Test stability.

$$x_1' = -x_1^3 + x_2^4$$
$$x_2' = x_1^4 - x_2^3$$

$$0 = -x_1^3 + x_2^4$$
$$0 = x_1^4 - x_2^3$$

$$-x_1^3 + x_2^4 = x_1^4 - x_2^3$$
$$x_2^4 - x_2^3 = x_1^4 + x_1^3$$

$$\cancel{x_2(x^3 - x_2}$$

$$x_2^3(x_2 - 1) = x_1^3(x_1 + 1)$$

(0,0) Es un punto critico.
(0,1) es punto critico.

$$\cancel{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \ \end{bmatrix}}$$

$\cancel{3}$ 1) b. $x_1' = a x_1 - x_1 x_2$
$x_2' = -b x_2 + x_1 x_2$

$$\approx \quad \begin{aligned} x_1' &= a x_1 - O(x_1, x_2) \\ x_2 &= -b x_2 + O(x_1, x_2) \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$$

a y $-b$ son valores propios de A para $a, b \in \mathbb{Z}$. entonces $(0,0)$ es punto de silla.

$x_1(t) = 0 \qquad x_2(t) = 0$

2. Stability.

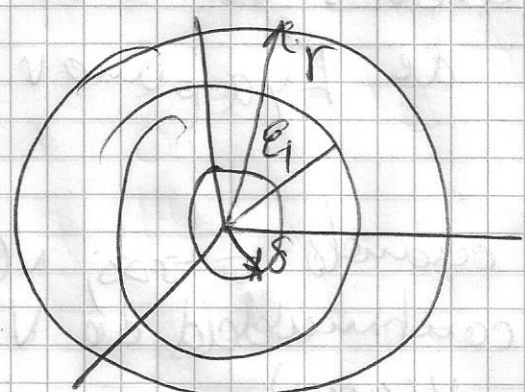
If there ~~exist~~ a Lyapunov function of system

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

with e.p. $x = 0 \Rightarrow x = 0$ es es un punto de equilibrio en el sentido de Lyapunov. If in adition $V^*(x) < 0$, $0 < |x| < h$, for some, i.e. $V^*(x)$ is positive definide, then $x = 0$ is an asimptotic equilibrium point stable.

2) Primero probamos la estabilidad en el sentido Liapunov.

Suponga $\epsilon > 0$ dado. Necesitamos encontrar $\delta > 0$ para todo $\|X(0)\| < \delta$ como sigue $\|X(t)\| < \epsilon$. $\forall t > 0$.



Para el caso $n=2$.

Dado $\epsilon_1 = \min(\epsilon, r)$. Definimos

Desde que $V(x)$ es continuo. $m = \min_{\|x\| = \epsilon_1} V(x)$ esta bien definida y positiva. escogemos δ que satisfaga $0 < \delta < \epsilon_1$ tal que $\forall \|x\| < \delta$ $V(x) < m$ siempre que $V(x)$ sea continuo. Ahora consideramos para algun $X(0)$ tal que $\|X(0)\| < \delta$, $V(X(0)) < m$ y dado $X(t)$ se una trayectoria.

$V(x(t))$ No es creciente $(\dot{V}(x(t)) \leq 0)$ con $V(X(t)) < m$ $\Rightarrow$ $\|X(t)\| < \epsilon_1$.

Suponga que existe t_1 tal que $\|x(t_1)\| > \epsilon_1$, entonces por la continuidad tenemos que $t_2 \Rightarrow \|x(t_2)\| = \epsilon_1$ y

$\min_{\|x\| = \epsilon_1} \|V(x)\| = m > V(x(t_2))$ es una contradicción. Por lo tanto

El sentido de Lyapunov se mantiene.

V es lnd, cuando $t \to \infty$, $V(x(t)) \to 0$ entonces por continuidad de V, $\|x(t)\| \to 0$, $V(x(t))$ es estrictamente decreciente y $V(x(t)) \geq 0$. sabemos que $V(x(t)) \to c$ con $c \geq 0$. queremos mostrar que $c = 0$. suponemos $c > 0$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$$

B_α bola dentro de S.

$$B_\alpha = \{x \in S \mid \|x\| < \alpha\}.$$

Suponga $x(t)$ es trayector $x(0)$. Sabemos $V(x(t))$ es decreciente monotona hacia c y $V(x(t)) > c$. $\forall t \Rightarrow$ $x(t) \notin B_\alpha$. $B_\alpha \subset S \Rightarrow V(x) \leq c$

$$-\gamma = \max_{\alpha \leq x \leq \epsilon} \dot{V}(x)$$

claramente

$-\gamma < 0$. desde que $\dot{V}(x)$ es ind.

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(\tau)\, d\tau$$

$$\leq V(x(0)) - \gamma t.$$

implica que $V(x(t))$ es negativo, esto contradice la hipotesis por lo tanto $c = 0$.