Einführung in MATLAB und Python

Jochen Schulz

Einheit 6

Aufgabe 1

Erzeugen sie die System-Matrix für das Poisson Problem:

$$\begin{aligned} A &:= \frac{1}{h^2} tridiag(-I_{N-1}, T, -I_{N-1}) \in \mathbb{R}^{(N-1)^2 \times (N-1)^2}, \\ T &:= tridiag(-1, 4, -1) \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}. \end{aligned}$$

mit gegebenen $h \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2

Lösen Sie die Dgl. $\frac{d}{dt}y(t) = f(y)$ mit

$$f(y_1, y_2) = (y_1 - y_1 y_2, -y_2 + y_2 y_1)$$

und Anfangswert $y(0) = (0.5, 0.5)$. Plotten Sie die Lösung im $y_1 y_2$-Diagramm.

Aufgabe 3

Betrachten Sie das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -0.04 y_1(t) + 10^4 y_2(t) y_3(t) \\ y_2'(t) &= 0.04 y_1(t) - 10^4 y_2(t) y_3(t) - 3 \cdot 10^7 y_2(t)^2 \\ y_3'(t) &= 3 \cdot 10^7 y_2(t)^2. \end{aligned}$$

Lösen Sie das System zum Anfangswert $(1, 0, 0)$ an 0 auf dem Zeitintervall $0 \leq t \leq 3$. Nutzen Sie mindestens zwei verschiedene Löser und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 4

Führen Sie einen Vergleich zwischen einer numerischen und analytischen Differentiation anhand der Funktion $f(x) = \sin(\beta x)$, $\beta, x \in \mathbb{R}$ durch. Fügen Sie den Werten der Funktion einen normalverteilten Fehler hinzu (Hinweis: `randn`) und wählen sie verschiedene Schrittweiten h. Stellen Sie beide Ableitungen grafisch dar. Denken sie über die Gründe der Unterschiede nach.

Aufgabe 5

Betrachten sie das eindimensionale Integral

$$\int_0^1 \phi(x)e^{-|x-y|}\sin(|x-y|)^2 dx\,, \in \mathbb{R}$$

für $x, y \in [0,1]$ mit der Dichte $\phi(x) \in \mathbb{R}$. Schreiben Sie das Integral für diskrete Werte um in die Gleichung

$$A\phi = f$$

mit $f(x) = \sin(x), x \in [0,1]$ und entsprechend konstruierter Matrix A.

- Lösen Sie das Gleichungssystem nach ϕ.
- Machen Sie einen Konsistenz-Check (ist die rechte Seite rekonstruierbar?)
- Werten Sie das Integral für $y \in [2,4]$ aus.
- Plotten Sie die Werte.

Aufgabe 6

Schauen Sie sich die Funktion `interpolation` (aus Vorlesung Einheit 04) an und nutzen sie den Profiler mit der Funktion $f(x) = x^2$.

- Finden Sie heraus wo die Geschwindigkeit der Funktion (und der dort aufgerufenen, selbstgeschriebenen Funktionen) verbesserbar wäre.
- Vergleichen Sie die dort genutzte Funktion `vandermonde` mit `vandermonde2` (welche for-Schleifen nutzt).
- Vergleichen Sie ebenso unsere selbstgebaute Polynom-Interpolation mit der eingebauten Interpolation (`polyfit`).
- Versuchen Sie die Gesamtlaufzeit der Funktion bei gleicher Funktionalität möglichst stark zu reduzieren.

Aufgabe 7

Vergleichen Sie die Fixpunktiteration mit dem selbstgeschriebene Newton-Verfahren aus der Vorlesung. Plotten sie beide Fehler in einer Grafik. Schauen Sie sich dann verschiedene Startwerte und die Geschwindigkeit beider Algorithmen an.
Als Erweiterung suchen sie sich weitere Verfahren aus, die bereits fertig implementiert sind, und wenden diese ebenfalls auf das gegebene Problem an, und vergleichen erneut.