Einführung in Sage - Einheit 8

Differentation, Taylorsche Formel, Integration

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen

Aufbau

Aufbau

Ableitungen

Eine Funktion $f \colon D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar an der Stelle $x_0 \in D$, wenn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.
Der Grenzwert wird Ableitung oder Differentialquotient von f an x_0 genannt und mit $f'(x_0) = f^{(1)}(x_0)$ bezeichnet.

Bemerkungen

- f differenzierbar (auf D): Wenn f an jeder Stelle von D differenzierbar ist.
- Ableitung von f: f' für die gilt f differenzierbar auf D.
- Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist an $x_0 \in D$ genau dann differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Th + R(h)h, \quad \lim_{h \to 0} R(h) = 0$$

  gilt (T und R hängen i.A. von x_0 ab).
- f an $x_0 \in D$ differenzierbar $=>$ stetig.

Beispiele

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\log(x))' = \frac{1}{x}$, $x > 0$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$

Landau-Symbol

Sei f eine Funktion, die auf einem Intervall definiert ist, das 0 enthält.

- $f(x) = O(x^n)$: Es gibt eine Kontante $C > 0$, so dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^n} \leq C$$

  ($f(x)$ geht gegen 0 mindestens so schnell wie x^n)

- $f(x) = o(x^n)$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^n} = 0$$

  ($f(x)$ geht schneller gegen 0 als x^n)

Höhere Ableitungen

- f n-mal differenzierbar, $f^{(n)}$: Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ $(n-1)$-mal differenzierbar mit der $(n-1)$-ten Ableitung $f^{(n-1)}$ und ist $f^{(n-1)}$ wiederum differenzierbar.
- Ist f n-mal differenzierbar und ist die n-te Ableitung $f^{(n)}$ stetig, so heißt f n-mal stetig differenzierbar.
- f heißt unendlich oft differenzierbar, wenn f n-mal differenzierbar ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Ableitungen in Sage

```
diff(<Ausdruck>,x)
```

wird ein Ausdruck oder eine Funktion nach x abgeleitet.

Beispiele:

```
diff(sin(x),x)
```

```
cos(x)
```

```
diff(x^x,x)
```

```
(log(x) + 1)*x^x
```

Höhere Ableitungen in Sage

```
diff(<Ausdruck>,x1,x2,x3,...)
diff(<Ausdruck>,x,<anzahl>)
```

Ableitung bzgl. der Unbekannten $x1$, dann der entstehende Ausdruck bzgl. $x2$, etc. In der 2ten Form gibt `<anzahl>` die Anzahl der Ableitung bzgl. `x` an.

Beispiele:

```
_=var('x,y,a'); diff(x^2*y^2+a,x,y)
```

```
4*x*y
```

```
diff(1/x,x,10)
```

```
3628800/x^11
```

Ableitungen - Beispiele

```
f(x) = log(cos(x))
f.diff(); diff(f); diff(f,x,x)
```

```
x |--> -sin(x)/cos(x)
x |--> -sin(x)/cos(x)
x |--> -sin(x)^2/cos(x)^2 - 1
```

```
g(x,y) = sin(x^2+y^2)
g.diff(x,x,y)
```

```
(x, y) |--> -8*x^2*y*cos(x^2 + y^2) - 4*y*sin(x^2 + y^2)
```

Differentationsregeln

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $x_0 \in D$. Dann gilt

- Summe: $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- Produktregel:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

- Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

falls $g(x_0) \neq 0$.

Differentationsregeln

- Kettenregel: Seien $f: D_f \to \mathbb{R}$ und $g: D_g \to \mathbb{R}$ mit $f(D_f) \subset D_g$. Ferner seien f an $x_0 \in D_f$ und g an $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann gilt

$$(g \circ f)(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

- Leibnizsche Regel:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

- Umkehrfunktion f^{-1}:

$$(f^{-1})' \circ f = \frac{1}{f'}.$$

Wichtige Sätze

Satz

Ist eine Funktion f an x_0 differenzierbar und hat sie ein lokales Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Satz (Mittelwertsatz)

Sei f eine in dem Intervall $[a, b]$ stetige und in (a, b) differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$, so dass gilt

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Satz

Eine differenzierbare Funktion auf dem Intervall I ist genau dann konstant, wenn $f'(x)$ auf I identisch verschwindet.

Regel von L'Hospital

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und $g'(x) \neq 0$, $x \in D$ und $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. Dann gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der Limes auf der rechten Seite existiert.
Der Fall $a = \pm\infty$ ist auch erlaubt!
Bemerkung: Die Aussage gilt auch für $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$

L'Hospital - Beispiele

- Bestimmung von $\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$

```
var('a');f(x) = log(x); g(x) = x^a
assume(a > 0)
limit(diff(f(x),x)/diff(g(x),x),x=oo)
```

0

```
assume(a,'integer')
limit(f(x)/g(x),x=oo)
```

0

L'Hospital - Beispiele

- Bestimmung von $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$:

```
f(x) = sin(x); g(x) = x
limit(f(x)/g(x), x=0)
```

$$1$$

```
diff(f(x),x);diff(g(x),x)
```

```
cos(x)
1
```

```
limit(diff(f(x),x)/diff(g(x),x),x=0)
```

$$1$$

Aufbau

Taylorsche Formel

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar und seien $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$. Dann gibt es $\xi \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= \quad f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x, x_0) \end{aligned}$$

gilt mit dem Lagrangschen Restglied

$$R_n(x, x_0) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Restglied

Für das Restglied gibt es noch andere Darstellungen:

- Darstellung von Cauchy

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

- Integraldarstellung

$$R_n(x, x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Taylorreihe

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und seien $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$. Dann nennt man die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

die Taylorreihe von $f(x)$ um den Entwicklungspunkt x_0.

Die Taylorreihe stellt die Funktion f, wenn das Restglied $R_n(x, x_0)$ für $n \to \infty$ gegen 0 geht.

Hinreichende Bedingungen

- Die Funktion f läßt sich auf $I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ durch die Taylorreihe darstellen, wenn
$$\delta := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_n}} > 0$$
mit $A_n = \sup_{x \in I} \frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}$ gilt.
- Gibt es ein $M > 0$, so dass $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$ ist für $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$, so läßt sich f auf I durch die Taylorreihe darstellen.
- Es gebe ein M mit $f^{(n)}(x) \geq -M^n$, $x \in [a, b]$. Dann gilt die Taylorreihendarstellung für alle $x \in [a, b]$ mit $|x - x_0| < b - x$.

Beispiele

- Ist $f(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n$ ein Polynom, so gilt für jeden Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Beispiele

- Für $f(x) = \exp(x)$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Für $f(x) = \log(x)$ und $x_0 = 1$ gilt

$$\log(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n, \quad 0 < x \leq 2.$$

- Für $f(x) = (1+x)^a$, $a \in \mathbb{R}$ und $x_0 = 0$ gilt

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

Visualisierung I

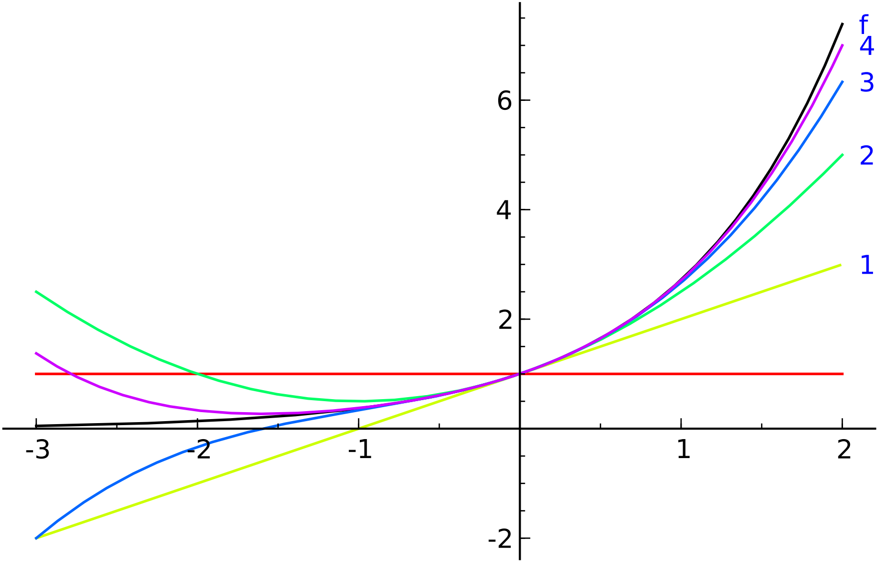
Entwickle $f(x) = exp(x)$ um $x_0 = 0$. Wir entwickeln gemäß der Taylorformel und erhalten die Approximationen $g_0(x) := 1$, $g_1(x) := 1 + x$, $g_2(x) := 1 + x + \frac{1}{2}x^2$, $g_3(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{x^i}{i!}$ und $g_4(x) = \sum_{i=0}^{4} \frac{x^i}{i!}$.

```
var('n,k');f(x) = exp(x)
g = [sum(x^k/factorial(k),k,0,n) for n in [0..4]]; g
```

$$\left[1, x + 1, \frac{1}{2}x^2 + x + 1, \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1, \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1\right]$$

```
p = plot(f,(-3,2),color='black')
for n in [0..4]:
    p += plot(g[n],(-3,2),rgbcolor=hue(n/5),label=n)
p.show()
```

Visualisierung II



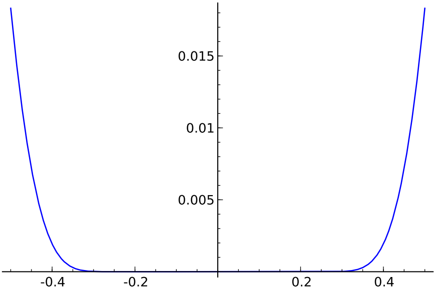
Gegenbeispiel

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist nicht durch ihre Taylorreihe an $x_0 = 0$ darstellbar. Die Taylorreihe zu f ist identisch 0, da $f^n(0) = 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

```
plot(exp(-1/x^2),(-0.5,0.5))
```



Taylorformel in Sage

```
taylor(f, x, x0, n)
```

Taylorpolynom $(n-1)$-ten Grades zu einem Ausdruck f (mit Unbekannten x) am Entwicklungspunkt $x0$.
Beispiele:

```
taylor(1/(1-x),x,0,5)
```

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

```
taylor(sin(x),x,2,5)
```

$$\frac{1}{24}(x-2)^4 \sin(2) - \frac{1}{6}(x-2)^3 \cos(2) - \frac{1}{2}(x-2)^2 \sin(2) + (x-2)\cos(2) + \sin(2)$$

Aufbau

Begriffe I

- Sei $[a, b]$ ein Intervall. Gilt $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$, so nennt man $Z = (a_0, \ldots, a_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$.
- Eine Funktion $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es eine Zerlegung Z von $[a, b]$ gibt, so dass ϕ konstant ist auf jedem Teilintervall (a_i, a_{i+1}) von Z.
- Wir erklären das Integral einer Treppenfunktion ϕ durch

$$\int_Z \phi := \sum_{k=1}^{n} c_k (a_k - a_{k-1}).$$

  Dabei ist Z die zugehörige Zerlegung und $c_k = \phi(x)$, $x \in (a_{k-1}, a_k)$.
- Die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$ sei $T[a, b]$.

Begriffe II

Für eine beschränkte Funktion $f[a, b] \to \mathbb{R}$ heißt

$$\int^* f := \inf\{\int \psi \mid \psi \in T[a, b], f \leq \psi\}.$$

das Oberintegral und

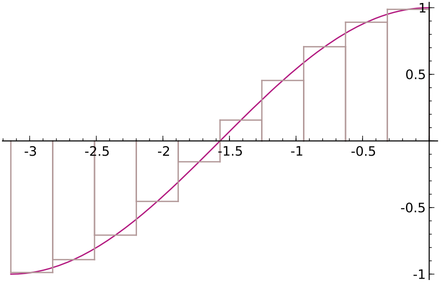
$$\int_* f := \sup\{\int \psi \mid \psi \in T[a, b], f \geq \psi\}.$$

das Unterintegral. Es gilt für $\phi, \psi \in T[a, b]$ mit $\phi \leq f \leq \psi$ die Ungleichung

$$\int \phi \leq \int_* f \leq \int^* f \leq \int \psi.$$

Visualisierung in Sage

```
f = Piecewise([[(-pi,0),(cos(x)).function(x)]])
rsf = f.riemann_sum(10,mode="midpoint")
P = f.plot(rgbcolor=(0.7,0.1,0.5), plot_points=40)
Q = rsf.plot(rgbcolor=(0.7,0.6,0.6), plot_points=40)
L = add([line([[b,0],[b,f(x=b)]],rgbcolor=(0.7,0.6,0.6))+
    line([[a,0],[a,f(x=a)]],rgbcolor=(0.7,0.6,0.6)) for (
    a,b),f in rsf.list()])
(P + Q +L)
```



Das Riemannsche Integral

Eine beschränkte Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar, wenn Ober- und Unterintegral von f auf $[a, b]$ übereinstimmen.
Der gemeinsame Wert heißt das Integral von f und wird mit

$$\int_a^b f(x)dx$$

bezeichnet.
(f der Integrand, x Integrationsvariable, a, b Integrationsgrenzen).

Eigenschaften

- Linearität
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_a^b fdx + \beta \int_a^b gdx$$
- Monotonie
$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b fdx \leq \int_a^b gdx.$$
- Ist f, g integrierbar, so auch $f + g$, $f * g$, $f - g$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$.

Wichtige Sätze

- Stammfunktion F: Ist f stetig auf einem Intervall I und $a \in I$, so ist

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in I$$

  eine differenzierbare Funktion mit $F'(x) = f(x)$.

- Unbestimmtes Integral: alternative Notation für eine Stammfunktion F: $\int f(x)dx$
- Ist f stetig auf $[a, b]$, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$$

Integrieren in Sage

- Bestimmte Integrale der Form $\int_a^b f(x)dx$

```
integrate(f,x,a,b)
```

  Dabei ist `f` ein Ausdruck.

- Unbestimmte Integrale:

```
integrate(f,x)
```

- Numerische Approximationen:

```
numerical_integral(f,a,b)
```

  (benutzt die GSL-library).

Integrieren - Beispiele I

```
integrate(sin(x),x,0,6)
```

```
-cos(6) + 1
```

```
integrate(exp(x)*x,x,2,3),integrate(exp(x)*x,x)
```

$$\left(-e^{2} + 2\,e^{3}, (x-1)e^{x}\right)$$

```
integrate(1/x^2,x,1,oo)
```

```
1
```

```
numerical_integral(sin(1/x)*x,1,2)
```

```
(0.9190591675987025 4, 1.0203606488609102e-14)
```

Integrieren - Beispiele II

```
assume(a<>-1)
integrate(x^a*b,x)
```

$$\frac{bx^{(a+1)}}{a+1}$$

```
forget();a=-1
integrate(x^a*b,x)
```

$$b\log(x)$$

Uneigentliche Integrale

Sei f auf $[a, b)$ erklärt (eventuell $b = \infty$) und sei f auf jedem abgeschlossenen Teilintervall integrierbar. Man definiert

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{z \to b(-0)} \int_a^z f(x)dx,$$

falls der Limes existiert. Man spricht von einem uneigentlichen Integral.

Funktionenfolgen

- Sei $(f_n)_n$ eine Folge integrierbarer Funktionen auf $[a, b]$. Konvergiert $(f_n)_n$ gleichmäßig, so ist die Grenzfunktion integrierbar mit
$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$
- Sei $(f_n)_n$ eine Folge differenzierbarer Funktionen auf $[a, b]$. $(f'_n)_n$ konvergiere gleichmäßig und es existiere ein $x_0 \in [a, b]$ für den $f_n(x_0)$ konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_n$ gleichmäßig mit $(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$.