Matemáticas II

2º Bachillerato

Capítulo 8: Derivadas

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: AITANA, AITOR, AMALIA, ANDREA, CARMEN, CELIA S, FERNANDO, IRENE, ISMAEL F, LAURA, NATALIA, OLIVIA, ROSA, PABLO G, ESPERANZA, LIDIA, CELIA P, ISMAEL C, ENRIQUE, LUCÍA, NEREA, JULIA, ALEJANDRA, JERÓNIMO

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- Haciendo uso de la definición de derivada comprueba que la derivada de $f(x) = sen\frac{1}{x}$ en $x = a$ es igual a $f'(a) = \left(-\frac{1}{a^2}\right)\cos\frac{1}{a}$ si a es distinto de 0

$$\text{Definición de derivada} \rightarrow f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{sen\frac{1}{x} - sen\frac{1}{a}}{x-a} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos L'Hôpital

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 0}{1-0} = -\frac{1}{a^2}\cos\frac{1}{a}$$

2.- Utilizando la definición de derivada comprueba que las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados es el valor dado:

$$\text{Definición de derivada} \rightarrow f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

a) $\boldsymbol{f(x) = x^3}$ en x=2 $\rightarrow f'(2) = 12$

$$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos L'Hôpital

$$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{1} = 12$$

b) $\boldsymbol{g(x) = x+2}$ en x=*a* $\rightarrow g'(a) = 1$

$$g'(a) = \lim_{x\to a}\frac{x+2-a-2}{x-a} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos L'Hôpital

$$g'(a) = \lim_{x\to a}\frac{1}{1} = 1$$

c) $\boldsymbol{h(x) = x^2 cosx}$ en x=0 $\rightarrow h'(0) = 0$

$$h'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2cosx - 0}{x-0} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos L'Hôpital

$$h'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{2xcosx - x^2senx}{1} = 0$$

d) $\boldsymbol{r(x) = \frac{3x+4}{2x-1}}$ en x=1 $\rightarrow r'(1) = -11$

$$r'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{3x+4}{2x-1} - 7}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{3x+4-14x+7}{2x-1}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{-11x+11}{(x-1)(2x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{-11(x-1)}{(x-1)(2x-1)} = -11$$

3.- Estudia la derivabilidad en x=0 de $\boldsymbol{f(x) = |x^3|}$

$$f(x) = |x^3| = \begin{cases} -x^3 \; si\; x < 0 \\ x^3 \; si\; x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} f'(x_-) = -3x^2 \; si\; x < 0 \\ f'(x_+) = 3x^2 si\; x < 0 \end{cases} \rightarrow f'(x_-) = f'(x_+) = 0$$

Por tanto, f es derivable en x = 0.

4. Dada la función $f(x) = ln\frac{x^2}{x-1}$, donde ln significa logaritmo neperiano, definida para x > 1 halla un punto (a, f(a)) tal que la recta tangente a la gráfica de f(x) en ese punto sea paralela al eje OX.

$f'(x) = 0$ paralela al eje 0X

$f(x) = \ln\frac{x^2}{x-1}$; $f'(x) = \frac{x-2}{x(x-1)}$; $\frac{x-2}{x(x-1)} = 0 \Rightarrow 0 = x - 2 \Rightarrow x = 2$

$y = ln\frac{2^2}{2-1} = ln4 = 1{,}38$ Punto (2, 1,38)

5. Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$. Halla el valor a > 0 tal que la recta tangente a la gráfica f en el punto (a,$f(a)$) sea paralela a la recta y = -15x

$f(x) = 6x^2 - x^3$ $f'(x) = 12x - 3x^2$ y = -15x ; $y' = -15$ $12x - 3x^2 = -15$;

$x = 5$ y $x = -1$ por tanto, a = 5

$f(5) = 6 \cdot 5^2 - 5^3 = 25 \Rightarrow$ En (5,25) la función es paralela a la recta

6. Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde m > 0 es una constante.

a) Para cada valor de m halla el valor de a > 0 tal que la recta tangente a la gráfica f en el punto (a,f (a)) pase por el origen de coordenadas.

b) Halla el valor de m para que la recta y = x sea tangente a la gráfica de $f(x)$

a) $f(x) = x^2 + m$; $f(a) = 0$; $a^2 + m = 0$; $m = -a^2$

b) $f(x) = x^2 + m$; $f'(x) = 2x$; $2x = 1$; $x = \frac{1}{2}$; cualquier valor de m.

7. Un coche recorre una distancia e, en kilómetros, a las t horas, siendo $e = 22t + 0{,}4t^2$. Determina su función velocidad y su función aceleración. ¿Es constante la aceleración? Si sigue a esa velocidad, ¿en qué instante sobrepasa la velocidad máxima permitida de 120 km/h?

$v = \frac{de}{dt} = 22 + 0{,}8t$ $a = \frac{dv}{dt} = 0{,}8$ Es constante

$120 = 22 + 0{,}8t \Rightarrow t = \frac{120-22}{0{,}8} = 122{,}5\ h$ Supera la velocidad permitida a las 122,5 horas

8. Al lanzar un objeto verticalmente hacia arriba la altura (en metros) y, que alcanza a los x segundos es: $y = 30x - 4x^2$. Calcula la velocidad a los x = 0, x = 1, x = 3 y x = 4 segundos. Determina también la altura de la piedra a esos segundos. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el objeto?

$v = \frac{de}{dt} = 30 - 8x$;

$v(0) = 30 - 8 \cdot 0 = 30\ m/s$ $e(0) = 30 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0\ m$

$v(1) = 30 - 8 \cdot 1 = 22\ m/s$ $e(1) = 30 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 26\ m$

$v(3) = 30 - 8 \cdot 3 = 6\ m/s$ $e(3) = 30 \cdot 3 - 4 \cdot 3^2 = 54\ m$

$v(4) = 30 - 8 \cdot 4 = -2\ m/s$ $e(4) = 30 \cdot 4 - 4 \cdot 4^2 = 56\ m$

altura máxima cuando v = 0 ; $0 = 30 - 8x \Rightarrow x = \frac{30}{8} = 3{,}75\ s$

Sustituimos en la ecuación de altura ; $e(3{,}75) = 30 \cdot 3{,}75 - 4 \cdot 3{,}75^2$

9. Un coche recorre una distancia y, en kilómetros, en un tiempo x dado en horas, dada por la ecuación:$y = 0{,}1x^2 + 100x - 50$. Determina la velocidad que lleva el coche para x = 1,5 horas.

$v = \frac{dy}{dx} = 0{,}2x + 100$; $v(1{,}5) = 0{,}2 \cdot 1{,}5 + 100 = 100{,}3\ km/h$

10. Comprueba que la derivada n-ésima de las siguientes funciones es la indicada:

$$f(x) = \frac{1}{x+a} \rightarrow f^{n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{(x+a)^{n+1}}$$

Hacemos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{(x+a)\cdot 0 - 1\cdot 1}{(x+a)^2} = \frac{-1}{(x+a)^2}$$

Sustituimos n = 1 en la fórmula:

$$f^1(x) = \frac{(-1)^1\ 1!}{(x+a)^{1+1}} = \frac{-1}{(x+a)^2}$$

Como el resultado de la primera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Ahora probamos con la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{(x+a)^2\cdot 0 - (-1)\cdot(2(x+a)\cdot 1)}{((x+a)^2)^2} = \frac{2(x+a)}{(x+a)^4} = \frac{2}{(x+a)^3}$$

Sustituimos n = 2 en la fórmula:

$$f^2(x) = \frac{(-1)^2\ 2!}{(x+a)^{2+1}} = \frac{2}{(x+a)^3}$$

Como el resultado de la segunda derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se sigue cumpliendo.

Finalmente, probamos con la tercera derivada:

$$f'''(x) = \frac{(x+a)^3\cdot 0 - 2\cdot(3(x+a)^2\cdot 1)}{((x+a)^3)^2} = \frac{-6(x+a)^2}{(x+a)^6} = \frac{-6}{(x+a)^4}$$

Sustituimos n = 3 en la fórmula:

$$f^3(x) = \frac{(-1)^3\ 3!}{(x+a)^{3+1}} = \frac{-6}{(x+a)^4}$$

Como el resultado de la tercera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se sigue cumpliendo.

La derivada n-ésima de la función es la indicada.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1+x}{1-x} \to f^{n)}(x) = \frac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}}$$

Hacemos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{(1-x)\cdot 1 - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{(1-x) - (-1-x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

Sustituimos n = 1 en la fórmula:

$$f^1(x) = \frac{2\cdot 1!}{(1-x)^{1+1}} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

Como el resultado de la primera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Ahora probamos con la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{(1-x)^2\cdot 0 - 2\cdot(1-x)\cdot(-1)\cdot 2}{((1-x)^2)^2} = \frac{4(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{4}{(1-x)^3}$$

Sustituimos n = 2 en la fórmula:

$$f^2(x) = \frac{2 \cdot 2!}{(1-x)^{2+1}} = \frac{4}{(1-x)^3}$$

Como el resultado de la segunda derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Ahora probamos con la tercera derivada:

$$f'''(x) = \frac{(1-x)^3 \cdot 0 - 2 \cdot (1-x)^2 \cdot (-1) \cdot 3}{((1-x)^3)^2} = \frac{6(1-x)^2}{(1-x)^6} = \frac{6}{(1-x)^4}$$

Sustituimos n = 3 en la fórmula:

$$f^3(x) = \frac{2 \cdot 3!}{(1-x)^{3+1}} = \frac{6}{(1-x)^4}$$

Como el resultado de la tercera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

La derivada n-ésima de la función es la indicada.

$$\boldsymbol{f(x) = ln(1+x) \rightarrow f^{n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}}$$

Hacemos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)}$$

Sustituimos n = 1 en la fórmula:

$$f^1(x) = \frac{(-1)^{1+1}(1-1)!}{(1+x)^1} = \frac{1 \cdot 1}{(1+x)} = \frac{1}{(1+x)}$$

Como el resultado de la primera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Ahora probamos con la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{(1+x) \cdot 0 - 1 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

Sustituimos n = 2 en la fórmula:

$$f^2(x) = \frac{(-1)^{2+1}\,(2-1)!}{(1+x)^2} = \frac{-1 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

Como el resultado de la segunda derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se sigue cumpliendo.

Finalmente, probamos con la tercera derivada:

$$f'''(x) = \frac{(1+x)^2 \cdot 0 - (-1)(2(1+x)1)}{((1+x)^2)^2} = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Sustituimos n = 3 en la fórmula:

$$f^3(x) = \frac{(-1)^{3+1}\,(3-1)!}{(1+x)^3} = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Como el resultado de la tercera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se sigue cumpliendo.

La derivada n-ésima de la función es la indicada.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{3x+2}{x^2-4} = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-2} \to f^{n)}(x) = (-1)^n n!\left(\frac{1}{(x+2)^{n+1}} + \frac{1}{(x-2)^{n+1}}\right)}$$

Hacemos la primera derivada:

$f´(x) = \frac{(x+2)\cdot 0-1\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{-1}{(x+2)^2}$

$f´(x) = \frac{(x-2)\cdot 0-1\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2}$

$$f'(x) = (-1)\left(\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right)$$

Sustituimos n = 1 en la fórmula:

$f^1(x) = (-1)^1 1!\left(\frac{1}{(x+2)^{1+1}} + \frac{1}{(x-2)^{1+1}}\right) = (-1)\left(\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right)$

Como el resultado de la primera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Ahora probamos con la segunda derivada:

$f''(x) = \frac{(x+2)^2\cdot 0-2\cdot(x+2)\cdot 1\cdot(-1)}{((x+2)^2)^2} = \frac{2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{2}{(x+2)^3}$

$f''(x) = \frac{(x-2)^2\cdot 0-2\cdot(x-2)\cdot 1\cdot(-1)}{((x-2)^2)^2} = \frac{2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{2}{(x-2)^3}$

$$f''(x) = \left(\frac{2}{(x+2)^3} + \frac{2}{(x-2)^3}\right)$$

Sustituimos n = 2 en la fórmula:

$f^2(x) = (-1)^2 2!\left(\frac{1}{(x+2)^{2+1}} + \frac{1}{(x-2)^{2+1}}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right) = \left(\frac{2}{(x+2)^3} + \frac{2}{(x-2)^3}\right)$

Como el resultado de la segunda derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se sigue cumpliendo.

Finalmente, probamos con la tercera derivada:

$f''(x) = \frac{(x+2)^3\cdot 0-3\cdot(x+2)^2\cdot 1\cdot 2}{((x+2)^3)^2} = \frac{-6(x+2)^2}{(x+2)^6} = \frac{-6}{(x+2)^4}$

$f''(x) = \frac{(x-2)^3\cdot 0-3\cdot(x-2)^2\cdot 1\cdot 2}{((x-2)^3)^2} = \frac{-6(x-2)^2}{(x-2)^6} = \frac{-6}{(x-2)^4}$

$$f''(x) = \left(\frac{-6}{(x+2)^4} + \frac{-6}{(x-2)^4}\right)$$

Sustituimos n = 3 en la fórmula:

$f^3(x) = (-1)^3 3!\left(\frac{1}{(x+2)^{3+1}} + \frac{1}{(x-2)^{3+1}}\right) = -6\cdot\left(\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right) = \left(\frac{-6}{(x+2)^3} + \frac{-6}{(x-2)^3}\right)$

Como el resultado de la tercera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se sigue cumpliendo.

La derivada n-ésima de la función es la indicada.

$$\boldsymbol{f(x) = \cos ax \to f^{n)}(x) = a^n\, cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)}$$

Hacemos la primera derivada.

$$f'(x) = -sin\ ax\cdot a$$

Sustituimos n = 1 en la fórmula:

$$f^1(x) = a^1 cos\left(ax + 1\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$a\cdot(\cos ax\cdot\cos\frac{\pi}{2} - \sin ax\cdot \sin\frac{\pi}{2}) =$$
$$a\cdot(\cos ax\cdot 0 - \sin ax\cdot -1) =$$
$$a\cdot(-\sin ax)$$

Como el resultado de la primera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Hacemos la segunda derivada.

$$f''(x) = (-a) \cdot a \cdot \cos ax = -a^2 \cdot (\cos ax)$$

Sustituimos n = 2 en la fórmula:

$$f^2(x) = a^2 cos\left(ax + 2\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$a^2 \cdot (\cos ax \cdot \cos \pi - \sin ax \cdot \sin \pi) =$$
$$a \cdot (\cos ax \cdot (-1) - \sin ax \cdot 0) =$$
$$-a^2 \cdot (\cos ax)$$

Como el resultado de la segunda derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Hacemos la tercera derivada.

$$f'''(x) = (-a^2) \cdot (-a) \cdot sen\ ax = a^3 \cdot (\sin ax)$$

Sustituimos n = 3 en la fórmula:

$$f^3(x) = a^3 cos\left(ax + 3\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$a^3 \cdot (\cos ax \cdot \cos\frac{3\pi}{2} - \sin ax \cdot \sin\frac{3\pi}{2}) =$$
$$a \cdot (\cos ax \cdot 0 - \sin ax \cdot (-1)) =$$
$$a^3 \cdot (\sin ax)$$

Como el resultado de la tercera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

La derivada n-ésima de la función es la indicada.

$$\boldsymbol{f(x) = cos^2\, x \to f^{n)}(x) = 2^{n-1} cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)}$$

Hacemos la primera derivada:

$$f'(x) = 2(cos\ x)(-senx) = -\sin(2x)$$

Sustituimos n = 1 en la fórmula:

$$f^1(x) = 2^{1-1} cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x \cdot \cos\frac{\pi}{2} - \sin 2x \cdot \sin\frac{\pi}{2} = -\sin 2x \cdot \sin\frac{\pi}{2} = -\sin(2x)$$

Como el resultado de la primera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Hacemos la segunda derivada:

$$f''(x) = -\cos(2x) \cdot 2 = (-2) \cdot \cos(2x) = 2 \cdot \cos(2x + \frac{2\pi}{2})$$
$$= 2 \cdot (\cos 2x \cdot \cos \pi - \sin(2x) \cdot \sin \pi) = -2 \cdot \cos 2x$$

Sustituimos n = 2 en la fórmula:

$$f^2(x) = 2^{2-1} cos\left(2x + 2\frac{\pi}{2}\right) =) = 2 \cdot (\cos 2x \cdot \cos \pi - \sin(2x) \cdot \sin \pi) = -2 \cdot \cos 2x$$

Como el resultado de la segunda derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Hacemos la tercera derivada:

$$f'''(x) = (-2)(-\sin 2x) \cdot 2 = (-2) \cdot (-2) \cdot \sin 2x = 2^2 \cdot \sin 2x$$

Sustituimos n = 3 en la fórmula:

$$f^3(x) = 2^{3-1} cos\left(2x + 3\frac{\pi}{2}\right) = 2^2 cos\left(2x + 3\frac{\pi}{2}\right) = 2^2 \cdot (\cos(2x) \cdot \cos 3\frac{\pi}{2} - \sin(2x) \cdot \sin 3\frac{\pi}{2}) = 2^2 \cdot \sin 2x$$

Como el resultado de la tercera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.
La derivada n-ésima de la función es la indicada.

11.- Si *f* y *g* son dos funciones derivables en todo punto, y se sabe que *f*(1) = 2, *f*(2) = 5, *g*(1) = 1, *g*(2) = 6, *f'*(1) = 3, *f'*(2) = 6, *f'*(6) = 4, *g'*(1) = 1, *g'*(2) = 3, *g'*(5) = 1. Determina el valor de:

a) $(f \text{ o } g)'(2) = f'(g(2)) \cdot g'(2) = f'(6) \cdot g'(2) = 4 \cdot 3 = 12$

b) $(g \text{ o } f)'(1) = g'(f(1)) \cdot f'(1) = g'(2) \cdot f'(1) = 3 \cdot 3 = 9$

c) $(g \text{ o } f)'(2) = g'(f(2)) \cdot f'(2) = g'(5) \cdot f'(2) = 1 \cdot 6 = 6$

d) $(f \text{ o } f)'(1) = f'(f(1)) \cdot f'(1) = f'(2) \cdot f'(1) = 6 \cdot 3 = 18$

12.- Sean *u*(x) y *v*(x) dos funciones derivables en un punto x. Pruébese que su producto *u*(x)·*v*(x) es derivable obteniendo la expresión de su derivada: D[*u*(x)·*v*(x)]=*u'*(x)·*v*(x)+*u*(x)·*v'*(x)

Si *u*(x) es derivable y *v*(x) es derivable, entonces *h*(x)=*u*(x)·*v*(x) también es derivable:

Escribimos la definición de derivada:

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = \lim_{b\to x} \frac{f(b)\cdot g(b) - f(x)\cdot g(x)}{b-x} =$$

Sumamos y restamos *f*(*x*)·*g*(*b*):

$$\lim_{b\to x} \frac{f(b)\cdot g(b) - f(x)\cdot g(b) + f(x)\cdot g(b) - f(x)\cdot g(x)}{b-x} =$$

Sacamos factor común *f*(*x*) y *g*(*b*):

$$\lim_{b\to x} \frac{\left(f(b)-f(x)\right)\cdot g(b) + f(x)\cdot\left(g(b)-g(x)\right)}{b-x} =$$

Aplicamos propiedades de los límites, el límite de una suma y el límite de un producto:

$$\lim_{b\to x} \frac{\left(f(b)-f(x)\right)}{b-x}\cdot \lim_{b\to x} g(b) + \lim_{b\to x} f(x)\cdot \lim_{b\to x} \frac{\left(g(b)-g(x)\right)}{b-x} =$$

Calculamos los límites:

$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$, c.q.d.

13.- Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt[6]{5x^{11}} = (5x^{11})^{\frac{1}{6}};$

$$y' = \frac{1}{6}(5x^{11})^{-\frac{5}{6}} \cdot 55x^{10} = \frac{55x^{10}}{6(5x^{11})^{\frac{5}{6}}} = \frac{55x^{10}}{6\sqrt[6]{5^5\cdot x^{55}}} = \frac{55x^{10}}{6x^9\sqrt[6]{5^5x}} = \frac{55x}{6\sqrt[6]{5^5x}}$$

b) $y = \frac{\sqrt[4]{3x^2}\cdot\sqrt{x}}{3x^3+7} = \frac{(3x^2)^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{3x^3+7} = \frac{3^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{3x^3+7} = \frac{3^{\frac{1}{4}}\cdot x}{3x^3+7};$

$$y' = \frac{3^{\frac{1}{4}}\cdot(3x^3+7) - 3^{\frac{1}{4}}x(9x^2)}{(3x^3+7)^2} = \frac{3^{\frac{1}{4}}(-6x^3+7)}{(3x^3+7)^2}$$

c) $y = \frac{(3x^4-4)\sqrt{x}}{\sqrt[3]{7x^5}} = \frac{(3x^4-4)x^{\frac{1}{2}}}{(7x^5)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3x^{\frac{9}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{5}{3}}} = \frac{3}{7^{\frac{1}{3}}}\cdot x^{\frac{9}{2}-\frac{5}{3}} - \frac{4}{7^{\frac{1}{3}}}\cdot x^{\frac{1}{2}-\frac{5}{3}} = \frac{3}{7^{\frac{1}{3}}}\cdot x^{\frac{17}{6}} - \frac{4}{7^{\frac{1}{3}}}\cdot x^{-\frac{7}{6}};$

$$y' = \frac{3}{7^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{17}{6}x^{\frac{11}{6}} - \frac{4}{7^{\frac{1}{3}}}\left(-\frac{7}{6}\right)x^{-\frac{13}{6}}$$

d) $y=\frac{\sqrt[3]{x^7}}{2x+5}=\frac{(x^7)^{\frac{1}{3}}}{2x+5}=\frac{x^{\frac{7}{3}}}{2x+5}$;

$$y'=\frac{\left(\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}\right)\cdot(2x+5)-\left(x^{\frac{7}{3}}\right)\cdot 2}{(2x+5)^2}=\frac{\frac{14}{3}x^{\frac{7}{3}}+35x^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{7}{3}}}{(2x+5)^2}=\frac{\frac{8}{3}x^{\frac{7}{3}}+35x^{\frac{4}{3}}}{(2x+5)^2}$$

14) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y}=\sqrt{\frac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}(3x^7-5x^5)^3}\rightarrow y=\left(\frac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}\left(3x^7-5x^5\right)^3\right)^{\frac{1}{2}}$

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}\left(3x^7-5x^5\right)^3\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{(6x^2-63x^8)(4x^5+6)-(2x^3-7x^9)(20x^4)}{\left(4x^5+6\right)^2}\left(3x^7-5x^5\right)^3+\frac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}3\left(3x^7-5x^5\right)^2(21x^6-25x^4)\right)$$

b) $\boldsymbol{y}=\sqrt{\frac{(x^3+5x)(4x^3-6x)}{2x^4-5x}}\rightarrow y=\left(\frac{(x^3+5x)(4x^3-6x)}{2x^4-5x}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{(x^3+5x)(4x^3-6x)}{2x^4-5x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{16x^7-100x^4+120x^3-210x^2+150}{(2x^2-5)^2}\right)$$

c) $\boldsymbol{y}=\sqrt{\left(\frac{3x^4+5x^2}{4x^2-6x^5}\right)^4}\rightarrow y=\left(\frac{3x^4+5x^2}{4x^2-6x^5}\right)^2\rightarrow y'=2\left(\frac{3x^4+5x^2}{4x^2-6x^5}\right)\left(\frac{18x^4+90x^2+24x}{(4-6x^3)^2}\right)$

d) $\boldsymbol{y}=\sqrt[3]{5+\sqrt{5x-\frac{5}{x^5}}}\rightarrow y=\left(5+\left(5x-\frac{5}{x^5}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\rightarrow y'=\frac{1}{3}\left(5+\left(5x-\frac{5}{x^5}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{2}\left(5x-\frac{5}{x^5}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(5-\frac{25}{x^6}\right)$$

15) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\tan\frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}\rightarrow f'(x)=\left(1+\tan^2\left(\frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}\right)\right)\left(\frac{6e^{3x}}{(1-e^{3x})^2}\right)\rightarrow f'(x)=\frac{\left(\frac{6e^{3x}}{\left(1-e^{3x}\right)^2}\right)}{\cos^2\left(\frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}\right)}$

b) $f(x)=(2-3x)\sinh(2-3x)\rightarrow f'(x)=2\sinh(2-3x)-(2-3x)3\cosh(2-3x)$

c) $\boldsymbol{f(x)=\tan\left(\frac{\sqrt{4-9\sin x}}{3+2\cos x}\right)}$

$$f'(x)=\left(1+\tan^2\left(\frac{\sqrt{4-9\sin x}}{3+2\cos x}\right)\right)\left(\frac{\frac{1}{2}(4-9\sin x)^{-\frac{1}{2}}(-9\cos x)(3+2\cos x)-(4-9\sin x)^{\frac{1}{2}}(-2\sin x)}{(3+2\cos(x))^2}\right)$$

d) $\boldsymbol{f(x)=\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{\cos(x)+x\sin(x)}}$

$$f'(x)=\frac{(\cos(x)-1\cos(x)+x(\sin(x)))(\cos(x)+x\sin(x))-(\sin(x)-x\cos(x))(-\sin(x)+\sin(x)+x\cos(x))}{(\cos(x)+x\sin(x))^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2}{(\cos(x)+x\sin(x))^2}$$

16. Ya sabes que la función tangente se define como el cociente entre el seno y el coseno, las funciones hiperbólicas se definen utilizando la función exponencial. Comprueba las derivadas de la tabla siguiente de $tg(x)=\frac{sen(x)}{\cos(x)}$, $shx=\frac{e^x-e^x}{2}$,

$\boldsymbol{ch(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$, $\boldsymbol{th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}}$.

$$f(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}; f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - sen(x)\cdot(-sen\ x)}{cos^2x} = \frac{cos^2x + sen^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x} = sec^2x$$

$$f(x) = shx = \frac{e^x - e^x}{2} \to f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = ch(x)$$

$$f(x) = ch(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \to \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = sh(x)$$

$$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})\cdot(e^x - e^{-x}) - (e^x - e^{-x})\cdot(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} =$$

$$\to \frac{(e^x)^2 + (e^{-x})^2 + 2e^xe^{-x} - (e^x)^2 - (e^{-x})^2 + 2e^xe^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{1}{(chx)^2} = sech^2(x)$$

17. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$\boldsymbol{y = (3x)^{x^5 - 9x^3}}; \ln(f(x)) = \ln\left(3x^{(x^5 - 9x^3)}\right) \to \ln(f(x)) = (x^5 - 9x^3)\cdot\ln(3x) =$$

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = (5x^4 - 27x^2)\cdot\ln(3x) + (x^5 - 9x^3)\cdot\frac{3}{3x} =$$

$$f'(x) = (3x)^{x^5 - 9x^3}\left[(5x^4 - 27x^2)\cdot\ln(3x) + (x^5 - 9x^3)\cdot\frac{3}{3x}\right]$$

$$\boldsymbol{y = \left((2x+7)^{5x^3 - 6x^2}\right)} \to \ln(f(x)) = \ln\left(2x + 7^{(5x^3 - 6x^2)}\right) \to \ln(f(x)) =$$

$$= (5x^3 - 6x^2)\cdot\ln(2x+7) \to \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = (15x^2 - 12x)\cdot\ln(2x+7) + (5x^3 - 6x^2)\cdot\frac{2}{2x+7} \to$$

$$\to f'(x) = (3x)^{x^5 - 9x^3}\left[(15x^2 - 12x)\cdot\ln(2x+7) + (5x^3 - 6x^2)\cdot\frac{2}{2x+7}\right]$$

$$\boldsymbol{y = (x+e)^{(4x^5 - 8x^3)^5}} \to \ln(f(x)) = ln(x+e)^{(4x^5 - 8x^3)^5} = (4x^5 - 8x^3)^5\cdot\ln(x+e)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 5\cdot(4x^5 - 8x^3)^4\cdot(20x^4 - 24x^2)\cdot\ln(x+e) + (4x^5 - 8x^3)^5\cdot\frac{1}{x+e}$$

$$f'(x) = (x+e)^{(4x^5 - 8x^3)^5}\cdot\left[5\cdot(4x^5 - 8x^3)^4\cdot(20x^4 - 24x^2)\cdot\ln(x+e) + (4x^5 - 8x^3)^5\cdot\frac{1}{x+e}\right]$$

$$\boldsymbol{f(x) = (x^x)^x} = x^{x^2} \to \ln(f(x)) = lnx^{x^2} = x^2\cdot lnx \to \frac{f'(x)}{f(x)} = (2x)\cdot\ln(x) + (x)^2\cdot\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = (x^x)^x\cdot\left[(2x)\cdot\ln(x) + (x^2)\cdot\frac{1}{x}\right]$$

18. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$\boldsymbol{a) y = arcsen\sqrt{\frac{4 + \operatorname{sen} x}{4 - senx}}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{4+senx}{4-senx}}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{4+senx}{4-senx}}}\cdot\frac{cosx\cdot(4-senx) - (4+senx)\cdot(-cosx)}{(4-senx)^2}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4+senx}{4-senx}}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{4+senx}{4-senx}}}\cdot\frac{8cosx}{(4-senx)^2}$$

$$\boldsymbol{b) y = e^{arcos\sqrt{6x+8}}}$$

$$y' = e^{arcos\sqrt{6x+8}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1 - (\sqrt{6x+8})^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{6x+8}}\cdot 6 = e^{arcos\sqrt{6x+8}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{-6x-7}}\cdot\frac{3}{\sqrt{6x+8}}$$

$$c)\, y = sen\left(arctg\frac{7x}{\sqrt{1-2x^2}}\right)$$

$$y' = \cos\left(arctg\frac{7x}{\sqrt{1-2x^2}}\right)\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{7x}{\sqrt{1-2x^2}}\right)^2}\cdot\frac{7\cdot\sqrt{1-2x^2}-7x\cdot\frac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}}}{(1-2x^2)}$$

$$d)\, y = arccos\frac{5x}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{5x}{\sqrt{16-x^2}}\right)^2}}\cdot\frac{5\cdot\sqrt{16-x^2}-5x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}}{16-x^2}$$

19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\mathbf{y = argsh\sqrt{\frac{5+shx}{5-shx}}} = \mathrm{argsh}\left(\frac{5+shx}{5-shx}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{5+shx}{5-shx}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{chx(5-shx)-(-chx)(5+shx)}{(5-shx)^2}}{\sqrt{1+\left[\left(\frac{5+shx}{5-shx}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2}} = \frac{10chx}{2\sqrt{\frac{5+shx}{5-shx}}\sqrt{1+\frac{5+shx}{5-shx}}} = \frac{10chx}{2\sqrt{\frac{5+shx}{5-shx}}\sqrt{\frac{10}{5-shx}}} = \frac{5chx(5-shx)}{\sqrt{10(5+shx)}}$$

b) $\mathbf{y = \sqrt{2e^{argch\sqrt{7x+3}}}} = \left(2e^{argch(7x+3)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2}\left(2e^{argch(7x+3)^{\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{1}{2}} 2e^{argch(7x+3)^{\frac{1}{2}}}\frac{\frac{1}{2}(7x+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 7}{\sqrt{\left((7x+3)^{\frac{1}{2}}\right)^2-1}} = \frac{7}{2}\frac{e^{argch\sqrt{7x+3}}}{\sqrt{2e^{argch\sqrt{7x+3}}}\sqrt{7x+3}\sqrt{7x+2}} = \frac{7\sqrt{e^{argch\sqrt{7x+3}}}}{2\sqrt{2}\sqrt{7x+3}\sqrt{7x+2}}$$

c) $\mathbf{y = sh\left(argth\frac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}}\right)} = \mathrm{sh}\left(\mathrm{argth}\frac{2x+6}{(25-16x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$

$$y' = ch\left(argth\frac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}}\right)\frac{\frac{2\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)\frac{1}{2}(25-16x^2)^{-\frac{1}{2}}(-32x)}{\left(\sqrt{25-16x^2}\right)^2}}{1-\left(\frac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}}\right)^2} =$$

$$= ch\left(argth\frac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}}\right)\frac{\frac{\frac{2(25-16x^2)-(2x+6)(-16x)}{(25-16x^2)^{\frac{1}{2}}}}{25-16x^2}}{1-\frac{(2x+6)^2}{25-16x^2}} = ch\left(argth\frac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}}\right)\frac{\frac{2(25-16x^2)-(2x+6)(-16x)}{(25-16x^2)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{(25-16x^2)-(2x+6)^2}{25-16x^2}} =$$

$$= ch\left(argth\frac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}}\right)\frac{2(25-16x^2)-(2x+6)(-16x)}{(25-16x^2)^{\frac{1}{2}}[(25-16x^2)-(2x+6)^2]} = ch\left(argth\frac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}}\right)\frac{50+96x}{\sqrt{25-16x^2}(-20x^2-24x-11)}$$

d) $\mathbf{y = argch\frac{senx}{\sqrt{5-3sen^2x^2}}} = \mathrm{argch}\frac{senx}{(5-3sen^2x^2)^{\frac{1}{2}}}$

$$y' = \frac{\dfrac{\cos x\sqrt{5-3\text{sen}^2x^2}-\text{sen}x\frac{1}{2}(5-3\text{sen}^2x^2)^{-\frac{1}{2}}(-6\text{sen}x^2\cdot 2x\cdot\cos x^2)}{\left(\sqrt{5-3\text{sen}^2x^2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\text{sen}x}{\sqrt{5-3\text{sen}^2x^2}}\right)^2-1}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\cos x(5-3\text{sen}^2x^2)-\text{sen}x\cdot(-3\text{sen}x^2\cdot 2x\cdot\cos x^2)}{(5-3\text{sen}^2x^2)\sqrt{5-3\text{sen}^2x^2}}}{\sqrt{\dfrac{(\text{sen}x)^2}{5-3\text{sen}^2x^2}-1}} = \frac{\dfrac{\cos x(5-3\text{sen}^2x^2)-\text{sen}x\cdot(-3\text{sen}x^2\cdot 2x\cdot\cos x^2)}{(5-3\text{sen}^2x^2)\sqrt{5-3\text{sen}^2x^2}}}{\dfrac{\sqrt{(\text{sen}x)^2-(5-3\text{sen}^2x^2)}}{\sqrt{5-3\text{sen}^2x^2}}} =$$

$$= \frac{\cos x(5-3\text{sen}^2x^2)-\text{sen}x\cdot(-3\text{sen}x^2\cdot 2x\cdot\cos x^2)}{(5-3\text{sen}^2x^2)\sqrt{(\text{sen}x)^2-(5-3\text{sen}^2x^2)}}$$

20. Se considera la función $f(x) = \frac{1}{2+\sin x-\cos x}$. Se pide:
Comprueba la existencia de, al menos, un punto $c \in [-\pi,\pi]$ tal que $f''(c) = 0$. (Sugerencia: utiliza el teorema de Rolle). Demuestra que en c hay un punto de inflexión.

$f'(x) = -\frac{\cos x+\text{sen}x}{(2+\text{sen}x-\cos x)^2} \qquad f'(-\pi) = f'(\pi)$

f' es continua y derivable en el entorno cerrado $[-\pi,\pi]$ y toma el mismo valor en los extremos, luego, por el teorema de Rolle, existe un punto $\boldsymbol{c} \in [-\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\pi}]$ en el que $f''(c) = 0$. Como el punto c anula la f'' y en él la función es continua, entonces tiene que tratarse de un punto de inflexión

21. Sea:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$$

a) **Estudia la continuidad y derivabilidad de f en x= 0**
b) **Estudia cuando se verifica $f'(x) = 0$. Puesto que $f(1) = f(-1)$, ¿existe contradicción con el teorema de Rolle en el intervalo $[-1,1]$?**

Continuidad

$$f(x)\frac{|x|}{x^2+1} = \begin{cases} -\frac{x}{x^2+1} & x<0 \\ \frac{x}{x^2+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} -\frac{x}{x^2+1} = -\frac{0}{0^2+1} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x^2+1} = \frac{0}{0^2+1} = 0$

Ya que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ = $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$= $f(0) = 0$, f es continua en x=0

Derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} & si\ x<0 \\ \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} & si\ x>0 \end{cases} \qquad f'(0^-) = -1 \qquad f'(0^+) = 1$$

$f'(0^-) \neq f'(0^+)$ por lo tanto, la función no es derivable en x=0

22. Calcula $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{senx\,(1-senx)}{cos^2x}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{senx\,(1-senx)}{cos^2x} = \frac{0}{0}\ Indeterminado$$

Se hace un cambio usando $cos^2x = 1 - sen^2x$

Factorizamos la expresión = $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{senx\,(1-senx)}{(1-senx)(1+senx)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{senx}{1+senx} = \frac{senx\frac{\pi}{2}}{1+sen\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

23. Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$

Resolvemos este límite por L'Hôpital $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$

24. Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{2(f(x))^2-f(x+1)}{e^x-1}$ sabiendo que $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos sus puntos y tal que:
$f(0)=1$; $f(1)=2$; $f'(0)=3$; $f'(1)=4$.

$\lim_{x\to 0}\frac{2(f(x))^2-f(x+1)}{e^x-1}=\frac{0}{0}$

Resolvemos este límite aplicando L'Hôpital

$\lim_{x\to 0}\frac{2(f(x))^2-f(x+1)}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{4(f(x))(f'(x))-f'(x+1)}{e^x}=\frac{4\cdot 1\cdot 3-4}{1}=8$

25. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y=x^3-3x$. ¿Cómo es en x=0? ¿Y en x=2? ¿Y en x=-2?

$f(x)=x^3-3x$ $\quad f'(x)=3x^2-3$; $3x^2-3=0$; $x=1, x=-1$ $\quad f''(x)=6x$;
$f''(1)=-6<0$ Máximo. $\quad f''(-1)=6>0$ Mínimo.
Creciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ $\quad$ Decreciente en $(-1,1)$
En x=0 decreciente. En x=2 creciente. En x=-2 creciente.

26. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $f(x)=x^4-1$
$f'(x)=4x^3$; $4x^3=0$; x=0 ; $f''(x)=12x^2$; $\quad f''(0)=12\cdot 0=0$ $\quad f'''(x)=24x$; $\quad f''''(x)=24$; $\quad f''''(0)=24>0$ Mínimo.

b) $f(x)=3x^3+9$
$f'(x)=9x^2$; $9x^2=0$; x=0 ; $f''(x)=18x$; $\quad f''(0)=0$; No tiene ni máximos ni mínimos.

c) $f(x)=4x^4-2x^2+5$
$f'(x)=16x^3-4x$; $16x^3-4x$ =0 ; $x=\frac{1}{2}$, $\quad x=-\frac{1}{2}$, $\quad x=0$ $\quad f''(x)=48x^2-4$;
$f''\left(\frac{1}{2}\right)=8>0$ Mínimo. $\quad f''\left(\frac{1}{2}\right)=8>0$ Mínimo. $\quad f''(0)=-4<0$ Máximo.

d) $f(x)=9x^3-3x^2$
$f'(x)=27x^2-6x$; $x=\frac{2}{9}, x=0$
$f''(x)=54x-6$;
$f''\left(\frac{2}{9}\right)=6>0$ Mínimo.
$f''(0)=-6<0$ Máximo.

27. La velocidad de propagación de una onda de longitud x en aguas profundas viene dadas por la fórmula $v=\sqrt{\frac{x}{a}+\frac{a}{x}}$ en la que a es una constante conocida. Comprueba que la longitud que corresponde a un mínimo de velocidad es x=a.

$v = \sqrt{\frac{x^2+a^2}{ax}}$ Para calcular máximos y mínimos podemos prescindir de la raíz.

$f'(x) = \frac{(2x\cdot ax)-(x^2+a^2)(a)}{(ax)^2}$; $f'(x) = \frac{ax^2-a^3}{a^2x^2} = \frac{x^2-a^2}{ax^2}$; $x^2 - a^2 = 0$; $x = a$; $x = -a$

$f''(x) = \frac{2x\cdot ax^2-2ax\cdot(x^2-a^2)}{(ax^2)^2} = \frac{2a^3x}{(ax^2)^2} = \frac{2a}{x^3}$

$f''(a) = \frac{2a}{a^3} = \frac{2}{a^2} > 0$, por tanto, es un mínimo.

28. Demuestra que la suma de dos sumandos positivos, cuyo producto es constante, es mínima cuando estos son iguales.

Suma: x + y ; x·y = k ; $y = \frac{k}{x}$; $f(x) = x + \frac{k}{x}$;

$f'(x) = 1 - \frac{k}{x^2}$; $1 - \frac{k}{x^2} = 0$; $x^2 = k$; $x = \sqrt{k}$, pues ha de ser positivo.

$f''(x) = \frac{2k}{x^3}$ $f''(\sqrt{k}) = \frac{2k}{(\sqrt{k})^3} > 0$ luego es un mínimo.

$y = \frac{k}{\sqrt{k}} = \sqrt{k}$, Por tanto, han de ser iguales.

29. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo [-5,5] y en el intervalo [1,4].

f(x) es continua y derivable en todos los puntos por ser una función polinómica.

$f'(x) = 6x^2 - 6x + 72$; $f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{1\pm i\sqrt{47}}{2}$, no real.

Luego f(x) no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

Sabiendo que f(x) es creciente en todo su dominio:

Cuando f(x) definida en el intervalo [-5,5]

Mín. absoluto: $f(-5) = 2(-5)^3 - 3(-5)^2 + 72(-5) = -685 \rightarrow$ Punto (-5,-685)

Máx. absoluto: $f(5) = 2(5)^3 - 3(5)^2 + 72(5) = 535 \rightarrow$ Punto (5,535)

Cuando f(x) definida en el intervalo [1,4]

Mín. absoluto: $f(1) = 2(1)^3 - 3(1)^2 + 72(1) = 71 \rightarrow$ Punto (1,71)

Máx. absoluto: $f(4) = 2(4)^3 - 3(4)^2 + 72(4) = 368 \rightarrow$ Punto (4,368)

30. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

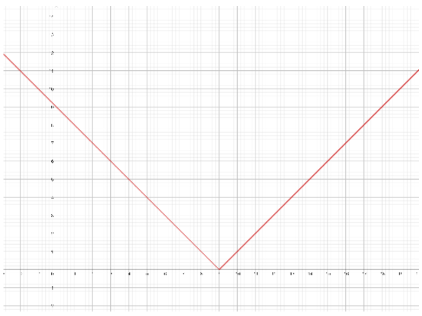
a) $y = |x - 9|$ b) $y = |x + 2| + |x - 3|$

a) $y = |x - 9|$

$$f(x) = \begin{cases} -x-9 & si \quad x < 9 \\ x-9 & si \quad x > 9 \end{cases}$$

f(x) es continua en todos los puntos por ser una función polinómica, sin embargo, no es derivable en $x = 9$, puesto que sus derivadas laterales son distintas $f'_-(9) \neq f'_+(9)$; $-1 \neq 1$

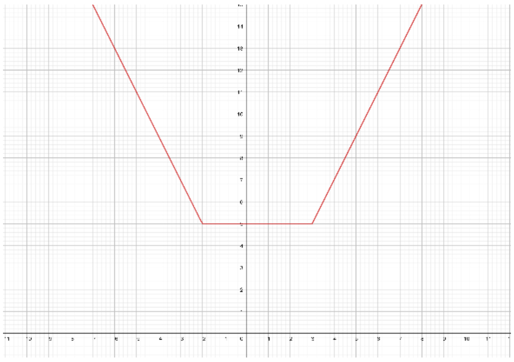
No obstante, en dicho punto tiene un mínimo a la vez relativo y absoluto. Sus coordenadas son P (9,0)



b) $y = |x+2| + |x-3|$

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & si \quad x < -2 \\ 5 & si \quad -2 \le x \le 3 \\ 2x-1 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

f(x) es continua en todos los puntos por ser una función polinómica. Al ser una suma de funciones en valor absoluto, no es derivable ni en -2 ni en 3, no tiene máximos ni mínimos.



31. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x+2|$, en el intervalo [-4,4].

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & si \;\; x < -2 \\ x+2 & si \;\; x > -2 \end{cases}$$

$f(x)$ es continua en todos los puntos al ser una función polinómica, pero no es derivable en $x = -2$, puesto que las derivadas laterales no son iguales $f'_-(-2) \neq f'_+(-2)$; $-1 \neq 1$

En dicho punto, cuenta con un mínimo que es a la vez relativo y absoluto cuyas coordenadas son P (-2,0).

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es decreciente en $(-\infty,-2)$ y creciente en $(-2,\infty)$:

Para $f(x)$ definida en el intervalo $[-4,4]$:

Máx. Absoluto:

$f(4) = |4+2| = 6 \to$ B (4,6)

32. Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} e^{-x}-1 & si \;\; x \le 0 \\ x^2+x & si \;\; x > 0 \end{cases}$. Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Es continua en el punto x=0? b) ¿Es derivable en el punto x=0? c) ¿Alcanza algún extremo?

a) Continuidad en $x = 0$

$f(0) = e^0 - 1 = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (e^{-x}-1) = e^0 - 1 = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to +} (x^2+x) = 0^2 + 0 = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$; luego $\exists \lim_{x\to 0} f(x)$. Como $f(0) = \lim_{x\to o}$, $f(x)$ es continua en $x = 0$

b) Derivabilidad en $x = 0$

$f(x)$ es continua en todo su dominio. Calculamos $f'(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & si \quad x < 0 \\ 2x+1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Para que f(x) sea derivable en $x = 0$, $f'_-(0) = f'_+(0)$

$$\begin{cases} f'_-(0) = -e^0 = -1 \\ f'_+(0) = 2\cdot 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

Como $-1 \neq 1$; $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ y, por lo tanto, f(x) no es derivable en $x = 0$

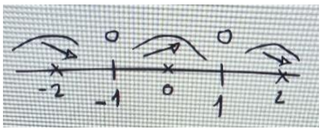
c) Extremos

Sí, alcanza un mínimo en $x = 0$

33. Se considera la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Determinar sus máximos y mínimos relativos.

f(x) es continua en todo su dominio por ser una función racional y no anularse su denominador.

$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$ $\quad f'(x) = 0;\quad x_1 = -1,\quad x_2 = 1$



$f'(-2) = \frac{-(-2)^2+1}{((-2)^2+1)^2} = \frac{-3}{25} < 0$ $\quad f'(0) = \frac{-0^2+1}{(0^2+1)^2} = 1 > 0$ $\quad f'(2) = \frac{-2^2+1}{(2^2+1)^2} = \frac{-3}{25} < 0$

f(x) es creciente en $(-1,1)$ y decreciente en $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$, entonces:

Mín. Relativo: $f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} = -\frac{1}{2} \rightarrow$ Punto $\left(-1, -{}^{1}/_{2}\right)$

Máx. Relativo: $f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2} \rightarrow$ Punto $\left(1, {}^{1}/_{2}\right)$

34. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = \sqrt{\ln(\arccos 5x)}}$

$$y' = \left(\frac{1}{2}(\ln(\text{arcos}5x))^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{\frac{-5}{\sqrt{1-(5x)^2}}}{\text{arccos}5x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-5}{\sqrt{\ln(\text{arcos}5x)}\sqrt{1-(5x)^2}(arcos5x)}\right) =$$

$$= -\frac{5}{2\sqrt{\ln\,(\text{arccos}5x)}\sqrt{1-25x^2}\,(arccos5x)}$$

b) $\boldsymbol{y = \text{arcsen}\frac{2-7x^2}{2+7x^2}}$

$$y' = \frac{\frac{-14x(2+7x^2)-(2-7x^2)14x}{(2+7x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2-7x^2}{2+7x^2}\right)^2}} = \frac{\frac{-56x}{(2+7x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2-7x^2}{2+7x^2}\right)^2}} = \frac{-56x}{\sqrt{1-\left(\frac{2-7x^2}{2+7x^2}\right)^2}\,(2+7x^2)^2}$$

c) $\boldsymbol{y = 5\text{arccos}\frac{3\,\text{sen}\,x+5}{5-3\,\text{sen}\,x}}$

$$y' = 5\left(\frac{-\frac{(3\cos x)(5-3\,\text{sen}\,x)+(3\,\text{sen}\,x+5)(3\cos x)}{(5-3\,\text{sen}\,x)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{3\text{sen}\,x+5}{5-3\text{sen}\,x}\right)^2}}\right) = -5\left(\frac{\frac{15\cos x-9\cos x\,\text{sen}\,x+9\,\text{sen}\,x\cos x+15\cos x}{(5-3\,\text{sen}\,x)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{3\text{sen}\,x+5}{5-3\text{sen}\,x}\right)^2}}\right) =$$

$$= -5\left(\frac{\frac{30\cos x}{(5-3\,\text{sen}\,x)^2}}{\sqrt{1-\frac{(3\,\text{sen}\,x+5)^2}{(5-3\text{sen}\,x)^2}}}\right) = -5\left(\frac{30\cos x}{\sqrt{1-\frac{(3\,\text{sen}\,x+5)^2}{(5-3\text{sen}\,x)^2}}(5-3\,\text{sen}\,x)^2}\right) = \left(\frac{-150\cos x}{\sqrt{(5-3\text{sen}\,x)^2-(3\,\text{sen}\,x+5)^2}(5-3\,\text{sen}\,x)}\right) =$$

$$= \frac{-150\cos x}{\sqrt{-60senx}(5-3\,\text{sen}\,x)}$$

d) $y = \text{arcsen}\frac{5\cos x}{3\,\text{sen}\,x+2\cos x}$

$$y' = \frac{\frac{-5\text{sen}\,x(3\,\text{sen}\,x+2\cos x)-(5\cos x)(3\cos x-2\,\text{sen}\,x)}{(3\,\text{sen}\,x+2\cos x)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{5\cos x}{3\text{sen}\,x+2\cos x}\right)^2}} = \frac{\frac{-15\text{sen}\,x^2-10\,\text{sen}\,x\cos x-15\cos x^2+10\,\text{sen}\,x\cos x}{(3\,\text{sen}\,x+2\cos x)^2}}{\sqrt{1-\frac{(5\cos x)^2}{(3\,\text{sen}\,x+2\cos x)^2}}} =$$

$$= \frac{-15(\text{sen}\,x^2+\cos x^2)}{\sqrt{1-\frac{25cos^2x}{(3\,\text{sen}\,x+2\cos x)^2}}(3\,\text{sen}\,x+2\cos x)^2} =$$

$$= \frac{-15(\text{sen}\,x^2+\cos x^2)}{\frac{\sqrt{(3\,\text{sen}\,x+2\cos x)^2-25cos^2x(3\,\text{sen}\,x+2\cos x)^2}}{3\text{sen}\,x+2\cos x}} = \frac{-15(\text{sen}\,x^2+\cos x^2)}{\sqrt{(3\,\text{sen}\,x+2\cos x)^2-25cos^2x}\cdot(3\text{sen}\,x+2\cos x)}$$

35. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \text{arcsen}(7e^{2x-3})$

$$y' = \frac{14e^{2x-3}}{\sqrt{1-(7e^{2x-3})^2}} = \frac{14e^{2x-3}}{\sqrt{1-49(e^{2x-3})^2}}$$

b) $y = \ln\left(\sqrt{5\text{arcsen}(3x+2)}\right) = \frac{1}{2}\ln[5\text{arcsen}(3x+2)]$

$$y' = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{5\cdot 3}{\sqrt{1-(3x+2)^2}}\right)}{5\text{arcsen}(3x+2)} = \frac{15}{10\text{arcsen}(3x+2)\sqrt{1-(3x+2)^2}}$$

c) $y = \text{arctg}\left(ln\sqrt[3]{(4x-5}\right) = arctg\frac{1}{3}ln(4x-5)$

$$y' = \frac{\frac{4}{3(4x-5)}}{1+\left(\ln\sqrt[3]{4x-5}\right)^2} = \frac{4}{3(4x-5)\left(1+\left(\ln\sqrt[3]{4x-5}\right)^2\right)}$$

d) $y = \text{arcsen}(3\tan(5\,\text{sen}(4x-2)))$

$$y' = \frac{3\sec^2(5\text{sen}(4x-2))(5\cos(4x-2))(4)}{\sqrt{1-(3\tan(5\,\text{sen}(4x-2)))^2}} = \frac{60(\cos(4x-2))(\sec^2(5\text{sen}(4x-2))}{\sqrt{1-9(\tan^2(5\text{sen}(4x-2))}}$$

36. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \text{arctg}\sqrt{\frac{7+2\text{senx}}{7-2\text{senx}}}$

$$y' = \frac{\left(\frac{1}{2}(7+2\text{senx})^{-\frac{1}{2}}(2\text{cosx})\sqrt{7-2\text{senx}}\right)-\sqrt{7+2\text{senx}}\left(\frac{1}{2}(7-2\text{senx})^{-\frac{1}{2}}\right)(-2\text{cosx})}{1+\left(\sqrt{\frac{7+2\text{senx}}{7-2\text{senx}}}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{2\text{cosx}\sqrt{7-2\text{senx}}}{2(\sqrt{7+2\text{senx}})}+\frac{2\text{cosx}\sqrt{7+2\text{senx}}}{2(\sqrt{7-2\text{senx}})}}{\left(1+\frac{7+2\text{senx}}{7-2\text{senx}}\right)(7-2\text{senx})} = \frac{\frac{cosx\sqrt{7-2\text{senx}}}{\sqrt{7+2\text{senx}}}+\frac{cosx\sqrt{7+2\text{senx}}}{\sqrt{7-2\text{senx}}}}{\left(1+\frac{7+2\text{senx}}{7-2\text{senx}}\right)(7-2\text{senx})}$$

b) $y = e^{arcsen\sqrt{2x-5}}$

$$y' = e^{arcsen\sqrt{2x-5}}\left(\frac{\frac{1}{2}(2x-5)^{-\frac{1}{2}}(2)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{2x-5}\right)^2}}\right) = \frac{\left(e^{arcsen\sqrt{2x-5}}\right)\left(\frac{1}{2}(2x-5)^{-\frac{1}{2}}\right)(2)}{\sqrt{6x-2}} =$$

$$= \frac{(e^{arcsen\sqrt{2x-5}})2}{2\sqrt{2x-5}\sqrt{6x-2}} = \frac{e^{arcsen\sqrt{2x-5}}}{\sqrt{2x-5}\sqrt{6x-2}}$$

c) $y = \cos\left(3arcsen\frac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}}\right)$

$$y' = -\,\mathrm{sen}\left(3\mathrm{arcsen}\frac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}}\right)(3)\left(\frac{\frac{6\sqrt{7-2x^2}-(6x-1)\left(\frac{1}{2}(7-2x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)(-4x)}{\left(\sqrt{7-2x^2}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}}\right)^2}}\right) =$$

$$= \frac{-3\,\mathrm{sen}\left(3arcsen\frac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}}\right)\left(6\sqrt{7-2x^2}+\frac{4x(6x-1)}{2\sqrt{7-2x^2}}\right)}{(7-2x^2)\sqrt{1-\frac{(6x-1)^2}{7-2x^2}}} = -\frac{3\,\mathrm{sen}\left(3arcsen\frac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}}\right)\left(6\sqrt{7-2x^2}+\frac{2x(6x-1)}{\sqrt{7-2x^2}}\right)}{(7-2x^2)\sqrt{1-\frac{(6x-1)^2}{7-2x^2}}}$$

d) $y = arcsen\frac{7x}{\sqrt{9-2x^2}}$

$$y' = \frac{\frac{7\sqrt{9-2x^2}-(7x)\left(\frac{1}{2}(9-2x^2)\right)^{-\frac{1}{2}}(-4x)}{\left(\sqrt{9-2x^2}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{7x}{\sqrt{9-2x^2}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\frac{7\sqrt{9-2x^2}-(7x)\left(\frac{1}{2}(9-2x^2)\right)^{-\frac{1}{2}}(-4x)}{9-2x^2}}{\sqrt{1-\frac{49x^2}{9-2x^2}}} = \frac{7\left(\sqrt{9-2x^2}+\frac{4x^2}{2\sqrt{9-2x^2}}\right)}{\sqrt{1-\frac{49x^2}{9-2x^2}}(9-2x^2)} = \frac{7\left(\sqrt{9-2x^2}+\frac{2x^2}{\sqrt{9-2x^2}}\right)}{\sqrt{1-\frac{49x^2}{9-2x^2}}(9-2x^2)}$$

37. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \log\left(x^3-5x^5\right)^8$

$$y' = 8(x^3-5x^5)^7\left(\frac{3x^2-25x^4}{(x^3-5x^5)^8}\right) = \frac{8(3x^2-25x^4)}{x^3-5x^5}$$

b) $y = \log_2(8x^2-3x^3)^2$

$$y' = 2(8x^2-3x^3)\left(\frac{16x-9x^2}{8x^2-3x^3}\right)\log_2 e = \frac{2\quad(16x-9x^2)\log_2 e}{8x^2-3x^3}$$

c) $y = \ln\sqrt{\frac{(3x^6-7x^2)^4}{2x-1}} = \frac{1}{2}\ln\frac{(3x^6-7x^2)^2}{\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{2}\left(2\ln(3x^6-7x^2) - \frac{1}{2}\ln(2x-1)\right)$

$$y' = \frac{1}{2}\left[\left(2\cdot\frac{18x^5-14x}{(3x^6-7x^2)}\right) - \frac{1}{2}\frac{2}{2x-1}\right] = \frac{18x^5-14x}{(3x^6-7x^2)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x-1}$$

d) $y = \ln\sqrt[4]{(3x^3+5x^9)^7} = \frac{7}{4}\ln(3x^3+5x^9)$

$$y' = \frac{7}{4}\left(\frac{9x^2+45x^8}{3x^3+5x^9}\right) = \frac{7(9x^2+45x^8)}{4(3x^3+5x^9)} = \frac{63+315x^6}{12x+20x^7}$$

38. Sea la función $f(x) = 2x|4-x|$ Estudia su continuidad y derivabilidad.

$$2x|4-x| = \begin{cases} -2x(4-x), & x > 4 \\ \;\;2x(4-x), & x \le 4 \end{cases}$$

$$2x|4-x| = \begin{cases} 2x^2-8x, & x > 4 \\ 8x-2x^2, & x \le 4 \end{cases}$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Estudiar su continuidad en x = 4

$f(4) = 8 \cdot 4 - 2 \cdot 4^2 = 0$

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 4^+} (2x^2 - 8x) = 2 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 = 0 \\ \lim_{x\to 4^-} (8x - 2x^2) = 8 \cdot 4 - 2 \cdot 4^2 = 0 \end{cases}$$

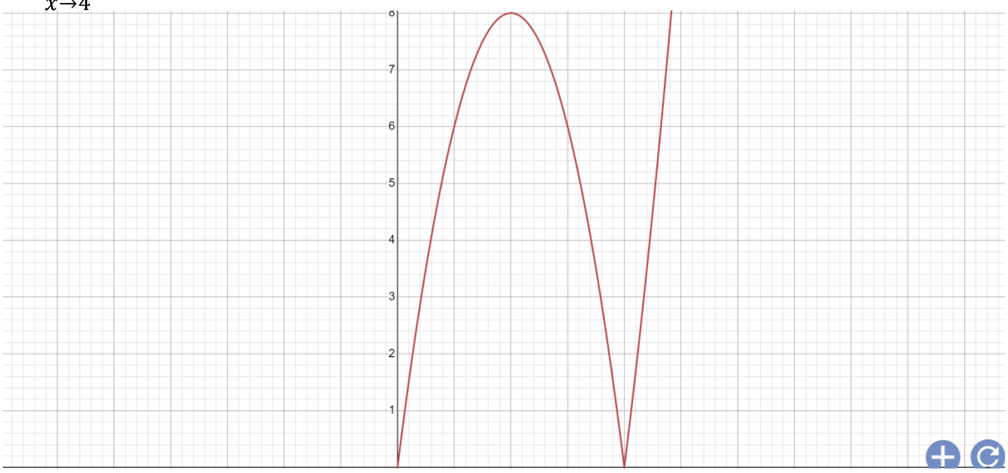
$Como\ f(4) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x)\ \ entonces\ f(x) es\ continua\ en\ x = 4$

Estudiar su derivabilidad en x = 4

$$\lim_{x\to 4} f'(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 4^+} (4x - 8) = 4 \cdot 4 - 8 = 8 \\ \lim_{x\to 4^-} (8 - 4x) = 8 - 4 \cdot 4 = -8 \end{cases}$$

$Como\ \lim_{x\to 4^+} f'(x) \neq \lim_{x\to 4^-} f'(x)\ \ entonces\ f(x)\ no\ es\ derivable\ en\ x = 4$

Dibuja su gráfica.



39. Se considera la función $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$. Calcula las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función f(x).

Asíntotas:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 + 1} = 1$$

Por tanto, tiene asíntota horizontal en y=1. No tiene asíntotas verticales ni oblicuas.

Máximos y mínimos:

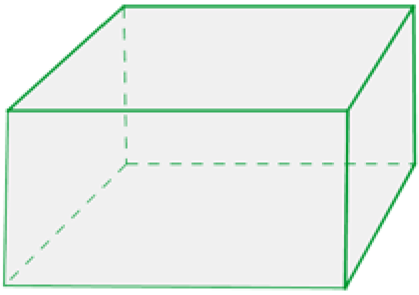
$$f'(x) = \frac{(8x-4)\cdot(4x^2+1)-(8x)\cdot(4x^2-4x+1)}{(4x^2+1)^2} = \frac{32x^3+8x-16x^2-4-(32x^3-32x^2+8x)}{(4x^2+1)^2} = \frac{16x^2-4}{(4x^2+1)^2}$$

$$\frac{16x^2-4}{(4x^2+1)^2} = 0 \to 16x^2 - 4 = 0; \quad x = \frac{1}{2}; \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{32x\cdot(4x^2+1)^2-(16x^2-4)\cdot 2\cdot(4x^2+1)\cdot 8x}{(4x^2+1)^4} = \frac{32x\cdot(4x^2+1)-(16x^2-4)\cdot 16x}{(4x^2+1)^3}$$

$f''\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, mínimo $\qquad f''\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$ máximo

40. Se desea fabricar envases con forma de ortoedro de base cuadrada de forma que el volumen sea de dos litros y la superficie empleada sea mínima.



x= largo = profundo / y= altura

V= 2 litros = $2dm^3$

Volumen:$2 = x^2 \cdot y \to y = \frac{2}{x^2}$

Superficie = $2(x^2 + 2yx) = 2\left(x^2 + \frac{2}{x^2}x\right)$

$f(x) = 2\left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = 2x^2 + \frac{4}{x} = 2x^2 + \frac{4}{x}$

$f'(x) = 4x - \frac{4}{x^2} \qquad 4x - \frac{4}{x^2} = 0 \to \frac{4x^3-4}{x^2} = 0 \to 4x^3 - 4 = 0 \to x = 1$

$f''(x) = 4 + \frac{8}{x^3} \qquad f''(1) = 4 + \frac{8}{(1)^3} > 0 \to Por\ lo\ tanto\ tenemos\ un\ mínimo\ para\ x = 1$

$y = \frac{2}{(1)^2} = 2$ Lado de la base: 1 dm, altura: 2 dm

41. Determina las dimensiones de un cono de volumen mínimo inscrito en una esfera de radio R= 5cm.

V=$\frac{h\cdot\pi\cdot r^2}{3}$; $h = R + x \to h = 5 + x$; $r^2 = R^2 - x^2 \to r^2 = 25 - x^2$

$$V = \frac{(5+x)\cdot\pi\cdot r^2}{3} = \frac{(5+x)\cdot\pi\cdot(25-x^2)}{3}$$

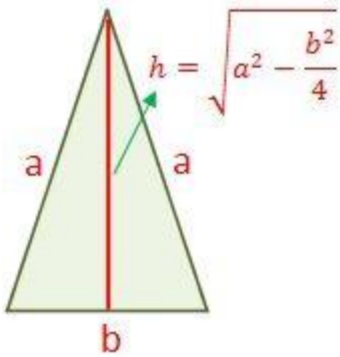
$$f'^{(x)} = \frac{-10\pi x + 25\pi}{3} - \pi x^2 = 0 \to x_1 = 0{,}66\,; \quad x_2 = -3{,}99$$

La opción negativa no es válida.

$f''(x) = -\frac{10\pi}{3} - 2\pi x \qquad f''(0{,}66) = -\frac{10\pi}{3} - 2\pi(0{,}66) < 0 \to Hay\ un\ máximo\ relativo\ para\ 0{,}66.$

$h = 5 + 0{,}66 = 5{,}66\ cm \qquad r^2 = 25 - (0{,}66)^2 = 24{,}564; \qquad r = 4{,}9cm$

42. Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.



perímetro= b+2a

8= b+2a→ $a = \frac{8-b}{2}$

A=$\frac{1}{2}b \cdot h = \frac{b\cdot\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}}{2} = \frac{b\cdot\sqrt{\left(\frac{8-b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}}}{2}$

$f(x)=\frac{b\cdot\sqrt{\frac{64-16b}{4}}}{2}=\frac{\frac{b}{2}\cdot\sqrt{64-16b}}{2}=\frac{\frac{b}{2}\cdot\sqrt{16(4-b)}}{2}=b\cdot\sqrt{4-b}$

$f'(x)=\sqrt{4-b}+b\left(\sqrt{4-b}\right)=\sqrt{4-b}+\frac{b\cdot(-1)}{\sqrt{4-b}}=\frac{4-b-b}{\sqrt{4-b}}\rightarrow\frac{4-2b}{\sqrt{4-b}}=0$

$4-2b=0\rightarrow 4=2b\rightarrow b=2$

$f''(x)=\frac{-6+b}{\sqrt{4-b}\cdot(4-b)}$

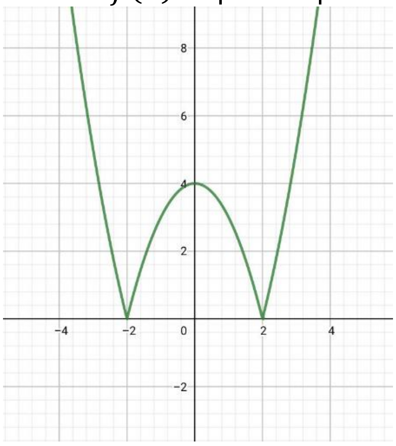
$f''(b)<0\ \rightarrow Por\ tanto\ tenemos\ un\ máximo\ para\ b=2$

$a=\frac{8-b}{2}=\frac{8-2}{2}=3\qquad;\qquad h=\sqrt{9-\frac{4}{4}}=\sqrt{8}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Piensa en un ejemplo de función no derivable y que sí sea continua.

Es el caso de las funciones en valor absoluto: $f(x) = |x^2 - 4|$



Esta función es continua en todo $\mathbb{R}$, pero no es derivable en $x = -2$ y en $x = 2$, ya que esos dos puntos no tienen una única recta tangente.

2.- Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ en $x = 1, 4, 5$ ... ¿Puedes obtener la derivada en $x = 0$? Razona la respuesta.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{0}{0} \to L'Hôpital \to \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

$$f'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{0}{0} \to L'Hôpital \to \lim_{x \to 4} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

$$f'(5) = \lim_{x \to 5} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5} = \frac{0}{0} \to L'Hôpital \to \lim_{x \to 5} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x \to 5} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}-0}{x-0} = \frac{0}{0} \to L'Hôpital \to \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{0}} = \frac{1}{0} = +\infty;$$

$$No\ se\ puede\ obtener\ la\ derivada\ en\ x = 0$$

3.- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & si\ x \le 1 \\ 2 & si\ x > 1 \end{cases}$, indica cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas, razonando la respuesta.

a) f es derivable en x=1, pues las derivadas laterales se anulan en dicho punto.

b) f ni es continua en x=1 ni derivable en dicho punto.

$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & si\ x < 1 \\ 0 & si\ x > 1 \end{cases}$ $\qquad f_-'(1) = 2(1-1) = 0;$ $\qquad f_+'(1) = 0$

$f_-^{\prime(1)} = f_+^{\prime(1)} = 0$; las derivadas laterales tienen el mismo valor.

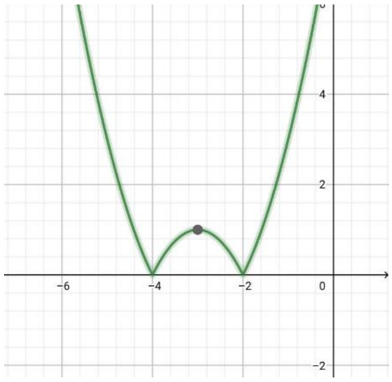
Sin embargo, f no es continua en 1 y por tanto tampoco derivable, la respuesta correcta es la b.

4.- ¿Cuántos puntos hay en la función $f(x) = |x^2 + 6x + 8|$ que no tengan derivada? Justifica la respuesta.

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra



Como podemos observar, la función es continua en todo $\mathbb{R}$, pero no es derivable en los puntos $x=-4$ y $x=-2$, ya que esos dos puntos tienen dos rectas tangentes.

5.- Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y=5x^2+3x-2$ en el punto $x=5$

$$\boldsymbol{y=f(a)+f'(a)(x-a)}$$

$f(5)=5\cdot 5^2+3\cdot 5-2=125$
$f'(x)=10x+3\rightarrow f'(5)=10\cdot 5+3=53$
$y=125+53(x-5)=125+53x-265=53x-140$
$y=53x-140$

6.- El perfil de una cierta montaña tiene la forma de una parábola: $y=0,03x-0,002x^2$, donde x e y se miden en km. Escribe la ecuación de la recta tangente para $x=0, x=1, x=2, x=3$ km.

$$\boldsymbol{y=f(a)+f'(a)(x-a)}$$

a) $\mathrm{f}(0)=0{,}03\cdot 0-0{,}002\cdot 0^2=0$
$\mathrm{f}'(\mathrm{x})=0{,}03-0.004\mathrm{x}\rightarrow \mathrm{f}'(0)=0{,}03-0{,}004\cdot 0=0{,}03$
$\mathrm{y}=0+0{,}03(\mathrm{x}-0);\quad \mathrm{y}=0{,}03\mathrm{x}$
b) $\mathrm{f}(1)=0{,}03\cdot 1-0{,}002\cdot 1^2=0{,}028$
$\mathrm{f}'(1)=0{,}03-0{,}004\cdot 1=0{,}026$
$\mathrm{y}=0{,}028+0{,}026(\mathrm{x}-1)$
c) $\mathrm{f}(2)=0{,}03\cdot 2-0{,}002\cdot 2^2=0{,}052$
$\mathrm{f}'(2)=0{,}03-0{,}004\cdot 2=0{,}022$
$\mathrm{y}=0{,}052+0{,}022(\mathrm{x}-2)$
d) $\mathrm{f}(3)=0{,}03\cdot 3-0{,}002\cdot 3^2=0{,}072$
$\mathrm{f}'(3)=0{,}03-0{,}004\cdot 3=0{,}018$
$\mathrm{y}=0{,}072+0{,}018(\mathrm{x}-2)$

7.- Al caer un cuerpo en el vacío la distancia d (en metros), recorrida a los t segundos viene dada aproximadamente por la expresión: $d=5t^2$. (La expresión es $d=(1/2)gt^2$, donde g es la aceleración de la gravedad terrestre, aproximadamente de 9.8):

a) **¿A que velocidad llegará al suelo una persona que en un incendio se lance a la lona de los bomberos y tarde 8 segundos en llegar a ella?**

$$Sabiendo\ que:\quad v=d';\quad d'=10t\quad v=10\cdot 8=80m/s$$

b) **¿A que velocidad llegará si se lanza desde una altura de 20m?**

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$Sabiendo\ que$: $v=\frac{d}{t}$; $d=5t^2 \rightarrow t=\sqrt{\frac{d}{5}}$ $t=\sqrt{\frac{20}{5}}=2\ s$ $v=10\cdot 2$
$=20m/s$

8. Un vehículo espacial despega de un planeta con una trayectoria dada por:$\boldsymbol{y=30x-0'5x^2}$(x e y en km). La dirección del vehículo nos proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 4 km de distancia sobre el horizonte.

Dada la función $f(x)=30x-0'5x^2$ hacemos la derivada $f(x)'=30-x$ y sustituimos x=4
$f'(4)=30-4=26$ y hallamos la dirección del vehículo.

9. Un determinado gas ocupa un volumen de 3 $\boldsymbol{m^3}$ a una presión de 3 Newtons por $\boldsymbol{m^2}$. Según la ley de Boyle a cada presión ejercida sobre el gas corresponde a un volumen dado por $\boldsymbol{V=10/P}$. ¿Cuál es la tasa de variación instantánea del volumen cuando la presión es de 9 Newtons por $\boldsymbol{m^2}$.¿ Y cuando es 18 Newtons por $\boldsymbol{m^2}$? ¿Es la mitad?

Viendo el enunciado sabemos que para calcular la tasa de variación instantánea tenemos que hacer la derivada de $V=10/P$ y sustituir la presión.
$V=\frac{10}{P}$; $V'=-\frac{10}{P^2}$ $V'(9)=-\frac{10}{9^2}=-\frac{10}{81}$ $V'(18)=-\frac{10}{18^2}=-\frac{10}{324}$

10. Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:

Fórmula de la recta tangente: $y=f(a)+f'(a)(x-a)$

a) $\boldsymbol{y=x^3+5}$ en x=2

$y'=3x^2$
$y(2)=2^3+5=13$ $y'(2)=3\cdot 2^2=12$

$y=13+12(x-2)\rightarrow y=12x-11$

b) $\boldsymbol{y=3x^2+7x-2}$ en x=1

$y(1)=1^3+5=6$

$y'=6x+7$; $y'(1)=6+7=13$

$$y=6+13(x-1)\rightarrow \quad y=13x-5$$

c) $\boldsymbol{y=2x^3-5x^2+4}$ en x=0

$$y(0)=2\cdot 0^3-5\cdot 0^2+4=4$$

$y'=6x^2-5x$ $y'(0)=6\cdot 0^2-5\cdot 0=0$

$y=4+0(x-0)\rightarrow y=4$

11. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $\boldsymbol{y=x^3-3x+2}$ en los que su tangente sea paralela: a) a la recta y=0 ; b) a la recta y=2x.

$$y=x^3-3x+2$$

a) Paralela y=0 $\rightarrow m=0$ $y=3x^2-3$; $3x-3=0$; $3x=3$; $x=1$

Punto (1,0)

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

b) y=2x $\rightarrow$ $m = 2$ $y = 3x^2 - 3$ $;3x - 3 = 2\ ;3x = 5\ ;x = \frac{5}{3}$

Punto (5/3, 10/3)

12. Determina la recta tangente de la gráfica de la función $y = \sqrt{4x^3}$ en x=0

$$y(0) = \sqrt{0} = 0$$
$$y' = \frac{12x^2}{2\sqrt{4x^3}} = \frac{12x^2}{2 \cdot 2\sqrt{x^3}} = (x^2 \cdot x^{-\frac{3}{2}} = x^{1/2}) = 3\sqrt{x}$$
$$y('0) = 3\sqrt{0} = 0$$
$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$
$$y = 0 + 0(x - 0) \rightarrow y = 0$$

13. Determina las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 12x$ en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?

$f(x) = 4x^3 - 12x$ m=12

$$f'(x) = 12x^2 - 12x \quad el\ menor\ valor\ que\ puede\ tener\ la\ pendiente\ es\ en\ x = 0\ ;\ (0{,}0)$$

$$f'(x) = 12x^2 - 12x \quad ;12x^2 - 12x = 12; \quad 12x^2 = 24; \quad x = \pm\sqrt{2}$$

Puntos: $(\sqrt{2}, -4\sqrt{2})\ y\ (-\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

14. Determina los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, que pasa por el punto A(1,2) y es tangente a la recta y=x en el punto O(0,0).

$$\begin{array}{ll} & f(0) = 0 \quad \rightarrow c = 0 \\ f'(x) = 3ax^2 + b & f'(0) = b \qquad 1 = b \\ Punto\ A(1{,}2) & f(1) = 2 \quad \rightarrow a = 1 \end{array}$$

15. Determina los coeficientes a, b y c para que las funciones $f(x) = x^3 + bx + a$ y $g(x) = cx - x^2$ tengan la misma recta tangente en el punto A(1, 0).

$f(x) = x^3 + bx + a\,;\quad f(1) = 0\,;\ 0 = 1^3 + b(1) + a\,;\quad 0 = a - 3 + 1\,;\quad a = 2$

$g(x) = cx - x^2\ ;\ g(1) = 0\,;\quad c - 1 = 0\,;\quad c = 1$

$f(x) = x^3 + bx + a\,;\quad f'(x) = 3x^2 + b\,;\ f'(1) = 3 + b$

$g'(x) = c - 2x = 1 - 2x \qquad g'(1) = -1\ ;\quad 3 + b = -1\,;\quad b = -4$

16. Determina el coeficiente a, para que la función $f(x) = x^2 + a$, sea tangente a la recta y=x.

$y = x \rightarrow m = 1$

$f(x) = x^2 + a\,; f'(x) = 2x\,; 2x = 1\,; x = \frac{1}{2}\ ;\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a = \frac{1}{4} + a$

En los puntos de la forma $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} + a\right)$ la recta y = x es tangente a la función.

17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $y = 3x^2 + 5x - 7\,;$ $y' = 6x + 5$

b) $y = 5x^3 - 4x^2 + 3x + 2\,;$ $y' = 15x^2 - 8x + 3$

c) $y = 6x^2 - 4x + 7$; $y' = 12x - 4$

d) $y = 9x^7 - 4x^6 - 2x^3$; $y' = 63x^6 - 24x^5 - 6x^2$

18. Calcula.

a) $D(3x^2 + 6x^4 - 9x) = 6x + 24x^3 - 9$

b) $D(7x^5 - 5x^2 + 3x + 2x^3) = 35x^4 - 10x + 3 + 6x^2$

c) $D(5x^5 - 4x^4 + 3x^3) = 25x^4 - 16x^3 + 9x^2$

d) $\frac{dy}{dx}(7x^3 - 8x^6 - 9x^8) = 21x^2 - 48x^5 - 72x^7$

19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 5x^2 + 4x - \frac{3}{x}$; $y' = 10x + 4 + \frac{3}{x^2}$

b) $y = \frac{(2x^2+5)(7x-3)}{5x-8}$; $y = \frac{14x^3-6x^2+35x-15}{5x-8}$; $y' = \frac{(42x^2-12x+35)(5x-8)-(14x^3-6x^2+35x-15)(5)}{(5x-8)^2}$

c) $y = \frac{6\sqrt{x}}{(x+2)(x^2-3x+1)}$; $y = \frac{6x^{\frac{1}{2}}}{(x^3-3x^2+x+2x^2-6x+2)}$; $y' = \frac{\left(3x^{-\frac{1}{2}}\right)(x^3-x^2-5x+2)-\left(6x^{\frac{1}{2}}\right)(3x^2-2x-5)}{(x^3-x^2-5x+2)^2}$

d) $y = \frac{\sqrt{x}(x+3)}{(x^2-3)}$; $y = \frac{x^{\frac{1}{2}}(x+3)}{(x^2-3)}$; $y = \frac{\left(x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}\right)}{(x^2-3)}$; $y' = \frac{\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)(x^2-3)-\left(x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}\right)(2x)}{(x^2-3)^2}$

20. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a)\ y = \frac{(x-3)\cdot(2x-4)}{x+5}}$

$y' = \frac{(1\cdot(2x-4)+(x-3)\cdot 2)\cdot(x-5)-((x-3)\cdot(2x-4))\cdot 1}{(x+5)^2}$ $\qquad y' = \frac{2x^2+20x-62}{(x+5)^2}$

$\boldsymbol{b)\ y = \frac{(2x^2+5)\cdot(7x-3)}{5x-8}}$

$y' = \frac{(4x\cdot(7x-3)+(2x^2+5)\cdot 7)\cdot(5x-8)-((2x^2+5)\cdot(7x-3))\cdot 5}{(5x-8)^2}$ $\qquad y' = \frac{140x^3-366x^2+96x-205}{(5x-8)^2}$

$\boldsymbol{c)\ y = \frac{(2x+3x^2)\cdot(4x^5-5)}{6x+7}}$

$y' = \frac{((2+6x)\cdot(4x^5-5)+(2x+3x^2)\cdot 20x^4)\cdot(6x+7)-((2x+3x^2)\cdot(4x^5-5))\cdot 6}{(6x+7)^2}$

$y' = \frac{432x^7+828x^6+366x^5-90x^2-210x-70}{(6x+7)^2}$

$\boldsymbol{d)\ y = \frac{5(x+2)\cdot(4x-6)}{2(x+5)\cdot(6x+3)}}$

$y' = \frac{5}{2}\cdot\frac{(1\cdot(4x-6)+(x+2)\cdot 4)\cdot((x+5)\cdot(6x+3))-((x+2)\cdot(4x-6))\cdot(1\cdot(6x+3)+(x+5)\cdot 6)}{((x+5)\cdot(6x+3))^2}$

$y' = \frac{5(20x^2+44x+71)}{3(x+5)^2\cdot(2x+1)^2}$

21. calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a)\ y = (x^3+5)\cdot(8x^6-7)}$

$y' = (3x^2\cdot(8x^6-7)+(x^3+5)\cdot 48x^5)$ $\qquad y' = 72x^8 + 240x^5 - 21x^2$

$\boldsymbol{b)\ y = (9x^3-3)\cdot(7x^4+6)}$

$y' = (27x^2\cdot(7x^4+6)+(9x^3-3)\cdot 28x^3)$ $\qquad y' = 441x^6 - 84x^3 + 162x^2$

22. calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a)\ y = \frac{x-2}{x+2}}$ $\quad y' = \frac{(1)\cdot(x+2)-(x-2)\cdot 1}{(x+2)^2}$ $\quad y' = \frac{4}{(x+2)^2}$

$\boldsymbol{b)\ y = \sqrt{x-2}\cdot(6x^3-3x)}$

$y' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\cdot(6x^3-3x) + \left(\sqrt{x-2}\right)\cdot(18x^2-3)\right)$ $\quad y' = \frac{42x^3-72x^2-9x+12}{2\sqrt{x-2}}$

$\boldsymbol{c)\ y = \frac{(4x^3-7x^2)}{(8x^4-4x^3)}}$

$y' = \frac{(12x^2-14x)\cdot(8x^4-4x^3)-(4x^3-7x^2)\cdot(32x^3-12x^2)}{(8x^4-4x^3)^2}$ $\quad y' = \frac{8x^2-28x+7}{4x^2(2x-1)^2}$

$\boldsymbol{d)\ y = \frac{2\sqrt{x^3}}{3x+4}}$ $\quad y' = \frac{2\left(\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)\cdot(3x+4)-\left(2\sqrt{x^3}\right)\cdot 3}{(3x+4)^2}$ $\quad y' = \frac{3x\sqrt{x}+12\sqrt{x}}{(3x+4)^2}$

23. calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a)\ y = (x^6-5x^2)^9}$ $\quad y' = (9\cdot(x^6-5x^2)^8\cdot(6x^5-10x))$

$\boldsymbol{b)\ y = (2x^4-7x^6)^5}$ $\quad y' = (5\cdot(2x^4-7x^6)^4\cdot(8x^3-42x^5))$

$\boldsymbol{c)\ y = \sqrt{(2x^7-6x^5)^3}}$ $\quad y' = \left(\frac{3}{2}\cdot(2x^7-6x^5)^{\frac{1}{2}}\cdot(14x^6-30x^4)\right)$

$\boldsymbol{d)\ y = \sqrt[5]{(3x^4+6x^9)^7}}$ $\quad y' = \left(\frac{7\cdot(3x^4+6x^9)^{\frac{2}{5}}\cdot(12x^3-54x^8)}{5}\right)$

24. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

A) $\boldsymbol{y = \sqrt{2x^3+3}\cdot(4x^7+6x^2)^6} \to (2x^3+3)^{\frac{1}{2}}\cdot(4x^7+6x^2)^6 \to$

$y' = \frac{1}{2}(2x^3+3)^{-1/2}\cdot(6x^2)\cdot(4x^7+6x^2)^6 + (2x^3+3)^{\frac{1}{2}}\cdot 6(4x^7+6x^2)^5\cdot(28x^6+12x)$

B) $\boldsymbol{y = \frac{\sqrt[3]{5x^3+7x^2-2}}{3x+4}}$ $\quad \to y' = \frac{\frac{15x^2+14x}{3\sqrt[3]{(5x^3+7x^2-2)^2}}\cdot(3x+4)-3\cdot\sqrt[3]{5x^3+7x^2-2}}{(3x+4)^2}$

C) $\boldsymbol{y = (7x^3+3)^5\cdot\left(4x^5-8x^8\right)}$

$y' = 5\cdot(7x^3+3)^4\cdot 21x^2\cdot(4x^5-8x^8) + (7x^3+3)^5\cdot(20x^4-64x^7)$

D) $\boldsymbol{y = \frac{(5x^3-7x^2)^9}{(9x^4-3x^3)^2}}$ $\quad \to y' = \frac{9(5x^3-7x^2)^8\cdot(15x^2-14x)\cdot(9x^4-3x^3)^2-2(9x^4-3x^3)\cdot(36x^3-9x^2)\cdot(5x^3-7x^2)^9}{(9x^4-3x^3)^4}$

$y' = \frac{9(5x^3-7x^2)^8\cdot(15x^2-14x)\cdot(9x^4-3x^3)-2\cdot(36x^3-9x^2)\cdot(5x^3-7x^2)^9}{(9x^4-3x^3)^3}$

25. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las funciones siguientes:

A) $\boldsymbol{y = (5x)^{x^5-3x^3}} \to Ly = L(5x)^{x^5-3x} \to Ly = (x^5-3x^3)\cdot L(5x)$

$\frac{y'}{y} = (5x^4-9x^2)\cdot L(5x) + (x^5-3x^3)\cdot\frac{5}{5x} \to y' = y\left[(5x^4-9x^2)\cdot L5x + (x^5-3x^3)\cdot\frac{5}{5x}\right]$

$y' = \left((5x)^{x^5-3x^3}\right)\cdot\left[(5x^4-9x^2)\cdot L(5x) + (x^5-3x^3)\cdot\frac{1}{x}\right]$

B) $\boldsymbol{y = e^{(3x^5-6x^3)^5}} \to Ly = Ln\, e^{(3x^5-6x^3)^5} \to Ly = (3x^5-6x^3)^5 \to$

$\frac{y'}{y} = 5\cdot(3x^5-6x^3)^4(15x^4-18x^2) \to y' = y\cdot(3x^5-6x^3)^4[75x^4-90x^2]$

$y' = \left(e^{(3x^5-6x^3)^5}\right)\cdot(3x^5-6x^3)^4(75x^4-90x^2)$

C) $\boldsymbol{y=(3x+6)^{4x^3+2x^2}} \to Ly = L(3x+6)^{4x^3+2x^2} \to Ly=(4x^3+2x^2)\cdot L(3x+6)$

$\frac{y'}{y}=(12x^2+4x)\cdot L(3x+6)+(4x^3+2x^2)\cdot\frac{3}{3x+6}$

$y'=y\cdot\left[(12x^2+4x)\cdot(3x+6)+(4x^3+2x^2)\cdot\frac{3}{3x+6}\right]$

$y'=\left[(12x^2+4x)\cdot(3x+6)+(4x^3+2x^2)\cdot\frac{3}{3x+6}\right]\cdot(3x+6)^{4x^3+2x^2}$

D) $\boldsymbol{y=\sqrt[3]{(5x+1)^{(4x^7+6x^5)^3}}}=(5x+1)^{\frac{(4x^7+6x^5)^3}{3}} \to Ly=L(5x+1)^{\frac{(4x^7+6x^5)^3}{3}} \to$

$Ly=\frac{(4x^7+6x^5)^3}{3}\cdot L(5x+1)$

$\frac{y'}{y}=\frac{3(4x^7+6x^5)^2}{3}(28x^3-30x^4)\cdot L(5x+1)+\frac{(4x^7+6x^5)^3}{3}\cdot\frac{5}{5x+1}$

$y'=y\cdot\left[\frac{3(4x^7+6x^5)^2}{3}(28x^3-30x^4)\cdot L(5x+1)+\frac{(4x^7+6x^5)^3}{3}\cdot\frac{5}{5x+1}\right]$

$y'=\left[(4x^7+6x^5)^2(28x^3-30x^4)\cdot L(5x+1)+\frac{(4x^7+6x^5)^3}{3}\cdot\frac{5}{5x+1}\right]\cdot\sqrt[3]{(5x+1)^{(4x^7+6x^5)^3}}$

26. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

A) $y=e^{x^5+7x^3} \to y'=e^{x^5+7x^3}\cdot(5x^4+21x^2)$

B) $y=\left(e^{3x^3-5x^2}\right)^7 \to y'=e^{(3x^3-5x^2)^7}\cdot(7(3x^3-5x^2)^6)\cdot 9x^2-10x$

C) $y=\left(e^{4x^5+8x^3}\right)^5 \to y'=e^{(4x^5+8x^3)^5}\cdot(5(4x^5+8x^5)^4)\cdot 20x^4+24x^2$

D) $y=\sqrt[3]{e^{(5x^5-3x^8)^2}} \to y'=\frac{2(5x^5-3x^8)\cdot(24x^4-24x^7)}{3\sqrt[3]{\left(e^{5x^5-3x^8}\right)^2}}$

27- Calcula la derivada de las siguientes funciones

a) $y=\log[(5x^5-3x^3)^{12}(3x+1)]$; $y'=\frac{12(5x^5-3x^3)^{11}(25x^4-12x^4)(3x+1)+3(5x^5-3x^3)^{12}}{(5x^2-3x^3)^{12}(3x+1)}$

$y'=\frac{12(25x^4-12x^4)(3x+1)+3(5x^5-3x^3)}{(5x^2-3x^3)(3x+1)}$

b) $y=\log\sqrt{(2x^3+5x^2)^3}$; $y'=\frac{\frac{3}{2}\cdot(2x^3+5x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(6x^2+10x)}{\sqrt{(2x^3+5x^2)^3}}=\frac{3(6x^2+10x)}{2(2x^3+5x^2)}$

c) $y=\log\sqrt{\frac{7x^5-5x}{2x-3}}$

$y'=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{7x^5-5x}{2x-3}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{(35x^4-5)\cdot(2x-3)-(7x^5-5x)\cdot 2}{(2x-3)^2}}{\sqrt{\frac{7x^5-5x}{2x-3}}}=\frac{(35x^4-5)\cdot(2x-3)-(7x^5-5x)\cdot 2}{2(2x-3)(7x^5-5x)}$

d) $y=\log\sqrt[3]{(3x^4-3x^5)^2}=\frac{3}{2}\log(3x^4-3x^5)$; $y'=\frac{3(12x^3-15x^5)}{2(3x^4-3x^5)}$

28- Calcula las derivadas de las siguientes funciones

a) $f(x)=\frac{5\cos x}{1+3\operatorname{sen}x^2}$; $f'(x)=\frac{(-5\operatorname{sen}x)\cdot(1+3\operatorname{sen}x^2)-((5\cos x)\cdot(3\cos x^2)\cdot 2x)}{(1+3\operatorname{sen}x^2)^2}$

b) $f(x)=\cosh(3\operatorname{senh}(2x))$; $f'(x)=\operatorname{senh}(3\operatorname{senh}(2x))\cdot 3\cdot\cosh(2x)\cdot 2$

c) $f(x)=\operatorname{sen}(5sh^3\cdot 3x)$; $f'(x)=\cos(5sh^3 3x)\cdot(15sh^2 3x)\cdot 3$

d) $f(x)=\tanh(5x+7x^2)$; $f'(x)=\frac{5+14x}{\cosh^2(5x+7x^2)}$

29-Recuerda la definición de cosecante: cosec(x)=$\frac{1}{sen(x)}$. Demuestra que: (cosec(x))' = $-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2(x)}$

$f(x) = \frac{1}{\mathrm{sen}(x)}$; $f'(x) = \frac{0\cdot\mathrm{sen}(x)-1\cdot\cos(x)}{\mathrm{sen}^2(x)} = -\frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}^2(x)}$

30- Recuerda la definición de secante: $\frac{1}{\cos(x)}$. Demuestra que: (sec(x))' = $\frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos^2(x)}$

$$f(x) = \frac{1}{\cos(x)} = f'(x) = \frac{0\cdot\cos(x)-1\cdot(-\mathrm{sen}(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos^2(x)}$$

31. Recuerda la definición de cotangente: $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$. Demuestra que $(\cot(x))' = -\frac{1}{\mathrm{sen}^2(x)}$

$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}$; $(\cot(x))' = \frac{(-\mathrm{sen}(x)\cdot\mathrm{sen}(x))-(\cos(x)\cdot\cos(x))}{(\mathrm{sen}(x))^2} = \frac{-\mathrm{sen}^2(x)-\cos^2(x)}{\mathrm{sen}^2(x)} = \frac{-(\mathrm{sen}^2(x)+\cos^2(x))}{\mathrm{sen}^2(x)} = -\frac{1}{\mathrm{sen}^2(x)}$

32. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a) \; y = 7\,\mathrm{sen}(x^7-7x^3)}$; $y' = 7\cos(x^7-7x^3)(7x^6-21x^2) = (49x^6-147x^2)\cos(x^7-7x^3)$

$\boldsymbol{b) \; y = 5\,\mathrm{sen}^5(4x^4-5x^5)}$; $y' = 5\,\mathrm{sen}^4(4x^4-5x^5)\cdot cos(4x^4-5x^5)\cdot(16x^3-25x^4)$

$\boldsymbol{c) \; y = \mathrm{sen}^6(x)\cdot\cos^4(x)}$; $y' = 6\,\mathrm{sen}^5(x)\cdot cos(x)\cdot\cos^4(x) - \mathrm{sen}^6(x)\cdot 4\cos^3(x)\cdot sen(x)$

$\boldsymbol{d) \; y = \sqrt[3]{\mathrm{sen}^5(3x^4+5x^7)}} = (\mathrm{sen}(3x^4+5x^7))^{\frac{5}{3}}$;

$$y' = \frac{5}{3}(\mathrm{sen}(3x^4+5x^7))^{\frac{2}{3}}(cos(3x^4+5x^7))\,(12x^3+35x^6)$$

33. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a) \; f(x) = \mathrm{sen}\,\frac{5+3e^{3x}}{5-3e^{3x}}}$

$$f'(x) = \cos\frac{5+3e^{3x}}{5-3e^{3x}}\left(\frac{(9e^{3x})\cdot(5-3e^{3x})-(5+3e^{3x})\cdot(-9e^{3x})}{(5-3e^{3x})^2}\right)$$

$\boldsymbol{b) \; f(x) = (2x-3x^2)\cosh(5x-7x^2)}$;

$$f'(x) = (2-6x)\cosh(5x-7x^2) + (2x-3x^2)\,\mathrm{senh}(5x-7x^2)(5-14x)$$

$\boldsymbol{c) \; f(x) = \tan\frac{\sqrt{16-9\,\mathrm{sen}\,x}}{4+3\cos x}}$;

$$f'(x) = \left(1+\tan^2\frac{\sqrt{16-9\,\mathrm{sen}\,x}}{4+3\cos x}\right)\left(\frac{\left(\frac{-9\cos x}{2\sqrt{16-9\,\mathrm{sen}\,x}}\right)(4+3\cos x)-\left(\sqrt{16-9\,\mathrm{sen}\,x}\right)(3\,\mathrm{sen}\,x)}{(4+3\cos x)^2}\right)$$

$\boldsymbol{d) \; f(x) = \frac{\mathrm{senh}\,x-3x\cosh x}{\cosh x+3x\,\mathrm{senh}\,x}}$

$$f'(x) = \frac{(\mathrm{cosh x}-(3\cosh x+3x\mathrm{senh x}))\,(\cosh x+3x\,\mathrm{senh}\,x)-(\mathrm{senh}\,x-3x\cosh x)(\mathrm{senh x}+(3\mathrm{senh x}+3x\mathrm{cosh x}))}{(\cosh x+3x\,\mathrm{senh}\,x)^2}$$

34. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a) \; y = \sqrt{\ln(arccos\,5x)} = (\ln(arccos\,5x))^{\frac{1}{2}}}$;

$$y' = \frac{1}{2}(\ln(\cos^{-1}5x))^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\frac{-5}{\sqrt{1-(5x)^2}}}{\cos^{-1}5x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(\cos^{-1}5x)}}\left(\frac{\frac{-5}{\sqrt{1-25x^2}}}{\cos^{-1}5x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(\cos^{-1}5x)}}\left(\frac{-5}{(\cos^{-1}5x)\cdot(\sqrt{1-25x^2})}\right)$$

$\boldsymbol{b) \; f(x) = arcsen\,\frac{2-7x^2}{2+7x^2}}$

$$f'(x)=\frac{\frac{(-7\cdot 2x)(2+7x^2)-(2-7x^2)(7\cdot 2x)}{(2+7x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2-7x^2}{2+7x^2}\right)^2}}=\frac{\frac{(-14x)(2+7x^2)-(2-7x^2)(14x)}{(2+7x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2-7x^2}{2+7x^2}\right)^2}}$$

c) $\boldsymbol{f(x)=5arccos\frac{3\,\mathrm{sen}\,x+5}{5-3\,\mathrm{sen}\,x}}$

$$f'(x)=5\frac{-\left(\frac{(3\cos x)(5-3\,\mathrm{sen}\,x)-(3\,\mathrm{sen}\,x+5)(-3\cos x)}{(5-3\,\mathrm{sen}\,x)^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{3\,\mathrm{sen}\,x+5}{5-3\,\mathrm{sen}\,x}\right)^2}}$$

d) $\boldsymbol{f(x)=\mathrm{arcsen}\frac{5\cos x}{3\,\mathrm{sen}\,x+2\cos x}}$

$$f'(x)=\frac{\frac{(-5\,\mathrm{sen}\,x)(3\,\mathrm{sen}\,x+2\cos x)-(5\cos x)(3\cos x-2\mathrm{sen}\,x)}{(3\,\mathrm{sen}\,x+2\cos x)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{5\cos x}{3\,\mathrm{sen}\,x+2\cos x}\right)^2}}$$

35. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y=arcsen(7e^{2x-3})}\rightarrow\ y'=\frac{7\cdot 2\cdot e^{2x-3}}{\sqrt{1-(7e^{2x-3})^2}}\rightarrow y'=\frac{14e^{2x-3}}{\sqrt{1-49(e^{2x-3})^2}}$

b) $\boldsymbol{y=ln\left(\sqrt{5arcsen(3x+2)}\right)\rightarrow y=\frac{1}{2}\ln\left(5arcsen(3x+2)\right)\rightarrow}$

$$\rightarrow y'=\frac{1}{2}\frac{5\frac{3}{\sqrt{1+(3x+2)^2}}}{5arcsen(3x+2)}\qquad y'=\frac{3}{arcsen(3x+2)\cdot\sqrt{1+(3x+2)^2}}$$

c) $\boldsymbol{y=arctg\left(ln\sqrt[3]{4x-5}\right)}\rightarrow\ y=arctg\left(\frac{1}{3}ln(4x-5)\right)$

$$\rightarrow y'=\frac{\frac{1}{3}\frac{4}{4x-5}}{1+\left(\left(\frac{1}{3}ln(4x-5)\right)^2\right)}\rightarrow y'=\frac{4}{(12x-15)\cdot\left(1+\left(\frac{1}{3}ln(4x-5)\right)^2\right)}$$

d) $\boldsymbol{y=arcsen\left(3tg\left(5sen(4x-2)\right)\right)}\rightarrow$

$$y'=\frac{\frac{3\cdot 5\cdot cos(4x-2)\cdot 4}{[cos(5sen(4x-2))]^2}}{\sqrt{1-[3tg(5sen(4x-2))]^2}}\rightarrow\frac{60cos(4x-2)}{\sqrt{1-[3tg(5sen(4x-2))]^2}[cos(5sen(4x-2))]^2}$$

36. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y=arctg\sqrt{\frac{7+2senx}{7-2senx}}}$

$$y'=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{7+2senx}{7-2senx}\right)^{-1/2}\cdot\frac{2cos(x)\cdot(7-2senx)-(7+2senx)\cdot-2cos(x)}{(7-2senx)^2}}{1+\left(\frac{7+2senx}{7-2senx}\right)}\rightarrow$$

$$\rightarrow y'=\frac{\frac{2cos(x)\cdot(7-2senx)-(7+2senx)\cdot-2cos(x)}{(7-2senx)^2}}{2\cdot\left(\frac{7+2senx}{7-2senx}\right)^{1/2}\cdot\left(1+\left(\frac{7+2senx}{7-2senx}\right)\right)}\rightarrow$$

$$\rightarrow y'=\frac{2cos(x)\cdot(7-2senx)+(-(7+2senx))\cdot 2cos(x)}{\left(2\cdot\left(\frac{7+2senx}{7-2senx}\right)^{1/2}\cdot\left(1+\left(\frac{7+2senx}{7-2senx}\right)\right)\right)\cdot(7-2senx)^2}$$

b) $\boldsymbol{y = e^{arcsen(\sqrt{2x-5})}}$ $\quad y' = e^{arcsen(\sqrt{2x-5})} \cdot \frac{\frac{1}{2}\cdot(2x-5)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2}{\sqrt{1-(2x-5)}}$

c) $\boldsymbol{y = cos\left(3arcsen\left(\frac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}}\right)\right)}$

$$y' = -sen\left(3arcsen\left(\frac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}}\right)\right)\cdot\left(3\cdot\frac{\frac{6\cdot(7-2x^2)^{\frac{1}{2}}-(6x-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot(7-2x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-4x)\right)}{7-2x^2}}{\sqrt{1-\left[\frac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}}\right]^2}}\right)$$

d) $\boldsymbol{y = arcsen\left(\frac{7x}{\sqrt{9-2x^2}}\right)}$

$$y' = \frac{\frac{7\cdot(\sqrt{9-2x^2})+28x^2\cdot\frac{1}{2}\cdot(9-2x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(9-2x^2)}}{\sqrt{1-\left(\frac{7x}{\sqrt{9-2x^2}}\right)^2}} \rightarrow y' = \frac{7\cdot(\sqrt{9-2x^2})+28x^2\cdot\frac{1}{2}\cdot(9-2x^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{7x}{\sqrt{9-2x^2}}\right)^2}\cdot(9-2x^2)}$$

37. **Calcula las derivadas de las siguientes funciones:**

a) $\boldsymbol{y = \log(x^3-5x^5)^8}$

$$y' = \frac{8\cdot(x^3-5x^5)^7\cdot(3x^2-25x^4)}{(x^3-5x^5)^8}\cdot\ln 10 \rightarrow y' = \frac{8\cdot(3x^2-25x^4)}{x^3-5x^5}\cdot$$

b) $\boldsymbol{y = \log_2(8x^2-3x^3)^2}$

$$y' = \frac{2(8x^2-3x^3)\cdot(16x-9x^2)}{(8x^2-3x^3)^2}\cdot ln(2) = \frac{2\cdot(16x-9x^2)}{8x^2-3x^3}\cdot ln(2)$$

c) $\mathbf{y = ln}\sqrt{\frac{(3x^6-7x^2)^4}{2x-1}} = \frac{1}{2}\ln\frac{(3x^6-7x^2)^4}{2x-1} = \frac{1}{2}(\ln(3x^6-7x^2)^4 - \ln(2x-1)) = \frac{1}{2}(4\ln(3x^6-7x^2) - \ln(2x-1))$

$$y' = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{18x^5-14x}{3x^6-7x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x-1} = 2\cdot\frac{18x^4-14}{3x^5-7x} - \frac{1}{2x-1}$$

d) $\boldsymbol{y = ln\sqrt[4]{(3x^3+5x^9)^7}}$ $\quad y = \frac{7}{4}ln(3x^3+5x^9)$

$$y' = \frac{7}{4}\cdot\frac{9x^2+45x^8}{3x^3+5x^9} = \frac{7}{4}\cdot\frac{9+45x^6}{3x+5x^7}$$

38. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$a)$ $\boldsymbol{f(x) = \cos\left(e^{x^5} + \ln(4x^3)\right)}$

$$f'(x) = -\sin\left(e^{x^5} + \ln(4x^3)\right)\cdot\left(e^{x^5}\cdot 5x^4 + \frac{12x^2}{4x^3}\right) = -\sin\left(e^{x^5} + \ln(4x^3)\right)\cdot\left(e^{x^5}\cdot 5x^4 + \frac{3}{x}\right)$$

$b)$ $\boldsymbol{f(x) = 7\cot^5(5x^3-3x^2)}$

$$f'(x) = -\frac{15x^2-6x}{\sin^2(5x^3-4x^2)}\cdot 5\cot^4(5x^3-3x^2)\cdot 7$$

$c)$ $\boldsymbol{f(x) = \sin\left(\cos^2\left(\tan(7x^5-3x^3)^2\right)\right)}$

$f'(x) = \cos(\cos^2(\tan(7x^5-3x^3)^2))\cdot 2\cos(\tan(7x^5-3x^3))^2\cdot(-\sin(\tan(7x^5-3x^3)^2))\cdot$
$(1+\tan^2((7x^5-3x^3)^2))\cdot(35x^4-9x^2)\cdot 2(7x^5-3x^3)$

$\boldsymbol{d)\ f(x) = \sqrt[3]{\cosh(\sinh(3x+2))^4}} = (\cosh(\sinh(3x+2))^4)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(\cosh((\sinh(3x+2))^4))^{-\frac{2}{3}} \sinh((\sinh(3x+2))^4)\cosh(3x+2)\,12(\sinh(3x+2))^3$

39)Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a)\ f(x) = arc\sinh\left(\sqrt{5x^2+2}\right) = arc\sinh\left((5x^2+2)^{\frac{1}{2}}\right)}$

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{\frac{1}{2}(5x^2+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 10x}{\sqrt{1+\left((5x^2+2)^{\frac{1}{2}}\right)^2}} = \frac{(5x^2+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 5x}{\sqrt{1+5x^2+2}} = \frac{5x}{\sqrt{5x^2+3}\cdot\sqrt{5x^2+2}}$$

$\boldsymbol{b)\ f(x) = \ln(arc\tanh(5x-3))}$

$$f'(x) = \frac{\frac{5}{\sqrt{1+(5x-3)^2}}}{arc\tanh(5x-3)} = \frac{5}{\left(\sqrt{1+(5x-3)^2}\right)(arc\tanh(5x-3))}$$

$\boldsymbol{c)\ f(x) = arc\cosh(e^{3x-6})}$ $\qquad f'(x) = \frac{3e^{3x-6}}{\sqrt{1+(e^{3x-6})^2}}$

$\boldsymbol{d)\ f(x) = arc\sinh(arc\tanh(2x+1))}$

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{1+(2x+1)^2}}{1+arc\tanh^2(2x+1)} = \frac{2}{(1+(2x+1)^2)(1+arc\tanh^2(2x+1))}$$

40. Calcula $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(cos(3x))}{ln(cos(2x))} = \frac{ln(cos(3\cdot 0))}{ln(cos(2\cdot 0))} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3(-sen3x)}{cos3x}}{\frac{2(-sen2x)}{cos2x}} = \lim_{x\to 0}\frac{3(-sen3x)\cdot cos2x}{2(-sen2x)\cdot cos3x} = \frac{3(-sen3\cdot 0)\cdot cos2\cdot 0}{2(-sen2\cdot 0)\cdot cos3\cdot 0} = \frac{0}{0} = \text{Indet. (L'Hôpital)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3(cos3x\cdot 3)(cos2x)+(-3\cdot sen3x)(-2\cdot sen2x)}{-2(cos2x\cdot 2)(cos3x)+(-2\cdot sen2x)(-3\cdot sen3x)} =$$

$$= \frac{-3(cos3\cdot 0)3\cdot(cos2\cdot 0)+(-3\cdot sen3\cdot 0)(-2\cdot sen2\cdot 0)}{-2(cos2\cdot 0)2\cdot(cos3\cdot 0)+(-2\cdot sen2\cdot 0)(-3\cdot sen3\cdot 0)} = \frac{-9+0}{-4+0} = \frac{9}{4}$$

41. Calcula $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x} = \frac{\sqrt{4+0}-\sqrt{4-0}}{4\cdot 0} = \frac{2-2}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}\cdot\frac{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+x}\right)^2-\left(\sqrt{4-x}\right)^2}{4x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4+x-(4-x)}{4x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{4x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}=\frac{1}{2\left(\sqrt{4}+\sqrt{4}\right)}=\mathbf{\frac{1}{8}}$$

42. Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{arctan\,x-x}{x^3}=\frac{arctan 0-0}{0^3}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{3x^2}=\frac{\frac{1}{1+0^2}-1}{3\cdot 0^2}=\frac{\frac{1}{1}-1}{0}=\frac{0}{0}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-1-x^2}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{3x^2(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+x^2}=\frac{-1}{1}=-1$$

43. Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{1-2x-e^x+sen(3x)}{x^2}$

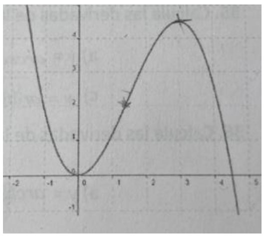
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-2x-e^x+sen(3x)}{x^2}=\frac{1-2\cdot 0-e^0+sen(3\cdot 0)}{0^2}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L'Hôpital)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2-e^x+3\cdot cos3x}{2x}=\frac{-2-e^0+3\cdot cos3\cdot 0}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L'Hôpital)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-e^x-9\cdot sen3x}{2}=\frac{-e^0-9\cdot sen3\cdot 0}{2}=-\frac{1}{2}$$

44. Si $f'(x)=x(3-x)$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de $f(x)$?

$\boldsymbol{f'(x)=x(3-x)}$



Se calculan máximos y mínimos:

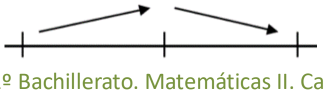
$$x(3-x)=0\Longrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=3\end{cases}$$

Como podemos observar, tiene que haber un máximo o un mínimo en $x=0$ y otro máximo mínimo en $x=3$, por lo que la única gráfica correcta de $f(x)$ es la cuarta.

45. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$.

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}}$$

$$f'(x)=\frac{0\cdot(x-2)^2-1(2x-4)}{(x-2)^4}\qquad \frac{-1(2x-4)}{(x-2)^4}=\frac{-2}{(x-2)^3}=0$$



Creciente: $(-\infty,2)$ Decreciente: $(2,\infty)$

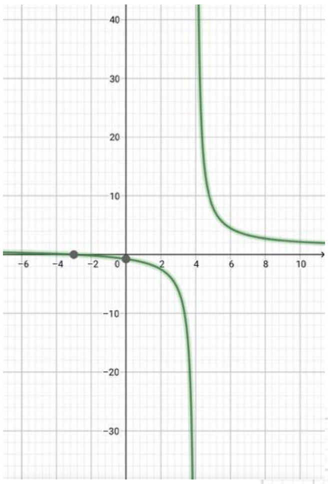
IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

46. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = \frac{(x+3)}{(x-4)}$.

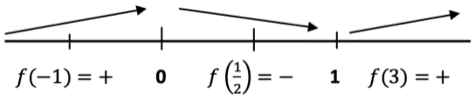
$$f(x) = \frac{(x+3)}{(x-4)}$$
$Dom = \mathbb{R} - \{4\}$
$$\lim_{x\to 4^-} \frac{x+3}{x-4} = \frac{4^- + 3}{4^- - 4} = \frac{7}{0^-} - \infty$$
$$\lim_{x\to 4^+} \frac{x+3}{x-4} = \frac{4^+ + 3}{4^+ - 4} = \frac{7}{0^+} + \infty$$
Decreciente: $(-\infty, 4)$ Decreciente: $(4, \infty)$



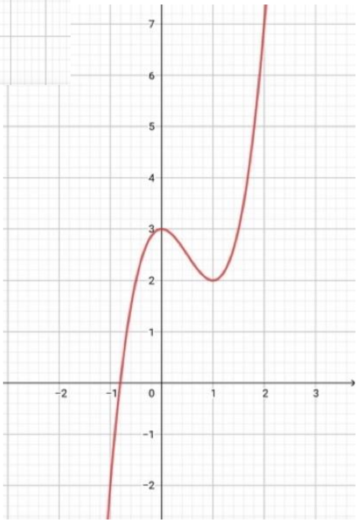
47. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$. Calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica.

$\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5}$
$f'(x) = 6x^2 - 6x$

$$6x^2 - 6x = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

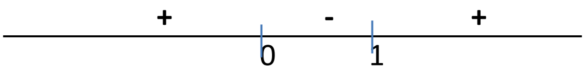


Máximo: $x = 0$
Mínimo: $x = 1$
Creciente: $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ Decreciente: $(0, 1)$



48. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

- Para determinar los máximos y mínimos, se calcula la primera derivada, se iguala a cero y se resuelve:
  $f'(x) = 6x^2 - 6x = 0 \to 6x(x-1) = 0 \to \boldsymbol{x = 0};\ \boldsymbol{x = 1}$
- Se representan las raíces en la recta real y se prueban puntos de los intervalos para determinar el signo de f´(x).



$f'(-1) = 12 > 0$ $f'(0{,}5) = -1{,}5 < 0$ $f'(2) = 12 > 0$

Creciente: (-∞, 0) U (1, ∞) Decreciente: (0, 1)

Hay un máximo en x= 0 y un mínimo en x=1.

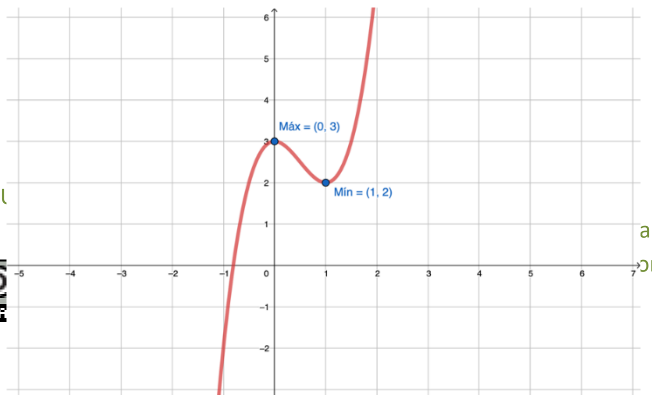
- Para determinar las ordenadas del máximo y mínimo se sustituyen las x en la función:

$$\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3}$$

$\boldsymbol{f(0) = 3}$ $\boldsymbol{f(1) = 2}$

Máximo: (0,3) Mínimo: (1,2)

- Para hacer un esbozo de la gráfica calculamos:



a) Puntos de corte con los ejes:
 Para $x = 0 \rightarrow y = 3$;

$$para\ y = 0 \rightarrow x = -0{,}806.$$

b) Asíntotas. No hay

49. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

- Para determinar los máximos y mínimos, se calcula la primera derivada, se iguala a cero y se resuelve:
  $f'(x) = 3x^2 - 6 = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = +\sqrt{2};\ x = -\sqrt{2}}$
- Se representan las raíces en la recta real y se prueban puntos de los intervalos para determinar el signo de f´(x).

+		-		+
	$-\sqrt{2}$	0	$+\sqrt{2}$	

$f'(-2) = 6 > 0$ $\quad$ $f'(0) = -6 < 0$ $\quad$ $f'(2) = 6 > 0$

Creciente: (-∞, -$\sqrt{2}$) U ($\sqrt{2}$, ∞) $\quad$ **Decreciente: (-$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$)**

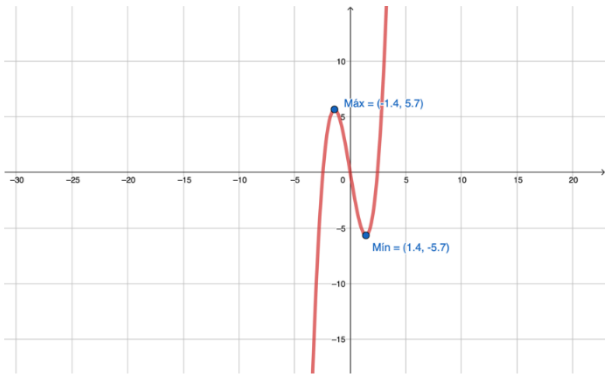
Hay un máximo en x= - $\sqrt{2}$ y un mínimo en x= $\sqrt{2}$

- Para determinar las ordenadas del máximo y mínimo se sustituyen las x en la función:

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 6x}$$

$\boldsymbol{f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}}$ $\quad$ $\boldsymbol{f(+\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}}$

Máximo: (-$\sqrt{2}$, 4$\sqrt{2}$) $\quad$ **Mínimo: ($\sqrt{2}$, -4$\sqrt{2}$)**



- Para hacer un esbozo de la gráfica calculamos:

a) Puntos de corte con los ejes:
 Eje x:
 Para $y = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{6}\ ;\ x_2 = -\sqrt{6}$
 Eje y: x= 0; y=0

b) Asíntotas. No hay

50. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo $[-5, 3]$ y en el intervalo $[1, 5]$

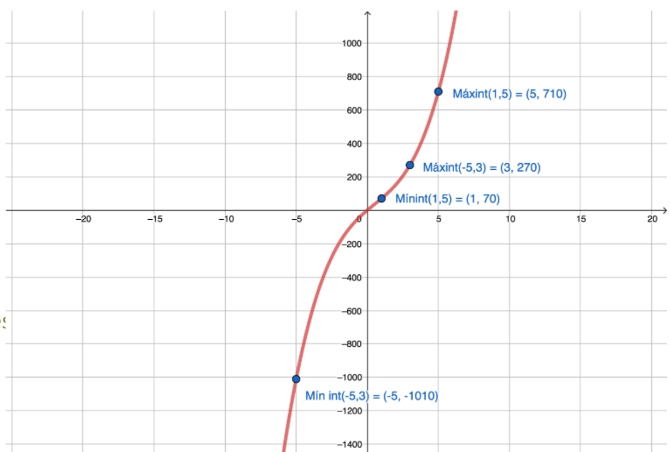
La función es derivable en todos los puntos.

- Se calcula la derivada, se iguala a cero y se resuelve:
  $f'(x) = 12x^2 - 12x + 72 = 0 \rightarrow No\ existen\ valores\ reales\ que\ anulen\ la\ derivada.$

Se estudian los extremos del intervalo -5 y 3. Y por otro lado los extremos del intervalo 1 y 5.

$f(-5) = -1010; f(3) = 270$ $\quad$ y $\quad$ $f(1) = 70; f(5) = 710$

- **Intervalo $[-5, 3]$: Mínimo absoluto: (-5,-1010) y máximo absoluto (3, 270)**
- **Intervalo $[1, 5]$: Mínimo absoluto: (1,70) y máximo absoluto: (5,710)**



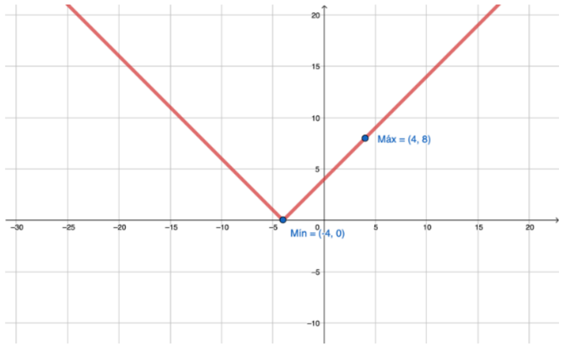
51. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 4|$ en el intervalo $[-4, 4]$.

- Se define la función a trozos: $f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \geq -4 \\ -x - 4, & x < -4 \end{cases}$
- Se calcula la derivada de la función: $f'(x) = \begin{cases} 1, & x > -4 \\ -1, & x < -4 \end{cases}$

La derivada no se anula en ningún punto.

- Se estudian los extremos del intervalo, -4 y 4: $f(-4) = 0; f(4) = 8$
- **En el intervalo $[-4, 4]$:**

Mínimo absoluto: (-4,0) Máximo absoluto: (4,8)



52. El espacio recorrido, en metros, por un vehículo a los t segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: $y = 8t + 0,3\,t^2$. ¿Qué velocidad llevaba al pasar por el control? ¿Y a los 3 segundos? Si continúa así, ¿en qué momento pasará de los 120 km/h?

- Función espacio: $y = 8t + 0,3\,t^2$
- La velocidad de un móvil viene dada por $\boldsymbol{v = \frac{dy}{dt}} \rightarrow v = \frac{dy}{dt} = 8 + 0,6\,t$
- <u>Al pasar por el control</u>, t=0; $v(0) = 8 + 0,6 \cdot 0 = 8\,m/s$
- <u>A los tres segundos</u>, t=3; $v(3) = 8 + 0,6 \cdot 3 = 9,8\,m/s$
- Cuando $v = 120\frac{km}{h} \rightarrow v = 120\frac{km}{h} \cdot \frac{1000\,m}{1\,km} \cdot \frac{1\,h}{3600\,s} = 33,33\,m/s$
- Sustituimos en la ecuación de la velocidad y calculamos el tiempo: $33,33 = 8 + 0,6\,t \rightarrow t = 42,22\,s$. A partir de este momento la velocidad pasará de 120 km/h

53. Sabiendo que la aceleración es la derivada de la función velocidad, calcula la aceleración del vehículo del ejercicio anterior a los t = 1 segundos y a los t = 6 segundos. ¿Cómo es la aceleración? ¿Es constante o variable?

$$a = \frac{3}{5}$$

R: A los t = 1 segundos y a los t = 6 segundos $a = \frac{3}{5}$ ya que es constante al no tener ninguna variable.

54. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 5t^2$ si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57 metros de altura), ¿a qué velocidad llegaría al suelo? ¿y si cayera desde la segunda plataforma (que está a 115 m)? ¿y desde la tercera plataforma (que está a 274 m)?

- Desde la primera plataforma (57 m):

$57 = 5t^2 \to t = \sqrt{\frac{57}{5}} = 3{,}37\ s \qquad v = 10t \quad v = 10 \cdot 3{,}37 = 33{,}7\ m/s$

- Desde la segunda plataforma (115 m):

$115 = 5t^2 \to t = \sqrt{\frac{115}{5}} = 4{,}79\ s \qquad v = 10t \quad v = 10 \cdot 4{,}79 = 47{,}9\ m/s$

- Desde la tercera plataforma (247 m):

$247 = 5t^2 \to t = \sqrt{\frac{247}{5}} = 7{,}03\ s \qquad v = 10t \quad v = 10 \cdot 7{,}03 = 70{,}3\ m/s$

55. Se ha lanzado desde la superficie de la luna una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad de 24 m/s, y alcance una altura $h = 24t - 0{,}8t^2$. A) Determina la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna. B) ¿Hasta qué altura llega la piedra? C) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar dicha altura? D) ¿Durante cuánto tiempo permanece la piedra en el aire? E) Se deja caer ahora la piedra por una grieta y tarda 20 segundos en llegar al fondo, ¿qué profundidad tiene la grieta?

Datos:

$v = 24\ m/s \qquad h = 24t - 0{,}8t^2$

$A)$

$v = 24 - 1{,}6t \qquad a = -1{,}6\ m/s^2$

B)

$v = 24 - 1{,}6t = 0 \ \to\ t = \frac{-24}{-1{,}6} = 15\ s \qquad h = 24 \cdot 15 - 0{,}8 \cdot 15^2 = 180\ m$

C)

$v = 24 - 1{,}6t = 0 \ \to\ t = \frac{-24}{-1{,}6} = 15\ s$

D)

$15 \cdot 2 = 30\ s$ está en el aire (15 s de subida y 15 s de bajada)

E)

$h = 24 \cdot 20 - 0{,}8 \cdot 20^2 = 160\ m$ de profundidad

56. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Luna a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 0{,}83t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caída libre en la Luna al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? En la Luna se está construyendo una antena de transmisión sobre una base de hormigón que puede agrietarse si cayera un tornillo con una velocidad de 20 m/s. Para garantizar que esto no ocurra, ¿cuál debe ser la altura de la antena?

$d = 0{,}83t^2 \ \to\ v = 1{,}66t$

Primera pregunta: Velocidad en caída libre al cabo de:

1 s → $1{,}66 \cdot 1 = 1{,}66\ m/s$

4 s → $1{,}66 \cdot 4 = 6{,}64\ m/s$

8 s → $1{,}66 \cdot 8 = 13{,}28\ m/s$

30 s → $1{,}66 \cdot 30 = 49{,}8\ m/s$

Segunda pregunta:

$1{,}66t = 20 \ \to\ t = \frac{20}{1{,}66} = 12\ s \qquad d = 0{,}83 \cdot 12^2 = 119{,}52\ m$

Respuesta: La antena puede medir como mucho 119,52 m

57. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en Marte a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 1,86t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caída libre en Marte al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina la aceleración de la gravedad en Marte.

$d = 1{,}86t^2 \rightarrow \quad v = 3{,}72t$

Primera pregunta: Velocidad en caída libre al cabo de:

1 s → $3{,}72 \cdot 1 = 3{,}72\ m/s$

4 s → $3{,}72 \cdot 4 = 7{,}44\ m/s$

8 s → $3{,}72 \cdot 8 = 14{,}88\ m/s$

30 s → $3{,}72 \cdot 30 = 55{,}8\ m/s$

Segunda pregunta:

$a = 3{,}72\ m/s^2$

Es constante

58. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la superficie de Júpiter a los t segundos, viene dada aproximadamente por d = 11'44t². ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caía libre en Júpiter al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina la aceleración de la gravedad en Júpiter.

D=11'44t² $\quad v = D' = 2 \cdot 11{,}44t = 22{,}88t$

$para\ t = 1 \quad v = 22{,}88\ m/s$

$para\ t = 4 \quad v = 91{,}25\ m/s$

$para\ t = 8 \quad v = 183{,}04\ m/s$

$para\ t = 30 \quad v = 686{,}4\,\frac{m}{s}$

La aceleración es la derivada de la velocidad $\quad A=\frac{dv}{dt} \quad a = 22{,}88\ m/s^2$

59.La función e = f(t) indica el espacio recorrido, e, en metros, por un cuerpo en el tiempo t (en segundos). Determina en cada caso la función velocidad y la función aceleración:

e = $\boldsymbol{t^2 - 4t + 3}$ $\quad$ e = $\boldsymbol{2t^3 - 5t^2 + 4t - 3}$ $\quad$ e = $\boldsymbol{-t^2 + 4t + 3}$ $\quad$ e = $\boldsymbol{(3t - 4)^2}$

e = $\boldsymbol{t^2 - 4t + 3}$ $\quad v = \frac{de}{dt} = 2t - 4; \quad a = \frac{dv}{dt} = 2$

e = $\boldsymbol{2t^3 - 5t^2 + 4t - 3}$ $\quad v = \frac{de}{dt} = 6t^2 - 10t + 4\ ;\ a = \frac{dv}{dt} = 12t - 10$

e = $\boldsymbol{-t^2 + 4t + 3}$ $\quad v = \frac{de}{dt} = -2t + 4\ ; a = \frac{dv}{dt} = -2$

e = $\boldsymbol{(3t - 4)^2}$ $\quad v = \frac{de}{dt} = 18t - 24; a = \frac{dv}{dt} = 18$

60. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a 0,3 m³ por minuto. ¿A qué velocidad varía la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?

$vol: \pi \cdot r^2 \cdot h \qquad 0{,}3 = \pi \cdot 5^2 \cdot h \qquad h = \frac{0{,}3}{25\pi} = \frac{0{,}3}{25\pi}\ m/min$

$a\ los\ 2minutos \rightarrow 2 \cdot \frac{0{,}3}{25\pi} = 7{,}63 \cdot 10^{-3}\ m/min$

$a\ los\ 5\ minutos \rightarrow\ 5 \cdot \frac{0{,}3}{25\pi} = 0{,}019\ m/min$

61. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado x, y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, x, recortado para que las cajas contengan un volumen máximo? Ayuda: Tendrás que escribir el volumen de las cajas en función de x.

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$vol: (20-2x)\cdot(25-2x)\cdot x = 500x - 90x^2 + 4x^3$
$f'(x) = 500 - 180x + 12x^2 = 0;\;\; x = 11{,}38;\;\;\; x = 3{,}68\;\;\; ;\; x = 11{,}38$ no válido.
$f"(x) = \; 24x - 180 = 0;$
$f"(3{,}68) = \; -91{,}68;\; es\ un\ máximo$
Para que contenga el vol. Max x=3,68 cm

62. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 200 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie lateral sea mínima, ¿cuánto debe medir su altura y el radio de su base?

$\pi r^2 h = 200dm^3 \rightarrow h = \frac{200}{\pi r^2}$ $\qquad s = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{200}{\pi r^2}$

$\frac{ds}{dr} = 4\pi r - \frac{400}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 400}{r^2}$ $\qquad 4\pi r^3 = 400$

$r = \sqrt[3]{\frac{400}{4\pi}} = 3.16m$ $\qquad h = \frac{200}{\pi r^2} = \frac{200}{\pi(3{,}16)^2} = 6{,}37m$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

AUTOEVALUACIÓN

1. La función $\begin{cases} -bx & x \le 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ **es continua y derivable en toda la recta real si:**

$f(1) = -b$

$\lim_{x \to 1^-} (-bx) = -b$ $\qquad \lim_{x \to 1^+} (3x^2 + d) = 3 + d$

$f'(x) = \begin{cases} -b & x < 1 \\ 6x & x > 1 \end{cases}$

$\lim_{x \to 1^-} (-b) = -b$ $\qquad \lim_{x \to 1^+} 6x = 6$ $\qquad$ b = - 6 para que sea derivable

3 + d = 6 para que sea continua $\qquad 3 + d = 6 \to d = 3$

a) b = - 6, d = 3

2. Con los valores de b y d del apartado anterior verifica la función $\begin{cases} -bx & x \le 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ **las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo** $[-1, 1]$**, por lo que se anula la derivada en el punto de abscisa.**

f es continua y derivable por apartado 1, $f(x) = \begin{cases} 6x & x \le 1 \\ 3x^2 + 3 & x > 1 \end{cases}$

$f(-1) = 6 \cdot (-1) = -6$ $\qquad f(1) = 3(1)^2 + 3 = 6$

Por lo que sí se verifican las condiciones del teorema 6x = 0 ; x = 0

b) x = 0

3. Verifica la función $\begin{cases} -bx & x \le 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ **las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo [0, 3] en el punto de abscisa:**

f es continua y derivable por apartado 1, $f(x) = \begin{cases} 6x & x \le 1 \\ 3x^2 + 3 & x > 1 \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} 6 & x \le 1 \\ 6x & x > 1 \end{cases}$

$\boldsymbol{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{30-0}{3} = 10}$ **luego 6x = 10 x = 5/3**

d) x = 5/3

4. en cuál de los límites siguientes no se puede aplicar la regla de L'Hôpital:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \to \left(\frac{0}{0}\right) \to \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 7x}{5x^2 + 2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \to \frac{3}{5}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \to \frac{\sin x - 1}{1} = -1$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x} = \left(\frac{1}{0}\right) \to \infty \to$ no se aplica la regla de L'Hôpital

d) $\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x}}$

5. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $\boldsymbol{y = \tan x^2 - 2x^3}$ **en x = 0 es:**

$f'(x) = 2x \sec^2 x - 6x^2$

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$y - 0 = 0(x - 0) \to y = 0$

c) y = 0

6. La función $\boldsymbol{y = 3\sin x - 7x^3 - 3x^2 - x + 5}$ **en x = 0 es:**

$y' = 3\cos x - 21x^2 - 6x - 1$

$y'' = -3\sin x - 42x + 6 \to y''(0) = 6 > 0$

c) convexa ∪

7. La función $y = 3\sin x - 7x^3 - 3x^2 - x + 5$ en x = 0 es:

$y' = 3\cos x - 21x^2 - 6x - 1$

$y'(0) = 3 - 1 \rightarrow 2 > 0$

a) creciente

8. Si la derivada de una cierta función es: $y' = (x-4)(x+2)$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:

$(x-4)(x+2) = 0 \rightarrow x = 4, x = -2$

intervalos→ $(-\infty, -2)(-2, 4)(4, \infty)$

$y'(-3) = (-3-4)(-3+2) = (-7)(-1) = + \rightarrow$ creciente

$y'(2) = (2-4)(2+2) = (-2)(4) = - \rightarrow$ decreciente

$y'(5) = (5-4)(5+2) = (1)(7) = + \rightarrow$ creciente

d) Creciente, decreciente, creciente

9. La función $y = 3x^2 - 2x^3$ tiene un punto de inflexión en:

$y = 3x^2 - 2x^3$ $\quad y' = 6x - 6x^2$

$y'' = 6 - 12x = 0 \rightarrow x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ $\quad y''' = -12 \neq 0$

a) x = $\frac{1}{2}$

10. Si la derivada de una cierta función es: $y' = 3(x-4)x$ entonces su gráfica puede ser:

$y' = 3(x-4)x = 0 \quad ; \quad x = 4, \quad x = 0$

Intervalos → $(-\infty, 0)(0, 4)(4, \infty)$

$y(-2) = 3(-2)^2 - 12(-2) = +$ Creciente

$y(2) = 3(2)^2 - 12(2) = -$ Decreciente

$y(5) = 3(5)^2 - 12(5) = +$ Creciente

Por lo que la gráfica es la b)