Einführung in MATLAB

Dr. J. Schulz **Einheit 2**

Aufgabe 1 :

Finde die Lösung x von $Ax = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 :

Finde die Lösung x von $Ax = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 :

Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 :

Schreiben sie das Programm `randwertaufgabe` um in eine Funktion welche als Inputparameter den Parameter n erhält. Die Funktion soll prüfen ob der Parameter n in dem Bereich 20-200 liegt und falls nicht das programm abbrechen. Das Resultat der Berechnung soll als Vektor zurückgeben werden.
Hinweis: das Abbrechen des Programms kann mit `return` erreicht werden.

Aufgabe 5 :

Lösen Sie näherungsweise die Fixpunktgleichung

$$x_f = e^{(-x_f)}.$$

Aufgabe 6 :

Berechnen Sie eine Nullstelle von

$$f(x) = \cos^2(x) - x.$$

Aufgabe 7 :

Schreiben Sie eine Funktion, die für $n \in \mathbb{N}$ die Hilbert-Matrix $H = (h_{ij})_{i,j=1}^n$ mit $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$ berechnet. Berechnen Sie H^{-1} für $n = 4$.

Aufgabe 8 :

Berechnen Sie die Nullstellen von

$$x^2 - 2, \quad x^2 - 2x + 1, \quad x^2 - 4x + 10.$$

Aufgabe 9 :

Die Fibonacci-Folge ist definiert durch

$$f_1 := 1, \quad f_2 := 1, \quad f_{k+2} := f_{k+1} + f_k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Schreiben Sie ein Programm, das

$$g_k := \frac{f_{k+1}}{f_k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

berechnet. Stoppen Sie, falls $|g_k - g_{k+1}| \leq TOL$. Geben Sie für $TOL = 10^{-3}$ und $TOL = 10^{-4}$ das entsprechende k und das entsprechende g_k an.

Hinweis: Benutzen Sie eine `while`-Schleife.

Aufgabe 10 :

Seien y_1, y_2 zwei Punkte im $\mathbb{R}^2$. Wir betrachten die Strecke mit Endpunkten y_1 und y_2. Wir ersetzen diese Strecke durch 4 Strecken $\overline{y_1 z_1}$, $\overline{z_1 z_2}$, $\overline{z_2 z_3}$, $\overline{z_3 y_2}$ mit Endpunkten $z_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2$, $z_3 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2$ und

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}(y_1 - y_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

Analog zum Beispiel des Sierpinski-Dreiecks soll jede neue Teilstrecke wiederum mittels der gleichen Prozedur durch 4 Strecken ersetzt werden. Schreiben Sie ein Programm, dass diese Prozedur k-mal wiederholt und das Ergebnis plottet.

Aufgabe 11 :

Zerlegen Sie das Intervall $[0, 1]$ durch `0:(1/101):1`. Berechnen Sie mit Hilfe von Finiten Differenzen eine approx. Lösung von

$$\begin{aligned} -u''(x) &= 1, \quad x \in (0, 1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 12 :

Berechnen Sie die Frobenius-Norm

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}, \quad A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

der Vandermode Matrix `vander(0:0.02:1)`

Aufgabe 13 :

Ändern Sie in Aufgabe 10 die rechte Seite 1 in $\sin(4\pi x)$ und berechnen Sie eine Näherungslösung.

Aufgabe 14 :

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 30 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 15 & -4 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ -3 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie auch die QR-Zerlegung.

Aufgabe 15 :

Sei `A=hilb(n)` und `x=ones(n,1)`. Berechnen Sie für $n = 5$ und $n = 15$ den Vektor $b = A * x$, `norm(x-A\b)` und die Kondition von A. Was stellen Sie fest? Erklären Sie das Ergebnis!