DM 02 - Suites ; Probas – Corrigé

Exercice 1 (★d'après Bac, années diverses)

- **Affirmation 1** Faux. $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ est décroissante et minorée par 0 mais converge par 1
- **Affirmation 2** Vrai, on a terme(4) qui renvoie 1+0+1+2+3=7 (for i in range(N) fait prendre les valeurs 0 à $n-1$ à i).
- **Affirmation 3** Faux, par exemple $(-1)^n$
- **Affirmation 4** Vrai, $-1 \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n+1} \leqslant 1$
- On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \dfrac{u_n}{1+2u_n} \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

Affirmation 5 : Vrai. $u_1 = \dfrac{1}{1+2} = \dfrac{1}{3}$, $u_2 = \dfrac{\frac{1}{3}}{1+2\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \dfrac{1}{5}$, $u_3 = \dfrac{\frac{1}{5}}{1+2\frac{1}{5}} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}} = \dfrac{1}{7}$, $u_4 = \dfrac{\frac{1}{7}}{1+2\frac{1}{7}} = \dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{9}{7}} = \dfrac{1}{9}$

Affirmation 6 : Vrai. On montre la propriété P_n « Pour tout entier naturel $n, \quad u_n = \dfrac{1}{2n+1}$. » par récurrence

- **Initialisation** $u_0 = 1$ et $\dfrac{1}{2\times 0+1} = 1 = u_0$
- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose P_n. On a $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n} = \dfrac{\frac{1}{2n+1}}{1+2\frac{1}{2n+1}} = \dfrac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{2n+1+2}{2n+1}} = \dfrac{1}{2n+3}$ donc P_{n+1} est vraie
- **Conclusion** La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Affirmation 7 : Faux. Elle tend vers 0 donc à partir d'un certain rang tous les termes sont plus petits que 10^{-10}

Exercice 2 (★d'après Bac 2024)

1. Le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages est :
   $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30.$
2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

DM 02 Tle G - gr1

(a) $S_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = \big(u_1 + u_2 + u_3 + u_4\big) + u_5 30 + 5^2 = 55$
Le nombre total de boules d'une pyramide de 5 étages est : $S_5 = 55$.

(b)
```
def pyramide(n) :
    S = 0
    for i in range(1, n+1) :
        S = S + i**2
    return S
```

(c) Pour tout entier naturel n :

- $$\begin{aligned}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \frac{(n+1)(2n^2+n)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{8} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6} &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$

(d) On démontre par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$: $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 1$, on a $S_1 = 1$ et $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = \dfrac{1\times 2\times 3}{6} = 1$
  Donc la propriété est vraie au rang 1.
- **Hérédité** Soit $n \geqslant 1$.On suppose la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
  $$\begin{aligned} S_{n+1} &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} = \big(u_1 + u_2 + \cdots + u_n\big) + u_{n+1} \\ &= S_n + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6} \text{ (d'après la question précédente)} \\ &= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}\end{aligned}$$
  Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 1 et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$: $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Il faut donc trouver le plus grand entier n tel que $S_n \leqslant 200$.
   On calcule : $S(7) = \dfrac{7(7+1)(2\times 7+1}{6} = 140 < 200$ et $S(8) = \dfrac{8(8+1)(2\times 8+1)}{6} = 204 > 200$.
   Le marchand utilise donc 140 oranges pour construire une pyramide à 7 étages.

Exercice 3 (★, d'après Bac 2024) 1. La variable aléatoire N suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}02$. En effet, on tire 100 cachets ayant chacun une probabilité $p = 0{,}02$ d'être non-conforme, et il y a indépendance entre la probabilité de chaque cachet.

2. L'espérance de N est $E(N) = np = 100 \times 0{,}02 = 2$.
   Il y a donc, en moyenne, 2 cachets non conformes par boîte.
3. (a) La probabilité qu'une boîte contienne exactement trois cachets non conformes est : $P(N=3) = \binom{100}{3} \times 0{,}02^3 \times (1-0{,}02)^{100-3} \approx 0{,}182$.
   (b) La probabilité qu'une boîte contienne au moins 95 cachets conformes est la probabilité qu'elle contienne au plus 5 cachets non conformes, c'est-à-dire : $P(N \leqslant 5) \approx 0{,}985$.

Exercice 4 (★★d'après Bac, années diverses)

- **Affirmation 1** Vraie. En effet, pour n entier naturel : $v_n = \dfrac{-9^n+3^n}{7^n} = -\left(\dfrac{9}{7}\right)^n \times \dfrac{1-\left(\dfrac{3}{9}\right)^n}{1} = -\left(\dfrac{9}{7}\right)^n \times \left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$
  Par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\left(\dfrac{9}{7}\right)^n \times \left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right) = -\infty$.
  Si on a, pour tout n naturel, $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors, par comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- **Affirmation 2** Faux : par exemple $u_n = 1$, $w_n = -1$ et $v_n = (-1)^n$ (qui n'a pas de limite)
- On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \quad \text{et} \\ u_{n+1} &= 3u_n + 1 \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On considère la fonction `calcul` écrite dans le langage Python qui renvoie la valeur de u_n.


```
def calcul(n):
  u = 0
  for i in range(n):
    u = 3 * u + 1
  return u
```

On considère par ailleurs la fonction `liste` écrite dans le langage Python :

```
def liste(n):
  l = [ ]
  for i in range(n):
    l.append( calcul(i) )
  return l
```

Affirmation 3 : Faux $u_0 = 0$, $u_1 = 3\times u_0 + 1 = 1$, $u_2 = 3 \times u_1 + 1 = 4$, $u_3 = 3\times u_2 + 1 = 13$ et
$u_4 = 3 \times u_3 + 1 = 40 \neq 42$.

Affirmation 4 : Vrai. Montrons que la propriété P_n :« $u_n = \dfrac{1}{2}\times 3^n - \dfrac{1}{2}$ » est vraie pour tout n

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $\dfrac{1}{2}\times 3^0 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$; la propriété est vraie.
- **Hérédité**
  Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $u_n = \dfrac{1}{2} \times 3^n - \dfrac{1}{2}$.
  $u_{n+1} = 3u_n + 1 = 3\left(\dfrac{1}{2}\times 3^n - \dfrac{1}{2}\right) + 1 = \dfrac{1}{2}\times 3^{n+1} - \dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}\times 3^{n+1} - \dfrac{1}{2}$
  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire donc elle est vraie pour tout n.

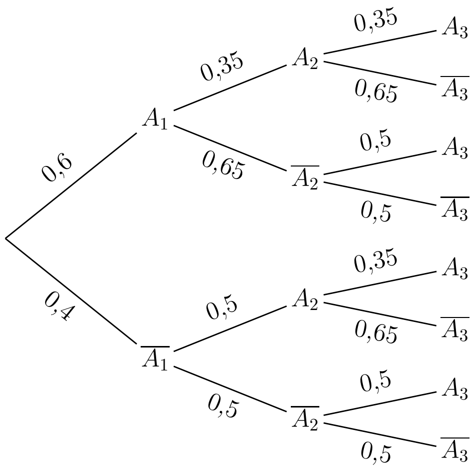
Affirmation 5 : Vrai. $u_{n+1} - u_n = \left(\dfrac{1}{2}\times 3^{n+1} - \dfrac{1}{2}\right) - \left(\dfrac{1}{2}\times 3^n - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\times 3^{n+1} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\times 3^n + \dfrac{1}{2}$

$$= \dfrac{1}{2}\times 3^{n+1} - \dfrac{1}{2}\times 3^n = \dfrac{1}{2}\times 3^n\,(3-1) = \dfrac{1}{2}\times 3^n \times 2 = 3^n$$

— **Affirmation 6** Vrai. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3n - 4 \leqslant u_n \leqslant 3n + 4$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{3n-4}{n} \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{3n+4}{n}$ c'est à dire $3 - \dfrac{4}{n} \leqslant v_n \leqslant 3 + \dfrac{4}{n}$. On a $3 - \dfrac{4}{n}$ et $3 + \dfrac{4}{n}$ convergent vers 3 donc d'après le théorème d'encadrement, v_n converge vers 3.

Exercice 5 (★★D'après Bac 2023)
Partie A

1. D'après le texte, pour $k=1$ ou $k=2$, on a : $P_{A_k}\left(\overline{A_{k+1}}\right)=0{,}65$ et $P_{\overline{A_k}}(A_{k+1})=0{,}5$.
   Donc $P_{A_k}(A_{k+1})=0{,}35$ et $P_{\overline{A_k}}\left(\overline{A_{k+1}}\right)=0{,}5$.
   On complète l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur atteint sa cible au cours des trois tirs.

2. La probabilité que le joueur atteigne deux fois la cible au cours des trois tirs est :
   $$\begin{aligned}P(X=2)&=P\left(A_1\cap A_2\cap\overline{A_3}\right)+P\left(A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3\right)+P\left(\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3\right)\\&=0{,}6\times0{,}35\times0{,}65+0{,}6\times0{,}65\times0{,}5+0{,}4\times0{,}5\times0{,}35=0{,}136\,5+0{,}195+0{,}07\\&=0{,}401\,5\end{aligned}$$

3. (a) On a vu que $P(X=2)=0{,}401\,5$; de plus $P(X=0)$ et $P(X=3)$ sont donnés dans le tableau. On a donc :
   $$\begin{aligned}P(X=1)&=1-\big(P(X=0)+P(X=2)+P(X=3)\big)=1-(0{,}1+0{,}401\,5+0{,}073\,5)\\&=1-0{,}575=0{,}425\end{aligned}$$
   On complète le tableau donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,1	0,425	0,401 5	0,073 5

   (b) $E(X)=0\times0{,}1+1\times0{,}425+2\times0{,}401\,5+3\times0{,}073\,5=1{,}448\,5$
   (c) Sur 3 tirs, le joueur atteindra sa cible, en moyenne, 1,5 fois.

Partie B

DM 02 Tle G - gr1

1. L'expérience élémentaire consiste à voir si une personne est gagnante (avec une probabilité $p=0{,}073\,5$) ou non ; il n'y a donc que deux issues. On effectue cette expérience élémentaire 15 fois dans des conditions identiques et indépendantes.
   Donc la variable aléatoire Y qui donne le nombre de gagnants sur 15 personnes, suit la loi binomiale de paramètres $n=15$ et $p=0{,}073\,5$.
2. La probabilité qu'exactement 5 joueurs soient gagnants à ce jeu est :
   $P(Y=5)=\binom{15}{5}\times0{,}073\,5^5\times(1-0{,}073\,5)^{15-5}\approx0{,}003$

Exercice 6 (★★★Autour de la série harmonique)
On considère la suite (h_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$h_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\cdots+\frac{1}{n}$$

1. $h_{n+1}-h_n=\dfrac{1}{n+1}>0$ donc la suite est strictement croissante.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$, $h_{2n}-h_n=\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\geq\dfrac{1}{2n}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$ car la fonction inverse est décroissante. Il y a n termes dans la somme donc $h_{2n}-h_n\geqslant\dfrac{n}{2n}$: on a bien $h_{2n}-h_n\geqslant\dfrac{1}{2}$
3. Montrer par récurrence que pour tout $A\in\mathbb{N}$, la propriété P_A : "il existe $n_0\in N^*$ tel que $h_{n_0}\geq A$" est vraie
   - **Initialisation** Pour $A=0$, $n_0=1$ convient
   - **Hérédité** Soit $A\in\mathbb{N}$, supposons P_A vraie. Il existe donc $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $h_{n_O}\geqslant A$.
     On a donc $h_{2n_0}\geq h_{n_0}+\dfrac{1}{2}$ et $h_{4n_0}\geq h_{2n_0}+\dfrac{1}{2}\geqslant h_{n_0}+1\geqslant A+1$.
     Ainsi P_{A+1} est vraie en considérant $4n_0$.
   - **Conclusion** La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $A\in\mathbb{N}$
4. La suite est donc non majorée, étant donnée qu'elle est croissante elle diverge donc vers $+\infty$
5. Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la propriété P_n : "$h_n\leq2\sqrt{n}$" est vraie.
   - **Initialisation** Pour $n=1$, $h_1=1<2\sqrt{1}$
   - **Hérédité** Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n.
     On a $h_{n+1}=h_n+\dfrac{1}{n+1}\leqslant2\sqrt{n}+\dfrac{1}{n+1}$
     On veut montrer $2\sqrt{n}+\dfrac{1}{n+1}\leqslant2\sqrt{n+1}$, pour cela montrons $\dfrac{1}{n+1}\leqslant2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}$.

On a $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 2\dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (on a multiplié par la quantité conjuguée, méthode classique quand on a une différence de racines carrées).

De plus, $n \geq 1$ donc $\sqrt{n} \leqslant n \leqslant n+1$ et $\sqrt{n+1} \geqslant n+1$. Ainsi, $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leqslant 2(n+1)$ et donc $\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geqslant \dfrac{1}{n+1}$, ce qui est l'inégalité qu'on souhaitait démontrer.

Ainsi $h_{n+1} \leqslant 2\sqrt{n+1}$: la propriété est vraie au rang $n+1$

- **Conclusion** La propriété est vraie au rang 1 et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

6. On a, pour tout $n > 1$, $h_n \leqslant 2\sqrt{n}$ donc pour tout $n > 1$, $\dfrac{h_n}{n} \leqslant \dfrac{2\sqrt{n}}{n}$, c'est à dire $\dfrac{h_n}{n} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{n}}$. On a de plus $0 \geq \dfrac{h_n}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0$ donc par encadrement on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{h_n}{n} = 0$

Exercice 7 (★★★) 1. On note T_n l'événement "au n^e repas, le T-rex mange un Tricératops" et P_n l'événement "le T-rex n'a jamais mangé deux tricératops consécutivement" (on a donc $P(P_n) = u_n$. D'après la formule des probas totales, on a $P(P_{n+2}) = P(P_{n+2} \cap T_{n+2}) + P(P_{n+2} \cap \overline{T_{n+2}})$

Or , l'événement $P_{n+2} \cap T_{n+2}$ est "le T-rex n'a jamais mangé deux tricératops consécutifs et a mangé un tricératops au $n+2^e$ repas. Dans ce cas, le T-rex a forcément mangé un hadrosaure au $n+1^e$ repas, et n'a pas mangé deux tricératops consécutif pendant les n premiers repas. Ainsi $P(P_{n+2} \cap T_{n+2}) = P(n) \times \times P(T_{n+2}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} \times u_n = \dfrac{2}{9}u_n$ (les événements sont indépendants). De plus, l'événement $P_{n+2} \cap \overline{T_{n+2}}$ est l'événement "le T-rex n'a jamais mangé deux tricérétops consécutifs et a mangé un hadrosaure au $n+2^e$ repas. Dans ce cas, on a le T-rex qui n'a pas mangé deux tricératops consécutifs pendant les $n+1$ premiers repas et on a $P(P_{n+2} \cap \overline{T_{n+2}} = P(\overline{T_{n+2}}) \times P(P_{n+1}) = \dfrac{1}{3} \times u_{n+1}$

Ainsi, on a bien $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n$.

2. On montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $u_n = 2(\frac{2}{3})^{n+1} + (-\frac{1}{3})^{n+1}$.

Exercice 8 (★★★) 1. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et p

2. On a $P(X = 8) = \binom{20}{8}p^8(1-p)^12$. On cherche le maximum sur $[0; 1]$ de la fonction $f(x) = x^8(1-x)^{12}$. La fonction f est dérivable et sa dérivée est $f'(x) = 8x^7(1-x)^{12} - 12x^8(1-x)^{11} = x^7(1-x)^{11}(8-20x)$. On a donc $g'(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0; \dfrac{2}{5}]$ et $g'(x) \leqslant 0$ sur $[\dfrac{2}{5}; 1]$ donc la probabilité est maximale pour $p = \dfrac{2}{5}$