UNQ | CLP | Cheat Sheet

Basado en Apuntes de la Materia

PCF no tipado

Gramática

$t ::= x \mid \lambda x.t \mid tt \mid n \in \mathbb{N} \mid t + t \mid t - t \mid t \times t \mid t/t \mid \textsf{ifz}\ t\ \textsf{then}\ t\ \textsf{else}\ t \mid \mu x.t \mid \textsf{let}\ x = t\ \textsf{in}\ t$

Semántica Operacional

Reglas Base

$$(\lambda x.u)t \to u[t/x] \qquad (\beta \text{ reducción}) \tag{1}$$

$$p \otimes q \to n \qquad \text{Si } p \otimes q = n, \text{ con } \otimes = +, -, \times \text{ o } / \tag{2}$$

$$\textsf{ifz}\ 0\ \textsf{then}\ t\ \textsf{else}\ u \to t \tag{3}$$

$$\textsf{ifz}\ n\ \textsf{then}\ t\ \textsf{else}\ u \to u \qquad \text{Si } n \neq 0 \tag{4}$$

$$\mu x.t \to t[\mu x.t/x] \tag{5}$$

$$\textsf{let}\ x = t\ \textsf{in}\ u \to u[t/x] \tag{6}$$

Reglas de Congruencia

$$\frac{t \to u}{tv \to uv}\ rc_1 \qquad \frac{t \to u}{vt \to vu}\ rc_2 \qquad \frac{t \to u}{\lambda x.t \to \lambda x.u}\ rc_3$$

$$\frac{t \to u}{t \otimes v \to u \otimes v}\ rc_4 \qquad \frac{t \to u}{v \otimes t \to v \otimes u}\ rc_5 \qquad \frac{t \to u}{\textsf{ifz}\ t\ \textsf{then}\ s\ \textsf{else}\ v \to \textsf{ifz}\ u\ \textsf{then}\ s\ \textsf{else}\ v}\ rc_6$$

$$\frac{t \to u}{\mu f.t \to \mu f.u}\ rc_7 \qquad \frac{t \to u}{\textsf{let}\ x = t\ \textsf{in}\ s \to \textsf{let}\ x = u\ \textsf{in}\ s}\ rc_8 \qquad \frac{t \to u}{\textsf{let}\ x = s\ \textsf{in}\ t \to \textsf{let}\ x = s\ \textsf{in}\ u}\ rc_9$$

Estrategias de Reducción

Definición 3.1. Notamos $\to^*$ al cierre reflexivo y transitivo de $\to$.

Definición 3.3. Un término t:

1. está en forma normal si $\nexists\ u$ tal que $t \to u$.
2. es normalizable si $\exists\ u$ en forma normal tal que $t \to^* u$.
3. es fuertemente normalizable si $\nexists$ secuencia infinita $v_0, v_1, \ldots \mid t \to v_0 \to v_1 \to \ldots$.

Definición 3.4. Sea $\to_R$ una relación binaria, y $\to_R^*$ su cierre reflexivo y transitivo.

- $\to_R$ satisface la propiedad del diamante si $t \to_R v_1$ y $t \to_R v_2$ implica que $v_1 \to_R u$ y $v_2 \to_R u$ para algún u.

$$\begin{tikzcd} & t \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ v_1 \arrow[dr] & & v_2 \arrow[dl] \\ & u & \end{tikzcd}$$

- $\to_R$ es Church-Rosser o confluente si $\to_R^*$ satisface la propiedad del diamante.
- $\to_R$ tiene formas normales únicas si $t \to_R^* v_1$ y $t \to_R^* v_2$ para términos en forma normal v_1 y v_2 implica $v_1 = v_2$.

Lema 3.5.

1. Si $\to_R$ satisface la propiedad del diamante, entonces es Church-Rosser.
2. Si $\to_R$ es Church-Rosser, entonces tiene formas normales únicas.

Definición 3.8. Llamamos redex a un subtérmino de un término que puede reducir.

Reducción débil

Definición 3.9. Una estrategia de reducción es débil si no reduce nunca el cuerpo de una función, es decir, si no reduce bajo λ.

Call-by-name

Definición 3.10. La estrategia call-by-name reduce siempre el redex más a la izquierda. En caso de ser además débil, será el más a la izquierda que no esté debajo de un λ.

Teorema 3.11 (Estandarización)**.** Si un término reduce a un término en forma normal, entonces la estrategia call-by-name termina.

Call-by-value

Definición 3.12. A los términos t de PCF tales que $\mathsf{FV}(t) = \emptyset$ y que t esté en forma normal, se les llaman valores.

Definición 3.13. La estrategia call-by-value consiste en evaluar siempre los argumentos antes de pasarlos a la función. La idea es que $(\lambda x.t)v$ reduce sólo cuando v esté en forma normal.

PCF tipado

Gramática

$$
\begin{aligned}
A &::= \mathsf{nat} \mid A \Rightarrow A \\
t &::= x \mid \lambda x : A.t \mid tt \mid n \in \mathbb{N} \mid t \otimes t \mid \mathsf{ifz}\ t\ \mathsf{then}\ t\ \mathsf{else}\ t \mid \mu x : A.t \mid \mathsf{let}\ x : A = t\ \mathsf{in}\ t
\end{aligned}
$$

Contextos Un contexto nos da tipos para variables, entonces, en vez de decir $\lambda x : \mathsf{nat}.yx : \mathsf{nat} \Rightarrow \mathsf{nat}$, decimos, si $y : \mathsf{nat} \Rightarrow \mathsf{nat}$, entonces $\lambda x : \mathsf{nat}.yx : \mathsf{nat} \Rightarrow \mathsf{nat}$. La notación que usamos es la siguiente:

$$\underbrace{y : \mathsf{nat} \Rightarrow \mathsf{nat}}_{\text{contexto}} \vdash \lambda x : \mathsf{nat}.yx : \mathsf{nat} \Rightarrow \mathsf{nat}$$

Genéricamente, queremos definir la relación $\Gamma \vdash t : A$ que asocia un término t y un contexto Γ a un tipo A.

Definición 4.2. La relación de tipado $\Gamma \vdash t : A$ se define inductivamente por:

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A}\ ax_v \qquad \frac{}{\Gamma \vdash n : \mathsf{nat}}\ ax_c$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x : A.t : A \Rightarrow B}\ \Rightarrow_i \qquad \frac{\Gamma \vdash t : A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash tu : B}\ \Rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \mathsf{nat} \quad \Gamma \vdash u : \mathsf{nat}}{\Gamma \vdash t \otimes u : \mathsf{nat}}\ \otimes \qquad \frac{\Gamma \vdash t : \mathsf{nat} \quad \Gamma \vdash u : A \quad \Gamma \vdash v : A}{\Gamma \vdash \mathsf{ifz}\ t\ \mathsf{then}\ u\ \mathsf{else}\ v : A}\ \mathsf{ifz}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash t : A}{\Gamma \vdash \mu x : A.t : A}\ \mathsf{fix} \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash t : B \quad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash \mathsf{let}\ x : A = u\ \mathsf{in}\ t : B}\ \mathsf{let}$$

Donde $\otimes$ son cuatro reglas, una para cada operación aritmética.

Teorema 4.4 (Subject reduction o conservación de tipos)**.**
Si $\Gamma \vdash t : A$ y $t \to u$ entonces $\Gamma \vdash u : A$.

Teorema 4.5 (Teorema de Tait o normalización fuerte)**.**
Todo término tipado que no contenga a fix, termina.