20476 מתמטיקה בדידה

פתרון ממ"ן 16

תשובות סופיות מסומנות בשני קווי תחתון ($=$, $=$)

מגיש: לירון אופטבול,

שאלה 1 (20 נקודות)

נתון גרף אוילרי פשוט וקשיר $G=(V,E)$.

א. הוכיחו שלכל קשת $e\in E$ הגרף $(V,E-\{e\})$ הוא קשיר.

ב. הוכיחו שאם קיימות קשתות $e_1,e_2,e_3\in E$ כך ש- $(V,E-\{e_1,e_2,e_3\})$ אוילרי אז G הוא לא גרף דו-צדדי.

ג. הוכיחו שאם $|V|=2n+1, n\ge 1$ אז קיימים ב- G לפחות שלושה צמתים בעלי אותה דרגה.

שאלה 1

א. צ"ל $(V,E-\{e\})$ קשיר לכל $e\in E$. נוכיח זאת בסתירה, כלומר, נניח $(V,E-\{e\})$ אינו קשיר. מכאן, שקיימות שתי קבוצות זרות A ו- B כך ש- $A\cup B=V$, $A\cap B=\emptyset$ כך שאין קשת בין צומת ב-A לצומת ב-B.
כיוון, שלפי נתון (V,E) הוא גרף קשיר חייב להתקיים מסלול בין כל שני צמתים בגרף. מכיוון שקשת e מוכלת ב- E, היא חייבת לקשר בין שני צמתים ב-V; נניח כי צמתים כאלה V_1,V_2, היות ו-$A\cap B=\emptyset$ נאמר ש- V_1 שייך ל-A או V_2 שייך ל-B או שניהם שייכים ל-A או ל-B.

במקרה שכזה, בו V_1,V_2 שייכים ל-A או ל-B, אזי e הקשת היחידה המחברת בין שתי הקבוצות, בסתירה לנתון ש-$G=(V,E)$ הוא גרף קשיר שבו חייב להתקיים לפחות קשת אחת בין כל שני צמתים ב-V.

מכאן ש-$(V,E-\{e\})$ אינו יכול להיות לא קשיר, כלומר $(V,E-\{e\})$ גרף קשיר בהכרח.

ב. בדומה לשיטת עבודה בסעיף א', נניח ש-G הוא גרף דו-צדדי, מכאן שלפי הגדרה, ניתן לחלק את G לשתי קבוצות זרות A ו- B כך שכל קשת ב-E מקשרת בין צומת ב-A לצומת ב-B.

כעת, נשים לב לנתון $(V,E-\{e_1,e_2,e_3\})$ אוילרי, דהיינו, הוא חייב לקיים מסלול שמבקר בכל צומת פעם אחת בדיוק. אך היות וקשתות e_1,e_2,e_3 מוסרות מהגרף, המסלול חייב להכיל לפחות קשת אחת המחברת בין שני צמתים בתוך אותה קבוצה (A או B) בסתירה להנחה ש-G הוא גרף דו-צדדי, מכאן ש- G אינו יכול להיות דו-צדדי אם $(V,E-\{e_1,e_2,e_3\})$ הוא גרף אוילר.

ג. לפי מ"ג אוילר, בגרף קשיר קיים מסלול אוילר אמ"מ יש בדיוק 0 או 2 צמתים בעלי דרגה אי"ז, היות ומדובר בגרף פשוט (כלומר, ללא לולאות או קשתות מקבילות) בהכרח הדרגה המקסימלית האפשרית היא מספר הצמתים פחות אחד, כלומר מספר הדרגות האפשריות נע בין 2 ל-$2n$ ויש סה"כ n דרגות אפשריות, ולפי נתון $|V|=2n+1$, מספר הצמתים הוא $2n+1$. לפי עקרון שובך היונים נחלק $2n+1$ צמתים ל-n דרגות אפשריות ונקבל

$$p=\left\lceil \frac{2n+1}{n}\right\rceil=\left\lceil \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}}+\frac{1}{n}\right\rceil=3$$

(לפי נתון, $n\ge1$ ↓ $\frac{1}{n}>0$ $\left\lceil\frac{1}{n}\right\rceil=1$)

שאלה 2 (20 נקודות)

בשאלה זו נתייחס לעצים על 8 צמתים המתויגים במספרים 1,2,3,...,8

א. מיצאו את מספר העצים שבהם העלים הם חמשת הצמתים 4,5,6,7,8 ורק הם.

ב. מיצאו את מספר העצים שבהם קיים צומת בעל דרגה 5.

שאלה 2

א. עפ"י הגדרת ומבנה סדרת פרופר לפי הנתון שקיים 8 צמתים, נאמר בסדרת פרופר $8-2=6$ צמתים וכן כידוע, בסדרת פרופר אין עלים. מכאן ש- $\{1,2,3\}$ חייבים להיות לפחות פעם אחת בסדרת פרופר. לפי עקרון ההכלה וההפרדה:

$$|U - A_1 \cup A_2 \cup A_3| = S_0 - S_1 + S_2 - S_3$$

1 לא מופיע, 2 לא מופיע, 3 לא מופיע

$$S_0 = 3^6 = 729 \,,\quad S_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 2^6\binom{3}{1} = 2^6 \cdot 3 = 192$$

$$S_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| = 1^6 \binom{3}{2} = 3$$

$$S_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0 \rightarrow$$ אף ספרה לא מופיעה, לא קיים

נציב ונקבל, מספר העצים שבהם העלים הם $\{4,5,6,7,8\}$ הוא:

$$S_0 - S_1 + S_2 - S_3 = 729 - 192 + 3 - 0 = 540$$

ב. נתון קיים צומת בעל דרגה 5, שכידוע קיימים 8 צמתים. מכאן, נבחר צומת מתוך 8 הצמתים שתהיה הצומת המרכזית, היות והדרגה 5, נדרש לבחור 5 צמתים מתוך 7 (כאמור, נבחרה צומת מרכזית, $8-1$). לאחר שלב זה, נותרו 2 צמתים עבורן ישנן שני אפשרויות:

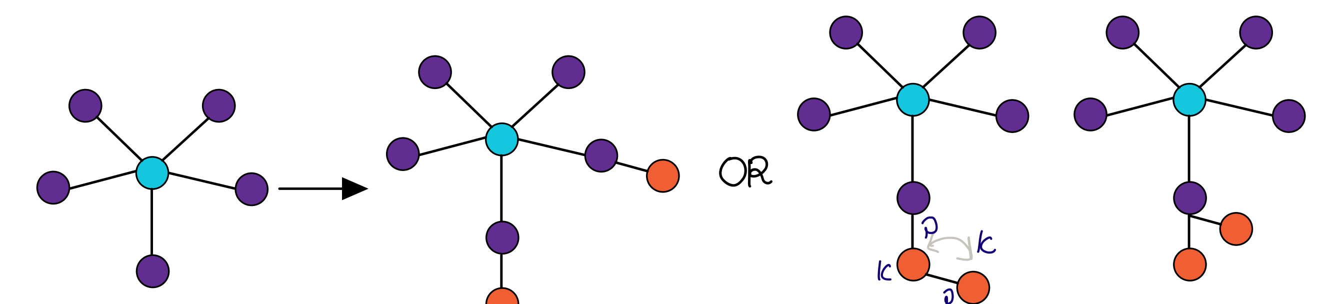
I. 2 הצמתים שנותרו מחוברות לצמתים שונות — $5\cdot(5-1) = 5\cdot 4 = 20$ או ש

II. 2 הצמתים שנותרו מחוברות לאותה צומת — $5\cdot 3 = 15$

לפיכך, מספר העצים שבהם קיימת צומת בעל דרגה 5 הוא:

$$\binom{8}{1}\binom{7}{5}\cdot(20+15) = \cancel{8}^{\,4}\cdot \frac{\cancel{7!}^{\,7\cdot 6}}{\cancel{5!2!}}\cdot \overset{7\cdot 5}{35} = 7^2 \cdot \underbrace{6\cdot 5\cdot 4}_{120} = 7^2 \cdot 120 = 5880$$

המחשה:



בחרנו צומת מרכזית וקישרנו 5 צמתים. מכאן, נותרו $8-1-5=2$ צמתים

2 הצמתים מחוברות לצמתים שונות, כלומר, לצומת ה-1 יש 5 אפשרויות ולשנייה 4 אפשרויות

2 הצמתים מחוברות לאותה צומת, כאן קיימות 3 אפשרויות, מחוברות לאותה צומת כעלים, או שרשור אחד לשני, או שני לאחד

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי T עץ על n צמתים שבו יש k עלים.

א. הוכיחו שלכל צומת $v \in V$, $\deg_T(v) \le k$

ב. הוכיחו שאם $k \le \frac{n}{2} - 1$ אז הגרף המשלים $\overline{T}$ הוא המילטוני

שאלה 3

א. עץ הוא גרף קשיר ללא מעגלים, ועלה הוא צומת שדרגתו היא 1. בהינתן עץ T עם n צמתים ו-k עלים, משתמע מכך שסכום הדרגות של כל הצמתים בעץ שווה לפעמיים מספר הקשתות בעץ, מאחר וכל קשת מחברת בין זוג צמתים.

היות ובעץ אין מעגלים, הוא מכיל $n-1$ קשתות ולכן סכום הדרגות של כל הצמתים הוא $2(n-1)$, מאחר ונתון לעץ T יש k עלים, סכום הדרגות של העלים שווה ל-k. כאמור, דרגתו של כל עלה היא 1 אזי סכום הדרגות של כל הצמתים בעץ שאינם עלים הוא $2(n-1)-k$

כעת, ניתן להוכיח שלכל צומת $v \in V$ מתקיים $\deg_G(v) \le k$. נבחר צומת v, אילו v עלה נאמר שדרגתו היא 1, שבהכרח כה קטן או שווה ל-k, אילו v אינו עלה, דרגתו קטנה או שווה לסכום הדרגות של הצמתים בעץ שאינם עלים, כידוע, $2(n-1)-k$, כאמור, הוא קטן או שווה ל-k.

לכן, לכל צומת $v \in V$ מתקיים $\deg_G(v) \le k$

ב. בסעיף (א') הוכחנו שדרגתו כל צומת קטנה הוא שווה ל-k, נציב את הנתון $k \le \frac{n}{2} - 1$ ונקבל

$v \in V$, $\deg_G(v) \le \frac{n}{2} - 1$

בגרף המלא, קיימת קשת בין כל זוג צמתים שונים, לכן עבור גרף מלא עם n צמתים, כל צומת מחוברת ל-$n-1$ צמתים, מכאן נובע הדרגה המקסימלית של צומת בגרף מלא בעל n צמתים היא $n-1$.

כידוע, הדרגה המקסימלית של T ע"פ נתון הוא $\frac{n}{2}-1$, מכאן שהדרגה של כל צומת בגרף משלים של T היא לפחות $n-1-(\frac{n}{2}-1) = n-\cancel{1}-\frac{n}{2}\cancel{+1} = \frac{n}{2}$

קיבלנו $\deg_{\overline{T}}(v) \ge \frac{n}{2}$ ולפי משפט דירק (משפט 3.3) נאמר הגרף המשלים של T הוא המילטוני.

הערה: עבור הדרישה במשפט דירק לפיה $|V| = n \ge 3$, מתקבלת מהביטוי $k \le \frac{n}{2} - 1$ כך:

$k \le \frac{n}{2} - 1 \xrightarrow{\cdot 2} 2k \le n-2 \longrightarrow 2k+2 \le n$

אם k אפסי

שאלה 4 (20 נקודות)

יהיו $A = P(\{1,2,3\}) \setminus \{\emptyset\}$ (קבוצת כל הקבוצות הלא ריקות החלקיות ל- $\{1,2,3\}$),

$B = \{1,2,3,4,5,6\}$ ו- $G = (A \cup B, E)$ הגרף הדו-צדדי המוגדר כך: לכל $S \in A$ ולכל $t \in B$

יש קשת בין S ל- t אם ורק אם t שווה לסכום או למכפלה או למספר האיברים של S.

הוכיחו על ידי דוגמה או הפריכו בעזרת משפט הול כל אחת מן הטענות הבאות

א. קיים ב- G זיווג המזווג את כל צומתי A

ב. קיים ב- G זיווג המזווג את כל צומתי B

ג. אם משמיטים ב- G את הצומת $\{3\}$ ואת כל הקשתות הסמוכות לו, מתקבל גרף שיש בו זיווג מושלם.

שאלה 4

משפט הול: בגרף דו-צדדי $G=(A\cap B,E)$ יש זיווג המזווג את כל צומתי A אמ"מ לכל $X\subseteq A$ מתקיים $|\Gamma_G(X)| \geq |X|$.

א.
$A = P(\{1,2,3\}) \setminus \emptyset = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

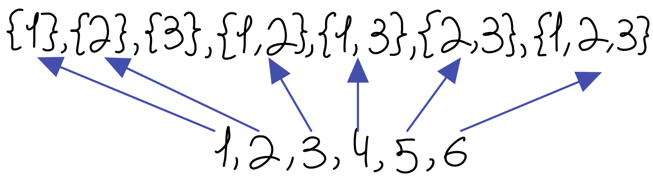
$B = \{1,2,3,4,5,6\}$

$|A| = |P\{1,2,3\} \setminus \emptyset| = 2^3 - 1 = 7$, $|B| = 6$

1.6 משפט

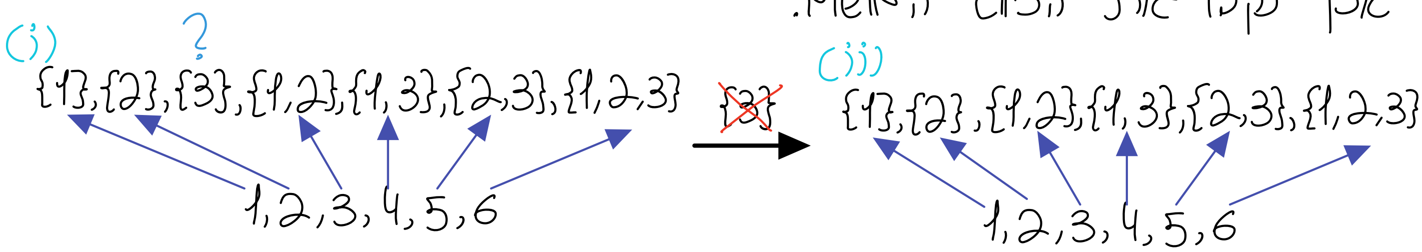
יהי $A=X$ לכן $6 \not\geq 7 \longrightarrow |\Gamma_G(X)| \geq |X|$ כלומר, משפט הול לא מתקיים, לכן
לא קיים זיווג ב-G שמזווג את כל צומתי A

ב. נראה זיווג ב-G המזווג את כל צומתי B



מ.ש.ל

ג. בהתאם לדוגמה שהוצגה בסעיף (ב') אילו נשמיט את הצומת $\{3\}$
אכן נקבל את הזיווג המושלם.



זיווג מושלם הוא זיווג שבו משתתפים כל הצמתים בגרף. כלומר, הוא
חלוקה של צומתי הגרף לזוגות, כך שכל זוג צמתים מקושר ע"י קשת
וכל מה שאינו תואם באיור (ii), מ.ש.ל

שאלה 5 (20 נקודות)

בגרף **פשוט וקשיר** G קיימים 5 צמתים בעלי דרגות $3,4,5,6,7$, n צמתים הם בעלי דרגה 2 ו-
m צמתים בעלי דרגה 1 (אלה הם כל הצמתים של G).

(9 נק') א. הוכיחו שקיים מספר טבעי k כך ש- $m=2k+1$ ומיצאו את מספר הקשתות של G.

(9 נק') ב. הוכיחו ש- G הוא גרף מישורי

(9 נק') ג. הראו שמספר הפאות של G אינו תלוי כלל במספר הצמתים בעלי דרגה 2.

(9 נק') ד. הראו שהמספר המקסימלי של צמתים בעלי דרגה 1 הוא 17 ובמקרה זה G הוא עץ.

א. נובע מנתוני השאלה:

$$\left\{\begin{array}{l}|V|=5+n+m\\ \sum_{v\in V}\deg_G(v)=3+4+5+6+7+2n+1m\end{array}\right.$$

בכל גרף $G=(V,E)$ מתקיים $\sum_{v\in V}\deg_G(v)=2\cdot|E|$. כלומר, סכום הדרגות בגרף שווה לכפליים מספר הקשתות

לפי טענה 1.3 מהספר נקבל

$$2|E|=3+4+5+6+7+2n+1m=25+2n+m \xrightarrow{:2} |E|=\frac{25+2n+m}{2}$$

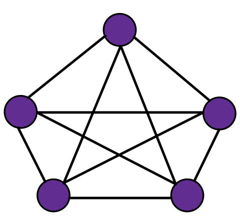
מאחר שסכום הדרגות חייב להיות זוגי (היות ושווה ל-$2|E|$ זוגי תמיד לפי טענה 1.3) מכאן אם קיים אי-זוגי אחד, בהכרח קיים אי-זוגי נוסף ולכן m חייב להיות א"ז.
מס' קשתות הוא מספר טבעי, ולכן ל-n אליו נוסיף $\frac{25+m}{2}$ כדי לקבל מס' טבעי נהיה חייבים ש-m יהיה א"ז, אחרת נקבל מס' רציונלי לא שלם בהכרח

מכאן ולפי נתון $m=2k+1$ נאמר m א"ז לכל k טבעי ומספר הקשתות הוא:

$$|E|=\frac{25+2n+m}{2}=\frac{25+m}{2}+n$$

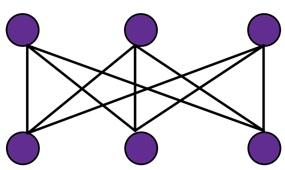
ב. לפי משפט קורטובסקי (משפט 5.8) מכאן שצ"ל שגרף G לא מכיל תת-גרף העדנה של K_5 או $K_{3,3}$ לפיכך:

גרף הוא מישורי אמ"מ הוא לא מכיל תת-גרף העדנה של K_5 או $K_{3,3}$



K_5 5 צמתים עם דרגה של 4.
אך בגרף G יש רק 4 צמתים שדרגתם היא 4

$\underbrace{1,\dots,1}_{m}\quad \underbrace{2,\dots,2}_{n}\quad 3,4,5,6,7$



K_5 6 צמתים עם דרגה של 3.
אך בגרף G יש רק 5 צמתים שדרגתם היא 3.

$\underbrace{1,\dots,1}_{m}\quad \underbrace{2,\dots,2}_{n}\quad 3,4,5,6,7$

לכן, גרף G הוא גרף מישורי.

ג. צ"ל שמספר הפאות של G אינו תלוי ב- n (מספר הצמתים בעלי דרגה 2 עפ"י סימון).

מסעיף (א') נובע $|V|=5+m+n$ ו- $|E|=\frac{25+m}{2}+n$, ובסעיף (ב') הוכחנו שגרף G הוא גרף מישורי.

משפט 5.3 (נוסחת אוילר)
יהי G גרף מישורי קשיר (לאו דווקא פשוט) בעל n צמתים ו- m קשתות.
אז מספר הפאות בכל שיכון מישורי של G הוא: $f=m-n+2$

לכן, לפי משפט 5.3, נובע מספר הפאות של G שווה ל- $f=|E|-|V|+2$

נציב ונקבל,

$$f=\frac{25+m}{2}+n-(5+m+n)+2$$

$$=\frac{25+m}{2}+\cancel{n}-5-m-\cancel{n}+2 \xrightarrow{\text{מ"מ}} f=\frac{25+m-10-2m+4}{2}=\frac{19-m}{2}=f$$

כפי שניתן לראות, הביטוי f אינו מכיל את n לכן מספר הפאות אינו תלוי ב- n.

ד. בסעיף (ג') מצאנו שמספר הפאות של הגרף G הוא $f=\frac{19-m}{2}$
כידוע, הצמתים בעלי דרגה 1 מסומן ב- m.

$$f=\frac{19-m}{2}\geq 1 \longrightarrow 19-m\geq 2 \longrightarrow 17\geq m$$

מספר מקס' של צמתים בעלי דרגה 1 הוא 17.

לכן, $f=\frac{19-17}{2}=1$. כאשר בגרף יש פאה אחת, בגרף אין מעגלים ולפי הגד' עץ, עץ הוא גרף קשיר ללא מעגלים לכן במקרה הנ"ל G הוא עץ