Lorenz – Gleichungen

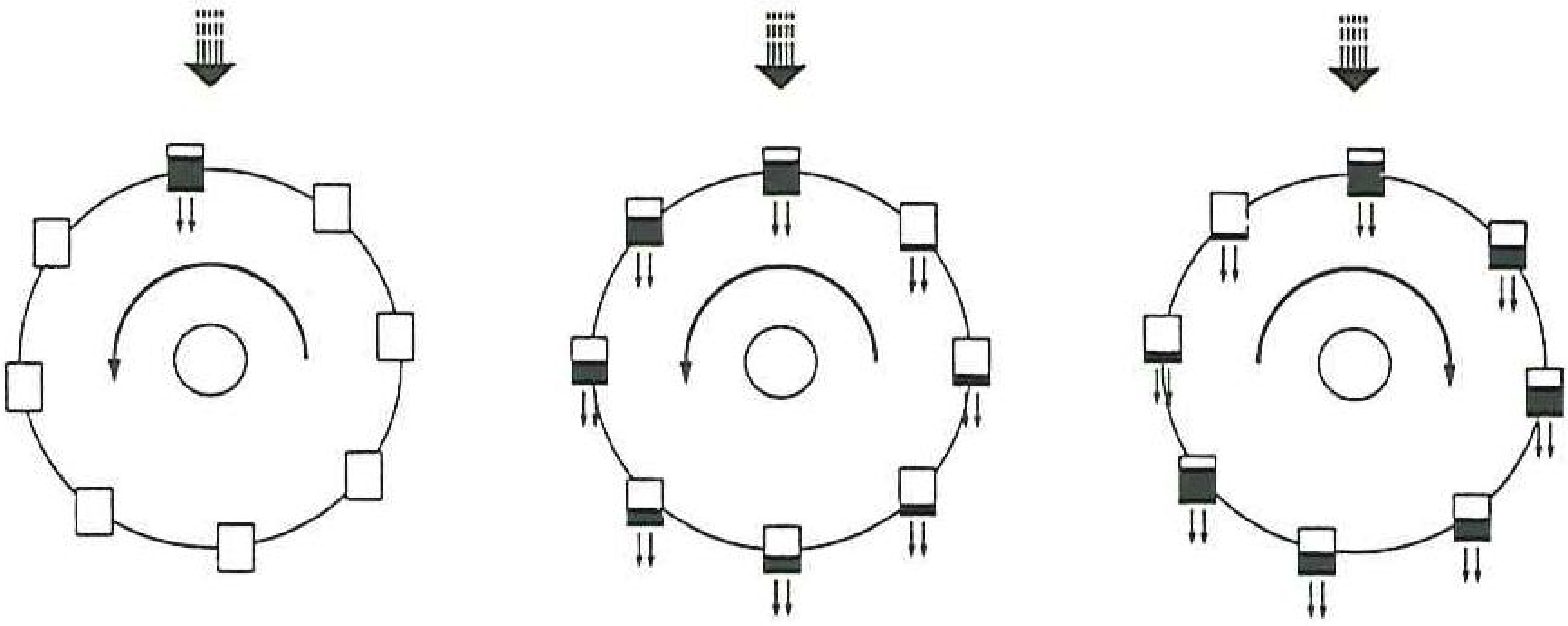
Patrick Jäckel

Juni 2008

Inhalt

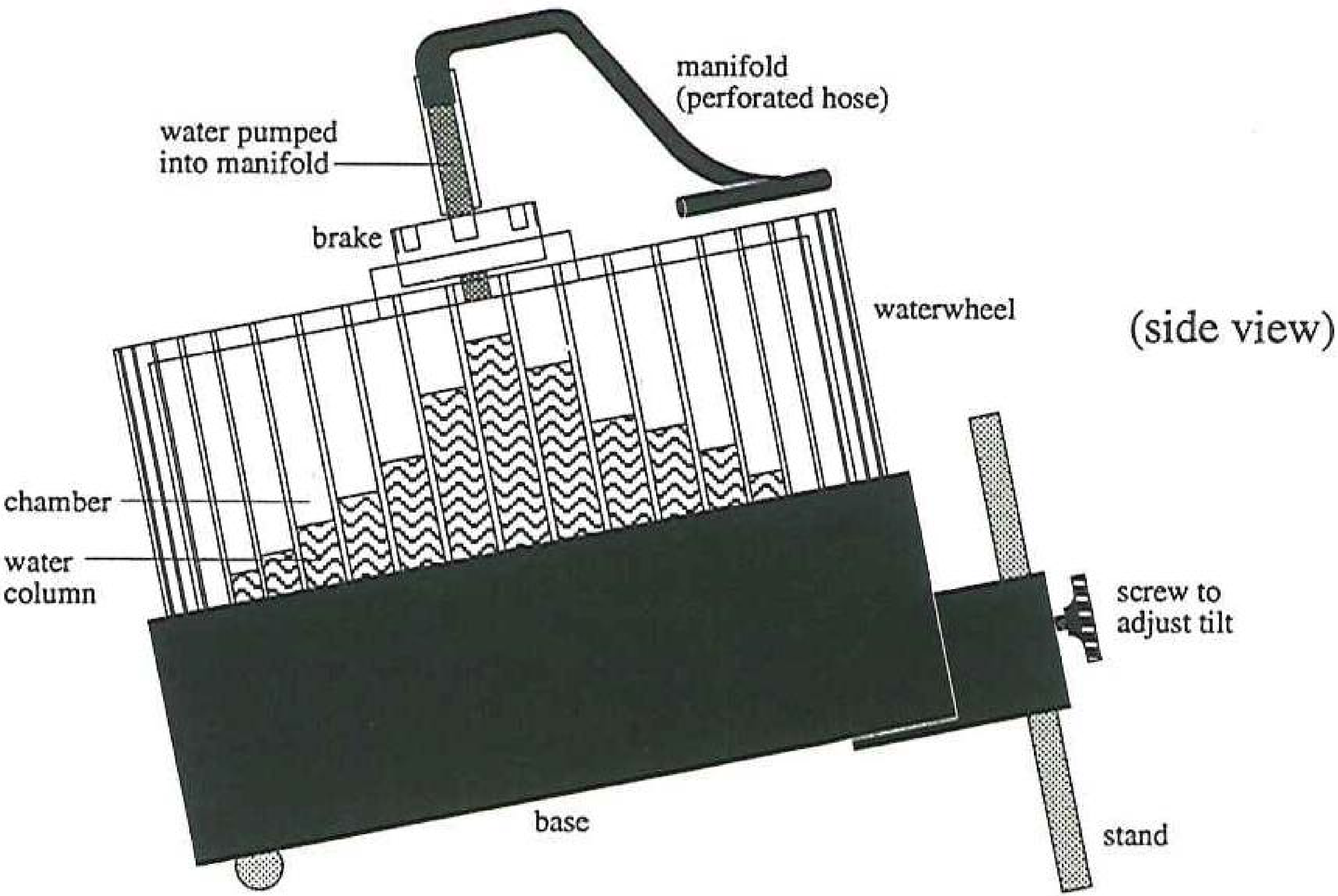
- Herleiten der Gleichungen
- Lorenz und seine Herleitung
- Definitionen
- Liapunov-Exponent
- Folgerungen
- Vorhersagbarkeit (Lorenz Diagramm)
- Parameterraum

Wasser-Rad (A Chaotic Waterwheel)



(a) (b) (c)

Jüngste Wasserrad-Experimente



Herleiten der Gleichungen

1. Massenerhaltung und daraus Kontinuitätsgleichung
2. Drehmomentausgleich
3. Amplituden-Gleichungen

$$\dot{a}_1 = \omega \cdot b_1 - K \cdot a_1$$

$$\dot{b}_1 = -\omega \cdot a_1 - K \cdot b_1 + q_1$$

$$\dot{\omega} = \left(-v \cdot \omega + \pi \cdot g \cdot r \cdot a_1\right) / I$$

$$\boxed{\textbf{Transformation dieser Gleichungen}}$$

Lorenz Gleichungen

$$\dot{a}_1 = \omega \cdot b_1 - K \cdot a_1$$

$$\dot{b}_1 = -\omega \cdot a_1 - K \cdot b_1 + q_1$$

$$\dot{\omega} = \left(-v \cdot \omega + \pi \cdot g \cdot r \cdot a_1\right) / I$$

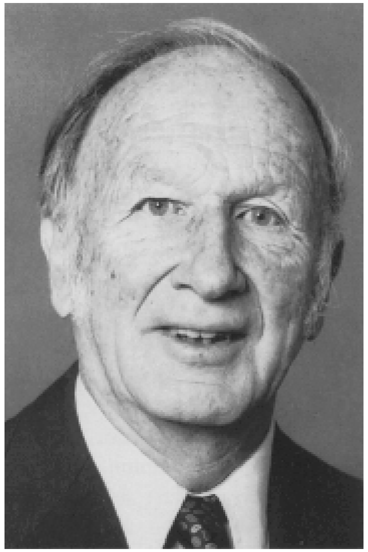
Transformation

$$\dot{x} = \sigma \cdot \left(y - x\right)$$

$$\dot{y} = r \cdot x - y - x \cdot z$$

$$\dot{z} = x \cdot y - b \cdot z$$

Ursprüngliche Herkunft der Gleichungen



Edward N. Lorenz, ein Meteorologe der sich am MIT (Massachusetts Institute of Technology) mit Wettermodellen befasst hat, probierte die Strömungen in Flüssigkeiten und Gasen, die durch die Navier-Stockes-Gleichungen beschrieben werden, so zu reduzieren, dass man Aussagen für das Langzeitverhalten machen kann. 1962 entwickelte Lorenz das sogenannte *"Lorenz-System"* - der erste seltsame Attraktor!

[2]

Definitionen

Was ist (deterministisches) Chaos? / Chaostheorie

Keine allgemeingültige Definition!!

Übereinstimmung von drei „ Definitionsbestandteilen “

Chaos ist aperiodisches, langfristiges Verhalten in einem deterministischen System, das empfindliche Abhängigkeit auf Anfangsbedingungen aufweist.

Was ist ein Attraktor und was ist DER Seltsame-Attraktor?

Schwierig eine strenge Definition einzuführen!

Streitpunkt, wie die Definition ausgedehnt genug und einschränkend genug zugleich sein kann

<u>Locker gesprochene Definition:</u>

Ein Attraktor ist eine Menge, zu der alle benachbarten Trajektorien konvergieren (zusammenlaufen).

Definition des Attraktors über seine Eigenschaften

A ist abgeschlossene Menge

1. A ist eine beschränkte Teilmenge des Phasenraums, für die eine Umgebung R existiert, so dass jede Bahn, die in R beginnt, in R bleibt und sich der Menge A beliebig weit annähert. R heißt Gefangenenbereich des Attraktors

2. Bahnen, die in R anfangen, hängen sensitiv von den Anfangsbedingungen ab

3. A kann nicht in zwei verschiedene Attraktoren aufgespalten werden, was nicht bedeutet, dass der Attraktor eine zusammenhängende Menge ist, sondern dass es Anfangspunkte in R gibt, deren Bahnen jedem Punkt im Attraktor A beliebig nahe kommen

4. **Der Attraktor hat eine fraktale Struktur und wird daher seltsamer Attraktor genannt.**

Seltsamer Attraktor

$$\dot{x} = \sigma \cdot (y - x)$$

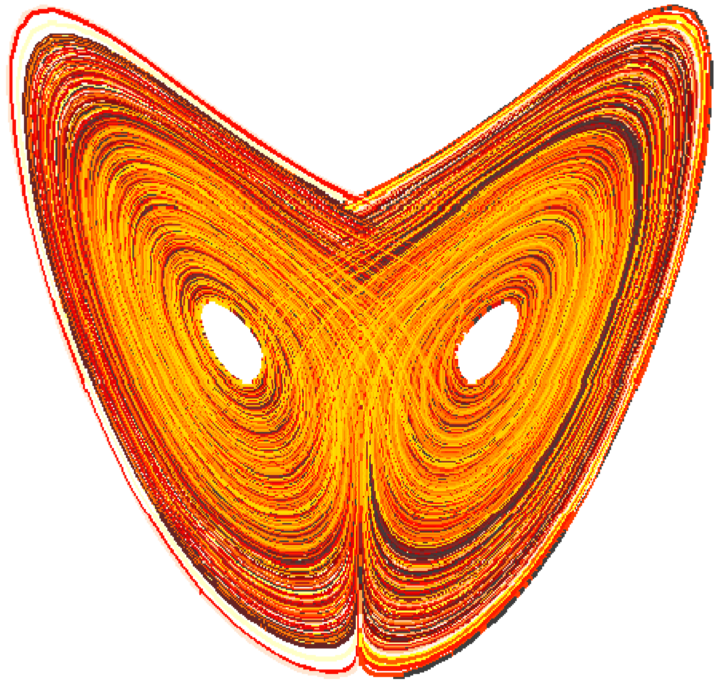
$$\dot{y} = r \cdot x - y - x \cdot z$$

$$\dot{z} = x \cdot y - b \cdot z$$

$$\sigma = 10$$

$$r = 28$$

$$b = {}^{8}\!/_{3}$$

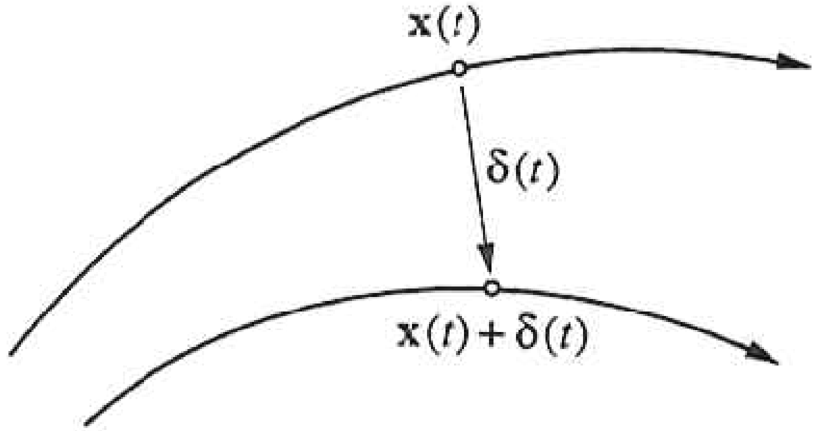


„2-D Ansicht“ !!!

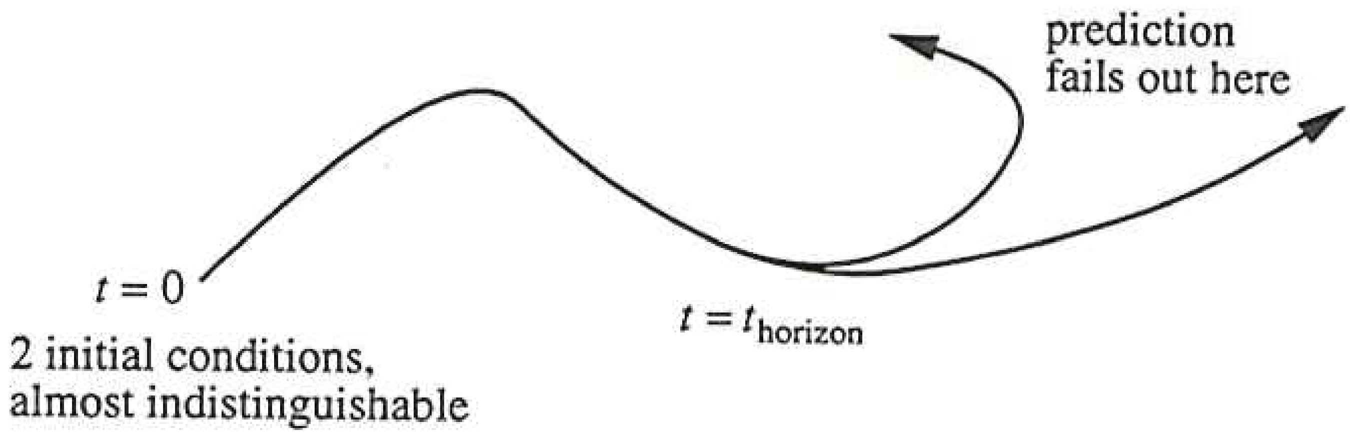
MAPLE 3-D

Liapunov Exponent

Maß für die Sensitivität eines Systems



$$\| \delta(t) \| \propto \| \delta_0 \| \cdot e^{\lambda \cdot t}$$



$$\| \delta(t) \| \propto \| \delta_0 \| \cdot e^{\lambda \cdot t} \qquad\qquad \| \delta(t) \| \geq a$$

$$t_{horizon} \propto O\left(\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{a}{\| \delta_0 \|} \right)$$

Beispiel

$$a = 10^{-3}$$
$$\|\delta_0\| = 10^{-7}$$
$$t_{horizon} \approx \frac{4 \cdot \ln 10}{\lambda}$$

$$a = 10^{-3}$$
$$\|\delta_0\| = 10^{-13}$$
$$t_{horizon} \approx \frac{10 \cdot \ln 10}{\lambda}$$

Anfangsbedingungen enorm verbessern: sei es durch bessere Instrumente, bessere Hilfskräfte, besserer Aufbau etc.

2,5 mal so lange Voraussagen

Folgerungen

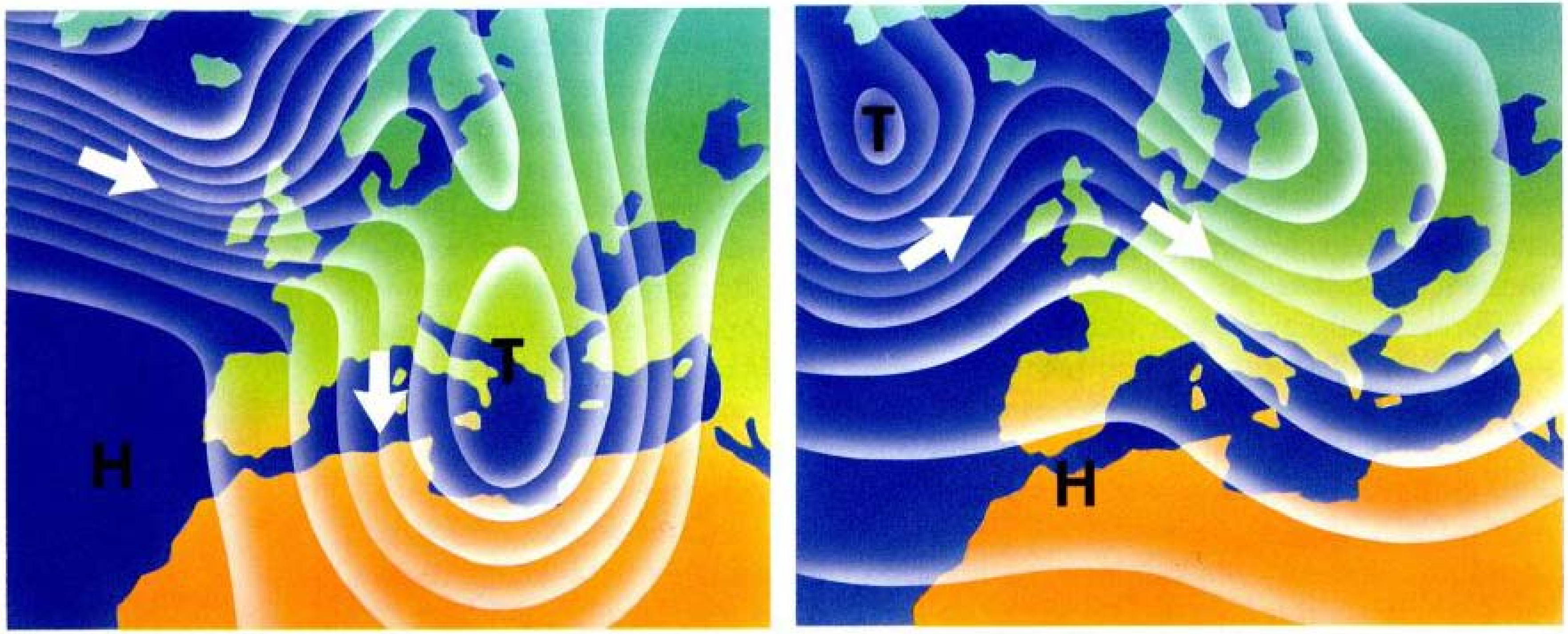
Berechnungen zeigen die Zwecklosigkeit langfristiges Verhalten eines chaotischen Systems vorauszusagen!

Lorenz begründete anhand dieses Sachverhaltes die Schwierigkeit der Wettervorhersage!

Anwendung : Wettervorhersage

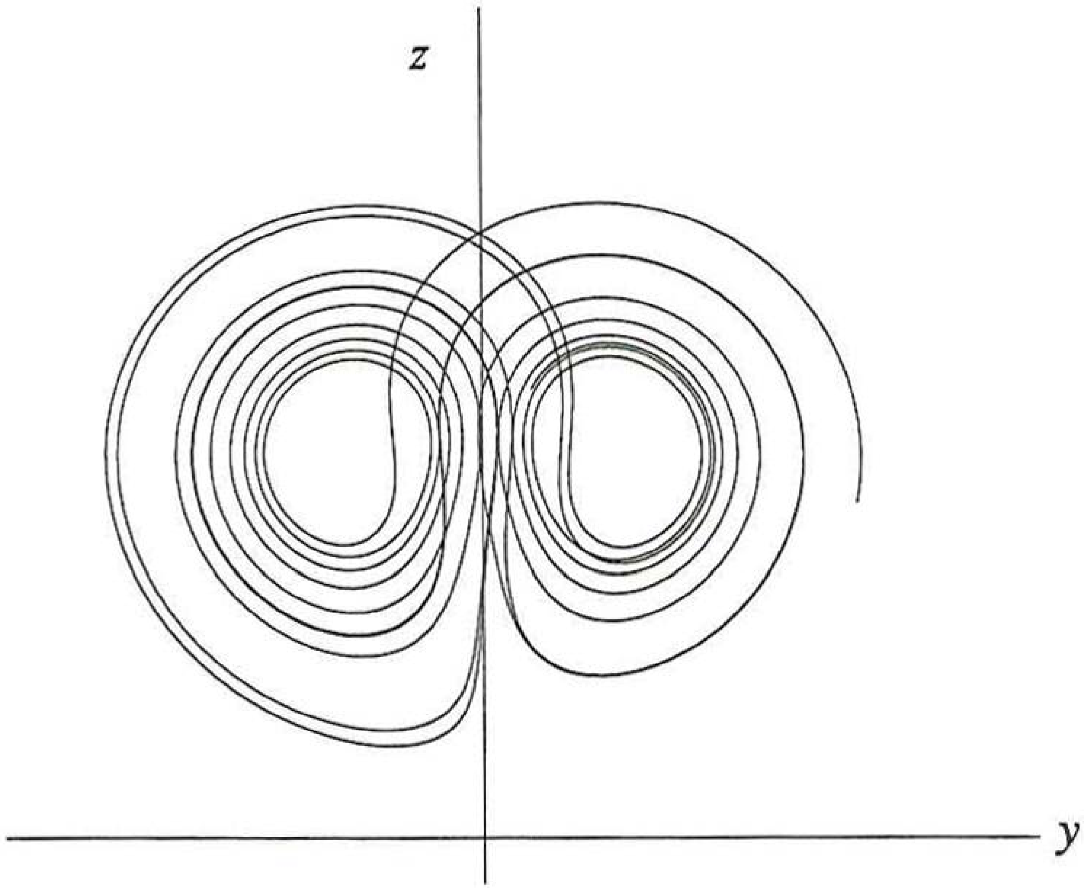
Ausgangssituation -> Sehr geringe Abweichung im Luftdruck

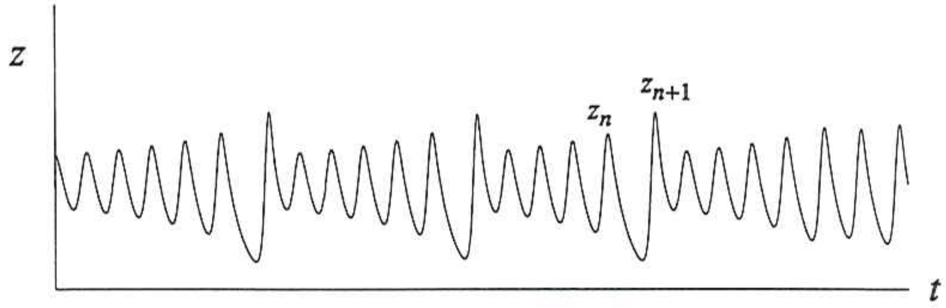
Anwendung : Wettervorhersage

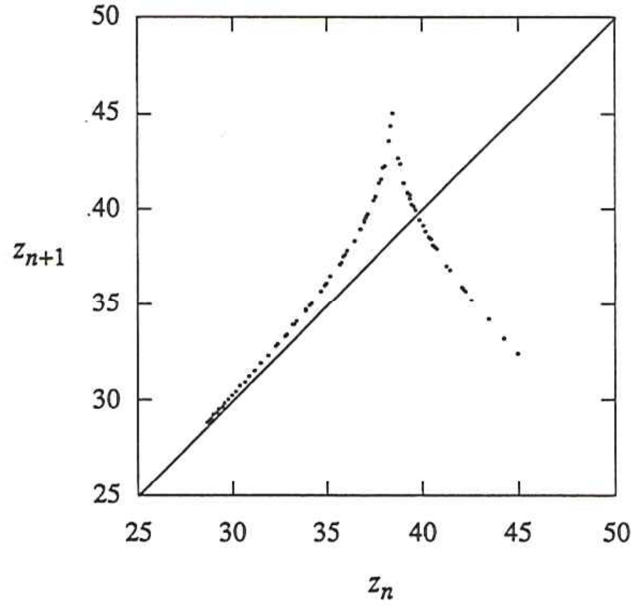


Sieben-Tage-Vorhersage

Lorenz - Diagramm







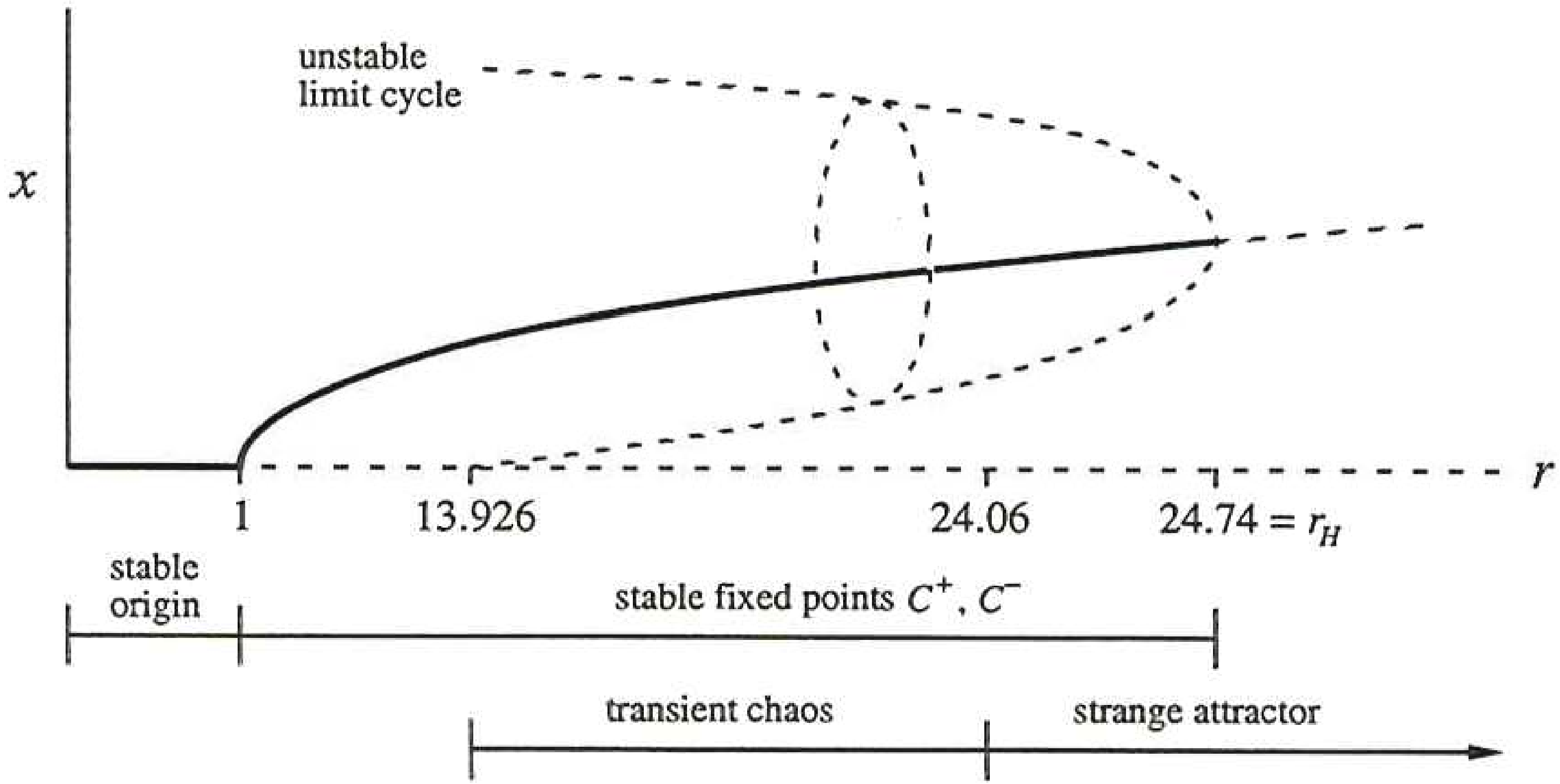
Z_n ist der maximale Z-Wert, der beim Umlauf n erreicht wird.

Durch Z_n soll z_{n+1} vorausgesagt werden

Parameter-Raum

$$\dot{x} = \sigma \cdot (y - x)$$
$$\dot{y} = r \cdot x - y - x \cdot z$$
$$\dot{z} = x \cdot y - b \cdot z$$

$$\sigma = 10$$
$$r = 28$$
$$b = 8/3$$



Literatur

[1] S. H. Strogatz – Nonlinear Dynamics and Chaos

[2] http://www.tu-harburg.de/rzt/rzt/it/Studium/seminar-lorenz/

[3] http://www.math.tu-cottbus.de/INSTITUT/lsam/CompPhysik/LorenzAtt/index.html

[4] http://www.tarphos.de/facharbeit/html/node10.html

[5] Bergmann / Schäfer - Mechanik

[6] Landau – Theoretische Physik 1

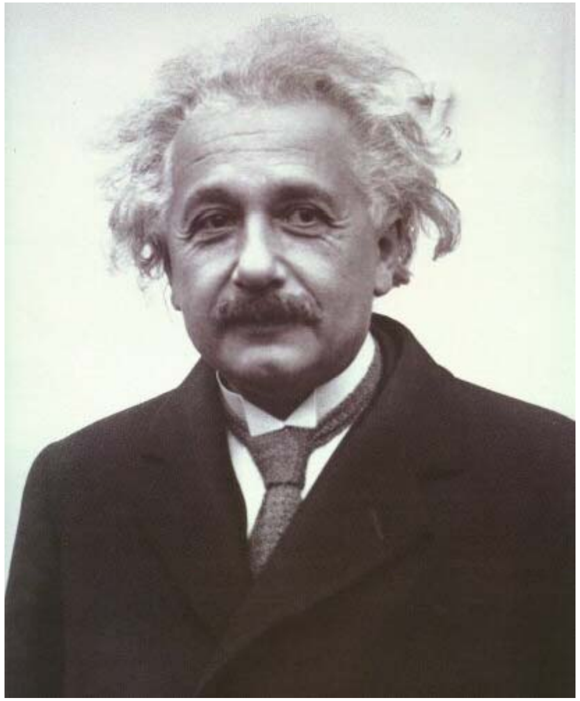
[7] Demtröder – Experimentalphysik 1

[8] http://www.agnld.uni-potsdam.de/~shw/d/2005/Experiment/WasserRad/node3.html

[9] http://www.agnld.uni-potsdam.de/~shw/d/2005/Experiment/WasserRadAlexAnielskiJuni2007.pdf

[10] http://www.math.tu-cottbus.de/INSTITUT/lsam/CompPhysik/LorenzAtt/index.html

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!



"Man muss die Welt nicht verstehen, man muss sich nur darin zurechtfinden."