Lista de Exercícios 2

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Pato Branco
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Controle Ótimo
Professor Dr. Rafael Cardoso

Programação Dinâmica

Ex. 1 — Considere o seguinte sistema dinâmico

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + [1 - x_1^2(t)]x_2(t) + u(t).\end{aligned}$$

Deseja-se minimizar o funcional

$$J = [x_1(T) - 5]^2 + \int_0^T \left\{x_2^2(t) + 20[x_1(t) - 5]^2 + u^2(t)\right\} dt.$$

a) Discretize as equações do problema para que seja possível o emprego de programação dinâmica.

b) Observe que o sistema é não linear. Quais ajustes devem ser feitos para que se possa usar programação dinâmica?

Ex. 2 — Um sistema discreto de primeira ordem é representado pela equação de diferenças

$$x_{k+1} = -0,5x_k + u_k.$$

O índice de desempenho a ser minimizado é

$$J = \sum_{k=0}^{2} |x_k|.$$

Os estados e controles admissíveis estão restritos a

$$\begin{aligned}-0,2 \leqslant x_k &\leqslant 0,2 \quad , \quad k = 0; 1; 2\\ -0,1 \leqslant u_k &\leqslant 0,1 \quad , \quad k = 0; 1.\end{aligned}$$

a) Elabore a mão as etapas computacionais necessárias para se determinar a lei de controle ótima através do uso da programação dinâmica. Quantize x_k e u_k em passos de 0,1 a partir do zero e use interpolação linear.

b) Qual é a sequência de controle ótima para um estado inicial $x_0 = 0,2$?

Ex. 3 — O sistema discreto de primeira ordem

$$x_{k+1} = -0,5x_k + u_k.$$

deve ser transferido para a origem em dois estágios, isto é, $x_2 = 0$ ao mesmo tempo em que o índice de desempenho

$$J = \sum_{k=0}^{1} \left[|x_k + 5u_k| \right].$$

é minimizado.

a) Use programação dinâmica para determinar a lei de controle ótima para cada um dos pontos indicados na figura 1. Assuma que os valores de controle estão quantizados nos níveis $-1; -0,5; 0; 0,5; 1$.

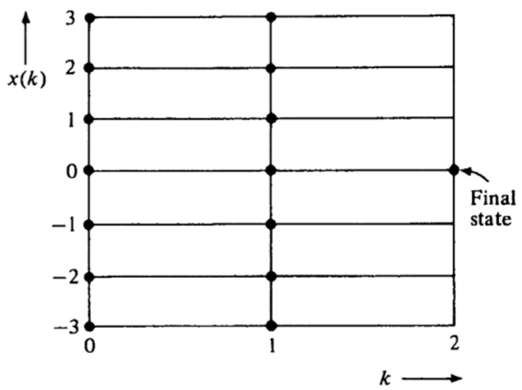

Figura 1: Estados quantizados.

b) Encontre a sequência de controle ótimo $\{u_0^*, u_1^*\}$ correspondente ao estado inicial $x_0 = -2$.

Ex. 4 — A aproximação discreta de um sistema não linear contínuo é dada por

$$x_{k+1} = x_k - 0,4x_k^2 + u_k.$$

Os estados e controles admissíveis estão restritos a

$$0 \leqslant x_k \leqslant 1$$
$$-0,4 \leqslant u_k \leqslant 0,4.$$

Quantize os estados nos níveis $0; 0,5; 1$ e o controle nos níveis $-0,4; -0,2; 0; 0,2; 0,4$. O índice de desempenho a ser inimizado é

$$J = 4|x_2| + \sum_{k=0}^{1} |u_k|.$$

a) Use programação dinâmica com interpolação linear para completar as tabelas abaixo.

x_0	$J^*_{0,2}(x_0)$	$u^*(x_0, 0)$
0		
0,5		
1		

x_1	$J^*_{1,2}(x_0)$	$u^*(x_1, 1)$
0		
0,5		
1		

b) Encontre a sequência de controle ótimo $\{u_0^*, u_1^*\}$ correspondente ao estado inicial $x_0 = 1$.

Ex. 5 — Deseja-se controlar o sistema

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0,9974 & 0,0539 \\ -0,1078 & 1,1591 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0,0013 \\ 0,0539 \end{bmatrix} \mathbf{u}_k.$$

Implemente um programa que determine o controle ótimo (LQR) que minimiza o índice de desempenho para $N = 200$

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[0,25x_1^2(k) + 0,05x_2^2(k) + 0,05u^2(k)\right].$$

a) Apresente o gráfico dos ganhos $F(N-k)$.

b) Apresente o gráfico das trajetórias ótimas dos estados e da ação de controle.

c) Implemente a lei de controle sub-ótima com os ganhos F constantes e apresente gráfico das trajetórias dos estados e da ação de controle.

d) Refaça o item c) para diferentes condições iniciais.

e) Implemente uma saturação para as ações de controle e refaça os itens c) e d) destacando os efeitos da saturação.

f) Verifique a estabilidade do sistema em malha-fechada para o item c).

Ex. 6 — O sistema linear de primeira ordem

$$\dot{x}(t) = -10x(t) + u(t)$$

deve ser controlado para minimizar o índice de desempenho

$$J = \frac{1}{2}x^2(T) + \int_0^{0,04} \left[\frac{1}{4}x^2(t) + \frac{1}{2}u^2(t)\right] dt.$$

Os estado e controle admissíveis não são limitados. Determine o controle ótimo através da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Ex. 7 — Deseja-se determinar a lei de controle ótima que faz com que a planta

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - 2x_2(t) + u(t) \end{aligned}$$

minimize o índice de desempenho

$$J = 10x_1^2(T) + \frac{1}{2}\int_0^T \left[x_1^2(t) + 2x_2^2(t) + u^2(t)\right] dt.$$

O tempo final $T = 10$ e os estados e controle não são limitados. Determine a lei de controle ótima através:

a) Da integração da equação de Riccati com um passo de integração de 0,02.

$$\mathbf{0} = \dot{K}(t) + Q(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) + K(t)A(t) + A^T(t)K(t)$$

b) Da resolução das equações recursivas abaixo. Considere $\Delta t = 0,02$ na aproximação das equações de estado por um conjunto de equações de diferenças.

$$\begin{aligned} F(N-K) = -[R(N-K) + B^T(N-K)P(K-1)B(N-K)]^{-1} \\ \times B^T(N-K)P(K-1)A(N-K) \end{aligned}$$

$$V(N-K) \triangleq A(N-K) + B(N-K)F(N-K)$$

$$\begin{aligned} P(K) = V^T(N-K)P(K-1)V(N-K) \\ +F^T(N-K)R(N-K)F(N-K) + Q(N-K) \end{aligned}$$

c) Implemente as ações de controle e compare as trajetórias dos estados e da ação de controle.

Ex. 8 — Repita o exercício 7 para a planta

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + u(t)$$

Ex. 9 — Escolha um sistema real e obtenha seu modelo em espaço de estados. Implemente um servo tipo 1 via alocação de polos e via LQR. Compare o resultado das trajetórias dos estados e da ação de controle para diferentes valores de Q e R.