Matemáticas II
2º Bachillerato
Capítulo 5: Rectas y Planos
Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: AITANA, AITOR, AMALIA, ANDREA, CARMEN, CELIA S, FERNANDO, IRENE, ISMAEL F, LAURA, NATALIA, OLIVIA, ROSA, ESPERANZA, LIDIA, CELIA P, ISMAEL C, ENRIQUE, LUCÍA, NEREA, JULIA, JERÓNIMO

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto A (-1,-4,2) y tiene por vector director v = (-3,-1,5).

Ecuación vectorial: $OP = OP_0 + v(x,y,z) = (-1,-4,2) + \lambda(-3,-1,5)$
Ecuaciones paramétricas: $(x,y,z) = (-1,-4,2)(-3,-1,5)$;

$$x = -1 - 3\lambda$$
$$y = -4 - \lambda$$
$$z = 2 + \lambda$$

Ecuación continua: Despejamos λ

$\lambda = \frac{x-1}{-3}$; $\lambda = \frac{y+4}{-1}$; $\lambda = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \frac{x-1}{-3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-2}{1}$

Ecuaciones implícitas:

$\frac{x-1}{-3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \quad x - 3y - 11 = 0 \;\; ; \quad y + z + 2 = 0$

2. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto A (4,-3,-2) y tiene por vector director v = (-1,0,6).

Ecuación vectorial: $OP = OP_0 + v(x,y,z) = (4,-3,-2) + \lambda(-1,0,6)$
Ecuaciones paramétricas: $(x,y,z) = (4,-3,-2) + \lambda(-1,0,6) \Rightarrow$

$$x = 4 - \lambda$$
$$y = -3$$
$$z = -2 + 6\lambda$$

Ecuación continua: Despejamos λ

$\lambda = \frac{x-4}{-1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z+2}{6}$

Ecuaciones implícitas: $\Rightarrow \frac{x-4}{-1} = \frac{z+2}{6} \Rightarrow 6x - 24 = -z - 2 \Rightarrow 6x + z - 22 = 0$; $\frac{y+3}{0} = \frac{z+2}{6}$

$$6x + z - 22 = 0$$
$$y - 3 = 0$$

3. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto A (0,1,0) y tiene por vector director v = (-2,0,0).

Ecuación vectorial: $OP = OP_0 + v \Rightarrow (x,y,z) = (0,1,0) + \lambda(-2,0,0)$
Ecuaciones paramétricas: $(x,y,z) = (0,1,0) + \lambda(-2,0,0) \Rightarrow$

$$x = -2\lambda$$
$$y = 1$$
$$z = 0$$

Ecuación continua:

$$\frac{x}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{0}$$

Ecuaciones implícitas:

$$y = 1$$
$$z = 0$$

4. Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(0,0,0)$ y $B(3,-4,1)$.

$\overrightarrow{AB} = (3-0,-4-0,1-0) = (3,-4,1)$

Vectorial: $(x,y,z)=(0,0,0)+\lambda(3,-4,1)$

Paramétricas:

$$\left.\begin{array}{r} x=3\lambda \\ y=-4\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}$$

Continua:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda=\dfrac{x}{3} \\ \lambda=\dfrac{y}{-4} \\ \lambda=z \end{array}\right\} \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-4}=z$$

Implícitas:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-4} \\ \dfrac{x}{3}=z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -4x=3y \\ x=3z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 4x+3y=0 \\ x-3z=0 \end{array}\right\}$$

5. Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(3,-2,6)$ y $B(1,-5,7)$.

$\overrightarrow{AB}=(1-3,-5+2,7-6)=(-2,-3,1)$

Vectorial: $(x,y,z)=(3,-2,6)+\lambda(-2,-3,1)$

Paramétricas:

$$\left.\begin{array}{r} x=3-2\lambda \\ y=-2-3\lambda \\ z=6+1\lambda \end{array}\right\}$$

Continua:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda=\dfrac{x-3}{-2} \\ \lambda=\dfrac{y+2}{-3} \\ \lambda=z-6 \end{array}\right\} \dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+2}{-3}=z-6$$

Implícitas:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+2}{-3} \\ \dfrac{x-3}{-2}=z-6 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -3x+9=-2y-4 \\ x-3=-2z+12 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -3x+2y=13 \\ x+2z=15 \end{array}\right\}$$

6. Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(2,-1,6)$ y $B(7,-2,-1)$.

$\overrightarrow{AB}=(7-2,-2+1,-1-6)=(5,-1,-7)$

Vectorial: $(x,y,z)=(2,-1,6)+\lambda(5,-1,-7)$

Paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x=2+5\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=6-7\lambda \end{array}\right\}$$

Continua:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda=\dfrac{x-2}{5}\\ \lambda=\dfrac{y+1}{-1}\\ \lambda=\dfrac{z-6}{-7}\end{array}\right\}\ \frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-6}{-7}$$

Implícitas:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+1}{-1}\\ \dfrac{x-2}{5}=\dfrac{z-6}{-7}\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{c}-x+2=5y+5\\ -7x+14=5z-30\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{c}-x-5y=3\\ -7x-5z=-44\end{array}\right\}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto A(-1, -4, 2) y tiene por vector director $\vec{v}$= (-3, -1, 5)

Ecuación vectorial:

$(x, y, z) = (-1, -4, 2) + t(-3, -1, 5)$

Ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = -4 - t \\ z = 2 + 5t \end{cases}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-2}{5}$$

Ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} -x + 3y + 11 = 0 \\ 5x + \quad 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

2. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto A(4, -3, 2) y tiene por vector director $\vec{v}$ = (-1, 0, 6)

Ecuación vectorial:

$(x, y, z) = (4, -3, 2) + t(-1, 0, 6)$

Ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 4 - t \\ y = \quad -3 \\ z = 2 + 6t \end{cases}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x-4}{-1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-2}{6}$$

Ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} 6x \quad + z - 26 = 0 \\ \quad y \quad + 3 \quad = 0 \end{cases}$$

3. Dados los puntos A(2, 0, 1) y B(0, -2, 3), se pide:

a) Expresa de todas las formas posibles la recta que pasa por ambos puntos.

$\overline{AB} = \vec{v} = (0, -2, 3) - (2, 0, 1) = (-2, -2, 2)$

Ecuación vectorial:

$(x, y, z) = (2, 0, 1) + t(-2, -2, 2)$

Ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$$

Ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} -2x + 2y + 4 = 0 \\ 2x + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

b) Halla dos puntos C y D que estén alineados con A y B, de manera que uno de ellos (C) esté situado

entre ambos y el otro esté situado a la izquierda de A.

Para que C esté situado entre ambos puntos A y B calculamos el punto medio:

$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)\to\left(\frac{2+0}{2},\frac{0-2}{2},\frac{1+3}{2}\right)\to C(1,-1,2)$

Para que D esté a la izquierda de A proponemos que A sea el punto medio de C y D

$\left(\frac{x_1+1}{2},\frac{y_1-1}{2},\frac{z_1+2}{2}\right)=(2,0,1);\ \ x_1=3\ ;\ \ y_1=1\ ;\ z_1=0\ ;\quad D(3,1,0)$

4. expresa de todas las formas posibles las siguientes rectas:

a) r:$\begin{cases}x-2z=2\\y+z=-1\end{cases}$ b)s:$\begin{cases}x=-1+\lambda\\y=3+2\lambda\\z=2-\lambda\end{cases}$ $c)r$:$\begin{cases}x=3-\lambda\\y=1+\lambda\\z=1+2\lambda\end{cases}$ d)s:$\begin{cases}x=3-\lambda\\y=1+\lambda\\z=1+2\lambda\end{cases}$

a) IMPLÍCITAS r:$\begin{cases}x-2z=2\\y+z=-1\end{cases}\to\lambda=z$ PARAMÉTRICA$\begin{cases}x=2+2\lambda\\y=-1-\lambda\\z=\lambda\end{cases}$

$CONTINUA\ \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-0}{1}\quad\to VECTORIAL\ (x,y,z)=(2,-1,0)+\lambda(2,-1,1)$

b) PARAMÉTRICA$\begin{cases}x=-1+\lambda\\y=3+2\lambda\\z=2-\lambda\end{cases}$ $CONTINUA\ \frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{-1}\to$

$IMPLÍCITAS\quad(x+1)\cdot2=(y-3)\cdot1\to2x+2=y-3\to2x-y=-5$

$(x+1)\cdot(-1)=(z-2)\cdot1\to-x-1=z-2\to-x-z=-1\to\begin{cases}2x-y=-5\\-x-z=-1\end{cases}$

$VECTORIAL\quad(x,y,z)=(-1,3,2)+\lambda(1,2,-1)$

c) PARAMÉTRICA$\begin{cases}x=3-\lambda\\y=1+\lambda\\z=1+2\lambda\end{cases}$ $CONTINUA\ \frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$

$IMPLÍCITAS\ \ (x-3)\cdot1=(y-1)\cdot(-1)\to x-3=-y+1\to x+y=4\to$

$(x-3)\cdot2=(z-1)\cdot8-1)\to2x-6=-z+1\to2x+z=7$ $\begin{cases}x+y=4\\2x+z=7\end{cases}$

$VECTORIAL\ (x,y,z)=(3,1,1)+\lambda(-1,1,2)$

d) $IMPLÍCITAS\ s$:$\begin{cases}x+2y=-2\\y-2z=1\end{cases}\to y=\lambda\quad\to PARAMÉTRICA\begin{cases}x=-2-2\lambda\\y=\lambda\\z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda\end{cases}$

$CONTINUA\ \frac{x+2}{-2}=\frac{y-0}{1}=\frac{z+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\quad VECTORIAL\ (x,y,z)=(-2,0,1)+\lambda(-2,1,\frac{1}{2})$

5) Expresa de todas las formas posibles la recta $r=\frac{x+1}{-2}=\frac{y+1}{3}=z-2$ y además halla:

Ecuación vectorial:

$\overrightarrow{OP}=(-1,-1,2)+t(-2,3,1)$

Ecuación paramétrica:

$\begin{cases}x=-1-2t\\y=-1+3t\\z=2+t\end{cases}$

Ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ y - 3z + 7 = 0 \end{cases}$$

a) Un punto de dicha recta tal que su segunda coordenada sea -4.

$y = -1 + 3t = -4 \to t = -1$

$t = -1;\ -1(-2, 3, 1) = (2, -3, -1); (-1, -1, 2) + (2, -3, -1)$

$P(1, -4, 1)$

b) Un punto de dicha recta tal que la suma de sus coordenadas valga 2.

Calculamos el punto genérico:

$P(-1 - 2t, -1 + 3t, 2 + t) \quad -1 - 2t - 1 + 3t, +2 + t = 2\,; 2t - 2 = 0\,, t = 1$

$P(-3, 2, 3)$

6.- Expresa de todas las formas posibles la recta de ecuación $r \equiv \frac{2x-1}{5} = \frac{3-y}{2} = \frac{3z}{1}$ y halla un punto de ésta, cuya primera coordenada sea -4.

$$r \equiv \frac{2x-1}{5} = \frac{3-y}{2} = \frac{3z}{1} \to \quad r \equiv \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{\frac{1}{3}}$$

$$P = \left(\frac{1}{2}, 3, 0\right); \quad \vec{v} = \left(\frac{5}{2}, -2, \frac{1}{3}\right)$$

ecuación vectorial de la recta:

$$r = \left(\frac{1}{2}, 3, 0\right) + \lambda\left(\frac{5}{2}, -2, \frac{1}{3}\right)$$

ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\left.\begin{array}{r} x = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = \frac{1}{3}\lambda \end{array}\right\}$$

ecuación continua de la recta:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda = \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} \\ \lambda = \frac{y-3}{-2} \\ \lambda = \frac{z}{\frac{1}{3}} \end{array}\right\} \qquad r \equiv \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{\frac{1}{3}}$$

ecuaciones implícitas de la recta:

$$\left.\begin{array}{r} -2x + 1 = \frac{5}{2}y - \frac{15}{2} \\ \frac{1}{3}y - 1 = -2z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x + \frac{5}{2}y = \frac{17}{2} \\ \frac{1}{3}y + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

primera coordenada sea -4:

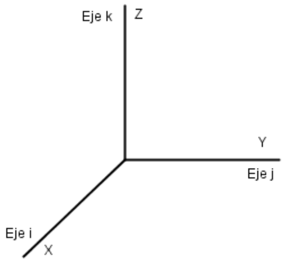
$x = -4 \to P = (-4, y, z)$

$$2(-4) + \frac{5}{2}y = \frac{17}{2} \to \quad \frac{5}{2}y = \frac{17}{2} + 8 \to \quad y = \frac{33}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{33}{5}$$

$$\frac{1}{3}y + 2z = 1 \to \quad 2z = 1 - \frac{1}{3}y \to \quad 2z = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{33}{5}\right) = -\frac{6}{5} \to z = \quad -\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{5}$$

$$P = \left(-4, \frac{33}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

7. Halla las ecuaciones de los OX, OY y OZ y exprésala en todas las formas posibles.



Eje x; tomamos el punto (3, 0 ,0)

- **Ecuación vectorial**

$(x, y, z) = (3,0,0) + \lambda(1,0,0)$

- **Ecuación paramétrica**

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- **Ecuación continua**

$$r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{0}$$

- **Ecuación general**

$0(x-3) = 1(y-0); \quad 0 = y - 0; \;\; y = 0$

$0(x-3) = 1(z-0); \quad 0 = z - 0; \;\; z = 0$

$$r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Eje y; supongamos el punto (0, 1, 0)

- **Ecuación vectorial**

$(x, y, z) = (0,1,0) + \lambda(0,1,0)$

- **Ecuación paramétrica**

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

- **Ecuación continua**

$$r \equiv \frac{x-0}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{0}$$

- **Ecuación general**

$1(x-0) = 0(y-1); x - 0 = 0; x = 0$

$0(y-1) = 1(z-0); 0 = z - 0, z = 0$

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Eje z; supongamos el punto (0, 0, 5)

- **Ecuación vectorial**

$(x, y, z) = (0, 0, 5) + \lambda(0,0,1)$

- **Ecuación paramétrica**

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$$

- **Ecuación continua**

$$r \equiv \frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-5}{1}$$

- **Ecuación general**

$0(x-0) = 0(y-0); 0 = 0$
$1(y-0) = 0(z-5); y-0 = 0; y = 0$
$r \equiv \{y = 0$

8. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A (2, 1, -1) y es paralela:

a) Al eje OY

Que dos rectas sean paralelas significa que tienen el mismo vector director, como el vector director del eje OY es $\vec{v}(0,1,0)$, el vector de la recta será $\vec{u}(0,1,0)$.
Luego sus ecuaciones serán:

- **Ecuación vectorial:**

$(x,y,z) = (2,1,-1) + \lambda(0,1,0)$

- **Ecuación paramétrica:**

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 1+\lambda \\ z = -1 \end{cases}$$

- **Ecuación continua:**

$r \equiv \frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{0}$

- **Ecuación general:**

$1(x-2) = 0(y-1); x-2 = 0$
$0(y-1) = 1(z+1); 0 = z+1$

$$r \equiv \begin{cases} x-2 = 0 \\ z+1 = 0 \end{cases}$$

b) A la recta de ecuación r: $\begin{cases} \boldsymbol{x+2z=0} \\ \boldsymbol{y-3z=0} \end{cases}$

Primero calculamos el vector director de la recta r,

$$\begin{cases} 3(x+2z) = 0 \\ 2(y-3z) = 0 \end{cases}; 3x+2y = 0; y = \lambda; x = \frac{-2\lambda}{3}; z = \frac{\lambda}{3} \begin{cases} x = \frac{-2}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{\lambda}{3} \end{cases}$$

El vector de la recta r es $\vec{v} = (\frac{-2}{3}, 1, \frac{1}{3})$

Luego pasa por el punto A (2, 1, -1) y tiene el vector $\vec{v} = (\frac{-2}{3}, 1, \frac{1}{3})$

- **Ecuación vectorial:**

$(x,y,z) = (2,1,-1) + \lambda(\frac{-2}{3}, 1, \frac{1}{3})$

- **Ecuación paramétrica:**

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\frac{-2}{3}\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = -1+\frac{\lambda}{3} \end{cases}$$

- **Ecuación continua:**

$r \equiv \frac{x-2}{\frac{-2}{3}} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{\frac{1}{3}}$

- **Ecuación general:**

$1(x-2) = \frac{-2}{3}(y-1); x-2 = \frac{-2}{3}y + \frac{2}{3} = x\frac{+2}{3}y + \frac{8}{3}$

$\frac{1}{3}(y-1)=1(z+1); \frac{1}{3}y-\frac{1}{3}=z+1=\frac{1}{3}y-z-\frac{2}{3}$

$r \equiv \begin{cases} x+\frac{2}{3}y+\frac{8}{3}=0 \\ \frac{1}{3}y-z-\frac{2}{3}=0 \end{cases}$

9.- Dada la recta r: $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-1}$ se pide:

a) **Expresa dicha recta de todas las formas posibles.**
   a. Vectorial
      i. Obtenemos el punto y el vector director de la recta
         1. $P(1,0,-2)$; $\vec{v}(3,-1,-1)$
      ii. $(x,y,z):(1,0,-2)+t(3,-1,-1)$
   b. Paramétrica
      i. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-t \\ z=-2-t \end{cases}$
   c. Implícitas
      i. $\begin{cases} -1(x-1)=3y \to x+3y=1 \\ -y=-1(z+2) \to y-z=-2 \end{cases}$

b) **Halla un punto de dicha recta cuya suma de sus coordenadas valga 4.**
   a. Sabemos que $P(1+3t,-t,-2-t)$
      i. Sumamos los valores del punto e igualamos a 4
         1. $1+3t-t-2-t=4 \to t=5$
      ii. Sustituimos t=5 en la ecuación paramétrica
         1. $\begin{cases} x=1+3\cdot 5 \\ y=-5 \\ z=-2-5 \end{cases}$
         2. Obtenemos $P(16,-5,-7)$

c) **Halla la ecuación de una recta paralela y que pase por el punto $B(1,-2,0)$.**
   a. Tomamos el mismo vector director $\vec{v}(3,-1,-1)$
   b. Ecuación vectorial: $(x,y,z):(1,-2,0)+t(3,-1,-1)$

10.- Expresa de todas las formas posibles la recta r: $\begin{cases} x+y-2z=2 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ y halla la ecuación de una recta s que pasando por el punto $B(1,-2,-1)$ tenga como vector director el de la recta r.

a) Hallamos el vector director con el determinante
   a. $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4i-3j-3k \to \vec{v}(4,-3,-3)$

b) Hallamos un punto perteneciente a la recta, debemos dar un valor a x, y o z.
   a. z=0
      i. $\begin{cases} x+y=2 \to x+y-2=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$
      ii. Resolvemos el sistema y obtenemos $x=\frac{4}{3}; y=\frac{2}{3}$

b. $P\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},0\right)$

c) Vectorial

a. $(x,y,z):\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},0\right)+t(4,-3,-3)$

d) Paramétrica

a. $\begin{cases} x=\frac{4}{3}+4t \\ y=\frac{2}{3}-3t \\ z=-3t \end{cases}$

e) Continua

a. $\frac{x-\frac{4}{3}}{4}=\frac{y-\frac{2}{3}}{-3}=\frac{z}{-3}$

f) Implícita

a. $\begin{cases} 4\left(y-\frac{2}{3}\right)=-3\left(x-\frac{4}{3}\right)\rightarrow 4y-\frac{8}{3}=-3x+4\rightarrow y=\frac{2}{3}-\frac{3}{4}x+1 \\ -3\left(y-\frac{2}{3}\right)=-3z\rightarrow -3y+\frac{2}{3}=-3z\rightarrow z=y-\frac{2}{9} \end{cases}$

g) Ecuación de una recta s que pasando por el punto $B(1,-2,-1)$ tenga como vector director el de la recta r.

a. La ecuación vectorial de la recta es:

i. $(x,y,z):(1,-2,-1)+t(4,-3,-3)$

11.Expresa de todas las formas posibles la ecuación del plano $\pi: 2x-y+3z-6=0$ y halla 3 puntos de ese plano que estén alineados.

$2x-y+3z-6=0;$
$y=2x+3z-6;$
$x=t;$
$z=s;$
$y=2t+3s-6;$

Ecuaciones paramétricas

$\begin{cases} x= t \\ y=2t+3s-6; \\ z= s \end{cases}$

$P=(0,-6,0)\quad \vec{u}=(1,2,0)\quad \vec{v}=(0,3,1)$

Ecuación vectorial

$(x,y,z)=(0,-6,0)+t(1,2,0)+s(0,2,1)$

3 puntos alineados: t = 0 y s = 0, P(0, -6, 0); t = 1 y s = 0, Q(1, -4, 0) M(1/2, -5, 0) (punto medio)

12. Halla la ecuación del plano (expresarlo de todas las formas posibles) en los siguientes casos:
a) Pasa por el punto A(3, 2, -1) y tiene como vectores directores $\vec{u}=(-1,1,0)$ y $\vec{v}=(2,0,-1)$.
b) Pasa por los puntos A(1, 2, 0) y B(-1, 1, 2) y uno de sus vectores directores es $\vec{u}=(1,-2,-1)$
c) Pasa por los puntos A(0, -2, 1), B(-2, 0, -1) y C(1, -2, 0).

a) Vectorial

$(x,y,z)=(3,2,-1)+t(-1,1,0)+s(2,0,-1)$

Paramétrica

$$\begin{cases} x = -t + 2s + 3 \\ y \ = t + \ \ 2 \\ z = \quad\ \ -s - 1 \end{cases}$$

Implícita

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-x + 3 - \big((2(z+1) + y - 2)\big) = 0;\ -x + 3 - 2z - 2 - y + 2 = 0;\ \ x + y + 2z - 3 = 0$$

b) Hacemos el vector $\overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{AB} = (-2, -1, 2)$

Vectorial

$(x, y, z) = (1, 2, 0) + t(1, -2, -1) + s(-2, -1, 2)$

Paramétrica

$$\begin{cases} x = t - 2s + 1 \\ y = -2t - s + 2 \\ z = -t + 2s \end{cases}$$

Implícita

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$(-4x - z + 4 + 2y - 4 - (4z + x - 1 + 2y - 4) = 0;$

$(-4x - z + 4 + 2y - 4 - 4z - x + 1 - 2y + 4) = 0;$

$4x + z - 4 - 2y + 4 + 4z + x - 1 + 2y - 4 = 0;$

$4x + x - 2y + 2y + 4z + z - 4 + 4 - 1 - 4 = 0;$

$5x + 5z - 5 = 0; \quad x + z - 1 = 0$

c) Hacemos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. $\quad \overrightarrow{AB} = (-2, 2, -2) \quad \overrightarrow{AC} = (1, 0, -1)$

Vectorial

$(x, y, z) = (0, -2, 1) + t(-2, 2, -2) + s(1, 0, -1)$

Paramétrica

$$\begin{cases} x = -2t + s \\ y = 2t - 2 \\ z = -2t - s + 1 \end{cases}$$

Implícita

$$\begin{vmatrix} x-0 & y+2 & z-1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\big(-2x - 2y - 4 - (2z - 2 + 2y + 4)\big) = 0; \quad (-2x - 2y - 4 - 2z + 2 - 2y - 4) = 0;$

$2x + 2y + 4 + 2z - 2 + 2y + 4 = 0;$

$2x + 2y + 2y + 2z + 4 + 4 = 0; \quad x + 2y + z + 4 = 0$

13. Halla las ecuaciones de los planos OXY, OXZ, OYZ y exprésalos de todas las formas posibles.

<u>PLANO OXY</u>

Ecuación vectorial: $(X, Y, Z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,0) + \mu(0,1,0)$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$

Ecuación implícita: $z = 0$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

PLANO OXZ

Ecuación vectorial: $(X, Y, Z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,0) + \mu(0,0,1)$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases}$

Ecuación implícita: $y = 0$

PLANO OYZ

Ecuación vectorial: $(X, Y, Z) = (0,0,0) + \lambda(0,1,0) + \mu(0,0,1)$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$

Ecuación implícita: $x = 0$

14. Encuentra las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto *P* (8,9,1) y es paralelo a las rectas:

$$r: \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} \qquad y \qquad s: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$$

Vector director de la recta *r* : $\bar{d}_r(-2,-1,2)$

Vector director de la recta *s* : $\bar{d}_s(-1,3,-3)$ *P* (8,9,1)

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 8 - 2\lambda - \mu \\ y = 9 - \lambda + 3\mu \\ z = 1 + 2\lambda - 3\mu \end{cases}$

15. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A(-2, 0, 1)$ y contiene a la recta r de la ecuación $r: \frac{x}{2} = y - 1 = 2 - z$

$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3} \to \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$

$\left.\begin{matrix} \mathrm{B}(0,1,2) & \vec{\mathrm{v}}(2,1,-1) \end{matrix}\right\}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(-2,-1,-1)$ $\vec{\mathrm{v}}(2,1,-1) \to r: \begin{vmatrix} 2 & -2 & x+2 \\ 1 & -1 & y \\ -1 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \to$

$-2x + 4y - 4 = 0 \qquad x - 2y + 2 = 0$

16. Expresa todas las formas posibles de la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene la recta $r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{1}$

Ecuación vectorial del plano: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (v_x, v_y, v_z)t + (u_x, u_y, u_z)s$

$$\left.\begin{matrix} A(3,-2,-1) \\ \vec{v}(3,-2,1) \\ O(0,0,0) \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} A(3,-2,-1) \\ \vec{v}(3,-2,1) \\ \overrightarrow{OA}(3,-2-1) \end{matrix}\right\} (x, y, z) = (3,-2,-1) + (3,-2,1)t + (3,-2,-1)s$$

Ecuación paramétrica:

$$\left.\begin{matrix} x = x_0 + v_x t + u_x s \\ y = y_0 + v_y t + u_y s \\ z = z_0 + v_z t + u_z s \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x = 3 + 3t + 3s \\ y = -2 - 2t - 2s \\ z = -1 + t - s \end{matrix}\right\}$$

Ecuación general:

$$\left.\begin{matrix} 3t + 3s = x - 3 \\ -2t - 2s = y + 2 \\ t - s = z + 1 \end{matrix}\right\} \to \begin{vmatrix} 3 & 3 & x-3 \\ -2 & -2 & y+2 \\ 1 & -1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 4x + 3y + 3 = 0$$

17. Expresa de todas las formas posibles la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a la recta r: $-x+2=3y=1-z$

$$-x+2=3y=1-z \rightarrow \frac{x-2}{-1}=\frac{y}{\frac{1}{3}}=\frac{z-1}{-1}$$

$P(-2,0,-1) \qquad \bar{V}\left(-1,\frac{1}{3},-1\right) \qquad O(0,0,0)$

$\bar{u}=\overline{PO} \rightarrow \bar{u}=\big(0-(-2),0-0,0-(-1)\big)=(2,0,1)$

$$\bar{v}x\bar{u}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & -1 \end{vmatrix}=\frac{1}{3}i+j-\frac{2}{3}k \rightarrow i+3j-2k$$

$1\cdot(x-0)+3(y-0)-2(z-0) \rightarrow x-3y-2z=0$

18. Halla la ecuación del plano que contiene al punto $M(-1,2,1)$ y a la recta $r:\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1-3\lambda \end{cases}$

$$r:\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1-3\lambda \end{cases} \rightarrow \frac{x}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-3}$$

$P(0,2,1) \qquad \bar{V}(-2,1,-3) \quad M(-1,2,1)$

$\bar{u}=\overline{PM} \rightarrow \bar{u}=(-1-0,2-2,1-1)=(-1,0,0)$

$$\bar{v}x\bar{u}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0i+3j+1k$$

$0(x-(-1))+3(y-2)+1(z-1) \rightarrow 3y+z-7=0$

19. Calcula para qué valor de m los puntos A (1, m, 2), B(2, 3, m) y C(-1, -9, 8) están alineados. En el caso de que m=0, halla la ecuación del plano que contiene a dichos puntos. ¿Pertenece el punto M (2, 1, -2) a dicho plano?

$\overline{AB}(1,3-M,M-2);\ \overline{AC}(-2,-9-M,6)$

$$\frac{1}{-2}=\frac{3-M}{-9-M}=\frac{M-2}{6}$$

$$\frac{1}{m-2}=\frac{-8}{9}; \qquad 9=-8m+16; \qquad m=\frac{-16+9}{-8}=\frac{7}{8}; \qquad m=\frac{7}{8}$$

- Para m=0:

A(1,0,2) B (2,3,0) C(-1,-9,8)

$\overline{AB}=(1,3,-2)$

$\overline{AC}=(-2,-9,6)$

- Cogemos el punto A y hacemos la ecuación paramétrica del plano:

x= 1+$\lambda-2\mu$
y= $3\lambda-9\mu$
z= 2-2$\lambda+6\mu$

20. Halla el plano que contiene a la recta r:$\left[\begin{array}{l} y=1+x \\ z=-1-2x \end{array}\right.$ y es paralelo a s:$\frac{x+1}{3}=1-y=\frac{z}{3}$.

- Ecuación paramétrica recta r:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases}$$

- Sacamos un punto de r; $\lambda = 0$; $P(0,1,-1)$
- Cogemos el vector de la recta r: $\bar{V}_1(1,1,-2)$
- Cogemos el vector de la recta s: $\bar{V}_2(3,1,3)$
- Ecuación vectorial del plano: (x, y, z)=$(0,1,-1) + (3,1,3)t + (1,1,-2)s$

21. Calcula m y n para que la recta r:$\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$ esté contenida en el plano π, cuya ecuación es $\pi: mx + 2y - 4z - 2n = 0$.

- Cogemos el vector y hallamos un punto de la recta r: $\bar{V}_1(4,-4,1)$ P(3,1,-3)

$\bar{V}_1 \cdot \bar{n} = 0$ $(4,-4,1)\cdot(m,2,-4) = 0; 4m + 8 - 16 - 4m - 8 + 16 + m + 2 - 4 = 0;$

$$m - 2 = 0; m = 2$$

- En la ecuación del plano sustituimos con el valor de m y el punto: 2(3)+2·1-4·(-3)-2n=0

6+2+12-2n=0 20-2n=0 n=10

22. Estudia la posición relativa de las rectas $r: \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ y + z + 4 = 0 \end{cases}$ y $s: x + 2 = -2y = z - 1$, y halla la ecuación del plano que las contiene.

$r: \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ y + z + 4 = 0 \end{cases}$ $s: x + 2 = -2y = z - 1$

$$\vec{V_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2,-1,1)$$

$$s: x + 2 = -2y = z - 1 \quad \rightarrow \quad s: \frac{x+2}{1} = \frac{y}{-\frac{1}{2}} = \frac{z-1}{1} \quad \rightarrow \quad \vec{V_s} = \left(1, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$Q_{(s)} = (-2,0,1)$$

$$r: \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ y + z + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \\ z = -4 \end{cases} \quad P_{(r)} = (3,0,-4)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3) = (-5,0,5)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \frac{5}{2} \neq 0$$

Los vectores $\vec{V_r}\ \vec{V_s}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente independientes, luego las dos rectas se cruzan.
No existe un plano que contenga a las dos rectas

23.-Halla la posición relativa, según los valores de m y n, de las rectas:

$r: \frac{x+m}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{n}$ $s: \begin{cases} -x + y - z + 2 = 0 \\ 2x + 4y - 3z - 5 = 0 \end{cases}$

$r:\ 2x + 2m = 2y\ ,\ yn = 2z$ $r: \begin{cases} 2x - 2y + 2m = 0 \\ yn - 2z = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 2 & 4 & -3 & \vdots & -5 \\ 2 & -2 & 0 & \vdots & 2m \\ 0 & n & -2 & \vdots & 0 \end{pmatrix} 2F1+F2\,,2F1+F3 \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 2 & 4 & -3 & \vdots & -5 \\ 2 & -2 & 0 & \vdots & 2m \\ 0 & n & -2 & \vdots & 0 \end{pmatrix} C2 \leftrightarrow C3 \;\; y - F3 + F4$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & -5 & 6 & \vdots & -1 \\ 0 & -2 & 0 & \vdots & 2m+4 \\ 0 & 0 & n & \vdots & 0 \end{pmatrix} -2F2+5F3 \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & -5 & 6 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & -12 & \vdots & 10m+22 \\ 0 & 0 & n & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad nF3+12F4$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & -5 & 6 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & -12 & \vdots & 10m+22 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 10mn+22n \end{pmatrix} \qquad n(10m+22)=0 \qquad ; m = \frac{22}{10} = \frac{11}{5} \quad \text{n = 0}$$

a) Para n≠ 0

1)$m \neq \frac{11}{5} \quad r(C) = 3 \neq r(A) = 4 \quad S.I\ (\,se\ cruzan)$

2)$m = \frac{11}{5} \quad r(C) = 3 = r(A) \quad S.C.D$ (se cortan)

b) $Para\ n = 0 \;\; r(C) = 3 = r(A) \quad S.C.D$ (se cortan)

24. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y planos:

$\boldsymbol{a)\ \pi: x + 4y + z + 2 = 0}$

$\boldsymbol{r: \begin{cases} -x + 2y = 5 \\ -2y - z = 4 \end{cases}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -4,\ Al\ ser\ distinto\ de\ 0\ el\ rag(A) = 3$$

Se trata de un S.C.D entonces la posición de la recta y el plano es **secantes,** el punto es:

$$\begin{cases} -x & +2y & 0 & = 5 \\ 0 & -2y & -z & = 4 \\ +x & +4y & +z & = -2 \end{cases} ; x = \frac{-7}{2}, y = \frac{3}{4}, z = \frac{5}{2} \quad ; \quad P\left(\frac{-7}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-5}{2}\right)$$

$\boldsymbol{b)\ \pi: 2x + y - z - 2 = 0}$

$\boldsymbol{r: \begin{cases} -x + 3y - z + 2 = 0 \\ x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases}}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 17;$$

Se trata de un S.C.D entonces recta y plano son **secantes,** el punto es:

$$b) \begin{cases} -x & +3y & -z & = -2 \\ x & +y & +2z & = 4 \\ 2x & +y & -z & = 2 \end{cases} ; x = \frac{32}{17}, y = -\frac{8}{17}, z = \frac{22}{17} \qquad P\left(\frac{32}{17}, -\frac{8}{17}, \frac{22}{17}\right)$$

$\boldsymbol{c)\ \pi = 2x + y + z - 2 = 0}$

$\boldsymbol{r: \begin{cases} -x + 2y + z - 4 = 0 \\ x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases}}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12\,;$$

Se trata de un S.C.D entonces recta y plano son **secantes,** el punto es:

$$\begin{cases} -x & +2y & +z & = 4 \\ x & -y & +2z & = -2 \\ +2x & +y & +z & = 2 \end{cases} \rightarrow x = 0, y = 2, z = 0 \;\; P(0\,,2\,,0)$$

$\boldsymbol{d)}\ \boldsymbol{\pi: x - 4y - 3z = 5}$

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x - 2y = 3} \\ \boldsymbol{-2y - z = 2} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix} = 4;$$

Se trata de un S.C.D entonces recta y plano son **secantes,** el punto es:

$$\begin{cases} 1x & -4y & -3x & =5 \\ 1x & -2y & +0 & = 3 \\ 0 & -2y & +1z & =2 \end{cases} \qquad x = 1 \;, y = -1 \;\;, z = 0 \;;\; P(1,-1,0)$$

25. Estudia la posición relativa de los siguientes planos:

a) $\begin{cases} \boldsymbol{\pi_1: -2x + 4y - 6z = -4} \\ \boldsymbol{\pi_2: \quad x - 2y + 3z = 2} \end{cases}$ $\quad \frac{-2}{1} = \frac{4}{-2} = \frac{-6}{3} = \frac{-4}{2}$ Ambos planos son coincidentes

b) $\begin{cases} \boldsymbol{\pi_1: \quad 2x - y + z = 1} \\ \boldsymbol{\pi_2: -6x + 3y - 3z = 3} \end{cases}$ $\quad \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3} = \frac{1}{-3} \neq \frac{1}{3}$ Ambos planos son paralelos

c) $\begin{cases} \boldsymbol{\pi_1: \quad x - y + 3z = 4} \\ \boldsymbol{\pi_2: -2x + 3y - z = 3} \\ \boldsymbol{\pi_3: 3x - 4y + 4z = -1} \end{cases}$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2F_1 + F_2 \\ -3F_1 + F_3 \end{array}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array}\right) F_2 + F_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$Rg\,(C) = 2 \neq Rg(A) = 3$ Por ello, el sistema es incompatible y los planos se cortarían 2 a 2 en tres rectas paralelas formando un prisma puesto que los coeficientes de sus variables no son proporcionales.

d) $\begin{cases} \boldsymbol{\pi_1: 3x - y + z = -1} \\ \boldsymbol{\pi_2: \; x + y - 5z = 1} \\ \boldsymbol{\pi_3: 2x - 3y - z = -1} \end{cases}$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_1 - 3F_2 \\ -2F_1 + 3F_3 \end{array}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 16 & -4 \\ 0 & -7 & -5 & -1 \end{array}\right) -7F_2 + 4F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 16 & -4 \\ 0 & 0 & -132 & 24 \end{array}\right)$$

$Rg\,(C) = Rg(A) = 3$ Luego el sistema sería compatible determinado y los tres planos se cortarían en un punto.

26. Estudia, según los valores de λ, la posición relativa de los siguientes planos:

a) $\begin{cases} \boldsymbol{\pi_1: -2x + 2\lambda y - 4z = 2} \\ \boldsymbol{\pi_2: \quad x - 2y + \lambda z = -1} \end{cases}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$-\frac{2}{1}=\frac{2\lambda}{-2}=\frac{-4}{\lambda}=\frac{-2}{1}\rightarrow\frac{-4}{\lambda}=\frac{-4}{2}=\frac{-2}{1}\rightarrow -4\lambda=-8\,;\lambda=2$$

Para $\lambda=2$: Ambos planos son coincidentes, puesto que los coeficientes de sus variables son proporcionales

Para $\lambda\neq 2$: Los planos se cortan en una recta, ya que los coeficientes de las variables no son proporcionales

b) $\begin{cases}\boldsymbol{\pi_1}: -x+2y+z=2\\ \boldsymbol{\pi_2}: \quad x+\lambda_y-2z=1\\ \boldsymbol{\pi_3}: \lambda x-y-4z=-3\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & | & 2\\ 1 & \lambda & -2 & | & 1\\ \lambda & -1 & -4 & | & -3\end{pmatrix}\rightarrow F_1+F_2\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & | & 2\\ 0 & \lambda+2 & -1 & | & 3\\ \lambda & -1 & -4 & | & -3\end{pmatrix}\rightarrow \lambda F_1+F_3\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & | & 2\\ 0 & \lambda+2 & -1 & | & 3\\ 0 & 2\lambda-1 & \lambda-4 & | & 2\lambda-3\end{pmatrix}\rightarrow F_3-F_2\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & | & 2\\ 0 & \lambda+2 & -1 & | & 3\\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 & | & 2\lambda-6\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & | & 2\\ 0 & \lambda+2 & -1 & | & 3\\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 & | & 2(\lambda-3)\end{pmatrix}\qquad \lambda-3=0\rightarrow\lambda=3$$

Para $\lambda=3$: $Rg(C)=2=Rg(A)$ Entonces, el sistema sería compatible indeterminado y los planos se cortarían en una recta puesto que los coeficientes de sus variables no son proporcionales.

Para $\lambda\neq 3$: $Rg\,(C)=Rg(A)=3$ Luego el sistema sería compatible determinado y los tres planos se cortarían en un punto.

c) $\begin{cases}\boldsymbol{\pi_1}: \quad x-y+2z= \quad 4\\ \boldsymbol{\pi_2}: \quad 2x+y+z= \quad 3\\ \boldsymbol{\pi_3}: 3x+\lambda y+6z= \; -8\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & | & 4\\ 2 & 1 & 1 & | & 3\\ 3 & \lambda & 6 & | & -8\end{pmatrix}-2F_1+F_2\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & | & 2\\ 0 & 3 & -3 & | & -5\\ 3 & \lambda & 6 & | & -8\end{pmatrix}-3F_1+F_3\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & | & 2\\ 0 & 3 & -3 & | & -5\\ 0 & \lambda+3 & 0 & | & -14\end{pmatrix}$$

$$\lambda+3=0\rightarrow\lambda=-3$$

Para $\lambda=-3$:$Rg\,(C)=2\neq Rg(A)=3$ Por ello, el sistema es incompatible y el plano π_2 cortaría a los otros dos en rectas paralelas, puesto que los coeficientes de las variables de los planos π_1,π_3 son proporcionales a excepción de sus términos independientes, planos paralelos.

Para $\lambda\neq -3$: $Rg\,(C)=Rg(A)=3$ Luego, el sistema sería compatible determinado y los tres planos se cortarían en un punto.

d) $\begin{cases}\boldsymbol{\pi_1}: \quad x+\lambda y-z=2\\ \boldsymbol{\pi_2}: \; 2x-y+\lambda z=5\\ \boldsymbol{\pi_3}: x+10y-6z=1\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & | & 2\\ 2 & -1 & \lambda & | & 5\\ 1 & 10 & -6 & | & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}-2F_1+F_2\\ -F_1+F_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & | & 2\\ 0 & -2\lambda-1 & \lambda+2 & | & 1\\ 0 & 10-\lambda & -5 & | & -1\end{pmatrix}\rightarrow(10-\lambda)F_2+(2\lambda+1)F_3\rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & | & 2 \\ 0 & -2\lambda-1 & \lambda+2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-2x+15 & | & -3\lambda+9 \end{pmatrix}$$

$$-\lambda^2 - 2\lambda + 15 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -5, \lambda_2 = 3\,; \qquad -3\lambda + 9 = 0 \rightarrow \lambda = 3$$

Para $\lambda \neq 3, \lambda \neq -5$: $Rg\,(C) = Rg(A) = 3$ Luego, el sistema sería compatible determinado y los tres planos se cortarían en un punto.

Para $\lambda = 3$: $Rg(C) = Rg(A) = 2$ Entonces, el sistema sería compatible indeterminado, y los planos serían distintos y se cortarían en una recta puesto que los coeficientes de las variables no son proporcionales.

Para $\lambda = -5$: $Rg\,(C) = 2 \neq Rg(A) = 3$ Por ello, el sistema es incompatible y los planos se cortarían 2 a 2 en tres rectas paralelas formando un prisma puesto que los coeficientes de sus variables no son proporcionales.

27. -Estudia, según los valores de λ, la posición relativa de las siguientes rectas y planos, calculando (cuando sea posible), el punto de intersección.

a) $\begin{cases} \boldsymbol{r: x + 1 = -y - 2 = \frac{z}{2}} \\ \boldsymbol{\pi: x - 3 + \lambda z + 2 = 0} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \boldsymbol{r: \begin{cases} 2x + y - 2z + 4 = 0 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{cases}} \\ \boldsymbol{\pi: x + 4y + \lambda z - 2 = 0} \end{cases}$

a) Recta: $\begin{cases} x + 1 = -y - 2 \;\rightarrow\; x + y + 3 = 0 \\ -y - 2 = \frac{z}{2} \;\rightarrow\; -2y - 4 = z \;\rightarrow 2y + z + 4 = 0 \end{cases}$

Plano: π = $x - 3y + \lambda z + 2 = 0$

Matriz (A)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & \lambda \end{pmatrix}$$

Matriz Ampliada (A*)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 2 & 1 & | & 4 \\ 1 & -3 & \lambda & | & 2 \end{pmatrix}$$

Rango A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda + 0 + 1 - (0 + 0 - 3) = 2\lambda + 1 + 3 = 2\lambda + 4 \rightarrow 2\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = -2$$

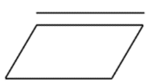
- Si $\lambda = -2$, el Rg (A) $\neq$ 3, y podemos comprobar que la matriz es de Rg = 2
- Para que Rg (A) = 3, λ tiene que ser $\neq$ - 2

Conclusión:

1) Cuando $\lambda \neq -2$ el $Rg\,(A) = 3 = Rg\,(A*) \rightarrow$ *la recta y el plano son secantes* (S.C.D.)

Resolvemos el sistema $\begin{cases} x + y \quad = -3 \\ 2y + z = -4 \\ x - 3y + \lambda z = -2 \end{cases}$ $x = \frac{-2\lambda-7}{2(\lambda+2)}\,; y = \frac{-4\lambda-1}{2(\lambda+2)}\,; \; z = \frac{-7}{2(\lambda+2)}$

2) Cuando $\lambda = -2$ Rg (A) = 2 y Rg (A*) = 3, por lo que Rg (A) $\neq$ Rg (A*) y la recta y el plano son paralelos (S.I.)



b) Recta: $\begin{cases} 2x + y - 2z + 4 = 0 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$ Plano: π = $x + 4y - \lambda z - 2 = 0$

Matriz (A)

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -\lambda \end{pmatrix}$ Dependiendo de λ, esta matriz será de Rango 2 o 3.

<u>Determinante $|A|$</u>

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} \rightarrow |A| = (2\lambda + 1 - 8) - (2 + 8 - \lambda) = 2\lambda - 7 - 2 - 8 + \lambda = 3\lambda - 17$$

$3\lambda - 17 = 0$; $\lambda = \frac{17}{3}$

- La matriz A no es de Rg = 3 para ese valor de λ;

en el resto de los casos, es decir, cuando $\lambda \neq \frac{17}{3}$, sí es de Rg = 3.

<u>Matriz (A*)</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & \lambda & 2 \end{array}\right)$$

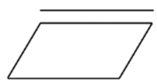
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-4 + 16 - 4) - (-4 - 32 + 2) = 16 - 8 + 36 - 2 = 42$$

<u>**Conclusión**</u>:

1) Si $\lambda \neq \frac{17}{3}$, ambas matrices son Rg = 3, por tanto, el plano y la recta son secantes (S.C.D.)

Resolvemos el sistema $\begin{cases} 2x + y - 2z = -4 \\ x - y + z = 4 \\ x + 4y - \lambda z = 2 \end{cases}$ $x = \frac{18}{-3\lambda+17}$; $y = \frac{12\lambda+4}{-3\lambda+17}$; $z = \frac{54}{-3\lambda+17}$

2) Si $\lambda = \frac{-17}{3}$, Rg (A) = 2 $\neq$ Rg (A*) = 3, por tanto, el plano y la recta son paralelos (S.I.)



28. Dadas las rectas $r: \frac{x}{2} = y - 3 = \frac{z+3}{-1}$ y $s: x + 1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ se pide:

a) Posición relativa de ambas rectas.

b) Ecuación del plano que contiene a dichas rectas.

a) <u>Primero</u>: Sacamos un punto y un vector de cada recta:

Recta r: $P(0, 3, -3)$; $\vec{v}\,(2, 1, -1)$

Recta s: $Q(-1,1,0)$; $\vec{w}(1, -1, 2)$

<u>Segundo:</u> Se calcula el rango de la matriz M y M*:

$$M = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \text{ y } M^* = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ p_1 - q_1 & p_2 - q_2 & p_3 - q_3 \end{pmatrix}$$

<u>Tercero</u>: Calculamos el determinante M*:

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ R(M)=2=R(M*)→ Las rectas son **secantes**.

b) Primero: Para calcular la ecuación del plano que contiene a dichas rectas necesitamos un punto de una de las rectas y dos vectores, uno de cada recta:
$P(0,3,-3)$; $\vec{v}\,(2,1,-1)$; $\vec{w}(1,-1,2)$
Segundo: Calculamos la ecuación general del plano para este caso de la siguiente manera:
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$
Tercero: Sustituimos los valores dados:
$$\begin{vmatrix} x & y-3 & z+3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \to 2x-2(z+3)-(y-3)-[(z+3)+x+4(y-3)] = 0 \to$$
$\boldsymbol{x-5y-3z+6=0}$

29. Dadas las rectas r y s de ecuaciones $r: x=y=z$ y $s: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{2}$

a) Estudia su posición relativa.

b) Halla la recta que corta a r y s y es paralela a la recta $t: (x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(1,2,-1)$

a) Primero: Sacamos un punto y un vector de cada recta:
Recta r: $P(0,0,0)$; $\vec{v}\,(1,1,1)$

Recta s: $Q(1,2,0)$; $\vec{w}(1,2,2)$

Segundo: Se calcula el rango de la matriz M y M*:

$$M = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \text{ y } M^* = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ p_1-q_1 & p_2-q_2 & p_3-q_3 \end{pmatrix}$$

Tercero: Calculamos el determinante M*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \to$$ R(M)=2≠R(M*)=3→ **Las rectas se cruzan**

b) Primero: Pasamos a paramétricas las rectas r y s para ver las coordenadas de un punto de cada recta:

Recta r: $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$ cualquier punto de la recta r será: P (t, t, t)

Recta s: $\begin{cases} x-1=s \\ y-2=2s \\ z=2s \end{cases} \to \begin{cases} x=1+s \\ y=2+2s \\ z=2s \end{cases}$ cualquier punto de la recta s será Q(1+s, 2+2s, 2s)

Segundo: El vector $\overrightarrow{PQ}$ debe ser paralelo al vector director de la recta t: (1, 2, -1):
$\overrightarrow{PQ} = (1+s-t,\quad 2+2s-t,\quad 2s-t)$
$$\frac{1+s-t}{1} = \frac{2+2s-t}{2} = \frac{2s-t}{-1}$$
Tercero: se resuelve el sistema ecuaciones:
$2+2s-2t = 2+2s-t \to \boldsymbol{t=0}$
$-2-2s+t = 4s-2t \to \boldsymbol{s=-\frac{1}{3}}$
Cuarto: Se sustituye y se toma el punto P(0,0,0) y el vector (1,2,-1) y la recta será:

30. Dados los planos $\pi_1 = 3x + 2y - z = 6$ y $\pi_2 = -2x + y + 3z - 6 = 0$, halla la ecuación de una recta r que pasando por el punto M(1, 0, -1) es paralela a los dos planos.

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to (7,-7,7);\, vector\ perpendicular\ a\ los\ vectores\ normales$ y por tanto paralelo a los dos planos, la recta tendrá de ecuación

$r: (x,y,z) = \lambda \cdot (7,-7,7) + (1,0,-1)$ ecuación vectorial

$$r = \begin{cases} x = 7\lambda + 1 \\ y = -7\lambda \\ z = 7\lambda - 1 \end{cases} \to Ecuaciones\ paramétricas$$

31. Dadas las rectas r y s de ecuaciones $r: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{m}$ y $s: x + 1 = -y = z - 2$, hallar:

a) El valor de m para que ambas rectas se corten:

$$r = \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = m\lambda \end{cases} \;;\quad s = \begin{cases} x = \beta - 1 \\ y = -\beta \\ z = \beta + 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} 4\lambda = \beta - 1 \\ 1 - 2\lambda = -\beta \\ m\lambda = \beta + 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4\lambda - \beta = -1 \\ -2\lambda + \beta = -1 \\ m\lambda - \beta = 2 \end{array}$$

$2\lambda = -2;\ \lambda = -1$

$-2 \cdot (-1) + \beta = -1 \to 2 + \beta = -1; \beta = -3$

$m \cdot (-1) + 3 = 2;\ -m = -1; m = 1$

b) Para ese valor de m, el plano π que contiene a s y r

$$\pi \begin{cases} Pr = (0,1,0) \\ \vec{d}r = (4,-2,1) \\ \vec{d}s = (1,-1,1) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & x \\ -2 & -1 & y-1 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \to -4z - 2x + y - 1 + x - 4y + 4 + 2z = 0$$

$-2z - x - 3y + 3 = 0$

c) La ecuación de la recta que pasa por el punto M (1,1,1) y es perpendicular al plano π

$\pi = -x - 3y - 2z + 3 = 0 \to (-1,-3,-2);\, vector\ perpendicular\ al\ plano$

$r: (x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(-1,-3,-2), \lambda \in R$

32. Dada la recta $r: \begin{cases} x - y + 3z + 4 = 0 \\ -2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ y el plano : $\pi: 4x - my + 5z - n = 0$ calcula:

a) Valores de m y n para que la recta y el plano sean:

i) paralelos ii) perpendiculares iii) la recta esté contenida en el plano.

b) Para m = -1 y n = 2, el punto de intersección de la recta y el plano.

c) Punto de intersección de la recta r, con el plano OYZ.

$$\vec{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2i - 5j - k \to (-2,-5,-1) \to (2,5,1) \qquad \vec{n_\pi} = (4,-m,5)$$

a) i) $\vec{v_r} \cdot \vec{n_\pi} = 0 \quad (2,5,1) \cdot (4,-m,5) = 8 - 5m + 5 = 0 \quad m = \frac{13}{5}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

ii) $\frac{2}{4} = \frac{5}{-m} = \frac{1}{5}$ no tiene solución.

iii) El sistema formado por las 3 ecuaciones ha de ser compatible indeterminado.

$$\begin{vmatrix} 4 & -m & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 5m - 5 = 0\,; \quad m = \frac{13}{5}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & -n \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 24 + n - 40 - 6n + 16 - 10 = 0\,; \quad n = -2$$

b) Resolvemos el sistema $\begin{cases} 4x + y + 5z = 2 \\ x - y + 3z = -4 \\ -2x + y - z = -2 \end{cases}$ $\quad x = \frac{86}{9}\,; y = \frac{170}{9}\,; z = \frac{16}{9}$

c) **c** Resolvemos el sistema $\begin{cases} x \quad\quad = 0 \\ x - y + 3z = -4 \\ -2x + y - z = -2 \end{cases}$ $\quad x = 0\,; y = -5\,; z = -3$

33. Dadas las rectas $r: \frac{x}{2} = y - 3 = \frac{z+3}{-1}$, y $s: x + 1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$, calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto M(-1, 1, 1) y es perpendicular a ambas rectas.

$\overrightarrow{dr} = (2, 1, -1)$ $\quad \overrightarrow{ds} = (1, -1, 2)$ $\quad \overrightarrow{dr} x \overrightarrow{ds}$ es un vector perpendicular a ambos

$$\overrightarrow{dr} x \overrightarrow{ds} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3i - 5j - 3k \to (3, -5, -3)$$

De donde las ecuaciones paramétricas de la recta pedida son: $\begin{Bmatrix} x = -1 + 3\lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{Bmatrix}$

34.- Dadas las rectas r: $\begin{cases} y = -1 + x \\ z = 2 - 3x \end{cases}$ y $s: \frac{x-2}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{2}$, se pide:

a) Posición relativa de ambas rectas.

r: $\begin{cases} y = -1 + x \\ z = 2 - 3x \end{cases}$ $\quad\quad s: \frac{x-2}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{2}$

$\vec{u} = (1, 1, -3)$; $\quad \vec{v} = (2, 1, 2)$; $\quad \overrightarrow{AB} = (2, 0, -2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2' = F_2 - F_1 \\ F_3' = F_3 + 3F_1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} F_3' = F_3 - 8F_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Es de rango tres, lo que indica que las rectas se cruzan.

b) Ecuación de la recta que pasa por $M = (-1, -1, 0)$ y es perpendicular a ambas rectas.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5i - 8j - k \to \quad \vec{w} = (5, -8, -1)\ y\ M = (-1, -1, 0)$$

Ecuación de la recta: $(x, y, z) = (-1, -1, 0) + \lambda(5, -8, -1)$

35. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A (1,0,-1), B (1,1,0) y el tercer vértice es el punto de corte con el plano 0XZ con la recta $r: x = 2y - 2 = z - 1$.

$$\begin{matrix} x = \gamma \\ y = 0 \\ z = \mu \end{matrix} \quad \to \quad \begin{matrix} x = 2y + 2 \to x = 2 \\ x = z - 1 \to z = x + 1 \to z = 2 + 1 = 3 \end{matrix}$$

C (2,0,3)

$\overline{AB} \to B - A \to (1,1,0) - (1,0,-1) = (0,1,1)$ $\quad \overline{BC} \to C - B \to (2,0,3) - (1,1,0) = (1, -1, 3)$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$\begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\bar{\imath} + \bar{\jmath} - (\bar{k} - \bar{\imath}) = 4\bar{\imath} + \bar{\jmath} - \bar{k} \qquad A = \frac{1}{2}|\bar{u}\ x\ \bar{v}| \to \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 1^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{18}$$

36. Dados los puntos A (-1,2,0), B (-3,3,-1) y C (1, a,1), se pide:

a) Calcula el valor de a para que los tres puntos estén alineados.

$\overline{AB} \to B - A \to (-3,3,-1) - (-1,2,0) = (-2,1,-1)$

$\overline{BC} \to C - B \to (1,a,1) - (-3,3,-3) = (4,a-3,2)$

$$\frac{-2}{4} = \frac{1}{a-3} = \frac{-1}{2} \to \frac{-2}{4} = \frac{1}{a-3} \to -2(a-3) = 4 \to -2a + 6 = 4 \to 2a = 2 \to a = 1$$

b) Para $a = -1$, calcula el perímetro del triángulo que tenga de vértices dichos puntos, así como su área y el valor de la altura correspondiente al vértice A.

$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(-3+1)^2 + (3-2)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{6}$

$d_{\overline{BC}} = \sqrt{(1+3)^2 + (-1-3)^2 + (1+1)^2} = 6$

$d_{\overline{AC}} = \sqrt{(-1-1)^2 + (2+1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$

Perímetro: $\sqrt{6} + 6 + \sqrt{14} = 12{,}19$

$\bar{u} = B - A \to (-3{,}3,-1) - (-1{,}2{,}0) = (-2{,}1,-1)$

$\bar{v} = C - B \to (1,-1{,}1) - (-3{,}3,-1) = (4,-4,2)$

$$|\bar{u}\ x\ \bar{v}| = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \\ \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2\bar{\imath} + 8\bar{k} - 4\bar{\jmath}) - (4\bar{k} + 4\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}) = -2\bar{\imath} + 0\bar{\jmath} + 0\bar{k} = -2$$

Área: $A = \frac{1}{2}|\bar{u}\ x\ \bar{v}| \to \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4} = 1$

Valor de la altura correspondiente al vértice A;

$\overline{BC} = \bar{v} = (4,-4,2)$; $A(-1{,}2{,}0)$ El valor de la altura es la distancia del punto A al punto de corte de la recta determinada por BC y el plano perpendicular a ésta que pasa por A.

Plano perpendicular:

$4(x+1) - 4(y-2) + 2(z) = 0 \to 4x + 4 - 4y + 8 + 2z = 0 \to 4x - 4y + 2z + 12 = 0$

Recta determinada por BC, considerando el punto C $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-1}{2}$

Resolvemos el sistema $\begin{cases} 4x - 4y + 2z = -12 \\ -4x - 4y = 0 \\ 2y + 4z = 2 \end{cases}$

c) Halla la ecuación de una mediana.

Punto medio de A y C→ $D\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{2-1}{2}, \frac{0+1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\overline{BD} \to D - B \to \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (-3{,}3,-1) = (3, -\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$

Ecuación de la mediana: $(x,y,z) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \lambda(3, -\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$

37.- Los puntos $P\ (0,1,0)$ y $Q\ (-1,1,1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercer vértice S pertenece a la recta r: $\{x = 4, z = 1\}$. Además, la recta que contiene a los puntos P y S es perpendicular a la recta r.

a) Determina las coordenadas de S.

Usamos la ecuación paramétrica para obtener el vector director:

$$r: \begin{Bmatrix} x = 4 \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{Bmatrix} = r: \begin{Bmatrix} x = 4 + 0 \cdot \lambda \\ y = 0 + \lambda \\ z = 1 + 0 \cdot \lambda \end{Bmatrix} \qquad \overrightarrow{dr} = (0, 1, 0)$$

Sabemos que x = 4 y que z = 1 por lo que $S\ (4, a, 1)$

Como $\overrightarrow{dr}$ y $\overrightarrow{PS}$ son perpendiculares hacemos el producto escalar e igualamos a 0 para obtener el valor de a:

$\overrightarrow{dr} \cdot \overrightarrow{PS} = 0 \qquad \overrightarrow{dr} = (0, 1, 0) \qquad \overrightarrow{PS} = (4, a, 1\ ) - (0, 1, 0) = (\ 4, a - 1, 1)$

$\overrightarrow{dr} \cdot \overrightarrow{PS} = 0 \cdot 4 + (a - 1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0 \qquad \overrightarrow{dr} \cdot \overrightarrow{PS} = a - 1 = 0 \qquad a = 1$

Sustituimos en $S\ (4, a, 1)$: $\qquad S\ (4, 1, 1)$

b) Calcula el área del triángulo PQS.

Usamos la fórmula del área del triángulo = $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{SQ}x\overrightarrow{SP}\right|$

Resolvemos: $\overrightarrow{SQ}$ = $(\ -1, 1, 1) - (4, 1, 1) = (-5, 0, 0) \qquad \overrightarrow{SP} = (0, 1, 0) - \ (4, 1, 1) = (-4, 0, -1)$

$$\left(\overrightarrow{SQ}x\overrightarrow{SP}\right) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -5 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5\vec{\jmath} = (0, 5, 0) \qquad \left|\overrightarrow{SQ}x\overrightarrow{SP}\right| = \sqrt{5^2} = 5$$

Área del triángulo = $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{SQ}x\overrightarrow{SP}\right|$ = $\frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}u^2$

38.- Los puntos $A\ (0, -2, 0)$ y $B\ (-1, 0\ , 1)$ son dos vértices de un triángulo isósceles.

a) Obtén las coordenadas del otro vértice C, sabiendo que pertenece a la recta r: $\{y = -5, z = 0\}$.

Usamos la ecuación paramétrica para obtener el vector director:

$$r: \begin{Bmatrix} x = \lambda \\ y = -5 \\ z = 0 \end{Bmatrix} = r: \begin{Bmatrix} x = 0 + \lambda \\ y = -5 + 0 \cdot \lambda \\ z = 0 + 0 \cdot \lambda \end{Bmatrix} \qquad \overrightarrow{dr} = (1, 0, 0)$$

Hallamos el punto medio entre A y B:

$M = \left(\frac{0-1}{2}, \frac{-2+0}{2}, \frac{0+1}{2}\right) \qquad M = \left(\frac{-1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$ (suponemos A y B son los vértices del lado desigual)

Sabemos que y = -5 y que z = 0 por lo que $C\ (a, -5, 0)$

Como $\overrightarrow{AB}$y $\overrightarrow{MC}$ son perpendiculares hacemos el producto escalar e igualamos a 0 para obtener el valor de a:

$\overrightarrow{AB} = (-1, 0\ ,1) - (0, -2, 0) = \ (-1, 2, 1)$

$\overrightarrow{MC} = (a, -5, 0) - \left(\frac{-1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right) = \left(a + \frac{1}{2}, -4, -\ \frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \ \overrightarrow{MC} = \ (-1, 2, 1) \cdot \left(a + \frac{1}{2}, -4, -\ \frac{1}{2}\right) = \left(-a - \frac{1}{2} - 8 - \ \frac{1}{2}\right) \qquad -a = 8 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \qquad a = -9$

Sustituimos en $C\ (a, -5, 0)$: $\qquad C\ (-9, -5, 0) \qquad$ Solución: $C\ (-9, -5, 0)$

b) Halla el valor del ángulo desigual.

El ángulo desigual es el del punto C.

Hallamos el ángulo usando la fórmula: $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|}$

Resolvemos:

$\overrightarrow{CA} = \ (0, -2, 0) - (-8, -5, 0) = (\ 8, 3, 0) \qquad \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{8^2 + \ 3^2 + 0^2} = \sqrt{64 + 9} = \sqrt{73}$

$\overrightarrow{CB} = (-1,0,1) - (-8,-5,0) = (7,5,1) \quad \left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{7^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{49+25+1} = \sqrt{75}$

$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|} \qquad \cos\alpha = \frac{(8,3,0)\cdot(7,5,1)}{\sqrt{73}\cdot\sqrt{75}} \qquad \cos\alpha = \frac{56+15+0}{\sqrt{73}\cdot\sqrt{75}} \qquad \cos\alpha = \frac{71}{\sqrt{73}\cdot\sqrt{75}}$

$$\alpha = \arccos\frac{71}{\sqrt{73}\cdot\sqrt{75}} = 16{,}35°$$

El ángulo desigual es de 16,35°.

AUTOEVALUACIÓN

1. Una ecuación de la recta que pasa por el punto $A(0,1,2)$ y tiene por vector $\overline{v}=(1,1,1)$ es:

(Hacemos las ecuaciones de la recta hasta encontrar una que coincida con una de las opciones)

$(x,y,z)=(0,1,2)+\lambda(1,1,1)$

$\begin{cases} x=0+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases} \begin{cases} \lambda=x \\ \lambda=y-1 \\ \lambda=z-2 \end{cases}$

$x=y-1=z-2$

$\begin{cases} x=y-1 \\ x=z-2 \end{cases} \begin{cases} x-y+1=0 \\ x-z+2=0 \end{cases}$

$$\mathbf{b)}\begin{cases} \mathbf{x-y+1=0} \\ \mathbf{x-z+2=0} \end{cases}$$

2. Una ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3,1,2)$ y $B(2,4,7)$ es:

(Primero hallamos un vector director con los dos puntos y luego hacemos las ecuaciones de la recta con el punto A (izquierda) y el B (derecha) hasta encontrar una que coincida con una de las opciones)

$AB=(2-3,4-1,7-2)=(-1,3,5)$

$(x,y,z)=(3,1,2)+\lambda(-1,3,5)\,;\;(x,y,z)=(2,4,7)+\lambda(-1,3,5)$

$\begin{cases} x=3+(-1)\lambda \\ y=1+3\lambda \\ z=2+5\lambda \end{cases} \begin{cases} \lambda=\frac{x-3}{-1} \\ \lambda=\frac{y-1}{3} \\ \lambda=\frac{z-2}{5} \end{cases};\begin{cases} x=2+(-1)\lambda \\ y=4+3\lambda \\ z=7+5\lambda \end{cases} \begin{cases} \lambda=\frac{x-2}{-1} \\ \lambda=\frac{y-4}{3} \\ \lambda=\frac{z-7}{5} \end{cases}$

$\frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{5}\,;\;\frac{x-2}{-1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-7}{5}$

$$\boldsymbol{c)}\;\frac{\boldsymbol{x-2}}{\mathbf{-1}}=\frac{\boldsymbol{y-4}}{\mathbf{3}}=\frac{\boldsymbol{z-7}}{\mathbf{5}}$$

3. El vector director de la recta $\begin{cases} \boldsymbol{x-y-2=0} \\ \boldsymbol{x-z-1=0} \end{cases}$ es:

$\begin{cases} x=y+2 \\ x=z+1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}$

$$\mathbf{d)(1,1,1)}$$

4. Una ecuación del plano que pasa por el punto $A(3,1,-2)$ y tiene como vectores directores $\overline{u}=(1,2,3)$ y $\overline{v}=(0,1,0)$ es:

$Ya\ que\ las\ opciones\ a\ y\ c\ son\ incorrectas\ por\ presentar\ valores\ que\ no\ coinciden\ con\ el\ punto\ y\ los\ vectores\ directores,\ la\ solución\ es$:

$$\mathbf{b)\ 3x-z=11}$$

5. Una ecuación del plano que pasa por el punto $A(3,1,2)$ y contiene a la recta $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})+\boldsymbol{t}(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1})$ es:

(Hacemos las ecuaciones de la recta con el punto A y el vector director de la recta hasta encontrar una que coincida con una de las opciones).

$(x,y,z)=(3,1,2)+t(0,0,1)$

$\begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=2+t \end{cases}$

$$\mathbf{b)\ x = 3}$$

6. Una ecuación del plano que pasa por el punto A (3,1,2) y el vector normal $\vec{n} = (0, 0, 1)$ es:
- Utilizamos la fórmula;

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 0(x - 3) + 0(y - 1) + 1(z - 2) = 0 \rightarrow z - 2 = 0 \rightarrow z = 2$$

- **La respuesta es la opción b) z = 2**

7. Una ecuación del plano que pasa por los puntos $A(3, 0, 0), B(0, 5, 0), C(0, 0, 7)$ es:
-Calculamos dos vectores y elegimos un punto

$\overrightarrow{A0}(x - 3, y, z)$; $\overrightarrow{AB} \rightarrow (0,5,0) - (3,0,0) \rightarrow (-3,5,0)$ $\overrightarrow{AC} \rightarrow (0,0,7) - (3,0,0) \rightarrow (-3,0,7)$

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -3 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{\imath} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - \vec{\jmath} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow (x - 3) \cdot 35 - (-21y) + 15z$$

$$35x + 21y + 15z - 105 = 0$$

- Como paso final hacemos su m.c.m y dividimos la ecuación entre el mismo y obtendremos la solución;

m.c.m = (105)

$$\boldsymbol{a)\ \frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{7} = 1}$$

8. Los planos $x - z = 3$ y $x + z = 7$ son:
Dividimos los coeficientes;

$$\frac{1}{1} \neq \frac{0}{0} \neq -\frac{1}{1}$$

- Se cumple el caso de la secante por tanto es la c).

9. Las rectas $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{5}$ y $\left.\begin{matrix} x = 3 + 4t \\ y = 1 + 6t \\ z = 2 + 10t \end{matrix}\right\}$ son:

r : $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{5}$ s : $\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-2}{10}$

1º) Tomamos puntos y los vectores de ambas rectas y también tomaremos el vector de ambos puntos:

$P_r(4,1,-2)$ $P_s(3,1,2)$ $\overrightarrow{Vr}\ (2,3,5)$ $\overrightarrow{Vs}\ (4,6,10)$ $\overrightarrow{PrPs}\ (3 - 4\ , 1 - 1\ , 2 + 2) \rightarrow (-1,0,4)$

2º) Calculamos la matriz de coeficientes y obtendremos el rango;

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}^{A} \rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0 \rightarrow R(A) = 1 \\ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 30 = 0 \end{cases}$$

3º) Calculamos el rango de la matriz ampliada;

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 10 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{A^\#} \rightarrow \big(48+0+(-30)\big)-(-30+48)=0 \rightarrow \mathrm{R}(\mathrm{A}^\#)=2$$

Tras tener ambos rangos obtenemos que las rectas son paralelas. b)

10. El plano $\mathbf{x-z=3}$ y la recta $\frac{\mathbf{x-4}}{\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{y-1}}{\mathbf{3}}=\frac{\mathbf{z+2}}{\mathbf{5}}$ son:

1º) Escribimos las ecuaciones implícitas de la recta.

$$\mathrm{r}\begin{cases} \frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{2} \rightarrow 2y-2=3z+6 \ \rightarrow \ 2y-3z-8=0 \\ \frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{3} \rightarrow 2y-2=3x-12 \ \rightarrow 3x-2y+10=0 \end{cases}$$

2º) Calculamos la matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \ (0+0+0)—6+(-6)=12 \rightarrow \mathrm{R(A)}=3$$

·Como R (A) = 3 esto quiere decir que el rango de la matriz ampliada también será R ($A^\#$)= 3 y por tanto la recta será secante al plano.

R (A) = R($A^\#$) = 3 → Recta secante al plano.