Einführung in Sage - Einheit 9

Strings, interaktive Grafiken, Wärmeleitungsgleichung, Sage-Code, geogebra ?, interface zu anderen

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen

Aufbau

Klausur

- Zeit: 01.03.2010 von 10:00 - 12:00
- Ort: HS1 (A bis J) und AudiMax (K bis Z)
- Hilfsmittlel: Papier, Schreibgerät(e) und Unterlagen in Papierform
- Studenten-Ausweis mitbringen

Aufbau

Strings

- Zeichenketten (engl. strings) sind eine geordnete Aneinanderreihung von Zeichen. Zeichen sind z.B. Buchstaben, Ziffern, Sonderzeichen,...
- Mit ihnen kann man in Sage Texte gestalten. Sie sind wichtig für die Ausgabe der Ergebnisse.
- Sie haben den Datentyp `str`.
- Sie werden innerhalb von Hochkommas oder Anführungszeichen angegeben.

Beispiele für Strings

```
text1 = 'Dies ist ein String.'; text1
```

```
'Dies ist ein String.'
```

```
text2 = "Dies ist noch ein String."; text2
```

```
'Dies ist noch ein String.'
```

```
type(text1)
```

```
<type 'str'>
```

Zugriff

- Mit dem Indexoperator [ ] können einzelne Zeichen einer Zeichenkette extrahiert werden.

```
text1[0], text1[3], text1[4]
```

```
('D', 's', ' ')
```

- Ersetzungen innerhalb des Strings:

```
text1.replace('Dies','Das')
```

```
'Das ist ein String.'
```

Operationen für Strings I

- Zusammenhängen von Strings

```
A='Letzte '; B='Vorlesung'; A+B
```

```
'Letzte Vorlesung'
```

- `len` gibt die Anzahl der Zeichen in einer Zeichenkette an.

```
a=len(A+B); a
```

```
16
```

Operationen für Strings II

- neue Zugriffsmöglichkeit

```
(A+B)[-1:]
```

```
'g'
```

- Beliebige Sage-Objekte können durch `str()` in einen String verwandelt werden.

```
str(x^2+2), str([1,2,3])
```

```
('x^2 + 2', '[1, 2, 3]')
```

Operationen für Strings III

- Aufspalten von Texten

```
text = 'Dies ist ein Satz, und ein Nebensatz'
text.split()
```

```
['Dies', 'ist', 'ein', 'Satz,', 'und', 'ein', '
    Nebensatz']
```

```
text.split('i')
```

```
['D', 'es ', 'st e', 'n Satz, und e', 'n Nebensatz']
```

Vertiefung print und Formate

```
print 'Text %<format> und %<format> ... ' % (x,y,...)
```

<format>:

```
%[<flag>][<minwidth>][.<precision>]converter
```

- flag: 0 für das Auffüllen mit Nullen
- minwidth: Minimale Breite der Darstellung
- precision: Genauigkeit (Nachkommastellen)
- converter:
  - 'i' ganze Zahl mit Vorzeichen
  - 'e' Gleitkommazahl mit exponentialformat (kleingeschrieben).
  - 'f' Gleitkommazahl im Dezimalformat.
  - 'g' Gleitkommazahl. Benutzt kleingeschriebene Exponentialform wenn der Exponent kleiner als -4 oder der Genauigkeit ist, ansonsten Dezimalformat.

print - Beispiele

```
print '%5s | %7s' % ('Index','Wert')
for k in srange(1,25,9.55):
    print '%5i | %07.3f' % (k,k^2)
```

```
 Index |     Wert
     1 | 001.000
    10 | 111.303
    20 | 404.010
```

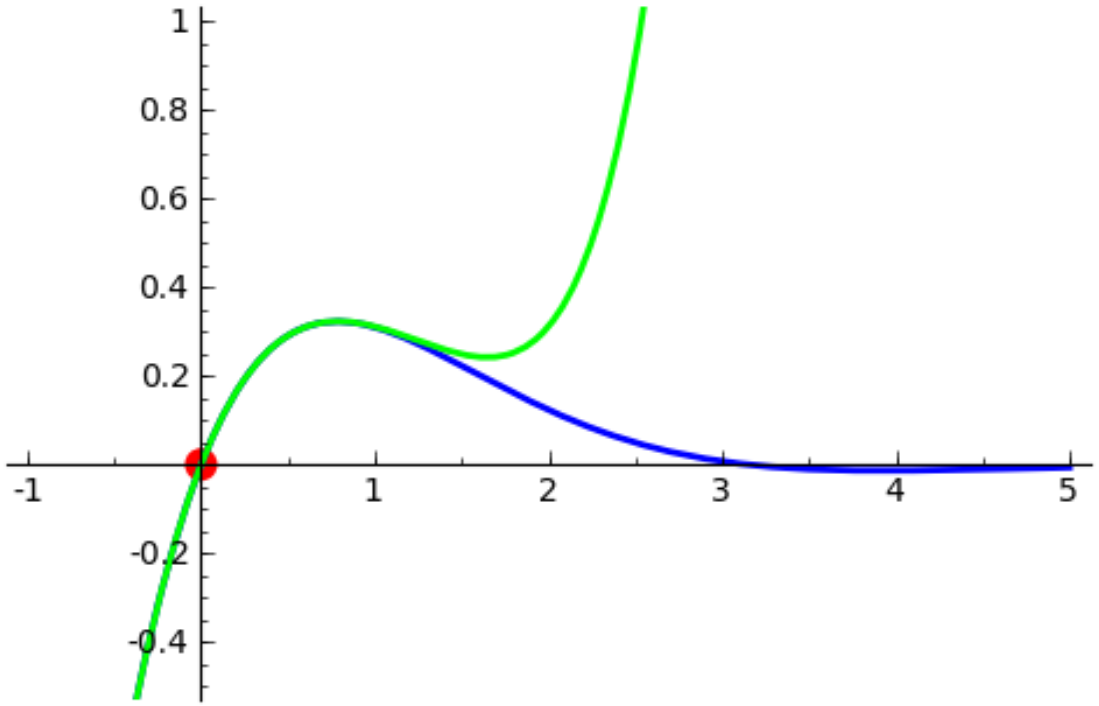
Aufbau

interact I

order 1

$$f(x) = e^{(-x)}\sin(x)$$

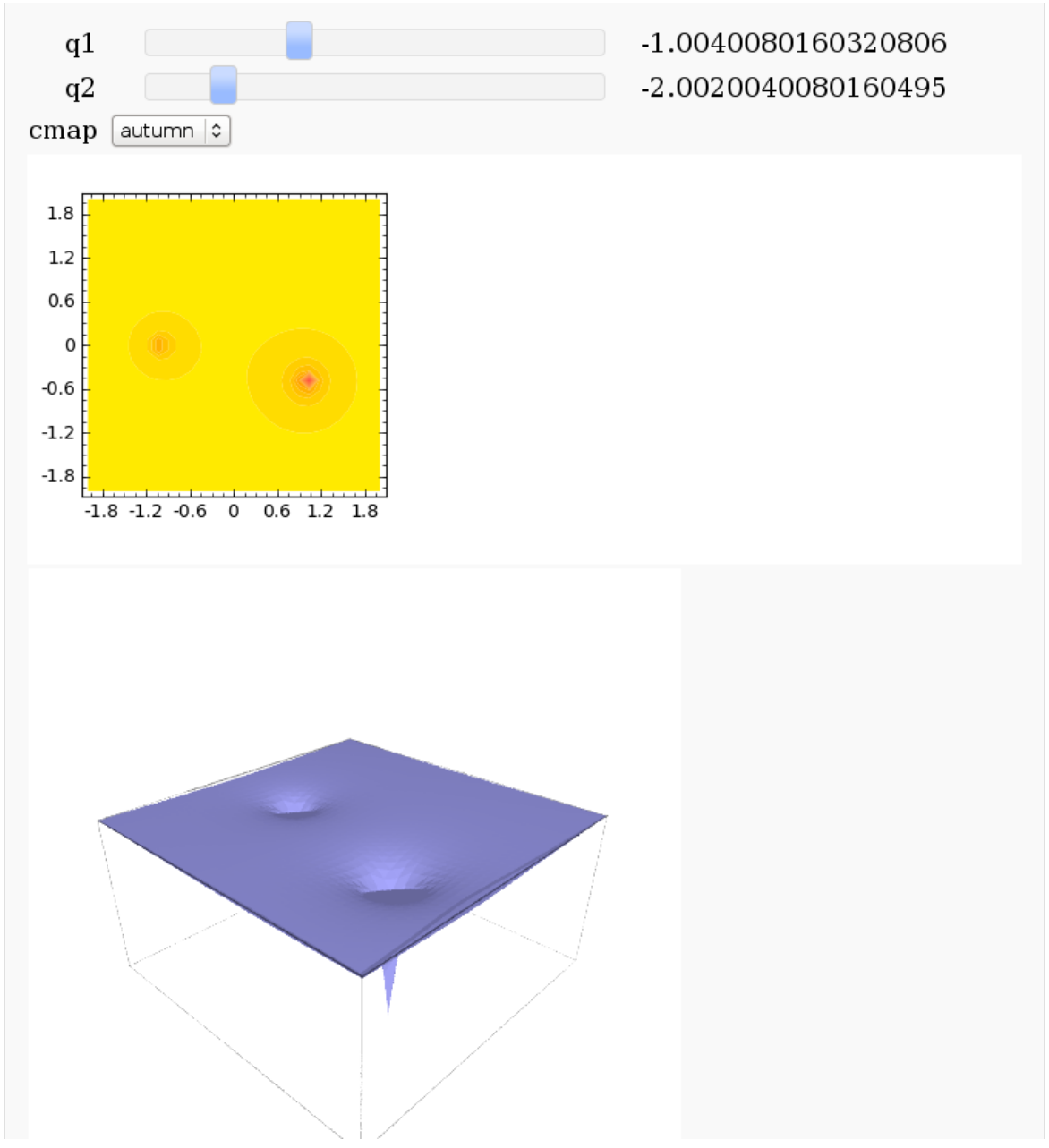
$$\hat{f}(x;0) = \frac{1}{90}x^6 - \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + O(x^7)$$



interact I

```
var('x')
x0  = 0
f   = sin(x)*e^(-x)
p   = plot(f,-1,5, thickness=2)
dot = point((x0,f(x=x0)),pointsize=80,rgbcolor=(1,0,0))
@interact
def tayl(order=(1..12)):
    ft = f.taylor(x,x0,order)
    pt = plot(ft,-1, 5, color='green', thickness=2)
    html('f(x)\;=\;%s'%latex(f))
    html('\hat{f}(x;%s)\;=\;%s+\mathcal{O}(x^{%s})'%(x0,
        latex(ft),order+1))
    show(dot + p + pt, ymin = -.5, ymax = 1)
```

interact II


q1
-1.0040080160320806
q2
-2.0020040080160495
cmap
autumn
1.8
1.2
0.6
0
-0.6
-1.2
-1.8
-1.8 -1.2 -0.6 0 0.6 1.2 1.8

interact II

```
@interact
def _(q1=(-1,(-3,3)), q2=(-2,(-3,3)),
      cmap=['autumn', 'bone', 'cool', 'copper', 'gray', '
          hot', 'hsv',
            'jet', 'pink', 'prism', 'spring', 'summer', '
               winter']):
    x,y = var('x,y')
    f = q1/sqrt((x+1)^2 + y^2) + q2/sqrt((x-1)^2+(y+0.5)
        ^2)
    C = contour_plot(f, (x,-2,2), (y,-2,2), plot_points
        =30, contours=15, cmap=cmap)
    show(C, figsize=3, aspect_ratio=1)
    show(plot3d(f, (x,-2,2), (y,-2,2)), figsize=5,
        viewer='tachyon')
```

Aufbau

Größter gemeinsamer Teiler (ggT)

Berechnung des ggT von natürlichen Zahlen a und b mit Hilfe des euklidischen Algorithmus.

Idee: Es gilt:

1. $ggT(a, b) = ggT(a, b - a)$ für $a < b$.
2. $ggT(a, b) = ggT(b, a)$.
3. $ggT(a, a) = a$.

Algorithmus:
Wiederhole, bis $a = b$

- Ist $a > b$, so $a = a - b$.
- Ist $a < b$, so $b = b - a$

Implementierung

```
ggT:= proc(a,b)
/* Bestimme den ggT von a und b */
begin
  while (a<>b) do
    if (a>b)
          then a:=a-b;
          else b:=b-a;
    end_if;
  end_while;
  return(a);
end_proc:
```

Beispiel

```
for i from 2 to 100 do
 if isprime(i)
   then print(i,"ist Primzahl")
   else print(i,"ist keine Primzahl")
 end_if
end_for:
```

if-Konstrukt

Die Verzweigung `if` hat die folgende Struktur:

```
if Bedingung
    then Befehle1
    else Befehle2
end_if
```

Ist die `Bedingung` wahr, so wird `Befehle1` ausgeführt, ansonsten `Befehle2`. Befehle in den Befehlsfolgen sind durch `:` oder `;` zu trennen. Der `else` Aufruf ist optional.

Berechnung von Primzahlzwillingen

```
T:=[]: anz:=0:
for i from 2 to 10000 do
 if (isprime(i) and isprime(i+2))
      then anz:=anz+1;
      T:=T.[[i,i+2]];
 end_if:
end_for:
print("Anzahl = ",anz);
```

Beispiel: Betrag

```
betrag:=proc(a)
      begin
        case(domtype(a))
          of DOM_INT do
          of DOM_RAT do
          of DOM_FLOAT do
            if a>0 then y:=a: else y:=-a: end_if:
            break;
          of DOM_COMPLEX do
            y:=sqrt(Re(a)^2+Im(a)^2);
            break;
          otherwise
            print("Falscher Eingabetyp");
          end_case:
          return(y);
      end_proc:
```

Gültigkeit von Variablen I

- Mit der Gültigkeit von Variablen ist die Bestandsdauer von Variablen bzw. der Werten dieser Variablen gemeint.
- Beim interaktiven Gebrauch von MuPAD sind alle Variablen *global*, d.h. die den Variablen zugewiesenen Werte bleiben für die gesamte Laufzeit von MuPAD erhalten bis sie geändert werden. Man kann auf die Variablen jederzeit zugreifen und die Werte der Variablen ändern.
- Daneben gibt es aber auch *lokale Variablen*, die nur innerhalb einer Prozedur gültig sind. Nach Beenden der Prozedur werden diese Variablen wieder gelöscht.

Gültigkeit von Variablen II

- In MuPAD sind in Prozeduren definierte Variablen standardmäßig global. Die interaktiv erstellten Variablen sind sowieso global.
- Mit dem Schlüsselwort `local` können in Prozeduren lokale Variablen erzeugt werden. `local` steht zwischen `proc()` und `begin`.
- Die lokalen Bezeichner sind vom Typ `DOM_VAR` (nicht wie erwartet `DOM_IDENT`).
- Die Input-Argumente von Prozeduren sind lokale Variablen.

Mandelbrot-Menge

Die Mandelbrot-Menge ist die Menge von Punkten $c \in \mathbb{C}$ bei denen die Folge $(z_n)_n$, die durch

$$z_0 := c, \qquad z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad n \in \mathbb{N}$$

definiert ist, beschränkt ist.

Programm - Mandelbrot

```
mandel:=proc(x,y)
  local it,a0,a,MAX_IT;
  begin
    if not (testtype(x,Type::Real) and
            testtype(x,Type::Real))
     then procname(x,y)
    else
      MAX_IT := 150;
      it := 0;
      a0 := x + I*y;
      a := a0;
      while (abs(a)<2 and it<MAX_IT) do
        a := a^2 + a0;
        it := it + 1;
      end_while;
      return(float(it/MAX_IT));
    end_if;
  end_proc:
```

Plot - Mandelbrot

Die Funktion `mandel` gibt zu $x + iy$ die relative Anzahl der Iterationsschritte zurück.
Geplottet wird die Funktion nun wie folgt:

```
PlotteMandel:=proc()
  begin
    mandelPlot:=plot::Function3d(mandel(x,y),
      x=-2.1..1.2, y=-1.1..1.1, Mesh=[100,100]);
    plot(mandelPlot,Width=20*unit::cm,
      Height=15*unit::cm);
  end_proc:
```

Programmierregeln

- Falls möglich, nur lokale Variablen benutzen.
- Programme vollständig kommentieren. Das heißt zum einen das eine Kommentarzeile zu Beginn steht, was das Programm macht und wieviele und welche Eingabeparameter es erhalten darf und was die Prozedur zurückgibt. Zusätzlich sollten auch alle wesentlichen Operationen kommentiert werden.
- Werte explizit mit `return()` zurückgeben.
- Programme übersichtlich gestalten, z.B. Schleifen oder Verzweigungen einrücken.
- Keine Umlaute in Programmkommentaren verwenden.

Letztes Beispiel I

```
Gadisch:=proc(x,basis)
  /*-------------------------------------
   Berechnung der  Darstellung
   einer natuerlichen Zahl x zur Basis b
   Rueckgabe des Ergebnis als Liste!
  -------------------------------------*/
  local T,T_r,i;  /* lokale Variablen*/
  begin /* Beginn lokale Prozedur */
  /* Abfangen der Eingabe */
    if not testtype(x,Type::PosInt)
       then return(procname(args()));
    end_if;
    if (not testtype(basis,Type::PosInt)) or basis=1
       then return(procname(args()));
    end_if;
```

Letztes Beispiel II

```
  T:=[];  /* leere Liste */
  /* Beginn Schleife */
  while x>0 do
    T:=[x mod basis].T;
    print(Unquoted,expr2text(x)." : "
      .expr2text(basis)." = "
      .expr2text(x div basis)." Rest "
      .expr2text(x mod basis));
    x:=(x div basis);
  end_while;
  /* Rueckgabe der Liste */
  return(T);
end_proc:
```

Allerletztes Beispiel: Kochsche Kurven I

- Seien y_1, y_2 zwei Punkte im $\mathbb{R}^2$.
- Betrachte die Strecke mit Endpunkten y_1 und y_2.
- Ersetze diese Strecke durch 4 Strecken $\overline{y_1 z_1}$, $\overline{z_1 z_2}$, $\overline{z_2 z_3}$, $\overline{z_3 y_2}$ mit Endpunkten

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \tfrac{2}{3} y_1 + \tfrac{1}{3} y_2 \\
z_2 &= \tfrac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (y_1 - y_2) + \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2) \\
z_3 &= \tfrac{1}{3} y_1 + \tfrac{2}{3} y_2
\end{aligned}
$$

- Dieses Prozedere wird nun für jede einzelne Teilstrecke wiederholt.

Allerletztes Beispiel II

```
koch:=proc(y1,y2,lev)
  local z1,z2,z3;
  begin
    if (lev = 0)
      then Listelinien:=append(Listelinien,
        plot::Line2d([y1[1],y1[2]],[y2[1],y2[2]]));
    else
      /* Definieren der neuen Punkte */
      z1 := 2/3 * y1 + 1/3 * y2;
      z3 := 1/3 * y1 + 2/3 * y2;
      z2 := sqrt(3)/6*matrix([[0, 1],[ -1, 0]])*
              (y1-y2) + 1/2 * ( y1 + y2);
      /* Definieren der 4 Strecken */
      koch(y1, z1, lev-1);
      koch(z1, z2, lev-1);
      koch(z2, z3, lev-1);
      koch(z3, y2, lev-1);
    end_if;
  end_proc:
```

Allerletztes Beispiel III

```
/* Einfacher Fall einer Linie */
plotKoch1:=proc(lev)
           begin
             Listelinien := [];
             y1 := matrix([0,0]);
             y2 := matrix([1,0]);
             koch(y1,y2,lev);
             plot(Listelinien, Axes = None);
           end_proc:
```