Einführung in Sage

Dr. J. Schulz

Einheit 3
WS 2009/2010

Aufgabe 1 :

Welche der Vektoren $v_1, ..., v_4 \in \mathbb{R}^5$ sind zueinander orthogonal?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 27 \\ 26 \\ 1 \\ -27 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 160 \\ -48 \\ 112 \\ -160 \\ 48 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 120 \\ 234 \\ -23 \\ -43 \\ 29 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 :

Bestimmen Sie für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 1 \\ 8 & 10 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = AB, E = BC \text{ und } F = B^T C$$

jeweils den Rang und die Determinante.

Aufgabe 3 :

Seien A,B,C (2×2)- Matrizen und $x, y \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1},$$

$$A(x + y) = Ax + Ay,$$

$$A(B + C) = AB + AC,$$

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Aufgabe 4 :

Welche der folgenden Matrizen sind unitär, orthogonal, invertierbar, symmetrisch oder hermitisch (d.h. $A^* = A$, Befehl: `linalg::isHermitean`)?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ 0 & \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & i & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 :

Gegeben seien die Untervektorräume $V := \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ und $W := \text{span}\{w_1, w_2, w_3\}$ mit Vektoren $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^5$. Bestimmen Sie die Dimension von $V \cap W$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 13 \\ 21 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -12 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6 :

Erzeugen Sie, wenn möglich mit Hilfe des ``.''-Operators, die Matrix:

```
          +-                      -+
          |  a11, a12, a13, a14   |
          |                        |
          |  a21, a22, a23, a24   |
    A =   |                        |
          |  a31, a32, a33, a34   |
          |                        |
          |  a41, a42, a43, a44   |
          +-                      -+
```

Leiten Sie daraus eine allgemeine Determinantenformel für (4×4) Matrizen her.

Aufgabe 7 :

1. Erzeugen Sie die (15×15) Hilbert-Matrix $H := (h_{ij})$ mit $h_{ij} := \frac{1}{i+j-1}$.
2. Bestimmen Sie die Determinante von H.
3. Berechnen Sie für den Vektor $r := (1, \ldots, 1)^T$ das Matrix-Vektorprodukt $y := Hr$.
4. Lösen Sie das Gleichungssystem $Hx = y$. Vergleichen Sie die berechnete Lösung mit der Referenzlösung r.
5. Ersetzen Sie den Eintrag h_{11} durch die Gleitkommazahl 1.0 und lösen Sie erneut das Gleichungssystem. Was stellen Sie fest ?

Aufgabe 8 :

Berechnen Sie eine Gleitkommadarstellung von

$$2 \prod_{i=1}^{1000} \left(\frac{(2i)^2}{(2i-1)(2i+1)} \right).$$

Aufgabe 9 :

Schreiben Sie eine Prozedur, die zu einer gegebenen Menge von ganzen Zahlen die Summe aller Elemente der Menge berechnet und zurückgibt.