2024 春微积分 A(2) 期中小班辅导讲义

by LagrangeKMnO4

2024/04/11

考点一：多元函数的极限、连续性、可微性

累次极限、重极限

常见证明极限存在的方法：

1. 利用不等式将齐次式降次
2. 利用不等式化为一元函数，利用一元函数性质证明极限存在

例 1：求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

例 2：求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{xy}$.

例 3：求 $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

例 4：求 $\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

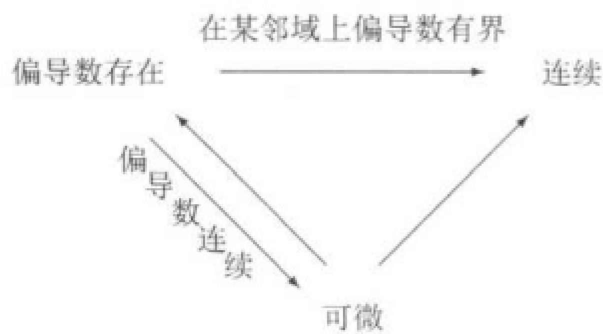
例 5：求 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2}$

常见证明极限不存在的方法：

1. 选择两条道路证明道路极限不同
2. 选择一条道路不存在道路极限

例 1：证明 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3}$ 不存在.

连续性、可微性判则



可微性判则可总结为下图：

如果想证明一个函数不可微，常用方法如下：

(1). $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处至少有一个偏导数不存在. (2). $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点不连续. (3). （最常用）$df-f_x(x_0,y_0)dx-f_y(x_0,y_0)dy\neq o(\sqrt{dx^2+dy^2})$.

需要注意：偏导数连续并不是函数可微的必要条件，如果想证明函数可微，一般需要用定义直接证明

例 1：已知 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(1). 函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否连续？

(2). 偏导数 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 是否存在？

(3). 函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否可微？

例 2：已知 $f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(1). 函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否连续？

(2). 偏导数 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 是否存在？

(3). 函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否可微？若可微，求出全微分.

(4). 偏导数 f'_x 和 f'_y 在原点处是否连续？

例 3：设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微，但偏导数都存在.

例 4：令 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq 0\\ y, & x=0.\end{cases}$，求证其在定义域上连续.

考点二：多元函数的复合微分、Taylor 展开

多元函数的复合求偏导

若 $z=f(u_1,u_2,\dots,u_m)$ 在 $(u_1,u_2,\dots,u_m)$ 可微，$u_i=g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$ 在点 $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ 有偏导数，则复合函数 $z=f(g_1(x_1,x_2,\dots,x_n),g_2(x_1,x_2,\dots,x_n),\dots,g_m(x_1,x_2,\dots,x_n))$ 关于 x_j 的偏导数存在且

$$\frac{\partial z}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

例 1：设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续偏导数，$f(x,x^2)=1$，若 $f_x(x,x^2)=x$, 求 $f_y(x,x^2)$.

例 2：设 $z=f(x,\frac{x}{y})$，其中 $f\in C^{(2)}(\mathbb{R}^2)$，求 $z_{yx}(0,2)$.

例 3：已知 $f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处可微，$f(1,1)=1,\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=2,\frac{\partial x}{\partial y}(1,1)=3,g(x)=f(x,f(x,x,))$，则 $g'(1)=$.

多元函数的 Taylor 展开

以二阶展开考察为主，注意观察是否有能转化为一元形式的结构.

例 1：$\frac{1}{x+y}$ 在 $(1,0)$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为.

注意：分清是 Taylor 展开式还是多项式，余项是从哪个点展开

例 2：设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1-e^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$，求 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的四阶 Taylor 多项式，并求 $f_{yx}(0,0),f_x^{(4)}(0,0)$.

考点三：多元函数微分学与几何

这一部分考点以求曲线、曲面的切平面（向量）、法平面（向量）为主，应注意理解计算方法。

曲线的切向量和法平面求法

三维空间中的曲线如果以参数形式给出，考虑方程

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t),a\le t\le b.$$

如果 x,y,z 均光滑，则切向量为

$$\tau=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)).$$

切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\tau_x}=\frac{y-y_0}{\tau_y}=\frac{z-z_0}{\tau_z}$$

法平面方程为

$$\tau_x(x-x_0)+\tau_y(y-y_0)+\tau_z(z-z_0)=0.$$

如果以两个曲面的交线来给出，即

$$F(x,y,z)=G(x,y,z)=0.$$

且函数光滑性足够良好，则考虑交点 p_0，如果 F,G 的 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$$

的秩为 2，则切向量为

$$\tau=\Big(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\Big)$$

曲面的切平面和法向量求法

1. 显式曲面 $z=f(x,y)$ 的法向量 $\mathbf{n}=\pm(f_x(x,y),f_y(x,y),-1)$
2. 隐式曲面 $F(x,y,z)=0$ 的法向量为 $\mathbf{n}=\pm(F_x(x,y,z),F_y(x,y,z),F_z(x,y,z))$.
3. 参数曲面 $x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v)$ 的法向量为

$$\mathbf{n}=\Big(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big)$$

已知法向量 $\mathbf{n}=(a,b,c)$ ，则法平面方程为

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

以上囊括了所有相关题目的通用公式解法，但不推荐死记硬背

例 1：求 $e^z=xy+yz+zx$ 在 $(1,1,0)$ 处的切平面方程.

例 2：求曲面 $x=u\cos v,y=u\sin v,z=v$ 在 $(x_0,y_0,z_0)=(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$ 处的一个单位法向量.

例 3：求曲线 $x=t,y=2\cos t,z=3\sin t$ 在 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

例 4：求 $2x^2+3y^2+z^2=9$ 和 $3x^2+y^2-z^2=0$ 的交线在 $(1,-1,2)$ 处的法平面方程.

例 5：求 $x^2+y^2+z^2=9,z=xy$ 交线在 $(1,2,2)$ 处的切线方程.

函数的方向导数和梯度

关键在于认识到方向导数和梯度之间的关系，设方向 l 的方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta$ ，则

$$\frac{\partial f}{\partial l}(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta).$$

从而，沿梯度方向即为方向导数最大的方向，逆梯度方向即为方向导数最小的方向。

例 1：证明：若 $\mathbb{R}^2$ 上的可微函数 f 满足

$$x f_x + y f_y = 0.$$

则 $f(x, y)$ 为常数.

例 2：设

$$f(x, y) = \begin{cases} x - y + \frac{xy^2}{x^2+y^2}. & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

证明：$f(x, y)$ 在原点处连续，沿任何方向的方向导数都存在，但不可微.

考点四：多元函数的极值、最值；条件极值、条件最值

不带约束的极值和最值

若 f 在驻点 p_0 的某邻域上有二阶连续偏导数，则

1. 若 H 正定，则 $f(p_0)$ 为极小值
2. 若 H 负定，则 $f(p_0)$ 为极大值
3. 若 H 不定，则 p_0 不是极值点
4. 若 H 半定，则应进一步判别（不在课纲内）

对于整体求极值的步骤，可归结如下：

1. 通过解方程组 $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ 求出驻点 p_0.
2. 如果 p_0 的邻域上有二阶连续偏导，则考察 H 是否满足上述充分条件
3. 考察奇异点（即 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 不完全存在的点）是否为极值点.
4. 考察没有二阶连续偏导的驻点是否为极值点.

对于整体求最值，可归结如下：

1. 求出所有的整体极值点
2. 求出边界点的最值（或极限）
3. 比较所有的极值，并选取最值（或证明最值并不存在）

例 1：求函数 $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}(x+y)$ 的极值和值域.

（提示）：1. 利用驻点求极值 2. 求无穷远处的极限 3. 进行比较，并指出定义域连通

例 2：证明存在常数 C 使得对于 $\forall x,y\geq 0$，均有 $x^2+y^2\leq Ce^{x+y-2}$，并求 C 的最小值.

带约束的条件极值和最值

满足约束条件 $\varphi_i(x_1,\dots,x_n)=0$ ，求函数 $f(x_1,\dots,x_n)$ 的极值问题，可归结为对 Lagrange 函数

$$L(x_1,x_2,\dots,x_n)=f(x_1,\dots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(x_1,\dots,x_n)$$

的极值问题，求解方法：

1. 作出 Lagrange 函数
2. 求 $\frac{\partial L}{\partial x_i}=0$ 与 $\varphi_i=0$ ，联立解出驻点和 λ_i 的具体值，并要求驻点处 Jacobi 矩阵的秩 m.
3. 对每个驻点 p_0，计算 Hesse 矩阵 $H(p_0)$，若 $H(p_0)$ 正定，则为极小值点；若负定，则为极大值点；若不定，则需进一步考虑（不在课纲范围内）

例 1：用 Lagrange 乘子法求函数 $f(x,y)=e^{xy}\sin(x+y)$ 在曲线 $x^2+y^2=1$ 上的最大值和最小值.

例 2：设 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$，求 f 在曲线 $x^2-xy+y^2=1$ 上的最大值和最小值.

例 3：用 Lagrange 乘子法求椭圆 $5x^2+4xy+2y^2=1$ 的长半轴和短半轴.

例 4：求 $f(x,y)=xy^3-x$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$ 上的最大值和最小值.

考点五：隐函数、反函数求导

以计算为主，但需要注意使用条件，并且学会灵活计算。

隐函数定理

设二元函数 $F(x,y)$ 满足以下条件：

1. 在 (x_0,y_0) 邻域上有关于 x,y 的连续偏导.
2. $F(x_0,y_0)=0$.
3. $F_y(x_0,y_0)\neq 0$.

则有：在 (x_0,y_0) 的邻域内，方程 $F(x,y)=0$ 可以确定唯一函数 $y=f(x)$ ；$f(x)$ 在 $B(x_0)$ 上连续；$f(x)$ 在 $B(x_0)$ 上有连续导数 $f'(x)=-\frac{F_x}{F_y}$，连续导数的阶数和 F 在邻域上的光滑性一致.

例 1：证明方程 $1+xy=\arctan(x+y)$ 在 $(x_0,y_0)=(-1,1)$ 的邻域中确定了一个任意次连续可微的隐函数 $y=y(x)$ ，并求 $y'(-1)$ 和 $y''(-1)$.

例 2：已知方程 $2z - e^z + 1 + \int_y^{x^2} \sin(t^2)\mathrm{d}t = 0$ 在 $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,0)$ 的某个邻域中确定了一个隐函数 $z = z(x,y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1)$.

例 3：已知 φ 为二阶连续可微函数，$z = z(x,y)$ 为由方程 $x^3 + y^3 + z^3 = \varphi(z)$ 确定的隐函数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 即其存在的条件.

例 4：设 $z = f(x,y)$ 是由方程 $F(x-y, y-z) = 0$ 确定的隐函数，求 z_x, z_y, z_{xy}.

例 5：设 $f(x+y, y+z, z+x) = 0$，求 z_x, z_y, z_{yx}.

例 6：设 $z = z(x,y)$ 是由方程 $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$ 确定的二阶函数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

反函数定理

若 $u = f(x,y), v = f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 的某个邻域中连续可微，$u_0 = f(x_0, y_0), v_0 = g(x_0, y_0)$ 且

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\bigg|_{(x_0,y_0)} \neq 0.$$

则在 (u_0, v_0) 的邻域内存在唯一的反函数组 $x = x(u,v), y = y(u,v)$，满足 $u_0 = u(x_0,y_0), v_0 = v(x_0,y_0)$，且成立

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1.$$

例 1：已知 $\begin{cases} x = e^v + u^3 \\ y = e^u - v^3 \end{cases}$，将点 $(u_0, v_0) = (1, 0)$ 映为 $(x_0, y_0) = (2, e)$，则其逆映射 $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ 在点 $(x_0, y_0) = (2, e)$ 处的 Jacobi 矩阵的行列式 $\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\bigg|_{(x,y)=(2,e)}$ 为

例 2：已知 $\begin{cases} x = e^v + u^3 \\ y = e^u - v^3 \end{cases}$，当 $(u,v) = (0,1)$ 时，$(x,y) = (e,0)$，则偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}(e,0) =$.

考点六：含参积分

含参常义积分的相关性质

设 $D \subset \mathbb{R}$，若二元函数 $f(x,t)$ 定义在 $[a,b] \times D$ 上，对于任意 $t \in D$，设 $f(x,t)$ 作为 x 的函数在 $[a,b]$ 上常义可积，则 $\varphi(t) = \int_a^b f(x,t)dx$ 是定义在 D 上的含参变量常义积分，且满足以下性质：

1. 设 t_0 是 D 的聚点，如果 $\lim_{t \to t_0} f(x,t) = \psi(x)$，且收敛关于 $x \in [a,b]$ 是一致的，则 $\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界可积，且

$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t)=\lim_{t\to t_0}\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x.$$

2. 设 $f(x,t)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则

$$\varphi(t)=\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x.$$

   在 $[c,d]$ 上连续.

3. 设 $f(x,t)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则积分可交换次序.
4. 设 $f(x,t),f_t(x,t)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则 $\varphi(t)$ 在 $[c,d]$ 上可导，导数为 $\varphi'(t)=\int_a^b f_t(x,t)\mathrm{d}x$.
5. 设 $f(x,t)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，$\alpha(t),\beta(t)$ 在 $[c,d]$ 上连续，且 $a\le\alpha(t),\beta(t)\le b$，则

$$\varphi(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\mathrm{d}x$$

在 $[c,d]$ 上连续，若进一步 f_t 在矩形上连续，且 α,β 可导，则 $\varphi(t)$ 也可导，导函数为

$$\varphi(t)=f(\beta(t),t)\beta'(t)-f(\alpha(t),t)\alpha'(t)+\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f_t(x,t)\mathrm{d}x.$$

例 1：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，考察函数

$$F(t)=\int_0^1\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x.$$

的连续性.

含参广义积分判敛准则

考虑含参变量广义积分 $\varphi(t)=\int_a^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x$，设积分对每一个 t 收敛，如果 $\forall\varepsilon>0$，存在 \$A_0\$（与 t 无关），当 $A>A_0$ 时，有

$$\left|\int_A^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

则称含参变量广义积分关于 t 一致收敛.

下面是其他证明一致收敛的判则：

下面是证明广义积分不一致收敛的判则：

例 1：证明 $\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha x}\mathrm{d}x$ 在 $0<\alpha_0\le\alpha<+\infty$ 上一致收敛，但在 $0<\alpha<+\infty$ 上不一致收敛.

例 2：证明 $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}\mathrm{d}x$ 在 $0<\alpha<+\infty$ 上非一致收敛.

1. **Cauchy 一致收敛准则** $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t \in T$ 一致收敛的充分必要条件是: $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $A_0 > a$, 当 A, $A' > A_0$ 时, 对一切 $t \in T$, 有
$$\left|\int_A^{A'} f(x,t)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$
2. **Weierstrass 判别法 (M-判别法)** 设 $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $t \in T$ 上收敛, 如果
   (1) $|f(x,t)| \leqslant F(x)$, $a \leqslant x < +\infty$, $t \in T$,
   (2) $\int_a^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛,
   则 $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t \in T$ 一致收敛.
3. **Abel 判别法** 设
   (1) $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t \in T$ 一致收敛,
   (2) 函数 $g(x,t)$ 关于 x 单调, 且作为二元函数是有界的,
   则 $\int_a^{+\infty} f(x,t)g(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t \in T$ 一致收敛.
4. **Dirichlet 判别法** 设
   (1) $\int_a^{A} f(x,t)\,\mathrm{d}x, \forall A \geqslant a, t \in T$ 是一致有界的,
   (2) 函数 $g(x,t)$ 关于 x 单调, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x,t) = 0$ 关于 $t \in T$ 是一致的,
   则 $\int_a^{+\infty} f(x,t)g(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t \in T$ 一致收敛.
5. **Dini 定理** 设 $f(x,t)$ 在 $D = \{(x,t) \mid a \leqslant x < +\infty, \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ 上连续且不变号, $\varphi(t) = \int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 则 $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t \in [\alpha,\beta]$ 为一致收敛.

图 1: 收敛性判则

1. 按定义: $\exists\varepsilon_0>0,\forall M>0$, 存在 $A(M)>M$ 以及 $t(M)\in T$, 使得

$$\left|\int_{A(M)}^{+\infty} f(x,t(M))\,\mathrm{d}x\right|\geqslant\varepsilon_0.$$

§23.2 含参变量广义积分 **287**

2. 按 Cauchy 一致收敛准则: $\exists\varepsilon_0>0,\forall M$, 存在 $A_1(M)>M,A_2(M)>M$ 以及 $t(M)\in T$, 使得

$$\left|\int_{A_1(M)}^{A_2(M)} f(x,t(M))\,\mathrm{d}x\right|\geqslant\varepsilon_0.$$

3. 若 $f(x,t)$ 在 $[a,+\infty)\times T$ 上连续, t_0 为 T 的一个聚点, $\int_a^{+\infty}f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $T\setminus\{t_0\}$ 上收敛, 而 $\int_a^{+\infty}f(x,t_0)\,\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty}f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 T 上必定不一致收敛.
4. 若 $f(x,t)$ 在 $D=\{a\leqslant x<+\infty,\alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$ 上连续, $\varphi(t)=\int_a^{+\infty}f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上存在但不连续, 则 $\int_a^{+\infty}f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上不一致收敛.

图 2: 证明不收敛的判则

含参广义积分的相关性质

连续性: 设 $f(x,t)$ 在 $D=\{(x,t)|a\leq x<+\infty,\alpha\leq t\leq\beta\}$ 上连续，且 $\int_a^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x$ 关于 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛于 $\varphi(t)$，则 $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

可微性：设 $f(x,t),f_t(x,t)$ 在 D 上连续，$\int_a^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上收敛于 $\varphi(t)$，$\int_a^{+\infty}f_t(x,t)\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛，则 $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，且

$$\varphi'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f_t(x,t)\mathrm{d}x$$

例 1：已知 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-tx^2}}{x^2}\mathrm{d}x,t\in[0,+\infty)$.

(1). 证明 $f(t,x)=\begin{cases}\frac{1-e^{-tx^2}}{x^2}, & x\neq 0,t\in\mathbb{R}\\ t, & x=0,t\in\mathbb{R}.\end{cases}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

(2). 证明：$I(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

(3). 证明：$I(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导并计算 $I'(t)$.

(4). 求 $I(t)$.

例 2：设 $f\in C^{(0)}[0,1]$ 且 $f(x)>0,\alpha>0$. 分类讨论 $g(y)=\int_0^1\frac{y^\alpha f(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x(y\in[0,+\infty))$ 的连续性.

具体含参积分的计算

例 1：计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan bx-\arctan ax}{x}\mathrm{d}x$, 其中 $b>a>0$.

例 2：计算积分 $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$.

例 3：计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\mathrm{d}x$

考点七：证明题（选讲）

多元函数极限、连续、可微性的证明题

这一类一般是通过 $\mathbb{R}^n$ 上的点集性质（如聚点定理、Heine 归结定理、有限覆盖定理等）进行估计和放缩，或通过反证法导出谬误.

例 1: $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个去心邻域上有定义，如果: (1) 对 x_0 的每一个邻域内的 x，都有 $\lim_{y\to y_0}f(x,y)=g(x)$. (2) $\lim_{x\to x_0}f(x,y)=h(y)$ 关于 y 在 $0<|y-y_0|<\eta$ 一致.

则有 $\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{y\to y_0}h(y)$.

例 2：设 $f(x,y)$ 分别对 x,y 连续，且对 y 单调，则 $f(x,y)$ 是 D 上的二元函数.

例 3：函数 $f(x,y)$ 定义在单位闭正方形上，在底边上连续，证明：$\exists\delta>0$ 使得 $f(x,y)$ 在 $I_\delta=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le\delta\}$ 上有界.

例 4：设 f 是定义在连通集 D 上的连续函数，$a,b\in D$，则对于任意 $C\in(f(a),f(b))$，存在点 $c\in D$，使得 $f(c)=C$.

例 5：$f(x,y)$ 在全空间上连续，且 $\lim_{x^2+y^2\to\infty}f(x,y)$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有界且一致连续.

例 6：若函数 $f(x,y)$ 的偏导数 f_x 和 f_y 在区域 D 内存在，$f_x=f_y=0$，证明 $f(x,y)$ 在 D 上为常值函数.

例 7：设 K 是 $\mathbb{R}^k$ 的紧集，函数 $f:\mathbb{R}^m\times K\to\mathbb{R}$ 连续，记 $g(x)=\min_{y\in K}f(x,y)$ ，证明 g 连续.

例 8：设二元函数 $f(x,y)$ 在开圆盘 D_R 上可微，在闭圆盘上连续. 若函数 $f(x,y)$ 在圆周上取常数值，则其在开圆盘上必有驻点.