Einführung in Sage

Dr. J. Schulz
C. Rügge

Einheit 5
WS 2009/2010

Aufgabe 1 :

Gegeben seien die Listen $L1 = [x, x^3, x^5, x^7, x^9]$ und $L2 = [x, x^2, x^6, x^{24}, x^{120}]$.

1. Erstellen Sie diese beiden Listen mit Hilfe des `[... for ...]` Konstruktes.
2. Bilden sie $L3 = L1 + L2$
3. Bilden Sie von jedem Eintrag von $L3$ die Ableitung und die Stammfunktion.
4. Bestimmen Sie von jedem Element von $L3$ den Funktionswert an der Stelle $x = 3$. Entfernen Sie den größten Eintrag aus der resultierenden Liste.

Aufgabe 2 :

Gegeben sei:

```
L=[16,81,125,512,729,4096,19683,78125,262144,390625,505,22343243,512]
```

1. Bestimmen Sie aus L alle Elemente, die durch 3 teilbar sind und entfernen Sie diese aus der Liste.
2. Bestimmen Sie aus den restlichen Elementen alle Elemente, die durch 2 teilbar sind, und entferne diese aus der Liste.
3. Bestimmen Sie zuletzt alle Elemente, die durch 5 teilbar sind.

Aufgabe 3 :

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 19 & -2 & 4 \\ 4 & 10 & -2 \\ 4 & -8 & 25 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Überprüfen Sie diese Matrizen ebenfalls auf Diagonalisierbarkeit.

2. Bestimmen Sie die Eigenwerte der (2×2)-Drehmatrix aus der Vorlesung. Überlegen Sie sich, für welche Winkel reelle Eigenwerte existieren. Überlegen Sie sich eine geometrische Begründung.

Aufgabe 4 :

Gegeben seien Basen $V = (v_1, v_2, v_3)$, $W = (w_1, w_2, w_3)$ des $\mathbb{R}^3$ mit Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Basiswechselmatrix bzgl. eines Basiswechsels von V nach W!

Aufgabe 5 :

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 3 & x & 4 \\ -1 & y & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & x \\ 3 & 2 & y \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie x und y so, dass AB invertierbar ist. Überprüfen Sie das Ergebnis durch Einsetzen.

Aufgabe 6 :

Untersuchen Sie für $m = 0, 1, \ldots, 41$ jeweils, wieviele der Zahlen $n^2 + n + m^2$ mit $n = 1, 2, \ldots, 100$ Primzahlen sind.

Aufgabe 7 :

Berechnen Sie mit Hilfe einer `for`-Schleife die ersten 10 Glieder der Folge

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}, n \in \mathbb{N}$$

mit Startwert $x_0 = 1$. Erraten Sie den Grenzwert der Folge! Ersetzen Sie den Startwert x_0 durch den Gleitkommawert $x_0 = 1.0$..

Aufgabe 8 :

Schreiben Sie eine Funktion `fak`, die die Fakultät

$$a! = \prod_{i=1}^{a} i$$

von einer natürlichen Zahl a berechnet.