

Einführung in Sage - Einheit 4

Matrizen, Vektorräume, Programmieren I

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen 

1 Vektoren

- Matrizen
- Vektorräume

2 Programmieren I

1 Vektoren

- Matrizen
- Vektorräume

2 Programmieren I

1 Vektoren

- Matrizen
- Vektorräume

2 Programmieren I

Eine $m \times n$ Matrix A über einen Körper K ist ein rechteckiges Schema mit Einträgen $a_{ij} \in K$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit dem Zeilenindex i mit Werten zwischen 1 und m und Spaltenindex j mit Werten zwischen 1 und n . Man schreibt kurz $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$.

- Die **Transponierte** von $A = (a_{ij})$ ist $A^T := (a_{ji})$.
- A heißt **symmetrisch**, wenn $A = A^T$ gilt.
- Für Matrizen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ist $A^* := (\overline{a_{ji}}) \in \mathbb{C}^{n \times m}$.
- Die **Einheitsmatrix** $I := I_n := (\delta_{ij}) \in K^{n \times n}$
- Seien $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in K^{n \times m}$. Dann ist die **Addition** definiert durch

$$C = (c_{ij}) := A + B \in K^{n \times m}$$

mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

- Seien $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ und $B = (b_{ij}) \in K^{n \times p}$. Dann ist die **Multiplikation** gegeben durch

$$C = (c_{ij}) := A \cdot B \in K^{m \times p}$$

mit $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$.

- $A \in K^{n \times n}$ heißt **orthogonal**, wenn $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n$ gilt.
- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt **unitär**, wenn $A \cdot A^* = A^* \cdot A = I_n$ gilt.
- $A \in K^{n \times n}$ heißt **invertierbar**, wenn eine Matrix $A^{-1} \in K^{n \times n}$ existiert mit $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Definitionen und Bemerkungen

- Die Multiplikation ist assoziativ aber in der Regel **nicht kommutativ**.
- Die Matrizen aus $K^{m \times n}$ bilden einen Vektorraum über K (mit komponentenweiser Skalarmultiplikation).
- Die Menge der invertierbaren Matrizen aus $K^{n \times n}$ bilden bezüglich der Multiplikation eine Gruppe, die **allgemeine lineare Gruppe**
 $GL(K, n) = GL_n(K) = GL(n, K)$.

Definition und Bemerkungen

- Die Menge der orthogonalen Matrizen in $GL(\mathbb{R}, n)$ bilden eine Untergruppe von $GL(\mathbb{R}, n)$, die **orthogonale Gruppe** $O(n)$.
- Die entsprechende Untergruppe der unitären Matrizen in $GL(\mathbb{C}, n)$ ist die **unitäre Gruppe** $U(n)$.

- Matrizen werden in Sage mit Hilfe des Befehls `matrix()` konstruiert.
- Der Rückgabewert ist vom Typ `matrix`.
- Die Einträge der Matrix können beliebige Ausdrücke sein.
- Es ist auch möglich Matrizen über bestimmten Bereichen (z.B. \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{Z}) zu konstruieren.
- Es gibt auch spezielle Datenstrukturen für quadratische Matrizen und für dünnbesetzte Matrizen.

Konstruktion von Matrizen I

Es gibt in Sage verschiedene Möglichkeiten eine Matrix zu konstruieren.

Beispiel:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & 0 & 1 & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

- Eingabe der Einträge pro Zeile in eckigen Klammern `[..]`. Alle Spalten dann wieder in eckigen Klammern `[..]`.

```
A = matrix([[1, 2, 3, 4],[a, 0, 1, b]])
```

- Mit expliziter Größenangabe

```
A = matrix(2,4,[[1,2,3,4],[a,0,1,b]])
```

Konstruktion von Matrizen II

- Erzeugen einer Nullmatrix der Größe $n \times m$

```
n = 3; m = 4; B = matrix(n,m)
```

- Erzeuge eine $n \times m$ - Matrix A mit Hilfe einer Funktion $f(i,j)$ mit Einträgen $a_{ij} = f(i,j)$

```
f(i,j) = i*j  
C = matrix([[f(i,j) for i in range(1,6)] for j in  
            range(1,4)]]; C
```

- Eingabe von Zeilen- und Spaltenvektoren (falls explizit nötig)

```
matrix(3,1,[1,2,3])  
matrix(1,3,[4,5,6])
```

Zeilen- und Spaltenzahl

- Abfragen der Spaltenanzahl: `<matrix>.ncols()`

```
C.ncols()
```

5

- Abfragen der Zeilenanzahl: `<matrix>.nrows()`

```
C.nrows()
```

3

- Informationen über die Matrix: `<matrix>.parent()`

```
C.parent()
```

Full MatrixSpace of 3 by 5 dense matrices over
Symbolic Ring

Zugriff auf die Einträge I

- Abfragen von Einträgen in Zeile i und Spalte j :

```
i=1; j=2; C[i,j]
```

6

- Ändern des Eintrags in Zeile i und Spalte j :

```
i=1; j=2; C[i,j]=22
```

- Extrahieren von Zeilen/Spalten

```
zeile = C.row(0)  
spalte = C.column(4)
```

- Extrahieren von Teilmatrizen

```
C[1:3,1:3]
```

- Erzeugen von Diagonalmatrizen

```
x = [1,2,3,4,5]  
Diag = diagonal_matrix(x); Diag
```

- Addieren, Multiplizieren

```
var('a,b,c,d,g,h,f')  
A = matrix([[a, b], [c,d]])  
B = matrix([[e, f], [g,h]])  
A+B; A*B
```

- Bestimmung der Inversen und der Transponierten

```
A(-1); A.transpose()
```


Rang von Matrizen

Sei $A \in K^{m \times n}$.

- Die Dimension der linearen Hülle der Spaltenvektoren nennt man den **Spaltenrang** von A . Er ist höchstens gleich n .
- Die Dimension der linearen Hülle der Zeilenvektoren nennt man den **Zeilenrang** von A . Er ist höchstens gleich m .
- Zeilenrang und Spaltenrang von Matrizen sind gleich und man spricht deshalb vom **Rang** einer Matrix.

- Bestimmen des Ranges einer Matrix

```
S = matrix([[1,0,0],[0,1,1],[1,1,1]])  
S.rank()
```

2

- ist S symmetrisch ? ist S invertierbar ?

```
S.is_symmetric()  
S.is_invertible()
```

False

False

Maps auf Matrizen

Mittels `map_threaded(<function>, <matrix>)` kann auf jeden Eintrag von der Matrix `<matrix>` die Funktion `<function>` angewendet werden (wie bei `map()`)

Beispiel:

```
map_threaded(sqrt, matrix(RR, [[1,2],[3,4]]))
```

```
[1.000000000000000  1.41421356237310]  
[1.73205080756888  2.000000000000000]
```

1 Vektoren

- Matrizen
- Vektorräume

2 Programmieren I

Ein Tripel $(V, +, \cdot)$, bestehend aus einer nichtleeren Menge V und Verknüpfungen

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad \cdot : K \times V \rightarrow V$$

heißt **Vektorraum** über einem Körper K , wenn gilt:

- ❶ $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
- ❷ Für alle $v, w \in V$ und alle $\lambda, \mu \in K$ gilt:
 - ❶ $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$.
 - ❷ $\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$.
 - ❸ $(\lambda \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$.
 - ❹ $1 \cdot v = v$.

- Die Elemente eines Vektorraums nennt man **Vektoren**.
- Die Abbildung $\cdot : K \times V \rightarrow V$ heißt **Skalarmultiplikation**. Die Elemente des Körpers K nennt man **Skalare**.
- Ist $U \subset V$ eine Teilmenge des Vektorraums V und gelten alle Vektorraumaxiome, so heißt U ein **Untervektorraum** oder **Unterraum** von V .
- **Vorsicht!** 0 ist nicht gleich 0 , d.h. man muß zwischen der 0 des Körpers und der 0 des Vektorraums (Nullvektor) unterscheiden. Es gilt $0 \cdot v = 0$ für alle $v \in V$.

Beispiele für Vektorräume

- $K^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in K\}, n \in \mathbb{N}$
- Sei M eine beliebige Menge. Die Menge der Abbildungen von M in K , $\text{Abb}(M, K)$, mit den punktweise definierten Verknüpfungen

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \forall x \in M$$

$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x), \forall x \in M$$

für $\alpha \in K, f, g: M \mapsto K$.

- Die Menge der Polynome bis zum Grad n .
- Die Menge aller Polynome.
- \mathbb{R} als \mathbb{Q} -Vektorraum.
- \mathbb{C} als \mathbb{R} -Vektorraum.

Vektoren in Sage

- Konstruktion von Vektoren

```
a = vector([1,2,3,4]); b = vector([5,6,7]); a,b
```

```
((1, 2, 3, 4), (5, 6, 7))
```

- Datentyp: `vector_integer_dense` (für dichte Vektoren)

```
type(a)
```

```
<type 'sage.modules.vector_integer_dense.  
Vector_integer_dense'>
```


Lineare Abhängigkeit

Sei V ein K -Vektorraum und (v_1, \dots, v_r) eine Familie von Elementen aus V .

- $v \in V$ heißt **Linearkombination** von (v_1, \dots, v_r) , falls $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$.
- Die Menge aller Linearkombinationen wird **Lineare Hülle** genannt und durch $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ bezeichnet. Die Lineare Hülle ist ein Unterraum von V .
- (v_1, \dots, v_r) heißen **linear unabhängig**, falls gilt: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ und ist $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$ so folgt $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$. Andernfalls sind sie **linear abhängig**.
- Ist $M \subseteq V$ eine unendliche Menge, dann ist M linear unabhängig falls **alle endlichen** Teilmengen von M linear unabhängig sind.

Weitere Notationen und Bemerkungen

Sei V ein K -Vektorraum und (v_1, \dots, v_r) eine Familie von Elementen aus V

- (v_1, \dots, v_r) sind genau dann linear unabhängig, wenn sich jeder Vektor $v \in \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$ eindeutig linear kombinieren läßt.
- Gilt $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$, so ist (v_1, \dots, v_r) ein **Erzeugendensystem**. Sind (v_1, \dots, v_r) zusätzlich linear unabhängig, so ist (v_1, \dots, v_r) eine **Basis**.
- Aus jedem Erzeugendensystem kann man eine Basis auswählen.

Beispiele für Basen

- Seien $(e_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n$ die Einheitsvektoren. (e_1, \dots, e_n) ist eine Basis des \mathbb{R}^n .
- Die Monombasis $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ ist eine Basis des Vektorraums der Polynome n -ten Grades.
- $(1, i)$ ist eine Basis von \mathbb{C} als \mathbb{R} -Vektorraum.
- \mathbb{R} als \mathbb{Q} -Vektorraum hat keine endliche Basis.

- Sei (v_1, \dots, v_n) eine Basis eines Vektorraums V . Dann ist die **Dimension** des Vektorraums V definiert durch die Anzahl der Basiselemente, also n .
- Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
- Seien W, Z Unterräume von V . Dann ist $W + Z := \text{span}(W \cup Z)$ die **Summe** von W und Z . Es gilt:

$$\dim(W + Z) = \dim(W) + \dim(Z) - \dim(W \cap Z)$$

- Bestimmen einer Basis von $\text{span}(s_1, s_2, s_3)$

```
s1 = vector([1,0,0])  
s2 = vector([0,1,1])  
s3 = vector([1,1,1])  
span([s1,s2,s3],QQ)
```

Vector space of degree 3 and dimension 2 over
Rational Field

Basis matrix:

```
[1 0 0]  
[0 1 1]
```

- Bestimmen des Schnitts von $\text{span}(s1)$ und $\text{span}(s2, s3)$

```
span([s1],QQ).intersection(span([s2,s3],QQ))
```

```
Vector space of degree 3 and dimension 1 over  
Rational Field
```

```
Basis matrix:
```

```
[1 0 0]
```

- Testen der linearen Unabhängigkeit

```
m = matrix([s1,s2,s3]); m.rank() >= min(m.ncols, m.  
rows)
```

```
False
```

Normen auf Vektorräumen

Sei V ein Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.

Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung

$$\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|,$$

so dass für alle $\alpha \in K$, $u, v \in V$ gilt

$$\|v\| \geq 0$$

$$\|v\| = 0 \text{ impliziert } v = 0$$

$$\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \text{ (Dreiecksungleichung).}$$

$(V, \| \cdot \|)$ heißt **normierter Raum**.

Eine skalarwertige binäre Abbildung

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow K$$

auf einem Vektorraum V über $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ heißt **Skalarprodukt**, wenn für alle $x, y, z \in V$, $\alpha, \beta \in K$ gilt

$$(x, x) \geq 0$$

$$(x, x) = 0 \text{ impliziert } x = 0.$$

$$(x, y) = \overline{(y, x)}$$

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$$

- Ein VR V mit Skalarprodukt heißt **Prä-Hilbert-Raum**. Ist $K = \mathbb{R}$ so heißt der Raum auch **euklidisch**.
- Durch $\|v\| := \sqrt{(v, v)}$, $v \in V$ läßt sich eine Norm definieren. Es gilt die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

- Im euklidischen Raum ist der Winkel α zwischen zwei Vektoren $u, v \in V \setminus \{0\}$ definiert durch

$$\cos(\alpha) = \frac{(u, v)}{\|u\| \|v\|}.$$

- Zwei Vektoren $u, v \in V$ heißen **orthogonal**, wenn $(u, v) = 0$ gilt.
- Eine Basis aus paarweise orthogonalen Vektoren heißt **Orthogonalbasis**.
- Eine Orthogonalbasis, bei der alle Vektoren die Norm 1 haben, nennt man **Orthonormalbasis**.
- Jeder endlichdimensionale Prä-Hilbert-Raum hat eine Orthonormalbasis.
- Ist U ein Unterraum von V , so ist

$$U^\perp := \{v \in V \mid (v, u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

der **Orthogonalraum** zu U . Er ist ein Untervektorraum.

- Es gilt: $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$, insb. $U \cap U^\perp = 0$.

- Die p -Norm $\|v\| := (\sum_{i=1}^n |v_i|^p)^{1/p}$, $p \in [1, \infty)$ auf dem K^n mit $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wird berechnet durch:

```
x = vector([1,2,3,4,5]); p=2  
x.norm(p)
```

- sind Vektoren orthogonal zueinander ?

```
a1 = vector([1,2,3])  
a2 = vector([0,4,1])  
a3 = vector([1,1,1])  
X = matrix([a1,a2,a3])  
(X.transpose()*X-identity_matrix(3)).is_zero()
```

- Berechnen des Skalarprodukts

```
a2.dot_product(a3), a2*a3
```

(5, 5)

- Berechnen des Winkels zwischen zwei Vektoren

```
float(acos(a2*a3/(abs(a2)*abs(a3))))
```

0.79520271328967818

- Berechnen der Determinante

```
A = matrix([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,0]])  
A.det()
```

27

1 Vektoren

- Matrizen
- Vektorräume

2 Programmieren I

Ein erstes Programm

```
def MyMax(a,b):  
    """Maximum von a und b"""  
    if a<b:  
        return (b)  
    else:  
        return (a)
```

- Das erste Beispiel berechnet das Maximum zweier Zahlen a und b .
- Aufruf in Sage ist `MyMax(a,b)`.
- Die Funktion gibt dann entweder den Wert a oder den Wert b zurück.
- in `""" comment """` eingeschlossene Zeilen werden als Hilfetext abgespeichert und können durch `MyMax?` abgefragt werden.

- Eine Funktion beginnt mit `def` und dem Namen der Prozedur (hier: `MyMax`) gefolgt von den möglichen Übergabeparameter (`a,b,c...`)
- Jede Zeile, die einen folgenden Block einleitet, muss mit einem Doppelpunkt `:` abgeschlossen werden.
- Jede Zeile in diesem Block muss eine grössere Einrückung besitzen (typischerweise ein *Tab*)

- Mittels `return(a)` wird die Funktion abgebrochen und der Wert `a` zurückgegeben.
- Wird innerhalb der Prozedur kein Befehl ausgeführt, so wird eine leere Variable des Typs `NoneType` zurückgegeben.

- Kommentarzeilen: Diese beginnen mit `#`. Sie werden vom System ignoriert.
- Die durch `if <bedingung>:` eingeleitete Zeile ist eine sogenannte Verzweigung. Ist die Bedingung `<bedingung>` wahr, so wird der Block hinter `:` ausgeführt. Ist `<bedingung>` falsch, so wird die Alternative `else:` ausgeführt.
- *Achtung:* in Sage (und Python) wird der Block durch die Einrückung definiert.

Bei umfangreicheren Funktionen oder richtigen Programmen ist es evtl. sinnvoller dies mit einem Editor zu erstellen.

- Erstellen einer `<name>.sage`-Datei in `~/ .sage`. Diese mit Sage-Code füllen
- In sage diese mit `attach <name>.sage` an das Notebook anhängen \Rightarrow wird automatisch geladen und aktuell gehalten.
- als Editor empfehle ich zum Einstieg `geany`. Prinzipiell sind alle Editoren geeignet die Python unterstützen.