BERUFSAKADEMIE SACHSEN
STAATLICHE STUDIENAKADEMIE
LEIPZIG
UNIVERSITY OF COOPERATIVE EDUCATION

Computertomographie
&
Lineare Gleichungssysteme

Hausarbeit

im Studiengang Informatik

an der Berufsakademie Sachsen – Staatliche Studienakademie Leipzig

im Modul

Numerik

von

Florian Fröhlich

25. Juni 2023

Matrikelnummer: 5002155

Gutachter: Prof. Dr. Holger Perlt

Inhaltsverzeichnis

1 Computertomographie

Der Grundzweck der medizinischen Computertomographie (von ἡ τομή, -ῆς < τέμνω *Schnitt, schneiden*) liegt darin, aus einem dreidimensionalen (biologischen) Körper ein zweidimensionales Schnittbild zu erzeugen. Während klassische Röntgenfotographie die Tiefenachse des Körpers schlicht aufaddiert, kann ein gezieltes Schnittbild der Mediziner_in um ein Vielfaches relevantere Bildinformationen liefern. Da es üblicherweise in der medizinischen Diagnostik nicht ratsam ist den betrachteten Körper tatsächlich zu zertrennen, um die Schnittfläche zu fotografieren, hat sich schnell durchgesetzt stattdessen ein künstlich erzeugtes, aus den Daten vieler gezielter Röntgenaufnahmen *errechnetes* Schnittbild zu verwenden.

Als ursprüngliche mathematische Grundlage hierfür dient die 1917 in Leipzig veröffentlichte Radon-Transformation [7]. Deren Rücktransformation ermöglicht es, aus einer Menge an Werten, die als Linienintegrale einer Schwächung eines Röntgenstrahls durch einen Körper verstanden werden, die schwächungsverursachende Materialdichte an einer bestimmten Stelle zu errechnen. Die Menge dieser Stellen ist das Schnittbild. Tatsächliche Anwendung fand die Rückberechnung erst mit der Entwicklung der kommerziell verfügbaren Computertomographiegeräte zu Beginn der 1970er Jahre (Medizin-Nobelpreis Houndsfield und Cormack 1979). Hier wurden jedoch iterative numerische Verfahren eingesetzt.

2 Problem

2.1 Problemstellung

Jeder Stahl j einer Strahlenquelle mit dem Weg L_j habe dieselbe Ausgangsintensität $I_{Q,j}$ und eine gemessene Detektorintensität $I_{D,j}$. Die Strahlen einer einzelnen Messung sind parallel. Aus den experimentell bestimmten Messwerten b_j sollen die lokalen Schwächungskoeffizienten $\mu(x)$ am jeweiligen Ort x errechnet werden. Aus der Radon-Transformation ergibt sich (nach [3]):

$$b_j = -\ln \frac{I_{D,j}}{I_{Q,j}} = \int_{L_j} \mu(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

Diese Gleichung wird zunächst durch Diskretisierung via der *Finite element method* gelöst. Mit einem Querschnitt von $n \times n$ *Pixeln* ergibt die Pixelfunktion χ_i linearisiert mit:

$$\chi_{(k-1)n+l}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ im Pixel in der } k\text{-ten Zeile und } l\text{-ten Spalte der Zerlegung liegt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.2}$$

als Näherung $\bar{\mu}(x)$ für $\mu(x)$:

$$\bar{\mu}(x) = \sum_{i=1}^{n^2} u_i \chi_i(x). \tag{2.3}$$

Also ist für $i = 1, \dots, m$:

$$b_i = \int_{L_i} \bar{\mu}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n^2} u_j \int_{L_i} \chi_i(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.4}$$

was mit $A = ((a_{ij})),\ A \in \mathbb{R}^{m,n^2}$ und

$$a_{ij} = \int_{L_i} \chi_j(x)\,\mathrm{d}x, \quad i = 1,\dots,m, \quad j = 1\dots,n^2, \tag{2.5}$$

$$u = (u_1,\dots,u_{n^2})^T \quad \in \mathbb{R}^{n^2}, \tag{2.6}$$

$$b = (b_1,\dots,b_m)^T \quad \in \mathbb{R}^m, \tag{2.7}$$

als lineares Gleichungssystem $Au = b$ aufgefasst werden kann, mittels dessen Lösung wir u ermitteln können. Hier ist m die Zahl der Messungen dar, n^2 die Zahl der Pixel und b den jeweiligen Messvektor. Dieses Gleichungssystem ist allerdings derart groß und zudem überbestimmt, dass eine klassische Lösung mittels Gaußverfahren nicht möglich ist.

2.2 Konjugierte Gradienten

So wird in der Praxis ein iteratives Verfahren eingesetzt werden. Hier betrachtet wird das *Conjugate Gradient for Least Squares*-Verfahren (manchmal in der Literatur auch *Conjugate Gradient Normal equation Residual (CGNR)* genannt [1]), eine Unterform des *Conjugate Gradient*-Verfahrens. Dieses wurde erstmals 1952 von Hestenes und Stiefel vorgestellt [2] und seinerzeit auf dem sehr primitiven, röhrenbasierten *IBM Card-Programmed Electronic Calculator* [4] getestet.

Es kann oberflächlich als Abwandlung des Verfahrens des steilsten Abstiegs (*gradient descent* bzw *Gradientenverfahren*) verstanden werden – beiden gemein ist, dass sie das Gleichungssystem als Extremwertverfahren lösen. So löst das CGLS das Gleichungssystem mit symmetrischer und positiv definiter M:

$$Mu = g, \quad M \in \mathbb{R}^{\tilde{n},\tilde{n}}, \quad g \in \mathbb{R}^{\tilde{n}} \tag{2.8}$$

indem es das Minimum der Funktion $\|g - Mu\|^2$ bestimmt – nicht jedoch im gesamten $\mathbb{R}^{\tilde{n}}$, sondern nur im im niedrigdimensionalen affinen Teilraum

$$\mathcal{K}_k(M, g) = u^{(0)} + \mathrm{span}\{g, Mg, M^2g, \dots, M^{k-1}g\}, \tag{2.9}$$

dem verschobenen k-ten Krylov-Raum bzgl. M und g.

Angewandt auf unser Problem ist:

$$\begin{aligned} M &= A^T A \\ g &= A^T b \\ \tilde{n} &= n^2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Die k-te Iterierte des Verfahrens liegt dann im verschobenen Krylov-Raum

$$\begin{aligned} u^{(k)} &\in u^{(0)} + \mathcal{K}_k(A^T A, A^T r^{(0)}) \\ &= u^{(0)} + \operatorname{span}\left\{ A^T r^{(0)}, (A^T A) A^T r^(0), \ \dots \ , (A^T A)^{k-1} A^T r^{(0)} \right\}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

mit $r^{(o)} = b - Au^{(0)}$ als Anfangsresiduum. Unter allen Elementen u dieses Raumes minimiert $u^{(k)}$ die Residuennorm $\|b - Au\|$.

Es wird sich zeigen, dass u bereits nach sehr wenigen Iterationen mit minimalen Speicheraufwand ein ansehliches Ergebnis liefert.

3 Programm

Das Programm in einem Jupyter-Notebook als Pythoncode gegeben. Zur Vereinfachung der Berechnungen wurde die übliche Bibliothek `numpy` [6] verwendet, zur einfachen Visualisierung `matplotlib` [5]. In der Umsetzung wurde sich am in [3] gegebenen Algorithmus des CGLS-Verfahrens orientiert.

Literatur

[1] Gene H. Golub und Charles F. Van Loan. *Matrix Computations*. 4. Aufl. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. 2012.

[2] Magnus R. Hestenes und Eduard Stiefel. „Methods of conjugate gradients for solving linear systems“. In: *Journal of Research of the National Bureau of Standards* 49.6 (1952), S. 409. DOI: `10.6028/jres.049.044`.

[3] Marlis Hochbruck und Jörg-M. Sautter. „Mathematik fürs Leben am Beispiel der Computertomographie“. In: *Mathematische Semesterberichte* 49 (2002), S. 95–113. DOI: `10.1007/s005910200042`.

[4] *IBM100 - IBM 603*. [Online; überprüft 23. Jun. 2023]. 2012. URL: `https://www.ibm.com/ibm/history/ibm100/us/en/icons/ibm603`.

[5] *Matplotlib*. [Online; überprüft 23. Jun. 2023]. 2023. URL: `https://matplotlib.org`.

[6] *NumPy*. [Online; überprüft 23. Jun. 2023]. 2023. URL: `https://numpy.org`.

[7] Johann Radon. „Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten“. In: *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse* 69 (1917), S. 262–277.

Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form weder veröffentlicht, noch einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Leipzig, 25. Juni 2023