Einführung in Matlab - Einheit 5

Mehrdimensionale Arrays, Funktionen, Dünnbesetzte Matrizen, Numerische Mathematik

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen

Aufbau

Mehrdimensionale Arrays

- mehrdimensionale Arrays (Dim. > 2).

```
A(:,:,1) = ones(3);
A(:,:,2) = 2*ones(3);
whos
```

```
Name     Size     Bytes   Class
A        3x3x2      144   double
```

- `cat(<dim>,<A1>,<A2>,..)` fügt die Arrays `A1`, `A2`,.. entlang der Dimension `dim` zusammen.

```
A = cat(3,ones(3), 2*ones(3))
```

- Befehle wie `zeros`, `ones` oder `repmat` funktionieren auch im multidimensionalen Kontext.

Umsortieren von Arrays

```
reshape(X,n1,..,ns)
```

Der Befehl liest X spaltenweise aus, und schreibt die Elemente spaltenweise in ein $(n_1, \ldots, n_s)$-Array.

- X muss $n_1 \cdots n_s$ Elemente enthalten.
- Der Befehl ist sehr nützlich.

Beispiele:

```
reshape(hilb(4), 8,2)
reshape(hilb(4), 4,2,2)
```

Zugriff auf mehrdim. Arrays

Intern werden Arrays als Spalten abgespeichert. Zugriff durch linearen Index möglich.

```
B = reshape(1:12,2,3,2)
```

```
B(:,:,1) =
     1     3     5
     2     4     6
B(:,:,2) =

     7     9    11
     8    10    12
```

```
B(7:9)
```

```
ans =
     7     8     9
```

Nützliche Befehle

- Anzahl der Dimensionen von X:

```
ndims(X)
```

- Größe von X:

```
size(X)
```

- Umwandlung von linearer Indizierung in Array-Indizierung:

```
ind2sub
```

- Umwandlung von Array-Indizierung in lineare Indizierung:

```
sub2ind
```

```
A = reshape(1:12,2,3,2);
A(ind2sub(size(A),5))
```

```
ans =
     5
```

- Man kann auch mit mehrdimensionalen Arrays rechnen.

Aufbau

Funktionen

- Funktions-Typen
  - m.-File
  - inline
  - anonyme
  - string
- Funktionen werden in einem eigenen *Workspace* verwaltet.
- Beim ersten Aufruf speichert MATLAB die Funktion im Workspace bis MATLAB verlassen wird oder die Funktion `fun` mit `clear fun` gelöscht wird.
- Namen: Buchstaben mit 1-63 Zeichen (Ohne -,+,*,/ !).

Function-Handles

Ein *Function Handle* ist ein MATLAB Datentyp, das alle Informationen enthält, die zur Auswertung einer Funktion nötig sind.

- Definition, z.B.

```
Sinus = @sin
```

- Anwendung bei der Übergabe von Funktionen:

```
quad(Sinus,0,1)
```

- m-File Funktionen haben ihren Namen als Handle (`@func_name` für `func_name.m`)

Aufbau

Ein-/Ausgabe - Parameter

- Eingabeparameter als Cell-Array

```
varargin
```

- Die Anzahl der Inputvariablen

```
nargin
```

- Cell-Array der Ausgabewerte

```
varargout
```

- Die Anzahl der Outputvariablen

```
nargout
```

Beispiel: varargin

```
function result = integral(varargin)
% berechnet approximativ ein Integral ueber (a,b)
% durch die Mittelpunktregel mit Hilfe von N Punkten
% Eingabe: 0 Parameter:        (N=20, a=0, b=1)
%          1 Parameter: N      (a=0,b=1)
%          3 Parameter: N,a,b
% Jochen Schulz 16.08.2009
N = 20; a = 0; b = 1; % Default-Einstellung
anzahl_parameter = nargin; % Anz. Input-argumente
if anzahl_parameter == 1
    N = varargin{1};
end
if anzahl_parameter == 3
    N = varargin{1}; a = varargin{2};
    b = varargin{3};
end
if anzahl_parameter ~= [0 1 3]
    error('Falsche Anzahl an Input-Argumenten');
end
```

Beispiel: varargin

```
x = (a+(b-a)/(2*N)):(b-a)/N:(b-(b-a)/(2*N));
y = x.^3;
% Berechnung des Integrals
result = (b-a)*sum(y)*(1/N);

close all; % Plot
x1 = linspace(a,b,N+1);
for i = 1:N
    fill([x1(i) x1(i)  x1(i+1) x1(i+1)], [0 y(i)  y(i)
        0], 'r');
    hold on;
end
plot(a:(b-a)/100:b,(a:(b-a)/100:b).^3,'LineWidth',3);
title(strcat('\int x^3 = ',num2str(result),...
' fuer N =', num2str(N)));
```

Aufbau

Anonyme Funktion

```
@(<x>) <funktion(x)>
```

- Funktion mit Parameter

```
y = 1; f = @(x) sin(x)./(x+y) ;
f(2)
```

```
ans =
     0.3031
```

- Gamma-Funktion $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$.

```
k = @(s) quad( @(x) x.^(s-1).*exp(-x),0.1,500) ;
k(4),k(5)
```

```
ans =
     6.0000
ans =
    24.0000
```

String-Funktionen

```
<fun> = '<funktions-string>'
```

- Eingabe als String:

```
a = 'exp(z)-1+z'
```

- Plotten der zugehörigen Funktion

```
ezplot(a,[-1 1])
```

Bemerkung:
Funktionen gegeben als Strings sind im allgemeinen zu vermeiden! Besser andere Konstrukte (wie Inline-Funktionen) benutzen!

Inline-Funktionen

```
<fun> =  inline('<funktions-string>')
```

Beispiele:

```
a = 'exp(z) - 1 + z';
f = inline(a)
```

```
f =
     Inline function:
     f(z) = exp(z)-1+z
```

```
g = inline('x+y^2','x','y')
```

```
g =
     Inline function:
     g(x,y) = x+y^2
```

```
f(1),g(1,2),a(2)
```

```
ans =
    2.7183
ans =
     5
ans =
     x
```

Aufbau

Befehle für Funktionen

- Auswertung der Funktion `fun` an der Stelle $(x1, .., xn)$.

```
feval(<fun>,<x1>,..,<xn>)
```

`fun` ist dabei entweder ein Funktionsname oder ein Function-Handle.

- Wandlung eines Strings `g` in eine Inline-Funktion (vgl. `inline`).

```
f = fcnchk(<g>)
```

Ist `g` ein Function-Handle oder eine Inline-Funktion so ist $f = g$.

- Strings oder Inline-Funktionen `f` *vektorisieren*

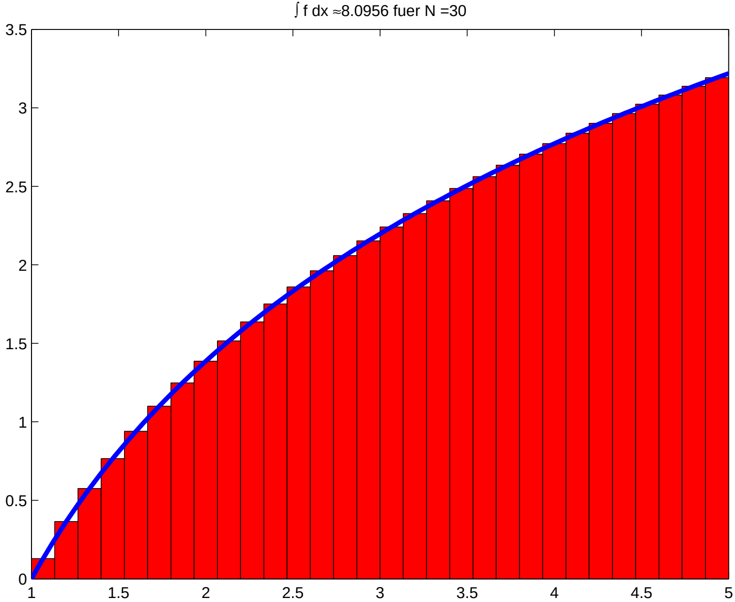
```
vectorize(<f>)
```

d.h. `'*'` ⇒ `'.*'` , `'^'` ⇒ `'.^'`, usw.

Beispiel: integral2.m (Auszug)

```
function result = integral2(varargin)
% Eingabe: 1 Parameter: f        (N=20, a=0, b=1)
%          2 Parameter: f,N      (a=0,b=1)
%          4 Parameter: f,N,a,b
N = 20; a = 0; b = 1; % Default-Einstellung
anzahl_parameter = nargin; % Anz. Input-argumente
if anzahl_parameter == 2
    N = varargin{2};
end;
if anzahl_parameter == 4
    N = varargin{2}; a = varargin{3}; b = varargin{4};
end;
if anzahl_parameter ~= [1 2 4]
    error('Falsche Anzahl an Input-Argumenten');
end;
% eventuelle Umwandlung von Strings
f = fcnchk(varargin{1},'vectorized');
x = (a+(b-a)/(2*N)):(b-a)/N:(b-(b-a)/(2*N));
y = feval(f,x);
```

`integral2('log(x.^2)',30,1,5)`



Beispiel: Sobolevsche Mittelungsfunktion

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-\|x\|^2}), & \|x\| < 1 \\ 0, & \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

mit $\|x\|^2 := \sum_{i=1}^{N} x_i^2$, $x = (x_1, \ldots x_N) \in \mathbb{R}^N$.

2 Versionen:

- eindimensionale Version
- N-dimensionale Version

1d-Fall

```
function result = f_1d(x)
% Sobolevsche Mittelungsfunktion (1d)
% f(x)=exp(-1/(1-|x|^2)), |x|<1, und f(x)=0 sonst
%
% Eingabe: Vektor x
% Ausgabe: Vektot f(x)
%
% Gerd Rapin     7.12.2003



% Berechnen des Funktionswerts
result = zeros(1,length(x));
for k = 1:length(x)
  if abs(x(k))<1
    result(k) = exp(-1/(1-x(k)^2));
  else
    result(k) = 0;
  end
end
```

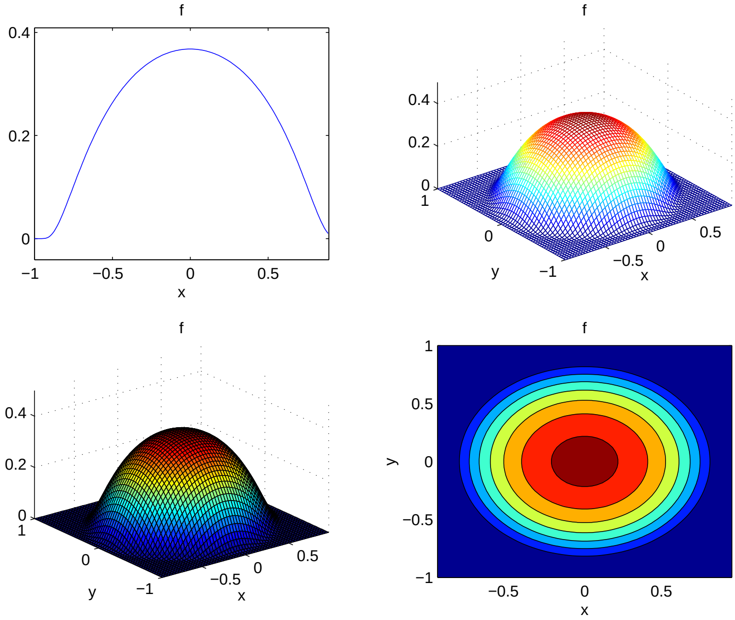
n-dimensionaler-Fall

```matlab
function result = f(varargin)
% f.m      Sobolevsche Mittelungsfunktion
%          Eingabe: Matrizen x1,x2,x3,..
%          Ausgabe: Matrix result=f(x1,x2,...)
betrag = varargin{1}.^2;
for i = 2:nargin
  betrag = betrag+varargin{i}.^2;
end
dimension = size(varargin{1});
result = zeros(dimension(1),dimension(2));
for j = 1:dimension(1)
  for k = 1:dimension(2)
    if betrag(j,k) < 1
      result(j,k) = exp(-1/(1-betrag(j,k)));
    else
      result(j,k) = 0;
    end;
  end;
end;
```

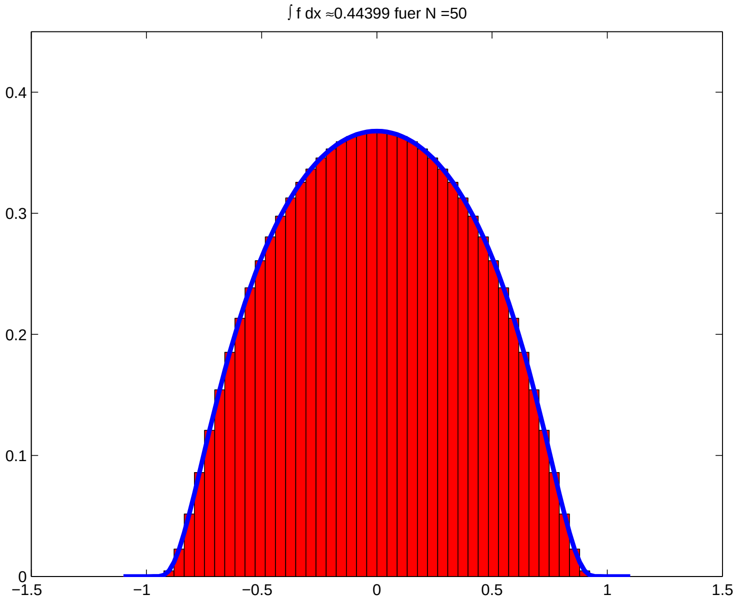
Programm zum Plotten

```
%    plot_f.m

% Eindimensionaler Plot
subplot(2,2,1),
ezplot(@f);

% Zweidimensionaler Plot
subplot(2,2,2),
ezmesh(@f);

% Zweidimensionaler Plot
subplot(2,2,3),
ezsurfc(@f);

% Zweidimensionaler Plot
subplot(2,2,4),
ezcontourf(@f);
```

Plots der Funktion



`integral2(@f,50,-1.1,1.1)`



Aufbau

Dünnbesetzte Matrizen

- Bei *Dünnbesetzten Matrizen* (*sparse matrices*) sind fast alle Einträge 0.
- In vielen Anwendungen, z.B. bei der Diskretisierung von Differentialgleichungen oder in der Graphentheorie, treten sehr grosse, dünnbesetzte Matrizen auf.
- In MATLAB steht dafür ein eigener Datentyp zur Verfügung, der zu jedem Nichtnullelement der Matrix, die zugehörige Zeile und Spalte speichert.

Beispiel

```
A = 2*diag(ones(10,1),0) ...
      - diag(ones(9,1),-1) ...
      - diag(ones(9,1),1);
B = sparse(A)
```

```
B =    (1,1)         2
       (2,1)        -1
       (1,2)        -1
       (2,2)         2
```

```
C = 2*diag(ones(100,1),0) ...
      - diag(ones(99,1),-1) ...
      - diag(ones(99,1),1);
D = sparse(C); whos
```

```
  Name        Size             Bytes  Class
  A          10x10               800  double array
  B          10x10               380  sparse array
  C         100x100            80000  double array
  D         100x100             3980  sparse array
```

Einige Befehle

- Erzeugung einer dünnbesetzten Matrix der Grösse $n \times m$. Alle Einträge sind 0.

```
sparse(n,m)
```

- Konvertierung der dichtbesetzten Matrix A in eine dünnbesetzte Matrix.

```
sparse(A)
```

- Die Struktur der Matrix A visualisieren.

```
spy(A)
```

- Die meisten Standardoperationen funktionieren auch mit dünnbesetzten Matrizen.

Dichte und dünnbesetzte Matrizen

- Konvertierung der dünnbesetzten Matrix A in eine dichtbesetzte Matrix B .

```
B = full(A)
```

- Bei binären Operationen, z.B. $A + B$ oder $A * B$ ist das Ergebnis bei dünnbesetzten Matrizen A und B wieder eine dünnbesetzte Matrix. Ist eine der Matrizen dichtbesetzt, so ist auch das Ergebnis dichtbesetzt.
- Berechnung der k betragsmäßig grössten Eigenwerte (Default: $k = 6$):

```
eigs(A,k)
```

Dünnbesetzte Matrizen

- Norm- und Konditionsberechnung:

```
normest(<A>) , condest(<A>)
```

- Alle iterativen Verfahren funktionieren auch mit dünnbesetzten Matrizen.
- Indizes aller Zeilen und Spalten erhalten, in denen Nichtnullelemente stehen:

```
[I,J] = find(X)
```

- Eine Übesicht aller Funktionen für dünnbesetzte Matrizen erhält man durch `help sparfun`.

Aufbau

Aufbau

Poisson Problem

- Poisson Problem beschreibt stationäre Wärmeverteilungen.
- *Poisson Problem:* Suche $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit

$$\begin{cases} -\triangle u & = & f & \text{in } \Omega \\ u & = & 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

  für $\Omega = (0,1)^2$ und $f \in C(\Omega)$.
- *Laplace-Operator* $\triangle u := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$

Diskretisierung

- Äquidistante Gitterweite $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$
- Menge aller Gitterpunkte

$$Z_h := \left\{ (x, y) \in \overline{\Omega} \;\middle|\; x = z_1 h,\ y = z_2 h \text{ mit } z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- Innere Gitterpunkte: $\omega_h := Z_h \cap \Omega$

Diskretisierung

- Approximation von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y)$

$$\frac{u(x-h, y) - 2u(x, y) + u(x+h, y)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \mathcal{O}(h^2)$$

- Approximation von $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)$

$$\frac{u(x, y-h) - 2u(x, y) + u(x, y+h)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + \mathcal{O}(h^2)$$

- Addition ergibt für $\triangle u(x, y)$ die Näherung

$$\frac{1}{h^2}\left(u(x, y-h) + u(x-h, y) - 4u(x, y) + u(x, y+h) + u(x+h, y)\right)$$

Diskretisierung

- Definition $u_{i,j} := u(ih, jh)$ ergibt an Gitterpunkten (ih, jh)

$$-u_{i,j-1} - u_{i-1,j} + 4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} = h^2 f_{ij}$$

  mit $i, j \in \{1, \dots, N-1\}$ und $f_{ij} := f(ih, jh)$.
- Randbedingungen ergeben $u_{0,i} = u_{N,i} = u_{i,0} = u_{i,N} = 0,\ i = 0, \dots, N$.

Diskretisierung

- Lexikografische Sortierung der inneren Unbekannten

$$
\begin{array}{cccc}
(h,(N-1)h) & (2h,(N-1)h) & \dots & ((N-1)h,(N-1)h) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(h,2h) & (2h,2h) & \dots & ((N-1)h,2h) \\
(h,h), & (2h,h) & \dots & ((N-1)h,h)
\end{array}
$$

ergibt Vektor $U_{i+(N-1)(j-1)} = u_{i,j}$.

Diskretisierung

Lineares Gleichungssystem für $U = (U_i)_{i=1}^{(N-1)^2}$

$$AU = F$$

mit

- $F := (f_i)_{i=1}^{(N-1)^2}$ mit $f_{i+(N-1)(j-1)} = f(ih, jh),\ i, j \in \{1, \ldots, N-1\}$,
- $$\begin{aligned} A &:= \frac{1}{h^2} tridiag(-I_{N-1}, T, -I_{N-1}) \in \mathbb{R}^{(N-1)^2 \times (N-1)^2}, \\ T &:= tridiag(-1, 4, -1) \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}. \end{aligned}$$

Implementierung

```
function loes = poisson (f,n)
f = fcnchk(f);
A = gallery('poisson',n-1);
% Erzeuge rechte Seite und Mesh
mesh = zeros(2,(n-1)^2);
F = zeros((n-1)^2,1);
for i = 1:(n-1)
    for j = 1:(n-1)
        F(i+(n-1)*(j-1)) = (1/n)^2*f(i/n,j/n);
        loes.mesh(:,i+(n-1)*(j-1)) = [i/n; j/n];
    end
end
% Loese das lineare System
loes.x = A \ F;
```

Implementierung

```
% Ergaenze Randbedingungen
loes.x = [ loes.x; zeros(4*(n+1),1)];
loes.mesh = [loes.mesh, [zeros(1,n+1); 0:1/n:1]];
loes.mesh = [loes.mesh, [ones(1,n+1);  0:1/n:1]];
loes.mesh = [loes.mesh, [0:1/n:1; ones(1,n+1)]];
loes.mesh = [loes.mesh, [0:1/n:1; zeros(1,n+1)]];

% Plotten
plot3(loes.mesh(1,:),loes.mesh(2,:),loes.x,'*');
figure;
[X,Y] = meshgrid(0:1/n:1,0:1/n:1);
Fi = TriScatteredInterp(loes.mesh(1,:)', loes.mesh(2,:)',
    loes.x,'linear');
Z = Fi(X,Y);
surf(X,Y,Z);
```

Aufbau

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Bei einer gewöhnlichen Dgl. sucht man eine Funktion $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, so dass

$$\frac{d}{dt} y(t) = f(t, y(t)), t \in I \quad y(t_0) = y_0,$$

wobei $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ein vorgegebener Anfangswert an $t_0 \in I$ und $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ die rechte Seite ist. Außerdem sei $\frac{d}{dt} y(t) := (\frac{\partial y_1(t)}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial y_n(t)}{\partial t})^t$.

Beispiele:

$\frac{d}{dt} y(t) = y(t),\ y(t_0) = y_0,$ Lösung: $y(t) = y_0 e^{t-t_0}$

$\frac{d}{dt} y(t) = e^y \sin(t),$ Lösung: $y(t) = -\log(\cos(x) + C),\ C + \cos(x) > 0$

Skalares Beispiel

Löse für $0 \leq t \leq 3$ mit ode45 die Dgl.

$$\frac{d}{dt}y(t) = -y(t) - 5e^{-t}\sin 5t, \quad y(0) = 1.$$

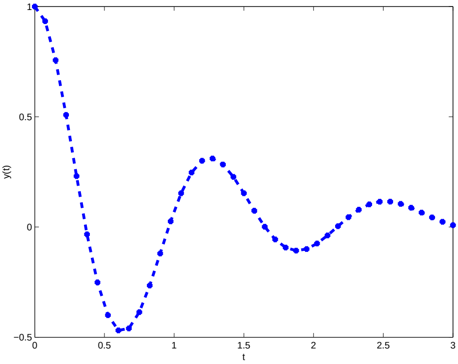
- Die rechte Seite als eigene Funktion:

```
function z = rechte_seite1(t,y)
% rechte_seite1   ODE Beispiel
%          z=rechte_seite1(t,y)
z = -y-5*exp(-t)*sin(5*t);
```

Skalares Beispiel

- Ausrechnen und Plotten

```
tspan = [0,3]; aw = 1;
[t,y] = ode45(@rechte_seite1,tspan,aw);
plot(t,y,'*--','Linewidth',3)
xlabel('t'), ylabel('y(t)')
```



ODE in MATLAB

```
[<t>,<y>] = ode45(<@fun>, <tspan>, <aw>, <options>)
```

- `@fun` steht für die rechte Seite der Dgl. (m-File).
- $aw \in \mathbb{R}^n$ ist der Anfangswert.
- *tspan* gibt das Zeitintervall an, auf dem die Dgl. berechnet werden soll. Normalerweise ist es von der Form `tspan=[t_0, t_1]`. Dann wird die Dgl. auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ berechnet (Anfangswert: $y(t_0) = aw$).
- Rückgabewerte: Vektoren t und Matrizen y. Dabei ist $y(:, i)$ die Lösung an der Stelle $t(i)$. Die Punkte t_i werden automatisch bestimmt.
- Durch die optionale Angabe von `options` kann der Löser gezielt eingestellt werden.
- Spezifiziert man mehr als zwei Zeitpunkte in `tspan`, so gibt MATLAB die Lösung genau an diesen Zeitschritten zurück.

Optionen

Die genauen Parameter der ODE-Löser können durch

```
options = odeset('Eigenschaft 1','Spez. 1',...
  'Eigenschaft 2','Spez. 2',...)
```

gesteuert werden. Die wichtigsten Parameter sind `AbsTol` (Default 10^{-6}) und `RelTol` (Default: 10^{-3}).

Beispiel:

```
options = odeset('AbsTol',1e-7,'RelTol',1e-4)
```

Andere Löser

Löser	Steifigkeit	Algorithmus	Ordnungen
`ode45`	nicht steif	Expliziter Runge-Kutta Löser	4, 5
`ode23`	nicht steif	Expliziter Runge-Kutta Löser	2, 3
`ode113`	nicht steif	Explizites Mehrschrittverfahren	1 - 13
`ode15s`	steif	Implizites Mehrschrittverfahren	1 - 5
`ode23s`	steif	Modifiziertes Rosenbrockverfahren	2, 3
`ode23t`	mittel steif	implizite Trapez Regel	2, 3
`ode23tb`	steif	Implizites Runge-Kutta Verf.	2, 3

Aufbau

Die Lorenz-Gleichungen

- Chaostheorie / Schmetterlingseffekt.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}y_1(t) &= 10(y_2(t) - y_1(t)) \\
\frac{d}{dt}y_2(t) &= 28y_1(t) - y_2(t) - y_1(t)y_3(t) \\
\frac{d}{dt}y_3(t) &= y_1(t)y_2(t) - 8y_3(t)/3
\end{aligned}
$$

rechte Seite:

```
function z = lorenz_rechte_seite(t,y)
z = [10*(y(2)-y(1));...
    28*y(1)-y(2)-y(1)*y(3);...
    y(1)*y(2)-8*y(3)/3];
```

Die Lorenz-Gleichungen

```
%---------------------------------
%   lorenz_gl.m
%  Eine Approximation der Lorenzgleichungen
%-----------------------------------------
tspan = [0,30]; aw = [0;1;0];
options = odeset ('AbsTol',1e-7,'RelTol',1e-4);
[t,y] = ode45(@lorenz_rechte_seite,tspan,aw, options);

subplot(2,2,1),plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3)),
subplot(2,2,2),plot(y(:,1),y(:,2)),xlabel('y_1'),ylabel('
    y_2');
subplot(2,2,3),plot(y(:,1),y(:,3)),xlabel('y_1'),ylabel('
    y_3');
subplot(2,2,4),plot(y(:,2),y(:,3)),xlabel('y_2'),ylabel('
    y_3');
```

Die Lorenz-Gleichungen