פתרון ממ"ח 03

[redacted]

מגיש: לירון אפוסטול

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
א	ב	א	א	ב	א	ב	ב	ב	ב
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
א	א	ב	ב	ב	א	א	ב	ב	ב

שאלה 1

עבור כל מספר $n \in \mathbf{N}$ השלשות $\langle \mathbf{R}, \mathbf{R}, \{\langle x, 1+x+x^2+\cdots+x^n\rangle \mid x \in \mathbf{R}\}\rangle$
ו- $\langle \mathbf{R}, \mathbf{R}, \{\langle 1, n+1\rangle\} \cup \{\langle x, (1-x^{n+1})/(1-x)\rangle \mid x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}\}\rangle$ הן פונקציות שוות.

ראשית, נביע את הפונקציות f,g בסימון שונה:

טווח תחום

$\langle \mathbf{R}, \mathbf{R}, \{\langle x, 1+x+x^2+\cdots+x^n\rangle \mid x \in \mathbf{R}\}\rangle$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 1 + S_n$

$\langle \mathbf{R}, \mathbf{R}, \{\langle 1, n+1\rangle\} \cup \{\langle x, (1-x^{n+1})/(1-x)\rangle \mid x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}\}\rangle$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

נשים לב כי $f(x)$ מהווה סדרה הנדסית, שמנתה היא x ואיברה הראשון הוא x (אם כי ניתן להתייחס ל-1 כ-x^0). לפיכך לפי נוסחאות סדרה הנדסית

$$\left.\begin{matrix} b_1 = x \\ q = x \end{matrix}\right\} S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{x(x^n-1)}{x-1}$$

לפונקציות שוות בעבור כל x מתקבל y זהה, כלומר לכל איבר מהתחום מותאם איבר זהה מהטווח.

נבדוק $f(x) = g(x)$

$$1 + \frac{x(x^n-1)}{x-1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \Longrightarrow \frac{(x-1)+x(x^n-1)}{\cancel{(x-1)}} = \frac{x^{n+1}-1}{\cancel{x-1}}$$

לפי חוקי חזקות:

$$\cancel{x} \cancel{-1} + x^{n+1} \cancel{-x} = x^{n+1} \cancel{-1}$$
$$x^{n+1} = x^{n+1}$$

מש"ל, התשובה הנכונה היא א'

שאלה 2

אוסף התמונות

אם $f: A \to B$ היא פונקציה ו- $C_1, C_2 \subseteq A$, $C_1 \cap C_2 = \varnothing$ אז גם $f[C_1] \cap f[C_2] = \varnothing$.

לפי נתון $C_1 \cap C_2 = \varnothing$ נובע שאין איברים משותפים בקבוצות C_1, C_2 יחד עם זאת שניהם מוכלים ב-A, כלומר $C_1 \cup C_2 \subseteq A$.

יהי $A = N$, $C_1 = \{2n \mid n \in A\}$, $C_2 = \{2n+1 \mid n \in A\}$
נגדיר $f(x) = 0x$ לפיכך הטווח הינו $B = \{0\}$, כלומר עבור כל $x \in C_2$ או $x \in C_1$ נקבל $y = 0$, כלומר טווח המכיל את האיבר 0 בלבד, לפיכך, $f[C_1] \cap f[C_2] = \varnothing \rightarrow \{0\} \cap \{0\} \neq \varnothing$

מש"ל, התשובה הנכונה היא ב'

שאלה 3

אוסף המקורות

אם $f: A \to B$ פונקציה ו- $D_1, D_2 \subseteq B$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ אז גם $f^{-1}[D_1] \cap f^{-1}[D_2] = \varnothing$.

לפי שאלה 6 (עמ' 132), $f^{-1}[D_1] \cap f^{-1}[D_2] = \varnothing = f^{-1}[D_1 \cup D_2]$
נבנה תבנית לשאלה לפי התנאים הנדרשים, $B = \{1,2,3,4\}$, $D_1 = \{1,2\}$, $D_2 = \{3,4\}$

$$\varnothing = f^{-1}[D_1] \cap f^{-1}[D_2] \Rightarrow f^{-1}[\{1,2\}] \cap f^{-1}[\{3,4\}] \Rightarrow \{1,2\} \cap \{3,4\} = \varnothing$$

התשובה הנכונה היא א'

שאלה 20

שאלה 20

אם κ_1 עוצמה סופית ו- κ_2 עוצמה אינסופית אז $\aleph_0 + \kappa_1 \neq \aleph_0 + \kappa_2$.

נפריך את הטענה באמצעות דוגמה נגדית, לפי חוקי אריתמטיקה של עוצמות
טענה 4.31 ג' נאמר $\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0$. שכידוע, $\aleph_0$ עוצמה אינסופית, לפיכך
אילו $\kappa_1 = 0$ (כאמור, עוצמה סופית) ו- $\kappa_2 = \aleph_0$ נקבל ש- $\aleph_0 = \aleph_0 + 0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

בסתירה לטענה

לכן התשובה הנכונה היא ב'.

שאלה 19

שאלה 19

אם $\mathcal{F}$ היא קבוצת כל התת-קבוצות הסופיות של $\mathbf{N}$ אז $\left|\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A\right| < \left|\bigcup_{A\in\mathcal{F}} \mathcal{P}(A)\right|$

לפי משפט קנטור על קבוצת החזקה (משפט 4.25):
לכל קבוצה A מתקיים $|A| < |P(A)|$.
$\mathcal{F}$ הינה קבוצת כל תת-הקבוצות הסופיות לכן $\cup A = P(A)$ ו- $\cup P(A) = P(A)$ ובאמת
הן שקולות, שכן אלו בנות-מניה של כל תתי הקבוצות הסופיות של $\mathbb{N}$ שלה שקול ל- $\mathbb{N}$
וכידוע עוצמתה של $\mathbb{N}$ היא $\aleph_0$. מכאן נובע $\aleph_0 \not< \aleph_0$

לכן התשובה הנכונה היא ב'.

שאלה 18

שאלה 18

הקבוצות $\mathbf{N}^{\{1,2\}}$ ו- $\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ הן שקולות זו לזו.

לפי חישוב עוצמות, $|\mathbb{N}^{\{1,2\}}| = \aleph_0^2$ ואילו $\aleph = 2^{\aleph_0} = |\{1,2\}^{\mathbb{N}}|$, $\aleph_0^2 < \aleph$

לכן התשובה הנכונה היא ב'.

שאלה 17

שאלה 17

הקבוצות $\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ ו- $\{1,2,3\}^{\mathbf{N}}$ הן שקולות זו לזו.

לפי תכונות של חזקות של עוצמות, אם $\kappa \le \lambda$ אז $\kappa^\mu \le \lambda^\mu$,
בהתאמה לשאלה, $\aleph_0 = \mathbb{N} = \mu$, $|\{1,2\}| = 2$, $|\{1,2,3\}| = 3$, כלומר לפי תכונה, $2^{\aleph_0} \le 3^{\aleph_0}$ שקולות זו לזו.

לכן התשובה הנכונה היא א'.

שאלה 16

שאלה 16

הקבוצות $\mathbf{N}^{\{1,2\}}$ ו- $\mathbf{N}^{\{1,2,3\}}$ הן שקולות זו לזו. (להבנת הסימונים עיינו בפרק 3.9)

נחשב את העוצמות ונעזר בתכונות אריתמטיקה של עוצמות

$$\mathbb{N}^{\{1,2\}}: |\mathbb{N}|^{|\{1,2\}|} = \aleph_0^2 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

לפי 4.37ב'

$$\mathbb{N}^{\{1,2,3\}}: |\mathbb{N}|^{|\{1,2,3\}|} = \aleph_0^3 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

לפי 4.37ב'

לכן התשובה הנכונה היא א'.

שאלה 15

שאלה 15

$$\left|\mathbf{R}\setminus[0,\infty)\right| < \left|\mathbf{R}\setminus[0,1)\right|$$

הקטע $[0,1)$ שקול ל-$[0,\infty)$ מתוקף צפיפות הרציונליים,
לכן העוצמות שוות, בסתירה לטענה.

לכן התשובה הנכונה היא ב'.

שאלה 14

שאלה 14

אם $A \subseteq \mathbf{R}$ ואם $|A| > \aleph_0$ אז A מכילה קטע לא מנוון.

נניח $A=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, נשים לב $A\subseteq\mathbb{R}$ וגם $|A|>\aleph_0$, כאמור העוצמה של $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ שווה לעוצמה של $\mathbb{R}$,
הלוא, העוצמה $\aleph$ ויחד עם זאת A לא מכילה קטע לא מנוון.

לכן התשובה הנכונה היא ב'.

שאלה 13

שאלה 13

אם A קבוצת הקבוצות החלקיות ל- $\mathbf{N}$ ששקולות ל- $\mathbf{N}$ ו- B קבוצת הקבוצות החלקיות ל- $\mathbf{N}$ שאינן שקולות ל- $\mathbf{N}$ אז A שקולה ל- B.

לפי שאלה 18 בפרק 4, הקבוצה של הקבוצות הסופיות של $\mathbb{N}$ היא בת-מנייה, לכן $|B|=\aleph_0$
לפי שאלה 12 סעיף ב', קבוצת תת-הקבוצות האינסופיות של $\mathbb{N}$ עוצמתה היא $\aleph$ לכן $|A|=\aleph$
כידוע, $\aleph_0<\aleph$ לכן $A\not\sim B$

לכן התשובה הנכונה היא ב'.

שאלה 12

שאלה 12

אם קבוצה אינסופית A שקולה לכל קבוצה אינסופית שחלקית לה אז $|A| = \aleph_0$.

לפי משפט 4.6 לכל קבוצה אינסופית יש תת-קבוצה שעוצמתה $\aleph_0$.
אילו $|A|=\aleph$ לפי המשפט לעיל, בהכרח יש לה תת-קבוצה שעוצמתה $\aleph_0$ וזאת בסתירה
לנתון ש-A שקולה לכל תתי הקבוצות שלה, לפיכך $|A|=\aleph_0$ חייב להתקיים.

לכן התשובה הנכונה היא א'.

שאלה 11

שאלה 11

קבוצת המספרים הטבעיים שמתחלקים ב- 7 שקולה לקבוצת המספרים הטבעיים שאינם מתחלקים ב- 7.

יהיו A,B קבוצות לפי ההגדרה, נאמר ששתיהן שקולות אם קיימת פונק' חח"ע ועל
מ-A ל-B.

$$\left.\begin{array}{l} A=\{7,14,21,28,\dots\}=\{7x \mid x\in\mathbb{N}\} \\ B=\mathbb{N}\setminus A \end{array}\right\} f(x)=7x \rightarrow \text{חח"ע ועל}$$

שתי הקבוצות הן בנות-מנייה לכן העוצמות שלהן שוות $\aleph_0$ כלומר A שקולה ל-B

לכן התשובה הנכונה היא א'.

שאלה 10

שאלה 10

אם $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, $f(n)=n+3$ לכל $n\in\mathbf{N}$ אז קיימת פונקציה **קבועה** $g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ כך ש-

$$f\circ g = g\circ f$$

בתמונה של פונק' קבועה יש איבר יחיד, כלומר $g(x)=K$
לכן,

$$\left.\begin{array}{l} f\circ g=f(g(x))=f(K)=K+3 \\ g\circ f=g(f(x))=g(n+3)=K \end{array}\right\} K+3\neq K$$

לכן התשובה הנכונה היא ב'.

שאלה 9

שאלה 9

אם $f,g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ ואם $f\circ g=I_{\mathbf{N}}$ אז f היא פונקציה הפיכה.

נפריך את הטענה באמצעות דוגמה נגדית, $g(x)=2x$

נראה ש- $f\circ g=I_N$: $f(g(x))=I_N=x$ $\qquad f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & x \text{ זוגי} \\ 1 & x \text{ אי-זוגי}\end{cases}$

כלומר $f(2x)=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=x \Rightarrow f\circ g=I_N$

יחד עם זאת, f אינה חח"ע ולכן אינה הפיכה, $\begin{cases}f(3)=f(5)=1\\ f(1)=1\end{cases}$ לפי $f(x)$ שהגדרנו

לכן התשובה הנכונה היא ב'.

שאלה 8

שאלה 8

אם $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ היא על אז f היא חד-חד-ערכית.

נפריך באמצעות דוגמה נגדית, יהי $f(x)=|x-1|$, כאמור פונק' על (לכל איבר בטווח יש מקור) אך אינה חח"ע כי ניתן למצוא איבר מהטווח שלו יש שני מקורות, למשל 1

$f(2)=|2-1|=1$

$f(0)=|0-1|=1$

לכן התשובה הנכונה היא ב'.

שאלה 7

שאלה 7

אם $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ היא חד-חד-ערכית אז f היא על.

נגדיר f להיות $f(x)=2x$, כאמור, f חח"ע כי כל ערך מתקבל פעם אחת לכל היותר, כלומר, אין שני איברים שונים בתחום של f ששניהם הפונק' מתאימה אותו ערך בטווח. אך אינה על שכן לא כל איבר בקבו' N מתקבל כערך של הפונק', דהיינו כל המספרים האי"ז.

לכן התשובה הנכונה היא ב'.

שאלה 6

שאלה 6

אם A,B תת-קבוצות של קבוצה אוניברסלית U אז $\chi_A^{-1}[\{1\}]\cap\chi_B^{-1}[\{0\}]=A\setminus B$

$$\left.\begin{aligned}\chi_A^{-1}[\{1\}]&=A\\ \chi_B^{-1}[\{0\}]&=B^c\end{aligned}\right\} A\cap B^c=A\setminus B$$

לפי חוקי דה מורגן

לכן התשובה הנכונה היא א'.

שאלה 4

שאלה 4

$f:A\to B$ היא חד-חד-ערכית אם ורק אם לכל קבוצה סופית $C\subseteq A$ מתקיים $|f[C]|=|C|$

$f[C]$ מתאר את אוסף התמונות של C. פונק' חח"ע מקבלת כל ערך פעם אחת לכל היותר.

נניח $A=\{0,\dots,5\}\in N$ ו- $B=\{x^2|x\in A\}=\{0,1,4,9,16,25\}$ ו- $f(x)=2x$.

לפי השאלה, $C\subseteq A$, נבחר $C=\{0,1,2,3,4\}$. נסיק $|C|=5$.

$f[C]=\{0,1,4,9,16\}\Rightarrow|f[C]|=5=|C|$

לכן התשובה הנכונה היא א'.

שאלה 5

שאלה 5

$f:A\to B$ היא על אם ורק אם לכל קבוצה סופית $D\subseteq B$ מתקיים $|f^{-1}[D]|=|D|$

$f^{-1}[D]$ מתאר את אוסף המקורות, פונק' f על לפי נתון, ולפי הגדרת פונק' על - כל איבר בקבו' B מתקבל כערך של פונק', כלומר, לכל איבר בטווח B מתאים לפחות איבר אחד מהתחום A, לפיכך ייתכן כי קיימים $x_1,x_2\in A$ שונים שעבורם מתקבל $y_1\in B$ זהה. לכן $|D|\neq|f^{-1}[D]|$

לכן התשובה הנכונה היא ב'.