

DM 03 - À rendre le 13 novembre au plus tard

Exercice 1 (★)

Calculer les limites suivantes. On justifiera soigneusement les résultats trouvés.

1. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - x) = -\infty$ donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + x^2)(3 - x) = -\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} e^x = e$ et $\lim_{x \rightarrow 1+} x - 1 = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{e^x}{x - 1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{e^x}{x - 1} = -\infty$ donc pas de limite en 1
3. $\frac{-2x^2 + 1}{x - 1} = \frac{-x^2(2 - \frac{1}{x^2})}{x(1 - \frac{1}{x})} = -x \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + 1}{x - 1} = -\infty$
4. $\frac{x\sqrt{x} - 3}{1 - x} = \frac{x\sqrt{x}(1 - \frac{1}{x\sqrt{x}})}{-x(1 - \frac{1}{x})} = -\sqrt{x} \frac{1 - \frac{1}{x\sqrt{x}}}{1 - \frac{1}{x}}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} - 3}{1 - x} = -\infty$
5. On a $-x^2 + x - 1 = -x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 + x - 1 = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2 + x - 1} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$
6. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{2}{x}} = +\infty$ par composition
7. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3xe^x = 0$ (par croissances comparées) donc par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3xe^x + 2e^x - 1 = -1$
8. On a $(5x - 1)e^x = 5xe^x - e^x$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5xe^x = 0$ (par croissances comparées) donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x - 1)e^x = 0$
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x)e^{2-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$ (composition puis croissances comparées)

Exercice 2 (★)

- **Affirmation 1** Vrai, c'est une propriété de base du parallélisme
- **Affirmation 2** Faux, on prend deux droites sécantes d_1 et d_2 et un plan P parallèle au plan contenant d_1 et d_2
- **Affirmation 3** Faux, on peut par exemple considérer les trois axes d'un repère de l'espace.
- **Affirmation 4** Vrai. $\overrightarrow{JH} = \overrightarrow{JF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{CB}$
- **Affirmation 5** Faux. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$

- **Affirmation 6** Vrai car $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CH}$
- **Affirmation 7** Faux $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM}$

Exercice 3 (★★)

$ABCDEFGH$ est un cube. I est le milieu de $[AE]$ et L le milieu de $[CG]$. J et K sont les points tels que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

1. Faire une figure.
2. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI}$ donc $AILC$ est un parallélogramme
3. $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IL}$ (car $AILC$ parallélogramme)
4. \overrightarrow{JK} et \overrightarrow{IL} sont colinéaires donc (JK) et (IL) sont parallèles donc J, K, I, L sont coplanaires. Par ailleurs $\overrightarrow{JK} \neq \overrightarrow{IL}$ donc $JKLI$ n'est pas un parallélogramme et donc (IJ) et (KL) ne sont pas parallèles et étant coplanaires, elles sont sécantes.
5. (BF) est l'intersection de (BFC) qui contient (KL) et de (ABF) qui contient (IJ) donc $R \in (BF)$
6. Les droites (IJ) , (KL) et (BF) sont concourantes en R

Exercice 4 (★★) Inspiré de Bac 2024)

On veut étudier la fonction $f(x) = \frac{e^x}{x - 1}$

1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
2. (a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$
(b) \mathcal{C}_f admet comme asymptote la droite d'équation $x = 1$
3. (a) $f(x) = \frac{e^x}{x - 1} = \frac{e^x}{x} \times \frac{1}{(1 - \frac{1}{x})}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (par croissances comparées)
(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
(c) La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à \mathcal{C}_f
4. $f'(x) = \frac{e^x(x - 1) - e^x}{(x - 1)^2} = \frac{e^x(x - 2)}{(x - 1)^2}$
5. $f'(x)$ est du signe de $x - 2$

| | | | | |
|---------|---------------------|-------------------------|-----------------------------|-----------|
| x | $-\infty$ | 1 | 2 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | - | - 0 + | |
| $f(x)$ | 0 ↘ $-\infty$ | $+\infty$ ↘ e^2 | $+\infty$ ↗ $+\infty$ | |

6. $\mathcal{T} : y = f'(0)x + f(0) = -2x - 1$

7. Tracer dans un repère l'allure de la courbe représentative \mathcal{C}_f en prenant en compte tout ce qui a été vu aux questions précédentes.

Exercice 5 (★★) Quelques calculs de limites)

Partie A : En utilisant la quantité conjuguée

1. (a) $\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{x+1-x-1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{-2}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$

(b) Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = 0$

2. En utilisant un raisonnement similaire, calculer les limites suivantes :

(a) Soit $x \neq 4$. On a $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$
donc $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4}$

(b) $\sqrt{x^2+3x}-x = \frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \frac{3x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x}}+x} = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}$
donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+3x}-x = \frac{3}{2}$

(c) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}$
donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \frac{1}{2}$

Partie B : En utilisant la limite du taux d'accroissement

1. $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

2. En remarquant que ces limites sont les limites d'un taux d'accroissement, déterminer les limites suivantes :

(a) On pose $f(x) = e^x$, on a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - e^0}{h - 0} = f'(0) = e^0 = 1$

(b) On pose $f(x) = \sqrt{x}$, on a $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$
(on retrouve le résultat trouvé à la Partie A)

(c) On pose $f(x) = x^4$, on a $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 4$

(d) On pose $g(x) = x^6$, on a $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = 6$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^4 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Exercice 6 (★★★) Suites arithmético-géométriques)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$. On veut calculer u_n en fonction de n et de u_0

1. Si $a = 1$, u est une suite arithmétique de raison b donc $u_n = u_0 + nb$

2. On suppose $a \neq 1$. L'équation $x = ax + b$ a pour solution $\ell = \frac{b}{1-a}$

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \ell$. On a $v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = au_n + b - \ell = au_n + b - \frac{b}{1-a} =$

$au_n - \frac{ab}{1-a} = a(u_n - \ell) = av_n$. Ainsi on a $v_n = v_0 a^n$ donc $u_n = v_0 a^n + \ell$

4. La suite (u_n) converge si et seulement si $a \in]-1; 0[\cup]0; 1[$, elle converge alors vers ℓ

Exercice 7 (★★★)

Soit f une fonction périodique telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$.

On considère x_0 un réel et $u_n = x_0 + nT$. On a $f(u_n) = f(x_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(x_0)$. De plus, par composition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$. donc $f(x_0) = \ell$ et donc f est constante égale à ℓ