Einführung in Matlab - Einheit 3

Grafik, Polynome

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen

Aufbau

Aufbau

1. **Einführung Grafik**
   - einfache zweidimensionale Grafiken
   - Beschriftungen
   - Anwendung: polynomiale Interpolation
   - Weitere zweidimensionale Darstellungsmöglichkeiten
   - Dreidimensionale Grafiken
   - Animation

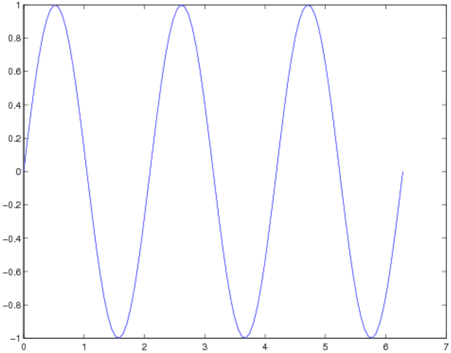
2. **Polynome**

Standard-Plot

```
plot(x,y)
```

zeichnet für Vektoren $x = (x_1, \ \ldots \ , x_N)$ und $y = (y_1, \ldots \ , y_N)$ eine Grafik, die die Punkte (x_i, y_i) und (x_{i+1}, y_{i+1}) miteinander verbindet.

```
>> x = linspace(0,2*pi
    ,100);
>> y1 = sin(3*x);
>> plot(x,y1)
```

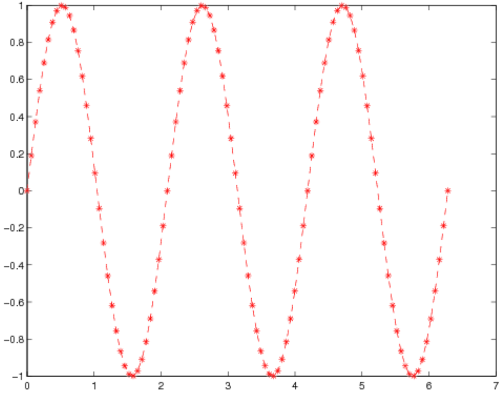


Erweiterungen

```
plot(x,y,string)
```

String besteht aus drei Elementen, die die Farbe, Linienstil und die Markierung der Punkte kontrollieren. Die Reihenfolge der drei Elemente ist beliebig.

Beispiel: Durch `plot(x,y,'r*--')` wird die Linie gestrichelt (- -) in rot (r) gezeichnet und die Punkte durch * markiert.



Optionen

Farben	r (rot), g (grün), b (blau), c (hellblau), m (magenta), y (gelb), k (schwarz), w (weiß)
Marker	o (Kreis), * (Stern), . (Punkt), + (Plus), x (Kreuz), s (Quadrat), d (Raute),...
Linien-Stil	- (durchgezogene Linie), -- (gestrichelte Linie), : (gepunktete Linie), -. (Strich-Punkt Linie)

Läßt man den Linien-Stil weg, so werden die Punkte nicht verbunden.

Optionen II

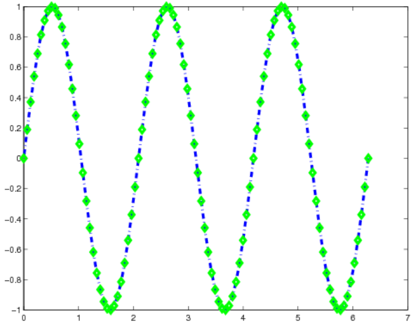
```
plot(x,y,string,Eigenschaft, Spez.)
```

Eigenschaften:

`'MarkerSize'` (Default 6), `'LineWidth'` (Default 0.5), `'MarkerEdgeColor'`, `'MarkerFaceColor'`

Beispiel:

```
>>plot(x,y1,'b-.d','LineWidth'
   ,3,...
'MarkerEdgeColor','g')
```

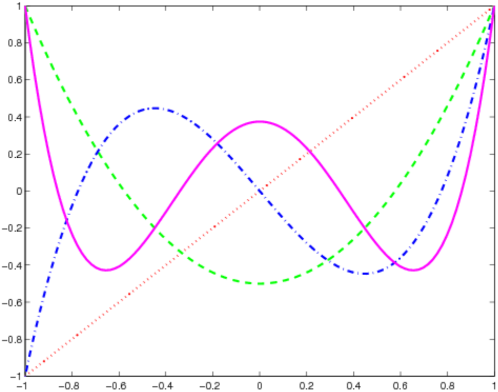


Alternativen

- Mehrere Plots in eine Grafik:
  `plot(x1,y1,string1,x2,y2,string2,...)`
- Logaritmische Skalierung in x- bzw in y-Richtung: `semilogx(x1,y1)` bzw. `semilogy(x1,y1)`.
- Logarithmische Skalierung beider Achsen: `loglog(x1,y1)`
- Ist X ein Vektor mit komplexen Einträgen, so ergibt `plot(X)` `plot(real(X),imag(X))`.

Beispiel - Legendre Polynome

```
x = linspace(-1,1,100);
p1 = x;
p2 = (3/2)*x.^2-1/2;
p3 = (5/2)*x.^3-(3/2)*x;
p4 = (35/8)*x.^4 - (15/4)*x.^2+3/8;
plot(x,p1,'r:',x,p2,'g--',x,p3,'b-.',x,p4,'m-','LineWidth',2)
```



Achseneinstellungen

`axis([x1 x2 y1 y2])`	Setzen der *x*- und *y*-Achsen Grenzen
`axis auto`	Rückkehr zu Default Achsen Grenzen
`axis equal`	Gleiche Dateneinheiten auf allen Achsen
`axis off`	Enfernen der Achsen
`axis square`	quadratische Achsen-Box
`axis tight`	Achsen Grenzen werden passend zu den Daten gewählt.
`xlim([x1 x2])`	Setzen der *x*-Achse
`ylim([y1 y2])`	Setzen der *y*-Achse
`grid on`	Gitter aktivieren
`box on`, `box off`	Box um die Grafik legen, Box entfernen

Exkurs: Characters (char)

Characters:

Characters (Zeichen) sind einzelne Zeichen.

Intern werden Characters in MATLAB durch Integer dargestellt. Die Werte zwischen 0 und 128 entsprechen den ASCII Werten. Insgesamt wird zur Speicherung eines Zeichens 2 Bytes benötigt. Es wird also jedem Zeichen eine Zahl zwischen 0 und $2^{16}-1$ zugeordnet.

```
> s='d'
s =
d
>> s1=double(s)
s1 =
   100
>> s2=char(100)
s2 =
d
```

Exkurs: Strings

String:
Ein String ist ein Vektor von character (Zeichen). Intern werden sie durch die ASCII Werte dargestellt.

```
>> s='AB6de*'
s =
AB6de*
>> sd=double(s)
sd =
    65     66     54    100    101     42
>> s2=char(sd)
s2 =
AB6de*
```

Exkurs: Befehle für Strings

- Durch `strcat` werden Strings verbunden, z.B. `strcat('Hello','world')`.
- `num2str(x,n)` konvertiert x in einen String mit n signifikanten Stellen. (Default: $n = 4$)
- `int2str(x)` rundet x und konvertiert es in einen String.
- `strcmp(s,t)` vergleicht die Strings s und t.
- Durch `help strfun` erhält man eine Liste aller Befehle im Zusammenhang mit Strings.

Aufbau

Beschriften der Grafik

- Titel: `title('Titel')`
- Achsenbeschriftung: `xlabel('Text')`, `ylabel('Text')`
- Legende: `legend('Text1','Text2',...,nr)`

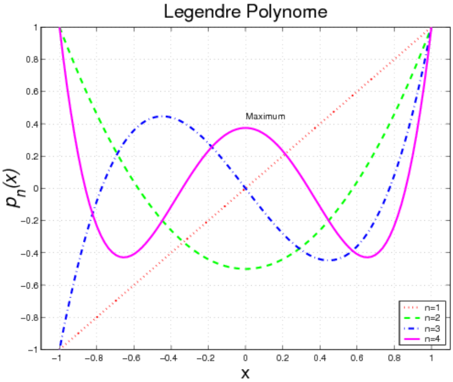
  nr gibt die Position der Legendenbox in der Grafik an: -1 (rechts vom Plot), 0 'bester' Ort, 1 oben rechts (default), 2 oben links, 3 unten links, 4 unten rechts.
- zusätzlicher Text: `text(x,y,'Text')` Plaziert 'Text' an die Position (x, y) bzgl. der Werte auf der x- bzw. y-Achse.

Bemerkungen zur Beschriftung

- In den strings kann direkt eine abgespeckte LaTeX-Notation verwendet werden. Eine nahezu vollständige LaTeX-Unterstützung ist mit dem latex-interpreter möglich. Beispiele:
  - `\alpha` $\Rightarrow$ α
  - `sin^{3/2}(x)` $\Rightarrow$ $\sin^{3/2}(x)$.
  - `title('f(x)= \frac{1}{x^2+a}','interpreter','latex')` $\Rightarrow$ $f(x) = \frac{1}{x^2+a}$
- Ändern der Schriftgröße, z.B. `title('Titel','FontSize', 20)`.
- Auflistung aller modifizierbaren Texteigenschaften: `doc text_props`

Beispiel - Legendre Polynome II

```
>> title('Legendre Polynome','FontSize', 20)
>> xlabel('x','FontSize', 20)
>> text(0,0.45,'Maximum')
>> legend('n=1','n=2','n=3','n=4',4)
>> grid on, box on;
>> xlim([-1.1,1.1])
```



Umgang mit Grafikfenster

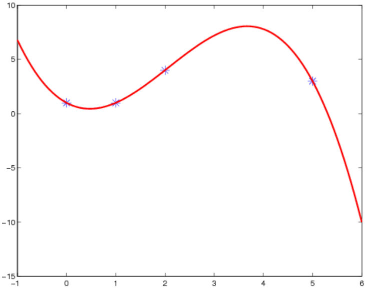
- Öffnen eines (weiteren) Grafikfensters: `figure`. Eine Grafik wird immer im aktuellen Fenster erzeugt. Ist noch kein Fenster geöffnet, so wird ein Fenster erzeugt.
- Durch den Befehl `hold on` werden bestehende Grafiken im aktuellen Fenster erhalten. Neue Grafiken werden den bestehenden hinzugefügt.
- `hold off` (default) überschreibt Grafiken im aktuellen Fenster
- Schliessen: `close`, `close all`

Aufbau

1. **Einführung Grafik**
   - einfache zweidimensionale Grafiken
   - Beschriftungen
   - Anwendung: polynomiale Interpolation
   - Weitere zweidimensionale Darstellungsmöglichkeiten
   - Dreidimensionale Grafiken
   - Animation

2. **Polynome**

Polynomiale Interpolation



Suche ein Polynom vom Grad 3

$$p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3,$$

dass durch die vier Punkte $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,4)$, $(5,3)$ verläuft.

$\Rightarrow p(0) = 1,\ p(1) = 1,\ p(2) = 4,\ p(5) = 3$

$\Rightarrow$ Lineares GLS $Ap = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 \end{pmatrix},\ p = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

Polynomiale Interpolation II

Suche ein Polynom vom Grad n

$$p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \cdots + p_n x^n,$$

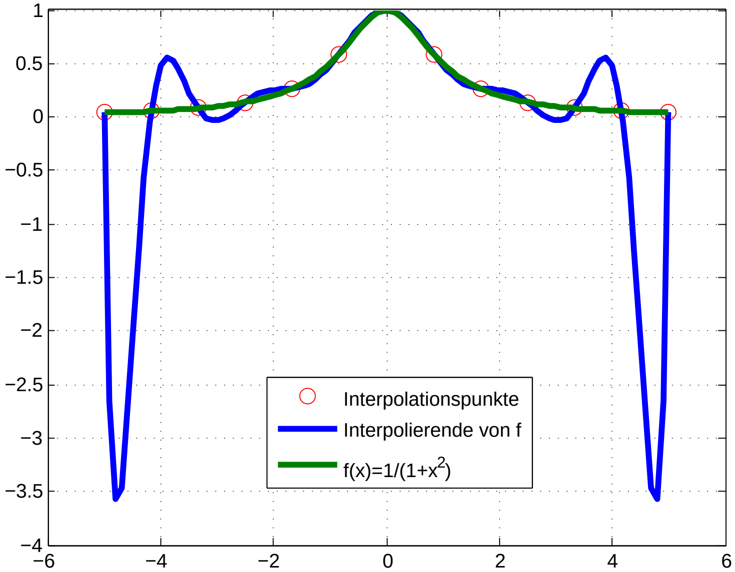
dass durch die $n + 1$ Punkte $(x_i, y_i)_{i=0}^{n}$ verläuft.

Beispiel: Interpolation von

$$(x_i, y_i)_{i=0}^{12}$$

mit `x=linspace(-5,5,13)` und $y_i = \frac{1}{1+x_i^2}$.

Polynomiale Interpolation: Beispiel



Programm 1

```
function p = interpol2(x,y)
% interpol2 berechnet zu n+1 Punkten (x_i,y_i)
%            das Polynom n-ten Grades, das druch die
%            n+1 Punkte verlaeuft
%            INPUT: Vektoren x,y
%            OUTPUT: Koeffizientenvektor p
%   Gerd Rapin    23.11.2003

% Aufstellen des lin. GLS
A = vandermonde(x);

% Loesen des lin GLS
p = A\y';
```

Programm 2

```
%  berechnet die polynomiale
%  Interpolation fuer 1/(1+x^2)
%
%   Gerd Rapin  23.11.2003

% Stuetzstellen
x = linspace(-5,5,13);
y = 1./(1+x.*x);
plot(x,y,'or','Markersize',8);
hold on;
% Berechnen der Koeffizienten
p = interpol2(x,y);
% Plotten
x1 = linspace(-5,5,100);
y1 = ausw_poly2(p',x1);
y2 = 1./(1+x1.*x1);
plot(x1,y1,x1,y2,'Linewidth',3);
xlim([-6,6]);grid on; box on;
legend('Interpolationspunkte',...
    'Interpolierende von f','f(x)=1/(1+x^2)');
```

Aufbau

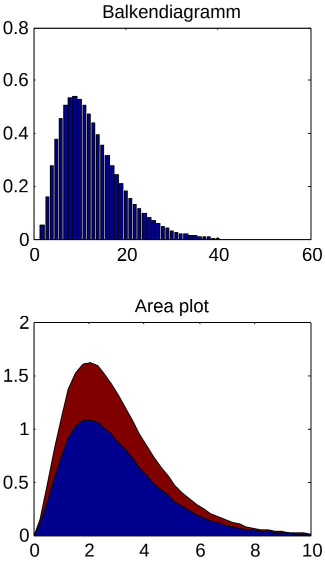
Darstellung von Daten

Daten:

```
>> n=linspace(0,10,40);
>> y=n.^2.*exp(-n);
```

- Balkendiagramm: `bar(y)`
- Histogramm: `hist(y,5)`
- einfacher Plot: `area(n,[y',2*y'])`
- Tortengrafik: `pie3([ 1 2 3 4])`

Darstellung von Daten



Darstellung von Daten

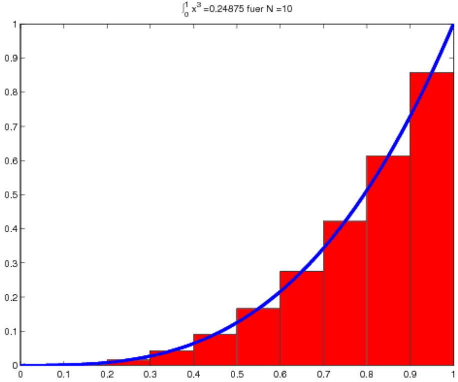
```
n = linspace(0,10,40);
y = n.^2.*exp(-n);

% Balkendiagramm
subplot(2,2,1),
bar(y); title('Balkendiagramm');

% Histogramm
subplot(2,2,2),
hist(y,5); title('Histogramm');

% Area plot
subplot(2,2,3),
area(n,[y',2*y']); title('Area plot');

% Tortengrafik
subplot(2,2,4),
pie3([ 1 2 3 4]); title('Tortengrafik');
```

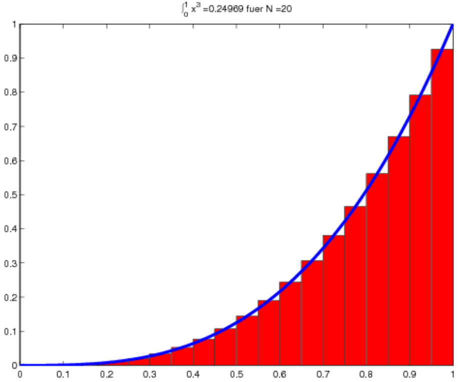
Approximation von Integralen

Approximiere $\int_0^1 f(x)dx$ durch

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} f\left(\frac{i-\frac{1}{2}}{N}\right)$$

für gegebenes $N \in \mathbb{N}$. **Beispiel**: $f(x) = x^3$





Integral - Implementation

```
%   integral.m

N = 20; % Anzahl Unterteilungen

x = (0+1/(2*N)):(1/N):(1-1/(2*N));
y = x.^3;
% Berechnung des Integrals
result = sum(y)*(1/N);

% Plot
for i = 1:N
    fill([(i-1)/N (i-1)/N i/N i/N], ...
      [0 ((i-0.5)/N).^3  ((i-0.5)/N).^3 0], 'r');
    hold on;
end;
plot(0:0.01:1,(0:0.01:1).^3,'LineWidth',3);
title(['\int_0^1 x^3! = ',num2str(result),...
  ' fuer N =', num2str(N)]);
```

Aufbau

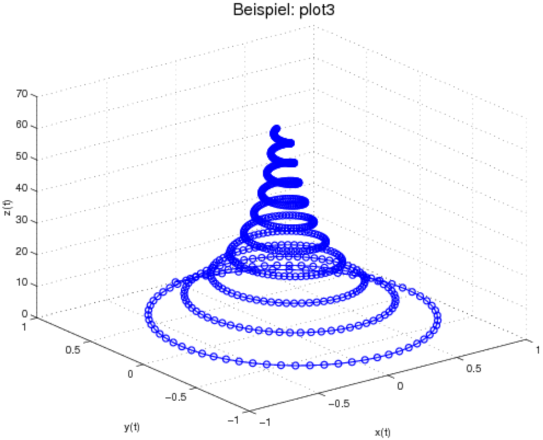
1. **Einführung Grafik**
   - einfache zweidimensionale Grafiken
   - Beschriftungen
   - Anwendung: polynomiale Interpolation
   - Weitere zweidimensionale Darstellungsmöglichkeiten
   - Dreidimensionale Grafiken
   - Animation
2. **Polynome**

Dreidimensionale Grafiken

- Dreidimensionale Version von `plot`: `plot3`
- Darstellung von Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:
  - Contourplot (zeichnet die Niveaulinien): `contour`, `contourf`, `contour3`
  - Darstellung des Graphen mit Gitterlinien: `mesh` , `meshc`
  - Flächige Darstellung des Graphen: `surf`, `surfc`
- Darstellung von Funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:
  - Streifenansichten `slice`

plot3

Bei gegebenen Vektoren $x = (x_i)_{i=1}^n$, $y = (y_i)_{i=1}^n$, $z = (z_i)_{i=1}^n$ erzeugt plot3(x,y,z) einen Plot der die Punkte (x_i, y_i, z_i) und $(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$ miteinander verbindet.



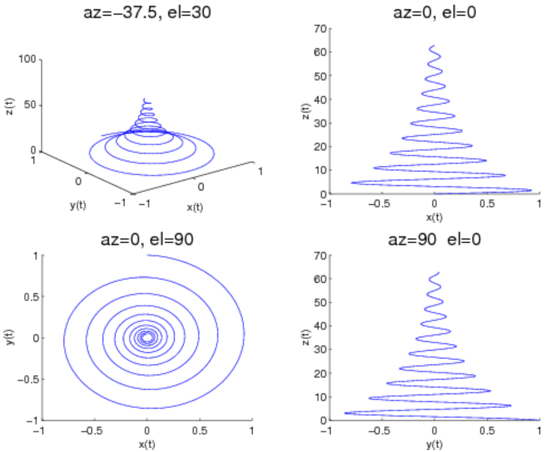
Beispiel plot3

```
t = 0:0.1:20*pi;
x = exp(-t/20).*sin(t);
y = exp(-t/20).*cos(t);
z = t;

plot3(x,y,z,'b-o','LineWidth',1);
grid on
xlabel('x(t)'), ylabel('y(t)');
 zlabel('z(t)');
title('Beispiel: plot3','FontSize',15);
```

Blickwinkel

`view(az,el)`

- `az` ist die horiz. Rotation in Grad (Def. -37.5)
- `el` ist die vertikale Rotation in Grad (Def. 30)



3D-Funktionenplots

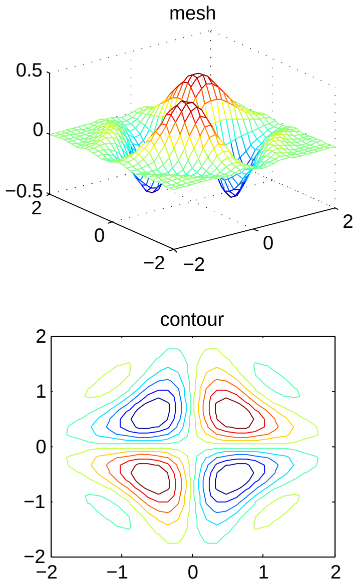
Darstellung von Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \quad \to \quad \mathbb{R}$$

Beispiel:

$$f(x, y) := \exp(-x^2 - y^2) \sin(\pi x y)$$

Beispiel: Funktionenplot



Funktionenplot - Implementation

```
% Erzeugen des Gitters
x = linspace(-2,2,30);
y = linspace(-2,2,30);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
% Funktionswerte
Z = exp(-X.^2-Y.^2).*sin(pi*X.*Y);

% verschiedenen Darstellungen
subplot(2,2,1),
 mesh(X,Y,Z), title('mesh');
subplot(2,2,2),
 surf(X,Y,Z), title('surf');
subplot(2,2,3),
 contour(X,Y,Z,10), title('contour');
subplot(2,2,4),
 surfc(X,Y,Z);
 view(-26,20), title('surfc');
```

subplot

```
subplot(n,m,k),
```

zerlegt das Grafikfenster in $n \times m$ Teilfenster.
Die Zahl $1 \leq k \leq nm$ gibt an, welches Teilfenster gerade aktiv ist.
Durchnumeriert wird zeilenweise, also $(1,1), (1,2), \ldots$.

meshgrid

Zu Vektoren $x = (x_i)_{i=1}^k$, $y = (y_j)_{j=1}^n$ erzeugt

```
[X,Y]=meshgrid(x,y)
```

Matrizen $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times k}$, wobei jede Zeile von X eine Kopie des Vektors x ist und Y als Spalten den Vektor y enthält.
Dann hat `Z=X.*Y` die Komponenten

$$Z(i,j) = x(j) * y(i).$$

Darstellungsmöglichkeiten

- Contourplot (zeichnet die Niveaulinien): `contour`
- Darstellung des Graphen mit Gitterlinien: `mesh` , `meshc`
- Flächige Darstellung des Graphen: `surf`, `surfc`

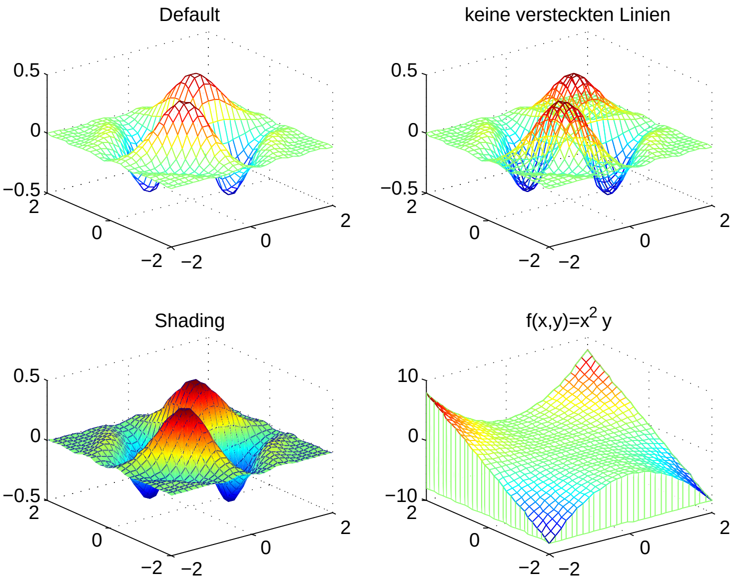
`mesh(X,Y,Z)` z.B. stellt für Matrizen $X, Y, Z \in \mathbb{R}^{n \times k}$ die Punkte

$$(X(i,j), Y(i,j), Z(i,j)) \quad \text{dar.}$$

Weitere Möglichkeiten

- Darstellung versteckter Linien (bei `mesh`): `hidden off`, Default: `hidden on`
- Verschmieren des Gitters: `shading('interp')`
- Blickwinkel: `view(az,el)`
- ähnlich wie `mesh`; nur mit 'Vorhang': `meshz(X,Y,Z)`

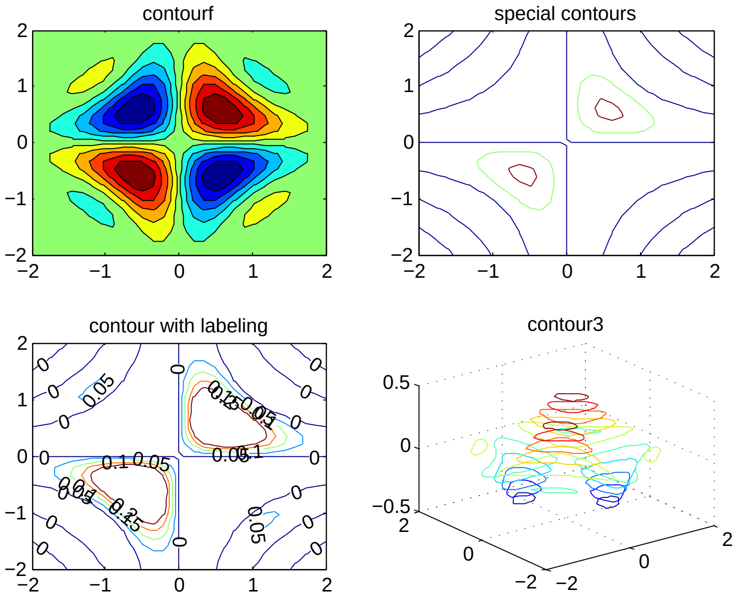
Beispiel: Funktionenplot



Programm

```
x = linspace(-2,2,30);
y = linspace(-2,2,30);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
% Funktionswerte
Z = exp(-X.^2-Y.^2).*sin(pi*X.*Y);

% verschiedenen Darstellungen
subplot(2,2,1),
 mesh(X,Y,Z), title('Default');
subplot(2,2,2),
 mesh(X,Y,Z), hidden off,
 title('keine versteckten Linien');
subplot(2,2,3), surf(X,Y,Z);
 shading('interp'), title('Shading');
subplot(2,2,4), Z=X.^2.*Y;
 meshz(X,Y,Z), title('f(x,y)=x^2 y');
```

Contour Plots



Contour Plots - Listing

```
% verschiedenen Darstellungen
subplot(2,2,1),
 contourf(X,Y,Z,10), title('contourf')
subplot(2,2,2),
 contour(X,Y,Z,[0 0.2 0.4]), title('special contours');
subplot(2,2,3),
 [C,h] = contour(X,Y,Z,[0 0.05 0.1 0.15 0.2 ]);
 title('contour with labeling');
 clabel(C,h)
subplot(2,2,4),
  contour3(X,Y,Z,10), title('contour3')
```

Erläuterungen zu Contour-Befehlen

- `contour(X,Y,Z,n)` zeichnet für $n \in \mathbb{N}$ n-Konturlinien. Ist n ein Vektor, werden Konturlinien zu den Werten in dem Vektor n geplottet.
- `contourf` funktioniert wie `contour` nur das die Flächen zwischen den Konturlinien ausgefüllt werden.
- `label(C,h)` beschriftet die Konturlinien, deren Werte in C gespeichert sind und die zum Grafik-Handle h gehören.
- `contour3` zeichnet jede Konturlinie auf einer anderen Höhe.

Slice

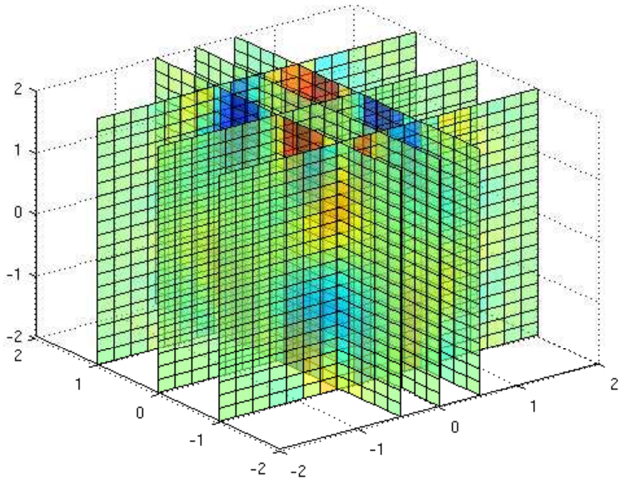
```
slice(X,Y,Z,V,sx,sy,sz)
```

zeichnet Schnitte zu den Funktionswerten $V(i)$ zu $(X(i), Y(i), Z(i))$.
Schnitte sind durch die Vektoren *sx*, *sy* und *sz* gegeben.
Beispiel:

$$f(x, y, z) := \exp(-x^2 - y^2) \sin(\pi xyz)$$

```
x = linspace(-2,2,20);
[X,Y,Z] = meshgrid(x,x,x);
V =  exp(-X.^2-Y.^2).*sin(pi*X.*Y.*Z);
sx = [-0.5,0,0.5]; sy = [-1,0,1];
sz = [];
slice(X,Y,Z,V,sx,sy,sz)
alpha(0.6) % Transparency
```

Beispiel: slice



Aufbau

1. **Einführung Grafik**
   - einfache zweidimensionale Grafiken
   - Beschriftungen
   - Anwendung: polynomiale Interpolation
   - Weitere zweidimensionale Darstellungsmöglichkeiten
   - Dreidimensionale Grafiken
   - Animation
2. **Polynome**

Animation-Beispiel

```
% animation.m

clear all;
[X,Y] = meshgrid(-1:0.05:1,-1:0.05:1);

for j = 1:60
    Z = cos(j^0.5*pi*exp(-X.^2-Y.^2));
    %mesh(X,Y,Z);
    surf(X,Y,Z);
    shading interp
    F(j) = getframe;
end
% Abspielen des Movies
movie(F,1);
```

Erstellen einer Animation

- Mit `F(j)=getframe` wird die aktuelle Grafik in das Array F gespeichert.
- Nach dem alle Bilder zu F hinzugefügt worden sind, kann man die Sequenz der Bilder F darstellen durch `movie(F,n,fps)`, wobei n die Anzahl der Wiederholungen angibt und *fps* der gezeigten Frames pro Sekunde entspricht (Default: $n = 1$, $fps = 12$).
- Speichern des Movies in AVI Format: `movie2avi(F,Dateiname)`

Aufbau

Polynome

In MATLAB werden Polynome

$$p(x) = p_1 x^n + p_2 x^{n-1} + \cdots + p_{n+1}$$

repräsentiert durch einen Zeilenvektor $p = [p(1)\ p(2)\ \ldots\ p(n+1)]$.

Vorsicht: Normalerweise werden Polynome in der Form $\sum_{i=0}^{n} p_i x^i$ dargestellt. In MATLAB dagegen ist die Darstellung invers und beginnt bei 1.

Problemstellungen

1. Auswerten: Bei gegebenen Koeffizienten, das zugehörige Polynom an bestimmten Stellen auswerten.
2. Nullstellenbestimmung: Bestimme zu gegebenen Koeffizienten die Nullstellen des zugehörigen Polynoms.
3. Interpolation: Bestimme zu einer gegebenen Menge von Punkten $(x_i, y_i)_{i=0}^{n}$ ein Polynom n.-ten Grades, das durch diese Punkte verläuft.

Auswerten

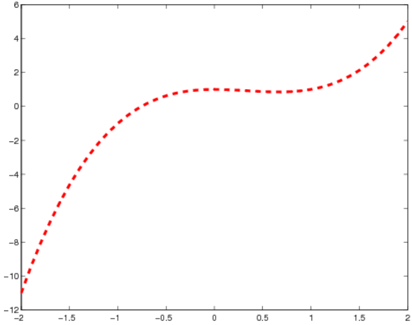
Durch

```
y=polyval(p,x)
```

werden aus einem vorgegebenen Koeffizientenvektor p und entsprechenden Stellen x die zugehörigen Funktionswerte y berechnet. x kann eine Matrix sein. y ist dann von der gleichen Dimens. wie x.

Beispiel: $p(x) := x^3 - x^2 + 1$

```
>> x=-2:0.1:2;
>> y=polyval([1 -1 0 1],x);
>> plot(x,y,'r--','Linewidth'
    ,3);
```



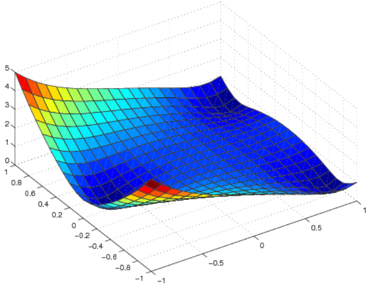
Bestimmung von Nullstellen

Ist p der obige Koeffizientenvektor, so können die Nullstellen z durch `z = roots(p)` berechnet werden.

Beispiel:

Nullstellen von $p(x) := x^3 - x^2 + 1$

```
>> roots([1 -1 0 1])
ans =
   0.8774 + 0.7449i
   0.8774 - 0.7449i
  -0.7549
>> x=-1:0.1:1; [X,Y]=meshgrid(x
   ,x);
>> Z=abs(polyval([1 -1 0 1],X+i
   *Y));
>> surf(X,Y,Z)
```



Interpolation

Suche zu gegebenen Punkten $(x_i, y_i)_{i=0}^{n}$ ein Polynom p n.-ten Grades, so dass $p(x_i) = y_i$ gilt für $i = 0, \dots, n$.
In MATLAB: `p=polyfit(x,y,n)`

Ruft man `p=polyfit(x,y,m)` mit $m < n$ auf, so sucht MATLAB die Least Square Lösung, d.h. das Polynom p der Ordnung m, welches $\sum_{i=0}^{n}(p(x_i) - y_i)^2$ minimiert.

Data Fitting

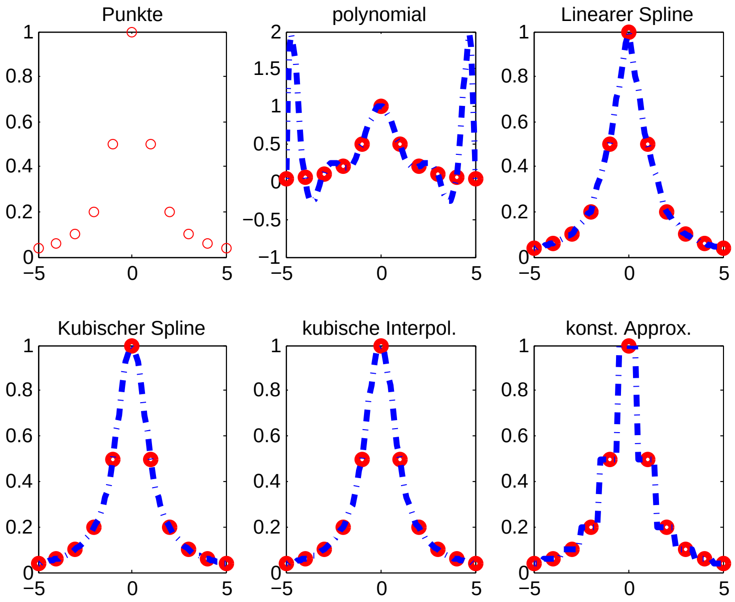
Ein weiterer Befehl zur Interpolation ist

```
yi=interp1(x,y,xi,'method').
```

Dabei sind (x, y) die gegebenen Punkte, *xi* sind die Stellen, an die die Interpolante berechnet wird und *yi* sind die entsprechenden Funktionswerte. Als `'method'` gibt es

'nearest'	stückweise konstante Approximation
'linear'	Lineare Interpolation
'spline'	stückweise kubischer Spline u ($u \in C^2$, $u|_{[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3$)
'cubic'	kubische Hermite Interpolation

Beispiel


Punkte
polynomial
Linearer Spline
Kubischer Spline
kubische Interpol.
konst. Approx.
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−5
0
5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1

Bemerkungen

- Nur für die Spline-Methoden können bei `interp1` auch Stellen außerhalb des Interpolationsintervalls berechnet werden.
- Data Fitting kann auch über die Oberfläche durchgeführt werden. Plotten Sie die Daten und wählen Sie `Basic Fitting` im Menü `Tools`.