

# Einführung in Sage - Einheit 4

## Matrizen, Vektorräume, Funktionen

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen 

## 1 Vektoren

- Matrizen
- Vektorräume

## 2 Funktionen

## 1 Vektoren

- Matrizen
- Vektorräume

## 2 Funktionen

## 1 Vektoren

- Matrizen
- Vektorräume

## 2 Funktionen

$m \times n$  Matrix  $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$  über einen Körper  $K$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} \in K$ , Zeilenindex  $i \in [1, m]$ , Spaltenindex  $j \in [1, n]$

# Definitionen

- **Transponiert** von  $A = (a_{ij})$ :  $A^T := (a_{ji})$ .
- **Symmetrisch**: wenn  $A = A^T$  gilt.
- **Adjungiert** von  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ :  $A^* := (\overline{a_{ji}}) \in \mathbb{C}^{n \times m}$ .
- **Einheitsmatrix**:  $I := I_n := (\delta_{ij}) \in K^{n \times n}$
- **Addition**: Seien  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in K^{n \times m}$ , dann

$$C = (c_{ij}) := A + B \in K^{n \times m}$$

mit  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

- **Multiplikation:** Seien  $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$  und  $B = (b_{ij}) \in K^{n \times p}$ , dann

$$C = (c_{ij}) := A \cdot B \in K^{m \times p}$$

mit  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ .

- **orthogonal:**  $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n$  für  $A \in K^{n \times n}$
- **unitär:**  $A \cdot A^* = A^* \cdot A = I_n$  für  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .
- **invertierbar:**  $A \in K^{n \times n}$  heißt , wenn eine Matrix  $A^{-1} \in K^{n \times n}$  existiert mit  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ .

# Definitionen und Bemerkungen

- Die Multiplikation ist assoziativ aber in der Regel **nicht kommutativ**.
- Die Matrizen aus  $K^{m \times n}$  bilden einen Vektorraum über  $K$  (mit komponentenweiser Skalarmultiplikation).
- **allgemeine lineare Gruppe**  $GL(K, n) = GL_n(K) = GL(n, K)$ : Die Menge der invertierbaren Matrizen aus  $K^{n \times n}$  bilden bezüglich der Multiplikation eine Gruppe.
- **orthogonale Gruppe**  $O(n)$ : Die Menge der orthogonalen Matrizen in  $GL(\mathbb{R}, n)$  bilden eine Untergruppe von  $GL(\mathbb{R}, n)$ .
- **unitäre Gruppe**  $U(n)$ : Die entsprechende Untergruppe der unitären Matrizen in  $GL(\mathbb{C}, n)$ .



## 1 Vektoren

- Matrizen
- Vektorräume

## 2 Funktionen

Ein Tripel  $(V, +, \cdot)$ , bestehend aus einer nichtleeren Menge  $V$  und Verknüpfungen

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad \cdot : K \times V \rightarrow V$$

heißt **Vektorraum** über einem Körper  $K$ , wenn gilt:

- ❶  $(V, +)$  ist eine abelsche Gruppe.
- ❷ Für alle  $v, w \in V$  und alle  $\lambda, \mu \in K$  gilt:
  - ❶  $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$ .
  - ❷  $\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$ .
  - ❸  $(\lambda \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$ .
  - ❹  $1 \cdot v = v$ .

- **Vektoren**: Die Elemente eines Vektorraums.
- **Skalarmultiplikation**: Die Abbildung  $\cdot : K \times V \rightarrow V$ . Die Elemente des Körpers  $K$  nennt man **Skalare**.
- **Untervektorraum** oder **Unterraum** von  $V$ : Ist  $U \subset V$  eine Teilmenge des Vektorraums  $V$  und es gelten alle Vektorraumaxiome.
- **Vorsicht!** man muß zwischen der 0 des Körpers und der 0 des Vektorraums (Nullvektor) unterscheiden.  
Es gilt  $0 \cdot v = 0$  für alle  $v \in V$ .

# Beispiele für Vektorräume

- $K^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in K\}, n \in \mathbb{N}$
- Sei  $M$  eine beliebige Menge. Die Menge der Abbildungen von  $M$  in  $K$ ,  $\text{Abb}(M, K)$ , mit den punktweise definierten Verknüpfungen

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \forall x \in M$$

$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x), \forall x \in M$$

für  $\alpha \in K, f, g: M \rightarrow K$ .

- Die Menge der Polynome bis zum Grad  $n$ .
- Die Menge aller Polynome.
- $\mathbb{R}$  als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum.
- $\mathbb{C}$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

# Lineare Abhängigkeit

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $(v_1, \dots, v_r)$  eine Familie von Elementen aus  $V$ .

- **Linearkombination**  $v \in V$  von  $(v_1, \dots, v_r)$ : falls  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$  mit  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$ .
- **Lineare Hülle**  $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ : Die Menge aller Linearkombinationen. Die Lineare Hülle ist ein Unterraum von  $V$ .
- **linear unabhängig**: Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$  und ist  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$  so folgt  $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ . Andernfalls **linear abhängig**.
  - Ist  $M \subseteq V$  eine unendliche Menge, dann ist  $M$  linear unabhängig falls alle endlichen Teilmengen von  $M$  linear unabhängig sind.

# Weitere Notationen und Bemerkungen

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $(v_1, \dots, v_r)$  eine Familie von Elementen aus  $V$

- $(v_1, \dots, v_r)$  sind genau dann linear unabhängig, wenn sich jeder Vektor  $v \in \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$  eindeutig linear kombinieren läßt.
- Vektoren sind linear unabhängig wenn die Determinante der korrelierenden Matrix ungleich 0 ist.
- Gilt  $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$ , so ist  $(v_1, \dots, v_r)$  ein **Erzeugendensystem**. Sind  $(v_1, \dots, v_r)$  zusätzlich linear unabhängig, so ist  $(v_1, \dots, v_r)$  eine **Basis**.
- Aus jedem Erzeugendensystem kann man eine Basis auswählen.

# Beispiele für Basen

- Seien  $(e_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n$  die Einheitsvektoren.  $(e_1, \dots, e_n)$  ist eine Basis des  $\mathbb{R}^n$ .
- Die Monombasis  $(1, x, x^2, \dots, x^n)$  ist eine Basis des Vektorraums der Polynome  $n$ -ten Grades.
- $(1, i)$  ist eine Basis von  $\mathbb{C}$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.
- $\mathbb{R}$  als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum hat keine endliche Basis.

- **Dimension** des Vektorraums  $V$ : die Anzahl der Basiselemente einer Basis  $(v_1, \dots, v_n)$ .
- Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
- Seien  $W, Z$  Unterräume von  $V$ . Dann ist  $W + Z := \text{span}(W \cup Z)$  die **Summe** von  $W$  und  $Z$ . Es gilt:

$$\dim(W + Z) = \dim(W) + \dim(Z) - \dim(W \cap Z)$$



# Normen auf Vektorräumen

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$ .

Eine **Norm** auf  $V$  ist eine Abbildung

$$\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|,$$

so dass für alle  $\alpha \in K$ ,  $u, v \in V$  gilt

$$\|v\| \geq 0$$

$$\|v\| = 0 \text{ impliziert } v = 0$$

$$\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \text{ (Dreiecksungleichung).}$$

$(V, \| \cdot \|)$  heißt **normierter Raum**.

# Skalarprodukt

Eine skalarwertige binäre Abbildung

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow K$$

auf einem Vektorraum  $V$  über  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$  heißt **Skalarprodukt**,  
wenn für alle  $x, y, z \in V$ ,  $\alpha, \beta \in K$  gilt

$$(x, x) \geq 0$$

$$(x, x) = 0 \text{ impliziert } x = 0.$$

$$(x, y) = \overline{(y, x)}$$

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$$

- Ein VR  $V$  mit Skalarprodukt heißt **Prä-Hilbert-Raum**. Ist  $K = \mathbb{R}$  so heißt der Raum auch **euklidisch**.
- Durch  $\|v\| := \sqrt{(v, v)}$ ,  $v \in V$  läßt sich eine Norm definieren. Es gilt die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

- Im euklidischen Raum ist der Winkel  $\alpha$  zwischen zwei Vektoren  $u, v \in V \setminus \{0\}$  definiert durch

$$\cos(\alpha) = \frac{(u, v)}{\|u\| \|v\|}.$$

- **Orthogonal**: wenn  $(u, v) = 0$  gilt.
- **Orthogonalbasis**: Eine Basis aus paarweise orthogonalen Vektoren.
- **Orthonormalbasis**: Eine Orthogonalbasis, bei der alle Vektoren die Norm 1 haben.
- Jeder endlichdimensionale Prä-Hilbert-Raum hat eine Orthonormalbasis.
- **Orthogonalraum**:

$$U^\perp := \{v \in V \mid (v, u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

wenn  $U$  ein Unterraum von  $V$  ist.

- Es gilt:  $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$ , insb.  $U \cap U^\perp = 0$ .

`https://sage.math.uni-goettingen.de/home/pub/16/`

## 1 Vektoren

- Matrizen
- Vektorräume

## 2 Funktionen

`https://sage.math.uni-goettingen.de/home/pub/17/`