

Einführung in Sage - Einheit 5

Datencontainer, Lineare Abbildungen, Eigenwert und
Eigenvektoren

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen 

- 1 Datencontainer
- 2 Lineare Abbildungen
- 3 Eigenwerte und Eigenvektoren

1 **Datencontainer**

2 Lineare Abbildungen

3 Eigenwerte und Eigenvektoren

`https://sage.math.uni-goettingen.de/home/pub/19/`

1 Datencontainer

2 **Lineare Abbildungen**

3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Lineare Abbildungen

Seien K -Vektorräume V und W gegeben. Eine Abbildung

$$F: V \rightarrow W$$

heißt **linear**, falls für $v, w \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

(L1) $F(v + w) = F(v) + F(w)$

(L2) $F(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot F(v)$

- **Isomorphismus**: F bijektiv.
- **Endomorphismus**: $V = W$.
- **Automorphismus**: $V = W$ und F bijektiv.

Bemerkungen

- Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis in V und $(w_i)_{i \in I}$ seien Vektoren in W . Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $F: V \rightarrow W$ mit $F(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$.
- **Bild** von F : $\text{Im}(F) = F(V) := \{F(v), v \in V\}$.
- **Kern** von F : $\text{Ker}(F) := \{v \in V \mid F(v) = 0\}$
- Kern und Bild sind Untervektorräume.
- Dimensionsformel:

$$\dim V = \dim F(V) + \dim \text{Ker}(F)$$

- **$\text{Hom}_K(V, W)$** : Die Menge der linearen Abbildungen von V nach W . Sie ist ein Vektorraum durch punktweise Addition und Skalarmultiplikation.

- Jeder Matrix $A \in K^{m \times n}$ läßt sich durch

$$L_A : K^n \rightarrow K^m, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

eine lineare Abbildung zuordnen.

- Es gilt $\dim(L_A(K^n)) = \text{Rang}(A)$.

Sei V ein K -Vektorraum mit Basis $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$.

- Die lineare Abbildung $\Phi_{\mathcal{V}} : K^n \rightarrow V$ mit

$$\Phi_{\mathcal{V}}(x_1, \dots, x_n) = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

ist ein Isomorphismus. Man nennt $\Phi_{\mathcal{V}}$ ein **Koordinatensystem** in V und $x = (x_1, \dots, x_n) = \Phi_{\mathcal{V}}^{-1}(v)$ den **Koordinatenvektor** zu $v \in V$.

- Basiswechselabbildung von \mathcal{V} nach Basis \mathcal{Z} :

$$T := \Phi_{\mathcal{Z}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{V}}$$

Seien K -Vektorräume V und W mit Basen $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_m)$ gegeben.

Für eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ wird durch

$$\begin{aligned} F(v_1) &:= a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m \\ &\vdots \\ F(v_n) &:= a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung F definiert. Dies ergibt einen Isomorphismus

$$L_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} : K^{m \times n} \rightarrow \operatorname{Hom}_K(V, W), \quad A \mapsto F.$$

Kanonisches Beispiel

Seien K^n und K^m mit den kanonischen Basen \mathcal{K}_n und \mathcal{K}_m versehen.

- Die Abbildungen $\Phi_{\mathcal{K}_n}$ und $\Phi_{\mathcal{K}_m}$ sind Identitäten.
- Die Abbildung $L_{\mathcal{K}_m}^{\mathcal{K}_n}$ ist gegeben durch

$$L_{\mathcal{K}_m}^{\mathcal{K}_n}(A)(x) = Ax, \quad x \in K^n.$$

- Die Spaltenvektoren von A sind die Bilder der Einheitsvektoren unter der Abbildung $L_{\mathcal{K}_m}^{\mathcal{K}_n}(A)$.

Kommutierendes Diagramm

Seien K -Vektorräume V und W mit Basen $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_m)$ und eine lineare Abbildung F gegeben. Dann gilt das folgende kommutierende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & W \\ \Phi_V \uparrow & & \uparrow \Phi_W \\ K^n & \xrightarrow{(L_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}})^{-1}(F)} & K^m \end{array}$$

`https://sage.math.uni-goettingen.de/home/pub/20/`

- 1 Datencontainer
- 2 Lineare Abbildungen
- 3 Eigenwerte und Eigenvektoren**

Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei $A \in K^{n \times n}$. Ein Element $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** von A , wenn ein $x \in K^n \setminus \{0\}$ existiert,

$$Ax = \lambda x$$

gilt. Der Vektor $x \in K^n$ heißt **Eigenvektor** zum Eigenwert λ .

- Die Eigenwerte sind die Nullstellen des **charakteristischen Polynoms**

$$p(t) := \det(A - t I_n).$$

- Es gibt höchstens n Eigenwerte.

- Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.
- Gibt es eine Basis aus Eigenvektoren, so ist A **diagonalisierbar**, d.h. man kann die Abbildung L_A bei geeigneter Basiswahl durch eine Diagonalmatrix repräsentieren.
- Jeder Endomorphismus eines komplexen Vektorraums läßt sich durch eine Matrix in **Jordanscher Normalform** darstellen.

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Sei $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$. Gesucht ist die Menge der Lösungen (Lösungsraum):

$$\{x \in K^n \mid Ax = b\}$$

- Ist $b = 0$, so spricht man von einem **homogenen System**. Ansonsten spricht man von einem **inhomogenen System**.
- Der Lösungsraum W des homogenen Systems bildet einen Untervektorraum des K^n . Die Dimension ist

$$\dim(W) = n - \text{rang}(A).$$

Struktur des Lösungsraums

- **affiner Unterraum** $X \subset K^n$: wenn ein Unterraum W von K^n und ein $v \in K^n$ existiert, so dass

$$X = v + W$$

- Die Lösungen des inhomogenen Systems ($b \neq 0$) bilden einen affinen Unterraum des K^n .
- Ist W der Lösungsraum des homogenen Systems und $v \in K^n$ eine beliebige Lösung von $Ax = b$, dann ist der Lösungsraum X von $Ax = b$ gegeben durch $X = v + W$.
- Zwei Lösungen des inhomogenen Systems unterscheiden sich durch eine Lösung des homogenen Systems.

- Das inhomogene System ist genau dann für alle b lösbar, wenn $\text{rang}(A) = m$ gilt.
- Das homogene bzw. das inhomogene System besitzt höchstens eine Lösung, genau dann wenn $\text{rang}(A) = n$ gilt.
- Der Lösungsraum des inhomogenen Systems ist genau dann nicht leer, wenn $\text{rang}(A) = \text{rang}(A, b)$ gilt.
- Praktisch kann ein LGS mit dem **Gausschen Eliminationsverfahren** gelöst werden.

`https://sage.math.uni-goettingen.de/home/pub/21/`