École Normale Supérieure de l'Enseignement Technique de Mohammedia

DEPARTEMENT MATHÉMATIQUES & INFORMATIQUE

COMPRESSION D'IMAGE PAR SVD

Application de l'Algèbre Linéaire

Réalisé par :

Rachid LAFKIAR
Anas HANI
Imane
Wissal

Encadré par :

Prof. Fatiha AKFIF

Année Universitaire 2024 - 2025

SVD

Table des matières

1 Introduction et Contexte

À l'ère du numérique, la gestion des données visuelles représente un défi majeur. Les images haute définition, constituées de millions de pixels, nécessitent des espaces de stockage considérables et une bande passante élevée pour leur transmission. La compression d'image est donc devenue une nécessité incontournable en informatique.

D'un point de vue mathématique, une image en niveaux de gris n'est rien d'autre qu'une matrice A de dimensions $m \times n$, où chaque coefficient $a_{i,j}$ représente l'intensité lumineuse d'un pixel.

L'objectif de ce projet est d'explorer une méthode de compression puissante basée sur l'algèbre linéaire : la **Décomposition en Valeurs Singulières (SVD)**. Contrairement aux formats comme le JPEG qui utilisent la transformée en cosinus discrète, la SVD repose sur une factorisation matricielle fondamentale :

$$A = U\Sigma V^T$$

Cette décomposition permet de "classer" l'information contenue dans l'image par ordre d'importance (les valeurs singulières). En ne conservant que les composantes les plus significatives (approximation de rang k), nous pouvons reconstruire une image fidèle à l'originale tout en éliminant les redondances et le bruit.

Ce rapport se structure en deux temps : d'abord l'énoncé théorique et pratique appliqué à une matrice 4×4, suivi des démonstrations détaillées et des résultats numériques.

2 Énoncé du Problème : Compression 4×4

On considère une image simplifiée en niveaux de gris représentée par la matrice suivante, appartenant à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{4\times4}$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2.1 Partie I : Cadre Algébrique

1. Montrer que $\mathbb{R}^{4\times4}$ possède une structure d'espace vectoriel.
2. Déterminer la dimension de cet espace.
3. Interpréter la matrice A comme la représentation matricielle d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$.

2.2 Partie II : Valeurs Propres et Valeurs Singulières

L'objectif est de préparer la matrice diagonale Σ.

1. Calculer la matrice de Gram $A^T A$.
2. Démontrer que la matrice $A^T A$ est symétrique et définie positive.
3. Poser et résoudre (ou déduire) l'équation caractéristique $\det(A^T A - \lambda I_4) = 0$.
4. En déduire les valeurs propres λ_i.
5. Calculer les valeurs singulières définies par $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.

2.3 Partie III : Construction des Matrices U et V

L'objectif est de trouver les bases orthonormées de départ et d'arrivée.

1. Déterminer les vecteurs propres v_i associés à la matrice $A^T A$.
2. Normaliser ces vecteurs pour obtenir une famille orthonormée.
3. Construire la matrice orthogonale $V = (v_1\ v_2\ v_3\ v_4)$.
4. À l'aide de la relation fondamentale de la SVD, calculer les vecteurs $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$.
5. Construire la matrice orthogonale $U = (u_1\ u_2\ u_3\ u_4)$.

2.4 Partie IV : Vérification de la Décomposition

1. Écrire explicitement la matrice diagonale Σ.
2. Vérifier numériquement l'égalité matricielle $A = U\Sigma V^T$.
3. Exprimer A sous forme de somme de matrices de rang 1 (décomposition spectrale) :

$$A = \sum_{i=1}^{4} \sigma_i\, u_i v_i^T$$

2.5 Partie V : Application à la Compression

1. On souhaite compresser l'image en ne gardant que la composante principale ($k = 1$). Calculer la matrice compressée A_1.
2. Montrer que A_k est la meilleure approximation de rang k au sens de la norme de Frobenius.
3. Comparer l'espace mémoire nécessaire pour stocker A versus A_1.
4. Conclure sur l'efficacité de la méthode.

A Démonstrations et Solutions Détaillées

A.1 Solutions - Partie I : Espace Vectoriel

1. Structure d'Espace Vectoriel L'ensemble des matrices carrées d'ordre 4 à coefficients réels, noté $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^{4\times 4}$, est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. En effet, il vérifie les deux axiomes de stabilité :

— **Stabilité par addition :** La somme de deux matrices 4×4 est une matrice 4×4. $(\mathcal{M}_4(\mathbb{R}), +)$ est un groupe abélien (commutatif, associatif, élément neutre $0_{\mathcal{M}}$, symétrique).

— **Stabilité par multiplication scalaire :** Le produit $\lambda \cdot A$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$) reste dans l'ensemble.

2. Dimension La dimension d'un espace vectoriel est le cardinal de sa base. La base canonique de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est constituée des matrices élémentaires $E_{i,j}$ (ayant un 1 à la position (i, j) et 0 ailleurs). Pour une matrice $m \times n$, la dimension est $m \times n$. Ici :

$$\dim(\mathbb{R}^{4\times 4}) = 4 \times 4 = 16$$

3. Interprétation Application Linéaire La matrice A est la représentation canonique d'un endomorphisme f. Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^4$, l'image $y = f(x)$ est obtenue par le produit matriciel $y = Ax$. Dans le contexte de la SVD, f transforme la sphère unité de $\mathbb{R}^4$ en un hyper-ellipsoïde dont les demi-axes ont pour longueurs les valeurs singulières σ_i.

A.2 Solutions - Partie II : Valeurs Propres et Singulières

1. Calcul de A^TA La matrice A étant symétrique ($a_{ij} = a_{ji}$), on a $A^T = A$, donc $A^TA = A^2$. Le calcul du produit matriciel donne :

$$A^TA = \begin{pmatrix} 30 & 32 & 28 & 20 \\ 32 & 38 & 32 & 28 \\ 28 & 32 & 38 & 32 \\ 20 & 28 & 32 & 30 \end{pmatrix}$$

2. Caractère Symétrique Définie Positive

— **Symétrie :** $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$. La matrice est bien symétrique réelle.

— **Définie positive :** Soit $x \neq 0$. $x^T(A^TA)x = (Ax)^T(Ax) = \|Ax\|^2$. Comme A est inversible (ses colonnes sont indépendantes), $\|Ax\|^2 > 0$ pour tout $x \neq 0$.

3, 4 et 5. Valeurs Singulières Les valeurs singulières sont les racines carrées des valeurs propres de A^TA. Après calcul numérique (diagonalisation), on obtient les valeurs singulières classées par ordre décroissant ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_4$) :

— $\sigma_1 \approx 11.099$ (Contient l'information majeure, l'énergie de l'image)

— $\sigma_2 \approx 3.414$

— $\sigma_3 \approx 0.901$

— $\sigma_4 \approx 0.586$ (Contient les détails mineurs ou le bruit)

A.3 Solutions - Partie III : Matrices U et V

Puisque A est symétrique définie positive, ses vecteurs singuliers à gauche (U) et à droite (V) sont identiques. On calcule les vecteurs propres normalisés de A.

$$U = V \approx \begin{pmatrix} 0.37 & -0.27 & -0.49 & -0.73 \\ 0.60 & -0.65 & 0.44 & 0.16 \\ 0.60 & 0.65 & 0.44 & -0.16 \\ 0.37 & 0.27 & -0.49 & 0.73 \end{pmatrix}$$

Les colonnes de cette matrice forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.

A.4 Solutions - Partie IV : Vérification

La matrice Σ est la matrice diagonale contenant les σ_i :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 11.099 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.901 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.586 \end{pmatrix}$$

Le produit $U\Sigma V^T$ permet de reconstruire exactement la matrice A originale :

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \sigma_3 u_3 v_3^T + \sigma_4 u_4 v_4^T$$

A.5 Solutions - Partie V : Compression et Conclusion

1. Approximation de Rang 1 Pour compresser l'image, on tronque la somme en ne gardant que le premier terme ($k = 1$). C'est l'approximation la plus forte.

$$A_1 = \sigma_1 u_1 v_1^T \approx 11.099 \times \begin{pmatrix} 0.37 \\ 0.60 \\ 0.60 \\ 0.37 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.37 & 0.60 & 0.60 & 0.37 \end{pmatrix}$$

Le résultat est une matrice "lissée" qui capture la tendance générale de l'image (fortes valeurs au centre, faibles aux bords) :

$$A_1 \approx \begin{pmatrix} 1.53 & 2.47 & 2.47 & 1.53 \\ 2.47 & 4.00 & 4.00 & 2.47 \\ 2.47 & 4.00 & 4.00 & 2.47 \\ 1.53 & 2.47 & 2.47 & 1.53 \end{pmatrix}$$

2. Analyse du Gain

— **Stockage original :** 16 valeurs réelles.

— **Stockage compressé ($k = 1$) :** 1 valeur singulière + 2 vecteurs de taille 4 = 9 valeurs.

Bien que le gain soit modeste sur une petite matrice 4x4 (gain de 43%), il devient exponentiel sur de grandes images. Pour une image 1000x1000, une approximation de rang 50 permettrait de réduire la taille du fichier de 90% tout en préservant la qualité visuelle.