Einführung in Matlab

Einheit 5

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen

11. September 2009

Aufbau

Aufbau

Mehrdimensionale Arrays

- In MATLAB existieren auch mehrdimensionale Arrays (Dim. > 2).

```
>> A(:,:,1) = ones(3);
>> A(:,:,2) = 2*ones(3);
>> whos
  Name     Size     Bytes   Class
  A        3x3x2      144   double
```

- `cat(dim,A1,A2,..)` fügt die Arrays `A1`, `A2`,.. entlang der Dimension `dim` zusammen. (`A = cat(3,ones(3), 2*ones(3))`)
- Befehle wie `zeros`, `ones` oder `repmat` funktionieren auch im multidimensionalen Kontext.

Umsortieren von Arrays

Durch den Befehl `reshape(X,n1,..,ns)` wird X spaltenweise ausgelesen, und die Elemente werden spaltenweise in ein $(n_1, \ldots, n_s)$-Array geschrieben.

```
>> B = reshape(hilb(4), 8,2)
```

- X muss $n_1 \cdots n_s$ Elemente enthalten.
- Der Befehl ist sehr nützlich.

```
>> reshape(hilb(4), 4,2,2)
```

Zugriff auf mehrdim. Arrays

Intern werden Arrays als Spalten abgespeichert. Zugriff durch linearen Index möglich.

```
>> B = reshape(1:12,2,3,2)
B(:,:,1) =
     1     3     5
     2     4     6
B(:,:,2) =


     7     9    11
     8    10    12
>> B(7:9)
ans =
     7     8     9
```

Nützliche Befehle

- Anzahl der Dimensionen von X: `ndims(X)`
- Größe von X: `size(X)`
- Umwandlung von linearer Indizierung in Array-Indizierung: `ind2sub`
- Umwandlung von Array-Indizierung in lineare Indizierung: `sub2ind`

```
>> A = reshape(1:12,2,3,2);
>> A(ind2sub(size(A),5))
ans =
     5
```

- Man kann auch mit mehrdimensionalen Arrays rechnen.

Aufbau

Funktionen

- Eine Funktion kann ein m.-File, eine Inline-Funktion, eine anonyme Funktion oder auch ein String sein.
- Funktionen werden in einem eigenen *Workspace* verwaltet.
- Beim ersten Aufruf speichert MATLAB die Funktion im Workspace bis MATLAB verlassen wird oder die Funktion `fun` mit `clear fun` gelöscht wird.
- MATLAB nutzt zur Unterscheidung der Funktionen die ersten 63 Zeichen des Namens. Funktionen (und Variablen) müssen mit einem Buchstaben beginnen.

Aufbau

1. Mehrdimensionale Arrays
2. **Funktionen**
   - Function-Handles
   - Funktionen-Typen
   - Umgang und Beispiele
3. Dünnbesetzte Matrizen
4. Numerische Mathematik

Function-Handles

Ein *Function Handle* ist ein MATLAB Datentyp, das alle Informationen enthält, die zur Auswertung einer Funktion nötig sind.

- Definition, z.B. `Sinus = @sin`.
- Anwendung bei der Übergabe von Funktionen: `quad(Sinus,0,1)`
- Anonyme Funktion: `f = @(x) sin(x)*cos(x)`

Beispiel: Anonyme Funktion

- Funktion mit Parameter

```
>> y = 1; f = @(x) sin(x)./(x+y) ;
>> f(2)
ans =
    0.3031
```

- Gamma-Funktion $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$.

```
>> k = @(s) quad( @(x) x.^(s-1).*exp(-x),0.1,500) ;
>> k(4),k(5)
ans =
    6.0000
ans =
   24.0000
```

Aufbau

Funktionen als Strings

- Eingabe als String: `a = 'exp(z)-1+z'`
- Plotten der zugehörigen Funktion `ezplot(a,[-1 1])`

Bemerkung:
Funktionen gegeben als Strings sind im allgemeinen zu vermeiden! Besser andere Konstrukte (wie Inline-Funktionen) benutzen!

Function-Files

- *Function-Files* sind m-Files, die mit dem Stichwort `function` beginnen.
- Steuerung der Ein- und Ausgabeparameter:
  - Innerhalb einer Funktion gibt der Befehl `varargin` die Eingabeparameter als Cell-Array zurück. Die Anzahl der Inputvariablen erhält man durch `nargin`.
  - `varargout` ist ein Cell-Array, in die die Ausgabewerte geschrieben werden. Die Anzahl der Ausgabevariablen erhält man durch `nargout`.
- Ist `func_name.m` ein Function-File, so ist der entsprechende Function-Handle `@func_name`.

Beispiel: varargin

```
function result = integral(varargin)
%   integral.m
% berechnet approximativ ein Integral ueber (a,b)
% durch die Mittelpunktregel mit Hilfe von N Punkten
% Eingabe: 0 Parameter:       (N=20, a=0, b=1)
%          1 Parameter: N     (a=0,b=1)
%          3 Parameter: N,a,b
% Jochen Schulz 16.08.2009
N = 20; a = 0; b = 1; % Default-Einstellung
anzahl_parameter = nargin; % Anz. Input-argumente
if anzahl_parameter == 1
    N = varargin{1};
end;
if anzahl_parameter == 3
    N = varargin{1}; a = varargin{2};
    b = varargin{3};
end;
if anzahl_parameter ~= [0 1 3]
    error('Falsche Anzahl an Input-Argumenten');
end;
```

Beispiel: varargin

```
x = (a+(b-a)/(2*N)):(b-a)/N:(b-(b-a)/(2*N));
y = x.^3;
% Berechnung des Integrals
result = (b-a)*sum(y)*(1/N);

close all; % Plot
x1 = linspace(a,b,N+1);
for i = 1:N
    fill([x1(i) x1(i)  x1(i+1) x1(i+1)], [0 y(i)  y(i) 0], 'r');
    hold on;
end;
plot(a:(b-a)/100:b,(a:(b-a)/100:b).^3,'LineWidth',3);
title(strcat('\int x^3 = ',num2str(result),...
' fuer N =', num2str(N)));
```

Inline-Funktionen

Eine *Inline Funktion* ist im Wesentlichen eine einzeilige Funktion. Sie wird definiert durch einen String.

Beispiele:

```
>> a = 'exp(z) - 1 + z';
>> f = inline(a)
f =
     Inline function:
     f(z) = exp(z)-1+z
>> g = inline('x+y^2','x','y')
g =
     Inline function:
     g(x,y) = x+y^2
```

```
>> f(1),g(1,2),a(2)
ans =
    2.7183
ans =
     5
ans =
     x
```

Aufbau

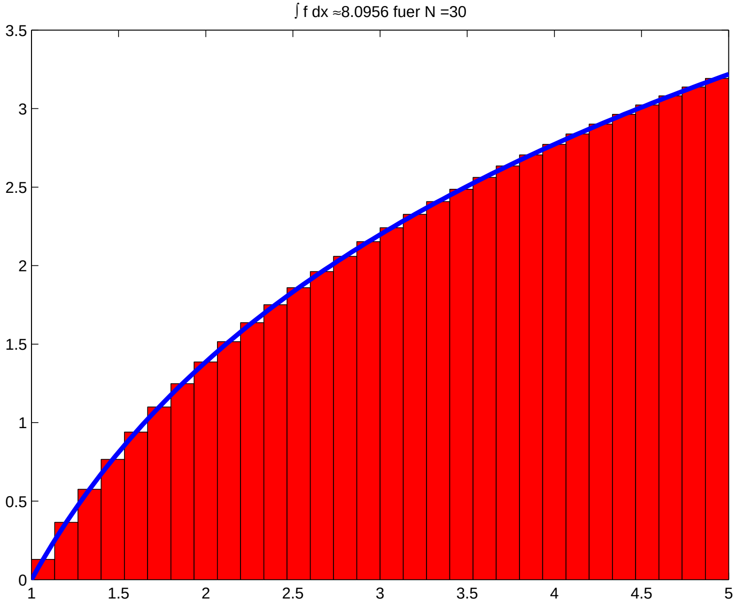
Befehle für Funktionen

- Durch `feval(fun,x1,..,xn)` wird die Funktion `fun` an der Stelle $(x1,..,xn)$ ausgewertet. `fun` ist dabei entweder ein Funktionsname oder ein Function-Handle.
- Durch `f = fcnchk(g)` wird ein String g in ein Inline-Funktion umgewandelt (vgl. `inline`). Ist g ein Function-Handle oder eine Inline-Funktion so ist $f = g$.
- Durch `vectorize(f)` wird f für Strings oder Inline-Funktionen *vektorisiert*, d.h. `'*'` wird durch `'.*'` ersetzt, `'^'` durch `'.^'`, usw.

Beispiel: integral2.m (Auszug)

```
function result = integral2(varargin)
%   integral2.m
% Eingabe: 1 Parameter: f        (N=20, a=0, b=1)
%          2 Parameter: f,N      (a=0,b=1)
%          4 Parameter: f,N,a,b
% Jochen Schulz 16.08.2009
N = 20; a = 0; b = 1; % Default-Einstellung
anzahl_parameter = nargin; % Anz. Input-argumente
if anzahl_parameter == 2
    N = varargin{2};
end;
if anzahl_parameter == 4
    N = varargin{2}; a = varargin{3}; b = varargin{4};
end;
if anzahl_parameter ~= [1 2 4]
    error('Falsche Anzahl an Input-Argumenten');
end;
% eventuelle Umwandlung von Strings
f = fcnchk(varargin{1},'vectorized');
x = (a+(b-a)/(2*N)):(b-a)/N:(b-(b-a)/(2*N));
y = feval(f,x);
```

```
integral2('log(x.^2)',30,1,5)
```



Beispielfunktion

$$f(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right), & \|x\| < 1 \\ 0, & \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

mit $\|x\|^2 := \sum_{i=1}^{N} x_i^2$, $x = (x_1, \ldots x_N) \in \mathbb{R}^N$.

2 Versionen:

- eindimensionale Version
- N-dimensionale Version

Beispielfunktion - 1d-Fall

```
function result = f_1d(x)
%--------------------------------------
% Sobolevsche Mittelungsfunktion (1d)
% f(x)=exp(-1/(1-|x|^2)), |x|<1, und f(x)=0 sonst
%
% Eingabe: Vektor x
% Ausgabe: Vektot f(x)
%
% Gerd Rapin     7.12.2003
%-------------------------------------------


% Berechnen des Funktionswerts
result = zeros(1,length(x));
for k = 1:length(x)
  if abs(x(k))<1
    result(k) = exp(-1/(1-x(k)^2));
  else
    result(k) = 0;
  end;
end;
```

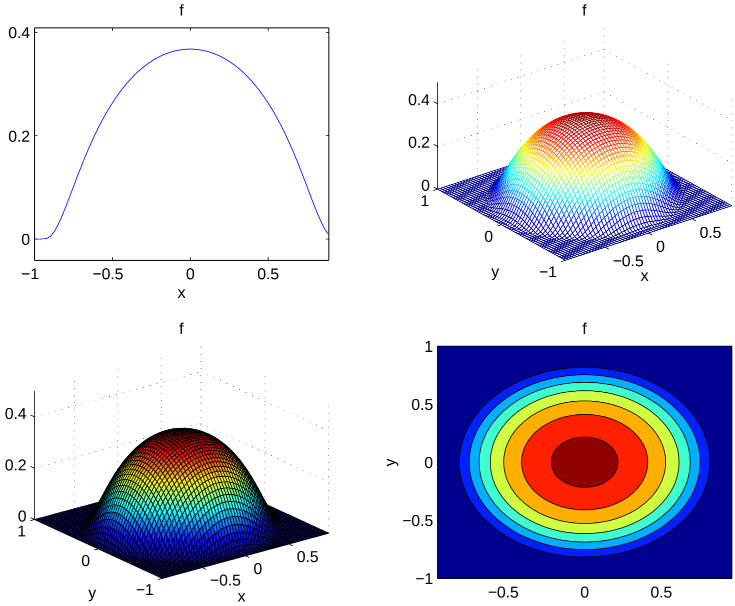
Beispielfunktion - n-dimensionaler-Fall

```
function result = f(varargin)
% f.m      Sobolevsche Mittelungsfunktion
%          Eingabe: Matrizen x1,x2,x3,..
%          Ausgabe: Matrix result=f(x1,x2,...)
betrag = varargin{1}.^2;
for i = 2:nargin
  betrag = betrag+varargin{i}.^2;
end
dimension = size(varargin{1});
result = zeros(dimension(1),dimension(2));
for j = 1:dimension(1)
  for k = 1:dimension(2)
    if betrag(j,k) < 1
      result(j,k) = exp(-1/(1-betrag(j,k)));
    else
      result(j,k) = 0;
    end;
  end;
end;
```

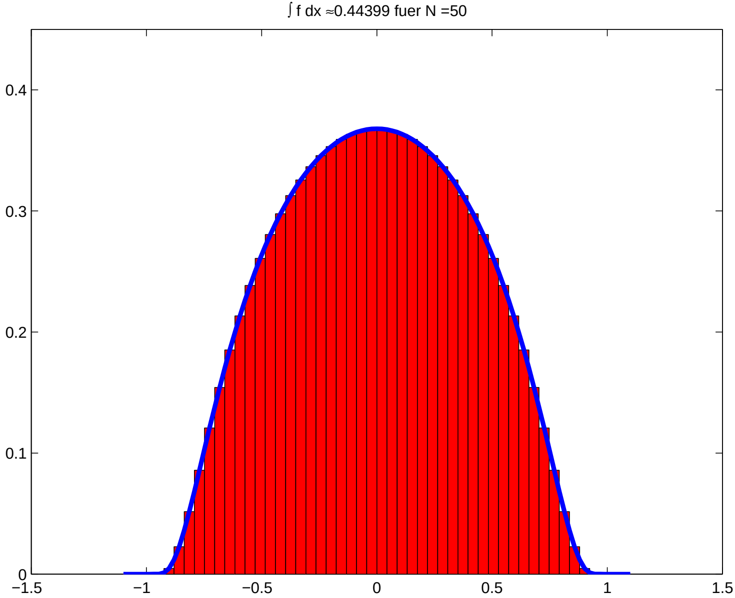
Programm zum Plotten

```
%    plot_f.m

% Eindimensionaler Plot
subplot(2,2,1),
ezplot(@f);

% Zweidimensionaler Plot
subplot(2,2,2),
ezmesh(@f);

% Zweidimensionaler Plot
subplot(2,2,3),
ezsurfc(@f);

% Zweidimensionaler Plot
subplot(2,2,4),
ezcontourf(@f);
```

Plots der Funktion



integral2(@f,50,-1.1,1.1)



Aufbau

Dünnbesetzte Matrizen

- Bei *Dünnbesetzten Matrizen* (*sparse matrices*) sind fast alle Einträge 0.
- In vielen Anwendungen, z.B. bei der Diskretisierung von Differentialgleichungen oder in der Graphentheorie, treten sehr grosse, dünnbesetzte Matrizen auf.
- In MATLAB steht dafür ein eigener Datentyp zur Verfügung, der zu jedem Nichtnullelement der Matrix, die zugehörige Zeile und Spalte speichert.

Beispiel

```
>> A = 2*diag(ones(10,1),0) ...
       - diag(ones(9,1),-1) ...
       - diag(ones(9,1),1);
>> B = sparse(A)
B =
   (1,1)        2
   (2,1)       -1
   (1,2)       -1
   (2,2)        2
       ...
>> C = 2*diag(ones(100,1),0) ...
       - diag(ones(99,1),-1) ...
       - diag(ones(99,1),1);
>> D = sparse(C); whos
  Name        Size              Bytes  Class

  A          10x10                800  double array
  B          10x10                380  sparse array
  C         100x100             80000  double array
  D         100x100              3980  sparse array
```

Einige Befehle

- Durch `sparse(n,m)` wird eine dünnbesetzte Matrix der Grösse $n \times m$ erzeugt. Alle Einträge sind 0.
- Durch `B = sparse(A)` wird die dichtbesetzte Matrix A in eine dünnbesetzte Matrix B umgewandelt.
- Die Struktur der Matrix A kann durch `spy(A)` visualisiert werden.
- Die meisten Standardoperationen funktionieren auch mit dünnbesetzten Matrizen.

Dichte und dünnbesetzte Matrizen

- Durch `B = full(A)` wird die dünnbesetzte Matrix A in eine dichtbesetzte Matrix B umgewandelt.
- Bei binären Operationen, z.B. $A + B$ oder $A * B$ ist das Ergebnis bei dünnbesetzten Matrizen A und B wieder eine dünnbesetzte Matrix. Ist eine der Matrizen dichtbesetzt, so ist auch das Ergebnis dichtbesetzt.
- Durch `eigs(A,k)` werden die k betragsmäßig grössten Eigenwerte berechnet. (Default: $k = 6$)

Dünnbesetzte Matrizen

- Zur Norm- und Konditionsberechnung stehen die Befehle `normest` bzw. `condest` zur Verfügung.
- Alle iterativen Verfahren funktionieren auch mit dünnbesetzten Matrizen.
- Eine Übesicht aller Funktionen für dünnbesetzte Matrizen erhält man durch `help sparfun`.
- Durch `[I,J] = find(X)` kann man die Indizes aller Zeilen und Spalten erhalten, in denen Nichtnullelemente stehen.

Aufbau

Poisson Problem

- Poisson Problem beschreibt stationäre Wärmeverteilungen.
- *Poisson Problem:* Suche $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit

$$\begin{cases} -\triangle u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

  für $\Omega = (0,1)^2$ und $f \in C(\Omega)$.
- *Laplace-Operator* $\triangle u := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$

Diskretisierung

- Äquidistante Gitterweite $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$
- Menge aller Gitterpunkte

$$Z_h := \left\{ (x, y) \in \overline{\Omega} \;\middle|\; x = z_1 h,\; y = z_2 h \text{ mit } z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- Innere Gitterpunkte: $\omega_h := Z_h \cap \Omega$

Diskretisierung

- Approximation von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y)$

$$\frac{u(x-h, y) - 2u(x, y) + u(x+h, y)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \mathcal{O}(h^2)$$

- Approximation von $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)$

$$\frac{u(x, y-h) - 2u(x, y) + u(x, y+h)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + \mathcal{O}(h^2)$$

- Addition ergibt für $\triangle u(x, y)$ die Näherung

$$\frac{1}{h^2}\left(u(x, y-h) + u(x-h, y) - 4u(x, y) + u(x, y+h) + u(x+h, y)\right)$$

Diskretisierung

- Definition $u_{i,j} := u(ih, jh)$ ergibt an Gitterpunkten (ih, jh)

$$-u_{i,j-1} - u_{i-1,j} + 4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} = h^2 f_{ij}$$

  mit $i, j \in \{1, \ldots, N-1\}$ und $f_{ij} := f(ih, jh)$.
- Randbedingungen ergeben $u_{0,i} = u_{N,i} = u_{i,0} = u_{i,N} = 0,\ i = 0, \ldots, N$.

Diskretisierung

- Lexikografische Sortierung der inneren Unbekannten

$$
\begin{array}{cccc}
(h,(N-1)h) & (2h,(N-1)h) & \dots & ((N-1)h,(N-1)h) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(h,2h) & (2h,2h) & \dots & ((N-1)h,2h) \\
(h,h), & (2h,h) & \dots & ((N-1)h,h)
\end{array}
$$

ergibt $U_{i+(N-1)(j-1)} = u_{i,j}$.

Diskretisierung

Lineares Gleichungssystem für $U = (U_i)_{i=1}^{(N-1)^2}$

$$AU = F$$

mit

- $F := (f_i)_{i=1}^{(N-1)^2}$ mit $f_{i+(N-1)(j-1)} = f(ih, jh),\ i, j \in \{1, \dots, N-1\}$,
- $$\begin{aligned} A &:= \frac{1}{h^2} tridiag(-I_{N-1}, T, -I_{N-1}) \in \mathbb{R}^{(N-1)^2 \times (N-1)^2}, \\ T &:= tridiag(-1, 4, -1) \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}. \end{aligned}$$

Implementierung

```
function loes = poisson (f,n)
f = fcnchk(f);
A = gallery('poisson',n-1);
% Erzeuge rechte Seite und Mesh
mesh = zeros(2,(n-1)^2);
F = zeros((n-1)^2,1);
for i = 1:(n-1)
    for j = 1:(n-1)
        F(i+(n-1)*(j-1)) = (1/n)^2*f(i/n,j/n);
        loes.mesh(:,i+(n-1)*(j-1)) = [i/n; j/n];
    end
end
% Loese das lineare System
loes.x = A \ F;
```

Implementierung

```
% Ergaenze Randbedingungen
loes.x = [ loes.x; zeros(4*(n+1),1)];
loes.mesh = [loes.mesh, [zeros(1,n+1); 0:1/n:1]];
loes.mesh = [loes.mesh, [ones(1,n+1);  0:1/n:1]];
loes.mesh = [loes.mesh, [0:1/n:1; ones(1,n+1)]];
loes.mesh = [loes.mesh, [0:1/n:1; zeros(1,n+1)]];

% Plotten
plot3(loes.mesh(1,:),loes.mesh(2,:),loes.x,'*');
figure;
[X,Y] = meshgrid(0:1/n:1,0:1/n:1);
Z = griddata(loes.mesh(1,:), loes.mesh(2,:), ...
    loes.x,X,Y,'linear');
surf(X,Y,Z);
```

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Bei einer gewöhnlichen Dgl. sucht man eine Funktion $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, so dass

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t)), t \in I \quad y(t_0) = y_0,$$

wobei $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ein vorgegebener Anfangswert an $t_0 \in I$ und $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ die rechte Seite ist. Außerdem sei $\frac{d}{dt}y(t) := (\frac{\partial y_1(t)}{\partial t}, \dots, \frac{\partial y_n(t)}{\partial t})^t$.

Beispiele:

$\frac{d}{dt}y(t) = y(t),\ y(t_0) = y_0,$ Lösung: $y(t) = y_0 e^{t-t_0}$

$\frac{d}{dt}y(t) = e^y \sin(t),$ Lösung: $y(t) = -\log(\cos(x) + C),\ C + \cos(x) > 0$

Skalares Beispiel

Löse für $0 \le t \le 3$ mit ode45 die Dgl.

$$\frac{d}{dt}y(t) = -y(t) - 5e^{-t}\sin 5t, \quad y(0) = 1.$$

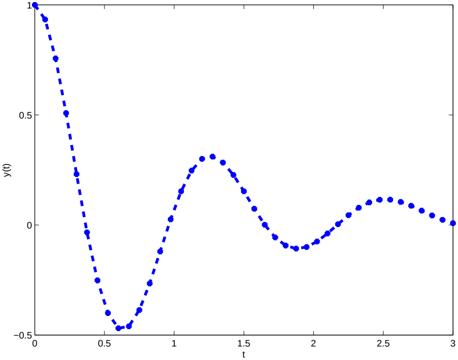
- Die rechte Seite als eigene Funktion:

```
function z = rechte_seite1(t,y)
% rechte_seite1   ODE Beispiel
%           z=rechte_seite1(t,y)
z = -y-5*exp(-t)*sin(5*t);
```

Skalares Beispiel

- Ausrechnen und Plotten

```
>> tspan = [0,3]; aw = 1;
>> [t,y] = ode45(@rechte_seite1,tspan,aw);
>> plot(t,y,'*--','Linewidth',3)
>> xlabel('t'), ylabel('y(t)')
```



ODE in MATLAB

In MATLAB gibt es den Befehl

```
[t,y]=ode45(@fun, tspan, aw, options)
```

- `@fun` steht für die rechte Seite der Dgl.. Die rechte Seite ist gegeben durch ein geeignetes m-File.
- $aw \in \mathbb{R}^n$ ist der Anfangswert.
- *tspan* gibt das Zeitintervall an, auf dem die Dgl. berechnet werden soll. Normalerweise ist es von der Form `tspan=[t_0, t_1]`. Dann wird die Dgl. auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ berechnet (Anfangswert: $y(t_0) = aw$).
- MATLAB gibt Vektoren t und Matrizen y zurück. Dabei ist $y(:, i)$ die Lösung an der Stelle $t(i)$. Die Punkte t_i werden von MATLAB automatisch bestimmt.
- Durch die optionale Angabe von `options` kann der Löser gezielt eingestellt werden.
- Spezifiziert man mehr als zwei Zeitpunkte in `tspan`, so gibt MATLAB die Lösung genau an diesen Zeitschritten zurück.

Optionen

Die genauen Parameter der ODE-Löser können durch

```
options = odeset('Eigenschaft 1','Spez. 1',...
  'Eigenschaft 2','Spez. 2',...)
```

gesteuert werden. Die wichtigsten Parameter sind `AbsTol` (Default 10^{-6}) und `RelTol` (Default: 10^{-3}).

Beispiel:

```
options =odeset('AbsTol',1e-7,'RelTol',1e-4)
```

Andere Löser

Löser	Steifigkeit	Algorithmus	Ordnungen
`ode45`	nicht steif	Expliziter Runge-Kutta Löser	4, 5
`ode23`	nicht steif	Expliziter Runge-Kutta Löser	2, 3
`ode113`	nicht steif	Explizites Mehrschrittverfahren	1 - 13
`ode15s`	steif	Implizites Mehrschrittverfahren	1 - 5
`ode23s`	steif	Modifiziertes Rosenbrockverfahren	2, 3
`ode23t`	mittel steif	implizite Trapez Regel	2, 3
`ode23tb`	steif	Implizites Runge-Kutta Verf.	2, 3

Die Lorenz-Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}y_1(t) &= 10(y_2(t) - y_1(t)) \\
\frac{d}{dt}y_2(t) &= 28y_1(t) - y_2(t) - y_1(t)y_3(t) \\
\frac{d}{dt}y_3(t) &= y_1(t)y_2(t) - 8y_3(t)/3
\end{aligned}
$$

rechte Seite:

```
function z = lorenz_rechte_seite(t,y)
z = [10*(y(2)-y(1));...
    28*y(1)-y(2)-y(1)*y(3);...
    y(1)*y(2)-8*y(3)/3];
```

Die Lorenz-Gleichungen

```
%--------------------------------
%   lorenz_gl.m
%  Eine Approximation der Lorenzgleichungen
%----------------------------------------
tspan = [0,30]; aw = [0;1;0];
options = odeset ('AbsTol',1e-7,'RelTol',1e-4);
[t,y] = ode45(@lorenz_rechte_seite,tspan,aw, options);

subplot(2,2,1),plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3)),
subplot(2,2,2),plot(y(:,1),y(:,2)),xlabel('y_1'),ylabel('y_2');
subplot(2,2,3),plot(y(:,1),y(:,3)),xlabel('y_1'),ylabel('y_3');
subplot(2,2,4),plot(y(:,2),y(:,3)),xlabel('y_2'),ylabel('y_3');
```

Die Lorenz-Gleichungen