Aufbau

Aufbau

Mengen

Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

(G. Cantor; Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre; Mathematische Annalen; Bd. 46; 1895; S. 481-512)

- Element: Ein Objekt x in der Menge M ($x \in M$).
- Enthalten: Es gilt für alle $x \in M$ auch $x \in N$ ($M \subset N$).
- Gleichheit: Es gilt $M \subset N$ und $N \subset M$ ($M = N$).

Mengen in Sage

```
Set([<element1>,<element2>,...])
```

- Es ist eine ungeordnete Menge von beliebigen Objekten.
- Mengen in Sage haben den Typ `set`.
- Leere Mengen: `leere_menge = Set([])`.
- Zugriff: `M[n]` (Menge M, $n \geq 0$)
- Intervallzugriff: `M[i:j]`.

Aufbau

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ (nach Peano)

Natürliche Zahlen $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. Es gibt eine Nachfolgerabbildung $nf : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$
3. nf ist injektiv.
4. Ist $M \subset \mathbb{N}$ mit $0 \in M$ und folgt für alle $m \in M$ das $nf(m) \in M$ gilt, so ist $M = \mathbb{N}$.

Bemerkungen:

- Nachfolgefunktion: $nf(m) = m + 1$
- Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen den natürlichen Zahlen und vollständiger Induktion.
- Sage: kein eigener Datentyp (aber: ganze Zahlen (Integer)).

Äquivalenzrelation

Sei M eine Menge. Eine Äquivalenzrelation R auf M ist eine Teilmenge

$$R \subseteq M \times M$$

mit den folgenden Eigenschaften (Schreibweise: $(x, y) \in R$, $x \sim_R y$, $x \sim y$):

1. **Reflexivität:** für alle $x \in M$ gilt $x \sim x$.
2. **Symmetrie:** für alle $x, y \in M$ folgt aus $x \sim y$ das $y \sim x$.
3. **Transitivität:** für alle $x, y, z \in M$ und $x \sim y$, $y \sim z$ folgt $x \sim z$.

Äquivalenzklasse

- Sei $\sim_R$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M.
- Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt Äquivalenzklasse, falls gilt:
  (a) $A \neq \emptyset$.
  (b) $x, y \in A \;\Rightarrow\; x \sim y$.
  (c) $x \in A,\ y \in M,\ x \sim y \Rightarrow y \in A$.
- Eine Äquivalenzrelation zerlegt eine Menge in disjunkte Äquivalenzklassen.
- Andersrum definiert eine disjunkte Zerlegung einer Menge eine Äquivalenzrelation.
- Ein $a \in A$ ist ein Repräsentant der Äquivalenzklasse A. Man schreibt auch $\overline{a}$ oder a mod R für ein Äquivalenzklasse A.

Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$

- Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:
  $(m, n) \sim (p, q)$ genau dann, wenn $m + q = n + p$ gilt.
- Nichtnegative Zahlen: $(m, 0)$. Sie sind paarweise nicht äquivalent zueinander.
- Negative Zahlen: $(0, m)$.
- Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind gegeben durch die Menge der Äquivalenzklassen.
- Addition:
  $$\overline{(m, n)} + \overline{(u, v)} := \overline{(m + u, n + v)}$$
- Multiplikation:
  $$\overline{(m, n)} \cdot \overline{(u, v)} := \overline{(mu + nv, mv + nu)}$$

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$:

$$(m, n) \sim (p, q) \text{ genau dann, wenn } mq = np \text{ gilt.}$$

Statt (m, n) schreibt man $\frac{m}{n}$.

- Die Äquivalenzklasse $\overline{(0, n)}$, $n \in \mathbb{Z}$ ist die 0 in $\mathbb{Q}$.
- Mit (n, m) gehören auch alle Erweiterungen (kn, km) zu einer Ä.-klasse.
- Addition:

$$\overline{\left(\frac{m}{n}\right)} + \overline{\left(\frac{p}{q}\right)} = \overline{\left(\frac{mq + pn}{nq}\right)},$$

  Multiplikation:

$$\overline{\left(\frac{m}{n}\right)} \cdot \overline{\left(\frac{p}{q}\right)} = \overline{\left(\frac{mp}{nq}\right)}.$$

Gruppe

Eine Gruppe ist ein Paar $(G, \cdot)$ bestehend aus einer Menge G und einer Verknüpfung $\cdot$ auf G, d.h. einer Abbildung

$$\cdot : G \times G \;\to\; G, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b$$

mit folgenden Eigenschaften

(G1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in G$.

(G2) Es existiert ein $e \in G$ (*neutrales Element*) mit $e \cdot a = a$ für alle $a \in G$ und zu jedem $a \in G$ existiert ein $a' \in G$ (*inverses Element*) mit $a' \cdot a = e$.

abelsche Gruppe: $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in G$.

Eigenschaften einer Gruppe

- Für ein neutrales Element gilt auch $a \cdot e = a$ für alle $a \in G$.
- Es gibt genau ein neutrales Element $e \in G$.
- Zu jedem $a \in G$ ist das inverse Element $a' \in G$ eindeutig und wird durch a^{-1} bezeichnet.
- Es gilt auch $a \cdot a' = e$.
- Für abelsche Gruppen schreibt man oft $+$ statt $\cdot$. Das Inverse zu a wird dann mit $-a$, das Neutrale mit 0 bezeichnet.

Körper

Ein Körper ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge K und zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ mit folgenden Eigenschaften:

(K1) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe. (Das neutrale Element heiße 0. Das inverse Element zu $a \in K$ sei $-a$.)

(K2) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ sei eine abelsche Gruppe. (Das neutrale Element dazu sei 1.)

(K3) Distributivgesetze

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\ (a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c) \text{ für alle } a, b, c \in K. \end{aligned}$$

(Ein Körper ist ein kommutativer unitärer Ring)

Beispiele

Gruppen:

- $(\mathbb{Z}, +)$, die ganzen Zahlen mit Addition.
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, die Restklassen modulo n mit Addition.
- $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$
- $(Add(M, \mathbb{R}), +)$, die reellwertigen Funktionen auf einer Menge M mit punktweiser Addition.

Körper:

- Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$.
- Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$.
- Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$.
- Für p Primzahl $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, die Restklassen modulo p mit $+$ und $\cdot$.

Anordnung

Sei K ein Körper. Er heißt angeordnet, wenn es einen Positivbereich $P \subset K$ gibt mit

- Die Mengen P, $\{0\}$, und $-P := \{-x \mid x \in P\}$ sind disjunkt.
- $K = P \cup \{0\} \cup -P$.
- Aus $x, y \in P$ folgt $x + y \in P$ und $x \cdot y \in P$.

Man definiert:

$$\begin{aligned} x > y \quad &\text{genau dann, wenn} \quad x - y \in P, \\ x \geq y \quad &\text{genau dann, wenn} \quad x - y \in P \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Analog definiert man $<$ und $\leq$.

Schranken

Sei K ein angeordneter Körper.

- obere Schranke $y \in K$: Für $M \subset K$, wenn für alle $x \in M$ die Relation $x \leq y$ gilt.
- nach oben beschränkt: Wenn eine Teilmenge M von K eine obere Schranke besitzt (analog untere Schranke).
- Maximum von M: Eine obere Schranke y einer Teilmenge $M \subset K$, wenn $y \in M$ (analog Minimum).
- Supremum: Die kleinstmögliche obere Schranke y einer Teilmenge $M \subset K$ (analog Infimum) (Nicht notwendigerweise in M oder K).

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

- Sei M die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{Q}$ mit oberer Schranke.
- Äquivalenzrelation: Zwei Elemente aus M seien äquivalent, wenn sie dieselben Mengen von oberen Schranken haben.
- Die entstehenden Äquivalenzklassen nennt man reelle Zahlen.

Bemerkungen

- Es lassen sich die üblichen Verknüpfungen auf $\mathbb{R}$ definieren.
- Die reellen Zahlen können auch als Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ definiert werden oder durch den Dedekindschen Schnitt.
- Die rationalen Zahlen sind als Äquivalenzklassen der einelementigen Mengen $\{x\}$, $x \in \mathbb{Q}$ enthalten.

Rundungsfehler

- Relativer Fehler: Sei $rd(x)$ die 'gerundete' Gleitkomma-Zahl zu $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt
$$\frac{|x - rd(x)|}{|x|} \leq \varepsilon$$
mit $\varepsilon = b^{1-t}$ (b=Basis, t=Anzahl signifikante Stellen).
- Rundungsfehler können sich innerhalb eines Verfahrens verstärken. (*Fehlerfortpflanzung*).
- Katastrophale Auswirkungen möglich! Z.B. Absturz der Arianne-Rakete 1996.

Warnung! Die Subtraktion zweier fast gleichgroßer Gleitkommazahlen ist zu vermeiden.

Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen: Die Menge $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit

- Addition: $(k, l) + (n, m) = (k + n, l + m)$
- Multiplikation: $(k, l) \cdot (n, m) = (kn - lm, km + ln)$
- $i := (0, 1)$ mit
  - $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$
  - $\forall (x, y) \in \mathbb{C} : (x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) = x + iy$
- Betrag: $|z| = |(x, y)| := \sqrt{x^2 + y^2}$ (Sage: `abs`)

Eigenschaften von $\mathbb{C}$

- Fundamentalsatz der Algebra: Jedes nicht konstante Polynom (mit komplexen Koeffizienten) hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.
- Polarkoordinaten (r, φ) zu $(x, y) \in \mathbb{C}$

$$r := \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan(\varphi) = \frac{y}{x}$$

- Es gilt: $z = (x, y)_{\text{Rechtwinklig}} = (r, \varphi)_{\text{Polar}} = re^{i\varphi}$