Einführung in Matlab - Einheit 2 Numerische Lineare Algebra, Programmieren

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen



- Numerische Lineare Algebra
 - Normen
 - Lösen linearer Gleichungssyteme
 - Anwendung: Zwei-Punkt-Randwert-Aufgabe
 - Bestimmung von Eigenwerten
- Programmieren Fixpunktiteration
 - Schleifen
 - Bedingungen
 - Rekursionen

- Numerische Lineare Algebra
 - Normen
 - Lösen linearer Gleichungssyteme
 - Anwendung: Zwei-Punkt-Randwert-Aufgabe
 - Bestimmung von Eigenwerten
- Programmieren Fixpunktiteration
 - Schleifen
 - Bedingungen
 - Rekursionen

Vektornorm

Die *p*-Norm eines Vektors $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$||x||_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$$

(definiert für $p \ge 1$).

- in MATLAB: norm(x,p) (Default: p = 2)
- $p = \infty$ entspricht der Maximum-Norm

$$||x||_{\infty}=\max_{i=1,\dots n}|x_i|.$$

Matrixnorm

Seien $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ und $p \ge 1$. Die *Matrixnorm* ist definiert durch

$$||A||_p = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}} \frac{||A\mathbf{x}||_p}{||\mathbf{x}||_p}.$$

- In MATLAB: norm(A,p) (Default p = 2).
- $p = \infty$ kann charakterisiert werden durch

$$||A||_{\infty} = \max_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$
 Zeilensummennorm.

Kondition

Kondition einer quadratischen Matrix A:

$$cond_p(A) := ||A||_p ||A^{-1}||_p.$$

- In MATLAB: cond(A,p) (Default p = 2)
- Es gilt $\operatorname{cond}_p(A) \geq 1$.
- Die Kondition mißt die Empfindlichkeit der Lösung x von Ax = b gegenüber Störungen von A und b.
- Ist $\operatorname{cond}_p(A) >> 1$, so ist die Matrix beinahe singulär. Die Matrix ist schlecht konditioniert.

Beispiele

• Vektornormen für x = (1/100)(1, 2, ..., 100)

```
>> x = (1:100)/100; [norm(x,1) norm(x,2) norm(x,inf)]
ans = 50.5000 5.8168 1.0000
```

• Matrixnorm für die Hilbert-Matrix $H = (\frac{1}{i+j-1})_{ij}$

```
>> H = hilb(10); [norm(H,1) norm(H,2) norm(H,inf)]
ans = 2.9290 1.7519 2.9290
```

Kondition der Hilbert-Matrix

```
>> H = hilb(10); [cond(H,1) cond(H,2) cond(H,inf)]
ans =
1.0e+13 *
3.5354 1.6025 3.5354
```

- Numerische Lineare Algebra
 - Normen
 - Lösen linearer Gleichungssyteme
 - Anwendung: Zwei-Punkt-Randwert-Aufgabe
 - Bestimmung von Eigenwerten
- Programmieren Fixpunktiteration
 - Schleifen
 - Bedingungen
 - Rekursionen

Lineare Gleichungssysteme

Seien $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{C}^n$. Das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

wird in MATLAB gelöst durch x=A\b.

```
>> x = ones(5,1); H = hilb(5); b = H*x; y = (H\b)'
y =
1.0000 1.0000 1.0000 1.0000
```

Warnung: Benutze nie x=inv(A)*b, da das Berechnen von A^{-1} sehr aufwendig sein kann.

LU-Zerlegung

Was bedeutet A\b?

```
MATLAB berechnet die LU-Zerlegung von A (Gaussverfahren): obere Dreiecksmatrix U untere Dreiecksmatrix L mit Einsen auf der Diagonalen so dass PA = LU gilt (P Permutationsmatrix). Dann wird das LGS durch Rückwärts- und Vorwärtseinsetzen gelöst.
```

```
>> [L,U,P]=lu(hilb(5)); norm(P*hilb(5)-L*U)
ans = 2.7756e-17
```

Inverse, Determinante

• Berechnung der Inversen

```
>> X=inv(A)
X =
3 -3 1
-3 5 -2
1 -2 1
```

• Berechnung der Determinante

```
>> det(A)
ans = 1
```

Pseudoinverse

Berechnung der (Moore-Penrose) Pseudoinversen X von A (A singulär), d.h. X genügt

$$AXA = A, XAX = X, (XA)^* = XA, (AX)^* = AX.$$

- Numerische Lineare Algebra
 - Normen
 - Lösen linearer Gleichungssyteme
 - Anwendung: Zwei-Punkt-Randwert-Aufgabe
 - Bestimmung von Eigenwerten
- Programmieren Fixpunktiteration
 - Schleifen
 - Bedingungen
 - Rekursionen

Zwei-Punkt-Randwert-Aufgabe

Suche eine Funktion

$$u:[0,1] \rightarrow \mathbb{R},$$

so dass

$$-u''(x) = e^x, x \in (0,1)$$

 $u(0) = u(1) = 0$

Problem: Es kann i.A. keine geschlossene Lösungsdarstellung angegeben werden.

Ausweg: Approximation der Lösung.

Finite Differenzen Verfahren

Diskretisierung: $0 = x_0 < \cdots < x_n = 1$ mit $x_i = \frac{i}{n}$ Differenzenquotient:

$$u''(x_i) \sim \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2}, \quad h := \frac{1}{n}$$

Einsetzen in $-u''(x) = e^x$ ergibt

$$-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1}) = h^2 e^{x_i}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

Randbedingungen $\Rightarrow u(x_0) = u(x_n) = 0$.

 \Rightarrow Lineares Gleichungssystem für $u(x_1), \dots, u(x_{n-1})$.

Diskretes Problem

Setze
$$z = (z_1, \dots, z_{n-1})^t = (u(x_1), \dots, u(x_{n-1}))^t$$
. Löse das Gleichungssystem $Az = F$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, F := h^2 \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{n}} \\ \vdots \\ e^{\frac{n-1}{n}} \end{pmatrix}.$$

Lösung für n = 21

ullet Zerlegung des Intervalls [0,1]

```
>> x = 0:(1/21):1
```

• Eleminieren der Randpunkte

```
>> x_i = x(2:21)
```

• Erzeugen der Matrix A (Übungsaufgabe)

Lösung für n = 21

• Berechnen der rechten Seite:

```
F = (1/21)^2*transpose(exp(x_i));
```

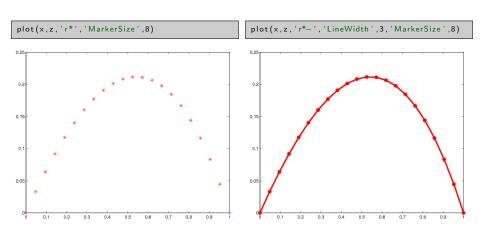
Lösen des linearen Gls.

$$z_i = A \ ;$$

• Zufügen der Werte am Rand

```
>> z = [0; z_i;0];
```

Lösung für n = 21



- Numerische Lineare Algebra
 - Normen
 - Lösen linearer Gleichungssyteme
 - Anwendung: Zwei-Punkt-Randwert-Aufgabe
 - Bestimmung von Eigenwerten
- Programmieren Fixpunktiteration
 - Schleifen
 - Bedingungen
 - Rekursionen

Eigenwerte

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. $\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von A, falls ein Vektor $x \in \mathbb{C}^n$ ungleich 0 existiert, so dass $Ax = \lambda x$ gilt. x heißt Eigenvektor.

- x=eig(A)
 berechnet die Eigenwerte von A und schreibt sie in den Vektor x.
- [V,D]=eig(A)
 D ist eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen.
 Die Spalten von V bilden die zugehörigen Eigenvektoren.

Weitere Zerlegungen

- QR-Zerlegung: [Q,R]=qr(A)
 m × n- Matrix A eine Zerlegung A = QR erzeugt, (Q eine unitäre m × m-Matrix, R eine obere m × n Dreiecksmatrix).
- Singulärwertzerlegung: [U,S,V]=svd(A) $A = U\Sigma V^*$. ($\Sigma \subset \mathbb{C}^{m \times n}$ eine Diagonalmatrix $U \subset \mathbb{C}^{m \times m}$, $V \subset \mathbb{C}^{n \times n}$ unitäre Matrizen).
- Cholesky-Zerlegung: R=chol(A)
 A = R*R zu einer hermiteschen, positiv definiten Matrix A (R ist eine obere Dreiecksmatrix mit reellen, positiven Diagonalelementen).

Bemerkungen

- LGS können auch mit Hilfe iterativer Verfahren gelöst werden, z.B. gmres, pcg, bicgstab.
- $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $n \neq m$ bei A\b:
 - n > m (überbestimmter Fall): Least-Square Lösung, d.h. der Ausdruck norm(A*x-b) wird minimiert.
 - n < m (unterbestimmter Fall): Grundlösung.

- Numerische Lineare Algebra
 - Normen
 - Lösen linearer Gleichungssyteme
 - Anwendung: Zwei-Punkt-Randwert-Aufgabe
 - Bestimmung von Eigenwerten
- Programmieren Fixpunktiteration
 - Schleifen
 - Bedingungen
 - Rekursionen

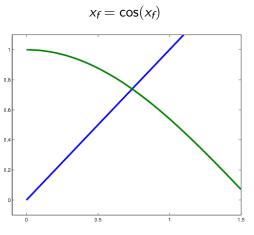
Gültigkeitsbereich von Variablen

- Variablen in Skript-Files benutzen den globalen Workspace, d.h. bereits vorhandene Variablen können direkt benutzt oder überschrieben werden. Sie sind gültig bis sie explizit gelöscht werden.
- Variablen in Function-Files sind nur innerhalb der Funktion definiert und werden bei Verlassen der Funktion gelöscht. Variablen des globalen Workspace können nicht benutzt werden.

- Numerische Lineare Algebra
 - Normen
 - Lösen linearer Gleichungssyteme
 - Anwendung: Zwei-Punkt-Randwert-Aufgabe
 - Bestimmung von Eigenwerten
- 2 Programmieren Fixpunktiteration
 - Schleifen
 - Bedingungen
 - Rekursionen

Fixpunkt

Suche ein $x_f \in \mathbb{R}$ so dass

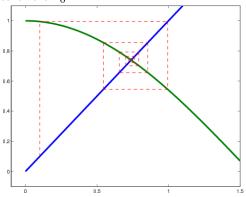


Fixpunkt-Iteration

Fixpunkt-Iteration

$$x_{k+1} = cos(x_k)$$

bei geeignetem Startwert x_0 .



Implementierung

```
% Plot 1
x = linspace(0, 1.5, 50);
y = cos(x);
plot(x,x,x,y,'LineWidth',3),
axis([-0.1 1.5 -0.1 1.1]);
hold on:
pause; % stoppt bis eine Taste gedrückt wird
z(1) = 0.1; \% Anfangswert
it max = 10; % Iterationsschritte
for i = 1: it max
    z(i+1) = cos(z(i));
    plot([z(i) z(i)], [z(i) z(i+1)], 'r--', 'LineWidth', 1);
    pause;
    plot([z(i) z(i+1)], [z(i+1) z(i+1)], 'r--', 'LineWidth']
        ,1);
    hold on;
    pause; % stoppt bis eine Taste gedrückt wird
end:
```

Einige Grafikbefehle

- Durch figure wird ein Grafik-Fenster gestartet.
- Mittels hold on werden alle Grafiken in einem Fenster übereinander gezeichnet.
- Im Standardmodus wird bei jedem Grafikbefehl die bestehende Grafik gelöscht und durch die neue Grafik ersetzt.
- Mittels hold off wird zurück in den Standardmodus gewechselt.

for - Schleife

```
for variable = Ausdruck
  Befehle
end
```

Bemerkungen:

- Der Ausdruck ist normalerweise von der Form i:s:j.
- Die Befehle werden eingerückt.
- auch weitere Schleifen-Konstrukte wie while und switch sind verfügbar.

Beispiele

• Berechne $\sum_{i=1}^{1000} \frac{1}{i}$

```
>> sum=0; for j=1:1000, sum=sum+1/j; end, sum sum = 7.4855
```

Berechnen dreier Werte

```
>> for x=[pi/6 pi/4 pi/3], sin(x), end
ans = 0.5000
ans = 0.7071
ans = 0.8660
```

Matrix als Ausdruck

```
>> for x=eye(3), x', end
ans = 1 0 0
ans = 0 1 0
ans = 0 0 1
```

Vandermonde-Matrix

Berechne zu einem gegebenen Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ die Vandermonde-Matrix

$$V := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Implementierung II

end

and

```
function V = vandermonde2(x)
  vandermonde2 berechnet die Vandermonde Matrix zu einem
               Vektor x
              INPUT:
              x Zeilenvektor
              OUTPUT:
              V Vandermonde-Matrix
  Gerd Rapin 8.11.2003
n = length(x);
V = zeros(n,n);
for i = 1:n
    for j = 1:n
       V(i,j) = x(i)^{(j-1)};
```

- Numerische Lineare Algebra
 - Normen
 - Lösen linearer Gleichungssyteme
 - Anwendung: Zwei-Punkt-Randwert-Aufgabe
 - Bestimmung von Eigenwerten
- Programmieren Fixpunktiteration
 - Schleifen
 - Bedingungen
 - Rekursionen

Quadratische Gleichung

$$\begin{cases} \text{ Suche } x \in \mathbb{R}, \text{ so dass} \\ x^2 + px + q = 0 \end{cases}$$

Fallunterscheidung für $d:=\frac{p^2}{4}-q$:

- Fall a): d > 0 2 Lösungen: $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{d}$
- Fall b): d = 0 1 Lösung: $x = -\frac{p}{2}$
- Fall c): d < 0 keine Lösung

Implementierung

```
function [anz_loesungen, loesungen] = quad_gl(p,q)
 quad gl berechnet die Loesungen der quadratischen
         Gleichung x^2 + px + q = 0
           INPUT: Skalare p
           OUTPUT: anz loesungen Anzahl der Loesungen
                   loesungen Vektor der Loesungen
  Gerd Rapin 8.11.2003
d=p^2/4-q; % Diskriminante
```

Implementierung II

```
% 2 Loesungen
if d>0
    anz_loesungen=2;
    loesungen=[-p/2-sqrt(d) -p/2+sqrt(d)];
end
% 1 Loesung
if d==0
    anz_loesungen=1;
    loesungen=[-p/2];
end
% 0 Loesungen
if d<0
    anz_loesungen=0;
    loesungen=[];
end
```

Logische Operationen

- Es gibt in MATLAB logische Variablen. Der Datentyp ist logical.
- Variablen dieses Typs sind entweder TRUE (1) oder FALSE (0).
- ullet Numerische Werte ungleich 0 werden als TRUE gewertet.

Vergleichs-Operatoren

```
>> a=[1 1 1], b=[0 1 2]
```

```
      a == b
      gleich
      0 1 0

      a ~= b
      ungleich
      1 0 1

      a < b</td>
      kleiner
      0 0 1

      a > b
      größer
      1 0 0

      a <= b</td>
      kleiner oder gleich
      0 1 1

      a >= b
      größer oder gleich
      1 1 0
```

Bem: 1 = wahre Aussage, 0 = falsche Aussage

Bem: Komponentenweise Vergleiche sind auch für Matrizen gleicher Größe möglich!

Logische Operatoren

&	logisches und	~	logisches nicht
	logisches oder	xor	exklusives oder
_			

Beispiele:

```
>> x=[-1 1 1]; y=[1 2 -3];
```

```
>> (x>0) & (y>0)
ans =
0 1 0
```

```
>> (x>0) | (y>0)
ans =
1 1 1
```

```
>> ~( (x>0) & (y>0))
ans =
1  0  1
```

```
>> xor(x>0,y>0)
ans =
1 0 1
```

Bedingung

Einfache Bedingung

```
if Ausdruck
Befehle
end
```

Bed. mit Alternative

```
if Ausdruck
Befehle
else
Befehle
end
```

Die Befehle zwischen if und end werden ausgeführt, wenn der Ausdruck wahr (TRUE) ist. Andernfalls werden (soweit vorhanden) die Befehle zwischen else und end ausgeführt.

Ausdruck ist wahr, wenn alle Einträge von Ausdruck ungleich 0 sind.

While-Schleifen

```
while Ausdruck
Befehle
end
```

Die Befehle werden wiederholt, so lange die Bedingung *Ausdruck* wahr ist. *Ausdruck* ist wahr, wenn alle Einträge von *Ausdruck* ungleich 0 sind.

Beispiel: Berechne $\sum_{i=1}^{1000} \frac{1}{i}$.

```
n = 1000; sum = 0; i = 1;
while (i <= n)
    sum = sum+(1/i);
    i = i+1;
end
sum</pre>
```

Größter gemeins. Teiler (ggT)

Berechnung des ggT von natürlichen Zahlen a und b mit Hilfe des euklidischen Algorithmus

Idee: Es gilt
$$ggT(a, b) = ggT(a, b - a)$$
 für $a < b$.

Algorithmus:

Wiederhole, bis a = b

- Ist a > b, so a = a b.
- Ist a < b, so b = b a

Implementierung

```
function a = ggt(a,b)
 ggt berechnet den groessten gemeinsamen Teiler (ggT)
        zweier natuerlichen Zahlen a und b
            INPUT: natuerliche Zahlen a
                                        h
           OUTPUT: ggT
  Gerd Rapin 11.11.2003
while (a ~= b)
  if (a > b)
  a = a-b;
  else
    b = b-a;
  end
end
```

break and continue

• Der Befehl break verläßt die while oder for-Schleife.

```
x=1; while 1, xmin=x; x=x/2;
if x==0, break, end,
end, xmin
xmin = 4.9407e-324
```

• Durch continue springt man sofort in die nächste Iteration der Schleife, ohne die restlichen Befehle zu durchlaufen.

```
for i=1:10,
  if i<5, continue, end,
  x(i)=i; end, x</pre>
  x = 0 0 0 0 5 6 7 8 9 10
```

Aufbau

- Numerische Lineare Algebra
 - Normen
 - Lösen linearer Gleichungssyteme
 - Anwendung: Zwei-Punkt-Randwert-Aufgabe
 - Bestimmung von Eigenwerten
- Programmieren Fixpunktiteration
 - Schleifen
 - Bedingungen
 - Rekursionen

Rekursive Funktionen

Rekursive Funktionen sind Funktionen, die sich selbst aufrufen. Bei jedem Aufruf wird ein neuer lokaler Workspace erzeugt.

Beispiel: Fakultät: n! = fak(n)

$$n! = n(n-1)! = n \operatorname{fak}(n-1)$$
$$= n(n-1) \operatorname{fak}(n-2)$$
$$= \cdots = n(n-1) \cdots 1$$

Fakultät - rekursiv

```
function res = fak(n)
if (n == 1)
    res = 1;
else
    res = n*fak(n-1);
end
```

Fakultät - direkt

```
function fak = fak_it(n)
% fakultaet berechnet zu einer gegebenen natuerlichen
   Zahl n
              die Fakultaet n!:=1*2*...*n
               INPUT: natuerliche Zahl n
%
               OUTPUT: Fakultaet fak
   Gerd Rapin 10.11.
fak = 1;
for i = 1:n
  fak = fak*i;
end;
```

Fakultät - Zeitvergleich

```
% fak_vergleich.m
% iterativ
tic
for i = 1:100
  fak it(20);
end
time1 = toc;
fprintf('\nZeitverbrauch direktes Verfahren: %f',time1);
% rekursiv
tic
for i = 1:100
  fak(20);
end
time2 = toc;
fprintf('\nZeitverbrauch rekursives Verfahren: %f\n',
   time2);
```

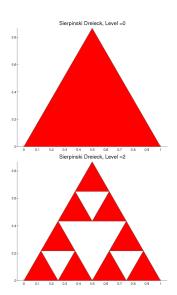
rekursive Implementierung GGT

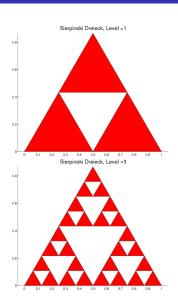
```
function [a,b] = ggt_rekursiv(a,b)
% ggt rekursiv berechnet den goessten
% gemeinsamen Teiler (ggT)
if a \sim = b
  if a>b
   a = a-b;
  else
    b = b-a;
  end:
  [a,b] = ggt_rekursiv(a,b);
end;
```

Sierpinski Dreieck

- Wir beginnen mit einem Dreieck mit Eckpunkten P_a , P_b und P_c .
- Wir entfernen daraus das Dreieck, das durch die Mittelpunkte der Kanten entsteht.
- Die verbliebenden drei Dreiecke werden der gleichen Prozedur unterzogen.
- Diesen Prozess können wir rekursiv wiederholen.
- Das Ergebnis ist das Sierpinski Dreieck.

Sierpinski Dreieck





Implementierung

```
sierpinski plot.m
level=7;
ecke1=[0;0];
ecke2=[1;0];
ecke3 = [0.5; sqrt(3)/2];
figure; axis equal;
hold on;
sierpinski(ecke1,ecke2,ecke3,level);
hold off;
title(['Sierpinski Dreieck, Level =' ...
        num2str(level)], 'FontSize',16);
```

Implementierung

```
function sierpinski(ecke1,ecke2,ecke3,level)
% Teilt das Dreieck auf in 3 Dreiecke (level>0)
% Plotten des Dreiecks (level=0)
if level == 0
    fill([ecke1(1),ecke2(1),ecke3(1)],...
     [ecke1(2),ecke2(2),ecke3(2)],'r');
else
    ecke12 = (ecke1 + ecke2)/2;
    ecke13 = (ecke1 + ecke3)/2;
    ecke23 = (ecke2 + ecke3)/2;
    sierpinski (ecke1, ecke12, ecke13, level-1);
    sierpinski (ecke12, ecke2, ecke23, level-1);
    sierpinski (ecke13, ecke23, ecke3, level-1);
end:
```

Zeichnen von Polygonen

Ein Polygon sei durch die Eckpunkte $(x_i, y_i)_{i=1}^n$ gegeben. Dann kann er in MATLAB durch den Befehl

dargestellt werden. char gibt die Farbe des Polygons an, z.B. rot wäre 'r'.

Warnung

Wiederholte Anwendung von Script-Files kann zu Fehlern führen

Programm

```
% plotte_sin.m
disp(['Plot der Sinus'
  'Funktion auf [0,10]
     '1):
n = input(['Plot an '
   'wievielen Punkten?
       '1):
x = linspace(0,10,n);
for i=1:n
y(i) = sin(x(i));
end:
plot(x,y);
```

Aufruf

```
>>> plotte_sin
Plot der Sinus Funktion auf [0,10]
Plot an wievielen Punkten?20
>>> plotte_sin
Plot der Sinus Funktion auf [0,10]
Plot an wievielen Punkten?10
??? Error using =>> plot
Vectors must be the same lengths.

Error in =>> plotte_sin.m
On line 9 =>> plot(x,y);
```

globale Variablen

Mittels des Befehls global können Variablen des globalen Workspace auch für Funktionen manipulierbar gemacht werden.

Funktion

```
function f=myfun(x)
% myfun.m
% f(x)=x^alpha sin(1/x)

global alpha
f=x.^alpha.*sin(1./x);
```

Plotten

```
% plot myfun
global alpha
alpha_w=[0.4 0. 6 1 1.5
   21:
for i = 1:length(alpha_w)
    alpha = alpha_w(i);
    fplot(@myfun,[0.1,1])
    hold on;
end
hold off;
```

Guter Stil in MATLAB

- Alle Programme sollten zu Beginn einen Kommentar enthalten, in dem beschrieben wird, was das Programm macht. Insbesondere sollten die Eingabe- und Ausgabevariablen genau beschrieben werden.
- Vor und nach logischen Operatoren und = sollte ein Lehrzeichen gesetzt werden.
- Man sollte pro Zeile nur einen Befehl verwenden.
- Befehle in Strukturen, wie if, for oder while, sollten eingerückt werden.

Guter Stil in MATLAB

- Die Namen der Variablen sollten, soweit möglich, selbsterklärend sein.
- Verfasst man umfangreiche Programme, so sollten M-Funktionen, die eine logische Einheit bilden in einem separaten Unterverzeichnis gespeichert sein. Die Verzeichnisse können durch addpath eingebunden werden.
- Potentielle Fehler sollten, soweit möglich, aufgefangen werden.
 Speziell sollten die Eingabeparameter der Funktionen geprüft werden.