

DM 02 - Suites ; Probas

À rendre le 16 octobre au plus tard

- Le DM est facultatif. Il est à rendre le 16/10 au plus tard. Les élèves qui seront à Boston peuvent me l'envoyer par mail (laetitia-floren.lemoine@ac-grenoble.fr)
- Il est possible de le rendre plus tôt et de le rendre plusieurs fois afin de corriger ses erreurs et d'améliorer sa note.
- Vous avez du temps, merci de soigner la présentation. **Une copie trop peu soignée ne sera pas corrigée.**
- La rigueur de la rédaction sera prise en compte dans la notation
- Il est permis de chercher à plusieurs, mais chacun devra rédiger sa copie seul avec ses propres mots. Deux copies identiques n'obtiendront aucune note.
- Un DM = (au moins) 3 exercices, traitant de suites ET de probas.

Exercice 1 (★d'après Bac, années diverses)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée.

Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

- **Affirmation 1** Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.
- **Affirmation 2** On considère la fonction suivante, écrite en langage Python

```

1 DEF terme(N):
2     U=1
3     FOR i IN RANGE(N)
4         U=U+i
5     RETURN U

```

L'appel "terme(4)" renvoie 7.

- **Affirmation 3** Toute suite bornée est convergente

- **Affirmation 4** La suite définie pour tout entier n par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ est bornée

- On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n}{1+2u_n} \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n$$

Affirmation 5 : « $u_4 = \frac{1}{9}$. »

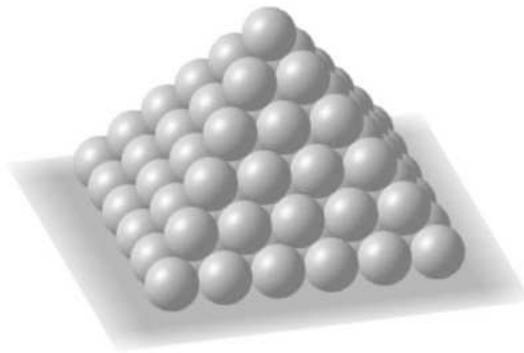
Affirmation 6 : « Pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1}{2n+1}$. »

Affirmation 7 : « La suite numérique (u_n) est minorée par 10^{-10} . »

Exercice 2 (★d'après Bac 2024)

On considère une pyramide à base carrée formée de boules identiques empilées les unes sur les autres :

- le 1^{er} étage, situé au niveau le plus haut, est composé de 1 boule ;
- le 2^e étage, niveau juste en dessous, est composé de 4 boules ;
- le 3^e étage possède 9 boules ;
- ...
- le n -ième étage possède n^2 boules.



Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre de boules qui composent le n -ième étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi, $u_n = n^2$.

1. Calculer le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages.
2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

- (a) Calculer S_5 et interpréter ce résultat.
- (b) On considère la fonction `pyramide` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python.

Recopier et compléter sur la copie le cadre ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul n , l'instruction `pyramide(n)` renvoie le nombre de boules composant une pyramide de n étages.

```
def pyramide(n) :
    S = 0
    for i in range(1, n+1) :
        S = ...
    return ...
```

- (c) Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$$

- (d) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Un marchand souhaite disposer des oranges en pyramide à base carrée. Il possède 200 oranges. Combien d'oranges utilise-t-il pour construire la plus grande pyramide possible ?

Exercice 3 (★, d'après Bac 2024)

Un laboratoire fabrique un médicament conditionné sous forme de cachets.

Un contrôle de qualité, portant sur la masse des cachets, a montré que 2% des cachets ont une masse non conforme. Ces cachets sont conditionnés par boîtes de 100 choisis au hasard dans la chaîne de production. On admet que la conformité d'un cachet est indépendante de celle des autres.

On note N la variable aléatoire qui à chaque boîte de 100 cachets associe le nombre de cachets non conformes dans cette boîte.

1. Justifier que la variable aléatoire N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres
2. Calculer l'espérance de N et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice
3. *Dans cette question, on arrondira les résultats à 10^{-3} près*
 - (a) Calculer la probabilité qu'une boîte contienne exactement trois cachets non conformes
 - (b) Calculer la probabilité qu'une boîte contienne au moins 95 cachets conformes

Exercice 4 (★★d'après Bac, années diverses)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée.

- **Affirmation 1** On considère une suite (u_n) définie sur \mathbb{N} telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq \frac{-9^n + 3^n}{7^n}$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
- **Affirmation 2** On considère les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$, et telles que u converge vers -1 et w vers 1 . Alors v converge vers $\ell \in [-1; 1]$
- On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \quad \text{et} \\ u_{n+1} &= 3u_n + 1 \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On considère la fonction `calcul` écrite dans le langage Python qui renvoie la valeur de u_n .

```

def calcul(n):
    u = 0
    for i in range(n):
        u = 3 * u + 1
    return u

```

On considère par ailleurs la fonction `liste` écrite dans le langage Python :

```

def liste(n):
    l = []
    for i in range(n):
        l.append( calcul(i) )
    return l

```

Affirmation 3 : « l'appel `liste(6)` renvoie la liste `[0, 1, 4, 13, 42, 121]`. »

Affirmation 4 : « pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$. »

Affirmation 5 : « pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n$ est une puissance de 3. »

- **Affirmation 6** On considère une suite u_n telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3n - 4 \leq v_n \leq 3n + 4$. On définit la suite v pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \frac{u_n}{n}$. La suite v_n converge.

Exercice 5 (★★★D'après Bac 2023)

Partie A

Un jeu proposé dans une fête foraine consiste à effectuer trois tirs successivement sur une cible mouvante.

On a constaté que :

- Si le joueur atteint la cible lors d'un tir alors il ne l'atteint pas lors du tir suivant dans 65 % des cas ;
- Si le joueur n'atteint pas la cible lors d'un tir alors il l'atteint lors du tir suivant dans 50 % des cas.

La probabilité qu'un joueur atteigne la cible lors de son premier tir est de 0,6.

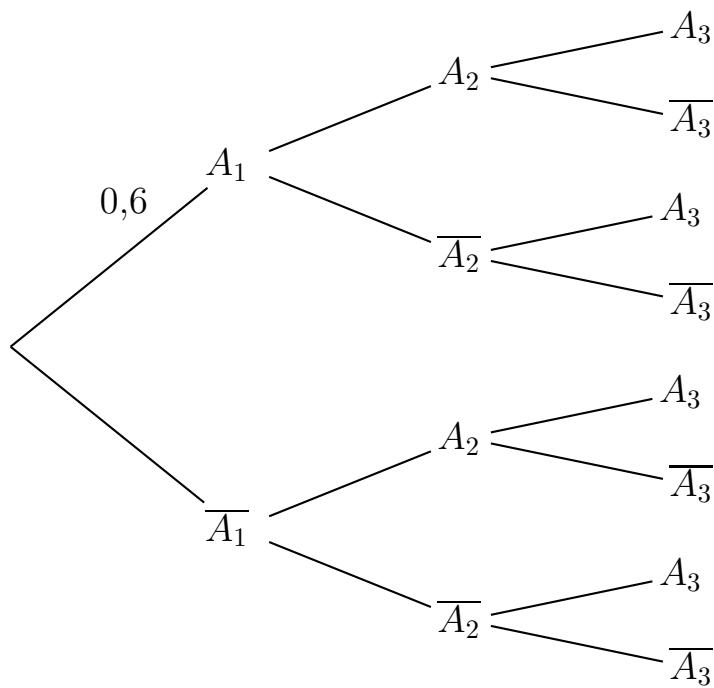
Pour tout évènement A, on note $p(A)$ sa probabilité et \bar{A} l'évènement contraire de A.

On choisit au hasard un joueur à ce jeu de tirs.

On considère les évènements suivants :

- A_1 : « Le joueur atteint la cible lors du 1^{er} tir »
- A_2 : « Le joueur atteint la cible lors du 2^e tir »
- A_3 : « Le joueur atteint la cible lors du 3^e tir ».

1. Recopier et compléter, avec les probabilités correspondantes sur chaque branche, l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur atteint sa cible au cours des trois tirs.

2. Montrer que la probabilité que le joueur atteigne exactement deux fois la cible au cours des trois tirs est égale à 0,4015.
3. L'objectif de cette question est de calculer l'espérance de la variable aléatoire X , notée $E(X)$.

- (a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,1			0,0735

- (b) Calculer $E(X)$.

- (c) Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Un groupe de 15 personnes se présente à ce stand pour jouer à ce jeu dans des conditions identiques et indépendantes.

Un joueur est déclaré gagnant lorsqu'il atteint trois fois la cible.

On note Y la variable aléatoire qui compte parmi les N personnes le nombre de joueurs déclarés gagnants.

- Justifier que Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
- Donner la probabilité, arrondie à 10^{-3} , qu'exactement 5 joueurs soient gagnants à ce jeu.

Exercice 6 (★★★) Autour de la série harmonique)

On considère la suite (h_n) définie sur \mathbb{N}^* par

$$h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \cdots + \frac{1}{n}$$

1. Déterminer le sens de variation de h
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_{2n} - h_n \geq \frac{1}{2}$
3. Montrer que pour tout $A \in \mathbb{N}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $h_{n_0} \geq A$
4. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = +\infty$
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n \leq 2\sqrt{n}$
6. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h_n}{n} = 0$

Exercice 7 (★★★)

À chaque repas, un T-rex mange soit un hadrosaure avec une probabilité $\frac{1}{3}$, soit un tricératops avec une probabilité $\frac{2}{3}$. On suppose que les compositions des repas du T-rex sont indépendantes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut calculer la probabilité qu'en n repas, le T-rex n'ait jamais mangé deux tricératops consécutivement (ex sur 3 repas : manger tricé-hadro-tricé est OK, mais PAS manger tricé-tricé-hadro).

1. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2(\frac{2}{3})^{n+1} + (-\frac{1}{3})^{n+1}$

Exercice 8 (★★★)

La boutique d'un chocolatier contient un (très) grand nombre de petits chocolats, certains au praliné et d'autres à la framboise, tous mélangés et impossible à distinguer. On note p la proportion de chocolats au praliné.

Le chocolatier n'a pas noté les quantités de chocolats réalisées et souhaite estimer la proportion p . Pour cela, il goûte 20 chocolats au hasard¹. On suppose que le nombre de chocolats est suffisamment grand pour pouvoir apprécier cela à 20 tirages indépendants avec remise. On note X le nombre de chocolats au praliné obtenus.

1. Quelle est la loi de X ?
2. La dégustation a donné 8 pralinés. Pour quelle valeur de p la quantité $P(X = 8)$ est-elle maximale ?

1. Il faut parfois savoir se sacrifier pour le bien d'un exercice de mathématiques !