Exercices

Exercice 1

1. Il existe $x \in I$ tel que $f(x) = 0$
2. Pour tous $x_1, x_2 \in I$, $f(x_1) = f(x_2)$
3. Il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $f(x_1) \neq f(x_2)$
4. Pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(x_m)$
5. Pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(x_M)$
6. Pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$
7. Pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $x \in I$ tel que $f(x) > M$

Exercice 2

1. Faux, pour $x = -1$, $\sqrt{(-1)^2} = 1$ et non -1
2. Vrai, on peut prendre $x = 1$
3. Faux, par exemple $x = -3$
4. Faux, $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

Exercice 3

Montrons par récurrence la propriété P_n : u_n est bien défini et $u_n > 0$

- *Initialisation* pour $n = 0$, $u_0 = 2$ est bien défini et $u_0 > 0$
- *Hérédité* Soit $n \in \mathbb{N}$ On suppose que P_n : u_n est bien défini et $u_n > 0$ est vraie
  On a $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$. Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$, donc $1 + u_n > 1 > 0$ donc en particulier $1 + u_n \neq 0$ donc u_{n+1} est bien défini. Par ailleurs $u_n > 0$ et $1 + u_n > 0$ donc $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n} > 0$
- *Conclusion* La propriété étant vraie pour $n = 0$ et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 4

- *Initialisation* pour $n = 0$, $u_0 = a = a + 0 \times r$
- *Hérédité* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que P_n : $u_n = a + nr$. est vraie On a $u_{n+1} = u_n + r = a + nr + r = a + (n+1)r$

- *Conclusion* La propriété étant vraie pour $n = 0$ et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 5

- *Initialisation* pour $n = 0$, $u_0 = 3 = 7 \times 2^0 - 4$
- *Hérédité* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P_n : u_n = 7 \times 2^n - 4$. est vraie On a $u_{n+1} = 2u_n + 4 = 2(7 \times 2^n - 4) + 4 = 7 \times 2^{n+1} - 8 + 4 = 7 \times 2^{n+1} - 4$
- *Conclusion* La propriété étant vraie pour $n = 0$ et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 6

- *Initialisation* pour $n = 0$, $u_0 = 1 = 2^1 - 1$
- *Hérédité* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P_n : u_n = 2^{n+1} - 1$ est vraie On a $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^{n+1} - 1) + 1 = 2^{n+2} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$
- *Conclusion* La propriété étant vraie pour $n = 0$ et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 7

- *Initialisation* pour $n = 0$, $v_0 = 0$ et $0 \leq v_n \leq 4$
- *Hérédité* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P_n : v_n$ est bien définie et $0 \leq v_n \leq 4$ On a $8 \leq 0{,}5v_n + 8 \leq 10$ donc $v_{n+1} = \sqrt{0{,}5v_n + 8}$ est bien défini et $0 \leq \sqrt{8} \leq v_{n+1} \leq \sqrt{10} \leq 4$.
- *Conclusion* La propriété étant vraie pour $n = 0$ et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 8

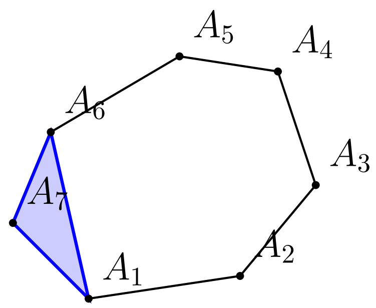
- *Initialisation* pour $n = 1$, $1^2 = \dfrac{1 \times 2 \times 3}{6}$ donc P_1 est vraie.
- *Hérédité* On suppose que $P_n : 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est vraie pour un certain n (Hypothèse de Récurrence).
  Alors $1 + 2 + \cdots + (n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)(\dfrac{n(2n+1)}{6} + n + 1) = (n+1)\dfrac{n(2n+1) + 6n + 6}{6} = (n+1)\dfrac{2n^2 + 7n + 6}{6}$ et $(2n+3)(n+2) = 2n^2 + 3n + 4n + 6 = 2n^2 + 7n + 6$ donc $1 + 2 + \cdots + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3}{6}$ et donc P_{n+1} est vraie.
- *Conclusion* La propriété étant héréditaire pour $n \geq 1$ et vraie pour $n = 1$, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 9
Montrons que pour tout $n \geq 1$, la propriété $(e^{nx})' = ne^{nx}$ est vraie

- *Initialisation* pour $n = 1$, $(e^x)' = e^x$
- *Hérédité* Soit $n \geq 1$. On a $(e^{nx})' = ne^{nx}$.
  On a $(e^{(n+1)x})' = (e^x e^{nx})' = e^x ne^{nx} + e^x e^{nx} = (n+1)e^x e^{nx} = (n+1)e^{(n+1)x}$
- *Conclusion* La propriété étant héréditaire pour $n \geq 1$ et vraie pour $n = 1$, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 10
Montrons par récurrence que la propriété P_n : "la somme des angles d'un polygone convexe à n sommets est $(n-2)\pi$" est vraie pour tout $n \geq 3$

- *Initialisation* La somme des angles d'un triangle est π
- *Hérédité* Soit $n \geq 3$. On suppose P_n vraie.
  Considérons un polygone à $n+1$ côtés $A_1A_2 \ldots An+1$



  Si on considère le polygone $A_1 \ldots A_n$,par hypothèse de récurrence la somme de ses angles est $(n-2)\pi$. Et la somme des angles du triangle $A_1A_nA_{n+1}$ est π. Donc la somme des angles du polygone$A_1A_2 \ldots An+1$ est $(n-2)\pi + \pi = (n-1)\pi$
- *Conclusion* La propriété étant héréditaire pour $n \geq 3$ et vraie pour $n = 3$, elle est donc vraie pour tout $n \geq 3$.

Exercice 11
Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante et soit $a \in \mathbb{R}$, et soit $u$la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

On fait une disjonction de cas.

Cas $u_1 \geq u_0$ Montrons par récurrence que dans ce cas, la propriété $P_n : u_{n+1} \geq u_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

- *Initialisation* pour $n = 1$, $u_1 \geq u_0$
- *Hérédité* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie. On a donc $u_{n+1} \geq u_n$. Or f est croissante donc $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$, c'est à dire $u_{n+2} \geq u_{n+1}$: P_{n+1} est vraie.
- *Conclusion* La propriété étant vraie au rang 0 et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in N$

On a donc montré que la suite était croissante

Cas $u_1 < u_0$ On procède de la même façon pour montrer que la suite est décroissante.
Dans tous les cas, la suite est donc monotone.