

Einführung in Sage - Einheit 8

Differentiation, Taylorsche Formel, Integration

Jochen Schulz

Georg-August Universität Göttingen 

1 Differentiation

2 Taylorsche Formel

3 Integration

1 **Differentiation**

2 Taylorsche Formel

3 Integration

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar** an der Stelle $x_0 \in D$, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.

Der Grenzwert wird **Ableitung** oder **Differentialquotient** von f an x_0 genannt und mit $f'(x_0) = f^{(1)}(x_0)$ bezeichnet.

- Man sagt, dass f **differenzierbar** (auf D) ist, wenn f an jeder Stelle von D differenzierbar ist. Die so auf D erklärte Funktion f' heißt **Ableitung** von f .
- Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist an $x_0 \in D$ genau dann differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Th + R(h)h, \quad \lim_{h \rightarrow 0} R(h) = 0$$

gilt (T und R hängen i.A. von x_0 ab).

- Ist f an $x_0 \in D$ differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\log(x))' = \frac{1}{x}, x > 0$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$

Landau-Symbol

Sei f eine Funktion, die auf einem Intervall definiert ist, das 0 enthält. Man schreibt $f(x) = O(x^n)$, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|^n} \leq C$$

gilt. Man schreibt $f(x) = o(x^n)$, wenn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|^n} = 0$$

gilt.

Bedeutung: $f(x) = O(x^n)$ bedeutet, dass f für x gegen 0 mindestens so schnell gegen 0 geht wie x^n . Im Fall $f(x) = o(x^n)$ fällt die Funktion schneller als x^n .

Höhere Ableitungen

- Man kann induktiv höhere Ableitungen definieren. Ist $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ $(n-1)$ -mal differenzierbar mit der $(n-1)$ -ten Ableitung $f^{(n-1)}$ und ist $f^{(n-1)}$ wiederum differenzierbar, so nennen wir f n -mal differenzierbar und bezeichnen die n -te Ableitung durch $f^{(n)}$.
- Ist f n -mal differenzierbar und ist die n -te Ableitung $f^{(n)}$ stetig, so heißt f n -mal **stetig differenzierbar**.
- f heißt **unendlich oft differenzierbar**, wenn f n -mal differenzierbar ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Ableitungen in Sage

Durch

```
diff(<Ausdruck>, x)
```

wird ein Ausdruck oder eine Funktion nach x abgeleitet.

Beispiele:

```
diff(sin(x), x)
```

```
cos(x)
```

```
diff(x^x, x)
```

```
(log(x) + 1)*x^x
```

Höhere Ableitungen in Sage

Höhere Ableitungen:

```
diff(<Ausdruck>,x1,x2,x3,...)
diff(<Ausdruck>,x,<anzahl>)
```

Ableitung bzgl. der Unbekannten x_1 , dann der entstehende Ausdruck bzgl. x_2 , etc. In der 2ten Form gibt <anzahl> die Anzahl der Ableitung bzgl. x an.

Beispiele:

```
_ = var('x,y,a'); diff(x^2*y^2+a,x,y)
```

$4*x*y$

```
diff(1/x,x,10)
```

$3628800/x^{11}$

Ableitungen - Beispiele

```
f(x) = log(cos(x))  
f.diff(); diff(f); diff(f,x,x)
```

```
x |--> -sin(x)/cos(x)  
x |--> -sin(x)/cos(x)  
x |--> -sin(x)^2/cos(x)^2 - 1
```

```
g(x,y) = sin(x^2+y^2)  
g.diff(x,x,y)
```

```
(x, y) |--> -8*x^2*y*cos(x^2 + y^2) - 4*y*sin(x^2 + y^2)
```

Differentiationsregeln

Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $x_0 \in D$. Dann gilt

- $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
- **Produktregel:** $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
- **Quotientenregel:** $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, falls $g(x_0) \neq 0$.

Differentiationsregeln

- **Kettenregel:** Seien $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(D_f) \subset D_g$. Ferner seien f an $x_0 \in D_f$ und g an $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann gilt

$$(g \circ f)(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

- **Leibnizsche Regel:**

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

- Es gilt für die Umkehrfunktion f^{-1} :

$$(f^{-1})' \circ f = \frac{1}{f'}.$$

Wichtige Sätze

Satz

Ist eine Funktion f an x_0 differenzierbar und hat sie ein lokales Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Satz (Mittelwertsatz)

Sei f eine in dem Intervall $[a, b]$ stetige und in (a, b) differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$, so dass gilt

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Satz

Eine differenzierbare Funktion auf dem Intervall I ist genau dann konstant, wenn $f'(x)$ auf I identisch verschwindet.

Regel von L'Hospital

Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, und $g'(x) \neq 0$, $x \in D$ und $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der Limes auf der rechten Seite existiert.

Der Fall $a = \pm\infty$ ist auch erlaubt!

Bemerkung: Die Aussage gilt auch für $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

- Bestimmung von $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$

```
var('a'); f(x) = log(x); g(x) = x^a
assume(a > 0)
limit(diff(f(x),x)/diff(g(x),x),x=oo)
```

0

```
assume(a, 'integer')
limit(f(x)/g(x),x=oo)
```

0

L'Hospital - Beispiele

- Bestimmung von $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$:

```
f(x) = sin(x); g(x) = x  
limit(f(x)/g(x), x=0)
```

1

```
diff(f(x),x);diff(g(x),x)
```

cos(x)

1

```
limit(diff(f(x),x)/diff(g(x),x),x=0)
```

1

1 Differentiation

2 **Taylorsche Formel**

3 Integration

Taylor'sche Formel

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal differenzierbar und seien $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$. Dann gibt es $\xi \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ & + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x, x_0) \end{aligned}$$

gilt mit dem **Lagrangschen Restglied**

$$R_n(x, x_0) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Für das Restglied gibt es noch andere Darstellungen:

- Darstellung von **Cauchy**

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^n (x - x_0).$$

- **Integraldarstellung**

$$R_n(x, x_0) = \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt.$$

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und seien $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$. Dann nennt man die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

die **Taylorreihe** von $f(x)$ um den Entwicklungspunkt x_0 .

Die Taylorreihe stellt die Funktion f , wenn das Restglied $R_n(x, x_0)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 geht.

Hinreichende Bedingungen

- Die Funktion f läßt sich auf $I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ durch die Taylorreihe darstellen, wenn

$$\delta := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n}} > 0$$

mit $A_n = \sup_{x \in I} \frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}$ gilt.

- Gibt es ein $M > 0$, so dass $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$ ist für $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$, so läßt sich f auf I durch die Taylorreihe darstellen.
- Es gebe ein M mit $f^{(n)}(x) \geq -M^n$, $x \in [a, b]$. Dann gilt die Taylorreihendarstellung für alle $x \in [a, b]$ mit $|x - x_0| < b - x$.

- Ist $f(x) = \sum_{n=0}^k a_n x^n$ ein Polynom, so gilt für jeden Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

- Für $f(x) = \exp(x)$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Für $f(x) = \log(x)$ und $x_0 = 1$ gilt

$$\log(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x - 1)^n, \quad 0 < x \leq 2.$$

- Für $f(x) = (1 + x)^a$, $a \in \mathbb{R}$ und $x_0 = 0$ gilt

$$(1 + x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

Visualisierung I

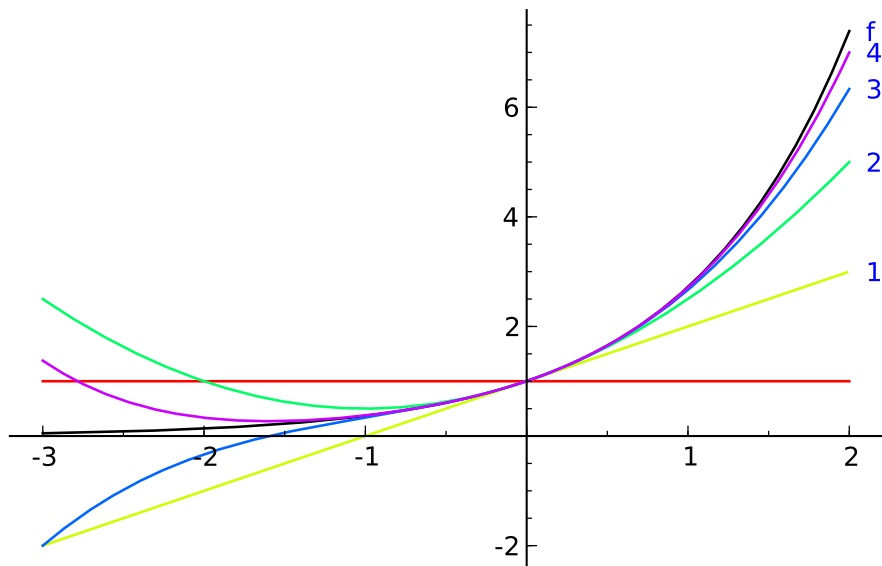
Entwickle $f(x) = \exp(x)$ um $x_0 = 0$. Wir entwickeln gemäß der Taylorformel und erhalten die Approximationen $g_0(x) := 1$, $g_1(x) := 1 + x$, $g_2(x) := 1 + x + \frac{1}{2}x^2$, $g_3(x) = \sum_{i=0}^3 \frac{x^i}{i!}$ und $g_4(x) = \sum_{i=0}^4 \frac{x^i}{i!}$.

```
var('n,k');f(x) = exp(x)
g = [sum(x^k/factorial(k),k,0,n) for n in [0..4]]; g
```

```
[1, x + 1, 1/2*x^2 + x + 1, 1/6*x^3 + 1/2*x^2 + x + 1,
 1/24*x^4 +
1/6*x^3 + 1/2*x^2 + x + 1]
```

```
p = plot(f,(-3,2),color='black')
for n in [0..4]:
    p += plot(g[n],(-3,2),rgbcolor=hue(n/5),label=n)
p.show()
```

Visualisierung II



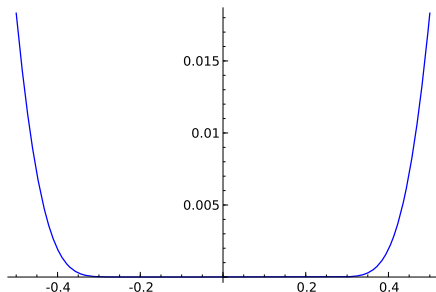
Gegenbeispiel

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist nicht durch ihre Taylorreihe an $x_0 = 0$ darstellbar. Die Taylorreihe zu f ist identisch 0, da $f^n(0) = 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

```
plot(exp(-1/x^2), (-0.5, 0.5))
```



Taylorformel in Sage

Sage ist in der Lage ein Taylorpolynom zu einer gegebenen Funktion zu berechnen.

Das Taylorpolynom $(n - 1)$ -ten Grades zu einem Ausdruck f (mit Unbekannten x) am Entwicklungspunkt x_0 kann durch

```
taylor(f, x, x0, n)
```

berechnet werden.

taylor - Beispiele

```
taylor(1/(1-x),x,0,5)
```

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

```
taylor(sin(x),x,2,5)
```

$$\begin{aligned} & 1/120*(x - 2)^5*\cos(2) + 1/24*(x - 2)^4*\sin(2) - 1/6*(x \\ & \quad - 2)^3*\cos(2) - \\ & 1/2*(x - 2)^2*\sin(2) + (x - 2)*\cos(2) + \sin(2) \end{aligned}$$

1 Differentiation

2 Taylorsche Formel

3 Integration

- Sei $[a, b]$ ein Intervall. Gilt $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$, so nennt man $Z = (a_0, \dots, a_n)$ eine **Zerlegung** von $[a, b]$.
- Eine Funktion $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, wenn es eine Zerlegung Z von $[a, b]$ gibt, so dass ϕ konstant ist auf jedem Teilintervall (a_i, a_{i+1}) von Z .
- Wir erklären das Integral einer Treppenfunktion ϕ durch

$$\int_Z \phi := \sum_{k=1}^n c_k (a_k - a_{k-1}).$$

Dabei ist Z die zugehörige Zerlegung und $c_k = \phi(x)$, $x \in (a_{k-1}, a_k)$.

- Die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$ sei $T[a, b]$.

Für eine beschränkte Funktion $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

$$\int^* f := \inf \left\{ \int \psi \mid \psi \in T[a, b], f \leq \psi \right\}.$$

das **Oberintegral** und

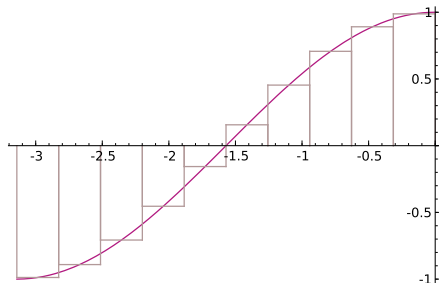
$$\int_* f := \sup \left\{ \int \psi \mid \psi \in T[a, b], f \geq \psi \right\}.$$

das **Unterintegral**. Es gilt für $\phi, \psi \in T[a, b]$ mit $\phi \leq f \leq \psi$ die Ungleichung

$$\int \phi \leq \int_* f \leq \int^* f \leq \int \psi.$$

Visualisierung in Sage I

```
f = Piecewise([[(-pi,0),(cos(x)).function(x)]])  
rsf = f.riemann_sum(10,mode="midpoint")  
P = f.plot(rgbcolor=(0.7,0.1,0.5), plot_points=40)  
Q = rsf.plot(rgbcolor=(0.7,0.6,0.6), plot_points=40)  
L = add([line([[b,0],[b,f(x=b)]]),rgbcolor=(0.7,0.6,0.6))+  
        line([[a,0],[a,f(x=a)]]),rgbcolor=(0.7,0.6,0.6)) for (  
        a,b),f in rsf.list())  
(P + Q +L)
```



Das Riemannsche Integral

Eine beschränkte Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **integrierbar**, wenn Ober- und Unterintegral von f auf $[a, b]$ übereinstimmen.

Der gemeinsame Wert heißt das **Integral** von f und wird mit

$$\int_a^b f(x) dx$$

bezeichnet. Dabei heißt f der Integrand, x die Integrationsvariable, und a , b sind die Integrationsgrenzen.

- Linearität

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$$

- Monotonie

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx.$$

- Ist f, g integrierbar, so auch $f + g$, $f * g$, $f - g$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$.

Wichtige Sätze

- Ist f stetig auf einem Intervall I und $a \in I$, so ist $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in I$ eine differenzierbare Funktion mit $F'(x) = f(x)$.
- Jede stetige Funktion besitzt eine **Stammfunktion** F , also eine Funktion mit $F'(x) = f(x)$.
- Für eine Stammfunktion F benutzt man auch die Notation $\int f(x)dx$ und spricht von einem unbestimmten Integral.
- Ist f stetig auf $[a, b]$, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$.

- Bestimmte Integrale der Form $\int_a^b f(x) dx$

```
integrate(f,x,a,b)
```

Dabei ist f ein Ausdruck.

- Unbestimmte Integrale:

```
integrate(f,x)
```

- Numerische Approximationen:

```
numerical_integral(f,a,b)
```

(benutzt die GSL-library).

Integrieren - Beispiele I

```
integrate(sin(x),x,0,6)
```

```
-cos(6) + 1
```

```
integrate(exp(x)*x,x,2,3)
```

```
-e^2 + 2*e^3
```

```
integrate(1/x^2,x,1,oo)
```

```
1
```

```
numerical_integral(sin(1/x)*x,1,2)
```

```
(0.91905916759870254, 1.0203606488609102e-14)
```

Integrieren - Beispiele II

```
assume(a<>-1)
integrate(x^a*b,x)
```

$$b \cdot x^{(a + 1)/(a + 1)}$$

```
forget();a=-1
integrate(x^a*b,x)
```

$$b \cdot \log(x)$$

Uneigentliche Integrale

Sei f auf $[a, b)$ erklärt (eventuell $b = \infty$) und sei f auf jedem abgeschlossenen Teilintervall integrierbar. Man definiert

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{z \rightarrow b(-0)} \int_a^z f(x) dx,$$

falls der Limes existiert. Man spricht von einem **uneigentlichen Integral**.

- Sei $(f_n)_n$ eine Folge integrierbarer Funktionen auf $[a, b]$. Konvergiert $(f_n)_n$ gleichmäßig, so ist die Grenzfunktion integrierbar mit

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

- Sei $(f_n)_n$ eine Folge differenzierbarer Funktionen auf $[a, b]$. $(f'_n)_n$ konvergiere gleichmäßig und es existiere ein $x_0 \in [a, b]$ für den $f_n(x_0)$ konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_n$ gleichmäßig mit $(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.