

Einführung in Matlab

Einheit 5

Mehrdimensionale Arrays

Umgang mit Funktionen

Dünnbesetzte Matrizen

Numerische Mathematik

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen 

25. August 2009

1 Mehrdimensionale Arrays

2 Funktionen

- Function-Handles
- Funktionen-Typen
- Umgang und Beispiele

3 Dünnbesetzte Matrizen

4 Numerische Mathematik

- Norm und Kondition
- Lösen linearer Gleichungssysteme
- Bestimmung von Eigenwerten

Mehrdimensionale Arrays

- In MATLAB existieren auch mehrdimensionale Arrays.

```
>> A(:,:,1) = ones(3);  
>> A(:,:,2) = 2*ones(3);  
>> whos
```

Name	Size	Bytes	Class
A	3x3x2	144	double

- `cat(dim,A1,A2,..)` fügt die Arrays A1, A2,.. entlang der Dimension dim zusammen. (`A = cat(3,ones(3), 2*ones(3))`)
- Befehle wie `zeros`, `ones` oder `repmat` funktionieren auch im multidimensionalen Kontext.

Umsortieren von Arrays

Durch den Befehl `reshape(X,n1,..,ns)` wird X spaltenweise ausgelesen, und die Elemente werden spaltenweise in ein (n_1, \dots, n_s) -Array geschrieben.

```
>> B = reshape(hilb(4), 8,2)
```

- X muss $n_1 \cdots n_s$ Elemente enthalten.
- Der Befehl ist sehr nützlich.

```
>> reshape(hilb(4), 4,2,2)
```

Zugriff auf mehrdim. Arrays

Intern werden Arrays als Spalten abgespeichert. Zugriff durch linearen Index möglich.

```
>> B = reshape(1:12,2,3,2)
```

```
B(:, :, 1) =
```

1	3	5
2	4	6

```
B(:, :, 2) =
```

7	9	11
8	10	12

```
>> B(7:9)
```

```
ans =
```

7	8	9
---	---	---

Nützliche Befehle

- Anzahl der Dimensionen von X : `ndims(X)`
- Größe von X : `size(X)`
- Umwandlung von linearer Indizierung in Array-Indizierung: `ind2sub`
- Umwandlung von Array-Indizierung in lineare Indizierung: `sub2ind`

```
>> A = reshape(1:12,2,3,2);  
>> A(ind2sub(size(A),5))  
ans =  
     5
```

- Man kann auch mit mehrdimensionalen Arrays rechnen.

1 Mehrdimensionale Arrays

2 Funktionen

- Function-Handles
- Funktionen-Typen
- Umgang und Beispiele

3 Dünnbesetzte Matrizen

4 Numerische Mathematik

- Norm und Kondition
- Lösen linearer Gleichungssysteme
- Bestimmung von Eigenwerten

- Eine Funktion kann ein m.-File, eine Inline-Funktion, eine anonyme Funktion oder auch ein String sein.
- Funktionen werden in einem eigenen *Workspace* verwaltet.
- Beim ersten Aufruf speichert MATLAB die Funktion im Workspace bis MATLAB verlassen wird oder die Funktion `fun` mit `clear fun` gelöscht wird.
- MATLAB nutzt zur Unterscheidung der Funktionen die ersten 63 Zeichen des Namens. Funktionen (und Variablen) müssen mit einem Buchstaben beginnen.

1 Mehrdimensionale Arrays

2 Funktionen

- Function-Handles
- Funktionen-Typen
- Umgang und Beispiele

3 Dünnbesetzte Matrizen

4 Numerische Mathematik

- Norm und Kondition
- Lösen linearer Gleichungssysteme
- Bestimmung von Eigenwerten

Ein *Function Handle* ist ein MATLAB Datentyp, das alle Informationen enthält, die zur Auswertung einer Funktion nötig sind.

- Definition, z.B. `Sinus = @sin`.
- Anwendung bei der Übergabe von Funktionen: `quad(Sinus,0,1)`
- Anonyme Funktion: `f = @(x) sin(x)*cos(x)`

Beispiel: Anonyme Funktion

- Funktion mit Parameter

```
>> y = 1; l = @(x) sin(x)./(x+y) ;  
>> l(2)  
ans =  
    0.3031
```

- Gamma-Funktion $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$.

```
>> k = @(s) quad( @(x) x.^(s-1).*exp(-x),0.1,500) ;  
>> k(4),k(5)  
ans =  
    6.0000  
ans =  
   24.0000
```

1 Mehrdimensionale Arrays

2 Funktionen

- Function-Handles
- Funktionen-Typen
- Umgang und Beispiele

3 Dünnbesetzte Matrizen

4 Numerische Mathematik

- Norm und Kondition
- Lösen linearer Gleichungssysteme
- Bestimmung von Eigenwerten

- Eingabe als String: `a = 'exp(z)-1+z'`
- Plotten der zugehörigen Funktion `ezplot(a,[-1 1])`

Bemerkung:

Funktionen gegeben als Strings sind im allgemeinen zu vermeiden! Besser andere Konstrukte (wie Inline-Funktionen) benutzen!

- *Function-Files* sind m-Files, die mit dem Stichwort `function` beginnen.
- Steuerung der Ein- und Ausgabeparameter:
 - Innerhalb einer Funktion gibt der Befehl `varargin` die Eingabeparameter als Cell-Array zurück. Die Anzahl der Inputvariablen erhält man durch `nargin`.
 - `varargout` ist ein Cell-Array, in die die Ausgabewerte geschrieben werden. Die Anzahl der Ausgabevariablen erhält man durch `nargout`.
- Ist `func_name.m` ein Function-File, so ist der entsprechende Function-Handle `@func_name`.

Beispiel: varargin

```
function result = integral(varargin)
%   integral.m
% berechnet approximativ ein Integral ueber (a,b)
% durch die Mittelpunkregel mit Hilfe von N Punkten
% Eingabe: 0 Parameter:      (N=20, a=0, b=1)
%           1 Parameter: N   (a=0,b=1)
%           3 Parameter: N,a,b
% Jochen Schulz 16.08.2009
N = 20; a = 0; b = 1; % Default-Einstellung
anzahl_parameter = nargin; % Anz. Input-argumente
if anzahl_parameter == 1
    N = varargin{1};
end;
if anzahl_parameter == 3
    N = varargin{1}; a = varargin{2};
    b = varargin{3};
end;
if anzahl_parameter ~= [0 1 3]
    error('Falsche Anzahl an Input-Argumenten');
end;
```

Beispiel: varargin

```
x = (a+(b-a)/(2*N)):(b-a)/N:(b-(b-a)/(2*N));
y = x.^3;
% Berechnung des Integrals
result = (b-a)*sum(y)*(1/N);

close all; % Plot
x1 = linspace(a,b,N+1);
for i = 1:N
    fill([x1(i) x1(i) x1(i+1) x1(i+1)], [0 y(i) y(i) 0], 'r');
    hold on;
end;
plot(a:(b-a)/100:b,(a:(b-a)/100:b).^3,'LineWidth',3);
title(strcat('\int x^3 = ',num2str(result),...
' fuer N =', num2str(N)));
```


Inline-Funktionen

Eine *Inline Funktion* ist im Wesentlichen eine einzeilige Funktion. Sie wird definiert durch einen String.

Beispiele:

```
>>> a = 'exp( z)- 1+ z';  
>>> f = inline(a)  
f =  
    Inline function:  
    f(z) = exp(z)-1+z  
>>> g = inline('x+y^2','x','y')  
g =  
    Inline function:  
    g(x,y) = x+y^2
```

```
>>> f(1),g(1,2),a(2)  
ans =  
    2.7183  
ans =  
    5  
ans =  
    x
```

1 Mehrdimensionale Arrays

2 Funktionen

- Function-Handles
- Funktionen-Typen
- Umgang und Beispiele

3 Dünnbesetzte Matrizen

4 Numerische Mathematik

- Norm und Kondition
- Lösen linearer Gleichungssysteme
- Bestimmung von Eigenwerten

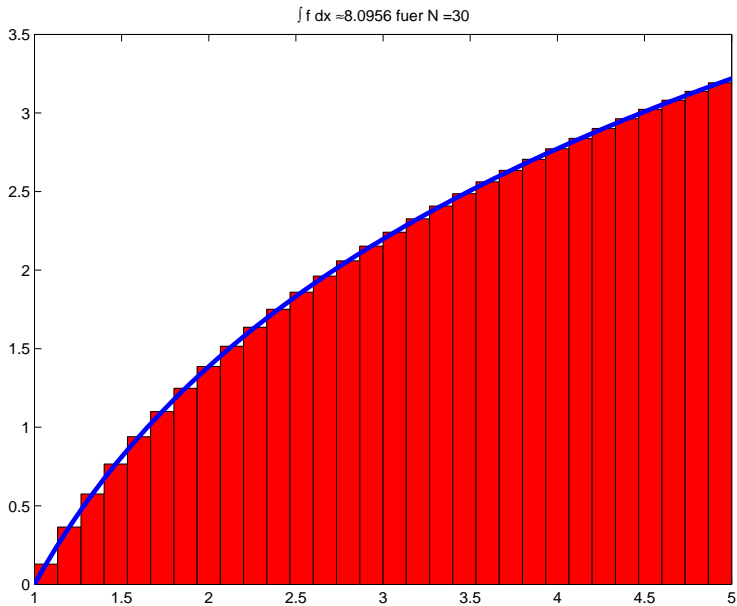
Befehle für Funktionen

- Durch `feval(fun,x1,...,xn)` wird die Funktion `fun` an der Stelle (x_1, \dots, x_n) ausgewertet. `fun` ist dabei entweder ein Funktionsname oder ein Function-Handle.
- Durch `f = fcnchk(g)` wird ein String `g` in eine Inline-Funktion umgewandelt (vgl. `inline`). Ist `g` ein Function-Handle oder eine Inline-Funktion so ist $f = g$.
- Durch `vectorize(f)` wird `f` für Strings oder Inline-Funktionen *vektoriert*, d.h. `'*'` wird durch `'.*'` ersetzt, `'^'` durch `'.^'`, usw.

Beispiel: integral2.m (Auszug)

```
function result = integral2(varargin)
%   integral2.m
%   Eingabe: 1 Parameter: f           (N=20, a=0, b=1)
%            2 Parameter: f,N        (a=0,b=1)
%            4 Parameter: f,N,a,b
%   Jochen Schulz 16.08.2009
N = 20; a = 0; b = 1; % Default-Einstellung
anzahl_parameter = nargin; % Anz. Input-argumente
if anzahl_parameter == 2
    N = varargin{2};
end;
if anzahl_parameter == 4
    N = varargin{2}; a = varargin{3}; b = varargin{4};
end;
if anzahl_parameter ~= [1 2 4]
    error('Falsche Anzahl an Input-Argumenten');
end;
% eventuelle Umwandlung von Strings
f = fcnchk(varargin{1}, 'vectorized');
x = (a+(b-a)/(2*N)):(b-a)/N:(b-(b-a)/(2*N));
y = feval(f,x);
```

`integral2('log(x.^2)',30,1,5)`



$$f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-\|x\|^2}), & \|x\| < 1 \\ 0, & \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

mit $\|x\|^2 := \sum_{i=1}^N x_i^2$, $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$.

2 Versionen:

- eindimensionale Version
- N-dimensionale Version

Beispielfunktion - 1d-Fall

```
function result = f_1d(x)
%-----
% Sobolevsche Mittelungsfunktion (1d)
%  $f(x) = \exp(-1/(1-|x|^2))$ ,  $|x| < 1$ , und  $f(x)=0$  sonst
%
% Eingabe: Vektor x
% Ausgabe: Vektor f(x)
%
% Gerd Rapin      7.12.2003
%-----
result = zeros(1,length(x));
    for k = 1:length(x)
        if abs(x(k))<1
            result(k) = exp(-1/(1-x(k)^2));
        else
            result(k) = 0;
        end;
    end;
end;
```

Beispielfunktion - n-dimensionaler-Fall

```
function result = f(varargin)
% f.m      Sobolevsche Mittelungsfunktion
%          Eingabe: Matrizen x1,x2,x3,..
%          Ausgabe: Matrix result=f(x1,x2,...)
betrag = varargin{1}.^2;
for i = 2:nargin
    betrag = betrag+varargin{i}.^2;
end
dimension = size(varargin{1});
result = zeros(dimension(1),dimension(2));
for j = 1:dimension(1)
    for k = 1:dimension(2)
        if betrag(j,k) < 1
            result(j,k) = exp(-1/(1-betrag(j,k)));
        else
            result(j,k) = 0;
        end;
    end;
end;
end;
```


Programm zum Plotten

```
%      plot_f.m

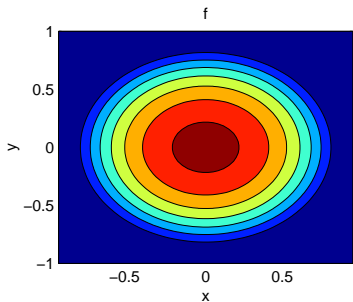
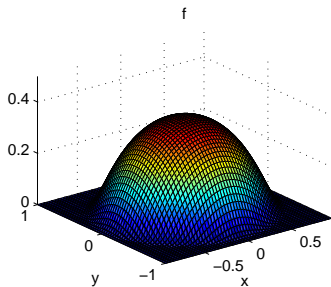
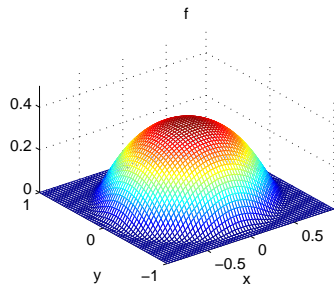
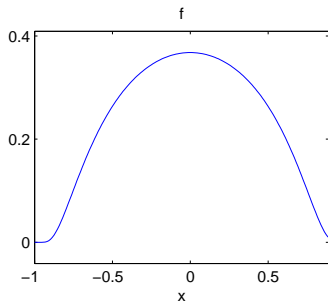
% Eindimensionaler Plot
subplot(2,2,1),
ezplot(@f);

% Zweidimensionaler Plot
subplot(2,2,2),
ezmesh(@f);

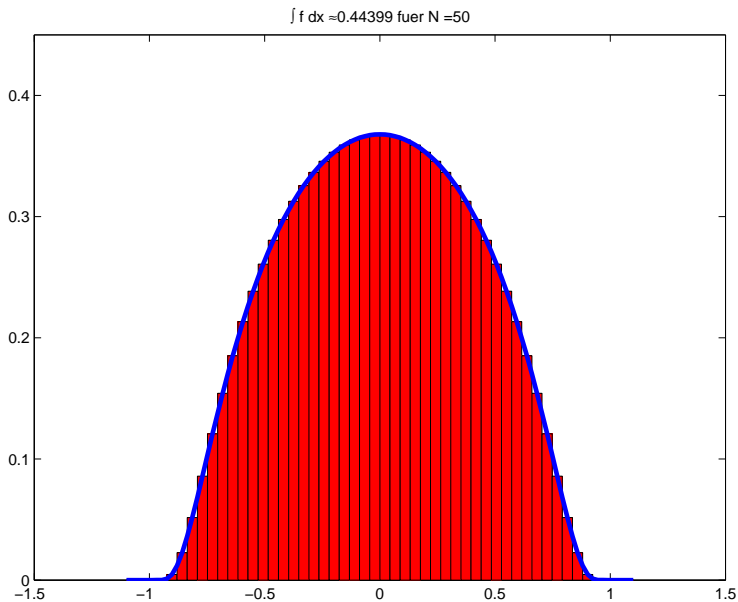
% Zweidimensionaler Plot
subplot(2,2,3),
ezsurf(@f);

% Zweidimensionaler Plot
subplot(2,2,4),
ezcontourf(@f);
```

Plots der Funktion



`integral2(@f,50,-1.1,1.1)`



1 Mehrdimensionale Arrays

2 Funktionen

- Function-Handles
- Funktionen-Typen
- Umgang und Beispiele

3 Dünnbesetzte Matrizen

4 Numerische Mathematik

- Norm und Kondition
- Lösen linearer Gleichungssysteme
- Bestimmung von Eigenwerten

- Bei *Dünnbesetzten Matrizen* (*sparse matrices*) sind fast alle Einträge 0.
- In vielen Anwendungen, z.B. bei der Diskretisierung von Differentialgleichungen oder in der Graphentheorie, treten sehr grosse, dünnbesetzte Matrizen auf.
- In MATLAB steht dafür ein eigener Datentyp zur Verfügung, der zu jedem Nichtnullelement der Matrix, die zugehörige Zeile und Spalte speichert.

Beispiel

```
>> A = 2*diag(ones(10,1),0) ...  
      - diag(ones(9,1),-1) ...  
      - diag(ones(9,1),1);  
>> B = sparse(A)  
B =  
      (1,1)      2  
      (2,1)     -1  
      (1,2)     -1  
      (2,2)      2  
      ...  
>> C = 2*diag(ones(100,1),0) ...  
      - diag(ones(99,1),-1) ...  
      - diag(ones(99,1),1);  
>> D = sparse(C); whos
```

Name	Size	Bytes	Class
A	10x10	800	double array
B	10x10	380	sparse array
C	100x100	80000	double array
D	100x100	3980	sparse array

- Durch `sparse(n,m)` wird eine dünnbesetzte Matrix der Grösse $n \times m$ erzeugt. Alle Einträge sind 0.
- Durch `B = sparse(A)` wird die dichtbesetzte Matrix A in eine dünnbesetzte Matrix B umgewandelt.
- Die Struktur der Matrix A kann durch `spy(A)` visualisiert werden.
- Die meisten Standardoperationen funktionieren auch mit dünnbesetzten Matrizen.

Dichte und dünnbesetzte Matrizen

- Durch `B = full(A)` wird die dünnbesetzte Matrix A in eine dichtbesetzte Matrix B umgewandelt.
- Bei binären Operationen, z.B. $A + B$ oder $A * B$ ist das Ergebnis bei dünnbesetzten Matrizen A und B wieder eine dünnbesetzte Matrix. Ist eine der Matrizen dichtbesetzt, so ist auch das Ergebnis dichtbesetzt.
- Durch `eigs(A,k)` werden die k betragsmäßig grössten Eigenwerte berechnet. (Default: $k = 6$)

Dünnbesetzte Matrizen

- Zur Norm- und Konditionsberechnung stehen die Befehle `normest` bzw. `condest` zur Verfügung.
- Alle iterativen Verfahren funktionieren auch mit dünnbesetzten Matrizen.
- Eine Übersicht aller Funktionen für dünnbesetzte Matrizen erhält man durch `help sparsfun`.
- Durch `[I,J] = find(X)` kann man die Indizes aller Zeilen und Spalten erhalten, in denen Nichtnullelemente stehen.

1 Mehrdimensionale Arrays

2 Funktionen

- Function-Handles
- Funktionen-Typen
- Umgang und Beispiele

3 Dünnbesetzte Matrizen

4 Numerische Mathematik

- Norm und Kondition
- Lösen linearer Gleichungssysteme
- Bestimmung von Eigenwerten

Poisson Problem

- Poisson Problem beschreibt stationäre Wärmeverteilungen.
- *Poisson Problem*: Suche $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit

$$\begin{cases} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für $\Omega = (0,1)^2$ und $f \in C(\Omega)$.

- *Laplace-Operator* $\Delta u := \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$

- Äquidistante Gitterweite $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$
- Menge aller Gitterpunkte

$$Z_h := \left\{ (x, y) \in \overline{\Omega} \mid x = z_1 h, y = z_2 h \text{ mit } z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- Innere Gitterpunkte: $\omega_h := Z_h \cap \Omega$

- Approximation von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y)$

$$\frac{u(x-h, y) - 2u(x, y) + u(x+h, y)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \mathcal{O}(h^2)$$

- Approximation von $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)$

$$\frac{u(x, y-h) - 2u(x, y) + u(x, y+h)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + \mathcal{O}(h^2)$$

- Addition ergibt für $\Delta u(x, y)$ die Näherung

$$\frac{1}{h^2} (u(x, y-h) + u(x-h, y) - 4u(x, y) + u(x, y+h) + u(x+h, y))$$

- Definition $u_{i,j} := u(ih, jh)$ ergibt an Gitterpunkten (ih, jh)

$$-u_{i,j-1} - u_{i-1,j} + 4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} = h^2 f_{ij}$$

mit $i, j \in \{1, \dots, N-1\}$ und $f_{ij} := f(ih, jh)$.

- Randbedingungen ergeben $u_{0,i} = u_{N,i} = u_{i,0} = u_{i,N} = 0$, $i = 0, \dots, N$.

- Lexikografische Sortierung der inneren Unbekannten

$$\begin{array}{cccc}
 (h, (N-1)h) & (2h, (N-1)h) & \dots & ((N-1)h, (N-1)h) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 (h, 2h) & (2h, 2h) & \dots & ((N-1)h, 2h) \\
 (h, h), & (2h, h) & \dots & ((N-1)h, h)
 \end{array}$$

ergibt $U_{i+(N-1)(j-1)} = u_{i,j}$.

Lineares Gleichungssystem für $U = (U_i)_{i=1}^{(N-1)^2}$

$$AU = F$$

mit

- $F := (f_i)_{i=1}^{(N-1)^2}$ mit $f_{i+(N-1)(j-1)} = f(ih, jh)$, $i, j \in \{1, \dots, N-1\}$,
-

$$A := \frac{1}{h^2} \text{tridiag}(-I_{N-1}, T, -I_{N-1}) \in \mathbb{R}^{(N-1)^2 \times (N-1)^2},$$

$$T := \text{tridiag}(-1, 4, -1) \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}.$$

Implementierung

```
function loes = poisson (f,n)
f = fcnchk(f);
A = gallery('poisson',n-1);
% Erzeuge rechte Seite und Mesh
mesh = zeros(2,(n-1)^2);
F = zeros((n-1)^2,1);
for i = 1:(n-1)
    for j = 1:(n-1)
        F(i+(n-1)*(j-1)) = (1/n)^2*f(i/n,j/n);
        loes.mesh(:,i+(n-1)*(j-1)) = [i/n; j/n];
    end
end
% Loese das lineare System
loes.x = A \ F;
```

% Ergaenze Randbedingungen

```
loes.x = [ loes.x; zeros(4*(n+1),1)];  
loes.mesh = [loes.mesh, [zeros(1,n+1); 0:1/n:1]];  
loes.mesh = [loes.mesh, [ones(1,n+1); 0:1/n:1]];  
loes.mesh = [loes.mesh, [0:1/n:1; ones(1,n+1)]];  
loes.mesh = [loes.mesh, [0:1/n:1; zeros(1,n+1)]];
```

% Plotten

```
plot3(loes.mesh(1,:), loes.mesh(2,:), loes.x, '*');  
figure;  
[X,Y] = meshgrid(0:1/n:1, 0:1/n:1);  
Z = griddata(loes.mesh(1,:), loes.mesh(2,:), ...  
    loes.x, X, Y, 'linear');  
surf(X,Y,Z);
```

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Bei einer gewöhnlichen Dgl. sucht man eine Funktion $y: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, so dass

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t)), t \in I \quad y(t_0) = y_0,$$

wobei $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ein vorgegebener Anfangswert an $t_0 \in I$ und $f: I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ die rechte Seite ist. Außerdem sei

$$\frac{d}{dt}y(t) := \left(\frac{\partial y_1(t)}{\partial t}, \dots, \frac{\partial y_n(t)}{\partial t} \right)^t.$$

Beispiele:

$$\frac{d}{dt}y(t) = y(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad \text{Lösung: } y(t) = y_0 e^{t-t_0}$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = e^y \sin(t), \quad \text{Lösung: } y(t) = -\log(\cos(x) + C), \quad C + \cos(x) > 0$$

Skalares Beispiel

Löse für $0 \leq t \leq 3$ mit `ode45` die Dgl.

$$\frac{d}{dt}y(t) = -y(t) - 5e^{-t}\sin 5t, \quad y(0) = 1.$$

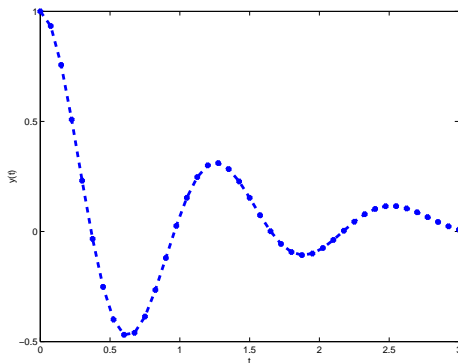
- Die rechte Seite als eigene Funktion:

```
function z = rechte_seitel(t,y)
% rechte_seitel   ODE Beispiel
%               z=rechte_seitel(t,y)
z = -y-5*exp(-t)*sin(5*t);
```

Skalares Beispiel

- Ausrechnen und Plotten

```
>> tspan = [0,3]; aw = 1;  
>> [t,y] = ode45(@rechte_seite1,tspan,aw);  
>> plot(t,y,'*--','Linewidth',3)  
>> xlabel('t'), ylabel('y(t)')
```



In MATLAB gibt es den Befehl

```
[t,y]=ode45(@fun, tspan, aw, options)
```

- @fun steht für die rechte Seite der Dgl.. Die rechte Seite ist gegeben durch ein geeignetes m-File.
- $aw \in \mathbb{R}^n$ ist der Anfangswert.
- *tspan* gibt das Zeitintervall an, auf dem die Dgl. berechnet werden soll. Normalerweise ist es von der Form $tspan=[t_0, t_1]$. Dann wird die Dgl. auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ berechnet (Anfangswert: $y(t_0) = aw$).
- MATLAB gibt Vektoren *t* und Matrizen *y* zurück. Dabei ist $y(:, i)$ die Lösung an der Stelle $t(i)$. Die Punkte t_i werden von MATLAB automatisch bestimmt.
- Durch die optionale Angabe von *options* kann der Löser gezielt eingestellt werden.
- Spezifiziert man mehr als zwei Zeitpunkte in *tspan*, so gibt MATLAB die Lösung genau an diesen Zeitschritten zurück.

Die genauen Parameter der ODE-Löser können durch

```
options = odeset('Eigenschaft 1','Spez. 1',...  
                'Eigenschaft 2','Spez. 2',...)
```

gesteuert werden. Die wichtigsten Parameter sind AbsTol (Default 10^{-6}) und RelTol (Default: 10^{-3}).

Beispiel:

```
options =odeset('AbsTol',1e-7,'RelTol',1e-4)
```

Löser	Steifigkeit	Algorithmus	Ordnungen
ode45	nicht steif	Expliziter Runge-Kutta Löser	4, 5
ode23	nicht steif	Expliziter Runge-Kutta Löser	2, 3
ode113	nicht steif	Explizites Mehrschrittverfahren	1 - 13
ode15s	steif	Implizites Mehrschrittverfahren	1 - 5
ode23s	steif	Modifiziertes Rosenbrockverfahren	2, 3
ode23t	mittel steif	implizite Trapez Regel	2, 3
ode23tb	steif	Implizites Runge-Kutta Verf.	2, 3

Die Lorenz-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}y_1(t) = 10(y_2(t) - y_1(t))$$

$$\frac{d}{dt}y_2(t) = 28y_1(t) - y_2(t) - y_1(t)y_3(t)$$

$$\frac{d}{dt}y_3(t) = y_1(t)y_2(t) - 8y_3(t)/3$$

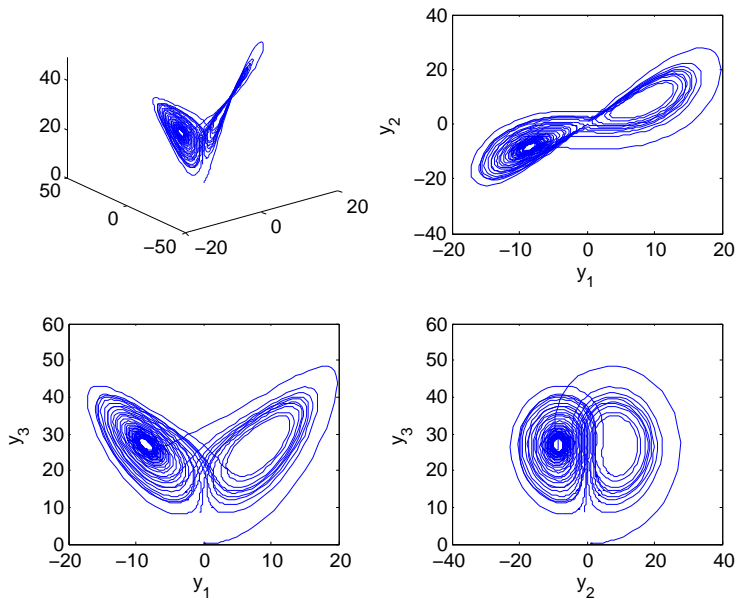
rechte Seite:

```
function z = lorenz_rechte_seite(t,y)
z = [10*(y(2)-y(1)); ...
     28*y(1)-y(2)-y(1)*y(3); ...
     y(1)*y(2)-8*y(3)/3];
```

Die Lorenz-Gleichungen

```
%  
%   lorenz_gl.m  
%   Eine Approximation der Lorenzgleichungen  
%  
tspan = [0,30]; aw = [0;1;0];  
options = odeset ('AbsTol',1e-7,'RelTol',1e-4);  
[t,y] = ode45(@lorenz_rechte_seite,tspan,aw,options);  
  
subplot(2,2,1),plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3)),  
subplot(2,2,2),plot(y(:,1),y(:,2)),xlabel('y_1'),ylabel('y_2');  
subplot(2,2,3),plot(y(:,1),y(:,3)),xlabel('y_1'),ylabel('y_3');  
subplot(2,2,4),plot(y(:,2),y(:,3)),xlabel('y_2'),ylabel('y_3');
```

Die Lorenz-Gleichungen



1 Mehrdimensionale Arrays

2 Funktionen

- Function-Handles
- Funktionen-Typen
- Umgang und Beispiele

3 Dünnbesetzte Matrizen

4 Numerische Mathematik

- Norm und Kondition
- Lösen linearer Gleichungssysteme
- Bestimmung von Eigenwerten

Die p -Norm eines Vektors $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

kann berechnet werden durch `norm(x,p)` (Default: $p = 2$)

- Die Norm ist definiert für $p \geq 1$.
- $p = \infty$ entspricht der Maximum-Norm

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

Seien $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ und $p \geq 1$. Die *Matrixnorm* ist definiert durch

$$\|A\|_p = \sup_{x \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}.$$

- In MATLAB: `norm(A,p)` (Default $p = 2$).
- $p = \infty$ kann charakterisiert werden durch

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \text{Zeilensummennorm.}$$

Kondition einer quadratischen Matrix A :

$$\text{cond}_p(A) := \|A\|_p \|A^{-1}\|_p.$$

- In MATLAB: $\text{cond}(A,p)$ (Default $p = 2$)
- Es gilt $\text{cond}_p(A) \geq 1$.
- Die Kondition misst die Empfindlichkeit der Lösung x von $Ax = b$ gegenüber Störungen von A und b .
- Ist $\text{cond}_p(A) \gg 1$, so ist die Matrix beinahe singular. Die Matrix ist *schlecht konditioniert*.

- Vektornormen für $x = (1/100)(1, 2, \dots, 100)$

```
>> x = (1:100)/100; [norm(x,1) norm(x,2) norm(x,inf)]  
ans =    50.5000    5.8168    1.0000
```

- Matrixnorm für die Hilbert-Matrix $H = (\frac{1}{i+j-1})_{ij}$

```
>> H = hilb(10); [norm(H,1) norm(H,2) norm(H,inf)]  
ans =    2.9290    1.7519    2.9290
```

- Kondition der Hilbert-Matrix

```
>> H = hilb(10); [cond(H,1) cond(H,2) cond(H,inf)]  
ans =  
    1.0e+13 *  
    3.5354    1.6025    3.5354
```


1 Mehrdimensionale Arrays

2 Funktionen

- Function-Handles
- Funktionen-Typen
- Umgang und Beispiele

3 Dünnbesetzte Matrizen

4 Numerische Mathematik

- Norm und Kondition
- Lösen linearer Gleichungssysteme
- Bestimmung von Eigenwerten

Lineare Gleichungssysteme

Seien $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{C}^n$. Das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

wird in MATLAB gelöst durch $x = A \backslash b$.

```
>> x = ones(5,1); H = hilb(5); b = H*x; y = (H\b)'  
y =  
    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
```

Warnung: Benutze nie $x = \text{inv}(A) * b$, da das Berechnen von A^{-1} sehr aufwendig sein kann.

Was bedeutet $A \setminus b$?

MATLAB berechnet die LU-Zerlegung von A (Gaussverfahren), d.h. es sucht eine obere Dreiecksmatrix U und eine untere Dreiecksmatrix L mit Einsen auf der Diagonalen, so dass $PA = LU$ gilt (P Permutationsmatrix). Dann wird das LGS durch Rückwärts- und Vorwärtseinsetzen gelöst.

```
>> [L,U,P] = lu(hilb(5)); norm(P*hilb(5)-L*U)
ans = 2.7756e-17
```

- Berechnung der Inversen

```
>> A = pascal(3)
```

```
A =
```

1	1	1
1	2	3
1	3	6

```
>> X = inv(A)
```

```
X =
```

3	-3	1
-3	5	-2
1	-2	1

- Berechnung der Determinante

```
>> det(A)
```

```
ans = 1
```

Pseudoinverse

Berechnung der (Moore-Penrose) Pseudoinversen X von A (A singulär),
d.h. X genügt

$$AXA = A, XAX = X, (XA)^* = XA, (AX)^* = AX.$$

```
>> pinv(ones(3,3))  
ans =  
    0.1111    0.1111    0.1111  
    0.1111    0.1111    0.1111  
    0.1111    0.1111    0.1111
```

1 Mehrdimensionale Arrays

2 Funktionen

- Function-Handles
- Funktionen-Typen
- Umgang und Beispiele

3 Dünnbesetzte Matrizen

4 Numerische Mathematik

- Norm und Kondition
- Lösen linearer Gleichungssysteme
- Bestimmung von Eigenwerten

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. $\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von A , falls ein Vektor $x \in \mathbb{C}^n$ ungleich 0 existiert, so dass $Ax = \lambda x$ gilt. x heisst Eigenvektor.

- $x = \text{eig}(A)$ berechnet die Eigenwerte von A und schreibt sie in den Vektor x .
- $[V, D] = \text{eig}(A)$. D ist eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen. Die Spalten von V bilden die zugehörigen Eigenvektoren.

Weitere Zerlegungen

- Mittels $[Q,R]=\text{qr}(A)$ wird zu einer $m \times n$ -Matrix A eine Zerlegung $A = QR$ erzeugt, wobei Q eine unitäre $m \times m$ -Matrix ist und R eine obere $m \times n$ Dreiecksmatrix ist.
- Eine Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^*$ wird durch $[U,S,V]=\text{svd}(A)$ berechnet. Dabei ist $\Sigma \in \mathbb{C}^{m \times n}$ eine Diagonalmatrix und $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sind unitäre Matrizen.
- Eine Cholesky-Zerlegung $A = R^*R$ zu einer hermiteschen, pos. def. Matrix A wird durch $R=\text{chol}(A)$ berechnet. R ist eine obere Dreiecksmatrix mit reellen, positiven Diagonalelementen.

- LGS können auch mit Hilfe iterativer Verfahren gelöst werden, z.B. gmres, pcg, bicgstab.
- Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $n \neq m$, so ergibt $A \setminus b$ für $n > m$ (der überbestimmte Fall) die Least-Square Lösung, d.h. der Ausdruck $\text{norm}(A^*x - b)$ wird minimiert. Ist $n < m$ (der unterbestimmte Fall) so wird eine Grundlösung berechnet.