

# Einführung in Sage

Dr. J. Schulz  
C. Rügge

Einheit 8  
WS 2009/2010

## Aufgabe 1 :

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks bezüglich der euklidischen Norm (2-Norm), welches durch folgende Vektoren beschrieben wird:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie dann dieses Dreieck graphisch dar.

## Aufgabe 2 :

Plotten Sie die Funktion  $f : (x, y) \rightarrow 0.1y^4 - 0.3y^3 - 1.5y^2 + \sin(3x) + 1.9y + 3$  als Fläche im dreidimensionalen Raum. Betrachten Sie ebenfalls die Konturen bei  $-2, 0, 2, 4$  und  $6$ . Wählen Sie jeweils geeignete Definitionsbereiche.

## Aufgabe 3 :

Berechnen Sie die ersten 4 Glieder der Taylorreihe der Funktionen  $f(x) = (1-x)^{-1}$  und  $g(x) = (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^{-1}$  an der Stelle  $x = 3$ . Berechnen Sie die Entwicklung erst 'per Hand' in Sage und überprüfen Sie dann Ihr Ergebnis mit der Funktion `taylor`.

## Aufgabe 4 :

Zeigen Sie, dass die Funktion  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := xe^{-nx}$ ,  $n > 0$  genau ein Maximum an der Stelle  $x = 1/n$  besitzt. Zeigen Sie, dass das Maximum global ist.

## Aufgabe 5 :

Zeigen Sie mit den Regel von L'Hospital folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\frac{\pi}{2} - x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right) = 0.$$

## Aufgabe 6 :

Prüfen Sie folgende Funktionen auf Differenzierbarkeit:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 1 \\ x^3 + 2.5x - 2 & , x < 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}.$$

### Aufgabe 7 :

1. Differenzieren Sie folgende Funktionen:

$$f(x) = \exp \left( \frac{\frac{\sin 2x}{\sin x}}{\left( \frac{\log 8}{2+2 \cos x} \right)^{-1} - \frac{8}{\log x^4}} \right) \text{ und } g(x) = \sin(2^{\cos 3x}).$$

2. Berechnen Sie  $4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ ,  $\int_0^\pi e^x \sin x dx$  und  $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ .

3. Berechnen Sie die 20-te Ableitung von  $f(x) := \sin(2x) \exp(x)$ .

### Aufgabe 8 :

Schreiben Sie eine Prozedur, die eine Nullstelle einer gegebenen Funktion  $f : [a_0, b_0] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$  zu einer gegebenen Genauigkeit  $TOL$  berechnet. Hierzu betrachten wir eine Folge von Intervallen  $[a_k, b_k]$ , die sich aus der folgenden Vorschrift ergeben:

Wiederhole bis  $|b_0 - a_0| \leq 2^{k+1} * TOL$

- Berechne  $g := f\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right)$ .
- Gilt  $f(a_k) * g < 0$  so definiere  $a_{k+1} := a_k$ ,  $b_{k+1} := \frac{a_k + b_k}{2}$ .
- Andernfalls berechne  $a_{k+1} := \frac{a_k + b_k}{2}$ ,  $b_{k+1} := b_k$ .

Testen Sie die Prozedur an  $f(x) := x^3 - 2$ ,  $[a_0, b_0] := [0, 3]$  und für  $TOL = 10^{-4}$  und  $TOL = 10^{-6}$ . Verwenden Sie maximal 1000 Iterationen.