Einführung in Sage - Einheit 1

Organisatorisches, Was ist Sage?, Streifzug durch Sage, Nützliches

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen

Organisatorisches

- Anmeldungen zu der Veranstaltung über StudIP
  `https://www.studip.uni-goettingen.de/`
  Einführung in Sage (Mathematische Anwendersysteme) (WS 2009/2010)
- Alle Unterlagen (Aufgabenblätter, Vorlesungsfolien, Beispiele, Musterlösungen) können von der StudIP-Seite (Reiter Dateien) heruntergeladen werden

Organisatorisches

- Anmeldungen zu der Veranstaltung über StudIP
  `https://www.studip.uni-goettingen.de/`
  Einführung in Sage (Mathematische Anwendersysteme) (WS 2009/2010)
- Alle Unterlagen (Aufgabenblätter, Vorlesungsfolien, Beispiele, Musterlösungen) können von der StudIP-Seite (Reiter Dateien) heruntergeladen werden

Dozent

Jochen Schulz
NAM, Zimmer 04 (Erdgeschoß)
Telefon: 39-4525 Email: `schulz@math.uni-goettingen.de`
XMPP: `schulz@jabber.num.math.uni-goettingen.de`

Starten des Programms

Vor.: Account im CIP-Pool der Mathematischen Fakultät (MI und NAM): Registrierungs-Formular unter `https://ldap.math.uni-goettingen.de` (Stud.It-Account nötig!)
Wiki (`https://wiki.math.uni-goettingen.de/mediawiki`)

- Sage ist in Version 4.3 auf allen Rechnern der Mathematischen Fakultät installiert
- login direkt oder per nxclient auf den Rechnern `s1.math.uni-goettingen.de` bis `s8.math.uni-goettingen.de` und `s241.math.uni-goettingen.de` bis `s245.math.uni-goettingen.de`
- Starten von Sage: Im Terminal
  - `sagenotebook` (Notebook - Browser-basiert)
  - `sage` (Kommandozeilen-Version)

Ablauf der Veranstaltung

- Blockveranstaltung vom 15.2.-26.2.2010
- Vorlesung: 9.15 Uhr bis 11.30 Uhr
- Nachmittags: 4 Übungsgruppen à je 1h 15min
  - 13:00-14:15 (Tutor: J. Schulz)
  - 14:15-15:30 (Tutor: C. Rügge)
  - 15:30-16:45 (Tutor: J. Schulz)
  - 16:45-18:00 (Tutor: C. Rügge)
- Scheinerwerb
  - Klausur am 1.3.2009; 10:00 - 12:00; Anmeldung über FlexNow!
  - Regelmäßige Teilnahme an den Übungen ist empfohlen

Inhalt der Vorlesung

1. Tag Organisatorisches, Aufbau von Sage, Streifzug durch Sage

Inhalt der Vorlesung

1. Tag Organisatorisches, Aufbau von Sage, Streifzug durch Sage

2. Tag Grundlagen Sage (grundlegende Datentypen, Ausdrücke), Lösen von Gleichungen, Symbolisches Rechnen

Inhalt der Vorlesung

1. Tag Organisatorisches, Aufbau von Sage, Streifzug durch Sage

2. Tag Grundlagen Sage (grundlegende Datentypen, Ausdrücke), Lösen von Gleichungen, Symbolisches Rechnen

3. Tag Mengen, natürliche, rationale, reelle und komplexe Zahlen, Gleitkommazahlen

Inhalt der Vorlesung

1. Tag Organisatorisches, Aufbau von Sage, Streifzug durch Sage

2. Tag Grundlagen Sage (grundlegende Datentypen, Ausdrücke), Lösen von Gleichungen, Symbolisches Rechnen

3. Tag Mengen, natürliche, rationale, reelle und komplexe Zahlen, Gleitkommazahlen

4. Tag Vektoren und Matrizen, Lineare Algebra in Sage, Programmieren I

Inhalt der Vorlesung

1. **Tag** Organisatorisches, Aufbau von Sage, Streifzug durch Sage
2. **Tag** Grundlagen Sage (grundlegende Datentypen, Ausdrücke), Lösen von Gleichungen, Symbolisches Rechnen
3. **Tag** Mengen, natürliche, rationale, reelle und komplexe Zahlen, Gleitkommazahlen
4. **Tag** Vektoren und Matrizen, Lineare Algebra in Sage, Programmieren I
5. **Tag** Datencontainer in Sage, Lineare Abbildungen und Matrizen

Inhalt der Vorlesung

1. **Tag** Organisatorisches, Aufbau von Sage, Streifzug durch Sage
2. **Tag** Grundlagen Sage (grundlegende Datentypen, Ausdrücke), Lösen von Gleichungen, Symbolisches Rechnen
3. **Tag** Mengen, natürliche, rationale, reelle und komplexe Zahlen, Gleitkommazahlen
4. **Tag** Vektoren und Matrizen, Lineare Algebra in Sage, Programmieren I
5. **Tag** Datencontainer in Sage, Lineare Abbildungen und Matrizen
6. **Tag** Folgen und Reihen

Inhalt der Vorlesung

1. **Tag** Organisatorisches, Aufbau von Sage, Streifzug durch Sage
2. **Tag** Grundlagen Sage (grundlegende Datentypen, Ausdrücke), Lösen von Gleichungen, Symbolisches Rechnen
3. **Tag** Mengen, natürliche, rationale, reelle und komplexe Zahlen, Gleitkommazahlen
4. **Tag** Vektoren und Matrizen, Lineare Algebra in Sage, Programmieren I
5. **Tag** Datencontainer in Sage, Lineare Abbildungen und Matrizen
6. **Tag** Folgen und Reihen
7. **Tag** Reelle Funktionen, Grafiken

Inhalt der Vorlesung

1. **Tag** Organisatorisches, Aufbau von Sage, Streifzug durch Sage
2. **Tag** Grundlagen Sage (grundlegende Datentypen, Ausdrücke), Lösen von Gleichungen, Symbolisches Rechnen
3. **Tag** Mengen, natürliche, rationale, reelle und komplexe Zahlen, Gleitkommazahlen
4. **Tag** Vektoren und Matrizen, Lineare Algebra in Sage, Programmieren I
5. **Tag** Datencontainer in Sage, Lineare Abbildungen und Matrizen
6. **Tag** Folgen und Reihen
7. **Tag** Reelle Funktionen, Grafiken
8. **Tag** Differenzial- und Integralrechnung

Inhalt der Vorlesung

1. **Tag** Organisatorisches, Aufbau von Sage, Streifzug durch Sage
2. **Tag** Grundlagen Sage (grundlegende Datentypen, Ausdrücke), Lösen von Gleichungen, Symbolisches Rechnen
3. **Tag** Mengen, natürliche, rationale, reelle und komplexe Zahlen, Gleitkommazahlen
4. **Tag** Vektoren und Matrizen, Lineare Algebra in Sage, Programmieren I
5. **Tag** Datencontainer in Sage, Lineare Abbildungen und Matrizen
6. **Tag** Folgen und Reihen
7. **Tag** Reelle Funktionen, Grafiken
8. **Tag** Differenzial- und Integralrechnung
9. **Tag** Grundlagen der Programmierung, Zeichenketten (Strings)

Inhalt der Vorlesung

1. **Tag** Organisatorisches, Aufbau von Sage, Streifzug durch Sage
2. **Tag** Grundlagen Sage (grundlegende Datentypen, Ausdrücke), Lösen von Gleichungen, Symbolisches Rechnen
3. **Tag** Mengen, natürliche, rationale, reelle und komplexe Zahlen, Gleitkommazahlen
4. **Tag** Vektoren und Matrizen, Lineare Algebra in Sage, Programmieren I
5. **Tag** Datencontainer in Sage, Lineare Abbildungen und Matrizen
6. **Tag** Folgen und Reihen
7. **Tag** Reelle Funktionen, Grafiken
8. **Tag** Differenzial- und Integralrechnung
9. **Tag** Grundlagen der Programmierung, Zeichenketten (Strings)
10. **Tag** Fragestunde

Aufbau

1. **Was ist Sage?**

2. **Streifzug durch Sage**
   - Eine Kurvendiskussion
   - Symbolisches Rechnen
   - Etwas AGLA
   - Etwas Programmieren
   - Etwas Zahlentheorie

3. **Nützliches und Hilfe**

Aufbau

Computeralgebra-Systeme

Computeralgebra

beschäftigt sich mit exakten Berechnungen von mathematischen Objekten

Mathematische Objekte

Natürliche Zahlen, reelle Zahlen, Polynome, Funktionen, Gruppen, Ringe, ...

Numerischen Berechnungen

Bei numerischen Rechnungen (z.B. Taschenrechner) benutzt man Zahlen in Gleitpunktdarstellung, also i.A. nur Näherungen an die gesuchte Lösung

Computeralgebra != Numerische Berechnung

Beispiel

Mathematische Objekte	π, $\sqrt{2}$
Gleitpunktdarstellung (8 Stellen)	3.1415927, 1.4142136

Computeralgebra-Systeme

Allgemein

Sage	Schnittstelle für Mathematik-Software
LiveMath	Maple
Maxima	Free, GPL, von Sage benutzt
Mathematica	einer der Grossen
Maple	einer der Grossen
Matlab	Für große numerische Rechnungen (inkl. Mupad)
Octave	Für große numerische Rechnungen (GPL)
Magma	Spezielle mathematische Rechnungen (z.B. Algebra)
SymPy	Phython-Bibliotheken; als CAS-Verwendbar
SymbolicC++	Bibliotheken zur CA in C++

Überblick:`http://en.wikipedia.org/wiki/Comparison_of_computer_algebra_systems`

Sage

- Ein Open-source (GPL) Mathematik Software System
- Verfügbar seit 24 Februar 2005
- Alternative zu den 4 M's: Magma, Maple, Mathematica, Matlab
- Basiert auf Python
- Objektorientiert
- Besitzt Frontends für viele externe Software
- Interface im Browser

von Joachim Neubüser (Gründer von GAP):

> *You can read Sylow's Theorem and its proof [. . .] and then you can use Sylow's Theorem for the rest of your life free of charge, but for many computer algebra systems license fees have to be paid regularly [. . .]. You press buttons and you get answers in the same way as you get the bright pictures from your television set but you cannot control how they were made in either case.*
>
> *With this situation two of the most basic rules of conduct in mathematics are violated: in mathematics information is passed on free of charge and everything is laid open for checking. Not applying these rules to computer algebra systems that are made for mathematical research [. . .] means moving in a most undesirable direction. Most important: can we expect somebody to believe a result of a program that he is not allowed to see?*

Sage - Stärken und Schwächen

Stärken

- Vereinigung von vielen anderen CAS und Libraries unter einer einheitlichen Oberfläche (Maxima, Pari, GAP, R, Magma, ..., wovon die freien grösstenteils bei Sage enthalten sind)

Sage - Stärken und Schwächen

Stärken

- Vereinigung von vielen anderen CAS und Libraries unter einer einheitlichen Oberfläche (Maxima, Pari, GAP, R, Magma, ..., wovon die freien grösstenteils bei Sage enthalten sind)
- Durch Python angebunden an eine mächtige Skriptsprache

Sage - Stärken und Schwächen

Stärken

- Vereinigung von vielen anderen CAS und Libraries unter einer einheitlichen Oberfläche (Maxima, Pari, GAP, R, Magma, ..., wovon die freien grösstenteils bei Sage enthalten sind)
- Durch Python angebunden an eine mächtige Skriptsprache
- umfangreiches Hilfesystem

Sage - Stärken und Schwächen

Stärken

- Vereinigung von vielen anderen CAS und Libraries unter einer einheitlichen Oberfläche (Maxima, Pari, GAP, R, Magma, ..., wovon die freien grösstenteils bei Sage enthalten sind)
- Durch Python angebunden an eine mächtige Skriptsprache
- umfangreiches Hilfesystem
- Viele freie (Unterrichts-)materialien im Internet

Sage - Stärken und Schwächen

Stärken

- Vereinigung von vielen anderen CAS und Libraries unter einer einheitlichen Oberfläche (Maxima, Pari, GAP, R, Magma, ..., wovon die freien grösstenteils bei Sage enthalten sind)
- Durch Python angebunden an eine mächtige Skriptsprache
- umfangreiches Hilfesystem
- Viele freie (Unterrichts-)materialien im Internet
- Source Code offen und gut dokumentiert

Sage - Stärken und Schwächen

Stärken

- Vereinigung von vielen anderen CAS und Libraries unter einer einheitlichen Oberfläche (Maxima, Pari, GAP, R, Magma, ..., wovon die freien grösstenteils bei Sage enthalten sind)
- Durch Python angebunden an eine mächtige Skriptsprache
- umfangreiches Hilfesystem
- Viele freie (Unterrichts-)materialien im Internet
- Source Code offen und gut dokumentiert

Sage - Stärken und Schwächen

Stärken

- Vereinigung von vielen anderen CAS und Libraries unter einer einheitlichen Oberfläche (Maxima, Pari, GAP, R, Magma, ..., wovon die freien grösstenteils bei Sage enthalten sind)
- Durch Python angebunden an eine mächtige Skriptsprache
- umfangreiches Hilfesystem
- Viele freie (Unterrichts-)materialien im Internet
- Source Code offen und gut dokumentiert

Schwächen

- Befehlsumfang nicht so mächtig wie bei Maple, Mathematica oder Matlab

Sage - Stärken und Schwächen

Stärken

- Vereinigung von vielen anderen CAS und Libraries unter einer einheitlichen Oberfläche (Maxima, Pari, GAP, R, Magma, ..., wovon die freien grösstenteils bei Sage enthalten sind)
- Durch Python angebunden an eine mächtige Skriptsprache
- umfangreiches Hilfesystem
- Viele freie (Unterrichts-)materialien im Internet
- Source Code offen und gut dokumentiert

Schwächen

- Befehlsumfang nicht so mächtig wie bei Maple, Mathematica oder Matlab
- es fehlt (noch) eine gute Entwicklungsumgebung (in Entwicklung: Cantor)

Aufbau

1. Was ist Sage?

2. **Streifzug durch Sage**
   - Eine Kurvendiskussion
   - Symbolisches Rechnen
   - Etwas AGLA
   - Etwas Programmieren
   - Etwas Zahlentheorie

3. Nützliches und Hilfe

Sage als Taschenrechner

Hier einige Beispiele:

```
3+4*10+12
```

```
55
```

```
sin(pi)
```

```
0
```

```
float(pi)
```

```
3.14159265358979
```

```
float(sqrt(2))
```

```
1.41421356237310
```

Aufbau

Kurvendiskussion I

Betrachte die durch die reelle Zahl a parametrisierte Funktionenschar:

$$f : x \quad \mapsto \quad \frac{2x^2 - 20x + 42}{x - 1} + a, \quad a \in \mathbb{R}$$

- Eingabe der Funktion

```
var('a')
f(x) = (2*x^2-20*x +42)/(x-1)+a
```

```
x |--> a + 2*(x^2 - 10*x + 21)/(x - 1)
```

Kurvendiskussion II

- Pol ?

```
f.limit(x=1, dir='minus')
```

```
x |--> -Infinity
```

```
f.limit(x=1, dir='plus')
```

```
x |--> +Infinity
```

- Umformen

```
f.full_simplify()
```

```
x |--> ((a - 20)*x + 2*x^2 - a + 42)/(x - 1)
```

Kurvendiskussion III

- Nullstellen

```
solve(f==0,x)
```

```
[x == -1/4*a - 1/4*sqrt(a^2 - 32*a + 64) + 5, x ==
    -1/4*a + 1/4*sqrt(a^2 - 32*a + 64) + 5]
```

- Berechnen der Ableitung

```
f.differentiate(x)
```

```
x |--> 4*(x - 5)/(x - 1) - 2*(x^2 - 10*x + 21)/(x -
    1)^2
```

Kurvendiskussion IV

- Extremwerte

```
maxi = solve(f.differentiate(x)==0,x); maxi
```

```
[x == -2*sqrt(3) + 1, x == 2*sqrt(3) + 1]
```

- Lokale Minima und Maxima

```
float( ((f.diff(x)).diff(x))(maxi[0].rhs()) )
```

```
-1.1547005383792501
```

```
float( ((f.diff(x)).diff(x))(maxi[1].rhs()) )
```

```
1.1547005383792515
```

Kurvendiskussion V

- Verhalten von f für große x

```
f.limit(x=oo); f.limit(x=-oo)
```

```
x |--> +Infinity
x |--> -Infinity
```

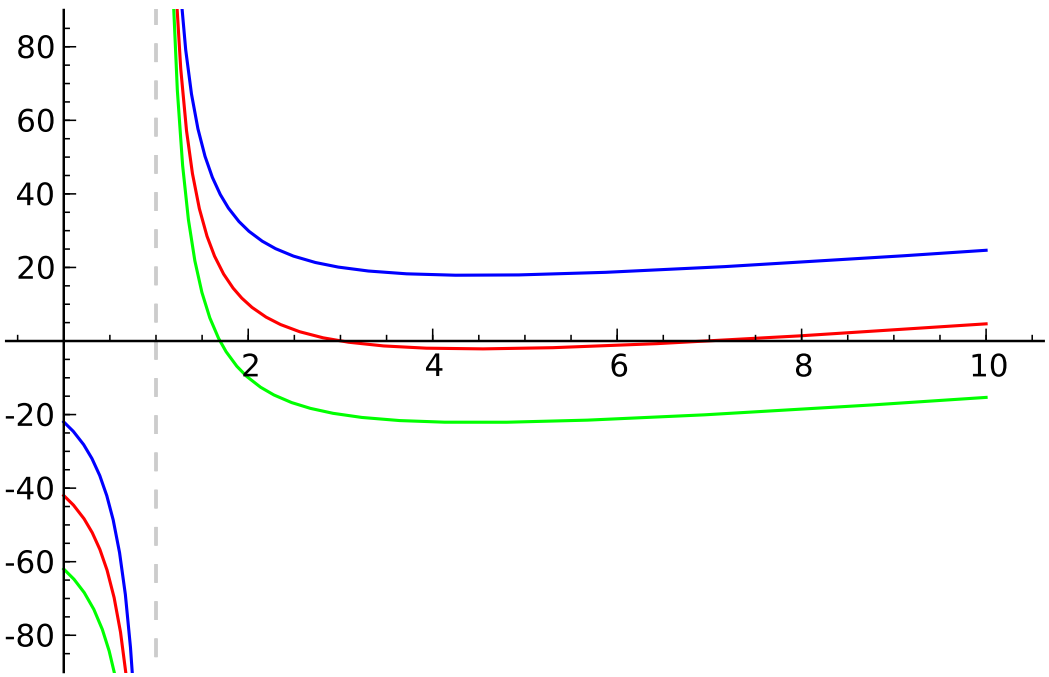
- Definiere f_0, f_1, f_2

```
f0 = f(x, a=0)
f1 = f(x, a=-20)
f2 = f(x, a=20);f0,f1,f2
```

```
(2*(x^2 - 10*x + 21)/(x - 1), 2*(x^2 - 10*x + 21)/(x
    - 1) - 20, 2*(x^2 - 10*x + 21)/(x - 1) + 20)
```

Plot

```
p = plot(f0,detect_poles='show',xmin=0, xmax=10,color='
    red')
p += plot(f1,detect_poles='show',xmin=0, xmax=10,color='
    green')
p += plot(f2,detect_poles='show',xmin=0, xmax=10,color='
    blue'); p.show(ymin=-80, ymax=80)
```



Zusammenfassung

- Deklarieren von Variablen mir `var()`, z.B.`var('a')`
- Definieren von Variablen mit '=', z.B. `a=3`
- Definieren von Funktionen mit'=', z.B. `f(x) = x^2 - 6*x`
- Symbolisches Rechnen
  - Grenzwertbestimmung: `f.limit(x=1, dir='<plus|minus>')`
  - Vereinfachen: `f.full_simplify()`
  - Bilden von Ableitungen `f.differentiate(x)`
- Lösen von Gleichungen: `solve( f(x)==0, x)`
- Berechnen numerischer Approximationen: `float(f(sqrt(3)+ 4))`
- Plotten einer Funktion: `plot(sin,(0,4))`

Aufbau

Symbolisches Rechnen I

- Integrieren von $\int_0^\infty x^4 e^{-x} dx$

```
integrate(x^4*exp(-x),x,0,oo)
```

```
24
```

- Stammfunktion von $\frac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}$

```
f(x) = (1+sin(x))/(1+cos(x))
g = f.integrate(x)
g.full_simplify()
```

```
x |--> -((cos(x) + 1)*log(cos(x) + 1) - sin(x))/(cos
    (x) + 1)
```

Symbolisches Rechnen II

- Faktorisieren und Ausmultiplizieren

```
expand((x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4))
```

```
x^4 - 10*x^3 + 35*x^2 - 50*x + 24
```

```
factor(_)
```

```
(x - 4)*(x - 3)*(x - 2)*(x - 1)
```

- Sortieren eines Ausdrucks bezüglich einer Unbekannten

```
var('b,a')
g = x^2+2*x+b*x^2+sin(x)+a*x
g.collect(x)
```

```
(b + 1)*x^2 + (a + 2)*x + sin(x)
```

Symbolisches Rechnen III

- Partialbruchzerlegung

```
g = x^ 2/( x^ 2- 1)
g.partial_fraction()
```

```
1/2/(x - 1) - 1/2/(x + 1) + 1
```

- Vereinfachen von Ausdrücken ($\frac{e^x-1}{e^{(1/2)x}+1}$)

```
g = (exp(x)-1)/(exp(x/2)+1)
g.simplify_radical()
```

```
e^(1/2*x) - 1
```

Aufbau

Berechnen des Schnittpunkts der Ebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad l, m \in \mathbb{R}$$

mit der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Grafische Darstellung

```
var('l,m'); E1 = 2+l-3*m; E2 = 1-l+m; E3 =-1-l+4*m
```

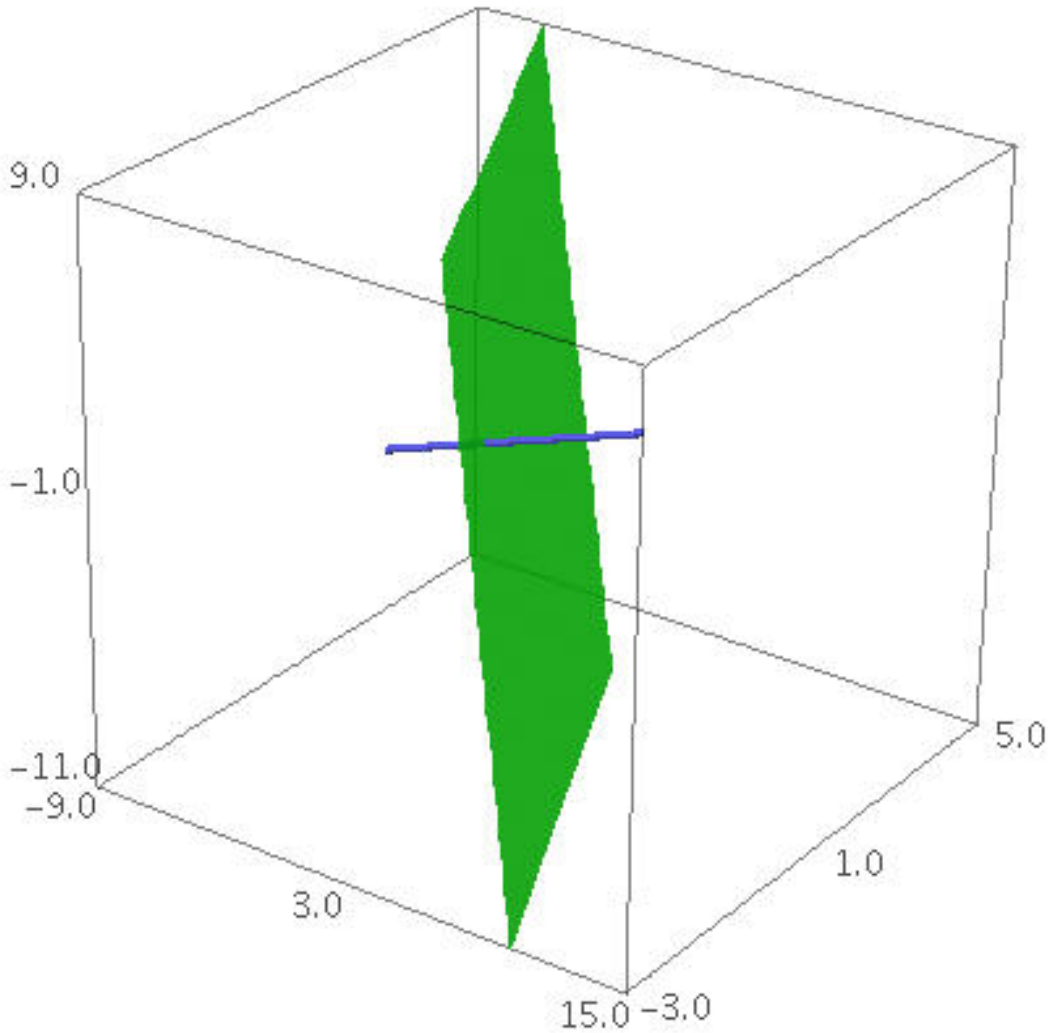
```
p = parametric_plot3d([E1,E2,E3],(l,-2,2),(m,-2,2), color
    ='green', opacity=0.8)
```

```
var('k'); g1 = 3+4*k; g2 = -k; g3 = 1+2*k
```

```
p += parametric_plot3d( (g1,g2,g3), (k, -3, 3),thickness=
    '3' )
```

```
p.show()
```

Grafische Darstellung



Analytische Lösung

Gleichsetzen ergibt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

oder

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}}_{=: A} \underbrace{\begin{pmatrix} l \\ m \\ k \end{pmatrix}}_{=: L} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=: b}$$

oder $AL = b$.

Definieren und Lösen des LGS

- Definieren der Matrix A

```
A = matrix([[1,-3,-4],[-1,1,1],[-1,4,-2]]); A
```

```
[ 1 -3 -4]
[-1  1  1]
[-1  4 -2]
```

- Definieren des Vektors b

```
b = vector([1,-1,2])
```

- Lösen von $A\ L = b$

```
A.solve_right(b)
```

oder

```
A\b
```

ergibt

```
(6/5, 3/5, -2/5)
```

- Einsetzen in die Geradengleichung

```
x_s = matrix([g1,g2,g3]).subs(k=L[2]); x_s
```

```
[7/5 2/5 1/5]
```

- Matrizenoperationen

```
B = matrix([[1,0,0],[0,1,1],[1,1,1]])
A*B; A-B; A+B
```

```
[-3 -7 -7]   [ 0 -3 -4] [ 2 -3 -4]
[ 0  2  2]   [-1  0  0] [-1  2  2]
[-3  2  2]   [-2  3 -3] [ 0  5 -1]
```

- Berechnen der Inversen (mit Probe)

```
A^(-1), A*A^(-1)
```

```
[  -2/5 -22/15   1/15]
[  -1/5   -2/5    1/5]
[  -1/5  -1/15  -2/15]

[1 0 0]
[0 1 0]
[0 0 1]
```

Aufbau

Funktionen

- eine einzeilige Funktion kann man wie folgt definieren:

```
def <name>(<Argumente>) : return <Rueckgabe>
```

- Beispiel:

```
def fd(ex) : return diff(ex)
fd(x^2)
```

```
2*x
```

Listen und Tuple

- Eine Liste ist in Sage (und Python) mit `[..,..]` gekennzeichnet
- Ein Tuple ist in Sage (und Python) mit `(..,..)` gekennzeichnet
- Beispiel:

```
liste = [21,22,24,23]
tuple = (liste[0], liste[2])
tuple, tuple[0]
```

```
((21, 24), 21)
```

```
liste.sort(); liste
```

```
[21, 22, 23, 24]
```

Einfache Schleifen und Abfragen

- mit dem Konstrukt `[<expr(var)> for <var> in <range|liste>]` kann man einfache Schleifen konstruieren..

```
[m^2 for m in [1..5] ]
```

```
[1, 4, 9, 16, 25]
```

- .. und diese mit Abfragen kombinieren.

```
[m^2 for m in [1..5] if m%2==0]
```

```
[4, 16]
```

Aufbau

Etwas Zahlentheorie I

Fermatsche Primzahlen: $F_n = 2^{2^n} + 1$. Finden Sie die kleinste Zahl F_n, die keine Primzahl ist!

```
def F(n): return 2^(2^n)+1
[[F(m),is_prime(F(m))] for m in range(1,6)]
```

```
[[5, True], [17, True], [257, True], [65537, True],
    [4294967297, False]]
```

```
divisors(int(F(5)))
```

```
[1, 641, 6700417, 4294967297]
```

Etwas Zahlentheorie II

- Eine Liste der ersten Primzahlen bis 100

```
menge = range(1,101)
[m for m in menge if is_prime(m)]
oder filter(is_prime,menge)
```

```
[2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43,
    47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97]
```

- Mersenne-Primzahlen $2^p - 1$, p Primzahl. Bestimmen der ersten Mersenne Primzahlen im Bereich ≤ 200.

```
menge = range(1,201)
primes = [m for m in menge if is_prime(m)]
[2^m-1 for m in primes if is_prime(2^m-1)]
```

```
[3, 7, 31, 127, 8191, 131071, 524287, 2147483647,
   2305843009213693951,
618970019642690137449562111,
   162259276829213363391578010288127,
170141183460469231731687303715884105727]
```

Etwas Zahlentheorie III

Wir geben für die natürlichen Zahlen ≤ 1000 an, wieviele Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ Teiler haben.

```
menge = range(1,1001)
liste = [number_of_divisors(int(m)) for m in menge]
[(i,len([m for m in liste if m==i]))for i in range(1,51)]
```

```
[(1, 1), (2, 168), (3, 11), (4, 292), (5, 3), (6, 110),
    (7, 2), (8,
180), (9, 8), (10, 22), (11, 0), (12, 97), (13, 0), (14,
     5), (15, 4),
...
```

Teiler der Zahl 840:

```
divisors(840)
```

Aufbau

Überlebensregeln

- Mehrere Befehle in einer Zeile durch ; trennen.
- Bei Eingaben, die über mehrere Zeilen gehen, kann ein Zeilenumbruch durch <ENTER> erreicht werden.
- Das Auswerten eines Blocks erfolgt mit <SHIFT>+<ENTER>.
- Ein neues Eingabefeld erhält man durch klicken auf den blauen, horizontalen Balken

Nützliches

- `_` refenziert die letzte Ausgabe.
- `[a..b]` oder `range(a,b+1)` erzeugt eine Liste von ganzen Zahlen von `a` bis `b`
- Löschen aller eigenen Variablen und Zurücksetzen auf den Anfangsstatus: `reset()`
- Das Feld aktivieren von Typeset lässt alle Ausgaben von LaTeX rendern.
- Html- und/oder LaTeX-Dokumentation: `<SHIFT>+<KLICK>` auf den blauen Balken
- Publish: Im Notebook kann durch klicken des Publish-Reiters das Notebook für alle offen gelegt werden.

Hilfefunktionen in Sage

- Autocompletion : mit der <TAB>-Taste erhält man alle möglichen Funktions- und/oder Variablen-Namen im gegebenen Kontext. Dies gilt insbesondere auch für Objektfunktionen (`object.function()`)
- `<command>?` : gibt ausführliche Hilfe zu `command` an.
- `help(<command>)` : öffnet ein Hilfefenster zu `command`.
- online Dokumentation:
  - Sage: `http://www.sagemath.org/doc/index.html`
  - Python: `http://docs.python.org/`