

# Einführung in Sage

## Einheit 8

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen



5. Februar 2010

1 Differenzieren

2 Taylorsche Formel

3 Integration

1 Differenzieren

2 Taylorsche Formel

3 Integration

Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **differenzierbar** an der Stelle  $x_0 \in D$ , wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.

Der Grenzwert wird **Ableitung** oder **Differentialquotient** von  $f$  an  $x_0$  genannt und mit  $f'(x_0) = f^{(1)}(x_0)$  bezeichnet.

- Man sagt, dass  $f$  **differenzierbar** (auf  $D$ ) ist, wenn  $f$  an jeder Stelle von  $D$  differenzierbar ist. Die so auf  $D$  erklärte Funktion  $f'$  heißt **Ableitung** von  $f$ .
- Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  ist an  $x_0 \in D$  genau dann differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Th + R(h)h, \quad \lim_{h \rightarrow 0} R(h) = 0$$

gilt ( $T$  und  $R$  hängen i.A. von  $x_0$  ab).

- Ist  $f$  an  $x_0 \in D$  differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\log(x))' = \frac{1}{x}, x > 0$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$

# Landau-Symbol

Sei  $f$  eine Funktion, die auf einem Intervall definiert ist, das 0 enthält. Man schreibt  $f(x) = O(x^n)$ , wenn es eine Konstante  $C > 0$  gibt, so dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|^n} \leq C$$

gilt. Man schreibt  $f(x) = o(x^n)$ , wenn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|^n} = 0$$

gilt.

**Bedeutung:**  $f(x) = O(x^n)$  bedeutet, dass  $f$  für  $x$  gegen 0 mindestens so schnell gegen 0 geht wie  $x^n$ . Im Fall  $f(x) = o(x^n)$  fällt die Funktion schneller als  $x^n$ .

# Höhere Ableitungen

- Man kann induktiv höhere Ableitungen definieren. Ist  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$   $(n-1)$ -mal differenzierbar mit der  $(n-1)$ -ten Ableitung  $f^{(n-1)}$  und ist  $f^{(n-1)}$  wiederum differenzierbar, so nennen wir  $f$   $n$ -mal differenzierbar und bezeichnen die  $n$ -te Ableitung durch  $f^{(n)}$ .
- Ist  $f$   $n$ -mal differenzierbar und ist die  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)}$  stetig, so heißt  $f$   $n$ -mal **stetig differenzierbar**.
- $f$  heißt **unendlich oft differenzierbar**, wenn  $f$   $n$ -mal differenzierbar ist für alle  $n \in \mathbb{N}$ .



# Ableitungen in Sage I

Durch `diff(<Ausdruck>,x)` wird ein Ausdruck oder eine Funktion nach  $x$  abgeleitet.

**Beispiele:**

```
>> diff(sin(x),x)
```

```
cos(x)
```

```
>> diff(x^x,x)
```

```
(log(x) + 1)*x^x
```

# Ableitungen in Sage II

Höhere Ableitungen können auch bestimmt werden. Durch `diff(<Ausdruck>,x1,x2,x3,...)` wird die Ableitung von <Ausdruck> bzgl. der Unbekannten  $x_1$  berechnet. Dann wird der entstehende Ausdruck nach  $x_2$  differenziert, und so fort.

```
>> _=var('x,y,a'); diff(x^2*y^2+a,x,y)
```

```
4*x*y
```

```
>> diff(1/x,x,10)
```

```
3628800/x^11
```

# Ableitungen - Beispiele

```
>> f(x) = log(cos(x))  
>> f.diff(); diff(f); diff(f,x,x)
```

```
x |--> -sin(x)/cos(x)  
x |--> -sin(x)/cos(x)  
x |--> -sin(x)^2/cos(x)^2 - 1
```

```
>> g(x,y) = sin(x^2+y^2)  
>> g.diff(x,x,y)
```

```
(x, y) |--> -8*x^2*y*cos(x^2 + y^2) - 4*y*sin(x^2 +  
y^2)
```

Seien  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen und  $x_0 \in D$ . Dann gilt

- $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ ,
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$  (Produktregel),
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ , falls  $g(x_0) \neq 0$  (Quotientenregel).

# Differentiationsregeln

- Kettenregel: Seien  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(D_f) \subset D_g$ . Ferner seien  $f$  an  $x_0 \in D_f$  und  $g$  an  $y_0 = f(x_0)$  differenzierbar. Dann gilt

$$(g \circ f)(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

- Leibnizsche Regel

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

- Es gilt für die Umkehrfunktion  $f^{-1}$ :

$$(f^{-1})' \circ f = \frac{1}{f'}.$$

- Ist eine Funktion  $f$  an  $x_0$  differenzierbar und hat sie ein lokales Extremum, so gilt  $f'(x_0) = 0$ .
- (Mittelwertsatz) Sei  $f$  eine in dem Intervall  $[a, b]$  stetige und in  $(a, b)$  differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein  $\xi \in (a, b)$ , so dass gilt

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

- Eine differenzierbare Funktion auf dem Intervall  $I$  ist genau dann konstant, wenn  $f'(x)$  auf  $I$  identisch verschwindet.

# Regel von L'Hospital

Seien  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, und  $g'(x) \neq 0$ ,  $x \in D$  und  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ . Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der Limes auf der rechten Seite existiert.

Der Fall  $a = \pm\infty$  ist auch erlaubt!

**Bemerkung:** Die Aussage gilt auch für  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

# L'Hospital - Beispiele

- Bestimmung von  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha}$ ,  $\alpha > 0$

```
>> var('a'); f(x) = log(x); g(x) = x^a  
>> assume (a>0)  
>> limit(diff(f(x),x)/diff(g(x),x),x=oo)
```

0

```
>> assume(a,'integer') ??  
>> limit(f(x)/g(x),x=oo)
```

0



- Bestimmung von  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x/2)}{1 - \cos(x)}$ :

```
>> f(x) = -cos(x/2)
>> g(x) = 1-cos(x)
>> limit(f(x)/g(x), x=0)
```

-Infinity ??

```
>> limit(diff(f(x), x, x)/diff(g(x), x, x), x=0)
```

1/4

1 Differenzieren

2 **Taylor'sche Formel**

3 Integration

# Taylor'sche Formel

Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$   $(n+1)$ -mal differenzierbar und seien  $x, x_0 \in I$ ,  $x \neq x_0$ . Dann gibt es  $\xi \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ & + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x, x_0) \end{aligned}$$

gilt mit dem **Lagrangschen Restglied**

$$R_n(x, x_0) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Für das Restglied gibt es noch andere Darstellungen:

- Darstellung von **Cauchy**

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^n (x - x_0).$$

- **Integraldarstellung**

$$R_n(x, x_0) = \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt.$$

Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  unendlich oft differenzierbar und seien  $x, x_0 \in I$ ,  $x \neq x_0$ . Dann nennt man die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

die **Taylorreihe** von  $f(x)$  um den Entwicklungspunkt  $x_0$ .

**Frage:** Wann stellt die Taylorreihe die Funktion  $f$  dar und wann nicht?

**Antwort:** Wenn das Restglied  $R_n(x, x_0)$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 geht.

# Hinreichende Bedingungen

- Die Funktion  $f$  läßt sich auf  $I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  durch die Taylorreihe darstellen, wenn  $\delta := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n}} > 0$  mit  $A_n = \sup_{x \in I} \frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}$  gilt.
- Gibt es ein  $M > 0$ , so dass  $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$  ist für  $x \in I$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , so läßt sich  $f$  auf  $I$  durch die Taylorreihe darstellen.
- Es gebe ein  $M$  mit  $f^{(n)}(x) \geq -M^n$ ,  $x \in [a, b]$ . Dann gilt die Taylorreihendarstellung für alle  $x \in [a, b]$  mit  $|x - x_0| < b - x$ .

- Ist  $f(x) = \sum_{n=0}^k a_n x^n$  ein Polynom, so gilt für jeden Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

- Für  $f(x) = \exp(x)$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$  gilt

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Für  $f(x) = \log(x)$  und  $x_0 = 1$  gilt

$$\log(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x - 1)^n, \quad 0 < x \leq 2.$$

- Für  $f(x) = (1 + x)^a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  und  $x_0 = 0$  gilt

$$(1 + x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad -1 < x < 1.$$



# Visualisierung I

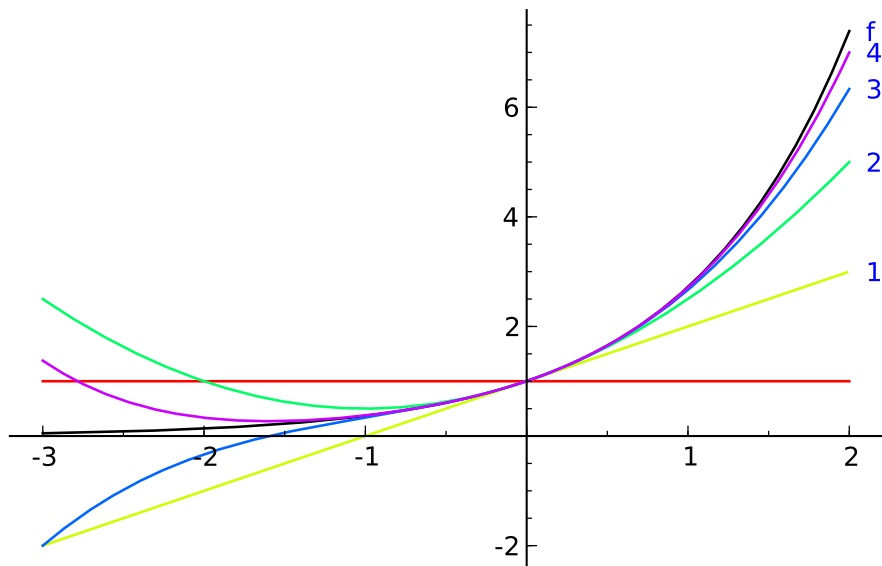
Entwickle  $f(x) = \exp(x)$  um  $x_0 = 0$ . Wir entwickeln gemäß der Taylorformel und erhalten die Approximationen  $g_0(x) := 1$ ,  $g_1(x) := 1 + x$ ,  $g_2(x) := 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ ,  $g_3(x) = \sum_{i=0}^3 \frac{x^i}{i!}$  und  $g_4(x) = \sum_{i=0}^4 \frac{x^i}{i!}$ .

```
>> var('n,k'); f(x) = exp(x)
>> g = [sum(x^k/factorial(k),k,0,n) for n in
        [0..4]]; g
```

```
[1, x + 1, 1/2*x^2 + x + 1, 1/6*x^3 + 1/2*x^2 + x +
 1, 1/24*x^4 +
1/6*x^3 + 1/2*x^2 + x + 1]
```

```
>> p = plot(f,(-3,2),color='black')
>> for n in [0..4]:
>>     p += plot(g[n],(-3,2),rgbcolor=hue(n/5),label
    =n)
>> p.show()
```

# Visualisierung II



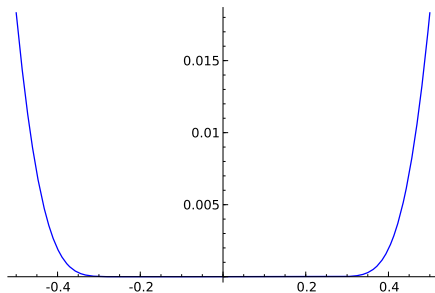
# Gegenbeispiel

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist nicht durch ihre Taylorreihe an  $x_0 = 0$  darstellbar. Die Taylorreihe zu  $f$  ist identisch 0, da  $f^{(n)}(0) = 0$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Plot: `plot(exp(-1/x^2), (-0.5, 0.5))`.



# Taylorformel in MuPAD

MuPAD ist in der Lage ein Taylorpolynom zu einer gegebenen Funktion zu berechnen. Das Taylorpolynom  $(n - 1)$ -ten Grades zu einem Ausdruck  $f$  (mit Unbekannten  $x$ ) am Entwicklungspunkt  $x_0$  kann durch

```
>> taylor(f,x=x0,n)
```

berechnet werden. Rückgabewert ist ein Objekt vom Typ `Series::Puisseux`.

# Beispiele

```
>> taylor1:=taylor(1/(1-x),x=0,5)
```

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + O(x^5)$$

```
>> taylor2:=taylor(sin(x),x=2,5)
```

$$\begin{aligned} & \sin(2) + \cos(2) (x - 2) - \\ & \quad \frac{\sin(2) (x - 2)^2}{2} - \frac{\cos(2) (x - 2)^3}{6} + \\ & \quad \frac{\sin(2) (x - 2)^4}{24} + O((x - 2)^5) \end{aligned}$$

- Das in den Darstellungen auftretende Symbol  $O$  ist das Landau-Symbol. Mit ihm kann man in MuPAD rechnen.

```
>> o1:=O(x^2): o2:=O(x^3):  
>> o1*o2, o1+o2, o1/o2
```

$$O(x^5), O(x^2), O\left(\frac{1}{x}\right)$$

# Bemerkungen

- Man kann mit den Objekten des Typs `Series::Puisseux` rechnen, insofern sie denselben Entwicklungspunkt haben. Z. B., können sie addiert oder multipliziert werden.

```
>> taylor1+taylor2
```

```
Error: different series variables or  
expansion points [Series::Puisseux::plus]
```

```
>> taylor3:=taylor(exp(x),x=2,5):  
>> taylor2*taylor3
```

$$\begin{aligned} & \exp(2)^2 + 2 \exp(2)^2 (x-2) + 2 \exp(2)^2 (x-2)^2 + \frac{4 \exp(2)^2 (x-2)^3}{3} \\ & + \frac{2 \exp(2)^2 (x-2)^4}{3} + 0((x-2)^5) \end{aligned}$$

1 Differenzieren

2 Taylorsche Formel

**3 Integration**



- Sei  $[a, b]$  ein Intervall. Gilt  $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ , so nennt man  $Z = (a_0, \dots, a_n)$  eine **Zerlegung** von  $[a, b]$ .
- Eine Funktion  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Treppenfunktion**, wenn es eine Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  gibt, so dass  $\phi$  konstant ist auf jedem Teilintervall  $(a_i, a_{i+1})$  von  $Z$ .
- Wir erklären das Integral einer Treppenfunktion  $\phi$  durch

$$\int_Z \phi := \sum_{k=1}^n c_k (a_k - a_{k-1}).$$

Dabei ist  $Z$  die zugehörige Zerlegung und  $c_k = \phi(x)$ ,  $x \in (a_{k-1}, a_k)$ .

- Die Menge aller Treppenfunktionen auf  $[a, b]$  sei  $T[a, b]$ .

Für eine beschränkte Funktion  $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

$$\int^* f := \inf \left\{ \int \psi \mid \psi \in T[a, b], f \leq \psi \right\}.$$

das **Oberintegral** und

$$\int_* f := \sup \left\{ \int \psi \mid \psi \in T[a, b], f \geq \psi \right\}.$$

das **Unterintegral**. Es gilt für  $\phi, \psi \in T[a, b]$  mit  $\phi \leq f \leq \psi$  die Ungleichung

$$\int \phi \leq \int_* f \leq \int^* f \leq \int \psi.$$

```
>> p:=student::plotRiemann(cos(x), x = -PI..PI):  
>> plot(p)
```

```
>> p:=student::plotRiemann(cos(x),x=-PI..PI,30):  
>> plot(p)
```

# Das Riemannsche Integral

Eine beschränkte Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **integrierbar**, wenn Ober- und Unterintegral von  $f$  auf  $[a, b]$  übereinstimmen.

Der gemeinsame Wert heißt das **Integral** von  $f$  und wird mit

$$\int_a^b f(x) dx$$

bezeichnet. Dabei heißt  $f$  der Integrand,  $x$  die Integrationsvariable, und  $a$ ,  $b$  sind die Integrationsgrenzen.

- Linearität

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$$

- Monotonie

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx.$$

- Ist  $f, g$  integrierbar, so auch  $f + g$ ,  $f * g$ ,  $f - g$ ,  $\max\{f, g\}$ ,  $\min\{f, g\}$ .

# Wichtige Sätze

- Ist  $f$  stetig auf einem Intervall  $I$  und  $a \in I$ , so ist  $F(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in I$  eine differenzierbare Funktion mit  $F'(x) = f(x)$ .
- Jede stetige Funktion besitzt eine **Stammfunktion**  $F$ , also eine Funktion mit  $F'(x) = f(x)$ .
- Für eine Stammfunktion  $F$  benutzt man auch die Notation  $\int f(x)dx$  und spricht von einem unbestimmten Integral.
- Ist  $f$  stetig auf  $[a, b]$ , so gibt es ein  $\xi \in [a, b]$  mit  $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$ .

- Bestimmte Integrale der Form  $\int_a^b f(x) dx$  können in MuPAD berechnet werden durch: `int(f(x),x=a..b)` Dabei ist  $f(x)$  ein unbestimmter Ausdruck.
- Unbestimmte Integrale können durch `int(f(x),x)` bestimmt werden.
- Numerische Approximationen können durch die Funktion `numeric::int` berechnet werden.



# Beispiele

```
>> int(sin(x),x=0..6)
```

```
1 - cos(6)
```

```
>> int(exp(x)*x,x=2..3)
```

```
2 exp(3) - exp(2)
```

```
>> int(1/x^2,x=1..infinity)
```

```
1
```

```
>> numeric::int(sin(1/x)*x,x=1..2)
```

```
0.9190591676
```

# Beispiele

```
>> int(x^2 *sin(x),x); int(sin(x)^4,x)
```

$$2 x \sin(x) - \cos(x) (x^2 - 2)$$

$$- \frac{\cos(x) \sin(x)^3}{4} + \frac{3 x^3}{8} - \frac{3 \sin(2 x)}{16}$$

```
>> int(x^a*b,x)
```

$$\text{piecewise} \left( \begin{array}{l} \frac{b x^{a+1}}{a+1} \text{ if } a \neq -1, \\ b \ln(x) \text{ if } a = -1 \end{array} \right)$$

# Uneigentliche Integrale

Sei  $f$  auf  $[a, b)$  erklärt (eventuell  $b = \infty$ ) und sei  $f$  auf jedem abgeschlossenen Teilintervall integrierbar. Man definiert

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{z \rightarrow b(-0)} \int_a^z f(x) dx,$$

falls der Limes existiert. Man spricht von einem **uneigentlichen Integral**.

- Sei  $(f_n)_n$  eine Folge integrierbarer Funktionen auf  $[a, b]$ . Konvergiert  $(f_n)_n$  gleichmäßig, so ist die Grenzfunktion integrierbar mit

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

- Sei  $(f_n)_n$  eine Folge differenzierbarer Funktionen auf  $[a, b]$ .  $(f'_n)_n$  konvergiere gleichmäßig und es existiere ein  $x_0 \in [a, b]$  für den  $f_n(x_0)$  konvergiert. Dann konvergiert  $(f_n)_n$  gleichmäßig mit  $(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ .

Man kann das Verhalten von MuPAD an vielen Stellen den eigenen Wünschen anpassen. Dazu dienen die sogenannten **Preferences**, die man sich durch `Pref()` anzeigen lassen kann. Ändern kann man die Eigenschaften durch Aufruf der Eigenschaft mit der gewünschten neuen Einstellung.

```
>> Pref::Eigenschaft(Einstellung)
```

# Einige Einstellungen

- Die Voreinstellung `report` steuert die regelmäßig angezeigten Informationen über reservierten Speicher, benutzten Speicher und Rechenzeit. Erlaubt sind Werte zwischen 0 (Default) und 9. Bei 9 bekommt man ständig Informationen, bei 0 nie.

```
>> Pref::report(9): int((x*sin(x)),x)
```

- Darstellung von Gleitkommazahlen: `floatFormat`. Dies funktioniert nur bei ASCII-Darstellung.

```
>> Pref::floatFormat("e"): float(exp(-50))
```

```
1.928749848e-22
```

```
>> Pref::floatFormat("f"): float(exp(-50))
```

```
0.0000000000000000000000001928749848
```

- Durch `reset()` wird MuPAD in den Anfangszustand zurückgesetzt.
- Nach `setuserinfo(Any,n)` gibt MuPAD weitere Informationen (je nach  $n$ ) über die Funktionen zurück.
- Durch Voranstellen von `!` kann man UNIX-Befehle innerhalb MuPAD aufrufen. Zum Beispiel kann man sich den Inhalt des aktuellen Verzeichnisses durch `!ls` anzeigen lassen.