

# Einführung in Matlab - Einheit 3

## Rekursionen, Grafik

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen 

## 1 Rekursionen

## 2 Einführung Grafik

- einfache zweidimensionale Grafiken
- Beschriftungen
- Weitere zweidimensionale Darstellungsmöglichkeiten
- Dreidimensionale Grafiken
- Animation

# Rekursive Funktionen

Rekursive Funktionen sind Funktionen, die sich selbst aufrufen.  
Bei jedem Aufruf wird ein neuer lokaler Workspace erzeugt.

**Beispiel:** Fakultät:  $n! = \text{fak}(n)$

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)! = n \text{ fak}(n-1) \\ &= n(n-1) \text{ fak}(n-2) \\ &= \dots = n(n-1) \dots 1 \end{aligned}$$

```
function res = fak(n)
% fakultaet    berechnet zu einer gegebenen natuerlichen
%              Zahl n
%              die Fakultaet n!:=1*2*...*n (rekursiv)
%
%              INPUT: natuerliche Zahl n
%              OUTPUT: Fakultaet fak
%      Jochen Schulz 3.9.2010
if (n == 1)
    res = 1;
else
    res = n*fak(n-1);
end
```

```
function fak = fak_it(n)
% fakultaet    berechnet zu einer gegebenen natuerlichen
%              Zahl n
%              die Fakultaet  $n! := 1*2*...*n$ 
%
%              INPUT: natuerliche Zahl n
%              OUTPUT: Fakultaet fak
%      Gerd Rapin   10.11.

fak = 1;
for i = 1:n
    fak = fak*i;
end;
```

```
% fak_vergleich.m
% iterativ
tic
for i = 1:100
    fak_it(20);
end
time1 = toc;
fprintf('\nZeitverbrauch direktes Verfahren: %f',time1);
% rekursiv
tic
for i = 1:100
    fak(20);
end
time2 = toc;
fprintf('\nZeitverbrauch rekursives Verfahren: %f\n',
    time2);
```

# rekursive Implementierung GGT

```
function [a,b] = ggt_rekursiv(a,b)
% ggt_rekursiv berechnet den groessten
% gemeinsamen Teiler (ggT)
if a~=b
    if a>b
        a = a-b;
    else
        b = b-a;
    end;
    [a,b] = ggt_rekursiv(a,b);
end;
```

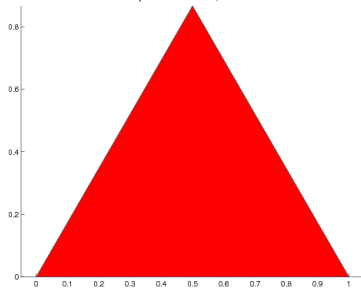
# Sierpinski Dreieck

- Wir beginnen mit einem Dreieck mit Eckpunkten  $P_a$ ,  $P_b$  und  $P_c$ .
- Wir entfernen daraus das Dreieck, das durch die Mittelpunkte der Kanten entsteht.
- Die verbliebenden drei Dreiecke werden der gleichen Prozedur unterzogen.
- Diesen Prozess können wir rekursiv wiederholen.
- Das Ergebnis ist das Sierpinski Dreieck.

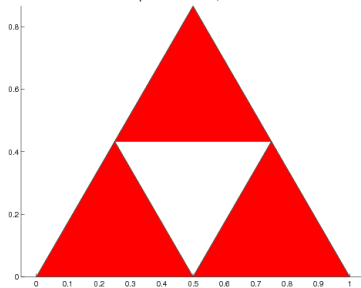


# Sierpinski Dreieck

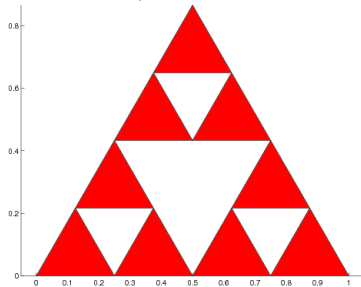
Sierpinski Dreieck, Level =0



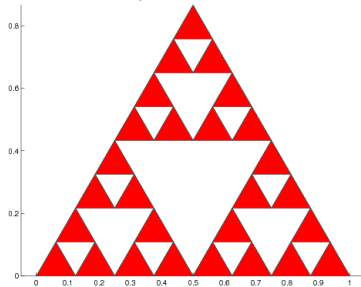
Sierpinski Dreieck, Level =1



Sierpinski Dreieck, Level =2



Sierpinski Dreieck, Level =3



```
% sierpinski_plot.m
level=2;

ecke1=[0;0];
ecke2=[1;0];
ecke3=[0.5; sqrt(3)/2];
figure; axis equal;
hold on;
sierpinski(ecke1,ecke2,ecke3,level);
hold off;
title(['Sierpinski Dreieck, Level =' ...
      num2str(level)], 'FontSize', 16);
```

# Implementierung

```
function sierpinski(ecke1,ecke2,ecke3,level)
% Teilt das Dreieck auf in 3 Dreiecke (level>0)
% Plotten des Dreiecks (level=0)

if level == 0
    fill([ecke1(1),ecke2(1),ecke3(1)],...
        [ecke1(2),ecke2(2),ecke3(2)], 'r');
else
    ecke12 = (ecke1+ecke2)/2;
    ecke13 = (ecke1+ecke3)/2;
    ecke23 = (ecke2+ecke3)/2;
    sierpinski(ecke1,ecke12,ecke13,level-1);
    pause;
    sierpinski(ecke12,ecke2,ecke23,level-1);
    pause;
    sierpinski(ecke13,ecke23,ecke3,level-1);

end;
```

# Zeichnen von Polygonen

Ein Polygon sei durch die Eckpunkte  $(x_i, y_i)_{i=1}^n$  gegeben. Dann kann durch den Befehl

```
fill(x,y,char)
```

dargestellt werden. `char` gibt die Farbe des Polygons an, z.B. rot wäre `'r'`.

## 1 Rekursionen

## 2 Einführung Grafik

- einfache zweidimensionale Grafiken
- Beschriftungen
- Weitere zweidimensionale Darstellungsmöglichkeiten
- Dreidimensionale Grafiken
- Animation

## 1 Rekursionen

## 2 Einführung Grafik

- einfache zweidimensionale Grafiken
- Beschriftungen
- Weitere zweidimensionale Darstellungsmöglichkeiten
- Dreidimensionale Grafiken
- Animation

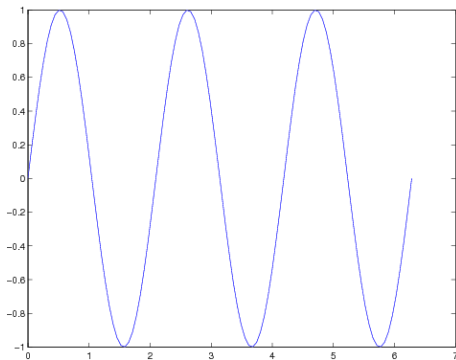
# Standard-Plot

```
plot(<x>,<y>)
```

zeichnet für Vektoren  $x = (x_1, \dots, x_N)$  und  $y = (y_1, \dots, y_N)$  eine Grafik, die die Punkte  $(x_i, y_i)$  und  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  miteinander verbindet.

*Beispiel:*

```
x = linspace(0,2*pi,100);  
y1 = sin(3*x);  
plot(x,y1)
```



# Erweiterungen

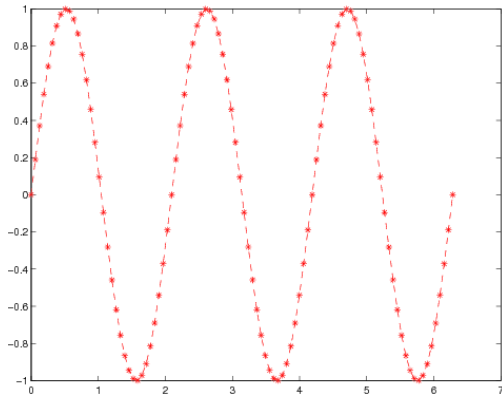
```
plot(<x>,<y>,<string>)
```

**String** besteht aus drei Elementen, die die Farbe, Linienstil und die Markierung der Punkte kontrollieren. Die Reihenfolge der drei Elemente ist beliebig.

*Beispiel:* Durch

```
plot(x,y,'r*--')
```

wird die Linie gestrichelt (- -)  
in rot (r) gezeichnet und die  
Punkte durch \* markiert.





**Farben**     r (rot), g (grün), b (blau), c (hellblau), m (magenta),  
y (gelb), k (schwarz), w (weiß)

**Marker**     o (Kreis), \* (Stern), . (Punkt), + (Plus), x (Kreuz),  
s (Quadrat), d (Raute),...

**Linien-Stil**   - (durchgezogene Linie), -- (gestrichelte Linie), : (ge-  
punktete Linie), -. (Strich-Punkt Linie)

Läßt man den Linien-Stil weg, so werden die Punkte nicht verbunden.

# Optionen II

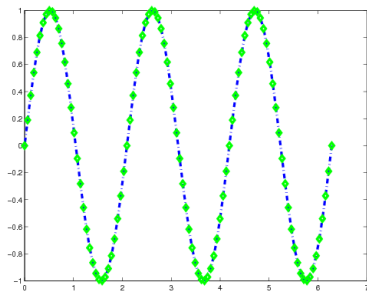
```
plot(<x>,<y>,<string>,<Eigenschaft>,<Spez.>)
```

Eigenschaften:

'MarkerSize' (Default 6), 'LineWidth' (Default 0.5),  
'MarkerEdgeColor', 'MarkerFaceColor'

Beispiel:

```
plot(x,y1,'b-.d','LineWidth',...  
3,'MarkerEdgeColor','g')
```



# Alternativen

- Mehrere Plots in eine Grafik:

```
plot(x1,y1,string1,x2,y2,string2,...)
```

- Logarithmische Skalierung in x- bzw in y-Richtung:

```
semilogx(x1,y1)
```

bzw.

```
semilogy(x1,y1)
```

- Logarithmische Skalierung beider Achsen:

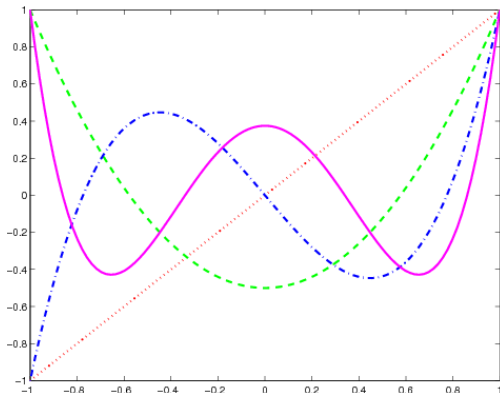
```
loglog(x1,y1)
```

- Ist  $X$  ein Vektor mit komplexen Einträgen, so ergibt `plot(X)`

```
plot(real(X),imag(X))
```

# Beispiel - Legendre Polynome

```
x = linspace(-1,1,100);  
p1 = x;  
p2 = (3/2)*x.^2-1/2;  
p3 = (5/2)*x.^3-(3/2)*x;  
p4 = (35/8)*x.^4 - (15/4)*x.^2+3/8;  
plot(x,p1, 'r:',x,p2, 'g—',x,p3, 'b-.',x,p4, 'm-', 'LineWidth',2)
```



# Achseneinstellungen

<code>axis([x1 x2 y1 y2])</code>	Setzen der $x$ - und $y$ -Achsen Grenzen
<code>axis auto</code>	Rückkehr zu Default Achsen Grenzen
<code>axis equal</code>	Gleiche Dateneinheiten auf allen Achsen
<code>axis off</code>	Entfernen der Achsen
<code>axis square</code>	quadratische Achsen-Box
<code>axis tight</code>	Achsen Grenzen werden passend zu den Daten gewählt.
<code>xlim([x1 x2])</code>	Setzen der $x$ -Achse
<code>ylim([y1 y2])</code>	Setzen der $y$ -Achse
<code>grid on</code>	Gitter aktivieren
<code>box on, box off</code>	Box um die Grafik legen, Box entfernen

## 1 Rekursionen

## 2 Einführung Grafik

- einfache zweidimensionale Grafiken
- **Beschriftungen**
- Weitere zweidimensionale Darstellungsmöglichkeiten
- Dreidimensionale Grafiken
- Animation

# Beschriften der Grafik

- Titel: `title('Titel')`
- Achsenbeschriftung: `xlabel('Text'), ylabel('Text')`
- Legende: `legend('Text1', 'Text2', ..., nr)`  
`nr` gibt die Position der Legendenbox in der Grafik an: -1 (rechts vom Plot), 0 'bester' Ort, 1 oben rechts (default), 2 oben links, 3 unten links, 4 unten rechts.
- zusätzlicher Text: `text(x,y, 'Text')` Plaziert 'Text' an die Position (x,y) bzgl. der Werte auf der x- bzw. y-Achse.

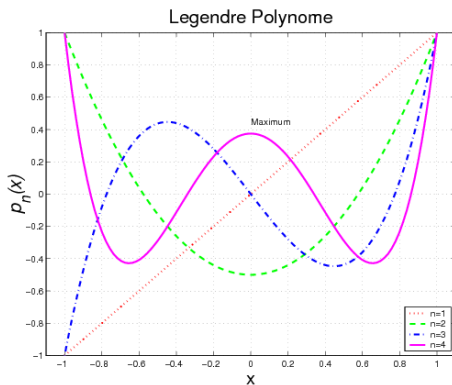
# Bemerkungen zur Beschriftung

- In den strings kann direkt eine abgespeckte  $\text{\LaTeX}$ -Notation verwendet werden. (nahezu vollständige  $\text{\LaTeX}$ -Unterstützung: `latex-interpreter`).  
Beispiele:
  - `\alpha`  $\Rightarrow \alpha$
  - `sin^{3/2}(x)`  $\Rightarrow \sin^{3/2}(x)$  .
  - `title('f(x)= \frac{1}{x^2+a}', 'interpreter', 'latex')`  $\Rightarrow$   
 $f(x) = \frac{1}{x^2+a}$
- Ändern der Schriftgröße, z.B. `title('Titel', 'FontSize', 20)`.
- Auflistung aller modifizierbaren Texteingenschaften: `doc text_props`



# Beispiel - Legendre Polynome II

```
title('Legendre Polynome','FontSize',20)
xlabel('x','FontSize',20); ylabel('p_n(x)','FontSize',20)
text(0,0.45,'Maximum')
legend('n=1','n=2','n=3','n=4',4)
grid on, box on;
xlim([-1.1,1.1])
```



- Öffnen eines (weiteren) Grafikfensters: `figure`. Eine Grafik wird immer im aktuellen Fenster erzeugt. Ist noch kein Fenster geöffnet, so wird ein Fenster erzeugt.
- Durch den Befehl `hold on` werden bestehende Grafiken im aktuellen Fenster erhalten. Neue Grafiken werden den bestehenden hinzugefügt.
- `hold off` (default) überschreibt Grafiken im aktuellen Fenster
- Schliessen: `close`, `close all`

## 1 Rekursionen

## 2 Einführung Grafik

- einfache zweidimensionale Grafiken
- Beschriftungen
- Weitere zweidimensionale Darstellungsmöglichkeiten
- Dreidimensionale Grafiken
- Animation

# Darstellung von Daten

- Balkendiagramm:

```
bar(<Daten>)
```

- Histogramm:

```
hist(<Daten>,<Anzahl Bars>)
```

- einfacher ausgefüllter Plot:

```
area(<x>,[<y1>,<y2>])
```

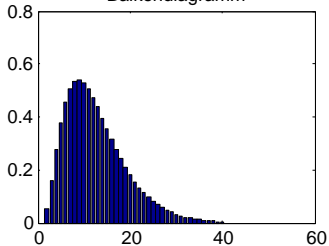
(y1 und y2 werden addiert)

- Tortengrafik:

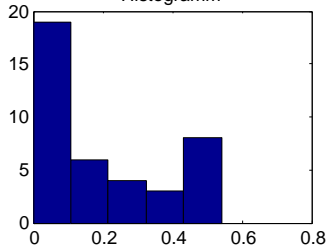
```
pie3([<anteil1> <anteil2> .. <anteilx>])
```

# Darstellung von Daten

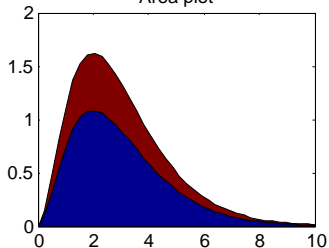
Balkendiagramm



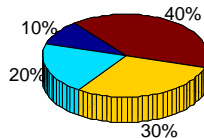
Histogramm



Area plot



Tortengrafik



# Darstellung von Daten

```
n = linspace(0,10,40);  
y = n.^2.*exp(-n);  
  
% Balkendiagramm  
subplot(2,2,1),  
bar(y); title('Balkendiagramm');  
  
% Histogramm  
subplot(2,2,2),  
hist(y,5); title('Histogramm');  
  
% Area plot  
subplot(2,2,3),  
area(n,[y',2*y']); title('Area plot');  
  
% Tortengrafik  
subplot(2,2,4),  
pie3([ 1 2 3 4]); title('Tortengrafik');
```

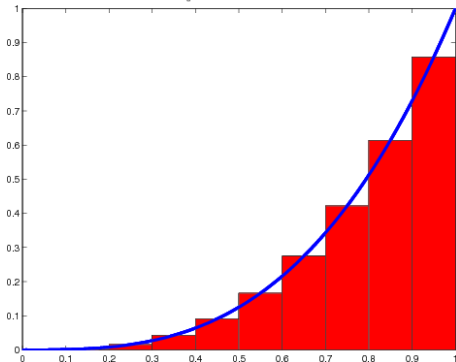
# Approximation von Integralen

Approximiere  $\int_0^1 f(x) dx$  durch (Mittelpunktsregel)

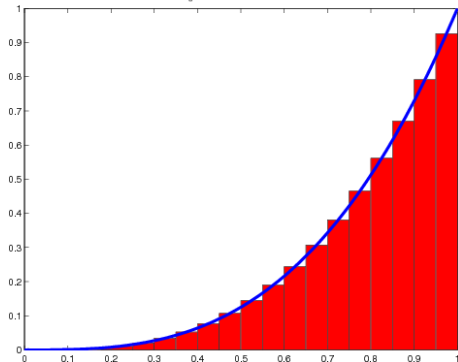
$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} f\left(\frac{i - \frac{1}{2}}{N}\right)$$

für gegebenes  $N \in \mathbb{N}$ . **Beispiel:**  $f(x) = x^3$

$\int_0^1 x^3 = 0.24875$  fuer  $N=10$



$\int_0^1 x^3 = 0.24969$  fuer  $N=20$



# Integral - Implementation

```
% integral.m
% berechnet approximativ ein Integral
% ueber (0,1) durch die Mittelpunkregel
N = 5; % Anzahl Unterteilungen

x = (0+1/(2*N)):(1/N):(1-1/(2*N));
y = x.^3;
% Berechnung des Integrals
result = sum(y)*(1/N);

% Plot
for i = 1:N
    fill([(i-1)/N (i-1)/N i/N i/N],...
         [0 ((i-0.5)/N).^3 ((i-0.5)/N).^3 0], 'r');
    hold on;
end;
plot(0:0.01:1,(0:0.01:1).^3,'LineWidth',3);
title(['\int_0^1 x^3 = ',num2str(result),' fuer N = ',
       num2str(N) ],'FontSize',20);
```



## 1 Rekursionen

## 2 Einführung Grafik

- einfache zweidimensionale Grafiken
- Beschriftungen
- Weitere zweidimensionale Darstellungsmöglichkeiten
- Dreidimensionale Grafiken
- Animation

# Dreidimensionale Grafiken

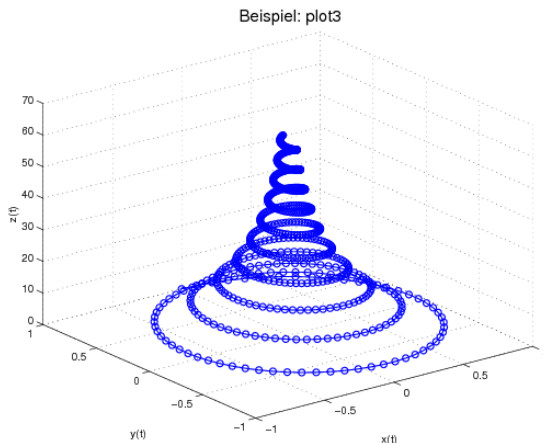
- Dreidimensionale Version von `plot`: `plot3`
- Darstellung von Funktionen  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ :
  - Contourplot (zeichnet die Niveaulinien): `contour`, `contourf`, `contour3`
  - Darstellung des Graphen mit Gitterlinien: `mesh`, `meshc`
  - Flächige Darstellung des Graphen: `surf`, `surfc`
- Darstellung von Funktionen  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ :
  - Streifenansichten `slice`

`mesh(X,Y,Z)` z.B. stellt für Matrizen  $X, Y, Z \in \mathbb{R}^{n \times k}$  die Punkte

$(X(i,j), Y(i,j), Z(i,j))$  dar.

# plot3

Bei gegebenen Vektoren  $x = (x_i)_{i=1}^n$ ,  $y = (y_i)_{i=1}^n$ ,  $z = (z_i)_{i=1}^n$  erzeugt `plot3(x,y,z)` einen Plot der die Punkte  $(x_i, y_i, z_i)$  und  $(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$  miteinander verbindet.

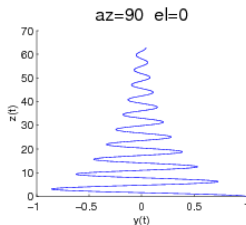
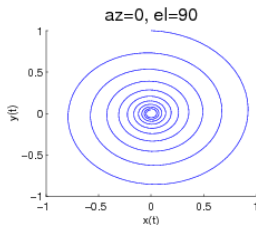
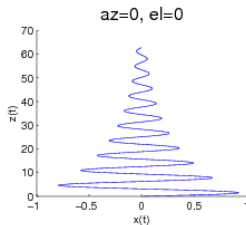
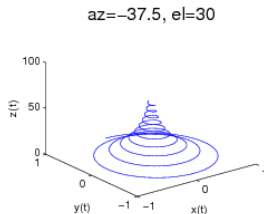


## Beispiel plot3

```
t = 0:0.1:20*pi;  
x = exp(-t/20).*sin(t);  
y = exp(-t/20).*cos(t);  
z = t;  
  
plot3(x,y,z,'b-o','LineWidth',1);  
grid on  
xlabel('x(t)'), ylabel('y(t)');  
    zlabel('z(t)');  
title('Beispiel: plot3','FontSize',15);
```

`view(az,el)`

- `az` ist die horiz. Rotation in Grad (Def. **-37.5**)
- `el` ist die vertikale Rotation in Grad (Def. **30**)



# 3D-Funktionenplots

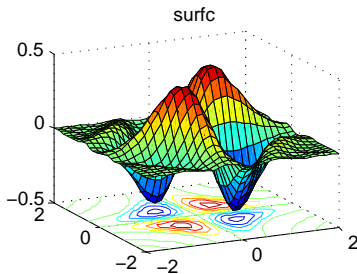
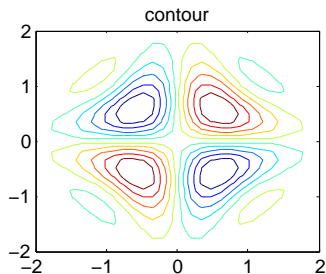
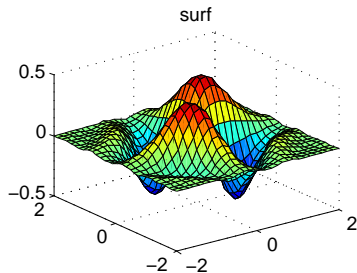
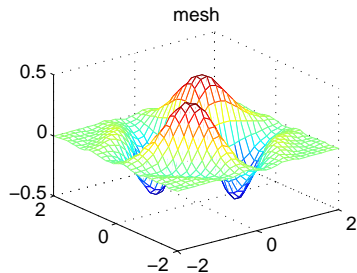
Darstellung von Funktionen

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

**Beispiel:**

$$f(x, y) := \exp(-x^2 - y^2) \sin(\pi xy)$$

# Beispiel: Funktionenplot



# Funktionenplot - Implementation

```
% Erzeugen des Gitters
x = linspace(-2,2,30);
y = linspace(-2,2,30);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
% Funktionswerte
Z = exp(-X.^2-Y.^2).*sin(pi*X.*Y);

% verschiedenen Darstellungen
subplot(2,2,1),
    mesh(X,Y,Z), title('mesh');
subplot(2,2,2),
    surf(X,Y,Z), title('surf');
subplot(2,2,3),
    contour(X,Y,Z,10), title('contour');
subplot(2,2,4),
    surfc(X,Y,Z);
    view(-26,20), title('surfc');
```



```
subplot(<n>,<m>,<k>)
```

zerlegt das Grafikfenster in  $n \times m$  Teilfenster.

Die Zahl  $1 \leq k \leq nm$  gibt an, welches Teilfenster gerade aktiv ist.

Durchnumeriert wird zeilenweise, also  $(1, 1), (1, 2), \dots$

Zu Vektoren  $x = (x_i)_{i=1}^k$ ,  $y = (y_j)_{j=1}^n$  erzeugt

```
[X,Y]=meshgrid(x,y)
```

Matrizen  $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times k}$ , wobei jede Zeile von  $X$  eine Kopie des Vektors  $x$  ist und  $Y$  als Spalten den Vektor  $y$  enthält.

Dann hat  $Z=X.*Y$  die Komponenten

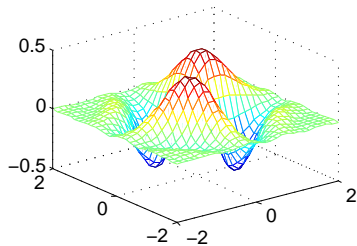
$$Z(i,j) = x(j) * y(i).$$

# Weitere Möglichkeiten

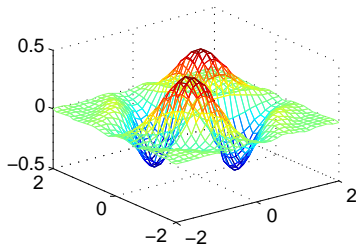
- Darstellung versteckter Linien (bei `mesh`): `hidden off`, Default: `hidden on`
- Verschmieren des Gitters: `shading('interp')`
- Blickwinkel: `view(az,el)`
- ähnlich wie `mesh`; nur mit 'Vorhang': `meshz(X,Y,Z)`

# Beispiel: Funktionenplot

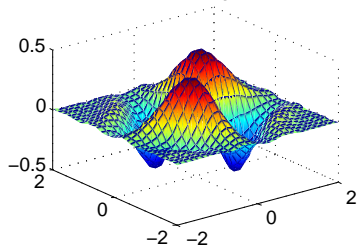
Default



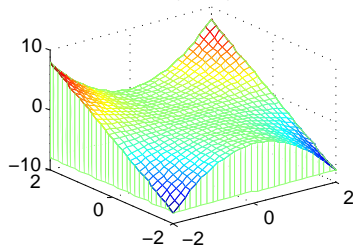
keine versteckten Linien



Shading



$f(x,y)=x^2 y$

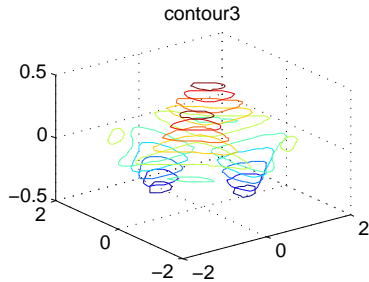
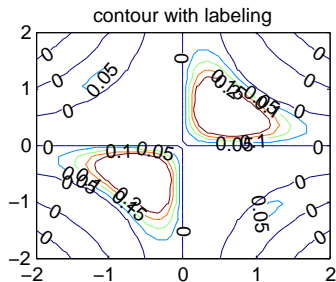
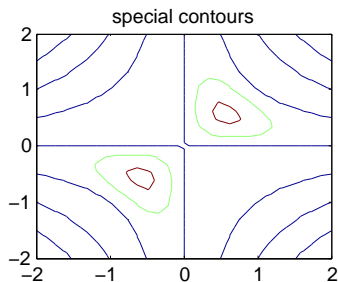
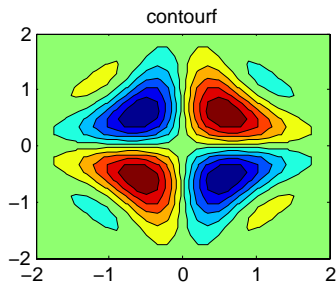


# Funktionenplot - Listing

```
x = linspace(-2,2,30);
y = linspace(-2,2,30);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
% Funktionswerte
Z = exp(-X.^2-Y.^2).*sin(pi*X.*Y);

% verschiedenen Darstellungen
subplot(2,2,1),
    mesh(X,Y,Z), title('Default');
subplot(2,2,2),
    mesh(X,Y,Z), hidden off,
    title('keine versteckten Linien');
subplot(2,2,3), surf(X,Y,Z);
    shading('interp'), title('Shading');
subplot(2,2,4), Z=X.^2.*Y;
    meshz(X,Y,Z), title('f(x,y)=x^2 y');
```

# Contour Plots



# Contour Plots - Listing

```
% Erzeugen des Gitters
x=linspace(-2,2,30);
y=linspace(-2,2,30);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
% Funktionswerte
Z=exp(-X.^2-Y.^2).*sin(pi*X.*Y);

% verschiedene Darstellungen
subplot(2,2,1),
    contourf(X,Y,Z,10), title('contourf')
subplot(2,2,2),
    contour(X,Y,Z,[0 0.2 0.4]), title('special contours');
subplot(2,2,3),
    [C,h]=contour(X,Y,Z,[0 0.05 0.1 0.15 0.2 ]);
    title('contour with labeling');
    clabel(C,h)
subplot(2,2,4),
    contour3(X,Y,Z,10), title('contour3')
```

# Erläuterungen zu Contour-Befehlen

- `contour(X,Y,Z,n)` zeichnet für  $n \in \mathbb{N}$   $n$ -Konturlinien. Ist  $n$  ein Vektor, werden Konturlinien zu den Werten in dem Vektor  $n$  geplottet.
- `contourf` funktioniert wie `contour` nur das die Flächen zwischen den Konturlinien ausgefüllt werden.
- `clabel(C,h)` beschriftet die Konturlinien, deren Werte in  $C$  gespeichert sind und die zum Grafik-Handle  $h$  gehören.
- `contour3` zeichnet jede Konturlinie auf einer anderen Höhe.



```
slice(X,Y,Z,V,sx,sy,sz)
```

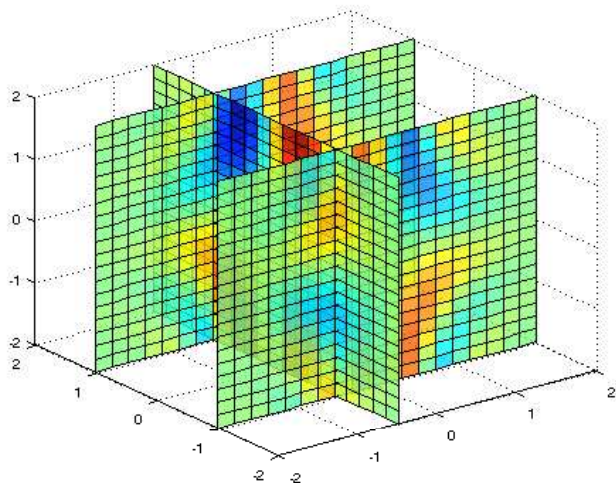
zeichnet Schnitte zu den Funktionswerten  $V(i)$  zu  $(X(i), Y(i), Z(i))$ .  
Schnitte sind durch die Vektoren  $sx$ ,  $sy$  und  $sz$  gegeben.

**Beispiel:**

$$f(x, y, z) := \exp(-x^2 - y^2) \sin(\pi xyz)$$

```
x = linspace(-2 ,2 ,20);  
[X,Y,Z] = meshgrid (x, x, x) ;  
V = exp(-X.^2-Y.^2) .* sin(pi*X.*Y.*Z);  
sx = [-0.5  ] ; sy = [ -1, 1 ] ;  
sz = [ ] ;  
slice (X,Y, Z,V ,sx ,sy ,sz );  
alpha (0.8 ) % Transparency
```

# Beispiel: slice



## 1 Rekursionen

## 2 Einführung Grafik

- einfache zweidimensionale Grafiken
- Beschriftungen
- Weitere zweidimensionale Darstellungsmöglichkeiten
- Dreidimensionale Grafiken
- Animation

# Animation-Beispiel

```
% animation.m

clear all;
[X,Y] = meshgrid(-1:0.01:1,-1:0.01:1);

for j = 1:60
    Z = cos(j^0.5*pi*exp(-X.^2-Y.^2));
    %mesh(X,Y,Z);
    surf(X,Y,Z);
    shading interp
    F(j) = getframe;
end
% Abspielen des Movies
movie(F,1);
```

# Erstellen einer Animation

- Mit `F(j)=getframe` wird die aktuelle Grafik in das Array `F` gespeichert.
- Sequenz der Bilder `F` darstellen: `movie(F,n,fps)`, wobei `n` die Anzahl der Wiederholungen angibt und `fps` der gezeigten Frames pro Sekunde entspricht (Default: `n = 1`, `fps = 12`).
- Speichern des Movies in AVI Format: `movie2avi(F,Dateiname)`