Einführung in Sage

Dr. J. Schulz
C. Rügge

Einheit 4
WS 2009/2010

Aufgabe 1 :

Welche der Vektoren $v_1, ..., v_4 \in \mathbb{R}^5$ sind zueinander orthogonal?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 27 \\ 26 \\ 1 \\ -27 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 160 \\ -48 \\ 112 \\ -160 \\ 48 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 120 \\ 234 \\ -23 \\ -43 \\ 29 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 :

Bestimmen Sie für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 1 \\ 8 & 10 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = AB, E = BC \text{ und } F = B^T C$$

jeweils den Rang und die Determinante.

Aufgabe 3 :

Seien A,B,C (2×2)- Matrizen und $x, y \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

$$A(x + y) = Ax + Ay,$$
$$A(B + C) = AB + AC,$$
$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

Aufgabe 4 :

Welche der folgenden Matrizen sind unitär (d.h. $A^*A = I$), orthogonal, invertierbar, symmetrisch oder hermitesch (d.h. $A^* = A$)?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ 0 & \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & i & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 :

Gegeben seien die Untervektorräume $V := \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ und $W := \text{span}\{w_1, w_2, w_3\}$ mit Vektoren $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^5$. Bestimmen Sie die Dimension von $V \cap W$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 13 \\ 21 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -12 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6 :

Erzeugen Sie mit Hilfe von `var()` die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix}$$

Leiten Sie daraus eine allgemeine Determinantenformel für (4×4) Matrizen her.

Aufgabe 7 :

1. Erzeugen Sie die (15×15) Hilbert-Matrix $H := (h_{ij})$ mit $h_{ij} := \frac{1}{i+j-1}$.
2. Bestimmen Sie die Determinante von H.
3. Berechnen Sie für den Vektor $r := (1, \ldots, 1)^T$ das Matrix-Vektorprodukt $y := Hr$.
4. Lösen Sie das Gleichungssystem $Hx = y$. Vergleichen Sie die berechnete Lösung mit der Referenzlösung r.
5. Ersetzen Sie die Matrix H durch $H = (h_{ij})$ mit $h_{ij} = \frac{1.0}{i+j-1}$ lösen Sie erneut das Gleichungssystem. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 8 :

Berechnen Sie eine Gleitkommadarstellung von

$$2 \prod_{i=1}^{1000} \left(\frac{(2i)^2}{(2i-1)(2i+1)} \right).$$

Aufgabe 9 :

Schreiben Sie eine Prozedur, die zu einer gegebenen Menge von ganzen Zahlen die Summe aller Elemente der Menge berechnet und zurückgibt.