Einführung in Sage

Dr. J. Schulz
C. Rügge

Einheit 8
WS 2009/2010

Aufgabe 1 :

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks bezüglich der euklidischen Norm (2-Norm), welches durch folgende Vektoren beschrieben wird:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie dann diese Dreieck graphisch dar.

Aufgabe 2 :

Plotten Sie die Funktion $f : (x, y) \to 0.1y^4 - 0.3y^3 - 1.5y^2 + \sin(3x) + 1.9y + 3$ als Fläche im dreidimensionalen Raum. Betrachten Sie ebenfalls die Konturen bei $-2, 0, 2, 4$ und 6. Wählen Sie jeweils geeignete Definitionsbereiche.

Aufgabe 3 :

Berechnen Sie die ersten 4 Glieder der Taylorreihe der Funktionen $f(x) = (1 - x)^{-1}$ und $g(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^{-1}$ an der Stelle $x = 3$. Berechnen Sie die Entwicklung erst 'per Hand' in Sage und überprüfen Sie dann Ihr Ergebnis mit der Funktion `taylor`.

Aufgabe 4 :

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^n e^{-x}, n > 0$ genau ein Maximum an der Stelle $x = n$ besitzt. Zeigen Sie, dass das Maximum global ist.

Aufgabe 5 :

Zeigen Sie mit den Regel von L'Hospital folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\frac{\pi}{2} - x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Aufgabe 6 :

Prüfen Sie folgende Funktionen auf Differenzierbarkeit:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 1 \\ x^3 + 2.5x - 2 & , x < 1 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}.$$

Aufgabe 7 :

1. Differenzieren Sie folgende Funktionen:

$$f(x) = \exp\left(\frac{\frac{\sin 2x}{\sin x}}{\left(\frac{\log 8}{2+2\cos x}\right)^{-1} - \frac{8}{log x^4}}\right) \text{ und } g(x) = \sin\left(2^{\cos 3x}\right).$$

2. Berechnen Sie $4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ und $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$.
3. Berechnen Sie die 20-te Ableitung von $f(x) := \sin(2x)\exp(x)$.

Aufgabe 8 :

Schreiben Sie eine Prozedur, die eine Nullstelle einer gegebenen Funktion $f : [a_0, b_0] \to \mathbb{R}$ mit $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ zu einer gegebenen Genauigkeit TOL berechnet. Hierzu betrachten wir eine Folge von Intervallen $[a_k, b_k]$, die sich aus der folgenden Vorschrift ergeben:

Wiederhole bis $|b_0 - a_0| \leq 2^{k+1} * TOL$

- Berechne $g := f(\frac{a_k+b_k}{2})$.
- Gilt $f(a_k) * g < 0$ so definiere $a_{k+1} := a_k$, $b_{k+1} := \frac{a_k+b_k}{2}$.
- Andernfalls berechne $a_{k+1} := \frac{a_k+b_k}{2}$, $b_{k+1} := b_k$.

Testen Sie die Prozedur an $f(x) := x^3 - 2$, $[a_0, b_0] := [0, 3]$ und für $TOL = 10^{-4}$ und $TOL = 10^{-6}$. Verwenden Sie maximal 1000 Iterationen.