DM 01 - Logique ; Suites
À rendre le 25 septembre au plus tard

- Le DM est facultatif. Il est à rendre le 25/09 au plus tard. Aucune copie ne sera acceptée passée cette date.
- Il est possible de le rendre plus tôt et de le rendre plusieurs fois afin de corriger ses erreurs et d'améliorer sa note.
- Vous avez du temps, merci de soigner la présentation. Une copie trop peu soignée ne sera pas corrigée.
- La rigueur de la rédaction sera prise en compte dans la notation
- Il est permis de chercher à plusieurs, mais chacun devra rédiger sa copie seul avec ses propres mots. Deux copies identiques n'obtiendront aucune note.
- Les exercices sont classés par difficulté : ★(consolider) , ★★(standard) , ★★★(approfondir)
  Un DM = au moins 3 exercices. Choisissez bien la difficulté de vos exercices !

Exercice 1 (★)

Montrer par récurrence que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$

Exercice 2 (★)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_n = \sqrt{u_n + 6}$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \leq 3$

Exercice 3 (★d'après Bac 2025)

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Partie A : Conjecture

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			

2. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

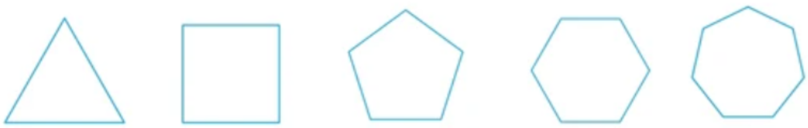
1. Calculer w_0.
2. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.
4. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

5. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 4 (★★)

Pour tout entier $n \geq 3$, on définit D_n comme étant le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n côtés (une diagonale étant un segment reliant deux sommets non consécutifs).



1. Pour chacun des polygones ci-dessus, déterminer le nombre de diagonales d_3 à d_7
2. Quel est l'allure du nuage de points représentant la suite (d_n)
3. On admet que $d_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$. Démontrer ce résultat par récurrence.

Exercice 5 (★★)

Soit $n \geq 1$. Montrons la propriété suivante : P_n "Considérons n points du plan $A_1, A_2, \ldots A_n$, alors il existe une droite qui passe par tous ces points (les points sont alignés)."

— **Initialisation** Pour $n = 1$, si on considère un point du plan, il existe une droite passant par ce point.

— **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose P_n vraie. Considérons $n + 1$ points du plan $A_1, \ldots, A_{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, il existe une droite (d) qui passe par les points $A_1, \ldots A_n$. Toujours par hypothèse de récurrence, il existe une droite (d') qui passe par les points $A_2, \ldots, A_{n+1}$. Or (d) et (d') passent toutes deux par les points $A_2, \ldots A_n$, donc (d) et (d') sont confondues, donc $A_1, \ldots A_{n+1}$ sont bien alignés.

— **Conclusion** n points quelconques du plan sont donc toujours alignés.

Expliquez l'erreur dans ce raisonnement.

Exercice 6 (★★)
Soit f la fonction polynôme de second degré, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2.$$

On considère la suite récurrente (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour $n \geq 1$.

1. (a) Calculer les valeurs exactes de u_1,u_2 et u_3.
   (b) Conjecturer le sens de variation, puis la limite de la suite u.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq x + 1$.
   (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n + 1$. Que peut-on déduire sur le sens de variation de la suite u.
   (c) Montrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$. En déduire la limite de la suite u.

Exercice 7 (★★★)
Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction.
Pour chacune des propositions suivantes :

- L'énoncer (si possible) en langage courant
- Donner sa négation avec des quantificateurs
- Donner, si c'est possible, un exemple de fonction qui vérifie cette proposition et un exemple de fonction qui ne la vérifie pas. Si c'est impossible, on justifiera pourquoi

P1 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) < f(y)$

P2 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(x + T)$

P3 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(x) = f(x + T)$

P4 $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)$

Exercice 8 (★★★ ; Récurrences doubles et récurrences fortes)
Dans certaines démonstration, on utilise une récurrence double ou une récurrence forte.

"Récurrence double"

Soit P_n une proposition dépendant d'un entier n. On suppose que

- **Initialisation** P_0 et P_1 sont vraies
- **Hérédité** Pour tout $n \geq 0$, $(P_n \text{ ET } P_{n+1}) \implies P_{n+2}$

Alors P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

"Récurrence forte"

Soit P_n une proposition dépendant d'un entier n. On suppose que

- **Initialisation** P_0 est vraie
- **Hérédité** Pour tout $n \geq 0$, si $P_0, P_1, \ldots P_n$ sont vraies alors P_{n+1} est vraie

Alors P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. En utilisant des hypothèses de récurrence bien choisies, montrer que la récurrence double et la récurrence forte sont des raisonnements valides.
2. Applications :
   (a) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 7$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 3^n$
   (b) On considère une suite (u_n) qui vérifie $u_0 = 1$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq 2^n$
   (c) Montrer que tout entier peut s'écrire comme la somme de puissances de 2 toutes distinctes. (Question subsidiaire : que représente cette décomposition ?)

Exercice 9 (★★★)
Vrai ou Faux ? Justifier soigneusement votre réponse

1. Si u tend vers 0 alors $u_n < 1$ à partir d'un certain rang
2. Une suite convergente est monotone à partir d'un certain rang
3. Si u et v divergent, alors $u + v$ diverge
4. Si u converge et v diverge, alors $u + v$ diverge
5. Si u et v divergent, alors uv diverge