

Einführung in Sage

Dr. J. Schulz

Einheit 1
WS 2009/2010

Aufgabe 1 :

Führen Sie eine Kurvendiskussion durch für die Funktion

$$f : x \mapsto \exp(1/x) + \frac{1}{4}x \exp(1/x)$$

- Untersuchen Sie das Verhalten von f bei der Polstelle $x = 0$.
- Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \Rightarrow \pm \infty$.
- Berechnen Sie Nullstellen, Extremstellen und Wendepunkte. Überlegen Sie sich, ob lokale/globale Maxima oder Minima an den Extremstellen vorliegen und geben Sie sie an.
- Plotten Sie den Graphen auf dem Intervall $[-5, 10]$.

Aufgabe 2 :

Definieren Sie die Funktion

$$f(s) := \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx, \quad s > 0$$

und berechnen Sie $f(1), f(2), \dots, f(10)$.

Erkennen Sie einen Zusammenhang zu einer klassischen Funktion? Berechnen Sie $(8f(2)f(5/2)/f(4))^2$!

Aufgabe 3 :

Versuchen Sie, die folgenden Grenzwerte zu erraten, und berechnen Sie sie dann

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Aufgabe 4 :

Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale

$$\int \frac{x}{\sqrt{(2ax - x^2)^3}} dx, \quad \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Aufgabe 5 :

Verifizieren Sie mit Sage die Identität

$$x^{(1/n)} y^{(1/n)} - (xy)^{(1/n)} = 0$$

für $\operatorname{Re}(x) > 0$ und $\operatorname{Re}(y) > 0$.

Aufgabe 6 :

Faktorisieren Sie $2x^2 - 2a^2 - x^3 - 2x^4 + x^5 + a^2x + 2a^2x^2 - a^2x^3$.

Aufgabe 7 :

Zeichnen und berechnen Sie den Schnittpunkt der Ebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad l, m \in \mathbb{R}$$

mit der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 8 :

Bestimmen Sie die Menge der natürlichen Zahlen ≤ 10000 , die 3, 2 und 14 als Teiler besitzen. Wie viele sind es?

Benutzen Sie dazu die Funktion $\text{mod}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, die den Rest der Division von a durch b berechnet.