20476 מתמטיקה בדידה

פתרון ממ"ן 14

מגיש: לירון אופטבול,

תשובות סופיות
מסומנות בשני
קווי תחתון (=)

שאלה 1 (20 נקודות)

א. מיצאו את מספר הקבוצות החלקיות לקבוצה A בעלת n איברים המכילות **ממש** קבוצה נתונה של k איברים מתוך A.

שאלה 1

א. נסמן את הקבוצה הנתונה של K איברים ב-B, היות והיא מוכלת ממש ב-A ($B\subset A$), לפי הגדרת הכלה ממש, נובע $B\neq A$, כך שקיים איבר של A שאינו איבר של B, לכן $k<n$. אם כך, $|A\setminus B|=n-k$, כך ש- $(n-k)+k=n$ (I).

קבוצות החלקיות לקבוצה, כלומר, קבוצת החלקה שהינה, מספר תתי-הקבוצות $A\setminus B$. לפי משפט 4.6 ו-(I), $|P(A\setminus B)|=2^{(n-k)}$, היות וכל קבוצה מכילה את עצמה ואת הקבוצה הריקה, נחסר את $\emptyset$ מן התוצאה ונקבל

$$|P(A\setminus B)|=2^{(n-k)}-1$$

ב. לבובספוג יש $n\geq 4$ חברים. בכל ערב הוא מזמין מספר כלשהו $k\geq 4$ של חברים לסעוד אתו ולאחר מכן הוא תמיד מזמין שלושה מהם לשחק בביתו. (אף אחד לא מסרב!)
ספרו בשתי דרכים את מספר האופציות השונות שיש לבובספוג לבלות עם חברים בערב אחד,
והוכיחו עבור $n\geq 4$ את הזהות $\sum_{k=4}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{3}=\binom{n}{3}(2^{n-3}-1)$ בדרך קומבינטורית.
(כלומר ללא פישוט מראש של האגפים).

ב. דרך א':

נבחר את K החברים שמזמין לסעודה: יש $\binom{n}{k}$ אפשרויות לכל $k\geq 4$, לכל בחירה כזו, יש $\binom{k}{3}$ אפשרויות להזמין שלושה חברים למשחק
לפי עקרון הכפל, נקבל שלכל $n\geq k\geq 4$ יש לבובספוג $\binom{n}{k}\binom{k}{3}$ אפשרויות
לבלות עם חברים. אילו נסכום תוצאות אלו נקבל $\sum_{k=4}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{3}$ אפשרויות.

דרך ב':

מתוך n חבריו של בובספוג, הוא בהכרח ישחק עם 3 מהם, כלומר $\binom{n}{3}$, היות ויש להזמין יותר מ-4, נצטרך לבחור עוד $n-3$ מתוך החברים שלא ישאו למשחק, לפי סעיף א' יש $2^{n-3}-1$ אפשרויות, לכן לפי עקרון הכפל, נקבל $\binom{n}{3}(2^{n-3}-1)$ אפשרויות

מסקנה: מדרך א' ו-דרך ב', נובע $\binom{n}{3}(2^{n-3}-1)=\sum_{k=4}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{3}$

ג. הוכיחו את השוויון מסעיף ב׳ בדרך אלגברית (על ידי חישוב ישיר).

ג.

$$\sum_{k=4}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{3}=\sum_{k=4}^{n}\frac{n!}{\cancel{k!}(n-k)!}\cdot\frac{\cancel{k!}}{3!(k-3)!}=\sum_{k=4}^{n}\frac{n!}{3!(n-k)!(k-3)!}=\sum_{k=4}^{n}\frac{n!\,(n-3)!}{3!(k-3)!(n-k)!(n-3)!}$$

כפל וחילוק ב-$(n-3)!$

$$=\sum_{k=4}^{n}\binom{n}{3}\binom{n-3}{k-3}=\binom{n}{3}\sum_{k=4}^{n}\binom{n-3}{k-3}=\binom{n}{3}\left[\binom{n-3}{1}+\binom{n-3}{2}+\dots+\binom{n-3}{n-3}\right]=\binom{n}{3}\left(2^{n-3}-1\right)$$

היה ניתן להגיע לכאן מהתחלה לפי שאלה 3.10

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונה $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. בשאלה זו נתייחס לפונקציות שתחום ההגדרה שלהן הוא A .

א. מיצאו את מספר הפונקציות $f:A\to\{2,3,4\}$ המקבלות כל אחד מן הערכים $i\in\{2,3,4\}$ בדיוק i פעמים.

ב. מיצאו את מספר הפונקציות $f:A\to\{2,3,4,5,6\}$ המקבלות כל אחד מהערכים 2,3,4 בדיוק פעמיים.

ג. מיצאו את מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f:A\to A$ המקיימות את התנאי: $\{f(1),f(2),f(3)\}\cap\{1,2,3\}=\varnothing$

שאלה 2

ב. קבוצה A היא בעלת 9 איברים, כבקשת הסעיף נבחר 2 עבור כל i מתוך $|A|$, ונכפול לפי עקרון הכפל,

למשל: $j=4$ $j=3$ $j=2$

$$\binom{9}{2}\cdot\binom{9-2}{2}\cdot\binom{7-2}{2}=\frac{9!}{2!\cancel{7!}}\cdot\frac{\cancel{7!}}{2!\cancel{5!}}\cdot\frac{\cancel{5!}}{2!3!}=\frac{9!}{(2!)^3 3!}=7560$$

לאח"כ נותר 3 מקומות בהם נותר למקם את 5,6, כלומר, 2^3

מכאן נקבל: $7560\cdot 2^3=60480$

א. נפתור בדומה לסעיף ב', רק כעת בהינתן $\binom{9}{k_j}$, $k_j=j$ ו-אין איברים נוספים לסדר, $(2+3+4=9=|A|)$

$j=2$ $j=3$ $j=4$ בהכרח

$$\binom{9}{2}\cdot\binom{9-2}{3}\cdot\binom{7-3}{4}=\frac{9!}{2!\cancel{7!}}\cdot\frac{\cancel{7!}}{3!\cancel{4!}}\cdot\frac{\cancel{4!}}{4!}=\frac{9!}{2!3!4!}=1260$$

ג. פונק' חח"ע כלומר מקבלת כל ערך פעם אחת לכל היותר,
לפי התנאי $\{f(1),f(2),f(3)\}\cap\{1,2,3\}=\emptyset$ נסיק $f(1),f(2),f(3)>3$
כידוע $|A|=9$, נבחר תחילה $f(1),...,f(3)$ כאשר עבור הראשון מבינהם
יהיו $|A|-3$ אפשרויות ולאחר כל -1 בעבור כל אפשרות שנבחרה.
עבור $f(4),...,f(9)$ מדובר בתמורה ללא חזרות.

אילוסטרציה

$\{\cancel{1},\cancel{2},\cancel{3},\cancel{4},5,6,7,8,9\}$ — לפיכך, עבור $f(1)$ יש 6 אפשרויות

$\{\cancel{1},\cancel{2},\cancel{3},\cancel{4},5,\cancel{6},7,8,9\}$ — עבור $f(2)$ יש 5 אפשרויות

$\{\cancel{1},\cancel{2},\cancel{3},\cancel{4},5,\cancel{6},7,\cancel{8},9\}$ — עבור $f(3)$ יש 4 אפשרויות

עבור $f(4),...,f(9)$ מדובר במס' הדרכים לסדר 6 איברים בשורה בלי חזרות הוא היא $6!$

כלומר, $6\cdot5\cdot4\cdot6!=86400$

שאלה 3 (20 נקודות)

נתונה המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=8$.

א. מיצאו מספר הפתרונות **בטבעיים** של המשוואה כאשר $x_1+x_2+x_3\neq5$.

ב. מיצאו מספר הפתרונות **בטבעיים** של המשוואה כך ש- $x_{2i-1}+x_{2i}\neq2$ לכל $1\le i\le4$.

שאלה 3

א. נתייחס תחילה למשוואה הנתונה ללא ההגבלה - דהיינו, צירופים עם חזרות
כלומר, בחירת k עצמים מתוך n, לכן $D(n,k)$

$$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7+X_8=8\ \}\ D(8,8)=\binom{8-1+8}{8}=\frac{15!}{8!7!}=6435$$

כעת נמצא את מספר הפתרונות עבור $X_1+X_2+X_3=5$, ומכך נובע
$X_4+...+X_8=8-5=3$, גם כאן מדובר בצירוף עם חזרות, לכן:

$$D(3,5)\cdot D(5,3)=\binom{3-1+5}{5}\binom{5-1+3}{3}=\frac{7!}{5!2!}\cdot\frac{7!}{3!4!}=735$$

מכאן, שמס' הפתרונות בטבעיים של $X_1+...+X_8=8$ כאשר $X_1+X_2+X_3\neq5$
הוא $\binom{15}{8}-\binom{7}{5}\binom{7}{3}=6435-735=5700$

ב. נשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה בצורה הבאה שלו:

$$|A_1' \cup A_2' \cup \dots \cup A_n'| = |U| - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} S_j$$

$$\left.\begin{aligned} j=1:\ & X_1+X_2=2 \\ j=2:\ & X_3+X_4=2 \\ j=3:\ & X_5+X_6=2 \\ j=4:\ & X_8+X_7=2 \end{aligned}\right\} |U - \overset{A_1}{(X_1+X_2)} \cup \overset{A_2}{(X_3+X_4)} \cup \overset{A_3}{(X_5+X_6)} \cup \overset{A_4}{(X_7+X_8)}|$$

$$= S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4$$

$S_0 = D(8,8) = 6435$ I.

$S_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \longrightarrow |A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4|_{(4)}$ II.

$S_1 = 4[D(2,2) \cdot D(6,6)] = 5544$

$S_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|_{(6)}$ III.

$S_2 = 6[D(2,2) \cdot D(2,2) \cdot D(4,4)] = 1890$

$S_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|_{(4)}$ IV.

$S_3 = 4[D(2,2) \cdot D(2,2) \cdot D(2,2) \cdot D(4,4)] = 324$

$S_4 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|_{(1)}$ V.

$S_4 = D(2,2) \cdot D(2,2) \cdot D(2,2) \cdot D(4,4) = 81$

VI. מכאן, שמס' הפתרונות בשלמים של $X_1 + \dots + X_8 = 8$ כאשר $X_{2j-1} + X_{2j} \neq 2$ לכל $1 \leq j \leq 4$, לפי עקרון ההכלה וההפרדה יתקבל כתוצאה מהצבת הפתרונות (I) עד (V) במשוואה $S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4$, לכן

$$S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = 6435 - 5544 + 1890 - 324 + 81 = \underline{\underline{2538}}$$

שאלה 4 (20 נקודות)

בשאלה זו נתייחס לכל המילים באורך 10 הכתובות באותיות A,A,A,B,B,C,C,D,D,D .

א. מיצאו את מספר המילים ש**אין** בהן **שלוש אותיות מאותו סוג** הצמודות זו לזו.

ב. מיצאו את מספר המילים שבהן יש **לפחות שתי אותיות** מסוג A הצמודות זו לזו.

שאלה 4

א. באופן דומה להתייחסות לשאלה 3א', נסמן ב-T את מספר המילים ללא הגבלות כלשהן, דהיינו תמורות עם חזרות וחשיבות לסדר, כלומר,

$$T=\frac{10!}{(3!)^2(2!)^2}$$

כעת, נחשב את המילים בהן מופיע שלושה A או D צמודות, וכן מילים בהן שלושה A צמודות וגם שלושה D צמודות. המקרים שתיארנו לעיל "מכסים" את כל המילים בהן שלוש אותיות מאותו סוג צמודות לזה, וברור מאליו, כי רק D,A מאפשרות זאת מאחר ו- B,C מופיעות פעמיים.

אם כך, בחישוב דומה ל-T, רק שהפעם נתייחס ל-"AAA", "DDD" כאיבר אחד, בהתאם למקרים לעיל. נסמן את קבוצת האותיות בכל פעם ב-L

שלושה A צמודות

$$L=\{\underbrace{AAA}_{(1)},B,B,C,C,D,D,D\}\longrightarrow |L|=8 \qquad \frac{8!}{3!(2!)^2}$$

שלושה B צמודות

$$L=\{A,A,A,B,B,C,C,\underbrace{DDD}_{(1)}\}\longrightarrow |L|=8 \qquad \frac{8!}{3!(2!)^2}$$

שלושה A צמודות וגם שלושה B צמודות

$$L=\{\underbrace{AAA}_{(1)},B,B,C,C,\underbrace{DDD}_{(1)}\}\longrightarrow |L|=6 \qquad \frac{6!}{(2!)^2}$$

נכלל במקרים לעיל

כעת, נחסר את התוצאות שיתקבלו בבדיקת המקרים, מסה"כ המילים שניתן ליצור ללא הגבלות, דהיינו T, ונקבל את מספר המילים שאין בהן שלוש אותיות צמודות מאותו הסוג. לכן,

$$\frac{10!}{(3!)^2(2!)^2}-2\left(\frac{8!}{3!(2!)^2}\right)+\frac{6!}{(2!)^2}=25200-2\cdot 1680+480=\underline{\underline{22020}}$$

ג. בסעיף ב' בשונה מ-א', ההתייחסות ל-A בלבד ומדובר במילים בהן לפחות שתי A צמודות, כלומר, בחלוק למקרים כפי שעשינו ב-א', נבחין שהמילים המקיימות את התנאי הן כל המילים בהן שתי A צמודות פחות המילים בהן שלוש A צמודות, מאחר ומילים אלו כבר נמצאות במקרה ששתי A צמודות,

שתי A צמודות $\quad L=\{\underbrace{AA}_{(1)},A,B,B,C,C,D,D,D\} \longrightarrow |L|=9 \quad \dfrac{9!}{1!\cdot 1!\cdot 3!(2!)^2}$

שלוש A צמודות $\quad L=\{\underbrace{AAA}_{(1)},B,B,C,C,D,D,D\} \longrightarrow |L|=8 \quad \dfrac{8!}{1!\cdot 3!(2!)^2}$

(מתואר במקרה מ-א')

לכן, מספר המילים בהן לפחות שתי A צמודות הוא:

$$\frac{9!}{3!(2!)^2}-\frac{8!}{3!(2!)^2}=13440$$

שאלה 5 (20 נקודות)

רמי מציע לדינה את האתגר הבא:

דינה תבחר 8 מספרים טבעיים שונים כלשהם בתחום $10 \le n \le 36$.

רמי ינסה ליצור, תוך שימוש **רק במספרים שדינה בחרה או בחלק מהם**, שני סכומים שווים.

למשל, אם דינה בחרה את המספרים $10,11,12,15,18,25,32,36$

רמי יכול לרשום את השוויון $11 + 25 = 36$.

לחלופין, הוא יכול לרשום $10 + 12 + 18 = 15 + 25$.

כל המספרים צריכים להילקח מהרשימה של דינה, ואין חזרות על אותו מספר.

אם רמי מצליח לרשום שוויון כזה – הוא מנצח. אם הוא לא מצליח – דינה מנצחת.

בהנחה שאחרי שדינה בוחרת יש לרמי די זמן - או מחשב - לבדוק את כל האפשרויות,

הוכיחו כי רמי תמיד ינצח!

הדרכה: עקרון שובך היונים.

שאלה 5

צ"ל להוכיח שרמי תמיד מנצח, תוך שימוש רק במספרים שדינה בחרה או חלק מהם ואין חזרות על אותו מספר

I. מספר תתי-קבוצות של קבוצת המספרים שבחרה דינה, כאמור, קבוצת החזקה לפי משפט 1.6 הוא 2^8, וכידוע הוא מכיל את הקבוצה הריקה ($\emptyset$).
מכאן שמספר האפשרויות בהן ניתן למצוא סכומים מתוך 8 מספרים הוא:

$$2^8-1=255$$

II. לפי נתוני השאלה, המספר המינימלי שדינה יכולה לבחור הוא 10, ובמקרה זה, אילו רמי יקח את 10 אז הסכום המינימלי יהיה שווה 10.

הסכום המקסימלי עבור 8 מספרים בטווח $[10,36]$ כמובן יתקבל מסכומם של 8 האיברים האחרונים, כלומר, $\sum_{i=(36-8)}^{36} i = 29+\dots+36=260$

III. לפי (II) ניתן לומר שמספר הסכומים השונים האפשרי הוא $260-10+1=251$ ובמקרה הקלאסי של עקרון שובך היונים, מ-(I) קיבלנו כי יש 255 אפשרויות ("יונים") אבל יש 251 סכומים ("שובכים"), כלומר, לפי עקרון שובך היונים, $\left\lceil \frac{255}{251} \right\rceil = 2$, כלומר קיים שובך בו לפחות 2 יונים, ובמילים אחרות קיימות 2 קבוצות שיש להן אותו סכום, אילו ניקח שתי קבוצות כאלו ונמחק איברים משותפים לשתי הקבוצות מ-שתי הקבוצות, נקבל שתי קבוצות של מספרים שיש להן אותו סכום בעוד אין בהם אותם מספרים, לכן רמי תמיד ינצח, מש"ל