



# Einführung in Sage - Einheit 4

## Matrizen, Vektorräume, Funktionen

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen 

















# Matrizen

$m \times n$  Matrix  $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$  über einen Körper  $K$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} \in K$ , Zeilenindex  $i \in [1, m]$ , Spaltenindex  $j \in [1, n]$



# Definitionen

- **Transponiert** von  $A = (a_{ij})$ :  $A^T := (a_{ji})$ .
- **Symmetrisch**: wenn  $A = A^T$  gilt.
- **Adjungiert** von  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ :  $A^* := (\overline{a_{ji}}) \in \mathbb{C}^{n \times m}$ .
- **Einheitsmatrix**:  $I := I_n := (\delta_{ij}) \in K^{n \times n}$
- **Addition**: Seien  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in K^{n \times m}$ , dann

$$C = (c_{ij}) := A + B \in K^{n \times m}$$

mit  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .



- **Multiplikation:** Seien  $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$  und  $B = (b_{ij}) \in K^{n \times p}$ , dann

$$C = (c_{ij}) := A \cdot B \in K^{m \times p}$$

mit  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ .

- **orthogonal:**  $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n$  für  $A \in K^{n \times n}$
- **unitär:**  $A \cdot A^* = A^* \cdot A = I_n$  für  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .
- **invertierbar:**  $A \in K^{n \times n}$  heißt , wenn eine Matrix  $A^{-1} \in K^{n \times n}$  existiert mit  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ .



# Definitionen und Bemerkungen

- Die Multiplikation ist assoziativ aber in der Regel **nicht kommutativ**.
- Die Matrizen aus  $K^{m \times n}$  bilden einen Vektorraum über  $K$  (mit komponentenweiser Skalarmultiplikation).
- **allgemeine lineare Gruppe**  $GL(K, n) = GL_n(K) = GL(n, K)$ : Die Menge der invertierbaren Matrizen aus  $K^{n \times n}$  bilden bezüglich der Multiplikation eine Gruppe.
- **orthogonale Gruppe**  $O(n)$ : Die Menge der orthogonalen Matrizen in  $GL(\mathbb{R}, n)$  bilden eine Untergruppe von  $GL(\mathbb{R}, n)$ .
- **unitäre Gruppe**  $U(n)$ : Die entsprechende Untergruppe der unitären Matrizen in  $GL(\mathbb{C}, n)$ .





```
matrix([[a11,a12,...],[a21,a22,...],...])
```

- Der Rückgabewert ist vom Typ `matrix`.
- Die Einträge der Matrix können beliebige Ausdrücke sein.
- Es ist möglich Matrizen über bestimmten Bereichen (z.B.  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Z}$ ) zu konstruieren.
- Es gibt spezielle Datenstrukturen für quadratische Matrizen und für dünnbesetzte Matrizen.



# Konstruktion von Matrizen I

Es gibt in Sage verschiedene Möglichkeiten eine Matrix zu konstruieren.

Beispiel:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & 0 & 1 & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

- Einträge pro Zeile in eckigen Klammern `[..]`. Alle Spalten dann wieder in eckigen Klammern `[..]` (Standard)

```
A = matrix([[1, 2, 3, 4], [a, 0, 1, b]])
```

- Explizite Größenangabe

```
A = matrix(2,4,[[1,2,3,4], [a,0,1,b]])
```



# Konstruktion von Matrizen II

- Nullmatrix der Größe  $n \times m$ :

```
n = 3; m = 4; B = matrix(n,m)
```

- Erzeugung mit Hilfe einer Funktion  $f(i,j)$  mit Einträgen  $a_{ij} = f(i,j)$

```
f(i,j) = i*j  
C = matrix([[f(i,j) for i in range(1,6)] for j in  
            range(1,4)]); C
```

- Eingabe von Zeilen- und Spaltenvektoren (falls explizit nötig)

```
matrix(3,1,[1,2,3])  
matrix(1,3,[4,5,6])
```



# Zeilen- und Spaltenzahl

- Spaltenanzahl: `<matrix>.ncols()`

```
C.ncols()
```

??

- Zeilenanzahl: `<matrix>.nrows()`

```
C.nrows()
```

??

- Informationen über die Matrix: `<matrix>.parent()`

```
C.parent()
```

?? ull MatrixSpace of 3 by 5 dense matrices over Symbolic Ring





# Zugriff auf die Einträge I

- Zugriff auf Einträge in Zeile  $i$  und Spalte  $j$ :

```
i=1; j=2; C[i,j]
```

??

- Ändern eines Eintrags in Zeile  $i$  und Spalte  $j$ :

```
i=1; j=2; C[i,j]=22
```

- Extrahieren von Zeilen/Spalten

```
zeile = C.row(0)  
spalte = C.column(4)
```



- Teilmatrizen

```
C[1:3,1:3]
```

- Diagonalmatrizen

```
x = [1,2,3,4,5]  
Diag = diagonal_matrix(x); Diag
```



- Addieren, Multiplizieren

```
var('a,b,c,d,g,h,f')  
A = matrix([[a, b], [c,d]])  
B = matrix([[e, f], [g,h]])  
A+B; A*B
```

- Inverse und der Transponierte

```
A(-1); A.transpose()
```



# Rang von Matrizen

Sei  $A \in K^{m \times n}$ .

- **Spaltenrang**: Die Dimension der linearen Hülle der Spaltenvektoren. Er ist höchstens gleich  $n$ .
- **Zeilenrang**: Die Dimension der linearen Hülle der Zeilenvektoren. Er ist höchstens gleich  $m$ .
- **Rang**: Abkürzung, da Zeilenrang und Spaltenrang von Matrizen gleich sind.





- Bestimmen des Ranges einer Matrix

```
S = matrix([[1,0,0],[0,1,1],[1,1,1]])  
S.rank()
```

??

- ist S symmetrisch ? ist S invertierbar ?

```
S.is_symmetric()  
S.is_invertible()
```

?? also False

- Determinante

```
S.det()
```

?? 7



# Maps auf Matrizen

Anwendung der Funktion `<function>` auf `<matrix>` (siehe auch `map()`)

```
map_threaded(<function>, <matrix>)
```

**Beispiel:**

```
map_threaded(sqrt, matrix(RR, [[1, 2], [3, 4]]))
```

```
?? 1.0000000000000000 1.41421356237310] [1.73205080756888  
2.0000000000000000]
```







Ein Tripel  $(V, +, \cdot)$ , bestehend aus einer nichtleeren Menge  $V$  und Verknüpfungen

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad \cdot : K \times V \rightarrow V$$

heißt **Vektorraum** über einem Körper  $K$ , wenn gilt:

- ❶  $(V, +)$  ist eine abelsche Gruppe.
- ❷ Für alle  $v, w \in V$  und alle  $\lambda, \mu \in K$  gilt:
  - ❶  $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$ .
  - ❷  $\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$ .
  - ❸  $(\lambda \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$ .
  - ❹  $1 \cdot v = v$ .





- **Vektoren**: Die Elemente eines Vektorraums.
- **Skalarmultiplikation**: Die Abbildung  $\cdot : K \times V \rightarrow V$ . Die Elemente des Körpers  $K$  nennt man **Skalare**.
- **Untervektorraum** oder **Unterraum** von  $V$ : Ist  $U \subset V$  eine Teilmenge des Vektorraums  $V$  und es gelten alle Vektorraumaxiome.
- **Vorsicht!** man muß zwischen der 0 des Körpers und der 0 des Vektorraums (Nullvektor) unterscheiden.  
Es gilt  $0 \cdot v = 0$  für alle  $v \in V$ .



# Beispiele für Vektorräume

- $K^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in K\}, n \in \mathbb{N}$
- Sei  $M$  eine beliebige Menge. Die Menge der Abbildungen von  $M$  in  $K$ ,  $\text{Abb}(M, K)$ , mit den punktweise definierten Verknüpfungen

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \forall x \in M$$

$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x), \forall x \in M$$

für  $\alpha \in K, f, g: M \mapsto K$ .

- Die Menge der Polynome bis zum Grad  $n$ .
- Die Menge aller Polynome.
- $\mathbb{R}$  als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum.
- $\mathbb{C}$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.



# Vektoren in Sage

## Konstruktion von Vektoren

```
vector([v1,v2,...])
```

## Beispiele:

- Konstruktion

```
a = vector([1,2,3,4]); b = vector([5,6,7]); a,b
```

```
?? (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7))
```

- Datentyp: `vector_integer_dense` (für dichte Vektoren)

```
type(a)
```

```
?? type 'sage.modules.vector_integer_dense.Vector_integer_dense' >
```



# Lineare Abhängigkeit

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $(v_1, \dots, v_r)$  eine Familie von Elementen aus  $V$ .

- **Linearkombination**  $v \in V$  von  $(v_1, \dots, v_r)$ : falls  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$  mit  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$ .
- **Lineare Hülle**  $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ : Die Menge aller Linearkombinationen. Die Lineare Hülle ist ein Unterraum von  $V$ .
- **linear unabhängig**: Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$  und ist  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$  so folgt  $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ . Andernfalls **linear abhängig**.
  - Ist  $M \subseteq V$  eine unendliche Menge, dann ist  $M$  linear unabhängig falls alle endlichen Teilmengen von  $M$  linear unabhängig sind.





# Weitere Notationen und Bemerkungen

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $(v_1, \dots, v_r)$  eine Familie von Elementen aus  $V$

- $(v_1, \dots, v_r)$  sind genau dann linear unabhängig, wenn sich jeder Vektor  $v \in \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$  eindeutig linear kombinieren läßt.
- Vektoren sind linear unabhängig wenn die Determinante der korrelierenden Matrix ungleich 0 ist.
- Gilt  $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$ , so ist  $(v_1, \dots, v_r)$  ein **Erzeugendensystem**. Sind  $(v_1, \dots, v_r)$  zusätzlich linear unabhängig, so ist  $(v_1, \dots, v_r)$  eine **Basis**.
- Aus jedem Erzeugendensystem kann man eine Basis auswählen.



# Beispiele für Basen

- Seien  $(e_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n$  die Einheitsvektoren.  $(e_1, \dots, e_n)$  ist eine Basis des  $\mathbb{R}^n$ .
- Die Monombasis  $(1, x, x^2, \dots, x^n)$  ist eine Basis des Vektorraums der Polynome  $n$ -ten Grades.
- $(1, i)$  ist eine Basis von  $\mathbb{C}$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.
- $\mathbb{R}$  als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum hat keine endliche Basis.



- **Dimension** des Vektorraums  $V$ : die Anzahl der Basiselemente einer Basis  $(v_1, \dots, v_n)$ .
- Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
- Seien  $W, Z$  Unterräume von  $V$ . Dann ist  $W + Z := \text{span}(W \cup Z)$  die **Summe** von  $W$  und  $Z$ . Es gilt:

$$\dim(W + Z) = \dim(W) + \dim(Z) - \dim(W \cap Z)$$



- Bestimmen einer Basis von  $\text{span}(s_1, s_2, s_3)$

```
s1 = vector([1,0,0])  
s2 = vector([0,1,1])  
s3 = vector([1,1,1])  
span([s1,s2,s3],QQ)
```

?? vector space of degree 3 and dimension 2 over Rational Field Basis  
matrix:  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$





- Bestimmen des Schnitts von  $\text{span}(s1)$  und  $\text{span}(s2, s3)$

```
span([s1], QQ).intersection(span([s2, s3], QQ))
```

?? vector space of degree 3 and dimension 1 over Rational Field Basis  
matrix:  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Testen der linearen Unabhängigkeit

```
m = matrix([s1, s2, s3])  
m.rank() >= min(m.ncols(), m.nrows())  
m.determinant() <> 0
```

?? else



# Normen auf Vektorräumen

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$ .

Eine **Norm** auf  $V$  ist eine Abbildung

$$\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|,$$

so dass für alle  $\alpha \in K$ ,  $u, v \in V$  gilt

$$\|v\| \geq 0$$

$$\|v\| = 0 \text{ impliziert } v = 0$$

$$\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \text{ (Dreiecksungleichung).}$$

$(V, \| \cdot \|)$  heißt **normierter Raum**.



# Skalarprodukt

Eine skalarwertige binäre Abbildung

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow K$$

auf einem Vektorraum  $V$  über  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$  heißt **Skalarprodukt**,  
wenn für alle  $x, y, z \in V$ ,  $\alpha, \beta \in K$  gilt

$$(x, x) \geq 0$$

$$(x, x) = 0 \text{ impliziert } x = 0.$$

$$(x, y) = \overline{(y, x)}$$

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$$



- Ein VR  $V$  mit Skalarprodukt heißt **Prä-Hilbert-Raum**. Ist  $K = \mathbb{R}$  so heißt der Raum auch **euklidisch**.
- Durch  $\|v\| := \sqrt{(v, v)}$ ,  $v \in V$  läßt sich eine Norm definieren. Es gilt die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

- Im euklidischen Raum ist der Winkel  $\alpha$  zwischen zwei Vektoren  $u, v \in V \setminus \{0\}$  definiert durch

$$\cos(\alpha) = \frac{(u, v)}{\|u\| \|v\|}.$$





- **Orthogonal:** wenn  $(u, v) = 0$  gilt.
- **Orthogonalbasis:** Eine Basis aus paarweise orthogonalen Vektoren.
- **Orthonormalbasis:** Eine Orthogonalbasis, bei der alle Vektoren die Norm 1 haben.
- Jeder endlichdimensionale Prä-Hilbert-Raum hat eine Orthonormalbasis.
- **Orthogonalraum:**

$$U^\perp := \{v \in V \mid (v, u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

wenn  $U$  ein Unterraum von  $V$  ist.

- Es gilt:  $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$ , insb.  $U \cap U^\perp = 0$ .



- $p$ -Norm:

$$\|v\| := \left( \sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}, p \in [1, \infty)$$

auf  $K^n$  mit  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

```
x = vector([1,2,3,4,5]); p=2  
x.norm(p)
```

- sind Vektoren orthogonal zueinander ?

```
a1 = vector([1,2,3])  
a2 = vector([0,4,1])  
a3 = vector([1,1,1])  
X = matrix([a1,a2,a3])  
X * X.transpose()
```



- Berechnen des Skalarprodukts

```
a2.dot_product(a3), a2*a3
```

```
?? 5, 5)
```

- Berechnen des Winkels zwischen zwei Vektoren

```
float(acos(a2*a3/(abs(a2)*abs(a3))))
```

```
?? .79520271328967818
```









# Aufbau von Funktionen

```
def <Name><(a,b,...)>:  
    <Code-Block>  
    return <ret>
```

- Argumente/Übergabeparameter (a,b,...)
- Jede Zeile, die einen folgenden Block einleitet, muss mit einem Doppelpunkt : abgeschlossen werden.
- Jede Zeile in diesem Block muss eine grössere Einrückung besitzen (typischerweise ein *Tab*)
- Zeilen gleicher Einrückung gehören zum gleichen Block.
- Rückgabewert ret mittels `return`(ret) zurückgegeben. Funktion ist dann beendet.
- Ohne return wird eine leere Variable des Typs `NoneType` zurückgegeben.



- In `""" comment """` eingeschlossene Zeilen werden als Hilfetext abgespeichert und können durch `<funktionsname>?` abgefragt werden.
- Kommentarzeilen: Diese beginnen mit `#`. Sie werden vom System ignoriert.



# Eine Beispiel-Funktion

```
def MyMax(a,b):  
    """Maximum von a und b"""  
    if a<b:  
        return (b)  
    else:  
        return (a)
```

- Das Beispiel berechnet das Maximum zweier Zahlen  $a$  und  $b$ .
- Aufruf in Sage ist `MyMax(a,b)`.
- Die Funktion gibt dann entweder den Wert  $a$  oder den Wert  $b$  zurück.



Bei umfangreicheren Funktionen oder richtigen Programmen ist es evtl. sinnvoller dies mit einem Editor zu erstellen.

- Erstellen einer `<name>.sage`-Datei (Editor: z.B. `geany`)
- `attach <path>/<name>.sage`: hängt die Datei an das Notebook an und wird automatisch geladen und aktuell gehalten.
- `attached_files()`: listet alle angehängte Dateien.