פתרון ממ"ן 12

מגיש: לירון אבוטבול, ת.ז: [redacted]

שאלה 1

א. לפי הגדרה 2.B - יחס מעל קבוצה A "יקרא יחס שקילות אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי. ננסה להוכיח ש-R יחס שקילות ע"פ הגדרה זו. נסמן $P(\{1,2,3,4\})$ ב- K.

I) <u>רפלקסיביות</u>: נתון לכל $A\in K$ מתקיים $A\cap\{1,2\}=A\cap\{1,2\}$, כלומר ARA לכן R יחס רפלקסיבי.

II) <u>סימטריות</u>: נניח ARB, $A,B\in K$ - לפי הגדרת היחס R, $A\cap\{1,2\}=B\cap\{1,2\}$, מתכונות שיוויון נובע $B\cap\{1,2\}=A\cap\{1,2\}$, כלומר ARB וגם BRA ולכן R יחס סימטרי.

III) <u>טרנזיטיביות</u>: לכל $A,B,C\in K$ אם ARB ו- BRC אז מתקיים $A\cap\{1,2\}=B\cap\{1,2\}$ וגם $B\cap\{1,2\}=C\cap\{1,2\}$, לפי טרנז' של תכונות השיוויון נובע $A\cap\{1,2\}=C\cap\{1,2\}$ משמע ARC ולכן יחס R הוא טרנזיטיבי.

לפי I,II,III יחס R הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי - כלומר, לפי הג' 2.13 יחס R הוא יחס שקילות.

יחס S אינו יחס שקילות מאחר ואינו רפלקסיבי, לכל $A\in K$ לפי הג' S $A\cap\{1,2\}\subset A\cap\{1,2\}$ $\Leftarrow$ ניתן לראות כי האופרנדים בשני צידי הפסוק זהים, כלומר $A\cap\{1,2\}=A\cap\{1,2\}$ ולכן לא מתקיים הכלה ממש - מאחר ו- $A\subset B$ אילו כל איבר של A נמצא ב- B ובנוסף $A\neq B$ אז נשים לב כי אין כל איבר של $A\cap\{1,2\}$ נמצא ב- $A\cap\{1,2\}$ (אותו ביטוי) אך $A\cap\{1,2\}=A\cap\{1,2\}$ לכן $A\cap\{1,2\}\not\subset A\cap\{1,2\}$.

<u>מחלקות השקילות של R</u>

לפי הג' R, $A,B\in K$ נמצאות ביחס R אמ"מ החיתוכים שלהן עם הקב' $\{1,2\}$ שווים זה לזה, כלומר מחלקות השקילות של R הן כל הקבוצות שהחיתוך שלהן עם $\{1,2\}$ זהים.

$R_{\emptyset}=\{\emptyset,\{3\},\{4\},\{3,4\}\}\Longrightarrow$ כל הקב' שהחיתוך שלהן עם $\{1,2\}$ הוא $\emptyset$

$R_{\{1\}}=\{\{1\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,3,4\}\}\Longrightarrow$ כל הקב' שהחיתוך שלהן עם $\{1,2\}$ הוא $\{1\}$

$R_{\{1\}}=\{\{2\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,3,4\}\}\Longrightarrow$ כל הקב' שהחיתוך שלהן עם $\{1,2\}$ הוא $\{2\}$

$R_{\{1,2\}}=\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,3,4\}\}\Longrightarrow$ כל הקב' שהחיתוך שלהן עם $\{1,2\}$ הוא $\{1,2\}$

ב, יחס סדר מלא ע"פ הגדרתו (2.19) הינו יחס אנטי-רפלקסיבי, טרנזיטיבי ומשווה, בעוד יחס סדר חלקי ע"פ הגדרתו (2.29) נבדל מסדר מלא בכך שאינו משווה. כאמור, בסעיף ג' מצאנו כי יחס R הינו רפלקסיבי, והוכחנו שיחס S אינו רפלקסיבי, כעת נברר האם יחס S טרנזיטיבי ו-משווה. נסמן $P(\{1,2,3,4\})$ ב- K.

<u>טרנזיטיביות</u>:

לכל $A,B,C\in K$ אם ASB ו- BSC אז $A\cap\{1,2\}\subset B\cap\{1,2\}$ וגם $B\cap\{1,2\}\subset C\cap\{1,2\}$ ולכן לפי טרנז' של הכלה ממש $A\cap\{1,2\}\subset C\cap\{1,2\}$ ולכן S הוא יחס טרנזיטיבי

אנטי-רפלקסיבי (הוכחה פורמלית, מנומק בסעיף א')
לכל $A\in K$ לפי הג' S לא מתקיים ASA (בפרט, $A\not S A$) מכיוון ש- $A\cap\{1,2\}\subset B\cap\{1,2\}$ ולפי הג' מוכל ממש $A\cap\{1,2\}\neq B\cap\{1,2\}$
לכן R אנטי-רפלקסיבי ואינו משווה

לכן, R יחס סדר חלקי.

לפי הגדרה של איבר מינימלי/מקסימלי (2.25 עמ' 102): תהי $\langle A,\prec\rangle$ קבוצה סדורה חלקית.
איבר a ב-A ייקרא איבר מינימלי ב-$\langle A,\prec\rangle$ אם אין x ב-A אשר $x\prec a$ ו-איבר b ב-A ייקרא איבר מקסימלי ב-$\langle A,\prec\rangle$ אם אין x ב-A אשר $b\prec x$. לפי הגדרות אלו ו-סימון $P(\{1,2,3,4\})$ ב-K

$2^{|A|}=2^4=16$

חישוב עזר: $K=P(\{1,2,3,4\})=(\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\})$

איברים מינימליים: לכל $A\in K$ ייקרא איבר מינימלי אמ"מ $A\cap\{1,2\}=\emptyset$, קל לראות שלא קיימת קבוצה $X\in K$ כך ש- $X\cap\{1,2\}\subset A\cap\{1,2\}$ לכן לכל קבוצה $A\in K$ כך ש- $A\cap\{1,2\}=\emptyset$ הוא איבר מינימלי בקבוצה הסדורה (K,S), לכן הקבוצות $\emptyset,\{3\},\{4\},\{3,4\}$ הן איברים מינימליים.

איברים מקסימליים: לכל $A\in K$ ייקרא איבר מקסימלי אמ"מ $A\cap\{1,2\}=\{1,2\}$, נשים לב שלא קיימת קבוצה $X\in K$ כך ש- $A\cap\{1,2\}\subset X\cap\{1,2\}$
לכן, $\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,3,4\}$ הם איברים מקסימליים ב- (K,S).

שאלה ב

א. נוכיח ש-S יחס שקילות:
רפלקסיביות: לכל $x,x\in A$ מתקיים $\frac{x}{x}=2^0$ לכן $xSx \Rightarrow$ נובע S יחס רפלקסיבי
סימטריה: לכל $x,y\in A$ אם xSy אז קיים מס' שלם j כך ש- $\frac{y}{x}=2^j$, אז $\frac{x}{y}=2^{-j}$
ומאחר ש- $-j\in\mathbb{Z}$ נקבל ש- ySx ולכן S יחס סימטרי
טרנזיטיביות: לכל $x,y,z\in A$ אם xSy ו- ySz אז קיימים מספרים שלמים k,j כך ש- $\frac{y}{x}=2^j$ ו- $\frac{z}{y}=2^k$,
לכן $\frac{z}{x}=\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{x}=2^j\cdot2^k=2^{j+k}$ (כאשר $j+k$ שלם). נובע xSz לכן S יחס טרנזיטיבי.

לכן S יחס שקילות

ב. לפי הג' S, לכל $x,y\in A$ מתקיים xSy אמ"מ המנה שלהם היא מהצורה של 2^n לכל n שלם. לפיכך, כל מספר $x\in A$ שייך למחלקה של מספר אי-זוגי מסוים ולכן הנצ' של המס' האי-זוגיים הן כל מחלקות השקילות של היחס S. כלומר, כל מחלקת שקילות של S היא מהצורה $S_K=\{(2k+1)\cdot2^j \mid j\in N\}$ כאשר $K\in N$

ג. S יחס שקילות, כלומר רפלקסיבי בסתירה להג' יחס סדר מלא/חלקי, לכן נראה ש- R הוא יחס סדר חלקי
אנטי-רפלקסיביות: לפי הג' R לכל $x,y\in A$, xRy אמ"מ קיים מספר טבעי $i>0$ כך ש- $\frac{y}{x}=2^i$, ומאחר שמתקיים $1=2^0<2^i$
נקבל שאם xRy אז בהכרח $x<y$ ולכן $x\not R x$.
טרנזיטיביות: לפי הג' R, לכן $x,y,z\in A$, אם xRy ו- yRx אז קיים מספרים טבעיים חיוביים k,j כך ש- $\frac{y}{x}=2^j$ ו- $\frac{z}{y}=2^k$
לכן $\frac{z}{x}=\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{x}=2^j\cdot2^k=2^{j+k}$ (כאשר $j+k$ מס' טבעי חיובי), לכן xRz, כלומר, R טרנזיטיבי
משווה: מתוך $A=N\setminus\{0\}$ ניקח $1,3\in A$ כך ש- $1\neq3$
$1\not R 3 \Leftarrow$ לא קיים $j\in Z$ כך ש- $\frac{1}{3}=2^j$
$3\not R 1 \Leftarrow$ לא קיים $j\in Z$ כך ש- $\frac{3}{1}=2^j$, לכן R אינו משווה

נובע כי R הוא יחס סדר חלקי.

ד. לפי הגדרה של איבר מינימלי/מקסימלי (2.25 עמ' 102): תהי $\langle A,\prec\rangle$ קבוצה סדורה חלקית.
איבר a ב-A ייקרא איבר מינימלי ב-$\langle A,\prec\rangle$ אם אין x ב-A אשר $x\prec a$ ו-איבר b ב-A ייקרא איבר מקסימלי ב-$\langle A,\prec\rangle$ אם אין x ב-A אשר $b\prec x$. לפי הגדרות אלו,

<u>איברים מקסימליים:</u> לכל $x\in\mathbb{N}$ מתקיים $xR(2x)$ לפי היחס הנתון (לכל $i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, 2^i מבטא חזקה חיובית של 2, כלומר, גורמיו הראשוניים הם 2)
לכן <u>אין</u> איברים מקסימליים ביחס R.

<u>איברים מינימליים:</u> לכל $x\in A$ מתקיים $\frac{2k+1}{x}\neq 2^i$ לכל i טבעי (היות ומחולק כל מס' אי-זוגי בכל מס' טבעי אינו מתחלק ב-2 ללא שארית) לכן כל מס' טבעי אי-זוגי $2k+1$ הוא איבר מינימלי ביחס R כמו כן, כל מס' טבעי זוגי הוא מהצורה $y=(2k+1)\cdot 2^i$ כאשר $k\in\mathbb{N}$ ו-i טבעי, במקרה זה $\frac{y}{2k+1}=\frac{\cancel{(2k+1)}2^i}{\cancel{(2k+1)}}=2^i$ ולכן $(2k+1)Ry$ לכן y לא מינימלי.
לכן האיברים המינימליים ביחס R הם כל המספרים <u>האי-זוגיים</u>

<u>שאלה 3</u>

א. $\Leftarrow$ (כיוון ראשון)

נניח f חח"ע ונניח $m,n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}$ כך ש-$m\neq n$ בה"כ נניח $n<m$,
ונניח שבגלל שלקחנו אינדקסים שונים אחד מהשני, גם אוספי התמונות יהיו שונים, כלומר $f[A_m]\neq f[A_n]$ (אי שוויון מהצורה $a\neq b$ הוא יחס סימטרי, כלומר $b\neq a$ שקול ל-$a\neq b$)
לפי משפט 3.8 א (עמוד 138), נניח בשלילה שאוספי התמונות זהים אחד לשני, כלומר $f[A_m]=f[A_n]$, בסתירה לנתון.

$f^{-1}[f[A_m]]=f^{-1}[f[A_n]]$, לפי נתון ש-$f$ חח"ע אוסף התמונות של קבוצה מסוימת זו הקבוצה המסוימת, כלומר $A_m=A_n$, ואם כך נוכל להסיק ש-$m=n$
מפני שיש להם אותם איברים (קבוצות כאלו), כלומר $A_m=\{0,1,\dots,m\}=\{0,1,\dots,n\}=A_n$, מכאן $m=n$ ולכן בסתירה לנתון, לכן $f[A_n]\neq f[A_m]$.
ואם $m=-1$ אז הדרך לזה תקפה מאחר וכן $m\neq n$ לכן אם $m=-1$ לא ייתכן ש-$n=-1$ (ולהיפך) ואוסף התמונות של קבוצה ריקה (לפי נתון, סימון $A_{-1}=\emptyset$) הוא ריק.
$f^{-1}[f[A_{-1}]]=f^{-1}[f[\emptyset]]=f^{-1}[\emptyset]=\emptyset$

$\Rightarrow$ (כיוון שני)
נניח שלכל $m,n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}$, $m\neq n$ מתקיים $f[A_m]\neq f[A_n]$ ונוכיח f חח"ע, נניח $x,y\in\mathbb{N}$ כך ש $x\neq y$ ובלי הגבלת כלליות $x<y$
ונוכיח $f(x)\neq f(y)$.

$y-1\neq y \Leftarrow$ מהנתון $f[A_{y-1}]\neq f[A_y]$ מכיוון ש-$A_{y-1}\subset A_y$ נובע $f[A_{y-1}]\subset f[A_y]$, מכאן נובע $f(y)\in f[A_y]$ וגם $f(y)\notin f[A_{y-1}]$, לכל $0\leq t\leq y-1$, $f(y)\neq f(t)$ ובפרט עבור $0\leq x<y$ נקבל $f(x)\neq f(y)$, לכן f <u>חח"ע</u>.

ב. $\Leftarrow$ נניח f על ונוכיח שאם $m,n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}$, $m\neq n$ בלי הגבלת כלליות $n<m$ אז $f^{-1}[A_m]\neq f^{-1}[A_n]$
לפי משפט 3.8 ב, נניח בשלילה $f^{-1}[A_m]=f^{-1}[A_n] \Rightarrow f[f^{-1}[A_m]]=f[f^{-1}[A_n]] \Rightarrow$ נתון f פונק' על ולכן $A_m=A_n \Rightarrow m=n$
בסתירה לכך שהנחנו ש-$n\neq m$, מכאן נובע שאוספי המקורות לא יכולים להיות זהים אחד לשני, לכן אין ברירה והם שונים אחד מהשני, דהיינו $f^{-1}[A_m]\neq f^{-1}[A_n]$.

$\Rightarrow$ נניח שלכל $m,n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}$ כך ש-$n\neq m$ מתקיים $f^{-1}[A_m]\neq f^{-1}[A_n]$ ונוכיח f על.
כלומר נניח $y\in\mathbb{N}$ ונוכיח שקיים $x\in\mathbb{N}$ כך ש-$f(x)=y$
$y-1\neq y \Rightarrow f^{-1}[A_{y-1}]\neq f^{-1}[A_y]$ וידוע $A_{y-1}\subset A_y$ לכן $f^{-1}[A_{y-1}]\subset f^{-1}[A_y]$ ואין יש הכלה ממש, כלומר קיים $x\in f^{-1}[A_y]$
כך ש-$x\notin f^{-1}[A_{y-1}]$, מכאן נובע (לפי הג' אוסף מקורות) $f(x)\in A_y$ ו-$f(x)\notin A_{y-1}$ והאיבר היחיד ששייך ל-A_y ולא שייך ל-A_{y-1} הוא y ולכן $f(x)=y$, לכן f <u>פונק' על</u>.

שאלה 4

א. נוכיח f חח"ע

נניח $\langle a,b\rangle,\langle m,n\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ כך ש- $f\langle a,b\rangle=f\langle m,n\rangle$ ונוכיח $\langle a,b\rangle=\langle m,n\rangle$

לפי הג' f:

$$f\langle a,b\rangle=f\langle m,n\rangle$$
$$\langle 2a+3b,3a+2b\rangle=\langle 2m+3n,3m+2n\rangle$$

בכדי להוכיח f חח"ע נצטרך להוכיח ש $a=m$ ו $b=n$ כלומר, מדובר בזוגות סדור. לשם כך נשחק עם המשוואה לעיל.

$$\begin{cases}2a+3b=2m+3n \Rightarrow a=\dfrac{2m+3n-3b}{2}\\ 3a+2b=3m+2n\end{cases}$$

$$\frac{6m+9n-9b}{2}+2b=3m+2n$$

$$\cancel{6m}+9n-5b=\cancel{6m}+4n$$
$$-\cancel{5}b=-\cancel{5}n \quad /:-5 \quad \Rightarrow b=n$$

נוכיח $a=m$ בהיעזר בשיוויון שמצאנו לעיל ובמשוואה הראשונה, $\cancel{2}a+\cancel{3b}=\cancel{2}m+\cancel{3b} \quad |:2 \quad \Rightarrow \quad a=m$

לכן f פונק' חח"ע

f לא על כי ל- $\langle 1,1\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ אין מקור $\langle m,n\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ כך ש- $f\langle m,n\rangle=\langle 1,1\rangle$

נניח בשלילה שקיים $\langle m,n\rangle$ כנ"ל.

$$f\langle m,n\rangle=\langle 1,1\rangle$$
$$\langle 2m+3n,3m+2n\rangle=\langle 1,1\rangle$$

$$+\begin{cases}2m+3n=1\\ 3m+2n=1\end{cases} \quad 5m+5n=2 \Rightarrow \mathbb{Z}\ni m+n=\frac{2}{5}\notin\mathbb{Z}$$

לפי נתון m+n מס' שלם, כלומר $\frac{2}{5}$ אינו מס' שלם, כלומר קיבלנו סתירה - לכן f היא לא פונק' על.

ב. נתון $f(m,n)=(2m+3n,3m+2n)$ ו- $\pi_1:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, לפי הרכבת פונקציות:

I) $\pi_1\circ f=\pi(f(m,n))=\pi(2m+3n,3m+2n)$

π_1 לפי הגדרתו, מסמן את ההטלה על הרכיב הראשון, כלומר $\pi_1(m,n)=m$

לפיכך ולפי I נקבל $\pi\circ f=2m+3n$. פונק' חח"ע מקבלת כל ערך פעם אחת לכל היותר, כלומר אין שני איברים בתחום הפונק' שעבורם מקבלת הפונק' אותו ערך בטווח. נראה ש f לא חח"ע ע"י דוגמה נגדית:

$$\pi\circ f=(0,1)=2\cdot0+3\cdot1=3$$
$$\pi\circ f=(3,-1)=2\cdot3+3\cdot(-1)=3$$

קיבלנו איבר תמונה משני מקורות שונים, מכאן נובע $\pi_1\circ f$ לא חח"ע.

ג. לפי הגדרה 3.24 נובע פונק' היא הפיכה אמ"מ היא חח"ע ועל.

נראה g חח"ע: נניח $\langle m,n\rangle,\langle x,y\rangle\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ כך ש- $g\langle m,n\rangle=g\langle x,y\rangle$

$$\langle 2m+3n,3m+2n\rangle=\langle 2x+3y,3x+2y\rangle$$

$$\begin{cases}2m+3n=2x+3y \Rightarrow m=\dfrac{2x+3y-3n}{2}\\ 3m+2n=3x+2y\end{cases} \longrightarrow 3\left(\frac{2x+3y-3n}{2}\right)+2n=3x+2y$$

$$\cancel{6x}+9y-9n=\cancel{6x}+4y-4n$$

$\cancel{5}y=\cancel{5}n \Rightarrow$ נקבל $y=n$ (I, נותר להוכיח $x=m$

נציב n במקום y במשוואה הראשונה: $2m+\cancel{3y}=2x+\cancel{3y}$

$\cancel{2}m=\cancel{2}x \Rightarrow$ נקבל $m=x$ (II

מ- I,II נקבל $\langle m,n\rangle=\langle x,y\rangle$ לכן g חח"ע

נוכיח g פונק' על; נניח $\langle m,n\rangle \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ ונוכיח שקיים מקור $\langle x,y\rangle \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, כלומר מתקיים $g\langle x,y\rangle=\langle m,n\rangle$ כלומר $\langle x,y\rangle$ יקיים

$$\langle 2x+3y,\ 3x+2y\rangle=\langle m,n\rangle$$

$$\begin{cases}2x+3y=m & \cdot 3\\ 3x+2y=n & \cdot 2\end{cases} \Rightarrow - \begin{cases}6x+9y=3m\\ 6x+4y=2n\end{cases} \Rightarrow 5y=3m-2n \ \ :5 \Rightarrow \mathbb{Q}\ni y=\frac{3m-2n}{5}\in\mathbb{Q} \quad \text{(III}$$

נציב את y שמצאנו במשוואה הראשונה בכדי למצוא את X

$$2x+3\left(\frac{3m-2n}{5}\right)=m \Rightarrow 10x+9m-6n=5m \Rightarrow \mathbb{Q}\ni x=\frac{6n-4m}{10}\in\mathbb{Q} \quad \text{(IV}$$

לפי III ו-IV ה"ל פונק' על, לפיה פונק' מקבוצה A ל-B היא על אם לכל איבר בקבוצה B מתקבל כערך של הפונק', כאמור מה שהוכחנו לעיל לכן g היא על.

כאמור, מכך ש-g היא פונק' חח"ע ועל נובע g היא פונק' הפיכה, בכדי למצוא את הפונק' ההפכית לה נציב את המשוואות שקיבלנו.

$$g^{-1}(y,x)=\left(\frac{3m-2n}{5},\ \frac{6n-4m}{10}\right)$$