10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
א	א	ק	ק	א	ק	ק	ק	ק	א
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
ק	ק	ק	א	ק	א	ק	ק	א	ק

פתרון ממ"ח 02

מגיש: לירון אבוטבול ת.ז.: [redacted]

שאלה 1

שאלה 1

$\{2,3\} \cap \{\{2\},\{3\}\} = \{\{2\},3\} \cap \{2,\{3\}\}$

$$\underbrace{\{2,3\} \cap \{\{2\},\{3\}\}}_{A} = \underbrace{\{\{2\},3\} \cap \{2,\{3\}\}}_{B}$$

פעולת החיתוך מחזירה את קבוצת העצמים, הנמצאים גם ב-A וגם ב-B. לפי נתון:

A: $\{2,3\} \cap \{\{2\},\{3\}\} = \emptyset$

B: $\{\{2\},3\} \cap \{2,\{3\}\} = \emptyset$ $\quad \emptyset = \emptyset$

לכן הטענה נכונה.

שאלה 2

שאלה 2

אם $A \cup B = A \cup C$ אז $B = C$

$$(A \cup B = A \cup C) \rightarrow (B = C)$$

נניח $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2\}$, $C=\{2,3\}$

לפי הגדרת פעולת האיחוד, $A \cup B$ היא קבוצת העצמים המורכבת מאיברי קבוצת A ואיברי קבוצת B.

נראה שהטענה לא נכונה ע"י דוגמה נגדית, לפי הנחה שהצגנו:

מצד אחד, $A \cup B = A \cup C \Leftrightarrow \{1,2,3\} \cup \{1,2\} = \{1,2,3\} \cup \{2,3\} \Leftrightarrow \{1,2,3\} = \{1,2,3\}$

מצד שני, $B \neq C$ מאחר ושתי קבוצות שוות אמ"מ יש להן אותם איברים.

לכן הטענה לא נכונה

שאלה 3

שאלה 3

אם $A \subseteq B \cup C$ אז $A \subseteq B$ או $A \subseteq C$

לפי הגדרת ההכלה, יהי A,B: $A \subseteq B$ (A חלקית ל-B) אם כל איבר של A הוא איבר של B

לפי נתון, אם $A \subseteq B \cup C$ כלומר A איבר של האיחוד של A ו-B, אז A מוכל ב-B או A מוכל ב-C

אך יכול להיות מקרה בו A יהיה מורכב מ-X איברים מ-A ו-Y איברים מ-B – ולכן יהיה מוכל באיחוד שלהם

אבל בהכרח A לא תהיה מוכלת ב-B או C, למשל

A: $\{2,3\}$ $\quad B$: $\{2\}$ $\quad C$: $\{3\}$

$A \subseteq B \cup C$: $\{2,3\} \subseteq \{2\} \cup \{3\} = \{2,3\} \subseteq \{2,3\}$ $\quad T$

$A \subseteq B$: $\{2,3\} \not\subseteq \{2\}$ $\quad F$

$A \subseteq C$: $\{2,3\} \not\subseteq \{3\}$ $\quad F$

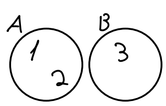
לכן הטענה לא נכונה

שאלה 4

שאלה 4

אם A,B קבוצות סופיות זרות אז $|\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)| = 2^{|A|} + 2^{|B|}$

נניח $A=\{1,2\}$ ו- $B=\{3\}$



לפי משפט 1.6: $2^2+1=5$ $\quad$ (A) $|A|=2, |B|=1$ $\quad$ (B) $|P(A)|=2^2$, $|P(B)|=2^1$

I. $(|A|=n) \rightarrow (|P(A)|=2^n)$

$$5 = \overset{A}{2^2} + 1 \neq 2^2 + \overset{B}{2^1} = 6$$

לכן הטענה לא נכונה

שאלה 5
$A \subseteq \mathcal{P}(A)$

שאלה 5

לפי הגדרת קבוצת החזקה (1.5 עמ' 28ב), קבוצת החזקה היא קבוצת כל תתי-הקבוצות של קבוצה A.

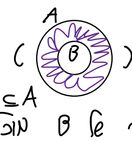
נניח, $A=\{1,2\}$ $\quad P(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},A\}$

ניתן לראות ש- $\{1,2\}\not\subseteq\{\emptyset,\{1\},\{2\},A\}$ לפי ההגדרה הנ"ל.

לכן הטענה לא נכונה

שאלה 6
אם $A\Delta B = A \setminus B$ אז $B \subseteq A$

שאלה 6



החלק הסגול באיור ( ) מהווה את $A\Delta B=A\setminus B$

$(A\Delta B=A\setminus B)\rightarrow B\subseteq A$

ניתן לראות שכל איבר של B מוכל ב- A

דוגמה: $A=\{1,2,3\},\ B=\{3\}$

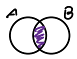
$A\Delta B=A\setminus B\ ?\ \{1,2,3\}\Delta\{3\}$
$=\{1,2,3\}\setminus\{3\}\Leftrightarrow\{1,2\}=\{1,2\}$

נוכיח $B\subseteq A$: $\{3\}\subseteq\{1,2,3\}$

לכן הטענה נכונה.

שאלה 7
אם $x \in A\Delta B\Delta C$ אז $x \notin A \cap B$

שאלה 7



$(x\in A\Delta B\Delta C \rightarrow x\notin A\cap B)$, שלילת המשפט $(x\in A\Delta B\Delta C \wedge x\in C)$

נניח: $A=\{1,2,3,4\},\ B=\{2,3,5,6\},\ C=\{3,4,6,7\}$

$A\Delta B=\{1,4,5,6\}$

I) $A\Delta B\Delta C=\{1,4,5,6\}\Delta\{3,4,6,7\}=\{1,3,5,7\}$

II) $A\cap B=\{2,3\}$

האיבר 3 קיים גם ב-I וגם ב-II, כלומר
$2\in\{2,3\}$

לכן הטענה לא נכונה

שאלה 8
אם $x \notin A^c \cap B^c$ אז $x \in A \cap B$

שאלה 8

נתון $(x\notin A^c\cap B^c)\rightarrow(x\in A\cap B)$, שלילת המשפט $(x\notin A^c\cap B^c)\wedge(x\notin A\cap B)$

נניח $U=\{1,2,\dots,10\}$, $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$

$A\cap B=\{2\}$, $A^c\cap B^c=\{4,\dots,10\}$

הפרכנו באמצעות דוגמה נגדית

לכן הטענה לא נכונה

שאלה 9
אם $A \subset B \times C$ אז $B \neq \emptyset$ וגם $C \neq \emptyset$

שאלה 9

$$(A\subset B\times C)\rightarrow(B\neq\emptyset \wedge C\neq\emptyset)$$

נניח בשלילה אם $B=\emptyset$ או $C=\emptyset$ אז $A\not\subset B\times C$

בהמשך להנחה מתקבל $B\times C=\emptyset$, קבוצה ריקה, לכן A אין מוכל ב $B\times C$

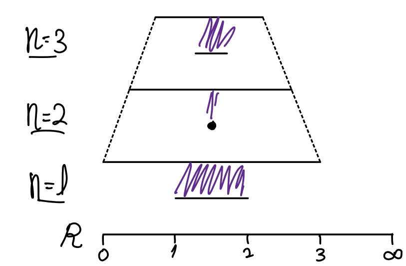
כלומר, ההנחה בשלילה שהנחנו אינה נכונה.

לכן הטענה נכונה.

שאלה 10

שאלה 10

$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right)$



$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right)=(2,1)\cup(1.5,1.5)\cup(1\tfrac{1}{3},1\tfrac{2}{3})\cup(1\tfrac{1}{4},1\tfrac{3}{4})\ \ldots$$

I $1<x\leqslant 2\ \cap\ 1\leqslant x<2$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right)=(0,3)\cap(\tfrac{1}{2},2.5)\cap(\tfrac{2}{3},2\tfrac{1}{3})\cap(\tfrac{3}{4},2\tfrac{1}{4})\ \ldots$$

VI $0\leqslant x<1\ \cap\ 2<x\leqslant 3$

לכן הטענה נכונה

שאלה 11

שאלה 11

אם כל איבר של A הוא זוג סדור אז קיימות קבוצת B,C כך ש- $A=B\times C$

נוכיח בדרך השלילה, נבדוק את המשפט: $\forall A((\forall x\in A(x\mid(x=\langle a,b\rangle))\rightarrow(\exists b\exists c(A=B\times C)))$

שלילת המשפט הוא: $\exists A((\forall x\in A(x\mid(x=\langle a,b\rangle))\wedge(\forall b\forall c(A\neq B\times C)))$

נגדיר באופן שרירותי $A=(\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle)$. המספרים 1,4 ו- 2,3 נדרשים בהכרח להיות איברים של B או C,

לכן $|B\times C|=2\cdot 2=4$ אך $|A|=2$ לכן $A\neq B\times C$

לכן הטענה לא נכונה

שאלה 12

שאלה 12

אם R יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי אז $R^2=R$.

לפי משפט 2.12 / שאלה 8 (עמ' 84) נובע באופן ישיר כי לכל יחס R טרנזיטיבי ורפלקסיבי מתקיים $R\subseteq R^2$

טרנזיטיבי: $\forall a,b,c\in A(((aRb)\wedge(bRc))\rightarrow(aRc))\leftrightarrow(R^2\subseteq R)$

רפלקסיבי: $\forall a\in A((aRa)\rightarrow(R\subseteq R^2)$

לסיכום, $((R\subseteq R^2)\wedge(R^2\subseteq R))\leftrightarrow R^2=R$

לכן הטענה נכונה

שאלה 13

שאלה 13

אם יחס R מקיים $R^2=R$ אז R הוא יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

הטענה לא נכונה

לפי משפט ב.1.כ נובע היחס R על A הוא טרנזי' אמ"מ $R^2\subseteq R$

יחס רפלקסיבי, כלומר לכל a ב-A מתקיים aRa

נראה יחס R על A שהינו טרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי.

נניח, $A=\{1,2,3\}$ ונגדיר $R=\binom{1}{1}$

$R=\binom{1}{1}\Rightarrow R^2=\binom{1}{1}\Rightarrow R\overset{\text{טרנזיטיביות}}{=}R^2$

מצד שני, $I_A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\notin R^2$

לכן הטענה לא נכונה

שאלה 14

שאלה 14
אם $R\cup S$ יחס אנטי-סימטרי אז גם R,S הם יחסים אנטי-סימטריים

לפי הגדרה 2.10 יחס R על A יקרא אנטי-סימטרי, אם לא קיימים a,b ב-A כך ש aRb וגם bRa.
כלומר, $R\cap R^{-1}=\emptyset$.
יהי $a,b\in A$ ו-$R\cup S$ יחס אנטי-סימטרי (לפי נתון) על A, משמע, בעבור כל $a,b\in A$ המקיימים $aR\cup Sb$, לא מתקיים $bR\cup Sa$
נוכיח בשלילה, נניח R לא אנטי סימטרי, דהיינו, מתקיים $bRa\wedge aRb$ לכן מתקיים $aR\cup Sb$ ו-$bR\cup Sa$ (לפי הגדרת איחוד)
וקיבלנו סתירה לכך ש-$R\cup S$ אנטי-סימטרי.

לכן הטענה לא נכונה

שאלה 15

שאלה 15
מספר יחסי השקילות השונים שניתן להגדיר על הקבוצה $\{1,2,3\}$ קטן ממספר יחסי הסדר המלא שניתן להגדיר על קבוצה זו.

יחס נקרא יחס סדר מלא אם הוא אנטי-רפלקסיבי, טרנזיטיבי ומשווה,
כלומר, לכל $a,b\in A$ יהיה קיים ביחס אחת מהזוגות הבאות: (b,a) או (a,b).
בקבוצה $\{1,2,3\}$ יש 3 איברים - לכן, יש לנו 3 מקומות ביחס סדר, לאיבר הראשון יש שלוש אופציות,
לאיבר השני שתי אופציות ולשלישי אחת. לכן מספר יחסי הסדר המלא: $3!=6$

יחסי שקילות

הקבוצה עצמה (החלוקה הטריוויאלית): $\{\{1,2,3\}\}$

חלוקה של A ל-2 תאים:
$\{\{1,2\},\{3\}\}$
$\{\{1,3\},\{2\}\}$
$\{\{3,2\},\{1\}\}$

חלוקה של A ל-3 תאים: $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

בסה"כ 5 יחסי שקילות.

יחסי סדר מלא

$E_1=\{<1,2>,<1,3>,<2,3>\}$
$E_2=\{<1,2>,<1,3>,<3,2>\}$
$E_3=\{<2,1>,<2,3>,<1,3>\}$
$E_4=\{<2,1>,<2,3>,<3,1>\}$
$E_5=\{<3,2>,<3,1>,<2,1>\}$
$E_6=\{<3,2>,<3,1>,<1,2>\}$

בסה"כ 6 יחסי סדר מלא

לכן הטענה נכונה

שאלה 16

שאלה 16
כל יחס רפלקסיבי R המקיים $R^2=R$ הוא יחס שקילות.

יחס R על קבוצה A "יקרא יחס שקילות אם הוא רפלקסיבי, טרנזיטיבי וסימטרי.
נניח $A=\{1,2,3\}$, היחס R על A הוא $\begin{pmatrix}1&2&2&3\\2&1&2&3\end{pmatrix}$, דהיינו, יחס רפלקסיבי.
נחשב R^2

$R=\begin{pmatrix}1&2&2&3\\2&1&2&3\end{pmatrix}$

$R=\begin{pmatrix}1&2&2&3\\2&1&2&3\end{pmatrix}$

R	1	2	3
1		1	
2	1	1	
3			1

$R^2=\begin{pmatrix}1&2&2&3\\2&1&2&3\end{pmatrix}\subseteq R$

היחס אכן רפלקסיבי וסימטרי אך אינו טרנזיטיבי.

לכן הטענה לא נכונה

שאלה 17

שאלה 17
אם ליחס שקילות R על $\{1,2,3,\dots,n\}$ יש פחות מ- n מחלקות אז $|R| \geq n+2$

נניח $A=\{1,2,3,4\}$

	1	2	3	4
1	1			
2		1		
3			1	
4				1

אם ל-R יש n מחלקות אזי $R=I_A$, ואז $|R|=n$,
נניח שיש $n-1$ מחלקות, לפי איור נאחד את מחלקת השקילות לחלק הכתום.
ולפיכך, הצטרפו אלינו שני איברים ליחס מטעמי סימטריות שהוא תנאי הכרחי
ליחס שקילות (במקרה של האיור, נוסיף $\langle 2,1\rangle$ ו- $\langle 1,2\rangle$). נובע
שהוספת מחלקה תוסיף 2 איברים לכל הפחות לכן $|R|\geq n+2$,

לכן הטענה נכונה

שאלה 18

שאלה 18
אם $1<n<m$ מספרים טבעיים אז החלוקה של **Z** המוגדרת על-ידי יחס השקילות $\equiv_m$ היא עידון של החלוקה של **Z** המוגדרת על ידי יחס השקילות $\equiv_n$.

נניח $A=1,\dots 10, n=2, m=3$
החלוקה של Z המוגדרת ע"י יחס השקילות $\equiv_2$ מסווגת את האיברים לזוגיים ואי זוגיים.
כלומר, $\pi_1=\equiv_2=\{\{2,4,6,8,10\},\{1,3,5,7,9\}\}$
החלוקה של Z המוגדרת ע"י יחס השקילות $\equiv_3$ מסווגת את האיברים ל-3 קבוצות שבן מתחלק ב-3 ללא שארית I, שארית של 2 II, שארית של 1 III
כלומר, $\pi_2=\equiv_3=\{\{3,6,9\},\{2,5,8\},\{1,4,7,10\}\}$
נאמר ש-π_2 עידון של החלוקה π_1 אם כל תא של π_2 חלקי לתא של π_1.
כפי שניתן לראות, ב-$\equiv_3$ יש חלוקה בה מופיעים מספרים זוגיים ואי-זוגיים בסתירה לחלוקה המוגדרת ע"י $\equiv_2$

לכן הטענה לא נכונה

שאלה 19

שאלה 19
אם A קבוצה סדורה (סדר מלא!) ואינסופית אז אין ב- A איבר אחרון

נבחר סדר מלא אינסופי שיש בו איבר אחרון, יחס הסדר $<$ (קטן מ) על כל המספרים השליליים ו-0 $(\mathbb{Z}\setminus(\mathbb{N}\setminus\{0\}))$.
במקרה כזה, 0 גדול מכל מספר שלילי לכן 0 איבר אחרון.

לכן הטענה לא נכונה

שאלה 20

שאלה 20
אם $A=\{1,2,3,4\}$ ואם $\langle A,\prec\rangle$ הוא סדר חלקי שבו קיימים שני אברים מינימליים ושני איברים מקסימליים אז כל איבר של A הוא מינימלי או מקסימלי.

יהי יחס הסדר $1\prec2\prec3$ ללא האיבר 4, לפיכך מדובר בסדר חלקי כי אינו משווה אך אנטי-רפלקסיבי וטרנזיטיבי.
יש לנו 2 איברים מינימליים, 1 ו-4 שמתקיימים באופן ריק וכנ"ל איברים מקסימליים, 3 ו-4 באופן ריק.
נבחין כי 2 (איבר של A) אינו מינימלי או מקסימלי

3
|
2
|
1

לכן הטענה לא נכונה