מתמטיקה בדידה 20476

פתרון ממ"ן 11

מגיש: לירון אבוטבול, ת.ז.: [redacted]

שאלה 1 (24 נקי)

לכל אחת מהטענות הבאות קבעו אם היא נכונה או לא.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק, די לרשום בכל סעיף נכון / לא נכון.

א. $1 \in \{1,\{1\}\}$ ב. $1 \in \{\{1\}\}$ ג. $\{2\} \subseteq \{1,\{1\},\{2\}\}$ ד. $\{\varnothing\} \subseteq \{1,\{\varnothing\}\}$

ה. $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing,\{1\}\}$ ו. $\{1\} \in \{\mathbf{N}\}$ ז. $|\{1,\mathbf{N}\}| = |\{1,2\}|$ ח. $|\mathcal{P}(\{2,\varnothing\})| = 2 \cdot |\mathcal{P}(\{\varnothing\})|$

שאלה 1

א. נכון
ב. לא נכון
ג. לא נכון
ד. לא נכון
ה. נכון
ו. לא נכון
ז. נכון
ח. נכון

שאלה 2 (24 נקי)

יהיו A,B,C קבוצות. הוכיחו את הטענות הבאות:

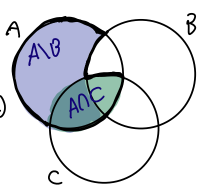
א. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

ב. אם $\{A\} \subseteq \mathcal{P}(B)$ אז $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

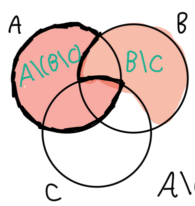
ג. אם $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ אז $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$.

שאלה 2

החלק המסומן: $(A\setminus B)\cup(A\cap C)$



החלק האדום: $A\setminus(B\setminus C)$



א. צ"ל $(A\setminus B)\cup(A\cap C)$ שווה ל- $A\setminus(B\setminus C)$

נבצע פיתוח מצד שמאל לצד ימין:

$$A\setminus(B\setminus C) \underset{\text{לפי משפט 1.24}}{=} A\setminus(B\cap C^c) \underset{\text{לפי שאלה 41}}{=} (A\setminus B)\cup(A\setminus C^c) \underset{\text{לפי משפט 1.24}}{=} (A\setminus B)\cup(A\cap C) \quad (I)$$

מ.ש.ל, לפי I, נבצע צידו ימני של הביטוי. $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$

ב. אם $\{A\}\subseteq P(B)$ אז $P(A)\subseteq P(B)$

לפי ההנחה $\{A\}\subseteq P(B)$ ומאחר ש- $A\in\{A\}$ נסיק ש- $A\in P(B)$ ומכאן נובע ש- $A\subseteq B$.$^{(I)}$

לפי הגדרה 1.4 בעמוד 25 (הגדרת ההכלה), הניסוח הפורמלי $P(A)\subseteq P(B)$ הוא $\forall_x(x\in P(A)\to x\in P(B))$.

נניח ש- $x\in P(A)$, אזי $x\subseteq A$ ולפי (I) נקבל ש- $x\subseteq B$, היות ו-x מוכל ב A ו- A מוכל ב- B,

כלומר $x\in P(B)^{(II)}$ — מ.ש.ל $P(A)\subseteq P(B)$

(II) כל קבוצה שייכת לקבוצת החזקה שלה היות וכל קבוצה מוכלת בעצמה.

ג. בתורת הקבוצות, כל קבוצה שייכת לקבוצת החזקה שלה היות וכל קבוצה מוכלת בעצמה, כלומר לכל קבוצה A מתקיים $A\in P(A)$. לפיכך, $A\cup B\in P(A\cup B)$ ולפי נתון נובע $A\cup B\in P(A)\cup P(B)$ כלומר $A\cup B\in P(A)$ או $A\cup B\in P(B)$ ומכך נובע $A\cup B\subseteq A$ או $A\cup B\subseteq B$. לפי הגדרת איחוד והכלה, אם $A\cup B\subseteq A$ אז $B\subseteq A$ ואם $A\cup B\subseteq B$ אז $A\subseteq B$

מ.ש.ל

שאלה 3 (24 נקי)

יהיו A,B,C קבוצות חלקיות לקבוצה אוניברסלית U. הוכיחו את הטענות הבאות :

א. אם $(A\cap B)^c \subseteq A$ אז $A=U$

ב. $A^c\Delta B = A\Delta C$ אז $C=B^c$

ג. אם $x\in (A\cap B)\setminus C$ אז $x\notin A\Delta B\Delta C$.

א. אם $(A\cap B)^c\subseteq A$ אז $A=U$

לפי משפט 1.26 (דה מורגן), $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$, כלומר מתוך נתון ומשפט 2.1.1, $A^c\cup A^B\subseteq A$ אומ"מ $A^c\subseteq A$ ו- $B^c\subseteq A$ - קבוצה עם איברים לא יכולה להיות מוכלת בתוך הקבוצה הריקה, לכן אם $A^c\subseteq A$ כפי שקיבלתי, אז $A^c=\emptyset$ ו- $A=U$ מ.ש.ל

ב. אם $A^c\Delta B=A\Delta C$ אז $C=B^c$

1. המשלים (ביחס לקבוצה אוניברסלית U) ע"פ הגדרתו
$\overline{B}=B^c=\{X\in U \mid X\notin B\} = U\setminus B$
כלומר, כל האיברים שלא נמצאים ב- B, נמצאים במשלים ע"פ קבוצת הדיון, במקרה זה - U

2. נפעיל הפרש סימטרי על שני צדדיו של הנתון
$A\Delta(A^c\Delta B)=A\Delta(A\Delta C)$

3. לפי עמוד 43 שאלה 32 פעולת ההפרש הסימטרי היא קיבוצית
דהיינו:
$(A\Delta A^c)\Delta B=(A\Delta A)\Delta C$

4. לפי הגדרת ההפרש הסימטרי בעמוד 43:
$A\Delta A^c=(A\cup A^c)\setminus(A\cap A^c)$

5. לפי משפט 1.23

$\begin{cases} A\cup A^c=U \\ A\cap A^c=\emptyset \end{cases}$

לכן, בהמשך ל-4 נובע ממשפט 1.23 $A\Delta A^c=U\setminus\emptyset=U$

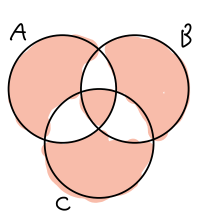
6. בהמשך ל-3 (צד ימין של השוויון), לפי שאלה 31 $A\Delta A=\emptyset$
כלומר, לפי סעיפים 3,4,5 ו-6 הביטוי שלנו הינו
$U\Delta B=\emptyset\Delta C \Rightarrow U\Delta B=C$

7. לפי הגדרת הפרש סימטרי בעמוד 43
$U\Delta B=(U\cup B)\setminus(U\cap B)=U\setminus B$

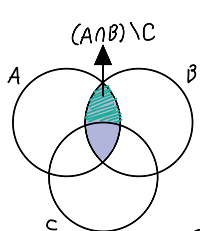
8. לפי סעיף 1,6 ו-7
$U\Delta B=U\setminus B=B^c=C$

מ.ש.ל

ג. אם $X\in(A\cap B)\setminus C$ אז $X\notin A\Delta B\Delta C$



$A\Delta B\Delta C$



1. ע"פ דיאגרמות וון נבחין $X\in A$ וגם $X\in B$ וגם $X\notin C$.
2. פעולת ההפרש הסימטרי היא קיבוצית (שאלה בבגרת)
בביינו
$X\notin A\Delta B\Delta C \Rightarrow X\notin (A\Delta B)\Delta C$
3. ע"פ הגדרת הפרש סימטרי וסעיף 1 ניתן לקבוע
$X\notin A\Delta B$
4. לפי סעיפים 3-1 והגדרת הפרש סימטרי, X (1) אינו שייך ל-C
ואינו שייך ל- $A\Delta B$, ולכן נובע $X\notin A\Delta B\Delta C$
(ניתן לראות את זה בדיאגרמות וון מכך שאין נקודה בחורה)

שאלה 4 (28 נק')

בשאלה זו **N** היא הקבוצה האוניברסלית. לכל $n \in \mathbf{N}$ נסמן $A_n = \{0,1,2,3,\dots,n\}$.

עבור כל אחת מן הקבוצות הבאות, קבעו אם היא שווה או לא לאחת הקבוצות $\mathbf{N}$, $\mathbf{N} \setminus \{0\}$, $\varnothing$.

נמקו טענותיכם.

א. $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n^{\,c}$ ב. $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n^{\,c}$ ג. $\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_{2n} \setminus A_n)$ ד. $\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_{n+1} \cap A_n^{\,c})$

א. $$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n^{c} = \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right)^{c} = (\{0\})^{c} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

דה מורגן משפט 1.30

פעולת החיתוך מתארת את התחום המשותף, בפעולת החיתוך האינסופי קל לראות שהאיבר היחידי המשותף לכל הוא 0 (A_0) היות והוא מופיע בכל A_n (האתחלה מההגדרה כמובן)

$A_0 = \{0\}$
$A_1 = \{0,1\}$
$A_2 = \{0,1,2\}$

לכן, המשלים הינו הקבוצה האוניברסלית פרות האיבר המשותף ונקבל: $\mathbb{N} \setminus \{0\}$

ב. $$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n^{c} = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)^{c} = (\mathbb{N})^{c} = \varnothing$$

דה מורגן משפט 1.30

בהינתן קבוצות A,B, פעולת האיחוד מתארת את קבוצת כל האיברים הנמצאים ב- A או B.
כלומר, $\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \dots$ נקבל את הקבוצה האוניברסלית, שהיא $\mathbb{N}$ לפי השאלה.
המשלים של $\mathbb{N}$ ביחס לקבוצת הדיון $\mathbb{N}$ הוא הקבוצה הריקה – היות והמשלים של הקבוצה האוניברסלית הוא תמיד הקבוצה הריקה. לכן הקבוצה שלנו שווה ל- $\varnothing$

ג. $$\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_{2n} \setminus A_n) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$$

נבצע מספר הצבות של n ע"מ להבין את החוקיות

$\underline{n=0}$ $A_0 \setminus A_0 = \varnothing$
$\underline{n=1}$ $A_2 \setminus A_1 = \{0,1,2\} \setminus \{0,1\} = \{2\}$
$\underline{n=2}$ $A_4 \setminus A_2 = \{3,4\}$

מתוך ההצבות, נבחין כי כל האיברים בקבוצה האוניברסלית יתקבלו בפעולת האיחוד האינסופי פרט למספרים 0 ו-1, כלומר עבור $n \geq 1 \Leftarrow A_{2n} \setminus A_n = \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$ ולכן $\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_{2n} \setminus A_n) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$
הקבוצה בסעיף זה אינה שווה לאף אחת מהקבוצות הנתונות: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\varnothing$

ד. $$\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_{n+1} \cap A_n^{c}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

נבצע מספר הצבות של n ע"מ להבין את החוקיות

$\underline{n=0}$ $(A_1 \cap A_0^{c}) = (\{0,1\} \cap \mathbb{N} \setminus \{0\}) = \{1\}$
$n=1$ $(A_2 \cap A_1^{c}) = (\{0,1,2\} \cap \mathbb{N} \setminus \{0,1\}) = \{2\}$
$\vdots$

מתוך ההצבות, נבחין כי בעבור כל n נקבל $n+1$
לכן, משמעות האיחוד האינסופי במקרה זה הינו כל המספרים הטבעיים החל מ-1
כלומר
$$\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_{n+1} \cap A_n^{c}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$