Erkennen eines Graphen aus einer Punktwolke

Wir sind hier:

Das Problem

Eingabe ein metrischer Raum (X, d), z.B.

1. GPS-Koordinaten eines Autos, das in einer Stadt herumfährt
2. Koordinaten der schwarzen Pixel in einem Schwarz-Weiß-Bild

Ausgabe eine Approximation des metrischen Graphen, der dem metrischen Raum zugrunde liegt, z.B.

1. das Straßennetz der Stadt
2. der Graph, der im Bild abgebildet wird
   $\rightarrow$ Schrifterkennung

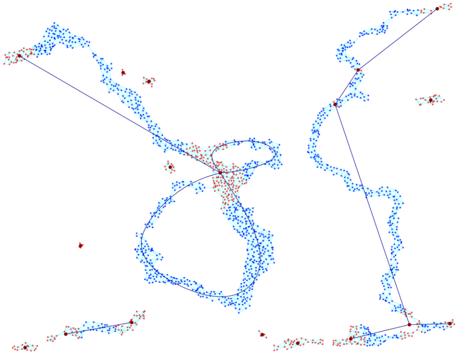
Wozu ist das nützlich?

1. Struktur in große Mengen geometrischer Daten bringen um deren Analyse zu ermöglichen/erleichtern

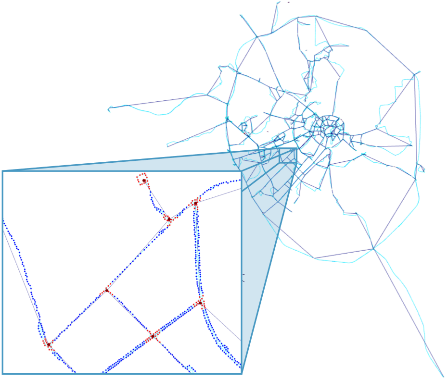
Wozu ist das nützlich?

1. Struktur in große Mengen geometrischer Daten bringen um deren Analyse zu ermöglichen/erleichtern
2. Häufig enthalten die Daten rauschen und sind umfangreich $\rightarrow$ Ziel: Datenmenge kompakt in ihren wichtigsten Verzweigungen darstellen

Beispiel (Erdbeben)



Beispiel (Straßennetz)



Wir sind hier:

Drei wesentliche Schritte

1. **Labeling**: Welche Punkte gehören zu Kanten, welche zu Knoten? $\rightarrow$ Punkte mit entsprechendem Label versehen

Drei wesentliche Schritte

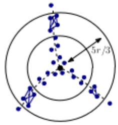
1. **Labeling**: Welche Punkte gehören zu Kanten, welche zu Knoten? $\rightarrow$ Punkte mit entsprechendem Label versehen
2. **Rekonstruktion**: Anhand der Labels bestimmen, welche Punkte sich zu einem Knoten und welche sich zu einer Kante zusammentun $\rightarrow$ Rekonstruktion des der Punktmenge zugrundeliegenden Graphen

Drei wesentliche Schritte

1. **Labeling**: Welche Punkte gehören zu Kanten, welche zu Knoten? $\rightarrow$ Punkte mit entsprechendem Label versehen
2. **Rekonstruktion**: Anhand der Labels bestimmen, welche Punkte sich zu einem Knoten und welche sich zu einer Kante zusammentun $\rightarrow$ Rekonstruktion des der Punktmenge zugrundeliegenden Graphen
3. **Metrik wiederherstellen**: Kanten mit Abständen versehen

Zu Schritt 1: Labeling

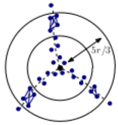
1. Betrachten einen kreisförmigen Ausschnitt um jeden Punkt und bestimmen Anzahl der Zusammenhangskomponenten darin



- Grad des Punkts = # Zusammenhangskomponenten im kreisförmigen Ausschnitt

Zu Schritt 1: Labeling

1. Betrachten einen kreisförmigen Ausschnitt um jeden Punkt und bestimmen Anzahl der Zusammenhangskomponenten darin

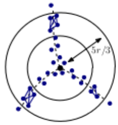


   - Grad des Punkts = # Zusammenhangskomponenten im kreisförmigen Ausschnitt

2. Grad == 2 $\rightarrow$ *edge point* (wird später zu einer Kante gehören)

Zu Schritt 1: Labeling

1. Betrachten einen kreisförmigen Ausschnitt um jeden Punkt und bestimmen Anzahl der Zusammenhangskomponenten darin

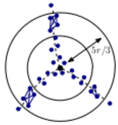


   - Grad des Punkts = # Zusammenhangskomponenten im kreisförmigen Ausschnitt

2. Grad == 2 → *edge point* (wird später zu einer Kante gehören)
3. Grad != 2 → *preliminary branch point* (wird später zu einem Knoten gehören, aber noch umbenannt zu *branch point*)

Zu Schritt 1: Labeling

1. Betrachten einen kreisförmigen Ausschnitt um jeden Punkt und bestimmen Anzahl der Zusammenhangskomponenten darin



   - Grad des Punkts = # Zusammenhangskomponenten im kreisförmigen Ausschnitt

2. Grad == 2 $\rightarrow$ *edge point* (wird später zu einer Kante gehören)
3. Grad != 2 $\rightarrow$ *preliminary branch point* (wird später zu einem Knoten gehören, aber noch umbenannt zu *branch point*)
4. Alle weniger als x von einem *preliminary branch point* entfernten Punkte werden als *branch points* eingeordnet (Knoten)

Zu Schritt 2: Rekonstruktion des Graphen

1. Mithilfe der Labels bestimmen, welche Punkte sich zu einem Knoten und welche sich zu einer Kante zusammentun

Zu Schritt 2: Rekonstruktion des Graphen

1. Mithilfe der Labels bestimmen, welche Punkte sich zu einem Knoten und welche sich zu einer Kante zusammentun
   - Punkte sind jetzt nach dem Labeling in zwei Mengen aufgeteilt:
     - *edge points*
     - *branch points*

Zu Schritt 2: Rekonstruktion des Graphen

1. Mithilfe der Labels bestimmen, welche Punkte sich zu einem Knoten und welche sich zu einer Kante zusammentun
   - Punkte sind jetzt nach dem Labeling in zwei Mengen aufgeteilt:
     - *edge points*
     - *branch points*
   - Um die Anzahl der späteren Kanten und Knoten zu bestimmen, wird Rips-Vietoris-Graph für beide Mengen erstellt

Zu Schritt 2: Rekonstruktion des Graphen

1. Mithilfe der Labels bestimmen, welche Punkte sich zu einem Knoten und welche sich zu einer Kante zusammentun
    - Punkte sind jetzt nach dem Labeling in zwei Mengen aufgeteilt:
        - *edge points*
        - *branch points*
    - Um die Anzahl der späteren Kanten und Knoten zu bestimmen, wird Rips-Vietoris-Graph für beide Mengen erstellt
        - Im Rips-Vietoris-Graphen werden alle Punkte, die innerhalb eines gewissen Abstands zueinander liegen, zu einer Zusammenhangskomponente gefasst

Zu Schritt 2: Rekonstruktion des Graphen

1. Mithilfe der Labels bestimmen, welche Punkte sich zu einem Knoten und welche sich zu einer Kante zusammentun
   - Punkte sind jetzt nach dem Labeling in zwei Mengen aufgeteilt:
     - *edge points*
     - *branch points*
   - Um die Anzahl der späteren Kanten und Knoten zu bestimmen, wird Rips-Vietoris-Graph für beide Mengen erstellt
     - Im Rips-Vietoris-Graphen werden alle Punkte, die innerhalb eines gewissen Abstands zueinander liegen, zu einer Zusammenhangskomponente gefasst
   - Jede Zusammenhangskomponente entspricht einem Knoten, bzw. einer Kante

Zu Schritt 2: Rekonstruktion des Graphen

1. Mithilfe der Labels bestimmen, welche Punkte sich zu einem Knoten und welche sich zu einer Kante zusammentun
   - Punkte sind jetzt nach dem Labeling in zwei Mengen aufgeteilt:
     - *edge points*
     - *branch points*
   - Um die Anzahl der späteren Kanten und Knoten zu bestimmen, wird Rips-Vietoris-Graph für beide Mengen erstellt
     - Im Rips-Vietoris-Graphen werden alle Punkte, die innerhalb eines gewissen Abstands zueinander liegen, zu einer Zusammenhangskomponente gefasst
   - Jede Zusammenhangskomponente entspricht einem Knoten, bzw. einer Kante
   - Zwei Punkte werden durch eine Kante verbunden, wenn sie Punkte in ihrer Zusammenhangskomponente haben, die einen gewissen Abstand zu Punkten in der selben Zusammenhangskomponente einer Kante nicht überschreiten

Zu Schritt 3: Metrik wiederherstellen

1. Kanten mit Abständen versehen
   - Jeder Kante wird als Länge der Durchmesser (längster kürzester Weg) ihrer Zusammenhangskomponente zugewiesen