Einführung in Sage

Dr. J. Schulz
C. Rügge

Einheit 6
WS 2009/2010

Aufgabe 1 :

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2-n^2}{n}\right), \quad \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right), \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} i^{99}}{n^{100}}\right).$$

Aufgabe 2 :

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Summen

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}, \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i, 0<x<1, \quad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i+2i^2}.$$

Aufgabe 3 :

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^4-4n^3)x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\log(n)/n}x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n.$$

Aufgabe 4 :

- Berechnen Sie die ersten 100 Glieder der Fibonacci-Folge

$$a_1 = a_2 := 1, \quad a_{n+2} := a_{n+1} + a_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

- Berechnen Sie für $n = 1, \ldots, 100$

$$b_n := \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

  Geben Sie für die Glieder b_n eine obere Schranke an, und raten Sie den Grenzwert!

- Berechnen Sie die ersten 100 Glieder der Folge

$$c_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

- Bestimmen Sie $c_n - a_n$ und $\frac{c_n}{a_n}$ für $n = 1, \ldots, 100$.
- Berechnen Sie den Grenzwert von c_{n+1}/c_n approximativ.

Aufgabe 5 :

Erzeugen Sie die Tabelle `table(1=ln(1),2=ln(2),...,10=ln(10))`. Erweitern Sie die Tabelle um den Eintrag `11=ln(11)`. Erstellen Sie aus der Tabelle eine Liste aller Indizes und eine Liste aller Werte! Sortieren Sie beide Listen!

Aufgabe 6 :

Zeigen Sie

$$\lim_{x\to\infty} x^a = \begin{cases} \infty, & \text{für } a > 0 \\ 1, & \text{für } a = 0 \\ 0, & \text{für } a < 0 \end{cases} .$$

Aufgabe 7 :

Bestimmen Sie von der Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ den Konvergenzradius. Berechnen Sie $4(4f(\frac{1}{5}) - f(\frac{1}{239}))$.

Aufgabe 8 :

Bestimmen Sie die Funktion dritten Grades, die folgende Eigenschaften erfüllt:

1. Die Funktion besitzt ein Maximum im Punkt $(-2, 3)$.
2. Der Graph der Funktion berührt die Parabel $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ an der Stelle $x = -1$.

Zeichnen Sie alle Eigenschaften sowie die zugehörige Funktion in einem Plot.

Aufgabe 9 :

Schreiben Sie eine Prozedur, die als Eingabeparameter eine Liste mit beliebigen Einträgen hat. Die Prozedur soll daraus eine Tabelle berechnen und zurückgeben, die die verschiedenen Elemente der Liste (als Indizes) versehen mit ihrer Häufigkeit (als Werte) enthält.

Aufgabe 10 :

Schreiben Sie eine Prozedur, die zu einem gegebenen Startwert x_0 und einer gegebenen Funktion f die ersten 20 Iterationen

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, 19$$

berechnet.

Wenden Sie die Prozedur auf $f(x) = \exp(-x) - x$ und $g(x) = x^3 - 2x + 3$ an. Verwenden Sie jeweils $x_0 = 0$ und prüfen Sie, ob x_{20} eine gute Approximation einer Nullstelle von f ist.