DM 05 - corrigé

Exercice 1 (★)

Les deux parties sont indépendantes

Partie A Simplifier les expressions suivantes

1. $A = \ln(3) + \ln(27) - \ln(81) = \ln(3) + \ln(3^3) - \ln(3^4) = \ln(3) + 3\ln(3) - 4\ln(3) = 0$
2. $B = \ln(x+4) - \ln(4x+x^2) = \ln(x+4) - \ln(x(4+x)) = \ln(x+4) - \ln(x) - \ln(x+4) = -\ln(x)$
3. $C = \dfrac{e^{1+\ln(2)}}{e^{1+\ln(3)}} = \dfrac{e^1 e^{\ln(2)}}{e^1 e^{\ln(3)}} = \dfrac{2}{3}$
4. $D = e^{\ln(x-1)+\ln(x)} = e^{\ln(x-1)}e^{\ln(x)} = (x-1)x$

Partie B

1. Résoudre les équations et inéquations suivantes, après avoir précisé sur quel intervalle elles ont un sens.
   (a) $\dfrac{e^{3x+4}}{e^{x-7}} = 4$ Cette équation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{e^{3x+4}}{e^{x-7}} = 4 \Leftrightarrow e^{3x+4-x+7} = 4 \iff e^{2x+11} = 4 \iff 2x + 11 = \ln(4) \iff 2x = \ln(4) - 11 \iff x = \dfrac{\ln(4) - 11}{2}$
   (b) $\ln(x^2 + 6x + 10) = 0$
   On a $x^2 + 6x + 10 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ donc l'équation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\ln(x^2+6x+10) = 0 \iff x^2+6x+10 = 1 \iff x^2+6x+9 = 0 \iff (x+3)^2 = 0 \iff x = -3$ donc $S = \{-3\}$
   (c) $\ln(x^2 + 1) \geqslant 1$
   $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$ donc l'équation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\ln(x^2 + 1) \geqslant 1 \iff x^2 + 1 \geqslant e \iff x^2 \geqslant e - 1 \iff x \in]-\infty; -\sqrt{e-1}] \cup [\sqrt{e-1}; +\infty[$
   (d) $\ln(\sqrt{x}) = -1$
   Cette équation a un sens pour $x > 0$
   Soit $x > 0$. On a $\ln(\sqrt{x}) = -1 \iff \dfrac{1}{2}\ln(x) = -1 \iff \ln(x) = -2 \iff x = e^{-2}$ donc $S = \{e^{-2}\}$
   (e) $\ln(3e^x - 4) < 0$
   Cette équation a un sens lorsque $3e^x - 4 > 0$, c'est à dire quand $e^x > \dfrac{4}{3}$, c'est à dire lorsque $x > \ln(\dfrac{4}{3})$ Soit $x > \ln(\dfrac{4}{3})$

   $\ln(3e^x - 4) < 0 \iff 3e^x - 4 < 1 \iff 3e^x < 5 \iff e^x < \dfrac{5}{3} \iff x < \ln(\dfrac{5}{3})$
   Donc $S =]\ln(\dfrac{4}{3}); \ln(\dfrac{5}{3})[$
   (f) $(1 + \ln(2x))(2 - \ln(x)) \leqslant 0$
   Cette équation a un sens pour $x > 0$.
   Soit $x > 0$ On a $1 + \ln(2x) \leqslant 0 \iff \ln(2x) \leqslant -1 \iff 2x \leqslant e^{-1} \iff x \leqslant \dfrac{e^{-1}}{2}$
   Et on a $2 - \ln(x) \leqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant 2 \iff x \geqslant e^2$

x	0		$\frac{1}{2e}$		e^2		$+\infty$
$1 + \ln(2x)$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$2 - \ln(x)$	||	$+$		$+$	0	$-$	
$(1+\ln(2x))(2-\ln(x))$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

   Donc $S =]-\infty; \dfrac{1}{2e}[\cup]e^2; +\infty[$

2. Déterminer le plus petit entier n tel que
   (a) On a $2^n \geq 10^8 \iff \ln(2^n) \geq \ln(10^8) \geq n\ln(2) \geq 8\ln(10) \geq n \geq \dfrac{8\ln 10}{\ln 2}$, avec la calculatrice on trouve que le plus petit entier qui convient est 27
   (b) $(\dfrac{1}{5})^n \leq 10^{-3} \iff \ln((\dfrac{1}{5})^n) \leq \ln(10^{-3}) \iff n\ln(\dfrac{1}{5}) \leq \ln(10^{-3}) \iff n \leq \dfrac{\ln(10^{-3})}{\ln(\frac{1}{5})}$: on trouve que le plus petit entier qui convient est 5

Exercice 2 (★)

1. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes sur les intervalles donnés :
   (a) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$
   (b) $g'(x) = \ln(1 + e^x) + x\dfrac{e^x}{1 + e^x}$
   (c) $h(x) = \ln(\dfrac{x+5}{x-1}) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = \dfrac{x+5}{x-1}$ et $u'(x) = \dfrac{x-1-x-5}{(x-1)^2} = \dfrac{-6}{(x-1)^2}$ donc $h'(x) = \dfrac{\frac{-6}{(x-1)^2}}{\frac{x+5}{x-1}} = \dfrac{-6}{(x-1)(x+5)}$
   (d) $k'(x) = \dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}} = -\dfrac{1}{2(1-x)}$

(e) $l'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1-\ln(x)) - (1+\ln(x))(-\frac{1}{x})}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{-2\ln(x)}{x(1-\ln(x))^2}$

2. Déterminer les limites suivantes

   (a) $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{3+\ln(x)}{\ln(x)} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 1}(3+\ln x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to 1+}(\ln x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{3+\ln(x)}{\ln(x)} = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 1}(3+\ln x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to 1-}(\ln x) = 0$ donc pas de limite en 1

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) - x^2 = -\infty$ par somme de limites.
   De plus, $f(x) = \ln(x) - x^2 = x^2(\dfrac{\ln(x)}{x^2} - 1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

   (c) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-1)\ln(e^x-1) = +\infty$ par produit de limites.
   De plus, $f(x) = (e^x-1)\ln(e^x-1) = X\ln(X)$ avec $X = e^x - 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} e^x - 1 = 0$ donc par croissances comparées $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{X\to 0} X\ln(X) = 0$ par croissances comparées.

   (d) $f(x) = (\ln(x))^2 - \ln(x) = \ln(x)(\ln(x)-1)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Exercice 3 (★)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$f(x) = x(1-\ln(x))$$

et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

1. On a $x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ donc $f(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$

x	0		e		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\ln(x)) = -\infty$ par produit de limites
   De plus, $x(1-\ln(x)) = x - x\ln(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} x - x\ln(x) = 0$ par sommes de limites et croissances comparées

3. $f'(x) = 1 - \ln(x) + x(-\dfrac{1}{x}) = -\ln(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ 0	↗	1	↘	$-\infty$

4. f' est décroissante donc f est concave.

5. Soit $a > 0$. On considère la tangente $\mathcal{T}_a$ au point d'abscisse a

   (a) $\mathcal{T}_a : y = f'(a)(x-a) + f(a) = -\ln(a)(x-a) + a - a\ln(a) = -\ln(a)x + a$

   (b) Le point d'intersection de $\mathcal{T}_a$ avec l'axe des ordonnées est le point de coordonnées $(0; a)$

   (c) On a 2 points donc on peut tracer la tangente.

Exercice 4 (★★)

1. Affirmation 1 : Vraie
   Pour tout entier naturel n : $n \geqslant 0 \Longrightarrow n+1 \geqslant 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$ et $-\dfrac{1}{n+1} \geqslant -1$.
   De plus, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.
   D'où $\dfrac{-1}{n+1} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ car $n+1 > 0$
   finalement on a : $-1 \leqslant \dfrac{-1}{n+1} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$.
   La suite u est bornée par -1 et 1.

2. Affirmation 2 : Fausse
   Pour montrer qu'une affirmation est fausse, il suffit de donner un contre-exemple :
   Considérons la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$.
   Cette suite est bornée par -1 et 1 mais elle n'est pas convergente.

3. Affirmation 3 : Fausse
   Pour montrer qu'une affirmation est fausse, il suffit de donner un contre-exemple :
   Considérons la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -\dfrac{1}{n}$.
   Cette suite est croissante et converge vers 0.

4. Affirmation 4 : Fausse
   Pour étudier la convexité d'une fonction, il faut déterminer le signe de sa dérivée seconde.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.
   f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = x^2 + 2x + 2$. On a $u'(x) = 2x + 2$.
   $f' = \dfrac{u'}{u}$ donc, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}$.
   f' est de la forme $\dfrac{v}{w}$ avec $v(x) = 2x+2$ et $w(x) = x^2+2x+2$.
   On a $v'(x) = 2$ et $w'(x) = 2x+2$.
   $f'' = \dfrac{v' \times w - w' \times v}{w^2}$ donc, pour tout réel x, $f''(x) = \dfrac{2\times(x^2+2x+2) - (2x+2)\times(2x+}{(x^2+2x+2)^2}$
   $f''(x) = \dfrac{2x^2+4x+4-4x^2-8x-4}{(x^2+2x+2)^2} = \dfrac{-2x^2-4x}{(x^2+2x+2)^2} = \dfrac{-2x(x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$.
   Un carré est toujours strictement positif, $f''(x)$ est donc du signe de $-2x(x+2)$ qui est une fonction polynôme du second degré avec un coefficient dominant négatif (-2) et qui a pour racines 0 et -2.
   On a donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a déduit que f est concave sur $]-\infty\ ;\ -2]$ et sur $[0\ ;\ +\infty[$, et elle est convexe sur $[-2\ ;\ 0]$.
Elle n'est donc pas convexe sur $[-3\ ;\ 1]$.

5. Affirmation 5 : vraie
   On initialise M avec le premier terme de la suite, puis l'algorithme va comparer chaque terme de la liste à M, si un terme est supérieur à M, il va remplacer M.
   Cet algorithme donne donc la valeur maximale des termes de la suite, soit 7 dans notre cas.
6. Affirmation 6 : Faux. $E(X) = np = 36$ et $V(X) = np(1-p) = 9$ donc $1 - p = \frac{1}{4}$ donc $p = \frac{3}{4}$ et $n = 48$ donc $P(X = 29) \simeq 0.01$
7. Affirmation 7 : Vrai. $P(X \geqslant 90) \simeq 0.086$ et $P(X \leqslant 75) \simeq 0.26$

Exercice 5 (★★)
Partie 1

Soit g la fonction définie pour tout réel $x \in]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$.

1. On note g' la dérivée de g. On a : $g'(x) = \dfrac{2\frac{1}{x} \times x - 2\ln x \times 1}{x^2} = \dfrac{2 - 2\ln x}{x^2}$
2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$:

x	0		1		e		$+\infty$
Variations de g	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0

   (a) La valeur $\frac{2}{\text{e}}$ est l'image de e par f : $f(e) = \dfrac{2\ln e}{e} = \dfrac{2}{e}$.

   (b) $g'(x) = \dfrac{2 - 2\ln x}{x^2}$ donc $g'(x)$ est du signe de $2 - 2\ln x = 2\,(1 - \ln x)$.
   - Sur $]0\ ;e[$, $\ln x < 1$ donc $1 - \ln x > 0$ donc $g'(x) > 0$; la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle.
   - Sur $]e\ ;+\infty[$, $\ln x > 1$ donc $1 - \ln x < 0$ donc $g'(x) < 0$; la fonction g est strictement décroissante sur cet intervalle.

   (c) On justifie les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
   - $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.
     Donc, par produit de limites, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2\ln x \times \dfrac{1}{x} = -\infty$.
   - D'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

3. On en déduit le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
signe de $g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = [\ln(x)]^2$.
Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

1. $[(u(x)^2]' = 2u'(x)u(x)$ donc $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x = \dfrac{2\ln x}{x} = g(x)$
   Donc sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, la fonction f est une primitive de la fonction g.
2. (a) On étudie la convexité de la fonction f.
   D'après les questions précédentes, la fonction g, dérivée de la fonction f, est croissante sur $]0\ ;e[$, donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.
   De même, la fonction g, dérivée de la fonction f, est décroissante sur $]e\ ;+\infty[$, donc la fonction f est concave sur cet intervalle.
   De plus, la fonction g donc la fonction f', change de sens de variation en $x = e$, donc la courbe représentant la fonction f admet un point d'inflexion en $x = e$.

   (b) On étudie les variations de la fonction f en utilisant le signe de $f' = g$.
   Sur l'intervalle $]0\ ;1[$, la fonction g est négative donc f' est négative ; la fonction f est donc strictement décroissante sur cet intervalle.
   Sur l'intervalle $]1\ ;+\infty[$, la fonction g est positive donc f' est positive ; la fonction f est donc strictement croissante sur cet intervalle.
   De plus on peut dire que la fonction f admet un minimum pour $x = 1$.
3. (a) Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse e est : $y = f'(e)\,(x - e) + f(e)$. On a : $f'(e) = g(e) = \dfrac{2}{e}$; $f(e) = (\ln e)^2 = 1$
   L'équation devient : $y = \dfrac{2}{e}\,(x - e) + 1$ soit $y = \dfrac{2}{e}x - 2 + 1$ c'est-à-dire $y = \dfrac{2}{e}x - 1$.

(b) La courbe représentant f admet un point d'inflexion en $x = e$ donc la tangente en ce point coupe la courbe ; à gauche du point, la fonction est convexe donc la courbe est au dessus de cette tangente.

On en déduit que sur $]0\ ;\ e]$, on a : $[\ln(x)]^2 \geqslant \dfrac{2}{e}x - 1$.

Exercice 6 (★★)

On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

Partie A

1. (a) $u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{2}$
$u_2 = \sqrt{u_1} = \sqrt{\sqrt{2}}$.

(b) À l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que la suite est décroissante et converge vers 1.

2. (a) Posons, pour tout entier naturel n, l'affirmation P_n : « $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ ».
Initialisation : On a calculé $u_1 = \sqrt{2} \approx 1{,}414$ et $u_0 = 2$
On a donc bien $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.
L'affirmation P_0 est donc vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. On suppose que l'affirmation P_n est vraie, c'est-à-dire que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
Montrons que l'affirmation P_{n+1} est vraie, c'est à dire que $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$
Par hypothèse de récurrence, on a :
$$\begin{aligned}1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n &\implies \sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{u_n}\\ &\quad \text{car la fonction racine carrée est croissante sur } \mathbb{R}^+\\ &\implies 1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}\end{aligned}$$
Si, pour n naturel, P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie également.
Conclusion : L'affirmation P_0 est vraie, et, pour tout entier naturel non nul n, la véracité de l'affirmation est héréditaire : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel non nul n, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

(b) D'après la question précédente, pour tout entier n, $1 \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par 1.
Et pour tout entier n, $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.
Or toute suite décroissante et minorée est convergente donc, la suite (u_n) est convergente vers une limite $\ell \geqslant 1$.

(c) Soit $x \in [0\ ;\ +\infty[$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} = x &\iff x = x^2 \text{ car } x \geqslant 0\\ &\iff x^2 - x = 0\\ &\iff x(x-1) = 0\\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 1\end{aligned}.$$
L'équation $\sqrt{x} = x$ admet deux solutions sur $[0\ ;\ +\infty[$: 0 et 1.

(d) La suite (u_n) est convergente vers ℓ et est définie par récurrence par :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad$ où f est la fonction racine carrée qui est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$.
D'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
Nous avons résolu cette équation à la question précédente, les solutions sont 0 et 1, or d'après la question **A. 1. b.**, $\ell \geqslant 1$ donc $\ell = 1$.
donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

Partie B

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}v_{n+1} &= \ln(u_{n+1})\\ &= \ln\left(\sqrt{u_n}\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln(u_n)\\ &= \frac{1}{2}v_n\end{aligned}$$
La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln(u_0) = \ln(2)$.

(b) On a donc, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = \ln(2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{\ln(2)}{2^n}$.

(c) Or, pour tout entier naturel n, $v_n = \ln(u_n)$ donc $\dfrac{\ln(2)}{2^n} = \ln(u_n)$ c'est à dire : $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.

2. (a) À l'aide de la calculatrice on trouve que pour tout $k < 7$, $u_k > 1{,}01$ et $u_7 \approx 1{,}005\,43$ donc $k = 7$.

(b) On décide de prendre $x - 1$ comme approximation de $\ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0{,}99\ ;\ 1{,}01[$ donc $\ln(u_7) \approx u_7 - 1 \approx 0{,}005\,43$.

(c) D'après les questions **1. c.** et **2. b.** de la **partie B** une approximation de $\ln(2)$ est $2^7 \ln(u_7)$ soit $2^7 \times 0{,}005\,43$ c'est à dire 0,695.

3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.

```
FROM math IMPORT*
DEF Briggs(a):
  n = 0
  WHILE a >= 1.01:
    a = SQRT(a)
    n = n+1
  L =2**n *(a-1)
RETURN L
```

Exercice 7 (★★★(Retour sur la série harmonique))

Dans cet exercice, on considère la série harmonique définie par $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On l'a déjà étudiée au DM 2, mais on va démontrer différemment sa divergence, et découvrir la constante d'Euler-Mascheroni.

Partie A : divergence de h_n

1. On étudie le signe de $f(x) = \ln(x+1) - (x - \frac{x^2}{2})$, en dérivant, cf ex 99. Pour l'autre inégalité on l'a montrée avec la convexité à l'exemple 5 du cours (on peut aussi le faire avec $\ln(x+1) - x$).
2. $\ln(k+1) - \ln(k) = \ln(\frac{k+1}{k}) = \ln(1 + \frac{1}{k})$. On utilise ensuite la question 1 qui nous donne $\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$

   De plus $\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{k+1} = \frac{k-1}{2k^2(k+1)} \geq 0$ donc $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2}$ ce qui nous donne l'inégalité recherchée.
3. On somme l'inégalité de la question 2 pour k de 1 à $n-1$ ($n \geq 2$)

   $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

   $h_n - 1 \leqslant \ln(n) - \ln(1) \leqslant h_n - \frac{1}{n}$

   donc $\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant h_n \leqslant \ln(n) + 1$
4. $h_n \geqslant \ln(n) + \frac{1}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) + \frac{1}{n} = +\infty$ donc par comparaison $\lim_{n\to+\infty} h_n = +\infty$
5. On divise l'inégalité de la question 2 par $\ln(n)$, $1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant \frac{h_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$

   donc par théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \frac{h_n}{\ln n} = 1$.

Partie B : la constante d'Euler-Mascheroni

1. En $+\infty$, $h_n - \ln(n)$ semble tendre vers environ 0,577

2. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leqslant 0$ donc u décroissante

   On a $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1)) \geq 0$ donc v croissante

   De plus $u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(\frac{n+1}{n}) = \ln(1 + \frac{1}{n})$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$

   Ainsi, u et v sont adjacentes.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$ donc $v_n - u_n \leqslant \gamma - u_n \leqslant 0$ donc $0 \leqslant u_n - \gamma \leqslant \ln(1 + \frac{1}{n})$

   donc $0 \leqslant u_n - \gamma \leqslant \frac{1}{n}$
4. $\gamma \simeq 0{,}577$

Exercice 8 (★★★(Valeur approchée de e))

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = (1 + \frac{x}{n})^n$$

1. Cf exercice précédent.
2. $v_n = \ln((1 + \frac{x}{n})^n) = n\ln(1 + \frac{x}{n})$

   On utilise l'inégalité précédente

   $\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} \leqslant \ln(1 + \frac{x}{n}) \leqslant \frac{x}{n}$ donc $x - \frac{x^2}{2n} \leqslant v_n \leqslant x$ donc $\lim_{+\infty} v = x$
3. $u_n = e^{v_n}$ donc par composition $\lim_{+\infty} u = e^x$
4.
```
FROM math IMPORT *
DEF suitexp(x,n) :
u=(1+x/n)**n
RETURN(u)
```

   La méthode pour obtenir une approximation de e semble assez peu efficace, on converge assez lentement vers e.

Exercice 9 (★★★(Inégalité arithmético-géométrique))

Propriété

Soit f une fonction convexe sur I, et $a,b \in I$. Alors

$$f(ta + (1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b)$$

Étant donné $n \geq 2$ réels strictement positifs $a_1, \ldots, a_n$, on définit les moyennes arithmétiques $\overline{a}$ et géométriques $\overline{g}$ par

$$\overline{a} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

et

$$\overline{g} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}$$

1. Soit f une fonction convexe sur I. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$ pour tous $a_1, \dots, a_n \in I$

   Initialisation Pour $n = 2$, il faut montrer $f(\frac{a_1 + a_2}{2}) \leqslant \frac{f(a_1) + f(a_2)}{2}$: c'est la propriété avec $t = \frac{1}{2}$

   Hérédité Supposons la propriété vraie au rang n

   Soient $a_1, \dots a_{n+1} \in I$.

   On a $f(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} a_i) = f(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n+1}) = f(\frac{n}{n+1}\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} + \frac{1}{n+1}a_{n+1})$.

   On a $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1}$ donc on peut utiliser la propriété.

   $f(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} a_i) \leqslant \frac{n}{n+1} f(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}) + \frac{1}{n+1} f(a_{n+1}) \leqslant \frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i) + \frac{1}{n+1} f(a_{n+1})$ par hypothèse de récurrence, ce qui conclut.

   Conclusion La propriété est vrai au rang $n = 2$ et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 2$

2. La fonction $x \mapsto -\ln(x)$ est convexe. On peut donc appliquer l'inégalité de la question précédente.

   $-\ln(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i) \leqslant -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(a_i)$ donc $\ln(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(a_i)$

   donc $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(a_i)}$

   Et $e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(a_i)} = e^{\ln((\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}})}$

   Donc $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}}$: choisissez la moyenne arithmétique !