Soluções - Guidorizzi - Volume 1

Leonardo

November 22, 2017

Chapter 1

Números Reais

1.1 Os Números Racionais

1.2 Os Números Reais

Utilizamos nos exercícios a seguir o algoritmo de Briot-Ruffini.

1. (d) $x + 3 \leq 6x - 2 \Rightarrow -5x \leq -5 \Rightarrow x \geq 1$.

   (e) $1 - 3x > 0 \Rightarrow -3x > -1 \Rightarrow 3x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$.

   (f) $2x + 1 \geq 3x \Rightarrow -x \geq -1 \Rightarrow x \leq 1$.

2. (i) $(2x - 1)(3 - 2x)$

   $2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$

   $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

   $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

   $3 - 2x < 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$

   $3 - 2x > 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$

   $3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

   $(2x - 1)(3 - 2x) > 0$ para $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$
   $(2x - 1)(3 - 2x) < 0$ para $x < \frac{1}{2}$ ou $x > \frac{3}{2}$
   $(2x - 1)(3 - 2x) > 0$ para $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$
   $(2x - 1)(3 - 2x) < 0$ para $x = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{3}{2}$

   (j) $x(x - 3)$

   $x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$

   $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$

   $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

   $x(x - 3) < 0$ para $0 < x < 3$

$x(x-3) > 0$ para $x < 0$ ou $x > 3$

$x(x-3)$ para $x = 0$ ou $x = 3$.

(l) $x(x-1)(2x+3)$

$x-1 < 0 \Rightarrow x < 1$

$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$

$x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$2x+3 < 0 \Rightarrow x < -\dfrac{3}{2}$

$2x+3 > 0 \Rightarrow x > -\dfrac{3}{2}$

$2x+3 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

$x(x-1)(2x+3) > 0$ para $-\dfrac{3}{2} < x < 0$ ou para $x > 1$

$x(x-1)(2x+3) < 0$ para $x < -\dfrac{3}{2}$ ou para $0 < x < 1$

$x(x-1)(2x+3) = 0$ para $x = 0$ ou $x = -\dfrac{3}{2}$ ou $x = 1$.

(m) $(x-1)(1+x)(2-3x)$

$x-1 < 0 \Rightarrow x < 1$

$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$

$x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$1+x < 0 \Rightarrow x < -1$

$1+x > 0 \Rightarrow x > -1$

$1+x = 0 \Rightarrow x = -1$

$2-3x < 0 \Rightarrow x > \dfrac{2}{3}$

$2-3x > 0 \Rightarrow x < \dfrac{2}{3}$

$2-3x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$

$(x-1)(1+x)(2-3x) > 0$ para $x < -1$ ou $\dfrac{2}{3} < x < 1$

$(x-1)(1+x)(2-3x) < 0$ para $-1 < x < \dfrac{2}{3}$ ou $x > 1$

$(x-1)(1+x)(2-3x) = 0$ para $x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = \dfrac{2}{3}$.

(n) $x(x^2+3)$

$x^2+3 < 0 \Rightarrow x^2 < -3$, não é possível.

$x^2+3 > 0$ para qualquer x

Logo temos:

$x(x^2+3) > 0$ para $x > 0$

$x(x^2+3) < 0$ para $x < 0$

$x(x^2+3) = 0$ para $x = 0$

3. (h) $\dfrac{2x-1}{x-3} > 5 \Rightarrow \dfrac{2x-1}{x-3} > \dfrac{5(x-3}{x-3} \Rightarrow$

$\dfrac{2x-1-5(x-3)}{x-3} > 0 \Rightarrow \dfrac{2x-1-5x+15}{x-3} > 0 \Rightarrow$

$\dfrac{-3x+14}{x-3} > 0 \Rightarrow \dfrac{3x+14}{x-3} < 0$

$3x+14 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{14}{3}$

$3x+14 < 0 \Rightarrow x < \dfrac{14}{3}$

$x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$

$x-3 < 0 \Rightarrow x < 3$

Devemos ter o denominador e numerador com sinais opostos, assim temos a solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < \dfrac{14}{3}\}$.

(i) $\dfrac{x}{2x-3} \leq 3 \Rightarrow \dfrac{x}{2x-3} \leq \dfrac{3(2x-3)}{2x-3} \Rightarrow$

$\dfrac{x-3(2x-3)}{2x-3} \leq 0 \Rightarrow \dfrac{x-6x+9}{2x-3} \leq 0 \Rightarrow$

$\dfrac{-5x+4}{2x-3} \leq 0 \Rightarrow \dfrac{5x-9}{2x-3} \geq 0$

$5x-9 \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{9}{5}$

$5x - 9 < 0 \Rightarrow x < \dfrac{9}{5}$

$2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{3}{2}$

$2x - 3 < 0 \Rightarrow x < \dfrac{3}{2}$

$\dfrac{5x-9}{2x-3} \geq 0$ quando os sinais do denominador e numerador são iguais:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \dfrac{3}{2}$ ou $x \geq \dfrac{9}{5}\}$.

(j) $\dfrac{x-1}{2-x} < 1 \Rightarrow \dfrac{x-1}{2-x} < \dfrac{2-x}{2-x} \Rightarrow$

$\dfrac{x-1-2+x}{2-x} < 0 \Rightarrow \dfrac{2x-3}{2-x} < 0$

$2x - 3 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{3}{2}$

$2x - 3 < 0 \Rightarrow x < \dfrac{3}{2}$

$2 - x > 0 \Rightarrow x < 2$

$2 - x < 0 \Rightarrow x > 2$

$\dfrac{2x-3}{2-x} < 0$ quando os sinais do denominador e numerador são diferentes:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \dfrac{3}{2}$ ou $x > 2\}$.

(l) $x(2x-1)(x+1) > 0$

$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{1}{2}$

$2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \dfrac{1}{2}$

$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$

Os valores para que tenhamos $x(2x-1)(x+1) > 0$:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0$ ou $x > \dfrac{1}{2}\}$.

(m) $(2x-1)(x-3) > 0$

$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{1}{2}$

$2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \dfrac{1}{2}$

$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$

$x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$

Devemos ter os sinais dos fatores iguais em $(2x - 1)(x - 3) > 0$:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 3\}$.

(n) $(2x - 3)(x^2 + 1) < 0$

$x^2 + 1 > 0$ para qualquer x.

Devemos ter $2x - 3 < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{3}{2}\}$.

(o) $\dfrac{x - 3}{x^2 + 1} < 0$

$x^2 + 1 > 0$ para qualquer x.

Devemos ter $x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$.

4. $x^3 + 0x^2 + 0x - a^3 \div \llcorner x - a$:

$$
\begin{array}{rr|l}
 & x^3 + 0x^2 + 0x - a^3 & \quad x - a \\ \cline{3-3}
- & x^3 - ax^2 \qquad\qquad & x^2 + ax + a^2 \\ \cline{1-2}
- & ax^2 + 0x - a^3 & \\
 & ax^2 - a^2x \quad\;\; & \\ \cline{1-2}
- & a^2x - a^3 & \\
 & a^2x - a^3 & \\ \cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

5. (c) $(x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3) =$

$x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^2x^3 - ax^3 - a^2x^2 - a^3x - a^4 =$

$x^4 - a^4$

(d) $(x - a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4) =$

$x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x - ax^4 - a^2x^3 - a^3x^2 - a^4x - a^5 =$

$x^5 - a^5$

(e) $(x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + a^{n-2}x + a^{n-1}) =$

$x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + ... + a^{n-2}x^2 + a^{n-1}x$

$-ax^{n-1} - a^2x^{n-2} - a^3x^{n-3} - ... - a^{n-1}x - a^n =$

$x^n - a^n$

6. (h) $\dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{p}}{x-p} = \dfrac{\frac{p-x}{xp}}{x-p} = \dfrac{p-x}{(x-p)xp} = -\dfrac{1}{xp}.$

   (i) $\dfrac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{p^2}}{x-p} = \dfrac{\frac{p^2-x^2}{x^2p^2}}{x-p} = \dfrac{p^2-x^2}{x^2p^2(x-p)} = \dfrac{(p-x)(p+x)}{-x^2p^2(p-x)} = -\dfrac{x+p}{x^2p^2}.$

   (k) $\dfrac{x^4-p^4}{x-p} = \dfrac{(x-p)(x^3+px^2+p^2x+p^3)}{(x-p)} = x^3+px^2+p^2x+p^3$

   (l) $\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h} = \dfrac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} =$
   $\dfrac{2hx+h^2}{h} = \dfrac{h(2x+h)}{h} = 2x+h$

   (m) $\dfrac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \dfrac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} = \dfrac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \dfrac{-h}{x(x+h)h} = -\dfrac{1}{x(x+h)}$

   (n) $\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h} = \dfrac{x^3+3hx^2+3h^2x+h^3-x^3}{h} =$
   $\dfrac{3hx^2+3h^2x+h^3}{h} = 3x^2+3xh+h^2$

   (o) $\dfrac{(x+h)^2-(x-h)^2}{h} = \dfrac{(x^2+2hx+h^2)-(x^2-2hx+h^2)}{h} =$
   $\dfrac{4hx}{h} = 4x$

7. (f) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4} > 0 \Rightarrow \dfrac{(x+2)(x-2)}{x^2+4} > 0$

   O denominador será sempre positivo, devemos analisar o sinal do numerador $(x+2)(x-2)$:

   $x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$

   $x+2 < 0 \Rightarrow x < -2$

   $x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$

$x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$

O numerador deve ser positivo, portanto os fatores do produto devem ter o mesmo sinal, temos isso quando $x < -2$ ou $x > 2$.

(g) $(2x - 1)(x^2 - 4) \leq 0 \Rightarrow (2x - 1)(x + 2)(x - 2) \leq 0$

O produto deve ter seus fatores todos negativos ou ao menos um deles com valor 0 ou, finalmente, dois positivos e um negativo. Temos então os sinais de cada expressão:

$2x - 1 \leq 0 \Rightarrow x \leq \dfrac{1}{2}$

$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{1}{2}$

$x + 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq -2$

$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$

$x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2$

$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

Para termos $(2x - 1)(x^2 - 4) = 0$, basta termos $x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -2$ ou $x = 2$.

Para termos $(2x - 1)(x^2 - 4) < 0$, com os três fatores acima mencionados negativos, devemos ter $x < -2$.

Finalmente para termos $(2x - 1)(x^2 - 4) < 0$, com dois fatores positivos e um negativo. Analisando a seguir todas as possibilidades:

$x < \dfrac{1}{2}$ e $x > -2$ e $x > 2$ não é possível.

$x > \dfrac{1}{2}$ e $x < -2$ e $x > 2$ não é possível.

$x > \dfrac{1}{2}$ e $x > -2$ e $x < 2$ nos dá $\dfrac{1}{2} < x < 2$.

Logo as soluções são $x \leq -2$ ou $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2$.

(h) $3x^2 \geq 48 \Rightarrow x^2 \geq 16 \Rightarrow (x - 4)(x + 4) \geq 0$

Estudando o sinal do produto, devemos ter as duas expressões com mesmo sinal ou alguma delas com valor zero:

$x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$

$x - 5 < 0 \Rightarrow x < 4$

$x + 5 > 0 \Rightarrow x > -4$

$x + 5 < 0 \Rightarrow x < -4$

Devemos ter:

$x > 4$ e $x > -4$, que nos dá $x > 4$.

ou

$x < 4$ e $x < -4$ que nos dá $x < -4$.

A solução portanto é ou $x \leq -4$ ou $x \geq 4$

(i) $x^2 < r^2 \Rightarrow (x-r)(x+r) < 0$ Estudando o sinal do produto, devemos ter as duas expressões com sinais opostos:

$x - r > 0 \Rightarrow x > r$

$x - r < 0 \Rightarrow x < r$

$x + r > 0 \Rightarrow x > -r$

$x + r < 0 \Rightarrow x < -r$

Devemos ter:

$x > r$ e $x < -r$, que é impossível.

ou

$x < r$ e $x > -r$ que nos dá $-r < x < r$.

(j) $x^2 \geq r^2 \Rightarrow (x-r)(x+r) \geq 0$ Estudando o sinal do produto, devemos ter as duas expressões com mesmo sinal ou alguma delas com valor zero:

$x - r > 0 \Rightarrow x > r$

$x - r < 0 \Rightarrow x < r$

$x + r > 0 \Rightarrow x > -r$

$x + r < 0 \Rightarrow x < -r$

Devemos ter:

$x > r$ e $x > -r$, que nos dá $x > r$.

ou

$x < r$ e $x < -r$ que nos dá $x < -r$.

A solução portanto é ou $x \leq -r$ ou $x \geq r$

8. (a) $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}\right]=a\left[x^2+\frac{2xb}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2+4ac}{4a^2}\right]=$

$=\boxed{ax^2+bx+c}$

(b) $a\left[\left(\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=a\left[\left(\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=$

$=a\left[\frac{\Delta}{4a^2}-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=a.0=\boxed{0}$

(c) $x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{(-b-\sqrt{\Delta})}{2a}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=$

$=\frac{-2b}{2a}=\boxed{\frac{-b}{a}}$

$x_1.x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.\frac{(-b-\sqrt{\Delta})}{2a}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\boxed{\frac{c}{a}}$

9. $a(x-x_1)(x-x_2)=a(x^2-xx_2-xx_1+x_1x_2)=$
$=a[x^2-x(x_2+x_1)+x_1x_2]=a\left[x^2-x\left(\frac{-b}{a}\right)+\frac{c}{a}\right]=$
$=\boxed{ax^2+bx+c}$

10. (f) $2x^2-3x+1=2(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2})=2(x-1)(x-\frac{1}{2})=\boxed{(x-1)(2x-1)}$

(g) x^2-25

$x_1+x_2=0\Rightarrow x_1=-x_2$

$x_1x_2=-25\Rightarrow(-x_1)x_1=-25\Rightarrow x_1^2=25\Rightarrow x_1=5$ e $x_2=-5$

$\boxed{(x-5)(x+5)}$

(h) $3x^2+x-2=3(x^2+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3})=3(x+1)(x-\frac{2}{3})=\boxed{(x+1)(3x-2)}$

(i) $4x^2-9$ $x_1+x_2=0\Rightarrow x_1=-x_2$
$x_1x_2=-\frac{9}{4}\Rightarrow(-x_1)x_1=-\frac{9}{4}\Rightarrow x_1^2=\frac{9}{4}\Rightarrow x_1=\frac{3}{2}$ e $x_2=-\frac{3}{2}$
$4(x+\frac{3}{2})(x-\frac{3}{2})=\boxed{(2x-3)(2x+3)}$

(j) $2x^2-5x$

$x_1x_2=0\Rightarrow x_1=0$

$x_1 + x_2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{5}{2}$

$2x(x - \frac{5}{2}) = \boxed{x(2x-5)}$

11. (f) $x_1 + x_2 = -\frac{1}{3}$ e $x_1x_2 = -\frac{2}{3}$

$x_1 = \frac{2}{3}$ e $x_2 = -1$

$3x^2 + x - 2 > 0 \Rightarrow 3(x+1)(x - \frac{2}{3}) > 0 \Rightarrow (x+1)(x - \frac{2}{3}) > 0$

Temos os seguintes sinais para cada fator do produto:

$x + 1 > 0$ quando $x > -1$

$x + 1 > 0$ quando $x < -1$

$x - \frac{2}{3} > 0$ quando $x > \frac{2}{3}$

$x - \frac{2}{3} < 0$ quando $x < \frac{2}{3}$

Para termos $(x+1)(x - \frac{2}{3}) > 0$, os fatores devem possuir o mesmo sinal:

$x > \frac{2}{3}$ ou $x < -1$

(g) $x_1 + x_2 = 4$ e $x_1x_2 = 4$

$x_1 = x_2 = 2$

$x^2 - 4x + 4 > 0 \Rightarrow (x-2)(x-2) > 0 \Rightarrow (x-2)^2 > 0$

A equação é sempre positiva, exceto em $x = 2$.

A solução é $x \neq 2$.

(h) $x_1 + x_2 = \frac{1}{3}$ e $x_1x_2 = 0$

$x_1 = \frac{1}{3}$

$3x^2 - x \leq 0 \Rightarrow 3x(x - \frac{1}{3}) \leq 0 \Rightarrow x(x - \frac{1}{3}) \leq 0$

Temos os seguintes sinais para cada fator do produto:

$x - \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$

$x - \frac{1}{3} \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{3}$

$x > 0$ ou $x \leq 0$

Para termos $x(x-\frac{1}{3}) \leq 0$, os fatores devem possuir sinais opostos ou $x=0$ ou $x=\frac{1}{3}$:

$0 \leq x \leq \frac{1}{3}$

(i) $x_1 + x_2 = 1$ e $x_1 x_2 = \frac{1}{4}$

$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$

$4x^2 - 4x + 1 < 0 \Rightarrow 4(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2 < 0$

A desigualdade não é possível para nenhum x.

(j) $x_1 + x_2 = 1$ e $x_1 x_2 = \frac{1}{4}$

$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$

$4x^2 - 4x + 1 \leq 0 \Rightarrow 4(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}) \leq 0 \Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2 \leq 0$

A inequação somente é possível para $x = \frac{1}{2}$.

12. (a) Por 8. a) temos:

$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

Observando o produto, do lado direito temos $a > 0$ e a expressão entre colchetes é positiva sempre, pois temos um termo elevado ao quadrado e no outro, $\frac{\Delta}{4a^2}$, temos $\Delta < 0$, porém precedido por um sinal negativo, e dividido por $4a^2$ que é positivo, conclui-se então que esse fator também é positivo e por consequência $ax^2 + bx + c > 0$.

(b) O raciocínio é similar ao item anterior, exceto que agora temos $a < 0$ e portanto o produto $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ é negativo, o que nos dá $ax^2 + bx + c < 0$.

13. (f) $(2x+1)(x^2+x+1) \leq 0$

Estudando o sinal do produto, devemos ter as duas expressões com sinais opostos ou algum fator ser 0::

$2x+1>0 \Rightarrow x>-\dfrac{1}{2}$

$2x+1<0 \Rightarrow x\leq-\dfrac{1}{2}$

De acordo com o exercício 12 acima, $x^2+x+1>0$, pois $\Delta = 1-4.1.1=-3<0$.

Logo $(2x+1)(x^2+x+1)\leq 0$ quando $x\leq -\dfrac{1}{2}$.

(g) $x(x^2+1)\geq 0$

Estudando o sinal do produto, devemos ter as duas expressões com sinais iguais ou algum fator ser 0:

x^2+1 tem $a=1>0$ e $\Delta = 0-4.1.1=-4<0$, que pelo exercício 12 nos dá $x^2+1>0$.

Logo devemos ter $x\geq 0$.

(h) $(1-x)(x^2+2x+2)<0$

Estudando o sinal do produto, devemos ter as duas expressões com sinais opostos:

x^2+2x+2 tem $a=1>0$ e $\Delta = 4-4.1.2=-4<0$, que pelo exercício 12 nos dá $x^2+2x+2>0$.

Logo devemos ter $1-x<0 \Rightarrow x>1$.

(i) $\dfrac{2x-3}{x^2+1}>0$

Estudando o sinal da divisão, devemos ter as duas expressões com sinais iguais: x^2+1 tem $a=1>0$ e $\Delta = 0-4.1.1=-4<0$, que pelo exercício 12 nos dá $x^2+1>0$.

Portanto devemos ter $2x-3>0 \Rightarrow x>\dfrac{3}{2}$.

(j) $\dfrac{x}{x^2+x+1}\geq 0$

Estudando o sinal da divisão, devemos ter as duas expressões com sinais iguais ou $x=0$:

x^2+x+1 tem $a=1>0$ e $\Delta = 1-4.1.1=-3<0$, que pelo exercício 12 nos dá $x^2+x+1>0$.

Portanto devemos ter $x\geq 0$

14. Primeiramente observa-se o fato de x^2+1 ser sempre positivo, portanto

ao multiplicarmos ambos os lados da expressão $\dfrac{5x+3}{x^2+1} \geq 5$ por x^2+1 a direção da desigualdade não se altera:

$\dfrac{5x+3}{x^2+1} \geq 5 \Rightarrow \dfrac{5x+3}{x^2+1}.(x^2+1) \geq 5(x^2+1) \Rightarrow 5x+3 \geq 5(x^2+1)$.

Por outro lado dividimos $5x+3 \geq 5(x^2+1)$ por x^2+1 e temos:

$\dfrac{5x+3}{x^2+1} \geq 5\dfrac{(x^2+1)}{(x^2+1)} \Rightarrow \dfrac{5x+3}{x^2+1} \geq 5$.

17. (d) $2x^3 - x^2 - 1 = 0$

    1 e -1 são os divisores de $a_3 = -1$, testando os dois valores na equação temos 1 como raiz inteira da equação.

    (e) $x^3 + x^2 + x - 14 = 0$

    Os divisores inteiros de $a_4 - 14$ são ±1, ±2, ±7 e ±14.

    Testando as 8 possibilidades temos:

    $1^3 + 1^2 + 1 - 14 = -11$

    $-1^3 + (-1)^2 - 1 - 14 = -15$

    $2^3 + 2^2 + 2 - 14 = 0$, logo 2 é raiz.

    $-2^3 + (-2)^2 - 2 - 14 = -12$

    $7^3 + 7^2 + 7 - 14 = 385$

    $-7^3 + (-7)^2 - 7 - 14 = -315$

    $14^3 + 14^2 + 14 - 14 = 2940$

    $-14^3 + (-14)^2 - 14 - 14 = -2576$

    A única raiz inteira encontrada é 2.

    (f) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

    Os divisores inteiros de $a_4 - 12$ são ±1, ±2, ±3, ±4, ±6 e ±12.

    Testando as 12 possibilidades temos:

    $1^3 + 3(1)^2 - 4(1) - 12 = -12$

    $-1^3 + 3(-1)^2 - 4(-1) - 12 = -6$

    $2^3 + 3(2)^2 - 4(2) - 12 = 0$, logo 2 é raiz

    $-2^3 + 3(-2)^2 - 4(-2) - 12 = 0$, logo -2 é raiz.

    $3^3 + 3(3)^2 - 4(3) - 12 = 30$

    $-3^3 + 3(-3)^2 - 4(-3) - 12 = 0$, logo -3 é raiz.

$4^3 + 3(4)^2 - 4(4) - 12 = 84$

$-4^3 + 3(-4)^2 - 4(-4) - 12 = -12$

$6^3 + 3(6)^2 - 4(6) - 12 = 288$

$-6^3 + 3(-6)^2 - 4(-6) - 12 = -96$

$12^3 + 3(12)^2 - 4(12) - 12 = 2100$

$-12^3 + 3(-12)^2 - 4(-12) - 12 = -1260$

As raízes inteiras são 2, -2 e -3.

19. (a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

$(x^2 + 3x + 2)(x - 1)$

$$\begin{array}{c|ccc} -2 & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$(x - 1)(x + 1)(x + 2)$.

(b) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$

$$\begin{array}{c|ccccc} -1 & 1 & -3 & 1 & 3 & -2 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & -2 & 0 \end{array}$$

$(x^3 - 4x^2 + 5x - 2)(x + 1)$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

$(x + 1)(x - 1)(x^2 - 3x + 2)$

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$(x+1)(x-1)^2(x-2)$.

(c) x^3+2x^2-3x

$(x^2+2x-3)x$

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 2 & -3 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

$(x+3)(x-1)x$.

(d) $x^3+3x^2-4x-12$

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$(x^2+x-6)(x+2)$

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

$(x+3)(x-2)(x+2)$.

(e) $x^3+6x^2+11x+6$

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & 6 & 11 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

$(x^2+5x+6)(x+1)$

$$\begin{array}{c|ccc} -2 & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

$(x+2)(x+1)(x+3)$.

(f) x^3-1

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$(x^2 + x + 1)(x - 1)$

20. Podemos usar os resultados do exercício 19 neste exercício.

    (a) $x^3 - 1 > 0$

    $x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1) > 0$

    Devemos ter ambos os fatores de $(x^2 + x + 1)(x - 1)$ com mesmo sinal:

    Se $x - 1 > 0$, $x > 1$ e $x^2 + x + 1 > 0$, logo $x > 1$ é solução da inequação.

    Caso $x - 1 < 0$, temos $x < 1$ e nesse caso $x^2 + x + 1 > 0$, o que nos dá $(x^2 + x + 1)(x - 1) < 0$, que não é solução da inequação.

    A solução da inequação é $x > 1$.

    (b) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 < 0$ $(x + 1)(x + 2)(x + 3) < 0$

    Basta estudarmos o sinal da última inequação, onde deveremos ter um número ímpar de elementos do produto negativos:

    Com $x < -3$, $x < -2$ e $x < -1$ temos a solução $x < -3$.

    Nos casos com apenas um elemento negativo:

    - $(x + 1) < 0$ nos dá $x < -1$ e devemos ter $x > -2, x > -3$, o que nos dá $x > -2$.
    - $(x + 2) < 0$ nos dá $x < -2$ e devemos ter $x > -1, x > -3$, o que nao é possível.
    - $(x + 3) < 0$ nos dá $x < -3$ e devemos ter $x > -1, x > -2$, mas não existe tal combinação.

    Finalmente temos a outra solução da inequação:

    $-2 < x < -1$.

    É possível, e até mais prático, estudar os sinais acima graficamente.

    (c) $x^3 + 3x - 4x - 12 \geq 0$

    Fatorando o polinômio temos:

$(x-2)(x+2)(x+3) \geq 0$

Estudando o sinal da inequação, devemos ter nenhum ou dois fatores do produto negativos:

Caso tenhamos nenhum, devemos ter:

$x-2 \geq 0$, $x+2 \geq 0$ e $x+3 \geq 0$ o que resulta em, respectivamente, $x \geq 2$, $x \geq -2$ e $x \geq -3$. Logo devemos ter $x \geq 2$ para obtermos $x^3 + 3x - 4x - 12 \geq 0$ nesse caso.

Com dois fatores negativos:

- $x-2 \leq 0$ e $x+2 \leq 0$ resultam em, respectivamente, $x \leq 2$ e $x \leq -2$. Devemos ter $x \geq -3$, que resulta na solução:
  $-3 \leq x \leq -2$
- $x-2 \leq 0$ e $x+3 \leq 0$ resultam em, respectivamente, $x \leq 2$ e $x \leq -3$. Devemos ter $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$, que não é possível.
- $x+2 \leq 0$ e $x+3 \leq 0$ resultam em, respectivamente, $x \leq -2$ e $x \leq -3$. Devemos ter $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$, que não é possível.

As solução da inequação é $x \geq 2$ ou $-3 \leq x \leq -2$.

(d) $x^3 + 2x^2 - 3x < 0$

Fatorando o polinômio temos:

$x(x-1)(x+3) < 0$

Estudamos a seguir o sinal da inequação $x(x-1)(x+3) < 0$, devemos ter um número ímpoar de elementos do produto negativos:

Com $x < 0$, $x-1 < 0 \Rightarrow x < 1$ e $x+3 < 0 \Rightarrow x < -3$, temos $x < -3$.

Nos casos com apenas um elemento negativo:

- Com $x < 0$ devemos ter $x-1 > 0$ e $x+3 > 0$, portanto respectivamente $x > 1$ e $x > -3$, mas não existe tal combinação.
- $x-1 < 0$ nos dá $x < 1$ e devemos ter $x > 0$ e $x > -3$, o que resulta em $0 < x < 1$
- $x+3 < 0$ nos dá $x < -3$ e devemos ter $x > 0$ e $x > 1$, mas não é possível tal combinação.

A solução da inequação é $x < -3$ ou $0 < x < 1$.

21. Falsa. Para explicar basta darmos um contra-exemplo:

    Se $x = -1$ e $y = 0$, temos $x < y$, mas não $x^2 < y^2$, pois daí teríamos $1 < 0$, o que contradiz nossa proposição.

22. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

    Se x e y têm o mesmo sinal, temos $(x^2 + xy + y^2) > 0$.

    Portanto devemos estudar o que ocorre quando $x - y < 0$, com a condição de x e y terem o mesmo sinal.

    Se $x > 0$ e $y > 0$ temos $x - y < 0 \Rightarrow x < y$.

    No caso de $x < 0$ e $y < 0$ temos, de forma similar, $x - y < 0 \Rightarrow x < y$.

    Já quando ocorrem sinais opostos para x e y, temos apenas da avaliar o caso em que $x < 0$ e $y > 0$.

    Temos então:

    $x^3 < 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x < 0$ (a ordem da desigualdade vai sendo trocada em cada produto pelo inverso) e

    $y^3 > 0 \Rightarrow y^2 > 0 \Rightarrow y > 0$ (a ordem permanece intacta em cada produto pelo inverso).

    Finalmente pela lei da transitividade temos $x < 0$ e $0 < y \Rightarrow x < y$.

    Por outro lado:

    $x < y \Rightarrow x - y < 0$

    $x > 0$ e $y > 0 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 > 0$ e

    $x < 0$ e $y < 0 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 > 0$

    Multiplicando-se os dois lados da inequação $x - y < 0$ por $x^2 + xy + y^2$ conserva a ordem da desigualdade:

    $(x - y)(x^2 + xy + y^2) < 0 \Rightarrow x^3 - y^3 < 0 \Rightarrow x^3 < y^3$.

    Caso tenhamos x e y com sinais diferentes, pegamos apenas o caso em que $x < 0$ e $y > 0$, pois o contrário não existe para $x < y$.

    Temos então:

    $x < 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x^3 < 0$ (a ordem da desigualdade vai sendo trocada em cada produto) e

$y > 0 \Rightarrow y^2 > 0 \Rightarrow y^3 > 0$ (a ordem permanece intacta em cada produto).

Finalmente pela lei da transitividade temos $x^3 < 0$ e $0 < y^3 \Rightarrow x^3 < y^3$.

23. (a) $x.0 = x(0)$, (A1)

$x(0) = x(z + (-z))$, (A4)

$x(z + (-z)) = xz - xz$, (D)

$xz - xz = xz + (-xz)$, (A1)

Finalmente temos: $xz + (-xz) = 0$, (A4).

(b) Para o primeiro caso:

$x + (-x) = 0$, (A4)

$y(x + (-x)) = y.0$, combinando (O2) com (OM)

$yx + y(-x) = 0$, (D) e (a) acima

$xy + (-x)y = 0$, (M2)

$xy + (-x)y + (-xy) = -xy$, combinando (O2) com (OA)

$(-x)y + xy + (-xy) = -xy$, (A2)

$(-x)y = -xy$, (A3)

No segundo caso:

$y + (-y) = 0$, (A4)

$x(y + (-y)) = x.0$, combinando (O2) com (OM)

$xy + x(-y) = 0$, (D) e (a) acima

$xy + x(-y) + (-xy) = -xy$, combinando (O2) com (OA)

$x(-y) + xy + (-xy) = -xy$, (A2)

$x(-y) = -xy$, (A3)

No terceiro:

$(-x) + x = 0$, (A4) e (A2)

$(-y)((-x) + x) = (-y).0$, combinando (O2) com (OM)

$(-y)(-x) + (-y)x = 0$, (D) e (a) acima

$(-x)(-y) + x(-y)$, (M2)

$(-x)(-y) + x(-y) + xy = xy$, combinando (O2) com (OA)

$(-x)(-y) = xy$, (A4)

(c) $x^2 \geq 0$

$x \leq 0$ ou $0 \leq x$, (O4)

Se $x \leq 0$:

$x - (-x) \leq 0 + (-x)$, (OA)

$0 \leq -x$, (A4)

$(-x)0 \leq (-x)(-x)$, (OM)

Considerando o item (a) acima, temos:

$0 \leq x^2$.

Se $x \geq 0$:

$xx \geq x.0$, (OM)

Considerando o item (a) acima, temos:

$x^2 \geq 0$.

(d) $1 > 0$

$0 \leq 1$ e $0 \leq 1$ nos dá $0.1 \leq 1.1 = 1^2$, (OM)

Por (M3) $1.1 = 1$ com $1 \neq 0$

Logo temos $1^2 > 0$.

(e) $x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$

Primeiramente temos:

$x > 0 \Rightarrow x^{-1}x > x^{-1}0$ (OM)

$\Rightarrow x^{-1}x^{-1}x > x^{-1}x^{-1}0$ (OM)

$\Rightarrow x^{-1}(x^{-1}x) > x^{-1}x^{-1}0$ (M1)

$\Rightarrow x^{-1}1 > x^{-1}x^{-1}0$ (M4)

$\Rightarrow x^{-1} > (x^{-1}x^{-1})0$ (M1)

$\Rightarrow x^{-1} > (x^{-1}x^{-1})(z + (-z))$ (A4)

$\Rightarrow x^{-1} > (x^{-1}x^{-1})z + (x^{-1}x^{-1})(-z)$ (D)

$\Rightarrow x^{-1} > 0$ (A4)

Na direção contrária temos:

$x^{-1} > 0 \Rightarrow x.x^{-1} > x.0$ (OM)

$\Rightarrow x.x.x^{-1} > x.x.0$ (OM)

$\Rightarrow x.(x.x^{-1}) > x.x.0$ (M1)

$\Rightarrow x.1 > x.x.0$ (M4)

$\Rightarrow x > (x.x)0$ (M1)

$\Rightarrow x > (x.x)(z + (-z))$ (A4)

$\Rightarrow x > (x.x)z + (x.x)(-z)$ (D)

$\Rightarrow x > 0$ (A4)

(f) $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$

Por a), qualquer número multiplicado por 0 resulta em 0, logo como $xy = 0$ e considerando, primeiramente, $x \neq 0$ e $x^{-1}x = 1$ (M4):

$x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y = 1 \cdot y = 0 \Leftrightarrow y = 0$, utilizando (M1) e (M4)

De forma similar chegamos à $x = 0$, com $y \neq 0$.

Finalmente quando $x = 0$ e $y = 0$, podemos fazer, de acordo com (A4), $x = z - z$ e $y = w - w$, daí temos:

$(z-z)(w-w) = (z-z)w-(z-z)w = zw-zw-(zw-zw) = 0-0 = 0$, utilizando (D) e (A4).

(g) $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$

$x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0$ (A4)

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 0 = 0$ (A3)

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + xy - xy = 0$ (A4)

$\Leftrightarrow x^2 + xy - xy - y^2 = 0$(A2)

$\Leftrightarrow x(x + y) - y(x + y) = 0$ (D)

$\Leftrightarrow (x + y)(x - y) = 0$ (D)

$\Leftrightarrow x + y = 0$ ou $x - y = 0$, letra f) acima

$\Leftrightarrow x = -y$ ou $x = y$ (A4)

(h) $Se x \geq 0$ e $y \geq 0$, $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$

$x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0$ (A4)

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 0 = 0$ (A3)

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + xy - xy = 0$ (A4)

$\Leftrightarrow x^2 + xy - y^2 - xy = 0$ (A2)

$\Leftrightarrow x(x+y) - y(x+y) = 0$(D)

$\Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0$ (D)

$\Leftrightarrow x - y = 0$ ou $x + y = 0$, letra f) acima.

Temos $x = -y$ impossível, pois viola a condição de $x \geq 0$, já $x = y$ é possível, pois ambos devem ser positivos.

1.3 Módulo de um Número Real

1. (a) $|-5| + |-2| = -(-5) - (-2) = 5 + 2 = 7$.

   (b) $|-5+8| = |3| = 3$.

   (c) $|-a| = -(-a) = a$.

   (d) $|a|$, $a < 0$

   Como $a < 0$, $|a| = -a$

   (e) $|-a|$

   Quando $-a \leq 0$ temos $a \geq 0$ e portanto $|-a| = -(-a) = a$.

   Quando $-a > 0$ temos $a < 0$ e portanto $|-a| = -a$.

   (f) $|2a| - |3a|$

   $|2a| - |3a| = |2||a| - |3||a| = (|2| - |3|)\,|a| = (2-3)\,|a| = (-1)\,|a|$.

   Caso $a \geq 0$, teremos $(-1) \cdot a = -a$.

   Caso $a < 0$, teremos $(-1) \cdot (-a) = a$.

2. (a) $|x| = 2$

   $x = 2$ quando $x \geq 0$ ou $x = -2$ quando $x < 0$.

   (b) $|x+1| = 3$

   $x + 1 > 0 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$

   $x + 1 \leq 0 \Rightarrow -(x+1) = 3 \Rightarrow x + 1 = -3 \Rightarrow x = -4$.

   (c) $|2x - 1| = 1$

   $2x - 1 > 0 \Rightarrow 2x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$

   $2x - 1 \leq 0 \Rightarrow -(2x-1) = 1 \Rightarrow 2x - 1 = -1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$.

   (d) $|x - 2| = -1$

   Não existe solução, pois o módulo de um número é sempre positivo.

   Podemos verificar o que ocorre quando tentamos solucionar a equação:

   Se $x - 2 \geq 0$, temos $x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1$, porém $x - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$.

   Se $x - 2 < 0$, temos $-(x-2) = -x + 2 = -1 \Rightarrow x = 3$, porém $3 - 2 = 1 > 0$.

Vemos então que existem contradições nos dois valores encontrados para x, logo não existe solução.

(e) $|2x+3| = 0$

Para $2x+3 \geq 0$, temos $2x+3=0 \Rightarrow 2x=-3 \Rightarrow x=\dfrac{-3}{2}$.

Para $2x+3<0$, temos $-(2x+3)=0 \Rightarrow -2x-3=0 \Rightarrow -2x=3 \Rightarrow x=\dfrac{-3}{2}$.

(f) $|x| = 2x+1$

Para $x \geq 0$, temos $x = 2x+1 \Rightarrow x=-1$.

Para $x<0$, temos $-x=2x+1 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=\dfrac{-1}{3}$.

3. (a) $|x| \leq 1$

$x > 0 \Rightarrow x \leq 1$

$x \leq 0 \Rightarrow -x \leq 1 \Rightarrow x \geq -1$

$-1 \leq x \leq 1$

(b) $|2x-1| < 3$

$2x-1>0 \Rightarrow 2x-1<3 \Rightarrow 2x<4 \Rightarrow x<2$

$2x-1<0 \Rightarrow -(2x-1)<3 \Rightarrow 2x-1>-3 \Rightarrow 2x>-2 \Rightarrow x>-1$

$-1 < x < 2$

(c) $|2x-1| < -2$, não admite solução pois o módulo de um número real é sempre positivo ou igual à 0.

(d) $|2x-1| < \frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3} < 2x-1 < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3}+1 < 3x < \frac{1}{3}+1 \Rightarrow$

$\frac{2}{3} < 3x < \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2}{9} < x < \frac{4}{9}$.

(e) $|2x^2-1| < 1$

$|2x^2-1| > 0 \Rightarrow 2x^2-1 < 1 \Rightarrow 2x^2 < 2 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow x < 1$ ou $x > -1$ com $x \neq 0$. $|2x^2-1| \leq 0 \Rightarrow 2x^2-1 > -1 \Rightarrow 2x^2 > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$

$-1 < x < 1$, $x \neq 0$.

(f) $|x-3| < 4$

$-4 < x-3 < 4 \Rightarrow -1 < x < 7$.

(g) $|x| > 3$

$x > 0 \Rightarrow x > 3$

$x \leq 0 \Rightarrow -x > 3 \Rightarrow x < -3$

$x < -3$ ou $x > 3$.

(h) $|x+3| > 1$

$|x+3| > 1 \Leftrightarrow |x+3|^2 > 1^2 \Leftrightarrow (x+3)^2 > 1^2 \Leftrightarrow (x+3)^2 - 1^2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(x+3)-1][(x+3)+1] > 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+4) > 0$

Para se obter $(x+2)(x+4) > 0$, devemos ter as expressões $(x+2)$ e $(x+4)$ com mesmo sinal:

$x+2 < 0$ e $x+4 < 0$ nos dá $x < -2$ e $x < -4$, logo devemos ter $x < -4$

$x+2 > 0$ e $x+4 > 0$ nos dá $x > -2$ e $x > -4$, logo devemos ter $x > -2$

A solução é $x < -4$ ou $x > -2$

(i) $|2x-3| > 3$

$|2x-3| > 3 \Leftrightarrow |2x-3|^2 > 3^2 \Leftrightarrow (2x-3)^2 > 3^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x-3)^2 - 3^2 > 0 \Leftrightarrow (2x-3-3)(2x-3+3) > 0 \Leftrightarrow (2x-6)(2x) > 0$

Para se obter $(2x-6)(2x) > 0$, devemos ter as expressões $(2x-6)$ e $2x$ com mesmo sinal:

$2x-6 < 0$ e $2x < 0$, resulta em $x < 3$ e $x < 0$, logo deve-se ter $x < 0$.

$2x-6 > 0$ e $2x > 0$, resulta em $x > 3$ e $x > 0$, logo deve-se ter $x > 3$.

(j) $|2x-1| < x$

$|2x-1| < x \Leftrightarrow |2x-1|^2 < x^2 \Leftrightarrow (2x-1)^2 < x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2 - x^2 < 0 \Leftrightarrow (2x-1-x)(2x-1+x) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)(3x-1) < 0$ Para se obter $(x-1)(3x-1) < 0$,as expressões $(x-1)$ e $(3x-1)$ devem ter sinais opostos:

$x-1 > 0$ e $3x-1 < 0$, resulta em $x > 1$ e $x < 1/3$, que não soluciona a inequação.

$x-1 < 0$ e $3x-1 > 0$, resulta em $x < 1$ e $x > 1/3$, que resulta no intervalo $\dfrac{1}{3} < x < 1$.

(l) $|x+1| < |2x-1|$

$|x+1| < |2x-1| \Leftrightarrow |x+1|^2 < |2x-1|^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 < (2x-1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 - (2x-1)^2 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(x+1)-(2x-1)] \cdot [(x+1)-(2x-1)] < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1-2x+1)(x+1+2x-1) \Leftrightarrow (-x+2)(3x) < 0.$

Para se obter $(-x+2)(3x) < 0$,as expressões $(-x+2)$ e $3x$ devem ter sinais opostos:

$-x+2 < 0$ e $3x > 0$, resulta em $x > 2$ e $x > 0$, logo deve-se ter $x > 2$.

$-x+2 > 0$ e $3x < 0$, resulta em $x < 2$ e $x < 0$, logo deve-se ter $x < 0$.

(m) $|x-1| - |x+2| > x$

Neste caso é necessário avaliar quatro combinações com relação aos resultados dos módulos, de acordo com o sinal da expressão no módulo:

- $x-1 > 0$ e $x+2 > 0$, resulta em $x > 1$ e $x > -2$, logo tem-se essa combinação com $x > 1$

  $x-1-x+2 > x \Leftrightarrow 1 > x \Leftrightarrow x < 1$
- $x-1 > 0$ e $x+2 < 0$, resulta em $x > 1$ e $x < -2$, que não é possível.
- $x-1 < 0$ e $x+2 > 0$, resulta em $x < 1$ e $x > -2$, logo tem-se essa combinação com $-2 < x < 1$

  $-(x-1)-(x+2) > x \Leftrightarrow -x+1-x-2 > x \Leftrightarrow -2x-1 > x \Leftrightarrow$ $x-1 > 3x \Leftrightarrow x < \dfrac{-1}{3}$
- $x-1 < 0$ e $x+2 < 0$, resulta em $x < 1$ e $x < -2$, logo tem-se essa combinação com $x < -2$

  $-(x-1)-[-(x+2)] > x \Leftrightarrow -x+1+x+2 > x \Leftrightarrow 3 > x \Leftrightarrow x < 3.$

Finalmente, dos resultados acima, chega-se ao resultado $x < \dfrac{-1}{3}$

(n) $|x-3| < x+1$

$|x-3| < x+1 \Leftrightarrow |x-3|^2 < (x+1)^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 < (x+1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3)^2-(x+1)^2 < 0 \Leftrightarrow [(x-3)-(x+1)]\cdot[(x-3)+(x+1)] < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3-x-1)(x-3+x+1) < 0 \Leftrightarrow -4(2x-2) < 0 \Leftrightarrow -(2x-2) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x+2 < 0 \Leftrightarrow -2x < -2 \Leftrightarrow x > 1.$

(o) $|x-2| + |x-1| > 1$

Quando $x-2 < 0 \Rightarrow x < 2$, $|x-2| = -x+2$. Já caso $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$, $|x-2| = x-2$.

Quando $x-1 < 0 \Rightarrow x < 1$, $|x-1| = -x+1$. Já caso $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$, $|x-1| = x-1$.

- Quando $x-2 < 0$ e $x-1 < 0$, $x < 1$, tem-se:
  $-x+2-x-1 > 1 \Leftrightarrow -2x+1 > 1 \Leftrightarrow x < 0$
- Quando $x-2 < 0$ e $x-1 \geq 0$, $1 \leq x < 2$.
  $-x+2+x-1 = 1 > 1$. Sem solução nesse caso.
- Quando $x-2 \geq 0$ e $x-1 \geq 0$, $x \geq 2$, tem-se:
  $x-2+x-1 > 1 \Leftrightarrow 2x-3 > 1 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow x > 2.$

A solução da inequação é $x < 1$ ou $x > 2$.

4. Dado $r > 0$, provar:

$|x| > r \Leftrightarrow x < -r$ ou $x > r$

$x > 0 \Rightarrow x > r$

$x \leq 0 \Rightarrow -x > r \Rightarrow x < -r$

Logo $|x| > r \Rightarrow x < -r$ ou $x > r$.

Por outro lado:

$x > r$ com $r > 0 \Rightarrow x^2 > r^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{r^2} \Rightarrow |x| > r$.

No caso de $x < -r$ com $r > 0$ temos:

$x < -r$ com $x < 0 \Rightarrow -x > r \Rightarrow (-x)^2 > r^2 \Rightarrow \sqrt{(-x)^2} > \sqrt{r^2} \Rightarrow |x| > r$.

5. (a) $|x+1| + |x|$

Devemos averiguar as quatro combinações de sinais para as duas expressões nos módulos:

Para $x+1 > 0$ e $x > 0$, temos $x > -1$ e $x > 0$, ou seja, $x > 0$:

$x+1+x = 2x+1$

Para $x+1>0$ e $x\leq 0$, temos $x>-1$ e $x\leq 0$, ou seja, $-1<x\leq 0$:

$x+1-x=1$

Para $x+1\leq 0$ e $x>0$, temos $x<-1$ e $x>0$, que não é possível.

Para $x+1\leq 0$ e $x\leq 0$, temos $x\leq -1$ e $x\leq 0$, ou seja, $x\leq -1$:

$-(x+1)-x=-2x-1$

Logo a solução é:

$$|x+1|+|x| = \begin{cases} -2x-1, & \text{se } x\leq -1 \\ 1, & \text{se } -1<x\leq 0 \\ 2x+1, & \text{se } x>0 \end{cases}$$

(b) $|x-2|-|x+1|$

Para $x-2>0$ e $x+1>0$, temos $x>2$ e $x>-1$, ou seja, $x>2$:

$x-2-x-1=-3$

Para $x-2>0$ e $x+1\leq 0$, não é possível haver $x>2$ e $x<-1$.

Para $x-2\leq 0$ e $x+1>0$, temos $x\leq 2$ e $x>-1$, ou seja, $-1<x\leq 2$:

$-(x-2)-(x+1)=-x+2-x-1=-2x+1$

Para $x-2\leq 0$ e $x+1\leq 0$, temos $x\leq 2$ e $x\leq -1$, ou seja, $x\leq -1$:

$-(x-2)-[-(x+1)]=-x+2+x+1=3$

Logo a solução é:

$$|x-2|-|x+1| = \begin{cases} 3, & \text{se } x\leq -1 \\ -2x+1, & \text{se } -1<x\leq 2 \\ -3, & \text{se } x>2 \end{cases}$$

(c) $|2x-1|+|x-2|$

Para $x\leq \dfrac{1}{2}$, $2x-1<0$ e $x-2<0$, assim temos:

$-(2x-1)-(x-2)=-2x+1-x+2=-3x+3.$

Para $x\geq 2$, $2x-1\geq 0$ e $x-2\geq 0$, assim temos:

$2x-1+x-2=3x-3.$

Para $\dfrac{1}{2}\leq x<2$, $2x-1\geq 0$ e $x-2<0$, assim temos:

$2x - 1 - (x - 2) = 2x - 1 - x + 2 = x + 1.$

Logo a solução é:

$$|2x - 1| + |x - 2| = \begin{cases} -3x + 3, & \text{se } x \leq \dfrac{1}{2} \\ x + 1, & \text{se } \dfrac{1}{2} < x < 2 \\ 3x - 3, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

(d) $|x| + |x - 1| + |x - 2|$

Para $x \leq 0$, $x \leq 0$, $x - 1 < 0$ e $x - 2 < 0$, assim temos:

$-(x) - (x - 1) - (x - 2) = -x - x + 1 - x + 2 = -3x + 3.$

Para $x \geq 2$, $x > 0$, $x - 1 > 0$ e $x - 2 \leq 0$, assim temos:

$(x) + (x - 1) + (x - 2) = 3x - 3.$

Para $0 < x \leq 1$, $x > 0$, $x - 1 \leq 0$ e $x - 2 < 0$, assim temos:

$(x) - (x - 1) - (x - 2) = x - x + 1 - x + 2 = -x + 3.$

Para $1 < x \geq 2$, $x > 0$, $x - 1 > 0$ e $x - 2 \leq 0$, assim temos:

$(x) + (x - 1) - (x - 2) = x + x - 1 - x + 2 = x + 1.$

Logo a solução é:

$$|x| + |x - 1| + |x - 2| = \begin{cases} -3x + 3, & \text{se } x \leq 0 \\ -x + 3, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ x + 1, & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 3x - 3, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

6. $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow (|x + y|)^2 = (|x| + |y|)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x + y)^2 = |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 2|x| \cdot |y| + y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xy = |x| \cdot |y| \Leftrightarrow xy = |xy|$

Pela definição do módulo de um número real, $|xy| \geq 0$, logo $xy \geq 0$.

Assim conclui-se: $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy = |xy| \Leftrightarrow xy \geq 0$

7. (a) $|x - y| \geq |x| - |y|$

$|x| = |x+y-y| \leq |x-y| + |y| \Leftrightarrow |x-y| \geq |x| - |y|$

(b) $|x-y| \geq |y| - |x|$

$|y| = |y-x+x| = |-(x-y)+x| \leq |-(x-y)| + |x| = |x-y| + |x| \Leftrightarrow$
$|x-y| \geq |y| - |x|$

(c) $||x| - |y|| \leq |x-y|$

$|x| - |y| \geq 0$ resulta em $||x| - |y|| = |x| - |y| \leq |x-y|$ e comforme item a) acima fica provada a desigualdade.

$|x| - |y| \leq 0$ resulta em $||x| - |y|| = |y| - |x| \leq |x-y|$ e comforme item b) acima fica provada a desigualdade.

Logo $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

1.4 Intervalos

1. (a) $4x - 3 < 6x + 2 \Leftrightarrow 4x - 6x < 2 + 3 \Leftrightarrow -2x < 5 \Leftrightarrow x > -\dfrac{5}{2}$

   $\{x \in \mathbb{R} \mid 4x - 3 < 6x + 2\} \ = \,]-\dfrac{5}{2}, +\infty[$

   (b) $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

   $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\} \ = \,]-1, 1[$

   (c) $|2x - 3| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x - 3 \leq 1 \Leftrightarrow -1 + 3 \leq 2x \leq 1 + 3 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$

   $\{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 3| \leq 1\} \ = \ [1, 2]$

   (d) $3x + 1 < \dfrac{x}{3} \Leftrightarrow 3(3x + 1) < x \Leftrightarrow 9x + 3 < x \Leftrightarrow 8x < -3 \Leftrightarrow x < -\dfrac{3}{8}$

   $\{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 1 < \dfrac{x}{3}\} \ = \,]-\infty, \dfrac{3}{8}[$

2. $4 - r \geq 2$, $4 + r \leq 5$ e $r > 0$

   $4 - r \geq 2 \Leftrightarrow -r \geq -2 \Leftrightarrow r \leq 2$

   $4 + r \leq 5 \Leftrightarrow r \leq 1$, logo $0 < r \leq 1$.

3. $p - r \geq a$ e $p + r \leq b$ com $a < b$

   $p - r \geq a \Leftrightarrow -r \geq a - p \Leftrightarrow r \leq p - a$

   $p + r \leq b \Leftrightarrow r \leq b - p$

   Como $r > 0$, tem-se $0 < r \leq p - a$ ou $0 < r \leq b - p$.

   r deve ser no máximo o menor valor dentre $p - a$ e $b - p$ para que não se ultrapasse o intervalo $]a, b[$.

4. (a) $x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 1) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 0.$

   O conjunto solução da inequação é $]1, 2[$

   (b) $\dfrac{2x - 1}{x + 3} > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 0$ e $x + 3 > 0$ ou $2x - 1 < 0$ e $x + 3 < 0$, logo:

   $x > \dfrac{1}{2}$ e $x > -3$ ou $x < \dfrac{1}{2}$ e $x < -3$.

   O conjunto solução da inequação é representado por:

   $]\dfrac{1}{2},\ +\infty[$ e $]-\infty, -3[$.

   Obs.: Há algum erro no enunciado ou na solução apresentada no livro.

(c) $x^2 + x + 1 > 0$ para todos os números reais, logo a solução é:

$]-\infty,\ +\infty[$.

(d) $x^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$.

O conjunto solução da inequação é $]-3, 3[$

1.5 Propriedades dos Intervalos Encaixantes e Propriedade de Arquimedes

1.6 Existência de raízes

Chapter 2

Funções

2.1 Funções de Uma Variável Real a Valores Reais

1. (c) $f(x) = x^2$ e $ab \neq 0$.

$$\frac{f(a+b)-f(a-b)}{ab} = \frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{ab} = \frac{a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)}{ab} = \\ = \frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{ab} = \frac{4ab}{ab} = 4$$

(d) $f(x) = 3x+1$ e $ab \neq 0$.

$$\frac{f(a+b)-f(a-b)}{ab} = \frac{3(a+b)+1-[3(a-b)+1]}{ab} = \frac{3a+3b+1-(3a-3b+1)}{ab} = \\ = \frac{3a+3b+1-3a+3b-1}{ab} = \\ = \frac{6b}{ab} = \frac{6}{a}$$

2. Simplifique $\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}$ $(x \neq p)$:

(i) $f(x) = x^3$ e p qualquer.

$$\frac{f(x)-f(p)}{x-p} = \frac{x^3-p^3}{x-p} = \frac{(x-p)(x^2+xp+p^2)}{x-p} = x^2+px+p^2$$

(j) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $p = 1$

$$\frac{f(x)-f(p)}{x-p} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{1}}{x-1} = \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x-1}{1}} = \frac{1-x}{x(x-1)} = -\frac{x-1}{x(x-1)} = -\frac{1}{x}$$

(l) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $p = 2$

$$\frac{f(x)-f(p)}{x-p} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} = \frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2} = \frac{2-x}{2x(x-2)} = -\frac{x-2}{2x(x-2)} = -\frac{1}{2x}$$

(m) $f(x) = x^2 - 3x$ e $p = -2$

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(p)}{x-p} &= \frac{x^2-3x-[(-2)^2-3\cdot(-2)]}{x-(-2)} = \frac{x^2-3x-(4+6)}{x+2}\\ &= \frac{x^2-3x-10}{x+2} = \frac{(x+2)(x-5)}{x+2} = x-5\end{aligned}$$

(n) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e $p = 3$

$$\frac{f(x)-f(p)}{x-p} = \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3^2}}{x-3} = \frac{\frac{3^2-x^2}{x^2\cdot 3^2}}{x-3} = \frac{3^2-x^2}{3^2x^2(x-3)} = -\frac{x^2-3^2}{3^2x^2(x-3)} = -\frac{(x-3)(x+3)}{3^2x^2(x-3)} = -\frac{x+3}{9x^2}$$

(o) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e $p = -3$

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(p)}{x-p} &= \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(-3)^2}}{x-(-3)} = \frac{\frac{(-3)^2-x^2}{(-3)^2x^2}}{x+3} = \frac{(-3)^2-x^2}{(-3)^2x^2(x+3)} = -\frac{x^2-(-3)^2}{(-3)^2x^2(x+3)} =\\ &= -\frac{(x+3)(x-3)}{(-3)^2x^2(x+3)} = -\frac{x-3}{9x^2}\end{aligned}$$

(p) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $p \neq 0$

$$\frac{f(x)-f(p)}{x-p} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{p}}{x-p} = \frac{\frac{p-x}{xp}}{x-p} = \frac{p-x}{px(x-p)} = -\frac{x-p}{px(x-p)} = -\frac{1}{px}$$

(q) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e $p \neq 0$

$$\frac{f(x)-f(p)}{x-p} = \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{p^2}}{x-p} = \frac{\frac{p^2-x^2}{x^2p^2}}{x-p} = \frac{p^2-x^2}{p^2x^2(x-p)} = -\frac{x^2-p^2}{p^2x^2(x-p)} = -\frac{(x-p)(x+p)}{p^2x^2(x-p)} = -\frac{x+p}{p^2x^2}$$

3. Simplifique $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $(h \neq 0)$:

(j) $f(x) = 2x^2 + x + 1$

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{2(x+h)^2 + (x+h) + 1 - (2x^2 + x + 1)}{h} = \\ &= \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) + x + h + 1 - 2x^2 - x - 1}{h} \\ &= \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + h - 2x^2}{h} \\ &= \frac{4xh + 2h^2 + h}{h} = 4x + 2h + 1\end{aligned}$$

(l) $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \\ &= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2\end{aligned}$$

(m) $f(x) = x^3 + 2x$

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^3 + 2(x+h) - (x^3 + 2x)}{h} = \\ &= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2x + 2h - x^3 - 2x}{h} = \\ &= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2h}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 + 2\end{aligned}$$

(n) $f(x) = x^3 + x^2 - x$

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^3 + (x+h)^2 - (x+h) - (x^3 + x^2 - x)}{h} = \\ &= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + x^2 + 2xh + h^2 - x - h - x^3 - x^2 - x}{h} = \\ &= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2hx + h^2 - h}{h} = \\ &= 3x^2 + 3xh + h^2 + 2x + h - 1\end{aligned}$$

(o) $f(x) = 5$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{5-5}{h} = 0$$

(p) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \frac{\dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{x-x-h}{x(x+h)h} = -\frac{h}{x(x+h)h} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

(q) $f(x) = 2x^3 - x$

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{2(x+h)^3-(x+h)-(2x^3-x)}{h} = \\ &= \frac{2(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x-h-2x^3+x}{h} = \\ &= \frac{2x^3+6x^2h+6xh^2+2h^3-x-h-2x^3+x}{h} = \\ &= \frac{6x^2h+6xh^2+2h^3-h}{h} = 6x^2+6xh+2h^2-1\end{aligned}$$

(r) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h} = \frac{\dfrac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2}}{h} = \frac{\dfrac{x^2-(x^2+2xh+h^2)}{(x+h)^2x^2}}{h} = \\ &= \frac{x^2-x^2-2xh-h^2}{(x+h)^2x^2h} = \frac{-2xh-h^2}{(x+h)^2x^2h} = -\frac{2x+h}{(x+h)^2x^2}\end{aligned}$$

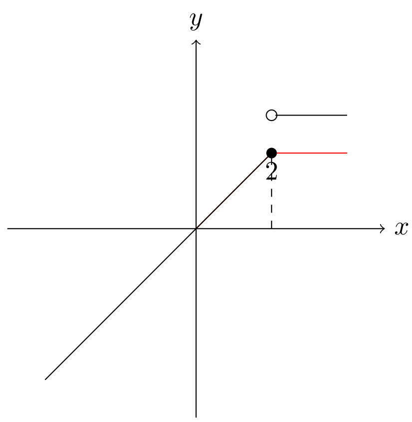
(s) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\dfrac{1}{x+h+2} - \dfrac{1}{x+2}}{h} = \frac{\dfrac{x+2-(x+h+2)}{(x+h+2)(x+2)}}{h} = \frac{x+2-x-h-2}{(x+h+2)(x+2)h} = \\ &= -\frac{h}{(x+h+2)(x+2)h} = -\frac{1}{(x+h+2)(x+2)}\end{aligned}$$

4. (j)

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 2 \\ 3, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$D_g = \mathbb{R}$



5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

16.

17.

18.

19.

20.

21.

22.

23.

24.

25.

26.

27.

28.

29.

30.

31.

32.

33.

34.

35.

36.

37.

38.

39.

40.

41.

42.

43.

44.

45.