Einführung in Matlab
Einheit 1

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen

4. September 2009

Aufbau

Aufbau

MATLAB

- MATLAB steht für Matrix laboratory; ursprünglich speziell für Matrizenrechnung entwickelt.
- Entwickelt von Cleve Moler Ende der 70'er in FORTRAN.
- Heutige Version ist in C/C++ programmiert.
- Interaktives System für numerische Berechnungen und Visualisierungen.
- Kein Computer-Algebra-System (Allerdings mittlerweile durch die `symbolic math toolbox` dahingehend erweiterbar)

Vorteile von MATLAB

- High-Level Sprache $\Rightarrow$. Das Programmieren ist leicht und führt zu schnellen Erfolgen. Sehr geeignet für Prototyping und Debugging.
- Vielfältige Visualisierungsmöglichkeiten.
- MATLAB-Programme sind vollständig portierbar zwischen Architekturen.
- Integration zusätzlicher Toolboxes (Symb. Math T., PDE T., Wavelet T.)
- Ausgereifte Oberfläche.

Literatur

- Matlab online-help :-).
- Matlab Guide, D.J. Higham, N.J. Higham, SIAM, 2000,
- Introduction to Scientific Computing, C.F. van Loan, Prentice Hall, New Jersey, 1997,
- Scientific Computing with MATLAB, A. Quarteroni, F. Saleri, Springer, 2003,
- Graphics and GUIs with MATLAB, P. Marchand, O.Th. Holland, Chapman & Hall, 2003, 3. Aufl.
- MATLAB 7, C. Überhuber, St. Katzenbeisser, D. Praetorius, Springer 2005.
- Using MATLAB, offizielle Handbücher.

MATLAB Fenster-Aufbau

- Launch Pad: Start von Werkzeugen, Dokumentationen und Demos der verschiedenen Toolboxen
- Command Window: Befehlseingabe und Standardausgabe.
- Workspace: Ansicht von Variablen und deren Art und Grösse; Ändern der Einträge
- Grafikfenster: Grafiken werden normalerweise in seperaten Fenstern dargestellt.

Aufbau

Erste Schritte

- MATLAB als Taschenrechner
  (Ergebnis wird in ans gespeichert.)

```
>> 1+(sin(pi/2)+ exp(2))*0.5
ans = 5.1945
```

- Eingabe von (Zeilen-)Vektoren

```
>> x = [1 2 3]
```

- Transponieren und speichern in Variable b

```
>> b = transpose(x)
```

Erste Schritte II

- Erzeugen einer Matrix

```
A = [0 2 3 ; 4 5 6; 7 8 9];
```

- Lösen des Gleichungssystems $A \cdot z = b$

```
>> z = A \ b
```

- Probe

```
>> A*z
```

Erste Schritte III

- Berechnen der Determinante von A

```
>> det(A)
```

- Hilfe zu det

```
>> help det
 DET    Determinant.
    DET(X) is the determinant of the square matrix X.
    Use COND instead of DET to test for matrix singularity.
```

- Erzeugen einer Einheitsmatrix

```
>> B = eye(3,3)
```

Erste Schritte IV

- Matrizenoperationen

```
>> A+B, A-B, A*B, inv(A)
```

- Anwendung von Vektoren

```
>> y = sqrt(x)
y =
     1.0000     1.4142     1.7321
```

Erste Schritte V

- Komponentenweise Multiplikation

```
>> y = x.*x
 y =
        1        4        9
```

- Zeilenvektor mit Werten von 1 bis 100

```
>> a = [1:100];
```

- Berechne $\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j^2}$

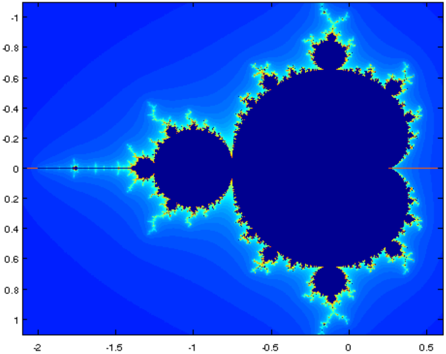
```
>> (1./a)*transpose(1./a)
ans = 1.6350
```

Workspace

- Alle definierten (globalen) Variablen werden mit seinen Werten im Workspace gespeichert.
- Man kann während einer MATLAB-Sitzung auf alle Variablen im Workspace zugreifen.
- Auskunft über den Inhalt des Workspace gibt whos oder who.
- Löschen von Variablen : clear <var>; clear löscht den gesamten Arbeitsspeicher (Workspace).

Aufbau

Die Mandelbrot-Menge



Die Mandelbrot-Menge ist die Menge von Punkten $c \in \mathbb{C}$ bei denen die Folge $(z_n)_n$, die durch

$$z_0 := c$$
$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad n \in \mathbb{N}$$

definiert ist, beschränkt ist.

Ein nichttriviales Beispiel

```
% Mandelbrot set
% MANDEL.m

x = linspace(-2.1,0.6,601);
y = linspace(-1.1,1.1,401);

[X,Y] = meshgrid(x,y);
C = complex(X,Y);

it_max = 50;

Z = C; Anz = zeros(size(Z));

for k = 1:it_max
    Z = Z.^2+C;
    Anz = Anz + isfinite(Z);
    waitbar(k/it_max);
end,
image(x,y,Anz);
title('Mandelbrot Set', 'FontSize',16);
```

Verwendete Befehle

- linspace(a,b,n) ist ein Vektor mit n Einträgen der Form $a, a + (b-a)/(n-1), \ldots, b$
- [X,Y]=meshgrid(x,y) erzeugt Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ & \vdots & \\ x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_1 \\ & \vdots & \\ y_n & \ldots & y_n \end{pmatrix}$$

- C=complex(X,Y) erzeugt $C = (C(j,k))_{jk}$ mit $C(j,k) = X(j,k) + i\ Y(j,k)$

Verwendete Befehle

- B=isfinite(A) erzeugt eine Matrix B der gleichen Größe wie A. Die Einträge sind 1, wenn der entsprechende Eintrag von B finit ist und 0 sonst.
- image(x,y,A) erzeugt eine Grafik auf der Basis des Gitters (x, y) mit Werten A. Durch den entsprechenden Eintrag von A wird die Farbe bestimmt.
- Mit title lassen sich Grafiken mit einer Überschrift versehen.
- Durch for, end wird eine Schleife angegeben (Details später).

Grundlegende Kommandos

- Starten von MATLAB: Eingabe von matlab &.
- Verlassen von MATLAB: quit oder exit
- Editieren alter Eingaben: ↑, ↓ (wie in Unix)
- aktuelles Verzeichnis: pwd
- Bei Definition von Variablen wird der Wert der Variablen ausgegeben. Mit ; am Ende wird dies unterdrückt.
- Inhalt des Arbeitsspeichers: whos oder who

Aufbau

Aufbau

1. Streifzug durch MATLAB
   - Einleitung
   - Erste Schritte
   - Beispiele
2. **Vektoren und Matrizen**
   - **Erzeugen von Vektoren**
   - Erzeugen von Matrizen
   - Manipulation von Matrizen
   - Matrix- und Vektoroperationen
   - Eine Anwendung
3. Numerische Lineare Algebra
   - Normen
   - Lösen linearer Gleichungssyteme
   - Bestimmung von Eigenwerten

Vektoren I

- Erzeugen 'per Hand'

```
> b=[ 1 2 4]
b =
        1        2        4
```

- Abfragen der Einträge von *b*

```
>> b(2)
ans =        2
```

Index $\equiv$ Position im Vektor

Achtung: Indizes beginnen immer mit 1!

Doppelpunkt - Notation

$x : s : z$ erzeugt einen Vektor der Form

$$(x, x+s, x+2s, x+3s, \ldots, z).$$

```
>> a=2:11
a =
  2   3   4   5   6   7   8   9   10   11

>> c=-2:0.75:1
c =
  -2.0000  -1.2500  -0.5000  0.2500  1.0000
```

Vektoren II

- length(a) gibt die Länge des Vektors a an.
- linspace(x1,x2,N) erzeugt den Vektor

$$x1, x1 + \frac{x2 - x1}{N-1}, x1 + 2\frac{x2 - x1}{N-1}, \ldots, x2$$

  der Länge N.

```
>> linspace(1,2,4)
ans =
     1.0000     1.3333     1.6667     2.0000
```

- logspace(x1,x2,N) wie linspace, nur logarith. Skalierung

Aufbau

Erzeugen von Matrizen

- Erzeugen 'per Hand'

```
>> B=[ 1 3 4; 5 6 7]
B =
       1       3       4
       5       6       7
```

- Erzeugen von 'Einheitsmatrizen'

```
>> eye(2,3)
ans =
       1       0       0
       0       1       0
```

eye(n,m) erzeugt eine $(n \times m)$- Matrix mit 1 auf der Hauptdiagonalen und 0 sonst.

Erzeugen von Matrizen II

- zeros(n,m) bzw. ones(n,m) erzeugt eine $(n \times m)$- Matrix mit 0 bzw. 1 als Einträge.
- Erzeugen von Blockmatrizen

```
>> C = [B zeros(2,2); eye(2,3) eye(2,2)]
C =
       1       3       4       0       0
       5       6       7       0       0
       1       0       0       1       0
       0       1       0       0       1
```

Achtung: Matrizen in einer Zeile müssen dieselbe Zeilenanzahl haben und Matrizen in einer Spalte dieselbe Spaltenanzahl.

Erzeugen von Matrizen III

- repmat(A,n,m) erzeugt eine Blockmatrix mit $(n \times m)$ aus A bestehenden Blöcken

```
>> D = repmat(B,1,2)
D =
      1     3     4     1     3     4
      5     6     7     5     6     7
```

- blkdiag(A,B) erzeugt eine Blockdiagonalmatrix.
- diag(v,k) erzeugt eine Matrix der Größe $(n + |k|) \times (n + |k|)$ mit den Einträgen des Vektors v auf der k-ten Nebendiagonalen

Aufbau

Beispiel-Matrizen

- Einen Überblick erhält man durch >> help gallery
- Ein Beispiel

```
>> E = gallery('moler',4)
E =
     1    -1    -1    -1
    -1     2     0     0
    -1     0     3     1
    -1     0     1     4
```

- Hilfe zur Matrix 'moler' erhält man durch help private/moler
- weitere Matrizen: magic, hilb, vander

Zugriff auf Matrizen

```
>>    A = [ 1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
A =
        1        2        3
        4        5        6
        7        8        9
```

Abfragen eines Eintrags

```
>> A(2,1)
ans =
     4
```

Abfrage von Blöcken

```
>> A(2:3,1:2)
ans =
     4     5
     7     8
```

Abfrage einer Zeile

```
>> A(2,:)
ans =
     4     5     6
```

Abfrage mehrerer Zeilen

```
>> A([1 3],:)
ans =
     1     2     3
     7     8     9
```

Löschen

```
>>   A = [ 1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
```

Löschen einer Zeile

```
>> A(2,:) = []
A =
     1     2     3
     7     8     9
```

Löschen von Spalten

```
> A(:,[1 3]) = []
A =
     2
     5
     8
```

Aufbau

Matrizenoperationen

Standard-Matrix Operationen $+,-,*$

```
>> A = [1 2; 3 4]; B = 2*ones(2,2);
```

Multiplikation

```
>>  A*B

ans =

     6     6
    14    14
```

Addition

```
>> A+B

ans =

     3     4
     5     6
```

Subtraktion

```
>> A-B

ans =

    -1     0
     1     2
```

Andere Operatoren

- $\mathrm{A\backslash B}$ berechnet die Lösung X von $\mathrm{A^*X{=}B}$.
- $\mathrm{A/B}$ berechnet die Lösung X von $\mathrm{X^*A{=}B}$.
- $\mathrm{inv(A)}$ berechnet die Inverse von A.
- $\mathrm{A'}$ oder $\mathrm{ctranspose(A)}$ ergibt die komplex Transponierte von A.
- $\mathrm{A.'}$ oder $\mathrm{transpose(A)}$ ist die Transponierte von A.
- $\mathrm{A\hat{\ }z}$ berechnet $\underbrace{A * A * \cdots * A}_{z-mal}$ (quadratische Matrizen)
- Die Größe einer Matrix A wird durch $\mathrm{size\,(A)}$ bestimmt.

Spezielle Operatoren

```
>> A = [1 2; 3 4]; B = 2*ones(2,2);
```

- C = A.*B ergibt C mit $C(i,j) = A(i,j) * B(i,j)$.

```
C =
     2     4
     6     8
```

- C = A./B ergibt C mit $C(i,j) = A(i,j)/B(i,j)$.

```
C =
    0.5000    1.0000
    1.5000    2.0000
```

- C = A.B ergibt C mit $C(i,j) = B(i,j)/A(i,j)$.

```
C =
    2.0000    1.0000
    0.6667    0.5000
```

Spezielle Operatoren II

- $\mathrm{C} = \mathrm{A}.\hat{}\mathrm{B}$ ergibt C mit $C(i,j) = A(i,j)^{B(i,j)}$

```
C =
        1     4
        9    16
```

Achtung: Bei diesen Operationen müssen A und B dieselbe Dimension haben. Matrizen können durch Skalare ersetzt werden, z.B. $\mathrm{A}.\hat{}2$.

Skalarprodukt

- Vektoren $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots b_n)$
- Skalarprodukt: ab^t
- Summe der Einträge von a: $(1, \ldots, 1)a^t$

Beispiel:

```
>> a=1:100; b=linspace(0,1,100);
>> a*transpose(b)
ans =
   3.3667e+03
>> ones(1,100)*transpose(a)
ans =
         5050
```

Aufbau

Zwei-Punkt-Randwert-Aufgabe

Suche eine Funktion

$$u : [0,1] \quad \to \quad \mathbb{R},$$

so dass

$$\begin{aligned} -u''(x) &= e^x, \quad x \in (0,1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

Problem: Es kann i.A. keine geschlossene Lösungsdarstellung angegeben werden.
Ausweg: Approximation der Lösung.

Finite Differenzen Verfahren

Diskretisierung: $0 = x_0 < \cdots < x_n = 1$ mit $x_i = \frac{i}{n}$
Differenzenquotient:

$$u''(x_i) \sim \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2}, \quad h := \frac{1}{n}$$

Einsetzen in $-u''(x) = e^x$ ergibt

$$-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1}) = h^2 e^{x_i}, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

Randbedingungen $\Rightarrow u(x_0) = u(x_n) = 0$.
$\Rightarrow$ Lineares Gleichungssystem für $u(x_1), \ldots, u(x_{n-1})$.

Diskretes Problem

Setze $z = (z_1, \ldots, z_{n-1})^t = (u(x_1), \ldots, u(x_{n-1}))^t$.
Löse das Gleichungssystem $Az = F$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ F := h^2 \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{n}} \\ \vdots \\ e^{\frac{n-1}{n}} \end{pmatrix}.$$

Lösung für $n = 21$

- Zerlegung des Intervalls $[0, 1]$

```
>> x=0:(1/21):1
```

- Eleminieren der Randpunkte

```
>> x_i=x(2:21)
```

- Erzeugen der Matrix A (Übungsaufgabe)

Lösung für $n = 21$

- Berechnen der rechten Seite:

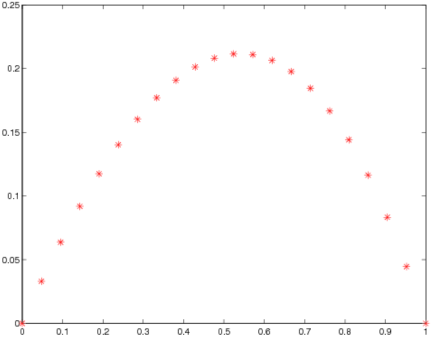
```
F=(1/21)^2*transpose(exp(x_i));
```

- Lösen des lin. Gls.
  z_i=A\F;
- Zufügen der Werte am Rand

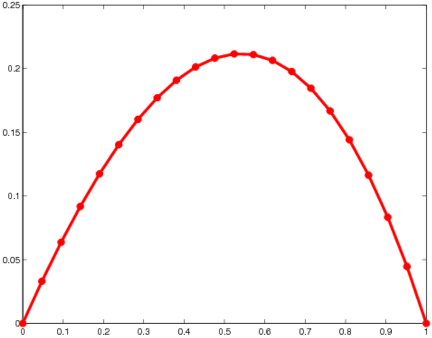
```
>> z=[0; z_i;0];
```

Lösung für $n = 21$

```
>> plot(x,z,'r*','MarkerSize',8)
```




```
>> plot(x,z,'r*-','LineWidth',3,'MarkerSize',8)
```



Aufbau

Aufbau

Vektornorm

Die p-Norm eines Vektors $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

kann berechnet werden durch $\mathrm{norm(x,p)}$ (Default: $p = 2$)

- Die Norm ist definiert für $p \geq 1$.
- $p = \infty$ entspricht der Maximum-Norm

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots n} |x_i|.$$

Matrixnorm

Seien $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ und $p \geq 1$. Die *Matrixnorm* ist definiert durch

$$\|A\|_p = \sup_{x\in\mathbb{C}^m\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}.$$

- In MATLAB:$\mathrm{norm(A,p)}$ (Default $p = 2$).
- $p = \infty$ kann charakterisiert werden durch

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \text{Zeilensummennorm.}$$

Kondition

Kondition einer quadratischen Matrix A:

$$\mathrm{cond}_p(A) := \|A\|_p \|A^{-1}\|_p.$$

- In MATLAB: $\mathrm{cond(A,p)}$ (Default $p = 2$)
- Es gilt $\mathrm{cond}_p(A) \geq 1$.
- Die Kondition mißt die Empfindlichkeit der Lösung x von $Ax = b$ gegenüber Störungen von A und b.
- Ist $\mathrm{cond}_p(A) >> 1$, so ist die Matrix beinahe singulär. Die Matrix ist *schlecht konditioniert*.

Beispiele

- Vektornormen für $x = (1/100)(1, 2, \ldots, 100)$

```
>> x = (1:100)/100; [norm(x,1) norm(x,2) norm(x,inf)]
ans =     50.5000     5.8168     1.0000
```

- Matrixnorm für die Hilbert-Matrix $H = (\frac{1}{i+j-1})_{ij}$

```
>> H = hilb(10); [norm(H,1) norm(H,2) norm(H,inf)]
ans =      2.9290     1.7519     2.9290
```

- Kondition der Hilbert-Matrix

```
>> H = hilb(10); [cond(H,1) cond(H,2) cond(H,inf)]
ans =
   1.0e+13 *
    3.5354     1.6025     3.5354
```

Aufbau

Lineare Gleichungssysteme

Seien $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{C}^n$. Das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

wird in MATLAB gelöst durch x=Ab.

```
>> x = ones(5,1); H = hilb(5); b = H*x; y = (H\b)'
y =
     1.0000      1.0000      1.0000      1.0000      1.0000
```

Warnung: Benutze nie x=inv(A)*b, da das Berechnen von A^{-1} sehr aufwendig sein kann.

LU-Zerlegung

Was bedeutet Ab?

MATLAB berechnet die LU-Zerlegung von A (Gaussverfahren), d.h. es sucht eine obere Dreiecksmatrix U und eine untere Dreiecksmatrix L mit Einsen auf der Diagonalen, so dass $PA = LU$ gilt (P Permutationsmatrix). Dann wird das LGS durch Rückwärts- und Vorwärtseinsetzen gelöst.

```
>> [L,U,P]=lu(hilb(5)); norm(P*hilb(5)-L*U)
ans =   2.7756e-17
```

Inverse, Determinante

- Berechnung der Inversen

```
>> A=pascal(3)
A =
        1       1       1
        1       2       3
        1       3       6
```

```
>> X=inv(A)
X =
        3      -3       1
       -3       5      -2
        1      -2       1
```

- Berechnung der Determinante

```
>> det(A)
ans = 1
```

Pseudoinverse

Berechnung der (Moore-Penrose) Pseudoinversen X von A (A singulär), d.h. X genügt

$$AXA = A, XAX = X, (XA)^* = XA, (AX)^* = AX.$$

```
>> pinv(ones(3,3))
ans =
    0.1111    0.1111    0.1111
    0.1111    0.1111    0.1111
    0.1111    0.1111    0.1111
```

Aufbau

Eigenwerte

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. $\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von A, falls ein Vektor $x \in \mathbb{C}^n$ ungleich 0 existiert, so dass $Ax = \lambda x$ gilt. x heißt Eigenvektor.

- $\mathrm{x{=}eig(A)}$ berechnet die Eigenwerte von A und schreibt sie in den Vektor x.
- $\mathrm{[V{,}D]{=}eig(A)}$ D ist eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen. Die Spalten von V bilden die zugehörigen Eigenvektoren.

Weitere Zerlegungen

- Mittels $\mathrm{[Q,R]{=}qr(A)}$ wird zu einer $m \times n$- Matrix A eine Zerlegung $A = QR$ erzeugt, wobei Q eine unitäre $m \times m$-Matrix ist und R eine obere $m \times n$ Dreiecksmatrix ist.
- Eine Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^*$ wird durch $\mathrm{[U,S,V]{=}svd(A)}$ berechnet. Dabei ist $\Sigma \subset \mathbb{C}^{m\times n}$ eine Diagonalmatrix und $U \subset \mathbb{C}^{m\times m}$, $V \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ sind unitäre Matrizen.
- Eine Cholesky-Zerlegung $A = R^* R$ zu einer hermiteschen, positiv definiten Matrix A wird durch $\mathrm{R{=}chol(A)}$ berechnet. R ist eine obere Dreiecksmatrix mit reellen, positiven Diagonalelementen.

Bemerkungen

- LGS können auch mit Hilfe iterativer Verfahren gelöst werden, z.B. gmres, pcg, bicgstab.
- Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $n \neq m$, so ergibt $\mathrm{A \backslash b}$ für $n > m$ (der überbestimmte Fall) die Least-Square Lösung, d.h. der Ausdruck $\mathrm{norm(A*x-b)}$ wird minimiert. Ist $n < m$ (der unterbestimmte Fall) so wird eine Grundlösung berechnet.