Intro. à la Prog. en Var. Ent.

Uncapacitated lot-sizing problem with setups

Rapport

December 19, 2025

RAVENDIRANE Gayathiri
Master MAS parcours ROAD,
Année Universitaire : 2025−2026

1 Modélisation Mathématique : Variables, Objectifs et Contraintes

1.1 Premier modèle

1.1.1 Données

- n: Nombre de périodes.
- d_i: Demande à satisfaire pour la période i
- c_i: Coût de production par unité lors de la période i
- f_i: Coût de configuration (setup) pour la période i
- h: Coût de stockage par unité pour le mois suivant

1.1.2 Variables

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si on produit pendant la période } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

$$x_i = \text{quantité produite le mois } i \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

$$s_i = \text{quantité stockée à la fin du mois } i \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

1.1.3 Objectif

Minimiser le coût total, c'est-à-dire la somme des coûts de configuration de la machine, des coûts de production et des coûts de stockage à la fin de chaque mois. Ainsi, la fonction objectif est donnée par :

$$\min \quad Z_1 = \sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + h \sum_{i=1}^{n} s_i$$

1.1.4 Contraintes

- Balance d'inventaire : Le stock de la période précédente (s_{i-1}) plus la production du mois (x_i) doit satisfaire la demande du mois (d_i) et permettre de constituer le stock de fin de mois (s_i). L'égalité est :

  $$s_{i-1} + x_i = d_i + s_i$$

  La contrainte d'égalité, combinée à la contrainte de positivité du stock ($s_i \geq 0$) et de la production ($x_i \geq 0$), assure implicitement la satisfaction de la demande. Si la demande n'était pas satisfaite, s_i devrait être négatif, ce qui est interdit par $s_i \geq 0$. *Note : Cette contrainte va être implémenté dans le code.*

  $$s_1 = x_1 - d_1$$

  $$s_i = x_i + s_{i-1} - d_i \qquad \forall i \in \{2, \ldots, n\}$$

Sinon, en supposant un stock initial $s_0 = 0$ et $s_i, \ \forall i \in \{0, \ldots, n\}$.

$$s_i = x_i + s_{i-1} - d_i \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

- Lien entre production et activation (Coût de Setup) : S'il y a production ($x_i > 0$), le setup doit être activé ($y_i = 1$).

  $$x_i \leq M \ y_i \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

  où $M = \sum_{i=1}^{n} d_i$ représente une grande valeur (Big-M) et constitue une borne supérieure valide pour la production totale. La somme de toutes les demandes de tous les mois ne dépassera jamais la quantité produite au mois i.

- Positivité, binarité et intégrité :

  $$\begin{aligned} & y_i \in \{0,1\} && \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\ & x_i \in \mathbb{N}^+ && \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\ & s_i \in \mathbb{N}^+ && \forall i \in \{1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

1.1.5 Modèle 1 complet

$$\begin{aligned} \min \quad & Z_1 = \sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + h \sum_{i=1}^{n} s_i \\ \text{s.c.} \quad & s_1 = x_1 - d_1 \\ & s_i = x_i + s_{i-1} - d_i && \forall i \in \{2, \ldots, n\} \\ & x_i \leq M y_i && \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\ & y_i \in \{0,1\} && \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\ & x_i, s_i \in \mathbb{N}^+ && \forall i \in \{1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

où $M = \sum_{i=1}^{n} d_i$

1.2 Deuxième modèle

1.2.1 Données

Les mêmes que le Modèle 1 (n, d_i, c_i, f_i, h).

1.2.2 Variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si on fabrique à la période } i \text{ tous les produits pour la demande de la période } j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \ i \leq j$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si on produit pendant la période } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

1.2.3 Objectif

De même que pour le modèle 1, l'objectif est de minimiser le coût total. La demande d_j produite à la période $i \leq j$ engendre :

- un coût de production : $c_i d_j$;
- un coût de stockage : $h(j-i)d_j$.

L'objectif peut s'écrire sous la forme développée (équivalent de Z_1 pour les variables de modèle 2) :

$$\min \quad Z_2 = \sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} c_i d_j x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} h(j-i) d_j x_{ij}$$

ou, de manière équivalente, sous la forme compacte :

$$\min \quad Z_2 = \sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \big(c_i + h(j-i)\big) d_j x_{ij}$$

1.2.4 Contraintes

- Affectation unique de la demande de chaque période :

$$\sum_{i=1}^{j} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

- Lien entre production et setup (activation de la machine) : Si la demande de la période j est réalisée à la période i, alors la période i doit être en production ($y_i = 1$).

$$x_{ij} \leq y_i \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \leq j$$

- Binairité des variables de décision :

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \leq j$$

$$y_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

1.2.5 Modèle 2 complet

$$\begin{aligned}
\min \quad & Z_2 = \sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \big(c_i + h(j-i)\big) d_j x_{ij} & \\
\text{s.c.} \quad & \sum_{i=1}^{j} x_{ij} = 1 & \forall j \in \{1, \ldots, n\} \\
& x_{ij} \leq y_i & \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \leq j \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \leq j \\
& y_i \in \{0, 1\} & \forall i \in \{1, \ldots, n\}
\end{aligned}$$

2 Résultats Obtenus

Les deux modèles ont été évalués sur 31 instances du problème ULS de tailles variées (21, 60, 90 et 120 périodes). Le solveur HiGHS a été utilisé avec une limite de temps de 180 secondes et une tolérance d'optimalité de 10^{-10}. Pour chaque instance, l'écart relatif (*Gap %*) entre la valeur de la relaxation linéaire (RL) et la meilleure solution entière trouvée (*Best Sol*) est calculé comme suit :

$$\text{Gap (\%)} = \frac{\text{Best Sol} - \text{RL}}{\text{Best Sol}} \times 100.$$

Le tableau 1 synthétise les performances moyennes observées pour les deux formulations.

Critère	**Modèle 1**	**Modèle 2**
Valeur moyenne de la relaxation linéaire	19 562.16	51 842.62
Valeur moyenne de la meilleure solution	52 373.62	51 842.62
Gap moyen (%)	59.80	0.00
Nœuds explorés (moyenne)	59 531.28	1.00
Temps moyen (secondes)	118.561	0.200
Instances résolues à la racine	0/31 (0%)	31/31 (100%)
Instances optimales	11/31	31/31

Table 1: Comparaison synthétique des performances des deux modèles

2.1 Analyse et Interprétation des Résultats

2.1.1 Performance du Modèle 1 (Formulation avec Big-M)

Le modèle 1, utilisant la contrainte Big-M $x_i \leq M \cdot y_i$ où $M = \sum_{i=1}^{n} d_i$. Les résultats mettent en évidence plusieurs limitations importantes :

- **Relaxation linéaire peu serrée :** Le gap moyen de 59.80% indique que la relaxation linéaire fournit une borne inférieure très éloignée de la solution entière, ce qui pénalise fortement le processus de résolution par plusieurs branches.
- **Exploration intensive de l'arbre :** Le solveur explore en moyenne plus de 59 500 nœuds par instance, traduisant une forte dépendance au branchement.
- **Résolution partielle :** Seules 11 instances sur 31 sont résolues à l'optimalité dans la limite de temps, principalement pour les tailles les plus petites (Toy_Instance, 21.1 et 60.x).

2.1.2 Performance du Modèle 2 (Formulation sans Big-M)

Le modèle 2 repose sur une formulation par affectation de la demande, utilisant des variables x_{ij}, ce qui permet éliminer la contrainte avec Big-M. Cette approche conduit à des performances nettement meilleures :

- **Gap nul :** Le gap moyen est de 0%, ce qui signifie que la relaxation linéaire coïncide exactement avec la solution optimale entière pour toutes les instances.

- **Résolution à la racine :** Toutes les instances sont résolues au nœud racine, avec un unique nœud exploré.
- **Excellente efficacité computationnelle :** Le temps moyen de résolution est inférieur à une seconde, indépendamment de la taille des instances.

2.2 Bilan

- **Équivalence théorique :** Les deux modèles décrivent le problème ULS et mènent aux mêmes solutions optimales lorsque celles-ci sont atteintes.
- **Différences computationnelles :** Bien que théoriquement équivalents, les deux modèles présentent des comportements numériques très différents. Le modèle 1 a une relaxation linéaire très faible, comme l'indique le gap élevé, ce qui entraîne une exploration intensive de l'arbre de branchement.
- **Supériorité pratique du modèle 2 :** Malgré un nombre de variables en $O(n^2)$, le modèle 2 bénéficie d'une relaxation linéaire parfaitement serrée, garantissant une résolution rapide et à la racine. En pratique, pour des instances de grande taille, le modèle 2 est à privilégier.

3 Conclusion

Cette projet démontre l'importance du choix de la formulation mathématique sur les performances computationnelles, même lorsque les modèles sont théoriquement équivalents.

Instance	RL	Status	Best Sol	Gap %	Noeuds	Temps (s)
120.1	28 159.0	Rélisable (TLR)	75 777.0	62.84	78465	180.024
120.10	28 515.0	Rélisable (TLR)	85 328.0	66.58	73236	180.025
120.2	27 095.0	Rélisable (TLR)	67 630.0	59.94	82315	180.018
120.3	27 525.0	Rélisable (TLR)	87 415.0	68.51	64011	180.025
120.4	26 533.0	Rélisable (TLR)	82 693.0	67.91	71696	180.021
120.5	28 658.0	Rélisable (TLR)	96 787.0	70.39	64732	180.033
120.6	26 902.0	Rélisable (TLR)	65 790.0	59.11	78065	180.023
120.7	28 346.0	Rélisable (TLR)	94 046.0	69.86	102141	180.026
120.8	24 200.0	Rélisable (TLR)	71 003.0	65.92	74034	180.024
120.9	29 066.0	Rélisable (TLR)	89 926.0	67.68	64252	180.013
21.1	5442.0	Optimal	13 068.0	58.36	33	0.647
60.1	14 093.0	Optimal	29 739.0	52.61	19585	25.688
60.10	14 003.0	Optimal	31 809.0	55.98	11187	15.648
60.2	14 297.0	Optimal	27 572.0	48.15	4038	10.038
60.3	14 223.0	Optimal	34 081.0	58.27	47427	50.537
60.4	13 505.0	Optimal	31 131.0	56.62	16189	25.288
60.5	14 145.0	Optimal	35 693.0	60.37	50166	54.895
60.6	12 990.0	Optimal	25 186.0	48.42	4570	9.652
60.7	13 906.0	Optimal	30 853.0	54.93	6491	14.378
60.8	12 821.0	Optimal	27 962.0	54.15	14084	25.075
60.9	15 532.0	Optimal	35 492.0	56.24	33648	43.361
90.1	21 004.0	Rélisable (TLR)	50 943.0	58.77	83860	180.019
90.10	21 126.0	Rélisable (TLR)	56 514.0	62.62	103475	180.018
90.2	20 672.0	Optimal	46 518.0	55.56	80000	163.141
90.3	20 573.0	Rélisable (TLR)	57 613.0	64.29	102469	180.018
90.4	19 671.0	Rélisable (TLR)	53 897.0	63.50	115101	180.028
90.5	21 131.0	Rélisable (TLR)	64 307.0	67.14	67299	180.023
90.6	18 659.0	Optimal	41 811.0	55.37	49345	115.173
90.7	21 314.0	Rélisable (TLR)	54 954.0	61.21	122249	180.034
90.8	18 996.0	Rélisable (TLR)	49 010.0	61.24	130128	180.029
90.9	21 773.0	Rélisable (TLR)	59 620.0	63.48	90709	180.016
Toy_Instance	1114.0	Optimal	1788.0	37.70	1	0.022
Average	19 562.16		52 373.62	59.80	59531.28	118.561

Table 2: Résultats du modèle 1 pour les instances ULS

Instance	RL	Status	Best Sol	Gap %	Noeuds	Temps (s)
120.1	75 417.0	Optimal	75 417.0	0.00	1	0.380
120.10	85 103.0	Optimal	85 103.0	0.00	1	0.342
120.2	67 630.0	Optimal	67 630.0	0.00	1	0.345
120.3	86 778.0	Optimal	86 778.0	0.00	1	0.377
120.4	82 367.0	Optimal	82 367.0	0.00	1	0.346
120.5	96 316.0	Optimal	96 316.0	0.00	1	0.365
120.6	65 704.0	Optimal	65 704.0	0.00	1	0.388
120.7	81 866.0	Optimal	81 866.0	0.00	1	0.341
120.8	70 734.0	Optimal	70 734.0	0.00	1	0.340
120.9	87 909.0	Optimal	87 909.0	0.00	1	0.368
21.1	13 068.0	Optimal	13 068.0	0.00	1	0.016
60.1	29 739.0	Optimal	29 739.0	0.00	1	0.087
60.10	31 809.0	Optimal	31 809.0	0.00	1	0.084
60.2	27 572.0	Optimal	27 572.0	0.00	1	0.084
60.3	34 081.0	Optimal	34 081.0	0.00	1	0.084
60.4	31 131.0	Optimal	31 131.0	0.00	1	0.083
60.5	35 693.0	Optimal	35 693.0	0.00	1	0.084
60.6	25 186.0	Optimal	25 186.0	0.00	1	0.085
60.7	30 853.0	Optimal	30 853.0	0.00	1	0.083
60.8	27 962.0	Optimal	27 962.0	0.00	1	0.085
60.9	35 492.0	Optimal	35 492.0	0.00	1	0.088
90.1	50 943.0	Optimal	50 943.0	0.00	1	0.196
90.10	56 514.0	Optimal	56 514.0	0.00	1	0.188
90.2	46 518.0	Optimal	46 518.0	0.00	1	0.187
90.3	57 613.0	Optimal	57 613.0	0.00	1	0.188
90.4	53 897.0	Optimal	53 897.0	0.00	1	0.188
90.5	64 123.0	Optimal	64 123.0	0.00	1	0.217
90.6	41 811.0	Optimal	41 811.0	0.00	1	0.192
90.7	54 913.0	Optimal	54 913.0	0.00	1	0.192
90.8	49 010.0	Optimal	49 010.0	0.00	1	0.187
90.9	59 424.0	Optimal	59 424.0	0.00	1	0.191
Toy_Instance	1788.0	Optimal	1788.0	0.00	1	0.010
Average	51 842.62		51 842.62	0.00	1.00	0.200

Table 3: Résultats du modèle 2 pour les instances ULS

(*) RL = La valeur de la solution de la relaxation linéaire du modèle
(*) Status = Le statut de la meilleure solution trouvée (optimale, réalisable, aucune)
(*) TLR = Time Limit Reached
(*) Best Sol = La valeur de la meilleure solution trouvée
(*) Gap = Écart en % entre la valeur de la relaxation linéaire et la valeur de la meilleure solution trouvée :

$$\text{Gap (\%)} = \frac{\text{Best Sol} - \text{RL}}{\text{Best Sol}} \times 100$$

(*) Nœuds = Le nombre de nœuds de l'arbre de branchement
(*) Runtime = Le temps de résolution