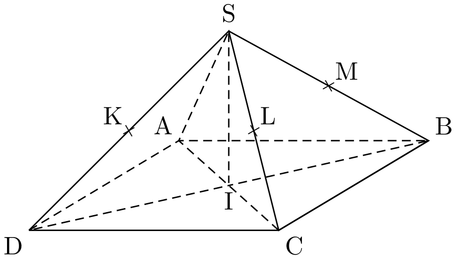
DM 04 - À rendre le 11 décembre au plus tard

- Le DM est facultatif. Il est à rendre le 11/12 au plus tard. Il est possible de le rendre plus tôt et de le rendre plusieurs fois afin de corriger ses erreurs et d'améliorer sa note.
- Vous avez du temps, merci de soigner la présentation (**Une copie trop peu soignée ne sera pas corrigée.**) et la rédaction !
- Il est permis de chercher à plusieurs, mais chacun devra rédiger sa copie seul avec ses propres mots. Deux copies identiques n'obtiendront aucune note.
- Un DM = (au moins) 3 exercices (je prendrai en compte les 3 mieux réussis).
- Si votre moyenne actuelle est ≥ 15, le total des étoiles des trois exercices traités doit être $\geqslant 7$

Exercice 1 (★)



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.

Le point I est le centre du carré ABCD.

On suppose que : IC = IB = IS = 1.

Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Parmi ces droites, lesquelles sont coplanaires ?

   a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

   On se place à présent dans le repère $\left(\mathrm{I}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{IC}}, \overrightarrow{\mathrm{IB}}, \overrightarrow{\mathrm{IS}}\right)$, on admet que ce repère est orthonormé.
2. Donnez les coordonnées des points I, A, B, C, D, S dans ce repère.
3. On note N le milieu de $[KL]$. Calculer les coordonnées de N

4. Donnez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$
5. Donnez une représentation paramétrique de la droite (AS)
6. Donnez une représentation paramétrique du plan (SAC)

Exercice 2 (★)

Les deux parties sont indépendantes

Partie A Calculer les dérivées des fonctions suivantes

1. $f(x) = (5x^2+1)^7$
2. $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$
3. $h(x) = \sqrt{x^4+x^3+2}$
4. $k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}}$
5. $l(x) = \sqrt{e^{x^2+1}}$

Partie B

1. Étudier la convexité des fonctions suivantes et préciser les éventuels points d'inflexion
   (a) $f(x) = -2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$
   (b) $g(x) = e^x - e^{-x}$
   (c) $h(x) = xe^x$
2. On donne le tableau de variations d'une fonction définie sur $[-1;5]$ Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter $\mathcal{C}_f$, sachant que f est convexe sur $[-1;2]$ et concave sur $[2;5]$

x	-1	3	5
$f(x)$	-1 ↗	2 ↘	-1

Exercice 3 (★)

On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{u_n+4}$

On note f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$

1. (a) Étudiez les variations de f sur $[0;1]$. En déduire que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \in [0;1]$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$

2. Calculer les 5 premiers termes de la suite et émettre une hypothèse sur son sens de variation et sa limite éventuelle
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$
   (b) En déduire le sens de variations de la suite u
4. Monter que la suite u est convergente
5. Justifier que la limite de u est solution de l'équation $f(x) = x$. Déterminer alors cette limite.

Exercice 4 (★★)
Les deux parties sont indépendantes.
On considère un cube $ABCDEFGH$
Partie A

1. Réaliser une figure et placer les points I, J, K tels que :
   — I le milieu de $[EF]$
   — J le milieu de $[EH]$
   — K le point tel que $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$
2. On munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$
   (a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (AE)
   (b) Déterminer un couple de vecteurs directeurs du plan (FHK)
   (c) Démontrer que la droite (AE) et le plan (FHK) ne sont pas parallèles
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection M de (AE) et (FHK) et le placer sur la figure.

Partie B Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier.
$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère.
$\mathcal{P}$ est le plan qui passe par $A(1; 0; -2)$ de vecteurs $\vec{u}(-1; 0; -3)$ et $\vec{v}(0; 1; 2)$

1. Affirmation 1 : le point $M(-1; -1; 10)$ est un point du plan $\mathcal{P}$
2. Affirmation 2 : la droite d qui passe par $B(0; -1; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{w}(1; -2; 4)$
3. Affirmation 3 : le plan $\mathcal{P}'$ qui passe par $C(-1; 2; -1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}'(-1; 1; -1)$ et $\vec{v}'(-3; 2-5)$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$

Exercice 5 (★★)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f, c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x :
$$f''(x) = (x-2)e^{-x}$$
4. Étudier la convexité de la fonction f.
5. Étudier les variations de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.
   Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
6. En déduire le signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
7. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
   Donner un encadrement de α, au centième près.
8. On considère la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ.

Exercice 6 (★★★)
Partie A : Barycentre de deux points pondérés
A et B sont deux points de l'espace et a et b deux nombres tels que $a + b \neq 0$

1. Montrer qu'il existe un unique point G tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$
   G est alors appelé barycentre des points pondérés $(A; a)$ et $(B; b)$
2. Montrer que si G est le barycentre des points pondérés (A,a) et $(B; b)$ alors pour tout $k \neq 0$, G est le barycentre des points pondérés (A,ka) et $(B; kb)$
3. Que dire de G lorsque $a = b$

Partie B : Barycentre de trois points pondérés
A, B, C sont trois points de l'espace et a,b,c tels que $a + b + c \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un unique point G tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$
   On appelle ce point le barycentre des poins pondérés $(A,a), (B,b), (C,c)$ (on peut étendre cette définition à 4 points ou davantage).
2. On considère G, barycentre des points $(A,a), (B,b), (C,c)$ et H le barycentre des points $(A,a), (B,b)$. Montrer que G est le barycentre des points $(H,a+b)$ et (C,c).
   On appelle cette propriété l'associativité du barycentre

3. On donne les coordonnées de A,B,C dans un repère $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ et $C(x_C; y_C; z_C)$. Quelle sont les coordonnées de G, barycentre des points (A,a), (B,b), (C,c) ?

Partie C : Fonction vectorielle de Leibniz

A, B, C sont trois points de l'espace et a,b,c des réels.

On considère f la fonction qui a tout point M de l'espace associe le vecteur $\overrightarrow{f(M)} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$

1. Dans cette question, on suppose que $a + b + c \neq 0$, et on note G le barycentre des points (A,a), (B,b), (C,c).
   Montrer que pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{f(M)} = (a + b + c)\overrightarrow{MG}$
2. Dans cette question, on suppose $a + b + c = 0$. Montrer que pour tous points M et N de l'espace, $\overrightarrow{f(M)} - \overrightarrow{f(N)} = \vec{0}$. Que peut-on en déduire sur la fonction f ?
3. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul. Déterminer les points M de l'espace tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ soient colinéaires.
4. Déterminer l'ensemble des points de l'espace tels que $\| 2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} \| = 3$
5. Justifier que le vecteur $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M

Exercice 7 (★★★)

Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous $a,b \in \mathbb{R}$, $f(a + b) = f(a) + f(b)$

1. Que vaut $f(0)$?
2. Montrer que f est impaire
   Dans la suite de l'exercice, on note $\lambda = f(1)$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = \lambda x$
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{Z}, f(x) = \lambda x$
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(\frac{1}{n}) = \frac{\lambda}{n}$
6. Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = \lambda r$
7. Sachant que, pour tout nombre réel x, il existe une suite (r_n) de nombres rationnels qui converge vers x (bonus : justifier l'existence d'une telle suite), prouver que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x$

Exercice 8 (★★★, Démonstration TVI)

Le but de cet exercice est de démontrer le Théorème des Valeurs Intermédiaires.

On considère une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **continue** sur l'intervalle $[a,b]$. On suppose que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

On cherche à montrer qu'il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

Dans cet exercice, on construit ce réel c à l'aide d'une méthode de **dichotomie**.

1. On pose $m_0 = \dfrac{a+b}{2}$.
   a) Montrer que parmi les deux intervalles $[a,m_0]$ et $[m_0,b]$, il en existe au moins un sur lequel f prend une valeur négative en l'une des bornes et une valeur positive en l'autre.
   b) En déduire que l'on peut définir un segment $[a_1,b_1] \subset [a; b]$
   $$f(a_1) \leq 0 \qquad \text{et} \qquad f(b_1) \geq 0.$$
2. Montrer que l'on peut construire par récurrence des segments $[a_n; b_n]$ tels que
   - $f(a_n) \leq 0$ et $f(b_n) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   - $[a_{n+1},b_{n+1}] \subset [a_n,b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   - $b_n - a_n$ tend vers 0

   On pourra poser $m_n = \dfrac{a+b}{2}$
3. En utilisant le bonus du DS 1 [1] (qu'on n'hésitera pas à re-démontrer), montrer que les deux suites a_n et b_n convergent. On note leur limite commune c
4. Montrer que $f(c) = 0$
5. On suppose à présent f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, et k, un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Montrer qu'il existe un nombre $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$. On pourra considérer $g(x) = f(x) - k$

1. Dans ce bonus, on a démontré que si (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et $u_n - v_n$ converge vers 0, alors u et v convergent vers une même limite ℓ