Einführung in Matlab - Einheit 1

Streifzug durch Matlab, Vektoren und Matrizen

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen

Aufbau

Aufbau

MATLAB

- MATLAB steht für Matrix laboratory; ursprünglich speziell Matrizenrechnung.
- Entwickelt von Cleve Moler Ende der 70'er in FORTRAN.
- Heutige Version ist in C/C++ programmiert.
- Interaktives System für numerische Berechnungen und Visualisierungen.
- Kein Computer-Algebra-System (Aber erweiterbar durch `symbolic math toolbox`)

Vorteile von MATLAB

- *High-Level* Sprache:
  - Programmieren ist leicht (aber auch beschränkter)
  - Schnelle Erfolge
  - Sehr geeignet für Prototyping und Debugging
- Vielfältige Visualisierungsmöglichkeiten.
- MATLAB-Programme sind vollständig portierbar zwischen Architekturen (cross-plattform).
- Integration zusätzlicher Toolboxes (Symb. Math T., PDE T., Wavelet T.)
- Ausgereifte Oberfläche.

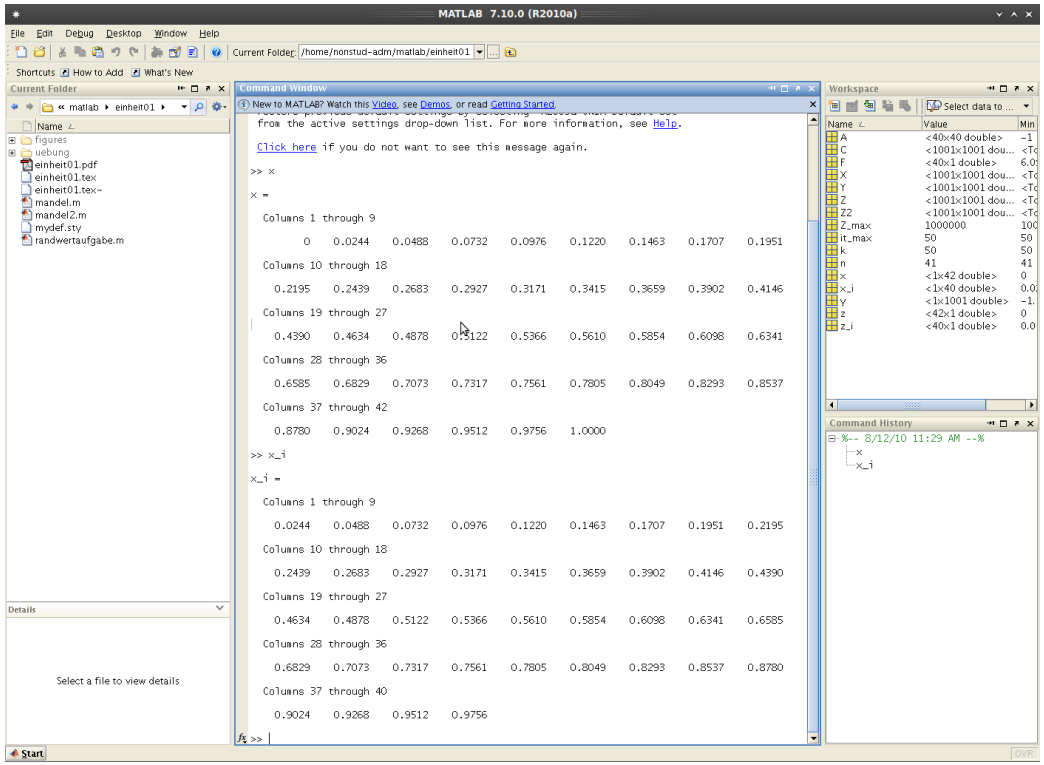
Literatur

- Matlab online-help :-).
- Matlab Guide, D.J. Higham, N.J. Higham, SIAM, 2000,
- Introduction to Scientific Computing, C.F. van Loan, Prentice Hall, New Jersey, 1997,
- Scientific Computing with MATLAB, A. Quarteroni, F. Saleri, Springer, 2003,
- Graphics and GUIs with MATLAB, P. Marchand, O.Th. Holland, Chapman & Hall, 2003, 3. Aufl.
- MATLAB 7, C. Überhuber, St. Katzenbeisser, D. Praetorius, Springer 2005.
- Using MATLAB, offizielle Handbücher.

Aufbau

MATLAB Fenster-Aufbau

Starten von MATLAB: Eingabe von `matlab &` (in einem Terminal).



- Launch Pad: Startmenü.
- Command Window: Befehlseingabe und Standardausgabe.
- Workspace: Ansicht von Variablen und deren Art und Grösse; Ändern der Einträge
- Grafik: normalerweise in seperaten Fenstern.

Command Window - Befehle

- Erster Befehl

```
>> 2+2
ans = 4
```

- Editieren alter Eingaben: ↑, ↓ (wie in Unix)
- Mit ; am Ende jeder Befehlszeile wird Standardausgabe unterdrückt.

```
>> 2+2;
```

- Hilfe zu Befehlen: `help <command>` oder `doc <command>`
- Zuweisung

```
>> a = 2+2;
```

- Funktionsaufruf

```
>> sin(2)
ans = 0.9093
```

- Verlassen von MATLAB: `quit` oder `exit`

Workspace - globale Variablen

- Alle definierten (globalen) Variablen werden im Workspace gespeichert.
- Zugriff während einer MATLAB-Sitzung.
- Inhalt des Arbeitsspeichers: `whos` oder `who`

```
>> whos
  Name        Size                    Bytes  Class

  ans         1x1                         8  double
```

- Löschen von Variablen : `clear <var>;`
  `clear` löscht den gesamten Arbeitsspeicher (Workspace).

Aufbau

Erste Schritte

- MATLAB als Taschenrechner
  (Ergebnis wird in `ans` gespeichert.)

```
>> 1+(sin(pi/2)+ exp(2))*0.5
ans = 5.1945
```

- Eingabe von (Zeilen-)Vektoren

```
>> x = [1 2 3]
```

- Transponieren und speichern in Variable `b`

```
>> b = transpose(x)
```

Erste Schritte II

- Erzeugen einer Matrix

```
A = [0 2 3 ; 4 5 6; 7 8 9];
```

- Lösen des Gleichungssystems $A \cdot z = b$

```
>> z = A \ b
```

- Probe

```
>> A*z
```

Erste Schritte III

- Berechnen der Determinante von A

```
>> det(A)
```

- Hilfe zu det

```
>> help det
 DET    Determinant.
    DET(X) is the determinant of the square matrix X.
    Use COND instead of DET to test for matrix
        singularity.
```

- Erzeugen einer Einheitsmatrix

```
>> B = eye(3,3)
```

Erste Schritte IV

- Matrizenoperationen

```
>> A+B, A-B, A*B, inv(A)
```

- Anwendung von Vektoren

```
>> y = sqrt(x)
y =
    1.0000    1.4142    1.7321
```

Erste Schritte V

- Komponentenweise Multiplikation

```
>> y = x.*x
 y =
      1      4      9
```

- Zeilenvektor mit Werten von 1 bis 100

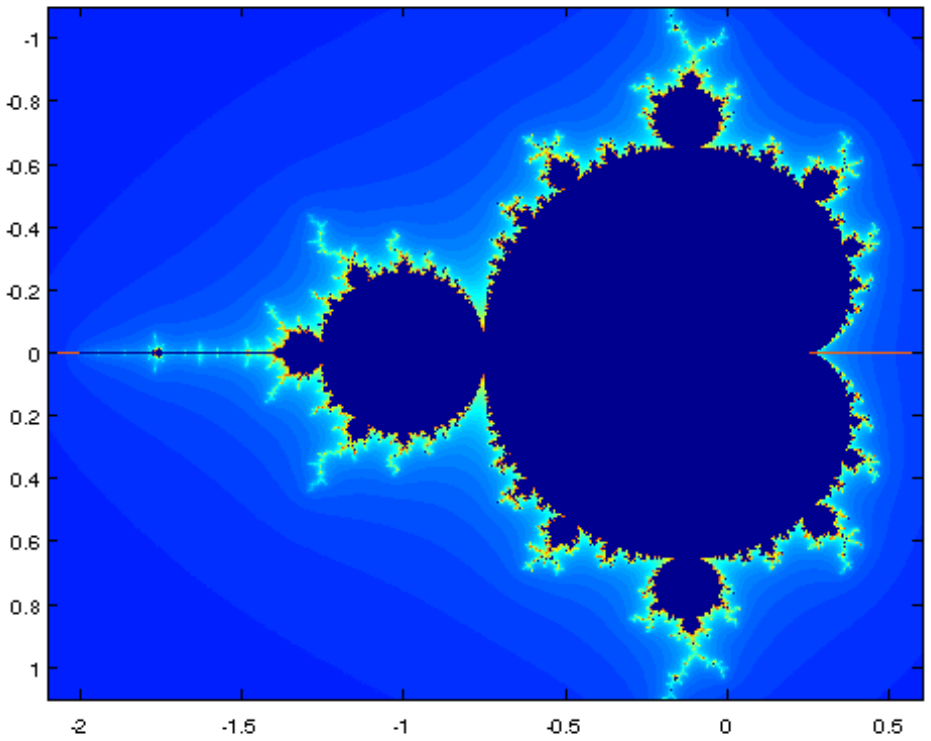
```
>> a = [1:100];
```

- Berechne $\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j^2}$

```
>> (1./a)*transpose(1./a)
ans = 1.6350
```

Aufbau

Die Mandelbrot-Menge



Die Mandelbrot-Menge ist die Menge von Punkten $c \in \mathbb{C}$ bei denen die Folge $(z_n)_n$, die durch

$$z_0 := c$$
$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad n \in \mathbb{N}$$

definiert ist, beschränkt ist.

Die Mandelbrot-Menge

```
x = linspace(-2.1,0.6,601);
y = linspace(-1.1,1.1,401);

[X,Y] = meshgrid(x,y);
C = complex(X,Y);

it_max = 50;

Z = C; Anz = zeros(size(Z));

for k = 1:it_max
    Z = Z.^2+C;
    Anz = Anz + isfinite(Z);
    waitbar(k/it_max);
end
image(x,y,Anz);
title('Mandelbrot Set', 'FontSize',16);
```

Verwendete Befehle

- `linspace(a,b,n)`
  ist ein Vektor mit n Einträgen der Form $a, a+(b-a)/(n-1), \ldots, b$
- `[X,Y] = meshgrid(x,y)`
  erzeugt Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ & \vdots & \\ x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_1 \\ & \vdots & \\ y_n & \ldots & y_n \end{pmatrix}$$

- `C = complex(X,Y)`
  erzeugt $C = (C(j,k))_{jk}$ mit $C(j,k) = X(j,k) + i\ Y(j,k)$

Verwendete Befehle

- `B = isfinite(A)`
  Matrix B hat gleiche Größe wie A. Die Einträge sind 1, wenn der entsprechende Eintrag von B finit ist und 0 sonst.
- `image(x,y,A)`
  erzeugt eine Grafik auf der Basis des Gitters (x, y) mit Werten A. Durch den entsprechenden Eintrag von A wird die Farbe bestimmt.
- `title`
  Überschrift der Grafik.
- `for`, `end`
  Schleife (Details später).

Aufbau

Motivation Skript-File

Probleme beim Mandelbrot:

- Bei jeder Änderung von z.B. `it_max` muss alles erneut im interaktiven Modus eingegeben werden.
- Abrufen der Befehle bei späteren Sitzungen ist kaum möglich.
- Bei komplexen Algorithmen wird es unübersichtlich.

Ausweg: Die Befehlsfolge wird in einer Datei abgelegt. MATLAB arbeitet dann sukzessive die einzelnen Kommandos ab.

Erzeugen eines Programms

- Starten des Editors:

```
>> edit datei_name
```

  öffnet die Datei `datei_name`.
- Speichern der Datei mit Hilfe des Menüs: `File->Save` bzw. `File->Save As` oder per Shortcut.
- Kommentarzeilen beginnen mit %.

Achtung: Alle MATLAB-Dateien haben die Endung '.m'. Man spricht deswegen auch von *m*-Files.

Struktur von Skript-Files

- Skript-Files bestehen aus einer Sequenz von Befehlen, die nacheinander abgearbeitet werden.
- Am Anfang des Files als Kommentar:
  - Name des Programms
  - (kurze) Beschreibung
  - Autor-Informationen und Datum
- operiert auf Daten im *Workspace*.
- Gestartet wird das Programm `name.m` durch Eingabe von `name`.
- Beschreibung des Skript-Files:

```
>> help plot_poly
 ------------------------------------
     plot_poly.m
   zeichnet den Graphen eines Polynoms
   Gerd Rapin              1.11.2003
 ------------------------------------------
```

Aufbau

Functions - Graph eines Polynoms

Aufgabe:

Zeichnen Sie den Graphen eines Polynoms

$$p(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

Problem:

Zu Werten $(x_i)_{i=1}^n$ muß man $(p(x_i))_{i=1}^n$ berechnen, d.h. Funktionswerte müssen sehr oft berechnet werden.

Lösung:

Es gibt Funktionen in MATLAB.

Skalare Version

```
function y=ausw_poly1(a,x)
%-------------------------------------------------
% ausw_poly berechnet den Funktionswert von
%           p(x)=a_1 +a_2 x + a_3 x^2+ ... +a^n x^(n-1)
%           INPUT:  a Vektor der Koeffizienten
%                   x  auszuwertender Punkt
%           OUTPUT: y  Funktionswert (y=p(x))
%  Gerd Rapin              1.11.2003
%-------------------------------------------------

n = length(a);
aux_vector = x.^(0:n-1);
y = aux_vector*transpose(a);
```

Vektorielle Version

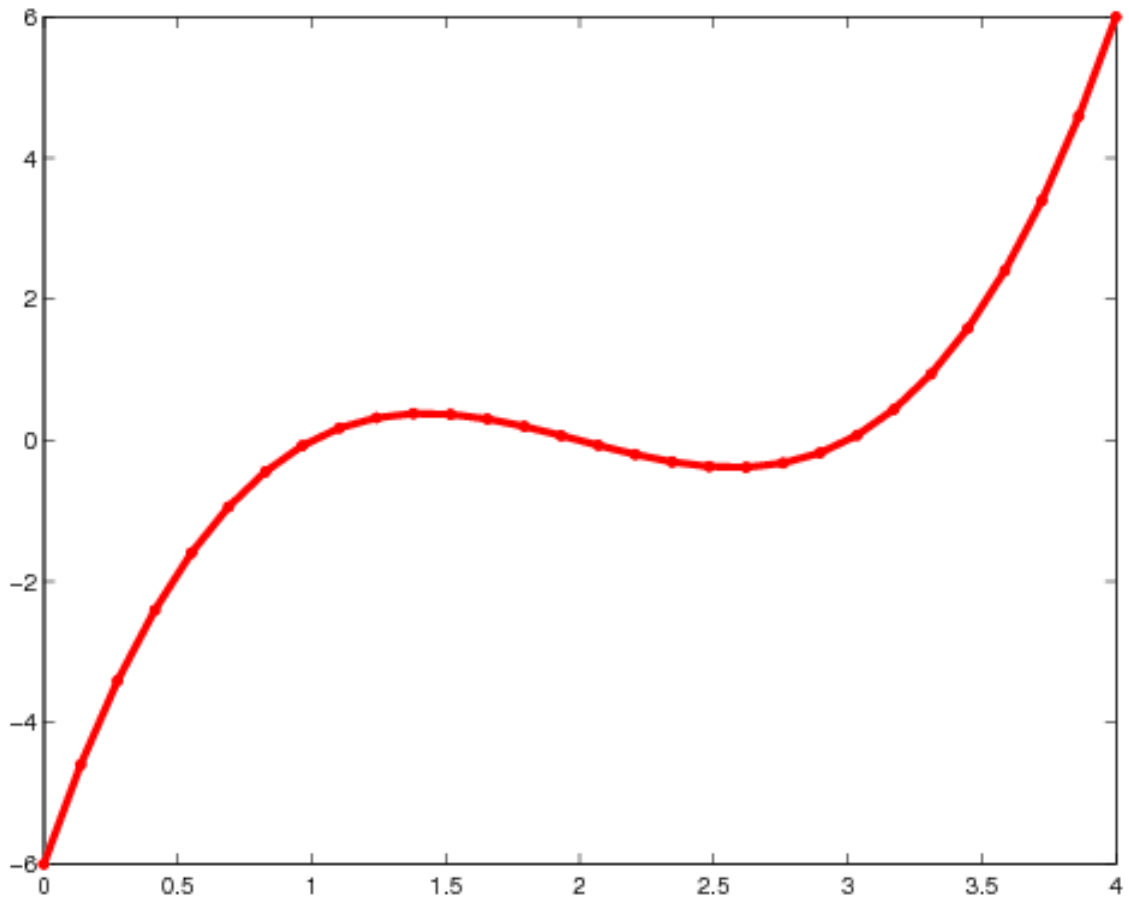
```
function y = ausw_poly2(a,x)
%-------------------------------------------------
% ausw_poly berechnet den Funktionswert von
%           p(x)=a_1 +a_2 x + a_3 x^2+ ... +a_n x^(n-1)
%           INPUT:  a Vektor der Koeffizienten
%                   x Vektor der auszuwertenden Punkte
%           OUTPUT: y Vektor der Funktionswerte
%  Gerd Rapin      1.11.2003
%-------------------------------------------------

n = length(a);
k = length(x);
A = repmat(transpose(x),1,n);
B = repmat(0:(n-1),k,1);

y = (A.^B)*transpose(a);
```

Plotten des Polynoms

```
%-------------------------------------
%     plot_poly.m
%
%  zeichnet den Graphen eines Polynoms
%
%
%  Gerd Rapin              1.11.2003
%-------------------------------------------

% Koeffizienten
a = [9 0 -10 0 1];

x = linspace(0,4,30); % Betrachte [0,4]
y = ausw_poly2(a,x);

% Plotten
plot(x,y,'r*-','LineWidth',3,'MarkerSize',4)
```

Plotten des Polynoms

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$



Struktur von Function-Files

Beispiel: 'myfunction.m'

```
function [Out_1,..,Out_k] = myfunction(In_1,..,In_l)
% Beschreibung der Funktion
  ..
Out_1=..
  ..
Out_k=..
```

Soll keine Variable zurückgegeben werden, so besteht die erste Zeile aus

```
function myfunction(In_1,..,In_k)
```

Wichtig: Funktionsname muss identisch sein mit dem Dateinamen.

Function-Files

- Funktionen sind mit Kommentaren zu versehen:
  - (kurze) Beschreibung
  - Input-Argumente
  - Output-Argumente
  - Autor-Informationen und Datum
- Variablen lokal, d.h.
  - Variablen des Workspace sind innerhalb nicht verfügbar
  - im Programm definierte Variablen werden nicht im Workspace gespeichert.

Aufbau

Starten von Programmen

- Befindet man sich im selben Verzeichnis wie das Programm `name.m`, so kann man das Programm starten durch Eingabe von `name`.
- Danach durchsucht MATLAB die in `path` angegebenen Verzeichnisse nach dem Programm.
- Suchpfade hinzufügen:

```
addpath <pfadname>
```

- Suchpfade entfernen:

```
rmpath <pfadname>
```

Verwalten von m-Files

- `doc <name>` startet das grafische Hilfefenster mit einem ausführlichen Hilfetext zu dem jeweiligen Programm.
- `lookfor <name>` sucht nach dem Stichwort `name` in den Kommentaren zu den Funktionen. Ansonsten kann auch das grafische Hilfefenster zur Rate gezogen werden.
- `what` zeigt die m-Files im aktuellen Verzeichnis an.
- `type <name>` zeigt den Inhalt von `name.m` im 'Command Window' an.
- `which <name>` gibt den genauen Pfad an, in dem die Funktion `name.m` gespeichert ist.
- `edit <name>` Ruft den Editor mit `name.m` auf.

Priorität beim Programmaufruf

1. Testet, ob der Name eine Variable ist.
2. Testet, ob der Name eine Unterfunktion ist. Eine Unterfunktion ist ein Programm, das in derselben Datei wie der Aufruf steht.
3. Testet, ob das Programm im aktuellen Verzeichnis steht.
4. Testet, ob der Name eine *private function* ist.
5. Testet, ob das Programm im Suchpfad enthalten ist.

Aufbau

Aufbau

Vektoren I

- Erzeugen 'per Hand'

```
> b = [1 2 4]
b =
     1     2     4
```

- Abfragen der Einträge von b

```
>> b(2)
ans =     2
```

Index $\equiv$ Position im Vektor

Achtung: Indizes beginnen immer mit 1!

Doppelpunkt - Notation

$x : s : z$ erzeugt einen Vektor der Form

$$(x, x+s, x+2s, x+3s, \ldots, z).$$

```
>> a = 2:11
a =
 2   3   4   5   6   7   8   9   10   11

>> c = -2:0.75:1
c =
 -2.0000 -1.2500 -0.5000 0.2500 1.0000
```

Vektoren II

- `length(a)` gibt die Länge des Vektors *a* an.
- `linspace(x1,x2,N)` erzeugt den Vektor

$$x1, x1 + \frac{x2 - x1}{N - 1}, x1 + 2\frac{x2 - x1}{N - 1}, \ldots, x2$$

der Länge *N*.

```
>> linspace(1,2,4)
ans =
    1.0000    1.3333    1.6667    2.0000
```

- `logspace(x1,x2,N)` wie `linspace`, nur logarith. Skalierung

Aufbau

Erzeugen von Matrizen

- Erzeugen 'per Hand'

```
>> B = [1 3 4; 5 6 7]
B =
     1     3     4
     5     6     7
```

- Erzeugen von 'Einheitsmatrizen'

```
>> eye(2,3)
ans =
     1     0     0
     0     1     0
```

`eye(n,m)` erzeugt eine $(n \times m)$- Matrix mit 1 auf der Hauptdiagonalen und 0 sonst.

Erzeugen von Matrizen II

- `zeros(n,m)`: $(n \times m)$- Matrix mit 0 als Einträge.
- `ones(n,m)`: $(n \times m)$- Matrix mit 1 als Einträge.
- Blockmatrizen

```
>> C = [B zeros(2,2); eye(2,3) eye(2,2)]
C =
     1     3     4     0     0
     5     6     7     0     0
     1     0     0     1     0
     0     1     0     0     1
```

Achtung: Matrizen in einer Zeile müssen dieselbe Zeilenanzahl haben und Matrizen in einer Spalte dieselbe Spaltenanzahl.

Erzeugen von Matrizen III

- `repmat(A,n,m)`: Blockmatrix mit $(n \times m)$ aus A bestehenden Blöcken

```
>> D = repmat(B,1,2)
D =
     1     3     4     1     3     4
     5     6     7     5     6     7
```

- `blkdiag(A,B)`: Blockdiagonalmatrix.
- `diag(v,k)`: Matrix der Größe $(n + |k|) \times (n + |k|)$ mit den Einträgen des Vektors v auf der k-ten Nebendiagonalen.

Aufbau

Beispiel-Matrizen

- Einen Überblick erhält man durch `help gallery`
- Ein Beispiel

```
>> E = gallery('moler',4)
E =
     1    -1    -1    -1
    -1     2     0     0
    -1     0     3     1
    -1     0     1     4
```

- Hilfe zur Matrix 'moler' erhält man durch `help private/moler`
- weitere Matrizen: `magic, hilb, vander`

Zugriff auf Matrizen

```
>>    A = [1  2  3;  4  5  6;  7  8  9]
A =
      1      2      3
      4      5      6
      7      8      9
```

Abfragen eines Eintrags

```
>> A(2,1)
ans =
      4
```

Abfrage von Blöcken

```
>> A(2:3,1:2)
ans =
      4      5
      7      8
```

Abfrage einer Zeile

```
>> A(2,:)
ans =
      4      5      6
```

Abfrage mehrerer Zeilen

```
>> A([1 3],:)
ans =
      1      2      3
      7      8      9
```

Löschen

```
>>   A = [ 1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
```

Löschen einer Zeile

```
>> A(2,:) = []
A =
     1     2     3
     7     8     9
```

Löschen von Spalten

```
> A(:,[1 3]) = []
A =
     2
     5
     8
```

Aufbau

Matrizenoperationen

Standard-Matrix Operationen +,-,*

```
>> A = [1 2; 3 4]; B = 2*ones(2,2);
```

Multiplikation

```
>>  A*B

ans =

     6     6
    14    14
```

Addition

```
>> A+B

ans =

     3     4
     5     6
```

Subtraktion

```
>> A-B

ans =

    -1     0
     1     2
```

Andere Operatoren

- `A\B`: Lösung X von `A*X=B`.
- `A/B`: Lösung X von `X*A=B`.
- `inv(A)`: Inverse von A.
- `A'` oder `ctranspose(A)`: komplex Transponierte von A.
- `A.'` oder `transpose(A)`: Transponierte von A.
- `A^z`: (quadratische Matrizen) $\underbrace{A * A * \cdots * A}_{z-mal}$
- `size(A)`: Größe einer Matrix A .

Punktnotation

```
>> A = [1 2; 3 4]; B = 2*ones(2,2);
```

- `C = A.*B` ergibt C mit $C(i,j) = A(i,j) * B(i,j)$.

```
C =
     2     4
     6     8
```

- `C = A./B` ergibt C mit $C(i,j) = A(i,j)/B(i,j)$.

```
C =
    0.5000    1.0000
    1.5000    2.0000
```

Punktnotation

- `C = A.B` ergibt C mit $C(i,j) = B(i,j)/A(i,j)$.

```
C =
    2.0000    1.0000
    0.6667    0.5000
```

- `C = A.^B` ergibt C mit $C(i,j) = A(i,j)^{B(i,j)}$

```
C =
     1     4
     9    16
```

Achtung: Dimension von A und B gleich.
Matrizen können durch Skalare ersetzt werden, z.B. `A.^2`.

Skalarprodukt

- Vektoren $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots b_n)$
- Skalarprodukt: ab^t
- Summe der Einträge von a: $(1, \ldots, 1)a^t$

Beispiel:

```
>> a=1:100; b=linspace(0,1,100);
>> a*transpose(b)
ans =
   3.3667e+03
>> ones(1,100)*transpose(a)
ans =
        5050
```