Einführung in Sage
Einheit 2

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen

15. Januar 2010

Aufbau

Aufbau

Ein erstes Beispiel

```
>> f = x^2-3*x-18; solve(f==0,x)
```

```
[x == 6, x == -3]
```

```
>> solve(f<=0,x) ??
```

```
 [-3, 6] union
 {I x + 3/2 | x in (-infinity, infinity)}
```

```
>> assume(x,Type::Real): solve(f<=0,x) ??
```

```
 [-3, 6]
```

```
>> x:=1: f  ??
```

```
 -20
```

Beispiel

Betrachte:

```
>> f := x^2-3*x-18:
```

- Wie geht MuPAD mit der Unbekannten x um?
- Welchen Datentyp hat f?
- Was kann ich mit f machen?

Bezeichner

- Bezeichner sind Namen, wie z.B. x oder f. Sie können im mathematischen Kontext sowohl Variablen als auch Unbestimmte repräsentieren.
- Bezeichner sind aus Buchstaben, Ziffern und Unterstrich _ zusammengesetzt.
- Sage unterscheidet zwischen Groß- und Kleinschreibung.
- Bezeichner dürfen nicht mit einer Ziffer beginnen

Beispiele für Bezeichner

- zulässige Bezeichner: `x`, `f`, `x23`, `_x_1`
- unzulässige Bezeichner: `12x`, `p~`, `x>y`, `Das System`

Wert eines Bezeichners

- Der Wert eines Bezeichners ist ein Objekt eines bestimmten Datentyps.
- Ein Datentyp ist durch seine Eigenschaften gegeben.
  Beispiel: Natürliche Zahlen, rationale Zahlen, Bezeichner, Zeichenketten, ...
- Ein Objekt ist eine Instanz (Einheit) eines Datentyps.

Zuweisungsoperator :=

- Die Operation `bez=wert` weist dem Bezeichner `bez` den Wert `wert` zu.
- Beispiele: `N=5`, `f= x^2-3*x-18`
- Rückgabeparameter ist die rechte Seite (Eine Ausgabe erfolgt jedoch normalerweise nicht)
- Warnung: Unterscheiden Sie stets zwischen dem Zuweisungsoperator $=$ und dem logischen Operator $==$.

Beispiele

```
>> N=6
```

```
  6
```

```
>> f = x+2*x*x-y
```

```
                2
  x - y + 2 x
```

```
>> y:= cos( (x:=PI)): x,y
```

```
  PI, -1
```

Beispiele für Datentypen

```
>> domtype(5)
```

```
  DOM_INT
```

```
>> f:= x^2-3*x-18: domtype(f)
```

```
  DOM_EXPR
```

```
>> domtype(x)
```

```
  DOM_IDENT
```

```
>> f+f
```

```
     2
  2 x   - 6 x - 36
```

Einige Datentypen

Domain-Typ	Bedeutung	Beispiel
DOM_INT	ganze Zahlen	$-3, 0, 100$
DOM_RAT	rationale Zahlen	$7/11$
DOM_FLOAT	Gleitpunktzahl	0.123
DOM_COMPLEX	komplexe Zahlen	$1 + 3 * I$
DOM_IDENT	symbolische Bezeichner	x, f, y
DOM_EXPR	symbolische Ausdrücke	$x + y$
DOM_BOOL	logische Werte: TRUE FALSE, UNKNOWN	

Befehle im Umgang mit $:=$

- Viele Bezeichner sind vordefiniert und gegen Zuweisungen geschützt, z.B. `sin`, `limit`,..
- Aufheben des Schutzes: `unprotect(bezeichner)`
- Schützen von Bezeichnern: `protect(bezeichner,Error)`
- Liste aller definierten Bezeichner: `anames(All)`
- Liste aller vom Benutzer definierten Bezeichner: `anames(All,User)`
- Löschen von Zuweisungen: `delete bezeichner`

Beispiele

```
>> sin:=2
```

```
  Error: Identifier 'sin' is protected [_assign]
```

```
>> N:=3
```

```
  3
```

```
>> protect(N,Error): N:=5
```

```
  Error: Identifier 'N' is protected [_assign]
```

```
>> unprotect(N): N:=3
```

```
  3
```

Beispiel: Auswertung

```
>> f:=x*x-3*x-a
```

```
   2
  x  - 3 x - a
```

```
>> a:=1: f
```

```
   2
  x  - 3 x - 1
```

```
>> x:=1: f
```

```
  -3
```

Beispiel: Auswertung

```
>> delete a: f
```

```
  - a - 2
```

```
>> x:=5 :f
```

```
  10 - a
```

Auswertung

- Der *Bezeichner* ist der Name einer Unbekannten.
- Die *Auswertung* eines Bezeichners benutzt alle aktuell bekannten Zuweisungen.
- Der *Wert* bezeichnet die Auswertung zum Zeitpunkt der Zuweisung.

Auswertung

- Auf interaktiver Ebene wertet MuPAD in der Regel vollständig aus.
- Maximale Auswertungstiefe wird durch die Konstanten LEVEL und MAXLEVEL gesteuert.
  (Default: LEVEL= 100, MAXLEVEL=100)
- Zuerst wird MAXLEVEL geprüft; erst dann LEVEL.
- Ist MAXLEVEL erreicht, wird eine Fehlermeldung zurückgegeben.
- Die Auswertung wird bei LEVEL gestoppt, d.h. es wird keine Fehlermeldung zurückgegebnen.

Auswertung

- Bei Aufrufen %n wird nicht ausgewertet. Ähnliches gilt bei Einträgen von Matrizen und Tabellen.
- Im Zusammenhang mit dem $-Operator wird nicht ausgewertet.
- Auswertungen können durch eval erzwungen werden.
- Auswertungen können durch hold unterbunden werden.
- Die Auswertungstiefe eines Bezeichners a kann gezielt durch den Befehl `level(a,n)` gesteuert werden (n Auswertungstiefe).

Beispiele I

```
>> a:=sin(b)
```

```
  sin(b)
```

```
>> b:=0
```

```
  0
```

```
>> a
```

```
  0
```

Beispiele II

```
>> %3,eval(%3)
```

```
  sin(b), 0
```

```
>> a,hold(a)
```

```
  0, a
```

Operatoren

- Typische Operatoren sind $+$, $-$, $*$, !,...
- In MuPAD werden Objekte immer durch Funktionen miteinander verbunden.
- Operatoren sind in MUPAD als Funktionen realisiert.
- Für wichtige Operatoren gibt es die gewohnte Kurzschreibweise.
- Bei Kombination verschiedener Operatoren gelten die üblichen Regeln der Bindungsstärke (Punktrechnung vor Strichrechnung); Die Ordnung kann durch Klammersetzung geändert werden.

Wichtige mathematische Operatoren

Not.	Funktion	Erklärung
$+$	`_plus(a,b,c)`	Addition
$-$	`_subtract(a,b)`	Subtraktion
$*$	`_mult(a,b,c)`	Multiplikation
$/$	`_divide(a,b)`	Division
^	`_power(a,b)`	Potenz
!	`_fact(n)`	Fakultät
div	`_div(a,b)`	Quotient ohne Rest
mod	`_mod(a,b)`	Rest bei Division

Zerlegen von Objekten

- Viele Objekte sind zusammengesetzt. Ihre Bausteine heißen Operanden.
- Durch `nops(Objekt)` erhält man die Anzahl der Operanden.
- Durch `op(Objekt)` bzw. `op(Objekt,i)` erhält man alle Operanden bzw. den i-ten Operand.
- Mittels `has(Objekt,a)` kann untersucht werden, ob a ein Operand von `Objekt` ist.
- Die Befehle beziehen sich jeweils auf die automatisch vereinfachten Objekte.

Beispiele I

```
>> f:=_plus(a,b,c)
```

```
  a + b + c
```

```
>> nops(f), op(f), op(f,2)
```

```
  3, a, b, c, b
```

```
>> op(f,0)
```

```
  _plus
```

```
>> has(f,a), has(f,a+b)
```

```
  TRUE, FALSE
```

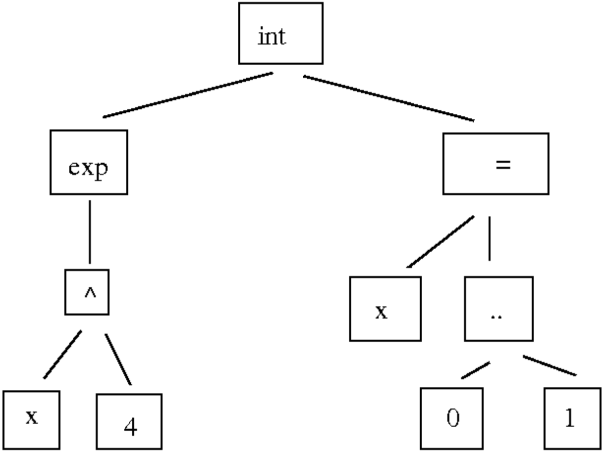
Beispiele II

```
>> f:=x*z+3*x+sqrt(y):
>> op(f), nops(op(f,2))
```

```
                 1/2
  3 x, x z, y      , 2
```

Darstellungsbaum

```
>> a:=int(exp(x^4),x=0..1)
```



Beispiel

```
>> a:=int(exp(x^4),x=0..1):
>> op(a)
```

```
        4
  exp(x ), x = 0..1
```

```
>> op(a,0)
```

```
  int
```

```
>> op(op(a,1))
```

```
   4
  x
```

```
>> prog::exprtree(a)
```

Automatische Vereinfachung

MuPAD führt oft automatische Vereinfachungen durch. Ansonsten muß der Benutzer gezielt Vereinfachungen anfordern.
Beispiele:

```
>> sin(15*PI), exp(0)
```

```
  0, 1
```

```
>> 2*infinity-5
```

```
  infinity
```

```
>> y:=(-4*x+x^2+4)*(7*x+x^2+12)
```

```
    2                     2
  (x  - 4 x + 4) (7 x + x  + 12)
```

Aufbau

Manipulation von Ausdrücken

- Verbinden von Ausdrücken
- Vereinfachen
- Umformen
- Einsetzen der Unbekannten

Verbinden von Ausdrücken

Ausdrücke können beliebig addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden.

- Definition

```
>> f:= x*x+3*x+y: g:=x-y:
```

- Potenz

```
>> f^g
```

```
                2 x - y
  (3 x + y + x )
```

Verbinden von Ausdrücken II

- Addition / Subtraktion

```
>> f+g, f-g
```

```
           2                     2
  4 x + x , 2 x + 2 y + x
```

- Multiplikation/ Division

```
>> f*g, f/g
```

```
                                        2
                        2    3 x + y + x
  (x - y) (3 x + y + x ), ------------
                                 x - y
```

collect

Durch `collect(Ausdruck, Unbestimmte)` wird der `Ausdruck` bzgl. der `Unbestimmten` sortiert.

```
>> f:=a*x^2+a*x+x^3+sin(x)+b*x+4*x+x*sin(x):
>> collect(f,x)
```

```
   3       2
  x  + a x  + (a + b + sin(x) + 4) x + sin(x)
```

```
>> collect(f,[x,sin(x)])
```

```
   3       2
  x  + a x  + x sin(x) + (a + b + 4) x + sin(x)
```

combine

Durch `combine(Ausdruck,Option)` wird der Ausdruck zusammengefaßt. Dabei werden mathematische Identitäten benutzt, die durch `Option` angegeben werden. Optionen sind `arctan` ,`exp`,`ln`,`sincos`, `sinhcosh`. Ohne Angabe der Option werden nur die Potenzgesetze benutzt.

```
>> g:= sin(a)*cos(b):
>> g=combine(g, sincos)
```

```
                  sin(a + b)   sin(a - b)
cos(b) sin(a) = ---------- + ----------
                      2            2
```

expand

Ausmultiplizieren von Ausdrücken erfolgt durch
`expand(Ausdruck,f_1,f_2,..)`.
`f_1`, `f_2` sind Ausdrücke, die nicht expandiert werden sollen.

```
>> expand((x+2)^4)
```

```
  4        3          2
 x   + 8 x   + 24 x   + 32 x + 16
```

```
>> expand(sin(x+y))
```

```
 cos(x) sin(y) + cos(y) sin(x)
```

Beispiele zu expand

```
>> f:=(x-y)^2+(x+y)^2: expand(f)
```

```
     2        2
  2 x   + 2 y
```

```
>> expand(f,x-y)
```

```
   2    2           2
  x  + y  + (x - y)  + 2 x y
```

factor

Der Befehl `factor(Ausdruck)` faktorisiert Polynome und Ausdrücke.

- MuPAD faktorisiert nur, wenn die resultierenden Koeffizienten rationale Zahlen sind.
- Auch anwendbar auf rationale Funktionen. Es wird ein gemeinsamer Hauptnenner gesucht.

Beispiel: factor

```
>> factor(x^2-2), factor(x^2-9/4)
```

```
  2          (2 x - 3) (2 x + 3)
 x   - 2, -------------------
                      4
```

```
>> factor(2 - 2/(x^2-1))
```

```
        2
 2 (x   - 2)
 ---------------
 (x - 1) (x + 1)
```

normal

Durch `normal(f)` wird eine 'Normalform' eines rationalen Ausdrucks `f` erzeugt.

```
>> normal(2 - 2/(x^2-1))
```

```
     2
  2 x   - 4
  --------
   2
  x   - 1
```

partfrac

Durch `partfrac(f)` wird ein rationaler Ausdruck in eine Summe rationaler Terme zerlegt, in denen jeweils der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist. (Partialbruchzerlegung)

```
>> f:=x^2/(x^2-1): f=partfrac(f)
```

```
     2
    x           1            1
  ------ = --------- - --------- + 1
   2       2 (x - 1)   2 (x + 1)
  x  - 1
```

rewrite

Durch `rewrite(Ausdruck, Option)` wird versucht, den `Ausdruck` so umzuformen, das gewisse Funktionen aus dem Ausdruck eliminiert werden.

- Beispielsweise können `sin` und `cos` immer durch `tan` ausgedrückt werden (Option: `tan`).
- Optionen sind `diff`, `exp`, `fact`, `gamma`, `heavyside`, `ln`, `sign`, `sincos`, `sinhcosh`, `tan`.
- Man versucht die Ausdrücke mit Hilfe der in der Option genannten Funktion(en) auszudrücken.

Beispiele - rewrite I

```
>> rewrite(tan(x),sincos)
```

```
  sin(x)
  ------
  cos(x)
```

```
>> rewrite(tan(x),exp)
```

```
                2
    I exp(I x)   - I
  - ---------------
               2
     exp(I x)   + 1
```

Beispiele - rewrite II

```
>> rewrite(tan(x),sinhcosh)
```

```
  I sinh(-I x)
  ------------
  cosh(-I x)
```

Simplify

- Durch `simplify(f,target)` wird versucht den Ausdruck f zu vereinfachen. Optional können durch `target` spezielle Vereinfachungen angefordert werden.
- Mögliche `targets` sind `exp`, `ln`,`cos`, `sin`, `sqrt`, `logic` und `relation`.
- Die Optionen `logic` und `relation` dienen zur Vereinfachung von logischen Ausdrücken bzw. von Gleichungen und Ungleichungen.
- Alternativ zu `simplify(f,sqrt)` kann auch die Funktion `radsimp` verwendet werden.

Beispiele: Simplify I

```
>> f:=x/(x+y)+y/(x+y)-sin(x)^2-cos(x)^2:
>> f=simplify(f)
```

```
    x         y               2             2
  ----- + ----- - cos(x)   - sin(x)   = 0
  x + y   x + y
```

Beispiele: Simplify II

```
>> g:= sqrt(4+2*sqrt(3)):
```

```
>> g=simplify(g,sin)
```

```
 1/2    1/2        1/2       1/2    1/2        1/2
2      (3     +  2)      = 2      (3     +  2)
```

```
>> g=simplify(g)
```

```
    1/2    1/2        1/2       1/2             1/2
  (2      (3     +  2)      = 3      +  1)  =  3      +  1
```

Aufbau

Gleichungen

- lineares Beispiel

```
>> Gleichungen := {x+y = 1, x-y = 1}:
>> solve(Gleichungen)
```

```
  {[x = 1, y = 0]}
```

- nichtlineares Beispiel

```
>> Gleichungen1:={x+y=1,(x-y)^2=1}:
>> solve(Gleichungen1)
```

```
  {[x = 0, y = 1], [x = 1, y = 0]}
```

Vergleiche

- Der Operator `=` vergleicht zwei Objekte.
- `a=b` ist wahr (richtig), wenn *a* und *b* die gleichen Auswertungen besitzen (und vom gleichen Typ sind).
- Zur Überprüfung von Aussagen gibt es die Funktion `bool(Ausdruck)`. Sie liefert als Ergebnis `TRUE` oder `FALSE`.
- Die inverse Operation zu `'='` ist `'<>'`, also `a<>b` ist `TRUE`, falls *a* nicht gleich *b* ist.

Beispiele: Vergleiche I

```
>> bool(4-3=1)
```

```
  TRUE
```

```
>> bool(4*x=x); x:=0: bool(4*x=x)
```

```
  FALSE TRUE
```

```
>> bool(x=0); bool(x<>0)
```

```
  TRUE FALSE
```

Beispiele: Vergleiche II

```
>> bool(0.5=1/2)
```

```
  FALSE
```

```
>> domtype(1.0), domtype(1)
```

```
  DOM_FLOAT, DOM_INT
```

Solve

- Solve ist der universelle Befehl zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen und auch Differentialgleichungen.
- Der Befehl ist von der Form `solve(Gleichungen,Variablen)`.
- `Gleichungen` kann ein System von Gleichungen sein.
- `Variablen` gibt an, wonach aufgelöst wird.
- Bei einzelnen Gleichungen wird der Lösungswert zurückgegeben. Bei mehreren Gleichungen wird ein System äquivalenter Gleichungen zurückgegeben.
- Weitere Optionen werden später erklärt.

Beispiele - Solve I

```
>> solve(x^2+x=y/4,x)
```

```
  {              1/2                        1/2         }
  {    (y + 1)                   (y + 1)                }
  { - ---------- - 1/2, ---------- - 1/2 }
  {        2                         2                  }
```

Beispiele - Solve II

```
>> assume(x>0): solve(x^2+x=y/4,y)
```

```
              2
  {4 x + 4 x }
```

```
>> solve({x^2-y^2=0},{x,y})
```

```
  {[x = z, y = z], [x = -z, y = z]}
```

```
>> solve({x^2-y^2=0,x+y=1},{x,y})
```

```
  {[x = 1/2, y = 1/2]}
```