$

Доопределенные точки:

$$p(t = 0) = \frac{1}{\sqrt{T_{sym}}}$$

$$p\left(t = \pm\frac{T_{sym}}{2\alpha}\right) = \frac{1}{\sqrt{T_{sym}}} \frac{\alpha}{2} sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)$$

Согласованная фильтрация



Фильтр корень из приподнятого косинуса