

# DM 01 - Logique ; Suites

## À rendre le 25 septembre au plus tard

### Exercice 1 (★)

Montrons par récurrence que la propriété  $P_n$  : " $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ " est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$

- *Initialisation* pour  $n = 0$ ,  $1^3 + \cdots + 0^3 = 0$  (aucun terme dans la somme, si cela vous perturbe, commencez à  $n = 1$ , et  $(\frac{0(0+1)}{2})^2 = 0$  donc  $P_0$  est vraie)
- *Héritéité* Soit  $n \in \mathbb{N}$  Supposons  $P_n$  vraie.

On a  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2 + (n+1)^3$  (par hypothèse de récurrence). Et  $(\frac{n(n+1)}{2})^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2(\frac{n^2}{4} + n + 1) = (n+1)^2(\frac{n^2 + 4n + 4}{4}) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = (\frac{(n+1)(n+2)}{2})^2$

- *Conclusion* La propriété est vraie au rang  $n = 0$  et héréditaire elle est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$

### Exercice 2 (★)

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$

Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la propriété  $P_n$  : " $u_n$  est bien défini et  $u_n \leq 3$ " est vraie

- *Initialisation* pour  $n = 0$ ,  $u_0$  est bien définie et  $u_0 = 0 \leq 3$  donc  $P_0$  est vraie
  - *Héritéité* Soit  $n \in \mathbb{N}$  Supposons  $P_n$  vraie.
- On a  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$  est bien définie car  $u_n + 6 \geq 6 \geq 0$ .  
 Par ailleurs  $u_n \leq 3$  donc  $u_n + 6 \leq 9$  donc  $\sqrt{u_n + 6} \leq 3$  (par croissance de la fonction racine) donc  $u_{n+1} \leq 3$  donc  $P_{n+1}$  vraie.
- *Conclusion* La propriété est vraie au rang  $n = 0$  et héréditaire elle est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$

### Exercice 3 (★d'après Bac 2025)

#### Partie A : Conjecture

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

$n$	0	1	2	3	4	5
$u_n$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{32}$

2. On conjecture que la limite de la suite est 0.

### Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

Soit  $(w_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1. On a :  $w_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}..$
2. On va établir la relation de récurrence de  $(w_n)$ . Soit  $n$  un entier naturel.

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{(n+1)+1} - \frac{1}{2}u_{(n+1)} \quad \text{en appliquant la définition de } w \text{ au rang } (n+1) \\ &= u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} \\ &= \left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{2}u_{n+1} \quad \text{en appliquant la relation de récurrence de } u. \\ &= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\ &= \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) \\ &= \frac{1}{2}w_n \quad \text{en appliquant la définition de } w \text{ au rang } n \end{aligned}$$

Ainsi, on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n.$

Cette relation de récurrence établit que  $(w_n)$  est une suite géométrique, de raison  $q = \frac{1}{2}$ , et de premier terme  $w_0 = \frac{1}{2}.$

3. Puisque la suite est géométrique, on a la propriété classique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = w_0 \times q^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

4. Soit  $n$  un entier naturel. On reprend la définition de  $(w_n)$  :

$$\begin{aligned} w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n &\iff \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \quad \text{d'après l'expression explicite de } w_n \\ &\iff u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n \end{aligned}$$

On arrive bien à la relation de récurrence demandée.

5. Montrons par récurrence que la propriété  $P_n$  : «  $u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$  » est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$

**Initialisation :** On a d'une part  $u_0 = 0$  et, d'autre part :  $0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 \times 1 = 0.$

L'affirmation est donc vraie au rang 0.

**Héritéité :** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on suppose que la propriété  $P_n$  est vraie, c'est-à-dire :  $u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

On a :  $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$  d'après la relation de récurrence de la question **B. 4**

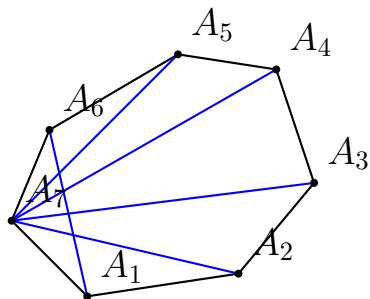
$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \times n \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (1+n) \\ u_{n+1} &= (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{c'est l'affirmation } P_{n+1} \end{aligned}$$

**Conclusion :** La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire donc elle est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Exercice 4 (★★★)

Pour tout entier  $n \geq 3$ , on définit  $d_n$  comme étant le nombre de diagonales d'un polygone convexe à  $n$  côtés (une diagonale étant un segment reliant deux sommets non consécutifs).

1.  $d_3 = 0, d_4 = 2, d_5 = 5, d_6 = 9$  à  $d_7 = 14$
2. L'allure est une parabole
3. Montrons par récurrence que la propriété  $P_n \ll d_n = \frac{n(n-3)}{2} \gg$  est vraie pour tout  $n \geq 3$ .
  - **Initialisation :** Pour  $n = 3$  on a 0 diagonale et  $\frac{0(0-3)}{2} = 0$  donc  $P_0$  est vraie
  - **Héritéité :** Soit  $n \geq 3$ . On suppose  $P_n$ . Considérons un polygone à  $n+1$  sommets  $A_1 \dots A_{n+1}$



Toutes les diagonales de  $A_1 \dots A_n$  sont des diagonales de  $A_1 \dots A_{n+1}$ .

S'ajoutent les diagonales entre  $A_{n+1}$  et les points  $A_2$  à  $A_{n-1}$  ( $n-2$  diagonales), et la diagonale  $A_1A_n$  soit  $n-1$  diagonales en tout.

Donc on a  $\frac{n(n-3)}{2} + (n-1)$  diagonales et  $\frac{n(n-3)}{2} + (n-1) = \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} =$

$$\frac{n^2 - n - 2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2} \text{ donc } P_{n+1} \text{ est vraie}$$

- **Conclusion** La propriété est vraie au rang  $n = 3$  et héréditaire elle est donc vraie pour tout  $n \geq 3$

**Exercice 5 (★★)**

L'hérédité ne fonctionne que pour  $n \geq 3$  (il faut que dans  $A_2 \dots A_n$  il y ait au moins 2 points) et pas pour  $n = 1$  ni  $n = 2$ .

**Exercice 6 (★★)**

Soit  $f$  la fonction polynôme de second degré, définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2.$$

On considère la suite récurrente  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ , pour  $n \geq 1$ .

1. (a)  $u_1 = \frac{9}{4}, u_2 = \frac{209}{64}$  et  $u_3 = \frac{76449}{16384}$ .  
 (b) La suite semble croître vers  $+\infty$ .
2. (a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) - (x+1) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1 = \frac{1}{4}(x-2)^2 \geq 0$  donc  $f(x) \geq (x+1)$ .  
 (b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n + 1$ . Donc la suite est strictement croissante car  $u_n + 1 > u_n$   
 (c) Montrons par récurrence que pour  $n \in \mathbb{N}$ , la propriété  $P_n$  " $u_n \geq n$ " est vraie
  - **Initialisation**  $u_0 = 1 \geq 0$  donc  $P_0$  vraie
  - **Hérédité** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose  $P_n$ .  
 On a  $u_{n+1} \geq u_n + 1 \geq n + 1$  donc  $P_{n+1}$  vraie
  - **Conclusion** La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire elle est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$

Étant donné que  $u_n \geq n$  et que  $\lim n = +\infty$ , la suite  $u$  diverge vers  $+\infty$

**Exercice 7 (★★★)**

Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction.

**P1**  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) < f(y)$

- $f$  n'a pas de maximum
- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$
- La fonction carrée la vérifie, la fonction sinus ne la vérifie pas.

**P2**  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = f(x+T)$

- Pas vraiment possible : n'importe quelle fonction vérifie ça.

- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall T \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(x + T)$
- Toutes les fonctions la vérifient en choisissant  $T = 0$

**P3**  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}^*$  tel que  $f(x) = f(x + T)$

- Toutes les images par  $f$  ont au moins 2 antécédents (attention : cela ressemble à la définition quantifiée de  $f$  est périodique, mais ça ne l'est pas, il n'y a pas un  $T$  défini globalement)
- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall T \in \mathbb{R}^*, f(x) \neq f(x + T)$
- La fonction sinus la vérifie, la fonction carré ne la vérifient pas.

**P4**  $\exists x \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)$

- $f$  est constante.
- $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(y)$
- Les fonctions constantes la vérifient, pas les autres.

### Exercice 8 (★★★; Récurrences doubles et récurrences fortes)

Dans certaines démonstration, on utilise une récurrence double ou une récurrence forte.

#### "Récurrence double"

Soit  $P_n$  une proposition dépendant d'un entier  $n$ . On suppose que

- **Initialisation**  $P_0$  et  $P_1$  sont vraies
- **Hérédité** Pour tout  $n \geq 0$ ,  $(P_n \text{ ET } P_{n+1}) \implies P_{n+2}$

Alors  $P_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$

#### "Récurrence forte"

Soit  $P_n$  une proposition dépendant d'un entier  $n$ . On suppose que

- **Initialisation**  $P_0$  est vraie
- **Hérédité** Pour tout  $n \geq 0$ , si  $P_0, P_1, \dots, P_n$  sont vraies alors  $P_{n+1}$  est vraie

Alors  $P_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$

1. Pour la récurrence double, on utilise  $Q_n$  : " $P_n$  et  $P_{n+1}$  sont vraies", pour la récurrence forte on utilise  $Q_n$  " $P_0, \dots, P_n$  sont vraies"

2. Applications :

- Montrons par récurrence double que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  : «  $u_n = 2^{n+1} + 3^n$  ».  
**Initialisation.** ( $n = 0$  et  $1$ ). On a  $2^{0+1} + 3^0 = 3 = u_0$  et  $2^{1+1} + 3^1 = 7 = u_1$ .  
 Donc  $P_0$  et  $P_1$  sont vraies.

**Héritéité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $P_n$  et  $P_{n+1}$  sont vraies. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \\ &= 5(2^{n+2} + 3^{n+1}) - 6(2^{n+1} + 3^n) \quad (\text{avec } P_n \text{ et } P_{n+1}) \\ &= 5 \times 2^n \times 2^2 + 5 \times 3^n \times 3 - 6 \times 2^n \times 2 - 6 \times 3^n \\ &= 2^n \times (20 - 12) + 3^n \times (15 - 6) \\ &= 2^n \times 2^3 + 3^n \times 3^2 \\ &= 2^{n+3} + 3^{n+2}, \quad \text{d'où } P_{n+2}. \end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\boxed{u_n = 2^{n+1} + 3^n}$ .

- (b) On considère une suite  $(u_n)$  qui vérifie  $u_0 = 1$  et telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n \leq u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ . Montrons par récurrence forte que  $P_n$  "  $u_n \leq 2^n$ " est vraie

**Initialisation** ( $n = 0$ ). On a  $2^0 = 1 \geq u_0$ . L'inégalité est vraie au rang 0.

**Héritéité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  (fixé quelconque).

On suppose que pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , on a  $u_k \leq 2^k$  (càd  $u_0 \leq 2^0$ ,  $u_1 \leq 2^1$ , ...,  $u_n \leq 2^n$ ).

Montrons qu'alors  $u_{n+1} \leq 2^{n+1}$ . D'après l'énoncé

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &\leq 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n \quad (\text{par hyp. de réc., en sommant les inégalités que l'on a démontrées}) \\ &= \frac{2^{n+1} - 2^0}{2 - 1} \quad (\text{somme des termes d'une suite géométrique}) \\ &= 2^{n+1} - 1 \\ &\leq 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc  $P_{n+1}$  est vraie.

**Conclusion.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\boxed{u_n \leq 2^n}$ .

- (c) Montrons par récurrence forte que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la propriété  $P_n$  : "  $n$  peut s'écrire comme la somme de puissances de 2 toutes distinctes" est vraie.

- **Initialisation**  $1 = 2^0$

- **Héritéité** Supposons  $P_0, \dots, P_n$  vraies. Alors soit  $n+1$  est pair et  $n+1 = 2k$  et  $P_k$  est vraie donc  $k = 2^{a_1} + \dots + 2^{a_i}$  et  $n+1 = 2^{a_1+1} + \dots + 2^{a_i+1}$  donc  $P_{k+1}$  est vraie. Sinon,  $n+1$  est impair et  $n = 2^{a_1} + \dots + 2^{a_i}$  et  $2^0$  n'intervient pas dans cette décomposition ( $n$  étant pair) donc  $n+1 = 2^{a_1} + \dots + 2^{a_i} + 2^0$  donc  $P_n$  vraie

- **Conclusion** La propriété est vraie au rang 1 et héréditaire elle est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

Cela représente l'écriture en binaire du nombre.

**Exercice 9 (★★★)**

Vrai ou Faux ? Justifier soigneusement votre réponse

1. Si  $u$  tend vers 0 alors  $u_n < 1$  à partir d'un certain rang

Vrai, car à partir d'un certain rang tous les termes sont dans l'intervalle  $] -1; 1[$  (intervalle ouvert contenant 0)

2. Faux (par exemple  $u_n = (-\frac{1}{2})^n$ )

3. Faux  $u_n = -n, v_n = n$

4. Vrai. Si  $v$  diverge vers un infini,  $u + v$  aussi, si  $v$  n'a pas de limite,  $u + v$  non plus

5. Faux  $u_n = v_n = (-1)^n$