DM 03 - À rendre le 13 novembre au plus tard

- Le DM est facultatif. Il est à rendre le 13/11 au plus tard. Il est possible de le rendre plus tôt et de le rendre plusieurs fois afin de corriger ses erreurs et d'améliorer sa note.
- Vous avez du temps, merci de soigner la présentation (**Une copie trop peu soignée ne sera pas corrigée.**) et la rédaction !
- Il est permis de chercher à plusieurs, mais chacun devra rédiger sa copie seul avec ses propres mots. Deux copies identiques n'obtiendront aucune note.
- Un DM = (au moins) 3 exercices (je prendrai en compte les 3 mieux réussis).
- Si votre moyenne actuelle est ≥ 15, traitez au moins un exercice "au verso" (5, 6 ou 7).

Exercice 1 (★)
Calculer les limites suivantes. On justifiera soigneusement les résultats trouvés.

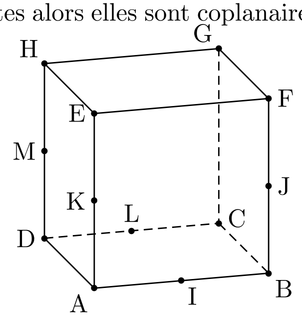
1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2+x^2)(3-x)$
2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x}{x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2+1}{x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}-3}{1-x}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x^2+x+1}$
6. $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{2}{x}}$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty}3xe^x+2e^x-1$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x-1)e^x$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)e^{2-x}$

Exercice 2 (★)

Dans cet exercice, dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant soigneusement.

- **Affirmation 1** Si deux droites sont parallèles à une même droite alors elles sont parallèles entre elles
- **Affirmation 2** Si deux droites de l'espace sont parallèles à un même plan alors elles sont parallèles entre elles
- **Affirmation 3** Si trois droites sont concourantes alors elles sont coplanaires

ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1.
Les points I, J, K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [BF], [AE], [CD] et [DH].



- **Affirmation 4** $\overrightarrow{JH}=2\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{CB}$
- **Affirmation 5** Le triplet de vecteurs $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AG})$ est une base de l'espace
- **Affirmation 6** $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}$
- **Affirmation 7** Les droites (MI) et (BH) sont parallèles.

Exercice 3 (★★)

$ABCDEFGH$ est un cube. I est le milieu de $[AE]$ et L le milieu de $[CG]$. J et K sont les points tels que $\overrightarrow{BJ}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BK}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

Le but de l'exercice est de montrer que les droites (IJ), (KL) et (BF) sont concourantes.

1. Faire une figure.
2. Montrer que le quadrilatère $AILC$ est un parallélogramme
3. Montrer que $\vec{JK}=\dfrac{1}{4}\vec{IL}$
4. Justifier que les droites (IL) et (JK) sont sécantes en un point qu'on appellera R
5. En remarquant que (BF) est l'intersection de deux plans bien choisis que l'on précisera, montrer que $R\in(BF)$
6. Conclure

Exercice 4 (★★Inspiré de Bac 2024)
On veut étudier la fonction $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f
2. (a) Déterminer la limite de la fonction en 1^+ et 1^-
   (b) Que peut-on en déduire sur $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f ?
3. (a) Déterminer la limite de la fonction en $+\infty$
   (b) Déterminer la limite de la fonction en $-\infty$
   (c) Que peut-on en déduire sur $\mathcal{C}_f$?
4. Calculer f' la dérivée de f
5. Dresser le tableau de variations de f
6. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0
7. Tracer dans un repère l'allure de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ en prenant en compte tout ce qui a été vu aux questions précédentes.

Exercice 5 (★★Quelques calculs de limites)

Partie A : En utilisant la quantité conjuguée

Rappel (?) : Lorsqu'on a une somme ou une différence de termes comportant des racines carrées, la quantité conjuguée est une expression obtenue en changeant la somme en différence ou réciproquement. Ainsi, $\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b}$ est la quantité conjuguée de $\alpha\sqrt{a}-\beta\sqrt{b}$ (et réciproquement). Pour lever une indétermination, il est parfois utile d'utiliser la quantité conjuguée.

1. On souhaite calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$
   (a) Montrer que $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$
   (b) En déduire la limite recherchée.
2. En utilisant un raisonnement similaire, calculer les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ (la quantité conjuguée de $\sqrt{a}-b$ est $\sqrt{a}+b$
   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x}-x$
   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

Partie B : En utilisant la limite du taux d'accroissement

1. Rappeler la définition du nombre dérivé d'une fonction f en $a \in \mathbb{R}$
2. En remarquant que ces limites sont les limites d'un taux d'accroissement, déterminer les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h-1}{h}$
   (b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ (on retrouvera le résultat trouvé à la Partie A avec une autre méthode !)
   (c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1}$
   (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^6-1}{x-1}$
3. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^6-1}{x^4-1}$

Exercice 6 (★★★ Suites arithmético-géométriques)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$. On veut calculer u_n en fonction de n et de u_0

1. Exprimer u_n en fonction de n et de u_0 dans le cas où $a = 1$
2. On suppose $a \neq 1$. Résoudre l'équation $x = ax + b$, on note sa solution ℓ

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \ell$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique puis exprimer u_n en fonction de n et de u_0.
4. À quelles conditions la suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 7 (★★★)

Soit f une fonction périodique telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Indication : on pourra considérer $f(u_n)$ avec $u_n = x_0 + nT$ (x_0 étant un réel fixé)