01 - Logique et raisonnements

I Propositions et valeurs de vérité

A Propositions

Définition

Une *proposition* ou *assertion* est une phrase, grammaticalement correcte et ayant un sens, à laquelle on puisse attribuer une valeur de vérité : vrai (V) ou faux (F). Elle peut dépendre d'une ou plusieurs variables (dans ce cas, on l'appelle aussi *prédicat*). En logique classique, les valeurs de vérité vérifient :

- *Principe de non contradiction* : Une proposition ne peut-être vraie et fausse.
- *Principe du tiers-exclu* : Soit une proposition est vraie, soit sa négation est vraie.

Il existe d'autres systèmes de logique, par exemple, la logique intuitionniste ne reconnaît pas le principe du tiers-exclu, la logique floue attribue une valeur de vérité entre 0 et 1, etc.

B Connecteurs logiques et tables de vérité

Propriété

À partir des propositions « simples », on peut construire des propositions composées, en utilisant les connecteurs de base : « et », « ou », « implique », « équivaut » et « contraire ». Ces 5 connecteurs sont définis par leurs actions sur les valeurs de vérité. Plus précisément si p et q sont deux propositions :

Connecteur	**Notation**	**Valeur de vérité**
Conjonction « et »	$p \wedge q$; p ET q	Vraie si et seulement si les deux propositions sont vraies.
Disjonction « ou »	$p \vee q$; p OU q	Faux si et seulement si les deux propositions sont fausses.
Négation : « non »	$\neg p$	Vraie si et seulement si p est fausse.
Implication : si …alors …	$p \implies q$	Faux si et seulement si p est vraie et q est fausse.
Equivalence : …si et seulement si …	$p \iff q$	Vraie si et seulement si p et q ont la même valeur de vérité.

p	$\neg p$
V	
F	

Négation

p	q	p ET q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Conjonction

p	q	p OU q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Disjonction

p	q	$p \implies q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Implication

p	q	$p \iff q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Équivalence

- Le « ou » mathématique est toujours inclusif. Si un mathématicien vous propose « fromage ou dessert », vous pourrez avoir les deux !
- Faux implique n'importe quoi. Si on part de quelque chose de faux, on peut en déduire tout et son contraire...

Exemple 1

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si 2+2=5, alors les chats peuvent voler
2. 2+2=5 ou les chats peuvent voler
3. La fonction carré et la fonction cube sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$

C Propriétés

Lois de « De Morgan »

Propriété

Pour toutes propositions p et q, on

— Négation d'une conjonction : $\neg(p \wedge q)$ a la même valeur de vérité que $\neg p \vee \neg q$;

— Négation d'une disjonction : $\neg(p \vee q)$ a la même valeur de vérité que $\neg p \wedge \neg q$;

Démonstration

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Exemple 2

La négation de « J'aime les glaces à la vanille et les glaces au chocolat » est ......
....
La négation de « En dessert, je prendrai du raisin ou des framboises » est ....
....

Définition (Contraposition)

La contraposée d'une implication $p \implies q$ est l'implication $\neg q \implies \neg p$.

Exemple 3

La contraposée de « s'il pleut alors la pelouse est mouillée » est ....
....

Propriété

Une implication et sa contraposée ont la même valeur de vérité.

p	q	$p \implies q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \implies \neg p$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Ne pas confondre "contrapposée" et "réciproque" ! La réciproque d'une proposition n'a pas forcément la même valeur de vérité.

Pour aller plus loin

- Montrer la commutativité et l'associativité de la conjonction et la disjonction , montrer la distributivité de la conjonction par rapport à la disjonction et de la disjonction par rapport à la conjonction
- Écrire une proposition ayant la même valeur de vérité que $p \implies q$ avec uniquement $\neg$, ET, OU

D Quantificateurs

Dans cette partie, on considère des prédicats, c'est à dire des propositions contenant une (ou des) variable(s). Par exemple la proposition $x^2 > 0$ est une proposition contenant une variable numérique x. Elle peut-être vraie ou non en fonction de la valeur de x. De même que la proposition « tout homme est mortel » contient la variable « homme » qui est un être humain.

Dans certaines situation la proposition veut exprimer une propriété « universelle », c'est à dire vraie pour *toute valeur possible* pour la variable (éventuellement dans un ensemble donné). Dans d'autres situations la proposition veut exprimer qu'une propriété peut admettre des exceptions.

Définition (Quantificateur universel)

Lorsqu'on veut exprimer une proposition affirmant une propriété pour toutes les valeurs possibles de la variable, on utilise le *quantificateur universel* : « pour tout » ou « quel que soit ».
On peut noter le quantificateur universel avec le symbole $\forall$

Exemple 4

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$

Définition (Quantificateur existentiel)

Lorsqu'on veut dire qu'une propriété est parfois vraie (n'est pas toujours fausse), on utilise le *quantificateur existentiel* : « il existe ».
On peut noter les quantificateur universel avec le symbole $\exists$

Exemple 5

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$

Propriété (Négation des propositions contenant un quantificateur)

— *Négation d'une proposition universelle* si $P(x)$ est une proposition dépendant d'une variable x, la négation de $\forall x,\ P(x)$ est la proposition $\exists x,\ \neg P(x)$.

— *Négation d'une proposition existentielle* si $P(x)$ est une proposition dépendant d'une variable x, la négation de $\exists x,\ P(x)$ est la proposition $\forall x,\ \neg P(x)$.

Exemple 6

Donner les négations des propositions suivantes.

- Tous les chats sont mortels.
- Il existe un mammifère ovipare.
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, 1 < f(x) < 4$
- $\exists M \in R$ tel que $\forall x \in R, f(x) < M$

II Modes de raisonnement et schémas de déduction

Dans les démonstrations de théorème et dans les exercices, on utilise différents schéma de raisonnement. En fonction de la situation un schéma de raisonnement peut s'avérer plus efficace et plus adapté.

A Raisonnement par déduction directe

C'est le schéma utilisé le plus couramment. On a une hypothèse p supposée vraie. Par ailleurs on sait aussi que $p \implies q$, on déduit alors que q est vraie.

Exemple 7

Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel tel que $x > 1$. Montrer que $e^{x-1} > 1$.

B Raisonnement par disjonction de cas

On utilise souvent ce raisonnement en arithmétique, par exemple en considérant qu'un nombre entier est soit pair soit impair. Il s'agit de traiter **différents cas** en étant sûr que notre raisonnement couvre **tous les cas possibles**.

Exemple 8

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un nombre entier.

C Raisonnement par contraposition

Nous avons vu plus haut, qu'une implication $p \implies q$ et sa contraposée ont la même valeur de vérité. Par conséquent, pour montrer $p \implies q$, on peut prouver sa contraposée $\neg q \implies \neg p$, qui dans certaine situation peut s'avérer plus simple à prouver.

Exemple 9

Montrer que pour tout entier n, n^2 est pair $\implies$ n est pair.

D Raisonnement par l'absurde

Ce type de raisonnement s'avère très efficace, voire inévitable dans certaines situations.

Principe du raisonnement par l'absurde Pour montrer qu'une proposition p est vraie, on suppose quelle est fausse et on montre que cette hypothèse conduit à une *contradiction* (une proposition vraie et fausse à la fois).

Exemple 10

Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel, i.e. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

III Raisonnement par récurrence

A Introduction

Ce mode de raisonnement est utile dans les situations où on considère une proposition dépendant d'un entier naturel n : "prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$", ou "prouver que pour tout entier $n \geq N_0$ (avec N_0 une valeur donnée).

Cette idée peut être exprimée de façon imagée :

— Si on peut se placer sur un barreau d'une échelle — Si on peut passer d'un barreau à son suivant	$\Longrightarrow$	On peut gravir n'importe lequel des barreaux de cette échelle

B Principe du raisonnement par récurrence

Notons P_n la propriété que l'on veut prouver, dans laquelle intervient un entier n. On ne peut évidemment pas tester cette propriété pour une infinité de valeurs de n. Une solution est le raisonnement par récurrence [1] :

— On vérifie la propriété pour la première valeur de n (souvent $n = 0$) ; étape d'**initiation**

1. On dit aussi par *induction* mathématique. Ce principe a été formalisé par Giuseppe Peano, mathématicien italien († 1932)

— On démontre que *si* la propriété est vraie pour un certain nombre entier n, *alors* elle est vraie pour l'entier suivant $n+1$; étape d'**hérédité**
Autrement dit on prouve que l'implication $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ est vraie.

— à l'aide des deux propriétés précédentes, on peut montrer de proche en proche que la propriété est vraie pour n'importe quel nombre entier ; étape de **conclusion**

Les trois étapes : **Initialisation**, **Hérédité**, **Conclusion** doivent impérativement apparaître **clairement** dans vos rédactions, tout comme l'énoncé de la propriété que vous souhaitez démontrer.

C Exemples

Exemple 11

Montrer la propriété $P_n : 2^n \geq n+1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 12

Montrer que $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercices

Exercice 1 (Manipuler des quantificateurs)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire avec les quantificateurs les propriétés suivantes :

- P_1 la fonction f s'annule sur I ;
- P_2 la fonction f est constante sur I ;
- P_3 la fonction f n'est pas constante sur I ;
- P_4 la fonction f admet un minimum en $x_m \in I$;
- P_5 la fonction f admet un maximum en $x_M \in I$;
- P_6 la fonction f est majorée par M sur I ;
- P_7 la fonction f n'est pas majorée sur I ;

Exercice 2
Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant :

- P_1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = x$;
- P_2 Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{x^2} = x$;
- P_3 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq 2 \implies x^2 \leq 4$;
- P_4 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\sqrt{x} < x$;

Exercice 3
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Exercice 4
Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison r. Montrer (par récurrence) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a + nr$.

Exercice 5
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n + 4$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 7 \times 2^n - 4.$$

Exercice 6
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2^{n+1} - 1.$$

Exercice 7
Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{0{,}5v_n + 8}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq v_n \leq 4$$

Exercice 8
Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

.

Exercice 9
On rappelle que $(e^x)' = e^x$ et que $e^{2x} = e^x \times e^x$
Démontrer par récurrence la propriété suivante : $(e^{nx})' = ne^{nx}, \forall n > 1, \forall x \in \mathbb{R}$ (on n'utilisera pas la formule $(f(ax+b))'$)

Exercice 10
Montrer que la somme des angles d'un polygone convexe à n sommets est $(n-2)\pi$

Exercice 11
Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante et soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est monotone.