Soluções - Guidorizzi - Volume 1

Leonardo

February 14, 2017

Chapter 1

Números Reais

1.1 Os Números Racionais

1.2 Os Números Reais

Utilizamos nos exercícios a seguir o algoritmo de Briot-Ruffini.

1. (d) $x + 3 \leq 6x - 2 \Rightarrow -5x \leq -5 \Rightarrow x \geq 1$.

   (e) $1 - 3x > 0 \Rightarrow -3x > -1 \Rightarrow 3x < 1 \Rightarrow x < \dfrac{1}{3}$.

   (f) $2x + 1 \geq 3x \Rightarrow -x \geq -1 \Rightarrow x \leq 1$.

2. (i) $(2x - 1)(3 - 2x)$

   $2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \dfrac{1}{2}$

   $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{1}{2}$

   $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

   $3 - 2x < 0 \Rightarrow x > \dfrac{3}{2}$

   $3 - 2x > 0 \Rightarrow x < \dfrac{3}{2}$

$3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$(2x-1)(3-2x) > 0$ para $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$
$(2x-1)(3-2x) < 0$ para $x < \frac{1}{2}$ ou $x > \frac{3}{2}$
$(2x-1)(3-2x) > 0$ para $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$
$(2x-1)(3-2x) < 0$ para $x = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{3}{2}$

(j) $x(x-3)$

$x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$

$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$x(x-3) < 0$ para $0 < x < 3$

$x(x-3) > 0$ para $x < 0$ ou $x > 3$

$x(x-3)$ para $x = 0$ ou $x = 3$.

(l) $x(x-1)(2x+3)$

$x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1$

$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$2x + 3 < 0 \Rightarrow x < -\frac{3}{2}$

$2x + 3 > 0 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}$

$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

$x(x-1)(2x+3) > 0$ para $-\frac{3}{2} < x < 0$ ou para $x > 1$
$x(x-1)(2x+3) < 0$ para $x < -\frac{3}{2}$ ou para $0 < x < 1$
$x(x-1)(2x+3) = 0$ para $x = 0$ ou $x = -\frac{3}{2}$ ou $x = 1$.

(m) $(x-1)(1+x)(2-3x)$

$x-1<0 \Rightarrow x<1$

$x-1>0 \Rightarrow x>1$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$1+x<0 \Rightarrow x<-1$

$1+x>0 \Rightarrow x>-1$

$1+x=0 \Rightarrow x=-1$

$2-3x<0 \Rightarrow x>\dfrac{2}{3}$

$2-3x>0 \Rightarrow x<\dfrac{2}{3}$

$2-3x=0 \Rightarrow x=\dfrac{2}{3}$

$(x-1)(1+x)(2-3x)>0$ para $x<-1$ ou $\dfrac{2}{3}<x<1$

$(x-1)(1+x)(2-3x)<0$ para $-1<x<\dfrac{2}{3}$ ou $x>1$

$(x-1)(1+x)(2-3x)=0$ para $x=1$ ou $x=-1$ ou $x=\dfrac{2}{3}$.

(n) $x(x^2+3)$

$x^2+3<0 \Rightarrow x^2<-3$, não é possível.

$x^2+3>0$ para qualquer x

Logo temos:

$x(x^2+3)>0$ para $x>0$

$x(x^2+3)<0$ para $x<0$

$x(x^2+3)=0$ para $x=0$

3. (h) $\dfrac{2x-1}{x-3}>5 \Rightarrow \dfrac{2x-1}{x-3}>\dfrac{5(x-3}{x-3} \Rightarrow$

$\dfrac{2x-1-5(x-3)}{x-3}>0 \Rightarrow \dfrac{2x-1-5x+15}{x-3}>0 \Rightarrow$

$\dfrac{-3x+14}{x-3}>0 \Rightarrow \dfrac{3x+14}{x-3}<0$

$3x+14>0 \Rightarrow x>\dfrac{14}{3}$

$3x + 14 < 0 \Rightarrow x < \frac{14}{3}$

$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$

$x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$

Devemos ter o denominador e numerador com sinais opostos, assim temos a solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < \frac{14}{3}\}$.

(i) $\frac{x}{2x-3} \leq 3 \Rightarrow \frac{x}{2x-3} \leq \frac{3(2x-3)}{2x-3} \Rightarrow$

$\frac{x-3(2x-3)}{2x-3} \leq 0 \Rightarrow \frac{x-6x+9}{2x-3} \leq 0 \Rightarrow$

$\frac{-5x+4}{2x-3} \leq 0 \Rightarrow \frac{5x-9}{2x-3} \geq 0$

$5x - 9 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{9}{5}$

$5x - 9 < 0 \Rightarrow x < \frac{9}{5}$

$2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$

$2x - 3 < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$

$\frac{5x-9}{2x-3} \geq 0$ quando os sinais do denominador e numerador são iguais:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{3}{2} \text{ ou } x \geq \frac{9}{5}\}$.

(j) $\frac{x-1}{2-x} < 1 \Rightarrow \frac{x-1}{2-x} < \frac{2-x}{2-x} \Rightarrow$

$\frac{x-1-2+x}{2-x} < 0 \Rightarrow \frac{2x-3}{2-x} < 0$

$2x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$

$2x - 3 < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$

$2 - x > 0 \Rightarrow x < 2$

$2 - x < 0 \Rightarrow x > 2$

$\frac{2x-3}{2-x} < 0$ quando os sinais do denominador e numerador são diferentes:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{3}{2} \text{ ou } x > 2\}$.

(l) $x(2x-1)(x+1) > 0$

$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

$2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$

$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$

Os valores para que tenhamos $x(2x-1)(x+1) > 0$:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x > \frac{1}{2}\}$.

(m) $(2x-1)(x-3) > 0$

$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

$2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$

$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$

$x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$

Devemos ter os sinais dos fatores iguais em $(2x-1)(x-3) > 0$:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 3\}$.

(n) $(2x-3)(x^2+1) < 0$

$x^2 + 1 > 0$ para qualquer x.

Devemos ter $2x - 3 < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{3}{2}\}$.

(o) $\frac{x-3}{x^2+1} < 0$

$x^2 + 1 > 0$ para qualquer x.

Devemos ter $x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$.

4. $x^3 + 0x^2 + 0x - a^3 \div \llcorner x - a$:

$$
\begin{array}{rr|l}
 & x^3+0x^2+0x-a^3 & x-a \\ \cline{3-3}
- & x^3-ax^2 & x^2+ax+a^2 \\ \cline{1-2}
 & ax^2+0x-a^3 & \\
- & ax^2-a^2x & \\ \cline{1-2}
 & a^2x-a^3 & \\
- & a^2x-a^3 & \\ \cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

5. (c) $(x-a)(x^3+ax^2+a^2x+a^3) =$

$x^4+ax^3+a^2x^2+a^2x^3-ax^3-a^2x^2-a^3x-a^4 =$

x^4-a^4

(d) $(x-a)(x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4) =$

$x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x-ax^4-a^2x^3-a^3x^2-a^4x-a^5 =$

x^5-a^5

(e) $(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+...+a^{n-2}x+a^{n-1}) =$

$x^n+ax^{n-1}+a^2x^{n-2}+...+a^{n-2}x^2+a^{n-1}x$

$-ax^{n-1}-a^2x^{n-2}-a^3x^{n-3}-...-a^{n-1}x-a^n =$

x^n-a^n

6. (h) $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{p}}{x-p} = \dfrac{\frac{p-x}{xp}}{x-p} = \dfrac{p-x}{(x-p)xp} = -\dfrac{1}{xp}.$

(i) $\dfrac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{p^2}}{x-p} = \dfrac{\frac{p^2-x^2}{x^2p^2}}{x-p} = \dfrac{p^2-x^2}{x^2p^2(x-p)} = \dfrac{(p-x)(p+x)}{-x^2p^2(p-x)} = -\dfrac{x+p}{x^2p^2}.$

(k) $\dfrac{x^4-p^4}{x-p} = \dfrac{(x-p)(x^3+px^2+p^2x+p^3}{(x-p)} = x^3+px^2+p^2x+p^3$

(l) $\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h} = \dfrac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} =$

$\dfrac{2hx+h^2}{h} = \dfrac{h(2x+h)}{h} = 2x+h$

(m) $\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}=\dfrac{\dfrac{x-x-h}{x(x+h)}}{h}=\dfrac{\dfrac{-h}{x(x+h)}}{h}=\dfrac{-h}{x(x+h)h}=-\dfrac{1}{x(x+h)}$

(n) $\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}=\dfrac{x^3+3hx^2+3h^2x+h^3-x^3}{h}=$
$\dfrac{3hx^2+3h^2x+h^3}{h}=3x^2+3xh+h^2$

(o) $\dfrac{(x+h)^2-(x-h)^2}{h}=\dfrac{(x^2+2hx+h^2)-(x^2-2hx+h^2)}{h}=$
$\dfrac{4hx}{h}=4x$

7. (f) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4}>0 \Rightarrow \dfrac{(x+2)(x-2)}{x^2+4}>0$

O denominador será sempre positivo, devemos analisar o sinal do numerador $(x+2)(x-2)$:

$x+2>0 \Rightarrow x>-2$

$x+2<0 \Rightarrow x<-2$

$x-2>0 \Rightarrow x>2$

$x-2<0 \Rightarrow x<2$

O numerador deve ser positivo, portanto os fatores do produto devem ter o mesmo sinal, temos isso quando $x<-2$ ou $x>2$.

(g) $(2x-1)(x^2-4)\leq 0 \Rightarrow (2x-1)(x+2)(x-2)\leq 0$

O produto deve ter seus fatores todos negativos ou ao menos um deles com valor 0 ou, finalmente, dois positivos e um negativo. Temos então os sinais de cada expressão:

$2x-1\leq 0 \Rightarrow x\leq \dfrac{1}{2}$

$2x-1>0 \Rightarrow x>\dfrac{1}{2}$

$x+2\leq 0 \Rightarrow x\leq -2$

$x+2>0 \Rightarrow x>-2$

$x-2\leq 0 \Rightarrow x\leq 2$

$x-2>0 \Rightarrow x>2$

Para termos $(2x-1)(x^2-4)=0$, basta termos $x=\dfrac{1}{2}$ ou $x=-2$ ou

$x = 2$.

Para termos $(2x-1)(x^2-4) < 0$, com os três fatores acima mencionados negativos, devemos ter $x < -2$.

Finalmente para termos $(2x-1)(x^2-4) < 0$, com dois fatores positivos e um negativo. Analisando a seguir todas as possibilidades:

$x < \dfrac{1}{2}$ e $x > -2$ e $x > 2$ não é possível.

$x > \dfrac{1}{2}$ e $x < -2$ e $x > 2$ não é possível.

$x > \dfrac{1}{2}$ e $x > -2$ e $x < 2$ nos dá $\dfrac{1}{2} < x < 2$.

Logo as soluções são $x \leq -2$ ou $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2$.

(h) $3x^2 \geq 48 \Rightarrow x^2 \geq 16 \Rightarrow (x-4)(x+4) \geq 0$

Estudando o sinal do produto, devemos ter as duas expressões com mesmo sinal ou alguma delas com valor zero:

$x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$

$x - 5 < 0 \Rightarrow x < 4$

$x + 5 > 0 \Rightarrow x > -4$

$x + 5 < 0 \Rightarrow x < -4$

Devemos ter:

$x > 4$ e $x > -4$, que nos dá $x > 4$.

ou

$x < 4$ e $x < -4$ que nos dá $x < -4$.

A solução portanto é ou $x \leq -4$ ou $x \geq 4$

(i) $x^2 < r^2 \Rightarrow (x-r)(x+r) < 0$ Estudando o sinal do produto, devemos ter as duas expressões com sinais opostos:

$x - r > 0 \Rightarrow x > r$

$x - r < 0 \Rightarrow x < r$

$x + r > 0 \Rightarrow x > -r$

$x + r < 0 \Rightarrow x < -r$

Devemos ter:

$x > r$ e $x < -r$, que é impossível.

ou

$x < r$ e $x > -r$ que nos dá $-r < x < r$.

(j) $x^2 \geq r^2 \Rightarrow (x-r)(x+r) \geq 0$ Estudando o sinal do produto, devemos ter as duas expressões com mesmo sinal ou alguma delas com valor zero:

$x - r > 0 \Rightarrow x > r$

$x - r < 0 \Rightarrow x < r$

$x + r > 0 \Rightarrow x > -r$

$x + r < 0 \Rightarrow x < -r$

Devemos ter:

$x > r$ e $x > -r$, que nos dá $x > r$.

ou

$x < r$ e $x < -r$ que nos dá $x < -r$.

A solução portanto é ou $x \leq -r$ ou $x \geq r$

8. (a) $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}\right] = a\left[x^2 + \frac{2xb}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2+4ac}{4a^2}\right] =$

$= \boxed{ax^2 + bx + c}$

(b) $a\left[\left(\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] =$

$= a\left[\frac{\Delta}{4a^2} - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a.0 = \boxed{0}$

(c) $x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{(-b-\sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} =$

$= \frac{-2b}{2a} = \boxed{\frac{-b}{a}}$

$x_1.x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.\frac{(-b-\sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \boxed{\frac{c}{a}}$

9. $a(x-x_1)(x-x_2) = a(x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2) =$

$$= a[x^2 - x(x_2 + x_1) + x_1x_2] = a\left[x^2 - x\left(\frac{-b}{a}\right) + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= \boxed{ax^2 + bx + c}$$

10. (f) $2x^2 - 3x + 1 = 2(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}) = 2(x-1)(x - \frac{1}{2}) = \boxed{(x-1)(2x-1)}$

(g) $x^2 - 25$

$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$

$x_1x_2 = -25 \Rightarrow (-x_1)x_1 = -25 \Rightarrow x_1^2 = 25 \Rightarrow x_1 = 5$ e $x_2 = -5$

$\boxed{(x-5)(x+5)}$

(h) $3x^2 + x - 2 = 3(x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}) = 3(x+1)(x - \frac{2}{3}) = \boxed{(x+1)(3x-2)}$

(i) $4x^2 - 9$ $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$

$x_1x_2 = -\frac{9}{4} \Rightarrow (-x_1)x_1 = -\frac{9}{4} \Rightarrow x_1^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}$ e $x_2 = -\frac{3}{2}$

$4(x + \frac{3}{2})(x - \frac{3}{2}) = \boxed{(2x-3)(2x+3)}$

(j) $2x^2 - 5x$

$x_1x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x_1 + x_2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{5}{2}$

$2x(x - \frac{5}{2}) = \boxed{x(2x-5)}$

11. (f) $x_1 + x_2 = -\frac{1}{3}$ e $x_1x_2 = -\frac{2}{3}$

$x_1 = \frac{2}{3}$ e $x_2 = -1$

$3x^2 + x - 2 > 0 \Rightarrow 3(x+1)(x - \frac{2}{3}) > 0 \Rightarrow (x+1)(x - \frac{2}{3}) > 0$

Temos os seguintes sinais para cada fator do produto:

$x + 1 > 0$ quando $x > -1$

$x + 1 > 0$ quando $x < -1$

$x - \frac{2}{3} > 0$ quando $x > \frac{2}{3}$

$x - \frac{2}{3} < 0$ quando $x < \frac{2}{3}$

Para termos $(x+1)(x - \frac{2}{3}) > 0$, os fatores devem possuir o mesmo

sinal:
$x > \frac{2}{3}$ ou $x < -1$

(g) $x_1 + x_2 = 4$ e $x_1 x_2 = 4$

$x_1 = x_2 = 2$

$x^2 - 4x + 4 > 0 \Rightarrow (x-2)(x-2) > 0 \Rightarrow (x-2)^2 > 0$

A equação é sempre positiva, exceto em $x = 2$.

A solução é $x \neq 2$.

(h) $x_1 + x_2 = \frac{1}{3}$ e $x_1 x_2 = 0$

$x_1 = \frac{1}{3}$

$3x^2 - x \leq 0 \Rightarrow 3x(x - \frac{1}{3}) \leq 0 \Rightarrow x(x - \frac{1}{3}) \leq 0$

Temos os seguintes sinais para cada fator do produto:
$x - \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$

$x - \frac{1}{3} \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{3}$

$x > 0$ ou $x \leq 0$
Para termos $x(x - \frac{1}{3}) \leq 0$, os fatores devem possuir sinais opostos ou $x = 0$ ou $x = \frac{1}{3}$:

$0 \leq x \leq \frac{1}{3}$

(i) $x_1 + x_2 = 1$ e $x_1 x_2 = \frac{1}{4}$

$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$

$4x^2 - 4x + 1 < 0 \Rightarrow 4(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 < 0$

A desigualdade não é possível para nenhum x.

(j) $x_1 + x_2 = 1$ e $x_1 x_2 = \frac{1}{4}$

$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$

$4x^2 - 4x + 1 \leq 0 \Rightarrow 4(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) \leq 0 \Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 \leq 0$

A inequação somente é possível para $x = \frac{1}{2}$.

12. (a) Por 8. a) temos:

$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

Observando o produto, do lado direito temos $a > 0$ e a expressão entre colchetes é positiva sempre, pois temos um termo elevado ao quadrado e no outro, $\frac{\Delta}{4a^2}$, temos $\Delta < 0$, porém precedido por um sinal negativo, e dividido por $4a^2$ que é positivo, conclui-se então que esse fator também é positivo e por consequência $ax^2 + bx + c > 0$.

(b) O raciocínio é similar ao item anterior, exceto que agora temos $a < 0$ e portanto o produto $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ é negativo, o que nos dá $ax^2 + bx + c < 0$.

13. (f) $(2x + 1)(x^2 + x + 1) \leq 0$

Estudando o sinal do produto, devemos ter as duas expressões com sinais opostos ou algum fator ser 0::

$2x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$

$2x + 1 < 0 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{2}$

De acordo com o exercício 12 acima, $x^2 + x + 1 > 0$, pois $\Delta = 1 - 4.1.1 = -3 < 0$.

Logo $(2x + 1)(x^2 + x + 1) \leq 0$ quando $x \leq -\frac{1}{2}$.

(g) $x(x^2 + 1) \geq 0$

Estudando o sinal do produto, devemos ter as duas expressões com sinais iguais ou algum fator ser 0:

$x^2 + 1$ tem $a = 1 > 0$ e $\Delta = 0 - 4.1.1 = -4 < 0$, que pelo exercício 12 nos dá $x^2 + 1 > 0$.

Logo devemos ter $x \geq 0$.

(h) $(1 - x)(x^2 + 2x + 2) < 0$

Estudando o sinal do produto, devemos ter as duas expressões com sinais opostos:

$x^2 + 2x + 2$ tem $a = 1 > 0$ e $\Delta = 4 - 4.1.2 = -4 < 0$, que pelo exercício 12 nos dá $x^2 + 2x + 2 > 0$.

Logo devemos ter $1 - x < 0 \Rightarrow x > 1$.

(i) $\dfrac{2x-3}{x^2+1} > 0$

Estudando o sinal da divisão, devemos ter as duas expressões com sinais iguais: $x^2 + 1$ tem $a = 1 > 0$ e $\Delta = 0 - 4.1.1 = -4 < 0$, que pelo exercício 12 nos dá $x^2 + 1 > 0$.

Portanto devemos ter $2x - 3 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{3}{2}$.

(j) $\dfrac{x}{x^2+x+1} \geq 0$

Estudando o sinal da divisão, devemos ter as duas expressões com sinais iguais ou $x = 0$:

x^2+x+1 tem $a = 1 > 0$ e $\Delta = 1 - 4.1.1 = -3 < 0$, que pelo exercício 12 nos dá $x^2 + x + 1 > 0$.

Portanto devemos ter $x \geq 0$

14. Primeiramente observa-se o fato de $x^2 + 1$ ser sempre positivo, portanto ao multiplicarmos ambos os lados da expressão $\dfrac{5x+3}{x^2+1} \geq 5$ por $x^2 + 1$ a direção da desigualdade não se altera:

$$\frac{5x+3}{x^2+1} \geq 5 \Rightarrow \frac{5x+3}{x^2+1}.(x^2+1) \geq 5(x^2+1) \Rightarrow 5x+3 \geq 5(x^2+1).$$

Por outro lado dividimos $5x + 3 \geq 5(x^2 + 1)$ por $x^2 + 1$ e temos:

$$\frac{5x+3}{x^2+1} \geq 5\frac{(x^2+1)}{(x^2+1)} \Rightarrow \frac{5x+3}{x^2+1} \geq 5.$$

17. (d) $2x^3 - x^2 - 1 = 0$

1 e -1 são os divisores de $a_3 = -1$, testando os dois valores na equação temos 1 como raiz inteira da equação.

(e) $x^3 + x^2 + x - 14 = 0$

Os divisores inteiros de $a_4 - 14$ são ±1, ±2, ±7 e ±14.

Testando as 8 possibilidades temos:

$1^3 + 1^2 + 1 - 14 = -11$

$-1^3 + (-1)^2 - 1 - 14 = -15$

$2^3 + 2^2 + 2 - 14 = 0$, logo 2 é raiz.

$-2^3 + (-2)^2 - 2 - 14 = -12$

$7^3 + 7^2 + 7 - 14 = 385$

$-7^3 + (-7)^2 - 7 - 14 = -315$

$14^3 + 14^2 + 14 - 14 = 2940$

$-14^3 + (-14)^2 - 14 - 14 = -2576$

A única raiz inteira encontrada é 2.

(f) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

Os divisores inteiros de $a_4 - 12$ são ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6 e ± 12.

Testando as 12 possibilidades temos:

$1^3 + 3(1)^2 - 4(1) - 12 = -12$

$-1^3 + 3(-1)^2 - 4(-1) - 12 = -6$

$2^3 + 3(2)^2 - 4(2) - 12 = 0$, logo 2 é raiz

$-2^3 + 3(-2)^2 - 4(-2) - 12 = 0$, logo -2 é raiz.

$3^3 + 3(3)^2 - 4(3) - 12 = 30$

$-3^3 + 3(-3)^2 - 4(-3) - 12 = 0$, logo -3 é raiz.

$4^3 + 3(4)^2 - 4(4) - 12 = 84$

$-4^3 + 3(-4)^2 - 4(-4) - 12 = -12$

$6^3 + 3(6)^2 - 4(6) - 12 = 288$

$-6^3 + 3(-6)^2 - 4(-6) - 12 = -96$

$12^3 + 3(12)^2 - 4(12) - 12 = 2100$

$-12^3 + 3(-12)^2 - 4(-12) - 12 = -1260$

As raízes inteiras são 2, -2 e -3.

19. (a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

1	1	2	-1	-2
	1	3	2	0

$(x^2 + 3x + 2)(x - 1)$

-2	1	3	2
	1	1	0

$(x-1)(x+1)(x+2)$.

(b) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$

-1	1	-3	1	3	-2
	1	-4	5	-2	0

$(x^3 - 4x^2 + 5x - 2)(x+1)$

1	1	-4	5	-2
	1	-3	2	0

$(x+1)(x-1)(x^2 - 3x + 2)$

1	1	-3	2
	1	-2	0

$(x+1)(x-1)^2(x-2)$.

(c) $x^3 + 2x^2 - 3x$

$(x^2 + 2x - 3)x$

1	1	2	-3
	1	3	0

$(x+3)(x-1)x$.

(d) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

-2	1	3	-4	-12
	1	1	-6	0

$(x^2+x-6)(x+2)$

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

$(x+3)(x-2)(x+2)$.

(e) $x^3+6x^2+11x+6$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 6 & 11 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

$(x^2+5x+6)(x+1)$

$$\begin{array}{r|rrr} -2 & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

$(x+2)(x+1)(x+3)$.

(f) x^3-1

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$(x^2+x+1)(x-1)$

20. (a) $x^3-1>0$

$x^3>1 \Rightarrow x>1$

(b) $x^3+6x^2+11x+6<0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 6 & 11 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

$(x+1)(x^2+5x+6)<0$

$$\begin{array}{r|rrr} -2 & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

$(x+1)(x+2)(x+3) < 0$

Basta estudarmos o sinal da última inequação, onde deveremos ter um número ímpar de elementos do produto negativos:

Com $x < -3$, $x < -2$ e $x < -1$ temos $x < -3$.

Nos casos com apenas um elemento negativo:

- $(x+1) < 0$ nos dá $x < -1$ e devemos ter $x > -2, x > -3$, o que nos dá $x > -2$.

  $(x+2) < 0$ nos dá $x < -2$ e devemos ter $x > -1, x > -3$, o que nao é possível.

- $(x+3) < 0$ nos dá $x < -3$ e devemos ter $x > -1, x > -2$, mas não existe tal combinação.

Finalmente temos a outra solução da inequação:

$-2 < x < -1$.

É possível, e até mais prático, estudar os sinais acima graficamente.

(c) $x^3 + 3x - 4x - 12 \geq 0 \Rightarrow x(x-1)(x+3) < 0$

Estudamos a seguir o sinal da inequação $x(x-1)(x+3) < 0$, devemos ter um número ímpoar de elementos do produto negativos:

Com $x < 0$, $x-1 < 0 \Rightarrow x < 1$ e $x+3 < 0 \Rightarrow x < -3$, temos $x < -3$.

Nos casos com apenas um elemento negativo:

- Com $x < 0$ devemos ter $x - 1 > 0$ e $x + 3 > 0$, portanto respectivamente $x > 1$ e $x > -3$, mas não existe tal combinação.

- $x - 1 < 0$ nos dá $x < 1$ e devemos ter $x > 0$ e $x > -3$, o que resulta em $0 < x < 1$

- $x + 3 < 0$ nos dá $x < -3$ e devemos ter $x > 0$ e $x > 1$, mas não é possível tal combinação.

As solução é $x < -3$ ou $0 < x < 1$.

(d) $x^3 + 2x^2 - 3x < 0$

21. Falsa. Para explicar basta darmos um contra-exemplo:

    Se $x = -1$ e $y = 0$, temos $x < y$, mas não $x^2 < y^2$, pois daí teríamos $1 < 0$, o que contradiz nossa proposição.

22. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

    Se x e y têm o mesmo sinal, temos $(x^2 + xy + y^2) > 0$.

    Portanto devemos estudar o que ocorre quando $x - y < 0$, com a condição de x e y terem o mesmo sinal.

    Se $x > 0$ e $y > 0$ temos $x - y < 0 \Rightarrow x < y$.

    No caso de $x < 0$ e $y < 0$ temos, de forma similar, $x - y < 0 \Rightarrow x < y$.

    Já quando ocorrem sinais opostos para x e y, temos apenas da avaliar o caso em que $x < 0$ e $y > 0$.

    Temos então:

    $x^3 < 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x < 0$ (a ordem da desigualdade vai sendo trocada em cada produto pelo inverso) e

    $y^3 > 0 \Rightarrow y^2 > 0 \Rightarrow y > 0$ (a ordem permanece intacta em cada produto pelo inverso).

    Finalmente pela lei da transitividade temos $x < 0$ e $0 < y \Rightarrow x < y$.

    Por outro lado:

    $x < y \Rightarrow x - y < 0$

    $x > 0$ e $y > 0 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 > 0$ e

    $x < 0$ e $y < 0 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 > 0$

    Multiplicando-se os dois lados da inequação $x - y < 0$ por $x^2 + xy + y^2$ conserva a ordem da desigualdade:

    $(x - y)(x^2 + xy + y^2) < 0 \Rightarrow x^3 - y^3 < 0 \Rightarrow x^3 < y^3$.

    Caso tenhamos x e y com sinais diferentes, pegamos apenas o caso em que

$x < 0$ e $y > 0$, pois o contrário não existe para $x < y$.

Temos então:

$x < 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x^3 < 0$ (a ordem da desigualdade vai sendo trocada em cada produto) e

$y > 0 \Rightarrow y^2 > 0 \Rightarrow y^3 > 0$ (a ordem permanece intacta em cada produto).

Finalmente pela lei da transitividade temos $x^3 < 0$ e $0 < y^3 \Rightarrow x^3 < y^3$.

23. (a) $x.0 = x(0)$, (A1)

$x(0) = x(z + (-z))$, (A4)

$x(z + (-z)) = xz - xz$, (D)

$xz - xz = xz + (-xz)$, (A1)

Finalmente temos: $xz + (-xz) = 0$, (A4).

(b) Para o primeiro caso:

$x + (-x) = 0$, (A4)

$y(x + (-x)) = y.0$, combinando (O2) com (OM)

$yx + y(-x) = 0$, (D) e (a) acima

$xy + (-x)y = 0$, (M2)

$xy + (-x)y + (-xy) = -xy$, combinando (O2) com (OA)

$(-x)y + xy + (-xy) = -xy$, (A2)

$(-x)y = -xy$, (A3)

No segundo caso:

$y + (-y) = 0$, (A4)

$x(y + (-y)) = x.0$, combinando (O2) com (OM)

$xy + x(-y) = 0$, (D) e (a) acima

$xy + x(-y) + (-xy) = -xy$, combinando (O2) com (OA)

$x(-y) + xy + (-xy) = -xy$, (A2)

$x(-y) = -xy$, (A3)

No terceiro:

$(-x) + x = 0$, (A4) e (A2)

$(-y)((-x) + x) = (-y).0$, combinando (O2) com (OM)

$(-y)(-x) + (-y)x = 0$, (D) e (a) acima

$(-x)(-y) + x(-y)$, (M2)

$(-x)(-y) + x(-y) + xy = xy$, combinando (O2) com (OA)

$(-x)(-y) = xy$, (A4)

(c) $x \leq 0$ ou $0 \leq x$, (O4)

Se $x \leq 0$:

$x - (-x) \leq 0 + (-x)$, (OA)

$0 \leq -x$, (A4)

$(-x)0 \leq (-x)(-x)$, (OM)

Considerando o item (a) acima, temos:

$0 \leq x^2$.

Se $x \geq 0$:

$xx \geq x.0$, (OM)

Considerando o item (a) acima, temos:

$x^2 \geq 0$.

(d) $0 \leq 1$ e $0 \leq 1$ nos dá $0.1 \leq 1.1 = 1^2$, (OM)

Por (M3) $1.1 = 1$ com $1 \neq 0$

Logo temos $1^2 > 0$.

1.3 Módulo de um Número Real

1. (a) $|-5| + |-2| = -(-5) - (-2) = 5 + 2 = 7$.

   (b) $|-5 + 8| = |3| = 3$.

   (c) $|-a| = -(-a) = a$.

2. (a) $|x| = 2$

   $x = 2$ ou $x = -2$.

(b) $|x+1| = 3$ $x+1 > 0 \Rightarrow x+1 = 3 \Rightarrow x = 2$

$x+1 \leq 0 \Rightarrow -(x+1) = 3 \Rightarrow x+1 = -3 \Rightarrow x = -4.$

(c) $|2x-1| = 1$

$2x-1 > 0 \Rightarrow 2x-1 = 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$

$2x-1 \leq 0 \Rightarrow -(2x-1) = 1 \Rightarrow 2x-1 = -1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$

3. (a) $|x| \leq 1$

$x > 0 \Rightarrow x \leq 1$

$x \leq 0 \Rightarrow -x \leq 1 \Rightarrow x \geq -1$

$-1 \leq x \leq 1$

(b) $|2x-1| < 3$

$2x-1 > 0 \Rightarrow 2x-1 < 3 \Rightarrow 2x < 4 \Rightarrow x < 2$

$2x-1 < 0 \Rightarrow -(2x-1) < 3 \Rightarrow 2x-1 > -3 \Rightarrow 2x > -2 \Rightarrow x > -1$

$-1 < x < 2$

(c) $|2x-1| < -2$, não admite solução pois o módulo de um número real é sempre positivo ou igual à 0.

(d) $|2x-1| < \frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3} < 2x-1 < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3}+1 < 3x < \frac{1}{3}+1 \Rightarrow$

$\frac{2}{3} < 3x < \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2}{9} < x < \frac{4}{9}.$

(e) $|2x^2-1| < 1$

$|2x^2-1| > 0 \Rightarrow 2x^2-1 < 1 \Rightarrow 2x^2 < 2 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow x < 1$ ou $x > -1$ com $x \neq 0$. $|2x^2-1| \leq 0 \Rightarrow 2x^2-1 > -1 \Rightarrow 2x^2 > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$

$-1 < x < 1,\ x \neq 0.$

(f) $|x-3| < 4$

$-4 < x-3 < 4 \Rightarrow -1 < x < 7.$

(g) $|x| > 3$

$x > 0 \Rightarrow x > 3$

$x \leq 0 \Rightarrow -x > 3 \Rightarrow x < -3$

$x < -3$ ou $x > 3$.

4. Dado $r > 0$, provar:

   $|x| > r \Leftrightarrow x < -r$ ou $x > r$

   $x > 0 \Rightarrow x > r$

   $x \leq 0 \Rightarrow -x > r \Rightarrow x < -r$

   Logo $|x| > r \Rightarrow x < -r$ ou $x > r$.

   Por outro lado:

   $x > r$ com $r > 0 \Rightarrow x^2 > r^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{r^2} \Rightarrow |x| > r$.

   No caso de $x < -r$ com $r > 0$ temos:

   $x < -r$ com $x < 0 \Rightarrow -x > r \Rightarrow (-x)^2 > r^2 \Rightarrow \sqrt{(-x)^2} > \sqrt{r^2} \Rightarrow |x| > r$.

5. (a) $|x+1| + |x|$

   Devemos averiguar as quatro combinações de sinais para as duas expressões nos módulos:

   Para $x + 1 > 0$ e $x > 0$, temos $x > -1$ e $x > 0$, ou seja, $x > 0$:

   $x + 1 + x = 2x + 1$

   Para $x + 1 > 0$ e $x \leq 0$, temos $x > -1$ e $x \leq 0$, ou seja, $-1 < x \leq 0$:

   $x + 1 - x = 1$

   Para $x + 1 \leq 0$ e $x > 0$, temos $x < -1$ e $x > 0$, que não é possível.

   Para $x + 1 \leq 0$ e $x \leq 0$, temos $x \leq -1$ e $x \leq 0$, ou seja, $x \leq -1$:

   $-(x + 1) - x = -2x - 1$

   Logo a solução é:

$$|x+1| + |x| = \begin{cases} -2x - 1, & \text{se } x \leq -1 \\ 1, & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ 2x + 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

   (b) $|x-2| - |x+1|$

Para $x-2>0$ e $x+1>0$, temos $x>2$ e $x>-1$, ou seja, $x>2$:

$x-2-x-1=-3$

Para $x-2>0$ e $x+1\leq 0$, não é possível haver $x>2$ e $x<-1$.

Para $x-2\leq 0$ e $x+1>0$, temos $x\leq 2$ e $x>-1$, ou seja, $-1<x\leq 2$:

$-(x-2)-(x+1)=-x+2-x-1=-2x+1$

Para $x-2\leq 0$ e $x+1\leq 0$, temos $x\leq 2$ e $x\leq -1$, ou seja, $x\leq -1$:

$-(x-2)-[-(x+1)]=-x+2+x+1=3$

Logo a solução é:

$$|x-2|-|x+1|=\begin{cases} 3, & \text{se } x\leq -1 \\ -2x+1, & \text{se } -1<x\leq 2 \\ -3, & \text{se } x>2 \end{cases}$$