

Einführung in Sage - Einheit 3

Mengen, Zahlen

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen 

1 Mengen

2 Zahlen

1 Mengen

2 Zahlen

*Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.*

(G. Cantor; Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre; Mathematische Annalen; Bd. 46; 1895; S. 481-512)

- **Element**: Ein Objekt x in der Menge M ($x \in M$).
- **Enthalten**: Es gilt für alle $x \in M$ auch $x \in N$ ($M \subset N$).
- **Gleichheit**: Es gilt $M \subset N$ und $N \subset M$ ($M = N$).

`https://sage.math.uni-goettingen.de/home/pub/13/`

1 Mengen

2 Zahlen

Natürliche Zahlen \mathbb{N} (nach Peano)

Natürliche Zahlen $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$:

- ❶ $0 \in \mathbb{N}$
- ❷ Es gibt eine Nachfolgerabbildung $nf: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- ❸ nf ist injektiv.
- ❹ Ist $M \subset \mathbb{N}$ mit $0 \in M$ und folgt für alle $m \in M$ das $nf(m) \in M$ gilt, so ist $M = \mathbb{N}$.

Bemerkungen:

- Nachfolgefunktion: $nf(m) = m + 1$
- Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen den natürlichen Zahlen und vollständiger Induktion.
- Sage: kein eigener Datentyp (aber: ganze Zahlen (Integer)).

Äquivalenzrelation

Sei M eine Menge. Eine **Äquivalenzrelation** R auf M ist eine Teilmenge

$$R \subseteq M \times M$$

mit den folgenden Eigenschaften (Schreibweise: $(x, y) \in R$, $x \sim_R y$, $x \sim y$):

- ❶ **Reflexivität:** für alle $x \in M$ gilt $x \sim x$.
- ❷ **Symmetrie:** für alle $x, y \in M$ folgt aus $x \sim y$ das $y \sim x$.
- ❸ **Transitivität:** für alle $x, y, z \in M$ und $x \sim y$, $y \sim z$ folgt $x \sim z$.

Äquivalenzklasse

- Sei \sim_R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M .
- Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt **Äquivalenzklasse**, falls gilt:
 - (a) $A \neq \emptyset$.
 - (b) $x, y \in A \Rightarrow x \sim y$.
 - (c) $x \in A, y \in M, x \sim y \Rightarrow y \in A$.
- Eine Äquivalenzrelation zerlegt eine Menge in disjunkte Äquivalenzklassen.
- Andersrum definiert eine disjunkte Zerlegung einer Menge eine Äquivalenzrelation.
- Ein $a \in A$ ist ein **Repräsentant** der Äquivalenzklasse A . Man schreibt auch \bar{a} oder $a \bmod R$ für ein Äquivalenzklasse A .

Ganze Zahlen \mathbb{Z}

Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$

- Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$(m, n) \sim (p, q)$ genau dann, wenn $m + q = n + p$ gilt.

- Nichtnegative Zahlen: $(m, 0)$. Sie sind paarweise nicht äquivalent zueinander.

- Negative Zahlen: $(0, m)$.

- Die ganzen Zahlen \mathbb{Z} sind gegeben durch die Menge der Äquivalenzklassen.

- Addition:

$$\overline{(m, n)} + \overline{(u, v)} := \overline{(m + u, n + v)}$$

- Multiplikation:

$$\overline{(m, n)} \cdot \overline{(u, v)} := \overline{(mu + nv, mv + nu)}$$

Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$:

$(m, n) \sim (p, q)$ genau dann, wenn $mq = np$ gilt.

Statt (m, n) schreibt man $\frac{m}{n}$.

- Die Äquivalenzklasse $\overline{(0, n)}$, $n \in \mathbb{Z}$ ist die 0 in \mathbb{Q} .
- Mit (n, m) gehören auch alle Erweiterungen (kn, km) zu einer Ä.-klasse.
- Addition:

$$\overline{\left(\frac{m}{n}\right)} + \overline{\left(\frac{p}{q}\right)} = \overline{\left(\frac{mq + pn}{nq}\right)},$$

Multiplikation:

$$\overline{\left(\frac{m}{n}\right)} \cdot \overline{\left(\frac{p}{q}\right)} = \overline{\left(\frac{mp}{nq}\right)}.$$

Eine **Gruppe** ist ein Paar (G, \cdot) bestehend aus einer Menge G und einer Verknüpfung \cdot auf G , d.h. einer Abbildung

$$\cdot : G \times G \rightarrow G, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b$$

mit folgenden Eigenschaften

(G1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in G$.

(G2) Es existiert ein $e \in G$ (*neutrales Element*) mit $e \cdot a = a$ für alle $a \in G$ und zu jedem $a \in G$ existiert ein $a' \in G$ (*inverses Element*) mit $a' \cdot a = e$.

abelsche Gruppe: $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in G$.

Eigenschaften einer Gruppe

- Für ein neutrales Element gilt auch $a \cdot e = a$ für alle $a \in G$.
- Es gibt genau ein neutrales Element $e \in G$.
- Zu jedem $a \in G$ ist das inverse Element $a' \in G$ eindeutig und wird durch a^{-1} bezeichnet.
- Es gilt auch $a \cdot a' = e$.
- Für abelsche Gruppen schreibt man oft $+$ statt \cdot . Das Inverse zu a wird dann mit $-a$, das Neutrale mit 0 bezeichnet.

Ein **Körper** ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge K und zwei Verknüpfungen $+$ und \cdot mit folgenden Eigenschaften:

- (K1) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe. (Das neutrale Element heiße 0 . Das inverse Element zu $a \in K$ sei $-a$.)
- (K2) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ sei eine abelsche Gruppe. (Das neutrale Element dazu sei 1 .)
- (K3) Distributivgesetze

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c) \text{ für alle } a, b, c \in K.$$

(Ein Körper ist ein kommutativer unitärer Ring)

Gruppen:

- $(\mathbb{Z}, +)$, die ganzen Zahlen mit Addition.
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, die Restklassen modulo n mit Addition.
- $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$
- $(\text{Add}(M, \mathbb{R}), +)$, die reellwertigen Funktionen auf einer Menge M mit punktweiser Addition.

Körper:

- Die rationalen Zahlen \mathbb{Q} mit den Verknüpfungen $+$ und \cdot .
- Die reellen Zahlen \mathbb{R} mit den Verknüpfungen $+$ und \cdot .
- Die komplexen Zahlen \mathbb{C} mit den Verknüpfungen $+$ und \cdot .
- Für p Primzahl $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, die Restklassen modulo p mit $+$ und \cdot .

Sei K ein Körper. Er heißt **angeordnet**, wenn es einen **Positivbereich** $P \subset K$ gibt mit

- Die Mengen P , $\{0\}$, und $-P := \{-x \mid x \in P\}$ sind disjunkt.
- $K = P \cup \{0\} \cup -P$.
- Aus $x, y \in P$ folgt $x + y \in P$ und $x \cdot y \in P$.

Man definiert:

$x > y$ genau dann, wenn $x - y \in P$,

$x \geq y$ genau dann, wenn $x - y \in P \cup \{0\}$.

Analog definiert man $<$ und \leq .

Sei K ein angeordneter Körper.

- **obere Schranke** $y \in K$: Für $M \subset K$, wenn für alle $x \in M$ die Relation $x \leq y$ gilt.
- nach oben **beschränkt**: Wenn eine Teilmenge M von K eine obere Schranke besitzt (analog **untere Schranke**).
- **Maximum** von M : Eine obere Schranke y einer Teilmenge $M \subset K$, wenn $y \in M$ (analog **Minimum**).
- **Supremum**: Die kleinstmögliche obere Schranke y einer Teilmenge $M \subset K$ (analog **Infimum**) (Nicht notwendigerweise in M oder K).

- Sei M die Menge aller Teilmengen von \mathbb{Q} mit oberer Schranke.
- Äquivalenzrelation: Zwei Elemente aus M seien äquivalent, wenn sie dieselben Mengen von oberen Schranken haben.
- Die entstehenden Äquivalenzklassen nennt man **reelle Zahlen**.

Bemerkungen

- Es lassen sich die üblichen Verknüpfungen auf \mathbb{R} definieren.
- Die reellen Zahlen können auch als Vervollständigung von \mathbb{Q} definiert werden oder durch den Dedekindschen Schnitt.
- Die rationalen Zahlen sind als Äquivalenzklassen der einelementigen Mengen $\{x\}$, $x \in \mathbb{Q}$ enthalten.

Der Körper \mathbb{C} der **komplexen Zahlen**: Die Menge $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit

- Addition: $(k, l) + (n, m) = (k + n, l + m)$
- Multiplikation: $(k, l) \cdot (n, m) = (kn - lm, km + ln)$
- **$i := (0, 1)$** mit
 - $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$
 - $\forall (x, y) \in \mathbb{C} : (x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) = x + iy$
- **Betrag**: $|z| = |(x, y)| := \sqrt{x^2 + y^2}$ (Sage: `abs`)

- **Fundamentalsatz der Algebra:** Jedes nicht konstante Polynom (mit komplexen Koeffizienten) hat mindestens eine Nullstelle in \mathbb{C} .
- Polarkoordinaten (r, φ) zu $(x, y) \in \mathbb{C}$

$$r := \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan(\varphi) = \frac{y}{x}$$

- Es gilt: $z = (x, y)_{\text{Rechtwinklig}} = (r, \varphi)_{\text{Polar}} = re^{i\varphi}$

`https://sage.math.uni-goettingen.de/home/pub/14/`