

DM 01 - Logique ; Suites

À rendre le 25 septembre au plus tard

Exercice 1 (★)

Montrons par récurrence que la propriété $P_n : "1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2"$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

- *Initialisation* pour $n = 0$, $1^3 + \dots + 0^3 = 0$ (aucun terme dans la somme, si cela vous perturbe, commencez à $n = 1$, et $(\frac{0(0+1)}{2})^2 = 0$ donc P_0 est vraie
- *Hérédité* Soit $n \in \mathbb{N}$ Supposons P_n vraie.
On a $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2 + (n+1)^3$ (par hypothèse de récurrence. Et $(\frac{n(n+1)}{2})^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2(\frac{n^2}{4} + n + 1) = (n+1)^2(\frac{n^2 + 4n + 4}{4}) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = (\frac{(n+1)(n+2)}{2})^2$
- *Conclusion* La propriété est vraie au rang $n = 0$ et héréditaire elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 2 (★)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $P_n : "u_n$ est bien défini et $u_n \leq 3"$ est vraie

- *Initialisation* pour $n = 0$, u_0 est bien définie et $u_0 = 0 \leq 3$ donc P_0 est vraie
- *Hérédité* Soit $n \in \mathbb{N}$ Supposons P_n vraie.
On a $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ est bien définie car $u_n + 6 \geq 6 \geq 0$.
Par ailleurs $u_n \leq 3$ donc $u_n + 6 \leq 9$ donc $\sqrt{u_n + 6} \leq 3$ (par croissance de la fonction racine) donc $u_{n+1} \leq 3$ donc P_{n+1} vraie.
- *Conclusion* La propriété est vraie au rang $n = 0$ et héréditaire elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 3 (★ d'après Bac 2025)

Partie A : Conjecture

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{32}$

2. On conjecture que la limite de la suite est 0.

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1. On a : $w_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}$.
2. On va établir la relation de récurrence de (w_n) . Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{(n+1)+1} - \frac{1}{2}u_{(n+1)} \quad \text{en appliquant la définition de } w \text{ au rang } (n+1) \\ &= u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} \\ &= \left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{2}u_{n+1} \quad \text{en appliquant la relation de récurrence de } u. \\ &= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\ &= \frac{1}{2} \left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) \\ &= \frac{1}{2}w_n \quad \text{en appliquant la définition de } w \text{ au rang } n \end{aligned}$$

Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$.

Cette relation de récurrence établit que (w_n) est une suite géométrique, de raison $q = \frac{1}{2}$, et de premier terme $w_0 = \frac{1}{2}$.

3. Puisque la suite est géométrique, on a la propriété classique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = w_0 \times q^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

4. Soit n un entier naturel. On reprend la définition de (w_n) :

$$\begin{aligned} w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n &\iff \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \quad \text{d'après l'expression explicite de } w_n \\ &\iff u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n \end{aligned}$$

On arrive bien à la relation de récurrence demandée.

5. Montrons par récurrence que la propriété $P_n : \ll u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n \gg$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Initialisation : On a d'une part $u_0 = 0$ et, d'autre part : $0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 \times 1 = 0$.

L'affirmation est donc vraie au rang 0.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que la propriété P_n est vraie, c'est-à-dire :
 $u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On a : $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$ d'après la relation de récurrence de la question **B. 4**

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \times n \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (1 + n)$$

$$u_{n+1} = (n + 1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{c'est l'affirmation } P_{n+1}$$

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 (★★)

Pour tout entier $n \geq 3$, on définit d_n comme étant le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n côtés (une diagonale étant un segment reliant deux sommets non consécutifs).

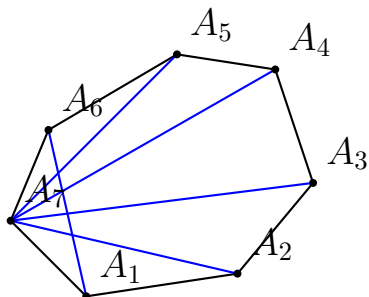
1. $d_3 = 0, d_4 = 2, d_5 = 5, d_6 = 9$ à $d_7 = 14$

2. L'allure est une parabole

3. Montrons par récurrence que la propriété $P_n \ll d_n = \frac{n(n-3)}{2} \gg$ est vraie pour tout $n \geq 3$.

• **Initialisation :** Pour $n = 3$ on a 0 diagonale et $\frac{0(0-3)}{2} = 0$ donc P_0 est vraie

• **Hérédité :** Soit $n \geq 3$ On suppose P_n . Considérons un polygone à $n + 1$ sommets $A_1 \dots A_{n+1}$



Toutes les diagonales de $A_1 \dots A_n$ sont des diagonales de $A_1 \dots A_{n+1}$.

S'ajoutent les diagonales entre A_{n+1} et les points A_2 à A_{n-1} ($n-2$ diagonales), et la diagonale $A_1 A_n$ soit $n-1$ diagonales en tout.

Donc on a $\frac{n(n-3)}{2} + (n-1)$ diagonales et $\frac{n(n-3)}{2} + (n-1) = \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} =$

$$\frac{n^2 - n - 2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2} \text{ donc } P_{n+1} \text{ est vraie}$$

- **Conclusion** La propriété est vraie au rang $n = 3$ et héréditaire elle est donc vraie pour tout $n \geq 3$

Exercice 5 (★★)

L'hérédité ne fonctionne que pour $n \geq 3$ (il faut que dans $A_2 \dots A_n$ il y ait au moins 2 points) et pas pour $n = 1$ ni $n = 2$.

Exercice 6 (★★)

Soit f la fonction polynôme de second degré, définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2.$$

On considère la suite récurrente (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour $n \geq 1$.

- (a) $u_1 = \frac{9}{4}, u_2 = \frac{209}{64}$ et $u_3 = \frac{76449}{16384}$.
 - (b) La suite semble croître vers $+\infty$.
- (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (x+1) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1 = \frac{1}{4}(x-2)^2 \geq 0$ donc $f(x) \geq (x+1)$.
 - (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n + 1$. Donc la suite est strictement croissante car $u_n + 1 > u_n$.
 - (c) Montrons par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n " $u_n \geq n$ " est vraie
 - **Initialisation** $u_0 = 1 \geq 0$ donc P_0 vraie
 - **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose P_n .
On a $u_{n+1} \geq u_n + 1 \geq n + 1$ donc P_{n+1} vraie
 - **Conclusion** La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Étant donné que $u_n \geq n$ et que $\lim n = +\infty$, la suite u diverge vers $+\infty$

Exercice 7 (★★★)

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction.

P1 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) < f(y)$

- f n'a pas de maximum
- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$
- La fonction carrée la vérifie, la fonction sinus ne la vérifie pas.

P2 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(x+T)$

- Pas vraiment possible : n'importe quelle fonction vérifie ça.

- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall T \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(x + T)$
- Toutes les fonctions la vérifient en choisissant $T = 0$

P3 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(x) = f(x + T)$

- Toutes les images par f ont au moins 2 antécédents (attention : cela ressemble à la définition quantifiée de f est périodique, mais ça ne l'est pas, il n'y a pas un T défini globalement)
- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall T \in \mathbb{R}^*, f(x) \neq f(x + T)$
- La fonction sinus la vérifie, la fonction carré ne la vérifient pas.

P4 $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)$

- f est constante.
- $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(y)$
- Les fonctions constantes la vérifient, pas les autres.

Exercice 8 (★★★; Récurrences doubles et récurrences fortes)

Dans certaines démonstration, on utilise une récurrence double ou une récurrence forte.

"Récurrence double"

Soit P_n une proposition dépendant d'un entier n . On suppose que

- **Initialisation** P_0 et P_1 sont vraies
- **Hérédité** Pour tout $n \geq 0$, $(P_n \text{ ET } P_{n+1}) \implies P_{n+2}$

Alors P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

"Récurrence forte"

Soit P_n une proposition dépendant d'un entier n . On suppose que

- **Initialisation** P_0 est vraie
- **Hérédité** Pour tout $n \geq 0$, si P_0, P_1, \dots, P_n sont vraies alors P_{n+1} est vraie

Alors P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Pour la récurrence double, on utilise Q_n : " P_n et P_{n+1} sont vraies", pour la récurrence forte on utilise Q_n " P_0, \dots, P_n sont vraies"

2. Applications :

(a) Montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n : « $u_n = 2^{n+1} + 3^n$ ».

Initialisation. ($n = 0$ et 1). On a $2^{0+1} + 3^0 = 3 = u_0$ et $2^{1+1} + 3^1 = 7 = u_1$.
Donc P_0 et P_1 sont vraies.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que P_n et P_{n+1} sont vraies. Alors,

$$\begin{aligned}
 u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \\
 &= 5(2^{n+2} + 3^{n+1}) - 6(2^{n+1} + 3^n) \quad (\text{avec } P_n \text{ et } P_{n+1}) \\
 &= 5 \times 2^n \times 2^2 + 5 \times 3^n \times 3 - 6 \times 2^n \times 2 - 6 \times 3^n \\
 &= 2^n \times (20 - 12) + 3^n \times (15 - 6) \\
 &= 2^n \times 2^3 + 3^n \times 3^2 \\
 &= 2^{n+3} + 3^{n+2}, \quad \text{d'où } P_{n+2}.
 \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = 2^{n+1} + 3^n.}$

- (b) On considère une suite (u_n) qui vérifie $u_0 = 1$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$. Montrons par récurrence forte que P_n " $u_n \leq 2^n$ " est vraie

Initialisation ($n = 0$). On a $2^0 = 1 \geq u_0$. L'inégalité est vraie au rang 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ (fixé quelconque).

On suppose que pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a $u_k \leq 2^k$ (càd $u_0 \leq 2^0, u_1 \leq 2^1, \dots, u_n \leq 2^n$).

Montrons qu'alors $u_{n+1} \leq 2^{n+1}$. D'après l'énoncé

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &\leq u_0 + u_1 + \dots + u_n \\
 &\leq 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n \quad (\text{par hyp. de réc., en sommant les inégalités que l'on a}) \\
 &= \frac{2^{n+1} - 2^0}{2 - 1} \quad (\text{somme des termes d'une suite géométrique}) \\
 &= 2^{n+1} - 1 \\
 &\leq 2^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n \leq 2^n.}$

- (c) Montrons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété P_n : " n peut s'écrire comme la somme de puissances de 2 toutes distinctes" est vraie.

- **Initialisation** $1 = 2^0$
- **Hérédité** Supposons P_0, \dots, P_n vraies. Alors soit $n + 1$ est pair et $n + 1 = 2k$ et P_k est vraie donc $k = 2^{a_1} + \dots + 2^{a_i}$ et $n + 1 = 2^{a_1+1} + \dots + 2^{a_i+1}$ donc P_{k+1} est vraie. Sinon, $n + 1$ est impair et $n = 2^{a_1} + \dots + 2^{a_i}$ et 2^0 n'intervient pas dans cette décomposition (n étant pair) donc $n + 1 = 2^{a_1} + \dots + 2^{a_i} + 2^0$ donc P_n vraie
- **Conclusion** La propriété est vraie au rang 1 et héréditaire elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Cela représente l'écriture en binaire du nombre.

Exercice 9 (★★★)

Vrai ou Faux ? Justifier soigneusement votre réponse

1. Si u tend vers 0 alors $u_n < 1$ à partir d'un certain rang

Vrai, car à partir d'un certain rang tous les termes sont dans l'intervalle $] - 1; 1[$ (intervalle ouvert contenant 0)

2. Faux (par exemple $u_n = (-\frac{1}{2})^n$)

3. Faux $u_n = -n, v_n = n$

4. Vrai. Si v diverge vers un infini, $u + v$ aussi, si v n'a pas de limite, $u + v$ non plus

5. Faux $u_n = v_n = (-1)^n$