

Einführung in Sage - Einheit 4

Matrizen, Vektorräume, Funktionen

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen 

1 Vektoren

- Matrizen
- Vektorräume

2 Funktionen

1 Vektoren

- Matrizen
- Vektorräume

2 Funktionen

1 Vektoren

- Matrizen
- Vektorräume

2 Funktionen

$m \times n$ Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ über einen Körper K

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} \in K$, Zeilenindex $i \in [1, m]$, Spaltenindex $j \in [1, n]$

Definitionen

- **Transponiert** von $A = (a_{ij})$: $A^T := (a_{ji})$.
- **Symmetrisch**: wenn $A = A^T$ gilt.
- **Adjungiert** von $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$: $A^* := (\overline{a_{ji}}) \in \mathbb{C}^{n \times m}$.
- **Einheitsmatrix**: $I := I_n := (\delta_{ij}) \in K^{n \times n}$
- **Addition**: Seien $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in K^{n \times m}$, dann

$$C = (c_{ij}) := A + B \in K^{n \times m}$$

mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

- **Multiplikation:** Seien $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ und $B = (b_{ij}) \in K^{n \times p}$, dann

$$C = (c_{ij}) := A \cdot B \in K^{m \times p}$$

mit $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$.

- **orthogonal:** $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n$ für $A \in K^{n \times n}$
- **unitär:** $A \cdot A^* = A^* \cdot A = I_n$ für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.
- **invertierbar:** $A \in K^{n \times n}$ heißt , wenn eine Matrix $A^{-1} \in K^{n \times n}$ existiert mit $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Definitionen und Bemerkungen

- Die Multiplikation ist assoziativ aber in der Regel **nicht kommutativ**.
- Die Matrizen aus $K^{m \times n}$ bilden einen Vektorraum über K (mit komponentenweiser Skalarmultiplikation).
- **allgemeine lineare Gruppe** $GL(K, n) = GL_n(K) = GL(n, K)$: Die Menge der invertierbaren Matrizen aus $K^{n \times n}$ bilden bezüglich der Multiplikation eine Gruppe.
- **orthogonale Gruppe** $O(n)$: Die Menge der orthogonalen Matrizen in $GL(\mathbb{R}, n)$ bilden eine Untergruppe von $GL(\mathbb{R}, n)$.
- **unitäre Gruppe** $U(n)$: Die entsprechende Untergruppe der unitären Matrizen in $GL(\mathbb{C}, n)$.

1 Vektoren

- Matrizen
- Vektorräume

2 Funktionen

Ein Tripel $(V, +, \cdot)$, bestehend aus einer nichtleeren Menge V und Verknüpfungen

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad \cdot : K \times V \rightarrow V$$

heißt **Vektorraum** über einem Körper K , wenn gilt:

- ❶ $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
- ❷ Für alle $v, w \in V$ und alle $\lambda, \mu \in K$ gilt:
 - ❶ $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$.
 - ❷ $\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$.
 - ❸ $(\lambda \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$.
 - ❹ $1 \cdot v = v$.

- **Vektoren**: Die Elemente eines Vektorraums.
- **Skalarmultiplikation**: Die Abbildung $\cdot : K \times V \rightarrow V$. Die Elemente des Körpers K nennt man **Skalare**.
- **Untervektorraum** oder **Unterraum** von V : Ist $U \subset V$ eine Teilmenge des Vektorraums V und es gelten alle Vektorraumaxiome.
- **Vorsicht!** man muß zwischen der 0 des Körpers und der 0 des Vektorraums (Nullvektor) unterscheiden.
Es gilt $0 \cdot v = 0$ für alle $v \in V$.

Beispiele für Vektorräume

- $K^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in K\}, n \in \mathbb{N}$
- Sei M eine beliebige Menge. Die Menge der Abbildungen von M in K , $\text{Abb}(M, K)$, mit den punktweise definierten Verknüpfungen

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \forall x \in M$$

$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x), \forall x \in M$$

für $\alpha \in K, f, g: M \mapsto K$.

- Die Menge der Polynome bis zum Grad n .
- Die Menge aller Polynome.
- \mathbb{R} als \mathbb{Q} -Vektorraum.
- \mathbb{C} als \mathbb{R} -Vektorraum.

Lineare Abhängigkeit

Sei V ein K -Vektorraum und (v_1, \dots, v_r) eine Familie von Elementen aus V .

- **Linearkombination** $v \in V$ von (v_1, \dots, v_r) : falls $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$.
- **Lineare Hülle** $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$: Die Menge aller Linearkombinationen. Die Lineare Hülle ist ein Unterraum von V .
- **linear unabhängig**: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ und ist $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$ so folgt $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$. Andernfalls **linear abhängig**.
 - Ist $M \subseteq V$ eine unendliche Menge, dann ist M linear unabhängig falls alle endlichen Teilmengen von M linear unabhängig sind.

Weitere Notationen und Bemerkungen

Sei V ein K -Vektorraum und (v_1, \dots, v_r) eine Familie von Elementen aus V

- (v_1, \dots, v_r) sind genau dann linear unabhängig, wenn sich jeder Vektor $v \in \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$ eindeutig linear kombinieren läßt.
- Vektoren sind linear unabhängig wenn die Determinante der korrelierenden Matrix ungleich 0 ist.
- Gilt $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$, so ist (v_1, \dots, v_r) ein **Erzeugendensystem**. Sind (v_1, \dots, v_r) zusätzlich linear unabhängig, so ist (v_1, \dots, v_r) eine **Basis**.
- Aus jedem Erzeugendensystem kann man eine Basis auswählen.

Beispiele für Basen

- Seien $(e_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n$ die Einheitsvektoren. (e_1, \dots, e_n) ist eine Basis des \mathbb{R}^n .
- Die Monombasis $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ ist eine Basis des Vektorraums der Polynome n -ten Grades.
- $(1, i)$ ist eine Basis von \mathbb{C} als \mathbb{R} -Vektorraum.
- \mathbb{R} als \mathbb{Q} -Vektorraum hat keine endliche Basis.

- **Dimension** des Vektorraums V : die Anzahl der Basiselemente einer Basis (v_1, \dots, v_n) .
- Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
- Seien W, Z Unterräume von V . Dann ist $W + Z := \text{span}(W \cup Z)$ die **Summe** von W und Z . Es gilt:

$$\dim(W + Z) = \dim(W) + \dim(Z) - \dim(W \cap Z)$$

Normen auf Vektorräumen

Sei V ein Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.

Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung

$$\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|,$$

so dass für alle $\alpha \in K$, $u, v \in V$ gilt

$$\|v\| \geq 0$$

$$\|v\| = 0 \text{ impliziert } v = 0$$

$$\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \text{ (Dreiecksungleichung).}$$

$(V, \| \cdot \|)$ heißt **normierter Raum**.

Skalarprodukt

Eine skalarwertige binäre Abbildung

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow K$$

auf einem Vektorraum V über $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ heißt **Skalarprodukt**,
wenn für alle $x, y, z \in V$, $\alpha, \beta \in K$ gilt

$$(x, x) \geq 0$$

$$(x, x) = 0 \text{ impliziert } x = 0.$$

$$(x, y) = \overline{(y, x)}$$

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$$

- Ein VR V mit Skalarprodukt heißt **Prä-Hilbert-Raum**. Ist $K = \mathbb{R}$ so heißt der Raum auch **euklidisch**.
- Durch $\|v\| := \sqrt{(v, v)}$, $v \in V$ läßt sich eine Norm definieren. Es gilt die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

- Im euklidischen Raum ist der Winkel α zwischen zwei Vektoren $u, v \in V \setminus \{0\}$ definiert durch

$$\cos(\alpha) = \frac{(u, v)}{\|u\| \|v\|}.$$

- **Orthogonal:** wenn $(u, v) = 0$ gilt.
- **Orthogonalbasis:** Eine Basis aus paarweise orthogonalen Vektoren.
- **Orthonormalbasis:** Eine Orthogonalbasis, bei der alle Vektoren die Norm 1 haben.
- Jeder endlichdimensionale Prä-Hilbert-Raum hat eine Orthonormalbasis.
- **Orthogonalraum:**

$$U^\perp := \{v \in V \mid (v, u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

wenn U ein Unterraum von V ist.

- Es gilt: $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$, insb. $U \cap U^\perp = 0$.

`https://sage.math.uni-goettingen.de/home/pub/16/`

1 Vektoren

- Matrizen
- Vektorräume

2 Funktionen

`https://sage.math.uni-goettingen.de/home/pub/17/`