

## DM 05 - corrigé

**Exercice 1 (★)**

Les deux parties sont indépendantes

**Partie A** Simplifier les expressions suivantes

1.  $A = \ln(3) + \ln(27) - \ln(81) = \ln(3) + \ln(3^3) - \ln(3^4) = \ln(3) + 3\ln(3) - 4\ln(3) = 0$
2.  $B = \ln(x+4) - \ln(4x+x^2) = \ln(x+4) - \ln(x(4+x)) = \ln(x+4) - \ln(x) - \ln(x+4) = -\ln(x)$
3.  $C = \frac{e^{1+\ln(2)}}{e^{1+\ln(3)}} = \frac{e^1 e^{\ln(2)}}{e^1 e^{\ln(3)}} = \frac{2}{3}$
4.  $D = e^{\ln(x-1)+\ln(x)} = e^{\ln(x-1)} e^{\ln(x)} = (x-1)x$

**Partie B**

1. Résoudre les équations et inéquations suivantes, après avoir précisé sur quel intervalle elles ont un sens.

(a)  $\frac{e^{3x+4}}{e^{x-7}} = 4$  Cette équation a un sens pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{e^{3x+4}}{e^{x-7}} = 4 \Leftrightarrow e^{3x+4-x+7} = 4 \Leftrightarrow e^{2x+11} = 4 \Leftrightarrow 2x+11 = \ln(4) \Leftrightarrow 2x = \ln(4) - 11 \Leftrightarrow x = \frac{\ln(4) - 11}{2}$

(b)  $\ln(x^2 + 6x + 10) = 0$

On a  $x^2 + 6x + 10 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$  donc l'équation a un sens pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\ln(x^2 + 6x + 10) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 10 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3$  donc  $S = \{-3\}$

(c)  $\ln(x^2 + 1) \geq 1$

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$  donc l'équation a un sens pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\ln(x^2 + 1) \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq e \Leftrightarrow x^2 \geq e - 1 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; -\sqrt{e-1}] \cup [\sqrt{e-1}; +\infty[$

(d)  $\ln(\sqrt{x}) = -1$

Cette équation a un sens pour  $x > 0$

Soit  $x > 0$ . On a  $\ln(\sqrt{x}) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(x) = -1 \Leftrightarrow \ln(x) = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$  donc  $S = \{e^{-2}\}$

(e)  $\ln(3e^x - 4) < 0$

Cette équation a un sens lorsque  $3e^x - 4 > 0$ , c'est à dire quand  $e^x > \frac{4}{3}$ , c'est

à dire lorsque  $x > \ln(\frac{4}{3})$  Soit  $x > \ln(\frac{4}{3})$

$$\ln(3e^x - 4) < 0 \Leftrightarrow 3e^x - 4 < 1 \Leftrightarrow 3e^x < 5 \Leftrightarrow e^x < \frac{5}{3} \Leftrightarrow x < \ln(\frac{5}{3})$$

Donc  $S = ]\ln(\frac{4}{3}); \ln(\frac{5}{3})[$

(f)  $(1 + \ln(2x))(2 - \ln(x)) \leq 0$

Cette équation a un sens pour  $x > 0$ .

Soit  $x > 0$  On a  $1 + \ln(2x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(2x) \leq -1 \Leftrightarrow 2x \leq e^{-1} \Leftrightarrow x \leq \frac{e^{-1}}{2}$

Et on a  $2 - \ln(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq 2 \Leftrightarrow x \geq e^2$

$x$	0	$\frac{1}{2e}$	$e^2$	$+\infty$	
$1 + \ln(2x)$	—	0	+	+	
$2 - \ln(x)$	+		+	0	—
$(1 + \ln(2x))(2 - \ln(x))$	—	0	+	0	—

Donc  $S = ]-\infty; \frac{1}{2e}[\cup]e^2; +\infty[$

2. Déterminer le plus petit entier  $n$  tel que

(a) On a  $2^n \geq 10^8 \Leftrightarrow \ln(2^n) \geq \ln(10^8) \geq n \ln(2) \geq 8 \ln(10) \geq n \geq \frac{8 \ln 10}{\ln 2}$ , avec la calculatrice on trouve que le plus petit entier qui convient est 27

(b)  $(\frac{1}{5})^n \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \ln((\frac{1}{5})^n) \leq \ln(10^{-3}) \Leftrightarrow n \ln(\frac{1}{5}) \leq \ln(10^{-3}) \Leftrightarrow n \leq \frac{\ln(10^{-3})}{\ln(\frac{1}{5})}$  : on trouve que le plus petit entier qui convient est 5

**Exercice 2 (★)** 1. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes sur les intervalles donnés :

(a)  $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{x \ln(x)}$

(b)  $g'(x) = \ln(1 + e^x) + x \frac{e^x}{1 + e^x}$

(c)  $h(x) = \ln(\frac{x+5}{x-1}) = \ln(u(x))$  avec  $u(x) = \frac{x+5}{x-1}$  et  $u'(x) = \frac{x-1-x-5}{(x-1)^2} =$

$\frac{-6}{(x-1)^2}$  donc  $h'(x) = \frac{\frac{-6}{(x-1)^2}}{\frac{x+5}{x-1}} = \frac{-6}{(x-1)(x+5)}$

(d)  $k'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2(1-x)}$

$$(e) \quad l'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 - \ln(x)) - (1 + \ln(x))(-\frac{1}{x})}{(1 - \ln(x))^2} = \frac{-2 \ln(x)}{x(1 - \ln(x))^2}$$

2. Déterminer les limites suivantes

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 + \ln(x)}{\ln(x)} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1} (3 + \ln(x)) = 3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) - x^2 = -\infty \text{ par somme de limites.}$$

De plus,  $f(x) = \ln(x) - x^2 = x^2(\frac{\ln(x)}{x^2} - 1)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$  par croissances comparées donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

$$(c) \quad \text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) \ln(e^x - 1) = +\infty \text{ par produit de limites.}$$

De plus,  $f(x) = (e^x - 1) \ln(e^x - 1) = X \ln(X)$  avec  $X = e^x - 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = 0$  donc par croissances comparées  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0} X \ln(X) = 0$  par croissances comparées.

$$(d) \quad f(x) = (\ln(x))^2 - \ln(x) = \ln(x)(\ln(x) - 1) \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

### Exercice 3 (★)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par

$$f(x) = x(1 - \ln(x))$$

et  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère.

1. On a  $x > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^{+*}$  donc  $f(x)$  est du signe de  $1 - \ln(x)$

$x$	0	$e$	$+\infty$
$f(x)$		+	-

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln(x)) = -\infty$  par produit de limites

De plus,  $x(1 - \ln(x)) = x - x \ln(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x - x \ln(x) = 0$  par sommes de limites et croissances comparées

3.  $f'(x) = 1 - \ln(x) + x(-\frac{1}{x}) = -\ln(x)$

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f$	0	1	$-\infty$

4.  $f'$  est décroissante donc  $f$  est concave.

5. Soit  $a > 0$ . On considère la tangente  $\mathcal{T}_a$  au point d'abscisse  $a$

$$(a) \quad \mathcal{T}_a : y = f'(a)(x - a) + f(a) = -\ln(a)(x - a) + a - a \ln(a) = -\ln(a)x + a$$

(b) Le point d'intersection de  $\mathcal{T}_a$  avec l'axe des ordonnées est le point de coordonnées  $(0; a)$

(c) On a 2 points donc on peut tracer la tangente.

### Exercice 4 (★★) 1. Affirmation 1 : Vraie

Pour tout entier naturel  $n : n \geq 0 \Rightarrow n + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq 1$  et  $-\frac{1}{n+1} \geq -1$ .

De plus, pour tout entier naturel  $n$ ,  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ .

D'où  $\frac{-1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$  car  $n+1 > 0$

finalement on a :  $-1 \leq \frac{-1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq 1$ .

La suite  $u$  est bornée par -1 et 1.

2. Affirmation 2 : Fausse

Pour montrer qu'une affirmation est fausse, il suffit de donner un contre-exemple :

Considérons la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = (-1)^n$ .

Cette suite est bornée par -1 et 1 mais elle n'est pas convergente.

3. Affirmation 3 : Fausse

Pour montrer qu'une affirmation est fausse, il suffit de donner un contre-exemple :

Considérons la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = -\frac{1}{n}$ .

Cette suite est croissante et converge vers 0.

4. Affirmation 4 : Fausse

Pour étudier la convexité d'une fonction, il faut déterminer le signe de sa dérivée seconde.

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme composée de fonctions dérivables.

$f$  est de la forme  $\ln(u)$  avec  $u(x) = x^2 + 2x + 2$ . On a  $u'(x) = 2x + 2$ .

$$f' = \frac{u'}{u} \text{ donc, pour tout réel } x, f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}.$$

$f'$  est de la forme  $\frac{v}{w}$  avec  $v(x) = 2x + 2$  et  $w(x) = x^2 + 2x + 2$ .

On a  $v'(x) = 2$  et  $w'(x) = 2x + 2$ .

$$f'' = \frac{v' \times w - w' \times v}{w^2} \text{ donc, pour tout réel } x, f''(x) = \frac{2 \times (x^2 + 2x + 2) - (2x + 2) \times (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x^2 + 4x + 4 - 4x^2 - 8x - 4}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{-2x^2 - 4x}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{-2x(x+2)}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

Un carré est toujours strictement positif,  $f''(x)$  est donc du signe de  $-2x(x+2)$  qui est une fonction polynôme du second degré avec un coefficient dominant négatif (-2) et qui a pour racines 0 et -2.

On a donc le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$	
$f''(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

On a déduit que  $f$  est concave sur  $] -\infty ; -2]$  et sur  $[0 ; +\infty[$ , et elle est convexe sur  $[-2 ; 0]$ .

Elle n'est donc pas convexe sur  $[-3 ; 1]$ .

5. Affirmation 5 : vraie

On initialise  $M$  avec le premier terme de la suite, puis l'algorithme va comparer chaque terme de la liste à  $M$ , si un terme est supérieur à  $M$ , il va remplacer  $M$ .

Cet algorithme donne donc la valeur maximale des termes de la suite, soit 7 dans notre cas.

6. Affirmation 6 : Faux.  $E(X) = np = 36$  et  $V(X) = np(1-p) = 9$  donc  $1-p = \frac{1}{4}$  donc  $p = \frac{3}{4}$  et  $n = 48$  donc  $P(X = 29) \simeq 0.01$

7. Affirmation 7 : Vrai.  $P(X \geq 90) \simeq 0.086$  et  $P(X \leq 75) \simeq 0.26$

### Exercice 5 (★★)

#### Partie 1

Soit  $g$  la fonction définie pour tout réel  $x \in ]0 ; +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{2 \ln x}{x}$ .

1. On note  $g'$  la dérivée de  $g$ . On a :  $g'(x) = \frac{2 \frac{1}{x} \times x - 2 \ln x \times 1}{x^2} = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}$

2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  :

$x$	0	1	$e$	$+\infty$
Variations de $g$	$-\infty$	0	$\frac{2}{e}$	0

(a) La valeur  $\frac{2}{e}$  est l'image de  $e$  par  $f$  :  $f(e) = \frac{2 \ln e}{e} = \frac{2}{e}$ .

(b)  $g'(x) = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}$  donc  $g'(x)$  est du signe de  $2 - 2 \ln x = 2(1 - \ln x)$ .

- Sur  $]0 ; e[$ ,  $\ln x < 1$  donc  $1 - \ln x > 0$  donc  $g'(x) > 0$ ; la fonction  $g$  est strictement croissante sur cet intervalle.
- Sur  $]e ; +\infty[$ ,  $\ln x > 1$  donc  $1 - \ln x < 0$  donc  $g'(x) < 0$ ; la fonction  $g$  est strictement décroissante sur cet intervalle.

(c) On justifie les limites de la fonction  $g$  aux bornes de son ensemble de définition.

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2 \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Donc, par produit de limites,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2 \ln x \times \frac{1}{x} = -\infty$ .

$$\bullet \text{ D'après le cours, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

3. On en déduit le tableau de signes de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

$x$	0	1	$+\infty$
signe de $g(x)$	$  $	$-$	$+$

#### Partie 2

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = [\ln(x)]^2$ .

Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

1.  $[(u(x)^2)]' = 2u'(x)u(x)$  donc  $f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{2 \ln x}{x} = g(x)$

Donc sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ , la fonction  $f$  est une primitive de la fonction  $g$ .

2. (a) On étudie la convexité de la fonction  $f$ .

D'après les questions précédentes, la fonction  $g$ , dérivée de la fonction  $f$ , est croissante sur  $]0 ; e[$ , donc la fonction  $f$  est convexe sur cet intervalle.

De même, la fonction  $g$ , dérivée de la fonction  $f$ , est décroissante sur  $]e ; +\infty[$ , donc la fonction  $f$  est concave sur cet intervalle.

De plus, la fonction  $g$  donc la fonction  $f'$ , change de sens de variation en  $x = e$ , donc la courbe représentant la fonction  $f$  admet un point d'inflexion en  $x = e$ .

(b) On étudie les variations de la fonction  $f$  en utilisant le signe de  $f' = g$ .

Sur l'intervalle  $]0 ; 1[$ , la fonction  $g$  est négative donc  $f'$  est négative; la fonction  $f$  est donc strictement décroissante sur cet intervalle.

Sur l'intervalle  $]1 ; +\infty[$ , la fonction  $g$  est positive donc  $f'$  est positive; la fonction  $f$  est donc strictement croissante sur cet intervalle.

De plus on peut dire que la fonction  $f$  admet un minimum pour  $x = 1$ .

3. (a) Une équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $e$  est :  $y = f'(e)(x - e) + f(e)$ . On a :  $f'(e) = g(e) = \frac{2}{e}$ ;  $f(e) = (\ln e)^2 = 1$

L'équation devient :  $y = \frac{2}{e}(x - e) + 1$  soit  $y = \frac{2}{e}x - 2 + 1$  c'est-à-dire  $y = \frac{2}{e}x - 1$ .

- (b) La courbe représentant  $f$  admet un point d'inflexion en  $x = e$  donc la tangente en ce point coupe la courbe ; à gauche du point, la fonction est convexe donc la courbe est au dessus de cette tangente.

On en déduit que sur  $]0 ; e]$ , on a :  $[\ln(x)]^2 \geq \frac{2}{e}x - 1$ .

### Exercice 6 (★★)

On désigne par  $(u_n)$  la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

#### Partie A

1. (a)  $u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{2}$   
 $u_2 = \sqrt{u_1} = \sqrt{\sqrt{2}}$ .
- (b) À l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que la suite est décroissante et converge vers 1.
2. (a) Posons, pour tout entier naturel  $n$ , l'affirmation  $P_n$  : «  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$  ».  
*Initialisation* : On a calculé  $u_1 = \sqrt{2} \approx 1,414$  et  $u_0 = 2$   
 On a donc bien  $1 \leq u_1 \leq u_0$ .  
 L'affirmation  $P_0$  est donc vraie.  
*Hérédité* : Soit  $n$  un entier naturel non nul. On suppose que l'affirmation  $P_n$  est vraie, c'est-à-dire que  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ .  
 Montrons que l'affirmation  $P_{n+1}$  est vraie, c'est à dire que  $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$   
 Par hypothèse de récurrence, on a :  
 $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \implies \sqrt{1} \leq \sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{u_n}$   
 car la fonction racine carrée est croissante sur  $\mathbb{R}^+$   
 $\implies 1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$   
 Si, pour  $n$  naturel,  $P_n$  est vraie, alors  $P_{n+1}$  est vraie également.  
*Conclusion* : L'affirmation  $P_0$  est vraie, et, pour tout entier naturel non nul  $n$ , la véracité de l'affirmation est héréditaire : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a :  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ .
- (b) D'après la question précédente, pour tout entier  $n$ ,  $1 \leq u_n$  donc la suite  $(u_n)$  est minorée par 1.  
 Et pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} \leq u_n$  donc la suite  $(u_n)$  est décroissante.  
 Or toute suite décroissante et minorée est convergente donc, la suite  $(u_n)$  est convergente vers une limite  $\ell \geq 1$ .
- (c) Soit  $x \in [0 ; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} \sqrt{x} = x &\iff x = x^2 \text{ car } x \geq 0 \\ &\iff x^2 - x = 0 \\ &\iff x(x-1) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

L'équation  $\sqrt{x} = x$  admet deux solutions sur  $[0 ; +\infty[$  : 0 et 1.

- (d) La suite  $(u_n)$  est convergente vers  $\ell$  et est définie par récurrence par :  
 $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{où } f \text{ est la fonction racine carrée qui est continue sur } [0 ; +\infty[.$   
 D'après le théorème du point fixe,  $\ell$  est solution de l'équation  $f(x) = x$ .  
 Nous avons résolu cette équation à la question précédente, les solutions sont 0 et 1, or d'après la question **A. 1. b.**,  $\ell \geq 1$  donc  $\ell = 1$ .  
 donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

#### Partie B

1. (a) Soit  $n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = \ln(u_{n+1})$   
 $= \ln(\sqrt{u_n})$   
 $= \frac{1}{2} \ln(u_n)$   
 $= \frac{1}{2} v_n$   
 La suite  $(v_n)$  est donc géométrique de raison  $q = \frac{1}{2}$  et de premier terme  $v_0 = \ln(u_0) = \ln(2)$ .
- (b) On a donc, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = v_0 \times q^n = \ln(2) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\ln(2)}{2^n}$ .
- (c) Or, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = \ln(u_n)$  donc  $\frac{\ln(2)}{2^n} = \ln(u_n)$  c'est à dire :  $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$ .
2. (a) À l'aide de la calculatrice on trouve que pour tout  $k < 7$ ,  $u_k > 1,01$  et  $u_7 \approx 1,00543$  donc  $k = 7$ .
- (b) On décide de prendre  $x - 1$  comme approximation de  $\ln(x)$  lorsque  $x$  appartient à l'intervalle  $]0,99 ; 1,01[$  donc  $\ln(u_7) \approx u_7 - 1 \approx 0,00543$ .
- (c) D'après les questions **1. c.** et **2. b.** de la **partie B** une approximation de  $\ln(2)$  est  $2^7 \ln(u_7)$  soit  $2^7 \times 0,00543$  c'est à dire 0,695.
3. On généralise la méthode précédente à tout réel  $a$  strictement supérieur à 1.

```

FROM math IMPORT*
DEF Briggs(a):
  n = 0
  WHILE a >= 1.01:
    a = SQRT(a)
    n = n+1
  L = 2**n *(a-1)
RETURN L

```

### Exercice 7 (★★★)(Retour sur la série harmonique))

Dans cet exercice, on considère la série harmonique définie par  $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . On l'a déjà étudiée au DM 2, mais on va démontrer différemment sa divergence, et découvrir la constante d'Euler-Mascheroni.

#### Partie A : divergence de $h_n$

- On étudie le signe de  $f(x) = \ln(x+1) - (x - \frac{x^2}{2})$ , en dérivant, cf ex 99. Pour l'autre inégalité on l'a montrée avec la convexité à l'exemple 5 du cours (on peut aussi le faire avec  $\ln(x+1) - x$ ).
- $\ln(k+1) - \ln(k) = \ln(\frac{k+1}{k}) = \ln(1 + \frac{1}{k})$ . On utilise ensuite la question 1 qui nous donne  $\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ .  
De plus  $\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{k+1} = \frac{k-1}{2k^2(k+1)} \geq 0$  donc  $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2}$  ce qui nous donne l'inégalité recherchée.
- On somme l'inégalité de la question 2 pour  $k$  de 1 à  $n-1$  ( $n \geq 2$ )  

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$h_n - 1 \leq \ln(n) - \ln(1) \leq h_n - \frac{1}{n}$$
donc  $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq h_n \leq \ln(n) + 1$
- $h_n \geq \ln(n) + \frac{1}{n}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) + \frac{1}{n} = +\infty$  donc par comparaison  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = +\infty$
- On divise l'inégalité de la question 2 par  $\ln(n)$ ,  $1 + \frac{1}{n \ln(n)} \leq \frac{h_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$   
donc par théorème des gendarmes,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h_n}{\ln n} = 1$ .

#### Partie B : la constante d'Euler-Mascheroni

- En  $+\infty$ ,  $h_n - \ln(n)$  semble tendre vers environ 0,577

- On a  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leq 0$  donc  $u$  décroissante  
On a  $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1)) \geq 0$  donc  $v$  croissante  
De plus  $u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(\frac{n+1}{n}) = \ln(1 + \frac{1}{n})$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$   
Ainsi,  $u$  et  $v$  sont adjacentes.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $v_n \leq \gamma \leq u_n$  donc  $v_n - u_n \leq \gamma - u_n \leq 0$  donc  $0 \leq u_n - \gamma \leq \ln(1 + \frac{1}{n})$   
donc  $0 \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{n}$
- $\gamma \simeq 0,577$

### Exercice 8 (★★★)(Valeur approchée de $e$ ))

Soit  $x \in \mathbb{R}^{+*}$ . On considère la suite  $u$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par

$$u_n = (1 + \frac{x}{n})^n$$

- Cf exercice précédent.
- $v_n = \ln((1 + \frac{x}{n})^n) = n \ln(1 + \frac{x}{n})$   
On utilise l'inégalité précédente  
 $\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} \leq \ln(1 + \frac{x}{n}) \leq \frac{x}{n}$  donc  $x - \frac{x^2}{2n} \leq v_n \leq x$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = x$
- $u_n = e^{v_n}$  donc par composition  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^x$

```

1 FROM math IMPORT *
2 DEF suiteexp(x,n) :
3   u=(1+x/n)**n
4   RETURN (u)

```

- 

La méthode pour obtenir une approximation de  $e$  semble assez peu efficace, on converge assez lentement vers  $e$ .

### Exercice 9 (★★★)(Inégalité arithmético-géométrique))

#### Propriété

Soit  $f$  une fonction convexe sur  $I$ , et  $a, b \in I$ . Alors

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

Étant donné  $n \geq 2$  réels strictement positifs  $a_1, \dots, a_n$ , on définit les moyennes arithmétiques  $\bar{a}$  et géométriques  $\bar{g}$  par

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

et

$$\bar{g} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} = \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

1. Soit  $f$  une fonction convexe sur  $I$ . Montrons par récurrence que pour tout  $n \geq 2$ ,  
 $f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i)$  pour tous  $a_1, \dots, a_n \in I$

**Initialisation** Pour  $n = 2$ , il faut montrer  $f\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \leq \frac{f(a_1) + f(a_2)}{2}$  : c'est la propriété avec  $t = \frac{1}{2}$

**Hérédité** Supposons la propriété vraie au rang  $n$

Soient  $a_1, \dots, a_{n+1} \in I$ .

$$\text{On a } f\left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) = f\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n+1}\right) = f\left(\frac{n}{n+1} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} + \frac{1}{n+1} a_{n+1}\right).$$

On a  $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1}$  donc on peut utiliser la propriété.

$$f\left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) \leq \frac{n}{n+1} f\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) + \frac{1}{n+1} f(a_{n+1}) \leq \frac{n}{n+1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i) + \frac{1}{n+1} f(a_{n+1})$$

par hypothèse de récurrence, ce qui conclut.

**Conclusion** La propriété est vraie au rang  $n = 2$  et héréditaire, elle est donc vraie pour tout  $n \geq 2$

2. La fonction  $x \mapsto -\ln(x)$  est convexe. On peut donc appliquer l'inégalité de la question précédente.

$$-\ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \leq -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(a_i) \text{ donc } \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(a_i)$$

$$\text{donc } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \geq e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(a_i)}$$

$$\text{Et } e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(a_i)} = e^{\ln\left(\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}}\right)}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \geq \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}} : \text{choisissez la moyenne arithmétique!}$$