Lista de Exercícios 3

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Pato Branco
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Controle Ótimo e Multivariável
Professor Dr. Rafael Cardoso

Cálculo Variacional

Ex. 1 — Determine o variacional dos funcionais, considerando que os pontos nos extremos das funções sejam especificados:

a) $J(x) = \int_{t_0}^{t_f} \left[x^3(t) - x^2(t)\dot{x}(t)\right] dt$

b) $J(\mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t_f} \left[x_1^2(t) - x_1(t)x_2(t) + x_2^2(t) + 2\dot{x}_1(t)\dot{x}_2(t)\right] dt$

c) $J(x) = \int_{t_0}^{t_f} e^{x(t)} dt$

Ex. 2 — Determine os extremos das funções:

a) $f(t) = 0,333t^3 + 1,5t^2 + 2t + 5$

b) $f(t) = te^{-2t},\ t \geq 0$

c) $f(\mathbf{q}) = q_1^2 + 2q_2^2 + 9q_1 - q_2 + q_1q_2 + 22$

Ex. 3 — Determine as extremais para os seguintes funcionais

a) $J(x) = \int_0^1 \left[x^2(t) + \dot{x}^2(t)\right] dt;\quad x(0) = 0,\ x(1) = 1$

b) $J(x) = \int_0^2 \left[x^2(t) + 2\dot{x}^2(t)x(t) + \dot{x}^2\right] dt;\quad x(0) = 1,\ x(2) = -3$

c) $J(\mathbf{x}) = \int_0^{\pi/2} \left[\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + 2x_1(t)x_2(t)\right] dt;\quad x_1(0) = 0,\ x_1(\pi/2) = 1,\ x_2(0) = 0,\ x_2(\pi/2) = 1$

Ex. 4 — Determine as extremais para os seguintes funcionais

a) $J(x) = \int_0^1 \left[x^2(t) + \dot{x}^2(t)\right] dt;\quad x(0) = 0,\ x(1) = \text{livre}$

b) $J(x) = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}\dot{x}^2(t) + x(t)\dot{x}^2(t) + \dot{x}x(t)\right] dt;\quad x(0) = \frac{1}{2},\ x(1) = \text{livre}$

c) $J(\mathbf{x}) = \int_0^{\pi/2} [\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + 2x_1(t)x_2(t)]\, dt; \quad x_1(0) = 0,\ x_1(\pi/2) =$ livre, $x_2(0) = 0,\ x_2(\pi/2) = 1$

Ex. 5 — Determine uma extremal para o funcional

$$J(x) = \int_0^{t_f} \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)} dt$$

com $x(0) = 2$ e $x(t_f)$ restrito a linha $\theta(t) = -4t + 5$.

Ex. 6 — Determine as equações que devem ser resolvidas para se encontrar as constantes de integração para o funcional do exercício (3(c)) se as condições de contorno são

a) $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, t_f é livre e $\mathbf{x}(t_f)$ deve estar sobre a curva

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} 5t + 3 \\ \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix}$$

b) $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, t_f é livre e $\mathbf{x}(t_f)$ deve estar sobre a superfície $x_1(t) + 3x_2(t) + 5t = 15$.

Ex. 7 — Determine um ponto sobre a curva

$$y_2 = y_1^2 - 4,5$$

que minimiza a função $f(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$.

Ex. 8 — Determine condições necessárias (excluindo as condições de contorno) que devem ser satisfeitas por extremais para os funcionais:

a) $J(\mathbf{w}) = \int_{t_0}^{t_f} [w_1^2(t) + w_1(t)w_2(t) + w_2^2(t) + w_3^2(t)]\, dt$
atendendo as restrições

$$\begin{aligned} \dot{w}_1(t) &= w_2(t) \\ \dot{w}_2(t) &= -w_1(t) + [1 - w_1^2(t)]w_2(t) + w_3(t) \end{aligned}$$

b) $J(\mathbf{w}) = \int_{t_0}^{t_f} [\lambda + w_3^2(t)]\, dt, \quad \lambda > 0$
atendendo as restrições

$$\begin{aligned} \dot{w}_1(t) &= w_2(t) \\ \dot{w}_2(t) &= w_3(t) \end{aligned}$$

b) $J(\mathbf{w}) = \int_{t_0}^{tf} [\lambda + w_3^2(t)]\, dt, \quad \lambda > 0$
atendendo as restrições

$$\begin{aligned} \dot{w}_1(t) &= w_2(t) \\ \dot{w}_2(t) &= -w_2(t)|w_2(t)| + w_3(t) \end{aligned}$$

Ex. 9 — Determine as extremais para o funcional

$$J(x) = \int_0^1 [\dot{x}^2(t) + t^2] dt$$

que satisfazem as condições de contorno $x(0) = 0$, $x(1) = 0$ e a restrição

$$\int_0^1 x^2(t) dt = 2$$