Einführung in Sage - Einheit 4

Matrizen, Vektorräume, Funktionen

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen

Aufbau

1. **Vektoren**
    - Matrizen
    - Vektorräume

Aufbau

1. **Vektoren**
   - Matrizen
   - Vektorräume

Aufbau

1. **Vektoren**
   - Matrizen
   - Vektorräume

Matrizen

$m \times n$ Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ über einen Körper K

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} \in K$, Zeilenindex $i \in [1, m]$, Spaltenindex $j \in [1, n]$

Definitionen

- Transponiert von $A = (a_{ij})$: $A^T := (a_{ji})$.
- Symmetrisch: wenn $A = A^T$ gilt.
- Adjungiert von $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$: $A^* := (\overline{a_{ji}}) \in \mathbb{C}^{n \times m}$.
- Einheitsmatrix: $I := I_n := (\delta_{ij}) \in K^{n \times n}$
- Addition: Seien $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in K^{n \times m}$, dann

$$C = (c_{ij}) := A + B \in K^{n \times m}$$

mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Definitionen

- Multiplikation: Seien $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ und $B = (b_{ij}) \in K^{n \times p}$, dann

  $$C = (c_{ij}) := A \cdot B \in K^{m \times p}$$

  mit $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.
- orthogonal: $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n$ für $A \in K^{n \times n}$
- unitär: $A \cdot A^* = A^* \cdot A = I_n$ für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.
- invertierbar: $A \in K^{n \times n}$ heißt , wenn eine Matrix $A^{-1} \in K^{n \times n}$ existiert mit $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Definitionen und Bemerkungen

- Die Multiplikation ist assoziativ aber in der Regel nicht kommutativ.
- Die Matrizen aus $K^{m \times n}$ bilden einen Vektorraum über K (mit komponentenweiser Skalarmultiplikation).
- allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}(K, n) = \mathrm{GL}_n(K) = \mathrm{GL}(n, K)$: Die Menge der invertierbaren Matrizen aus $K^{n \times n}$ bilden bezüglich der Multiplikation eine Gruppe.
- orthogonale Gruppe: $O(n)$: Die Menge der orthogonalen Matrizen in $GL(\mathbb{R}, n)$ bilden eine Untergruppe von $GL(\mathbb{R}, n)$.
- unitäre Gruppe $U(n)$: Die entsprechende Untergruppe der unitären Matrizen in $GL(\mathbb{C}, n)$.

Aufbau

1. **Vektoren**
   - Matrizen
   - Vektorräume

Vektorraum

Ein Tripel $(V, +, \cdot)$, bestehend aus einer nichtleeren Menge V und Verknüpfungen

$$+ : V \times V \;\to\; V, \qquad \cdot : K \times V \;\to\; V$$

heißt Vektorraum über einem Körper K, wenn gilt:

1. $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
2. Für alle $v, w \in V$ und alle $\lambda, \mu \in K$ gilt:
   1. $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$.
   2. $\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$.
   3. $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$.
   4. $1 \cdot v = v$.

Begriffe

- Vektoren: Die Elemente eines Vektorraums.
- Skalarmultiplikation: Die Abbildung $\cdot : K \times V \rightarrow V$. Die Elemente des Körpers K nennt man Skalare.
- Untervektorraum oder Unterraum von V: Ist $U \subset V$ eine Teilmenge des Vektorraums V und es gelten alle Vektorraumaxiome.
- Vorsicht! man muß zwischen der 0 des Körpers und der 0 des Vektorraums (Nullvektor) unterscheiden.
  Es gilt $0 \cdot v = 0$ für alle $v \in V$.

Beispiele für Vektorräume

- $K^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in K\}$, $n \in \mathbb{N}$
- Sei M eine beliebige Menge. Die Menge der Abbildungen von M in K, $\mathrm{Abb}(M, K)$, mit den punktweise definiertenVerknüpfungen

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x), \forall\, x \in M \\ (\alpha \cdot f)(x) &:= \alpha \cdot f(x), \forall\, x \in M \end{aligned}$$

  für $\alpha \in K$, $f, g : M \mapsto K$.
- Die Menge der Polynome bis zum Grad n.
- Die Menge aller Polynome.
- $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.
- $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Lineare Abhängigkeit

Sei V ein K-Vektorraum und $(v_1, \dots, v_r)$ eine Familie von Elementen aus V.

- Linearkombination $v \in V$ von $(v_1, \dots, v_r)$: falls $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$.
- Lineare Hülle $span\{v_1, \dots, v_n\}$: Die Menge aller Linearkombinationen. Die Lineare Hülle ist ein Unterraum von V.
- linear unabhängig: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ und ist $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0$ so folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$. Andernfalls linear abhängig.
  - Ist $M \subseteq V$ eine unendliche Menge, dann ist M linear unabhängig falls alle endlichen Teilmengen von M linear unabhängig sind.

Weitere Notationen und Bemerkungen

Sei V ein K-Vektorraum und $(v_1, \dots, v_r)$ eine Familie von Elementen aus V

- $(v_1, \dots, v_r)$ sind genau dann linear unabhängig, wenn sich jeder Vektor $v \in span\{v_1, \dots, v_r\}$ eindeutig linear kombinieren läßt.
- Vektoren sind linear unabhängig wenn die Determinante der korrelierenden Matrix ungleich 0 ist.
- Gilt $V = span\{v_1, \dots, v_r\}$, so ist $(v_1, \dots, v_r)$ ein Erzeugendensystem. Sind $(v_1, \dots, v_r)$ zusätzlich linear unabhängig, so ist $(v_1, \dots, v_r)$ eine Basis.
- Aus jedem Erzeugendensystem kann man eine Basis auswählen.

Beispiele für Basen

- Seien $(e_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n$ die Einheitsvektoren. $(e_1, \ldots, e_n)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^n$.
- Die Monombasis $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ ist eine Basis des Vektorraums der Polynome n-ten Grades.
- $(1, i)$ ist eine Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.
- $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum hat keine endliche Basis.

Basis und Dimension

- Dimension des Vektorraums V: die Anzahl der Basiselemente einer Basis $(v_1, \ldots, v_n)$.
- Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
- Seien W, Z Unterräume von V. Dann ist $W + Z := span(W \cup Z)$ die Summe von W und Z. Es gilt:

$$\dim(W + Z) = \dim(W) + \dim(Z) - \dim(W \cap Z)$$

Normen auf Vektorräumen

Sei V ein Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.
Eine Norm auf V ist eine Abbildung

$$\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|,$$

so dass für alle $\alpha \in K$, $u, v \in V$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \|v\| & \geq & 0 \\ \|v\| & = & 0 \text{ impliziert } v = 0 \\ \|\alpha v\| & = & |\alpha| \|v\| \\ \|u + v\| & \leq & \|u\| + \|v\| \text{ (Dreiecksungleichung).} \end{array}$$

$(V, \| \cdot \|)$ heißt normierter Raum.

Skalarprodukt

Eine skalarwertige binäre Abbildung

$$(\cdot,\cdot) : V \times V : \to \ K$$

auf einem Vektorraum V über $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ heißt Skalarprodukt, wenn für alle $x, y, z \in V$, $\alpha, \beta \in K$ gilt

$$\begin{aligned}
(x, x) &\geq 0 \\
(x, x) &= 0 \text{ impliziert } x = 0. \\
(x, y) &= \overline{(y, x)} \\
(\alpha x + \beta y, z) &= \alpha(x, z) + \beta(y, z)
\end{aligned}$$

Bemerkungen

- Ein VR V mit Skalarprodukt heißt Prä-Hilbert-Raum. Ist $K = \mathbb{R}$ so heißt der Raum auch euklidisch.
- Durch $\|v\| := \sqrt{(v, v)}$, $v \in V$ läßt sich eine Norm definieren. Es gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

- Im euklidischen Raum ist der Winkel α zwischen zwei Vektoren $u, v \in V \setminus \{0\}$ definiert durch

$$\cos(\alpha) = \frac{(u, v)}{\|u\| \|v\|}.$$

Bemerkungen

- Orthogonal: wenn $(u, v) = 0$ gilt.
- Orthogonalbasis: Eine Basis aus paarweise orthogonalen Vektoren.
- Orthonormalbasis: Eine Orthogonalbasis, bei der alle Vektoren die Norm 1 haben.
- Jeder endlichdimensionale Prä-Hilbert-Raum hat eine Orthonormalbasis.
- Orthogonalraum:

  $$U^\perp := \{v \in V \mid (v, u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

  wenn U ein Unterraum von V ist.
- Es gilt: $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$, insb. $U \cap U^\perp = 0$.