Einführung in Sage - Einheit 8

Differentation, Taylorsche Formel, Integration

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen

Aufbau

Aufbau

Ableitungen

Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar an der Stelle $x_0 \in D$, wenn

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.
Der Grenzwert wird Ableitung oder Differentialquotient von f an x_0 genannt und mit $f'(x_0) = f^{(1)}(x_0)$ bezeichnet.

Bemerkungen

- Man sagt, dass f differenzierbar (auf D) ist, wenn f an jeder Stelle von D differenzierbar ist. Die so auf D erklärte Funktion f' heißt Ableitung von f.
- Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist an $x_0 \in D$ genau dann differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

  $$f(x_0 + h) = f(x_0) + Th + R(h)h, \quad \lim_{h\to 0} R(h) = 0$$

  gilt (T und R hängen i.A. von x_0 ab).
- Ist f an $x_0 \in D$ differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

Beispiele

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\log(x))' = \frac{1}{x}$, $x > 0$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$

Landau-Symbol

Sei f eine Funktion, die auf einem Intervall definiert ist, das 0 enthält. Man schreibt $f(x) = O(x^n)$, wenn es eine Kontante $C > 0$ gibt, so dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^n} \leq C$$

gilt. Man schreibt $f(x) = o(x^n)$, wenn

$$\lim_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^n} = 0$$

gilt.
Bedeutung: $f(x) = O(x^n)$ bedeutet, dass f für x gegen 0 mindestens so schnell gegen 0 geht wie x^n. Im Fall $f(x) = o(x^n)$ fällt die Funktion schneller als x^n.

Höhere Ableitungen

- Man kann induktiv höhere Ableitungen definieren. Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ $(n-1)$-mal differenzierbar mit der $(n-1)$-ten Ableitung $f^{(n-1)}$ und ist $f^{(n-1)}$ wiederum differenzierbar, so nennen wir f n-mal differenzierbar und bezeichnen die n-te Ableitung durch $f^{(n)}$.
- Ist f n-mal differenzierbar und ist die n-te Ableitung $f^{(n)}$ stetig, so heißt f n-mal stetig differenzierbar.
- f heißt unendlich oft differenzierbar, wenn f n-mal differenzierbar ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Ableitungen in Sage I

Durch `diff(<Ausdruck>,x)` wird ein Ausdruck oder eine Funktion nach x abgeleitet.

Beispiele:

```
diff(sin(x),x)
```

```
cos(x)
```

```
diff(x^x,x)
```

```
(log(x) + 1)*x^x
```

Ableitungen in Sage II

Höhere Ableitungen können auch bestimmt werden. Durch `diff(<Ausdruck>,x1,x2,x3,...)` wird die Ableitung von `<Ausdruck>` bzgl. der Unbekannten $x1$ berechnet. Dann wird der entstehende Ausdruck nach $x2$ differenziert, und so fort.

```
_=var('x,y,a'); diff(x^2*y^2+a,x,y)
```

```
4*x*y
```

```
diff(1/x,x,10)
```

```
3628800/x^11
```

Ableitungen - Beispiele

```
f(x) = log(cos(x))
f.diff(); diff(f); diff(f,x,x)
```

```
x |--> -sin(x)/cos(x)
x |--> -sin(x)/cos(x)
x |--> -sin(x)^2/cos(x)^2 - 1
```

```
g(x,y) = sin(x^2+y^2)
g.diff(x,x,y)
```

```
(x, y) |--> -8*x^2*y*cos(x^2 + y^2) - 4*y*sin(x^2 + y^2)
```

Differentationsregeln

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $x_0 \in D$. Dann gilt

- $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (Produktregel),
- $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, falls $g(x_0) \neq 0$ (Quotientenregel).

Differentationsregeln

- Kettenregel: Seien $f: D_f \to \mathbb{R}$ und $g: D_g \to \mathbb{R}$ mit $f(D_f) \subset D_g$. Ferner seien f an $x_0 \in D_f$ und g an $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann gilt

$$(g \circ f)(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

- Leibnizsche Regel

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

- Es gilt für die Umkehrfunktion f^{-1}:

$$(f^{-1})' \circ f = \frac{1}{f'}.$$

Wichtige Sätze

- Ist eine Funktion f an x_0 differenzierbar und hat sie ein lokales Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$.
- (Mittelwertsatz) Sei f eine in dem Intervall $[a, b]$ stetige und in (a, b) differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$, so dass gilt

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

- Eine differenzierbare Funktion auf dem Intervall I ist genau dann konstant, wenn $f'(x)$ auf I identisch verschwindet.

Regel von L'Hospital

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und $g'(x) \neq 0$, $x \in D$ und $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$. Dann gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der Limes auf der rechten Seite existiert.
Der Fall $a = \pm\infty$ ist auch erlaubt!
Bemerkung: Die Aussage gilt auch für $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$

L'Hospital - Beispiele

- Bestimmung von $\lim_{x \to \infty} \frac{ln(x)}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$

```
var('a');f(x) = log(x); g(x) = x^a
assume (a>0);assume(a,'integer')
limit(diff(f(x),x)/diff(g(x),x),x=oo)
```

0

```
limit(f(x)/g(x),x=oo)
```

0

L'Hospital - Beispiele

- Bestimmung von $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x/2)}{1-\cos(x)}$:

```
f(x) = sin(x); g(x) = x
limit(f(x)/g(x), x=0)
```

$$1$$

```
diff(f(x),x);diff(g(x),x)
```

$$\cos(x)$$
$$1$$

```
limit(diff(f(x),x)/diff(g(x),x),x=0)
```

$$1$$

Aufbau

Taylorsche Formel

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar und seien $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$. Dann gibt es $\xi \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x, x_0) \end{aligned}$$

gilt mit dem Lagrangschen Restglied

$$R_n(x, x_0) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Restglied

Für das Restglied gibt es noch andere Darstellungen:

- Darstellung von Cauchy

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

- Integraldarstellung

$$R_n(x, x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Taylorreihe

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und seien $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$. Dann nennt man die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

die Taylorreihe von $f(x)$ um den Entwicklungspunkt x_0.
Frage: Wann stellt die Taylorreihe die Funktion f dar und wann nicht?
Antwort: Wenn das Restglied $R_n(x, x_0)$ für $n \to \infty$ gegen 0 geht.

Hinreichende Bedingungen

- Die Funktion f läßt sich auf $I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ durch die Taylorreihe darstellen, wenn $\delta := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_n}} > 0$ mit $A_n = \sup_{x\in I} \frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}$ gilt.
- Gibt es ein $M > 0$, so dass $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$ ist für $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$, so läßt sich f auf I durch die Taylorreihe darstellen.
- Es gebe ein M mit $f^{(n)}(x) \geq -M^n$, $x \in [a, b]$. Dann gilt die Taylorreihendarstellung für alle $x \in [a, b]$ mit $|x - x_0| < b - x$.

Beispiele

- Ist $f(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n$ ein Polynom, so gilt für jeden Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Beispiele

- Für $f(x) = \exp(x)$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Für $f(x) = \log(x)$ und $x_0 = 1$ gilt

$$\log(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x - 1)^n, \quad 0 < x \leq 2.$$

- Für $f(x) = (1 + x)^a$, $a \in \mathbb{R}$ und $x_0 = 0$ gilt

$$(1 + x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

Visualisierung I

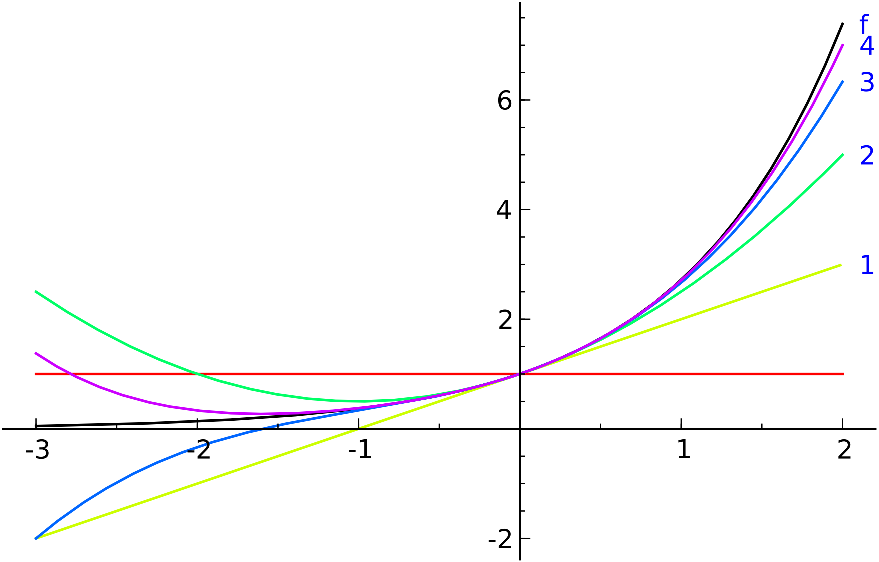
Entwickle $f(x) = exp(x)$ um $x_0 = 0$. Wir entwickeln gemäß der Taylorformel und erhalten die Approximationen $g_0(x) := 1$, $g_1(x) := 1 + x$, $g_2(x) := 1 + x + \frac{1}{2}x^2$, $g_3(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{x^i}{i!}$ und $g_4(x) = \sum_{i=0}^{4} \frac{x^i}{i!}$.

```
var('n,k');f(x) = exp(x)
g = [sum(x^k/factorial(k),k,0,n) for n in [0..4]]; g
```

```
[1, x + 1, 1/2*x^2 + x + 1, 1/6*x^3 + 1/2*x^2 + x + 1,
    1/24*x^4 +
1/6*x^3 + 1/2*x^2 + x + 1]
```

```
p = plot(f,(-3,2),color='black')
for n in [0..4]:
    p += plot(g[n],(-3,2),rgbcolor=hue(n/5),label=n)
p.show()
```

Visualisierung II



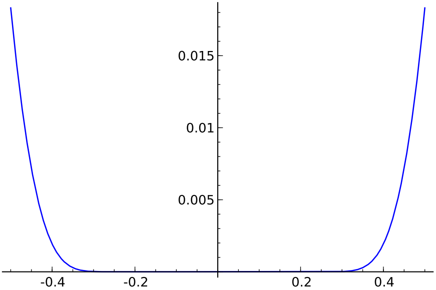
Gegenbeispiel

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist nicht durch ihre Taylorreihe an $x_0 = 0$ darstellbar. Die Taylorreihe zu f ist identisch 0, da $f^n(0) = 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Plot: `plot(exp(-1/x^2),(-0.5,0.5))`.



Taylorformel in Sage

Sage ist in der Lage ein Taylorpolynom zu einer gegebenen Funktion zu berechnen. Das Taylorpolynom $(n-1)$-ten Grades zu einem Ausdruck f (mit Unbekannten x) am Entwicklungspunkt $x0$ kann durch

```
taylor(f, x, x0, n)
```

berechnet werden.

Beispiele

```
taylor(1/(1-x),x,0,5)
```

```
x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1
```

```
taylor(sin(x),x,2,5)
```

```
1/120*(x - 2)^5*cos(2) + 1/24*(x - 2)^4*sin(2) - 1/6*(x
    - 2)^3*cos(2) -
1/2*(x - 2)^2*sin(2) + (x - 2)*cos(2) + sin(2)
```

Aufbau

Begriffe I

- Sei $[a, b]$ ein Intervall. Gilt $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$, so nennt man $Z = (a_0, \ldots, a_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$.
- Eine Funktion $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es eine Zerlegung Z von $[a, b]$ gibt, so dass ϕ konstant ist auf jedem Teilintervall (a_i, a_{i+1}) von Z.
- Wir erklären das Integral einer Treppenfunktion ϕ durch

  $$\int_Z \phi := \sum_{k=1}^{n} c_k(a_k - a_{k-1}).$$

  Dabei ist Z die zugehörige Zerlegung und $c_k = \phi(x)$, $x \in (a_{k-1}, a_k)$.
- Die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$ sei $T[a, b]$.

Begriffe II

Für eine beschränkte Funktion $f[a, b] \to \mathbb{R}$ heißt

$$\int^* f := \inf\{\int \psi \mid \psi \in T[a, b], f \leq \psi\}.$$

das Oberintegral und

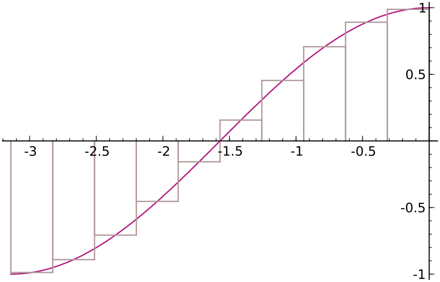
$$\int_* f := \sup\{\int \psi \mid \psi \in T[a, b], f \geq \psi\}.$$

das Unterintegral. Es gilt für $\phi, \psi \in T[a, b]$ mit $\phi \leq f \leq \psi$ die Ungleichung

$$\int \phi \leq \int_* f \leq \int^* f \leq \int \psi.$$

Visualisierung in Sage I

```
f = Piecewise([[(-pi,0),(cos(x)).function(x)]])
rsf = f.riemann_sum(10,mode="midpoint")
P = f.plot(rgbcolor=(0.7,0.1,0.5), plot_points=40)
Q = rsf.plot(rgbcolor=(0.7,0.6,0.6), plot_points=40)
L = add([line([[b,0],[b,f(x=b)]],rgbcolor=(0.7,0.6,0.6))+
    line([[a,0],[a,f(x=a)]],rgbcolor=(0.7,0.6,0.6)) for (
    a,b),f in rsf.list()])
(P + Q +L)
```



Das Riemannsche Integral

Eine beschränkte Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar, wenn Ober- und Unterintegral von f auf $[a, b]$ übereinstimmen.
Der gemeinsame Wert heißt das Integral von f und wird mit

$$\int_a^b f(x)dx$$

bezeichnet. Dabei heißt f der Integrand, x die Integrationsvariable, und a, b sind die Integrationsgrenzen.

Eigenschaften

- Linearität
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$$
- Monotonie
$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx.$$
- Ist f, g integrierbar, so auch $f + g$, $f * g$, $f - g$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$.

Wichtige Sätze

- Ist f stetig auf einem Intervall I und $a \in I$, so ist $F(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in I$ eine differenzierbare Funktion mit $F'(x) = f(x)$.
- Jede stetige Funktion besitzt eine Stammfunktion F, also eine Funktion mit $F'(x) = f(x)$.
- Für eine Stammfunktion F benutzt man auch die Notation $\int f(x)dx$ und spricht von einem unbestimmten Integral.
- Ist f stetig auf $[a, b]$, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$.

Integrieren in Sage

- Bestimmte Integrale der Form $\int_a^b f(x)dx$ können in Sage berechnet werden durch: `integrate(f,x,a,b)` Dabei ist `f` ein Ausdruck.
- Unbestimmte Integrale können durch `integrate(f,x)` bestimmt werden.
- Numerische Approximationen können durch die Funktion `numerical_integral(f,a,b)` berechnet werden (benutzt die GSL-library).

Integrieren - Beispiele I

```
integrate(sin(x),x,0,6)
```

```
-cos(6) + 1
```

```
integrate(exp(x)*x,x,2,3)
```

```
-e^2 + 2*e^3
```

```
integrate(1/x^2,x,1,oo)
```

```
1
```

```
numerical_integral(sin(1/x)*x,1,2)
```

```
(0.91905916759870254, 1.0203606488609102e-14)
```

Integrieren - Beispiele II

```
assume(a<>-1);integrate(x^a*b,x)
```

```
b*x^(a + 1)/(a + 1)
```

```
forget();a=-1;integrate(x^a*b,x)
```

```
b*log(x)
```

Uneigentliche Integrale

Sei f auf $[a, b)$ erklärt (eventuell $b = \infty$) und sei f auf jedem abgeschlossenen Teilintervall integrierbar. Man definiert

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{z \to b(-0)} \int_a^z f(x)dx,$$

falls der Limes existiert. Man spricht von einem uneigentlichen Integral.

Funktionenfolgen

- Sei $(f_n)_n$ eine Folge integrierbarer Funktionen auf $[a,b]$. Konvergiert $(f_n)_n$ gleichmäßig, so ist die Grenzfunktion integrierbar mit
$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$
- Sei $(f_n)_n$ eine Folge differenzierbarer Funktionen auf $[a,b]$. $(f_n')_n$ konvergiere gleichmäßig und es existiere ein $x_0 \in [a,b]$ für den $f_n(x_0)$ konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_n$ gleichmäßig mit $(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.