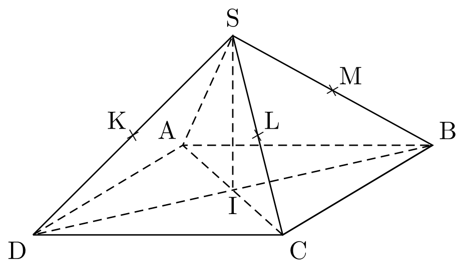
DM 04 - À rendre le 11 décembre au plus tard

Exercice 1 (★)



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.

Le point I est le centre du carré ABCD.

On suppose que : IC = IB = IS = 1.

Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. (DK) et (SD) sont sécantes (et même confondues) donc coplanaires, (AS) et IC sont dans le plan (SAC) donc coplanaires, (AC) et (SB) ne sont pas coplanaires car B n'est pas dans le plan (SAC), (LM) et (AD) sont parallèles donc coplanaires.
2. $I(0;0;0)$, $A(-1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(1;0;0)$, $D(0;-1;0)$, $S(0;0;1)$
3. On a $K(0;-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ et $L(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2})$ donc $N(\frac{1}{4};-\frac{1}{4};\frac{1}{2})$
4. $\overrightarrow{AS}(1;0;1)$
5. $(AS) : \begin{cases} x = -1+t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$
6. $\overrightarrow{AC}(2{,}0{,}0)$ donc $(SAC) : \begin{cases} x = -1+t+2s \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad , s,t \in \mathbb{R}$ (on pourrait aussi prendre

   $(SAC) : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = s \end{cases} \quad , s,t \in \mathbb{R}$)

Exercice 2 (★)

Partie A Calculer les dérivées des fonctions suivantes

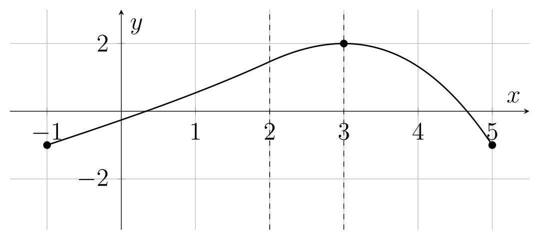
1. $f'(x) = 70x(5x^2+1)^6$
2. $g'(x) = -\dfrac{70x(5x^2+1)^6}{(5x^2+1)^{14}} = -\dfrac{70x}{(5x^2+1)^8}$
3. $h'(x) = \dfrac{4x^3+3x^2}{2\sqrt{x^4+x^3+2}}$
4. $k'(x) = -\dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3+1}(x^2+3x+1)}$
5. $l'(x) = \dfrac{xe^{x^2+1}}{\sqrt{e^{x^2+1}}} = x\sqrt{e^{x^2+1}}$

Partie B

1. Étudier la convexité des fonctions suivantes et préciser les éventuels points d'inflexion
   (a) $f(x) = -2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$
   f est définie sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = -6x^2 - 6x - 12$. On peut directement donner les variations de f' (second degré) qui est croissante sur $]-\infty;-\frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2};+\infty[$ donc f est convexe sur $]-\infty;-\frac{1}{2}]$ et concave sur $[\frac{1}{2};+\infty[$ avec un point d'inflexion en $\frac{1}{2}$
   (b) On a $g'(x) = e^x + e^{-x}$ et $g''(x) = e^x - e^{-x} = g(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

   Donc g est concave sur $\mathbb{R}^-$, convexe sur $\mathbb{R}^+$ et admet un point d'inflexion en 0.
   (c) C'est l'exemple 11 du cours.



2.

Exercice 3 (★)

On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4}$

On note f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$

1. (a) $f'(x) = \dfrac{3x + 12 - 3x - 2}{(x+4)^2} = \dfrac{10}{(x+4)^2}$

   f est donc croissante sur $[0;1]$, $f(0) = \dfrac{1}{2}$, $f(1) = 1$ donc pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \in [0;1]$

   (b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$: « $u_n \in [0;1]$ » est vraie

   Initialisation $\mathcal{P}_0$ est vraie car $u_0 \in [0;1]$

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose P_n vraie, on a donc $u_n \in [0;1]$ donc $f(u_n) \in [0;1]$ c'est à dire $u_{n+1} \in [0;1]$ donc P_{n+1} est vraie.

   ConclusionLa propriété est vraie au rang $n = 0$ et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. $u_0 = 0; u_1 = \dfrac{1}{2}; u_2 = \dfrac{7}{9}; u_3 = \dfrac{39}{43}; u_4 = \dfrac{203}{211}$. La suite semble être croissante et tendre vers 1.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} - u_n = \dfrac{3u_n + 2 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$

   (b) $u_n \in [0;1]$ donc $(1 - u_n) \geqslant 0$, $u_n + 2 \geqslant 0$; $u_n + 4 \geqslant 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc u est croissante.

4. La suite u est croissante et majorée (par 1), elle est donc convergente.

5. La fonction f est continue, donc la limite de u est solution de l'équation $f(x) = x$. On a donc $x = \dfrac{3x+2}{x+4}$, donc $x^2 + 4x - 3x - 2 = 0$, c'est à dire $x^2 + x - 2 = 0$. Les solutions sont 1 et -2 mais seul 1 est dans $[0;1]$ donc la suite converge bien vers 1.

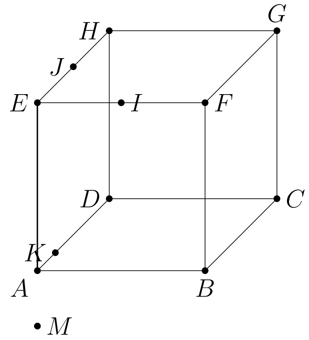
Exercice 4 (★★)

Les deux parties sont indépendantes.

On considère un cube $ABCDEFGH$

Partie A

DM 04 Tle G - gr1

1. 

2. On munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

   (a) Un vecteur directeur de la droite (AE) est $\overrightarrow{AE}(0;0;1)$

   (b) Dans le plan (FHK), on peut choisir par exemple les vecteurs : $\overrightarrow{FH}(-1;1;0)$ et $\overrightarrow{FK}(-1;\frac{1}{4};-1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment donc un couple de vecteurs directeurs du plan (FHK).

   (c) Pour que la droite (AE) soit parallèle au plan (FHK), il faudrait que son vecteur directeur $\overrightarrow{AE}$ soit combinaison linéaire de deux vecteurs directeurs du plan, par exemple $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FK}$.

   Autrement dit, il devrait exister deux réels α et β tels que :

   $$\alpha\overrightarrow{FH} + \beta\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{AE}.$$

   c'est à dire tels que

   $$\begin{cases} -\alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \frac{1}{4}\beta = 0 \\ -\beta = 1 \end{cases}$$

   La troisième équation donne $\beta = -1$.

   La deuxième équation donne alors :

   $$\alpha + \tfrac{1}{4}(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tfrac{1}{4}.$$

   En remplaçant dans la première équation :

   $$-\tfrac{1}{4} - (-1) = \tfrac{3}{4} \neq 0.$$

   Le système n'admet donc aucune solution.

   Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{AE}$ n'est pas combinaison linéaire de $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FK}$, ce qui montre que la droite (AE) n'est pas parallèle au plan (FHK).

3. Une équation paramétrique de la droite (AE) est $M(t) = (0; 0; t), ; t \in \mathbb{R}$.
   Une équation du plan (FHK) s'écrit : $M = F + a\overrightarrow{FH} + b\overrightarrow{FK}, a,b \in \mathbb{R}$
   On obtient le système :
   $$\begin{cases} 1 - a - b = 0 \; a + \frac{1}{4}b = 0 \; 1 - b = t \end{cases}$$
   On a donc $a = -\frac{1}{4}b$ et $1 + \frac{1}{4}b - b = 0$ donc $b = \frac{4}{3}$
   Donc $a = -\frac{1}{3}$ et $t = 1 - b = -\frac{1}{3}$.
   Le point d'intersection est donc $M\left(0; 0; -\frac{1}{3}\right)$.

Partie B Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier.
$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère.
$\mathcal{P}$ est le plan qui passe par $A(1; 0; -2)$ de vecteurs $\vec{u}(-1; 0; -3)$ et $\vec{v}(0; 1; 2)$

1. Une équation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ est $\begin{cases} x = 1 - r \\ y = s \\ z = -2 - 3r + 2s \end{cases}, r, s \in \mathbb{R}$.
   On obtient le système $\begin{cases} -1 = 1 - r \\ -1 = s \\ 10 = -2 - 3r + 2s \end{cases}$, la première équation donne $r = -2$, la seconde $s = -1$ mais cela ne colle pas avec la troisième car $10 \neq -10$: $\boxed{\text{Affirmation 1 Fausse}}$
2. La droite d passe par $B(0; -1; 3)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{w}(1; -2; 4)$.
   On a $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}$ donc le vecteur directeur de la droite est combinaison linéaire de vecteurs du plan $\mathcal{P}$.
   La droite d est donc parallèle au plan $\mathcal{P}$. $\boxed{\text{Affirmation 2 Vraie}}$
3. On a $\overrightarrow{u}' = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v}' = 3\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}$ donc les vecteurs directeurs des deux plans sont donc coplanaires.
   Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles. $\boxed{\text{Affirmation 3 Vraie}}$

Exercice 5 (★★) 1. — Déterminons la limite quand x tend vers $-\infty$:
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x\left(e^{-x} + 2\right) - 1$.
Avec $y = -x$, par composition, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{y \to +\infty} e^{y} = +\infty$.
Donc, par limite de la somme : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} + 2 = +\infty$.
Par limite du produit, il vient : $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(e^{x} + 2\right) = -\infty$.
Enfin, par limite de la somme : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(e^{-x} + 2\right) - 1 = -\infty$.

— Déterminons la limite quand x tend vers $+\infty$:
D'après la propriété des croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$.

Par limite de l'inverse : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$.
Par ailleurs, 2 étant positif : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 1 = +\infty$.
Par limite de la somme on en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} + 2x - 1 = +\infty$.

2. On a admis que la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. f est la somme d'une fonction affine et d'un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, on a :
   $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times \left(-e^{-x}\right) + 2 = (1 - x)e^{-x} + 2$.
3. On a admis que f' est dérivable :
   Pour tout réel x, on a :
   $f''(x) = -1 \times e^{-x} + (1 - x) \times \left(-e^{-x}\right) + 0 = \big(-1 - (1 - x)\big)e^{-x} = (x - 2)e^{-x}$.
   On arrive bien à l'expression annoncée.
4. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, donc $f''(x)$ est du signe de $(x - 2)$.
   - Sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2]$, $(x - 2) \leqslant 0$, donc f'' est à valeurs négatives et donc f est **concave** sur $]-\infty\,;\,2]$.
   - Sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$, $(x - 2) \geqslant 0$, donc f'' est à valeurs positives et donc f est **convexe** sur $[2\,;\,+\infty[$.
5. - Sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2]$, f est concave, donc f' est décroissante.
   - Sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$, f est convexe, donc f' est croissante.

   f' atteindra donc un minimum pour $x = 2$. On a :
   $f'(2) = (1 - 2)e^{-2} + 2 = 2 - e^{-2}$
   On peut donc établir le tableau de variations (sans limites, car non attendues ici) de f'.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f'		$\searrow$	$2 - e^{-2}$	$\nearrow$	

6. Comme on a $-2 < 0$, on en déduit, par croissance de la fonction exponentielle : $e^{-2} \leqslant e^{0}$.
   $$\begin{aligned} e^{-2} \leqslant e^{0} &\implies e^{-2} \leqslant 1 \\ &\implies -e^{-2} \geqslant -1 \quad \text{car } -1 < 0 \\ &\implies 2 - e^{-2} \geqslant 2 - 1 \\ &\implies 2 - e^{-2} \geqslant 1 \end{aligned}$$
   Le minimum de f' est donc un réel supérieur à 1, donc strictement positif.

On en déduit que f' est donc une fonction à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, en conséquence, f est effectivement une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

7. f est une fonction **continue** (car dérivable) et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. De plus 0 est une **valeur intermédiaire** entre $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
   En vertu du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, on en déduit qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
   Par exploration à la calculatrice, on peut donner pour α l'encadrement au centième près suivant : $0{,}37 < \alpha < 0{,}38$.
8. Pour tout x réel, on a :
   $f(x) - (2x - 1) = xe^{-x}$.
   Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, on en déduit que cette différence entre l'ordonnée $f(x)$ d'un point sur C_f et celle $2x - 1$ du point partageant la même abscisse sur Δ est du signe de x.
   Sur $\mathbb{R}^-$, la différence est donc négative, et on en déduit que la courbe C_f est **au-dessous** de la droite Δ.
   Sur $\mathbb{R}^+$, au contraire, la différence est positive, et donc la courbe C_f est **au-dessus** de la droite Δ.

Exercice 6 (★★★)

Partie A : Barycentre de deux points pondérés

A et B sont deux points de l'espace et a et b deux nombres tels que $a + b \neq 0$

1. Soit G tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$. On a $a\overrightarrow{GA} + b(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0}$ c'est à dire $(a+b)\overrightarrow{GA} = -b\overrightarrow{AB}$, donc comme $a + b \neq 0$, $\overrightarrow{GA} = -\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ ce qui définit bien G de façon unique
   G est alors appelé barycentre des points pondérés $(A; a)$ et $(B; b)$
2. Soit G tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$, soit $k \neq 0$. On a $ka\overrightarrow{GA} + kb\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ avec $ka + kb = 0$ donc G est bien le barycentre de $(A; ka)$ et $(B; kb)$
3. Lorsque $a = b$, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ donc G est le milieu de $[AB]$

Partie B : Barycentre de trois points pondérés

1. A, B, C sont trois points de l'espace et a,b,c tels que $a + b + c \neq 0$, et G tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ On a alors $a\overrightarrow{GA} + b(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + c(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{0}$ c'est à dire $(a + b + c)\overrightarrow{GA} = b\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{CA}$ et comme $a + b + c \neq 0$, $\overrightarrow{GA} = \dfrac{b\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{CA}}{a+b+c}$ ce qui définit bien G de façon unique.
2. Soit G tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, et H tel que $a\overrightarrow{HA} + b\overrightarrow{HB} = 0$. On a $a(\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HA})+b(\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HB})+c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ c'est à dire $(a+b)\overrightarrow{GH}+a\overrightarrow{HA}+b\overrightarrow{HB}+c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, or $a\overrightarrow{HA} + b\overrightarrow{HB} = 0$ donc $(a + b)\overrightarrow{GH} + c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ et G est bien le barycentre des points $(H, a + b)$ et (C, c).

3. On trouve $G(\dfrac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}; \dfrac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}; \dfrac{az_A + bz_B + cz_C}{a+b+c})$

Partie C : Fonction vectorielle de Leibniz

A, B, C sont trois points de l'espace et a,b,c des réels.

On considère f la fonction qui a tout point M de l'espace associe le vecteur $\overrightarrow{f(M)} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$

1. On suppose que $a+b+c \neq 0$, et on note G le barycentre des points (A,a), (B,b), (C,c).
   Soit M un point de l'espace, $\overrightarrow{f(M)} = a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC} = a(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})+b(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}) + c(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) = (a + b + c)\overrightarrow{MG} + a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = (a + b + c)\overrightarrow{MG}$
2. Dans cette question, on suppose $a + b + c = 0$. Soient M et N deux points de l'espace, $\overrightarrow{f(M)} - \overrightarrow{f(N)} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} - a\overrightarrow{NA} - b\overrightarrow{NB} - c\overrightarrow{NC} = a\overrightarrow{MN} + b\overrightarrow{MN} + c\overrightarrow{MN} = \vec{0}$. La fonction f est donc constante.
3. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $3\overrightarrow{MG}$ sont colinéaires c'est à dire si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{MG}$ sont colinéaires c'est à dire si M est sur la droite passant par G (isobarycentre de A,B,C) et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$
4. On a $\| 2\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC} \| = 3$ si et seulement si $\| 2\overrightarrow{NG} \| = 3$ où G est le barycentre de $(A; 2)$,$(B; 1)$,$(C; -1)$, c'est à dire si N est sur le cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{2}$
5. $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M car $3 - 1 - 2 = 0$ donc la fonction vectorielle de Leibniz est constante

Exercice 7 (★★★)

1. $f(0) = f(0 + 0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) = 0$ donc $f(x) = -f(-x)$ donc f est impaire
   Dans la suite de l'exercice, on note $\lambda = f(1)$
3. On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, la propriété$\mathcal{P}n$: "$f(x) = \lambda x$" est vraie.
   Initialisation $f(0) = 0$ donc $\mathcal{P}_0$ vraie.
   HéréditéSoit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}_n$. On a donc $f(n+1) = f(n)+f(1) = n\lambda+\lambda = (n + 1)\lambda$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie
   ConclusionLa propriété est vraie en $n = 0$ et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$
4. Par imparité, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = \lambda n$
5. On a $f(1) = f(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \cdots + \dfrac{1}{n})$ donc $nf(\dfrac{1}{n}) = \lambda$ donc$f(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{\lambda}{n}$
6. Soit $\forall r \in \mathbb{Q}$. Si $r > 0$, on a $r = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, et donc $f(r) = f(\dfrac{p}{q}) = f(\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q} + \cdots + \dfrac{1}{q}) = f(\dfrac{1}{q}) + \cdots + f(\dfrac{1}{q}) = pf(\dfrac{1}{q}) = p\dfrac{\lambda}{q} = \lambda r$
   Si $r < 0$ alors par imparité on trouve aussi $f(r) = \lambda r$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite r définie par $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ (c'est bien une suite de rationnels qui converge vers x)
   On a $f(r_n) = \lambda r_n$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(r_n) = f(x)$ (par continuité de f. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} f(r_n) = \lim\limits_{x \to +\infty} \lambda r_n = \lambda x$ don $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x$

Exercice 8 (★★★, Démonstration TVI)
Le but de cet exercice est de démontrer le Théorème des Valeurs Intermédiaires.

On considère une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **continue** sur l'intervalle $[a,b]$. On suppose que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

On cherche à montrer qu'il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

Dans cet exercice, on construit ce réel c à l'aide d'une méthode de **dichotomie**.

1. On pose $m_0 = \dfrac{a+b}{2}$.
   a) Si $f(m_0) \geq 0$ alors on considère $[a,m_0]$, sinon $[m_0,b]$
   b) On prend ou bien $a_1 = a$ et $b_1 = m$, ou bien $a_1 = m$ et $b_1 = b$

2. On a initialisé avec $a_0 = a$, $b_0 = b$
   Pour l'hérédité, on considère $m_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$
   Si $f(m_n) \leqslant 0$, alors on considère $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$ et on a bien les propriétés voulues.
   Si $f(m_n) \geqslant 0$, alors on considère $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$ et on a bien les propriétés voulues également.
   On a donc construit par récurrence des segments $[a_n; b_n]$ tels que
   - $f(a_n) \leq 0$ et $f(b_n) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   - $[a_{n+1},b_{n+1}] \subset [a_n,b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   - $b_n - a_n$ tend vers 0
3. Les suites a_n et b_n sont adjacentes donc elles convergent vers une même limite c
4. f est continue donc $\lim f(a_n) = f(c)$ et $\lim f(b_n) = f(c)$. On a $\lim f(a_n) \leq 0$ et $\lim f(b_n) \geq 0$ donc $f(c) = 0$
5. On considère $g(x) = f(x) - k$, d'après ce qu'on vient de prouver il existe c tel que $g(c) = 0$ et donc $f(c) = k$