

DM 05 - corrigé

Exercice 1 (★)

Les deux parties sont indépendantes

Partie A Simplifier les expressions suivantes

1. $A = \ln(3) + \ln(27) - \ln(81) = \ln(3) + \ln(3^3) - \ln(3^4) = \ln(3) + 3\ln(3) - 4\ln(3) = 0$
2. $B = \ln(x+4) - \ln(4x+x^2) = \ln(x+4) - \ln(x(4+x)) = \ln(x+4) - \ln(x) - \ln(x+4) = -\ln(x)$
3. $C = \frac{e^{1+\ln(2)}}{e^{1+\ln(3)}} = \frac{e^1 e^{\ln(2)}}{e^1 e^{\ln(3)}} = \frac{2}{3}$
4. $D = e^{\ln(x-1)+\ln(x)} = e^{\ln(x-1)} e^{\ln(x)} = (x-1)x$

Partie B

1. Résoudre les équations et inéquations suivantes, après avoir précisé sur quel intervalle elles ont un sens.

(a) $\frac{e^{3x+4}}{e^{x-7}} = 4$ Cette équation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^{3x+4}}{e^{x-7}} = 4 \Leftrightarrow e^{3x+4-x+7} = 4 \Leftrightarrow e^{2x+11} = 4 \Leftrightarrow 2x+11 = \ln(4) \Leftrightarrow 2x = \ln(4) - 11 \Leftrightarrow x = \frac{\ln(4) - 11}{2}$

(b) $\ln(x^2 + 6x + 10) = 0$

On a $x^2 + 6x + 10 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ donc l'équation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\ln(x^2 + 6x + 10) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 10 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ donc $S = \{-3\}$

(c) $\ln(x^2 + 1) \geqslant 1$

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$ donc l'équation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\ln(x^2 + 1) \geqslant 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geqslant e \Leftrightarrow x^2 \geqslant e - 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -\sqrt{e-1}] \cup [\sqrt{e-1}; +\infty[$

(d) $\ln(\sqrt{x}) = -1$

Cette équation a un sens pour $x > 0$

Soit $x > 0$. On a $\ln(\sqrt{x}) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(x) = -1 \Leftrightarrow \ln(x) = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$ donc $S = \{e^{-2}\}$

(e) $\ln(3e^x - 4) < 0$

Cette équation a un sens lorsque $3e^x - 4 > 0$, c'est à dire quand $e^x > \frac{4}{3}$, c'est

à dire lorsque $x > \ln(\frac{4}{3})$ Soit $x > \ln(\frac{4}{3})$

$$\ln(3e^x - 4) < 0 \Leftrightarrow 3e^x - 4 < 1 \Leftrightarrow 3e^x < 5 \Leftrightarrow e^x < \frac{5}{3} \Leftrightarrow x < \ln(\frac{5}{3})$$

$$\text{Donc } S =]\ln(\frac{4}{3}); \ln(\frac{5}{3})[$$

(f) $(1 + \ln(2x))(2 - \ln(x)) \leqslant 0$

Cette équation a un sens pour $x > 0$.

$$\text{Soit } x > 0 \text{ On a } 1 + \ln(2x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln(2x) \leqslant -1 \Leftrightarrow 2x \leqslant e^{-1} \Leftrightarrow x \leqslant \frac{e^{-1}}{2}$$

$$\text{Et on a } 2 - \ln(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant 2 \Leftrightarrow x \geqslant e^2$$

x	0	$\frac{1}{2e}$	e^2	$+\infty$
$1 + \ln(2x)$	-	0	+	+
$2 - \ln(x)$	+	+	0	-
$(1 + \ln(2x))(2 - \ln(x))$	-	0	0	-

$$\text{Donc } S =]-\infty; \frac{1}{2e}[\cup]e^2; +\infty[$$

2. Déterminer le plus petit entier n tel que

(a) On a $2^n \geq 10^8 \Leftrightarrow \ln(2^n) \geq \ln(10^8) \geq n \ln(2) \geq 8 \ln(10) \geq n \geq \frac{8 \ln 10}{\ln 2}$, avec la calculatrice on trouve que le plus petit entier qui convient est 27

(b) $(\frac{1}{5})^n \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \ln((\frac{1}{5})^n) \leq \ln(10^{-3}) \Leftrightarrow n \ln(\frac{1}{5}) \leq \ln(10^{-3}) \Leftrightarrow n \leq \frac{\ln(10^{-3})}{\ln(\frac{1}{5})}$: on trouve que le plus petit entier qui convient est 5

Exercice 2 (★) 1. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes sur les intervalles donnés :

(a) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{x \ln(x)}$

(b) $g'(x) = \ln(1 + e^x) + x \frac{e^x}{1 + e^x}$

(c) $h(x) = \ln(\frac{x+5}{x-1}) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = \frac{x+5}{x-1}$ et $u'(x) = \frac{x-1-x-5}{(x-1)^2} = \frac{-6}{(x-1)^2}$ donc $h'(x) = \frac{\frac{-6}{(x-1)^2}}{\frac{x+5}{x-1}} = \frac{-6}{(x-1)(x+5)}$

(d) $k'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2(1-x)}$

$$(e) l'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1-\ln(x)) - (1+\ln(x))(-\frac{1}{x})}{(1-\ln(x))^2} = \frac{-2\ln(x)}{x(1-\ln(x))^2}$$

2. Déterminer les limites suivantes

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 + \ln(x)}{\ln(x)} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1} (3 + \ln x) = 3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x) = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) - x^2 = -\infty \text{ par somme de limites.}$$

De plus, $f(x) = \ln(x) - x^2 = x^2(\frac{\ln(x)}{x^2} - 1)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ par croissances comparées donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

$$(c) \text{ On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) \ln(e^x - 1) = +\infty \text{ par produit de limites.}$$

De plus, $f(x) = (e^x - 1) \ln(e^x - 1) = X \ln(X)$ avec $X = e^x - 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = 0$ donc par croissances comparées $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0} X \ln(X) = 0$ par croissances comparées.

$$(d) f(x) = (\ln(x))^2 - \ln(x) = \ln(x)(\ln(x) - 1) \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Exercice 3 (★)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^{+*} par

$$f(x) = x(1 - \ln(x))$$

et \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère.

1. On a $x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ donc $f(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$

x	0	e	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln(x)) = -\infty$ par produit de limites

De plus, $x(1 - \ln(x)) = x - x \ln(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x - x \ln(x) = 0$ par sommes de limites et croissances comparées

$$3. f'(x) = 1 - \ln(x) + x(-\frac{1}{x}) = -\ln(x)$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	0	1	$-\infty$

4. f' est décroissante donc f est concave.

5. Soit $a > 0$. On considère la tangente \mathcal{T}_a au point d'abscisse a

$$(a) \mathcal{T}_a : y = f'(a)(x - a) + f(a) = -\ln(a)(x - a) + a - a \ln(a) = -\ln(a)x + a$$

(b) Le point d'intersection de \mathcal{T}_a avec l'axe des ordonnées est le point de coordonnées $(0; a)$

(c) On a 2 points donc on peut tracer la tangente.

Exercice 4 (★★)

1. Affirmation 1 : Vraie

Pour tout entier naturel $n : n \geq 0 \Rightarrow n + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq 1$ et $-\frac{1}{n+1} \geq -1$.

De plus, pour tout entier naturel $n, -1 \leq (-1)^n \leq 1$.

D'où $\frac{-1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ car $n + 1 > 0$

finalement on a : $-1 \leq \frac{-1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq 1$.

La suite u est bornée par -1 et 1.

2. Affirmation 2 : Fausse

Pour montrer qu'une affirmation est fausse, il suffit de donner un contre-exemple : Considérons la suite u définie sur \mathbb{N} par $u_n = (-1)^n$.

Cette suite est bornée par -1 et 1 mais elle n'est pas convergente.

3. Affirmation 3 : Fausse

Pour montrer qu'une affirmation est fausse, il suffit de donner un contre-exemple :

Considérons la suite u définie sur \mathbb{N} par $u_n = -\frac{1}{n}$.

Cette suite est croissante et converge vers 0.

4. Affirmation 4 : Fausse

Pour étudier la convexité d'une fonction, il faut déterminer le signe de sa dérivée seconde.

f est dérivable sur \mathbb{R} comme composée de fonctions dérивables.

f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = x^2 + 2x + 2$. On a $u'(x) = 2x + 2$.

$f' = \frac{u'}{u}$ donc, pour tout réel $x, f'(x) = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2}$.

f' est de la forme $\frac{v}{w}$ avec $v(x) = 2x + 2$ et $w(x) = x^2 + 2x + 2$.

On a $v'(x) = 2$ et $w'(x) = 2x + 2$.

$f'' = \frac{v' \times w - w' \times v}{w^2}$ donc, pour tout réel $x, f''(x) = \frac{2 \times (x^2 + 2x + 2) - (2x + 2) \times (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2}$

$f''(x) = \frac{2x^2 + 4x + 4 - 4x^2 - 8x - 4}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{-2x^2 - 4x}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{-2x(x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2}$.

Un carré est toujours strictement positif, $f''(x)$ est donc du signe de $-2x(x + 2)$ qui est une fonction polynôme du second degré avec un coefficient dominant négatif (-2) et qui a pour racines 0 et -2.

On a donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	0

On a déduit que f est concave sur $]-\infty ; -2]$ et sur $[0 ; +\infty[$, et elle est convexe sur $[-2 ; 0]$.

Elle n'est donc pas convexe sur $[-3 ; 1]$.

5. Affirmation 5 : vraie

On initialise M avec le premier terme de la suite, puis l'algorithme va comparer chaque terme de la liste à M , si un terme est supérieur à M , il va remplacer M .

Cet algorithme donne donc la valeur maximale des termes de la suite, soit 7 dans notre cas.

6. Affirmation 6 : Faux. $E(X) = np = 36$ et $V(X) = np(1-p) = 9$ donc $1-p = \frac{1}{4}$

donc $p = \frac{3}{4}$ et $n = 48$ donc $P(X = 29) \simeq 0.01$

7. Affirmation 7 : Vrai. $P(X \geq 90) \simeq 0.086$ et $P(X \leq 75) \simeq 0.26$

Exercice 5 (★★★)

Partie 1

Soit g la fonction définie pour tout réel $x \in]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2 \ln x}{x}$.

1. On note g' la dérivée de g . On a : $g'(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x - 2 \ln x \times 1}{x^2} = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}$

2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$:

x	0	1	e	$+\infty$
Variations de g		0	$\frac{2}{e}$	0

(a) La valeur $\frac{2}{e}$ est l'image de e par f : $f(e) = \frac{2 \ln e}{e} = \frac{2}{e}$.

(b) $g'(x) = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}$ donc $g'(x)$ est du signe de $2 - 2 \ln x = 2(1 - \ln x)$.

- Sur $]0 ; e[$, $\ln x < 1$ donc $1 - \ln x > 0$ donc $g'(x) > 0$; la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle.

- Sur $]e ; +\infty[$, $\ln x > 1$ donc $1 - \ln x < 0$ donc $g'(x) < 0$; la fonction g est strictement décroissante sur cet intervalle.

(c) On justifie les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2 \ln x = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$.

Donc, par produit de limites, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2 \ln x \times \frac{1}{x} = -\infty$.

- D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

3. On en déduit le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
signe de $g(x)$		-	0

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = [\ln(x)]^2$. Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

1. $[(u(x)^2)'] = 2u'(x)u(x)$ donc $f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{2 \ln x}{x} = g(x)$

Donc sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, la fonction f est une primitive de la fonction g .

2. (a) On étudie la convexité de la fonction f .

D'après les questions précédentes, la fonction g , dérivée de la fonction f , est croissante sur $]0 ; e[$, donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.

De même, la fonction g , dérivée de la fonction f , est décroissante sur $]e ; +\infty[$, donc la fonction f est concave sur cet intervalle.

De plus, la fonction g donc la fonction f' , change de sens de variation en $x = e$, donc la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion en $x = e$.

(b) On étudie les variations de la fonction f en utilisant le signe de $f' = g$.

Sur l'intervalle $]0 ; 1[$, la fonction g est négative donc f' est négative; la fonction f est donc strictement décroissante sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$, la fonction g est positive donc f' est positive; la fonction f est donc strictement croissante sur cet intervalle.

De plus on peut dire que la fonction f admet un minimum pour $x = 1$.

3. (a) Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse e est : $y = f'(e)(x - e) + f(e)$. On a : $f'(e) = g(e) = \frac{2}{e}$; $f(e) = (\ln e)^2 = 1$

L'équation devient : $y = \frac{2}{e}(x - e) + 1$ soit $y = \frac{2}{e}x - 2 + 1$ c'est-à-dire $y = \frac{2}{e}x - 1$.

- (b) La courbe représentant f admet un point d'infexion en $x = e$ donc la tangente en ce point coupe la courbe ; à gauche du point, la fonction est convexe donc la courbe est au dessus de cette tangente.

On en déduit que sur $]0 ; e]$, on a : $[\ln(x)]^2 \geq \frac{2}{e}x - 1$.

Exercice 6 (★★★)

On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

Partie A

$$\begin{aligned} 1. \quad (a) \quad u_1 &= \sqrt{u_0} = \sqrt{2} \\ u_2 &= \sqrt{u_1} = \sqrt{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

- (b) À l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que la suite est décroissante et converge vers 1.

2. (a) Posons, pour tout entier naturel n , l'affirmation P_n : « $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ ».

Initialisation : On a calculé $u_1 = \sqrt{2} \approx 1,414$ et $u_0 = 2$

On a donc bien $1 \leq u_1 \leq u_0$.

L'affirmation P_0 est donc vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. On suppose que l'affirmation P_n est vraie, c'est-à-dire que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Montrons que l'affirmation P_{n+1} est vraie, c'est à dire que $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \implies \sqrt{1} \leq \sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{u_n} \\ \text{car la fonction racine carrée est croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ \implies 1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \end{aligned}$$

Si, pour n naturel, P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie également.

Conclusion : L'affirmation P_0 est vraie, et, pour tout entier naturel non nul n , la véracité de l'affirmation est héréditaire : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel non nul n , on a : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

- (b) D'après la question précédente, pour tout entier n , $1 \leq u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par 1.

Et pour tout entier n , $u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.

Or toute suite décroissante et minorée est convergente donc, la suite (u_n) est convergente vers une limite $\ell \geq 1$.

- (c) Soit $x \in [0 ; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} = x &\iff x = x^2 \text{ car } x \geq 0 \\ &\iff x^2 - x = 0 \\ &\iff x(x - 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

L'équation $\sqrt{x} = x$ admet deux solutions sur $[0 ; +\infty[$: 0 et 1.

- (d) La suite (u_n) est convergente vers ℓ et est définie par récurrence par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction racine carrée qui est continue sur $[0 ; +\infty[$.

D'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. Nous avons résolu cette équation à la question précédente, les solutions sont 0 et 1, or d'après la question A. 1. b., $\ell \geq 1$ donc $\ell = 1$.
donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Partie B

$$\begin{aligned} 1. \quad (a) \quad \text{Soit } n \in \mathbb{N} : v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) \\ &= \ln(\sqrt{u_n}) \\ &= \frac{1}{2} \ln(u_n) \\ &= \frac{1}{2} v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln(u_0) = \ln(2)$.

$$(b) \quad \text{On a donc, pour tout entier naturel } n, \quad v_n = v_0 \times q^n = \ln(2) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\ln(2)}{2^n}.$$

$$(c) \quad \text{Or, pour tout entier naturel } n, \quad v_n = \ln(u_n) \text{ donc } \frac{\ln(2)}{2^n} = \ln(u_n) \text{ c'est à dire :} \\ \ln(2) = 2^n \ln(u_n).$$

2. (a) À l'aide de la calculatrice on trouve que pour tout $k < 7$, $u_k > 1,01$ et $u_7 \approx 1,00543$ donc $k = 7$.

- (b) On décide de prendre $x - 1$ comme approximation de $\ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0,99 ; 1,01[$ donc $\ln(u_7) \approx u_7 - 1 \approx 0,00543$.

- (c) D'après les questions 1. c. et 2. b. de la partie B une approximation de $\ln(2)$ est $2^7 \ln(u_7)$ soit $2^7 \times 0,00543$ c'est à dire 0,695.

3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.

```

FROM math import*
DEF Briggs(a):
    n = 0
    WHILE a >= 1.01:
        a = SQRT(a)
        n = n+1
    L = 2**n * (a-1)
RETURN L

```

Exercice 7 (★★★)(Retour sur la série harmonique))

Dans cet exercice, on considère la série harmonique définie par $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On l'a déjà étudiée au DM 2, mais on va démontrer différemment sa divergence, et découvrir la constante d'Euler-Mascheroni.

Partie A : divergence de h_n

- On étudie le signe de $f(x) = \ln(x+1) - (x - \frac{x^2}{2})$, en dérivant, cf ex 99. Pour l'autre inégalité on l'a montrée avec la convexité à l'exemple 5 du cours (on peut aussi le faire avec $\ln(x+1) - x$).
- $\ln(k+1) - \ln(k) = \ln(\frac{k+1}{k}) = \ln(1 + \frac{1}{k})$. On utilise ensuite la question 1 qui nous donne $\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$
De plus $\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{k+1} = \frac{k-1}{2k^2(k+1)} \geq 0$ donc $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2}$ ce qui nous donne l'inégalité recherchée.
- On somme l'inégalité de la question 2 pour k de 1 à $n-1$ ($n \geq 2$)

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$h_n - 1 \leq \ln(n) - \ln(1) \leq h_n - \frac{1}{n}$$
donc $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq h_n \leq \ln(n) + 1$
- $h_n \geq \ln(n) + \frac{1}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) + \frac{1}{n} = +\infty$ donc par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = +\infty$
- On divise l'inégalité de la question 2 par $\ln(n)$, $1 + \frac{1}{n \ln(n)} \leq \frac{h_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$
donc par théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h_n}{\ln(n)} = 1$.

Partie B : la constante d'Euler-Mascheroni

- En $+\infty$, $h_n - \ln(n)$ semble tendre vers environ 0,577

- On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leq 0$ donc u décroissante
On a $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1)) \geq 0$ donc v croissante
De plus $u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(\frac{n+1}{n}) = \ln(1 + \frac{1}{n})$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$
Ainsi, u et v sont adjacentes.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n \leq \gamma \leq u_n$ donc $v_n - u_n \leq \gamma - u_n \leq 0$ donc $0 \leq u_n - \gamma \leq \ln(1 + \frac{1}{n})$
donc $0 \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{n}$
- $\gamma \simeq 0,577$

Exercice 8 (★★★)(Valeur approchée de e))

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

- Cf exercice précédent.
- $v_n = \ln((1 + \frac{x}{n})^n) = n \ln(1 + \frac{x}{n})$
On utilise l'inégalité précédente

$$\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} \leq \ln(1 + \frac{x}{n}) \leq \frac{x}{n}$$
 donc $x - \frac{x^2}{2n} \leq v_n \leq x$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = x$
- $u_n = e^{v_n}$ donc par composition $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^x$

```

1 FROM math import *
2 DEF suitexp(x,n) :
3     u=(1+x/n)**n
4 RETURN(u)

```

La méthode pour obtenir une approximation de e semble assez peu efficace, on converge assez lentement vers e .

Exercice 9 (★★★)(Inégalité arithmético-géométrique))**Propriété**

Soit f une fonction convexe sur I , et $a, b \in I$. Alors

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

Étant donné $n \geq 2$ réels strictement positifs a_1, \dots, a_n , on définit les moyennes arithmétiques \bar{a} et géométriques \overline{g} par

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

et

$$\bar{g} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} = \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

1. Soit f une fonction convexe sur I . Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 2$,

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i) \text{ pour tous } a_1, \dots, a_n \in I$$

Initialisation Pour $n = 2$, il faut montrer $f\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \leq \frac{f(a_1) + f(a_2)}{2}$: c'est la

propriété avec $t = \frac{1}{2}$

Héritéité Supposons la propriété vraie au rang n

Soient $a_1, \dots, a_{n+1} \in I$.

$$\text{On a } f\left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) = f\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n+1}\right) = f\left(\frac{n}{n+1} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} + \frac{1}{n+1} a_{n+1}\right).$$

On a $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1}$ donc on peut utiliser la propriété.

$$f\left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) \leq \frac{n}{n+1} f\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) + \frac{1}{n+1} f(a_{n+1}) \leq \frac{n}{n+1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i) + \frac{1}{n+1} f(a_{n+1})$$

par hypothèse de récurrence, ce qui conclut.

Conclusion La propriété est vrai au rang $n = 2$ et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \geq 2$

2. La fonction $x \mapsto -\ln(x)$ est convexe. On peut donc appliquer l'inégalité de la question précédente.

$$-\ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \leq -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(a_i) \text{ donc } \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(a_i)$$

$$\text{donc } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \geq e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(a_i)}$$

$$\text{Et } e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(a_i)} = e^{\ln((\prod_{i=1}^n a_i)^{\frac{1}{n}})}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \geq (\prod_{i=1}^n a_i)^{\frac{1}{n}} : \text{ choisissez la moyenne arithmétique !}$$