DM 06 - À rendre le 26 février au plus tard

- Le DM est facultatif. Il est à rendre le 26/02 au plus tard. Il est possible de le rendre plus tôt et de le rendre plusieurs fois afin de corriger ses erreurs et d'améliorer sa note.
- Vous avez du temps, merci de soigner la présentation (**Une copie trop peu soignée ne sera pas corrigée.**) et la rédaction !
- Il est permis de chercher à plusieurs, mais chacun devra rédiger sa copie seul avec ses propres mots. Deux copies identiques n'obtiendront aucune note.
- Un DM = (au moins) 3 exercices (je prendrai en compte les 3 mieux réussis).
- Si votre moyenne T1 est ≥ 12, le total des étoiles des trois exercices doit être $\geqslant 5$, si elle est ≥ 15, le total des étoiles des trois exercices traités doit être $\geqslant 7$

Exercice 1 (★)
Les deux questions sont indépendantes

1. On considère un cube $ABCDEFGH$.
   (a) Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG}$ et en déduire la valeur de l'angle $\widehat{CAG}$
   (b) On considère M un point de la droite (AD). Montrer que le triangle GCM est rectangle en C.
2. On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point $(16; 1; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1; -2; 3)$.
   (a) Montrer que l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $x - 2y + 3z - 17 = 0$
   (b) On considère le point $A(2; 5; -1)$. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale à $\mathscr{P}$
   (c) Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$.

Exercice 2 (★)
Les deux questions sont indépendantes

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2$
   (b) $g(x) = 4e^x - 2$
   (c) $h(x) = e^{2x+1}$
   (d) $k(x) = 4(3x - 1)^5$
   (e) $l(x) = \dfrac{7x}{x^2 + 4}$
2. Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer la solution f qui vérifie la condition donnée

   (a) $y' = 7y$ et $f(0) = 1$
   (b) $y' + \dfrac{1}{4}y = 0$ et $f(3) = -1$
   (c) $y' = 3y$ et $f'(1) = 2$
   (d) $y' = 7y - 5$ et $f(-2) = -3$
   (e) $y' = 4y - 3$ et $f'(0) = -3$

Exercice 3 (★)
Pour chacune des affirmation suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant soigneusement

1. On considère l'équation différentielle $y' = 2y - e^x$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + e^{2x}$ est solution de cette équation différentielle.
2. On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle I, et F et G leurs primitives respectives. FG est une primitive de fg
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n}{2 + cosn}$. La suite u_n diverge vers $+\infty$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(x^2) > \ln(2x)$
5. Si $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$ alors $y = 2$ est une asymptote à la courbe représentative de f
6. Si pour tout $x > 0$, $1 \leq f(x) \leq x$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$
7. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (\dfrac{1}{2})^n$, et la suite (S_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $S_n = u_0 + \cdots + u_n$. La suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 4 (★★)
Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que 1 m^3 = 1 000 L. Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.

Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en mg$\cdot$L^{-1}, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et 3 mg $\cdot$ L^{-1}.

Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.

Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à 0,01 mg $\cdot$ L^{-1}. Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de 0,70 mg $\cdot$ L^{-1}.

Partie A : étude d'un modèle discret.

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de $0{,}3\,\mathrm{mg}\cdot\mathrm{L}^{-1}$.
2. Pour tout entier naturel n, on note v_n le taux de chlore, en $\mathrm{mg}\cdot\mathrm{L}^{-1}$, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0{,}7$.
   On admet que pour tout entier naturel n,
   $$v_{n+1} = 0{,}92v_n + 0{,}3.$$
   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse.
4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-après écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

```
def alerte_chlore(s) :
    n = 0
    u = 0.7
    while ... :
        n = ...
        u = ...
    return n
```

5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)` ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : étude d'un modèle continu.

Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.

Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en $\mathrm{mg}\cdot\mathrm{L}^{-1}$, dans la piscine.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle $(E) : y' = -0{,}08y + \dfrac{q}{50}$, où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = Ce^{-0{,}08x} + \dfrac{q}{4}$ où C est une constante réelle.
2. (a) Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.
   (b) On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à $0{,}7\,\mathrm{mg}\cdot\mathrm{L}^{-1}$.
   On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de $2\,\mathrm{mg}\cdot\mathrm{L}^{-1}$. Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.

Exercice 5 (★★)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère :

- les points $\mathrm{A}(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$, $\mathrm{B}(1\ ;\ -1\ ;\ 2)$ et $\mathrm{C}(1\,;1\,;1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{3}{2} + 2t \\ y & = & 2 + t \\ z & = & 3 - t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R};$$

- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & s \\ y & = & \frac{3}{2} + s \\ z & = & 3 - 2s \end{array}\right. \quad \text{avec } s \in \mathbb{R};$$

Partie A

1. Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point $\mathrm{S}\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ 4\right)$.
2. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC)
   (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :
   $$x + 2y + 4z - 7 = 0.$$
3. Démontrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
4. (a) Démontrer que le point $\mathrm{H}(-1\ ;\ 0\ ;\ 2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC)
   (b) En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $\mathrm{S}M < \dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

On considère un point M appartenant au segment [CS]. On a donc $\overrightarrow{\mathrm{C}M} = k\overrightarrow{\mathrm{CS}}$ avec k réel de l'intervalle $[0\,;1]$.

1. Déterminer les coordonnées du point M en fonction de k.
2. Existe-t-il un point M sur le segment [CS] tel que le triangle $(M\mathrm{AB})$ soit rectangle en M ?

Exercice 6 (★★)
Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On s'intéresse aux fonctions f dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$ vérifiant les conditions

$$\begin{cases} (1) : f'(x) = 4 - [f(x)]^2 \text{ pour tout réel } x \text{ appartenant à } [0\ ;\ +\infty[\\ (2) : f(0) = 0 \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique fonction f vérifiant simultanément (1) et (2).

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante. L'annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A. Étude d'une suite

Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2.

On obtient ainsi une suite de points notés (M_n), d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n telles que :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ x_{n+1} = x_n + 0{,}2 \\ y_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ y_{n+1} = -0{,}2y_n^2 + y_n + 0{,}8 \end{cases}$$

1. (a) Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau suivant.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4					
y_n	0	0,800 0	1,472 0					

Compléter ce tableau. On donnera les résultats à 10^{-4} près.

(b) Placer, sur un graphique, les points M_n pour n entier naturel inférieur ou égal à 7.

(c) D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence ?

2. (a) Pour x réel, on pose $p(x) = -0{,}2x^2 + x + 0{,}8$. Montrer que si $x \in [0\ ;\ 2]$ alors $p(x) \in [0\ ;\ 2]$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant y_n \leqslant 2$.

(c) Étudier le sens de variation de la suite (y_n).

(d) La suite (y_n) est-elle convergente ?

Partie B. Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 2\left(\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}\right)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe représentative.

1. Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).
2. (a) Montrer que $(\mathcal{C}_g)$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.
   (b) Étudier les variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à $(\mathcal{C}_g)$ à l'origine.
4. Tracer dans un repère la courbe $(\mathcal{C}_g)$ et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette partie B.

Exercice 7 (★★★(une équation différentielle du second ordre))
Soit $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle

$$(E) y'' = \omega^2 y$$

1. Déterminer pour quelles valeurs du réel μ, la fonction $u : x \mapsto e^{\mu x}$ est une solution de l'équation (E) ?
2. Montrer qu'une fonction f dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ est une solution de (E) si et seulement si la fonction $g = f' - \omega f$ est une solution de l'équation différentielle : $g' + \omega g = 0$, notée (F).
3. En déduire qu'une fonction f est une solution de (E) si et seulement si il existe un réel λ tel que pour tout réel x, $f'(x) - \omega f(x) = \lambda e^{-\omega x}$.
4. Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si la fonction $h : x \mapsto e^{-\omega x} f(x)$ est telle que, pour tout réel x, $h'(x) = \lambda e^{-2\omega x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. En déduire que f est une solution de (E) si et seulement si, il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x, $f(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$.

Exercice 8 (★★★(fonction scalaire de Leibniz))
Partie A : fonction scalaire de Leibniz associée à 2 points

La fonction scalaire de Leibniz associée à deux points pondérés (A, α) et (B, β) est définie par

$$g : M \mapsto \alpha MA^2 + \beta MB^2$$

Cette fonction est définie dans le plan ou dans l'espace et est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose dans cette question que $\alpha + \beta \neq 0$.
   En désignant par G le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β) (cf Exercice 6 du DM 5 pour la définition de barycentre), montrer que pour tout point M de l'espace ou du plan,
   $$g(M) = (\alpha + \beta)MG^2 + g(G)$$
   En déduire que la fonction g atteint un extremum que l'on précisera.

2. On suppose à présent que $\alpha + \beta = 0$.
   (a) Si $\alpha = 0$, que peut-on dire de la fonction g ?
   (b) Si $\alpha \neq 0$, alors justifier que, pour tout point M de l'espace, $g(M) = 2\alpha\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$ En déduire l'ensemble des antécédents de 0 par la fonction g.

Partie B : cas général

Soit un entier naturel $n \geq 2$.

La fonction scalaire g de Leibniz, relative aux n points pondérés $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \ldots, (A_n, \alpha_n)$, associe à chaque point M du plan ou de l'espace le réel $g(M)$ défini par

$$g(M) = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \cdots + \alpha_n MA_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k MA_k^2.$$

1. Soit O un point fixé. Justifier que, pour tout point M du plan ou de l'espace $g(M) = g(O) + 2\overrightarrow{MO} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{OA_k}\right) + mMO^2,$ avec $m = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k$.
2. On suppose ici $m \neq 0$. Le point G étant le barycentre des points pondérés (A_1, α_1), $(A_2, \alpha_2), \ldots, (A_{n,}, \alpha_n)$, établir que, pour tout point M du plan ou de l'espace, $g(M) = g(G) + m \times MG^2$
3. Nous supposons que le réel $m = 0$.
   Justifier que, quel que soit le point M du plan ou de l'espace,
   $$g(M) = g(O) + 2\overrightarrow{MO} \cdot \vec{v},$$
   où $\vec{v}$ est un vecteur constant que l'on précisera.
4. Étant donné un réel λ, nous désignons par $\mathcal{F}$, l'ensemble des points M de l'espace tels que $g(M) = \lambda$.
   Déterminer la nature de cet ensemble selon que le réel m est nul ou non.

Exercice 9 (★★★)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la sphère $\mathcal{S}$ de centre $I(1, 0, 0)$ et de rayon 1.

1. Donner une équation cartésienne de cette sphère.

Soient deux points de l'espace $A(0, 0, a)$ et $B(2, b, 0)$, où a et b sont deux réels non nuls.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. Déterminer, selon les valeurs des réels a et b, le nombre de points d'inter- section de cette droite avec la sphère $\mathcal{S}$.
3. Lorsque (AB) est tangente à la sphère $\mathcal{S}$, déterminer en fonction de a et b les coordonnées du point de contact.