Einführung in Sage - Einheit 6

Folgen, Reihen, Potenzreihen, Vertiefung Schleifen

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen

Aufbau

Aufbau

Folgen

- reelle Zahlenfolge: Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
- Alternative Notation: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(a_n)_n$.
- Glieder der Folge: Die Zahlen a_n.
- Teilfolge: $(a_{n_i})_{n_i}$ ist eine Abbildung $a : N \to \mathbb{R}$, wobei $N \subset \mathbb{N}$ eine Menge mit unendlich vielen Elementen ist.
- Bemerkung: Wir beschränken uns auf den Fall reeller Zahlenfolgen.

Konvergenz von Folgen

Eine Zahlenfolge $(a_n)_n$ ist konvergent gegen den Grenzwert oder Limes $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

gilt. Man schreibt

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

divergent: nicht konvergente Folge.

Bemerkungen

- Nullfolge: Folge konvergiert gegen 0.
- Häufungspunkt: Grenzwert einer konvergenten Teilfolge $(a_{n_i})_{n_i}$.
  - Ein Folge kann keinen aber auch mehrere Häufungspunkte besitzten
  - konvergente Folgen haben genau einen Häufungspunkt.
- Cauchy-Folge: eine Folge $(a_n)_n$ bei der für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, m \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.
- In $\mathbb{R}$ ist eine Folge konvergent, genau dann wenn sie eine Cauchy-Folge ist (Vollständigkeit).
- ε-Umgebung: $U_\varepsilon(a)$ von a ist definiert durch

$$U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}.$$

Folgen in Sage I

Grenzwerte von Folgen $(a_n)_n$ können in Sage mit Hilfe von

```
limit(expr(x), x = oo, dir='above')
```

berechnet werden. Dabei ist *expr*(x) ein Ausdruck.

Beispiele:

- $a_n := \frac{1}{n+1} => 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ (konvergent)

```
_=var('n');limit(1/(n+1),n=oo)
```

```
0
```

- $d_n := \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} => \frac{2^1}{1^1}, \frac{3^2}{2^2}, \frac{4^3}{3^3}, \ldots$ (konvergent)

```
limit(((n+2)/(n+1))^(n+1),n=oo)
```

```
e
```

Folgen in Sage II

- $e_n := (-1)^n => 1, -1, 1, -1, ...$ (divergent)

```
limit((-1)^n,n=oo)
```

```
ind
```

- $c_n := 2^n => 1, 2, 4, 8, \ldots$ (divergent)

```
limit(2^n,n=oo)
```

```
+Infinity
```

- $b_n := 2^{-n} => 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ (konvergent)

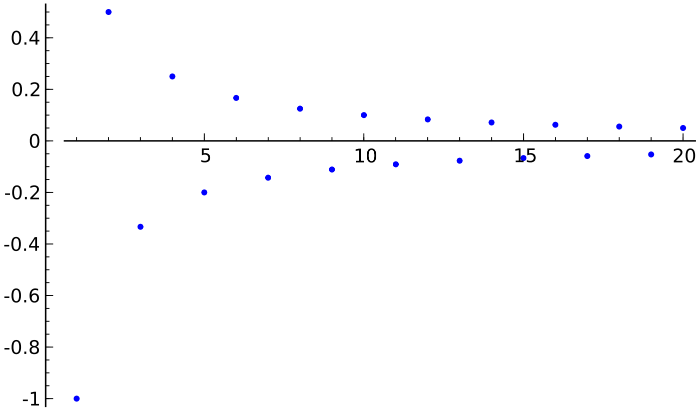
```
limit(2^(-n),n=oo)
```

```
1/1048576
```

Visualisieren von Folgen

Folgen können in Sage durch `points` visualisiert werden.

```
var('n');
point([(n,(-1)^n/n) for n in range(1,21)], pointsize=8)
```



Konvergenzkriterien

- Jede monotone, beschränkte Folge konvergiert.
- Konvergenz bei Addition: Sind $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente Folgen, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist auch die Folge $(\alpha a_n + \beta b_n)_n$ konvergent mit dem Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n + \beta \lim_{n\to\infty} b_n.$$

- Konvergenz bei Multiplikation: Sind $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente Folgen, so ist auch die Folge $(a_n b_n)_n$ konvergent mit dem Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n).$$

- Bemerkung: Weglassen oder Hinzufügen endlich vieler Glieder verändert das Konvergenzverhalten nicht.

Wichtige Sätze

- (Bolzano-Weierstrass): Jede beschränkte Folge besitzt (mindestens) eine konvergente Teilfolge.
- Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert gegen den Grenzwert der ursprünglichen Folge.
- Jede konvergente Folge ist beschränkt, d.h. es gibt ein $K > 0$, so dass $|a_n| \leq K$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Zwischenfolge: Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Dann gilt für eine Folge $(c_n)_n$ mit $a_n \leq c_n \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}$, dass sie konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Rekursive Folgen

Rekursive Folgen können durch rekursive Funktionen erzeugt werden.
Beispiel:

$$y_{n+2} := 2y_{n+1} - y_n + 2, \quad y_0 = -1, y_1 = a.$$

```
var('a')
def y(n):
    if n==0:
        return -1
    if n==1:
        return a
    return 2*y(n-1)-y(n-2)+2
y(4)
```

```
4*a + 15
```

Aufbau

Reihen

Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen. Eine (unendliche) Reihe mit den Gliedern a_n, in Zeichen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$

ist definiert durch die Folge $(s_n)_n$ der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Der Grenzwert s der Folge $(s_n)_n$ wird als Wert oder Summe der Reihe bezeichnet. Man schreibt

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Bemerkungen

- Reihen sind eine spezielle Art von Folgen.
- Indizierung mit m: $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$.
- Bei Abänderung, Weglassen oder Hinzufügen endlich vieler Glieder bleiben Konvergenz und Divergenz unberührt. I.A. wird sich aber der Grenzwert ändern.

Reihen in Sage

```
sum(<f>,<i>,<a>,<b>)
```

Gesucht: geschlossene Darstellung der Summe $\sum_{i=a}^{b} f(i)$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen (auch unendlich (`infinity/oo`), `f` Ausdruck in i.

- Oft ist die Konvergenz einer Reihe abhängig von bestimmten Parametern. Je nach Parameterwert zeigt die Reihe unterschiedliches Konvergenzverhalten.

Beispiele

- geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Die Partialsummen lauten

$$s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \begin{cases} n+1, & \text{falls } x = 1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, & \text{falls } x \neq 1 \end{cases} .$$

Die Reihe divergiert für $|x| \geq 1$ und konvergiert für $|x| < 1$ mit dem Wert $\sum_{n=0}^{\infty} = \frac{1}{1-x}$.

```
sum(x^k,k,0,oo)
```

```
Is  abs(x)-1  positive, negative, or zero?
```

Entsprechend gibt es keine geschlossene Form. Für $x = 1/2$ gilt

```
x = 1/2; sum(x^k,k,0,oo)
```

```
2
```

Beispiele

- Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert gegen $\pi^2/6$.

```
_=var('k');sum(1/k^2,k,1,oo)
```

```
1/6*pi^2
```

- Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergiert.

```
sum((-1)^(k+1)/k,k,1,oo)
```

```
log(2)
```

- Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

```
sum(1/k,k,1,oo)
```

```
ValueError: Sum is divergent
```

Partialsummen

- Definieren der Partialsumme

```
_=var('x,n,k')
s = sum(x^k,k,0,n); s
```

$$\frac{x^{(n+1)} - 1}{x - 1}$$

- Die ersten 5 Glieder der Partialsumme

```
assume(x<>1); [s(n=m) for m in [1..6]]
```

$$\left[\frac{x^2 - 1}{x - 1}, \frac{x^3 - 1}{x - 1}, \frac{x^4 - 1}{x - 1}, \frac{x^5 - 1}{x - 1}, \frac{x^6 - 1}{x - 1}, \frac{x^7 - 1}{x - 1}\right]$$

Partialsummen II

- Bestimmen des Grenzwertes der Folge der Partialsummen

```
forget();assume(abs(x)<1);limit(s,n=oo)
```

```
-1/(x - 1)
```

```
forget();assume(x>1);limit(s,n=oo)
```

```
+Infinity
```

Annahmen - `assume()`

```
assume(<assumptions>)
```

Annahmen für bestimmte Bezeichner.

Beispiele:

```
assume(x,'real') # x wird auf ℝ eingeschränkt
assume(x>a) # x wird auf {y ∈ ℝ | y > a} eingeschränkt
```

Ruft man `assume` mehrmals für einen Bezeichner auf, werden zusätzliche Annahmen gemacht. Sind diese Widersprüchlich erhält man eine entsprechende Meldung.

Bemerkungen

- Umformungen oder Vereinfachungen für symbolische Bezeichner werden i.A. nur dann durchgeführt, wenn sie für alle komplexen Zahlen gelten. Hier kann ein Einschränken des Definitionsbereichs helfen.
- Mittels

  ```
  forget(x>a)
  ```

  wird die Annahme `x>a` gelöscht.
- Durch

  ```
  assumptions()
  ```

  können alle Annahmen ausgegeben werden.

Beispiele zu assume I

```
var('c'); assumptions()
```

```
c
[]
```

```
c = 2; assume(c>0)
```

```
AttributeError: 'bool' object has no attribute 'assume'
```

Beispiele zu assume II

```
_=var('c')
assume(c,'integer'); assumptions()
```

```
[c is integer]
```

```
sin(c*pi)
```

```
sin(pi*c)
```

```
sin(c*pi).simplify()
```

```
0
```

```
assume(x>0)
sqrt(x^2).simplify()
```

```
x
```

Einige Annahmen für assume

Annahme	Erklärung
`'real'`	$\mathbb{R}$
`'rational'`	$\mathbb{Q}$
`'integer'`	$\mathbb{Z}$
`'complex'`	$\mathbb{C}$
`'even'`	gerade Zahl
`'odd'`	ungerade Zahl
`'increasing'`	wachsend
`'analytic'`	analytisch

Konvergenzkriterien

- Cauchykriterium: Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m, n \geq n_0$ gilt $|\sum_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon$.
- Notwendiges Kriterium: Konvergiert eine Reihe, so bilden ihre Glieder eine Nullfolge. Dieses Kriterium ist nicht hinreichend!
- Verdichtungskriterium: Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit einer Folge nichtnegativer, monoton fallender Glieder konvergiert genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

Konvergenzkriterien

Gilt $0 \leq c_n \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

- Minorante: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$
- Majorante: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn...

Majorantenkriterium: eine konvergente Majorante besitzt (nichtnegative Glieder).

Quotientenkriterium: Die Glieder positiv sind und ein $q < 1$ existiert, so dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$.

Wurzelkriterium: Die Glieder positiv sind und ein $q < 1$ existiert, so dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sqrt[n]{a_n} \leq q$.

Leibnizsches Kriterium: wenn die Folge $(a_n)_n$ bei $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, wenn...

Majorantenkriterium: sie eine divergente Minorante besitzt.

Beispiele

- Betrachte $\sum_{n=0}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$

```
f(n) = n^4*exp(-n*n)
g(n) = f(n+1)/f(n)
limit(g(n),n=oo)
```

```
0
```

- Betrache $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$

```
f(n) = 1/(n*(log(n)^2))
g(n) = 2^n*f(2^n)
h(n) = 2^n*g(2^n)
limit(h(n+1)/h(n),n=oo)
```

```
1/2
```

Absolute und bedingte Konvergenz

absolut konvergent: Ist eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.
bedingt konvergent: konvergent, aber nicht absolut konvergent.

- Absolut konvergente Reihen können beliebig umgeordnet werden.
- Dies ist i.d.R. bei nicht absolut konvergenten Reihen falsch!

Aufbau

Potenzreihen

Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

mit $x_0 \in \mathbb{R}$.

Konvergenzradius:

$$\rho := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Ist $a_n \neq 0$ für alle $n > n_0$:

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Konvergenzverhalten:

- konvergiert absolut für $|x - x_0| < \rho$.
- divergiert für $|x - x_0| > \rho$.
- Die Konvergenz an den Stellen $x_0 - \rho$ und $x_0 + \rho$ muss bei jeder Reihe individuell geprüft werden.

Beispiele

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

```
f(n) = 1/factorial(n)
rho = limit(expand(f(n)/f(n+1)),n=oo); rho
```

```
+Infinity
```

Die Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

- $\sum_{n=0}^{\infty} n^s x^n$, $s > 0$

```
_=var('s');f(n)= n^s; assume(s>0)
limit(expand(f(n)^(1/n)),n=infinity)
```

1

Der Konvergenzradius ist 1.

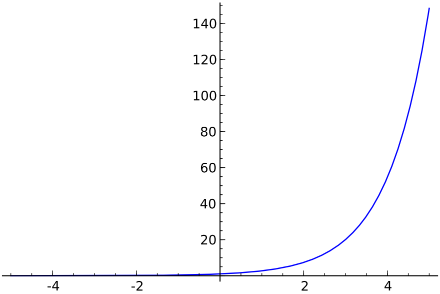
Exponentialfunktion

Wir erklären die Exponentialfunktion durch

$$exp(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, x \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Plot:

```
plot(exp,(-5,5))
```



Eigenschaften der Exponentialfunktion

- Es gilt $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.
- Es gilt $\exp(x) = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$.
- Es gilt $\exp(x) = 1/\exp(-x)$.
- Die Umkehrfunktion auf $\mathbb{R}_+$ der Exponentialfunktion ist die Logarithmusfunktion $\log(x)$. Es gilt

$$\exp(\log(x)) = x,\ x > 0, \quad \log(\exp(x)) = x,\ x \in \mathbb{R}.$$

- Die allgemeine Potenz ist durch $a^x := \exp(x \log a)$, $a \in \mathbb{R}_+$ definiert.

Sage

```
sum(x^n/factorial(n),n,0,oo)
```

```
e^x
```

```
exp(log(x))
```

```
x
```

```
_=var('n');limit((1+x/n)^n,n=oo)
```

```
e^x
```

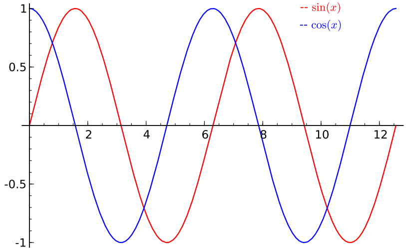
Trigonometrische Funktionen

Die Sinusfunktion und die Cosinusfunktion sind definiert durch

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Die Potenzreihen konvergieren für alle $x \in \mathbb{R}$. Plotten:

```
p = plot(sin,0,4*pi,color='red')
p += plot(cos,0,4*pi);
p += text('-- sin(x)', (10, 1.0), color='red')
p += text('-- cos(x)', (10, 0.85)); p.show()
```



Eigenschaften

- Additionstheoreme:

$$
\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y.
\end{aligned}
$$

- $$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

- $$
\begin{aligned}
\sin(x+\pi/2) &= \cos(x) \\
\cos(x+\pi/2) &= -\sin(x).
\end{aligned}
$$

- Wir definieren π, indem wir die kleinste positive Nullstelle von $\cos(x)$ als $\pi/2$ definieren.

Sage

```
solve(cos(x)==0,x)
```

```
[x == 1/2*pi]
```

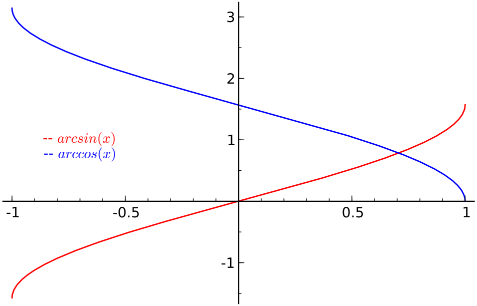
```
sin(x+pi/2).simplify()
```

```
cos(x)
```

Weitere Eigenschaften I

- Umkehrfunktionen: arcsin bei Sinus und arccos bei Cosinus. Plotten:

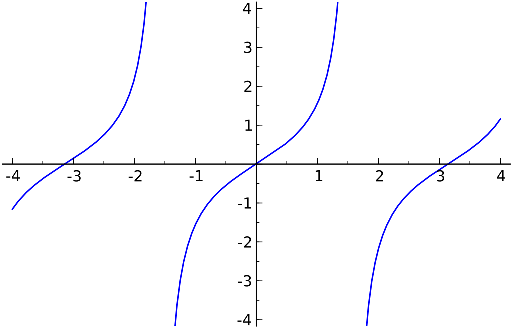
```
p = plot(arcsin,-1,1,color='red')
p += plot(arccos,-1,1);
p += text('-- arcsin(x)', (-0.7, 1.0), color='red')
p += text('-- arccos(x)', (-0.7, 0.75)); p.show()
```



Weitere Eigenschaften II

- Der Tangens ist definiert durch $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

```
plot(tan,-4,4,detect_poles=True,ymax=4,ymin=-4)
```



Aufbau

while-Schleifen

```
while <expression> :
    <Code-block>
```

Diese wiederholt `<Code-block>` solange wie die `<expression>` als `True` ausgewertet wird.

Beispiel:

```
f(x) = 1/x
x=0.1
while f(x) > 0.1:
    x += 0.1
x
```

```
10.1000000000000
```

Alternative Schleifenkonstruktionen

- Schleifen abwärts zählen

```
for j in reversed([2,4]):
   print("{0}, {1}").format(x,x^j)
```

- Schrittweite modifizieren

```
for j in srange(3,10,2.6):
    print(x,x^j)
```

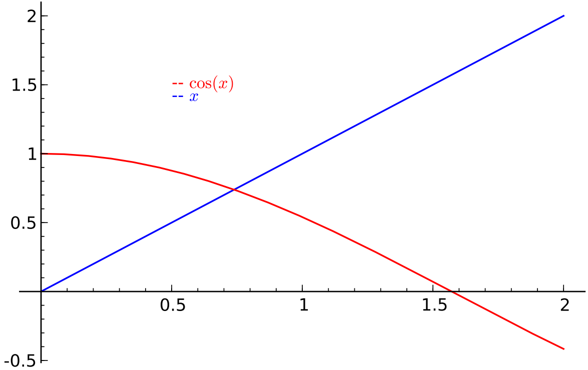
```
(x, x^3.00000000000000)
(x, x^5.60000000000000)
(x, x^8.20000000000000)
```

Fixpunkt

Suche ein $x_{\text{fix}} \in \mathbb{R}$ so dass

$$x_{\text{fix}} = \cos(x_{\text{fix}})$$

gilt.

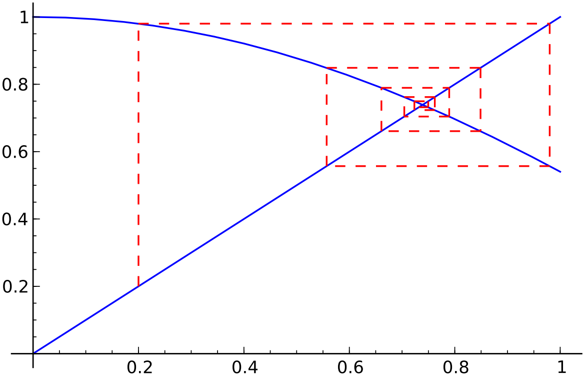


Fixpunkt-Iteration

Fixpunkt-Iteration

$$x_{k+1} = cos(x_k)$$

bei geeignetem Startwert $x_0 = 0.2$.



Implementierung

```
def fixpunkt(f,In,x0,n):
    y = [x0]
    p = plot(f,(In[0],In[1]))
    p += plot(x,(In[0],In[1]))
    for i in [0..n-1]:
        y.append(float(f(y[i])))
        p += line( [ (y[i],y[i]), (y[i],y[i+1]) ],
            linestyle='--', color='red')
        p += line( [ (y[i],y[i+1]), (y[i+1],y[i+1]) ],
            linestyle='--', color='red')
    p.show()
    return(y)
```

Aufruf

```
fixpunkt(lambda x: cos(x),[0,1],0.2,10)
```

```
[0.200000000000000, 0.980066577841242,
   0.556967252809642, 0.848862165658271,
   0.660837551116615, 0.789478437766868,
   0.704215713341993, 0.762119561760661,
   0.723374172105571, 0.749576576331493,
   0.731977425258191]
```