Einführung in Matlab - Einheit 2

Numerische Lineare Algebra, Programmieren

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen

Aufbau

Aufbau

Vektornorm

Die p-Norm eines Vektors $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

(definiert für $p \geq 1$).

- in MATLAB: `norm(x,p)` (Default: $p = 2$)
- $p = \infty$ entspricht der Maximum-Norm

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots n} |x_i|.$$

Matrixnorm

Seien $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ und $p \geq 1$. Die *Matrixnorm* ist definiert durch

$$\|A\|_p = \sup_{x\in\mathbb{C}^m\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}.$$

- In MATLAB: `norm(A,p)` (Default $p = 2$).
- $p = \infty$ kann charakterisiert werden durch

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \text{Zeilensummennorm.}$$

Kondition

Kondition einer quadratischen Matrix A:

$$\mathrm{cond}_p(A) := \|A\|_p \|A^{-1}\|_p.$$

- In MATLAB: `cond(A,p)` (Default $p = 2$)
- Es gilt $\mathrm{cond}_p(A) \geq 1$.
- Die Kondition mißt die Empfindlichkeit der Lösung x von $Ax = b$ gegenüber Störungen von A und b.
- Ist $\mathrm{cond}_p(A) >> 1$, so ist die Matrix beinahe singulär. Die Matrix ist *schlecht konditioniert*.

Beispiele

- Vektornormen für $x = (1/100)(1, 2, \ldots, 100)$

```
>> x = (1:100)/100; [norm(x,1) norm(x,2) norm(x,inf)]
ans =    50.5000     5.8168     1.0000
```

- Matrixnorm für die Hilbert-Matrix $H = (\frac{1}{i+j-1})_{ij}$

```
>> H = hilb(10); [norm(H,1) norm(H,2) norm(H,inf)]
ans =     2.9290     1.7519     2.9290
```

- Kondition der Hilbert-Matrix

```
>> H = hilb(10); [cond(H,1) cond(H,2) cond(H,inf)]
ans =
   1.0e+13 *
    3.5354     1.6025     3.5354
```

Aufbau

Lineare Gleichungssysteme

Seien $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{C}^n$. Das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

wird in MATLAB gelöst durch `x=A\b`.

```
>> x = ones(5,1); H = hilb(5); b = H*x; y = (H\b)'
y =
    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
```

Warnung: Benutze nie `x=inv(A)*b`, da das Berechnen von A^{-1} sehr aufwendig sein kann.

LU-Zerlegung

Was bedeutet `A\b`?

MATLAB berechnet die LU-Zerlegung von A (Gaussverfahren):

- obere Dreiecksmatrix U
- untere Dreiecksmatrix L mit Einsen auf der Diagonalen

so dass $PA = LU$ gilt (P Permutationsmatrix).
Dann wird das LGS durch Rückwärts- und Vorwärtseinsetzen gelöst ($Lz = Pb$, $Ux = z$)

```
>> [L,U,P]=lu(hilb(5)); norm(P*hilb(5)-L*U)
ans =  2.7756e-17
```

Inverse, Determinante

- Berechnung der Inversen

```
>> A=pascal(3)
A =
     1     1     1
     1     2     3
     1     3     6
```

```
>> X=inv(A)
X =
     3    -3     1
    -3     5    -2
     1    -2     1
```

- Berechnung der Determinante

```
>> det(A)
ans = 1
```

Pseudoinverse

(Moore-Penrose) Pseudoinverse

Sei A singulär, Bestimme X so dass

$$AXA = A, XAX = X, (XA)^* = XA, (AX)^* = AX$$

```
>> pinv(ones(3,3))
ans =
    0.1111    0.1111    0.1111
    0.1111    0.1111    0.1111
    0.1111    0.1111    0.1111
```

Aufbau

Zwei-Punkt-Randwert-Aufgabe

Suche eine Funktion

$$u : [0,1] \quad \rightarrow \quad \mathbb{R},$$

so dass

$$\begin{aligned} -u''(x) &= e^x, \quad x \in (0,1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

Problem: Es kann i.A. keine geschlossene Lösungsdarstellung angegeben werden.
Ausweg: Approximation der Lösung.

Finite Differenzen Verfahren

Diskretisierung: $0 = x_0 < \cdots < x_n = 1$ mit $x_i = \frac{i}{n}$
Differenzenquotient:

$$u''(x_i) \sim \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2}, \quad h := \frac{1}{n}$$

Einsetzen in $-u''(x) = e^x$ ergibt

$$-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1}) = h^2 e^{x_i}, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

Randbedingungen $\Rightarrow u(x_0) = u(x_n) = 0$.
$\Rightarrow$ Lineares Gleichungssystem für $u(x_1), \ldots, u(x_{n-1})$.

Diskretes Problem

Setze $z = (z_1, \ldots, z_{n-1})^t = (u(x_1), \ldots, u(x_{n-1}))^t$.
Löse das Gleichungssystem $Az = F$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \; F := h^2 \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{n}} \\ \vdots \\ e^{\frac{n-1}{n}} \end{pmatrix}.$$

Lösung für $n = 21$

- Zerlegung des Intervalls $[0, 1]$

```
x = 0:(1/21):1
```

- Eleminieren der Randpunkte

```
x_i = x(2:21)
```

- Erzeugen der Matrix A (Übungsaufgabe)

Lösung für $n = 21$

- Berechnen der rechten Seite:

```
F = (1/21)^2*transpose(exp(x_i));
```

- Lösen des linearen Gls.

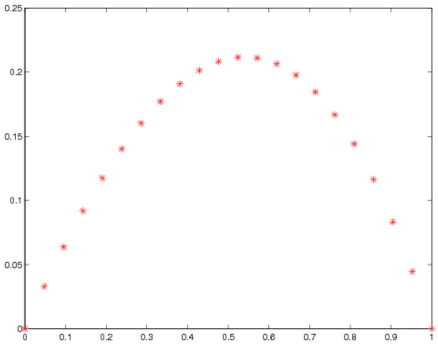
```
z_i = A\F;
```

- Zufügen der Werte am Rand

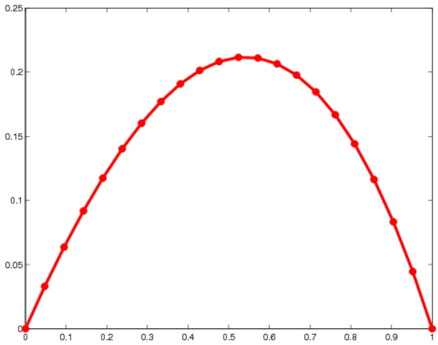
```
>> z = [0; z_i;0];
```

Lösung für $n = 21$

```
plot(x,z,'r*','MarkerSize',8)
```




```
plot(x,z,'r*-','LineWidth',3,'MarkerSize',8)
```



Aufbau

Eigenwerte

Eigenwert

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. $\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von A, falls ein Vektor $x \in \mathbb{C}^n$ ungleich 0 existiert, so dass $Ax = \lambda x$ gilt. x heißt Eigenvektor.

- `x=eig(A)`
  berechnet die Eigenwerte von A und schreibt sie in den Vektor x.
- `[V,D]=eig(A)`
  D ist eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen. Die Spalten von V bilden die zugehörigen Eigenvektoren.

Weitere Zerlegungen

- QR-Zerlegung: `[Q,R]=qr(A)`
  $m \times n$- Matrix A eine Zerlegung $A = QR$ erzeugt, (Q eine unitäre $m \times m$-Matrix, R eine obere $m \times n$ Dreiecksmatrix).
- Singulärwertzerlegung: `[U,S,V]=svd(A)`
  $A = U\Sigma V^*$. ($\Sigma \subset \mathbb{C}^{m\times n}$ eine Diagonalmatrix
  $U \subset \mathbb{C}^{m\times m}$, $V \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ unitäre Matrizen).
- Cholesky-Zerlegung: `R=chol(A)`
  $A = R^*R$ zu einer hermiteschen, positiv definiten Matrix A (R ist eine obere Dreiecksmatrix mit reellen, positiven Diagonalelementen).

Bemerkungen

- LGS können auch mit Hilfe iterativer Verfahren gelöst werden, z.B. `gmres`, `pcg`, `bicgstab`.
- $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $n \neq m$ bei `A\b`:
  - $n > m$ (überbestimmter Fall): Least-Square Lösung, d.h. der Ausdruck `norm(A*x-b)` wird minimiert.
  - $n < m$ (unterbestimmter Fall): Grundlösung.

Aufbau

Gültigkeitsbereich von Variablen

- Variablen in Skript-Files benutzen den globalen Workspace, d.h. bereits vorhandene Variablen können direkt benutzt oder überschrieben werden. Sie sind gültig bis sie explizit gelöscht werden.
- Variablen in Function-Files sind nur innerhalb der Funktion definiert und werden bei Verlassen der Funktion gelöscht. Variablen des globalen Workspace können nicht benutzt werden.

Aufbau

for - Schleife

```
for <variable> = <Ausdruck>
  <Befehle>
end
```

Bemerkungen:

- Der Ausdruck ist normalerweise von der Form `i:s:j`.
- Die *Befehle* werden eingerückt.
- auch weitere Schleifen-Konstrukte wie **`while`** und **`switch`** sind verfügbar.

Schleifen - Beispiele

- Berechne $\sum_{i=1}^{1000} \frac{1}{i}$

```
>> sum=0; for j=1:1000, sum=sum+1/j; end, sum
sum =  7.4855
```

- Berechnen dreier Werte

```
>> for x=[pi/6 pi/4 pi/3], sin(x), end
ans =    0.5000
ans =    0.7071
ans =    0.8660
```

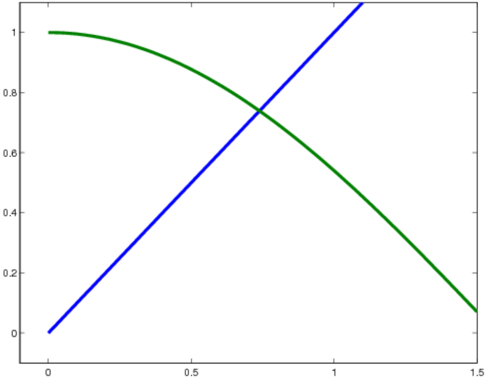
- Matrix als *Ausdruck*

```
>> for x=eye(3),  x' ,end
ans =     1     0     0
ans =     0     1     0
ans =     0     0     1
```

Fixpunkt

Suche ein $x_f \in \mathbb{R}$ so dass

$$x_f = \cos(x_f)$$

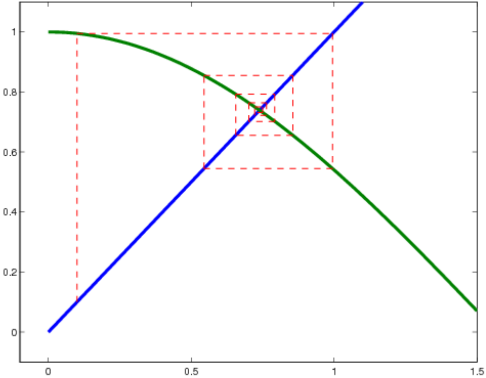


Fixpunkt-Iteration

Fixpunkt-Iteration

$$x_{k+1} = cos(x_k)$$

bei geeignetem Startwert x_0.



(Funktioniert wenn die Abbildung kontrahierend ist)

Fixpunkt-Iteration - Implementation

```
% Plot 1
x = linspace(0,1.5,50);
y = cos(x);
plot(x,x,x,y,'LineWidth',3),
axis([-0.1 1.5 -0.1 1.1]);
hold on;
pause; % stoppt bis eine Taste gedrückt wird
z(1) = 0.1; % Anfangswert
it_max = 10; % Iterationsschritte
for i = 1:it_max
    z(i+1) = cos(z(i));
    plot([z(i) z(i)], [z(i) z(i+1)],'r--','LineWidth',1);
    pause;
    plot([z(i) z(i+1)],[z(i+1) z(i+1)],'r--','LineWidth'
        ,1);
    hold on;
    pause; % stoppt bis eine Taste gedrückt wird
end;
```

Einige Grafikbefehle

- Durch `figure` wird ein Grafik-Fenster gestartet.
- Mittels `hold on` werden alle Grafiken in einem Fenster übereinander gezeichnet.
- Im Standardmodus wird bei jedem Grafikbefehl die bestehende Grafik gelöscht und durch die neue Grafik ersetzt.
- Mittels `hold off` wird zurück in den Standardmodus gewechselt.

Vandermonde-Matrix I

Berechne zu einem gegebenen Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ die Vandermonde-Matrix

$$V := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Vandermonde-Matrix II

```
function V = vandermonde2(x)
% vandermonde2 berechnet die Vandermonde Matrix zu einem
%              Vektor x
%
%             INPUT:
%             x Zeilenvektor
%             OUTPUT:
%             V Vandermonde-Matrix
%  Gerd Rapin      8.11.2003

n = length(x);

V = zeros(n,n);
for i = 1:n
    for j = 1:n
        V(i,j) = x(i)^(j-1);
    end
end
```

Aufbau

Quadratische Gleichung

$$\begin{cases} \text{Suche } x \in \mathbb{R}, \text{ so dass} \\ x^2 + px + q = 0 \end{cases}$$

Fallunterscheidung für $d := \frac{p^2}{4} - q$:

Fall a) : $d > 0$ 2 Lösungen: $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{d}$

Fall b) : $d = 0$ 1 Lösung: $x = -\frac{p}{2}$

Fall c) : $d < 0$ keine Lösung

Implementierung

```
function [anz_loesungen, loesungen]=quad_gl(p,q)
%--------------------------------------------------------------------
% quad_gl berechnet die Loesungen der quadratischen
%         Gleichung x^2 + px + q =0
%           INPUT:   Skalare   p
%                              q
%
%           OUTPUT: anz_loesungen   Anzahl der Loesungen
%                   loesungen       Vektor der Loesungen
%
%  Gerd Rapin      8.11.2003
%----------------------------------------------------------------------
d=p^2/4-q; % Diskriminante
```

Implementierung II

```
% 2 Loesungen
if d>0
    anz_loesungen=2;
    loesungen=[-p/2-sqrt(d) -p/2+sqrt(d)];
end

% 1 Loesung
if d==0
    anz_loesungen=1;
    loesungen=[-p/2];
end

% 0 Loesungen
if d<0
    anz_loesungen=0;
    loesungen=[];
end
```

Logische Operationen

- Es gibt in MATLAB logische Variablen. Der Datentyp ist *logical*.
- Variablen dieses Typs sind entweder `TRUE` (1) oder `FALSE` (0).
- Numerische Werte ungleich 0 werden als `TRUE` gewertet.

```
>> a = (1<2)
a = 1
>> b = ([ 1 2 3 ] < [ 2 2 2 ])
b =   1     0     0
>> whos
  Name  Size  Bytes  Class
  a      1x1   1   logical array
  b      1x3   3   logical array
```

Vergleichs-Operatoren

```
>> a=[1 1 1], b=[0 1 2]
```

Operation	Bedeutung	Ergebnis
`a == b`	gleich	`0 1 0`
`a ~= b`	ungleich	`1 0 1`
`a < b`	kleiner	`0 0 1`
`a > b`	größer	`1 0 0`
`a <= b`	kleiner oder gleich	`0 1 1`
`a >= b`	größer oder gleich	`1 1 0`

Bem: 1 = wahre Aussage, 0 = falsche Aussage

Bem: Komponentenweise Vergleiche sind auch für Matrizen gleicher Größe möglich!

Logische Operatoren

&	logisches und	~	logisches nicht
|	logisches oder	xor	exklusives oder

Beispiele:

```
>>  x=[-1 1 1]; y=[1 2 -3];
```

```
>> (x>0) & (y>0)
ans =
     0     1     0
```

```
>> ~( (x>0) & (y>0))
ans =
     1     0     1
```

```
>> (x>0) | (y>0)
ans =
     1     1     1
```

```
>> xor(x>0,y>0)
ans =
     1     0     1
```

Bedingung

Einfache Bedingung

```
if  <Ausdruck>
   <Befehle>
end
```

Bed. mit Alternative

```
if  <Ausdruck>
   <Befehle>
else
   <Befehle>
end
```

Die Befehle zwischen `if` und `end` werden ausgeführt, wenn der *Ausdruck* wahr (`TRUE`) ist. Andernfalls werden (soweit vorhanden) die Befehle zwischen `else` und `end` ausgeführt.
Ausdruck ist wahr, wenn alle Einträge von *Ausdruck* ungleich 0 sind.

While-Schleifen

```
while <Ausdruck>
   <Befehle>
end
```

Die Befehle werden wiederholt, so lange die Bedingung *Ausdruck* wahr ist. *Ausdruck* ist wahr, wenn alle Einträge von *Ausdruck* ungleich 0 sind.

Beispiel: Berechne $\sum_{i=1}^{1000} \frac{1}{i}$.

```
n = 1000; sum = 0; i = 1;
while (i <= n)
  sum = sum+(1/i);
  i = i+1;
end
sum
```

Größter gemeins. Teiler (ggT)

Berechnung des ggT von natürlichen Zahlen a und b mit Hilfe des euklidischen Algorithmus

Idee: Es gilt $ggT(a, b) = ggT(a, b - a)$ für $a < b$.

Algorithmus:
Wiederhole, bis $a = b$

- Ist $a > b$, so $a = a - b$.
- Ist $a < b$, so $b = b - a$

Implementierung

```
function a = ggt(a,b)
%-----------------------------------------------------
% ggt berechnet den groessten gemeinsamen Teiler (ggT)
%        zweier natuerlichen Zahlen a und b
%          INPUT:   natuerliche Zahlen  a
%                                      b
%
%          OUTPUT: ggT
%
%  Gerd Rapin       11.11.2003
%-------------------------------------------------------
while (a ~= b)
  if (a > b)
    a = a-b;
  else
    b  =b-a;
  end
end
```

- Der Befehl `break` verläßt die `while` oder `for`-Schleife.

```
x=1;
while 1
  xmin=x;
  x=x/2;
  if x==0
    break
  end
end
xmin
```

```
xmin = 4.9407e-324
```

continue

- Durch `continue` springt man sofort in die nächste Iteration der Schleife, ohne die restlichen Befehle zu durchlaufen.

```
for i=1:10
  if i<5
    continue
  end
  x(i)=i;
end
x
```

```
x =   0   0   0   0   5   6   7   8   9   10
```

Aufbau

Rekursive Funktionen

Rekursive Funktionen sind Funktionen, die sich selbst aufrufen.
Bei jedem Aufruf wird ein neuer lokaler Workspace erzeugt.

Beispiel: Fakultät: $n! = \mathsf{fak}(n)$

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)! = n\,\mathsf{fak}(n-1) \\ &= n(n-1)\,\mathsf{fak}(n-2) \\ &= \cdots = n(n-1)\cdots 1 \end{aligned}$$

Fakultät - rekursiv

```
function res = fak(n)
% fakultaet   berechnet zu einer gegebenen natuerlichen
    Zahl n
%             die Fakultaet n!:=1*2*...*n (rekursiv)
%
%              INPUT: natuerliche Zahl n
%              OUTPUT: Fakultaet fak
%   Jochen Schulz 3.9.2010
if (n == 1)
    res = 1;
else
    res = n*fak(n-1);
end
```

Fakultät - direkt

```
function fak = fak_it(n)
% fakultaet   berechnet zu einer gegebenen natuerlichen
   Zahl n
%             die Fakultaet n!:=1*2*...*n
%
%              INPUT: natuerliche Zahl n
%              OUTPUT: Fakultaet fak
%   Gerd Rapin  10.11.

fak = 1;
for i = 1:n
  fak = fak*i;
end;
```

Fakultät - Zeitvergleich

```
% fak_vergleich.m
% iterativ
tic
for i = 1:100
  fak_it(20);
end
time1 = toc;
fprintf('\nZeitverbrauch direktes Verfahren: %f',time1);
% rekursiv
tic
for i = 1:100
  fak(20);
end
time2 = toc;
fprintf('\nZeitverbrauch rekursives Verfahren: %f\n',
    time2);
```

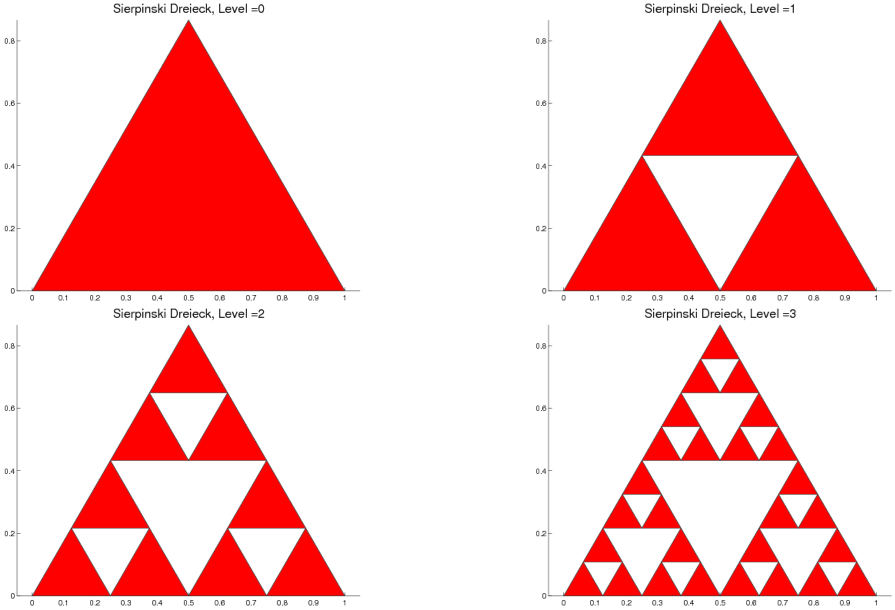
rekursive Implementierung GGT

```
function [a,b] = ggt_rekursiv(a,b)
% ggt_rekursiv berechnet den groessten
% gemeinsamen Teiler (ggT)
if a~=b
  if a>b
    a = a-b;
  else
    b = b-a;
  end;
  [a,b] = ggt_rekursiv(a,b);
end;
```

Sierpinski Dreieck

- Wir beginnen mit einem Dreieck mit Eckpunkten P_a, P_b und P_c.
- Wir entfernen daraus das Dreieck, das durch die Mittelpunkte der Kanten entsteht.
- Die verbliebenden drei Dreiecke werden der gleichen Prozedur unterzogen.
- Diesen Prozess können wir rekursiv wiederholen.
- Das Ergebnis ist das Sierpinski Dreieck.

Sierpinski Dreieck



Implementierung

```
%  sierpinski_plot.m
level=7;

ecke1=[0;0];
ecke2=[1;0];
ecke3=[0.5; sqrt(3)/2];
figure; axis equal;
hold on;
sierpinski(ecke1,ecke2,ecke3,level);
hold off;
title(['Sierpinski Dreieck, Level =' ...
        num2str(level)],'FontSize',16);
```

Implementierung

```
function sierpinski(ecke1,ecke2,ecke3,level)
% Teilt das Dreieck auf in 3 Dreiecke (level>0)
% Plotten des Dreiecks (level=0)

if level == 0
    fill([ecke1(1),ecke2(1),ecke3(1)],...
     [ecke1(2),ecke2(2),ecke3(2)],'r');
else
    ecke12 = (ecke1+ecke2)/2;
    ecke13 = (ecke1+ecke3)/2;
    ecke23 = (ecke2+ecke3)/2;
    sierpinski(ecke1,ecke12,ecke13,level-1);
    sierpinski(ecke12,ecke2,ecke23,level-1);
    sierpinski(ecke13,ecke23,ecke3,level-1);

end;
```

Zeichnen von Polygonen

Ein Polygon sei durch die Eckpunkte $(x_i, y_i)_{i=1}^n$ gegeben. Dann kann er in MATLAB durch den Befehl

```
fill(x,y,char)
```

dargestellt werden. `char` gibt die Farbe des Polygons an, z.B. rot wäre 'r'.

Aufbau

Warnung

Wiederholte Anwendung von Script-Files kann zu Fehlern führen!

Programm

```
% plotte_sin.m

disp(['Plot der Sinus'...
  'Funktion auf [0,10]']);
n = input(['Plot an '...
   'wievielen Punkten?']);
x = linspace(0,10,n);
for i=1:n
y(i) = sin(x(i));
end;
plot(x,y);
```

Aufruf

```
>> plotte_sin
 Plot der Sinus Funktion auf [0,10]
 Plot an wievielen Punkten?20
>> plotte_sin
 Plot der Sinus Funktion auf [0,10]
 Plot an wievielen Punkten?10
 ??? Error using ==> plot
 Vectors must be the same lengths.

 Error in ==> plotte_sin.m
On line 9  ==> plot(x,y);
```

globale Variablen

Mittels des Befehls `global` können Variablen des globalen Workspace auch für Funktionen manipulierbar gemacht werden.

Funktion

```
function f=myfun(x)
% myfun.m
% f(x)=x^alpha sin(1/x)

global alpha
f=x.^alpha.*sin(1./x);
```

Plotten

```
% plot_myfun
global alpha
alpha_w=[0.4 0. 6 1 1.5
    2];
for i = 1:length(alpha_w)
    alpha = alpha_w(i);
    fplot(@myfun,[0.1,1])
    hold on;
end
hold off;
```

Guter Stil in MATLAB

- Alle Programme sollten zu Beginn einen Kommentar enthalten, in dem beschrieben wird, was das Programm macht. Insbesondere sollten die Eingabe- und Ausgabevariablen genau beschrieben werden.
- Vor und nach logischen Operatoren und $=$ sollte ein Leerzeichen gesetzt werden.
- Man sollte pro Zeile nur einen Befehl verwenden.
- Befehle in Strukturen, wie `if`, `for` oder `while`, sollten eingerückt werden.

Guter Stil in MATLAB

- Die Namen der Variablen sollten, soweit möglich, selbsterklärend sein.
- Verfasst man umfangreiche Programme, so sollten M-Funktionen, die eine logische Einheit bilden in einem separaten Unterverzeichnis gespeichert sein. Die Verzeichnisse können durch `addpath` eingebunden werden.
- Potenzielle Fehler sollten, soweit möglich, aufgefangen werden. Speziell sollten die Eingabeparameter der Funktionen geprüft werden.