

Soluções - Guidorizzi - Volume 1

Leonardo

March 23, 2017

Chapter 1

Números Reais

1.1 Os Números Racionais

1.2 Os Números Reais

Utilizamos nos exercícios a seguir o algoritmo de Briot-Ruffini.

1. (d) $x + 3 \leq 6x - 2 \Rightarrow -5x \leq -5 \Rightarrow x \geq 1$.
(e) $1 - 3x > 0 \Rightarrow -3x > -1 \Rightarrow 3x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$.
(f) $2x + 1 \geq 3x \Rightarrow -x \geq -1 \Rightarrow x \leq 1$.
2. (i) $(2x - 1)(3 - 2x)$
 $2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$
 $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$
 $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
 $3 - 2x < 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$
 $3 - 2x > 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$

$$3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$(2x - 1)(3 - 2x) > 0 \text{ para } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

$$(2x - 1)(3 - 2x) < 0 \text{ para } x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{3}{2}$$

$$(2x - 1)(3 - 2x) > 0 \text{ para } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

$$(2x - 1)(3 - 2x) < 0 \text{ para } x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{3}{2}$$

$$(j) \quad x(x - 3)$$

$$x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$$

$$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$x(x - 3) < 0 \text{ para } 0 < x < 3$$

$$x(x - 3) > 0 \text{ para } x < 0 \text{ ou } x > 3$$

$$x(x - 3) \text{ para } x = 0 \text{ ou } x = 3.$$

$$(l) \quad x(x - 1)(2x + 3)$$

$$x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1$$

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$2x + 3 < 0 \Rightarrow x < -\frac{3}{2}$$

$$2x + 3 > 0 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}$$

$$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$x(x - 1)(2x + 3) > 0 \text{ para } -\frac{3}{2} < x < 0 \text{ ou para } x > 1$$

$$x(x - 1)(2x + 3) < 0 \text{ para } x < -\frac{3}{2} \text{ ou para } 0 < x < 1$$

$$x(x - 1)(2x + 3) = 0 \text{ para } x = 0 \text{ ou } x = -\frac{3}{2} \text{ ou } x = 1.$$

$$(m) \quad (x-1)(1+x)(2-3x)$$

$$x-1 < 0 \Rightarrow x < 1$$

$$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$1+x < 0 \Rightarrow x < -1$$

$$1+x > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$1+x = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$2-3x < 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$$

$$2-3x > 0 \Rightarrow x < \frac{2}{3}$$

$$2-3x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$(x-1)(1+x)(2-3x) > 0 \text{ para } x < -1 \text{ ou } \frac{2}{3} < x < 1$$

$$(x-1)(1+x)(2-3x) < 0 \text{ para } -1 < x < \frac{2}{3} \text{ ou } x > 1$$

$$(x-1)(1+x)(2-3x) = 0 \text{ para } x = 1 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = \frac{2}{3}.$$

$$(n) \quad x(x^2+3)$$

$$x^2+3 < 0 \Rightarrow x^2 < -3, \text{ não é possível.}$$

$$x^2+3 > 0 \text{ para qualquer } x$$

Logo temos:

$$x(x^2+3) > 0 \text{ para } x > 0$$

$$x(x^2+3) < 0 \text{ para } x < 0$$

$$x(x^2+3) = 0 \text{ para } x = 0$$

$$\begin{aligned} 3. \quad (h) \quad \frac{2x-1}{x-3} > 5 &\Rightarrow \frac{2x-1}{x-3} > \frac{5(x-3)}{x-3} \Rightarrow \\ \frac{2x-1-5(x-3)}{x-3} > 0 &\Rightarrow \frac{2x-1-5x+15}{x-3} > 0 \Rightarrow \\ \frac{-3x+14}{x-3} > 0 &\Rightarrow \frac{3x+14}{x-3} < 0 \\ 3x+14 > 0 &\Rightarrow x > \frac{14}{3} \end{aligned}$$

$$3x + 14 < 0 \Rightarrow x < \frac{14}{3}$$

$$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

$$x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$$

Devemos ter o denominador e numerador com sinais opostos, assim temos a solução:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < \frac{14}{3}\}.$$

$$(i) \quad \frac{x}{2x-3} \leq 3 \Rightarrow \frac{x}{2x-3} \leq \frac{3(2x-3)}{2x-3} \Rightarrow$$

$$\frac{x-3(2x-3)}{2x-3} \leq 0 \Rightarrow \frac{x-6x+9}{2x-3} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{-5x+9}{2x-3} \leq 0 \Rightarrow \frac{5x-9}{2x-3} \geq 0$$

$$5x-9 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{9}{5}$$

$$5x-9 < 0 \Rightarrow x < \frac{9}{5}$$

$$2x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

$$2x-3 < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

$$\frac{5x-9}{2x-3} \geq 0 \text{ quando os sinais do denominador e numerador são iguais:}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{3}{2} \text{ ou } x \geq \frac{9}{5}\}.$$

$$(j) \quad \frac{x-1}{2-x} < 1 \Rightarrow \frac{x-1}{2-x} < \frac{2-x}{2-x} \Rightarrow$$

$$\frac{x-1-2+x}{2-x} < 0 \Rightarrow \frac{2x-3}{2-x} < 0$$

$$2x-3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$$

$$2x-3 < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

$$2-x > 0 \Rightarrow x < 2$$

$$2-x < 0 \Rightarrow x > 2$$

$$\frac{2x-3}{2-x} < 0 \text{ quando os sinais do denominador e numerador são diferentes:}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{3}{2} \text{ ou } x > 2\}.$$

$$(l) \quad x(2x - 1)(x + 1) > 0$$

$$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$$

Os valores para que tenhamos $x(2x - 1)(x + 1) > 0$:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x > \frac{1}{2}\}.$$

$$(m) \quad (2x - 1)(x - 3) > 0$$

$$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

$$x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$$

Devemos ter os sinais dos fatores iguais em $(2x - 1)(x - 3) > 0$:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 3\}.$$

$$(n) \quad (2x - 3)(x^2 + 1) < 0$$

$$x^2 + 1 > 0 \text{ para qualquer } x.$$

$$\text{Devemos ter } 2x - 3 < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}:$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{3}{2}\}.$$

$$(o) \quad \frac{x - 3}{x^2 + 1} < 0$$

$$x^2 + 1 > 0 \text{ para qualquer } x.$$

$$\text{Devemos ter } x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3:$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}.$$

$$4. \quad x^3 + 0x^2 + 0x - a^3 \div \lfloor x - a:$$

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r}
x^3 + 0x^2 + 0x - a^3 \\
- \quad x^3 - ax^2 \\
\hline
 ax^2 + 0x - a^3 \\
- \quad ax^2 - a^2x \\
\hline
 a^2x - a^3 \\
- \quad a^2x - a^3 \\
\hline
0
\end{array}
&
\begin{array}{l}
x - a \\
\hline
x^2 + ax + a^2
\end{array}
\end{array}$$

5. (c) $(x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3) =$
 $x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^2x^3 - ax^3 - a^2x^2 - a^3x - a^4 =$
 $x^4 - a^4$
- (d) $(x - a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4) =$
 $x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x - ax^4 - a^2x^3 - a^3x^2 - a^4x - a^5 =$
 $x^5 - a^5$
- (e) $(x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}) =$
 $x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \dots + a^{n-2}x^2 + a^{n-1}x$
 $- ax^{n-1} - a^2x^{n-2} - a^3x^{n-3} - \dots - a^{n-1}x - a^n =$
 $x^n - a^n$

6. (h) $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{p}}{x - p} = \frac{\frac{p - x}{xp}}{x - p} = \frac{p - x}{(x - p)xp} = -\frac{1}{xp}.$

(i) $\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{p^2}}{x - p} = \frac{\frac{p^2 - x^2}{x^2p^2}}{x - p} = \frac{p^2 - x^2}{x^2p^2(x - p)} = \frac{(p - x)(p + x)}{-x^2p^2(p - x)} = -\frac{x + p}{x^2p^2}.$

(k) $\frac{x^4 - p^4}{x - p} = \frac{(x - p)(x^3 + px^2 + p^2x + p^3)}{(x - p)} = x^3 + px^2 + p^2x + p^3$

(l) $\frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} =$
 $\frac{2hx + h^2}{h} = \frac{h(2x + h)}{h} = 2x + h$

$$(m) \quad \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{x(x+h)h} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

$$(n) \quad \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - x^3}{h} = \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

$$(o) \quad \frac{(x+h)^2 - (x-h)^2}{h} = \frac{(x^2 + 2hx + h^2) - (x^2 - 2hx + h^2)}{h} = \frac{4hx}{h} = 4x$$

$$7. \quad (f) \quad \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} > 0 \Rightarrow \frac{(x+2)(x-2)}{x^2 + 4} > 0$$

O denominador será sempre positivo, devemos analisar o sinal do numerador $(x+2)(x-2)$:

$$x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

$$x+2 < 0 \Rightarrow x < -2$$

$$x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

$$x-2 < 0 \Rightarrow x < 2$$

O numerador deve ser positivo, portanto os fatores do produto devem ter o mesmo sinal, temos isso quando $x < -2$ ou $x > 2$.

$$(g) \quad (2x-1)(x^2-4) \leq 0 \Rightarrow (2x-1)(x+2)(x-2) \leq 0$$

O produto deve ter seus fatores todos negativos ou ao menos um deles com valor 0 ou, finalmente, dois positivos e um negativo. Temos então os sinais de cada expressão:

$$2x-1 \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

$$2x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$x+2 \leq 0 \Rightarrow x \leq -2$$

$$x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

$$x-2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

$$x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

Para termos $(2x-1)(x^2-4) = 0$, basta termos $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -2$ ou

$$x = 2.$$

Para termos $(2x - 1)(x^2 - 4) < 0$, com os três fatores acima mencionados negativos, devemos ter $x < -2$.

Finalmente para termos $(2x - 1)(x^2 - 4) < 0$, com dois fatores positivos e um negativo. Analisando a seguir todas as possibilidades:

$$x < \frac{1}{2} \text{ e } x > -2 \text{ e } x > 2 \text{ não é possível.}$$

$$x > \frac{1}{2} \text{ e } x < -2 \text{ e } x > 2 \text{ não é possível.}$$

$$x > \frac{1}{2} \text{ e } x > -2 \text{ e } x < 2 \text{ nos dá } \frac{1}{2} < x < 2.$$

$$\text{Logo as soluções são } x \leq -2 \text{ ou } \frac{1}{2} \leq x \leq 2.$$

$$(h) \quad 3x^2 \geq 48 \Rightarrow x^2 \geq 16 \Rightarrow (x - 4)(x + 4) \geq 0$$

Estudando o sinal do produto, devemos ter as duas expressões com mesmo sinal ou alguma delas com valor zero:

$$x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$$

$$x - 5 < 0 \Rightarrow x < 4$$

$$x + 5 > 0 \Rightarrow x > -4$$

$$x + 5 < 0 \Rightarrow x < -4$$

Devemos ter:

$$x > 4 \text{ e } x > -4, \text{ que nos dá } x > 4.$$

ou

$$x < 4 \text{ e } x < -4 \text{ que nos dá } x < -4.$$

A solução portanto é ou $x \leq -4$ ou $x \geq 4$

$$(i) \quad x^2 < r^2 \Rightarrow (x - r)(x + r) < 0 \text{ Estudando o sinal do produto, devemos ter as duas expressões com sinais opostos:}$$

$$x - r > 0 \Rightarrow x > r$$

$$x - r < 0 \Rightarrow x < r$$

$$x + r > 0 \Rightarrow x > -r$$

$$x + r < 0 \Rightarrow x < -r$$

Devemos ter:

$x > r$ e $x < -r$, que é impossível.

ou

$x < r$ e $x > -r$ que nos dá $-r < x < r$.

- (j) $x^2 \geq r^2 \Rightarrow (x-r)(x+r) \geq 0$ Estudando o sinal do produto, devemos ter as duas expressões com mesmo sinal ou alguma delas com valor zero:

$$x - r > 0 \Rightarrow x > r$$

$$x - r < 0 \Rightarrow x < r$$

$$x + r > 0 \Rightarrow x > -r$$

$$x + r < 0 \Rightarrow x < -r$$

Devemos ter:

$x > r$ e $x > -r$, que nos dá $x > r$.

ou

$x < r$ e $x < -r$ que nos dá $x < -r$.

A solução portanto é ou $x \leq -r$ ou $x \geq r$

$$\begin{aligned}
 8. \quad (a) \quad & a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2} \right] = a \left[x^2 + \frac{2xb}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 + 4ac}{4a^2} \right] = \\
 & = \boxed{ax^2 + bx + c} \\
 (b) \quad & a \left[\left(\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a \left[\left(\pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = \\
 & = a \left[\frac{\Delta}{4a^2} - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a \cdot 0 = \boxed{0} \\
 (c) \quad & x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{(-b - \sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \\
 & = \frac{-2b}{2a} = \boxed{\frac{-b}{a}} \\
 & x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{(-b - \sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \boxed{\frac{c}{a}}
 \end{aligned}$$

$$9. \quad a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2) =$$

$$= a[x^2 - x(x_2 + x_1) + x_1x_2] = a \left[x^2 - x \left(\frac{-b}{a} \right) + \frac{c}{a} \right] =$$

$$= \boxed{ax^2 + bx + c}$$

10. (f) $2x^2 - 3x + 1 = 2(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}) = 2(x-1)(x - \frac{1}{2}) = \boxed{(x-1)(2x-1)}$

(g) $x^2 - 25$

$$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$$

$$x_1x_2 = -25 \Rightarrow (-x_1)x_1 = -25 \Rightarrow x_1^2 = 25 \Rightarrow x_1 = 5 \text{ e } x_2 = -5$$

$$\boxed{(x-5)(x+5)}$$

(h) $3x^2 + x - 2 = 3(x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}) = 3(x+1)(x - \frac{2}{3}) = \boxed{(x+1)(3x-2)}$

(i) $4x^2 - 9$ $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$

$$x_1x_2 = -\frac{9}{4} \Rightarrow (-x_1)x_1 = -\frac{9}{4} \Rightarrow x_1^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} \text{ e } x_2 = -\frac{3}{2}$$

$$4(x + \frac{3}{2})(x - \frac{3}{2}) = \boxed{(2x+3)(2x-3)}$$

(j) $2x^2 - 5x$

$$x_1x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{5}{2}$$

$$2x(x - \frac{5}{2}) = \boxed{x(2x-5)}$$

11. (f) $x_1 + x_2 = -\frac{1}{3}$ e $x_1x_2 = -\frac{2}{3}$

$$x_1 = \frac{2}{3} \text{ e } x_2 = -1$$

$$3x^2 + x - 2 > 0 \Rightarrow 3(x+1)(x - \frac{2}{3}) > 0 \Rightarrow (x+1)(x - \frac{2}{3}) > 0$$

Temos os seguintes sinais para cada fator do produto:

$$x+1 > 0 \text{ quando } x > -1$$

$$x+1 > 0 \text{ quando } x < -1$$

$$x - \frac{2}{3} > 0 \text{ quando } x > \frac{2}{3}$$

$$x - \frac{2}{3} < 0 \text{ quando } x < \frac{2}{3}$$

Para termos $(x+1)(x - \frac{2}{3}) > 0$, os fatores devem possuir o mesmo

signal:

$$x > \frac{2}{3} \text{ ou } x < -1$$

(g) $x_1 + x_2 = 4$ e $x_1 x_2 = 4$

$$x_1 = x_2 = 2$$

$$x^2 - 4x + 4 > 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 2) > 0 \Rightarrow (x - 2)^2 > 0$$

A equação é sempre positiva, exceto em $x = 2$.

A solução é $x \neq 2$.

(h) $x_1 + x_2 = \frac{1}{3}$ e $x_1 x_2 = 0$

$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$3x^2 - x \leq 0 \Rightarrow 3x(x - \frac{1}{3}) \leq 0 \Rightarrow x(x - \frac{1}{3}) \leq 0$$

Temos os seguintes sinais para cada fator do produto:

$$x - \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$$

$$x - \frac{1}{3} \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{3}$$

$$x > 0 \text{ ou } x \leq 0$$

Para termos $x(x - \frac{1}{3}) \leq 0$, os fatores devem possuir sinais opostos

$$\text{ou } x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{3}:$$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{3}$$

(i) $x_1 + x_2 = 1$ e $x_1 x_2 = \frac{1}{4}$

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$$

$$4x^2 - 4x + 1 < 0 \Rightarrow 4(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 < 0$$

A desigualdade não é possível para nenhum x .

(j) $x_1 + x_2 = 1$ e $x_1 x_2 = \frac{1}{4}$

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$$

$$4x^2 - 4x + 1 \leq 0 \Rightarrow 4(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) \leq 0 \Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 \leq 0$$

A inequação somente é possível para $x = \frac{1}{2}$.

12. (a) Por 8. a) temos:

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Observando o produto, do lado direito temos $a > 0$ e a expressão entre colchetes é positiva sempre, pois temos um termo elevado ao quadrado e no outro, $\frac{\Delta}{4a^2}$, temos $\Delta < 0$, porém precedido por um sinal negativo, e dividido por $4a^2$ que é positivo, conclui-se então que esse fator também é positivo e por consequência $ax^2 + bx + c > 0$.

- (b) O raciocínio é similar ao item anterior, exceto que agora temos $a < 0$ e portanto o produto $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ é negativo, o que nos dá $ax^2 + bx + c < 0$.

13. (f) $(2x + 1)(x^2 + x + 1) \leq 0$

Estudando o sinal do produto, devemos ter as duas expressões com sinais opostos ou algum fator ser 0::

$$2x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

$$2x + 1 < 0 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{2}$$

De acordo com o exercício 12 acima, $x^2 + x + 1 > 0$, pois $\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$.

Logo $(2x + 1)(x^2 + x + 1) \leq 0$ quando $x \leq -\frac{1}{2}$.

- (g) $x(x^2 + 1) \geq 0$

Estudando o sinal do produto, devemos ter as duas expressões com sinais iguais ou algum fator ser 0:

$x^2 + 1$ tem $a = 1 > 0$ e $\Delta = 0 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0$, que pelo exercício 12 nos dá $x^2 + 1 > 0$.

Logo devemos ter $x \geq 0$.

- (h) $(1 - x)(x^2 + 2x + 2) < 0$

Estudando o sinal do produto, devemos ter as duas expressões com sinais opostos:

$x^2 + 2x + 2$ tem $a = 1 > 0$ e $\Delta = 4 - 4.1.2 = -4 < 0$, que pelo exercício 12 nos dá $x^2 + 2x + 2 > 0$.

Logo devemos ter $1 - x < 0 \Rightarrow x > 1$.

$$(i) \frac{2x - 3}{x^2 + 1} > 0$$

Estudando o sinal da divisão, devemos ter as duas expressões com sinais iguais: $x^2 + 1$ tem $a = 1 > 0$ e $\Delta = 0 - 4.1.1 = -4 < 0$, que pelo exercício 12 nos dá $x^2 + 1 > 0$.

Portanto devemos ter $2x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$.

$$(j) \frac{x}{x^2 + x + 1} \geq 0$$

Estudando o sinal da divisão, devemos ter as duas expressões com sinais iguais ou $x = 0$:

$x^2 + x + 1$ tem $a = 1 > 0$ e $\Delta = 1 - 4.1.1 = -3 < 0$, que pelo exercício 12 nos dá $x^2 + x + 1 > 0$.

Portanto devemos ter $x \geq 0$

14. Primeiramente observa-se o fato de $x^2 + 1$ ser sempre positivo, portanto ao multiplicarmos ambos os lados da expressão $\frac{5x + 3}{x^2 + 1} \geq 5$ por $x^2 + 1$ a direção da desigualdade não se altera:

$$\frac{5x + 3}{x^2 + 1} \geq 5 \Rightarrow \frac{5x + 3}{x^2 + 1} \cdot (x^2 + 1) \geq 5(x^2 + 1) \Rightarrow 5x + 3 \geq 5(x^2 + 1).$$

Por outro lado dividimos $5x + 3 \geq 5(x^2 + 1)$ por $x^2 + 1$ e temos:

$$\frac{5x + 3}{x^2 + 1} \geq 5 \frac{(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)} \Rightarrow \frac{5x + 3}{x^2 + 1} \geq 5.$$

17. (d) $2x^3 - x^2 - 1 = 0$

1 e -1 são os divisores de $a_3 = -1$, testando os dois valores na equação temos 1 como raiz inteira da equação.

$$(e) x^3 + x^2 + x - 14 = 0$$

Os divisores inteiros de $a_4 - 14$ são $\pm 1, \pm 2, \pm 7$ e ± 14 .

Testando as 8 possibilidades temos:

$$1^3 + 1^2 + 1 - 14 = -11$$

$$-1^3 + (-1)^2 - 1 - 14 = -15$$

$$2^3 + 2^2 + 2 - 14 = 0, \text{ logo } 2 \text{ é raiz.}$$

$$-2^3 + (-2)^2 - 2 - 14 = -12$$

$$7^3 + 7^2 + 7 - 14 = 385$$

$$-7^3 + (-7)^2 - 7 - 14 = -315$$

$$14^3 + 14^2 + 14 - 14 = 2940$$

$$-14^3 + (-14)^2 - 14 - 14 = -2576$$

A única raiz inteira encontrada é 2.

(f) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

Os divisores inteiros de $a_4 - 12$ são $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$ e ± 12 .

Testando as 12 possibilidades temos:

$$1^3 + 3(1)^2 - 4(1) - 12 = -12$$

$$-1^3 + 3(-1)^2 - 4(-1) - 12 = -6$$

$$2^3 + 3(2)^2 - 4(2) - 12 = 0, \text{ logo } 2 \text{ é raiz}$$

$$-2^3 + 3(-2)^2 - 4(-2) - 12 = 0, \text{ logo } -2 \text{ é raiz.}$$

$$3^3 + 3(3)^2 - 4(3) - 12 = 30$$

$$-3^3 + 3(-3)^2 - 4(-3) - 12 = 0, \text{ logo } -3 \text{ é raiz.}$$

$$4^3 + 3(4)^2 - 4(4) - 12 = 84$$

$$-4^3 + 3(-4)^2 - 4(-4) - 12 = -12$$

$$6^3 + 3(6)^2 - 4(6) - 12 = 288$$

$$-6^3 + 3(-6)^2 - 4(-6) - 12 = -96$$

$$12^3 + 3(12)^2 - 4(12) - 12 = 2100$$

$$-12^3 + 3(-12)^2 - 4(-12) - 12 = -1260$$

As raízes inteiras são 2, -2 e -3.

19. (a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

$$(x^2 + 3x + 2)(x - 1)$$

$$\begin{array}{c|ccc} -2 & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$(x-1)(x+1)(x+2).$$

(b) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & -3 & 1 & 3 & -2 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & -2 & 0 \end{array}$$

$$(x^3 - 4x^2 + 5x - 2)(x+1)$$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

$$(x+1)(x-1)(x^2 - 3x + 2)$$

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$(x+1)(x-1)^2(x-2).$$

(c) $x^3 + 2x^2 - 3x$

$$(x^2 + 2x - 3)x$$

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 2 & -3 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

$$(x+3)(x-1)x.$$

(d) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$(x^2 + x - 6)(x + 2)$$

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

$$(x + 3)(x - 2)(x + 2).$$

(e) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & 6 & 11 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$(x^2 + 5x + 6)(x + 1)$$

$$\begin{array}{c|ccc} -2 & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

$$(x + 2)(x + 1)(x + 3).$$

(f) $x^3 - 1$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$(x^2 + x + 1)(x - 1)$$

20. Podemos usar os resultados do exercício 19.

(a) $x^3 - 1 > 0$

$$x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1) > 0$$

Devemos ter ambos os fatores de $(x^2 + x + 1)(x - 1)$ com mesmo sinal:

Se $x - 1 > 0$, $x > 1$ e $x^2 + x + 1 > 0$, logo $x > 1$ é solução da inequação.

Caso $x - 1 < 0$, temos $x < 1$ e nesse caso $x^2 + x + 1 > 0$, o que nos dá $(x^2 + x + 1)(x - 1) < 0$, que não é solução da inequação.

A solução da inequação é $x > 1$.

$$(b) \quad x^3 + 6x^2 + 11x + 6 < 0 \quad (x+1)(x+2)(x+3) < 0$$

Basta estudarmos o sinal da última inequação, onde deveremos ter um número ímpar de elementos do produto negativos:

Com $x < -3$, $x < -2$ e $x < -1$ temos $x < -3$.

Nos casos com apenas um elemento negativo:

- $(x+1) < 0$ nos dá $x < -1$ e devemos ter $x > -2$, $x > -3$, o que nos dá $x > -2$.

$(x+2) < 0$ nos dá $x < -2$ e devemos ter $x > -1$, $x > -3$, o que não é possível.

- $(x+3) < 0$ nos dá $x < -3$ e devemos ter $x > -1$, $x > -2$, mas não existe tal combinação.

Finalmente temos a outra solução da inequação:

$$-2 < x < -1.$$

É possível, e até mais prático, estudar os sinais acima graficamente.

$$(c) \quad x^3 + 3x - 4x - 12 \geq 0 \\ (x-2)(x+2)(x+3) \geq 0$$

$$(d) \quad x^3 + 2x^2 - 3x < 0 \\ x(x-1)(x+3) < 0$$

Estudamos a seguir o sinal da inequação $x(x-1)(x+3) < 0$, devemos ter um número ímpar de elementos do produto negativos:

Com $x < 0$, $x-1 < 0 \Rightarrow x < 1$ e $x+3 < 0 \Rightarrow x < -3$, temos $x < -3$.

Nos casos com apenas um elemento negativo:

- Com $x < 0$ devemos ter $x-1 > 0$ e $x+3 > 0$, portanto respectivamente $x > 1$ e $x > -3$, mas não existe tal combinação.

- $x - 1 < 0$ nos dá $x < 1$ e devemos ter $x > 0$ e $x > -3$, o que resulta em $0 < x < 1$
- $x + 3 < 0$ nos dá $x < -3$ e devemos ter $x > 0$ e $x > 1$, mas não é possível tal combinação.

As solução da inequação é $x < -3$ ou $0 < x < 1$.

21. Falsa. Para explicar basta darmos um contra-exemplo:

Se $x = -1$ e $y = 0$, temos $x < y$, mas não $x^2 < y^2$, pois daí teríamos $1 < 0$, o que contradiz nossa proposição.

22. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

Se x e y têm o mesmo sinal, temos $(x^2 + xy + y^2) > 0$.

Portanto devemos estudar o que ocorre quando $x - y < 0$, com a condição de x e y terem o mesmo sinal.

Se $x > 0$ e $y > 0$ temos $x - y < 0 \Rightarrow x < y$.

No caso de $x < 0$ e $y < 0$ temos, de forma similar, $x - y < 0 \Rightarrow x < y$.

Já quando ocorrem sinais opostos para x e y , temos apenas de avaliar o caso em que $x < 0$ e $y > 0$.

Temos então:

$x^3 < 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x < 0$ (a ordem da desigualdade vai sendo trocada em cada produto pelo inverso) e

$y^3 > 0 \Rightarrow y^2 > 0 \Rightarrow y > 0$ (a ordem permanece intacta em cada produto pelo inverso).

Finalmente pela lei da transitividade temos $x < 0$ e $0 < y \Rightarrow x < y$.

Por outro lado:

$$x < y \Rightarrow x - y < 0$$

$$x > 0 \text{ e } y > 0 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 > 0 \text{ e}$$

$$x < 0 \text{ e } y < 0 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 > 0$$

Multiplicando-se os dois lados da inequação $x - y < 0$ por $x^2 + xy + y^2$

conserva a ordem da desigualdade:

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) < 0 \Rightarrow x^3 - y^3 < 0 \Rightarrow x^3 < y^3.$$

Caso tenhamos x e y com sinais diferentes, pegamos apenas o caso em que $x < 0$ e $y > 0$, pois o contrário não existe para $x < y$.

Temos então:

$x < 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x^3 < 0$ (a ordem da desigualdade vai sendo trocada em cada produto) e

$y > 0 \Rightarrow y^2 > 0 \Rightarrow y^3 > 0$ (a ordem permanece intacta em cada produto).

Finalmente pela lei da transitividade temos $x^3 < 0$ e $0 < y^3 \Rightarrow x^3 < y^3$.

23. (a) $x.0 = x(0)$, (A1)

$$x(0) = x(z + (-z)), \text{ (A4)}$$

$$x(z + (-z)) = xz - xz, \text{ (D)}$$

$$xz - xz = xz + (-xz), \text{ (A1)}$$

Finalmente temos: $xz + (-xz) = 0$, (A4).

(b) Para o primeiro caso:

$$x + (-x) = 0, \text{ (A4)}$$

$$y(x + (-x)) = y.0, \text{ combinando (O2) com (OM)}$$

$$yx + y(-x) = 0, \text{ (D) e (a) acima}$$

$$xy + (-x)y = 0, \text{ (M2)}$$

$$xy + (-x)y + (-xy) = -xy, \text{ combinando (O2) com (OA)}$$

$$(-x)y + xy + (-xy) = -xy, \text{ (A2)}$$

$$(-x)y = -xy, \text{ (A3)}$$

No segundo caso:

$$y + (-y) = 0, \text{ (A4)}$$

$$x(y + (-y)) = x.0, \text{ combinando (O2) com (OM)}$$

$$xy + x(-y) = 0, \text{ (D) e (a) acima}$$

$$xy + x(-y) + (-xy) = -xy, \text{ combinando (O2) com (OA)}$$

$$x(-y) + xy + (-xy) = -xy, \text{ (A2)}$$

$$x(-y) = -xy, \text{ (A3)}$$

No terceiro:

$$(-x) + x = 0, \text{ (A4) e (A2)}$$

$$(-y)((-x) + x) = (-y).0, \text{ combinando (O2) com (OM)}$$

$$(-y)(-x) + (-y)x = 0, \text{ (D) e (a) acima}$$

$$(-x)(-y) + x(-y), \text{ (M2)}$$

$$(-x)(-y) + x(-y) + xy = xy, \text{ combinando (O2) com (OA)}$$

$$(-x)(-y) = xy, \text{ (A4)}$$

$$(c) \ x \leq 0 \text{ ou } 0 \leq x, \text{ (O4)}$$

Se $x \leq 0$:

$$x - (-x) \leq 0 + (-x), \text{ (OA)}$$

$$0 \leq -x, \text{ (A4)}$$

$$(-x)0 \leq (-x)(-x), \text{ (OM)}$$

Considerando o item (a) acima, temos:

$$0 \leq x^2.$$

Se $x \geq 0$:

$$xx \geq x.0, \text{ (OM)}$$

Considerando o item (a) acima, temos:

$$x^2 \geq 0.$$

$$(d) \ 0 \leq 1 \text{ e } 0 \leq 1 \text{ nos dá } 0.1 \leq 1.1 = 1^2, \text{ (OM)}$$

$$\text{Por (M3) } 1.1 = 1 \text{ com } 1 \neq 0$$

$$\text{Logo temos } 1^2 > 0.$$

1.3 Módulo de um Número Real

$$1. \quad (a) \quad |-5| + |-2| = -(-5) - (-2) = 5 + 2 = 7.$$

$$(b) \quad |-5 + 8| = |3| = 3.$$

$$(c) \quad |-a| = -(-a) = a.$$

2. (a) $|x| = 2$

$$x = 2 \text{ ou } x = -2.$$

(b) $|x + 1| = 3 \quad x + 1 > 0 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$

$$x + 1 \leq 0 \Rightarrow -(x + 1) = 3 \Rightarrow x + 1 = -3 \Rightarrow x = -4.$$

(c) $|2x - 1| = 1$

$$2x - 1 > 0 \Rightarrow 2x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$2x - 1 \leq 0 \Rightarrow -(2x - 1) = 1 \Rightarrow 2x - 1 = -1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

3. (a) $|x| \leq 1$

$$x > 0 \Rightarrow x \leq 1$$

$$x \leq 0 \Rightarrow -x \leq 1 \Rightarrow x \geq -1$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

(b) $|2x - 1| < 3$

$$2x - 1 > 0 \Rightarrow 2x - 1 < 3 \Rightarrow 2x < 4 \Rightarrow x < 2$$

$$2x - 1 < 0 \Rightarrow -(2x - 1) < 3 \Rightarrow 2x - 1 > -3 \Rightarrow 2x > -2 \Rightarrow x > -1$$

$$-1 < x < 2$$

(c) $|2x - 1| < -2$, não admite solução pois o módulo de um número real é sempre positivo ou igual à 0.

(d) $|2x - 1| < \frac{1}{3}$

$$-\frac{1}{3} < 2x - 1 < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} + 1 < 2x < \frac{1}{3} + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3} < 2x < \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2}{9} < x < \frac{4}{9}.$$

(e) $|2x^2 - 1| < 1$

$$|2x^2 - 1| > 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 < 1 \Rightarrow 2x^2 < 2 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow x < 1 \text{ ou}$$

$$x > -1 \text{ com } x \neq 0. \quad |2x^2 - 1| \leq 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 > -1 \Rightarrow 2x^2 > 0 \Rightarrow$$

$$x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$$

$$-1 < x < 1, x \neq 0.$$

(f) $|x - 3| < 4$

$$-4 < x - 3 < 4 \Rightarrow -1 < x < 7.$$

$$(g) \quad |x| > 3$$

$$x > 0 \Rightarrow x > 3$$

$$x \leq 0 \Rightarrow -x > 3 \Rightarrow x < -3$$

$$x < -3 \text{ ou } x > 3.$$

4. Dado $r > 0$, provar:

$$|x| > r \Leftrightarrow x < -r \text{ ou } x > r$$

$$x > 0 \Rightarrow x > r$$

$$x \leq 0 \Rightarrow -x > r \Rightarrow x < -r$$

$$\text{Logo } |x| > r \Rightarrow x < -r \text{ ou } x > r.$$

Por outro lado:

$$x > r \text{ com } r > 0 \Rightarrow x^2 > r^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{r^2} \Rightarrow |x| > r.$$

No caso de $x < -r$ com $r > 0$ temos:

$$x < -r \text{ com } x < 0 \Rightarrow -x > r \Rightarrow (-x)^2 > r^2 \Rightarrow \sqrt{(-x)^2} > \sqrt{r^2} \Rightarrow |x| > r.$$

5. (a) $|x+1| + |x|$

Devemos averiguar as quatro combinações de sinais para as duas expressões nos módulos:

Para $x+1 > 0$ e $x > 0$, temos $x > -1$ e $x > 0$, ou seja, $x > 0$:

$$x+1+x=2x+1$$

Para $x+1 > 0$ e $x \leq 0$, temos $x > -1$ e $x \leq 0$, ou seja, $-1 < x \leq 0$:

$$x+1-x=1$$

Para $x+1 \leq 0$ e $x > 0$, temos $x < -1$ e $x > 0$, que não é possível.

Para $x+1 \leq 0$ e $x \leq 0$, temos $x \leq -1$ e $x \leq 0$, ou seja, $x \leq -1$:

$$-(x+1)-x=-2x-1$$

Logo a solução é:

$$|x+1|+|x|=\begin{cases} -2x-1, & \text{se } x \leq -1 \\ 1, & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ 2x+1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(b) $|x-2|-|x+1|$

Para $x-2 > 0$ e $x+1 > 0$, temos $x > 2$ e $x > -1$, ou seja, $x > 2$:

$$x-2-x-1=-3$$

Para $x-2 > 0$ e $x+1 \leq 0$, não é possível haver $x > 2$ e $x \leq -1$.

Para $x-2 \leq 0$ e $x+1 > 0$, temos $x \leq 2$ e $x > -1$, ou seja, $-1 < x \leq 2$:

$$-(x-2)-(x+1)=-x+2-x-1=-2x+1$$

Para $x-2 \leq 0$ e $x+1 \leq 0$, temos $x \leq 2$ e $x \leq -1$, ou seja, $x \leq -1$:

$$-(x-2)-[-(x+1)]=-x+2+x+1=3$$

Logo a solução é:

$$|x-2|-|x+1|=\begin{cases} 3, & \text{se } x \leq -1 \\ -2x+1, & \text{se } -1 < x \leq 2 \\ -3, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$