10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
א	ב	א	ב	ב	א	ב	א	א	ב
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
א	ב	ב	ב	א	ב	ב	א	ב	ב

פתרון ממ"ח 04

מגיש: לירון אפוסטול

בשאלות 1-3 האות A מסמנת קבוצה בעלת 3 איברים.

שאלה 1

מספר היחסים שניתן להגדיר על A הוא 9

שאלה 1

יחס הוא תת-קבוצה של $A\times A$, לכן סך היחסים על A הוא $2^{|A|^2}$, אז לקבוצה בעלת 3 איברים יש $|P(A\times A)|=2^{|A\times A|}=2^9=512$.

לכן, לא נכון

שאלה 2

מספר היחסים האנטי רפלקסיביים על A הוא 2^6

שאלה 2

יהי קבוצה B בעלת כל הזוגות הרפלקסיביים, לכן $|B|=3$, אם כך, מספר היחסים האנטי-רפלקסיביים הוא $|P[(A\times A)\setminus B]|$, לכן $2^{3\cdot3-3}=2^6$

לכן, נכון

שאלה 3

מספר היחסים על A שווה למספר הפונקציות מ- A ל- $P(A)$

שאלה 3

לפי שאלה 1, מס' היחסים על A הוא 2^9 ו- $P(A)=2^3=8$. מס' הפונקציות מ-A ל-$P(A)$ הוא $2^9=|P(A)|^{|A|}=8^3=512$

לכן, נכון

בשאלות 4 - 11 נתייחס לקבוצה $A=\{1,2,3,4,5,6\}$

שאלה 4

מספר הפונקציות $f:A\to A$ המקיימות $f[\{1,2,3\}]=\{1,2,3\}$ שווה מספר הפונקציות $f:A\to A$ המקיימות $f^{-1}[\{1,2\}]=\varnothing$.

שאלה 4

נחשב את מס' הפונקציות $f:A\to A$ המקיימות $f[\{1,2,3\}]=\{1,2,3\}$
יש $3!$ אפשרויות להתאים איברים ל-1,2,3 ולאחר מכן 6 אפשרויות להתאים ל-4,5,6. לכן:

$3!\cdot6^3=6^4=36^2$

בסוג השני, אף איבר ב-A אינו מותאם ל-1,2 כלומר יש 4 אפשרויות ל-6 איברים, דהיינו

$4^6=(4^2)^3=16^3>36^2$

לכן, לא נכון

שאלה 5

מספר הפונקציות $f:A\to A$ שהן חד-חד-ערכיות שווה למספר הפונקציות $f:\{1,2,3,4,5\}\to A$ שהן חד-חד-ערכיות.

שאלה 5

יש $6!$ פונקציות מהסוג הראשון, אולם מהסוג השני $6!\cdot 1=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2$

לכן, נכון

שאלה 6

מספר הפונקציות $f:A\to A$ המקבלות את הערך 1 פעם אחת, את הערך 2 פעמיים ואת הערך 3 שלוש פעמים, גדול ממספר הפונקציות $f:A\to A$ המקבלות פעמיים כל אחד מן הערכים 1,2,3.

שאלה 6

בקבוצה A יש שישה איברים, מהסוג הראשון יש 6 אפשרויות לבחור את האיבר שמתאים ל-1, $\binom{6}{1}$, לכל אפשרות כזו נבחר 2 איברים שמתאימים ל-2, כלומר $\binom{5}{2}$, ושלושת האיברים הנותרים נקבעים. לכן

$$\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{2}\cdot 1=\frac{\cancel{6!}^{6}}{1!\,\cancel{5!}}\cdot\frac{5!}{2!\,3!}=6\cdot\frac{5\cdot\cancel{4}^{2}}{\cancel{2!}}=6\cdot5\cdot2=60$$

מהסוג השני, נקבל

$$\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}=\frac{6!}{2!\,\cancel{4!}}\cdot\frac{\cancel{4!}}{2!\,2!}\cdot\cancel{1}=\frac{6!}{(2!)^3}=\frac{120\cdot3\cdot2}{8}=\frac{720}{8}=90$$

$$90\neq60$$

לכן, לא נכון

שאלה 7

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f:A\to A$ המקיימות $f[\{1,2\}]=\{1,2\}$ קטן ממספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f:A\to A$ המקיימות $f[\{1,2,3\}]=\{1,2,3\}$.

שאלה 7

מהסוג הראשון: $2!\cdot4!=2\cdot24=48$ מהסוג השני, $(3!)^2=36$

$$48\neq36$$

לכן, לא נכון

שאלה 8

מספר הזוגות הסדורים $\langle B,C\rangle$ שבהם $B,C\subseteq A$, $|B|=|C|=2$ ו-$B\cap C=\varnothing$ שווה למספר המילים באורך 6 שבהן כל אחת מהספרות 0,1,2 מופיעה פעמיים.

שאלה 8

מספר הזוגות הסדורים עפ"י התנאים: $\binom{6}{2}\binom{4}{2}=90$. מספר המילים באורך 6 עפ"י התנאים

$$\binom{6}{2}\binom{4}{2}\cancel{\binom{2}{2}}^{1}=90$$

לכן, נכון

שאלה 9

מספר הקבוצות $\{B,C\}$ שבהן $B,C\subseteq A$, $|B|=|C|=3$ ו- $B\cap C=\varnothing$ שווה למספר המילים באורך 6 שבהן כל אחת מהספרות 0,1 מופיעה שלוש פעמים.

שאלה 9

מס' הקבוצה $\binom{6}{3}\cancel{\binom{3}{3}}^{1}=\frac{6!}{3!\,3!}=\frac{\cancel{6}\cdot5\cdot4}{\cancel{6}}=20$, זאת נחלק ב-2 עקב ספירות כפולות, לכן 10 קבוצות, מס' המילים עפ"י התנאים הוא $\binom{6}{3}\cancel{\binom{3}{3}}^{1}=20$

$$20\neq10$$

לכן, לא נכון

שאלה 10

מספר הזוגות הסדורים $\langle B,C\rangle$ שבהם $B,C\subseteq A$, $|B|=2,\ |C|=3$ ו- $B\cap C=\varnothing$ שווה למספר המילים באורך 6 שבהן 0 מופיע פעם אחת, 1 מופיע פעמיים ו- 2 מופיע שלוש פעמים.

שאלה 10

מהסוג הראשון: $\binom{6}{3}\binom{3}{2}=\frac{6!}{3!\,\cancel{3!}}\cdot\frac{\cancel{3!}}{2!\,1!}=\frac{6\cdot5\cdot4}{2}=60$, מס' המילים $\binom{6}{1}\binom{5}{2}\cdot\cancel{\binom{3}{3}}^{1}=\frac{6!}{1!\,\cancel{5!}}\cdot\frac{\cancel{5!}}{2!\,\cancel{3!}}=\frac{6\cdot5\cdot4}{2}=60$

$$60=60$$

לכן, נכון

שאלה 11

מספר יחסי השקילות השונים על A שהם בעלי שלוש מחלקות בדיוק הוא גדול מ- 100.

שאלה 11

חלוקה זו מתארת מס׳ האפשרויות לחלק את A ל- 3 קבוצות, כלומר

$$\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{6!}{2!\cancel{4!}}\cdot\frac{\cancel{4!}}{(2!)^2} = \frac{6!}{(2!)^3} = \frac{6!}{8} = \frac{6\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot3\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{8}} = 90 \qquad 90<100$$

לכן, לא נכון

שאלה 12

יש בדיוק 78 הפונקציות $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4,5\}$ המקיימות $\{1,2,3\}\subseteq f[\{1,2,3,4\}]$

שאלה 12

צריך לשייך לפחות 3 איברים ב- $\{1,2,3,4\}$ ל- $\{1,2,3\}$. ובחר 3 איברים מקושרים לשלושת הערכים גם נחלק בערכים. בבחירה הראשונה $\binom{4}{3}$ בשנייה $3!$ אפשרויות, ולא אפשרות כבאה יש 5 אפשרויות

$$5\cdot\binom{4}{3}\cdot3! = 5\cdot\frac{4!}{\cancel{3!}1!}\cdot\cancel{3!} = 5\cdot\overset{24}{4!} = 120$$

לכן, לא נכון

שאלה 13

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4,5\}$ המקיימות $\{1,2,3\}\subseteq f[\{1,2,3,4\}]$

שווה למספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4,5\}$ המקיימות $\{1,2\}\not\subseteq f[\{1,2,3,4\}]$

שאלה 13

מהסוג הראשון $\binom{4}{3}\cdot3!\cdot2=48$

מהסוג השני רק אחד מבין השניים נמצאים בתמונה, אז יש $4!=24$, כפול 2 כי נמצא בתמונה לכן
$24\cdot2=48$

לכן, נכון

שאלה 14

מספר הדרכים לפיזור 12 כדורים זהים ב- 8 תאים שונים כך שבשני התאים הראשונים ביחד ייִמצאו לפחות 10 כדורים, הוא 396

שאלה 14

בחירת K עצמים מתוך n, עם חזרות $D(n,k)=\binom{n-1+k}{k}$

אם כן $D(2,10)\cdot D(6,2)+D(2,11)\cdot D(6,1)+D(2,12)$

$$\binom{11}{10}\binom{7}{2}+\binom{12}{11}\cdot\binom{6}{1}+\binom{13}{12}=316$$

לכן, לא נכון

שאלה 15

הפתרון לשאלה הקודמת הוא המקדם של x^{12} בפיתוח של $x^{10}(1+x+x^2+\cdots)^8$

נשים לב ל-x^{10} מחוץ לסוגריים, כלומר אנחנו מחפשים את המקדם של x^2 בתוך הטור האינסופי $(1+x+x^2+\dots)^8$

נעזר בנוסחה

$$(1+x+x^2+\dots)^n=\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{D(n,k)}_{\text{מקדם } x^k}x^k$$

כלומר $n=8$ ו- $k=2$

$$D(8,2)=\binom{8-1+2}{2}=\binom{9}{2}=\frac{9!}{2!7!}=\frac{9\cdot8}{2}=9\cdot4=36$$ לכן $\neq 316$

לכן, לא נכון

שאלה 16

מספר הדרכים לפיזור 12 כדורים זהים ב- 8 תאים שונים כך ששניים מן התאים יכילו לפחות 5 כדורים כל אחד, הוא 1008

נבחר 2 תאים ב- $\binom{8}{2}$ אפשרויות ונשים בהם 5 כדורים כל אחד, כעת נותרו 2 כדורים שנוכל לפזר בכל אחד מן התאים (כולל התאים שבחרנו בהתחלה) באין הגבלה ונוכל לעשות ב- D(8,2) אפשרויות

$$\binom{8}{2}\cdot D(8,2)=\binom{8}{2}\binom{9}{2}=\frac{\cancel{8!}^{\,8\cdot7}}{2!\,\cancel{6!}_{2}}\cdot\frac{\cancel{9!}^{\,9\cdot8}}{2!\,\cancel{7!}_{2}}$$

כן

$$=\frac{\cancel{8}^{4}\cdot7\cdot9\cdot\cancel{8}^{4}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}}=16\cdot7\cdot9=1008$$

כן, נכון

שאלה 17

הפתרון לשאלה הקודמת הוא המקדם של x^{12} בפיתוח של $(x^5+x^6+x^7+\cdots)^2(1+x+x^2+\cdots)^8$

$$(x^5+x^6+x^7+\dots)^2(1+x+x^2+\dots)^8$$

$$[x^5(1+x+x^2+\dots)]^2\cdot(1+x+x^2+\dots)^8$$

$$x^{10}(1+x+x^2+\dots)^2\cdot(1+x+x^2+\dots)^8=x^{10}(1+x+x^2+\dots)^{10}$$

המקדם של x^{12} בביטוי הזה הוא המקדם של x^2 ב- $x^{10}(1+x+x^2+\dots)^{10}$ שהוא D(10,2)

$$=\binom{11}{2}=\frac{\cancel{11!}^{\,11\cdot10}}{2!\,\cancel{9!}}=11\cdot5=55\neq1008$$

לא נכון

שאלה 18

מספר הדרכים לפיזור 12 כדורים זהים ב- 8 תאים שונים כך ששניים מן התאים יכילו ביחד לפחות 10 כדורים הוא $28\cdot316$

נבחר זוג תאים, $\binom{8}{2}=28$ לפי שאלה 14 נקבל $28\cdot316$ שאותם סופרים פעמיים למשל את המצב בו בתא הראשון יש 2 כדורים, בשני 8 ובשלישי 2 לכן פחות מ- $28\cdot316$

לא נכון