DM 05 - À rendre le 15 janvier au plus tard

- Le DM est facultatif. Il est à rendre le 15/01 au plus tard. Il est possible de le rendre plus tôt et de le rendre plusieurs fois afin de corriger ses erreurs et d'améliorer sa note.
- Vous avez du temps, merci de soigner la présentation (**Une copie trop peu soignée ne sera pas corrigée.**) et la rédaction !
- Il est permis de chercher à plusieurs, mais chacun devra rédiger sa copie seul avec ses propres mots. Deux copies identiques n'obtiendront aucune note.
- Un DM = (au moins) 3 exercices (je prendrai en compte les 3 mieux réussis).
- Si votre moyenne T1 est ≥ 12, le total des étoiles des trois exercices doit être $\geqslant 5$, si elle est ≥ 15, le total des étoiles des trois exercices traités doit être $\geqslant 7$

Exercice 1 (★)

Les deux parties sont indépendantes

Partie A Simplifier les expressions suivantes

1. $A = \ln(3) + \ln(27) - \ln(81)$
2. $B = \ln(x+4) - \ln(4x + x^2)$ (où $x \in \mathbb{R}^{+*}$))
3. $C = \dfrac{e^{1+\ln(2)}}{e^{1+\ln(3)}}$
4. $D = e^{\ln(x-1)+\ln(x)}$ (où $x > 1$)

Partie B

1. Résoudre les équations et inéquations suivantes, après avoir précisé sur quel intervalle elles ont un sens.
   (a) $\dfrac{e^{3x+4}}{e^{x-7}} = 4$
   (b) $\ln(x^2 + 6x + 10) = 0$
   (c) $\ln(x^2 + 1) \geqslant 1$
   (d) $\ln(\sqrt{x}) = -1$
   (e) $\ln(3e^x - 4) < 0$
   (f) $(1 + \ln(2x))(2 - \ln(x)) \leqslant 0$
2. Déterminer le plus petit entier n tel que
   (a) $2^n \geq 10^8$
   (b) $(\frac{1}{5})^n leq 10^{-3}$

Exercice 2 (★)

1. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes sur les intervalles donnés :
   (a) $f(x) = \ln(\ln(x))$ sur $]1; +\infty[$
   (b) $g(x) = x\ln(1 + e^x)$ sur $\mathbb{R}$
   (c) $h(x) = \ln(\dfrac{x+5}{x-1}$ sur $]1; +\infty[$
   (d) $k(x) = \ln(\sqrt{1-x})$ sur $]-\infty; 1[$
   (e) $l(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}$ sur $]0; e[$
2. Déterminer les limites suivantes
   (a) $f(x) = \dfrac{3+\ln(x)}{\ln(x)}$ en 1
   (b) $f(x) = \ln(x) - x^2$ en O et $+\infty$
   (c) $f(x) = (e^x - 1)\ln(e^x - 1)$ en 0 et $+\infty$
   (d) $f(x) = (\ln(x))^2 - \ln(x)$ en $+\infty$

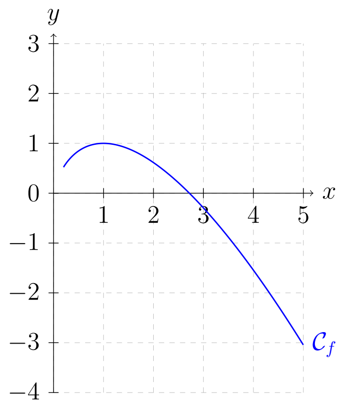
Exercice 3 (★)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$f(x) = x(1 - \ln(x))$$

et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

1. Étudier le signe de f
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
3. Déterminer la dérivée de f puis dresser le tableau de variation de f
4. Étudier la convexité de f
5. Soit $a > 0$. On considère la tangente $\mathcal{T}_a$ au point d'abscisse a
   (a) Déterminer l'équation de $\mathcal{T}_a$
   (b) Déterminer le point d'intersection de $\mathcal{T}_a$ avec l'axe des ordonnées
   (c) Construire $\mathcal{T}_2$ sur la figure ci-dessous



Exercice 4 (★★)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point :

1. **Affirmation :** La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est bornée.
2. **Affirmation :** Toute suite bornée est convergente.
3. **Affirmation :** Toute suite croissante tend vers $+\infty$.
4. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$.
   Affirmation : La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3\ ;\ 1]$.
5. On considère la fonction **mystere** définie ci-dessous qui prend une liste L de nombres en paramètre.
   On rappelle que `len`(L) renvoie la longueur, c'est-à-dire le nombre d'éléments de la liste L.

```
def mystere(L) :
    M = L[0]
    # On initialise M avec le premier élément de la liste L
    for i in range(len(L)) :
      if L[i] > M :
        M = L[i]
    return M
```

   Affirmation : L'exécution de **mystere**([2, 3, 7,0 ,6, 3, 2, 0, 5]) renvoie 7.
6. **Affirmation :** Une variable aléatoire X suit une loi binomiale avec $E(X) = 36$ et $\sigma(X) = 3$. Alors $P(X = 29) \simeq 0{,}01$

7. **Affirmation :** Si $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(200; 0{,}4)$ alors $P(X \geqslant 90) < P(X \leqslant 75)$

Exercice 5 (★★)

Partie 1

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2\ln x}{x}.$$

1. On note g' la dérivée de g. Démontrer que pour tout réel x strictement positif :

$$g'(x) = \frac{2 - 2\ln x}{x^2}.$$

2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$:

x	0		1	e	$+\infty$
Variations de g	‖ $-\infty$	↗	0	$\frac{2}{\mathrm{e}}$ ↘	0

   Justifier les informations suivantes lues dans ce tableau :
   (a) la valeur $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$;
   (b) les variations de la fonction g sur son ensemble de définition ;
   (c) les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
3. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = [\ln(x)]^2.$$

Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Démontrer que sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, la fonction g est la dérivée de la fonction f.
2. À l'aide de la partie 1, étudier :
   (a) la convexité de la fonction f ;
   (b) les variations de la fonction f.

3. (a) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e.
   (b) En déduire que, pour tout réel x dans $]0\ ;\ \mathrm{e}]$:

$$[\ln(x)]^2 \geqslant \frac{2}{\mathrm{e}}x - 1.$$

Exercice 6 (★★)
Un des objectifs de cet exercice est de déterminer une approximation du nombre réel ln(2), en utilisant une des méthodes du mathématicien anglais Henry Briggs au XVIe siècle.

On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

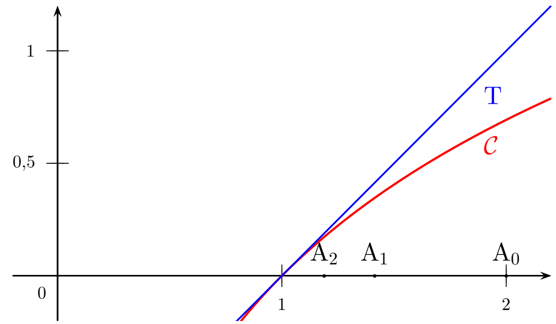
Partie A

1. (a) Donner la valeur exacte de u_1 et de u_2.
   (b) Émettre une conjecture, à l'aide de la calculatrice, sur le sens de variation et la limite éventuelle de la suite.
2. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   (c) Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = x$.
   (d) Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n).

Partie B

On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.
2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction ln et la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
   Une équation de la droite T est $y = x - 1$.
   Les points A_0, A_1, A_2 ont pour abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 et pour ordonnée 0.



On décide de prendre $x - 1$ comme approximation de $\ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0{,}99\ ;\ 1{,}01[$.

   (a) Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel k tel que u_k appartienne à l'intervalle $]0{,}99\ ;\ 1{,}01[$ et donner une valeur approchée de u_k à 10^{-5} près.
   (b) En déduire une approximation de $\ln(u_k)$.
   (c) Déduire des questions **1. c.** et **2. b.** de la **partie B** une approximation de ln(2).

3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.
   Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que l'appel `Briggs(a)` renvoie une approximation de $\ln(a)$.
   On rappelle que l'instruction en langage Python `sqrt(a)` correspond à $\sqrt{a}$.

```
FROM math IMPORT*
DEF Briggs(a):
  n = 0
  WHILE a >= 1.01:
    a = SQRT(a)
    n = n+1
  L =...
RETURN L
```

Exercice 7 (★★★(Retour sur la série harmonique))
Dans cet exercice, on considère la série harmonique définie par $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On l'a déjà étudiée au DM 2, mais on va démontrer différemment sa divergence, et découvrir la constante d'Euler-Mascheroni.

Partie A : divergence de h_n

1. Montrer que $\forall x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(x+1) \leqslant x$ (cf exercice 99)

2. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant h_n \leqslant \ln(n) + 1$
4. En déduire que h est divergente
5. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{h_n}{\ln n} = 1$. On dit que h et ln sont équivalentes en $+\infty$ et on note $h_n \sim_{+\infty} \ln(n)$(cela traduit le fait qu'elles divergent vers $+\infty$ "à la même vitesse", ici assez lentement)

Partie B : la constante d'Euler-Mascheroni

1. À l'aide de la calculatrice, conjecture le comportement de $h_n - \ln(n)$ en $+\infty$

   On définit sur $\mathbb{N}^*$ les suites u et v par $u_n = h_n - \ln(n)$ et $v_n = h_n - \ln(n+1)$.
   On rappelle le théorème des suites adjacentes (prouvé au bonus du DS1 et utilisé au DM4 pour prouver le TVI) :
   Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si et seulement si
   - (u_n) est croissante
   - (v_n) est décroissante
   - La suite (w_n) définie par $w_n = u_n - v_n$ converge vers 0.

   Théorème

   Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

2. Montrer que u et v sont adjacentes. On note γ leur limite commune.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n - \gamma \leqslant \frac{1}{n}$
4. Donner une valeur approchée de γ à 10^{-3} près

Exercice 8 (★★★(Valeur approchée de e))
Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = (1 + \frac{x}{n})^n$$

1. Montrer que $\forall x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(x+1) \leqslant x$ (on ne le re-montrera évidemment pas si on a fait l'exercice précédent !)
2. On considère la suite v définie par $v_n = \ln(u_n)$. Déterminer la limite de u en $+\infty$ de v_n
3. En déduire la limite de u
4. Écrire une fonction Python qui donne une valeur approchée de e^x. La tester pour $x = 1$ et $n = 10$ puis pour $x = 1$ et $n = 1000$. Est-ce que la méthode pour obtenir une approximation de e semble efficace ?

Exercice 9 (★★★(Inégalité arithmético-géométrique))
On rappelle le résultat démontré à l'exercice 76 page 158 (chapitre 6) [1].

Propriété

Soit f une fonction convexe sur I, et $a,b \in I$. Alors

$$f(ta + (1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b)$$

Étant donné $n \geq 2$ réels strictement positifs $a_1, \ldots, a_n$, on définit les moyennes arithmétiques $\overline{a}$ et géométriques $\overline{g}$ par

$$\overline{a} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

et

$$\overline{g} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}$$

1. Soit f une fonction convexe sur I, soit $n \geq 2$, et soient $a_1, \ldots, a_n \in I$. Montrer que $f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$
2. Préférez-vous que je calcule votre moyenne du trimestre selon la moyenne arithmétique ou la moyenne géométrique ? (on justifiera évidemment la réponse, et on pourra penser au fait que si f est concave, $-f$ est convexe).

1. On n'hésitera pas à faire cet exercice si ce n'est déjà fait, le corrigé est disponible sur la feuille de corrigés chapitre 6 donc pas besoin de le rendre (mais vous pouvez me poser des questions si besoin)