Einführung in Matlab

Einheit 5
Mehrdimensionale Arrays
Umgang mit Funktionen
Dünnbesetzte Matrizen
Numerische Mathematik

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen

16. August 2009

Aufbau

Mehrdimensionale Arrays

- In MATLAB existieren auch mehrdimensionale Arrays.

```
>> A(:,:,1)=ones(3);
>> A(:,:,2)=2*ones(3);
>> whos
  Name      Size      Bytes   Class
  A         3x3x2       144   double
```

- cat(dim,A1,A2,..) fügt die Arrays A1, A2,.. entlang der Dimension dim zusammen. (A = cat(3,ones(3), 2*ones(3)))
- Befehle wie zeros, ones oder repmat funktionieren auch im multidimensionalen Kontext.

Umsortieren von Arrays

Durch den Befehl reshape(X,n1,..,ns) wird X spaltenweise ausgelesen, und die Elemente werden spaltenweise in ein $(n_1, \ldots, n_s)$-Array geschrieben.

```
>> B=reshape(hilb(4), 8,2)
```

- X muss $n_1 \cdots n_s$ Elemente enthalten.
- Der Befehl ist sehr nützlich.

```
>> reshape(hilb(4), 4,2,2)
```

Zugriff auf mehrdim. Arrays

Intern werden Arrays als Spalten abgespeichert. Zugriff durch linearen Index möglich.

```
>> B=reshape(1:12,2,3,2)
B(:,:,1) =
      1       3       5
      2       4       6
B(:,:,2) =

      7       9      11
      8      10      12
>> B(7:9)
ans =
      7       8       9
```

Nützliche Befehle

- Anzahl der Dimensionen von X: ndims(X)
- Größe von X: size (X)
- Umwandlung von linearer Indizierung in Array-Indizierung: ind2sub
- Umwandlung von Array-Indizierung in lineare Indizierung: sub2ind

```
>> A = reshape(1:12,2,3,2);
>> A(ind2sub(size(A),5))
ans =
      5
```

- Man kann auch mit mehrdimensionalen Arrays rechnen.

Aufbau

Funktionen

- Eine Funktion kann ein m.-File, eine Inline-Funktion, eine anonyme Funktion oder auch ein String sein.
- Funktionen werden in einem eigenen *Workspace* verwaltet.
- Beim ersten Aufruf speichert MATLAB die Funktion im Workspace bis MATLAB verlassen wird oder die Funktion fun mit $\mathrm{clear\ \ fun}$ gelöscht wird.
- MATLAB nutzt zur Unterscheidung der Funktionen die ersten 63 Zeichen des Namens. Funktionen (und Variablen) müssen mit einem Buchstaben beginnen.

Function-Handles

Ein *Function Handle* ist ein MATLAB Datentyp, das alle Informationen enthält, die zur Auswertung einer Funktion nötig sind.

- Definition, z.B. $\mathrm{Sinus} = @\mathrm{sin}$.
- Anwendung bei der Übergabe von Funktionen: $\mathrm{quad}(\mathrm{Sinus},0,1)$
- Anonyme Funktion: $\mathrm{f} = @(\mathrm{x})\ \sin(\mathrm{x})^*\cos(\mathrm{x})$

Beispiel: Anonyme Funktion

- Funktion mit Parameter

```
>> y = 1; l = @(x) sin(x)./(x+y) ;
>> l(2)
ans =
     0.3031
```

- Gamma-Funktion $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$.

```
>> k = @(s) quad( @(x) x.^(s-1).*exp(-x),0.1,500) ;
>> k(4),k(5)
ans =
     6.0000
ans =
    24.0000
```

Funktionen als Strings

- Eingabe als String: a = 'exp(z)-1+z'
- Plotten der zugehörigen Funktion ezplot(a,[-1 1])

Bemerkung:

Funktionen gegeben als Strings sind im allgemeinen zu vermeiden! Besser andere Konstrukte (wie Inline-Funktionen) benutzen!

Function-Files:

- *Function-Files* sind m-Files, die mit dem Stichwort function beginnen.
- Steuerung der Ein- und Ausgabeparameter:
  - Innerhalb einer Funktion gibt der Befehl varargin die Eingabeparameter als Cell-Array zurück. Die Anzahl der Inputvariablen erhält man durch nargin.
  - varargout ist ein Cell-Array, in die die Ausgabewerte geschrieben werden. Die Anzahl der Ausgabevariablen erhält man durch nargout.
- Ist func_name.m ein Function-File, so ist der entsprechende Function-Handle @func_name.

Beispiel: varargin

```
function result = integral(varargin)
%   integral.m
% berechnet approximativ ein Integral ueber (a,b)
% durch die Mittelpunktregel mit Hilfe von N Punkten
% Eingabe: 0 Parameter:        (N=20, a=0, b=1)
%          1 Parameter: N      (a=0,b=1)
%          3 Parameter: N,a,b
% Jochen Schulz 16.08.2009
N = 20; a = 0; b = 1; % Default-Einstellung
anzahl_parameter = nargin; % Anz. Input-argumente
if anzahl_parameter == 1
    N = varargin\mcode{{1}};
end;
if anzahl_parameter == 3
    N = varargin\mcode{{1}}; a = varargin\mcode{{2}};
    b = varargin\mcode{{3}};
end;
if anzahl_parameter ≠ [0 1 3]
    error('Falsche Anzahl an Input-Argumenten');
end;
```

Beispiel: varargin

```
x = (a+(b-a)/(2*N)):(b-a)/N:(b-(b-a)/(2*N));
y = x.^3;
% Berechnung des Integrals
result = (b-a)*sum(y)*(1/N);

close all; % Plot
x1 = linspace(a,b,N+1);
for i = 1:N
    fill([x1(i) x1(i)  x1(i+1) x1(i+1)], [0 y(i)  y(i) 0], 'r');
    hold on;
end;
plot(a:(b-a)/100:b,(a:(b-a)/100:b).^3,'LineWidth',3);
title(strcat('\int x^3 = ',num2str(result),...
' fuer N =', num2str(N)));
```

Inline-Funktionen

Eine *Inline Funktion* ist im Wesentlichen eine einzeilige Funktion. Sie wird definiert durch einen String.

Beispiele:

```
>> a = 'exp( z)- 1+ z';
>> f = inline(a)
f =
      Inline function:
      f(z) = exp(z)-1+z
>> g = inline('x+y^2','x','y')
g =
      Inline function:
      g(x,y) = x+y^2
```

```
>> f(1),g(1,2),a(2)
ans =
    2.7183
ans =
     5
ans =
     x
```

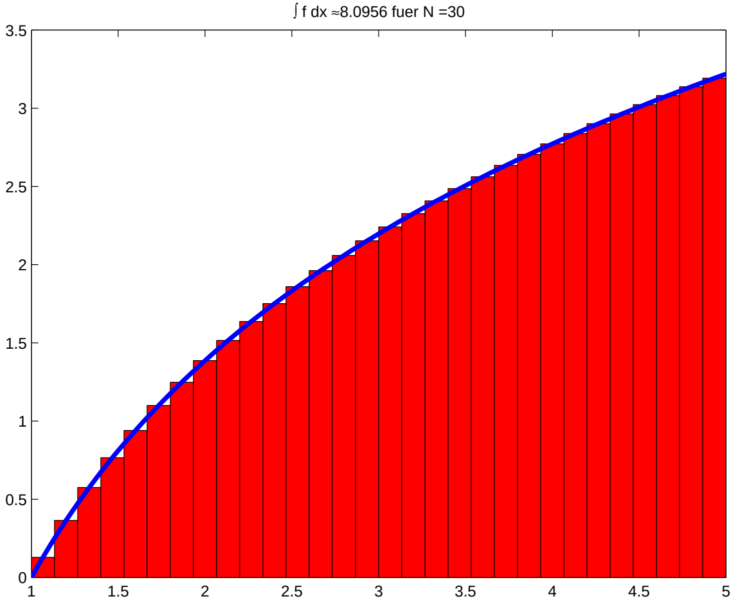
Befehle für Funktionen

- Durch feval(fun,x1, ... ,xn) wird die Funktion fun an der Stelle $(x1, ..., xn)$ ausgewertet. fun ist dabei entweder ein Funktionsname oder ein Function-Handle.
- Durch f = fcnchk(g) wird ein String g in ein Inline-Funktion umgewandelt (vgl. inline). Ist g ein Function-Handle oder eine Inline-Funktion so ist $f = g$.
- Durch vectorize(f) wird f für Strings oder Inline-Funktionen *vektorisiert*, d.h. '*' wird durch '.*' ersetzt, '^' durch '.^', usw.

Beispiel: integral2.m (Auszug)

```
function result = integral2(varargin)
%   integral2.m
% Eingabe: 1 Parameter: f        (N=20, a=0, b=1)
%          2 Parameter: f,N      (a=0,b=1)
%          4 Parameter: f,N,a,b
% Jochen Schulz 16.08.2009
N = 20; a = 0; b = 1; % Default-Einstellung
anzahl_parameter = nargin; % Anz. Input-argumente
if anzahl_parameter == 2
    N = varargin{2};
end;
if anzahl_parameter == 4
    N = varargin{2}; a = varargin{3}; b = varargin{4};
end;
if anzahl_parameter ≠ [1 2 4]
    error('Falsche Anzahl an Input-Argumenten');
end;
% eventuelle Umwandlung von Strings
f = fcnchk(varargin{1},'vectorized');
x = (a+(b-a)/(2*N)):(b-a)/N:(b-(b-a)/(2*N));
y = feval(f,x);
```

integral2 ('log(x.^2)',30,1,5)



Beispielfunktion

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-\|x\|^2}), & \|x\| < 1 \\ 0, & \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

mit $\|x\|^2 := \sum_{i=1}^{N} x_i^2$, $x = (x_1, \ldots x_N) \in \mathbb{R}^N$.

2 Versionen:

- eindimensionale Version
- N-dimensionale Version

Beispielfunktion - 1d-Fall

```
function result = f_1d(x)
%------------------------------------------------------------
% Sobolevsche Mittelungsfunktion (1d)
% f(x) = exp(-1/(1-|x|^2)), |x|<1, und f(x)=0 sonst
%
% Eingabe: Vektor x
% Ausgabe: Vektor f(x)
%
% Gerd Rapin      7.12.2003
%------------------------------------------------------------------------
result = zeros(1,length(x));
    for k = 1:length(x)
    if abs(x(k))<1
        result(k) = exp(-1/(1-x(k)^2));
    else
        result(k) = 0;
    end;
end;
```

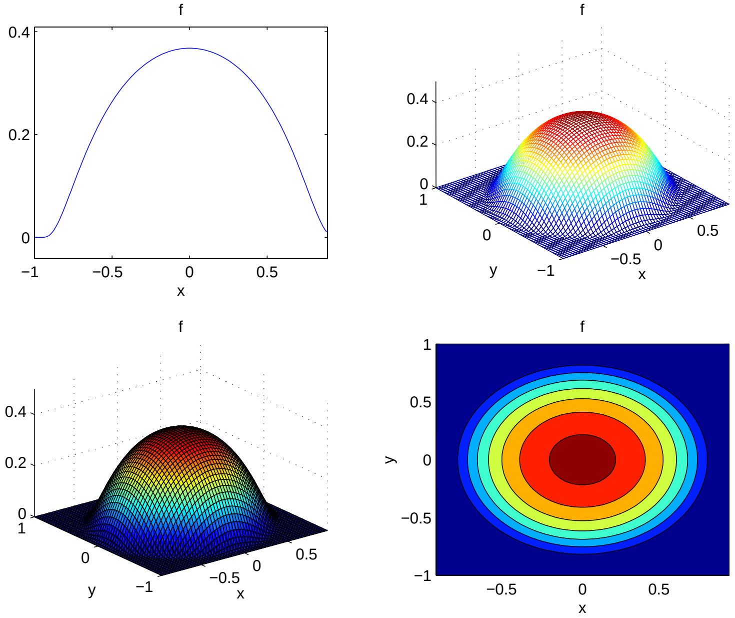
Beispielfunktion - n-dimensionaler-Fall

```
function result = f(varargin)
% f.m      Sobolevsche Mittelungsfunktion
%          Eingabe: Matrizen x1,x2,x3,..
%          Ausgabe: Matrix result=f(x1,x2,...)
betrag = varargin{1}.^2;
for i = 2:nargin
    betrag = betrag+varargin{i}.^2;
end
dimension = size(varargin{1});
result = zeros(dimension(1),dimension(2));
for j = 1:dimension(1)
    for k = 1:dimension(2)
        if betrag(j,k) < 1
            result(j,k) = exp(-1/(1-betrag(j,k)));
        else
            result(j,k) = 0;
        end;
    end;
end;
```

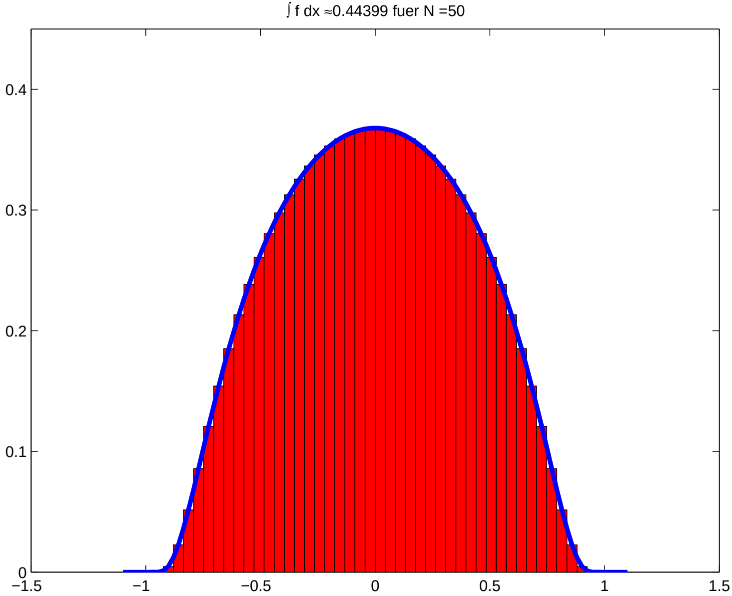
Programm zum Plotten

```
%     plot_f.m

% Eindimensionaler Plot
subplot(2,2,1),
ezplot(@f);

% Zweidimensionaler Plot
subplot(2,2,2),
ezmesh(@f);

% Zweidimensionaler Plot
subplot(2,2,3),
ezsurfc(@f);

% Zweidimensionaler Plot
subplot(2,2,4),
ezcontourf(@f);
```

Plots der Funktion



integral2(@f,50,-1.1,1.1)



Aufbau

Dünnbesetzte Matrizen

- Bei *Dünnbesetzten Matrizen* (*sparse matrices*) sind fast alle Einträge 0.
- In vielen Anwendungen, z.B. bei der Diskretisierung von Differentialgleichungen oder in der Graphentheorie, treten sehr grosse, dünnbesetzte Matrizen auf.
- In MATLAB steht dafür ein eigener Datentyp zur Verfügung, der zu jedem Nichtnullelement der Matrix, die zugehörige Zeile und Spalte speichert.

Beispiel

```
>> A = 2*diag(ones(10,1),0)-diag(ones(9,1),-1)-diag(ones(9,1),1);
>> B = sparse(A)
B =
   (1,1)          2
   (2,1)         -1
   (1,2)         -1
   (2,2)          2
        ...
>> C = 2*diag(ones(100,1),0)-diag(ones(99,1),-1)-diag(ones(99,1),
>> D = sparse(C); whos
  Name        Size                Bytes  Class

  A           10x10                 800  double  array
  B           10x10                 380  sparse  array
  C           100x100             80000  double  array
  D           100x100              3980  sparse  array
```

Einige Befehle

- Durch sparse(n,m) wird eine dünnbesetzte Matrix der Grösse $n \times m$ erzeugt. Alle Einträge sind 0.
- Durch B=sparse(A) wird die dichtbesetzte Matrix A in eine dünnbesetzte Matrix B umgewandelt.
- Die Struktur der Matrix A kann durch spy(A) visualisiert werden.
- Die meisten Standardoperationen funktionieren auch mit dünnbesetzten Matrizen.

Dichte und dünnbesetzte Matrizen

- Durch $\mathrm{B{=}full(A)}$ wird die dünnbesetzte Matrix A in eine dichtbesetzte Matrix B umgewandelt.
- Bei binären Operationen, z.B. $A + B$ oder $A * B$ ist das Ergebnis bei dünnbesetzten Matrizen A und B wieder eine dünnbesetzte Matrix. Ist eine der Matrizen dichtbesetzt, so ist auch das Ergebnis dichtbesetzt.
- Durch $\mathrm{eigs(A,k)}$ werden die k betragsmäßig grössten Eigenwerte berechnet. (Default: $k = 6$)

Dünnbesetzte Matrizen

- Zur Norm- und Konditionsberechnung stehen die Befehle normest bzw. condest zur Verfügung.
- Alle iterativen Verfahren funktionieren auch mit dünnbesetzten Matrizen.
- Eine Übesicht aller Funktionen für dünnbesetzte Matrizen erhält man durch help sparfun.
- Durch $[\mathrm{I},\mathrm{J}] = \mathrm{find}(\mathrm{X})$ kann man die Indizes aller Zeilen und Spalten erhalten, in denen Nichtnullelemente stehen.

Poisson Problem

- Poisson Problem beschreibt stationäre Wärmeverteilungen.
- *Laplace-Operator* $\triangle u := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$
- *Poisson Problem:* Suche $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit

$$\begin{cases} -\triangle u & = & f & \text{in } \Omega \\ u & = & 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für $\Omega = (0,1)^2$ und $f \in C(\Omega)$.

Diskretisierung

- Äquidistante Gitterweite $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$
- Menge aller Gitterpunkte

$$Z_h := \{(x, y) \in \overline{\Omega} \mid x = z_1 h,\ \ y = z_2 h \text{ mit } z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

- Innere Gitterpunkte: $\omega_h := Z_h \cap \Omega$

Diskretisierung

- Approximation von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)$

$$\frac{u(x-h,y) - 2u(x,y) + u(x+h,y)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \mathcal{O}(h^2)$$

- Approximation von $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$

$$\frac{u(x,y-h) - 2u(x,y) + u(x,y+h)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) + \mathcal{O}(h^2)$$

- Addition ergibt für $\triangle u(x,y)$ die Näherung

$$\frac{1}{h^2}\left(u(x,y-h) + u(x-h,y) - 4u(x,y) + u(x,y+h) + u(x+h,y)\right)$$

Diskretisierung

- Definition $u_{i,j} := u(ih, jh)$ ergibt an Gitterpunkten (ih, jh)

$$-u_{i,j-1} - u_{i-1,j} + 4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} = h^2 f_{ij}$$

  mit $i, j \in \{1, \ldots, N-1\}$ und $f_{ij} := f(ih, jh)$.
- Randbedingungen ergeben $u_{0,i} = u_{N,i} = u_{i,0} = u_{i,N} = 0,\ i = 0, \ldots, N$.

Diskretisierung

- Lexikografische Sortierung der inneren Unbekannten

$$\begin{array}{cccc}
(h,(N-1)h) & (2h,(N-1)h) & \dots & ((N-1)h,(N-1)h) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(h,2h) & (2h,2h) & \dots & ((N-1)h,2h) \\
(h,h), & (2h,h) & \dots & ((N-1)h,h)
\end{array}$$

ergibt $U_{i+(N-1)(j-1)} = u_{i,j}$.

Diskretisierung

Lineares Gleichungssystem für $U = (U_i)_{i=1}^{(N-1)^2}$

$$AU = F$$

mit

- $F := (f_i)_{i=1}^{(N-1)^2}$ mit $f_{i+(N-1)(j-1)} = f(ih, jh),\ i, j \in \{1, \dots, N-1\}$,
- $$\begin{aligned} A &:= \frac{1}{h^2} tridiag(-I_{N-1}, T, -I_{N-1}) \in \mathbb{R}^{(N-1)^2 \times (N-1)^2}, \\ T &:= tridiag(-1, 4, -1) \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}. \end{aligned}$$

Implementierung

```
function loes = poisson (f,n)
f = fcnchk(f);
A = gallery('poisson',n-1);
%------------ Erzeuge rechte Seite und Mesh
mesh = zeros(2,(n-1)^2);
F = zeros((n-1)^2,1);
for i = 1:(n-1)
    for j = 1:(n-1)
        F(i+(n-1)*(j-1)) = (1/n)^2*f(i/n,j/n);
        loes.mesh(:,i+(n-1)*(j-1)) = [i/n; j/n];
    end
end
%------------ Loese das lineare System
loes.x = A \ F;
```

Implementierung

```
% Ergaenze Randbedingungen
loes.x = [ loes.x; zeros(4*(n+1),1)];
loes.mesh = [loes.mesh, [zeros(1,n+1); 0:1/n:1]];
loes.mesh = [loes.mesh, [ones(1,n+1);  0:1/n:1]];
loes.mesh = [loes.mesh, [0:1/n:1; ones(1,n+1)]];
loes.mesh = [loes.mesh, [0:1/n:1; zeros(1,n+1)]];

%------------------ Plotten
plot3(loes.mesh(1,:),loes.mesh(2,:),loes.x,'*');
figure;
[X,Y] = meshgrid(0:1/n:1,0:1/n:1);
Z = griddata(loes.mesh(1,:), loes.mesh(2,:),loes.x,X,Y,'linear');
surf(X,Y,Z);
```

Aufbau

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Bei einer gew. Dgl. sucht man eine Funktion $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, so dass

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t)), t \in I \quad y(t_0) = y_0,$$

wobei $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ein vorgegebener Anfangswert an $t_0 \in I$ und $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ die rechte Seite ist. Außerdem sei $\frac{d}{dt}y(t) := (\frac{\partial y_1(t)}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial y_n(t)}{\partial t})^t$.

Beispiele:

$\frac{d}{dt}y(t) = y(t),\ y(t_0) = y_0,$ Lösung: $y(t) = y_0 e^{t-t_0}$

$\frac{d}{dt}y(t) = e^y \sin(t),$ Lösung: $y(t) = -\log(\cos(x) + C),\ C + \cos(x) > 0$

Skalares Beispiel

Löse für $0 \leq t \leq 3$ mit ode45 die Dgl.

$$\frac{d}{dt}y(t) = -y(t) - 5e^{-t}\sin 5t, \quad y(0) = 1.$$

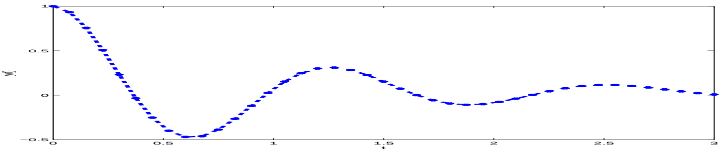
- Die rechte Seite als eigene Funktion:

```
function z=rechte_seite1(t,y)
% rechte_seite1   ODE Beispiel
%            z=rechte_seite1(t,y)
z=-y-5*exp(-t)*sin(5*t);
```

Skalares Beispiel

- Ausrechnen +Plotten

```
>> tspan=[0,3]; aw=1;
>> [t,y]=ode45(@rechte_seite1,tspan,aw);
>> plot(t,y,'*--','Linewidth',3)
>> xlabel('t'), ylabel('y(t)')
```



ODE in MATLAB

In MATLAB gibt es den Befehl

```
[t,y]=ode45(@fun, tspan, aw, options)
```

- @fun steht für die rechte Seite der Dgl.. Die rechte Seite ist gegeben durch ein geeignetes m-File.
- $aw \in \mathbb{R}^n$ ist der Anfangswert.
- *tspan* gibt das Zeitintervall an, auf dem die Dgl. berechnet werden soll. Normalerweise ist es von der Form tspan=[t_0, t_1]. Dann wird die Dgl. auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ berechnet (Anfangswert: $y(t_0) = aw$).
- MATLAB gibt Vektoren t und Matrizen y zurück. Dabei ist $y(:, i)$ die Lösung an der Stelle $t(i)$. Die Punkte t_i werden von MATLAB automatisch bestimmt.
- Durch die optionale Angabe von options kann der Löser gezielt eingestellt werden.
- Spezifiziert man mehr als zwei Zeitpunkte in tspan, so gibt MATLAB die Lösung genau an diesen Zeitschritten zurück.

Optionen

Die genauen Parameter der ODE-Löser können durch

```
options = odeset('Eigenschaft 1','Spez. 1',...
  'Eigenschaft 2','Spez. 2',...)
```

gesteuert werden. Die wichtigsten Parameter sind AbsTol (Default 10^{-6}) und RelTol (Default: 10^{-3}).

Beispiel:

```
options =odeset('AbsTol',1e-7,'RelTol',1e-4)
```

Andere Löser

Löser	Steifigkeit	Algorithmus
ode45	nicht steif	Expliziter Runge-Kutta Löser, Ordn. 4 und 5
ode23	nicht steif	Expliziter Runge-Kutta Löser, Ordn. 2 und 3
ode113	nicht steif	Explizites Mehrschrittverfahren, Ordnungen 1 bis 13
ode15s	steif	Implizites Mehrschrittverfahren, Ordnungen 1 bis 5
ode23s	steif	Modifiziertes Rosenbrockverfahren, Ordn. 2 und 3
ode23t	mittel steif	impliz. Trapez Regel, Ordn. 2 und 3
ode23tb	steif	Implizites Ruge-Kutta Verf., Ordn. 2 und 3

Die Lorenz-Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}y_1(t) &= 10(y_2(t) - y_1(t)) \\
\frac{d}{dt}y_2(t) &= 28y_1(t) - y_2(t) - y_1(t)y_3(t) \\
\frac{d}{dt}y_3(t) &= y_1(t)y_2(t) - 8y_3(t)/3
\end{aligned}
$$

rechte Seite:

```
function z=lorenz_rechte_seite(t,y)
z=      [10*(y(2)-y(1));...
         28*y(1)-y(2)-y(1)*y(3);...
         y(1)*y(2)-8*y(3)/3];
```

Die Lorenz-Gleichungen

```
%--------------------------------------------------------------
%    lorenz_gl.m
%  Eine Approximation der Lorenzgleichungen
%------------------------------------------------------------------------------
tspan=[0,30]; aw=[0;1;0];
options=odeset ('AbsTol',1e-7,'RelTol',1e-4);
[t,y]=ode45(@lorenz_rechte_seite,tspan,aw, options);

subplot(2,2,1),plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3)),
subplot(2,2,2),plot(y(:,1),y(:,2)), xlabel('y_1'), ylabel('y_2');
subplot(2,2,3),plot(y(:,1),y(:,3)), xlabel('y_1'), ylabel('y_3');
subplot(2,2,4),plot(y(:,2),y(:,3)), xlabel('y_2'), ylabel('y_3');
```

Die Lorenz-Gleichungen

Numerische Lineare Algebra

- Normen
- Lösen linearer Gleichungssysteme
- Invertiern von Matrizen
- Berechnen von Zerlegungen
- Bestimmung von Eigenwerten

Vektornorm

Die p-Norm eines Vektors $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

kann berechnet werden durch norm(x,p) (Default: $p = 2$)

- Die Norm ist definiert für $p \geq 1$.
- $p = \infty$ entspricht der Maximum-Norm

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots n} |x_i|.$$

Matrixnorm

Seien $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ und $p \geq 1$. Die *Matrixnorm* ist definiert durch

$$\|A\|_p = \sup_{x \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}.$$

- In MATLAB: $\color{red}{\mathrm{norm(A,p)}}$ (Default $p = 2$).
- $p = \infty$ kann charaktersiert werden durch

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \text{Zeilensummennorm.}$$

Kondition

Kondition einer quadratischen Matrix A:

$$cond_p(A) := \|A\|_p \|A^{-1}\|_p.$$

- In MATLAB: cond(A,p) (Default $p = 2$)
- Es gilt $cond_p(A) \geq 1$.
- Die Kondition misst die Empfindlichkeit der Lösung x von $Ax = b$ gegenüber Störungen von A und b.
- Ist $cond_p(A) >> 1$, so ist die Matrix beinahe singulär. Die Matrix ist *schlecht konditioniert*.

Beispiele

- Vektornormen für $x = (1/100)(1, 2, \ldots, 100)$

```
>> x=(1:100)/100; [norm(x,1) norm(x,2) norm(x,inf)]
ans =    50.5000     5.8168     1.0000
```

- Matrixnorm für die Hilbert-Matrix $H = (\frac{1}{i+j-1})_{ij}$

```
>> H=hilb(10); [norm(H,1) norm(H,2) norm(H,inf)]
ans =     2.9290     1.7519     2.9290
```

- Kondition der Hilbert-Matrix

```
>> H=hilb(10); [cond(H,1) cond(H,2) cond(H,inf)]
ans =
   1.0e+13 *
    3.5354     1.6025     3.5354
```

Lineare Gleichungssysteme

Seien $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{C}^n$. Das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

wird in MATLAB gelöst durch x=Ab.

```
>> x=ones(5,1); H=hilb(5); b=H*x; y=\mcode{(H\b)'}
y =
     1.0000     1.0000     1.0000     1.0000     1.0000
```

Warnung: Benutze nie x=inv(A)*b, da das Berechnen von A^{-1} sehr aufwendig sein kann.

LU-Zerlegung

Was bedeutet $A\b$?

MATLAB berechnet die LU-Zerlegung von A (Gaussverfahren), d.h. es sucht eine obere Dreiecksmatrix U und eine untere Dreiecksmatrix L mit Einsen auf der Diagonalen, so dass $PA = LU$ gilt (P Permutationsmatrix). Dann wird das LGS durch Rückwärts- und Vorwärtseinsetzen gelöst.

```
>> [L,U,P]=lu(hilb(5)); norm(P*hilb(5)-L*U)
ans =   2.7756e-17
```

Inverse, Determinante

- Berechnung der Inversen

```
>> A=pascal(3)
A =
        1        1        1
        1        2        3
        1        3        6
```

```
>> X=inv(A)
X =
        3       -3        1
       -3        5       -2
        1       -2        1
```

- Berechnung der Determinante

```
>> det(A)
ans = 1
```

Pseudoinverse

Berechnung der (Moore-Penrose) Pseudoinversen X von A (A singulär), d.h. X genügt

$$AXA = A, XAX = X, (XA)^* = XA, (AX)^* = AX.$$

```
>> pinv(ones(3,3))
ans =
    0.1111    0.1111    0.1111
    0.1111    0.1111    0.1111
    0.1111    0.1111    0.1111
```

Eigenwerte

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. $\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von A, falls ein Vektor $x \in \mathbb{C}^n$ ungleich 0 existiert, so dass $Ax = \lambda x$ gilt. x heisst Eigenvektor.

- x=eig(A) berechnet die Eigenwerte von A und schreibt sie in den Vektor x.
- [V,D]=eig(A). D ist eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen. Die Spalten von V bilden die zugehörigen Eigenvektoren.

Weitere Zerlegungen

- Mittels [Q,R]=qr(A) wird zu einer $m \times n$- Matrix A eine Zerlegung $A = QR$ erzeugt, wobei Q eine unitäre $m \times m$-Matrix ist und R eine obere $m \times n$ Dreiecksmatrix ist.
- Eine Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^*$ wird durch [U,S,V]=svd(A) berechnet. Dabei ist $\Sigma \in \mathbb{C}^{m\times n}$ eine Diagonalmatrix und $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sind unitäre Matrizen.
- Eine Cholesky-Zerlegung $A = R^* R$ zu einer hermitischen, pos. def. Matrix A wird durch R=chol(A) berechnet. R ist eine obere Dreiecksmatrix mit reellen, positiven Diagonalelementen.

Bemerkungen

- LGS können auch mit Hilfe iterativer Verfahren gelöst werden, z.B. gmres, pcg, bicgstab.
- Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $n \neq m$, so ergibt Ab für $n > m$ (der überbestimmte Fall) die Least-Square Lösung, d.h. der Ausdruck norm(A*x−b) wird minimiert. Ist $n < m$ (der unterbestimmte Fall) so wird eine Grundlösung berechnet.