Einführung in Sage

Dr. J. Schulz
C. Rügge

Einheit 7
WS 2009/2010

Aufgabe 1 :

Goldbachsche Vermutung: Jede gerade Zahl größer als 2 kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden.

1. Erzeugen Sie eine Menge `P` mit den ersten 100 Primzahlen mit der Funktion `primes_first_n`.
2. Erzeugen Sie eine Menge `L` aller geraden Zahlen zwischen 4 und 800.
3. Testen Sie mit dieser Mengen die Goldbachsche Vermutung.
4. Geben Sie an wie viele Darstellungen jede Zahl hat (Reihenfolge mitzählen).
5. Erhöhen Sie die Menge der geraden Zahlen bis 1000 und finden Sie heraus welche Zahlen nicht mehr dargestellt werden können.

Aufgabe 2 :

Die *Tschebyscheff-Polynome* sind rekursiv durch die folgenden Formeln definiert:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x).$$

Berechnen Sie die Liste bestehend aus $T_0(x), \ldots, T_9(x)$, in dem Sie sukzessive Elemente anhängen. Bestimmen Sie jeweils den Funktionswert an $x = 1/3$ und $x = 0.33$ und bestimmen Sie die Nullstellen!

Aufgabe 3 :

1. Gegeben seien die Funktionen $f(x) = 4x^2 + 3x^6, g(x) = 12x^6 - 2x + 1$ und $h(x) = 21x^4 - 2x^2 + 12$. Erstellen Sie damit die Funktionen $k(x) = f(g(g(x)))$ und $l(x) = f(g(h(x)))$.
2. Erstellen Sie dann mit Hilfe einer Liste die Wertetabelle der Funktionen f, g, k, l für $-10, -9, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, 9, 10$.
3. Bestimmen Sie von den Funktionen g und k die Funktionswerte, welche Primzahlen sind.

Aufgabe 4 :

Gegeben seien die stetigen Funktionen $f : x \to -x^2 + 2$ und $g : x \to -4\sqrt{x} + 5$. Prüfen Sie folgende Funktion auf Stetigkeit:

$$h : x \to \begin{cases} f(x), & \text{für } x < 1 \\ g(x), & \text{für } x \geq 1 \end{cases} .$$

Aufgabe 5 :

Plotten Sie folgende Funktionen:

$$f : x \to \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{k} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$$

für $k = 4 \ldots 15$. Legen Sie die Graphen übereinander. Erstellen Sie auch eine Animation.

Aufgabe 6 :

Plotten Sie die Funktion $f := x \to \begin{pmatrix} 5\cos(x) \\ 2\sin(x) \\ 4x \end{pmatrix}$ für $0 \leq x \leq 100$. Wählen Sie eine geeignete Auflösung.

Aufgabe 7 :

Schreiben Sie eine Prozedur, die für eine List von Tupeln im $\mathbb{R}^3$ alle Dreiecke zwischen diesen Punkten zeichnet. Plotten sie dann einen Oktaeder, d.h. eine Figur mit den Eckpunkten $\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3$.
Hinweis: Ein einzelnes Dreieck kann mit dem Befehl `polygon3d` gezeichnet werden.

Aufgabe 8 :

Schreiben Sie eine Prozedur, die mit Hilfe einer Liste von Vektoren $v_1, v_2, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ die Gerade

$$G := \{v_1 + \alpha v_2 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

und die Ebene

$$E := \{w_1 + \alpha w_2 + \beta w_3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

in eine Grafik zeichnet. ($\alpha \in (-5, 5)$, $\beta \in (-4, 4)$)

Aufgabe 9 :

Wir betrachten die folgende Oberfläche:

$$\begin{aligned} x(u,v) &= \cos(2u)\cos(u+v) \\ y(u,v) &= \cos(2u)\sin(u+v) \\ z(u,v) &= \sin(v) \end{aligned}$$

Stellen Sie die Oberfläche für $-\pi < u, v < \pi$ grafisch dar. Wählen Sie dabei ein 80×80-Gitter.