Einführung in Sage

Dr. J. Schulz

Einheit 5
WS 2009/2010

Aufgabe 1 :

Gegeben seien die Listen $L1 = [x, x^3, x^5, x^7, x^9]$ und $L2 = [x, x^2, x^6, x^{24}, x^{120}]$.

1. Erstellen Sie diese beiden Listen mit Hilfe des $--Operators.
2. Erstellen Sie eine sortierte Liste L3, die die Elemente aus L1 und L2 enthält.
3. Bilden Sie von jedem Eintrag von L3 die Ableitung und die Stammfunktion.
4. Bestimmen Sie von jedem Element von $L3$ den Funktionswert an der Stelle $x = 3$. Entfernen Sie den größten Eintrag aus der resultierenden Liste.

Aufgabe 2 :

Gegeben sei:

```
L=[16,81,125,512,729,4096,19683,78125,262144,390625, 505,22343243,512]
```

1. Bestimmen Sie aus L alle Elemente, die durch 3 teilbar sind und entfernen Sie diese aus der Liste.
2. Bestimmen Sie aus den restlichen Elementen alle Elemente, die durch 2 teilbar sind, und entfernen diese aus der Liste.
3. Bestimmen Sie zuletzt alle Elemente, die durch 5 teilbar sind.

Aufgabe 3 :

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 19 & -2 & 4 \\ 4 & 10 & -2 \\ 4 & -8 & 25 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Überprüfen Sie diese Matrizen ebenfalls auf Diagonalisierbarkeit.

2. Bestimmen Sie die Eigenwerte der (2×2)-Drehmatrix aus der Vorlesung. Überlegen Sie sich, für welche Winkel reelle Eigenwerte existieren. Überlegen Sie sich eine geometrische Begründung.

Aufgabe 4 :

Gegeben seien Basen $V = (v_1, v_2, v_3)$, $W = (w_1, w_2, w_3)$ des $\mathbb{R}^3$ mit Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Basiswechselmatrix bzgl. eines Basiswechsels von V nach W!

Aufgabe 5 :

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 3 & x & 4 \\ -1 & y & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & x \\ 3 & 2 & y \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie x und y so, dass AB invertierbar ist. Überprüfen Sie das Ergebnis durch Einsetzen.

Aufgabe 6 :

Untersuchen Sie für $m = 0, 1, \ldots, 41$ jeweils, wieviele der Zahlen $n^2 + n + m^2$ mit $n = 1, 2, \ldots, 100$ Primzahlen sind.

Aufgabe 7 :

Berechnen Sie mit Hilfe des Punkt-Operators die ersten 10 Glieder der Folge

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}, n \in \mathbb{N}$$

mit Startwert $x_0 = 1$. Erraten Sie den Grenzwert der Folge! Ersetzen Sie den Startwert x_0 durch den Gleitkommawert $x_0 = 1.0$ und berechnen Sie nun die ersten 50 Folgenglieder (Benutzen Sie $DIGITS := 50$).

Aufgabe 8 :

Erstellen Sie eine Tridiagonalmatrix A der Größe 20×20 mit 2 auf der Diagonalen und -1 und auf den Nebendiagonalen.
Berechnen Sie mit Hilfe von Gleitkommaberechnungen bei 10 signifikanten Stellen den größten und den kleinsten Eigenwert von A. Benutzen Sie die Funktion `numeric::eigenvalues`.

Aufgabe 9 :

Schreiben Sie eine Prozedur `fak`, die die Fakultät

$$a! = \prod_{i=1}^{a} i$$

von einer natürlichen Zahl a berechnet.