Einführung in Sage - Einheit 5

Datencontainer, Lineare Abbildungen, Eigenwert und Eigenvektoren

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen

Aufbau

Aufbau

Lineare Abbildungen

Seien K-Vektorräume V und W gegeben. Eine Abbildung

$$F: \; V \to \; W$$

heißt linear, falls für $v, w \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

(L1) $F(v + w) = F(v) + F(w)$

(L2) $F(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot F(v)$

- Isomorphismus: F bijektiv.
- Endomorphismus: $V = W$.
- Automorphismus: $V = W$ und F bijektiv.

Bemerkungen

- Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis in V und $(w_i)_{i\in I}$ seien Vektoren in W. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $F : V \to W$ mit $F(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$.
- Bild von F: $Im(F) = F(V) := \{F(v), v \in V\}$.
- Kern von F: $Ker(F) := \{v \ \in V \mid F(v) = 0\}$
- Kern und Bild sind Untervektorräume.
- Dimensionsformel:

$$\dim V = \dim F(V) + \dim Ker(F)$$

- $\mathrm{Hom}_K(V, W)$: Die Menge der linearen Abbildungen von V nach W. Sie ist ein Vektorraum durch punktweise Addition und Skalarmultiplikation.

Lineare Abbildungen und Matrizen

- Jeder Matrix $A \in K^{m \times n}$ läßt sich durch

$$L_A : K^n \to K^m, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

  eine lineare Abbildung zuordnen.
- Es gilt $\dim(L_A(K^m)) = \mathrm{Rang}(A)$.

Koordinatenvektor

Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$.

- Die lineare Abbildung $\Phi_{\mathcal{V}} : K^n \ \rightarrow \ V$ mit

$$\Phi_{\mathcal{V}}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

  ist ein Isomorphismus. Man nennt $\Phi_{\mathcal{V}}$ ein Koordinatensystem in V und $x = (x_1, \ldots, x_n) = \Phi_{\mathcal{V}}^{-1}(v)$ den Koordinatenvektor zu $v \in V$.

- Basiswechselabbildung von $\mathcal{V}$ nach Basis $\mathcal{Z}$:

$$T := \Phi_{\mathcal{Z}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{V}}$$

  .

Isomorphismus

Seien K-Vektorräume V und W mit Basen $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{W} = (w_1, \ldots, w_m)$ gegeben.
Für eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ wird durch

$$\begin{array}{rcl} F(v_1) & := & a_{11} w_1 + \cdots + a_{m1} w_m \\ \vdots & & \vdots \\ F(v_n) & := & a_{1n} w_1 + \cdots + a_{mn} w_m \end{array}$$

eine lineare Abbildung F definiert. Dies ergibt einen Isomorphismus

$$L_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} : K^{m \times n} \ \rightarrow \ \mathrm{Hom}_K(V, W), \quad A \ \mapsto \ F.$$

Kanonisches Beispiel

Seien K^n und K^m mit den kanonischen Basen $\mathcal{K}_n$ und $\mathcal{K}_m$ versehen.

- Die Abbildungen $\Phi_{\mathcal{K}_n}$ und $\Phi_{\mathcal{K}_m}$ sind Identitäten.
- Die Abbildung $L_{\mathcal{K}_m}^{\mathcal{K}_n}$ ist gegeben durch

$$L_{\mathcal{K}_m}^{\mathcal{K}_n}(A)(x) = Ax,\ x \in K^n.$$

- Die Spaltenvektoren von A sind die Bilder der Einheitsvektoren unter der Abbildung $L_{\mathcal{K}_m}^{\mathcal{K}_n}(A)$.

Kommutierendes Diagramm

Seien K-Vektorräume V und W mit Basen $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{W} = (w_1, \ldots, w_m)$ und eine lineare Abbildung F gegeben. Dann gilt das folgende kommutierende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "F"] & W \\
K^n \arrow[u, "\Phi_V"] \arrow[r, "(L_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}})^{-1}(F)"'] & K^m \arrow[u, "\Phi_W"']
\end{tikzcd}$$

Drehung

Drehung um den Winkel α - Drehmatrix G:

$$G(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

```
var('a,b');A = matrix([[cos(a),-sin(a)],[sin(a),cos(a)]])
A(a=pi/2)*vector([1,1])
```

```
(-1, 1)
```

Spiegelung

Spiegelung bezüglich der Ebene

$$H(a) := \{x \in \mathbb{R}^3 | x^T a = 0\}, \|a\| = 1$$

durch

$$S(a) := I - 2aa^T.$$

```
a = matrix(3,1,[1,2,3])
a = a/norm(a)
I_n = identity_matrix(3)
S = I_n - 2*a*a.transpose()
norm(S*S-I_n)
```

```
0.0
```

Aufbau

1. Lineare Abbildungen

2. **Eigenwerte und Eigenvektoren**

Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei $A \in K^{n \times n}$. Ein Element $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von A, wenn ein $x \in K^n \setminus \{0\}$ existiert,

$$Ax = \lambda x$$

gilt. Der Vektor $x \in K^n$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ.

- Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p(t) := \det(A - t\, I_n).$$

- Es gibt höchstens n Eigenwerte.

Bemerkungen

- Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.
- Gibt es eine Basis aus Eigenvektoren, so ist A diagonalisierbar, d.h. man kann die Abbildung L_A bei geeigneter Basiswahl durch eine Diagonalmatrix repräsentieren.
- Jeder Endomorphismus eines komplexen Vektorraums läßt sich durch eine Matrix in Jordanscher Normalform darstellen.

Eigenwerte in Sage

- Bestimmung von Eigenwerten

```
_=var('al');A = matrix([[cos(al), sin(al)],[sin(al),-
    cos(al)]])
[ m.full_simplify() for m in  A.eigenvalues()]
```

```
[-1, 1]
```

- Bestimmung von Eigenvektoren

```
A.eigenvectors_right()
```

Eigenwerte in Sage

- Bestimmung des charakteristischen Polynoms

```
E = identity_matrix(2)
p = (A-x*E).det(); p
```

```
(x - cos(al))*(x + cos(al)) - sin(al)^2
```

Alternative (Vorsicht: gleich bis auf Vorzeichen!):

```
A.charpoly()
```

```
[m.full_simplify() for m in solve(p==0,x)]
```

```
[x == -1, x == 1]
```

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Sei $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$. Gesucht ist die Menge der Lösungen (Lösungsraum):

$$\{x \in K^n \mid Ax = b\}$$

- Ist $b = 0$, so spricht man von einem homogenen System. Ansonsten spricht man von einem inhomogenen System.
- Der Lösungsraum W des homogenen Systems bildet einen Untervektorraum des K^n. Die Dimension ist

$$\dim(W) = n - \operatorname{rang}(A).$$

Struktur des Lösungsraums

- affiner Unterraum $X \subset K^n$: wenn ein Unterraum W von K^n und ein $v \in K^n$ existiert, so dass
$$X = v + W$$
- Die Lösungen des inhomogenen Systems $(b \neq 0)$ bilden einen affinen Unterraum des K^n.
- Ist W der Lösungsraum des homogenen Systems und $v \in K^n$ eine beliebige Lösung von $Ax = b$, dann ist der Lösungsraum X von $Ax = b$ gegeben durch $X = v + W$.
- Zwei Lösungen des inhomogenen Systems unterscheiden sich durch eine Lösung des homogenen Systems.

Lösbarkeit

- Das inhomogene System ist genau dann für alle b lösbar, wenn $\operatorname{rang}(A) = m$ gilt.
- Das homogene bzw. das inhomogene System besitzt höchstens eine Lösung, genau dann wenn $\operatorname{rang}(A) = n$ gilt.
- Der Lösungsraum des inhomogenen Systems ist genau dann nicht leer, wenn $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A, b)$ gilt.
- Praktisch kann ein LGS mit dem Gausschen Eliminationsverfahren gelöst werden.

LGS in Sage

Berechnung der Lösungen von $Ax = b$:

```
A = matrix([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]])
b1 = vector([0,0,0])
b2 = vector([1,0,0])
b3 = A*b2
print A\b1
print A\b3
```

```
(0, 0, 0)
(1, 0, 0)
```