

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учебник Воронежского университета

На правах рукописи
УДК 539.182

Запрягаев Сергей Александрович

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Конспект лекций и практических занятий
по курсу "ЭЛЕКТРОДИНАМИКА"

Воронеж
2004

Глава 1

Введение

§1 Предисловие

Настоящая издание включает в себя полный курс лекций и практических занятий по разделу теоретической физики "Электродинамика" прочитанный автором на физическом факультете Воронежского университета в течении ряда лет. Представленный материал является учебным и в той или иной степени изложен в учебниках, учебных пособиях и задачниках по Электродинамике. В этом смысле изложение во многом опирается на известный учебный материал. Более того, многие идеи изложения и практические примеры взяты из классических учебников и учебных пособий. Однако, конкретное расписание часов лекций и практических занятий в Воронежском университете определило структуру распределения материала между лекциями, семинарами и самостоятельной работой студентов. Для облегчения усвоения материала студентами университета и подготовлено настоящее издание.

Выбор тем определен государственным образовательным стандартом по специальности физика, а конкретный объем материала утвержденными рабочими планами и пониманием автора важности той или иной темы. Содержание федеральной компоненты стандарта второго поколения общепрофессиональной дисциплины "Теоретическая физика" по разделу Электродинамика включает в себя следующий набор дидактических единиц отнесенных к этому разделу:

Микроскопические уравнения Максвелла. Сохранение заряда, энергии, импульса, момента импульса. Потенциалы электромагнитного поля; калибровочная инвариантность. Мультипольные разложения потенциалов. Решение уравнений для потенциалов (запаздывающие потенциалы). Электромагнитные волны в вакууме. Излучение и рассеяние, радиационное трение.

Принцип относительности. Релятивистская кинематика и динамика, четырехмерный формализм. Преобразования Лоренца. Тензор электромагнитного поля. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Ковариантная запись уравнений и законов сохранения для электромагнитного поля и для частиц. Законы преобразования для напряженностей полей, для частоты и волнового вектора электромагнитной волны.

Усреднение уравнений Максвелла в среде, поляризация и намагни-

ченность среды, векторы индукции и напряженности полей. Граничные условия. Электростатика проводников и диэлектриков. Пондеромоторные силы. Постоянное магнитное поле. Ферромагнетизм. Сверхпроводимость. Квазистационарное электромагнитное поле, скин-эффект. Магнитная гидродинамика. Уравнение электромагнитных волн. Дисперсия диэлектрической проницаемости, поглощение, формулы Крамерса-Кронига. Фазовая и групповая скорости в диспергирующей среде. Отражение и преломление. Распространение в неоднородной среде. Электромагнитные волны в анизотропных средах. Электромагнитные флуктуации (флуктуационно - диссипативная теорема). Элементы нелинейной электродинамики.

Если сравнить содержание настоящего издания с требованиями стандарта, то можно убедиться в их формальном соответствии. Тем не менее, глубина изложения, уровень наглядности и их целесообразность определяется наличием конкретного, утвержденного кафедрой и Советом учебного плана, имеющейся информационной базой обеспечения учебного процесса, расписанием аудиторных и самостоятельных занятий и, конечно, субъективными представлениями об основных категориях курса самого лектора. В этом смысле, все издержки настоящего изложения целиком являются мерой ответственности автора, но не сопутствующих обстоятельств.

Представленный материал соответствует следующей организации учебного процесса по данному курсу — два академических часа лекций, плюс два академических часа практических занятий в аудитории под руководством преподавателя, плюс три — четыре часа самостоятельной работы студента в неделю в течение одного академического года. На языке "кредитной" системы используемой, например, в США такая сетка часов работы над курсом соответствует 4 кредитам в каждом из двух семестров, то есть суммарно за год — 8 кредитам.¹ В рамках Европейской системы оценки объема работы над курсом, представленная сетка организации учебного процесса соответствует, ориентировочно 6?? кредитам ECTS.

Для обеспечения информационного сопровождения при организации самостоятельной работы студентов полный курс лекций и семинарских занятий выставлен в Интернет в электронном ви-

¹Для справки ориентировочно 1 кредит = 1 академическому часу работы в аудитории с преподавателем плюс 1-2 часа самостоятельной работы вне аудитории в неделю. Приближенность оценки связана с тем, что академический год в университетах США, как правило, разбит на 2 семестра по 15 недель каждый. В то время как в российской системе, обычно, академический год разбит на два неравных семестра по 17 и 18 недель

де в формате pdf файлов по адресу: <http://www.main.vsu.ru/ec/> и на образовательном портале Воронежского университета <http://www.voronezh.openet.ru/University.nsf/Index.htm>. Первый вариант доступа к электронным материалам курса свободный при прохождении регистрации. Регистрация включает в себя ввод информации о пользователе – Имя, электронный адрес пользователя и определение типа пользователя – студент, преподаватель или иное. При заполнении карточки регистрации пользователю на указанный им электронный адрес высылается пароль позволяющий беспрепятственно использовать все электронные материалы курса. Второй вариант доступа через образовательный портал осуществляется по правилам портала. Такой вариант доступа позволяет вести обучение в интерактивном режиме взаимодействия с преподавателем.

Материал лекционных и практических занятий собран в учебный модуль с целью сохранения единства применяемых обозначений.

Полный электронный вариант курса в формате pdf находится на CD, являющимся приложением к данному изданию.

§2 Как изучать курс?

Вряд ли существует единый рецепт для всех позволяющий гарантировать достаточно глубокое освоение материала предусмотренного стандартом образования. Индивидуальное восприятие материала и субъективность изложения чаще находятся не в совпадающих областях. Поэтому самостоятельному обучающемуся следует ориентироваться на свое собственное восприятие и не ограничиваться только изложенным материалом. Тем не менее, представленный материал для изучения в определенной мере замкнут. В связи с этим, для несуществующего "усредненного" восприятия самодостаточно. В этом смысле последовательное чтение и выполнение учебных заданий, в среднем, приведет к усвоению материала. Учитывая, однако, различный уровень начальной подготовки можно указать возможные траектории изучения для слабо и сильно подготовленных студентов.

Так как "Электродинамика" изучает свойства векторного электромагнитного поля. По этой причине хорошее владение векторным анализом является необходимым условием для понимания содержания изложенного материала. Традиционно в курс "Электродинамика" включается и специальная теория относительности четырехмерный формализм которой ис-

пользует тензорное исчисление. Таким образом тензорное исчисление также является необходимым инструментом при изложении курса в целом. Читатель хорошо владеющий векторным и тензорным анализом может без ущерба для понимания опустить материал изложенный в главе 2 и непосредственно переходить к последующим главам. Тем не менее в Воронежском университете материал главы 2 включает в себя четыре семинарских занятия с которых начинается последовательное изучение курса электродинамики. Изложенный материал разбит на лекционный материал, материал изучаемый на практических занятиях и материал для самостоятельных занятий. Настоятельно рекомендуется выполнить все задания для самостоятельного решения и детально разобрать приведенные примеры.

§3 Введение. История возникновения и развития электродинамики

Четыре типа фундаментальных взаимодействий – сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное являются предметом изучения в физике. Именно эти взаимодействия управляют физическими процессами и явлениями. Сильное взаимодействие обеспечивает притяжение частиц, образующих ядра атомов. Электромагнитное взаимодействие обеспечивает притяжение или отталкивание частиц, обладающих специальным свойством – зарядом. Электромагнитное взаимодействие приблизительно на два порядка слабее сильного. Слабое взаимодействие, интенсивность которого приблизительно на 16 порядков слабее сильного, ответственно за распад "элементарных" частиц. Наконец, гравитационное взаимодействие, которое на 43 - 44 порядка слабее сильного, ответственно за притяжение частиц, обладающих массами.

Первым из четырех перечисленных было открыто гравитационное взаимодействие. Следующим было электромагнитное взаимодействие.

Электромагнитное взаимодействие, которое определяет колоссальное количество явлений природы характеризуется участием так называемого электромагнитного поля. Электромагнитное поле – это особая форма материи, посредством которой осуществляется взаимодействие между заряженными частицами. Электродинамика – физическая теория определяющая свойства электромагнитного поля. Начиная с середины XX века, электродинамика делится на классическую и квантовую. Законы классической электродинамики сформулированы в середине XIX века в уравнениях

Максвелла. Система уравнений Максвелла позволяет определить значения основных характеристик электромагнитного поля – вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} и вектора магнитной индукции поля \mathbf{B} в зависимости от распределения в пространстве зарядов и токов и является основой классической электродинамики. Последующие детальные исследования электромагнитных взаимодействий, показали, что законы классической электродинамики оказались неприменимы для процессов, протекающих на малых пространственно – временных интервалах, что привело к созданию, так называемой, квантовой электродинамики.

Первые исследования электромагнитных явлений сформировали два независимых раздела, определяющих свойства взаимодействия покоящихся зарядов – электростатику и взаимодействие постоянных токов – магнитостатику. Дальнейшие исследования выявили, что электрические и магнитные явления взаимосвязаны и проявляются как частные случаи более общего, так называемого, электромагнитного поля.

В настоящем курсе рассматривается классическая электродинамика, которая хотя и имеет отмеченное выше ограничение, не утратила своего значения и является фундаментом большинства разделов электротехники, радиотехники, электроники (кроме квантовой), классической оптики и т.д. На основе уравнений классической электродинамики рассматриваются многие проблемы поведения плазмы в лабораторных условиях и в космосе, широкий круг прикладных и теоретических задач многих других разделов физики.

Проявления электрических и магнитных явлений наблюдали с древних времен [11]. Так были найдены минералы, притягивающие железо, обнаружено, что янтарь (по гречески – электрон), потертый о шерсть, притягивает легкие предметы, наблюдались такие грозные проявления природного электричества как разряды молний, шаровая молния, различные природные свечения привлекавшие своей загадочностью и силой. Исследования и наблюдения этих явлений осуществлялось веками, однако только в 1600 году Вильям Гильберт разграничил электрические и магнитные явления. Им было открыто существование магнитных полюсов и установлено, что земной шар является гигантским магнитом.

В 17 -ом, начале 18 -го веков были построены первые электростатические машины, установлено существование зарядов двух типов, обнаружена электропроводность металлов. В 1745 году была изобретена лейденская банка, которая явилась первым конденсатором и дала возможность

накапливать большие электрические заряды. В 1747 - 1753 годах Бенджамин Франклин сформулировал первую последовательную теорию электрических явлений, установил электрическую природу молнии и изобрел молниеотвод.

Во второй половине 18 века началось количественное изучение электрических явлений. Г.Кавендиш в 1773 и Шарль Огюст Кулон в 1785 установили закон взаимодействия неподвижных точечных зарядов.

Следующий этап в развитии электродинамики оказался связанным с открытием Луиджи Гальвани в конце 18 века "животного электричества" . Алесандр Вольт на основе опытов Гальвани изобрел в 1800 году первый источник электрического тока. В 1807 году Гемфри Дэви, пропустив ток через растворы щелочей получил неизвестные ранее металлы - натрий и калий. В 1826 году Георг Симон Ом определил количественную зависимость электрического тока от напряжения в цепи. В 1830 году Карл Фридрих Гаусс сформулировал основную теорему электростатики. В 1841 году Джеймс Прескотт Джоуль установил, что количество теплоты, выделяемое в проводнике пропорционально квадрату силы тока.

Однако наиболее фундаментальное открытие было сделано Хансом Христианом Эрстедом в 1820 году, установившим связь между электрическими и магнитными явлениями. В том же году Андре-Мари Ампер нашел закон взаимодействия электрических токов. Открытия Эрстеда и Ампера положили начало развитию электродинамики как науки.

В 1830-1840 -х годах существенный вклад в развитие электродинамики внес Майкл Фарадей - основатель общего учения об электромагнитных явлениях, в котором все электрические и магнитные явления рассматривались с единой точки зрения. В 1831 году Фарадей открыл закон электромагнитной индукции - возбуждение электрического тока в контуре, находящемся в переменном магнитном поле. Это открытие положило начало электротехники. В 1833 -34 годах Фарадей установил законы электролиза, в 1837 году открыл явление поляризации диэлектриков, в 1845 году явления парамагнетизма и диамагнетизма, вращение плоскости поляризации света в магнитном поле. Фарадей предположил, что наблюдаемое взаимодействие электрических зарядов и токов осуществляется через создаваемые ими в пространстве электрическое и магнитное поля, вводя таким образом сами поля как реальные физические объекты. Фарадей исходил из концепции близкодействия, отрицая распространенную в то время теорию, согласно которой

тела взаимодействуют друг с другом через пустоту. При этом Фарадей ввел понятие о силовых линиях как механических натяжениях в гипотетической среде – эфире.

В 1861 – 73 годах классическая электродинамика получила свое развитие и завершение в работах Джеймса Клерка Максвелла. Максвелл сформулировал фундаментальные уравнения классической электродинамики, добавив к известным экспериментальным законам и соотношениям гипотезу о порождении магнитного поля переменным электрическим полем. По сути данная гипотеза не воспринималась научным сообществом почти тридцать лет. При этом вслед за Фарадеем, Максвелл рассматривал электромагнитные явления как особую форму механических процессов протекающих в эфире. Важнейшим следствием уравнений Максвелла являлось предсказание электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света. Экспериментально наличие таких волн было обнаружено Генрихом Герцем в 1886-89 годах. Это явилось окончательным подтверждением теории Максвелла.

Попытки применения законов классической электродинамики к исследованию электромагнитных процессов в движущихся средах привели к значительным противоречиям и проблемам. Стремясь разрешить их Альберт Эйнштейн в 1905 году сформулировал специальную теорию относительности. Эта теория опровергла идею существования эфира, наделенного механическими свойствами. Стало очевидным, что законы электродинамики не могут быть сведены к законам классической механики. Таким образом понятие электромагнитного поля приобрело смысл специфической формы существования материи, обладающей всеми привычными механическими атрибутами – энергией, импульсом, моментом импульса, но не только ими. Конкретное исследование свойств электромагнитного поля, способы его создания и использования и являются предметом изучения электродинамики.

Глава 2

Векторный и тензорный анализ. Семинары.

§1 Векторная алгебра

Содержание данной главы не имеет прямого отношения к курсу Электродинамика и может быть опущено при изучении теми, кто хорошо владеет основами векторного и тензорного анализа. Векторный анализ является тем основным математическим языком на котором изложена теория электромагнитного поля. А тензорный анализ — это математический язык специальной (и общей) теории относительности. По этим причинам в данной главе приведены все необходимые понятия и сведения из этих близких друг другу разделов математики.

Материал настоящей главы является предметом изучения на первых четырех практических занятиях курса Электродинамика, а также содержит необходимый материал для организации самостоятельной работы.

Скаляр

Скаляром называется величина, заданная численным значением.

Примерами скалярных величин являются длина, масса, время, температура, любые реальные числа и так далее. Скаляры обозначаются обычными символами, принятыми в элементарной алгебре. Математические операции со скалярными величинами удовлетворяют правилам элементарной алгебры.

Если каждой точке x, y, z пространства R соответствует скалярная функция $\phi(x, y, z)$, то говорят, что в пространстве R определено *скалярное поле* ϕ .

Вектор

Вектором называется величина, заданная численным значением и направлением в пространстве.

Примерами векторов являются скорость, сила, ускорение, напряженность поля и т.п.

Графически вектор представляется стрелкой указывающей направление. Математическое изображение вектора есть: \vec{A} , или \mathbf{A} , или \vec{A} . Ниже используется обозначение — \mathbf{A} . Геометрически, вектор изображается отрезком прямой линии, направление которой совпадает с направлением вектора \mathbf{A} в данной точке, а длина отрезка или *модуль вектора* $A = |\mathbf{A}|$ равна числен-

ному значению вектора (в определенных единицах измерения).

Если каждой точке x, y, z пространства соответствует вектор $\mathbf{A}(x, y, z)$, то говорят, что в пространстве определено *векторное поле* \mathbf{A} .

Алгебра векторов

Для векторов определен ряд математических обозначений и операций, которые составляют алгебру векторов.

Нулевой вектор - это вектор, модуль которого равен нулю. Направление нулевого вектора не задано.

Два вектора называются *равными*, если модули их одинаковы, а направления совпадают. Равенство векторов обозначается: $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Равные векторы могут располагаться в различных точках пространства.

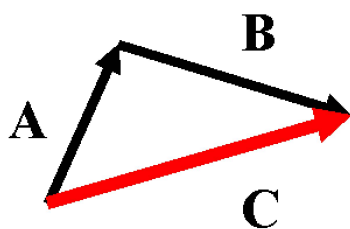


Рис. 2.1:

Суммой двух векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} называется вектор \mathbf{C} образованный путем соединения начала вектора \mathbf{A} с концом вектора \mathbf{B} начало которого совмещено с концом вектора \mathbf{A} (рис. 2.1). Сумма векторов обозначается $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, то есть $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Исходно векторы \mathbf{A} и \mathbf{B} могли располагаться в пространстве в произвольных точках. Но для определения вектора суммы необходимо путем параллельного переноса вектора \mathbf{B} , то есть с сохранением его направления, совместить начало вектора \mathbf{B} с концом вектора \mathbf{A} .

Суммой N векторов является вектор \mathbf{C} , замыкающий $N + 1$ - угольник, построенный на слагаемых векторах.

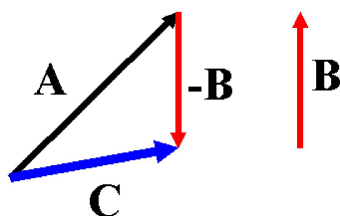


Рис. 2.2:

Из определения суммы векторов следует *коммутативность* $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ и *ассоциативность* $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ векторного сложения.

Вектор называется *противоположным* заданному \mathbf{A} (обозначается $-\mathbf{A}$), если его модуль равен $|\mathbf{A}|$, а направление противоположно вектору \mathbf{A} .

Разностью векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} называется сумма уменьшаемого вектора с вектором, противоположным вычитаемому $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$ (рис. 2.2).

Проекция вектора \mathbf{A} на ось \mathbf{e} есть число, равное:

$$A_e = A \cos \varphi \quad (2.1)$$

где φ - угол между направлением вектора \mathbf{A} и положительным направлением оси \mathbf{e} (рис. 2.3).

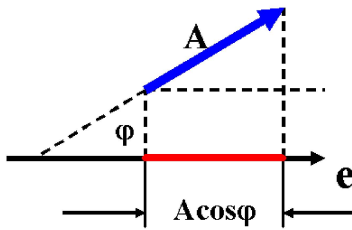


Рис. 2.3:

Умножение вектора \mathbf{A} на скаляр a задает вектор, модуль которого равен $a \cdot A$, а направление совпадает с направлением вектора \mathbf{A} , если $a > 0$ и противоположно направлению вектора \mathbf{A} , если $a < 0$.

Умножение вектора на скаляр удовлетворяет соотношениям:

$$a(b \mathbf{A}) = (a \cdot b) \mathbf{A}, \quad a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a \mathbf{A} + a \mathbf{B}, \quad (a + b) \mathbf{A} = a \mathbf{A} + b \mathbf{A}.$$

Линейно зависимыми называются векторы, для которых выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{A}_i = 0,$$

где α_i - числа, не все равные нулю.

Два линейно зависимых вектора параллельны (*коллинеарны*) друг другу. Три линейно зависимых вектора лежат в одной плоскости (*компланарны*).

Базисом трехмерного пространства называется произвольная система трех линейно независимых векторов \mathbf{e}_i , $i \in 1 \div 3$.

При заданном базисе для любого вектора имеет место разложение:

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{k=1}^3 A_k \mathbf{e}_k. \quad (2.2)$$

Откладывая тройку базисных векторов из одной точки пространства (*начало координат*) и называя прямые, являющиеся продолжением \mathbf{e}_k , осями координат, получим косоугольную декартову систему координат. Если базисные векторы взаимно ортогональны и $|\mathbf{e}_k| = 1$, то они называются *ортами* прямоугольной декартовой системы координат. Часто используются следующие общепринятые для декартовой системы координат обозначения $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$ - орт оси X , $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$ - орт оси Y , $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$ - орт оси Z .

Радиус- вектор точки \mathbf{r} - есть вектор, проведенный из начала координат к заданной точке пространства

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} = \sum_{k=1}^3 x_k \mathbf{e}_k.$$

Здесь x, y, z - декартовы координаты точки и кроме того использованы общепринятые алгебраические обозначения $x_1 \equiv x$; $x_2 \equiv y$; $x_3 \equiv z$. Модуль \mathbf{r} обозначается через r и равен по определению $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. *Единичный радиус- вектор* - есть вектор, равный $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

Для векторов определены два основных типа произведений - скалярное и векторное.

Скалярное произведение

Скалярное произведение двух векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} , обозначается символом $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и определяется как число равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A B \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Скалярное произведение двух векторов обозначается также символом $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$. В соответствии с определением (2.1) скалярное произведение равно произведению модуля одного из векторов на проекцию другого вектора на направление первого:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A B \cos \theta = A_B \cdot B = A \cdot B_A \quad (2.3)$$

По определению скалярное произведение *коммутативно* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ и *дистрибутивно* $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$.

На основании (2.3) проекция вектора на ось равна скалярному произведению орта оси на вектор. Из равенства скалярного произведения нулю следует взаимная ортогональность векторов. Орты прямоугольной декартовой системы координат ортогональны между собой $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Здесь δ_{ij} - символ Кронекера, равный $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Используя (2.2) для скалярного произведения (2.3), имеем

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{k,n=1}^3 A_k B_n (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_k) = \sum_{k=1}^3 A_k B_k = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (2.4)$$

Пример 2.§1.1. Доказать, что модуль вектора $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ есть $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$.

► По определению $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A A \cos 0^\circ = A^2$. Таким образом $A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$. В результате с учетом (2.4) $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$. ◀

Пример 2.§1.2. Найти единичный вектор, параллельный сумме двух векторов $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

► Сумма векторов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 равна $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Модуль вектора $R = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = 7$. Отсюда единичный вектор параллельный \mathbf{R} есть $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R = (3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k})/7$. ◀

Пример 2.§1.3. Определить вектор имеющий начальную точку $A(x_1, y_1, z_1)$ и конечную точку $B(x_2, y_2, z_2)$. Найти модуль этого вектора.

► Начальная точка искомого вектора \mathbf{x} расположена в пространстве в точке радиус вектор которой равен $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$. Радиус - вектор конечной точки есть $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$. Таким образом $\mathbf{r}_1 + \mathbf{x} = \mathbf{r}_2$ или $\mathbf{x} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$. Следовательно модуль вектора $x = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. ◀

Пример 2.§1.4. Найти проекцию вектора $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ на вектор $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$.

► Единичный вектор в направлении вектора \mathbf{B} равен

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 7^2}} = \frac{4}{9}\mathbf{i} - \frac{4}{9}\mathbf{j} + \frac{7}{9}\mathbf{k}$$

Проекция вектора \mathbf{A} на вектор \mathbf{B} равна

$$A_B = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \frac{4}{9} + \frac{8}{9} + \frac{7}{9} = \frac{19}{9}. \quad \blacktriangleleft$$

Векторное произведение

Векторным произведением двух векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} называется вектор равный по величине произведению модулей векторов на синус угла между ними и направленный перпендикулярно плоскости векторов сомножителей в ту сторону, откуда поворот от первого сомножителя \mathbf{A} ко второму \mathbf{B} на меньший угол виден против хода часовой стрелки.

Векторное произведение обозначается символом $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$ или $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = A B \sin \theta \mathbf{n}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (2.5)$$

где \mathbf{n} - единичный вектор, указывающий направление вектора векторного произведения.

Векторное произведение *некоммутативно*, так как $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = -[\mathbf{B} \times \mathbf{A}]$, но *дистрибутивно* $[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C})] = [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] + [\mathbf{A} \times \mathbf{C}]$.

Для пары ненулевых векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} из равенства $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{0}$ следует параллельность этих векторов. Модуль векторного произведения $||[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]||$ имеет простой геометрический смысл - это есть площадь параллелограмма, построенного на векторах входящих в векторное произведение.

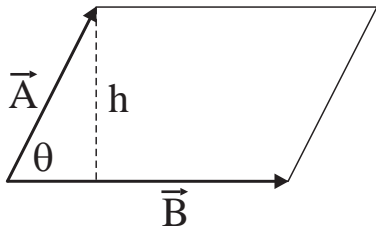


Рис. 2.4:

Пример 2.§1.5. Доказать, что площадь параллелограмма со сторонами образованными векторами \mathbf{A} и \mathbf{B} равна модулю векторного произведения $||[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]||$ рис(2.4).

► Площадь параллелограмма равна $S = h|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \sin \theta |\mathbf{B}| = ||[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]||$. Соответственно площадь треугольника со сторонами \mathbf{A} и \mathbf{B} равна половине площади параллелограмма или $||[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]||/2$. ◀

Векторное произведение ортов прямоугольной декартовой системы координат равно:

$$[\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j] = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \quad i, j \in 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

Здесь ε_{ijk} - символ Леви-Чевита, равный нулю, если хотя бы два индекса совпадают; равный $+1$, если i, j, k образуют циклическую; и -1 , если i, j, k образуют нециклическую перестановку от последовательности 1, 2, 3. В практических приложениях используются следующие соотношения для ε_{ijk} , которые вытекают из его определения [15]:

$$\varepsilon_{ikl} \cdot \varepsilon_{rst} = \begin{vmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it} \\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt} \\ \delta_{lr} & \delta_{ls} & \delta_{lt} \end{vmatrix}; \quad \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ikl} \cdot \varepsilon_{ist} = \begin{vmatrix} \delta_{ks} & \delta_{kt} \\ \delta_{ls} & \delta_{lt} \end{vmatrix}; \quad (2.7)$$

$$\sum_{i,k=1}^3 \varepsilon_{ikl} \cdot \varepsilon_{ikt} = 2\delta_{lt}; \quad \sum_{i,k,l=1}^3 \varepsilon_{ikl} \cdot \varepsilon_{ikl} = 6.$$

Используя символ Леви-Чевита определитель квадратной матрицы 3×3

можно представить в следующем виде:

$$\det A = ||A|| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i,j,k=1}^3 A_{1i} A_{2j} A_{3k} \varepsilon_{ijk}. \quad (2.8)$$

На основании (2.2), (2.6), получаем общее выражение для вычисления векторного произведения в декартовой системе координат:

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \sum_{i,j=1}^3 A_i B_j [\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j] = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} A_i B_j \mathbf{e}_k = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

Пример 2.§1.6. Доказать теорему синусов для плоского треугольника.

► Пусть векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ являются сторонами плоского треугольника как показано на рисунке 2.5. Как следует из примера 2.§1.5 площадь данного треугольника может быть определена из векторного произведения пар векторов образующих стороны треугольника

$$||[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]|| = ||[\mathbf{b} \times \mathbf{c}]|| = ||[\mathbf{c} \times \mathbf{a}]||.$$

Последнее равенство означает выполнение соотношений

$$a b \sin \gamma = b c \sin \alpha = c a \sin \beta.$$

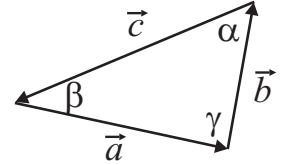


Рис. 2.5:

Разделив полученное равенство на произведение модулей векторов $a \cdot b \cdot c$, образующих стороны треугольника, получим доказательство искомой теоремы:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}. \quad \blacktriangleleft$$

Смешанное произведение

Смешанное произведение трех векторов определяется равенством

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] &= \sum_{i,j,n=1}^3 A_n B_i C_j \mathbf{e}_n \cdot [\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j] = \sum_{i,j,n,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} A_n B_i C_j (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_k) = \\ &= \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} A_k B_i C_j = \sum_{k,i,j=1}^3 \varepsilon_{kij} A_k B_i C_j = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из (2.10) вытекает, что значение смешанного произведения не меняется при циклической перестановке векторов, входящих в него. Численно смешанное произведение равно объему параллелепипеда, построенного на векторах, входящих в произведение.

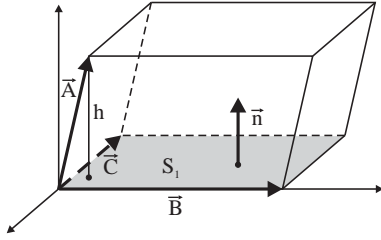


Рис. 2.6:

Пример 2.§1.7. Доказать, что смешанное произведение векторов $\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]$ численно равно объему параллелепипеда, для которого векторы $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ являются сторонами см рис 2.6.

► Объем параллелепипеда равен

$$V = h S_1 = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}(|[\mathbf{B} \times \mathbf{C}]|)) = \mathbf{A} \cdot \{ |[\mathbf{B} \times \mathbf{C}]| \mathbf{n} \} = \mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]. \blacktriangleleft$$

Если любые два вектора в смешанном произведении одинаковы или параллельны, то такое произведение равно нулю. Если три вектора лежат в одной плоскости, смешанное произведение также равно нулю. Таким образом, если для трех векторов $\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] \neq 0$, то данные векторы образуют базис. При этом, если $\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] > 0$, базис называется правым. Если $\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] < 0$, базис называется левым. Используя (2.10), ε_{ijk} можно представить в следующем виде

$$\varepsilon_{ijk} = [\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j] \cdot \mathbf{e}_k \quad (2.11)$$

Двойное векторное произведение

Двойное векторное произведение обозначается $[\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]]$ и для его вычисления справедлива формула

$$\mathbf{D} \equiv [\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]] = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (2.12)$$

Для доказательства равенства (2.12) перепишем двойное векторное произведение с учетом (2.2). Используя равенство (2.6), найдем:

$$\mathbf{D} = \sum_{i,j,k=1}^3 A_i B_j C_k [\mathbf{e}_i \times [\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k]] = \sum_{i,j,k,l,n=1}^3 A_i B_j C_k \varepsilon_{ljk} \varepsilon_{lin} \mathbf{e}_n$$

Выполняя суммирование по l на основании (2.7) и (2.4), получим:

$$\mathbf{D} = \sum_{i,n=1}^3 \left(A_i B_n C_i - A_i B_i C_n \right) \mathbf{e}_n = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

Упражнения

- 1) Найти косинус угла между векторами $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
- 2) Вычислить скалярное и векторное произведение векторов $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.
- 3) Даны векторы $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Определить, какие два из них взаимно перпендикулярны, а какие параллельны или антипараллельны.
- 4) Определить единичный вектор, перпендикулярный векторам $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ и $\mathbf{C} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
- 5) Четыре вектора \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} лежат в одной плоскости.
Показать, что $[(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] = 0$.
- 6) Показать, что $[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] + [\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A})] + [\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] = 0$.
- 7) Даны три вектора $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.
Найти: $\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]$, $[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]$, $[\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]$, $[\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A})]$.
- 8) Даны векторы: $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
Определить правую или левую систему образуют эти векторы?
- 9) Доказать, что базис декартовой системы координат правый.
- 10) Известны векторы \mathbf{A} и \mathbf{B} . Представить вектор \mathbf{A} в виде суммы двух векторов: \mathbf{A}_{\parallel} - параллельном и \mathbf{A}_{\perp} перпендикулярном к \mathbf{B} .

§2 Дифференцирование векторов

В общем случае векторы являются функциями скалярных или векторных величин. Например, зависимость вектора \mathbf{A} от скалярной величины t обозначают в виде $\mathbf{A}(t)$ и говорят, что задана вектор-функция $\mathbf{A}(t)$ от скалярного аргумента t . Изменение вектор-функции от скалярного аргумента графически изображается *годографом* вектора - кривой, описываемой концом вектора \mathbf{A} при изменении t .

Производной от $\mathbf{A}(t)$ по скалярному аргументу t называется предел

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

Такая производная направлена по касательной к годографу вектора. Если базис \mathbf{e}_k не зависит от t , то

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \sum_{k=1}^3 \frac{dA_k}{dt} \mathbf{e}_k \quad (2.13)$$

Так как производная от вектора $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ также есть вектор зависящий от параметра t можно рассматривать ее производную по параметру t . Если эта производная существует она обозначается $\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}$. Аналогично производные старших порядков могут быть получены.

Правила дифференцирования вектор-функции следуют из определения производной и в простейших случаях имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{B}}{dt}; & \frac{d}{dt}(\varphi\mathbf{A}) &= \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{A} + \varphi \frac{d\mathbf{A}}{dt}; \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}; & \frac{d}{dt}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] &= \left[\frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} \right] + \left[\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right]\end{aligned}$$

Частная производная вектора

Если вектор \mathbf{A} зависит более чем от одного скалярного параметра, например x, y , то это обозначается $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y)$. Частная производная вектора \mathbf{A} по переменной x определяется обычным образом

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(x + \Delta x, y) - \mathbf{A}(x, y)}{\Delta x}$$

Дифференциал вектора

Если в декартовой системе координат $\mathbf{A}(t) = \mathbf{i} A_1 + \mathbf{j} A_2 + \mathbf{k} A_3$, то дифференциал вектора равен $d\mathbf{A} = \mathbf{i} dA_1 + \mathbf{j} dA_2 + \mathbf{k} dA_3$. Если вектор зависит, для примера, от трех параметров $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, то

$$d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} dz.$$

Пример 2.§2.1 . Доказать, что для вектора $\mathbf{A}(t)$ модуль которого постоянен выполняется условие ортогональности для \mathbf{A} и его производной .

► Так как модуль вектора $\mathbf{A}(t)$ постоянен это означает выполнение равенства $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \text{const}$. В результате

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{A} = 2 \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0$$

Последнее равенство и доказывает ортогональность постоянного по модулю вектора и вектора его производной. ◀

Пример 2.§2.2 . Показать, что для произвольного вектора $\mathbf{A}(t)$ выполняется равенство .

$$\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = A \frac{dA}{dt} \quad (2.14)$$

► Дифференцируя левую и правую стороны равенства $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$ по параметру t получим

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = 2 \mathbf{A} \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt} A^2 = 2 A \frac{dA}{dt}$$

что и доказывает справедливость равенства 2.14. ◀

Если вектор \mathbf{A} или скаляр φ зависят от радиус- вектора \mathbf{r} : $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$, $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$, т.е. являются функциями координат x, y, z , то вводятся специальные приемы дифференцирования.

Градиент скаляра

Градиент скалярной функции в декартовой системе координат определен равенством:

$$\text{grad } \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}. \quad (2.15)$$

Градиент скалярной функции имеет геометрическую интерпретацию вытекающую из следующих рассуждений. Приращение $d\varphi$ при изменении \mathbf{r} на $d\mathbf{r} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz$ равно с учетом определения (2.15):

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \left(\text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r} \right) \quad (2.16)$$

Рассмотрим, для примера, две точки, лежащие на поверхности $\varphi = \text{const}$ на расстоянии $d\mathbf{r}$ друг от друга. При перемещении из одной точки в другую $d\varphi = 0$, следовательно, на основании (2.16) в данном случае $\text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r} = 0$. Отсюда $\text{grad } \varphi$ перпендикулярен поверхности $\varphi = \text{const}$ в любой точке. Если рассмотреть случай, когда $d\mathbf{r}$ направлен от одной поверхности $\varphi = c_1$ к соседней $\varphi = c_2$, то $d\varphi = \Delta c = \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r}$. Для данного $d\varphi$, $|d\mathbf{r}|$ - минимален, если $d\mathbf{r}$ параллелен $\text{grad } \varphi$. Следовательно, *градиент скалярной функции есть вектор, указывающий направление максимальной скорости изменения функции φ .*

Дивергенция вектора

Дивергенция вектора в декартовой системе координат определе-

на равенством:

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial b_k}{\partial x_k} \quad (2.17)$$

Ротор вектора

Ротор вектора в декартовой системе координат определяется следующим образом:

$$\operatorname{rot} \mathbf{b} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (2.18)$$

Операции $\operatorname{grad} \varphi$, $\operatorname{div} \mathbf{b}$, $\operatorname{rot} \mathbf{b}$ можно записать универсально, введя оператор "набла" - $\vec{\nabla}$, который в декартовой системе равен:

$$\vec{\nabla} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}; \quad \nabla^2 \equiv (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

В результате $\operatorname{grad} \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi$, $\operatorname{div} \mathbf{b} \equiv (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{b})$, $\operatorname{rot} \mathbf{b} \equiv [\vec{\nabla} \times \mathbf{b}]$.

Пример 2.§2.3 . Вычислить $\operatorname{grad} (1/r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ - модуль радиуса вектора .

$$\blacktriangleright \operatorname{grad} \frac{1}{r} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} = \frac{-\mathbf{i}x - \mathbf{j}y - \mathbf{k}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \blacktriangleleft$$

Пример 2.§2.4 . Найти вектор нормали к поверхности сферы радиуса R в произвольной точке поверхности .

\blacktriangleright Поверхность сферы в системе координат связанной с центром сферы определяется уравнением $\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$. По определению единичный вектор нормали к поверхности сферы равен

$$\mathbf{n} = \frac{\operatorname{grad} \varphi}{|\operatorname{grad} \varphi|} = \frac{x}{R} \mathbf{i} + \frac{y}{R} \mathbf{j} + \frac{z}{R} \mathbf{k}. \blacktriangleleft$$

Пример 2.§2.5 . Показать, что для произвольной функции $f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ - модуль радиус - вектора имеет место равенство .

$$\operatorname{grad} f(r) = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

► В соответствии с определением операции $\text{grad } f$ находим с учетом правила дифференцирования сложной функции

$$\text{grad } f(r) = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z}{r} \right) = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad \blacktriangleleft$$

Упражнения

1) Заданы две поверхности $xy^2z = 3x + z^2$ и $3x^2 - y^2 + 2z = 1$. Найти угол между этими поверхностями в точке $x = 1, y = -2, z = 1$.

2) Вычислить $\text{div } \mathbf{r}$ и $\text{rot } \mathbf{r}$ где \mathbf{r} - радиус-вектор.

3) Вычислить $\text{grad} (\sin(z)\sqrt{x^2 + y^2})$; $\text{grad} (\sin(xyz))$

4) Вычислить $\text{div } \mathbf{A}$ и $\text{rot } \mathbf{A}$, где

$$\mathbf{A} = \frac{x \sin z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} + \frac{y \sin z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j} + \cos \left(z \sqrt{x^2 + y^2} \right) \mathbf{k}$$

§3 Интегрирование векторов

Для векторов определено несколько типов интегралов, которые играют важную роль в векторном анализе

Интеграл по параметру

Интеграл от вектора \mathbf{A} , в случае если вектор \mathbf{A} зависит от одного скалярного параметра $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$, вычисляется в декартовой системе координат по правилу

$$\int \mathbf{A}(t) dt = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \int A_k(t) dt. \quad (2.19)$$

Контурный интеграл

Пусть L есть произвольная кривая в пространстве точки которой определяются радиус-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Интеграл вида

$$\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_L (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \quad (2.20)$$

является примером *контурного интеграла* или интеграла вдоль заданной линии. Если линия L - замкнута, то интеграл (2.20) называется *циркуляцией вектора* вдоль замкнутого контура и обозначается

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_L (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$$

Из определения контурного интеграла следует, что если интегрируемый вектор можно представить в виде градиента скалярной функции $\mathbf{A} = \text{grad } \varphi$, то контурный интеграл не зависит от формы контура и определяется только положением начальной и конечной точки контура.

$$\int_{(1)}^{(2)} \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r} = \int_L \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = \int_L d\varphi = \varphi(2) - \varphi(1)$$

Соответственно для замкнутого контура циркуляция такого вектора равна нулю.

Поверхностные интегралы

Пусть \mathbf{n} - единичный вектор нормали к поверхности S . Данный вектор в общем случае зависит от положения на поверхности. Определим векторный элемент поверхности $d\mathbf{s} = \mathbf{n} ds$, где ds - бесконечно малый элемент поверхности. Двукратный интеграл вида

$$\int \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds$$

является одним из примеров интеграла от вектора по поверхности S и называется *поток вектора* через поверхность S . В декартовой системе координат такой интеграл может быть вычислен в соответствии с равенством:

$$\int \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds = \sum_{k=1}^3 \int_S A_k(\mathbf{r}) n_k(\mathbf{r}) ds.$$

Здесь A_k и n_k проекции векторов на декартовы оси, а \mathbf{r} - радиус - вектор бесконечно-малого элемента поверхности ds .

Для сокращения записи допускается писать вместо символов повторных интегралов один символ интеграла, указывая при этом явно, что интегрирование осуществляется по поверхности S

Два других типа интеграла по поверхности не имеют специального наименования и в декартовой системе координат вычисляются в соответствии с представленными выражениями

$$\int_S f d\mathbf{s} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_r \int_S f(\mathbf{r}) n_k(\mathbf{r}) ds;$$

$$\int_S [\mathbf{A} \times d\mathbf{s}] = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \int_S A_i(\mathbf{r}) n_j(\mathbf{r}) ds;$$

где n_k — проекции вектора единичной нормали \mathbf{n} на декартовы оси, ε_{ijk} — символ Леви-Чевита (2.6).

Объемный интеграл

Трехкратный интеграл от вектора по объему V в декартовой системе координат определяется как сумма объемных интегралов от компонент вектора

$$\int \int \int_V \mathbf{A} dv \equiv \int_V \mathbf{A} dv = \sum_{k=1}^3 \int_V A_k(\mathbf{r}) dv.$$

Здесь также использована условность записи трехкратного интеграла одним символом интеграла с указанием объема интегрирования для сокращения записи.

Пример 2.§3.1 . Вычислить неопределенный интеграл от вектора \mathbf{A} зависящего от параметра t . $\mathbf{A}(t) = (1 - t^2)\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j} - 3t\mathbf{k}$.

► В соответствии с (2.19) получим

$$\begin{aligned} \int \mathbf{A}(t) dt &= \mathbf{i} \int (1 - t^2) dt + \mathbf{j} \int 2t^2 dt + \mathbf{k} \int (-3) dt = \\ &= \left(t - \frac{1}{3} t^3 \right) \mathbf{i} + \frac{1}{2} t^4 \mathbf{j} - 3t \mathbf{k} + \mathbf{C} \end{aligned}$$

где \mathbf{C} — произвольный, постоянный (не зависящий от t) вектор. ◀

Пример 2.§3.2 . Вычислить следующий интеграл от векторного произведения векторов, зависящих от параметра

$$\int \left[\mathbf{A}(t) \times \frac{d^2 \mathbf{A}(t)}{dt^2} \right] dt$$

► С учетом очевидного равенства

$$\frac{d}{dt} \left[\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right] = \left[\mathbf{A} \times \frac{d^2 \mathbf{A}}{dt^2} \right] + \left[\frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right] = \left[\mathbf{A} \times \frac{d^2 \mathbf{A}}{dt^2} \right]$$

искомый интеграл равен

$$\int \left[\mathbf{A}(t) \times \frac{d^2 \mathbf{A}(t)}{dt^2} \right] dt = \left[\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right] + \mathbf{C}.$$

где \mathbf{C} — произвольная константа ◀.

Пример 2.§3.3 . Доказать, что если линейный интеграл от вектора \mathbf{F} , вычисленный между двумя точками A и B не зависит от формы

линии, соединяющей эти точки, то интеграл вдоль любого замкнутого контура от данного вектора равен нулю рис(2.7).

► Пусть замкнутый контур L проходит через точки $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow B \Rightarrow C_2 \Rightarrow A$. Обозначим отрезок контура $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow B$ через L_1 , а отрезок $B \Rightarrow C_2 \Rightarrow A$ через L_2 . $L = L_1 + L_2$. Соответственно отрезок $A \Rightarrow C_2 \Rightarrow B$ обозначим через L_3

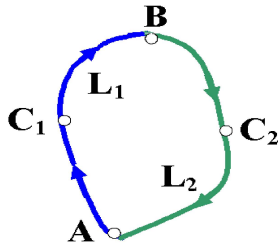


Рис. 2.7:

По условию задачи для произвольной формы контуров L_1 и L_3 имеем равенство

$$\int_{L_1} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) = \int_{L_3} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}).$$

или

$$\int_{L_1} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) - \int_{L_3} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) = 0.$$

Учитывая связь контуров L_2 и L_3 получим

$$\int_{L_1} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) + \int_{L_2} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) = 0 = \oint_L (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}).$$

Таким образом контурный интеграл вдоль любого замкнутого контура равен нулю для векторов удовлетворяющих условию задачи ◀.

Пример 2.§3.4 . Пусть произвольная поверхность S имеет проекцию R на плоскость $x-y$ декартовой системы координат. Показать, что имеет место равенство поверхностных интегралов

$$\int_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) ds = \int_R (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \frac{dx dy}{|(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})|}$$

где \mathbf{n} - единичный вектор нормали к S , а \mathbf{k} -единичный вектор вдоль оси z

► Разделим поверхность S на N элементарных площадок Δs_i , где $i \in 1, 2, \dots, N$. Выберем произвольную точку внутри Δs_i с координатами x_i, y_i, z_i . Обозначим вектор $\mathbf{A}(x_i, y_i, z_i) \equiv \mathbf{A}_i$, а единичный вектор нормали к поверхности в выбранной точке через \mathbf{n}_i . В соответствии с определением поверхностного интеграла имеем:

$$\int_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N (\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{n}_i) \Delta s_i. \quad (2.21)$$

Проекция Δs_i на плоскость $x-y$ равна $|(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{k}) \Delta s_i|$. Данная проекция с точностью до слагаемых более высокого порядка равна $\Delta x_i \Delta y_i$. Таким об-

разом

$$\Delta s_i \simeq \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{|(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{k})|}$$

Подставляя данное выражение в (2.21) получим

$$\int_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N (\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{n}_i) \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{|(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{k})|} = \int_R (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \frac{dx dy}{|(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})|}$$

Пример 2.§3.5. Вычислить объемный интеграл от радиус- вектора \mathbf{r} по объему куба с ребром a .

$$\mathbf{I} = \int_V \mathbf{r} dv.$$

► В соответствии с определением искомый интеграл равен

$$\mathbf{I} = \int_0^a \int_0^a \int_0^a (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) dx dy dz = \frac{a^4}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}). \quad \blacktriangleleft$$

Среди интегральных соотношений важнейшее значение для векторного анализа имеют теоремы Остроградского – Гаусса и Стокса.

Теорема Остроградского - Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{b} dV = \oint_S (\mathbf{b} \cdot d\mathbf{s}). \quad (2.22)$$

Здесь S -поверхность, ограничивающая объем V , \mathbf{b} - произвольный вектор, $d\mathbf{s} = \mathbf{n}ds$, а \mathbf{n} - нормаль к поверхности.

Теорема Стокса

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{b} \cdot d\mathbf{s} = \oint_L \mathbf{b} \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.23)$$

где S - поверхность для которой контур L является границей, \mathbf{b} - произвольный вектор, $d\mathbf{s} = \mathbf{n}ds$, ds -элемент поверхности, $d\mathbf{l} = \vec{\tau}dl$, dl - бесконечно малый элемент линии, $\vec{\tau}$ - вектор касательной совпадающий с направлением обхода контура при котором поверхность остается слева.

Из (2.22) и (2.23) на основании теоремы о среднем значении интеграла для бесконечно малых объема V и поверхности S вытекают интегральные определения дивергенции вектора и проекции ротора вектора:

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{s}; \quad \left(\operatorname{rot} \mathbf{b} \right)_n = \lim_{S_n \rightarrow 0} \frac{1}{S_n} \oint_L \mathbf{b} \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.24)$$

где S_n -поверхность, ортогональная направлению нормали \mathbf{n} и ограниченная контуром L . В соответствии с выражениями (2.24) оператор $\vec{\nabla}$ можно представить в виде:

$$\vec{\nabla} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S d\mathbf{s} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{n} ds \quad (2.25)$$

Пример 2.§3.6 . Вычислить поверхностный интеграл от скалярного произведения радиус- вектора \mathbf{r} и единичного вектора нормали \mathbf{n} к произвольной замкнутой поверхности S .

► На основании (2.22) находим

$$\oint_S (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) ds = \int_V \operatorname{div} \mathbf{r} dv = \int_V 3 dv = 3V.$$

Здесь V - объем ограниченный поверхностью S . ◀

Пример 2.§3.7 . Проверить справедливость теоремы Стокса (2.23) для вектора $\mathbf{A} = (2x - y)\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} - y^2z\mathbf{k}$, если S есть верхняя полусфера сферы единичного радиуса, а L - граница полусферы .

► Выберем систему координат, начало которой совпадает с центром сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Пусть основание полусферы лежит в плоскости $x - y$. Граница L в этом случае совпадает с окружностью единичного радиуса в плоскости $x - y$, параметрическое уравнение которой есть $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t < 2\pi$. Следовательно

$$\begin{aligned} \oint_L (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}) &= \oint_L [(2x - y)dx - yz^2dy - y^2z] dz = \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \cos t - \sin t)(-\sin t)dt = \pi, \end{aligned}$$

так как координата z для контура L равна нулю. В соответствии с определением (2.18) находим $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{k}$. Таким образом

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds = \int_S (\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) ds = \int_R dx dy,$$

так как $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) ds = dx dy$, а R - есть проекция S на плоскость $x - y$. Вычисление последнего интеграла приводит к результату

$$\int_R dx dy = \int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx = 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx = \pi.$$

Таким образом, контурный интеграл от вектора \mathbf{A} совпадает со значением поверхностного интеграла от скалярного произведения ротора вектора \mathbf{A} и

единичного вектора нормали к поверхности S , что и соответствует содержанию теоремы Стокса. ◀

Упражнения

1) Доказать, что циркуляция вектора $\mathbf{A} = f(r) \mathbf{r}$ вдоль произвольного замкнутого контура равна нулю. Здесь \mathbf{r} - радиус вектор, а $f(r)$ - произвольная функция.

2) Вычислить поверхностный интеграл

$$\oint_S \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})}{r^3} ds,$$

где S - произвольная замкнутая поверхность, \mathbf{r} - радиус-вектор, а \mathbf{n} - единичный вектор нормали к поверхности.

3) Для произвольной замкнутой поверхности S доказать равенство

$$\oint_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) ds = 0,$$

если вектор $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, где \mathbf{A} - произвольный вектор.

4) Доказать, что если \mathbf{n} - внешняя единичная нормаль к произвольной замкнутой поверхности S , ограничивающей объем V , то выполняется равенство

$$\int_V \text{div } \mathbf{n} dv = S.$$

5) Доказать равенство

$$\int_V \frac{1}{r^2} dv = \oint_S \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})}{r^2} ds,$$

где S - замкнутая поверхность ограничивающая объем V , \mathbf{r} - радиус-вектор, \mathbf{n} - единичный вектор внешней нормали к поверхности S .

6) Доказать, что для любой замкнутой поверхности S выполняются равенства

$$\oint_S \mathbf{n} ds = 0; \quad \oint_S [\mathbf{r} \times \mathbf{n}] ds = 0. \quad (2.26)$$

Здесь \mathbf{n} - единичный вектор внешней нормали к поверхности S

7) Доказать, что если S произвольная замкнутая поверхность, ограничивающая объем V , для вектора $\mathbf{A} = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k}$, где a, b, c - произвольные константы, выполняется равенство

$$\oint_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) ds = (a + b + c)V.$$

§4 Вращения и инверсия системы координат

Поворот системы координат

Рассмотрим две системы координат (x_1, x_2, x_3) , (x'_1, x'_2, x'_3) , у которых начало координат и оси x_3 и x'_3 совпадают, а оси x_1, x_2, x'_1, x'_2 занимают положение в плоскости, как указано на рис 2.8.

Таким образом, штрихованная система координат K' повернута относительно не штрихованной K на угол φ , вокруг совпадающих осей x_3, x'_3 . Найдем, как связаны координаты точки A в системах K, K' .

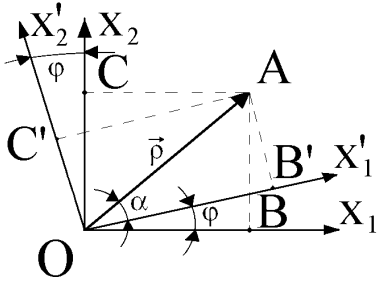


Рис. 2.8:

Положение точки A определяется двумерным радиус-вектором \vec{r} . В системе K координаты точки A равны $OB = x_1$, $OC = x_2$, соответственно в K' $OB' = x'_1$, $OC' = x'_2$. Из треугольника OAB имеем очевидные равенства: $x_1 = \rho \cos(\alpha + \varphi)$ и $x_2 = \rho \sin(\alpha + \varphi)$. Используя выражения для синуса и косинуса суммы двух углов с учетом определений $x'_1 = \rho \cos \alpha$ и $x'_2 = \rho \sin \alpha$, находим:

$$x_1 = x'_1 \cos \varphi - x'_2 \sin \varphi; \quad x_2 = x'_1 \sin \varphi + x'_2 \cos \varphi. \quad (2.27)$$

Или в матричном виде:

$$x_i = \sum_{k=1}^2 \beta_{ik} x'_k; \quad \beta \equiv \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}. \quad (2.28)$$

Решая (2.27) относительно x'_1, x'_2 , получим обратные преобразования:

$$x'_i = \sum_{k=1}^2 \alpha_{ik} x_k; \quad \alpha \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}. \quad (2.29)$$

Коэффициенты α_{ik} имеют простую геометрическую интерпретацию. Это косинусы углов между k -ой осью не штрихованной (исходной) и i -ой осью штрихованной (повернутой) системы. Так $\alpha_{11} = \cos \varphi$, $\alpha_{12} = \sin \varphi = \cos(\pi/2 - \varphi)$, $\alpha_{21} = -\sin \varphi = \cos(\pi/2 + \varphi)$, $\alpha_{22} = \cos \varphi$.

Определения из теории матриц

Матрица определяется как квадратная или прямоугольная таблица чисел или функций. Элементам образующим матрицу присвоены два индекса a_{ij} .

Первый индекс указывает номер строки, а второй номер столбца. Матрицы A и B одной размерности равны, если для элементов матрицы (матричных элементов) выполняется равенство $A_{nm} = B_{nm}$ при любых n и m .

Сложение матриц одной размерности $A + B = C$ означает сложение матричных элементов $A_{nm} + B_{nm} = C_{nm}$. Умножение матрицы на скаляр понимается как умножение всех матричных элементов на заданный скаляр.

Матрица C является произведением матриц A и B с матричными элементами A_{nm} и B_{nm} соответственно, если

$$C_{ij} = (A \cdot B) = \sum_{k=1}^N A_{ik} B_{kj}$$

Матрица называется транспонированной по отношению к исходной матрице A , если она отличается от исходной заменой строк на столбцы. Транспонированная матрица обозначается символом \tilde{A} и ее матричные элементы связаны с матричными элементами A_{ki} исходной матрицы соотношением $(\tilde{A})_{ik} = A_{ki}$.

Комплексно сопряженная матрица обозначается символом A^* и все её матричные элементы комплексно сопряжены с исходной $(A^*)_{ik} = A_{ik}^*$. Матрица называется эрмитово сопряженной заданной у которой строки заданной матрицы заменены на столбцы и все матричные элементы комплексно сопряжены с заданными. Операция эрмитовского сопряжения обозначается A^\dagger , при этом $(A^\dagger)_{ik} = A_{ki}^*$.

Матрица A^{-1} называется обратной к заданной матрице A для которой произведение вида $A^{-1}A = A A^{-1} = I$ есть единичная матрица.

Матричные элементы квадратной обратной матрицы определяются из соотношения

$$(A^{-1})_{ik} = \frac{\text{алгебраическое дополнение } A_{ik}}{\det A},$$

где $\det A$ — определитель матрицы.

Матрица A *вещественна*, если $A^* = A$; *симметрична*, если $\tilde{A} = A$; *антисимметрична*, если $\tilde{A} = -A$; *эрмитова*, если $A^\dagger = A$; *ортогональна*, если $A^{-1} = \tilde{A}$; *унитарна*, если $A^{-1} = A^\dagger$; *диагональна*, если $A_{ik} = \alpha_i \delta_{ik}$. След (или *шпур* Sp) квадратной матрицы A есть сумма её диагональных элементов $Sp A = \sum_k A_{kk}$.

На основании (2.29) видно, что $\det \alpha = 1$ и $\alpha^{-1} = \tilde{\alpha}$, т.е. α вещественна и ортогональна. При сравнении α^{-1} и β из (2.28) следует, что $\alpha^{-1} = \beta$.

Пример 2.§4.1. Выразить единичные векторы повернутой системы координат $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ через единичные векторы исходной системы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Системы координат повернуты относительно общей оси \mathbf{e}_3 на угол φ .

► По смыслу задачи необходимо представить векторы \mathbf{e}'_1 и \mathbf{e}'_2 в виде

$$\mathbf{e}'_1 = a_{11} \mathbf{e}_1 + a_{12} \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}'_2 = a_{21} \mathbf{e}_1 + a_{22} \mathbf{e}_2, \quad (2.30)$$

где необходимо найти коэффициенты a_{ij} . Для этого умножим скалярно первое равенство из (2.30) на \mathbf{e}_1 . В силу ортогональности единичных векторов получим, что $a_{11} = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_1) = \cos \varphi$. Умножив это же равенство на \mathbf{e}_2 , найдем $a_{12} = (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_1) = \cos(\pi/2 + \varphi) = \sin \varphi$. Аналогично определяем a_{21} и a_{22} из второго равенства в (2.30). Окончательно:

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{k=1}^2 \alpha_{ik} \mathbf{e}_k, \quad (2.31)$$

где матрица α определена в (2.29). ◀

Пример 2.§4.2. Поворот в трехмерном пространстве.

► Произвольный поворот координатной системы в трехмерном пространстве относительно начала координат полностью определяется заданием трех углов Эйлера α, β, γ . При этом утверждается, что поворот системы координат $x_1, x_2, x_3 \rightarrow x'_1, x'_2, x'_3$ может быть получен с помощью трех последовательных поворотов:

- поворот вокруг оси x_3 на угол $\alpha (0 \leq \alpha < 2\pi)$ - рис 2.9.а.
- поворот вокруг новой оси x_2 на угол $\beta (0 \leq \beta < \pi)$ - рис 2.9.б.
- поворот вокруг новой оси x_3 на угол $\gamma (0 \leq \gamma < 2\pi)$ - рис 2.9.в.

При повороте на угол α векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2''$ лежат в одной плоскости и их взаимное расположение (если смотреть против оси \mathbf{e}_3) показано на рис. 2.10.а. Аналогично при повороте на угол β векторы $\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_1''', \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3'''$ лежат в одной плоскости, как указано на рис. 2.10.б. (вид против оси \mathbf{e}_2''). И наконец, при повороте на угол γ векторы $\mathbf{e}_1''', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'', \mathbf{e}_2'$ лежат в одной плоскости, как указано на рис. 2.10.в. (вид против оси \mathbf{e}_3').

Выразим единичные векторы \mathbf{e}_i'' через \mathbf{e}_k исходной системы координат. На основании (2.31) (см. также рис. 2.10.а) имеем:

$$\mathbf{e}_1'' = \cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{e}_3'' = \mathbf{e}_3; \quad \mathbf{e}_2'' = -\sin \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \mathbf{e}_2; \quad (2.32)$$

Выразим далее векторы \mathbf{e}_i''' через векторы \mathbf{e}_k'' , воспользовавшись соотно-

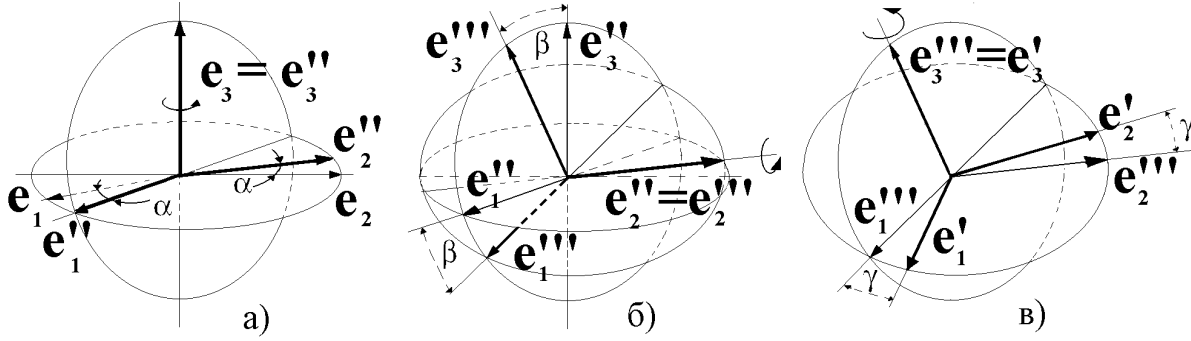


Рис. 2.9: Поворот в трехмерном пространстве

шениями (2.31) (см. также рис. 2.10.б)

$$\mathbf{e}_1''' = -\sin \beta \mathbf{e}_3'' + \cos \beta \mathbf{e}_1''; \quad \mathbf{e}_2''' = \mathbf{e}_2''; \quad \mathbf{e}_3''' = \cos \beta \mathbf{e}_3'' + \sin \beta \mathbf{e}_1''; \quad (2.33)$$

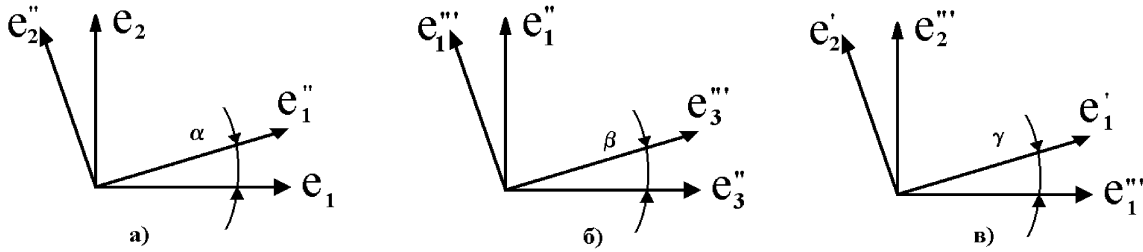


Рис. 2.10: Повороты в плоскости

Выразим, наконец, векторы, \mathbf{e}_i' через \mathbf{e}_i''' (см. также (2.31) и рис. 2.10.в)

$$\mathbf{e}_1' = \cos \gamma \mathbf{e}_1''' + \sin \gamma \mathbf{e}_2'''; \quad \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3'''; \quad \mathbf{e}_2' = -\sin \gamma \mathbf{e}_1''' + \cos \gamma \mathbf{e}_2'''; \quad (2.34)$$

Подставим (2.33) в (2.34), а в полученное выражение - (2.32). В результате найдем связь векторов \mathbf{e}_i' и \mathbf{e}_k :

$$\mathbf{e}_i' = \sum_{k=1}^3 R_{ik} \mathbf{e}_k, \quad (2.35)$$

где матрица R имеет вид

$$R = \begin{vmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\cos \gamma \sin \beta \\ -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma \\ \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} \quad (2.36)$$

Выражения (2.33), (2.36) решают задачу о связи векторов базиса систем координат повернутых друг относительно друга вокруг общей точки — начала координат в трехмерном пространстве. ◀

Из (2.36) непосредственно следует, что $\det R = 1$ и кроме того $R^{-1} = \tilde{R}$, т.е. матрица R - ортогональна:

$$\left(R^{-1}\right)_{ki} = \left(\tilde{R}\right)_{ki} = R_{ik} \quad (2.37)$$

Так как $R \cdot R^{-1} = 1$, а $R^{-1} = \tilde{R}$, для элементов матрицы R_{ik} имеем:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^3 R_{ik}(R^{-1})_{kj} = \sum_{k=1}^3 R_{ik} R_{jk} = \sum_{k=1}^3 R_{ki} R_{kj} \quad (2.38)$$

Преобразование, обратное (2.35), имеет вид:

$$\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^3 \left(R^{-1}\right)_{ki} \mathbf{e}'_i = \sum_{i=1}^3 R_{ik} \mathbf{e}'_i. \quad (2.39)$$

Любой вектор можно представить в двух произвольных системах координат следующим образом:

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^3 A_k \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^3 A'_i \mathbf{e}'_i. \quad (2.40)$$

Подставляя (2.39) в (2.40), находим:

$$\sum_{i,k=1}^3 A_k R_{ik} \mathbf{e}'_i = \sum_{i=1}^3 A'_i \mathbf{e}'_i$$

В силу ортогональности единичных векторов \mathbf{e}'_i для проекций векторов получаем:

$$A'_i = \sum_{k=1}^3 R_{ik} A_k \quad (2.41)$$

Данная формула устанавливает связь проекций произвольного вектора \mathbf{A} в двух системах координат.

Конструктивное определение вектора

Преобразование компонент вектора (2.41) при вращении координат есть линейное преобразование с ортогональной матрицей преобразования

(2.36), определитель которой $\det R = 1$. Элементы матрицы R_{ik} есть косинусы углов между k -ой исходной и i -ой осью повернутой системы координат.

В силу произвольности вектора \mathbf{A} можно вообще определить трехмерный вектор как объект, имеющий три компоненты A_1, A_2, A_3 , преобразующиеся при вращении системы координат по закону (2.41). Это утверждение является конструктивным определением вектора в трехмерном пространстве, которое позволяет произвести обобщение понятия вектора на пространство с произвольным числом измерений.

Пример 2.§4.3. Доказать, что скалярное произведение $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ - скаляр (т.е. величина, не зависящая от поворота системы координат).

► На основании (2.41), (2.38) имеем:

$$(\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}') = \sum_{k=1}^3 A'_k B'_k = \sum_{k,i,j=1}^3 R_{ki} R_{kj} A_i B_j = \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} A_i B_j = \sum_{i=1}^3 A_i B_i = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \quad \blacktriangleleft$$

Пример 2.§4.4. Определить компоненты тензора Леви-Чивита ε_{ijk} в повернутой системе координат, если в исходной системе ε_{ijk} определяется равенством (2.11)

► По определению (2.11) с учетом (2.35) находим:

$$\varepsilon'_{ijk} = [\mathbf{e}'_i \times \mathbf{e}'_j] \cdot \mathbf{e}'_k = \sum_{n,l,m=1}^3 R_{in} R_{jl} R_{km} \varepsilon_{nlm} \quad (2.42)$$

Непосредственными вычислениями найдем из (2.42), например, для

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{111} = & R_{11} \left(R_{12} R_{13} \varepsilon_{123} + R_{13} R_{12} \varepsilon_{132} \right) + R_{12} \left(R_{11} R_{13} \varepsilon_{213} + \right. \\ & \left. + R_{13} R_{11} \varepsilon_{231} \right) + R_{13} \left(R_{11} R_{12} \varepsilon_{321} + R_{12} R_{13} \varepsilon_{321} \right) = 0, \end{aligned}$$

так как $\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{132}$; $\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{231}$; $\varepsilon_{321} = -\varepsilon_{312}$.

Аналогично $\varepsilon'_{222} = 0$ и $\varepsilon'_{333} = 0$. Точно также доказывается, что $\varepsilon'_{iik} = 0$ с любой парой двух одинаковых индексов. Остается рассмотреть шесть компонент, отличных от нуля. Например, ε'_{123} . С учетом (2.8)

$$\varepsilon'_{123} = \sum_{l,m,n=1}^3 R_{1l} R_{2m} R_{3n} \varepsilon_{lmn} = \det R = 1.$$

Таким же способом вычисляется из (2.42), что $\varepsilon'_{231} = \varepsilon'_{321} = -\varepsilon'_{132} = -\varepsilon'_{231} = -\varepsilon'_{321} = 1$, т.е. символ ε_{ijk} инвариантен во всех системах. ◀

Пример 2.§4.5. Доказать, что векторное произведение векторов - вектор.

► Для доказательства необходимо установить, что компоненты векторного произведения при вращении системы координат преобразуются по формуле (2.41).

Получим вспомогательную формулу из (2.42). Для этого умножим левую и правую стороны данного равенства на $(R^{-1})_{\tau i}$ и $(R^{-1})_{\sigma j}$ и просуммируем по "i" и "j". На основании $\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ и равенства (2.37) имеем:

$$\sum_{i,j=1}^3 R_{i\tau} R_{j\sigma} \varepsilon_{ijk} = \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{\tau\sigma l} R_{kl}. \quad (2.43)$$

По определению векторного произведения (2.9) с учетом (2.43) получим:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}' \times \mathbf{B}']_k &= \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon'_{ijk} A'_i B'_j = \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ijk} \sum_{\tau,\sigma=1}^3 R_{i\tau} R_{j\sigma} A_\tau B_\sigma = \\ &= \sum_{\tau,\sigma,l=1}^3 \varepsilon_{\tau\sigma l} R_{kl} A_\tau B_\sigma = \sum_{l=1}^3 R_{kl} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_l, \end{aligned}$$

т.е. компоненты $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$ преобразуются в соответствии с (2.41), и, следовательно, $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$ - есть вектор. ◀

Пример 2.§4.6. Определить является ли $\text{grad } \varphi$ - вектором?

► "k"-ая компонента $\text{grad } \varphi$ есть $\partial\varphi/\partial x_k$. Закон преобразования этих компонент при поворотах системы координат следует из правила дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'_i} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} = \sum_{k=1}^3 A_{ik} \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}, \quad (2.44)$$

так как $\varphi' = \varphi$. В результате необходимо установить связь матрицы A с матрицей R, определенной в (2.36). Так как компоненты радиус- вектора при поворотах системы координат преобразуются по формуле

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j, \quad (2.45)$$

то можно записать следующее выражение для компонент R_{ik} , дифференцируя (2.45) по x_k : $R_{ik} = \partial x'_i / \partial x_k$. В декартовой системе координат прямыми

вычислениями можно установить, что

$$R_{ik} \equiv \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \equiv A_{ik}. \quad (2.46)$$

Таким образом, градиент скалярной функции в декартовой системе координат удовлетворяет конструктивному определению вектора. ◀

Контра - и ковариантные векторы

Существуют системы координат, в которых равенство (2.46) не выполняется. В связи с этим вводится два класса векторов. Первый класс образуют векторы, компоненты которых преобразуются при поворотах системы по закону, совпадающему с (2.41), т.е.

$$B'_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} B_k = \sum_{k=1}^3 R_{ik} B_k \quad (2.47)$$

Такие векторы называются *контравариантными*.

Второй класс векторов, называемых *ковариантными*, образуют векторы, компоненты которых преобразуются при поворотах как градиент скаляра:

$$C'_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} C_k = \sum_{k=1}^3 A_{ik} C_k \quad (2.48)$$

Общепринято обозначать компоненты контравариантного вектора индексом сверху B^k , а ковариантного - индексом снизу C_k . В связи с такой условностью "правильно" писать R^i_k вместо R_{ik} и A_i^k вместо A_{ik} , т.е.

$$B^{i'} = \sum_{k=1}^3 R^i_k B^k; \quad C'_i = \sum_{k=1}^3 A_i^k C_k.$$

Инверсия системы координат

Можно указать системы координат, которые не сводятся друг к другу простым поворотом, например, системы координат K и K' на рис. 2.11. Такие системы координат называют *правой* (K) и *левой* (K') соответственно. Как видно из рис. 2.11, системы отличаются положительным направлением осей.

Преобразование системы координат K к системе K' или обратное преобразование называется *инверсией* систем координат.

Покажем, что при инверсии компоненты векторов преобразуются линейным преобразованием по форме совпадающим с выражением (2.41). Рассмотрим радиус-вектор в системах K и K' . По определению компоненты радиус вектора в этих системах координат связаны равенством $x_k = -x'_k$, $k = 1, 2, 3$. Или в матричном виде:

$$x'_i = \sum_{k=1}^3 \beta_{ik} x_k; \quad \beta_{ik} = (-1) \delta_{ik} \quad (2.49)$$

Из определения (2.49) ясно, что $\det \beta = -1$; и $\beta^{-1} = \tilde{\beta} = \beta$. Аналогично для векторов, образующих базис имеем:

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{k=1}^3 \beta_{ik} \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^3 (-1) \delta_{ik} \mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_i \quad (2.50)$$

Элементы матрицы преобразований β_{ik} представляют собой косинусы углов между k -ой осью исходной и i -ой осью преобразованной системы координат, что аналогично матрице поворотов R .

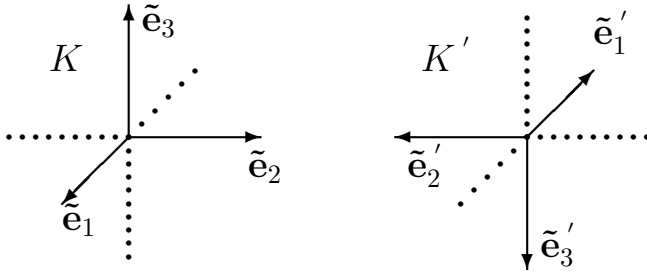


Рис. 2.11:

Истинные векторы и псевдовекторы

Не все векторы при инверсии ведут себя как радиус-вектор, т.е. их компоненты меняют знак. В связи с этим векторы, компоненты которых

при инверсии меняют знак, называются *полярными* или *истинными* векторами, а векторы, компоненты которых при инверсии не меняют знак, называются *аксиальными* или *псевдовекторами*.

Рассмотрим поведение символа Леви-Чевита ε_{ijk} (2.11) при инверсии. По определению (2.11) с учетом (2.50) имеем:

$$\varepsilon_{ijk} = [\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j] \cdot \mathbf{e}_k = -[\mathbf{e}'_i \times \mathbf{e}'_j] \cdot \mathbf{e}'_k$$

По определению векторного произведения в левой системе координат для векторов базиса \mathbf{e}'_k получим $[\mathbf{e}'_i \times \mathbf{e}'_j] = -\mathbf{e}'_k$! Поэтому в левой системе координат $\varepsilon'_{ijk} = -[\mathbf{e}'_i \times \mathbf{e}'_j] \cdot \mathbf{e}'_k$ имеет те же компоненты, что и ε_{ijk} , т.е. $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon'_{ijk}$ инвариантен и при инверсии!

Пример 2.§4.7. Показать, что компоненты векторного произведения двух полярных векторов при инверсии не меняют знака.

► На основании (2.9):

$$C'_\tau \equiv [\mathbf{A}' \times \mathbf{B}']_\tau = \sum_{n,m=1}^3 \varepsilon'_{\tau nm} A'_n B'_m = \sum_{n,m=1}^3 \varepsilon_{\tau nm} A_n B_m = [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_\tau = C_\tau, \quad (2.51)$$

т.е. $C'_\tau = C_\tau$, и данное векторное произведение – аксиальный вектор. ◀

Истинные скаляры и псевдо скаляры

Применение операции инверсии к скалярным величинам также приводит к двум типам скалярных величин. Один из них называется *истинные скаляры* – это скаляры, которые при инверсии не меняют знака. А второй тип называется *псевдоскаляры* – это скалярные величины, которые при инверсии меняют знак.

Упражнения

1. Показать, что $(-y, x)$ образуют двумерный вектор.
2. Показать, что $(x, -y)$ не образуют двумерный вектор.
3. Определить удовлетворяют ли закону векторного преобразования величины:
 - а) $(x - y, x + y, 0)$ при повороте вокруг оси z ;
 - б) $(0, 2z + y, z - 2y)$ при повороте вокруг оси x ;
 - в) $(y^2 + z^2, -zy, -xz)$ при повороте вокруг каждой из координатных осей?
4. Показать, что $(xyC_x + y^2C_y, -x^2C_x - xyC_y)$ образуют двумерный вектор, если C_x и C_y – компоненты постоянного вектора.
5. Определить, являются ли функции $A_x = a_1(x^2 + y^2 + z^2)$, $A_y = a_2(x^2 + y^2 + z^2)$, $A_z = a_3(x^2 + y^2 + z^2)$ ($a_i = \text{const}$) компонентами вектора.
6. Составить все возможные независимые инварианты из полярных векторов \mathbf{n}, \mathbf{n}' (единичные радиус-векторы) и псевдовектора \mathbf{a} .
7. Какие независимые псевдоскаляры можно составить из двух полярных векторов \mathbf{n}, \mathbf{n}' и одного псевдовектора? Из трех полярных векторов?
8. Найти матрицу бесконечно малого поворота системы координат.
9. Определить тип вектора $\vec{\nabla}$ – полярный или аксиальный?
10. Определить тип вектора $\text{grad } \varphi$, где φ – скаляр (псевдоскаляр)
11. Определить тип скаляра $\text{div } \mathbf{a}$ и вектора $\text{rot } \mathbf{a}$, где \mathbf{a} – истинный (аксиальный) вектор.

12. Определить, какие из перечисленных величин являются скалярами, а какие псевдоскалярами: $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$; $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$; $\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]$; $\mathbf{A} \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{F}]$; $\mathbf{D} \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{F}]$. Здесь $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ - истинные, а $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}$ - аксиальные векторы.

§5 Системы координат

Учет симметрии задачи приводит к необходимости использовать криволинейные координаты. Если декартовы координаты точки образуются пересечением трех взаимно перпендикулярных плоскостей $x_1 = x = \text{const}$, $x_2 = y = \text{const}$, $x_3 = z = \text{const}$, то в криволинейных координатах положение точки определяется пересечением трех произвольных поверхностей $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$, которые и образуют систему координат. При этом всегда можно записать:

$$x_k = x_k(q_1, q_2, q_3); \quad q_k = q_k(x_1, x_2, x_3); \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.52)$$

Коэффициенты Ламе

Каждой поверхности $q_k = \text{const}$ можно сопоставить единичный вектор \mathbf{a}_k , нормальный к поверхности $q_k = \text{const}$ и направленный в сторону возрастания q_k . Квадрат расстояния dl между двумя бесконечно близкими точками вычисляется по формуле:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \sum_{i,k=1}^3 h_{ik}^2 dq_i dq_k \quad (2.53)$$

Коэффициенты h_{ik}^2 называются коэффициентами Ламе. Они характеризуют заданную систему координат. Из соотношений (2.53), (2.52) следует выражение для h_{ik}^2 :

$$h_{ij}^2 = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \quad (2.54)$$

Если поверхности криволинейной системы взаимно перпендикулярны, то такие системы называются ортогональными и для них $h_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Полагая для ортогональных систем $h_{ii} \equiv h_i$, перепишем (2.53) в виде:

$$dl^2 = \sum_{k=1}^3 \left(h_k dq_k \right)^2 \quad (2.55)$$

Для любого заданного dq_k (считая остальные q_i постоянными) находим $dl_k = h_k dq_k$. Отсюда для элементов поверхности dS_{ij} и объема dV имеем:

$$dS_{ij} = dl_i dl_j = h_i h_j dq_i dq_j, \quad (2.56)$$

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (2.57)$$

Градиент функции в криволинейных координатах

По определению $\vec{\nabla} f$ -вектор, указывающий направление максимальной скорости изменения функции f в пространстве. Следовательно, компоненты $\vec{\nabla} f(q_1, q_2, q_3)$ в направлении, ортогональном семейству поверхностей $q_i = \text{const}$, задаются выражением

$$\left(\vec{\nabla} f \right)_k = \frac{\partial f}{\partial l_k} = \frac{\partial f}{h_k \partial q_k} \quad (2.58)$$

В результате с учетом определения единичных векторов \mathbf{a}_k получим для $\vec{\nabla} f$ в произвольной ортогональной криволинейной системе:

$$\vec{\nabla} f(q_1, q_2, q_3) = \sum_{k=1}^3 \mathbf{a}_k \frac{\partial f}{\partial l_k} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{a}_k \frac{\partial f}{h_k \partial q_k} \quad (2.59)$$

Дивергенция вектора в криволинейных координатах

Для определения вида $\text{div } \mathbf{b}$ воспользуемся выражением (2.24) и рассмотрим бесконечно малый криволинейный объем $V = dl_1 dl_2 dl_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$ (рис. 2.12). Найдем поток вектора \mathbf{b} через поверхность, ограничивающую данный объем:

$$\Phi = \oint (\mathbf{b} \cdot d\mathbf{s}) = \sum_{k=1}^6 \int_{ds_k} (\mathbf{b} \cdot d\mathbf{s}) = \sum_{k=1}^6 \Phi_k,$$

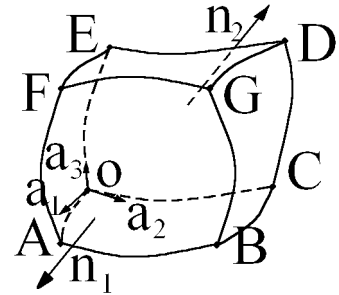


Рис. 2.12:

где ds_k определяются как поверхности криволинейной фигуры объемом V : $ds_1 = \text{поверхность } AFGB$, $ds_2 = OCDE$, $ds_3 = EFGD$, $ds_4 = OABC$, $ds_5 = BCDG$, $ds_6 = EFAO$. Вычислим, например, поток вектора \mathbf{b} через площадки ds_1 и ds_2 . В силу бесконечной малости V по теореме о среднем значении получим:

$$\Phi_{12} \equiv \Phi_1 + \Phi_2 = \int_{ds_1} (\mathbf{b} \cdot d\mathbf{s}) + \int_{ds_2} (\mathbf{b} \cdot d\mathbf{s}) \approx$$

$$\approx b_1(\text{на поверхности } ds_1) \cdot ds_1 - b_1(\text{на поверхности } ds_2) \cdot ds_2$$

Здесь b_1 – проекция \mathbf{b} на \mathbf{a}_1 и, кроме того, учтено, что на ds_1 направление нормали \mathbf{n}_1 совпадает с положительным направлением \mathbf{a}_1 , а на ds_2 , \mathbf{n}_2 противоположно \mathbf{a}_1 . С учетом (2.56)

$$\Phi_{12} = \left(b_1 h_2 h_3 \right) \Big|_{\text{на } ds_1} dq_2 dq_3 - \left(b_1 h_2 h_3 \right) \Big|_{\text{на } ds_2} dq_2 dq_3 \quad (2.60)$$

Значение величины $b_1 h_2 h_3$ на поверхности ds_1 можно выразить через значение на поверхности ds_2 , если учесть, что $(b_1 h_2 h_3)$ на ds_1 отличается от $(b_1 h_2 h_3)$ на ds_2 координатой q_1 на величину dq_1 . Поэтому имеем:

$$\left(b_1 h_2 h_3 \right) \Big|_{\text{на } ds_1} \approx \left(b_1 h_2 h_3 \right) \Big|_{\text{на } ds_2} + \frac{\partial}{\partial q_1} \left(b_1 h_2 h_3 \right) \Big|_{\text{на } ds_2} dq_1 + \dots \quad (2.61)$$

Подставляя (2.61) в (2.60), находим:

$$\Phi_{12} \approx \frac{\partial}{\partial q_1} \left(b_1 h_2 h_3 \right) dq_1 dq_2 dq_3 \quad (2.62)$$

Полностью аналогично вычисляются потоки вектора \mathbf{b} через площадки ds_3 , ds_4 и ds_5 , ds_6 . В результате

$$\Phi = \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(b_1 h_2 h_3 \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(b_2 h_3 h_1 \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(b_3 h_1 h_2 \right) \right] dq_1 dq_2 dq_3 \quad (2.63)$$

Подставляя (2.63) и V в (2.24), находим выражение для дивергенции в произвольной ортогональной криволинейной системе координат:

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(b_1 h_2 h_3 \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(b_2 h_3 h_1 \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(b_3 h_1 h_2 \right) \right]. \quad (2.64)$$

Комбинируя (2.59) с (2.64), для лапласиана $\nabla^2 f \equiv (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})f = \nabla \cdot (\nabla f)$ (т.е. $\mathbf{b} = \vec{\nabla} f$) в криволинейной ортогональной системе получим:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (2.65)$$

Ротор вектора в криволинейных координатах

Чтобы получить выражение для $\operatorname{rot} \mathbf{b}$, воспользуемся выражением (2.24). Рассмотрим бесконечно малую поверхность $OCDE$ (рис. 2.12). Тогда проекция ротора на направление вектора \mathbf{a}_1 есть

$$\left(\operatorname{rot} \mathbf{b} \right)_{a_1} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint (\mathbf{b} \cdot d\mathbf{l}). \quad (2.66)$$

Здесь $S = dl_2 dl_3 = h_2 h_3 dq_2 dq_3$. Циркуляцию вектора \mathbf{b} вдоль контура $L = OCDE$ представим в виде:

$$C = \int_L (\mathbf{b} \cdot d\mathbf{l}) = \sum_{k=1}^4 C_k = \sum_{k=1}^4 \int_{L_k} (\mathbf{b} \cdot d\mathbf{l}), \quad (2.67)$$

где $L_1 = OC$, $L_2 = CD$, $L_3 = DE$, $L_4 = EO$. В силу бесконечной малости S имеем:

$$\begin{aligned} C &\approx (\mathbf{b}_2 \cdot d\mathbf{l}_2)_{OC} + (\mathbf{b}_3 \cdot d\mathbf{l}_3)_{CD} - (\mathbf{b}_2 \cdot d\mathbf{l}_2)_{DE} - (\mathbf{b}_3 \cdot d\mathbf{l}_3)_{ED} = \\ &= (b_2 h_2)_{OC} dq_2 - (b_2 h_2)_{DE} dq_2 + (b_3 h_3)_{CD} dq_3 - (b_3 h_3)_{ED} dq_3. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Учитывая бесконечно малые одного порядка можно записать:

$$\begin{aligned} (b_2 h_2)_{DE} &\approx (b_2 h_2)_{OC} + \frac{\partial}{\partial q_3} (b_2 h_2) dq_3 + \dots; \\ (b_3 h_3)_{CD} &\approx (b_3 h_3)_{ED} + \frac{\partial}{\partial q_2} (b_3 h_3) dq_2 + \dots \end{aligned} \quad (2.69)$$

Подставляя (2.69) в (2.68) с учетом (2.66), находим:

$$\left(\text{rot } \mathbf{b} \right)_{a_1} = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (b_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (b_2 h_2) \right].$$

Повторяя вычисления для бесконечно малых поверхностей $OFEA$ и $OABC$, найдем $(\text{rot } \mathbf{b})_{a_2}$ и $(\text{rot } \mathbf{b})_{a_3}$ соответственно. Окончательно выражение для $\text{rot } \mathbf{b}$ имеет вид:

$$\text{rot } \mathbf{b} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 h_1 & \mathbf{a}_2 h_2 & \mathbf{a}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 b_1 & h_2 b_2 & h_3 b_3 \end{vmatrix}. \quad (2.70)$$

Две криволинейные системы координат - цилиндрическая и сферическая, наряду с декартовой, имеют широкое применение в учебных физических задачах. В связи с этим ниже приведены все необходимые сведения об этих системах.

Цилиндрическая система координат

Цилиндрическая система образуется круговыми цилиндрами с осью z и радиусами ρ ; полуплоскостями, проходящими через ось z (под углом φ к плоскости xz) и плоскостями, параллельными плоскости xy . Положение точки задается тремя координатами ρ, φ, z , область изменения которых

определяется неравенствами: $0 \leq \rho \leq \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\infty \leq z \leq \infty$. Связь декартовых и цилиндрических координат есть:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, & y &= \rho \sin \varphi, & z &= z; \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \varphi &= \operatorname{arctg}(y/x), & z &= z. \end{aligned} \quad (2.71)$$

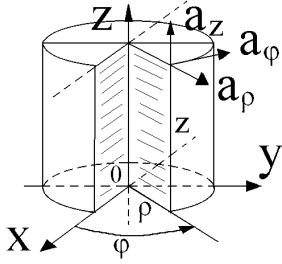


Рис. 2.13:

Коэффициенты Ламе в соответствии с (2.55) равны $h_1 = h_\rho = 1$, $h_2 = h_\varphi = \rho$, $h_3 = h_z = 1$. Единичные векторы \mathbf{a}_ρ , \mathbf{a}_φ , \mathbf{a}_z направлены в сторону возрастания ρ , φ , z соответственно, и их направление зависит от положения точки в пространстве. Из рис. 2.13 непосредственно видна связь \mathbf{a}_ρ , \mathbf{a}_φ , \mathbf{a}_z и \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 :

$$\mathbf{a}_\rho = \mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi; \quad \mathbf{a}_\varphi = -\mathbf{e}_1 \sin \varphi + \mathbf{e}_2 \cos \varphi; \quad \mathbf{a}_z = \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_\rho \cos \varphi - \mathbf{a}_\varphi \sin \varphi; \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{a}_\rho \sin \varphi + \mathbf{a}_\varphi \cos \varphi; \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{a}_z \quad (2.72)$$

Данные формулы выводятся аналогично формулам примера (§4.1). Наконец, на основании общих результатов, изложенных выше в цилиндрической системе координат имеем:

$$\operatorname{grad} f = \mathbf{a}_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \mathbf{a}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \mathbf{a}_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (2.73)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho b_\rho \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial b_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial b_z}{\partial z} \quad (2.74)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (2.75)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{b} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho \mathbf{a}_\varphi & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_\rho & \rho b_\varphi & b_z \end{vmatrix} \quad (2.76)$$

Сферическая система координат

Сферическая система образуется сферами радиуса r , поверхностями прямых круговых конусов с полярной осью z и полуплоскостями проходящими через ось z под углом φ к плоскости xz . Положение точки задается тремя координатами r , θ , φ , область изменения которых $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ (см рис. 2.14).

Связь декартовых и сферических координат имеет вид

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, & y &= r \sin \theta \sin \varphi, & z &= r \cos \theta; \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \theta &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

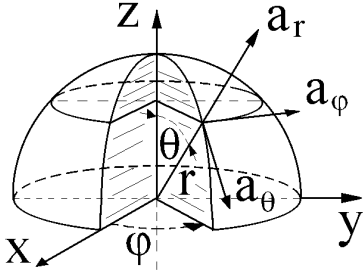


Рис. 2.14:

Коэффициенты Ламе имеют вид: $h_1 = h_r = 1$; $h_2 = h_\theta = r$; $h_3 = h_\varphi = r \sin \theta$. Единичные векторы \mathbf{a}_r , \mathbf{a}_φ , \mathbf{a}_θ направлены в сторону возрастания r , φ , θ и меняют направление в зависимости от расположения точки в пространстве. Связь единичных векторов $\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_3$ с единичными векторами декартовой системы определяется равенством:

$$\mathbf{a}_k = \sum_{n=1}^3 D_{kn} \mathbf{e}_n; \quad D = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \end{vmatrix}. \quad (2.78)$$

Соответственно обратные преобразования имеют вид:

$$\mathbf{e}_n = \sum_{k=1}^3 D_{kn} \mathbf{a}_k \quad (2.79)$$

На основании общих результатов полученных для криволинейных систем координат находим явные выражения дифференциальных векторных операций в сферической системе координат:

$$\operatorname{grad} f = \mathbf{a}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}; \quad (2.80)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 b_r) + r \frac{\partial b_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta b_\theta) \right]; \quad (2.81)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right]; \quad (2.82)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{b} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r \mathbf{a}_\theta & r \sin \theta \mathbf{a}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ b_r & r b_\theta & r \sin \theta b_\varphi \end{vmatrix}. \quad (2.83)$$

Взаимный базис

Если задан базис произвольной криволинейной системы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, то углы между векторами базиса произвольны. В теории криволинейных координат произвольному базису ставится в соответствие базис, называемый *взаимным (биортогональным)*, обозначаемый $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ и определяемый равенством:

$$(\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_k) = \delta_{ik}. \quad (2.84)$$

Например: так как вектор \mathbf{a}^1 должен быть перпендикулярен векторам \mathbf{a}^2 и \mathbf{a}^3 , то можно положить $\mathbf{a}^1 = \alpha[\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3]$. В свою очередь, скаляр α определяется из условия $\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = \alpha \mathbf{a}_1 \cdot [\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3] = \alpha V = 1$, т.е.:

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{V}[\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3]; \quad \mathbf{a}^2 = \frac{1}{V}[\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1]; \quad \mathbf{a}^3 = \frac{1}{V}[\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2]. \quad (2.85)$$

Формулы обратного преобразования имеют вид:

$$\mathbf{a}_i = \frac{1}{V}[\mathbf{a}^j \times \mathbf{a}^k], \quad (2.86)$$

где ijk образуют циклическую перестановку из $(1, 2, 3)$.

Так как один и тот же вектор \mathbf{A} можно разложить как по векторам основного \mathbf{a}_k , так и взаимного базисов \mathbf{a}^k , т.е.:

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^3 A^k \mathbf{a}_k = \sum_{k=1}^3 A_k \mathbf{a}^k, \quad (2.87)$$

вводится следующая терминология: числа A^k называются контравариантными, а A_k — ковариантными компонентами вектора \mathbf{A} . Данное определение находится в полном соответствии с определением ко- и контравариантных векторов, введенных ранее. В соответствии с (2.84) и (2.87) для A^l и A_l имеем:

$$A^l = (\mathbf{a}^l \cdot \mathbf{A}) = \sum_{k=1}^3 A_k (\mathbf{a}^l \cdot \mathbf{a}^k), \quad A_l = (\mathbf{a}_l \cdot \mathbf{A}) = \sum_{k=1}^3 A_k (\mathbf{a}_l \cdot \mathbf{a}_k). \quad (2.88)$$

Если ввести обозначения $(\mathbf{a}^l \cdot \mathbf{a}^k) \equiv g^{lk} \equiv g^{kl}$; $(\mathbf{a}_l \cdot \mathbf{a}_k) \equiv g_{lk} \equiv g_{kl}$, то связь между ко- и контравариантными компонентами векторов будет иметь вид:

$$A_i = \sum_{k=1}^3 g_{ik} A^k; \quad A^i = \sum_{k=1}^3 g^{ik} A_k. \quad (2.89)$$

Девять величин g_{ik} (или g^{ik}) называются метрическим тензором. В случае любого ортогонального базиса взаимный базис совпадает с исходным! Поэтому ко- и контравариантные составляющие одинаковы и в этом случае нет необходимости вводить для них различие.

Циклические координаты

Во многих физических задачах широко используются так называемые циклические координаты, ко- и контравариантные составляющие которых связаны с декартовыми координатами соотношениями:

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy), \quad x_0 = z, \quad x_{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy); \quad (2.90)$$

$$x^1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy), \quad x^0 = z, \quad x^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy);$$

Связь между x^μ и x_μ ($\mu = 0, \pm 1$) имеет вид:

$$x^\mu = (-1)^\mu x_{-\mu}; \quad x_\mu = (-1)^\mu x^{-\mu}; \quad x^\mu = x_\mu^*; \quad x_\mu = x^{\mu*}, \quad (2.91)$$

т.е. $g^{\mu\nu} = (-1)^\mu \delta_{\mu,-\nu}$; $g_{\mu\nu} = (-1)^\mu \delta_{\mu,-\nu}$. Соответственно определяются циклические ко- и контравариантные орты \mathbf{e}_μ и \mathbf{e}^μ ($\mu = 0, \pm 1$):

$$\mathbf{e}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + i\mathbf{j}), \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - i\mathbf{j}); \quad (2.92)$$

$$\mathbf{e}^1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - i\mathbf{j}), \quad \mathbf{e}^0 = \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + i\mathbf{j}).$$

Связь данных ортов друг с другом следующая: $\mathbf{e}^\mu = (-1)^\mu \mathbf{e}_{-\mu}$, $\mathbf{e}_\mu = (-1)^\mu \mathbf{e}^{-\mu}$, $\mathbf{e}_\mu = \mathbf{e}_\mu^*$, $\mathbf{e}_\mu = \mathbf{e}^{\mu*}$. Циклические орты образуют комплексный ортонормированный базис:

$$(\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\nu) = \delta_{\mu,\nu}, \quad \mu, \nu = 0, \pm 1;$$

$$[\mathbf{e}_\mu \times \mathbf{e}_\nu] = -i\varepsilon_{\mu\nu\lambda} \mathbf{e}_\lambda; \quad [\mathbf{e}^\mu \times \mathbf{e}^\nu] = i\varepsilon_{\mu\nu\lambda} \mathbf{e}_\lambda, \quad (2.93)$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$ - символ Леви-Чевита (2.6).

Упражнения

1. Выразить циклические компоненты радиус-вектора через сферическую функцию.

2. Найти матрицу преобразования циклических компонент вектора при повороте системы координат на углы Эйлера.

3. Решить уравнение Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$ в цилиндрической системе координат для случая $\varphi = \varphi(\rho)$

4. Решить уравнение Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$ в цилиндрической системе координат для случая $\varphi = \varphi(\vec{\rho})$

5. Решить уравнение Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$ в сферической системе координат для случая $\varphi = \varphi(r)$

6. Решить уравнение Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$ в сферической системе координат для случая $\varphi = \varphi(\tilde{\mathbf{r}})$

7. Выразить операторы $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ в переменных сферической системы координат.

8. Доказать эквивалентность трех форм $\nabla^2 \psi(r)$ в сферических координатах:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right), \quad \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\psi), \quad \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr}$$

§6 Векторный анализ

Применение оператора $\vec{\nabla}$

В предыдущих параграфах рассмотрены в основном операции дифференцирования первого порядка. Применяя эти операции вторично, получим операции дифференцирования второго порядка:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \varphi) = \text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi, \quad (2.94)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}) = \text{grad div } \mathbf{A},$$

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \times \mathbf{A}] = \text{div rot } \mathbf{A} \equiv 0,$$

$$[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi] = \text{rot grad } \varphi \equiv 0,$$

$$[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \mathbf{A}]] = \text{rot rot } \mathbf{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

Вследствие линейности все рассмотренные операции для суммы функций применяются к каждому слагаемому отдельно:

$$\vec{\nabla}(\varphi + \psi) = \text{grad } (\varphi + \psi) = \text{grad } \varphi + \text{grad } \psi = \vec{\nabla} \varphi + \vec{\nabla} \psi, \quad (2.95)$$

$$\vec{\nabla}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{div } \mathbf{A} + \text{div } \mathbf{B} = (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}) + (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B}),$$

$$[\vec{\nabla} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B})] = \text{rot } (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot } \mathbf{B} = [\vec{\nabla} \times \mathbf{A}] + [\vec{\nabla} \times \mathbf{B}],$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})) &= \text{grad div } (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{grad div } \mathbf{A} + \text{grad div } \mathbf{B} = \\ &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B}), \end{aligned}$$

$$\nabla^2(\varphi + \psi) = \Delta(\varphi + \psi) = \Delta \varphi + \Delta \psi = \nabla^2 \varphi + \nabla^2 \psi$$

$$\begin{aligned} \left[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B})] \right] &= \text{rot rot } (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{rot rot } \mathbf{A} + \text{rot rot } \mathbf{B} = \\ &= \left[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \mathbf{A}] \right] + \left[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \mathbf{B}] \right]. \end{aligned}$$

Важное значение имеет применение дифференциальных операций к произведениям типа: $\varphi\psi$, $\varphi \mathbf{A}$, $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$, $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$. В этом случае необходимо применять данные операции отдельно к каждому сомножителю, считая другой сомножитель постоянным. Ниже "птичкой" "ǎ" указывается, на какой из сомножителей действует дифференциальная операция. Возможные дифференциальные операции от двух сомножителей могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} \text{grad } (\varphi \cdot \psi) &= \vec{\nabla}(\varphi \cdot \psi) + \vec{\nabla}(\varphi \cdot \check{\psi}) = \varphi \text{grad } \psi + \psi \text{grad } \varphi, \quad (2.96) \\ \text{div } (\varphi \cdot \mathbf{A}) &= \vec{\nabla}(\varphi \cdot \mathbf{A}) = \vec{\nabla}(\varphi \cdot \mathbf{A}) + \vec{\nabla}(\varphi \cdot \check{\mathbf{A}}) = \mathbf{A} \cdot \text{grad } \varphi + \varphi \text{div } \mathbf{A}, \\ \text{rot } (\varphi \cdot \mathbf{A}) &= \left[\vec{\nabla} \times (\varphi \cdot \mathbf{A}) \right] = \left[\vec{\nabla} \times (\varphi \cdot \mathbf{A}) \right] + \left[\vec{\nabla} \times (\varphi \cdot \check{\mathbf{A}}) \right] = \\ &= [\text{grad } \varphi \times \mathbf{A}] + \varphi \text{rot } \mathbf{A}, \\ \text{grad } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \vec{\nabla}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \vec{\nabla}(\check{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B}) + \vec{\nabla}(\mathbf{A} \cdot \check{\mathbf{B}}), \\ \text{div } [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] &= \vec{\nabla} \cdot [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \vec{\nabla} \cdot [\check{\mathbf{A}} \times \mathbf{B}] + \vec{\nabla} \cdot [\mathbf{A} \times \check{\mathbf{B}}] = \\ &= \mathbf{B} \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{rot } \mathbf{B}, \\ \text{rot } [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] &= \left[\vec{\nabla} \times [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] \right] = \left[\vec{\nabla} \times [\check{\mathbf{A}} \times \mathbf{B}] \right] + \left[\vec{\nabla} \times [\mathbf{A} \times \check{\mathbf{B}}] \right] = \\ &= (\mathbf{B} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{A} - \mathbf{B} \text{div } \mathbf{A} + \mathbf{A} \text{div } \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Важным случаем, необходимым для приложений, является случай, когда функция φ или вектор \mathbf{A} являются известными сложными функциями от \mathbf{r} . Правила вычисления в этом случае могут быть получены по определению:

$$\text{grad } \varphi(\tau(\mathbf{r})) = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \text{grad } \tau, \quad (2.97)$$

$$\text{div } \mathbf{A}(\tau(\mathbf{r})) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_k}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_k}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_k} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tau} \cdot \text{grad } \tau, \quad (2.98)$$

$$\text{rot } \mathbf{A}(\tau(\mathbf{r})) = \sum_{ijk=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k = \sum_{ijk=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \mathbf{e}_k = - \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tau} \times \text{grad } \tau \right]. \quad (2.99)$$

Пример 2.§6.1. Получить формулы (2.97)-(2.99) с использованием интегрального определения оператора $\vec{\nabla}$.

► По определению (2.25) для $\vec{\nabla}\varphi$ имеем:

$$\text{grad } \varphi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \varphi \, ds. \quad (2.100)$$

В силу бесконечной малости V выразим φ на поверхности S через значение φ в точке B , к которой стягивается в пределе объем V :

$$\varphi \approx \varphi_B + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right|_B (\tau - \tau_B) + \dots$$

Учитывая, что $\oint ds = 0$ (см (2.26)) получим, оставляя члены одного порядка малости:

$$\text{grad } \varphi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \left[\varphi_B + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right|_B (\tau - \tau_B) + \dots \right] ds = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \tau \, ds = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \text{grad } \tau.$$

Аналогично для $\text{div } \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A} &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \left[\mathbf{A}_B + \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tau} \right|_B (\tau - \tau_B) + \dots \right] ds = \\ &= \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tau} \right|_B \cdot \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \tau \, ds = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tau} \cdot \text{grad } \tau \end{aligned}$$

Соответственно для $\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r})$ находим:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= [\vec{\nabla} \times \mathbf{A}] = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S [d\mathbf{s} \times \mathbf{A}] = \\ &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \left[d\mathbf{s} \times \left(\mathbf{A}_B + \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tau} \right|_B (\tau - \tau_B) + \dots \right) \right] = \\ &= \left[\lim_{V \rightarrow 0} \oint_S \tau \, d\mathbf{s} \times \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tau} \right|_B \right] = \left[\text{grad } \tau \times \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tau} \right|_B \right] \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Интегральные теоремы векторного анализа

Важнейшими теоремами векторного анализа являются теоремы Остроградского - Гаусса (2.22) и Стокса (2.23), из которых можно установить большое число вспомогательных соотношений. Положим, например, в (2.22) $\mathbf{b} = \varphi \mathbf{C}$, где \mathbf{C} - постоянный вектор. В результате

$$\int_V \text{div} (\varphi \mathbf{C}) \, dv = \int_V \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{C} \, dv = \oint_S \varphi \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s}.$$

В силу того, что $\mathbf{C} = \text{const}$, последнее соотношение можно переписать в виде:

$$\left(\mathbf{C} \cdot \left[\int_V \text{grad } \varphi \, dv - \oint_S \varphi \, d\mathbf{s} \right] \right) = 0 \quad (2.101)$$

В силу произвольности вектора \mathbf{C} находим окончательно:

$$\int_V \text{grad } \varphi \, dv = \oint_S \varphi \, d\mathbf{s} \quad (2.102)$$

Положим теперь в (2.22) $\mathbf{b} = [\mathbf{f} \times \mathbf{C}]$, где \mathbf{C} - произвольный постоянный вектор, а \mathbf{f} - функция от координат:

$$\int_V \text{div} [\mathbf{f} \times \mathbf{C}] \, dv = \int_V \mathbf{C} \cdot \text{rot } \mathbf{f} \, dv = \oint_S [\mathbf{f} \times \mathbf{C}] \cdot d\mathbf{s} = \oint_S \mathbf{C} \cdot [d\mathbf{s} \times \mathbf{f}]. \quad (2.103)$$

Представляя (2.103) в виде, аналогичном (2.101) в силу произвольности \mathbf{C} , находим:

$$\int_V \text{rot } \mathbf{f} \, dv = - \oint_S [\mathbf{f} \times d\mathbf{s}] = \oint_S [d\mathbf{s} \times \mathbf{f}]. \quad (2.104)$$

Следствиями из формул (2.22), (2.102), (2.104) являются следующие утверждения:

1) если векторное поле таково, что $\text{div } \mathbf{f} = 0$, то, как следует из (2.22) поток вектора через любую замкнутую поверхность равен 0;

2) если внутри области V $\text{div } \mathbf{f} = 0$ всюду, кроме некоторой точки, (где $\text{div } \mathbf{f}$ либо $\neq 0$, либо не существует!), то поток вектора \mathbf{f} не зависит от вида поверхности интегрирования и равен 0 для поверхностей, не содержащих внутри себя эту точку и одинаков для поверхностей, охватывающих эту точку;

3) полагая $\varphi = \text{const}$ в (2.102), находим для любой замкнутой поверхности S :

$$\oint_S d\mathbf{s} = \oint_S \mathbf{n} \, ds = 0 \quad (2.105)$$

4) если поле \mathbf{b} таково, что $\text{rot } \mathbf{b} = 0$, то из (2.104)

$$\oint_S [\mathbf{b} \times d\mathbf{s}] = \oint_S [\mathbf{b} \times \mathbf{n}] \, ds = 0 \quad (2.106)$$

На основании теоремы Стокса (2.23) можно получить формулы, связывающие характеристики поля на незамкнутой поверхности с характеристиками этого поля на контуре, служащем границей поверхности. Положив в (2.23) $\mathbf{b} = \varphi \mathbf{C}$, где $\mathbf{C} = \text{const}$, аналогично выводу формул (2.102) и (2.104), найдем:

$$\int_S [d\mathbf{s} \times \text{grad } \varphi] = \int_S [\mathbf{n} \times \text{grad } \varphi] \, ds = \oint_L \varphi \, d\mathbf{l}. \quad (2.107)$$

Если выбрать в (2.23) $\mathbf{b} = [\mathbf{f} \times \mathbf{C}]$, где \mathbf{C} - постоянный вектор, то:

$$\begin{aligned} \int_S \text{rot} [\mathbf{f} \times \mathbf{C}] \cdot d\mathbf{s} &= \int_S [\vec{\nabla} \times \mathbf{b}] \cdot d\mathbf{s} = \int_S [d\mathbf{s} \times \vec{\nabla}] \cdot \mathbf{b} = \int [d\mathbf{s} \times \vec{\nabla}] \cdot [\mathbf{f} \times \mathbf{C}] = \\ &= \int_S \mathbf{C} \cdot [d\mathbf{s} \times \vec{\nabla}] \times \mathbf{f} = \oint_L [\mathbf{f} \times \mathbf{C}] \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{C} \cdot [d\mathbf{l} \times \mathbf{f}]. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$\int_S [d\mathbf{s} \times \vec{\nabla}] \times \mathbf{f} = \int_S [\mathbf{n} \times \vec{\nabla}] \times \mathbf{f} ds = \oint_L [d\mathbf{l} \times \mathbf{f}]. \quad (2.108)$$

Первая формула Грина

Если положить в (2.22) $\mathbf{b} = \varphi \vec{\nabla} \psi$, то получим так называемую первую формулу Грина:

$$\int_V \left(\varphi \Delta \psi + \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \psi \right) dv = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds. \quad (2.109)$$

Вторая формула Грина

Если в (2.22) выбрать $\mathbf{b} = \varphi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \varphi$, получим вторую формулу Грина:

$$\int_V \left(\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi \right) dv = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds. \quad (2.110)$$

Вторая теорема Грина содержит важное следствие: *если внутри объема V , ограниченного поверхностью S , задана непрерывная вместе со вторыми производными функция φ , то можно определить значение φ в любой внутренней точке объема V при известных φ и ее нормальной производной $\partial \varphi / \partial n$ на S* . Данное следствие можно получить из (2.22) положив $\psi = 1/r$, где r - модуль радиус вектора:

$$4\pi \varphi(A) = - \int_V \frac{1}{r} \Delta \varphi dV - \oint_S \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} ds. \quad (2.111)$$

Потенциальное векторное поле

Векторное поле заданное вектором \mathbf{A} называется *потенциальным*, если $\mathbf{A} = \text{grad } \varphi$. Величина φ называется *скалярным потенциалом* поля.

Если скалярный потенциал φ поля \mathbf{A} однозначная функция, то значение циркуляции вектора \mathbf{A} не зависит от формы пути и определяется значениями потенциалов в начальной a и конечной b точках:

$$\int_a^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \vec{\nabla} \varphi \cdot d\mathbf{l} = \quad (2.112)$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = \int_a^b d\varphi = \varphi(b) - \varphi(a),$$

т.е. циркуляция вектора потенциального поля по замкнутому пути равна 0, так как в этом случае $a = b$ и $\varphi(a) - \varphi(b) = 0$. Необходимым и достаточным условием того, чтобы поле было потенциальным, является равенство: $\text{rot } \mathbf{A} = 0$.

Соленоидальное векторное поле

Векторное поле \mathbf{B} называется *соленоидальным* (или *вихревым*), если $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Вектор \mathbf{A} называется *векторным потенциалом* поля \mathbf{B} .

Необходимым и достаточным условием соленоидальности поля является равенство: $\text{div } \mathbf{B} = 0$.

Лапласово векторное поле

Векторное поле \mathbf{A} называется *Лапласовым*, если в любой его точке выполняются равенства:

$$\text{rot } \mathbf{A} = 0; \quad \text{div } \mathbf{A} = 0$$

. Лапласово поле является одновременно и потенциальным и соленоидальным. Лапласово поле полностью определяется скалярным потенциалом, удовлетворяющим уравнению Лапласа: $\Delta \varphi = 0$. Функции, удовлетворяющие уравнения Лапласа, называются *гармоническими*.

Пример 2.§6.1. Показать, что функция $1/r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, является гармонической функцией всюду, кроме начала координат.

► Для производных от $1/r$ по x_k ($k \in 1, 2, 3$) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{x_k}{r^3}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3x_k^2 - r^2}{r^5}.$$

Складывая значения вторых производных, получим:

$$\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 3r^2}{r^5} = 0, \quad (r \neq 0).$$

Следовательно, функция $1/r$ является гармонической функцией всюду, кроме начала координат по определению. ◀

Пример 2.§6.2. Доказать равенство: $\Delta(1/r) = -4\pi \delta(\mathbf{r})$.

► Рассмотрим вспомогательный интеграл:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{1}{k^2} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) dv_{\mathbf{k}},$$

где \mathbf{r} - радиус-вектор, а вектор $\mathbf{k} = k_x \mathbf{i} + k_y \mathbf{j} + k_z \mathbf{k}$ компоненты которого принимают значения $-\infty \leq k_x, k_y, k_z \leq \infty$, $dv_{\mathbf{k}} \equiv dk_x dk_y dk_z$ в декартовой системе координат пространства вектора \mathbf{k} . В сферической системе координат пространства вектора \mathbf{k} элементарный объем $d\mathbf{k} \equiv k^2 dk \sin \theta d\theta d\phi$.

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{k^2} \exp(ikr \cos \theta) k^2 dk \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \frac{2}{\pi r} \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Вычислим действие оператора ∇^2 на функцию $\Phi(\mathbf{r})$

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) \equiv \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{1}{k^2} (ik)^2 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) dv_{\mathbf{k}} = -4\pi \delta(\mathbf{r})$$

что и требовалось доказать. ◀

Свойства гармонических функций

.

1. Если внутри замкнутой поверхности S ψ - гармонична, то:

$$\oint_S \frac{\partial \psi}{\partial n} ds = 0. \quad (2.113)$$

Это свойство следует из (2.109), полагая $\varphi = \text{const}$.

2. Если φ и ψ - гармонические функции, то на основании (2.110)

$$\oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds = \oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds. \quad (2.114)$$

3. Если φ - гармонична, то на основании (2.111)

$$4\pi \varphi(A) = - \oint_S \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} ds. \quad (2.115)$$

В частном случае, если S - сфера радиуса R с центром в точке A , то

$$\varphi(A) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S \varphi ds, \quad (2.116)$$

так как по свойству 1 второй интеграл в (2.115) равен 0, а

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right)_{\text{сфера}} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right)_{r=R} = -\frac{1}{R^2}.$$

Выражение (2.116) означает, что величина гармонической функции в точке A равна среднему значению этой функции на любой сфере с центром в точке A .

4. Гармоническая функция не имеет ни максимума, ни минимума внутри области гармоничности.

5. Гармоническая функция, постоянная на границе, постоянна и внутри области.

Основная теорема векторного анализа

Любое непрерывное векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, заданное во всем пространстве и исчезающее на бесконечности вместе с $\operatorname{div} \mathbf{A}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{A}$, может быть единственным образом (с точностью до векторной постоянной) представлено в виде суммы потенциального \mathbf{A}_1 и соленоидального \mathbf{A}_2 полей, т.е.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_2(\mathbf{r}); \quad \operatorname{div} \mathbf{A}_2 = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{A}_1 = 0. \quad (2.117)$$

Упражнения

1. Вычислить $\operatorname{div} \mathbf{r}$, $\operatorname{rot} \mathbf{r}$, $\operatorname{grad} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$, $(\mathbf{a} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{r}$, где \mathbf{r} - радиус вектор, $\mathbf{a} = \text{const}$ в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат.

2. Вычислить $\operatorname{grad} \varphi(r)$, $\operatorname{div} (\varphi(r)\mathbf{r})$, $\operatorname{rot} (\varphi(r)\mathbf{r})$, $(\mathbf{a} \cdot \vec{\nabla})\varphi(r)\mathbf{r}$.

3. Найти div и rot векторов: $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{b}$, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}$, $[\mathbf{a} \times \mathbf{r}]$, $\varphi(r)[\mathbf{a} \times \mathbf{r}]$, $[\mathbf{r} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{r}]]$, где \mathbf{a} и $\mathbf{b} = \text{const}$.

4. Вычислить $\operatorname{grad} (\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r})$, $\operatorname{grad} (\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}))$, $\operatorname{div} (\varphi(r)\mathbf{A}(\mathbf{r}))$, $\operatorname{rot} (\varphi(r)\mathbf{A}(\mathbf{r}))$, $(\mathbf{a} \cdot \vec{\nabla})(\varphi(r)\mathbf{A}(\mathbf{r}))$, где $\mathbf{a} = \text{const}$.

5. Вычислить $\operatorname{grad} ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})/r^3)$ и $\operatorname{rot} [\mathbf{a} \times \mathbf{r}]/r^3$.

6. Доказать равенство:

$$\int_V [\mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{b}] dv = \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} ds.$$

7. Доказать равенство:

$$\int_V \left\{ [\mathbf{b} \times \operatorname{rot} \mathbf{a}] + [\mathbf{a} \times \vec{\nabla}] \times \mathbf{b} \right\} dv = \oint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{b} ds$$

8. Доказать равенство: $[[\mathbf{M} \times \vec{\nabla}] \times \mathbf{r}] = -2\mathbf{M}$.

9. Задан вектор $\mathbf{\Pi} = \mathbf{d}(t - r/c)/r$, r - модуль радиус- вектора, $c = \text{const}$, t - скалярный параметр. Доказать, что:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{\Pi} &= -\frac{1}{r^3}[\mathbf{r} \times \mathbf{d}(\tau)] - \frac{1}{r^2 c}[\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{d}}], \quad \tau = t - r/c; \\ \text{rot rot } \mathbf{\Pi} &= \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{d}}{r^3} + \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{d}}) - \dot{\mathbf{d}}}{c r^2} + \frac{[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]]}{c^2 r} \quad (2.118) \\ \mathbf{n} &= \mathbf{r}/r, \dot{\mathbf{d}} \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{d}(\tau) \quad \ddot{\mathbf{d}} \equiv \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \mathbf{d}(\tau). \end{aligned}$$

§7 Тензорный анализ

Многомерное пространство

В трехмерном пространстве положение точки задается радиусом- вектором или набором трех переменных - координат точки x^1, x^2, x^3 . Положение точки в N мерном пространстве, по аналогии, задается набором N координат для которых используется обозначение x^1, x^2, \dots, x^N .

Пусть x^1, x^2, \dots, x^N и $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^N$ наборы координат точки в многомерном пространстве в двух различных системах координат. Если существуют N независимых однозначно определенных соотношений связывающих координаты обеих систем

$$\tilde{x}^k = \tilde{x}^k(x^1, x^2, \dots, x^N), \quad x^k = x^k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^N), \quad k \in 1, 2, \dots, N \quad (2.119)$$

то говорят, что определены преобразования координат от одной системы координат к другой.

Векторы в многомерном пространстве

Используя конструктивное определение вектора в трехмерном пространстве (2.41) и соглашение о ко- и контравариантных векторах (2.47), (2.48) можно определить контравариантный вектор в многомерном пространстве как набор N функций (компонент вектора), преобразующихся от одной системы координат к другой в соответствии с равенством:

$$\tilde{A}^k = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} A^i = \sum_{i=1}^N (\partial_i \tilde{x}^k) A^i \equiv (\partial_i \tilde{x}^k) A^i. \quad k \in 1, 2, \dots, N. \quad (2.120)$$

Здесь использовано обозначение $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$ и кроме того соглашение о суммировании, которое применяется в теории многомерных пространств.

Содержание данного соглашения состоит в следующем: *если в выражении под знаком суммы по всем значениям компонент встречается дважды повторяющийся индекс, один контравариантного типа, а второй ковариантного типа, то символ суммирования в выражении опускается для сокращения записи*

В теории многомерных пространств говорят, что A^1, A^2, \dots, A^N образуют вектор или другими словами *контравариантный тензор первого ранга*.

Ковариантный вектор или *ковариантный тензор первого ранга* определяется равенством

$$\tilde{A}_k = \sum_{i=1}^N \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} A_i = \sum_{i=1}^N (\tilde{\partial}_k x^i) A_i \equiv (\tilde{\partial}_k x^i) A_i. \quad k \in 1, 2, \dots, N. \quad (2.121)$$

Здесь $\tilde{\partial}_k = \partial / \partial \tilde{x}^k$

Ниже для сохранения однозначности записи учебного материала соглашение о суммировании не применяется, если не оговорено иное.

Тензоры

Если N^2 величин $F^{\alpha\beta}$ в системе многомерных координат (x^1, x^2, \dots, x^N) связаны с N^2 величинами $F'^{\alpha\beta}$ другой многомерной системы координат $(x'^1, x'^2, \dots, x'^N)$ линейными алгебраическими преобразованиями вида

$$F'^{\alpha\beta} = \sum_{\lambda=1}^N \sum_{\mu=1}^N \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\mu}} F^{\lambda\mu}; \quad \alpha, \beta \in 1, 2, \dots, N; \quad (2.122)$$

то $F^{\alpha\beta}$ образуют компоненты контравариантного тензора второго ранга.

Простейшим примером такого объекта является произведение компонент векторов $F^{\alpha\beta} = A^{\alpha} A^{\beta}$, где $\alpha, \beta \in 1, 2, \dots, N$. Аналогично, если N^2 величин $F_{\alpha\beta}$ в системе многомерных координат (x^1, x^2, \dots, x^N) связаны с N^2 величинами $F'_{\alpha\beta}$ другой многомерной системы координат $(x'^1, x'^2, \dots, x'^N)$ линейными алгебраическими преобразованиями вида

$$F'_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda=1}^N \sum_{\mu=1}^N \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} F_{\lambda\mu}; \quad \alpha, \beta \in 1, 2, \dots, N; \quad (2.123)$$

то $F_{\alpha\beta}$ образуют компоненты ковариантного тензора второго ранга. Наконец, если N^2 величин F^{α}_{β} в системе многомерных координат

нат (x^1, x^2, \dots, x^N) связаны с N^2 величинами F'^α_β другой многомерной системы координат $(x'^1, x'^2, \dots, x'^N)$ линейными алгебраическими преобразованиями вида

$$F'^\alpha_\beta = \sum_{\lambda=1}^N \sum_{\mu=1}^N \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} F^\lambda_\mu; \quad \alpha, \beta \in 1, 2, \dots, N; \quad (2.124)$$

то F^α_β образуют компоненты смешанного тензора второго ранга.

Тензоры более высокого ранга определяются в соответствии с представленными определениями. Например, смешанный тензор третьего ранга определяется равенством

$$F'^\alpha_{\beta\gamma} = \sum_{\lambda=1}^N \sum_{\mu=1}^N \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} F^\lambda_{\mu\nu}; \quad \alpha, \beta, \gamma \in 1, 2, \dots, N. \quad (2.125)$$

Как следует из определения тензора вектор является тензором первого ранга, а скаляр - тензором нулевого ранга. Скаляр или тензор нулевого ранга называется еще инвариантной величиной или инвариантом при преобразованиях координат.

Кroneckerовская дельта

Кroneckerовская дельта определяется как смешанный тензор второго ранга, компоненты которого равны:

$$\delta^i_k = 1 \quad \text{если} \quad i = k; \quad \delta^i_k = 0 \quad \text{если} \quad i \neq k. \quad (2.126)$$

Тензорное поле

Если в каждой точке многомерного пространства определен тензор, то говорят о тензорном поле в данном пространстве. Такое поле будет являться векторным для тензора первого ранга и скалярным для тензора нулевого ранга. Следует подчеркнуть, что тензор или тензорное поле это не набор компонент только в какой-то одной системе координат, а вся совокупность всех возможных наборов устанавливаемых определенным преобразованием.

Тензорная алгебра

Для тензоров определены обычные алгебраические операции.

Сложение тензоров одного ранга определяется как сложение компонент тензоров слагаемых $C^{\alpha\beta}_\gamma = A^{\alpha\beta}_\gamma + B^{\alpha\beta}_\gamma$

Вычитание тензоров одного ранга определяется как вычитание компонент тензоров $C^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = A^{\alpha\beta}{}_{\gamma} - B^{\alpha\beta}{}_{\gamma}$

Прямое произведение тензоров или внешнее произведение определяется как умножение компонент тензоров $C^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = A^{\alpha}{}_{\gamma} \otimes B^{\beta}{}_{\delta}$. Однако не каждый тензор может быть записан как произведение двух тензоров более низкого ранга

Свертка тензора определяется как суммирование по повторяющимся контра и ковариантным индексам тензора, например для тензора четвертого ранга:

$$\sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha}{}^{\beta\alpha\gamma} = B^{\beta\gamma}$$

В результате применения операции свертки по одному индексу результирующий тензор является тензором ранга на две единицы меньше исходного.

Внутреннее произведение определяется как сумма компонент прямого произведения тензоров.

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha}{}^{\beta} B^{\alpha}{}_{\lambda\mu\nu} = R^{\beta}{}_{\lambda\mu\nu}$$

Тензор второго ранга называется симметричным, если его компоненты удовлетворяют равенству $F^{nm} = F^{mn}$. Если выполняется равенство $F^{nm} = -F^{mn}$, то тензор называется антисимметричным. Всякий тензор второго ранга можно разложить на симметричную и антисимметричную части:

$$F^{nm} = \frac{1}{2} (F^{nm} + F^{mn}) + \frac{1}{2} (F^{nm} - F^{mn})$$

Для тензоров произвольного ранга понятия "симметричный – антисимметричный" относятся к конкретным индексам тензора.

Метрический тензор. Элемент линии

В декартовой системе координат (x, y, z) дифференциал длины отрезка ds может быть получен из соотношения $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. В произвольной криволинейной системе координат данное соотношение имеет вид (2.53)

$$ds^2 = \sum_{k=1}^3 \sum_{n=1}^3 g_{kn} dx^k dx^n, \quad (2.127)$$

где $g_{kn} = h_{kn}^2$. Такое пространство называется *трехмерным Евклидовым пространством*.

Обобщение выражения (2.127) на случай N мерного пространства определяется равенством:

$$ds^2 = \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N g_{kn} dx^k dx^n, \quad (2.128)$$

где g_{kn} - компоненты ковариантного тензора второго ранга, который называется "метрическим тензором". Этот тензор всегда может быть выбран симметричным относительно перестановки индексов $g_{kn} = g_{nk}$. В специальных случаях выражение (2.128) преобразованиями координат от x^k к x'^k может быть сведено к виду

$$ds'^2 = (dx'^1)^2 + (dx'^2)^2 + \dots + (dx'^N)^2.$$

В этом частном случае многомерное пространство называется Евклидовым. В общем случае пространство называется Римановым.

Пусть $g = \det |g_{kn}|$ определитель квадратной матрицы составленной из элементов тензора g_{kn} . Если $g \neq 0$ то сопряженным метрическому тензором называется тензор второго ранга, определенный соотношением:

$$g^{kn} = \frac{1}{g} G_{kn}, \quad (2.129)$$

где G_{kn} - минор матрицы g_{kn} . Для метрического и сопряженного метрического тензоров выполняется равенство

$$\sum_{k,n=1}^N g^{kn} g_{kn} = \delta_n^k. \quad (2.130)$$

Аналогичное равенство имеет место для любого исходного тензора и сопряженного ему тензора, построенного в соответствии с равенством (2.129).

Ассоциированные тензоры

Для любого заданного тензора можно получить другой тензор с поднятыми или опущенными индексами в его изображении. Например, если задан тензор A_{kn} , то поднятием индекса k получим тензор следующего вида A^k_n . Во вновь полученном тензоре точка указывает начальное положение передвинутého индекса. Поднятие второго индекса у исходного тензора может быть записано в виде A^{kn} . В тех случаях, когда это не может привести к недоразумениям или неоднозначности результата изображение точек может быть опущено. Тензоры с преобразованным положением индексов

могут быть получены путем внутреннего произведения исходного тензора с метрическим или тензором сопряженным с метрическим.

$$A^k_{\cdot n} = \sum_{i=1}^N g^{ik} A_{in}; \quad A^{k l \cdot m n}_{\cdot \cdot q \cdot \cdot} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^N g^{l\alpha} g_{q\beta} g^{n\gamma} A^{k \cdot \beta m \cdot}_{\alpha \cdot \cdot \gamma} \quad (2.131)$$

Тензоры, полученные из заданного путем внутреннего произведения с метрическим тензором или сопряженным метрическим тензором называются ассоциированными заданным тензором. Так например, тензоры первого ранга A^n и A_n ассоциированные тензоры, при этом первый из них образован контравариантными компонентами, а второй ковариантными. Соотношения между ними задаются равенствами

$$A_n = \sum_{k=1}^N g_{nk} A^k; \quad A^k = \sum_{n=1}^N g^{kn} A_n. \quad (2.132)$$

Для прямоугольных координат $g_{kn} = \delta_n^k$, так что $A^k = A_n$ и по этой причине нет различия между ко- и контравариантными составляющими векторов.

Пример 2.§7.1. *Найти явный вид сопряженного метрического тензора в цилиндрической и сферической системах координат.*

► В цилиндрической системе координат $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$. Следовательно, если обозначить $x^1 = \rho$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$, то $g_{11} = 1$, $g_{22} = \rho^2$, $g_{33} = 1$ и $g_{ik} = 0$ при $i \neq k$. В матричном виде метрический тензор в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы метрического тензора равен

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho^2.$$

В результате элементы сопряженного метрического тензора определяются в соответствии с равенствами

$$g^{11} = \frac{G_{11}}{g} = \frac{1}{\rho^2} \begin{vmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad g^{22} = \frac{G_{22}}{g} = \frac{1}{\rho^2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho^2};$$

$$g^{33} = \frac{G_{33}}{g} = \frac{1}{\rho^2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{vmatrix} = 1; \quad g^{12} = \frac{G_{12}}{g} = -\frac{1}{\rho^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогично $g^{kn} = 0$ при условии $k \neq n$. В матричном виде сопряженный метрический тензор цилиндрической системы координат может быть представлен в виде:

$$g^{ik} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В сферической системе координат $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$. Пологая, в этом случае, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$ метрический и сопряженный ему тензоры сферической системы координат могут быть записаны в матричном виде:

$$g_{ik} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad g^{ik} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Здесь использовано, что определитель метрического тензора в сферической системе координат равен $|g| = r^4 \sin^2 \theta$. ◀

Длина вектора. Угол между векторами

Величина

$$(A \cdot B) = \sum_{k=1}^N A^k B_k,$$

составленная из компонент векторов в многомерном пространстве, определенная как внутреннее произведение является скаляром и *называется по аналогии с трехмерным пространством скалярным произведением*.

Длина вектора $|A|$ в многомерном пространстве определяется равенствами

$$|A| = \sqrt{(A \cdot A)} = \sqrt{\sum_{n=1}^N A^n A_n} = \sqrt{\sum_{n,m=1}^N g^{nm} A_n A_m} = \sqrt{\sum_{n,m=1}^N g_{nm} A^n A^m}.$$

По аналогии со скалярным произведением в трехмерном пространстве определяется угол между векторами

$$\cos \theta = \frac{(A \cdot B)}{|A| |B|}$$

Физические компоненты тензоров

В тензорном анализе вводится определение физических компонент вектора A_k или A^k . Такие компоненты обозначаются A_u , A_v и A_w и являются проекциями вектора на тангенциальное направление координатной кривой. В случае ортогональных систем координат

$$A_u \equiv \sqrt{g_{11}} A^1 = \frac{A_1}{\sqrt{g_{11}}}; \quad A_v \equiv \sqrt{g_{22}} A^2 = \frac{A_2}{\sqrt{g_{22}}}; \quad A_w \equiv \sqrt{g_{33}} A^3 = \frac{A_3}{\sqrt{g_{33}}}.$$

Аналогично физические компоненты тензора второго ранга A^{kn} и A_{kn} определяются следующими равенствами

$$A_{uu} \equiv g_{11} A^{11} = \frac{A_{11}}{g_{11}}; \quad A_{uv} \equiv \sqrt{g_{11} g_{22}} A^{12} = \frac{A_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}};$$

$$A_{uw} \equiv \sqrt{g_{11} g_{33}} A^{13} = \frac{A_{13}}{\sqrt{g_{11} g_{33}}}; \quad \text{и т.п.} \dots$$

Символы Кристофеля

Символ Кристофеля первого рода определяется соотношением

$$[n m, k] \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{nk}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{nm}}{\partial x^k} \right) \quad (2.133)$$

Символ Кристофеля второго рода определяется как внутреннее произведение символа Кристофеля первого рода и сопряженного метрического тензора

$$\Gamma^s_{nm} \equiv \left\{ \begin{matrix} s \\ nm \end{matrix} \right\} \equiv \sum_{\alpha=1}^N g^{s\alpha} [n m, \alpha]. \quad (2.134)$$

Геодезические

Если в Римановом пространстве задана кривая $x^k = x^k(t)$, то расстояние s между двумя точками t_1 и t_2 определено равенством

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{\alpha\beta=1}^N g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt}} dt \quad (2.135)$$

Кривые в Римановом пространстве, которые определяют минимальное расстояние между двумя выбранными точками называются геодезическими. Уравнение для определения геодезических следует из усло-

вия вариации длины (2.135) $\delta s = 0$:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \sum_{n,m=1}^N \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ n m \end{matrix} \right\} \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^m}{ds} = 0, \quad (2.136)$$

где s - параметр, определяющий длину дуги.

Тензорная форма градиента, дивергенции и ротора

Если φ скалярная функция, то градиент φ в многомерном пространстве определяется следующим образом

$$\nabla \varphi \equiv \text{grad } \varphi \equiv \varphi_{,k} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \equiv \partial_k \varphi$$

Дивергенция вектора в многомерном пространстве определена равенством

$$\text{div } A^k \equiv \frac{1}{g} \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} A^k).$$

Ротор вектора A_α в многомерном пространстве определен как тензор второго ранга

$$R_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha}$$

Лапласиан от скалярной функции φ имеет вид

$$\nabla^2 \varphi = \text{div grad } \varphi \equiv \frac{1}{g} \sum_{n,m=1}^N \frac{\partial}{\partial x^n} \left(\sqrt{g} g^{nm} \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} \right)$$

В случае $g < 0$ необходимо заменить \sqrt{g} на $\sqrt{-g}$.

Пример 2.§7.2. Показать, что геодезические в Римановом пространстве определяются уравнениями (2.136).

► Уравнения Эйлера-Лагранжа, определяющее условие экстремума интеграла

$$S = \int_{t_1}^{t_2} F(x, \dot{x}, t) dt$$

имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

Обобщением данного уравнения на случай многомерного пространства при $F = F(x^1, x^2, \dots, x^N, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \dots, \dot{x}^N, t)$ является система уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x^k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} \right) = 0; \quad k \in 1, 2, \dots, N. \quad (2.137)$$

Таким образом для определения уравнений геодезических необходимо в качестве F рассматривать выражение вида $F = \sqrt{\sum_{n,m=1}^N g_{nm} \dot{x}^n \dot{x}^m}$. В результате для частных производных от F получим

$$\frac{\partial F}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n,m=1}^N g_{nm} \dot{x}^n \dot{x}^m \right)^{-1/2} \sum_{n,m=1}^N \frac{\partial g_{nm}}{\partial x^k} \dot{x}^n \dot{x}^m,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n,m=1}^N g_{nm} \dot{x}^n \dot{x}^m \right)^{-1/2} 2 \sum_{k=1}^N g_{nk} \dot{x}^n.$$

Учитывая, что длина дуги s в многомерном Римановом пространстве (2.135) удовлетворяет равенству $\dot{s} = \sqrt{\sum_{n,m=1}^N g_{nm} \dot{x}^n \dot{x}^m}$ находим из (2.137)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\dot{s}} \sum_{k=1}^N g_{nk} \dot{x}^n \right) - \frac{1}{2\dot{s}} \sum_{n,m=1}^N \frac{\partial g_{nm}}{\partial x^k} \dot{x}^n \dot{x}^m = 0.$$

Выполняя дифференцирование по времени, последнее выражение может быть переписано в виде:

$$\sum_{n=1}^N g_{nk} \ddot{x}^n + \sum_{n,m=1}^N \frac{\partial g_{nk}}{\partial x^m} \dot{x}^n \dot{x}^m - \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N \frac{\partial g_{nm}}{\partial x^k} \dot{x}^n \dot{x}^m = \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} \sum_{n=1}^N g_{nk} \dot{x}^n.$$

Тождественные преобразования основанные на переобозначении индексов суммирования приводят к выполнению равенства:

$$\sum_{n,m=1}^N \frac{\partial g_{nk}}{\partial x^m} \dot{x}^n \dot{x}^m = \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N \left(\frac{\partial g_{nk}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^n} \right) \dot{x}^n \dot{x}^m.$$

В результате уравнения Эйлера-Лагранжа преобразуются к виду:

$$\sum_{n=1}^N g_{nk} \ddot{x}^n + \sum_{n,m=1}^N [n m, k] \dot{x}^n \dot{x}^m = \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} \sum_{n=1}^N g_{nk} \dot{x}^n,$$

где $[n m, k]$ - символ Кристофеля первого рода (2.133).

В исходных выражениях t рассматривается как параметр. Принимая в качестве параметра длину дуги s с учетом очевидных соотношений $\dot{s} = 1$, $\ddot{s} = 0$ находим следующее уравнение:

$$\sum_{n=1}^N g_{nk} \frac{d^2 x^n}{ds^2} + \sum_{n,m=1}^N [n m, k] \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^m}{ds} = 0.$$

Умножив последнее равенство на $g^{\alpha k}$ и просуммировав полученное выражение по k найдем систему уравнений для геодезических (2.136). При выполнении суммирования по k необходимо учесть равенство:

$$\sum_{k=1}^N g^{\alpha k} g_{nk} = \delta_n^\alpha. \quad \blacktriangleleft$$

Упражнения

1. Сколько компонент имеет тензор шестого ранга в четырех мерном пространстве.

2. Доказать, что если компоненты двух тензоров равны в какой-то системе координат, то они равны в любой другой системе координат.

3. Определить число различных компонент симметричного тензора второго ранга в пространстве размерности N .

4. Определить g и g^{nm} , если $ds^2 = 3(dx^{(1)})^2 + 2(dx^{(2)})^2 + 4(dx^{(3)})^2 - 6dx^{(1)} dx^{(3)}$.

5. Определить символы Кристоффеля первого и второго рода в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат.

6. Найти дифференциальные уравнения для геодезических в а) цилиндрической и б) сферической системах координат.

Ответ: а)

$$\frac{d^2 \rho}{ds^2} - \rho \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0; \quad \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0; \quad \frac{d^2 z}{ds^2} = 0$$

б)

$$\frac{d^2 r}{ds^2} - r \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 - r \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0; \quad \frac{d^2 \theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \frac{\sin(2\theta)}{2} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0;$$

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + 2 \cos \theta \frac{d\theta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0.$$

7. Показать, что геодезические на плоскости есть прямые линии.

Глава 3

Основные уравнения электродинамики. Лекции.

§1 Экспериментальные данные, лежащие в основе электродинамики. Электростатика.

Электростатическое поле – частный случай электромагнитного поля. Для электростатического поля экспериментально установлено, что источником такого поля являются электрические заряды.

Заряд

Электрический заряд – это свойство ряда материальных объектов, определяющее меру силового взаимодействия между носителями такого свойства.

Носителями зарядов являются микроскопические объекты (частицы), из которых построены атомы, ядра и частицы, передающие взаимодействие. Условно их можно назвать "элементарные частицы". Например: электрон, протон, мюон и т.п.

Экспериментально установлено, что:

1. *Заряд любого объекта кратен величине заряда электрона e*

$$e = -4.803242 \times 10^{-10} \text{ ед. СГСЕ} = -1.6021892 \times 10^{-19} \text{ кулон}^1$$

Об этом свойстве говорят как о дискретности или квантовом характере величины заряда².

2. *Существует два типа электрических зарядов.* Их условились называть "положительными" и "отрицательными" зарядами.

3. *Суммарный заряд замкнутой системы не меняется с течением времени.* Данное утверждение называется *законом сохранения заряда*.

Если система состоит из N заряженных объектов с зарядами q_k , то закон сохранения заряда означает, что

$$Q = \sum_{k=1}^N q_k = \text{const.} \quad (3.1)$$

Так как носителями зарядов являются элементарные частицы, "размеры" которых порядка $\approx 10^{-12}$ см. и менее, во многих практически важных случаях можно считать, что заряды – точечные объекты. Однако, для математического описания свойств электромагнитного поля удобно использовать хорошо развитый аппарат дифференциального и интегрального исчисления,

¹ 1 кулон = 3×10^9 ед. СГСЕ.

² Заряды кварков в данном курсе не обсуждаются.

в рамках которого используются непрерывно меняющиеся величины. В связи с этим в теории вводится обобщение понятия заряда на случай его непрерывного распределения в пространстве.

Объемная плотность заряда

В случае, когда заряд непрерывно распределен по объему вводится понятие *объемной плотности заряда* по определению:

$$\rho(\mathbf{r}) \equiv \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} = \frac{dQ}{dv} \quad (3.2)$$

Здесь ΔQ - заряд внутри элемента объема Δv . Таким образом ρ является характеристикой точки пространства и в общем случае является функцией от координат.

Практически соотношение (3.2) используется в том смысле, что внутри бесконечно малого объема dv , расположенного в точке \mathbf{r} , заключен бесконечно малый заряд $dQ = \rho(\mathbf{r}) dv$. Суммарный заряд внутри конечного объема V на основании (3.2) равен

$$Q = \int_V dQ = \int_V \rho(\mathbf{r}) dv. \quad (3.3)$$

Вычислим, например, полный заряд Q шара радиуса R , заряженного с объемной плотностью $\rho = a r^2 \cos^2 \theta$ (где r, θ - переменные сферической системы координат, a - размерная постоянная).

► На основании (3.3) Q равен:

$$Q = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a r^2 \cos^2 \theta r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = a \frac{r^5}{5} \Big|_0^R \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi 2\pi = \frac{4\pi}{15} a R^5. \quad \blacktriangleleft$$

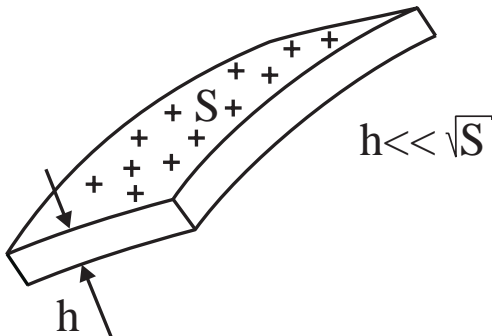


Рис. 3.1:

Определение (3.2) включает в себя и случай точечного заряда. Так для точечного заряда q , находящегося в точке, радиус-вектор которой \mathbf{r}_q , объемная плотность заряда в точке \mathbf{r} есть:

$$\rho(\mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q), \quad (3.4)$$

где $\delta(\mathbf{a})$ - дельта-функция Дирака. Справедливость выражения (3.4) вытекает из равенства (3.3). При этом $\delta(x)$ - функция от вектора $\mathbf{a} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z$ в декартовой системе координат есть $\delta(\mathbf{a}) \equiv \delta(a_x)\delta(a_y)\delta(a_z)$.

Для системы N точечных зарядов объемная плотность заряда определяется выражением:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k), \quad (3.5)$$

где \mathbf{r}_k - радиус-вектор расположения k -го точечного заряда в пространстве.

По определению, размерность плотности заряда $[\rho]$ равна размерности заряда $[q]$, деленной на размерность объема $[V] = [l]^3$.

Поверхностная плотность заряда

В ряде случаев можно говорить о распределении заряда по поверхности S , например, если толщина заряженной пластины много меньше корня квадратного от величины поверхности пластины (см. рис. 3.1). В этом случае удобно ввести понятие, которое будет характеризовать заряд единицы поверхности или *поверхностную плотность* заряда σ

$$\sigma \equiv \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta s} = \frac{dQ}{ds}; \quad dQ = \sigma ds; \quad Q = \int_S \sigma ds, \quad [\sigma] = \frac{[e]}{[S]}. \quad (3.6)$$

Пусть, например, цилиндрическая поверхность радиуса R и высоты H заряжена с поверхностной плотностью $\sigma = a z \sin \phi$ (ϕ, z - переменные цилиндрической системы координат, a - размерная константа). Найти полный заряд цилиндра.

► В этом случае полный заряд цилиндра равен:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^H a \sin \phi z R d\phi dz = 0. \quad \blacktriangleleft$$

Линейная плотность заряда

Если длина заряженного объекта много больше характерного размера поперечного сечения (тонкая нить), то можно ввести понятие *линейной плотности* заряда τ на линии L :

$$\tau \equiv \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl}; \quad dQ = \tau dl; \quad Q = \int_L \tau dl; \quad [\tau] = \frac{[e]}{[l]}. \quad (3.7)$$

Если, например, отрезок прямой линии длины l заряжен с линейной плотностью $\tau = \tau_0 x$, то полный заряд линии равен:

$$Q = \int_0^l \tau_0 x dx = \tau_0 l^2/2.$$

Электрический ток

В соответствии с законом сохранения заряда, единственной причиной приводящей к изменению суммарного заряда замкнутой системы является перемещение зарядов из или внутрь заданной системы. В свою очередь, движение зарядов – определяется как электрический ток.

Сила тока I определяется как величина заряда, прошедшего через поперечное сечение проводника за единицу времени:

$$I \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}; \quad [I] = \frac{[e]}{[t]}. \quad (3.8)$$

Плотность тока.

Сила тока является интегральной характеристикой для проводника. Соответствующей дифференциальной характеристикой является *плотность электрического тока \mathbf{j}* , которая определяет количество заряда, прошедшее в единицу времени через единицу поверхности.

Для определения \mathbf{j} рассмотрим произвольную поверхность S и вычислим заряд, проходящий через S за бесконечно малый промежуток времени dt . Выделим на S элементарную поверхность ds . Если скорость движения зарядов \mathbf{v} , то за время dt площадку ds пересекут заряды, находящиеся внутри цилиндра, ось которого совпадает с направлением \mathbf{v} . Высота такого цилиндра равна $|\mathbf{v}| dt$, а площадь основания $ds' = ds \cdot \cos \alpha$, где α – угол между направлением нормали к ds и вектором скорости (рис. 3.2). Объем этого цилиндра равен $dv = ds \cos \alpha |\mathbf{v}| dt = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dt ds$. Здесь \mathbf{n} – вектор единичной нормали к ds .

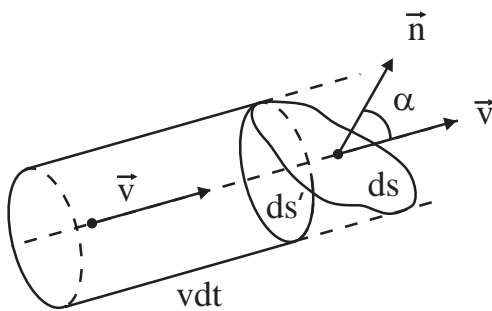


Рис. 3.2:

В силу бесконечной малости dv , с точностью до членов одного порядка, все заряды внутри dv имеют скорость \mathbf{v} . На основании (3.3) элементарный заряд прошедший через ds за время dt равен: $\rho dv = \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dt ds$, где ρ – объемная плотность заряда в точке расположения dv . Следовательно элементарный заряд, прошедший за время dt через всю площадку S есть:

$$dQ = \int_S \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dt ds = dt \int_S (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) ds. \quad (3.9)$$

В равенстве (3.9) введено определение вектора \mathbf{j} :

$$\mathbf{j} \equiv \rho \mathbf{v}; \quad [j] = \frac{[e]}{\text{см}^2 \cdot \text{сек}} \quad (3.10)$$

Таким образом, в соответствии с (3.8) получим для силы тока:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \int_S (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) ds = \int_S (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}). \quad (3.11)$$

Как следует из (3.11) величина вектора \mathbf{j} определяет заряд, прошедший в единицу времени через единичное поперечное сечение проводника и таким образом вектор \mathbf{j} может быть назван плотностью электрического тока.

Линейный проводник.

В случае, когда поперечное сечение проводника мало, можно условно использовать понятие линейного проводника. При этом предельный переход к линейному проводнику позволяет написать следующее формальное соотношение:

$$\mathbf{j} dv = j \mathbf{k} dv = j \mathbf{k} ds dl = j ds \mathbf{k} dl \Rightarrow I dl, \quad (3.12)$$

где dl - бесконечно малый элемент длины проводника, \mathbf{k} - единичный вектор в направлении тока, то есть вектор касательной к линии тока, $d\mathbf{l} \equiv \mathbf{k} dl$.

Дифференциальная форма закона сохранения заряда.

Используя понятие плотности тока, перепишем закон сохранения заряда в форме

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = - \oint_S (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) ds \quad (3.13)$$

Данное равенство устанавливает, что единственной причиной изменения полного заряда системы Q является "выход" или "вход" заряда в систему за счет их движения. В равенстве (3.13) учтено, что если заряд выходит из замкнутой системы, ограниченной поверхностью S , то \mathbf{j} направлен в сторону единичного внешнего вектора нормали \mathbf{n} к замкнутой поверхности S . В этом случае угол между этими векторами меньше π и скалярное произведение $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}$ положительно. Наоборот, если заряд входит в систему, то эти векторы направлены в противоположные стороны, угол между ними больше π и скалярное произведение отрицательно. Таким образом равенство (3.13) одинаково в обоих случаях выбора направления движения зарядов.

С учетом определения плотности заряда и теоремы Остроградского -

Гаусса равенство (3.13) можно переписать в виде:

$$\int_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} \right\} dv = 0.$$

В силу произвольности объема интегрирования из данного равенства вытекает выражение, которое и носит название *закона сохранения заряда в дифференциальной форме*.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (3.14)$$

Закон Кулона.

Закон Кулона устанавливает, что два точечных заряда q_1 и q_2 , находящихся в точках радиус - векторы которых \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , соответственно, взаимодействуют друг с другом с силой, получившей название *кулоновской силы*. При этом сила, которая действует на второй заряд со стороны первого равна:

$$\mathbf{F}_{21} = k_1 \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}. \quad (3.15)$$

Здесь k_1 - коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц измерения ³ физических величин, входящих в (3.15). Если система координат выбрана так, что начало отсчета совпадает с зарядом q_1 , то

$$\mathbf{F}_{21} = k_1 \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (3.16)$$

где \mathbf{r} - радиус - вектор второго заряда. Закон Кулона устанавливает, что одноименные заряды притягиваются, а разноименные — отталкиваются при этом сила взаимодействия зарядов убывает обратно пропорционально квадрату расстояния между зарядами.

Напряженность поля.

Вместо силы, действующей на второй заряд со стороны первого заряда, удобно ввести понятие *напряженности электрического поля*, создаваемого первым зарядом в некоторой точке. Представим для этого выражение (3.16) в виде $\mathbf{F}_{21} = q_2 \mathbf{E}_1$. Тогда вектор \mathbf{E}_1 определяет силу действующую на единичный заряд со стороны заряда q_1 в точке, где находится второй заряд. Этот вектор и называется *напряженностью электрического поля первого заряда в заданной точке*. Таким образом, если начало координат

³Системы единиц измерения обсуждаются в §5.

находится в точке расположения заряда q , то напряженность электрического поля, создаваемого этим зарядом в точке с радиус-вектором \mathbf{r} равна:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_1 \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3.17)$$

Принцип суперпозиции.

Экспериментально установлено, что напряженность поля удовлетворяет принципу суперпозиции: для системы зарядов напряженность электрического поля в произвольной точке равна векторной сумме напряженностей полей создаваемых каждым зарядом.

Так, N штук точечных зарядов q_k расположенных в точках \mathbf{r}_k , создают суммарную напряженность поля в точке \mathbf{r} , равную:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N \mathbf{E}_k(\mathbf{r}) = k_1 \sum_{k=1}^N q_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3}. \quad (3.18)$$

Если заряд распределен непрерывно по объему V с плотностью ρ , то напряженность поля, создаваемая в произвольной точке пространства \mathbf{r} , бесконечно малым зарядом $dq = \rho(\mathbf{r}') dv'$, находящимся в объеме dv' в соответствии с (3.17) равна (см. рис. 3.3):

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_1 dq \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = k_1 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv' \quad (3.19)$$

В соответствии с принципом суперпозиции поле всей системы зарядов внутри объема V равно:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V d\mathbf{E} = k_1 \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv' \quad (3.20)$$

Если поле создается заряженной плоскостью, то в (3.20) необходимо заменить интеграл по объему интегралом по заряженной поверхности и кроме того $\rho dv' \rightarrow \sigma ds$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_S d\mathbf{E} = k_1 \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') ds'. \quad (3.21)$$

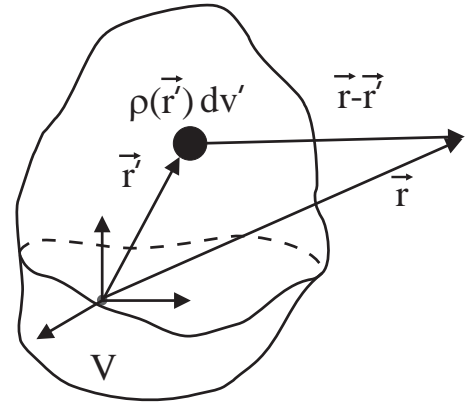


Рис. 3.3:

Аналогично, если поле создается заряженной линией, то интеграл в (3.20) заменяется на интеграл по заряженной линии и $\rho dv' \rightarrow \tau dl$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_L d\mathbf{E} = k_1 \int_L \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \tau(\mathbf{r}') dl'. \quad (3.22)$$

Теорема Гаусса.

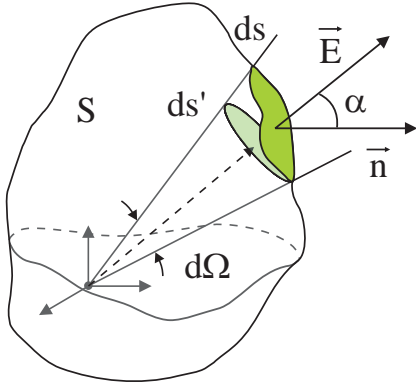


Рис. 3.4:

Следствием закона Кулона и принципа суперпозиции является *теорема Гаусса* в электростатике. Для доказательства данной теоремы рассмотрим точечный заряд q , расположенный в начале координат (см. рис. 3.4). Окружим данный заряд произвольной поверхностью S . Выделим на этой поверхности бесконечно малую поверхность ds и рассмотрим скалярное произведение $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) ds$, где \mathbf{n} - нормаль к ds :

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) ds = k_1 \frac{q}{r^2} \cos \alpha ds = k_1 \frac{q}{r^2} ds'.$$

Здесь α - угол между направлением вектора \mathbf{E} и вектора нормали \mathbf{n} . По определению элемент телесного угла

$$d\Omega = ds \cos \alpha / r^2 = \frac{ds'}{r^2}.$$

В результате для рассматриваемого скалярного произведения имеем:

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = k_1 q d\Omega.$$

Интегрируя данное выражение по замкнутой поверхности находим поток вектора напряженности электрического поля Φ через замкнутую поверхность S :

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = k_1 q \oint d\Omega = k_1 q 4\pi.$$

С учетом принципа суперпозиции, для системы N штук зарядов $\mathbf{E} = \sum_{k=1}^N \mathbf{E}_k$, где \mathbf{E}_k - напряженность поля, создаваемая k -ым зарядом. В результате, если поверхность S охватывает N штук зарядов, получим равенство:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{k=1}^N \oint_S \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{s} = 4\pi k_1 \sum_{k=1}^N q_k = 4\pi k_1 Q. \quad (3.23)$$

Здесь Q - полный заряд системы. Соотношение (3.23) составляет содержание теоремы Гаусса в электростатике и устанавливает, что *поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность определяется величиной полного заряда находящегося внутри этой поверхности.*

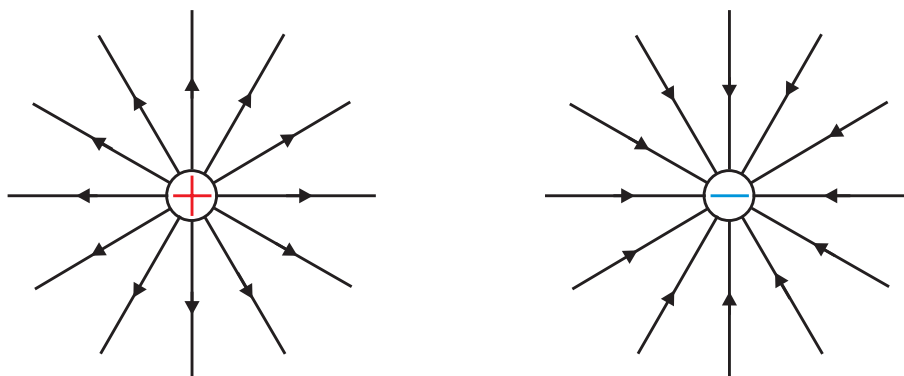


Рис. 3.5: Силовые линии поля положительного и отрицательного точечных зарядов.

Используя теорему Остроградского - Гаусса и выражение (3.3) перепишем (3.23) в виде:

$$\int_V [\operatorname{div} \mathbf{E} - 4\pi k_1 \rho] dv = 0.$$

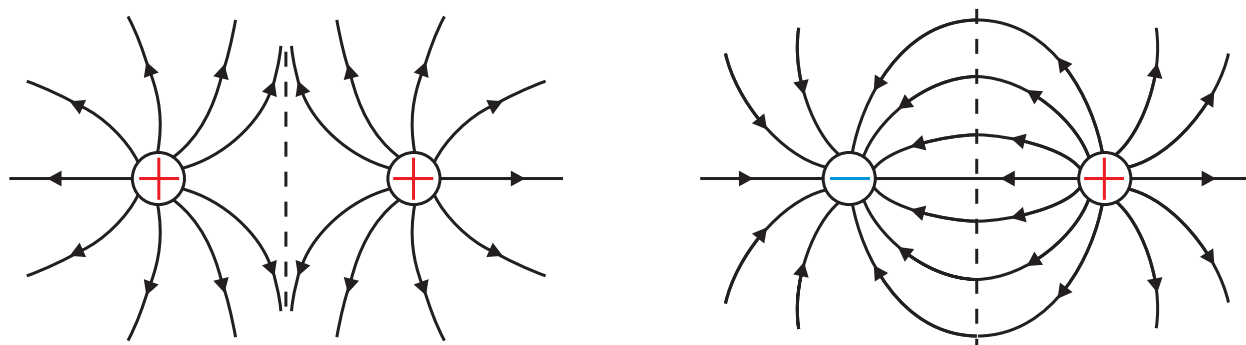


Рис. 3.6: Силовые линии поля системы двух одноименных и разноименных зарядов.

В силу произвольности объема интегрирования из данного интегрального равенства следует теорема Гаусса в электростатике в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi k_1 \rho \quad (3.24)$$

В качестве примера использования теоремы Гаусса найдем поле равномерно заряженной сферической поверхности радиуса R , заряд которой равен Q .

► В соответствии с теоремой Гаусса поле внутри сферы равно нулю, так

как для любой замкнутой поверхности целиком лежащей внутри сферы из-за отсутствия зарядов внутри поверхности поток вектора напряженности поля равен нулю, а следовательно и само поле равно нулю. Выберем начало системы координат в центре сферы. В силу сферической симметрии системы поле вне сферы направлено вдоль радиус-вектора точки наблюдения и постоянно на сфере фиксированного радиуса. Это означает, что поток вектора \mathbf{E} через сферу произвольного радиуса $r > R$ равен

$$\oint_r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_r E ds = E \oint_r ds = E 4\pi r^2. \quad (3.25)$$

Следовательно для $r > R$ получим

$$E 4\pi r^2 = 4\pi k_1 Q \Rightarrow \mathbf{E} = k_1 \frac{Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad \blacktriangleleft \quad (3.26)$$

Силовые линии.

Для геометрического представления электростатического поля вводится понятие силовых линий.

Силовой линией поля называется кривая, вектор касательной к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора напряженности поля.

Так как направление поля определяется знаком заряда, направление касательной на силовой линии указывается явно стрелочкой. На рисунках 3.5, 3.6 приведены примеры силовых линий. Как видно из рисунков, силовые линии начинаются и заканчиваются на зарядах.

§2 Экспериментальные данные, лежащие в основе электродинамики. Магнитостатика.

Экспериментально установлено, что движение зарядов или ток приводит к появлению в пространстве силового поля, которое получило название магнитного поля. Значение магнитного поля в вакууме задается вектором магнитной индукции \mathbf{B} , определяющей величину и направление силового воздействия на движущийся заряд или ток.

Для магнитного поля экспериментально установлены следующие основные законы:

1. Закон отсутствия магнитных зарядов;
2. Закон Био-Савара-Лапласа;

3. Принцип суперпозиции вектора индукции;

4. Закон Ампера.

Исторически эти законы были открыты в экспериментах, в которых магнитное поле не являлось функцией времени.

Закон отсутствия магнитных зарядов.

Данный закон означает, что силовые линии вектора индукции магнитного поля замкнуты и не имеют источников или стоков. Другими словами, поток вектора индукции магнитного поля через замкнутую поверхность S равен нулю. Таким образом, с учетом теоремы Остроградского - Гаусса имеет место равенство:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 = \int_V \operatorname{div} \mathbf{B} dv. \quad (3.27)$$

Здесь S -поверхность, ограничивающая объем V . В силу произвольности объема интегрирования V дифференциальная форма закона отсутствия магнитных зарядов имеет вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (3.28)$$

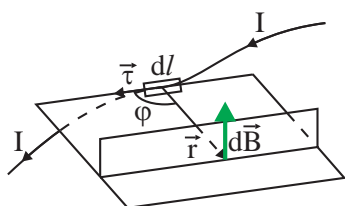
Несмотря на экспериментальное утверждение об отсутствии магнитных зарядов в теории электромагнитного поля существование таких зарядов не запрещено. Более того, если бы магнитные заряды существовали, это было бы естественным объяснением квантования электрических зарядов. Тем не менее, магнитные заряды ни положительные, ни отрицательные, никогда не наблюдались. Магнит всегда имеет два равных по величине полюса и магнитное поле вокруг него есть результирующее поле обоих полюсов.

Гипотеза о существовании в природе магнитных зарядов была высказана П.Дираком в 1931 году. Эти заряды получили название монополи Дирака - частицы обладающие "положительным" или "отрицательным" магнитным зарядом. Предпринимались тщательные попытки поиска таких зарядов, но до сих пор монополи не обнаружены. До настоящего времени остается открытым вопрос, связано это с тем, что монополи рождаются очень редко, или же они не существуют в принципе. В связи с этим в классической электродинамике принято считать, что постоянное магнитное поле не имеет источников и причиной его возникновения являются электрические токи.

Закон Био—Савара —Лапласа.

Величина и направление магнитного поля вызванного постоянным элек-

трическим током определяется экспериментально установленным *законом Био-Саввара-Лапласа*. Данный закон сформулированный для бесконечно малого элемента с током означает следующее: элементарная индукция $d\mathbf{B}$ создаваемая элементарным участком линейного тока $d\mathbf{l}$ с силой тока I на расстоянии \mathbf{r} от $d\mathbf{l}$ равна: (см. рис. 3.7)



$$d\mathbf{B} = \gamma I \frac{[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{r^3}; \quad dB = \gamma I \frac{dl}{r^2} \sin \varphi; \quad (3.29)$$

Рис. 3.7:

здесь $d\mathbf{l} = \vec{\tau} dl$, $\vec{\tau}$ -единичный вектор касательной к линии тока в точке нахождения отрезка dl , направленный по направлению тока, γ -коэффициент, зависящий от выбора единиц измерения физических величин.

Принцип суперпозиции.

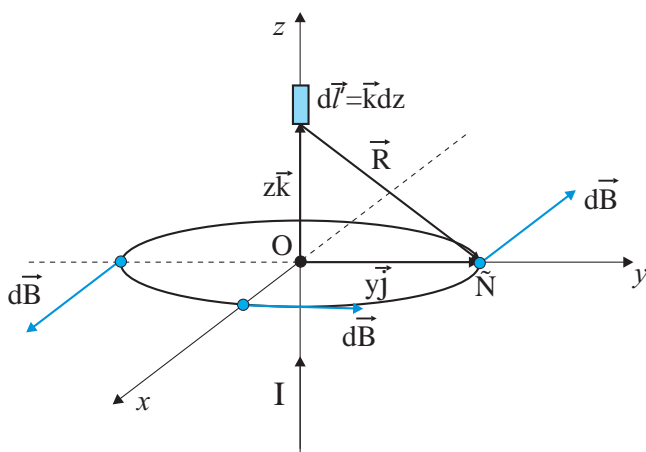


Рис. 3.8:

Принцип суперпозиции для магнитного поля означает, что *индукция, создаваемая линейным током конечных размеров L равна векторной сумме индукций, создаваемых элементарными участками тока в данной точке пространства:*

$$\mathbf{B} = \int_L d\mathbf{B}. \quad (3.30)$$

Рассмотрим в качестве примера вычисление вектора индукции \mathbf{B} создаваемого бесконечным прямолинейным током силы I .

► Выберем декартову систему координат так, чтобы линия тока совпала с осью z (см. рис. 3.8). Найдем элементарную индукцию $d\mathbf{B}$ от элементарного участка тока $d\mathbf{l}' = \mathbf{k}dz$, лежащего на оси z на расстоянии z от начала координат. Найдем $d\mathbf{B}$ в произвольной точке C , лежащей на оси y ($OC = y$). Из рисунка 3.8 видно, что $\mathbf{R} = y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$. В соответствии с (3.29),

элементарная индукция в данной точке равна:

$$d\mathbf{B} = \frac{\gamma I}{R^3} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & dz \\ 0 & y & -z \end{vmatrix} = -\frac{\gamma I}{R^3} y dz \mathbf{i}. \quad (3.31)$$

Здесь $R = |\mathbf{R}| = \sqrt{z^2 + y^2}$. Как следует из (3.31), вектор элементарной индукции от любого элементарного участка тока направлен против положительного направления оси x (см. рис. 3.8). Таким образом, с учетом принципа суперпозиции (3.30), величина индукции в точке C равна:

$$B = \int dB = 2 \int_0^\infty \frac{\gamma I}{(z^2 + y^2)^{3/2}} y dz = 2\gamma I y \int_0^\infty \frac{dz}{(z^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Выполняя замену переменной интегрирования $z = y \operatorname{tg} t$; $dz = y dt / \cos^2 t$, получим:

$$B = 2\gamma I y \int_0^{\pi/2} \frac{y dt}{\cos^2 t} \left(\frac{\cos^2 t}{y^2} \right)^{3/2} = \frac{2\gamma I}{y} \int_0^{\pi/2} \cos t dt = \frac{2\gamma I}{y}. \quad (3.32)$$

Окончательно результат для вектора индукции в векторном виде в точке C есть:

$$\mathbf{B} = -\frac{2\gamma I}{y} \mathbf{i}. \quad (3.33)$$

На основании цилиндрической симметрии системы, ясно, что величина вектора индукции (3.32) одинакова для всех точек окружности радиуса y , а вектор индукции \mathbf{B} направлен по касательной к окружности (см. рис. 3.8). ◀

Вычислим теперь циркуляцию вектора \mathbf{B} от бесконечного тока вдоль окружности радиуса y . Учитывая, что величина B на окружности y постоянна, находим

$$\oint_{\text{окр } C} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\text{окр } C} B dl = B \oint_{\text{окр } C} dl = B 2\pi y = \frac{2\gamma I}{y} 2\pi y = 4\pi\gamma I.$$

Как видно полученный результат не зависит от радиуса окружности. Можно показать, что циркуляция вектора индукции вообще не зависит от формы замкнутого контура. Данное утверждение следует из полученного результата для циркуляции поля по окружности. Действительно, если произвольный контур представить в виде совокупности бесконечно малых отрезков окружностей различных радиусов и радиальных отрезков, соединяющих отрезки окружности, то в силу равенства нулю циркуляции вектора \mathbf{B} по радиальным отрезкам получим доказательство сделанного утверждения. Таким

образом:

$$\oint_{\text{окр } C} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l},$$

где L -произвольный контур, охватывающий ток I . В результате получаем закон, который был установлен экспериментально Ампером:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 4\pi\gamma I. \quad (3.34)$$

На основании приведенных выше рассуждений ясно, что экспериментальный закон (3.34) является следствием законов Био-Савварра-Лапласа и принципа суперпозиции.

Если использовать теорему Стокса и формулу (3.11) получим:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi\gamma \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}; \quad d\mathbf{s} = \mathbf{n} ds, \quad (3.35)$$

где \mathbf{n} -единичный вектор нормали к поверхности S , для которой контур L является границей. В силу произвольности поверхности интегрирования получаем дифференциальную форму закона Ампера (3.34):

$$\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi\gamma \mathbf{j}. \quad (3.36)$$

Закон Ампера.

Еще один закон Ампера устанавливает, что на элементарный участок проводника $d\mathbf{l}$ по которому протекает ток I со стороны внешнего магнитного поля с индукцией \mathbf{B} , действует элементарная сила равная:

$$d\mathbf{F} = \lambda I [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}], \quad (3.37)$$

где λ -коэффициент, зависящий от выбора единиц измерения физических величин, входящих в (3.37)

Продemonстрируем применение закона (3.37) на простом примере. Вычислим силу взаимодействия двух параллельных, бесконечных, прямолинейных токов I и I' , находящихся на расстоянии d друг от друга (рис. 3.9).

► На основании (3.33) в точке расположения бесконечно малого отрезка с током $d\mathbf{l}$, током I' создается индукция равная

$$\mathbf{B} = -\frac{2\gamma I'}{d} \mathbf{i}.$$

Следовательно, по закону Ампера (3.37) на бесконечно малый участок тока $d\mathbf{l} = \mathbf{k}dz$ действует бесконечно малая сила $d\mathbf{F}$:

$$d\mathbf{F} = \lambda I [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}] = \lambda I \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & dz \\ -2\gamma I'/d & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\gamma\lambda \frac{II'}{d} dz \mathbf{j}. \quad (3.38)$$

Таким образом, в соответствии с (3.38), на единицу длины проводника действует сила, равная по величине:

$$\frac{dF}{dz} = 2\gamma\lambda \frac{II'}{d} \quad (3.39)$$

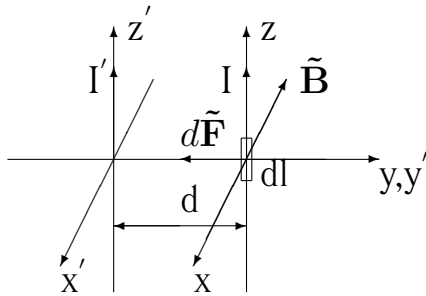


Рис. 3.9: Взаимодействие токов

При этом, как следует из (3.38), если токи направлены в одну сторону, то проводники притягиваются. Если токи направлены противоположно, то проводники отталкиваются. ◀

Сила Лоренца.

На основании (3.37) можно получить силу, действующую на точечную частицу в магнитном поле, из следующих рассуждений: так как в соответствии с (3.12) $I d\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{j} dv$ (3.12) и, кроме того, для точечного заряда плотность тока $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{v}$, то сила, действующая на движущийся заряд, равна:

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = \int \lambda [\mathbf{j} dv \times \mathbf{B}] = \lambda e [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (3.40)$$

Последнее выражение называется *силой Лоренца* в магнитном поле.

§3 Закон электромагнитной индукции Фарадея.

Рассмотренные выше законы для электрического и магнитного полей были получены в стационарных, не зависящих от времени случаях. Фарадеем для нестационарных полей был установлен закон, получивший название закон электромагнитной индукции. Суть этого закона состоит в следующем:

изменение потока вектора магнитной индукции через замкнутый контур приводит к возникновению в этом контуре электродвижущей силы.

Поток вектора индукции.

По определению, поток Φ вектора индукции магнитного поля \mathbf{B} через произвольную поверхность S равен:

$$\Phi \equiv \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) ds \equiv \int_S (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}), \quad (3.41)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к поверхности S .

Электродвижущая сила.

В электродинамике электродвижущей силой ε называется работа по перемещению единичного заряда вдоль замкнутого контура:

$$\varepsilon \equiv \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.42)$$

Здесь \mathbf{E} – значение напряженности электрического поля на элементе контура $d\mathbf{l}$ в системе координат в которой $d\mathbf{l}$ *покоится*! $d\mathbf{l} = \vec{\tau} dl$, $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательный к линии контура в точке расположения бесконечно малого элемента контура, направленный так, что при обходе контура площадь, ограниченная контуром остается слева.

Закон Фарадея.

Если контур L в (3.42) является границей поверхности S закон электромагнитной индукции можно записать в виде:

$$\varepsilon = -k_3 \frac{d\Phi}{dt}, \quad (3.43)$$

здесь k_3 – коэффициент, зависящий от выбора единиц измерения величин входящих в (3.43), а знак минус соответствует закону Ленца, устанавливающему, что индуцированный в контуре ток и образующийся этим током поток вектора индукции, имеет направление, препятствующее изменению потока вектора индукции в контуре.

Соотношение (3.43) с учетом определений (3.42) и (3.41) имеет вид:

$$\oint_L (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = -k_3 \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}). \quad (3.44)$$

В законе электромагнитной индукции Фарадея существенны следующие пять утверждений:

1. Закон получен для переменных полей.
2. В законе безразлично является ли причиной изменения Φ перемещение контура в неоднородном магнитном поле \mathbf{B} или изменение Φ связано с изменением \mathbf{B} во времени для неподвижного контура.

Данное утверждение означает, что в произвольном случае необходимо знать как связаны значения полей в покоящейся и движущейся системах координат, так как ε определена для значения \mathbf{E} в системе координат, в которой контур покоится. Из общих принципов, рассмотренных выше, связь напряженностей полей в разных системах координат не очевидна и в настоящем изложении будет рассмотрена в специальной теории относительности (гл. 12).

3. *Закон Фарадея экспериментально устанавливает неразрывную связь напряженности электрического поля и индукции магнитного поля*, что позволяет говорить о едином электромагнитном поле. Наблюдения Фарадея привели к открытию связи электрического и магнитного полей.

4. *Часть электродвижущей силы, возникающая за счет поля \mathbf{E} , не связана с существованием физической проволоки*. Поле \mathbf{E} может существовать в пустом пространстве и контурный интеграл от него по любой воображаемой линии в пространстве есть скорость изменения потока \mathbf{B} через поверхность, ограниченную этой линией. Это поле совсем не похоже на поле \mathbf{E} , создаваемое статическими зарядами, так как в электростатике контурный интеграл от \mathbf{E} по замкнутому контуру равен нулю. В области, где меняется магнитное поле генерируется вихревое электрическое поле.

5. *Требуется соблюдать особую осторожность с движущимися контурами* [12]. Так на рис. 3.10.а представлен случай, когда $\Phi = \text{const}$, но электродвижущая сила не равна нулю. Система представляет из себя вращающийся проводящий диск, находящийся в постоянном магнитном поле. Еще один нетривиальный случай представлен на рис. 3.10.б В этом примере Φ меняется, но электродвижущая сила равна нулю. В этой системе два подвижных кулачка, находящиеся в постоянном магнитном поле, имеют разные точки соприкосновения в разные моменты времени их движения, что меняет величину площади контура, а следовательно, величину потока Φ .

Подробнее обсуждение этих нетривиальных примеров см. в [12]

Если ограничиться случаем, когда контур покоится, выражение (3.44) или (3.43) примет вид:

$$\varepsilon = -k_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad \oint_L (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = -k_3 \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}) \quad (3.45)$$

Используя теорему Стокса интегральное выражение в (3.45) можно переписать в виде дифференциального равенства, которое называется диффе-

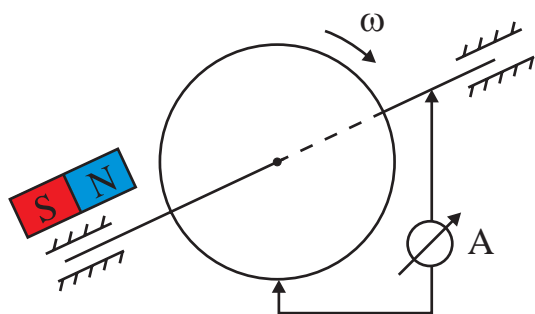
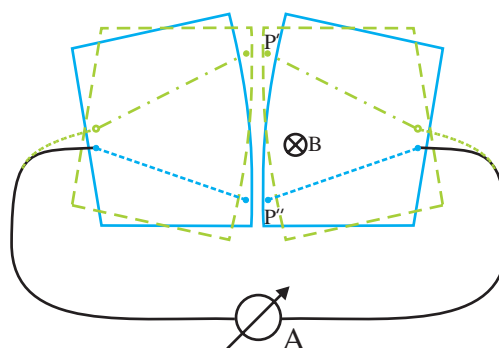
а. Поток не меняется, а ε не равно 0б. Поток меняется, а ε равно 0

Рис. 3.10: Нетривиальные примеры.

ренциальной формой закона электромагнитной индукции:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (3.46)$$

§4 Ток смещения. Система уравнений Максвелла.

Первоначально приведенные в §1–§3 законы, определяющие электрические и магнитные взаимодействия, рассматривались как достаточные для описания свойств электромагнитного поля. Однако детальное их изучение показало, что уравнения соответствующие этим законам не совместимы друг с другом. Для доказательства рассмотрим, например, дифференциальную форму экспериментально установленных законов

Закон Кулона и принцип суперпозиции:

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi k_1 \rho. \quad (3.47)$$

Закон отсутствия магнитных зарядов:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (3.48)$$

Закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (3.49)$$

Закон Ампера:

$$\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi \gamma \mathbf{j}. \quad (3.50)$$

Закон сохранения заряда:

$$\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3.51)$$

Вычислим операцию div от левой и правой частей уравнения (3.50). В результате $\text{div rot } \mathbf{B} = 4\pi\gamma \text{div } \mathbf{j} = 0$, так как дивергенция ротора любого вектора равна нулю. Таким образом, уравнение (3.50) противоречит закону сохранения заряда и необходимо отказаться либо от (3.50) либо от (3.51).

Максвелл предположил, что выражение (3.50) справедливо лишь в случае постоянного поля, а для переменных полей данное уравнение должно быть обобщено введением дополнительного слагаемого, обеспечивающего выполнение закона сохранения заряда. Представленное в интегральном виде данное слагаемое было названо Максвеллом током смещения.

Плотность тока смещения

В соответствии с гипотезой Максвелла уравнение (3.50) необходимо записать в виде:

$$\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi\gamma (\mathbf{j} + \mathbf{j}^x) = 4\pi\gamma \mathbf{j} + 4\pi\gamma \mathbf{j}^x, \quad (3.52)$$

где \mathbf{j}^x дополнительное слагаемое, получившее по историческим причинам название - плотность тока смещения. Согласно сделанному Максвеллом предположению остальные уравнения (3.47) - (3.48) и (3.51) остаются справедливыми и в случае переменных полей.

Для того, чтобы установить явный вид \mathbf{j}^x вычислим дивергенцию от выражения (3.52):

$$\text{div rot } \mathbf{B} = 0 = 4\pi\gamma \text{div } \mathbf{j} + 4\pi\gamma \text{div } \mathbf{j}^x.$$

Учитывая (3.51) и (3.47) для $\text{div } \mathbf{j}^x$ находим:

$$\text{div } \mathbf{j}^x = -\text{div } \mathbf{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi k_1} \text{div } \mathbf{E}.$$

Таким образом для плотности тока смещения \mathbf{j}^x получим:

$$\mathbf{j}^x = \frac{1}{4\pi k_1} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{a}, \quad (3.53)$$

где \mathbf{a} - произвольный вектор.

Следующее предположение, которое было сделано Максвеллом, состояло в том, что вектор \mathbf{a} был выбран равным нулю. Можно подчеркнуть, что для выбора $\mathbf{a} = 0$ не было никаких очевидных причин, кроме симметрии системы уравнений.

Дифференциальная форма системы уравнений Максвелла

В результате система уравнений, для расчета произвольного электромагнитного поля создаваемого системой зарядов с плотностью ρ и системой токов с плотностью \mathbf{j} согласно теории Максвелла имеет вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi k_1 \rho; & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; & \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= 4\pi \gamma \mathbf{j} + \frac{\gamma}{k_1} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Эта система уравнений и получила название системы уравнений Максвелла.

Запись уравнений в форме (3.54) была установлена не Максвеллом, а Гауссом почти через тридцать лет после формулировки гипотезы Максвелла. Однако идея модификации закона Ампера путем добавления тока смещения принадлежит Максвеллу, который в 1862 году ввел это слагаемое в интегральные уравнения. Дальнейшее использование этой системы в практических расчетах подтвердило справедливость гипотезы Максвелла и в настоящее время система уравнений (3.54) является исходной для описания классических электромагнитных полей создаваемых зарядами и токами в вакууме.

Однозначность системы уравнений Максвелла

Стандартной задачей электродинамики является задача определения электромагнитного поля при известных значениях ρ и \mathbf{j} . Следовательно необходимо найти шесть неизвестных скалярных функций (по три проекции векторов \mathbf{E} и \mathbf{B}). В системе уравнений (3.54) представлено девять скалярных уравнений. Если учесть, что плотность заряда и плотность тока предполагаются заданными, то закон сохранения заряда – это условие задачи. Таким образом остается восемь уравнений. Однако в силу того, что ρ и \mathbf{j} входят в разные уравнения (в закон Кулона и в обобщенный закон Ампера), эти уравнения не независимы. Следовательно независимых остается 7 скалярных уравнений. Кроме того, закон электромагнитной индукции Фарадея и закон отсутствия магнитных зарядов имеют одинаковые дифференциальные следствия. В этом можно убедиться если вычислить дивергенцию от закона электромагнитной индукции Фарадея. Получим в этом случае $\operatorname{div} \mathbf{B} = \text{const}$. Данное соотношение не является выводом закона отсутствия магнитных зарядов из закона Фарадея, так как величина константы из закона Фарадея не устанавливается. В то время как закон отсутствия магнит-

ных зарядов устанавливает, что эта константа равна нулю. Но, одновременно, это означает, что имеется еще одна дополнительная связь в уравнениях и, следовательно, независимых уравнений в системе уравнений Максвелла шесть. Таким образом число независимых уравнений совпадает с числом неизвестных функций и система имеет однозначное решение.

Качественные рассуждения, представленные выше не являются строгим доказательством однозначности решений системы уравнений Максвелла. В общем случае однозначность доказана строгими математическими методами, которые здесь не приводятся.

Интегральная форма системы уравнений Максвелла

Система уравнений Максвелла (3.54) в интегральном виде имеет вид:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi k_1 \int_V \rho dv = 4\pi k_1 Q; \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0; \quad (3.55)$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -k_3 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}; \quad \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 4\pi\gamma \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\gamma}{k_1} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s};$$

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dv$$

§5 Системы единиц измерения.

В предыдущем изложении при рассмотрении основных законов электродинамики были использованы коэффициенты пропорциональности $k_1, \gamma, \lambda, k_3$, которые должны выбираться в зависимости от использования системы единиц для физических величин, входящих в соответствующие законы. На основании системы уравнений Максвелла данные коэффициенты не независимы и между ними существуют связи, которые должны быть учтены в любой системе единиц [13].

Исторически электродинамика появилась как наука, объединившая исследования в области электростатики и магнитостатики, долгое время считавшиеся самостоятельными. И только после утверждения системы уравнений Максвелла стало ясно, что электрическое и магнитное поле — это частные случаи более общего понятия — электромагнитного поля. Однако до объединения полей, как в электростатике, так и в магнитостатике накопилось значительное число исследований по измерению характеристик

полей в которых использовались единицы измерения, логически вытекающие из основных законов электростатики и магнитостатики, соответственно. Это привело к тому, что многие родственные понятия оказались определенными с использованием различных базисных единиц. В результате, в электродинамике, объединяющей электрические и магнитные поля, возникло несколько систем единиц измерения и единодушного признания той или иной системы не существует. Так как система единиц должна быть удобной и ясной, что содержит элемент субъективизма, а область применения электродинамики разнообразна, это приводит к необходимости рассмотрения нескольких единиц измерения сложившихся под влиянием исторического процесса развития общей теории электромагнитного поля.

Определяющими формулами из которых можно получить размерности соответствующих величин в электростатике являются закон Кулона и определение вектора напряженности электрического поля [13]:

$$F_{\text{кул}} = k_1 \frac{q_1 q_2}{r^2}; \quad E = k_1 \frac{q}{r^2}. \quad (3.56)$$

Соответственно для магнитостатического поля, можно использовать выражение определяющие силу взаимодействия линейных токов и выражение для определения индукции бесконечного тока [13]:

$$\frac{dF}{dz} = 2\gamma \lambda \frac{I I'}{d} \quad B = \frac{2\gamma I}{d}. \quad (3.57)$$

В соответствии с определением силы Кулона и силы, приходящейся на единицу длины проводника при взаимодействии двух токов, их отношение есть величина размерность которой совпадает с размерностью длины [l]

$$\left[\frac{F_{\text{кул}}}{\frac{dF}{dl}} \right] = [l]. \quad (3.58)$$

Подставляя в (3.58) размерности сил и используя для краткости обозначение $k_2 = \gamma \lambda$ [13] находим:

$$\left[\frac{F_{\text{кул}}}{\frac{dF}{dl}} \right] = k_1 \frac{[q]^2}{[l]^2} \cdot \frac{1}{k_2 \frac{[I]^2}{[l]}} = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{[t]^2}{[l]} = [l] \quad (3.59)$$

Таким образом, отношение коэффициентов $k_1/k_2 = [l]^2/[t]^2$ по размерности совпадает с размерностью квадрата скорости. Обозначим эту скорость через c , т.е.:

$$k_1/k_2 \equiv c^2. \quad (3.60)$$

Составим теперь отношение размерностей напряженности электрического поля и индукции магнитного поля на основе выражений (3.56), (3.57)

$$\frac{[E]}{[B]} = k_1 \frac{[q]}{[l]^2} \cdot \frac{1}{\gamma \frac{[I]}{[l]}} = \frac{k_1}{\gamma} \cdot \frac{[t]}{[l]}.$$

Так как $\gamma = k_2/\lambda$ то:

$$\frac{[E]}{[B]} = \frac{k_1}{k_2} \cdot \lambda \cdot \frac{[t]}{[l]} = \lambda \cdot \frac{[l]}{[t]}. \quad (3.61)$$

В силу закона электромагнитной индукции Фарадея размерности **E** и **B** связаны между собой, так как:

$$\text{rot} \mathbf{E} + k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (3.62)$$

Учитывая, что размерность $[\text{rot} \mathbf{E}] \equiv [E]/[l]$ получим на основании (3.62):

$$\frac{[E]}{[l]} = k_3 \frac{[B]}{[t]}, \quad \frac{[E]}{[B]} = k_3 \frac{[l]}{[t]}. \quad (3.63)$$

Сравнивая (3.61) и (3.63) с учетом равенства (3.60), находим, что:

$$k_3 \equiv \lambda; \quad \gamma = \frac{k_2}{k_3}. \quad (3.64)$$

Если в системе уравнений Максвелла (3.54) выбрать $\rho = 0$ и $\mathbf{j} = 0$, то обобщенный закон Ампера в дифференциальной форме с учетом (3.64) имеет вид:

$$\text{rot} \mathbf{B} = \frac{k_2}{k_1 k_3} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.65)$$

Вычислим ротор от последнего выражения. Так как

$$\text{rot rot} \mathbf{B} \equiv \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B},$$

то с учетом закона отсутствия магнитных зарядов $\text{div} \mathbf{B} = 0$ и закона электромагнитной индукции Фарадея из (3.65) находим:

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{k_1/k_2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.66)$$

Аналогично вычислив ротор от закона электромагнитной индукции Фарадея найдем:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{k_1/k_2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.67)$$

Уравнения (3.66), (3.67) являются волновыми уравнениями д'Аламбера решения которого определяют волну распространяющуюся со скоростью $c =$

$\sqrt{k_1/k_2}$ (см. (3.60)). Экспериментально установлено, что скорость распространения электромагнитного поля c равна $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/сек.

Таким образом выбор коэффициентов k_i ($i \in 1, 2, 3$) должен удовлетворять установленным выше связям. В результате, в разных системах единиц измерения, возникших исторически, значения коэффициентов пропорциональности в экспериментально установленных законах принимают значения приведенные в таблице [13]:

Система	k_1	$k_2 = \gamma\lambda$	$k_3 = \lambda$	$\gamma = k_2/k_3$	γ/k_1
СГСЭ	1	c^{-2}	1	c^{-2}	c^{-2}
СГСМ	c^2	1	1	1	c^{-2}
Гаусс	1	c^{-2}	c^{-1}	c^{-1}	c^{-1}
Хевисайда Лоренца	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi c^2}$	c^{-1}	$\frac{1}{4\pi c}$	c^{-1}
СИ	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7}c^2$	$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$	1	$\frac{\mu_0}{4\pi}$	$\mu_0\epsilon_0 = c^{-2}$

Ниже будет использоваться система единиц Гаусса.

§6 Скалярный и векторный потенциалы.

Дифференциальная форма системы уравнений Максвелла в вакууме в системе единиц Гаусса имеет вид:

$$\begin{aligned}
 a) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho; & b) \quad \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; \\
 c) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; & d) \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t};
 \end{aligned}
 \tag{3.68}$$

Система уравнений (3.68) является системой уравнений в частных производных и может быть сведена к неоднородным волновым уравнениям д'Аламбера, решения которых хорошо известны. С этой целью для описания электромагнитного поля вводятся новые величины, получившие название скалярного и векторного потенциалов.

Векторный потенциал

Как следует из уравнения (3.68.b), вектор индукции магнитного поля \mathbf{B} можно представить в виде:

$$\mathbf{B} \equiv \operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{3.69}$$

Вектор \mathbf{A} получил название *векторный потенциал*, а равенство (3.69) является определением векторного потенциала.

Скалярный потенциал

С учетом определения векторного потенциала уравнение (3.68.с) можно переписать в виде:

$$\text{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0. \quad (3.70)$$

Из данного равенства вытекает, что

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \equiv -\text{grad}\varphi. \quad (3.71)$$

Здесь φ - скалярная функция, которая получила название *скалярный потенциал*. Знак минус в (3.71) выбран в соответствии с историческими определениями.

Градиентная инвариантность потенциалов

Соотношения (3.70) и (3.71) определяют векторный и скалярный потенциалы неоднозначно. *Так векторный потенциал определен с точностью до градиента произвольной скалярной функции.*

► Для доказательства данного утверждения рассмотрим векторный потенциал вида:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad}\chi, \quad (3.72)$$

где χ - произвольная скалярная функция. Подставляя (3.72) в (3.69) получим:

$$\mathbf{B}' = \text{rot}\left(\mathbf{A} + \text{grad}\chi\right) = \text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

Таким образом потенциалы \mathbf{A} и \mathbf{A}' приводят к одному значению вектора индукции \mathbf{B} . ◀

Найдем как должен преобразовываться скалярный потенциал φ , чтобы вектор \mathbf{E} не менялся. Из (3.71) с учетом (3.72) имеем:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{A}' - \text{grad}\chi\right) - \text{grad}\varphi = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \text{grad}\left(\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}\right).$$

То есть преобразование скалярного потенциала вида

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

не меняет значения электрического поля. *Следовательно скалярный потенциал определен с точностью до производной по времени от функции χ входящей в определение градиентного преобразования (3.72).*

Градиентные преобразования

Инвариантность электромагнитного поля относительно преобразований

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad}\chi; \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (3.73)$$

называется *градиентной инвариантностью*, а преобразования (3.73) *градиентными преобразованиями*.

Неоднозначность определения векторного и скалярного потенциалов позволяет утверждать, что \mathbf{A} и φ не имеют физического смысла и являются вспомогательными математическими конструкциями.

Уравнения для потенциалов

Чтобы найти уравнения, которым удовлетворяют векторный и скалярный потенциалы подставим в закон Кулона (3.68.a) соотношение (3.71):

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mathbf{A}, \quad (3.74)$$

а (3.69) и (3.71) в обобщенный закон Ампера (3.68.d):

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \text{grad} \left(\text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \quad (3.75)$$

Уравнения (3.74) и (3.75) позволяют определить значения векторного и скалярного потенциалов при заданных ρ и \mathbf{j} , но сами эти уравнения достаточно сложны.

Калибровка потенциалов

Градиентная инвариантность означает, что на \mathbf{A} и φ можно наложить дополнительные условия, которые называются условиями калибровки потенциалов. Традиционно используются два условия калибровки. Условие калибровки Лоренца:

$$\text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (3.76)$$

и условие калибровки Кулона:

$$\text{div} \mathbf{A} = 0. \quad (3.77)$$

Калибровка Лоренца

При использовании условия калибровки Лоренца (3.76) из уравнений (3.74) и (3.75) получим следующие неоднородные волновые уравнения

д'Аламбера:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho. \quad (3.78)$$

Система уравнений (3.78) совместно с определениями векторного и скалярного потенциалов полностью эквивалентна системе уравнений Максвелла

Запаздывающие и опережающие потенциалы

Решения уравнений (3.78) при отсутствии специальных граничных условий, удовлетворяющие принципу причинности, можно выписать при произвольных ρ и \mathbf{j} в виде запаздывающих потенциалов:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'; \quad \varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', \tau)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad (3.79)$$

где $\tau = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$.

Решения неоднородных волновых уравнений (3.78) вида (3.79) называются *запаздывающими потенциалами*, так как значение поля в точке \mathbf{r} в момент времени t определяется распределением зарядов и токов в предшествующие t моменты времени, что соответствует принципу причинности в физике.

Уравнения (3.78) имеют, кроме того, отличные от нуля решения вида (3.79) в которых $\tau = t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$. Такие решения называются *опережающими потенциалами*. Однако опережающие потенциалы не соответствуют принципу причинности и в физических решениях опускаются.

Кулоновская калибровка

При использовании кулоновской калибровки система уравнений Максвелла для определения скалярного и векторного потенциалов будет иметь вид:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \text{grad} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right); \quad \Delta \varphi = -4\pi \rho. \quad (3.80)$$

Именно потому, что уравнение для скалярного потенциала в этом случае совпадает с уравнением для скалярного потенциала электростатического поля, такая калибровка потенциалов и называется кулоновской.

Эквипотенциальные поверхности

Поверхности на которых значение скалярного потенциала постоянно называются эквипотенциальными поверхностями.

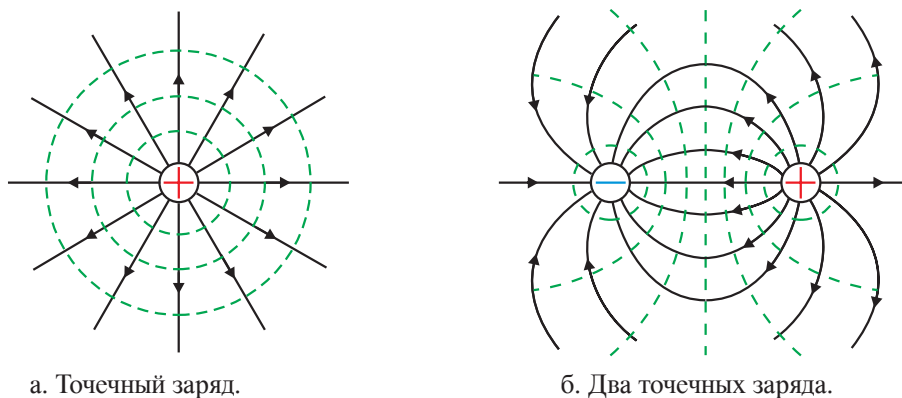


Рис. 3.11:

Так как для электростатического поля $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$, силовые линии электростатического поля ортогональны эквипотенциальным поверхностям. На рисунках 3.11 а,б приведены два простейших примера эквипотенциальных поверхностей для точечного заряда и системы двух точечных зарядов противоположных знаков. Сечения эквипотенциальных поверхностей в заданной плоскости в приведенных примерах изображены пунктирными линиями, а силовые линии сплошными линиями с указанием направления поля.

§7 Электромагнитное поле в веществе.

Система уравнений Максвелла (3.68) или (3.78) справедлива в случае описания электромагнитного поля в вакууме, вернее в пространстве, в котором задано некоторое абстрактное распределение плотности заряда и тока. Общая задача электродинамики - это описание электромагнитного поля в веществе.

Внутриатомное поле

Вещество состоит из атомов или молекул. Атомы или молекулы - это микрообъекты с характерными размерами $a_0 \approx 10^{-8}$ см., которые имеют положительно заряженный центр (или центры) - ядро (ядра с размерами $\approx 10^{-12}$ см.) на расстоянии $\approx a_0$ от которого с наибольшей вероятностью локализовано определенное число отрицательно заряженных частиц - электронов.

Очевидно, что характерное значение напряженности поля ядра на расстояниях порядка a_0 от ядра составляет величину порядка $E_0 \approx e/a_0^2 \approx 10^9$ В/см. Такое поле называется *внутриатомным*.

Значения напряженностей статических полей, которые изучались в классической электродинамике (без учета лазерной техники) имеют порядок величины $\leq 10^4 \text{ В/см} \div 10^5 \text{ В/см}$. Такие поля называются слабым по отношению к внутриатомному. При использовании квантовых генераторов можно получить электрическое поле $\approx 10^8 \text{ В/см} \div 10^9 \text{ В/см}$ и выше, что сравнимо с величиной внутриатомного поля. Однако в классической электродинамике рассматриваются, как правило, слабые поля. Исследование сильных полей приводит к нелинейной электродинамике.

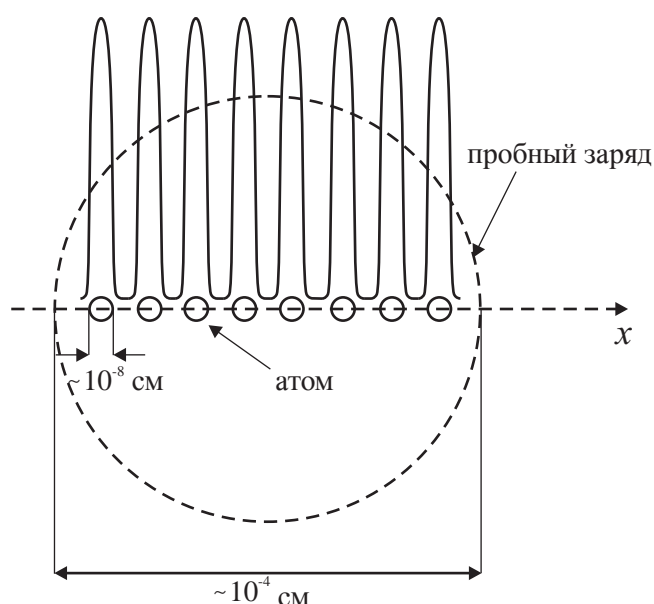


Рис. 3.12:

С учетом больших величин внутриатомных полей в веществе от точки к точке происходит резкое, скачкообразное изменение микроскопического, то есть определенного в математической точке поля.

Действительно, внутри атома $E \approx E_0 \approx 10^9 \text{ В/см}$, а вне атома $E \approx 0$, так как все электроны экранируют заряд атомного ядра. Прибор, же измеряющий значение напряженности поля, например, пробный заряд,

имеет размеры существенно большие в сравнении с атомными размерами, в лучшем случае $\approx 10^{-4} \text{ см}$. Размеры измеряющего прибора определяются технологическими ограничениями его изготовления. Это означает, что такой прибор измеряет поле не в математической точке, а в некотором объеме, содержащем огромное число атомов (см. рис.3.12), так как при обычных условиях число атомов в одном кубическом сантиметре $\approx 10^{20} - 10^{22}$. Поэтому нужно говорить не о микроскопическом значении поля, а о его среднем значении, эффективно эквивалентном действию внешнего поля и полей всех атомов в объеме пробного заряда. Такое значение поля будем называть усредненным по некоторому объему.

Физически бесконечно малый объем

Объем усреднения в теории электромагнитного поля – это, вообще говоря, объем который должен быть мал по сравнению с характерными мак-

роскопическими размерами, но велик по сравнению с объемом атома $a_0^3 \approx 10^{-24} \text{ см}^3$, чтобы внутри объема имелось большое число атомов, позволяющих вводить среднее значение физических величин. Такой объем называется *физически бесконечно малым объемом*.

Определим среднее по физически бесконечно малому объему V следующим образом:

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{V} \int_V f \, dv \quad (3.81)$$

Исходя из атомно - молекулярной теории вещества проявление свойств конкретного вещества в системе уравнений Максвелла определяются структурой распределения зарядов и токов по объему вещества. Таким образом, исходные физические свойства задаются плотностью зарядов и токов входящих в состав атомов или молекул вещества.

Свободные и связанные заряды.

В соответствии с общими представлениями об атомах и молекулах определим *заряды, входящие в состав атомов и молекул*, как связанные заряды и их плотность обозначим через ρ_{in} , а *заряды не входящие в состав атомов и молекул назовем свободными зарядами* и их плотность обозначим через ρ .

Предполагается, что под действием слабых полей связанные заряды остаются в составе атома, а свободные перемещаются в пространстве под действием внешних сил. Таким образом полная плотность заряда в веществе есть $\rho + \rho_{in}$.

Полную плотность тока также можно записать в виде $\mathbf{j} + \mathbf{j}_{in}$, где \mathbf{j} - плотность тока свободных зарядов, а \mathbf{j}_{in} - плотность тока связанных в атомах и молекулах зарядов.

Учитывая необходимость процесса усреднения при рассмотрении поля в веществе как плотность заряда, так и плотность тока можно представить в виде суммы среднего значения по физически бесконечно малому объему и отклонения от него:

$$\rho_{in} = \langle \rho_{in} \rangle + \delta \rho_{in}; \quad \mathbf{j}_{in} = \langle \mathbf{j}_{in} \rangle + \delta \mathbf{j}_{in}. \quad (3.82)$$

В системе многих частиц имеется огромное число причин по которым происходит отклонение физических величин от их среднего значения. Случайные отклонения от среднего, зависящие от случайных (статистических) факторов называются *флуктуациями*.

Можно предположить, что внутри физически бесконечно малого объема флуктуации плотности тока и плотности тока многократно меняют знак, а следовательно, их влияние из-за этого незначительно. Следовательно, первым приближением для построения уравнений поля в среде является отбрасывание флуктуаций в (3.82). Вторым необходимым приближением является малость поля по отношению к внутриатомному.

Найти точное значение $\rho_{in}(\mathbf{r}, t)$ в веществе невозможно и не необходимо, так как ρ_{in} содержит координаты всех электронов и протонов в отсутствии поля, а характерные времена существенного изменения плотности заряда много больше времени изменения положения одного заряда. Поэтому ρ_{in} существенно изменится за время много больше характерного атомного времени.

В связи с этим вместо точного значения величины зависящей от времени можно использовать ее среднее по времени значение. Например, если поле меняется во времени с периодом T , то среднее по времени величины $x(t)$ определено равенством:

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (3.83)$$

Усреднение системы уравнений Максвелла как по физически бесконечно малому объему, так и по времени приводит к так называемому макроскопическому описанию поля в среде. При этом система уравнений до усреднения называется системой уравнений для микроскопического поля.

Уравнения для микроскопического поля

Обозначим значение напряженности поля в математической точке через \mathbf{e} , а значение вектора индукции через \mathbf{b} . Поля определенные в математической точке будем называть микроскопическими. Запишем систему уравнений Максвелла для микроскопических значений полей при наличии вещества:

$$\operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi(\rho + \rho_{in}); \quad \operatorname{div} \mathbf{b} = 0; \quad \operatorname{div}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{in}) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho + \rho_{in}) = 0; \quad (3.84)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{b} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{in}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}.$$

Усредним систему уравнений (3.84) по физически бесконечно малому объему и времени. В соответствии с (3.81), (3.83) получим:

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{e}} = 4\pi \overline{\langle \rho + \rho_{in} \rangle}; \quad \operatorname{div} \overline{\mathbf{b}} = 0; \quad \operatorname{div} \overline{\langle \mathbf{j} + \mathbf{j}_{in} \rangle} + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\langle \rho + \rho_{in} \rangle} = 0; \quad (3.85)$$

$$\operatorname{rot} \overline{\langle \mathbf{e} \rangle} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \overline{\langle \mathbf{b} \rangle}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \overline{\langle \mathbf{b} \rangle} = \frac{4\pi}{c} \overline{\langle \mathbf{j} + \mathbf{j}_{in} \rangle} + \frac{1}{c} \frac{\partial \overline{\langle \mathbf{e} \rangle}}{\partial t}.$$

Уравнения для макроскопического поля

В силу того, что физически бесконечно малый объем V имеет малые размеры в сравнении с характерными макроскопическими размерами для свободных зарядов и токов в пренебрежении флуктуациями получим: $\overline{\langle \rho \rangle} \approx \rho$ и $\overline{\langle \mathbf{j} \rangle} \approx \mathbf{j}$, так как ρ и \mathbf{j} по физически бесконечно малому объему V практически постоянны и медленно меняются во времени. Этого нельзя сказать о ρ_{in} и \mathbf{j}_{in} , которые меняются в размерах атома $\approx a_0 \ll V^{1/3}$. Обозначим $\overline{\langle \mathbf{e} \rangle} \equiv \mathbf{E}$ и $\overline{\langle \mathbf{b} \rangle} \equiv \mathbf{B}$ и будем называть эти величины напряженностями поля и вектором индукции, понимая их в *макроскопическом* смысле, т.е. относящимися к целому физически бесконечно-малому объему. В результате система уравнений (3.85) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi \left[\rho + \overline{\langle \rho_{in} \rangle} \right]; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{div} \left[\mathbf{j} + \overline{\langle \mathbf{j}_{in} \rangle} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho + \overline{\langle \rho_{in} \rangle} \right] = 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \left[\mathbf{j} + \overline{\langle \mathbf{j}_{in} \rangle} \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

В полученных уравнениях величины $\overline{\langle \rho_{in} \rangle}$ и $\overline{\langle \mathbf{j}_{in} \rangle}$ определяются свойствами среды и должны быть рассчитаны в соответствии с принципами квантовой механики. Однако можно установить некоторые общие соотношения для $\overline{\langle \rho_{in} \rangle}$ и $\overline{\langle \mathbf{j}_{in} \rangle}$ без применения квантовомеханической теории. Эти соотношения используются при построении феноменологической теории электромагнитного поля в веществе, изложенной ниже. Для построения такой феноменологической электродинамики рассмотрим ниже некоторые специальные определения относящиеся к системе зарядов и токов

§8 Поляризация среды. Дипольный момент.

Для произвольной системы N штук зарядов q_i вводится векторная величина, которая называется дипольным моментом.

Дипольный момент

Дипольный момент системы точечных зарядов есть вектор, построенный по следующему определению:

$$\mathbf{d} \equiv \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i. \quad (3.87)$$

В случае электронейтральной системы (когда $\sum_{i=1}^N q_i = 0$) определение дипольного момента (3.87) не зависит от выбора начала координат в пространстве.

Если заряд распределен в пространстве V непрерывно, то определение (3.87) имеет вид:

$$\mathbf{d} = \int_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dv. \quad (3.88)$$

Вектор поляризации среды

Если вещество помещено во внешнее электрическое поле, то оно поляризуется – происходит смещение центров тяжести положительных и отрицательных зарядов в атомах. Таким образом в веществе появляется дипольный момент, который можно описать дипольным моментом единицы объема $\mathbf{P} \equiv d\mathbf{d}/dv$. Вектор \mathbf{P} называется *вектором поляризации*.

Используя определение вектора поляризации очевидно, что дипольный момент бесконечно малого объема dv равен: $\mathbf{P} dv$. Соответственно дипольный момент вещества в объеме V есть:

$$\mathbf{d} = \int_V \mathbf{P} dv. \quad (3.89)$$

Дипольный момент единицы объема, по определению макроскопическая величина – среднее внутри бесконечно малого объема, следовательно $\langle \mathbf{P} \rangle = \mathbf{P}$. В соответствии с (3.88) и (3.89) можно установить связь ρ_{in} с \mathbf{P} . Действительно, если свободных зарядов нет, единственной причиной возникновения дипольного момента единицы объема вещества являются заряды в составе атома, плотность которых ρ_{in} . В результате имеем следующее интегральное равенство:

$$\int_V \mathbf{r} \rho_{in}(\mathbf{r}) dv = \int_V \mathbf{P} dv. \quad (3.90)$$

Данное интегральное равенство указывает на связь объемной плотности связанных зарядов ρ_{in} и \mathbf{P} . Однако чтобы установить эту связь необходимо вывести одно вспомогательное равенство.

Вспомогательное интегральное равенство.

Инвариантное интегральное определение оператора $\vec{\nabla}$ имеет вид (2.25):

$$\vec{\nabla} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S (\mathbf{n} \cdot d\mathbf{s}) \quad (3.91)$$

В соответствии с (3.91) для любых двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} можно составить выражение:

$$(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} ds, \quad (3.92)$$

или в интегральном виде:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} dv = \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} ds. \quad (3.93)$$

С учетом дифференциальных свойств оператора $\vec{\nabla}$ для подынтегрального выражения в левой части равенства (3.93) имеем:

$$(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} = (\vec{\nabla} \cdot \check{\mathbf{a}}) \mathbf{b} + (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{a}) \check{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{b}.$$

Здесь значок " \sim " (птичка) над буквой обозначает действие оператора $\vec{\nabla}$ на соответствующий вектор. В результате равенство (3.93) примет вид:

$$\int_V \left[\mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{b} \right] dv = \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} ds. \quad (3.94)$$

Так как векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} произвольны, положим в равенстве (3.94) $\mathbf{a} \equiv \mathbf{P}$ и $\mathbf{b} \equiv \mathbf{r}$. Учитывая, что $(\mathbf{P} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{r} \equiv \mathbf{P}$ имеем:

$$\int_V \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{P} dv + \int_V \mathbf{P} dv = \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}) \mathbf{r} ds. \quad (3.95)$$

В силу произвольности объема интегрирования можно выбрать V так, что поверхность интегрирования S в (3.95) будет лежать вне вещества. А так как вне объема вещества $\mathbf{P} = 0$, то поверхностный интеграл в (3.95) можно считать равным нулю. Таким образом:

$$\int_V \mathbf{P} dV = - \int_V \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{P} dV \quad (3.96)$$

Связь вектора поляризации \mathbf{P} с $\overline{\langle \rho_{in} \rangle}$.

Сравнивая (3.96) с (3.90) находим, что $\rho_{in} = -\operatorname{div} \mathbf{P}$, а учитывая, что по определению с точностью до отброшенных флуктуаций $\overline{\langle \mathbf{P} \rangle} = \mathbf{P}$ окончательно получим:

$$\overline{\langle \rho_{in} \rangle} = -\operatorname{div} \mathbf{P} \quad (3.97)$$

Смысл формулы (3.97) состоит в том, что данное выражение устанавливает связь среднего значения микроскопической величины $\overline{\rho_{in}}$ с макроскопической величиной \mathbf{P} , которая может быть экспериментально измерена. Таким образом удастся обойтись без квантовомеханического описания атомов при построении элементарной теории электрического поля в веществе. Конечно, при этом теряется строгость теории и фактически вводится феноменологическое описание поля в веществе.

Введенная в данном параграфе величина – дипольный момент системы зарядов играет большую роль в теории электромагнитного поля. Ниже приведены примеры на вычисление дипольного момента некоторых простейших систем.

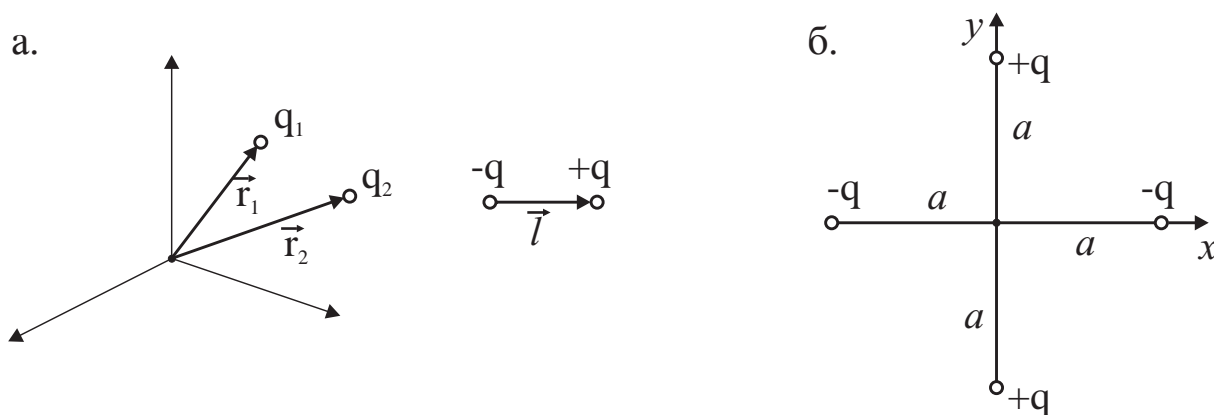


Рис. 3.13:

Диполь.

Два точечных заряда. Для системы двух точечных зарядов q_1 , q_2 дипольный момент равен (см. рис. 3.13а):

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^2 q_i \mathbf{r}_i = q_1 \mathbf{r}_1 + q_2 \mathbf{r}_2 \quad (3.98)$$

В случае если заряды равны и противоположны по знаку, возникает система, которая называется *диполем*. При этом дипольный момент диполя равен $q\mathbf{l}$, где \mathbf{l} – вектор, численно равный расстоянию между зарядами системы, направленный от отрицательного заряда к положительному.

Квадруполь.

Не каждая система зарядов имеет отличный от нуля дипольный момент. Так система из четырех зарядов, равноотстоящих от начала координат, изображенная на рисунке 3.13.b имеет равный нулю дипольный момент и носит название квадруполь.

Равномерно заряженные шар

По определению дипольный момент – вектор, следовательно он должен быть направлен вдоль выделенного направления. В силу сферической симметрии, дипольный момент равномерно заряженного шара, вычисленный в системе координат, связанной с центром шара равен нулю, так как в пространстве нет выделенного направления.

Равномерно заряженная половина шара

Если радиус половины шара R , а объемная плотность заряда $\rho = const$, дипольный момент такой системы определяется выражением:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \rho \left[\mathbf{i} r \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{j} r \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{k} r \cos \theta \right] r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \mathbf{k} 2\pi \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^1 x dx = \mathbf{k} \frac{3}{8} R Q, \end{aligned}$$

где Q – полный заряд половины шара.

§9 Магнитный момент.

Важной характеристикой, использующейся при описании электромагнитного поля создаваемого токами является магнитный момент тока. Если в пространстве задана плотность тока \mathbf{j} , то векторная величина определяемая соотношением

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r})] dv, \quad (3.99)$$

называется магнитным моментом системы токов. Здесь c – скорость света.

Для линейного замкнутого тока, с учетом (3.12), определение магнитного момента линейного тока имеет вид:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \oint_L I [\mathbf{r} \times d\mathbf{l}(\mathbf{r})]. \quad (3.100)$$

Магнитный момент системы токов связан с механическим моментом \mathbf{L} системы частиц $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{l}_i$, где $\mathbf{l}_i = [\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i]$, $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$, m_i - масса, \mathbf{v}_i - скорость i -ой частицы, N - число частиц. Для доказательства рассмотрим систему, состоящую из одного точечного заряда. В этом случае $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\mathbf{v}$ и в соответствии с (3.99) для магнитного момента точечного заряда имеем:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r}' \times q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}')] dv' = \frac{q}{2c} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] = \frac{q}{2mc} [\mathbf{r} \times \mathbf{p}],$$

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2mc} \mathbf{l} = \frac{|q|}{2mc} \text{sign}(q) \mathbf{l}. \quad (3.101)$$

Для системы частиц с одинаковыми зарядами и массами находим

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^N \vec{\mu}_k = \sum_{k=1}^N \frac{q}{2mc} \mathbf{l}_k = \frac{q}{2mc} \mathbf{L}. \quad (3.102)$$

Таким образом, суммарный магнитный момент в этом случае пропорционален суммарному механическому моменту системы частиц.

Магнитный момент кругового тока

Вычислим для примера магнитный момент кругового тока $I = \text{const}$ радиуса R (см. рис 3.14).

► Пусть ток I расположен в плоскости $x - y$ и центр круга совпадает с началом системы координат. Учитывая симметрию системы в любой точке кругового тока выполняется равенство $|\mathbf{r} \times d\mathbf{l}| = \text{const}$. Вычислим данное векторное произведение в точке на оси y (рис. 3.14). В результате:

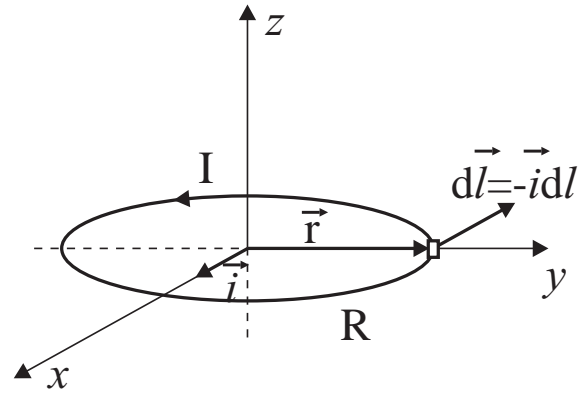


Рис. 3.14:

$$\vec{\mu} = \frac{I}{2c} \oint_R [\mathbf{r} \times d\mathbf{l}] = \frac{I}{2c} \oint_R \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & y = R & 0 \\ -dl & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{I \pi R^2}{c} \mathbf{k} = \frac{I S}{c} \mathbf{k}, \quad (3.103)$$

где S - площадь ограниченная током I . ◀

Полученное соотношение носит общий характер и не зависит от формы контура с током⁴.

⁴Доказать данное утверждение самостоятельно

Вектор намагничения

Если вещество помещено во внешнее магнитное поле, то в атомах или молекулах этого вещества могут появиться токи связанных зарядов плотность которых обозначим через \mathbf{j}_{in} . Таким образом, в атомах возникают магнитные моменты от этих токов ориентированные произвольным образом. В результате, в веществе появляется определенный суммарный магнитный момент или *намагниченность*. Для описания свойств намагниченности можно ввести понятие магнитного момента единицы объема \mathbf{M} по следующему определению:

$$\mathbf{M}_s = \int_V \mathbf{M} dv, \quad (3.104)$$

где \mathbf{M}_s – магнитный момент вещества в объеме V .

Магнитный момент единицы объема называется вектором намагничения вещества.

По определению вектор намагниченности (3.104) \mathbf{M} является макроскопической величиной, то есть с точностью до флуктуаций $\overline{\langle \mathbf{M} \rangle} = \mathbf{M}$.

§10 Параметризация средней плотности тока связанных зарядов в линейной электродинамике.

При построении теории электромагнитного поля в среде в системе уравнений Максвелла появились два параметра $\overline{\langle \rho_{in} \rangle}$ и $\overline{\langle \mathbf{j}_{in} \rangle}$, которые, строго говоря, требуют детального квантовомеханического описания структуры и свойств среды. В результате теряется универсальность подхода описания поля в среде. В предыдущих параграфах $\overline{\langle \rho_{in} \rangle}$ выражено через экспериментально измеряемую величину – вектор поляризации среды. Аналогично, при построении феноменологической электродинамики необходимо также выразить и $\overline{\langle \mathbf{j}_{in} \rangle}$ через макроскопическую экспериментально измеряемую величину. Покажем, что $\overline{\langle \mathbf{j}_{in} \rangle}$ приближенно выражается через магнитный момент единицы объема вещества.

На основании (3.86) можно утверждать, что в однородной, изотропной среде в самом общем случае $\overline{\langle \mathbf{j}_{in} \rangle}$ является функцией вида:

$$\overline{\langle \mathbf{j} + \mathbf{j}_{in} \rangle} = \mathbf{f} \left(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \text{rot} \mathbf{E}, \text{rot} \mathbf{B}, \text{div} \mathbf{E}, \text{div} \mathbf{B}, \right). \quad (3.105)$$

Характеристиками "среды" могут являться ее микроскопические параметры. Так например, внутриатомное поле характеризует среду и т.п.

Линейная электродинамика

В общем случае явный вид векторной функции \mathbf{f} в (3.105) не известен. Поэтому необходимо сформулировать некоторое приближение для ее определения. Если поле создается источником не лазерного типа, то, как правило, величина этого поля много меньше внутриатомного поля. Таким образом, в феноменологической теории может быть введен и использован малый параметр - отношение внешнего поля к внутриатомному. В связи с этим, можно произвести разложение функции (3.105) в ряд Тейлора и ограничиться линейными по полю слагаемыми, для случая слабого внешнего поля. При этом необходимо оставлять слагаемые, имеющие те же трансформационные свойства, что и плотность тока \mathbf{j} .

Исходя из определения \mathbf{j} - истинный вектор. Это утверждение вытекает из определения $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, так как \mathbf{v} - истинный вектор, а ρ - истинный скаляр⁵. Поэтому в разложении функции (3.105) в ряд могут появиться только слагаемые, которые являются истинными векторами.

В результате для однородной изотропной среды разложение \mathbf{f} в ряд с точностью до слагаемых первого порядка по полю можно представить в виде:

$$\overline{\langle \mathbf{j} + \mathbf{j}_{in} \rangle} = \sigma \mathbf{E} + \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + c\alpha \operatorname{rot} \mathbf{B} + \dots, \quad (3.106)$$

где σ, κ, α - коэффициенты разложения, а c - скорость света.

Выражение (3.106) справедливо в случае однородной изотропной среды. В общем случае неизотропной среды оно может быть представлено для компонент плотности тока в виде ($i = 1, 2, 3$):

$$\overline{\langle \mathbf{j} + \mathbf{j}_{in} \rangle}_i = \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik} \left(\mathbf{E} \right)_k + \sum_{k=1}^3 \kappa_{ik} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)_k + c \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} \left(\operatorname{rot} \mathbf{B} \right)_k + \dots \quad (3.107)$$

Выражения (3.106) и (3.107) получены с учетом линейных по полю слагаемых, то есть для случая, когда внешнее поле много меньше внутриатомного. Такое приближение приводит к построению линейной электродинамики для описания поля в среде. В случае, если внешние поля сравнимы с внутриатомными необходимо использовать слагаемые более высоких порядков по полю в представленном выше разложении. В этом случае возникает нели-

⁵Доказать самостоятельно, что ρ - истинный скаляр исходя из системы уравнений Максвелла

нейная электродинамика, построение которой не входит в задачи данного курса.

Для физической формулировки линейной электродинамики необходимо выяснить смысл коэффициентов, появившихся в разложении (3.106), (3.107)

§11 Физический смысл слагаемых в $\overline{\langle \mathbf{j} + \mathbf{j}_{in} \rangle}$.

Рассмотрим смысл отдельных членов в выражении (3.106) для определения физического смысла коэффициентов разложения и установления связи этих коэффициентов с экспериментально измеряемыми величинами, характеризующими свойства среды. Для простоты ограничимся случаем однородной изотропной среды.

Удельная проводимость.

Покажем, что соотношение вида $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ соответствует закону Ома. По определению силы тока, протекающего через поперечное сечение проводника S имеем:

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.108)$$

Преобразуем тождественно подынтегральное выражение в правой части равенства (3.108):

$$\sigma(\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) = \sigma(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) ds = \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})}{\frac{dl}{\sigma ds}} dl = \frac{(\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l})}{\rho \frac{dl}{ds}} \quad (3.109)$$

где $\rho = 1/\sigma$, а $d\mathbf{l} = \mathbf{n} dl$ так как, для бесконечно тонкого проводника направление нормали \mathbf{n} к сечению ds совпадает с направлением касательной к проводнику. Таким образом, для линейного проводника получим:

$$I = \int_L \frac{\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{dR}; \quad dR = \rho \frac{dl}{ds}. \quad (3.110)$$

Закон Ома.

Если проводник имеет постоянное сечение, то $dl/ds = \text{const} = l/S$ и в случае, когда ρ не зависит от координат величина $R = \rho l/S$ - постоянная и определяет сопротивление линейного проводника длины l , сечение которого S , если ρ - удельное сопротивление проводника. Таким образом $\sigma = 1/\rho$ -

есть удельная проводимость. Выражение (3.110) в случае линейного однородного проводника имеет вид закона Ома для участка цепи:

$$I = \frac{1}{R} \int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{R} \int_L (\nabla \varphi) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{R} \int_1^2 d\varphi = \frac{\varphi(1) - \varphi(2)}{R} = \frac{U}{R}. \quad (3.111)$$

В связи с этим выражение

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (3.112)$$

называется *законом Ома в дифференциальной форме*. В общем случае формула (3.112) приближена и в точном выражении содержатся более высокие степени разложения по напряженности поля.

Представленные рассуждения позволяют интерпретировать смысл коэффициента σ в (3.106) как удельную проводимость проводника. Для неизотропной среды появляется набор коэффициентов σ_{ik} , ($i, k = 1, 2, 3$), которые определяют тензор удельной проводимости в (3.107)

Диэлектрическая восприимчивость.

Для выяснения смысла второго слагаемого в (3.106) вычислим div от правой и левой сторон равенства (3.106)

$$\text{div}(\mathbf{j} + \langle \mathbf{j}_{in} \rangle) = \text{div}(\sigma \mathbf{E}) + \text{div}\left(\kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right). \quad (3.113)$$

С учетом закона сохранения заряда и выражения (3.112) получаем из (3.113)

$$-\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho_{in} \rangle = \text{div}\left(\kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right). \quad (3.114)$$

Используя (3.97) и считая κ параметром не зависящим от времени находим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mathbf{P} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\kappa \mathbf{E}), \quad (3.115)$$

или $\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E}$.

Коэффициент пропорциональности κ между вектором напряженности и вектором поляризации называется коэффициентом поляризации или коэффициентом диэлектрической восприимчивости вещества. В случае неизотропной среды коэффициенты k_{ij} в (3.107) образуют тензор диэлектрической восприимчивости.

Плотность тока поляризации

Таким образом, второе слагаемое в (3.106) имеет вид:

$$\kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (3.116)$$

и показывает, что изменение вектора поляризации во времени эквивалентно появлению тока, который получил название ток поляризации, а плотность тока поляризации равна скорости изменения дипольного момента единицы объема:

$$\mathbf{j}_{pol} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (3.117)$$

Выясним теперь смысл третьего слагаемого в соотношении (3.106). Для этого умножим равенство (3.106) векторно на радиус-вектор \mathbf{r} и проинтегрируем по произвольному объему V :

$$\int_V \left[\mathbf{r} \times \overline{\langle \mathbf{j}_{in} \rangle} \right] dv = \int_V \left[\mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right] dv + \alpha c \int_V \left[\mathbf{r} \times \text{rot} \mathbf{B} \right] dv \quad (3.118)$$

Слагаемое с током поляризации равно нулю в силу следующих рассуждений:

$$\left[\mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right] = \left[\mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial t} \rho_{in} \mathbf{r} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \rho_{in} [\mathbf{r} \times \mathbf{r}] = 0. \quad (3.119)$$

Считая α постоянной величиной введем обозначение $\mathbf{M} \equiv \alpha \mathbf{B}$, в результате получим:

$$\int \left[\mathbf{r} \times \text{rot} \mathbf{M} \right] dv = \frac{1}{c} \int \left[\mathbf{r} \times \overline{\langle \mathbf{j}_{in} \rangle} \right] dv. \quad (3.120)$$

Вспомогательное равенство.

Для дальнейших преобразований рассмотрим вспомогательное интегральное соотношение, которое можно вывести из интегрального определения оператора $\vec{\nabla}$ (2.25).

Для произвольных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} имеем:

$$\left[[\vec{\nabla} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{b} \right] = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \left[[\mathbf{n} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{b} \right] ds,$$

или в интегральном виде:

$$\int_V \left[[\vec{\nabla} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{b} \right] dv = \oint_S \left[[\mathbf{n} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{b} \right] ds. \quad (3.121)$$

С учетом дифференциальных свойств оператора $\vec{\nabla}$ подынтегральное выражение в интеграле по объему V равно:

$$\left[[\vec{\nabla} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{b} \right] = - \left[\mathbf{b} \times \text{rota} \right] - \left[[\mathbf{a} \times \vec{\nabla}] \times \mathbf{b} \right].$$

Таким образом, соотношение (3.121) имеет вид:

$$\int_V \left[\mathbf{b} \times \text{rota} \right] dv + \int_V \left[[\mathbf{a} \times \vec{\nabla}] \times \mathbf{b} \right] dv = - \oint_S \left[[\mathbf{n} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{b} \right] ds. \quad (3.122)$$

Данное соотношение справедливо для любых векторов, являющихся непрерывными функциями координат.

Положим в (3.122) $\mathbf{b} = \mathbf{r}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{M} = \alpha \mathbf{B}$. Выберем в качестве объема интегрирования все пространство. При этом на бесконечно больших расстояниях $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, то есть вектор \mathbf{M} на бесконечно удаленной поверхности равен нулю. Таким образом поверхностный интеграл в (3.122) равен нулю. В результате получим:

$$\int_V \left[\mathbf{r} \times \text{rot} \mathbf{M} \right] dv = - \int_V \left[[\mathbf{M} \times \vec{\nabla}] \times \mathbf{r} \right] dv \quad (3.123)$$

Вычислим двойное векторное произведение входящее в правую сторону равенства (3.123):

$$\begin{aligned} \left[[\mathbf{M} \times \vec{\nabla}] \times \mathbf{r} \right] &= \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} [\mathbf{M} \times \vec{\nabla}]_i x_j \mathbf{e}_k = \\ &= \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \sum_{l,m=1}^3 \varepsilon_{lmi} M_l \frac{\partial}{\partial x_m} x_j \mathbf{e}_k = \sum_{i,j,k,l,m=1}^3 \varepsilon_{ilk} \varepsilon_{lmi} M_l \delta_{jm} \mathbf{e}_k = \\ &= \sum_{i,j,k,l} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lji} M_l \mathbf{e}_k = - \sum_{i,j,k,l=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijl} M_l \mathbf{e}_k = - \sum_{k,l=1}^3 2\delta_{kl} M_l \mathbf{e}_k = -2\mathbf{M}. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Здесь ε_{ijk} - полностью антисимметричный тензор третьего ранга (тензор Леви-Чевита)

В результате находим:

$$\int_V \left[\mathbf{r} \times \text{rot} \mathbf{M} \right] dv = 2 \int_V \mathbf{M} dv. \quad (3.125)$$

Подставляя (3.125) в (3.120) получим окончательно:

$$\int_V \mathbf{M} dv = \frac{1}{2c} \int_V \left[\mathbf{r} \times \overline{\langle \mathbf{j}_{in} \rangle} \right] dv \quad (3.126)$$

Вектор намагничения.

Из выражения (3.126) следует физическая интерпретация вектора $\mathbf{M} = \alpha \mathbf{B}$. Действительно, по определению (3.99) интегральное слагаемое, содержащее \mathbf{j}_{in} в правой части равенства (3.126) есть магнитный момент, возникающий в веществе из-за наличия токов в атоме. Таким образом из (3.126) следует, что \mathbf{M} – это магнитный момент единицы объема вещества или вектор намагничения. В свою очередь коэффициент α называется *магнитной восприимчивостью вещества* и может быть измерен экспериментально для конкретного вещества.

Так как смысл всех коэффициентов разложения в (3.106) установлен, приведенные рассуждения позволяют записать следующее общее выражение:

$$\overline{\langle \mathbf{j}_{in} \rangle} \approx \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{M} \quad (3.127)$$

и тем самым выразить среднее значение плотности тока связанных зарядов в атоме через макроскопические, то есть экспериментально измеряемые параметры.

§ 12 Система уравнений Максвелла в среде.

BEj -форма

При усреднении системы уравнений Максвелла по физически бесконечно малому объему получается система уравнений (3.86), которая получила название **BEj** – форма записи системы уравнений. Такая форма записи, практически, не применяется в приложениях в силу отсутствия универсального характера записи уравнений электромагнитного поля. Для каждого вещества необходимо уметь строить $\overline{\langle \rho_{in} \rangle}$ и $\overline{\langle \mathbf{j}_{in} \rangle}$, что требует привлечения методов квантовой механики и статистической физики, и в большинстве случаев является трудно разрешимой задачей. Теоретический подход построения теории электромагнитного поля в веществе, основанный на этих принципах, приведен, например в [6].

BEHD – форма

Более универсальным, хотя и менее обоснованным, является подход, использующий феноменологическую параметризацию средних значений

плотности заряда и плотности тока связанных в атомах зарядов. В этом случае, подставляя (3.127) и (3.97) в (3.86) получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho - 4\pi\operatorname{div} \mathbf{P}; & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{M} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; & \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0; \end{aligned} \quad (3.128)$$

Введем новые векторы - вектор индукции электрического поля

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$$

и вектор напряженности магнитного поля

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}.$$

В результате система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в среде примет следующий вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad (3.129)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}; & \mathbf{H} &= \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}. \end{aligned} \quad (3.130)$$

Соотношения (3.130) называются материальными уравнениями или уравнениями связи. Необходимо подчеркнуть, что свойства среды включены в векторы \mathbf{P} и \mathbf{M} , которые считаются известными при описании поля в среде в рамках феноменологического подхода. Методы определения этих векторов исходя из микроскопических свойств среды лежат вне области изучения классической электродинамики.

В стандартной задаче электродинамики требуется найти поле при известных значениях ρ и \mathbf{j} . В соответствии с (3.129), в этом случае, в среде необходимо найти 4 вектора \mathbf{B} , \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} или 12 независимых функций (по три проекции каждого из четырех векторов). Учитывая материальные уравнения, в которых векторы \mathbf{P} и \mathbf{M} считаются известными векторными параметрами, задающими свойства среды, из 12 неизвестных функций независимыми являются только 6.

Непосредственно дифференциальных уравнений Максвелла - 8. Два скалярных - Закон Кулона и закон отсутствия магнитных зарядов, и два векторных - закон электромагнитной индукции Фарадея и обобщенный закон Ампера. Независимых из этих восьми уравнений является шесть в силу двух

связей в этих уравнениях. Первая связь устанавливается законом сохранения заряда а вторая вытекает из закона электромагнитной индукции. Так если вычислить ротор от правой и левой частей дифференциальной формы закона Фарадея, то получим $\text{div } \mathbf{B} = \text{const}$, что совпадает с законом отсутствия магнитных зарядов, который собственно и определяет величину этой константы.

Таким образом в системе уравнений Максвелла в веществе имеется шесть независимых уравнений для определения шести неизвестных функций. Следовательно задача определения поля может быть решена однозначно. Строгое доказательство этого утверждения является предметом теории уравнений в частных производных и здесь не приводится.

Часто система уравнений (3.129) называется системой уравнений Максвелла для описания поля в среде в **ВЕНД** -форме по буквам, используемым для обозначения векторов определяющих свойства поля в среде.

ВЕНД – форма

В ряде случаев вместо системы (3.129) используется еще одна форма записи системы уравнений, связанная с иным определением вектора индукции электрического поля, получившего название *обобщенного вектора индукции*. Часто в литературе не делается различий в написании такого вектора или этот вектор обозначается как \mathbf{D}^* , что не является знаком операции комплексного сопряжения. Ниже такой вектор будет обозначаться буквой \vec{D} . Обобщенный вектор индукции поля вводится по следующему определению:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \equiv \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \overline{\langle \mathbf{j}_{in} \rangle}, \quad (3.131)$$

или

$$\vec{D}(t) = \mathbf{E}(t) + 4\pi \int_{-\infty}^t \overline{\langle \mathbf{j}_{in}(t') \rangle} dt'. \quad (3.132)$$

Если вычислить $\text{div } \vec{D}$ в выражении (3.132) получим:

$$\text{div } \vec{D}(t) = \text{div } \mathbf{E}(t) + 4\pi \int_{-\infty}^t \text{div } \overline{\langle \mathbf{j}_{in}(t') \rangle} dt' = 4\pi \rho$$

Система уравнений Максвелла в этом случае принимает следующий вид:

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi \rho; \quad \text{div } \mathbf{B} = 0; \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

и называется **ВЕНД** - формой записи системы уравнений Максвелла. Часто такая форма используется для описания высокочастотных полей.

§13 Фурье-преобразования системы уравнений Максвелла.

Принцип суперпозиции для электромагнитного поля позволяет широко использовать линейные интегральные преобразования при описании поля. Одним из широко распространенных интегральных преобразований является преобразование Фурье, которое состоит в разложении функции $f(t)$ в интеграл Фурье следующего вида:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (3.133)$$

Коэффициенты $f(\omega)$ называются фурье-образом функции $f(t)$ и определяются обратными преобразованиями :

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt. \quad (3.134)$$

Однозначная связь между величинами $f(t)$ и $f(\omega)$ позволяет определить по одной из этих величин другую. Поэтому знание фурье-образа функции эквивалентно знанию самой функции.

Фурье образ производной по t от функции $f(t)$ можно найти дифференцируя по t выражение (3.133):

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega; \quad \dot{f}(\omega) = -i\omega f(\omega). \quad (3.135)$$

Таким образом дифференциальные уравнения сводятся к алгебраическим для фурье - компонент искомой функции.

Проинтегрировав равенство (3.133) получим соотношение для определения фурье- образа интеграла от функции $f(t)$:

$$\int f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega; \quad F(\omega) \equiv \frac{i}{\omega} f(\omega). \quad (3.136)$$

Если функция зависит от нескольких аргументов, то преобразования Фурье можно использовать по любому аргументу и по любым их сочетаниям. Таким образом, зависящая от координат и времени $\mathbf{r}, t = x, y, z, t$ функция может быть разложена в интеграл Фурье по x , или по y , или по z , или по t , или по x и y одновременно, или одновременно по трем или всем четырем переменным. Всего для функции от четырех переменных возможно пятнадцать различных ее фурье-образов. Обычно в теории фурье- преобразований для обозначения фурье образов одной функции используется тоже обозначение, что и для исходной функции, с указанием преобразованной координаты. Как правило это не приводит к недоразумениям, однако надо отметить,

что для физических размерных величин, размерности исходной функции и ее фурье-образа различаются.

Например, для плотности заряда $\rho(x, y, z, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$ при выполнении фурье - преобразования по времени имеем:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (3.137)$$

Здесь размерность $[\omega] = 1/[t]$ есть величина обратная времени, ω называется частотой, а размерность $[\rho(\mathbf{r}, t)] = [\rho(\mathbf{r}, \omega)]/[t]$.

Преобразование по координате x дает для плотности заряда ρ

$$\rho(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(k_x, y, z, t) \exp(i k_x x) dk_x. \quad (3.138)$$

При построении фурье - образа для пространственных переменных обычно используется другой знак в экспоненте, чем для преобразования Фурье по времени. Преобразование фурье по всем трем пространственным переменным будет иметь вид:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\mathbf{k}, t) \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k}, \quad d\mathbf{k} \equiv dk_x dk_y dk_z. \quad (3.139)$$

Соответственно по пространственным и временным переменным преобразование Фурье для плотности заряда запишется в виде

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^4 \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\mathbf{k}, \omega) \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) d\mathbf{k} d\omega. \quad (3.140)$$

Используя указанный способ обозначений можно представить систему уравнений Максвелла для фурье-компонент по времени в виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = 4\pi \rho(\mathbf{r}, \omega), \quad \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (3.141)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i \frac{\omega}{c} \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega); \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) - i \frac{\omega}{c} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega).$$

Если выполнить преобразование Фурье по пространственным переменным и времени, то система дифференциальных уравнений Максвелла превращается в систему алгебраических уравнений:

$$i \mathbf{k} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) = 4\pi \rho(\mathbf{k}, \omega), \quad i \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (3.142)$$

$$i[\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)] = i \frac{\omega}{c} \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega); \quad i[\mathbf{k} \times \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega)] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) - i \frac{\omega}{c} \mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega).$$

§14 Дисперсионные соотношения Крамерса-Кронига.

В соответствии с (3.131) фурье-преобразование по времени для обобщенного вектора электрического смещения \vec{D} равно:

$$\vec{D}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + i \frac{4\pi}{\omega} < \mathbf{j}_{in}(\mathbf{r}, \omega) >. \quad (3.143)$$

В соответствии с принципом причинности плотность тока в момент времени t может зависеть только от значений поля в предшествующие моменты времени. Поэтому наиболее общее соотношение в изотропной среде связывающее ток в атомах и поле можно представить в виде

$$< \mathbf{j}_{in}(\mathbf{r}, t) > = \int_0^\infty \phi(\mathbf{r}, \tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau$$

Фурье-преобразование по времени данного равенства дает:

$$\int_{-\infty}^\infty < \mathbf{j}_{in}(\mathbf{r}, \omega) > e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \phi(\mathbf{r}, \tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega d\tau.$$

Таким образом для Фурье - компонент находим

$$< \mathbf{j}_{in}(\mathbf{r}, \omega) > = \left\{ \int_0^\infty \phi(\mathbf{r}, \tau) \exp(i\omega\tau) d\tau \right\} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega).$$

Подставляя данное равенство в (3.143) можно ввести *диэлектрическую проницаемость среды* ε по следующему определению:

$$\vec{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (3.144)$$

здесь использовано обозначение:

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = 1 + i \frac{4\pi}{\omega} \int_0^\infty \phi(\mathbf{r}, \tau) \exp(i\omega\tau) d\tau \equiv 1 + i \frac{4\pi}{\omega} \sigma(\mathbf{r}, \omega). \quad (3.145)$$

Функция σ - называется проводимостью среды и ее использование удобно для описания сред обладающих свойством проводить электрический ток. В общем случае функция σ является комплексной величиной $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ и для проводников $\sigma_2(\mathbf{r}, 0) \gg \sigma_1(\mathbf{r}, 0)$.

Рассмотрим $\varepsilon(\omega)$ как функцию комплексного аргумента, считая ω комплексной переменной $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, тогда

$$\varepsilon(\omega_1 + i\omega_2) = 1 + i \frac{4\pi}{\omega} \int_0^\infty \phi(\tau) \exp(-\omega_2\tau) \exp(i\omega_1\tau) d\tau. \quad (3.146)$$

При $\omega_2 > 0$ интеграл (3.146) по τ всегда сходится. Это означает, что $\varepsilon(\omega_1 + i\omega_2)$ нигде не обращается в бесконечность в верхней полуплоскости

ω , кроме точки $\omega = 0$. Это свойство позволяет установить связь действительной и мнимой частей ε на основании известной интегральной формулы Коши.

В соответствии с формулой Коши интеграл по замкнутому контуру, ограничивающему область внутри которой функция $f(\omega')$ аналитична удовлетворяет равенству:

$$\oint \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = 0, \quad (3.147)$$

если точка ω лежит вне контура интегрирования.

Выберем, в качестве функции $f(\omega')$, аналитичной всюду в верхней полуплоскости ω' , кроме может быть точек действительной оси, функцию $f(\omega') = \varepsilon(\omega') - 1$. Рассмотрим замкнутый контур интегрирования состоящий из двух частей - действительной оси с обходом точек $\omega' = 0$ и $\omega' = \omega$ в верхней полуплоскости и дуги полукруга в верхней полуплоскости, радиус которой стремится к бесконечности. Поскольку внутри выбранного контура нет особенностей, то интеграл Коши равен нулю:

$$\oint \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' = 0. \quad (3.148)$$

Вклад участка полукруга бесконечно большого радиуса равен нулю, так как при больших ω' $\varepsilon(\omega') - 1 \approx \omega'^{-2}$. Обход особенностей $\omega' = 0$ и $\omega' = \omega$ дает соответственно следующие вклады в интеграл на основании теории вычетов:

$$-i\pi \frac{4\pi i \sigma(\mathbf{r}, 0)}{(-\omega)}; \quad -i\pi [\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) - 1].$$

Таким образом на основании (3.148) имеем:

$$\oint \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' - 4\pi^2 \frac{\sigma(0)}{\omega} - i\pi [\varepsilon(\omega) - 1] = 0, \quad (3.149)$$

где символ P означает интеграл в смысле главного значения. Окончательно выражение (3.148) представим в виде:

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' = i\pi [\varepsilon(\omega) - 1] + 4\pi^2 \frac{\sigma(0)}{\omega} -$$

Разделяя в данной формуле действительную и мнимую части $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$, с учетом $\sigma(0) = \sigma_1(0)$ - действительная величина, получим:

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_2(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (3.150)$$

$$\varepsilon_2(\omega) = 4\pi \frac{\sigma(0)}{\omega} - \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_1(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (3.151)$$

Данные формулы называются *дисперсионными соотношениями или соотношениями Крамерса-Кронига*.

§15 Векторы Герца.

При описании электромагнитного поля в веществе система уравнений Максвелла имеет вид (3.129). Данную систему уравнений в частных производных для ограниченных электронейтральных систем можно свести к неоднородным волновым уравнениям д'Аламбера аналогично случаю электромагнитного поля в вакууме. Для этого введем дипольный момент единицы объема системы свободных зарядов \mathbf{P}_0 и магнитный момент единицы объема системы свободных токов \mathbf{M}_0 по определению:

$$\rho = -\operatorname{div} \mathbf{P}_0; \quad \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}_0}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{M}_0. \quad (3.152)$$

Данные соотношения однозначно определяют \mathbf{P}_0 и \mathbf{M}_0 для электронейтральных, замкнутых систем зарядов и токов.

Соотношения (3.152) обеспечивают выполнение закона сохранения заряда. В результате система уравнений Максвелла (3.129) переписется в виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad (3.153)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3.154)$$

где

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{E} + 4\pi \left(\mathbf{P} + \mathbf{P}_0 \right) = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}_\Sigma, \quad (3.155)$$

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{B} - 4\pi \left(\mathbf{M} + \mathbf{M}_0 \right) = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}_\Sigma. \quad (3.156)$$

В выражении (3.155) \mathbf{P}_Σ и \mathbf{M}_Σ суммарные дипольный и магнитный моменты единицы объема, возникающие из-за всех типов зарядов и токов, а также произведено переопределение векторов \mathbf{D} и \mathbf{H} .

Аналогично случаю электромагнитного поля в вакууме из (3.153) следует:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (3.157)$$

где \mathbf{A} - векторный потенциал. Соответственно из (3.153) и (3.157) вытекает определение скалярного потенциала:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi. \quad (3.158)$$

Определение векторов Герца.

Однако дальнейшее преобразование системы уравнений Максвелла в среде возможно путем введения вспомогательных векторов, которые получили название *векторов Герца*. Векторы Герца электрического $\mathbf{\Pi}_e$ и магнитного $\mathbf{\Pi}_m$ типов определяются соотношениями:

$$\varphi \equiv -\text{div} \mathbf{\Pi}_e; \quad \mathbf{A} \equiv \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t} + \text{rot} \mathbf{\Pi}_m \quad (3.159)$$

Формулы (3.159) обеспечивают выполнение условия калибровки Лоренца (3.76) для скалярного и векторного потенциалов.

Используя (3.159) найдем как выражается напряженность электрического поля через векторы Герца. В результате:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t} + \text{rot} \mathbf{\Pi}_m \right) + \text{grad} \text{div} \mathbf{\Pi}_e = \\ &= \square \mathbf{\Pi}_e + \text{rot} \text{rot} \mathbf{\Pi}_e - \frac{1}{c} \text{rot} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.160)$$

Уравнения для вектора Герца электрического типа

Для нахождения уравнения, которому удовлетворяет вектор Герца электрического типа, подставим (3.160) в уравнение $\text{div} \mathbf{D} = 0$ из (3.153), в результате получим:

$$\text{div} \left(\square \mathbf{\Pi}_e + \text{rot} \text{rot} \mathbf{\Pi}_e - \frac{1}{c} \text{rot} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t} + 4\pi \mathbf{P}_\Sigma \right) = 0.$$

В силу того, что дивергенция ротора произвольного вектора тождественно равна нулю, последнее уравнение эквивалентно равенству:

$$\text{div} \left(\square \mathbf{\Pi}_e + 4\pi \mathbf{P}_\Sigma \right) = 0. \quad (3.161)$$

Отсюда следует, что $\square \mathbf{\Pi}_e + 4\pi \mathbf{P}_\Sigma = \text{rot} \mathbf{a}$, где \mathbf{a} - произвольный вектор. В силу того, что векторы Герца определяются из равенств (3.159) неоднозначно можно положить $\mathbf{a} = 0$. Таким образом вектор Герца электрического типа удовлетворяет волновому уравнению д'Аламбера:

$$\square \mathbf{\Pi}_e = -4\pi \mathbf{P}_\Sigma. \quad (3.162)$$

Связь с векторами \mathbf{E} , \mathbf{D}

На основании (3.160), (3.162) и (3.155) напряженность электрического поля \mathbf{E} и вектор индукции \mathbf{D} следующим образом выражаются через векторы Герца:

$$\mathbf{E} = -4\pi\mathbf{P}_\Sigma + \text{rot rot } \mathbf{\Pi}_e - \frac{1}{c}\text{rot } \frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t}, \quad (3.163)$$

$$\mathbf{D} = \text{rot} \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{\Pi}_e \right). \quad (3.164)$$

Уравнения для вектора Герца магнитного типа.

Уравнения для векторов Герца магнитного типа могут быть найдены из обобщенного закона Ампера (3.154) $\text{rot } \mathbf{H} = \dot{\mathbf{D}}/c$. С учетом материальных уравнений (3.156) и определения скалярного и векторного потенциалов, имеем:

$$\text{rot} (\text{rot } \mathbf{A} - 4\pi\mathbf{M}_\Sigma) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi + 4\pi \mathbf{P}_\Sigma \right)$$

Подставляя в данное равенство определение векторов Герца (3.159) получим:

$$\begin{aligned} & \text{rot} \left[\text{rot} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{\Pi}_m \right) - 4\pi\mathbf{M}_\Sigma \right] = \\ & = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{\Pi}_m \right) + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{\Pi}_e) + 4\pi\mathbf{P}_\Sigma \right]. \end{aligned}$$

Используя векторное равенство $[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \mathbf{\Pi}_e]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{\Pi}_e) - \nabla^2 \mathbf{\Pi}_e$ и сокращая одинаковые слагаемые, с учетом уравнения для векторов Герца электрического типа (3.162) получим

$$\text{rot} \left[\text{rot rot } \mathbf{\Pi}_m - 4\pi \mathbf{M}_\Sigma + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{\Pi}_m \right] = 0.$$

Вычисляя в явном виде $\text{rot rot } \mathbf{\Pi}_m$ преобразуем последнее равенство к виду:

$$\text{rot} [\square \mathbf{\Pi}_m + 4\pi\mathbf{M}_\Sigma - \text{grad div } \mathbf{\Pi}_m] = 0. \quad \square \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

В силу того что $\text{rot grad } G = 0$, где G -произвольная функция получим

$$\square \mathbf{\Pi}_m + 4\pi\mathbf{M}_\Sigma = \text{grad } G.$$

В силу неоднозначности определения вектора Герца магнитного типа положим $G = 0$. В результате уравнение для вектора Герца магнитного типа имеет вид:

$$\square \mathbf{\Pi}_m = -4\pi\mathbf{M}_\Sigma. \quad (3.165)$$

Связь с векторами \mathbf{B} , \mathbf{H}

Соотношения для определения векторов магнитного поля \mathbf{B} и \mathbf{H} с использованием векторов Герца электрического и магнитного типа вытекают из представленных выше определений и имеют следующий вид:

$$\mathbf{B} = \text{rot} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t} + \text{rot} \mathbf{\Pi}_m \right). \quad (3.166)$$

$$\mathbf{H} = -4\pi \mathbf{M}_\Sigma + \text{rot} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t} + \text{rot} \mathbf{\Pi}_m \right). \quad (3.167)$$

Таким образом векторы Герца позволяют определить значения электромагнитного поля и с их использованием система уравнений поля в среде сводится к неоднородным волновым уравнениям, аналогично описанию поля в вакууме с использованием скалярного и векторного потенциалов.

Решения уравнений для векторов Герца

Частные решения уравнений (3.162) и (3.165), удовлетворяющие физическому принципу причинности имеют вид запаздывающих решений неоднородного волнового уравнения вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_e(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{\mathbf{P}_\Sigma(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \\ \mathbf{\Pi}_m(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{\mathbf{M}_\Sigma(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \end{aligned}$$

Представленные решения уравнений (3.162) и (3.165) являются частными решениями и их применение возможно только при отсутствии граничных условий для векторов Герца.

Стационарные поля

В случае стационарных полей уравнения для векторов Герца и решения этих уравнений при отсутствии каких-либо граничных условий имеют вид:

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi}_e = -4\pi \mathbf{P}_\Sigma \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Pi}_e(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{P}_\Sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad (3.168)$$

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi}_m = -4\pi \mathbf{M}_\Sigma \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Pi}_m(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{M}_\Sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (3.169)$$

Для задач с граничными условиями необходимо использовать, кроме представленных частных решений, суперпозицию решений однородных уравнений Пуассона $\nabla^2 \mathbf{\Pi}_e = 0$ и $\nabla^2 \mathbf{\Pi}_m = 0$, подбирая коэффициенты суперпозиции так, чтобы выполнялись граничные условия.

Неоднозначность векторов Герца.

Как отмечалось выше, векторы Герца определены неоднозначно. Простой подстановкой можно убедиться, что следующие преобразования векторов Герца оставляют векторы поля неизменными:

$$\mathbf{\Pi}'_e = \mathbf{\Pi}_e + \text{rot } \mathbf{F} - \text{grad } G, \quad \mathbf{\Pi}'_m = \mathbf{\Pi}_m - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t},$$

где векторная \mathbf{F} и скалярная G функции - произвольные решения однородных волновых уравнений

$$\nabla^2 \mathbf{F} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2} = 0; \quad \nabla^2 G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0;$$

Данное свойство оправдывает условия использованные при выводе уравнений для векторов Герца.

Точечный дипольный момент.

В качестве примера использования векторов Герца рассмотрим поле точечного диполя \mathbf{d} , расположенного в начале координат.

► В этом случае суммарный дипольный момент единицы объема равен: $\mathbf{P}_\Sigma = \delta(\mathbf{r})\mathbf{d}$. На основании (3.168), (3.163), (3.158) получим:

$$\mathbf{\Pi}_e = \frac{\mathbf{d}}{r}; \quad \mathbf{E} = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{d}}{r^3}; \quad \varphi = \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})}{r^2}, \quad (3.170)$$

где \mathbf{n} - единичный вектор в направлении радиус-вектора \mathbf{r} точки наблюдения. Вектор Герца магнитного типа в этом случае равен нулю. ◀

Точечный магнитный момент.

Если в начале координат расположен точечный магнитный момент $\vec{\mu}$, то суммарный магнитный момент единицы объема равен: $\mathbf{M}_\Sigma = \delta(\mathbf{r})\vec{\mu}$. На основании (3.169) и связи вектора индукции магнитного поля с векторами Герца получим:

$$\mathbf{\Pi}_m = \frac{\vec{\mu}}{r}; \quad \mathbf{B} = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \vec{\mu} - \vec{\mu})}{r^3}; \quad \mathbf{A} = \frac{[\vec{\mu} \times \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (3.171)$$

Здесь \mathbf{r} — радиус вектор точки наблюдения поля, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

§16 Энергия электромагнитного поля

Вопрос об энергии и импульсе электромагнитного поля имеет принципиальное значение, так как эти характеристики делают очевидным материальность поля.

При введении понятия энергии электромагнитного поля будем исходить из установленных в классической механике определений и понятий. Рассмотрим замкнутую систему зарядов и токов. Замкнутость системы позволяет пренебречь полем на бесконечно удаленной поверхности от выбранной системы. Пусть в рассматриваемой системе присутствуют абстрактные частицы - носители заряда и электромагнитное поле, которое создано этими зарядами. Для замкнутой системы изменение ее энергии обуславливается работой, сделанной над частицами, входящими в систему.

Сила, действующая со стороны поля на k -ый точечный заряд движущийся со скоростью \mathbf{v}_k , определяется выражением, установленным экспериментально (сила Лоренца):

$$\mathbf{F}_k = q_k \mathbf{E}_k + \frac{q_k}{c} [\mathbf{v}_k \times \mathbf{B}_k]. \quad (3.172)$$

Изменение энергии k -ой частицы под действием силы \mathbf{F}_k , при перемещении частицы на бесконечно малое расстояние $d\mathbf{l}_k$ за время dt , в соответствии с законами классической механики есть:

$$d\varepsilon_k = (\mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{l}_k) = (\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k) dt. \quad (3.173)$$

Следовательно для системы N штук частиц изменение энергии всей системы частиц ε_{part} в единицу времени равно:

$$\frac{d\varepsilon_{part}}{dt} = \sum_{k=1}^N (\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k).$$

Соответственно для непрерывно распределенного заряда в объеме V получим:

$$\frac{d\varepsilon_{part}}{dt} = \int_V \rho \left\{ \mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\} \cdot \mathbf{v} dv = \int_V (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) dv, \quad (3.174)$$

в силу того, что для системы частиц имеет место равенство (3.5). Выражая плотность тока из обобщенного закона Ампера, на основании (3.174) находим в случае системы заряды-поле

$$\frac{d\varepsilon_{part}}{dt} = \int_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{1}{4\pi} \left[c \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \right) dv. \quad (3.175)$$

В соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея имеет место следующее очевидное равенство:

$$- \frac{c}{4\pi} \int_V \left(\mathbf{B} \cdot \left[\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \right) dv = 0. \quad (3.176)$$

В силу этого (3.175) можно переписать в симметричном виде, добавляя к нему нулевое слагаемое (3.176):

$$\frac{d\varepsilon_{part}}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int_V \left(\mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{E} \right) dv - \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dv. \quad (3.177)$$

Учитывая, что $\text{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{B}$ для выражения (3.177) получим:

$$\frac{d\varepsilon_{part}}{dt} = -\frac{c}{4\pi} \int_V \text{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] dv - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) dv. \quad (3.178)$$

На основании теоремы Остроградского Гаусса из полученного выражения найдем:

$$\frac{d\varepsilon_{part}}{dt} = -\frac{c}{4\pi} \oint_{\sigma} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{s} - \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) dv, \quad (3.179)$$

где σ -поверхность ограничивающая объем V . Интеграл по поверхности σ на бесконечно больших расстояниях обращается в ноль, поэтому имеют место следующие равенства:

$$\frac{d}{dt} \left(\varepsilon_{part} + \int_V \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dv \right) = 0. \quad (3.180)$$

$$\varepsilon_{part} + \int_V \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dv = \text{const}. \quad (3.181)$$

Последнее соотношение можно интерпретировать как закон сохранения энергии определив энергию электромагнитного поля ε_f и энергию единицы объема электромагнитного поля w следующими соотношениями:

$$\varepsilon_f = \int_V \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dv; \quad w = \frac{E^2 + B^2}{8\pi}. \quad (3.182)$$

Для конечной поверхности σ , ограничивающей выбранный объем V закон сохранения в интегральном виде определяется равенством (3.178):

$$\frac{d\varepsilon_{part}}{dt} = -\oint_{\sigma} (\mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}) - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dv; \quad \mathbf{S} \equiv \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]. \quad (3.183)$$

Плотность потока энергии.

В соответствии с представленным равенством (3.183) вектор \mathbf{S} - определяет энергию, проходящую в единицу времени через единицу поверхности в направлении ортогональном векторам \mathbf{E} и \mathbf{B} . Иными словами $|\mathbf{S}|$ - есть

плотность потока энергии, а \mathbf{S} – вектор плотности потока энергии. Этот вектор называется вектором Умова-Пойнтинга.

Интерпретация \mathbf{S} как вектора плотности потока энергии имеет некоторый элемент произвола. Закон сохранения энергии приписывает физический смысл не самому вектору \mathbf{S} , а лишь интегралу от $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$, вычисленному по замкнутой поверхности σ . В общем случае из значения интеграла нельзя вывести однозначного заключения о распределении \mathbf{S} . Поэтому, в принципе, возможны и иные определения плотности потока энергии. Например, к определенному выше вектору Умова-Пойнтинга можно добавить ротор произвольного вектора, поскольку такое слагаемое не вносит вклада в поверхностный интеграл. Однако при осторожном применении определения вектора \mathbf{S} , в частности, для средних значений, конечных интервалов пространства и времени, никаких противоречий с экспериментальными результатами не возникает.

Дифференциальная форма закона сохранения энергии.

На основании (3.174), (3.178) в дифференциальной форме закон сохранения энергии имеет следующий вид:

$$(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) = -\operatorname{div} \mathbf{S} - \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (3.184)$$

Энергия поля в среде.

Для произвольной среды, рассмотренные выше понятия – энергия и вектор \mathbf{S}) требуют специального исследования что не входит в предмет настоящего курса. Однако для примитивной однородной и изотропной среды вектор плотности потока энергии и энергия единицы объема электромагнитного поля определяются следующим образом:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]; \quad w = \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})}{8\pi}, \quad (3.185)$$

что может быть получено аналогично рассуждениям приведенным выше на основании системы уравнений Максвелла для среды.

В общем случае ситуация существенно усложняется и энергия поля может быть представлена в виде:

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi} \int_V (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}).$$

Диссипация энергии в проводнике.

Экспериментально установлено, что движущиеся заряды создают такое же электромагнитное поле, как и ток проводимости в проводнике. Следовательно, плотность тока \mathbf{j} в системе уравнений Максвелла, можно разделить на две части $\mathbf{j} = \mathbf{j}_c + \mathbf{j}_v$, где $\mathbf{j}_c = \sigma \mathbf{E}$ - плотность тока проводимости, а $\mathbf{j}_v = \rho \mathbf{v}$ - плотность конвекционного тока. В этом случае закон сохранения энергии имеет вид:

$$\frac{d\varepsilon_{part}}{dt} = -Q - \oint_{\sigma} (\mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}) - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) dv,$$

где Q представляет собой диссипацию энергии в проводнике из-за наличия сопротивления, называется джоулевым теплом и имеет вид:

$$Q = \int_V (\mathbf{j}_c \cdot \mathbf{E}) dv = \int_V \sigma E^2 dv.$$

Для непроводящей среды $Q = 0$.

Энергия равномерно заряженной сферы

Пусть имеется равномерно заряженная сфера радиуса R . Полный заряд сферы Q . Найти энергию поля создаваемого сферой.

► На основании (3.26) для точек лежащих вне сферы напряженность поля равна

$$\mathbf{E}_2 = \frac{Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad r \geq R,$$

а для точек внутри сферы $r < R$ поле равно нулю $\mathbf{E}_1 = 0$. В результате энергия поля в этом случае определяется выражением:

$$\varepsilon = \int_{r < R} \frac{E_1^2}{8\pi} dv + \int_{r \geq R} \frac{E_2^2}{8\pi} dv = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{R}. \quad \blacktriangleleft \quad (3.186)$$

Как следует из представленного выражения при $R \rightarrow 0$ $\varepsilon \rightarrow \infty$. Предел $R \rightarrow 0$ можно рассматривать как переход к точечному заряду. Таким образом, в построенной теории возникает необъяснимая с точки зрения классической электродинамики трудность — бесконечная энергия точечного заряда, которая будет обсуждаться в последующем изложении.

§17 Импульс электромагнитного поля

Введение понятия импульса электромагнитного поля также основано на уравнениях классической механики, в соответствии с которыми изменение импульса системы частиц \mathbf{p}_{part} , определяется суммарной силой \mathbf{F} , действующей на систему

$$\frac{d\mathbf{p}_{part}}{dt} = \mathbf{F}.$$

В случае замкнутой системы заряженных частиц, силой действующей на частицы является сила Лоренца, поэтому для произвольной системы N штук частиц имеем:

$$\frac{d\mathbf{p}_{part}}{dt} = \mathbf{F} = \sum_{k=1}^N \left\{ q_k \mathbf{E}_k + \frac{q_k}{c} [\mathbf{v}_k \times \mathbf{B}_k] \right\}. \quad (3.187)$$

Для непрерывно распределенного заряда внутри объема V последнее равенство имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{p}_{part}}{dt} = \mathbf{F} = \int_V \left\{ \rho(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') + \frac{1}{c} [\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')] \right\} dv'. \quad (3.188)$$

В соотношении (3.188) выразим плотность заряда и плотность тока из системы уравнений Максвелла. Полученное выражение можно симметризовать с использованием закона электромагнитной индукции и закона отсутствия магнитных зарядов. В результате тождественных преобразований структура выражения (3.188) в проекциях на декартовы оси координат $i = x, y, z$ может быть представлена в виде (детали преобразований можно найти в [9]):

$$\left(\frac{d\mathbf{p}_{part}}{dt} \right)_i = \int_V \operatorname{div} \mathbf{f} dv - \left(\frac{1}{4\pi c} \frac{d}{dt} \int_V [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] dv \right)_i,$$

где \mathbf{f} - вектор, квадратичный по полю, структура которого вытекает из тождественных преобразований на основании системы уравнений Максвелла [9].

Интеграл от $\operatorname{div} \mathbf{f}$ на основании теоремы Остроградского-Гаусса можно преобразовать к интегралу по поверхности, ограничивающей произвольный объем интегрирования. Для ограниченной системы зарядов и токов на бесконечно удаленной поверхности интегрирования величина вектора \mathbf{f} стремится к нулю, так как поле стремиться к нулю, и вклад данного слагаемого

отсутствует. Таким образом, указанные преобразования приводят к следующему выражению:

$$\frac{d\mathbf{p}_{part}}{dt} = -\frac{1}{4\pi c} \frac{d}{dt} \int_V [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] dv,$$

Данное выражение может быть интерпретировано как закон сохранения импульса в системе состоящей из совокупности заряженных частиц и электромагнитного поля:

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{p}_{part} + \int_V \mathbf{q} dv \right) = 0; \quad \mathbf{q} \equiv \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{4\pi c}.$$

$$\mathbf{p}_{field} \equiv \int_V \mathbf{q} dv; \quad \mathbf{p}_{part} + \mathbf{p}_{field} = \text{const.}$$

Таким образом, величина \mathbf{q} определяет импульс единицы объема электромагнитного поля, а интеграл по объему поля от \mathbf{q} - импульс поля. Как видно импульс единицы объема поля связан с вектором Умова-Пойнтинга. В частности, в системе единиц Гаусса:

$$\mathbf{q} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}$$

При наличии среды, введение понятия импульса поля требует более детальных рассуждений, которые в данном курсе не рассматриваются. Отметим, что для однородной изотропной среды, рассуждения аналогичные представленным выше приводят к следующему результату для импульса единицы объема поля:

$$\mathbf{q} = \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]}{4\pi c}.$$

Также как и в механике для электромагнитного поля может быть введено понятие момента импульса. Так, для единицы объема поля момент импульса равен $\mathbf{l} = [\mathbf{r} \times \mathbf{q}]$.

Глава 4

Постоянное электрическое поле.

Лекции

§1 Основные уравнения электростатики.

Электростатическое поле является частным случаем электромагнитного поля и возникает в системе неподвижных зарядов. Описание электростатического поля возможно на основе различного математического аппарата. В настоящем курсе рассматриваются методы дифференциальных и интегральных уравнений, метод скалярного потенциала и метод векторов Герца.

Дифференциальные уравнения.

Система дифференциальных уравнений для описания электростатического поля является частным случаем системы уравнений Максвелла и имеет вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad (4.1)$$

Здесь \mathbf{D} - вектор индукции, \mathbf{E} - вектор напряженности электрического поля, \mathbf{P} - вектор поляризации среды, ρ - объемная плотность заряда. Векторы, определяющие свойства электростатического поля, являются функциями от координат и не зависят от времени.

В случае однородной изотропной среды для слабого поля, то есть поля много меньше внутриатомного, вектор поляризации связан с вектором напряженности линейным соотношением $\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E}$, где κ - коэффициент диэлектрической восприимчивости среды. В этом случае вектор индукции электрического поля пропорционален вектору напряженности $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, а коэффициент ϵ - называется диэлектрической проницаемостью среды: $\epsilon = 1 + 4\pi\kappa$.

Для сред со сложными пространственными свойствами (например, анизотропные среды) соотношения, устанавливающие связь векторов индукции и напряженности поля определяются покомпонентно:

$$P_i = \sum_{k=1}^3 \kappa_{ik} E_k; \quad D_i = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ik} E_k; \quad \epsilon_{ik} = 1 + 4\pi \kappa_{ik}; \quad i \in 1, 2, 3,$$

где κ_{ik} и ϵ_{ik} образуют тензоры диэлектрической восприимчивости и диэлектрической проницаемости, соответственно.

Уравнения (4.1) образуют систему уравнений в частных производных и могут быть использованы для нахождения поля заданной системы зарядов или распределения зарядов в пространстве при известном поле.

Интегральные уравнения.

Описание электростатического поля с использованием интегральных уравнений основано на следующей системе:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi Q = \int_V \rho dv; \quad \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (4.2)$$

Здесь Q — полный заряд системы внутри пространства объем которого V ограничен поверхностью S , а L — произвольный замкнутый контур. Первое из уравнений (4.2) носит название теоремы Гаусса в электростатике и определяет поток вектора индукции электрического поля через замкнутую поверхность S .

Применение интегральных уравнений целесообразно, в первую очередь, при наличии условий симметрии, сводящих интегральные выражения к простым алгебраическим равенствам. Кроме того, интегральные уравнения позволяют установить законы поведения векторов поля на границе раздела сред.

Метод скалярного потенциала.

Данный метод определения свойств электростатического поля основан на применении вспомогательной функции — скалярного потенциала φ , связанного с величиной напряженности поля соотношением: $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$. Как следует из системы уравнений Максвелла, уравнение для определения скалярного потенциала в случае однородной изотропной среды имеет вид:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho. \quad (4.3)$$

Решение данного неоднородного уравнения в случае, если в пространстве не заданы специальные граничные условия, определяется интегралом Пуассона:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (4.4)$$

В тех случаях, когда в пространстве заданы определенные граничные условия поведения поля или потенциала на выделенных поверхностях, решение уравнения (4.3) представляется в виде суммы частного решения неоднородного уравнения (4.3) и общего решения однородного уравнения $\nabla^2 \varphi = 0$. В этом случае путем выбора произвольных констант в суперпозиции решений однородного уравнения необходимо обеспечить выполнение граничных условий.

Если диэлектрическая проницаемость является непрерывной функцией координат $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$, уравнение для определения скалярного потенциала в такой среде на основании (4.1) имеет следующий вид:

$$\nabla^2 \varphi + \left(\text{grad}(\ln \epsilon) \cdot \text{grad} \varphi \right) = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho.$$

В данном соотношении учтено, что $\epsilon^{-1}(\mathbf{r}) \text{grad} \epsilon(\mathbf{r}) = \text{grad} \ln \epsilon(\mathbf{r})$

Векторы Герца.

Важным методом описания электростатического поля является метод, основанный на применении векторов Герца. Для электростатического поля отличным от нуля является вектор Герца электрического типа $\tilde{\mathbf{P}}_e$, который удовлетворяет неоднородному уравнению Пуассона:

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{P}}_e = -4\pi \mathbf{P}, \quad (4.5)$$

где \mathbf{P} - дипольный момент единицы объема. Решение уравнения (4.5), при отсутствии граничных условий, представляется в виде интеграла Пуассона:

$$\tilde{\mathbf{P}}_e(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (4.6)$$

Простейшим примером применения вектора Герца электрического типа является задача о поле, создаваемом точечным дипольным моментом \mathbf{d} , расположенным в начале координат(3.171).

§2 Граничные условия

Дифференциальные уравнения Максвелла записаны для областей пространства в которых физические параметры, характеризующие свойства среды являются непрерывными функциями координат. Во многих практически важных случаях встречаются ситуации, когда эти свойства меняются скачкообразно. Например на поверхности раздела двух сред. Поведение векторов поля на границе раздела двух сред определяются так называемыми *граничными условиями*.

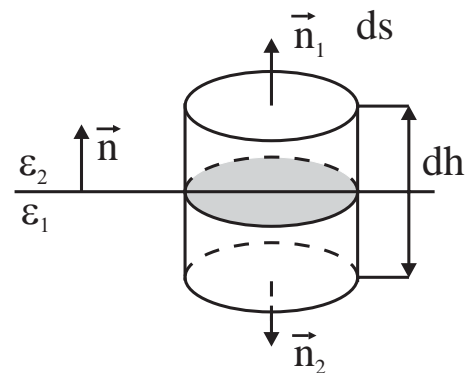


Рис. 4.1:

Нормальные составляющие поля.

Для определения поведения векторов поля на границе заменим точную границу раздела тонким переходным слоем, внутри которого параметр ϵ меняется быстро, но непрерывно от значения с одной стороны слоя до значения на другой стороне слоя. Внутри выделенного слоя рассмотрим бесконечно малый цилиндр (см. рис. 4.1), боковая поверхность которого совпадает с направлением нормали к границе раздела. Пусть основания цилиндра равны ds , а высота цилиндра dh . Поскольку внутри цилиндра вектор \mathbf{D} и его производные непрерывны, то на основании теоремы Гаусса в электростатике (4.2) поток вектора индукции через выбранную цилиндрическую поверхность равен полному заряду внутри цилиндра и складывается из потоков через основания и через боковую поверхность. Рассмотрим предел потока вектора индукции через цилиндрическую поверхность при условии, когда высота цилиндра стремится к нулю. В этом случае поток через боковую поверхность стремится к нулю, а в силу малости поверхностей оснований оставшиеся интегралы по верхнему и нижнему основанию цилиндра можно вычислить по теореме о среднем:

$$\lim_{dh \rightarrow 0} \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} ds = \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 ds + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 ds.$$

Здесь \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 значения векторов поля в некоторых средних точках бесконечно малых поверхностей оснований цилиндра, а \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 единичные векторы внешней нормали на верхнем и нижнем основании цилиндра. Векторы \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 направлены в противоположные стороны. Для дальнейших рассуждений удобно характеризовать поверхность раздела направлением единичной нормали \mathbf{n} к поверхности раздела двух сред. Выберем направление данной нормали от первой среды ко второй. В этом случае имеем очевидные равенства: $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}$. В результате предельное выражение для потока вектора индукции электрического поля при условии $dh \rightarrow 0$ через рассматриваемую цилиндрическую поверхность будет иметь вид:

$$\lim_{dh \rightarrow 0} \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} ds = -\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} ds + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n} ds = (D_{2n} - D_{1n})ds. \quad (4.7)$$

Здесь D_{2n} и D_{1n} - проекции вектора индукции электрического поля на направление нормали к границе раздела двух сред.

В соответствии с теоремой Гаусса поток вектора \mathbf{D} пропорционален величине заряда внутри рассматриваемого цилиндра. Заряд цилиндра Q , в об-

щем случае, складывается из объемных зарядов ρ внутри пространства цилиндра и поверхностного заряда, плотностью σ на поверхности раздела двух сред. С учетом предельного соотношения $dh \rightarrow 0$ вклад объемных зарядов равен нулю. В результате:

$$\lim_{dh \rightarrow 0} Q = \lim_{dh \rightarrow 0} \left(\rho ds dh + \sigma ds \right) = \sigma ds.$$

Таким образом, с учетом равенства (4.7) в произвольной точке на границе раздела двух сред имеет место следующие условие поведения нормальных составляющих вектора \mathbf{D} :

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi \sigma. \quad (4.8)$$

Следовательно на незаряженной поверхности раздела двух сред нормальные к границе раздела составляющие вектора индукции являются непрерывными функциями. Если граница раздела заряжена, то нормальные составляющие вектора индукции претерпевают скачок равный $4\pi\sigma$.

Нормальные составляющие вектора напряженности всегда претерпевают скачок, который для однородных изотропных сред определяется соотношением:

$$\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = 4\pi \sigma, \quad (4.9)$$

здесь ϵ_1 и ϵ_2 - диэлектрические проницаемости первой и второй среды, соответственно.

Равенства (4.8) и (4.9) справедливы и для случая переменного электромагнитного поля, так как вид теоремы Гаусса в переменном поле не меняется.

Тангенциальные составляющие поля.

Чтобы получить соотношения, связывающие тангенциальные составляющие поля, рассмотрим бесконечно малый прямоугольный контур L две стороны которого параллельны границе раздела и равны dl , а две другие стороны ортогональны границе раздела, пересекают её и равны: dh (см. рис. 4.2)

Рассмотрим циркуляцию вектора напряженности электрического поля вдоль контура L и найдем предел этого выражения при условии $dh \rightarrow 0$. В силу бесконечной малости сторон контура, по теореме о среднем находим:

$$\lim_{dh \rightarrow 0} \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}_2,$$

где $d\mathbf{l}_1$ и $d\mathbf{l}_2$ векторные элементы линии контура в первой и второй областях, соответственно, равные по величине dl и направленные по касательной к контуру в направлении обхода контура.

Зададим единичный вектор касательный к границе раздела двух сред, лежащий в плоскости контура. В этом случае вектор касательный к элементам контура dl в одной области совпадает с направлением касательной к границе раздела, а в другой ему противоположен. Так как в соответствии с (4.2) циркуляция вектора напряженности электрического поля вдоль замкнутого контура равна нулю тангенциальные составляющие вектора \mathbf{E} на границе раздела двух сред скачка не претерпевают:

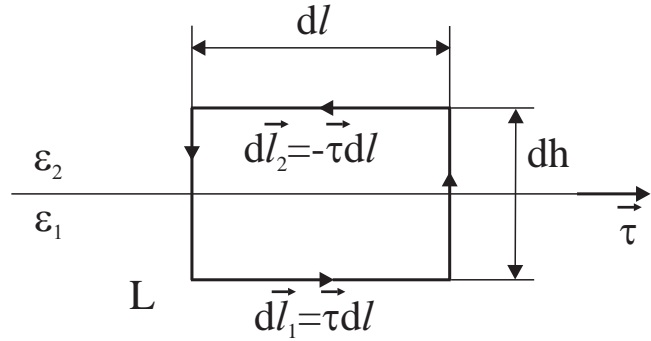


Рис. 4.2:

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0. \quad (4.10)$$

Соответственно тангенциальные составляющие вектора индукции электрического поля всегда претерпевают скачок и в случае однородных изотропных сред имеет место равенство, которое вытекает из (4.10):

$$\frac{1}{\epsilon_2} D_{2\tau} - \frac{1}{\epsilon_1} D_{1\tau} = 0. \quad (4.11)$$

Соотношения (4.10) и (4.11) остаются справедливыми и для переменного электромагнитного поля. В этом случае циркуляция вектора напряженности будет равна потоку вектора производной по времени от вектора индукции магнитного поля через площадку для которой контур L является границей. А так как рассматривается предельный случай $dh \rightarrow 0$ и величина площадки стремится к нулю, вклад потока этого вектора равен нулю, что совпадает со случаем стационарного электрического поля.

Скалярный потенциал.

Поведение скалярного потенциала на границе раздела двух сред можно установить на основании (4.10) и связи вектора напряженности электрического поля со скалярным потенциалом $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)_2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)_1 = 0.$$

Интегрируя данное равенство, получим $\varphi_2 = \varphi_1 + const$. Произвольная константа интегрирования должна быть выбрана равной нулю, так как в противном случае на границе раздела двух сред появится бесконечная сила, что не имеет физически осмысленных причин. Таким образом, на границе раздела двух сред

$$\varphi_1 = \varphi_2; \quad -\varepsilon_{2n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2 + \varepsilon_{1n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 = 4\pi\sigma.$$

§3 Поле произвольной системы зарядов.

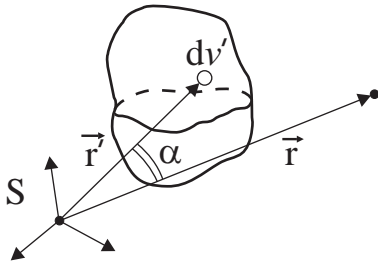


Рис. 4.3:

Поле произвольной системы зарядов с заданной объемной плотностью $\rho(\mathbf{r})$, при условии, что в пространстве нет каких либо поверхностей на которых заданы значения потенциала, в вакууме определяется интегралом Пуассона, который, по сути, отражает принцип суперпозиции:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (4.12)$$

Здесь \mathbf{r} — радиус-вектор точки, в которой вычисляется значение потенциала, а \mathbf{r}' — радиус-вектор точки интегрирования (см.рис 4.3).

Вычисление выражения (4.12) удобно проводить на основе метода, который получил название метода мультипольного разложения скалярного потенциала. Для его обоснования рассмотрим выражение $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, входящее в подынтегральную функцию (4.12). По определению:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 - 2rr' \cos \alpha + r'^2},$$

где α - угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}' . Введем две вспомогательные радиальные переменные $r_<$ и $r_>$ по следующему определению:

$$r_< \equiv \min(r, r'); \quad r_> \equiv \max(r, r').$$

В результате $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ можно представить в виде:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r_> \sqrt{1 - 2 \frac{r_<}{r_>} \cos \alpha + \left(\frac{r_<}{r_>} \right)^2}. \quad (4.13)$$

Дальнейшие преобразования выражения $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$, входящего в (4.12) основаны на применении полиномов Лежандра.

Полиномы Лежандра.

В теории ортогональных полиномов известны функции, разложение которых в ряд Тейлора, приводят к определению ортогональных полиномов. Такие функции называются *производящими*. В частности, функция вида $f(t) = 1/\sqrt{1-2tx-t^2}$ при разложении ее в ряд Тейлора по переменной t , при условии $t < 1$ и $|x| \leq 1$ определяет систему ортогональных полиномов $P_l(x)$, которые получили название полиномы Лежандра [14]:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx-t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l, \quad P_l(x) = \frac{1}{l!} \left. \frac{d^l f}{dt^l} \right|_{t=0}. \quad (4.14)$$

На основании (4.14) при частных значениях индекса l полиномы Лежандра имеют вид:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \dots$$

Из теории полиномы Лежандра известно, что они образуют систему ортогональных полиномов [14], т.е:

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x) P_{l'}'(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}, \quad (4.15)$$

где δ_{nm} -символ Кронекера, равный 1 при $n = m$ и 0 при $n \neq m$. Это, в частности, означает, что интеграл от одного полинома Лежандра $P_l(x)$ равен:

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x) dx = 2\delta_{l0},$$

так как $P_0(x) = 1$.

Мультипольное разложение.

В соответствии с (4.14) и равенством (4.13) имеем

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l P_l(\cos \alpha).$$

В результате выражение (4.12) можно представить в виде бесконечного ряда мультиполей скалярного потенциала φ_l

$$\varphi(\mathbf{r}) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l(\mathbf{r}). \quad (4.16)$$

Явное выражение для мультиполя скалярного потенциала мультипольности l имеет вид:

$$\varphi_l(\mathbf{r}) \equiv \int \rho(\mathbf{r}') \frac{r_{\leq}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \alpha) dv', \quad (4.17)$$

α угол между радиус-векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}' . Существенным неудобством использования выражения (4.17) является отсутствие разделения переменных точки интегрирования и точки наблюдения поля в трехмерном интеграле. Разделение угловых и радиальных переменных векторов \mathbf{r} и \mathbf{r}' в выражении (4.17) удастся выполнить с использованием сферических функций.

Сферические функции.

Сферические функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ являются решением следующего уравнения в частных производных

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + l(l+1) \right] Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0,$$

где l – любое целое положительное число, m принимает следующие возможные значения при фиксированном l : $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$, θ и φ – угловые переменные радиус – вектора в сферической системе координат. Сферические функции образуют полную ортонормированную систему функций

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (4.18)$$

Явный вид сферических функций можно найти в справочниках по специальным функциям [15]. Для примера, ниже приведены явные выражения сферических функций с часто встречающимися в приложениях значениями индексов:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}; \quad Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta; \quad Y_{1\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}. \quad (4.19)$$

В теории специальных функций установлено следующее равенство, позволяющее произвести разделение угловых переменных радиус-векторов \mathbf{r} и \mathbf{r}' в полиноме Лежандра $P_l(\cos \alpha)$:

$$P_l(\cos \alpha) = \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi'). \quad (4.20)$$

Мультипольное разложение скалярного потенциала является удобным способом вычисления поля произвольной системы зарядов в силу того, что позволяет разделить переменные в трехкратном интеграле (4.12) и упростить

вычисление этого интеграла. В качестве примера использования техники мультипольного разложения рассмотрим вычисление поля равномерно заряженного шара.

Поле равномерно заряженного шара.

Вычислим скалярный потенциал, создаваемый равномерно заряженным с плотностью заряда ρ шаром радиуса R .

► Выберем сферическую систему координат, связанную с центром шара. На основании (4.17) получим для мультиполя скалярного потенциала φ_l :

$$\varphi_l(\mathbf{r}) = \rho \int_0^R \frac{r_{\leq}^l}{r_{>}^{l+1}} r'^2 dr' \int_{-1}^1 P_l(x) dx \int_0^{2\pi} d\varphi' = 4\pi\rho\delta_{l0} \int_0^R \frac{1}{r_{>}} r'^2 dr'.$$

При вычислении радиального интеграла рассмотрим два случая — когда точка наблюдения \mathbf{r} лежит вне и внутри шара.

Если точка наблюдения лежит вне шара, то $r_{>} = r$ и радиальный интеграл равен:

$$\int_0^R \frac{1}{r_{>}} r'^2 dr' = \frac{1}{r} \int_0^R r'^2 dr' = \frac{R^3}{3r}.$$

Таким образом потенциал вне шара определяется следующим выражением:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \delta_{l0} = \frac{Q}{r}, \quad r > R$$

где Q -полный заряд шара.

Если точка наблюдения \mathbf{r} лежит внутри шара, то для вычисления радиального интеграла разобьем область интегрирования на две — от 0 до r и от r до R . В результате можно однозначно определить переменную $r_{>}$ в каждой области интегрирования и выполнить аналитическое интегрирование

$$\int_0^R \frac{1}{r_{>}} r'^2 dr' = \frac{1}{r} \int_0^r r'^2 dr' + \int_r^R r' dr' = \frac{r^2}{3} + \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) = \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6}.$$

Таким образом потенциал, создаваемый шаром для точек, лежащих внутри шара равен:

$$\varphi(\mathbf{r}) = 4\pi\rho \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6} \right); \quad r < R. \quad \blacktriangleleft$$

На поверхности шара полученные выражения для потенциалов вне и внутри шара совпадают, что отражает условие непрерывности потенциала.

§4 Поле системы зарядов на больших расстояниях

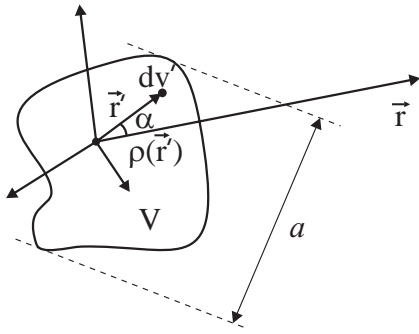


Рис. 4.4:

Рассмотрим важный для практических приложений случай поля создаваемого ограниченной в пространстве системой зарядов на больших расстояниях от заданной системы. Выберем систему координат, связанную с точкой внутри заданной системы зарядов.

В этом случае радиальная переменная точки наблюдения удовлетворяет условию $r \gg r'$ и таким образом является переменной $r_{>}$ в выражении для мультиполя скалярного потенциала. Найдем явный вид первых трех мультиполей скалярного потенциала для этого случая.

Нулевой мультиполь.

При $l = 0$ имеем:

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \int_V \rho(\mathbf{r}') P_0(\cos \alpha) dv' = \frac{1}{r} \int_V \rho(\mathbf{r}') dv' = \frac{Q}{r} \quad (4.21)$$

Таким образом нулевой мультиполь скалярного потенциала произвольной системы зарядов на больших расстояниях от системы совпадает с потенциалом точечного заряда равного полному заряду системы, расположенного в начале координат.

Первый мультиполь.

Вычисление первого мультиполя в этом случае приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\mathbf{r}) &= \int \rho(\mathbf{r}') \frac{r'}{r^2} P_1(\cos \alpha) dv' = \frac{1}{r^2} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')}{r} dv' = \\ &= \frac{\mathbf{r}}{r^3} \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dv' = \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d})}{r^3}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Здесь \mathbf{d} - дипольный момент системы зарядов. Таким образом, первый мультиполь скалярного потенциала произвольной системы зарядов на больших расстояниях от системы совпадает со скалярным потенциалом точечного диполя, равного дипольному моменту системы зарядов, расположенного в начале координат (3.171).

Второй мультиполь.

Второй мультиполь скалярного потенциала по определению равен:

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') \frac{r'^2}{r^3} P_2(\cos \alpha) dv' = \frac{1}{r^3} \int r'^2 \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{2} \left[3 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^2 r'^2} - 1 \right] dv'. \quad (4.23)$$

В двух предыдущих случаях проведенные преобразования позволили полностью разделить переменные, относящиеся к точке наблюдения поля и переменные характеризующие распределение зарядов в системе. Для достижения аналогичного результата во втором мультиполе выполним тождественные преобразования с подынтегральной функцией.

Представим скалярное произведение радиус-векторов в декартовой системе координат по определению:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = \sum_{k=1}^3 x_k x'_k; \quad (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 = \sum_{k,n=1}^3 x_k x'_k x_n x'_n.$$

Здесь x_k, x'_k - декартовы компоненты радиус векторов \mathbf{r} и \mathbf{r}' , соответственно. Квадрат радиус-вектора \mathbf{r} запишем, кроме того, в виде:

$$r^2 = \sum_{k=1}^3 x_k x_k = \sum_{k,n=1}^3 x_k x_n \delta_{kn}.$$

Подставляя полученные выражения в (4.23) можно полностью выделить координаты точки наблюдения и представить второй мультиполь в виде:

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{2r^5} \sum_{n,k=1}^3 x_n x_k Q_{nk}. \quad (4.24)$$

Здесь введено понятие квадрупольного момента системы зарядов Q , девять элементов которого Q_{nk} равны:

$$Q_{nk} = \int \rho(\mathbf{r}') \left[3x'_n x'_k - r'^2 \delta_{nk} \right] dv', \quad n, k \in 1, 2, 3. \quad (4.25)$$

Используя определение плотности заряда для системы точечных зарядов (3.5), можно получить определение квадрупольного момента системы точечных зарядов:

$$Q_{nk} = \sum_{i=1}^N q_i \left(3x_n^i x_k^i - r_i^2 \delta_{nk} \right). \quad (4.26)$$

Таким образом, второй мультиполь скалярного потенциала определяется величиной тензора квадрупольного момента заданной системы зарядов.

Свойства квадрупольного момента.

Из определения квадрупольного момента (4.25) вытекают следующие свойства Q_{kn} :

- 1) девять компонент квадрупольного момента образуют тензор;
- 2) если расположить элементы тензора квадрупольного момента в виде матрицы размерности 3×3 , то тензор квадрупольного момента симметричен относительно главной диагонали, так как $Q_{kn} = Q_{nk}$;
- 3) сумма диагональных элементов матрицы квадрупольного момента равна нулю:

$$\sum_{n=1}^3 Q_{nn} = \sum_{n=1}^3 \int \rho \left[3x_n'^2 - r'^2 \right] dv' = \int \rho \left[3r'^2 - 3r'^2 \right] dv' = 0.$$

Представленные выше результаты показывают, что мультипольное разложение скалярного потенциала для произвольной системы зарядов на больших расстояниях от системы зарядов приводит к системе геометрических характеристик распределения заряда - полный заряд, дипольный момент, квадрупольный момент и т.д. Если продолжить вычисление старших мультиполей с $l > 2$, то будут появляться все новые и новые инвариантные характеристики, определяющиеся только геометрией и плотностью распределения заряда. В практических приложениях, обычно, оказывается вполне достаточно трех первых мультиполей, которые рассмотрены в настоящем параграфе.

Потенциал на больших расстояниях.

Три первых мультиполя скалярного потенциала определяют приближенное выражение для скалярного потенциала на больших расстояниях от произвольной системы зарядов в виде:

$$\varphi \approx \frac{Q}{r} + \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d})}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \sum_{i,k=1}^3 x_i x_k Q_{ik} + \dots = \frac{Q}{r} \left[1 + c_1 \frac{a}{r} + c_2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \dots \right], \quad (4.27)$$

здесь a - характерный размер системы зарядов, c_i - константы.

Как видно ряд мультиполей состоит из слагаемых, с возрастающей степенью r в знаменателе. Так нулевой мультиполь обратно пропорционален первой степени расстояния от начала координат до точки наблюдения. Первый мультиполь обратно пропорционален второй степени r , третий мультиполь обратно пропорционален третьей степени r и так далее. Другими словами мультипольное разложение скалярного потенциала есть ряд по степеням малости переменной a/r . Таким образом при нахождении поля на больших расстояниях от системы достаточно установить первые ненулевые слагаемые для достижения необходимой точности вычислений.

Поле на больших расстояниях.

Используя (4.27) можно вычислить напряженность поля системы зарядов на больших расстояниях по определению $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$:

$$\mathbf{E} \approx \frac{Q}{r^2} \mathbf{n} + \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{d}}{r^3} + \dots, \quad (4.28)$$

где \mathbf{n} -единичный радиус - вектор. В разложении (4.28) первое слагаемое - это напряженность поля точечного заряда, расположенного в начале координат (3.17). Второе слагаемое - это напряженность поля точечного диполя, расположенного в начале координат (3.170). Третье слагаемое — напряженность поля квадрупольного момента) расположенного в начале координат получить самостоятельно.

§5 Электростатика проводников

Проводниками называются вещества, в которых под действием электрического поля возникает движение носителей зарядов или ток.

В электростатике рассматривается случай неподвижных зарядов, то есть плотность тока $\mathbf{j} = 0$. Так как плотность тока пропорциональна напряженности поля \mathbf{E} то в свободном проводнике $\mathbf{E} = 0$. Условие равенства нулю напряженности поля в проводнике, при отсутствии причин вызывающих ток, является определением идеального проводника. Равенство нулю поля в проводнике имеет место только в случае, если в проводнике не поддерживается ток.

Отсутствие объемных зарядов.

Если проводнику передан заряд, то за короткий промежуток времени заряд распределяется по поверхности проводника, так чтобы суммарное поле внутри проводника стало равным нулю.

Доказательство данного утверждения основано на законе сохранения заряда из которого вытекает уравнение для изменения объемной плотности заряда во времени:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \sigma \mathbf{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} 4\pi \rho; \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{\tau} dt, \quad (4.29)$$

где $\tau = \varepsilon/4\pi\sigma$ -параметр, который называется *временем релаксации*, ε — диэлектрическая проницаемость, σ — проводимость. Решение уравнения (4.29) приводит к следующей зависимости ρ от времени: $\rho = \rho_0 \exp(-t/\tau)$. В силу того, что для проводников τ очень малая величина в них за короткий промежуток времени объемная плотность заряда становится равной нулю. При этом в силу закона сохранения заряда заряд перераспределяется по поверхности, так что суммарное поле внутри проводника оказывается равным нулю.

Поле вблизи поверхности проводника.

Так как внутри проводника поле равно нулю $\mathbf{E} = 0$, потенциал φ постоянен для всего объема проводника $\varphi = \text{const}$. Из граничных условий на поверхности проводника:

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0; \quad \varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = 4\pi\sigma \quad (4.30)$$

следует, что если проводник находится в первой области ($\mathbf{E}_1 = 0$), то поле сразу вблизи поверхности проводника равно:

$$\mathbf{E} = 4\pi \mathbf{n} \sigma / \varepsilon. \quad (4.31)$$

Плоским \mathbf{n} единичная нормаль к поверхности проводника, направленная от проводника, σ - проводимость проводника, ε - диэлектрическая проницаемость вещества, граничащего с проводником.

Так как $E_{2n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, то полный заряд проводника, который распределяется по поверхности равен:

$$q = \oint_S \sigma ds = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \frac{1}{4\pi} \oint_S \varepsilon E_n ds. \quad (4.32)$$

Энергия системы проводников.

Вычислим энергию поля ϵ системы N -штук заряженных проводников, находящихся в объеме V . По определению:

$$\epsilon = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E}^2 dv = -\frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{E} \cdot \text{grad } \varphi) dv = -\frac{1}{8\pi} \int_V \text{div} (\varphi \mathbf{E}) dv. \quad (4.33)$$

В последнем равенстве учтено, что внутри проводников поле равно нулю и интегрирование по объему V включает в себя только пространство вне проводников. В пространстве между проводниками зарядов нет и следовательно для всех точек пространства вне проводников $\text{div } \mathbf{E} = 0$. На основании теоремы Остроградского-Гаусса преобразуем интеграл (4.33) от интеграла по объему к интегралу по поверхности, в результате:

$$\epsilon = -\frac{1}{8\pi} \oint_S \varphi (\mathbf{E} ds). \quad (4.34)$$

В данном выражении поверхность S состоит из поверхности ограничивающей объем V и поверхностей, ограничивающих проводники.

При интегрировании по всему пространству поверхность интегрирования состоит из бесконечно удаленной поверхности и поверхностей N -штук проводников. При этом интеграл по бесконечно удаленной поверхности равен нулю, так как поле на бесконечных расстояниях от системы проводников конечных размеров исчезает быстрее, чем растет поверхность интегрирования. В результате из (4.34) на основании (4.32) получим:

$$\epsilon = -\frac{1}{8\pi} \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \varphi (\mathbf{E} ds) = \frac{1}{8\pi} \sum_{i=1}^N \varphi_i \oint_{S_i} E_n ds = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_i q_i \quad (4.35)$$

Здесь учтено, что направление внешней нормали на поверхности проводника в данном случае направлено внутрь проводника и противоположно направлению нормали в формуле (4.31).

Емкостные коэффициенты.

В общем случае заряды q и потенциалы φ проводников взаимосвязаны. Это объясняется тем, что как q , так и φ удовлетворяют принципу суперпозиции, следовательно между ними существует линейная связь вида:

$$q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \varphi_j. \quad (4.36)$$

Коэффициенты C_{ij} – зависят от формы проводников а также расстояния между ними и называются при одинаковых индексах $C_{ii} = C$ *коэффициентами емкости или просто емкостями проводников*, а при различных значениях индексов C_{ij} – *коэффициентами электростатической индукции*.

Например, для уединенного проводника произвольной формы, ограниченного поверхностью S заряд равен $q = C\varphi$ и, следовательно, емкость уединенного проводника равна:

$$C = \frac{q}{\varphi} = \frac{1}{\varphi} \oint_S \sigma ds = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\epsilon}{\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds. \quad (4.37)$$

В частном случае шара или сферы радиуса R имеем $C = R$.

На основании формул (4.35), (4.36) нетрудно получить связь энергии поля системы проводников с потенциалами или зарядами проводников:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N C_{ij} \varphi_i \varphi_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (C^{-1})_{ij} q_i q_j; \quad C_{ij} = \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j}. \quad (4.38)$$

Конденсатор.

Система состоящая из двух проводников называется конденсатором. Проводники образуют обкладки конденсатора. Обкладки конденсатора заряжаются равными по величине, но противоположными по знаку зарядами. В области между обкладками возникает разность потенциалов, пропорциональная заряду на обкладках. *Емкостью конденсатора называется отношение заряда обкладки к разности потенциалов между обкладками* $C = |q|/|\varphi_1 - \varphi_2|$.

Теорема взаимности.

Для системы проводников существует теорема которая называется теоремой взаимности. Она может быть получена на основании преобразований вытекающих из формулы Грина:

$$\int_V \left(\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi \right) dv = \oint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds \quad (4.39)$$

Выберем в качестве φ и ψ два различных решения электростатической задачи, которым соответствуют два различных распределения поля. Интегрирование по объему в левой части равенства (4.39) приводит в этом слу-

чае к нулю так, как в пространстве между проводниками заряды отсутствуют, а следовательно $\Delta\psi = \Delta\varphi = 0$.

Интегрирование по поверхности в правой стороне равенства (4.40) включает как интегрирование по бесконечно-удаленной поверхности, так и по поверхностям проводников. При этом интеграл по бесконечно-удаленной поверхности равен нулю в силу того, что поле на больших расстояниях от системы конечных проводников отсутствует. Интегрирование по поверхностям проводников приводит к выражениям для полного заряда проводников в силу (4.32). Таким образом получается соотношение, которое имеет наименование теоремы взаимности в электростатике:

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i q_i^\psi = \sum_{i=1}^N \psi_i q_i^\varphi, \quad (4.40)$$

где Q_i^φ и Q_i^ψ - полные заряды на i -ом проводнике, соответствующие потенциалам φ и ψ в окружающем проводники пространстве. Теорема взаимности не зависит от формы проводника.

Пример.

Из теоремы взаимности следует, что если есть два проводника, при этом первый несет на себе заряд q , а второй не заряжен, то в случае переноса всего заряда q с первого проводника на второй (рис.4.5), на первом проводнике установится такой потенциал, который был на втором проводнике до перемещения заряда. Данное утверждение следует из (4.40) для случая двух проводников.

$$\varphi_1 q_1^{(\psi)} + \varphi_2 q_2^{(\psi)} = \psi_1 q_1^{(\varphi)} + \psi_2 q_2^{(\varphi)}.$$

В этом случае $q_1^{(\varphi)} = q$, $q_2^{(\varphi)} = 0$, $q_1^{(\psi)} = 0$, $q_2^{(\psi)} = q$ и следовательно $\varphi_2 = \psi_1$.

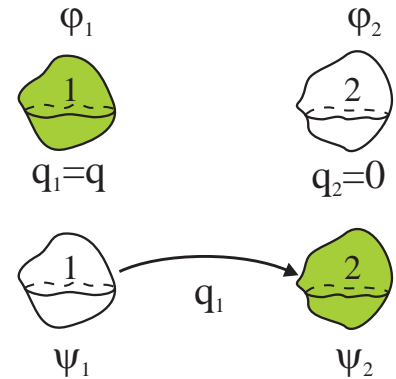


Рис. 4.5:

§6 Метод изображений

Когда заряженный проводник помещен во внешнее электрическое поле, поле внутри проводника складывается из внешнего поля и поля, создаваемого поверхностными зарядами, которые перераспределяются по поверхности проводника так, что суммарное поле остается равным нулю. Такое

свойство проводников используется в различных физических приложениях и позволяет сформулировать специальный метод решения задач электростатики при наличии проводников.

Экранировка заряда.

Заряды на поверхности проводника расположены в тонком слое, толщина которого сравнима с атомными размерами. В этом смысле, если всю область проводящего материала удалить из проводника, за исключением тонкого поверхностного слоя, то поле, создаваемое проводником, не изменится. При этом поле во внутренней области, ограниченной поверхностным слоем, будет оставаться равным нулю независимо от величины внешнего поля. По этой причине такая проводящая оболочка называется "экраном". Таким образом, поверхностная тонкая оболочка экранирует внутреннюю полость от воздействия внешних полей.

Рассмотрим теперь полость объема V с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1$ внутри бесконечного проводника. Пусть внутри этой полости находятся некоторый заряд с плотностью ρ . Наличие такого заряда приведет к тому, что на поверхности полости должно возникнуть распределение заряда, компенсирующее поле в проводнике.

Покажем, что полный заряд, индуцированный на поверхности полости равен заряду находящемуся внутри полости, но имеет противоположный знак. Для доказательства рассмотрим теорему Гаусса для объема V полости, которая ограничена поверхностью S

$$\oint_S (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) = 4\pi \int_V \rho dv.$$

На внешней поверхности проводника $\mathbf{E} = 4\pi\sigma\mathbf{n}$, где \mathbf{n} внешняя нормаль к поверхности проводника. Для рассматриваемой системы вектор \mathbf{n} в каждой точке поверхности полости направлен противоположно внешней нормали объема полости, то есть $(\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) = -4\pi\sigma ds$. В результате:

$$-\oint_S \sigma ds = \int_V \rho dv,$$

что и доказывает сделанное выше утверждение.

Таким образом, заряд помещенный в полость внутри бесконечного проводника притягивает на поверхность полости заряды противоположного знака и заставляет уйти на бесконечность такой же заряд одноименного знака.

Если теперь убрать проводник оставив тонкий поверхностный слой, окружающий выбранную полость, то поле не изменится – поле вне оболочки будет равно нулю. В результате можно заключить, что тонкий проводящий слой, соединенный проводником с бесконечно удаленной точкой полностью экранирует пространство от поля зарядов, заключенных внутри проводящего слоя. Поле вне проводящего слоя (экрана) не зависит от поля внутри экрана и наоборот поле внутри экрана не зависит от поля вне экрана.

Соединение проводника с бесконечно удаленной точкой называется заземлением. Так как потенциал в бесконечно удаленных точках от системы зарядов равен нулю, то потенциал заземленного проводника принято считать нулевым.

Метод изображений.

То обстоятельство, что проводники характеризуются постоянным потенциалом по объему проводника и то, что внутренняя часть проводника не оказывает никакого влияния на поле, создаваемое проводником приводит к специальному методу определения поля при наличии проводников, который получил наименование *метода изображений*. Суть метода изображений можно понять на основе следующих предварительных рассуждений.

Пусть имеется точечный заряд. Такой заряд создает поле, скалярный потенциал которого, в системе координат, связанной с зарядом, определяется выражением $\varphi = q/r$. Эквипотенциальные поверхности поля точечного заряда совпадают со сферами произвольного радиуса r .

Заменим данный точечный заряд проводящим шаром радиуса R , заряженным до величины q . При этом поверхность шара точно совпадает с эквипотенциальной поверхностью $\varphi = q/R$. Очевидно, что поле вне проводящего шара точно совпадает с полем исходного точечного заряда q . Внутри шара поле равно нулю. Следовательно для области вне шара радиуса R поле создаваемое шаром эквивалентно полю точечного заряда q расположенного в центре шара. Таким образом нахождение поля заряженного металлического шара сводится к задаче о нахождении поля точечного заряда. Представленные рассуждения являются тривиальными, но они указывают путь к рассмотрению поля более сложных систем.

Заряд изображения.

Пусть теперь имеются два точечных заряда противоположного знака, на-

ходящихся на расстоянии $2a$ друг от друга. Скалярный потенциал таких зарядов, расположенных на оси x в системе координат, связанной с центральной точкой между зарядами равен:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{i}a|} - \frac{q}{|\mathbf{r} + \mathbf{i}a|}.$$

Здесь \mathbf{i} — единичный вектор вдоль оси x . Очевидно, что плоскость $x = 0$ для такой системы зарядов является эквипотенциальной поверхностью на которой $\varphi = 0$. В результате, в силу однозначности решений системы уравнения Максвелла можно утверждать, что поле создаваемое зарядом q , находящимся на расстоянии a от бесконечного (то есть заземленного) проводника с плоской границей, в области вне проводника, в точности совпадает с полем рассматриваемых двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии $2a$ друг от друга.

Другими словами заряд q индуцирует на поверхности проводника распределение поверхностной плотности заряда, которое вместе с исходным зарядом создает в области вне проводника скалярный потенциал, равный скалярному потенциалу двух точечных зарядов. Замена поверхностных зарядов проводника одним эффективным зарядом, и составляет содержание метода изображения для задачи о заряде вблизи плоского проводника. А сам эффективный заряд $-q$ называется зарядом изображением.

В более сложных конфигурациях поверхностей проводников вблизи которых находится заряд и требуется найти поле системы заряд - проводник может возникнуть необходимость введения нескольких зарядов изображений, однако общая задача метода изображений состоит в том, чтобы подобрать такой (или такие) эффективные точечные заряды, которые в области вне проводника создают поле эквивалентное поверхностным зарядам проводника.

§7 Энергия электростатического поля

Общее выражение для энергии электростатического поля в объеме V однородной, изотропной среды определяется следующим выражением (3.185):

$$\epsilon = \int_V \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{8\pi} dv \quad (4.41)$$

Данное выражение можно переписать в нескольких эквивалентных формах, используя другие переменные, возникающие в теории электростатиче-

ского поля. Для этого рассмотрим вспомогательное векторное равенство:

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{D}) = \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{D} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{D} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \varphi 4\pi\rho$$

В результате (4.41) можно представить в виде:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dv - \frac{1}{8\pi} \int_V \operatorname{div}(\varphi \mathbf{D}) dv = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dv - \frac{1}{8\pi} \oint_S \varphi (\mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}) \quad (4.42)$$

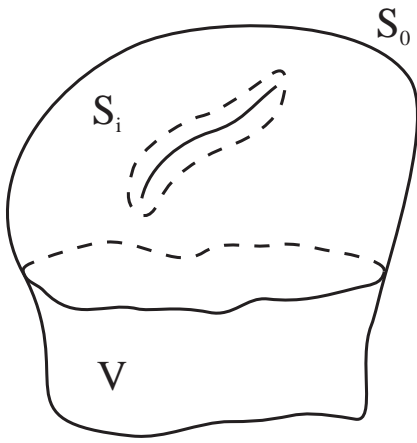


Рис. 4.6:

Поверхностный интеграл в полученном равенстве включает в себя как поверхность, ограничивающую объем V с внешней стороны S_0 , так и поверхности S_i , ограничивающие объемы в пространстве в которых могут быть заданы граничные условия. Например проводники у которых потенциал постоянен как по объему так и по поверхности (рис. 4.6). Следовательно в общем случае выражение (4.42) может быть переписано следующим

образом для случая, когда в объеме V имеются N областей с заданными граничными условиями:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dv - \frac{1}{8\pi} \oint_{S_0} \varphi (\mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}) - \frac{1}{8\pi} \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \varphi (\mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}). \quad (4.43)$$

Рассмотрим неограниченное пространство в котором выделенные области и граничные условия отсутствуют. В этом случае поверхностные интегралы в (4.43) равны нулю. Интеграл по неограниченной поверхности равен нулю в силу того, что подынтегральная функция с ростом расстояния от начала координат r убывает как $1/r^3$ а поверхность интегрирования растет только как r^2 . Поэтому в пределе $r \rightarrow \infty$ интеграл стремится к нулю. Таким образом энергия поля системы зарядов во всем пространстве в данном случае определяется выражением:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) dv. \quad (4.44)$$

Учитывая, что потенциал системы зарядов, является решением уравнения Пуассона (4.4) выражение (4.44) можно переписать в виде шестикратного интеграла:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \int_V \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv dv'. \quad (4.45)$$

Система точечных зарядов.

Рассмотрим систему N штук точечных зарядов q_i . Подставляя плотность заряда системы точечных зарядов (3.5) в (4.44) получим:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi(\mathbf{r}_i), \quad (4.46)$$

здесь $\varphi(\mathbf{r}_i)$ -потенциал в точке расположения i -го заряда, который в соответствии с принципом суперпозиции складывается из потенциалов всех зарядов системы, включая и i -ый заряд:

$$\varphi(\mathbf{r}_i) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \varphi_i(\mathbf{r}_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$

В данном выражении $\varphi_i(\mathbf{r}_i)$ -скалярный потенциал создаваемый i -ым зарядом в точке, в которой находится сам i -ый заряд. Этот потенциал называется *потенциалом самодействия*, а энергия заряда в своем поле, называется *энергией самодействия*. Потенциал самодействия равен бесконечности. Таким образом энергия системы точечных зарядов является бесконечной величиной и может быть представлена в виде:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} + \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} + \sum_{i=1}^N \infty_i.$$

Бесконечное слагаемое в данном выражении, которое соответствует сумме энергий самодействия всех точечных зарядов системы, как видно не зависит от взаимного расположения зарядов и при определении энергии системы точечных зарядов в рамках классической электродинамики опускается. Эта трудность классической электродинамики проявляется и в квантовой электродинамике и в настоящее время последовательного классического объяснения не имеет. Однако так как скалярный потенциал является вспомогательной функцией введенной в электродинамику и определенной не однозначно, произвольная постоянная, добавленная к скалярному потенциалу не влияет на величину напряженности поля. В результате, выражение для энергии системы точечных зарядов в классической электродинамике определяется равенством:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (4.47)$$

Можно отметить, что в связи с опусканием бесконечной константы в энергии взаимодействия величина энергии теперь может оказаться как положительной, так и отрицательной. Действительно, если рассмотреть энергию взаимодействия двух точечных зарядов противоположных знаков, то получим отрицательную величину $-q^2/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, что не является противоречием теории (отрицательных энергий не бывает), так как в определении опущена бесконечно большая положительная величина.

§8 Энергия системы зарядов во внешнем поле

В данном параграфе рассматривается вопрос об энергии взаимодействия ограниченной в пространстве системы зарядов с внешним электростатическим полем, которое создано источником, находящимся далеко от системы зарядов. Для рассмотрения такой задачи воспользуемся определениями, известными из классической механики.

Работа силы \mathbf{F} определяется в механике соотношением:

$$A = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

Здесь L - путь по которому перемещается тело.

В случае электростатического поля $\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -q \nabla \varphi$ и выражение для работы силы \mathbf{F} имеет вид:

$$A = \int_{(1)}^{(2)} (-q \nabla \varphi) \cdot d\mathbf{l} = -q \left[\varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1) \right], \quad (4.48)$$

здесь интеграл вычислен от начальной \mathbf{r}_1 до конечной \mathbf{r}_2 точки пути интегрирования.

Энергия W запасенная зарядом в поле равна работе по перемещению заряда из бесконечно удаленной точки в данную точку. В связи с тем, что скалярный потенциал в бесконечно удаленной точке $\varphi(\infty) = 0$, энергия системы N штук зарядов q_i во внешнем поле со скалярным потенциалом φ определяется равенством:

$$W = \sum_{i=1}^N q_i \varphi(\mathbf{r}_i'). \quad (4.49)$$

Здесь \mathbf{r}_i' - радиус-вектор i -го заряда (рис.4.7).

Необходимо обратить внимание на отличие данного выражения от формулы (4.46). Отличие этих выражений друг от друга определяется разницей

постановок задач. Если в предыдущем параграфе речь шла об энергии поля создаваемого самой системой зарядов, то в данном параграфе речь идет об энергии системы зарядов, находящихся во внешнем поле. При этом поле зарядов самой системы не рассматривается и не учитывается при определении энергии. Постановка задачи приведшая к выражению (4.49) полностью соответствует определению силы Лоренца для частицы в поле, в которой учитывается только внешнее по отношению к данному заряду поле, а поле самого заряда не учитывается.

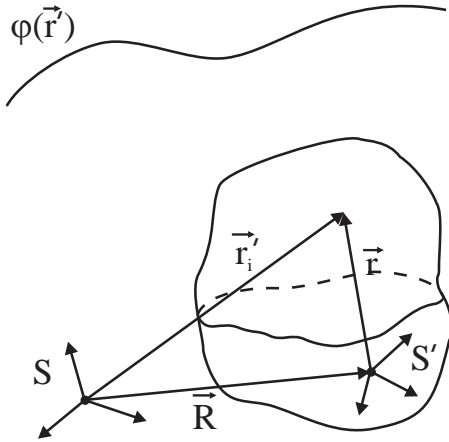


Рис. 4.7:

В случае непрерывно распределенного заряда в объеме V с плотностью ρ , выражение (4.49) для энергии такой системы во внешнем поле имеет вид:

$$W = \int_V \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) dv. \quad (4.50)$$

Система зарядов во внешнем поле

Пусть в некоторой системе координат S определена система зарядов и поле, создаваемое удаленным источником. Выберем внутри рассматриваемой, ограниченной системы зарядов некоторую точку \mathbf{R} и свяжем с этой точкой новую систему координат S' . В результате $\mathbf{r}'_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}_i$, а выражение для энергии взаимодействия системы зарядов с внешним полем примет вид (см. рис. 4.7):

$$W = \sum_{i=1}^N q_i \varphi(\mathbf{R} + \mathbf{r}_i) \quad (4.51)$$

Полагая, что потенциал, создаваемый внешним источником является гладкой функцией, разложим его в ряд Тейлора вблизи точки \mathbf{R} :

$$\varphi(\mathbf{R} + \mathbf{r}_i) \approx \varphi(\mathbf{R}) + \sum_{k=1}^3 x_k^{(i)} \frac{\partial \varphi(\mathbf{R})}{\partial X_k} + \sum_{k,n=1}^3 \frac{1}{2} x_k^{(i)} x_n^{(i)} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{R})}{\partial X_k \partial X_n} + \dots \quad (4.52)$$

Здесь X_k ($k = 1, 2, 3$) - декартовы координаты вектора \mathbf{R} в системе координат S , а $x_k^{(i)}$ - декартовы координаты вектора \mathbf{r}_i в системе координат S' .

Так как источник внешнего поля расположен вдали от системы зарядов и в области расположения зарядов источников внешнего поля нет, то скалярный потенциал внешнего поля удовлетворяет уравнению: $\Delta \varphi = 0$. В результате последний член равенства (4.52) можно переписать тождественно

следующим образом:

$$\sum_{k,n=1}^3 \frac{1}{2} x_k^{(i)} x_n^{(i)} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{R})}{\partial X_k \partial X_n} \rightarrow \sum_{k,n=1}^3 \frac{1}{2} \left[x_k^{(i)} x_n^{(i)} - \frac{1}{3} r^{(i)2} \delta_{k,n} \right] \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{R})}{\partial X_k \partial X_n}. \quad (4.53)$$

С учетом определений полного заряда Q (3.3), дипольного \mathbf{d} (3.88) и квадрупольного Q_{kn} (4.25) моментов системы зарядов, из (4.52) находим для энергии взаимодействия системы зарядов с внешним полем ряд, первые три члена которого имеют вид:

$$W = Q\varphi(\mathbf{R}) - \left(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}) \right) + \frac{1}{6} \sum_{k,n=1}^3 Q_{kn} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{R})}{\partial X_k \partial X_n} + \dots \quad (4.54)$$

Первое слагаемое в данном выражении определяет энергию точечно-го заряда во внешнем поле. Второе слагаемое определяет выражение для энергии диполя во внешнем поле

$$W_d = -(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E})$$

Третье слагаемое в (4.54) имеет смысл энергии квадрупольного поля во внешнем поле, соответственно. Учет слагаемых более высокого порядка в (4.54) позволяет определить энергию взаимодействия произвольного мультиполя с внешним полем.

Диэлектрик во внешнем поле

Рассмотрим вопрос об энергии диэлектрика, находящегося во внешнем поле. Если выделить внутри диэлектрика бесконечно малый объем dv , то данный объем обладает дипольным моментом равным $\mathbf{P}dv$, где \mathbf{P} вектор поляризации среды или дипольный момент единицы объема. Энергия такого дипольного момента в поле с напряженностью \mathbf{E} , на основании (4.54) равна $dW = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{E} dv$. Однако энергия диэлектрика в поле не может быть вычислена путем интегрирования этой величины по объему диэлектрика, так как каждый элемент dv диэлектрика является источником электрического поля и в расчет суммарной энергии войдет дважды. Один раз как дипольный момент во внешнем поле, а второй раз как источник поля, в котором находятся другие бесконечно малые диполи. Поэтому вычисление энергии диэлектрического тела в поле, должно основываться на иных принципах.

Рассмотрим бесконечный однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ , в котором имеется конечная система зарядов, создающая поле. Пусть в вакууме данная система зарядов создает поле \mathbf{E}_0 . Полная

энергия поля такой системы зарядов в вакууме равна:

$$W_0 = \int \frac{E_0^2}{8\pi} dv.$$

При наличии однородной, изотропной среды эта система зарядов создает электрическое поле напряженности \mathbf{E} и индукции $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$. Величина вектора \mathbf{E} связана с величиной напряженности поля в вакууме \mathbf{E}_0 равенством: $E = E_0/\varepsilon$. Полная энергия поля при наличии однородного изотропного диэлектрика равна:

$$W = \int \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{8\pi} dv = \int \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} dv.$$

Следовательно энергия диэлектрика помещенного во внешнее поле \mathbf{E}_0 может быть определена как разность полной энергии поля при наличии диэлектрика и энергии поля системы зарядов в вакууме:

$$W_\varepsilon = W - W_0 = \int \left(\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} - \frac{E_0^2}{8\pi} \right) dv = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \int \frac{E_0^2}{8\pi} dv = -\frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_0 dv.$$

Так как для однородной, изотропной среды $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$, имеет место равенство: $(\varepsilon - 1)\mathbf{E} = 4\pi \mathbf{P}$. В результате, энергия диэлектрика в поле равна:

$$W_\varepsilon = -\frac{1}{2} \int \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0 dv. \quad (4.55)$$

Полностью аналогичные рассуждения справедливы и для диэлектрика конечных размеров. Можно показать, что результат в этом случае будет совпадать с (4.55), где интегрирование проводится по конечному объему диэлектрика.

§9 Силы в электростатическом поле

Сила Лоренца

На точечный заряд, помещенный в электрическое поле с напряженностью \mathbf{E} действует сила равная $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. При этом определение силы предполагает, что напряженность поля \mathbf{E} создана зарядами не включающими сам заряд q .

На систему N штук точечных зарядов действует суммарная сила равная:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{E}(\mathbf{r}_i).$$

Плотность силы.

Для непрерывно распределенного заряда с плотностью ρ выражение для силы, действующей на данную систему зарядов во внешнем поле имеет вид:

$$\mathbf{F} = \int_V \rho \mathbf{E} dv = \int_V \mathbf{f} dv, \quad (4.56)$$

где \mathbf{f} - сила действующая на единицу объема или плотность силы, равная $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E}$.

Сила действующая на диполь.

Сила действующая на диполь на основании (4.54) равна:

$$\mathbf{F} = -\text{grad} \left(-\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \right) = (\mathbf{d} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{E}. \quad (4.57)$$

Энергия диполя во внешнем поле зависит как от координат, так и от ориентации диполя по отношению к направлению поля. В связи с этим, на диполь действует не только сила, приводящая к перемещению диполя в пространстве как целого, но еще и момент силы стремящийся развернуть диполь, ориентируя его по направлению поля. Величину момента силы \mathbf{N} можно вычислить, дифференцируя энергию диполя в поле W_d по углу между направлением диполя и направлением поля, в результате:

$$N = \frac{\partial W_d}{\partial \theta} = d E \sin \theta; \quad \mathbf{N} = [\mathbf{d} \times \mathbf{E}].$$

Сила действующая на единицу объема диэлектрика.

Для вычисления силы, действующей на диэлектрик, вектор поляризации которого равен \mathbf{P} , рассмотрим бесконечно малый объем dv . Дипольный момент такого объема равен $\mathbf{P} dv$. В соответствии с (4.57) бесконечно малая сила, действующая на такой точечный диполь равна $d\mathbf{F} = (\mathbf{P} dv \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{E}$. В результате сила, действующая на единицу объема диэлектрика \mathbf{f} имеет вид:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dv} = (\mathbf{P} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{E} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} (\mathbf{E} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{E} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \text{grad } E^2. \quad (4.58)$$

Из полученного выражения видно, что направление силы, действующей на диэлектрик не зависит от направления поля. Сила, действующая на элементарный объем диэлектрика, направлена в сторону максимального возрастания напряженности электростатического поля. В однородном поле сила действующая на диэлектрик равна нулю.

Формула (4.58) оказывается несправедливой, если вектор поляризации диэлектрика зависит нелинейным образом от плотности диэлектрика ρ_m . В этом случае говорят о силе с учетом сжимаемости диэлектрика. Плотность силы в этом случае определяется выражением [16]:

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{8\pi} E^2 \text{grad } \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left(E^2 \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \right).$$

Сила действующая на проводник

При рассмотрении сил действующих на вещество специального рассмотрения требуют проводники в связи с тем, что поле внутри проводников равно нулю, а весь заряд распределен по поверхности проводника. Заряды на поверхности конечного проводника отталкиваются друг от друга пытаются разорвать проводник, то есть на поверхности возникает сила, связанная с кулоновским отталкиванием зарядов одноименного знака. Вычислим эту силу, основываясь на определении сил в электростатике.

У внешней поверхности проводника напряженность поля связана с поверхностной плотностью зарядов σ и на границе раздела проводник - вакуум равна: $\mathbf{E} = 4\pi\sigma\mathbf{n}$, где \mathbf{n} - единичный вектор внешней к проводнику нормали. Выделим на поверхности замкнутого проводника бесконечно малый элемент поверхности ds . Для определения силы, действующей на данный элемент поверхности со стороны зарядов проводника необходимо определить напряженность поля в точке расположения ds , создаваемую всеми зарядами поверхности проводника, за исключением зарядов на самой бесконечно малой поверхности ds . Обозначим эту напряженность поля \mathbf{E}' (рис. 4.8).

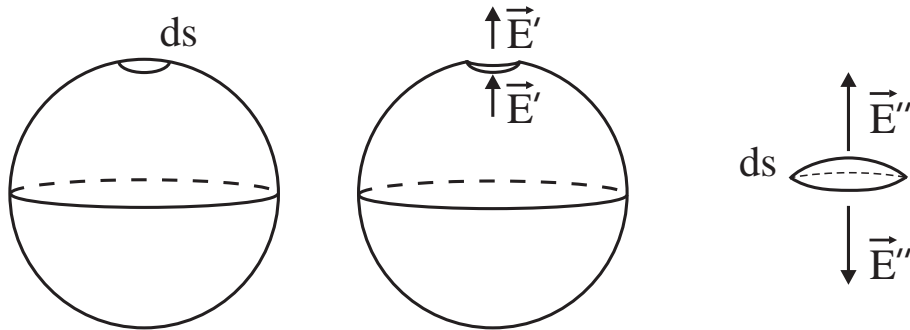


Рис. 4.8:

Напряженность поля, создаваемую зарядами самого элемента поверхности ds , обозначим через \mathbf{E}'' . Удалим мысленно площадку ds с поверхности

проводника и воспользуемся принципом суперпозиции поля. В этом случае напряженность поля \mathbf{E}' одинакова по обе стороны удаленной площадки ds . В то время как напряженность поля \mathbf{E}'' по разные стороны площадки имеет одинаковое значение, но противоположное направление. При совмещении удаленного элемента ds и проводника вне проводника поля \mathbf{E}' и \mathbf{E}'' складываются и дают результирующее поле $4\pi\sigma$, то есть $\mathbf{E}' + \mathbf{E}'' = 4\pi\sigma\mathbf{n}$. В то время как внутри проводника эти поля складываются и дают результирующее поле равное нулю $\mathbf{E}' + \mathbf{E}'' = 0$. Таким образом $|\mathbf{E}'| = |\mathbf{E}''|$. Отсюда вытекает, что $\mathbf{E}' = 2\pi\sigma\mathbf{n}$. Следовательно на элемент поверхности проводника ds действует сила равная

$$\mathbf{F} = dq \mathbf{E}' = \sigma ds 2\pi\sigma\mathbf{n}. \quad (4.59)$$

Давление на поверхности проводника.

В соответствии с выражением (4.59) на единице поверхности проводника возникает давление, равное:

$$\mathbf{p}_n = \frac{d\mathbf{F}}{ds} = 2\pi\sigma^2\mathbf{n} = \frac{E^2}{8\pi}\mathbf{n}. \quad (4.60)$$

Индекс n в обозначении величины давления на поверхности \mathbf{p}_n устанавливает, что давление относится к единичной площадке, нормаль которой совпадает с вектором \mathbf{n} .

При наличии границы проводник - диэлектрик выражение (4.60) имеет тривиальное обобщение и давление в этом случае равно:

$$\mathbf{p}_n = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{8\pi}\mathbf{n}.$$

Как видно в обоих случаях численно давление равно величине плотности энергии электростатического поля вблизи поверхности проводника.

§ 10 Связь объемных и поверхностных сил.

Если на поверхности тела возникает давление \mathbf{p}_n , связанное с проявлением внешних или внутренних сил, то величина бесконечно малой силы, действующей на бесконечно малый элемент поверхности ds равна по определению: $d\mathbf{F} = \mathbf{p}_n ds$. Здесь \mathbf{p}_n - вектор давления на площадке, нормаль к которой \mathbf{n} . В общем случае вектор нормали \mathbf{n} не совпадает с направлением вектора \mathbf{p}_n .

Вычислив интеграл от \mathbf{p}_n по поверхности тела можно получить суммарную силу, действующую на данное тело. С другой стороны эту же силу можно получить, просуммировав все объемные силы \mathbf{f} , которые действуют на единицу объема тела. В результате для тела, имеющего объем V , ограниченный поверхностью S имеем:

$$\int_V \mathbf{f} dv = \oint_S \mathbf{p}_n ds. \quad (4.61)$$

Таким образом, объемные и поверхностные силы связаны между собой. Для установления связи этих сил рассмотрим бесконечно малый объем, ограниченный с трех сторон плоскостями декартовой системы координат и с четвертой, плоскостью пересекающей декартовы оси в точках A, B, C (рис. 4.9).

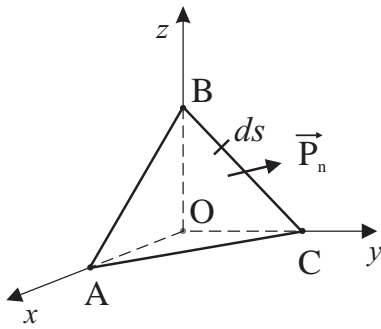


Рис. 4.9:

Сила на бесконечно малой поверхности $ABC = ds$, в этом случае равна: $\mathbf{p}_n ds$, где \mathbf{p}_n - вектор давления на данной площадке. Соответственно силы на площадках $OCB = ds_x$, $OAC = ds_y$ и $OAB = ds_z$ равны $\mathbf{p}_x ds_x$, $\mathbf{p}_y ds_y$, $\mathbf{p}_z ds_z$. Если выделенный элемент находится в состоянии покоя, то из условия равновесия имеем:

$$\mathbf{p}_n ds = \mathbf{p}_x ds_x + \mathbf{p}_y ds_y + \mathbf{p}_z ds_z \quad (4.62)$$

По определению для элементов поверхностей рассматриваемого бесконечно малого объема выполняются геометрические соотношения:

$$ds_x = ds \cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}), \quad ds_y = ds \cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}), \quad ds_z = ds \cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}),$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ - единичные векторы декартовой системы координат. И так как $\cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}) = n_x$ - проекция вектора нормали \mathbf{n} на ось x , а $\cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) = n_y$ и $\cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) = n_z$ окончательно находим:

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_x n_x + \mathbf{p}_y n_y + \mathbf{p}_z n_z \quad (4.63)$$

Спроектировав векторное уравнение (4.63) на декартовы оси получим:

$$\begin{cases} (\mathbf{p}_n)_x = (\mathbf{p}_x)_x n_x + (\mathbf{p}_y)_x n_y + (\mathbf{p}_z)_x n_z \\ (\mathbf{p}_n)_y = (\mathbf{p}_x)_y n_x + (\mathbf{p}_y)_y n_y + (\mathbf{p}_z)_y n_z \\ (\mathbf{p}_n)_z = (\mathbf{p}_x)_z n_x + (\mathbf{p}_y)_z n_y + (\mathbf{p}_z)_z n_z \end{cases}$$

В литературе принято следующее обозначение - $(\mathbf{p}_\alpha)_\beta \equiv p_{\alpha\beta}$, с учетом которого последние равенства записывают в виде:

$$\begin{cases} p_{nx} = p_{xx}n_x + p_{yx}n_y + p_{zx}n_z \\ p_{ny} = p_{xy}n_x + p_{yy}n_y + p_{zy}n_z \\ p_{nz} = p_{xz}n_x + p_{yz}n_y + p_{zz}n_z \end{cases} \quad (4.64)$$

В используемом обозначении $p_{\alpha\beta}$ первый индекс указывает направление ортогональное площадке на которой рассматривается давление, а второй индекс фиксирует ось на которую спроектирован вектор давления на данной площадке.

Рассмотрим для примера проекцию на ось x суммарной силы, действующей на конечный объем V , ограниченный поверхностью S :

$$F_x = \oint_S p_{nx} ds = \oint_S (p_{xx}n_x + p_{yx}n_y + p_{zx}n_z) ds = \oint_S \sum_{i=1}^3 p_{ix}n_i ds.$$

В соответствии с теоремой Остроградского - Гаусса последнее равенство можно переписать в виде:

$$F_x = \int_V \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right) dv = \int_V \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p_{ix}}{\partial x_i} dv.$$

При использовании понятия силы действующей на единицу объема \mathbf{f} , для проекции силы на ось x имеем: $F_x = \int f_x dv$. Поэтому имеет место равенство:

$$f_x = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p_{ix}}{\partial x_i}$$

Или в общем случае

$$f_k = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_i}; \quad k \in 1, 2, 3. \quad (4.65)$$

Тензор натяжений.

Инвариантные, независящие от геометрии выделенного объема, девять коэффициентов p_{ik} , $i, k \in 1, 2, 3$ в формуле (4.64) образуют объект, который в механике сплошных сред принято называть тензором натяжений. В случае, если силы имеют электромагнитное происхождение такой тензор называется тензором натяжений Максвелла. Обычно тензор натяжений Максвелла обозначается буквой M , $M_{ik} \equiv p_{ik}$. При этом формула для вычисления проекции силы на декартову ось k , через тензор натяжений Максвелла,

записывается в виде:

$$F_k = \oint_S \sum_{i=1}^3 M_{ik} n_i ds; \quad k \in 1, 2, 3. \quad (4.66)$$

Тензор натяжений Максвелла.

Найдем явный вид тензора натяжений Максвелла в случае электростатического поля в вакууме. Сила, действующая на единицу объема в этом случае равна: $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E}$, где ρ -объемная плотность заряда, а \mathbf{E} -вектор напряженности электростатического поля. С учетом закона Кулона это выражение можно представить в виде, содержащем только переменные поля: $\mathbf{f} = \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} / 4\pi$. Отсюда для проекции силы на ось x , действующей на единицу объема:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{4\pi} E_x (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{4\pi} \left[\operatorname{div} (E_x \mathbf{E}) - (\mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} E_x) \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} E_x^2 + \frac{\partial}{\partial x} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial x} (E_x E_z) - E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} - E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} - E_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

В силу уравнения электростатического поля $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, частные производные от компонент полей удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_k} = \frac{\partial E_k}{\partial x_i}, \quad i, k \in 1, 2, 3.$$

Следовательно, последнее равенство можно переписать тождественно:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) - E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} - E_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) \right] = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_{zx}}{\partial z} \end{aligned}$$

Отсюда для элементов тензора натяжений Максвелла в электростатическом поле получим:

$$M_{xx} = \frac{1}{4\pi} \left(E_x^2 - \frac{E^2}{2} \right); \quad M_{yx} = \frac{1}{4\pi} E_y E_x; \quad M_{zx} = \frac{1}{4\pi} E_z E_x.$$

Повторяя аналогичные вычисления для проекций силы на ось y и z , получим явный вид тензора натяжений Максвелла в случае электростатического поля в вакууме:

$$M_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[E_i E_k - \frac{1}{2} E^2 \delta_{i,k} \right]; \quad i, k \in 1, 2, 3. \quad (4.67)$$

Для однородной изотропной среды тензор натяжений имеет вид:

$$M_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[E_i D_k - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \delta_{ik} \right]; \quad i, k \in 1, 2, 3. \quad (4.68)$$

§11 Молекулярная теория диэлектриков

Идеальными диэлектриками являются вещества в которых под действием электрического поля не возникает переноса зарядов, то есть не возникает электрического тока. Диэлектрики, как и иные вещества, состоят из атомов и молекул. Так как в состав атомов входят заряженные частицы, то внешнее поле влияя на них вызывает появление дипольного момента вещества или поляризации вещества. В зависимости от того имеется ли у диэлектрика собственный дипольный момент или нет, диэлектрики делятся на две большие группы — неполярные и полярные диэлектрики.

Неполярные диэлектрики.

Диэлектрики атомы или молекулы которых имеют равный нулю дипольный момент при отсутствии внешнего электрического поля называются неполярными. Среди этих диэлектриков можно указать, например, такие газы как SO_2 , H_2S , NH_3 .

Под действием внешнего поля в неполярных молекулах наводится дипольный момент в направлении поля, т.е. молекулы поляризуются.

Полярные диэлектрики.

Диэлектрики, атомы или молекулы которых имеют отличный от нуля дипольный момент, т.е. $\mathbf{p} \neq 0$ называются полярными. Например, такие газы как N_2 , H_2 , CO_2 , CH_4 являются полярными диэлектриками.

Под действием внешнего электрического поля дипольные моменты атомов или молекул полярных диэлектриков стремятся ориентироваться по направлению внешнего поля и частично поляризуются.

§12 Поляризация неполярных диэлектриков.

В неполярных диэлектриках под действием внешнего электрического поля происходит смещение центров тяжести положительных и отрицательных зарядов, входящих в состав молекулы, так как силы действующие на заряды

ядер и заряды электронных оболочек противоположно направлены. Это явление приводит к тому, что в молекулах диэлектрика индуцируется дипольный момент, а следовательно возникает отличный от нуля вектор поляризации вещества. Индуцированный дипольный момент молекулы пропорционален напряженности поля $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}'$. Коэффициент пропорциональности α определяется физическими свойствами молекулы и *называется поляризуемостью*.

Так как дипольные моменты всех индуцировано поляризованных молекул направлены в одном направлении – направлении внешнего поля, то суммарный дипольный момент единицы объема равен векторной сумме всех дипольных моментов атомов в единице объема. Если обозначить число атомов в единице объема через N , то вектор поляризации диэлектрика в этом случае равен $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$.

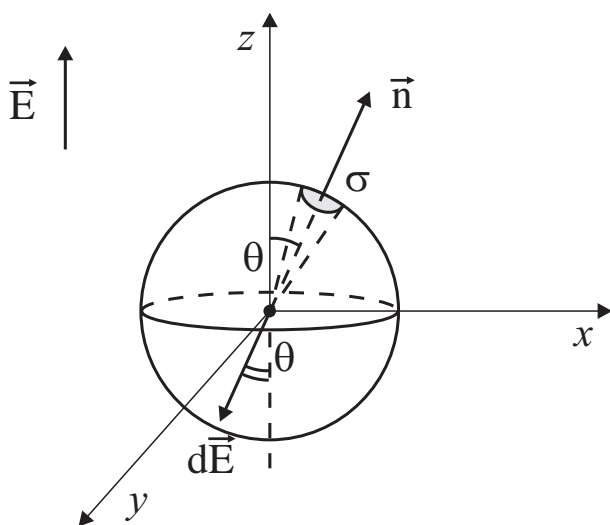


Рис. 4.10:

При вычислении вектора поляризации неполярных диэлектриков необходимо учесть, что поле, приводящее к смещению зарядов молекулы в противоположные стороны создается внешним полем напряженности \mathbf{E} и зарядами всех молекул, кроме зарядов входящих в состав рассматриваемой молекулы. Это условие возникает в связи с определением силы Лоренца.

Для определения величины этого поля, действующего на одну молекулу выделим вокруг произвольной молекулы сферу радиуса r . Обозначим область внутри сферы через 1, а область вне сферы через 2. В соответствии с принципом суперпозиции, поле действующее на выделенную молекулу представим в виде суммы трех слагаемых $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1$. Где \mathbf{E} – напряженность внешнего поля, вызывающего процесс поляризации. \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 – напряженности полей, создаваемые зарядами молекул из первой и второй областей соответственно, в точке расположения выделенной молекулы.

Для вычисления \mathbf{E}_2 воспользуемся принципом суперпозиции и связью вектора поляризации с объемной плотностью входящих в состав молекул зарядов $\rho_{in} = -\text{div } \mathbf{P}$. Удалим мысленно вещество из области внутри сфе-

ры радиуса r . В соответствии с определением объемной плотности связанных зарядов на границе раздела имеет место поверхностное уравнение вида: $\text{Div } \mathbf{P} = -\sigma$. Здесь σ - поверхностная плотность заряда на сфере радиуса r . Данное поверхностное уравнение означает выполнение следующих равенств (рис. 4.10):

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma \quad \rightarrow \quad P_{2n} = -\sigma, \quad \sigma = -P \cos \theta,$$

так как в 1-ой области вещество отсутствует и, следовательно, $P_{1n} = 0$.

Рассмотрим бесконечно малый элемент поверхности ds на сфере радиуса r . Данный элемент поверхности несет бесконечно малый заряд величины $dq = \sigma ds = \sigma r^2 d\Omega$ и создает в центре сферы (в точке расположения молекулы) напряженность поля, величина которого равна $dE = dq/r^2$. Если внешнее поле направить по оси z , то из условия осевой симметрии результирующее поле от зарядов на поверхности может быть направлено только по оси z

$$E_z = \int_{V_2} dE_z = \int_{V_2} \left(-\frac{dq}{r^2} \right) \cos \theta = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(-\frac{P \cos \theta r^2 d\Omega}{r^2} \right) \cos \theta = \frac{4\pi}{3} P.$$

Таким образом $\mathbf{E}_2 = 4\pi\mathbf{P}/3$.

В однородном изотропном диэлектрике в силу сферической симметрии выделенной шаровой области $\mathbf{E}_1 = 0$. В результате:

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} = N\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P} \right) \quad \rightarrow \quad \mathbf{P} = \frac{\alpha N}{1 - \frac{4\pi}{3}\alpha N} \mathbf{E}.$$

Так как $\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}$ получаем $\chi = \alpha N/(1 - 4\pi\alpha N/3)$. С другой стороны $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \varepsilon\mathbf{E}$, или $\chi = (\varepsilon - 1)/4\pi$. На основании этих рассуждений устанавливается связь между поляризуемостью отдельного атома α и диэлектрической проницаемостью среды ε в целом:

$$\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} = \frac{\alpha N}{1 - \frac{4\pi}{3}\alpha N} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{3}{4\pi N} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{3}{4\pi N} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}, \quad (4.69)$$

здесь $n = \sqrt{\varepsilon}$ - показатель преломления среды.

Уникальной особенностью соотношения (4.69) является возможность определения микроскопического молекулярного параметра α на основе измерения макроскопической характеристики вещества ε .

§ 13 Поляризация полярных диэлектриков.

Для полярных диэлектриков под действием внешнего поля происходят два процесса. С одной стороны молекулы полярных диэлектриков поляризуются под действием поля. То есть, кроме собственного дипольного момента в этих атомах появляется дополнительный, наведенный дипольный момент. Однако величина наведенного дипольного момента в слабом электрическом поле ($E \ll E_{\text{ат}}$) настолько мала в сравнении с величиной собственного дипольного момента, что им можно полностью пренебречь и не учитывать при дальнейших рассуждениях.

С другой стороны, внешнее поле стремится повернуть собственный дипольный момент молекулы по направлению поля. В результате все собственные дипольные моменты молекул стремятся выстроиться по направлению поля, однако этому препятствует их тепловое движение. Сталкиваясь друг с другом, в результате теплового движения, молекулы передают друг другу некоторую величину кинетической энергии, которая приводит в том числе и к процессу разориентации дипольных моментов молекул по отношению к выделенному направлению.

Таким образом проявляются два противоположно направленных, конкурирующих процесса – процесс ориентации дипольных моментов молекул под действием поля и процесс разориентации в результате их столкновений. При фиксированной температуре среды между этими процессами устанавливается определенное динамическое равновесие, приводящее к определенному среднему значению вектора поляризации среды \mathbf{P} .

Распределение молекул без поля

Для вычисления значения вектора \mathbf{P} рассмотрим случай когда внешнее поле отсутствует. Выберем единичный объем вещества ограниченный сферической поверхностью. Все направления в такой системе равноправны. Поэтому число молекул dn_0 , дипольные моменты которых лежат внутри бесконечно малого телесного угла $d\Omega$, с центром в начале координат пропорционально величине этого телесного угла $dn_0 = \text{const } d\Omega$. Интеграл от dn_0 по выбранному единичному объему дает число молекул в единице объема N . Таким образом, нормированная на число молекул в единице объема функция их распределения по направлениям дипольного момента есть:

$$dn_0 = \frac{N}{4\pi} d\Omega. \quad (4.70)$$

Распределение молекул в поле

В соответствии с известной теоремой Больцмана во внешнем электрическом поле \mathbf{E} функция распределения (4.70) модифицируется в соответствии с равенством:

$$dn(E) \approx \text{const} \exp\left\{-\frac{U(E)}{kT}\right\} dn_0, \quad (4.71)$$

где $U(E) = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$ - энергия диполя во внешнем поле, k - постоянная Больцмана а T - абсолютная температура вещества.

Интеграл от (4.71) по единичному объему дает число молекул в единице объема N . Таким образом, нормированное выражение (4.71) на число молекул в единице объема приводит к следующей функции распределения:

$$dn(E) = C e^{a \cos \theta} d\Omega; \quad C \equiv \frac{N}{2\pi} \frac{a}{\exp(a) - \exp(-a)}, \quad a \equiv \frac{pE}{kT}. \quad (4.72)$$

Вектор поляризации

Суммарный бесконечно малый дипольный момент молекул собственные дипольные моменты которых направлены внутри бесконечно малого телесного угла $d\Omega$ равен $d\mathbf{p} = \mathbf{p} dn(E)$. Интегрирование дипольного момента по всем направлениям приводит к суммарному значению вектора поляризации, который может быть направлен только по линии внешнего поля, так как другого выделено направления в системе нет. По этой причине, достаточно вычислить только z составляющую вектора поляризации среды если внешнее поле направлено по оси z . P_x и P_y , очевидно, равны нулю. В результате:

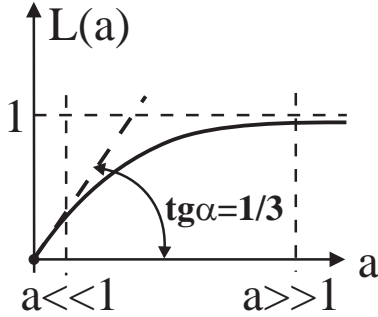
$$P_z = \int p \cos \theta dn(E) = Np \left[\text{ctha} - \frac{1}{a} \right] \equiv Np L(a). \quad (4.73)$$

Введенная в данном равенстве функция $L(x) = \text{cth} x - 1/x$ называется функцией Ланжевена. График $L(x)$ приведен на рис. 4.11.

Рассмотрим два частных случая выражения (4.73) $a \gg 1$ и $a \ll 1$. Данные условия соответствуют случаям сильного $a \gg 1$ и слабого $a \ll 1$ внешнего поля. Под слабым здесь понимается такое поле, энергия взаимодействия которого с дипольным моментом молекулы много меньше энергии ее теплового движения. Сильное поле в этом рассмотрении, соответствует условию, когда энергия взаимодействия дипольного момента атома с электрическим полем много больше энергии теплового движения.

Выполним оценку величин полей для которых справедливо приближение слабого поля. Если принять, что характерные размеры молекул $a_0 \approx$

0.5×10^{-8} см., то величина дипольного момента молекулы имеет порядок: $p \approx e a_0 \approx 4.8 \times 10^{-10} \cdot 0.5 \times 10^{-8} \approx 2.4 \times 10^{-18}$ ед. СГСЕ. Постоянная Больцмана k равна $k \approx 10^{-16}$ эрг/гр. Если внешнее поле составляет $E \approx 10^{-5} E_0$, где $E_0 = e/a_0^2 \approx 10^9$ В/см - напряженность внутриатомного поля, то $pE \approx 10^{-16}$ эрг. Соответственно при температуре $T \approx 300^\circ\text{К}$ параметр $kT \approx 10^{-14}$ эрг. Таким образом, для полей создаваемых источниками не лазерного типа условие слабости поля выполняется всегда.



В случае слабого поля, так как $\text{cth}(x) \approx x^{-1} + x/3 + x^3/45 + \dots$, находим:

$$\mathbf{P} = Np \frac{pE}{3kT} \frac{\mathbf{E}}{E} = \chi \mathbf{E}; \quad \chi \equiv \frac{Np^2}{3kT};$$

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi = 1 + 4\pi \frac{Np^2}{3kT}. \quad (4.74)$$

Как видно из представленного результата диэлектрическая проницаемость вещества является в этом случае функцией от температуры вещества, а вектор поляризации пропорционален \mathbf{E} .

В случае сильного поля параметр $a \gg 1$ и $L(\infty) \rightarrow 1$, а вектор поляризации равен:

$$\mathbf{P} = Np \frac{\mathbf{E}}{E}.$$

В этом случае дипольные моменты всех молекул ориентированы в одном направлении по полю и нельзя ввести понятие восприимчивости вещества χ , как константы, характеризующей свойства вещества. В этом случае восприимчивость вещества χ не может быть определена, как характеристика собственно вещества, а является нелинейной функцией, зависящей от напряженности поля $\chi \rightarrow Np/E$.

Глава 5

Постоянное электрическое поле. Семинары.

§1 Основные формулы и определения

Закон (определение)	Формулы
Система уравнений Максвелла (дифференциальная форма)	$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}. \quad (5.1)$ <p>\mathbf{D} - вектор индукции; ρ - объемная плотность заряда; \mathbf{E} - напряженность поля; \mathbf{P} - дипольный момент единицы объема.</p> <p>В случае однородной, изотропной среды $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, ε - диэлектрическая проницаемость среды</p>
Интегральная форма записи системы Максвелла	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi Q = 4\pi \int_V \rho dv; \quad (5.2)$ $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (5.3)$
Скалярный потенциал φ	$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi; \quad \varphi(2) - \varphi(1) = - \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (5.4)$
Полный заряд системы Q	<p>В случае объемно - распределенного заряда в системе $Q = \int_V \rho dv$. Для поверхностно - распределенного заряда $Q = \int_S \sigma ds$. Для линейно - распределенного заряда $Q = \int_L \tau dl$.</p> <p>ρ, σ, τ - объемная, поверхностная и линейная плотности заряда, соответственно.</p>
Дифференциальное уравнение для определения φ и частное решение неоднородного уравнения Пуассона (однородная, изотропная среда)	<p>заряженный объем:</p> $\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = -4\pi \frac{1}{\varepsilon} \rho(\mathbf{r}) \quad (5.5)$ $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' } dv' \quad (5.6)$ <p>заряженная поверхность:</p> $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' } ds' \quad (5.7)$ <p>заряженная линия:</p> $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_L \frac{\tau(\mathbf{r}')}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' } dl' \quad (5.8)$

Закон (определение)	Формула
Дипольный момент системы зарядов	$\mathbf{d} = \int_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dv \rightarrow \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i, \quad (5.9)$
Тензор квадрупольного момента	$Q_{\alpha\beta} = \int (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \rho(r) dv; \quad (5.10)$ $\sum_{i=1}^N q_i \left[3x_\alpha^{(i)} x_\beta^{(i)} - r^{(i)2} \delta_{\alpha\beta} \right].$
Вектор Герца электрического типа $\mathbf{\Pi}_e$	$\varphi = -\text{div } \mathbf{\Pi}_e; \quad (5.11)$ $\mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{\Pi}_e = -4\pi \mathbf{P} + \text{rot rot } \mathbf{\Pi}_e$
Дифференциальное уравнение для $\mathbf{\Pi}_e$. Частное решение уравнения Пуассона.	$\nabla^2 \mathbf{\Pi}_e = -4\pi \mathbf{P}; \quad \mathbf{\Pi}_e(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' } dv' \quad (5.12)$
Поверхностные уравнения	$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma; \quad E_{2\tau} = E_{1\tau} \quad (5.13)$ $\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = 4\pi\sigma; \quad D_{2\tau}/\varepsilon_2 = D_{1\tau}/\varepsilon_1$ $\varepsilon_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2 - \varepsilon_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 = -4\pi\sigma; \quad \varphi_1 = \varphi_2 \quad (5.14)$
Энергия единицы объема w . Энергия в объеме V	$w = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{8\pi}; \quad \varepsilon = \int_V w dv. \quad (5.15)$
Силы, действующие на точечный и распределенный заряды	$\mathbf{F} = q\mathbf{E}; \quad \mathbf{F} = \int_V \rho \mathbf{E} dv. \quad (5.16)$
Сила, действующая на единицу поверхности проводника	$\mathbf{p} = \frac{E^2}{8\pi} \mathbf{n} \quad (5.17)$ <p>\mathbf{n} - нормаль к поверхности</p>
Сила, действующая на дипольный момент	$\mathbf{F} = (\mathbf{d} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{E} \quad (5.18)$

Величина	Формула
Выражение для проекции силы на ось l с использованием тензора натяжений Максвелла M_{kl}	$F_l = \oint_S \sum_{k=1}^3 M_{kl} n_k ds, \quad (5.19)$ $M_{kl} = \frac{1}{4\pi} \left[E_k E_l - \frac{1}{2} E^2 \delta_{kl} \right]$ <p>\mathbf{n} — нормаль к ds.</p>
Энергия заряда во внешнем поле	$q\varphi \quad \text{или} \quad \int \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}') dv \quad (5.20)$
Энергия системы N точечных зарядов	$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1; i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{ \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j } \quad (5.21)$
Энергия системы N проводников	$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i \quad (5.22)$
Энергия диполя в поле	$- (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) \quad (5.23)$
Энергия квадрупольного момента во внешнем поле со скалярным потенциалом φ	$\frac{1}{6} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 Q_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \Big _{\mathbf{r}=0} \quad (5.24)$

§2 Теорема Гаусса

Соотношение (5.2) называется теоремой Гаусса. Данную теорему удобно использовать, когда условия симметрии системы позволяют определить поверхностный интеграл задающий поток вектора \mathbf{D} . Например, если имеется поверхность \tilde{S} , на которой выполняются соотношения: $ds \parallel \mathbf{D}$ и $|\mathbf{D}| = \text{const}$, то поток вектора через \tilde{S} имеет вид:

$$\oint_{\tilde{S}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = D_n \tilde{S}. \quad (5.25)$$

Таким образом, уравнение (5.2) превращается в алгебраическое, из которого находится модуль вектора \mathbf{D} . Направление вектора \mathbf{D} совпадает в этом

случае с направлением нормали к \tilde{S} . Покажем на примерах, как в простейших случаях можно установить вид поверхности \tilde{S} .

Пример 5.§2.1 *Найти напряженность поля и скалярный потенциал точечного заряда q , расположенного в начале координат.*

► Такая постановка задачи является искусственной, так как сама теорема (5.2) выведена, исходя из определения напряженности поля для точечного заряда. Однако, если считать (5.2) первичной, то можно рассуждать следующим образом. От выбора направления осей координат (см. рис.5.1 с. 173) физические свойства системы не зависят. Следовательно, вектор $\mathbf{E} \parallel \mathbf{r}$, а величина этого вектора одинакова на сфере постоянного радиуса. В связи с этим, если выбрать в качестве \tilde{S} в (5.25) сферу радиуса r , получим:

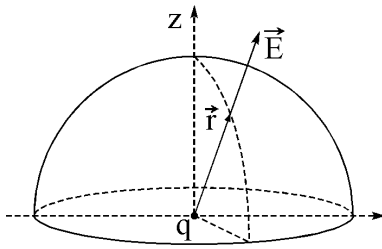


Рис. 5.1:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi r^2 E(r). \quad (5.26)$$

По условию теоремы Гаусса (5.2) поток вектора равен $4\pi \times$ полный заряд внутри сферы, т.е. :

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (5.27)$$

Для определения скалярного потенциала выполним интегрирование в (5.4) вдоль радиуса-вектора от точки r до ∞ :

$$\varphi(\infty) - \varphi(r) = - \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_r^\infty \frac{q}{r'^2} dr' = \frac{q}{r'} \Big|_r^\infty = -\frac{q}{r}. \quad (5.28)$$

Исходя из определения потенциала, ясно, что φ определен с точностью до постоянной величины. Общепринято считать $\varphi(\infty) = 0$, т.е. потенциал точечного заряда, расположенного в начале координат, имеет вид:

$$\varphi(r) = \frac{q}{r}. \quad \blacktriangleleft \quad (5.29)$$

Пример 5.§2.2 *Найти напряженность поля \mathbf{E} и скалярный потенциал φ в каждой точке пространства, создаваемые шаром радиуса R , заряженным сферически симметрично с объемной плотностью $\rho(r)$ в системе координат, связанной с центром шара.*

► Для решения задачи докажем, что в системе координат связанной с центром шара вектор напряженности поля в любой точке пространства направлен вдоль радиуса-вектора к данной точке, а на сфере постоянного радиуса величина напряженности постоянна, т.е. $\mathbf{E} = E(r) \mathbf{r}/r$. То, что вектор

$\mathbf{E} \parallel \mathbf{r}$ вытекает из следующих рассуждений. Выделим в шаре бесконечно малый объем в точке A . Поле, создаваемое этим бесконечно малым зарядом в точке P , обозначим через \mathbf{E}_A .

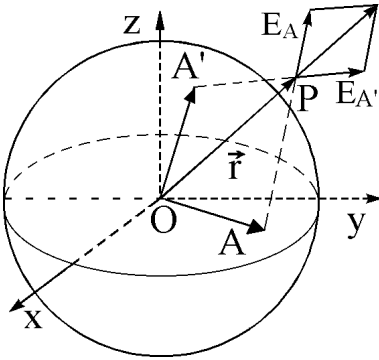


Рис. 5.2:

Поле, создаваемое в P бесконечно малым зарядом расположенным в точке A' , симметричной относительно OP , обозначим $\mathbf{E}_{A'}$. Очевидно, что $|\mathbf{E}_A| = |\mathbf{E}_{A'}|$. Следовательно, по принципу суперпозиции результирующий вектор направлен вдоль \mathbf{r} . Поле всего шара в любой точке наблюдения можно представить как суперпозицию полей симметрично расположенных пар точек. В результате вытекает, что $\mathbf{E} \parallel \mathbf{r}$. Если вращать

шар относительно точки O , то физически в системе ничего не изменится. Следовательно, $|\mathbf{E}| = \text{const}$ на сфере постоянного радиуса. Выбирая в качестве \tilde{S} в (5.25) сферу радиуса r , получим (5.26).

В соответствии с теоремой Гаусса заряд в (5.2) – это заряд находящийся внутри поверхности интегрирования. Отсюда, если точка наблюдения лежит внутри шара, т.е. $r < R$ то:

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \int_0^r \rho(r') dv' = 4\pi Q(r), \quad E(r) = \frac{Q(r)}{r^2}, \quad (5.30)$$

где $Q(x)$ определяется выражением:

$$Q(x) = \int_0^x \rho(r) r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi. \quad (5.31)$$

Соответственно, если $r > R$, находим:

$$E(r) = \frac{Q(R)}{r^2}. \quad (5.32)$$

Здесь $Q(R)$ – полный заряд шара. Скалярный потенциал φ находим интегрированием вектора \mathbf{E} вдоль \mathbf{r} аналогично (5.28):

$$\varphi(\infty) - \varphi(r) = - \int_r^R \frac{Q(r')}{r'^2} dr' - \int_R^\infty \frac{Q(R)}{r'^2} dr',$$

т. е.

$$\varphi(r) = \begin{cases} Q(R)/R + \int_r^R Q(x)/x^2 dx, & r \leq R \\ Q(R)/r, & r \geq R \end{cases} \quad (5.33)$$

Комментарий: в частном случае $\rho = \text{const}$ получим

$$E(r) = \frac{Q}{r^2} \quad \text{для} \quad r > R; \quad E = \frac{4}{3}\pi\rho \quad \text{для} \quad r < R.$$

Как видно, поле вне шара совпадает с полем точечного заряда $Q(R)$, расположенного в начале координат. ◀

Пример 5.§2.3. Найти напряженность поля и скалярный потенциал в произвольной точке пространства, создаваемые бесконечным цилиндром радиуса R , заряженным с объемной плотностью $\rho(r) = ar^n$. Здесь r - радиальная переменная цилиндрической системы координат, $a = \text{const}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

► Из условий симметрии задачи следует, что $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{r}/r$ и $E(r)$ - постоянна на цилиндрической поверхности фиксированного радиуса (доказательство аналогично рассуждениям, приведенным в примере 5.§2.2 на стр.173). В результате, для цилиндра радиуса r высоты H по теореме Гаусса находим:

$$E_1(r)2\pi rH = \frac{8\pi^2}{n+2}Har^{n+2}; \quad E_1(r) = \frac{4\pi}{n+2}ar^{n+1}; \quad r \leq R$$

$$E_2(r)2\pi rH = \frac{8\pi^2}{n+2}HaR^{n+2}; \quad E_2(r) = \frac{4\pi}{n+2}a \frac{R^{n+2}}{r}; \quad r \geq R$$

Для скалярного потенциала на основании (5.4) получаем в случае $r < R$:

$$\varphi_1 = \int_r^R E_1(x)dx + \int_R^\infty E_2(x)dx = \frac{4\pi a}{n+2} \left[\frac{R^{n+2} - r^{n+2}}{n+2} + R^{n+2} (\ln \infty - \ln R) \right];$$

Соответственно для случая $r \geq R$

$$\varphi_2 = \int_r^\infty E_2(x)dx = \frac{4\pi}{n+2} a R^{n+2} [\ln \infty - \ln r].$$

Слагаемое $\ln \infty$ может быть опущено, так как скалярный потенциал φ определен с точностью до постоянной и данный член не меняет величины \mathbf{E} . ◀

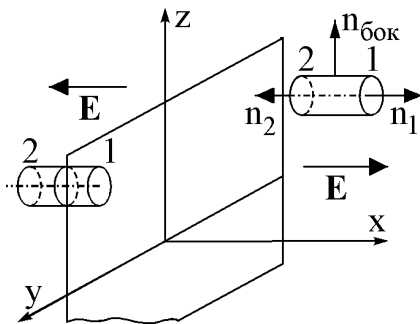


Рис. 5.3:

Пример 5.§2.4. Найти напряженность поля \mathbf{E} в любой точке пространства, создаваемую бесконечной пластиной, заряженной с поверхностной плотностью $\sigma = \text{const}$ (см. рис. 5.3 на стр. 175).

► Из условия симметрии следует, что $\mathbf{E} = \mathbf{i}E(x)$. Если использовать теорему Гаусса для цилиндра произвольной высоты, ось которого параллельна оси x , то для цилиндра не пересекающего заряженную плоскость, найдем: $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \rightarrow (E_1 - E_2)S = 0$. S - площадь основания цилиндра. Очевидно интеграл по боковой поверхности

равен 0, так как $\mathbf{E} \perp \mathbf{n}_{\text{бок}}$. Таким образом, вне плоскости $\mathbf{E} = \text{const}$. Если расположить цилиндр так, чтобы он пересекал заряженную плоскость, то получим: $S(E_1 + E_2) = 4\pi\sigma S$. А так как $E_1 = E_2$, находим окончательно: $\mathbf{E} = 2\pi\sigma \text{sign}(x)\mathbf{i}$. ◀

Комментарий: метод с использованием теоремы Гаусса имеет существенный недостаток, так как не может быть эффективно использован, если нет простой симметрии в системе зарядов, упрощающей интегральный член в (5.2).

Задание на дом: решить задачи 5.§9.1-5.§9.3 на стр. 204.

§3 Решение задач электростатики методом интеграла Пуассона

Решение уравнения Пуассона (5.5) позволяет в общем случае определять поле независимо от симметрии в распределении зарядов. Вычисления по формулам (5.6) - (5.8) удобно проводить с использованием формулы, известной из курса математической физики:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi'). \quad (5.34)$$

Здесь $r_{<} = \min(r, r')$, $r_{>} = \max(r, r')$, $P_l(x)$ - полином Лежандра [15], $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, Y_{lm} - сферическая функция, θ, φ - углы сферической системы координат, задающие направление вектора \mathbf{r} , а θ', φ' - направление вектора \mathbf{r}' . Полный список свойств сферических функций и их явный вид при конкретных значениях l и m приведен, например, в [15].

Сферические функции образуют полную, ортонормированную систему функций (4.18). Простейшие, часто встречающиеся выражения для сферических функций приведены в (4.19) Используя (5.34), решение уравнения Пуассона (5.5) можно представить в виде мультипольного разложения:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l(\mathbf{r}). \quad (5.35)$$

Здесь мультиполь φ_l определен соотношением:

$$\varphi_l(\mathbf{r}) = \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi) \int_V \rho(r', \theta', \varphi') \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') dv', \quad (5.36)$$

dv' - элемент объема интегрирования, который, например, в сферической системе координат равен $dv' = r'^2 dr' \sin \theta' d\varphi'$. Аналогичные формулы следуют из (5.7) и (5.8).

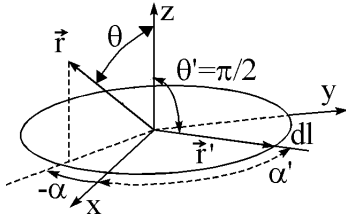


Рис. 5.4:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + R^2 - 2R(x \cos \alpha' + y \sin \alpha')}.$$

В результате

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \frac{\tau R}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2R(x \cos \alpha' + y \sin \alpha')}} d\alpha' \quad (5.37)$$

В общем случае этот интеграл вычисляется через эллиптический интеграл первого рода (см. в [21], [14]).

Продemonстрируем вычисление этого выражения методом мультипольных разложений с учетом формулы (5.34). В данном случае находим:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \tau \sum_{kq} \frac{4\pi}{2k+1} Y_{kq}^*(\theta, \alpha) \frac{r_{<}^k}{r_{>}^{k+1}} \int_0^{2\pi} Y_{kq}(\theta', \alpha') R d\alpha'$$

где $r_{<} = \min(R, r)$, $r_{>} = \max(R, r)$. На основании определения сферических функций [15] интеграл по угловой переменной α равен:

$$\int_0^{2\pi} Y_{kq}\left(\frac{\pi}{2}, \alpha'\right) d\alpha' = 2\pi \delta_{q0} Y_{kq}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 2\pi \delta_{q0} \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} P_k(0)$$

Известно [21], что полиномы Лежандра P_l удовлетворяют условию: $P_l(0) = 0$ для l нечетных, а для l четных $P_l(0) = (-1)^{l/2} l! / 2^l (l/2!)^2$. В результате, выполнив замену индекса суммирования $k = 2n$, находим:

$$\varphi(\mathbf{r}) = 2\pi\tau R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_{<}^{2n}}{r_{>}^{2n+1}} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} P_{2n}(\cos \theta). \quad (5.38)$$

На оси кольца (при $z > 0$) $\theta = 0$. При этом $\cos \theta = 1$, $P_{2n}(1) = 1$, и ряд (5.38) суммируется в выражение, которое может быть получено по принципу суперпозиции $\varphi(z) = 2\pi\tau R / \sqrt{z^2 + R^2}$. Для доказательства выпишем несколько первых членов ряда (5.38)

$$\varphi(z > 0) = 2\pi\tau R \cdot \frac{1}{r_{>}} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^4 - \frac{5}{16} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^6 + \dots \right]$$

Сравнивая данное выражение с разложением в ряд Тейлора функции

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots,$$

получаем искомый результат

$$\varphi(z) = \frac{1}{r_{>}} \frac{2\pi\tau R}{\sqrt{1 + (r_{<}/r_{>})^2}} = \frac{2\pi\tau R}{\sqrt{r_{>}^2 + r_{<}^2}} = \frac{2\pi\tau R}{\sqrt{R^2 + z^2}}. \blacktriangleleft$$

Пример 5.§3.2 Диск в виде плоского кольца радиусов R_1 и R_2 заряжен с постоянной поверхностной плотностью σ . Найти скалярный потенциал в произвольной точке пространства. (рис 5.5 с. 178)

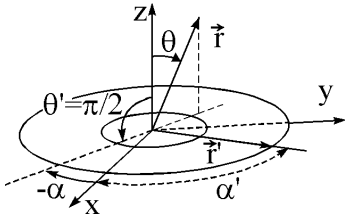


Рис. 5.5:

► Выбирая цилиндрическую систему координат как указано на рис. 5.5 формуле (5.7) положим $ds = r' dr' d\alpha'$. В результате:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma(r', \alpha')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} r' dr' d\alpha'.$$

Используя (5.34) и повторяя вычисления аналогично вычислениям в примере 5.§3.1, получим после интегрирования по угловым переменным:

$$\varphi(\mathbf{r}) = 2\pi\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} P_{2n}(\cos \theta) \int_{R_1}^{R_2} \frac{r_{<}^{2n}}{r_{>}^{2n+1}} r' dr',$$

где $r_{<} = \min(r, r')$, $r_{>} = \max(r, r')$. Радиальный интеграл следует рассматривать в трех разных областях $r < R_1$, $R_1 \leq r \leq R_2$, $r > R_2$, чтобы определить, какая из переменных r, r' есть $r_{<}$ или $r_{>}$, соответственно.

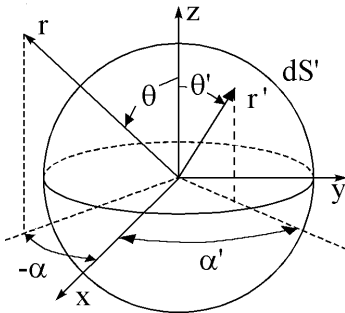


Рис. 5.6:
 $r_{<} = r', r_{>} = r$. Соответственно во второй области $r_{<} = r, r_{>} = r'$. В

результате:

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r_{<}^{2n}}{r_{>}^{2n+1}} r' dr' &= \int_{R_1}^r \frac{r_{<}^{2n}}{r_{>}^{2n+1}} r' dr' + \int_r^{R_2} \frac{r_{<}^{2n}}{r_{>}^{2n+1}} r' dr' = \\ &= \frac{1}{2n+2} \cdot \frac{1}{r^{2n+1}} [r^{2n+2} - R_1^{2n+2}] - \frac{r^{2n}}{2n-1} \left[\frac{1}{R_2^{2n-1}} - \frac{1}{r^{2n-1}} \right] \end{aligned}$$

3. $r > R_2$. В этом случае $r_< = r'$, $r_> = r$:

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{r_<^{2n}}{r_>^{2n+1}} r' dr' = \frac{1}{2n+2} \frac{R_2^{2n+2} - R_1^{2n+2}}{r^{2n+1}}. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 5.§3.3. Сфера радиуса R заряжена с поверхностной плотностью $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$. Найти скалярный потенциал в произвольной точке пространства. (рис 5.6 с. 178)

► В (5.7), в сферической системе координат, имеем $ds = R^2 \sin \theta' d\theta' d\alpha = R^2 d\Omega'$. Здесь $d\Omega'$ – элемент телесного угла. Используя мультипольное разложение (5.34) и явный вид функции Y_{10} (4.19), получим:

$$\varphi(\mathbf{r}) = R^2 \sum_{kq} \frac{4\pi\sigma}{2k+1} \cdot \frac{r_<^k}{r_>^{k+1}} Y_{kq}(\theta, \alpha) \int \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10} Y_{kq}^* d\Omega' = \frac{4\pi\sigma}{3} R^2 \frac{r_<}{r_>^2} \cos \theta$$

Отсюда находим:

$$\varphi(r) = \begin{cases} 4\pi\sigma/3 \cdot r \cdot \cos \theta, & r < R \\ 4\pi\sigma/3 \cdot R^3/r^2 \cdot \cos \theta, & r > R. \end{cases} \quad \blacktriangleleft \quad (5.39)$$

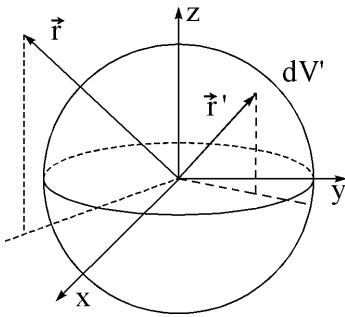


Рис. 5.7:

Пример 5.§3.4. Шар радиуса R заряжен с объемной плотностью $\rho = \rho_0 \cos \theta$. Найти скалярный потенциал в произвольной точке пространства. (рис. 5.7)

► В данном случае необходимо воспользоваться формулой (5.6). Повторяя вычисления интегралов по угловым переменным аналогично предыдущему примеру, находим:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\rho}{3} \cos \theta \int_0^R \frac{r_<}{r_>^2} r'^2 dr'.$$

В соответствии с геометрией системы рассмотрим два случая. 1. $r > R$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\rho_0}{3} \cdot \frac{\cos \theta}{r^2} \int_0^R r'^3 dr' = \frac{\pi\rho_0}{3} \cdot \frac{\cos \theta}{r^2} \cdot R^4 \quad (5.40)$$

2. $r < R$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\rho_0}{3} \cos \theta \cdot \left[\int_0^r \frac{r_<}{r_>^2} r'^2 dr' + \int_r^R \frac{r_<}{r_>^2} r'^2 dr' \right] = \pi\rho_0 r \left(\frac{4}{3}R - r \right) \cos \theta. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 5.§3.5. Шар радиуса R равномерно заряжен с объемной плотностью ρ . Его внешняя неограниченная экваториальная плоскость заряжена с поверхностной плотностью σ . Найти скалярный

потенциал в произвольной точке пространства. Из общей формулы получить частный случай поля на оси симметрии системы (см. задачу 26 в [3]).

► По принципу суперпозиции φ можно представить в виде суммы двух слагаемых: $\varphi = \varphi_{\text{ш}} + \varphi_{\text{п}}$, где $\varphi_{\text{ш}}$ — потенциал создаваемый шаром, $\varphi_{\text{п}}$ — плоскостью. $\varphi_{\text{ш}}$ найден в примере 5.§2.2 с использованием теоремы Гаусса. При этом в формуле (5.33) нужно рассмотреть частный случай $\rho = \text{const}$. Для сравнения приведем решение этой же задачи, основанное на мульти-польных разложениях. В соответствии с (5.6) находим:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{ш}}(\mathbf{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi) \int \rho \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') dv' = \\ &= \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi) \int \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \rho r'^2 dr' \int \sqrt{4\pi} Y_{00} Y_{lm}^* d\Omega' = 4\pi \int \frac{\rho(r')}{r_{>}} r'^2 dr'.\end{aligned}\quad (5.41)$$

В последнем выражении необходимо рассмотреть два случая: $r > R$ и $r < R$.

1. Пусть $r < R$, из (5.41) получим:

$$\varphi_{\text{ш}}^{(1)} = 4\pi\rho \left[\int_0^r \frac{r'^2 dr'}{r} + \int_r^R r' dr' \right] = 2\pi\rho \left[R^2 - \frac{r^2}{3} \right], \quad r < R.$$

2. Если $r > R$, из (5.41) получим:

$$\varphi_{\text{ш}}^{(2)} = 4\pi\rho \frac{1}{r} \int_0^R r'^2 dr' = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \frac{1}{r} = \frac{Q}{r}, \quad r > R.$$

В результате

$$\varphi_{\text{ш}} = \begin{cases} 2\pi\rho (R^2 - r^2/3), & r < R \\ Q/r, & r > R \end{cases}. \quad (5.42)$$

Для определения потенциала плоскости воспользуемся решением задачи, рассмотренной в примере 5.§3.2. В данном случае необходимо положить $R_2 = \infty$. В результате:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{п}} &= 2\pi\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} P_{2n}(\cos\theta) \frac{1}{2n+1} \frac{r^{2n}}{R^{2n-1}}; \quad r < R, \\ \varphi_{\text{п}} &= 2\pi\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} P_{2n}(\cos\theta) \left[\frac{r^{2n+2} - R^{2n+2}}{(2n+2)r^{2n+1}} + \frac{r}{2n-1} \right]; \quad r > R.\end{aligned}\quad (5.43)$$

Сумма двух выражений (5.42) и (5.43) дает искомый результат. В частном случае на оси z найдем из (5.43):

$$\varphi(z) = \varphi_{\text{ш}} + \varphi_{\text{п}} = 2\pi\sigma \left(-\sqrt{R^2 + z^2} \right) + \begin{cases} \frac{4}{3}\pi\rho R^3/|z|, & |z| \geq R \\ \frac{2}{3}\pi\rho R^2(3 - z^2/R^2), & |z| < R \end{cases}. \quad \blacktriangleleft$$

Задание на дом: решить задачи 5.§9.4 - 5.§9.6 на стр 205.

§4 Решение неоднородного уравнения Пуассона

Пример 5.§4.1. На расстоянии a от бесконечной плоскости x, y , на оси z находится точечный заряд q . Потенциал плоскости поддерживается равным нулю. Определить скалярный потенциал над плоскостью.

► Для всех точек $z > 0$

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}). \quad (5.44)$$

Общее решение уравнения (5.44) есть:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} + \varphi_0. \quad (5.45)$$

Здесь первое слагаемое - частное решение неоднородного уравнения (5.44), а φ_0 - общее решение однородного уравнения $\nabla^2 \varphi_0 = 0$, которое может быть представлено в виде:

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l \frac{1}{r^{l+1}} \right) Y_{l0}(\theta, \varphi) \quad (5.46)$$

Суммирование по индексу m в (5.46) отсутствует в связи с осевой симметрией по оси z . Для удовлетворения физических условий надо положить $A_l = 0$ для $r > a$ и $B_l = 0$ для $r < a$. Так как по условию задачи скалярный потенциал φ на плоскости x, y обращается в ноль.

Запишем разложение потенциала точечного заряда q по мультиполям для точек на плоскости xy :

$$\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi q}{2l+1} \cdot \frac{r_{<}^1}{r_{>}^{l+1}} Y_{l0}^*(\theta_a, \varphi_a) Y_{l0}(\theta, \varphi) \quad (5.47)$$

Здесь $r_{<} = \min(r, a)$, $r_{>} = \max(r, a)$, θ_a, φ_a - угловые переменные вектора \mathbf{a} , а θ, φ - угловые переменные вектора \mathbf{r} . С учетом выбранной системы

координат значения углов равны $\theta_a = \varphi_a = 0$, $\theta = \pi/2$. В результате для $r < a$ на основании равенств 5.46, 5.47 находим:

$$\varphi(z=0) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l Y_{l0} \left(\frac{\pi}{2}, \varphi \right) + \frac{4\pi q}{2l+1} \frac{r^l}{a^{l+1}} Y_{l0}^*(0,0) Y_{l0} \left(\frac{\pi}{2}, \varphi \right) \right] = 0.$$

Решениями этого уравнения являются два соотношения:

$$A_l^{(1)} = -\frac{4\pi q}{2l+1} \frac{1}{a^{l+1}} Y_{l0}^*(0,0); \quad A_l^{(2)} = -\frac{4\pi q}{2l+1} \frac{1}{a^{l+1}} (-1)^l Y_{l0}^*(\pi,0).$$

Решение $A_l^{(1)}$ соответствует полю точечного заряда $-q$ в точке \mathbf{a} и, следовательно, не удовлетворяет физической постановке задачи. Второе решение $A_l^{(2)}$ соответствует полю заряда $-q$ в точке $-\mathbf{a}$. Для того, чтобы показать это, воспользуемся свойством сферических функций: $Y_{l0} \left(\frac{\pi}{2}, \varphi \right) = 0$ для l нечетных. Таким образом, для точек плоскости xy с $r < a$ имеем:

$$\varphi_0 = \sum_l \frac{(-4\pi q)}{2l+1} \cdot \frac{r_{<}^l}{a^{l+1}} Y_{l0}^*(\pi,0) Y_{l0} \left(\frac{\pi}{2}, \varphi \right) = -\frac{q}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}|}.$$

Аналогичное выражение вытекает для $r > a$. Окончательно (5.45) есть:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} - \frac{q}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}|}. \quad \blacktriangleleft \quad (5.48)$$

Таким образом, поле заряда над плоскостью потенциал которой поддерживается равным нулю совпадает с полем двух противоположно заряженных точечных зарядов расположенных симметрично относительно плоскости. Один из зарядов - это реальный заряд, а второй заряд называется зарядом-изображения. Заряд-изображения моделирует поле индуцированных на плоскости зарядов.

Пример 5.§4.2. Шар радиуса R заряжен с объемной плотностью $\rho(\mathbf{r})$ в сферической системе координат, связанной с центром шара. Найти потенциал в любой точке пространства.

► Потенциалы внутри - φ_1 и снаружи - φ_2 шара удовлетворяют уравнениям:

$$\nabla^2 \varphi_1 = -4\pi \rho(r, \theta, \varphi), \quad (5.49)$$

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0. \quad (5.50)$$

r, θ, φ - переменные сферической системы координат. Представим $\rho(r, \theta, \varphi)$ в виде:

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \rho_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (5.51)$$

где

$$\rho_{lm}(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r, \theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Аналогичное разложение запишем для потенциалов φ_1 и φ_2 :

$$\varphi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \varphi_{lm}^{(1)}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi); \quad \varphi_2 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \varphi_{lm}^{(2)}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi); \quad (5.52)$$

Подставив (5.52) и (5.51) в уравнения (5.49) и (5.50), получим обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка для определения $\varphi_{lm}^{(1)}(r)$ и $\varphi_{lm}^{(2)}(r)$:

$$\frac{d^2}{dr^2} (r\varphi_{lm}^{(1)}) - \frac{l(l+1)}{r^2} (r\varphi_{lm}^{(1)}) = -4\pi r \rho_{lm}(r); \quad (5.53)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} (r\varphi_{lm}^{(2)}) - \frac{l(l+1)}{r^2} (r\varphi_{lm}^{(2)}) = 0 \quad (5.54)$$

Решение уравнения (5.53) следует искать в виде суммы двух решений: f - частного решения неоднородного уравнения, которое может быть выписано при известной функции ρ_{lm} или $\rho(r, \theta, \varphi)$, и общего решения однородного уравнения. Общее решение однородного уравнения 5.54 имеет вид:

$$(r\varphi_{lm}^{(i)}) = A_l^{(i)} r^{l+1} + B_l^{(i)} r^{-l}; \quad i = 1, 2.$$

Учитывая требование ограниченности потенциала в нуле и на бесконечности для потенциалов внутри и вне шара получим:

$$\varphi_{lm}^{(1)} = A_l r^l + \frac{1}{r} f_{lm}(r), \quad r < R; \quad \varphi_{lm}^{(2)} = B_l \frac{1}{r^{l+1}}, \quad r > R, \quad (5.55)$$

Здесь функция f_{lm} удовлетворяет неоднородному уравнению:

$$f''_{lm} - \frac{l(l+1)}{r^2} f_{lm} = -4\pi r \rho_{lm}(r).$$

Коэффициенты A_l и B_l могут быть найдены из условий поведения потенциалов на поверхности шара

$$\varphi_{lm}^{(1)}(R) = \varphi_{lm}^{(2)}(R); \quad \left. \frac{\partial \varphi_{lm}^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=R} = \left. \frac{\partial \varphi_{lm}^{(2)}}{\partial r} \right|_{r=R}.$$

Подставляя в данные равенства соотношения 5.55 получим следующую систему алгебраических уравнений для определения явного вида коэффициентов A_l и B_l :

$$A_l R^l + \frac{1}{R} f_{lm}(R) = B_l \frac{1}{R^{l+1}};$$

$$lA_l R^{l-1} - \frac{1}{R^2} f_{lm}(R) + \frac{1}{R} f'_{lm}(R) = -B_l \frac{l+1}{R^{l+2}}$$

Решение полученной системы алгебраических уравнений имеет вид:

$$B_l = \frac{R^{l+1}}{2l+1} \left[\frac{l+1}{R} f_{lm}(R) - f'_{lm}(R) \right]; \quad A_l = -\frac{l}{R^l(2l+1)} \left[\frac{1}{R} f_{lm}(R) + f'_{lm}(R) \right].$$

Таким образом, окончательно

$$\varphi_{lm}^{(1)} = -\frac{1}{2l+1} \cdot \frac{1}{R^l} \left[\frac{l}{R} f_{lm}(R) + f'_{lm}(R) \right] r^l + \frac{1}{r} f_{lm}(r), \quad (5.56)$$

$$\varphi_{lm}^{(2)} = \frac{1}{2l+1} R^{l+1} \left[\frac{l+1}{R} f_{lm}(R) - f'_{lm}(R) \right] \frac{1}{r^{l+1}} \quad (5.57)$$

Подставляя эти выражения в (5.52), получаем требуемый результат ◀.

Пример 5.§4.3. *Используя результаты предыдущей задачи, найти скалярный потенциал и напряженность поля в любой точке пространства, если шар заряжен с объемной плотностью $\rho = \rho_0 \cos \theta$. Сравнить полученный результат с решением примера 5.§3.4 (см. задачу N 55 в [3]).*

► На основании (5.51) получим:

$$\rho_{lm}(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_0 \cos \theta Y_{lm}(\theta, \varphi) d\Omega = \rho_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \delta_{l1} \delta_{m0}.$$

Следовательно, скалярный потенциал вне шара φ_2 и внутри шара φ_1 следует искать в виде:

$$\varphi_1(r, \theta, \varphi) = \varphi_{10}^{(1)}(r) Y_{10}(\theta, \varphi); \quad \varphi_2(r, \theta, \varphi) = \varphi_{10}^{(2)}(r) Y_{10}(\theta, \varphi). \quad (5.58)$$

Частное решение уравнения (5.53) в этом случае есть: $f = -\pi \rho_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r^3$. На основании (5.56) получим:

$$\begin{aligned} \varphi_{10}^{(1)} &= -\frac{1}{3R^1} \left[\frac{1}{R} f(R) + f'(R) \right] r + \frac{1}{r} f(r) = \pi \rho_0 r \left(\frac{4}{3} R - r \right) \sqrt{\frac{4\pi}{3}}; \\ \varphi_{10}^{(2)} &= \frac{1}{3} R^2 \left[\frac{2}{R} f(R) - f'(R) \right] \frac{1}{r^2} = \pi \rho_0 R^4 \frac{1}{3r^2} \sqrt{\frac{4\pi}{3}}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения в (5.58), находим для скалярного потенциала внутри и вне шара:

$$\varphi_1 = \pi \rho_0 r \left(\frac{4}{3} R - r \right) \cos \theta, \quad r < R; \quad \varphi_2 = \pi \rho_0 R^4 \frac{1}{3r^2} \cos \theta, \quad r > R. \quad (5.59)$$

Для определения напряженности поля внутри и вне шара воспользуемся определением скалярного потенциала (5.4):

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= -\text{grad } \varphi_1 = -\left[\mathbf{a}_r \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi}\right] = \\ &= \mathbf{a}_r 2\pi\rho_0 \left(r - \frac{2}{3}R\right) \cos \theta + \mathbf{a}_\theta \pi\rho_0 \left(\frac{4}{3}R - r\right) \sin \theta. \\ \mathbf{E}_2 &= -\text{grad } \varphi_2 = \mathbf{a}_r \frac{2\pi\rho_0 R^4}{3r^3} \cos \theta + \mathbf{a}_\theta \frac{\pi\rho_0 R^4}{3r^3} \sin \theta. \quad \blacktriangleleft\end{aligned}\quad (5.60)$$

Пример 5.§4.4 Потенциал на поверхности шара радиуса R поддерживается равным $V(\theta, \varphi)$. θ, φ — угловые переменные сферической системы координат связанной с центром шара. Определить скалярный потенциал в произвольной точке пространства.

► Исходя из общего решения уравнения Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$, для точек вне и внутри шара имеем:

$$\varphi_1(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} r^l Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad r < R; \quad (5.61)$$

$$\varphi_2(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm} r^{-(l+1)} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad r > R. \quad (5.62)$$

По условию задачи на поверхности шара $\varphi_1(R, \theta, \varphi) = V(\theta, \varphi) = \varphi_2(R, \theta, \varphi)$. Представим $V(\theta, \varphi)$ в виде:

$$V(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l V_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi); \quad (5.63)$$

$$V_{lm} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} V(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta d\varphi.$$

В результате находим:

$$A_{lm} = V_{lm}/R^l; \quad B_{lm} = V_{lm}R^{l+1}; \quad (5.64)$$

Подставляя (5.64) в (5.61), (5.62) получаем требуемый результат. ◀

Рассмотрим частный случай $V = V_0 \cos \theta$. На основе найденного общего решения для потенциалов (5.61) получим:

$$\varphi_1 = V_0 \frac{r}{R} \cos \theta, \quad r \leq R; \quad \varphi_2 = V_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos \theta, \quad r \geq R.$$

В соответствии с (5.14), зная скачок напряженности поля на границе, можно определить поверхностную плотность заряда на сфере:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=R} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=R} \right] = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{V_0}{R} \cos \theta = \sigma_0 \cos \theta.$$

Рассмотреть самостоятельно случай $V = \text{const}$.

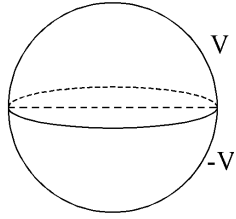


Рис. 5.8:

Пример 5.§4.5. На двух половинах сферы радиуса R поддерживаются потенциалы V и $-V$, соответственно. Найти скалярный потенциал в произвольной точке пространства (рис. 5.8).

► Используя результаты предыдущей задачи, вычислим коэффициенты разложения потенциала сферы по полному набору сферических функций (5.63) в сферической системе координат связанной с центром сферы. Сечение сферы на две половины лежит в плоскости xy . В данном случае получим:

$$V_{lm} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} V Y_{lm}^*(\theta, \varphi) d\Omega + \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2\pi} (-V) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) d\Omega. \quad (5.65)$$

Здесь $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$.

Выполняя интегрирование по φ от 0 до 2π , находим:

$$V_{lm} = 2\pi \delta_{m0} V \left[\int_0^{\pi/2} Y_{l0}^*(\theta, 0) \sin \theta d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} Y_{l0}^*(\theta, 0) \sin \theta d\theta \right].$$

Выразим сферическую функцию через полином Лежандра [15]

$$Y_{l0}(\theta, 0) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta),$$

и сделаем замену переменной интегрирования $x = \cos \theta$. В результате:

$$V_{lm} = V 2\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0} \left[\int_0^1 P_l(x) dx - \int_{-1}^0 P_l(x) dx \right].$$

Поскольку при нечетных l полином P_l нечетен относительно x , а при четных l четен, отличной от нуля является сумма интегралов только для нечетных значений $l = 1, 3, 5, \dots$

$$V_{lm} = V 4\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0} \int_0^1 P_l(x) dx = V 4\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \cdot \frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2}) \delta_{m0}}{2\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{l+3}{2})}. \quad (5.66)$$

Здесь $\Gamma(x)$ - гамма-функция [14]. Окончательно для потенциала внутри φ_1 и вне φ_2 сферы найдем:

$$\varphi_1(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=1,3,5,\dots} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} V_{l0} \left(\frac{r}{R}\right)^l P_l(\cos \theta) = \quad (5.67)$$

$$= V \left[\frac{3}{2} \frac{r}{R} P_1(\cos \theta) - \frac{7}{8} \left(\frac{r}{R}\right)^3 P_3(\cos \theta) + \frac{11}{16} \left(\frac{r}{R}\right)^5 P_5(\cos \theta) + \dots \right].$$

$$\varphi_2(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=1,3,5,\dots} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} V_{l0} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos \theta) = \quad (5.68)$$

$$= V \left[\frac{3}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^2 P_1(\cos \theta) - \frac{7}{8} \left(\frac{R}{r}\right)^4 P_3(\cos \theta) + \frac{11}{16} \left(\frac{R}{r}\right)^6 P_5(\cos \theta) + \dots \right] \blacktriangleleft$$

В случае $\theta = 0$ (ось симметрии z) $P_l(1) = 1$ и для $z > R$ найдем из (5.68):

$$\varphi(z) = V \left[1 - \frac{z^2 - R^2}{z\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \approx V \left[\frac{3}{2} \left(\frac{R}{z}\right)^2 - \frac{7}{8} \left(\frac{R}{z}\right)^4 + \frac{11}{16} \left(\frac{R}{z}\right)^6 + \dots \right]$$

Задание на дом: решить задачи 5.§9.7-5.§9.9 на стр. 205, 5.§9.10- 5.§9.12 на стр. 205

§5 Уравнение Лапласа в декартовых и цилиндрических координатах

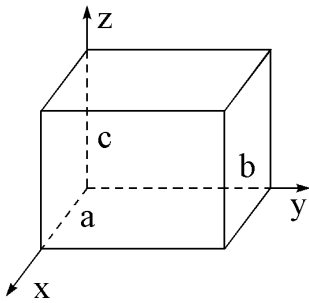


Рис. 5.9:

Пример 5.§5.1. Все грани прямоугольного параллелепипеда с размерами a, b, c по осям x, y, z поддерживаются при потенциале, равном 0, за исключением грани $z = c$, на которой задано значение потенциала $V(x, y)$. Найти потенциал внутри параллелепипеда.

► Внутри параллелепипеда объемная плотность заряда отсутствует. Следовательно уравнение для определения потенциала в декартовых координатах имеет вид:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (5.69)$$

Представив потенциал в форме $\varphi = X(x)Y(y)Z(z)$ и разделив (5.69) на φ стандартным методом разделения переменных, получим:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2; \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2; \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2,$$

где α, β, γ — константы удовлетворяющие равенству $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$. Считая α и β действительными числами, получим в качестве решения трех дифференциальных уравнений функции $\exp(\pm i\alpha x)$, $\exp(\pm i\beta y)$, $\exp(\pm \gamma z)$. Линейные суперпозиции данных решений позволяют получить выражение для потенциала конкретной краевой задачи.

В данном примере из требования $\varphi = 0$ при $x = 0, y = 0, z = 0$ вытекает, что X, Y, Z имеют вид:

$$X(x) = \sin \alpha x; \quad Y(y) = \sin \beta y; \quad Z = \text{sh} \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right). \quad (5.70)$$

Из условия $\varphi = 0$ при $x = a$ и $y = b$ следует, что $\alpha a = n\pi$ и $\beta b = m\pi$, где n, m — любые целые числа $\pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$. Вводя обозначения

$$\alpha_n = n\pi/a, \quad \beta_m = m\pi/b, \quad \gamma_{nm} = \pi \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2},$$

запишем частное решение в виде:

$$\varphi_{nm}(x, y, z) = \sin \alpha_n x \cdot \sin \beta_m y \cdot \text{sh} \gamma_{nm} z.$$

Данное решение удовлетворяет граничным условиям на всех гранях, кроме $z = c$. Для выполнения граничного условия на $z = c$ разложим искомый потенциал в ряд по полному набору функций φ_{nm} :

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{n,m} A_{nm} \varphi_{nm}(x, y, z). \quad (5.71)$$

Коэффициенты разложения можно определить из граничного условия

$$\varphi(x, y, c) = V(x, y) = \sum_{nm} A_{nm} \varphi_{nm}(x, y, c). \quad (5.72)$$

Полученное соотношение представляет собой разложение в двойной ряд Фурье. Определение ряда Фурье имеет следующий общий вид:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \cos \left(\frac{2\pi m x}{a} \right) + B_m \sin \left(\frac{2\pi m x}{a} \right) \right], \quad (5.73)$$

где коэффициенты A_m и B_m связаны с $f(x)$ равенствами:

$$A_m = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) \cos \left(\frac{2\pi m x}{a} \right) dx; \quad B_m = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) \sin \left(\frac{2\pi m x}{a} \right) dx.$$

Следовательно, коэффициенты разложения A_{nm} в (5.72) равны:

$$A_{nm} = \frac{4}{a^2 \text{sh} \gamma_{nm} c} \int_0^a \int_0^b V(x, y) \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) dx dy.$$

Таким образом, решение задачи определяется выражением (5.71). ◀

Пример 5.§5.2. Потенциал на боковой и нижней поверхностях цилиндра равен нулю, а на верхней поверхности потенциал равен $V(\rho, \alpha)$. Найти потенциал в произвольной точке внутри цилиндра. Радиус цилиндра R , высота H , ρ и α — переменные цилиндрической системы координат.

► Запишем уравнение для скалярного потенциала в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (5.74)$$

Решение уравнения (5.74) следует искать в виде $\varphi = R(\rho)Q(\alpha)Z(z)$. В результате разделения переменных получим три уравнения:

Уравнение	Общее решение
$Z'' - k^2 Z = 0$	$Z = C \exp(+kz) + D \exp(-kz)$
$Q'' = \nu^2 Q = 0$	$Q = A \exp(+i\nu\alpha) + B \exp(-i\nu\alpha)$
$R'' + \rho^{-1} R' + (k^2 - \nu^2/\rho^2) R = 0$	$R = E J_\nu(k\rho) + F J_{-\nu}(k\rho)$

Здесь $J_m(x)$ — функция Бесселя [14]. При решении данной задачи из условия однозначности потенциала и его обращения в ноль при $z = 0$ следует выбрать такие комбинации: $Q(\alpha) = A \sin(m\alpha) + B \cos(m\alpha)$, $Z(z) = \text{sh}(kz)$, где m — произвольно целое положительное число, k — постоянная, подлежащая определению. Чтобы потенциал был конечным при $\rho = 0$, необходимо положить $F = 0$, а из условия обращения потенциала в ноль при $\rho = R$ следует, что k принимает значения: $k_{nm} = x_{nm}/R$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, где x_{nm} — корни уравнения $J_m(x) = 0$. Следовательно, общее решение уравнения (5.74) имеет вид:

$$\varphi(\rho, \alpha, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{nm}\rho) \text{sh}(k_{nm}z) [A_{nm} \sin(m\alpha) + B_{nm} \cos(m\alpha)]. \quad (5.75)$$

При $z = H$ данное решение должно принимать значение $V(\rho, \alpha)$, т.е.:

$$V(\rho, \alpha) = \sum_{nm} \text{sh}(k_{mn}H) J_m(k_{mn}\rho) [A_{nm} \sin(m\alpha) + B_{nm} \cos(m\alpha)]. \quad (5.76)$$

Как видно, (5.76) есть ряд Фурье по переменной α и ряд Фурье-Бесселя [21] по переменной ρ . Определения, связанные с рядом Фурье, представле-

ны формулами (5.73). Аналогично, для ряда Фурье-Бесселя имеем:

$$f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{vm} J_v(x_{vm}\rho/a); \quad A_{vm} = \frac{2}{a^2 J_{v+1}^2(x_{vm})} \int_0^a \rho f(\rho) J_v\left(\frac{x_{vm}\rho}{a}\right) d\rho. \quad (5.77)$$

Таким образом, коэффициенты A_{nm} и B_{nm} в (5.77) определяются выражениями:

$$A_{nm} = C \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho V(\rho, \alpha) J_m(k_{mn}\rho) \sin(m\alpha) d\alpha d\rho, \quad (5.78)$$

$$B_{nm} = C \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho V(\rho, \alpha) J_m(k_{mn}\rho) \cos(m\alpha) d\alpha d\rho,$$

где $C = 2 \operatorname{csch}(k_{mn}H) / \pi R^2 J_{m+1}^2(k_{mn}R)$. Формула (5.75) с учетом (5.78) является решением поставленной задачи. ◀

Комментарий: Следует иметь в виду, что (5.75) определяется при условии, что потенциал $\varphi = 0$ при $z = 0$ для всех ρ и при $r = R$ для всех z . Форма ряда (5.75) будет иной для других граничных условий.

Ряд Фурье-Бесселя (5.75) может быть использован при рассмотрении конечных интервалов изменения радиальной переменной цилиндрической системы координат, например, для области внутри цилиндра данного радиуса. Если же рассматривается неограниченное пространство и ρ может быть ∞ , то ряд переходит в интеграл аналогично переходу ряда Фурье в интеграл Фурье. Например, если интеграл в области, свободной от зарядов, конечен и стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$, то общее решение имеет вид:

$$\varphi(\rho, \alpha, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{-k|z|} J_m(k\rho) [A_m(k) \sin(m\alpha) + B_m(k) \cos(m\alpha)]. \quad (5.79)$$

Пример 5.§5.3. Диск радиуса R заряжен до величины q с поверхностной плотностью σ . Заряд распределен по диску так, что его поверхность имеет постоянный потенциал. Найти потенциал в любой точке пространства и распределение заряда на диске [13].

► Из условий задачи следует, что потенциал симметричен относительно оси диска и плоскости, в которой расположен диск. Выберем цилиндрическую систему координат с осью z и с началом координат в центре диска. В соответствии с формулой (5.79) потенциал можно представить следующим образом:

$$\varphi(\rho, z) = \int_0^{\infty} f(k) e^{-k|z|} J_0(k\rho) dk, \quad (5.80)$$

где J_0 — функция Бесселя, а $f(k)$ должна быть определена из граничных условий при $z = 0$. По условию задачи $\varphi(\rho, 0) = V$ для $\rho \leq R$. Значение потенциала $\varphi(\rho, 0)$ для $\rho > R$ неизвестно. Однако из симметрии задачи ясно, что нормальная производная потенциала равна нулю, так как напряженность поля лежит в плоскости x, y . В результате граничные условия имеют вид:

$$\varphi(\rho, 0) = V \quad \text{для} \quad \rho \leq R; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\rho, 0) = 0 \quad \text{для} \quad R \leq \rho < \infty \quad (5.81)$$

Так как потенциал диска на больших расстояниях должен совпадать с потенциалом точечного заряда q , находим:

$$\varphi(\rho, z) \rightarrow \frac{q}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = q \int_0^\infty e^{-k|z|} J_0(k\rho) dk. \quad (5.82)$$

В данной формуле использовано известное интегральное равенство [14]. Из сравнения (5.82) и (5.80) имеем $f(0) = q$.

Используя граничные условия (5.81) на основании (5.80), получим систему интегральных уравнений

$$\int_0^\infty f(k) J_0(k\rho) dk = V, \quad 0 \leq \rho \leq R; \quad \int_0^\infty k f(k) J_0(k\rho) dk = 0, \quad \rho > R \quad (5.83)$$

Система интегральных уравнений, определенных в разных областях переменной, называется системой парных интегральных уравнений. Известно аналитическое решение следующей системы парных уравнений [13]:

$$\int_0^\infty g(y) J_n(yx) dy = x^n, \quad 0 \leq x < 1; \quad \int_0^\infty yg(y) J_n(yx) dy = 0, \quad 1 < x < \infty \quad (5.84)$$

Решение системы (5.84) имеет вид [13]:

$$g(y) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)} \sqrt{\frac{2}{y}} J_{n+1/2}(y). \quad (5.85)$$

Система уравнений (5.83) сводится к системе (5.84) заменой переменных $x = \rho/R, y = kR, n = 0$. Таким образом,

$$g(kR) = \frac{f(kR)}{RV} = \frac{2 \sin(kR)}{\pi kR}. \quad (5.86)$$

Учитывая, что $f(0) = q$, из (5.86) получим $q = 2RV/\pi$. Следовательно функциональный вид $f(x)$ есть:

$$f(x) = q \frac{\sin(x)}{x}.$$

В результате потенциал в произвольной точке пространства на основании (5.80) определяется выражением:

$$\varphi(\rho, z) = q \int_0^\infty \frac{\sin(kR)}{kR} e^{-|z|k} J_0(k\rho) dk. \quad \blacktriangleleft \quad (5.87)$$

Частные случаи выражения (5.87) определяют значение потенциала на оси диска и в плоскости диска:

а) потенциал на оси диска следует из формулы (5.87) при $\rho = 0$:

$$\varphi(0, z) = q \int_0^\infty \frac{\sin(kR)}{kR} e^{-|z|k} J_0(0) dk = \frac{q}{R} \operatorname{arctg} \frac{R}{|z|};$$

так как $J_0(0) = 1$.

б) потенциал в плоскости диска: $\varphi(\rho, 0) = (q/R) \arcsin(R/\rho)$ для $\rho > R$ и $\varphi(\rho, 0) = V$ для $\rho \leq R$.

Поверхностная плотность заряда на диске может быть вычислена с учетом граничного условия $E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$, а т.к. $E_{2n} = -E_{1n}$, то $E_{2n} = -2\pi\sigma$. В результате

$$\sigma(\rho) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{q}{2\pi R} \int_0^\infty \sin(kR) J_0(k\rho) dk. \quad (5.88)$$

Интеграл в (5.88) является известным разрывным интегралом [14], тождественно равным нулю при $\rho > R$, а при $\rho < R$ значение интеграла определяется выражением: $1/\sqrt{R^2 - \rho^2}$. В результате, плотность заряда равна:

$$\sigma(\rho) = \frac{q}{2\pi R} \frac{1}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}.$$

Комментарий: Интегрируемая особенность в σ при $\rho \rightarrow R$ связана с предположением о бесконечно малой толщине диска.

Задание на дом: решить задачи 5.§9.13–5.§9.15 на стр 206.

§6 Метод изображений.

Данный метод используется в тех задачах, в которых требуется определить поле одного или нескольких точечных зарядов при условии заданности поля на некоторых поверхностях. Суть метода изображений состоит в подборе эффективной системы точечных зарядов, которые обеспечивают выполнение граничных условий. Эти заряды называются "зарядами-изображениями". Заряды - изображения, как правило, находятся вне объема пространства, где определяется поле, поскольку потенциал создаваемого ими поля должен удовлетворять уравнению Лапласа в этом объеме.

В качестве простейшего примера можно рассмотреть точечный заряд вблизи бесконечной проводящей плоскости, имеющей нулевой потенциал (см. решение примера 5.§4.1). В этом случае заряд $-q$ в точке $-a$ есть заряд-изображение.

Пример 5.§6.1 *Расстояние между двумя полубесконечными параллельными прямолинейными проводниками равно $2a$. На расстоянии Δ от центральной плоскости между проводниками находится точечный заряд q . Найти напряженность поля и скалярный потенциал точечного заряда q , и силу взаимодействия заряда с проводниками.*

► Выберем систему координат так, что ось x перпендикулярна плоскостям проводников, а ось y совпадает с центральной линией между проводниками. Пусть заряд q лежит на оси x . В соответствии с принципом суперпозиции и на основании метода изображений будем рассуждать следующим образом. Обозначим левую и правую плоскости проводников один и два, соответственно. Тогда заряд q приводит к появлению зарядов изображений как в первом, так и во втором проводнике. Сами заряды изображений также приводят к появлению бесконечной системы зарядов изображений в противоположных проводниках.

Рассмотрим последовательно появление зарядов изображений начиная с первого проводника. В соответствии с заданной геометрией в первом проводнике должен появиться заряд изображения величиной $-q$ в точке с координатой $x = -(2a + \Delta)$. В силу наличия второго проводника, находящегося от данного заряда на расстоянии $3a + \Delta$, во втором проводнике появится заряд изображения от этого заряда, равный q и находящийся в точке с координатой $x = 4a + \Delta$. Соответственно данный заряд приведет к появлению заряда изображения величиной $-q$ в первом проводнике в точке с координатой $x = -(6a + \Delta)$. Продолжая получим бесконечную систему зарядов изображений, которые приводят к следующему значению скалярного потенциала для этого случая:

$$\varphi^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k q}{|\mathbf{r} - \mathbf{i}(-1)^k (2ka + \Delta)|}. \quad (5.89)$$

Аналогичные рассуждения можно выполнить, начиная с заряда изображения во втором проводнике. Действительно, заряд q приводит к появлению заряда изображения $-q$ в первом проводнике в точке с координатой

$x = (2a - \Delta)$. Соответственно данный заряд приводит к появлению заряда изображения q в первом проводнике в точке с координатой $x = -(4a - \Delta)$. В свою очередь данный заряд приводит к появлению заряда изображения $-q$ во втором проводнике в точке с координатой $x = 6a - \Delta$ и так далее. В результате появляется еще одна бесконечная система зарядов изображений, которая приводит к значению скалярного потенциала равного:

$$\varphi^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k q}{|\mathbf{r} - \mathbf{i}(-1)^{k-1}(2ka - \Delta)|}. \quad (5.90)$$

Таким образом, в пространстве между проводниками возникает поле со скалярным потенциалом:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{i}\Delta|} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}. \quad \blacktriangleleft \quad (5.91)$$

В частном случае, когда заряд находится точно по середине между двумя проводниками $\Delta = 0$ и в этом случае скалярный потенциал определяется равенством:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r}|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k q}{|\mathbf{r} - \mathbf{i}(-1)^k 2ka|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k q}{|\mathbf{r} - \mathbf{i}(-1)^{k-1} 2ka|}. \quad (5.92)$$

В полученном выражении перегруппируем слагаемые, объединив поля в первом и втором проводниках в отдельных суммах. В результате:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^k q}{|\mathbf{r} - \mathbf{i} 2ka|} + \frac{q}{|\mathbf{r}|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k q}{|\mathbf{r} - \mathbf{i} 2ka|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k q}{|\mathbf{r} - \mathbf{i} 2ka|}.$$

Вводя безразмерные координаты $\mathbf{r}/a = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$ для безразмерного потенциала $\psi = a\varphi/q$ получим:

$$\psi(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{(x - 2k)^2 + y^2}}. \quad (5.93)$$

Если, для примера, вычислить поле в точке $x = 1, y = 0$, то необходимо представить сумму (5.93) в виде трех слагаемых:

$$S_1 = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^k}{|1 - 2k|}; \quad S_2 = \sum_{k=0}^0 \frac{(-1)^k}{|1 - 2k|}; \quad S_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{|1 - 2k|}.$$

Результат вычислений данных сумм дает:

$$S_1 = -1 + \frac{\pi}{4}; \quad S_2 = 1; \quad S_3 = -\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом находим очевидный результат $\psi(1, 0) = S_1 + S_2 + S_3 = 0$.

Пример 5. §6.2 Найти поле, создаваемое зарядом q , расположенным на расстоянии l от центра заземленной металлической сферы радиуса R . Определить распределение индуцированного заряда на поверхности сферы и полный индуцированный заряд (рис. 5.10)

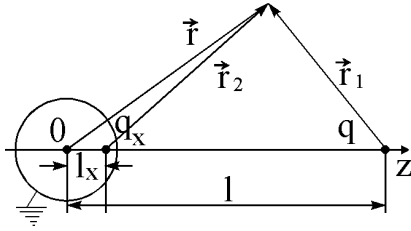


Рис. 5.10:

► Рассмотрим решение данной задачи в сферической системе координат совпадающей с центром сферы. Пусть заряд q расположен на оси z . Условие заземленности сферы означает равенство нулю ее потенциала. Допустим, что можно ввести один фиктивный заряд q_x для удовлетворения условия $\varphi(R, \theta, \varphi) = 0$.

Из симметрии системы ясно, что он может быть расположен на оси $0z$. Однако величина и местоположение данного заряда на оси $0z$ заранее не известны. Обозначим радиус-вектор заряда q_x через $l_x \mathbf{k}$, \mathbf{k} — единичный вектор по оси z . Тогда поле в произвольной точке пространства, радиус-вектор которой \mathbf{r} определяется выражением (см. рис 5.10):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r_1} + \frac{q_x}{r_2}.$$

По определению: $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{k}l$ и $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \mathbf{k}l_x$ или $r_1 = \sqrt{r^2 - 2l\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + l^2}$, $r_2 = \sqrt{r^2 - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} l_x + l_x^2}$. На поверхности сферы должно выполняться:

$$\varphi(R, \theta, \varphi) = \frac{q}{\sqrt{R^2 - 2Rl \cos \theta + l^2}} + \frac{q_x}{\sqrt{R^2 - 2Rl_x \cos \theta + l_x^2}} = 0. \quad (5.94)$$

Приводя последнее выражение к общему знаменателю, получим:

$$q_x^2(R^2 - 2Rl \cos \theta + l^2) = q^2(R^2 - 2Rl_x \cos \theta + l_x^2).$$

Так как (5.94) имеет место при любых значениях угла θ должны выполняться равенства:

$$q_x^2(R^2 + l^2) = q^2(R^2 + l_x^2); \quad 2q_x^2 Rl = 2q^2 Rl_x. \quad (5.95)$$

Решая данную систему относительно q_x и l_x , получаем:

$$q_x = -q \frac{R}{l}; \quad l_x = \frac{R^2}{l}. \quad (5.96)$$

Таким образом, для определения поля весь индуцированный на поверхности сферы заряд эффективно можно заменить одним точечным зарядом, который и является зарядом-изображением. В результате поле в произвольной

точке пространства есть:

$$\varphi_{ql}(r, \theta, \varphi) = \frac{q}{\sqrt{r^2 - 2rl \cos \theta + l^2}} - \frac{q_x}{\sqrt{r^2 - 2rl_x \cos \theta + l_x^2}}. \quad (5.97)$$

Для определения плотности индуцированного заряда на металлической сфере, воспользуемся граничным условием:

$$E_{2n} = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \bigg|_{r=R} = 4\pi\sigma. \quad (5.98)$$

Подставляя (5.97) в (5.98), получим:

$$\sigma = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi_{ql}}{\partial r} \bigg|_{r=R} = - \frac{1}{4\pi R} \frac{q(l^2 - R^2)}{(R^2 - 2Rl \cos \theta + l)^{3/2}}. \quad (5.99)$$

Полный индуцированный заряд на сфере может быть найден интегрированием σ по поверхности сферы.

$$q_{\text{инд}} = \oint \sigma dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -q \frac{R}{l}, \quad (5.100)$$

т.е. полный индуцированный заряд на поверхности сферы равен величине заряда-изображения. ◀

Комментарий: Если точечный заряд q находится внутри сферы, нужно лишь изменить знак на противоположный в выражении (5.99) для σ , поскольку внешняя нормаль к проводнику направлена теперь к центру сферы.

Угловое распределение поверхностного заряда аналогично найденному, но полный наведенный заряд равен $-q$.

Пример 5.§6.3. Точечный заряд q расположен на расстоянии l от центра заряженной до величины Q сферы радиуса R . Найти потенциал электростатического поля вне сферы [13].

► Для нахождения решения воспользуемся принципом суперпозиции и решением предыдущей задачи. Представим, что проводящая сфера заземлена. Тогда $q' = -qR/l$ - полный заряд на сфере, на основании (5.100). Разомкнем заземляющий провод и внесем на сферу заряд $Q - q'$. Полный заряд на сфере при этом станет равным Q . Очевидно, однако, что внесенный дополнительный заряд $Q - q'$ равномерно распределится по поверхности сферы, поскольку электростатическое поле заряда q уже уравновешено зарядом q' . Таким образом, вне сферы потенциал дополнительного заряда

$Q - q'$ равен потенциалу точечного заряда той же величины, расположенному в центре сферы. На основании принципа суперпозиции с учетом (5.97) находим:

$$\varphi(r, \theta, \varphi) = \varphi_{ql}(r) + \frac{Ql + Rq}{lr}, \quad (5.101)$$

где φ_{ql} определяется выражением (5.97).

Пример 5.§6.4. Точечный заряд расположен на расстоянии l от центра сферического проводника радиуса R с заданным потенциалом V . Найти поле вне проводника [13].

► Очевидно, что V имеет вид (5.101) с той лишь разницей, что $Q - q'$ заменяется на VR . Действительно, как видно из (5.101) и (5.97), $\varphi_{ql} = 0$, а член $(Q - q')/R = VR/R = V$. Таким образом,

$$\varphi(r, \theta, \varphi) = \varphi_{ql}(r) + V \frac{R}{r}.$$

Пример 5.§6.5. Проводящая сфера радиуса R помещена в однородное электрическое поле напряженностью \mathbf{E}_0 . Найти поле в любой точке пространства [13].

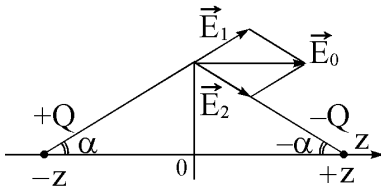


Рис. 5.11:

► Под действием внешнего поля заряды проводника перераспределяются по поверхности. На поверхности проводника поле имеет только нормальную составляющую, т.е. наличие проводника делает поле неоднородным. Для определения поля воспользуемся искусственным приемом описания внешнего однородного поля \mathbf{E}_0 с помощью двух точечных зарядов (см. рис. 5.11) [13]. Можно считать, что однородное поле создано зарядами $\pm Q$, расположенными в бесконечно удаленных точках $z = \pm\infty$. Если z конечно, но велико, имеем (см рис. 5.11)):

$$E \simeq 2 \frac{Q}{z^2} \cos \alpha \simeq \frac{2Q}{z^2}; \quad \cos(\alpha) \approx 1.$$

В пределе $z \rightarrow \infty$, $Q \rightarrow \infty$ при условии $Q/z^2 = \text{const} = E_0/2$ данное приближенное описание однородного поля становится точным.

Поместим теперь проводящую сферу в начало координат. Суммарное поле определяется по принципу суперпозиции полями зарядов $\pm Q$, находящихся на расстоянии $\pm z$ от начала координат, и полем зарядов изображений, равных $\pm Q R/z$ расположенных в точках $z^* = \pm R^2/z$ (см. пример 5.§6.2). Таким образом, полный потенциал равен: $\varphi = \varphi_{Q, -|z|} + \varphi_{-Q, |z|}$, где

$\varphi_{q,l}$ определено выражением (5.97). При условиях $|z| \gg R$ и $|z| \gg r$, разлагая φ в ряд по параметрам малости $r/z \ll 1$ и $R/z \ll 1$, найдем:

$$\begin{aligned} \varphi \approx \frac{Q}{|z|} \left[1 - \frac{r}{|z|} \cos \theta \right] - \frac{Q}{|z|} \left(1 + \frac{r}{|z|} \cos \theta \right) + Q \frac{R}{|z|} \left(1 + \frac{R^2}{r|z|} \cos \theta \right) - \\ - Q \frac{R}{|z|} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{R^2}{z^2} \cos \theta \right) = -\frac{2Q}{z^2} (r - R^3/r^2) \cos \theta. \end{aligned}$$

Вычисляя предел данного выражения, получим:

$$\lim_{Q \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty} \left(-\frac{2Q}{z^2} \right) \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta = -E_0 r \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta.$$

Соответственно выражение для напряженности поля есть:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = \left[\mathbf{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{a}_\varphi \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] E_0 r \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta = \\ = \mathbf{a}_r E_0 \left(1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta - \mathbf{a}_\theta E_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \theta. \end{aligned}$$

Поверхностная плотность заряда равна:

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \bigg|_{r=R} = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos \theta. \quad \blacktriangleleft$$

Комментарий: Так как интеграл от поверхностной плотности заряда равен нулю, безразлично, заряжена сфера или изолирована.

Задание на дом: решить задачи 5.§9.16–5.§9.18 на стр. 206.

§7 Дипольный момент. Тензор квадрупольного момента. Поле системы зарядов на больших расстояниях

Мультпольное разложение скалярного потенциала произвольной системы зарядов на больших расстояниях определяется выражением (4.27) и, с учетом первых трех членов разложения, определяется полным зарядом системы, дипольным и квадрупольным моментом. В этом смысле эти геометрические характеристики распределения зарядов играют важную роль в электродинамике и их вычисление имеет важные практические приложения.

Пример 5.§7.1 Плотность заряда в одном из возбужденных состояний атома водорода в сферических координатах имеет вид:

$$\rho = \rho_0 r^4 e^{-\lambda r} \sin^4 \theta,$$

где $\rho_0, \lambda = \text{const}$. Вычислить дипольный момент \mathbf{d} и компоненты квадрупольного момента $Q_{\alpha,\beta}$ такой системы зарядов. [3]

► По определению дипольного момента (5.9) находим:

$$\mathbf{d} = \int_V \rho(r) \mathbf{r} dv = \int_V \rho[\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z] dv = \sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{e}_\alpha d_\alpha.$$

Объемом интегрирования в данной задаче является все пространство, так как ρ отлично от нуля в любой его точке. Вычисление всех компонент d_α дает значение, равное нулю, т.к. вычисляются интегралы от нечетных функций в симметричных пределах, т.е. $\mathbf{d} = \mathbf{0}$.

Для вычисления компонент тензора квадрупольного момента воспользуемся формулой (5.10) и вычислим объемный интеграл в сферической системе координат. При $\alpha = \beta = 1$ получим:

$$\begin{aligned} Q_{11} = Q_{xx} &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r)[3x^2 - r^2]r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \rho_0 \int_0^\infty r^8 e^{-\lambda r} dr \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta (3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 1) \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (5.102)$$

Интегрирование по углу φ сводится к выражению:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \pi.$$

В результате для (5.102) после интегрирования по φ и замены переменных интегрирования $u = \lambda r, x = \cos \theta$ находим:

$$Q_{xx} = \frac{\rho}{\lambda^9} \int_0^\infty u^8 e^{-u} du \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^2 [3\pi(1 - x^2) - 2\pi] dx = 2\pi \frac{\rho_0}{\lambda^9} \frac{32 \cdot 8!}{15 \cdot 7}.$$

Аналогичные вычисления для Q_{yy} дают: $Q_{yy} = Q_{xx}$, а для $Q_{zz} = -2Q_{xx}$. При $\alpha \neq \beta$ $Q_{\alpha\beta}$ результат вычисления дает $Q_{\alpha\beta} = 0$. ◀

Пример 5.§7.2. Половина шара радиуса R заряжена с постоянной объемной плотностью ρ . Определить компоненты дипольного и тензора квадрупольного моментов такой системы зарядов.

► Выбирая сферическую систему координат в центре основания половины шара, на основании (5.9) получим $d_x = d_y = 0$. Соответственно для d_z результат вычислений имеет вид:

$$d_z = \int \rho z r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{3}{8} QR.$$

Здесь Q — полный заряд половины шара: $Q = \rho \frac{2}{3} \pi R^3$.

Q_{xx} — компонента тензора квадрупольного момента на основании (5.10) равна:

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \rho(3x^2 - r^2) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 1) \sin \theta d\theta d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Аналогично находим, что равны нулю и другие компоненты тензора $Q_{\alpha\beta}$. Таким образом квадрупольный момент у такой системы зарядов отсутствует. ◀

Пример 5.§7.3 Цилиндр высоты H и радиуса R заряжен с объемной плотностью $\rho = \rho_0 = \text{const}$. Определить Q_{xx} элемент тензора квадрупольного момента такой системы зарядов.

► По определению для Q_{xx} в цилиндрической системе координат, связанной с осью цилиндра, находим:

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \rho_0 \int_0^R \int_0^H \int_0^{2\pi} [3r^2 \cos^2 \alpha - (r^2 + z^2)] r dr dz d\alpha = \\ &= \frac{\rho_0 \pi H R^4}{4} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{H}{R} \right)^2 \right]. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

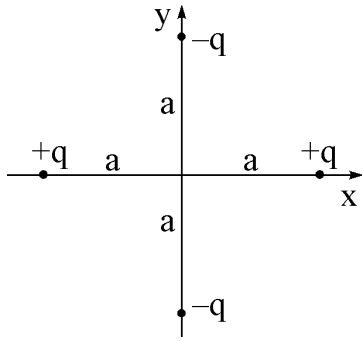


Рис. 5.12:

Пример 5.§7.4. Определить поле системы точечных зарядов на больших расстояниях (рис.5.12).

► Для нахождения поля необходимо определить, какой величиной характеризуется данное распределение зарядов. В данном случае полный заряд системы равен нулю. Дипольный момент также равен нулю:

$$\mathbf{d} = q(-\mathbf{ia}) - q(\mathbf{ja}) + q(\mathbf{ia}) - q(\mathbf{ja}) = 0.$$

Определим компоненты квадрупольного момента, для примера:

$$Q_{11} = Q_{xx} = \sum_{i=1}^4 q_i (3x_i^2 - r_i^2) = q2a^2 + qa^2 + q2a^2 + qa^2 = 6a^2q.$$

Аналогично вычисляются другие компоненты. В результате $Q_{22} = -Q_{11}$, а Q_{ik} $i, k \in 1, 2$ при $i \neq k$ равны нулю. Таким образом, скалярный потенциал

заданной системы зарядов на больших расстояниях имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{2r^5}(x^2Q_{xx} + y^2Q_{yy}) = -\frac{3a^2q}{r^3}\sin^2\theta(1 - 2\cos^2\varphi),$$

где r, θ, φ — переменные сферической системы координат. ◀

Пример 5.§7.5. *Начало декартовой системы координат совпадает с центром тонкого кольца радиуса R лежащего в плоскости xy . Найти поле на больших расстояниях от кольца с точностью до квадрупольных слагаемых, если кольцо заряжено с линейной плотностью τ .*

► Полный заряд кольца равен: $q = 2\pi\tau R$. Дипольный момент такой системы зарядов равен нулю по определению:

$$\mathbf{d} = \int_L \mathbf{r}\tau dl = \int_0^{2\pi} (\mathbf{i}R\cos\alpha + \mathbf{j}R\sin\alpha)\tau R d\alpha = 0.$$

Q_{xx} компонента тензора квадрупольного момента заряженного кольца есть:

$$Q_{xx} = \int_0^{2\pi} [3x^2 - R^2]\tau R d\alpha = \int_0^{2\pi} [3R^2\cos^2\alpha - R^2]\tau R d\alpha = \tau R^3\pi.$$

Аналогично $Q_{yy} = \tau R^3\pi$, $Q_{zz} = -\tau R^3\pi$ и $Q_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$. В результате для скалярного потенциала находим:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{Q}{r} + \frac{1}{2r^5} \sum_{\alpha\beta=1}^3 Q_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta + \dots \simeq \frac{Q}{r} + \frac{1}{2r^5}[x^2Q_{xx} + y^2Q_{yy}] + \dots = \\ &= \frac{Q}{r} + \frac{\tau R^3\pi}{2r^3} [1 - 3\cos^2\theta] + \dots \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Пример 5.§7.6. *Найти поле точечного диполя $\mathbf{d} = \text{const}$, расположенного в начале координат.*

► В этом случае дипольный момент единицы объема равен $\mathbf{P}_e = \mathbf{d}\delta(\mathbf{r})$ и из решения уравнения (5.12) получим для вектора Герца электрического типа: $\mathbf{\Pi} = \mathbf{d}/r$. Отсюда на основании (5.11) имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -4\pi\mathbf{d}\delta(\mathbf{r}) + \text{rot rot } \frac{\mathbf{d}}{r} = \\ &= -4\pi\mathbf{d}\delta(\mathbf{r}) - \frac{1}{r^3} [\vec{\nabla} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{d}]] + \frac{3}{r^5} [\mathbf{r} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{d}]] = \\ &= -\frac{2\mathbf{d}}{r^3} + \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})}{r^3} + \frac{\mathbf{d}}{r^3} = -4\pi\mathbf{d}\delta(\mathbf{r}) + \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{d}}{r^3}.\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ ◀

Задание на дом: решить задачи 5.§9.19–5.§9.24 на стр. 206.

§8 Силы и энергия в электростатическом поле

Пример 5. §8.1. *Заряд Q равномерно распределен по поверхности сферы радиуса R . Найти абсолютную величину силы, разрывающей сферу на две равные половины. Решить задачу двумя методами с использованием формул (5.17) и (5.19).*

► Данная система зарядов создает поле равное нулю для $r < R$ и, поле совпадающее с полем точечного заряда $E = Q/r^2$ для $r > R$.

1 способ решения. Выделим произвольную половину сферы. На элемент поверхности сферы ds действует сила $E^2 \mathbf{n} ds / 8\pi$. Здесь \mathbf{n} — единичный вектор нормали к элементу поверхности ds . По основанию рассматриваемой полусферы поле равно нулю. Таким образом, результирующая сила равна поверхностному интегралу по половине полусферы:

$$\mathbf{F} = \int_{S/2} \frac{E^2}{8\pi} \mathbf{n} ds = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{E^2}{8\pi} \mathbf{n} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Вычислим проекции этой силы на декартовы оси с учетом: $n_x = \sin \theta \cos \varphi$, $n_y = \sin \theta \sin \varphi$. Например, для F_z имеем:

$$F_z = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{E^2}{8\pi} \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{Q^2}{8R^2}. \quad (5.103)$$

Проекции $F_x = F_y = 0$.

2 способ решения. В соответствии с (5.19) имеем:

$$F_z = \oint_S [M_{xz}n_x + M_{yz}n_y + M_{zz}n_z] ds.$$

Здесь M_{ik} — тензор натяжений Максвелла (5.19). Поверхность интегрирования S включает в данном случае половину сферы и ее основание. Однако интеграл по основанию полусферы равен нулю в силу $M_{ik}=0$ для точек $r < R$. Таким образом:

$$F_z = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{E_x E_z}{4\pi} \sin \theta \cos \varphi + \frac{E_y E_z}{4\pi} \sin \theta \sin \varphi + \frac{E_z^2 - \frac{1}{2}E^2}{4\pi} \cos \theta \right] R^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (5.104)$$

По определению на сфере $E_x = Q \sin \theta \cos \varphi / R^2$, $E_y = Q \sin \theta \sin \varphi / R^2$, $E_z = Q \cos \theta / R^2$. Подставляя E_k в (5.104), находим после выполнения интегрирования: $F_z = Q^2 / 8R^2$, что совпадает с результатом (5.103) полученным первым способом решения. ◀

Пример 5.§8.2. Шар радиуса R заряжен с объемной плотностью $\rho = \text{const}$. Найти силу, разрывающую шар на две равные половины. Решить задачу двумя методами.

► На основании решения примера 5.§2.2 известно, что поле такой системы зарядов есть:

$$\mathbf{E} = \frac{4}{3} \pi \rho \mathbf{r}, \quad \text{для } r < R; \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \text{для } r > R. \quad (5.105)$$

1 способ решения. В соответствии с (5.16) сила, действующая на единицу объема равна $\rho \mathbf{E}$. Следовательно, для определения суммарной силы действующей на половину шара надо проинтегрировать данное выражение по объему половины шара. При интегрировании получим, что F_x и F_y равны нулю, а для F_z находим:

$$F_z = \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \rho E(r) \cos \theta r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{3}{16} \frac{Q^2}{R^2}, \quad (5.106)$$

где Q — полный заряд шара.

2 способ решения. На основании (5.19) для вычисления силы необходимо интегрировать по замкнутой поверхности, которая в данном случае состоит из основания и поверхности полусферы. То есть интеграл разбивается на сумму двух интегралов.

При интегрировании по основанию для внешней нормали к поверхности имеем: $n_x = 0$, $n_y = 0$, $n_z = -1$, при этом интегрирование удобно выполнять в цилиндрической системе координат, в которой $ds = r dr d\alpha$

$$F_z^{(1)} = \int_{\text{осн}} M_{zz} n_z ds = -\frac{1}{4\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[E_z^2 - \frac{1}{2}(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) \right] r dr d\alpha.$$

С учетом (5.105) и соотношений $E_x = E_0 \cos \alpha$, $E_y = E_0 \sin \alpha$, $E_z = 0$, где $E_0 = 4\pi\rho^2/3$ находим после интегрирования: $F_z^{(1)} = Q^2/16R^2$.

При интегрировании выражения (5.19) по поверхности полусферы необходимо подставить $n_x = \sin \theta \cos \varphi$, $n_y = \sin \theta \sin \varphi$, $n_z = \cos \theta$. В результате:

$$F_z^{(2)} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} [M_{xz} \sin \theta \cos \varphi + M_{yz} \sin \theta \sin \varphi + M_{zz} \cos \theta]^2 R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{Q}{8R^2},$$

где использованы следующие выражения для тензора натяжений Максвелла:

$$M_{xz} = \frac{E_1^2}{4\pi} \sin \theta \cos \varphi \cos \theta; \quad M_{yz} = \frac{E_1^2}{4\pi} \sin \theta \sin \varphi \cos \theta; \quad M_{zz} = \left[\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right] \frac{E_1}{4\pi}$$

$E_1 = Q/R^2$. Суммарная сила: $F_z = F_z^{(1)} + F_z^{(2)} = 3Q^2/16R^2$, что совпадает с выражением (5.106). ◀

Комментарий: может показаться, что метод, основанный на использовании тензора натяжений Максвелла, весьма громоздок и не удобен. Однако преимущество этого метода проявляется там, где нет простой симметрии или известно поле на поверхности.

Пример 5.§8.3 Шар радиуса R заряжен с постоянной объемной плотностью до величины полного заряда равного Q . Определить энергию поля, создаваемого шаром.

► Напряженность поля определяется выражением (5.105). В соответствии с (5.15) полная энергия поля равна:

$$\varepsilon = \frac{Q^2}{8\pi} \left\{ \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\frac{r}{R^3} \right]^2 r^2 dr d\Omega + \int_R^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{r^2} \right]^2 r^2 dr d\Omega \right\} = \frac{3Q^2}{5R},$$

где $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$. ◀

Пример 5.§8.4. Скалярный потенциал внешнего электростатического поля имеет вид $\varphi(x, y) = \alpha \exp[-\beta(x^2 - y^2)]$ и мало меняется по размеру квадруполь (см. рис.5.12 на стр. 200). Найти энергию квадруполь в внешнем поле. [3]

► В соответствии с (5.24) и решением, приведенном в примере 5.§7.4, находим:

$$\varepsilon = \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{6} \left[Q_{xx} \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial x^2} + Q_{yy} \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial y^2} \right] = 4\alpha\beta a^2 q. \quad \blacktriangleleft$$

Задание на дом: решить задачи 5.§9.25–5.§9.27 на стр. 207.

§9 Упражнения к гл. 5.

§9.1. Найти \mathbf{E} и φ в любой точке пространства, создаваемые поверхностью, заряженной с плотностью $\sigma = \text{const}$ а) сфера радиуса R , б) бесконечный цилиндр радиуса R (см. задачу N10 в [3]).

§9.2. Плотность заряда атома водорода в основном состоянии равна:

$$\rho = -\frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right), \quad 0 \leq r \leq \infty.$$

a – боровский радиус, e – заряд электрона, r – расстояние от протона. Определить \mathbf{E} во всех точках пространства (см. задачу N12 в [3]).

§9.3. Пространство между двумя концентрическими сферами радиусов R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) заполнено сферически симметричным зарядом $\rho = ar^n$, $a = \text{const}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, r - расстояние от общего центра сфер. Найти \mathbf{E} и φ в любой точке пространства (см. задачу N13 в [3]).

§9.4. Найти потенциал, создаваемой квадратной рамкой со стороной $2a$. Линейная плотность заряда сторон рамки $\tau = \text{const}$.

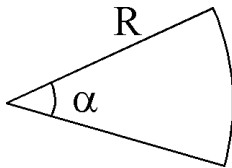


Рис. 5.13:

§9.5. Найти потенциал, создаваемый заряженным сектором радиуса R , угол α . Поверхностная плотность заряда $\sigma = \text{const}$. (рис 5.13)

§9.6. Найти потенциал внутри сферы, половина которой заряжена с объемной плотностью $\rho = \text{const}$ (см. задачу N10 в [3]).

§9.7. Найти потенциал шара радиуса R , половина которого заряжена с объемной плотностью $\rho = ar$, а вторая $\rho = \text{const}$. $a = \text{const}$.

§9.8. Цилиндр радиуса R и высоты H однородно заряжен с объемной плотностью ρ . Определить потенциал поля на оси симметрии цилиндра (см. задачу N28 в [3]).

§9.9. Внутри полусферы радиуса R распределен заряд с объемной плотностью $\rho = \rho_0 \exp(\alpha r)$. Найти \mathbf{E} в центре кривизны полусферы $\rho_0, \alpha = \text{const}$ (см. задачу N31 в [3]).

§9.10. Две концентрические сферы, имеющие радиусы R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$), разделены на полусферы одной плоскостью. Верхняя внутренняя и нижняя наружная полусферы находятся под потенциалом $V = \text{const}$. Две другие полусферы находятся под нулевым потенциалом. Найти потенциал в области $R_1 \leq r \leq R_2$ в виде ряда по полиномам Лежандра, учитывая члены до 4-го мультиполя. Проверить правильность полученного решения, рассматривая частные случаи $R_1 \rightarrow \infty$ и $R_2 \rightarrow 0$ [13].

§9.11. Поверхность полой проводящей сферы радиуса R разделена на четное число равных сегментов плоскостями проходящими через ось z и равноотстоящими по углу φ (корочки арбуза). Любые два соседних сегмента имеют равный по величине, но противоположный по знаку потенциал $\pm V$. Найти потенциал внутри сферы в случае $2n$ сегментов [13].

§9.12. Заряд равномерно распределен с поверхностной плотностью σ по поверхности сферы радиуса R , за исключением сегмента у полюса, ограниченного конусом $\theta = \alpha$. Найти потенциал внутри сферической поверхности. Из полученного решения найти предельный случай $\alpha = 0$ [13].

§9.13. Грани параллелепипеда, кроме граней $z = c$ и $z = 0$, поддерживаются под потенциалом, равным нулю. Потенциал грани $z = c$ равен $V_1 = \text{const}$, а грани $z = 0$, $V_2 = \text{const}$. Найти поле внутри параллелепипеда.

§9.14. Потенциал на боковой поверхности цилиндра равен нулю. На верхней поверхности потенциал $V = a\rho^2$, а на нижней $V = \beta\rho^3$, a и $b = \text{const}$. Найти потенциал внутри цилиндра. Радиус цилиндра R , высота H .

§9.15. Боковая поверхность цилиндра поддерживается под постоянным потенциалом φ_0 . Найти поле внутри цилиндра, если верхнее и нижнее основания цилиндра заземлены и их потенциал равен нулю. Радиус цилиндра R , высота H .

§9.16. На расстоянии α от бесконечного проводника находится точечный заряд. Определить поле вне проводника, силу притяжения заряда проводником, плотность индуцированного заряда на поверхности проводника.

§9.17. Бесконечный проводник занимает три четверти пространства. На расстояниях a и b от его граней находится точечный заряд. Найти: поле вне проводника, плотность индуцированных зарядов на его поверхности и силу притяжения заряда к проводнику.

§9.18. На расстояниях l_1 и l_2 от центра заземленной металлической сферы радиуса R находятся точечные заряды q_1 и q_2 . Найти поле вне сферы, распределение индуцированного заряда на поверхности, полный индуцированный заряд, если радиусы-векторы зарядов q_1 и q_2 определяются углами в сферической системе координат $\theta_1\varphi_1$ и $\theta_2\varphi_2$, соответственно.

§9.19. Начало декартовой системы координат совпадает с центром основания кругового цилиндра радиуса R и высоты H , заряженного с объемной плотностью $\rho = \rho_0 r^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\rho_0 = \text{const}$. Определить скалярный потенциал на больших расстояниях от цилиндра с точностью до квадрупольных слагаемых.

§9.20. Кольцо радиуса R разделено пополам. Одна половина кольца заряжена с линейной плотностью τ_1 , а вторая с τ_2 . Найти φ на больших расстояниях от кольца с точностью до квадрупольных слагаемых.

§9.21. Начало координат декартовой системы совпадает с центром кривизны полусферы радиуса R . Определить поле на больших расстояниях от полусферы, заряженной с поверхностной плотностью σ , если основание полусферы заряжено с поверхностной плотностью $\sigma_2 = \text{const}$. Ограничиться точностью учета квадрупольных слагаемых.

§9.22. Доказать, что дипольный момент электронейтральной системы зарядов не зависит от выбора начала отсчета системы координат, а тензор квадрупольного момента системы зарядов не зависит от выбора начала координат, если полный заряд и дипольный момент системы равны нулю.

§9.23. Заряженная система характеризуется тензором квадрупольного момента $Q_{\alpha\beta}$. Найти напряженность поля в декартовых, цилиндрических, сферических координатах.

§9.24. Полусфера радиуса R равномерно заряжена с поверхностной плотностью σ . Используя мультипольное разложение $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ по сферическим функциям $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, представить потенциал φ электростатического поля снаружи полусферы в виде разложения по мультипольным моментам

$$Q_m^l = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \rho r^l Y_{lm}(\theta, \varphi) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi.$$

§9.25. Цилиндр радиуса R заряжен с объемной плотностью $\rho = \rho_0 r^n$, r — радиус-вектор цилиндрической системы координат, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\rho_0 = \text{const}$. Найти силу, разрывающую цилиндр на две равные половины, которая приходится на единицу высоты цилиндра.

§9.26. Сфера радиуса R заряжена с поверхностной плотностью $\sigma = \text{const}$. Найти энергию электростатического поля (см. задачу N41 в [3]).

§9.27. В одном из возбужденных состояний атома водорода плотность заряда определяется выражением

$$\rho = -\frac{e}{3^8 \pi a^7} r^4 e^{-\frac{2r}{3a}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta.$$

Здесь e — заряд электрона, a — боровский радиус $a = h^2/me^2$. Найти энергию взаимодействия протона с данным распределением заряда (использовать формулу (5.20), в которой φ положить равным потенциалу протона, расположенному в начале координат).

Глава 6

Постоянное магнитное поле. Лекции.

§1 Основные уравнения. Граничные условия

Магнитостатическое поле является частным случаем электромагнитного поля, которое создается постоянными во времени токами. В этом случае силовые характеристики поля не зависят от времени. Имеется ряд тождественных способов описания магнитостатического поля. Ниже приведены четыре, наиболее часто применяемые на практике.

Дифференциальные уравнения.

Система дифференциальных уравнений Максвелла в случае стационарных токов имеет вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (6.1)$$

где \mathbf{B} - вектор индукции, \mathbf{H} - вектор напряженности магнитного поля, \mathbf{M} - вектор намагничения или магнитный момент единицы объема вещества, \mathbf{j} - вектор плотности тока.

Для однородных, изотропных магнетиков $\mathbf{M} = \alpha \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\mu = 1/(1 - 4\pi\alpha)$, где α - магнитная восприимчивость, а μ - магнитная проницаемость среды.

Интегральные уравнения.

Интегральная форма системы уравнений Максвелла для магнитостатического поля определяется равенствами:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad d\mathbf{s} = \mathbf{n} ds; \quad \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I, \quad d\mathbf{l} = \vec{\tau} dl, \quad (6.2)$$

где \mathbf{n} - единичный вектор нормали к поверхности S , а $\vec{\tau}$ - единичный вектор касательной к контуру L вдоль направления тока.

Метод векторного потенциала.

Метод описания магнитостатического поля с использованием векторного потенциала \mathbf{A} основан на соотношении $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Обычно векторный потенциал для постоянного магнитного поля выбирается, удовлетворяющим следующему условию калибровки $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. В частном случае магнитостатического поля кулоновская калибровка и калибровка Лоренца совпадают.

Если магнитная проницаемость $\mu = \text{const}$, то векторный потенциал удо-

влетворяет неоднородному уравнению Пуассона:

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (6.3)$$

Решение неоднородного уравнения Пуассона (6.3) при отсутствии граничных условий для поля имеет вид:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (6.4)$$

Векторы Герца.

При использовании метода описания магнитостатического поля с применением векторов Герца отличным от нуля является вектор Герца магнитного типа $\mathbf{\Pi}_m$. Данный вектор также как и векторный потенциал удовлетворяет неоднородному уравнению Пуассона:

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi}_m(\mathbf{r}) = -4\pi \mathbf{M}(\mathbf{r}).$$

Решение этого уравнения в случае отсутствия граничных условий есть:

$$\tilde{\mathbf{\Pi}}(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'.$$

Граничные условия.

Поведение векторов \mathbf{B} и \mathbf{H} магнитостатического поля на границе раздела двух сред может быть определено аналогично случаю электростатического поля (см. глава 4 §1). В результате для нормальных составляющих поля на границе раздела двух сред поверхностные уравнения имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \implies \quad \operatorname{Div} \mathbf{B} \equiv B_{2n} - B_{1n} = 0; \quad \implies \quad \mu_2 H_{2n} - \mu_1 H_{1n} = 0.$$

Из уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}/c$ следуют поверхностные уравнения для тангенциальных составляющих магнитного поля:

$$\operatorname{Rot} \mathbf{H} \equiv H_{1\tau} - H_{2\tau} = \frac{4\pi}{c} i; \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\mu_1} B_{1\tau} - \frac{1}{\mu_2} B_{2\tau} = \frac{4\pi}{c} i.$$

где i - плотность поверхностного тока на границе раздела в направлении ортогональном выбранному направлению касательной.

Так как для стационарных токов $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ и $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, то нормальные и тангенциальные составляющие тока на границе раздела двух сред ведут себя следующим образом с учетом (4.10):

$$j_{2n} - j_{1n} = 0; \quad \frac{1}{\sigma_1} j_{1\tau} = \frac{1}{\sigma_2} j_{2\tau}. \quad (6.5)$$

Линии, касательные к которым совпадают с направлением тока в данной точке называются линиями тока.

Для стационарного тока $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ и линии тока являются замкнутыми, то есть не имеют ни начала, ни конца. Это означает, что существование постоянного тока только под действием кулоновских сил электростатического поля невозможно.

Для доказательства данного утверждения рассмотрим контурный интеграл вдоль произвольного замкнутого контура L :

$$\oint_L \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = \sigma \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\sigma \oint_L \operatorname{grad} \varphi \cdot d\mathbf{l} = -\sigma \oint_L d\varphi = 0 = \pm \oint_L j dl.$$

В последнем равенстве учтено, что направление плотности тока и вектора касательной к контуру или совпадает или противоположно. Таким образом, в силу произвольности контура интегрирования величина тока j должна быть равна нулю.

Обобщенный закон Ома.

Постоянные токи существуют только при наличии полей не электростатического происхождения. *Эти поля называются полями сторонних сил.* Поле сторонних сил принято характеризовать вектором напряженности сторонних сил \mathbf{E}_s . Смысл этого вектора состоит в том, что \mathbf{E}_s определяется как напряженность поля, порождаемая сторонними силами и приводящая к той же плотности тока, что и созданная сторонними силами. Это означает, что для замкнутого контура с током дифференциальная форма закона Ома при наличии сторонних сил обобщается и имеет вид:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_s). \quad (6.6)$$

§2 Поле системы токов

Мультипольное разложение.

В случае однородной магнитоизотропной среды векторный потенциал произвольной системы токов можно представить в виде мультипольного разложения векторного потенциала в полной аналогии со случаем мультипольного разложения скалярного потенциала:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = \mu \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{A}_l(\mathbf{r}) = \mu \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{r_{\leq}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \alpha) dv',$$

где α – угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}' , A_l – мультиполь векторного потенциала. Для компонент вектора мультиполя векторного потенциала применимы методы вычислений, которые были описаны для вычисления мультиполей скалярного потенциала (Глава 4 §3).

Поле на больших расстояниях.

Как и в случае постоянного электрического поля важное значение имеет случай определения поля на больших расстояниях от замкнутой системы токов. Очевидно, что в этом случае радиальная координата точки наблюдения $r = r_>$, а радиальная координата точки интегрирования $r' = r_<$.

Рассмотрим явное выражение нескольких первых слагаемых в мультипольном разложении векторного потенциала.

Нулевой мультиполь.

Для ограниченных в пространстве замкнутых токов нулевой мультиполь векторного потенциала равен нулю, что наглядно видно при предельном переходе к линейным токам:

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{c} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{1}{r} dv' \implies \sum_i \frac{I_i}{cr} \oint_{L_i} d\mathbf{l} = 0.$$

Первый мультиполь.

Первый мультиполь векторного потенциала определяется выражением:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{c} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{r'}{r^2} P_1(\cos \alpha) dv' = \frac{1}{c} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}) dv'; \quad \mathbf{a} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Для дальнейших преобразований представим тождественно подынтегральное выражение в определении первого мультиполя следующим образом:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}) \equiv \frac{1}{2} [\mathbf{j}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{j}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a})] = \frac{1}{2} \left\{ [\mathbf{a} \times [\mathbf{j} \times \mathbf{r}']] + \mathbf{r}' (\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}) + \mathbf{j}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}) \right\}.$$

В результате, векторный мультиполь \mathbf{A}_1 можно переписать в виде:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{2c} \int_V [[\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')] \times \mathbf{a}] dv' + \mathbf{J} = \frac{[\vec{\mu} \times \mathbf{r}]}{r^3} + \mathbf{J}. \quad (6.7)$$

Здесь $\vec{\mu}$ – магнитный момент системы токов (3.99)

$$\vec{\mu} \equiv \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')] dv' \implies \frac{I}{2c} \oint_L [\mathbf{r}' \times d\mathbf{l}],$$

а интеграл \mathbf{J} определен равенством:

$$\mathbf{J} \equiv \frac{1}{2c} \int_V \left[\mathbf{r}' (\mathbf{j} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{j} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}) \right] dv' \equiv \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{b} dv'. \quad (6.8)$$

Покажем, что выделенный векторный интеграл \mathbf{J} в формуле (6.7) обращается в ноль для замкнутых токов. Для этого перепишем подынтегральное выражение в интеграле \mathbf{J} в декартовых координатах:

$$\mathbf{b} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k x'_k \sum_{n=1}^3 j_n a_n + \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k j_k \sum_{n=1}^3 x'_n a_n,$$

где \mathbf{e}_k - единичные векторы декартовой системы координат, x'_k, j_k, a_k - декартовы компоненты векторов \mathbf{r}', \mathbf{j} и \mathbf{a} , соответственно.

Вычислим последовательно полученные интегралы. Рассмотрим для примера выражение:

$$\int_V x' j_x(\mathbf{r}') dv' = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \text{grad} \left(\frac{x'^2}{2} \right) dv' = \int_V \left[\vec{\nabla} \left(\frac{x'^2}{2} \mathbf{j} \right) - \frac{x'^2}{2} \text{div} \mathbf{j} \right] dv' = 0. \quad (6.9)$$

В последнем интеграле слагаемое, содержащие $\text{div}(x'^2 \mathbf{j})$ равно нулю на основании теоремы Гаусса, так как переходя к поверхностному интегралу, получим выражение содержащее нормальную составляющую плотности тока на поверхности, ограничивающей объем V . Для замкнутых, ограниченных в пространстве токов такая составляющая тока равна нулю. В силу этого и сам интеграл равен нулю. Слагаемое содержащее $\text{div} \mathbf{j}$ в (6.9) равно нулю в силу условия стационарности тока $\text{div} \mathbf{j} = 0$.

Полностью аналогичные вычисления для слагаемых вида $y' j_y$ и $z' j_z$ также приводят к выражениям равным нулю. Следовательно:

$$\int_V x'_k j_k(\mathbf{r}') dv' = 0, \quad k \in 1, 2, 3.$$

Рассмотрим оставшиеся слагаемые в (6.8). Например для проекции вектора \mathbf{J} на ось x получим:

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{2c} \int \left(x' j_y a_y + x' j_z a_z + j_x y' a_y + j_x z' a_z \right) dv' = \\ &= \frac{1}{2c} \int \left[a_y \left(x' j_y + y' j_x \right) + a_z \left(x' j_z + z' j_x \right) \right] dv' = \\ &= \frac{1}{2c} \int \left[a_y \left(\mathbf{j} \cdot \text{grad}' (x' y') \right) + a_z \left(\mathbf{j} \cdot \text{grad}' (x' z') \right) \right] dv' = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2c} \int \left[a_y \left(\operatorname{div} (\mathbf{j} x' y') \right) - x' y' \operatorname{div} \mathbf{j} + a_z \left(\operatorname{div} (\mathbf{j} x' z') \right) - x' z' \operatorname{div} \mathbf{j} \right] dv' = 0.$$

Аналогично можно показать, что J_y и J_z также равны нулю.

В результате, первый мультиполь векторного потенциала системы замкнутых токов определяется магнитным моментом системы токов и равен:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{[\vec{\mu} \times \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (6.10)$$

Индукция на больших расстояниях.

Вектор индукции на больших расстояниях от системы замкнутых токов в приближении первого мультиполя векторного потенциала на основании (6.10) равен:

$$\mathbf{B} \approx \operatorname{rot} \mathbf{A}_1 = \frac{3(\vec{\mu} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \vec{\mu}}{r^3}, \quad \mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (6.11)$$

Как следует из полученного выражения любая замкнутая система токов создает на больших расстояниях магнитное поле величина вектора индукции которого затухает с ростом расстояния от системы как r^{-3} .

В связи со слабостью магнитного поля практически часто достаточно ограничиться только первыми исчезающими слагаемыми мультипольного разложения для определения поля с заданной точностью.

Последующие мультиполи векторного потенциала приводят к определению магнитно-квадрупольного, магнитно -октупольного и т.д. моментов системы токов. Их явные выражения не представляют интереса в рамках данного курса и здесь не приводятся.

§3 Энергия постоянного магнитного поля

Общая формула для расчета энергии магнитостатического поля ε в объеме V имеет вид:

$$\varepsilon = \int_V \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{8\pi} dv. \quad (6.12)$$

Данное выражение можно переписать тождественно с использованием других характеристик магнитного поля. Учитывая, что $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ выражение (6.12) можно переписать в виде:

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi} \int_V \left[\operatorname{div} [\mathbf{A} \times \mathbf{H}] + \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} \right] dv = \quad (6.13)$$

$$= \frac{1}{8\pi} \oint_S [\mathbf{A} \times \mathbf{H}] \cdot d\mathbf{s} + \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{H} dv,$$

где S — поверхность, ограничивающая объем пространства V .

При рассмотрении всего пространства при отсутствии специальных граничных условий поверхностный интеграл в (6.13) обращается в ноль, так как на сфере бесконечного радиуса подынтегральная функция затухает быстрее чем растет элемент поверхности. В этом случае выражение (6.13), по смыслу, эквивалентно выражению для энергии электростатического поля системы зарядов, включая собственную энергию зарядов (4.44) и определяется выражением:

$$\varepsilon = \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dv. \quad (6.14)$$

Для одного замкнутого линейного проводника выражение (6.14) имеет вид:

$$\varepsilon = \frac{I}{2c} \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (6.15)$$

Система проводников.

Пусть имеется N проводников с током. В этом случае суммарный векторный потенциал в некоторой точке равен $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i$, где \mathbf{A}_i — векторный потенциал, создаваемый i -ым проводником. В силу принципа суперпозиции значение \mathbf{A}_i не зависит от наличия других проводников и силы тока в них. На основании (6.14) получим:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N \varepsilon_{ii} + \sum_{i,k=1, i>k}^N \varepsilon_{ik}; \quad \varepsilon_{ii} \equiv \frac{1}{2c} \int_{V_i} \mathbf{j}_i \cdot \mathbf{A}_i dv, \quad (6.16)$$

где ε_{ii} — собственная энергия i -го проводника, а ε_{ik} — энергия взаимодействия i -го и k -го проводников, равная:

$$\varepsilon_{ik} \equiv \frac{1}{2c} \int_{V_i} \mathbf{j}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_k(\mathbf{r}) dv + \frac{1}{2c} \int_{V_k} \mathbf{j}_k(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{A}_i(\mathbf{r}') dv'.$$

В соответствии с (6.3) оба интеграла в последнем выражении одинаковы. Таким образом, энергия взаимодействия i и k -го проводников может быть представлена в виде:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{c} \int_{V_i} \mathbf{j}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_k(\mathbf{r}) dv = \frac{1}{c^2} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{\mathbf{j}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}_k(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv dv'. \quad (6.17)$$

Данное выражение позволяет записать энергию взаимодействия проводника в котором определена плотность тока \mathbf{j} с внешним полем \mathbf{A} , следующим образом:

$$\varepsilon_{int} = \frac{1}{c} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dv. \quad (6.18)$$

Данная формула эквивалентна выражению (4.50) в случае системы зарядов во внешнем электростатическом поле.

Коэффициенты индукции.

Плотность тока в линейном проводнике и создаваемое им поле пропорциональны силе тока. Поэтому собственную (6.16) и взаимную (6.17) энергии проводников можно записать в виде:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{I_i^2}{2c^2} L_{ii}, \quad \varepsilon_{ik} = \frac{I_i I_k}{c^2} L_{ik}. \quad (6.19)$$

Здесь $L_{ii} \equiv L_i$ - коэффициент самоиндукции проводника, а L_{ik} - коэффициенты взаимной индукции i -го и k -го проводников. Данные коэффициенты определяются только геометрией проводников и не зависят от силы тока:

$$L_{ik} \equiv \oint_{L_i} \oint_{L_k} \frac{d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \iff \frac{1}{I_i I_k} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{\mathbf{j}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}_k(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv dv'. \quad (6.20)$$

Выражение (6.20) неприменимо при вычислении коэффициента самоиндукции для линейного проводника, так как оно приводит к расходимости интеграла (6.20). В этом случае коэффициент самоиндукции следует вычислять через энергию магнитостатического поля:

$$L_{ii} \equiv L_i = \frac{2c^2}{I_i^2} \varepsilon_{ii} \quad (6.21)$$

Пример.

Вычислим коэффициент самоиндукции тонкого замкнутого цилиндрического проводника длины l радиуса $r_0 \ll l$, по которому протекает ток силы I [17].

► С этой целью определим энергию магнитного поля, создаваемого током. Для оценки коэффициента самоиндукции допустим, что ток равномерно распределен по сечению проводника. На расстояниях $r \ll l$ от оси проводника поле практически совпадает с полем бесконечного прямолинейного цилиндрического проводника, поэтому внутри и вне проводника величина

поля равна:

$$B_{\varphi}^{(1)}(r < r_0) = \frac{2I}{cr_0^2} r; \quad B_{\varphi}^{(2)}(r > r_0) = \frac{2I}{cr}.$$

Следовательно энергия поля ε складывается из двух слагаемых - энергии поля внутри проводника ε_1 и энергии поля вне проводника ε_2 . При этом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\approx \frac{1}{8\pi} \int_0^{r_0} \int_0^l \int_0^{2\pi} (B_{\varphi}^{(1)})^2 r dr dz d\varphi = \frac{I^2 l}{4c^2}; \\ \varepsilon_2 &\approx \frac{1}{8\pi} \int_{r_0}^{\infty} \int_0^l \int_0^{2\pi} (B_{\varphi}^{(2)})^2 r dr dz d\varphi \approx \frac{I^2 l}{c^2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r} = \frac{I^2 l}{c^2} \ln \left(\frac{l}{r_0} \right). \end{aligned}$$

Как следует из представленных оценок при $l \gg r_0$ имеет место неравенство $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2$, поэтому $\varepsilon \approx \varepsilon_2$. В результате на основании (6.21) для коэффициента самоиндукции рассматриваемого проводника получим [17]:

$$L_i = \frac{2c^2}{I_i^2} \varepsilon_{ii} \approx \frac{2c^2}{I_i^2} \varepsilon_2 \approx 2l \ln \left(\frac{l}{r_0} \right). \blacktriangleleft$$

Магнитный поток.

Можно установить связь коэффициентов индукции с магнитным потоком, пронизывающим контур с током L_i . Так для собственной энергии линейного проводника получим на основании (6.15):

$$\varepsilon_{ii} = \frac{I_i}{2c} \oint_{L_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{I_i}{2c} \int_{S_i} \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \frac{I_i}{2c} \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{I_i}{2c} \Phi_i. \quad (6.22)$$

где Φ_i -поток вектора индукции магнитного поля через поверхность S_i для которой контур L_i является границей. Отсюда на основании (6.19) находим: $\Phi_i = I_i L_i / c$.

Аналогично для энергии взаимодействия i -го и k -го проводников можно записать:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{c} I_i \Phi_{ik}; \quad \Phi_{ik} \equiv \int_{S_i} \mathbf{B}_k \cdot d\mathbf{s},$$

где Φ_{ik} -поток вектора индукции магнитного поля, создаваемого k -ым проводником, через поверхность, ограниченную контуром i -го проводника. В соответствии с (6.19) получим:

$$\Phi_{ik} = I_k L_{ik} / c$$

§4 Силы в постоянном магнитном поле

Сила Лоренца.

Сила действующая на движущийся со скоростью \mathbf{v} заряд q , находящийся в магнитном поле с индукцией \mathbf{B} определяется выражением, которое носит название сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

Для системы, состоящей из N штук зарядов q_k сила Лоренца равна:

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k = \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{c}[\mathbf{v}_k \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_k)].$$

Плотность силы

Для непрерывно распределенного заряда с плотностью ρ в объеме V выражение для силы, действующей на систему зарядов есть:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int_V \rho(\mathbf{r}')[\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')] dv' = \frac{1}{c} \int_V [\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')] dv' = \int_V \mathbf{f} dv. \quad (6.23)$$

Таким образом, сила действующая на единицу объема системы токов или плотность силы \mathbf{f} равна: $\mathbf{f} = [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]/c$.

Произвольная система токов в магнитном поле.

Рассмотрим произвольную, замкнутую систему токов, находящуюся во внешнем поле с индукцией \mathbf{B} . Пусть характерные размеры системы токов определяются параметром a . Рассмотрим слабо меняющееся по размерам системы внешнее поле, то есть:

$$\left| a \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i} \right| \ll |\mathbf{B}|; \quad i \in 1, 2, 3.$$

Выберем внутри системы токов произвольную точку \mathbf{R} и перейдем в систему координат, связанную с данной точкой. В этом случае радиус-вектор \mathbf{r} точки наблюдения в новой системе координат связан с радиус-вектором \mathbf{r}' точки наблюдения в исходной системе координат соотношением $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{R}$. С учетом плавности поля по размерам системы разложим вектор индукции в ряд Тейлора вблизи точки \mathbf{R} :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}') = \mathbf{B}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) \approx \mathbf{B}(\mathbf{R}) + (\mathbf{r} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{B}(\mathbf{R}) + \dots \quad (6.24)$$

Здесь оператор $\vec{\nabla}$ действует на переменные вектора \mathbf{R} . С учетом равенства (6.23) для силы, действующей на систему токов в этом приближении получим:

$$\mathbf{F} \approx \frac{1}{c} \int \left\{ [\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{R})] + [\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{r} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{B}(\mathbf{R})] + \dots \right\} dv. \quad (6.25)$$

Первое слагаемое в данном выражении обращается в ноль в силу ограниченности рассматриваемой системы токов, так как любую ограниченную в пространстве систему токов можно представить в виде суперпозиции линейных замкнутых токов.

$$\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) dv \iff \sum_i I_i \oint_{L_i} d\mathbf{l} = 0.$$

Таким образом, первое не исчезающее слагаемое в выражении (6.25) имеет вид:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int [\mathbf{j} \times (\mathbf{r} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{B}(\mathbf{R})] dv = \frac{1}{c} \sum_{k,l,m=1}^3 \epsilon_{klm} \mathbf{e}_m \int j_k (\mathbf{r} \cdot \vec{\nabla}) B_l dv. \quad (6.26)$$

Здесь ϵ_{klm} - единичный, антисимметричный тензор третьего ранга (символ Леви-Чевита), \mathbf{e}_m - единичные векторы декартовой системы координат. В соответствии с (6.26), записывая скалярное произведение $(\mathbf{r} \cdot \vec{\nabla})$ в декартовой системе координат вычисление интеграла в данном выражении сводится к вычислению интегралов следующего типа:

$$J_{k,n} = \int x_k j_n(\mathbf{r}) dv, \quad k, n \in 1, 2, 3$$

Рассмотрим для примера интегралы типа $J_{n,n}$. В этом случае тождественные преобразования приводят к следующим равенствам:

$$J_{k,k} = \int x_k j_k dv = \frac{1}{2} \int (\mathbf{j} \cdot \text{grad } x_k^2) dv = \frac{1}{2} \int [\text{div}(x_k^2 \mathbf{j}) - x_k^2 \text{div } \mathbf{j}] dv$$

Для стационарного магнитного поля $\text{div } \mathbf{j} = 0$, а в соответствии с теоремой Остроградского — Гаусса последнее равенство может быть представлено в виде:

$$J_{k,k} = \frac{1}{2} \oint_S x_k^2 (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}) = 0, \quad k \in 1, 2, 3,$$

так как для замкнутых токов нормальная составляющая тока на поверхности S , ограничивающей объем занятый токами, равна нулю.

Чтобы найти вид интегралов $J_{k,n}$ при $n \neq k$ рассмотрим частный случай $J_{1,2}$. Выполним следующие тождественные преобразования с подынтегральной функцией:

$$\begin{aligned} x j_y &= \frac{1}{2}(x j_y + x j_y) = \frac{1}{2}(x j_y - y j_x + x j_y + y j_x) = \\ &= \frac{1}{2} \{ [\mathbf{r} \times \mathbf{j}]_z + \mathbf{j} \cdot \text{grad}(xy) \} = \frac{1}{2} \{ [\mathbf{r} \times \mathbf{j}]_z + \text{div}(xy\mathbf{j}) - xy \text{div} \mathbf{j} \}. \end{aligned}$$

В результате с учетом условия стационарности тока $\text{div} \mathbf{j} = 0$ находим:

$$\int x j_y dv = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}]_z dv + \oint xy (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}) = c \mu_z,$$

где μ_z — проекция магнитного момента системы токов на ось z . Аналогичные вычисления для других компонент дают следующий результат:

$$\int x_i j_k dv = \epsilon_{ikl} c \mu_l; \quad i \neq k \neq l.$$

Окончательно, на основании (6.26) находим для проекции силы на ось z :

$$\begin{aligned} F_z &= -\mu_z \frac{\partial B_y}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial B_y}{\partial z} - \mu_z \frac{\partial B_x}{\partial x} + \mu_x \frac{\partial B_x}{\partial z} = \\ &= \mu_x \frac{\partial B_x}{\partial z} + \mu_y \frac{\partial B_y}{\partial z} - \mu_z \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) = \mu_x \frac{\partial B_x}{\partial z} + \mu_y \frac{\partial B_y}{\partial z} + \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} = \left(\vec{\mu} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

При выводе данного равенства использовано уравнение $\text{div} \mathbf{B} = 0$. Повторяя аналогично вычисления для других компонент проекции силы получим окончательно:

$$F_k = \left(\vec{\mu} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_k} \right); \quad k \in 1, 2, 3. \quad (6.27)$$

Тензор натяжений Максвелла.

Также как и в случае электростатического поля, силу действующую на систему токов можно выразить через тензор натяжений Максвелла $M_{\alpha\beta}$, который в случае магнитостатического поля равен:

$$M_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} [B_\alpha H_\beta + \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})] \quad (6.28)$$

Связь компонент силы с тензором натяжений имеет вид:

$$F_\alpha \equiv \oint_S \sum_{\beta=1}^3 M_{\alpha\beta} n_\beta ds, \quad \alpha \in 1, 2, 3.$$

Здесь n_β – декартовы компоненты вектора нормали \mathbf{n} на поверхности S . Построение тензора натяжений в магнитном поле, полностью аналогично случаю электростатического поля и здесь не приводится.

Магнитный момент в магнитном поле.

Сила действующая на магнитный момент из (6.27) и возникающий момент силы \mathbf{N} равны, соответственно:

$$\mathbf{F} = (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{B}; \quad \mathbf{N} = [\vec{\mu} \times \mathbf{B}] \quad (6.29)$$

Как следует из (6.29) момент сил стремиться повернуть магнитный момент по направлению поля.

Сила действующая на единицу объема магнетика.

Если намагниченное вещество, помещается в магнитное поле или в веществе наводится магнитный момент единицы объема \mathbf{M} , то со стороны внешнего поля на это вещество, действует сила, которая может быть определена на основании следующих рассуждений. Выделим в веществе бесконечно малый объем dv . Магнитный момент выделенного объема равен $\mathbf{M} dv$. На основании (6.29) на данный объем со стороны внешнего поля действует бесконечно малая сила, плотность которой равна:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dv} = (\mathbf{M} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{B} = \frac{\mu - 1}{8\pi\mu} \text{grad } B^2,$$

где μ магнитная проницаемость среды.

Объемные силы, действующие на сжимаемые магнетики с плотностью массы ρ_m определяются выражением [16]:

$$\mathbf{f} = \frac{H^2}{8\pi} \text{grad } \mu - \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left(H^2 \rho_m \frac{\partial \mu}{\partial \rho_m} \right).$$

§5 Энергия системы токов во внешнем поле

Для ограниченной системы токов, находящихся во внешнем медленно меняющемся в пространстве поле, энергия взаимодействия системы токов с внешним полем на основании (6.18) равна:

$$-W = \varepsilon_{int} = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}') dv'.$$

Перейдем в систему координат, связанную с некоторой выделенной точкой \mathbf{R} внутри системы токов и разложим векторный потенциал в ряд Тейлора вблизи этой точки:

$$-W = \varepsilon_{int} = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \left[\mathbf{A}(\mathbf{R}) + (\mathbf{r} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{A} + \dots \right] dv.$$

После преобразований, аналогичных случаю электростатического поля, получим:

$$W = -(\vec{\mu} \cdot \mathbf{B}) + \dots; \quad \vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] dv. \quad (6.30)$$

где $\vec{\mu}$ - магнитный момент системы токов (3.99). Первое слагаемое в выражении (6.30) определяет энергию магнитного момента во внешнем поле. Следующее слагаемое определяет энергию магнитного квадрупольного момента во внешнем поле и т.д.

Выражение (6.30) может быть получено из (6.27). По определению механическая энергия связана с работой по перемещению вдоль линии L под действием силы \mathbf{F} и определяется выражением:

$$\begin{aligned} W &= - \int_L (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}) = - \int_L (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \\ &= - \int_L \left(\vec{\mu} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} dx + \vec{\mu} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} dy + \vec{\mu} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} dz \right) = - \vec{\mu} \cdot \int_L \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} dz \right). \end{aligned}$$

Окончательно для энергии системы токов, находящихся в медленно меняющемся внешнем поле получим:

$$W = -\vec{\mu} \cdot \mathbf{B}. \quad (6.31)$$

Энергия вещества в магнитном поле

Для рассмотрения вопроса об энергии вещества помещенного во внешнее магнитное поле предположим, что некоторое распределение токов создает в вакууме поле с индукцией \mathbf{B}_0 . Данное поле удовлетворяет уравнению $\text{rot } \mathbf{B}_0 = 4\pi \mathbf{j}/c$. Энергия такого поля определяется выражением:

$$W_0 = \frac{1}{8\pi} \int B_0^2 dv.$$

Пусть теперь все пространство заполнено веществом с магнитной проницаемостью μ , а поле создается тем же распределением токов. Из решения уравнения $\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}/c$ следует, что что вектор напряженности \mathbf{H} равен:

$\mathbf{H} = \mathbf{B}_0$, а магнитная индукция $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu\mathbf{B}_0$. Поэтому при наличии вещества энергия поля равна:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0 dv.$$

Следовательно при заполнении пространства веществом энергия поля увеличилась. Источником этой энергии являются сторонние электродвижущие силы, поддерживающие постоянство тока. Таким образом можно считать, что энергия магнетика во внешнем поле определяется выражением:

$$W_m = W - W_0 = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0 - B_0^2) dv = \frac{\mu - 1}{8\pi\mu} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0 dv = \frac{1}{2} \int \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_0 dv.$$

Здесь \mathbf{M} - вектор намагничения вещества. Данное выражение по сути эквивалентно энергии диэлектрика в электрическом поле, однако отличается знаком. Представленное выражение получено для бесконечного магнетика. Для магнетика конечных размеров полученная формула также остается справедливой.

§6 Вещество в магнитном поле. Диамагнетизм. Парамагнетизм.

Материальное уравнение, задающее магнитные свойства вещества, в системе уравнений Максвелла имеет вид $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$. Здесь \mathbf{M} - магнитный момент единицы объема вещества или вектор намагничения. Вектор намагничения вводит магнитные свойства среды в уравнения.

Исторически, исследование магнитных свойств веществ началось с простейших магнитнооднородных веществ. Магнитные свойства таких веществ укладывались в общее соотношение типа: $\mathbf{M} = \chi\mathbf{B}$. Где χ - определялась как константа, характеризующая свойства данного вещества. Предполагалось, что намагниченность в веществе возникает под действием внешнего поля и исчезает при его выключении.

Однако оказалось, что вещество в магнитном поле ведет себя в общем случае значительно сложнее. Было классифицировано три типа веществ по тому как определяется параметр χ . *Первый из них диамагнетики - вещества, атомы которых не имеют собственного магнитного момента* в силу симметрии распределения внутренних токов. Для диамагнетиков значение параметра χ оказалось отрицательно $\chi < 0$. В таких веществах внешним полем наводится магнитный момент единицы объема вещества направленный против направления внешнего поля.

Второй класс веществ, получивший название *парамагнетики*, характеризуется тем, что у них под действием поля индуцируется магнитный момент единицы объема, вектор которого направлен вдоль поля. Оказалось, что атомы таких веществ имеют собственный, отличный от нуля магнитный момент.

Наконец, были обнаружены вещества, которые ведут себя во внешнем магнитном поле так, что для них невозможно определить значение постоянной χ и в общем случае появляется зависимость χ от значения внешнего поля $\chi = \chi(\mathbf{B})$. Другими словами параметр χ перестает быть константой, определяющейся структурой вещества. Такие вещества получили наименование ферромагнетики. Дальнейшие исследования показали, что сами ферромагнетики классифицируются на определенные группы, но в задачу данного курса исследование этого вопроса не входит.

Теорема Лармора.

В связи с представленной классификацией веществ возникает проблема качественного объяснения указанного выше поведения вещества в магнитном поле, основываясь на атомарной модели вещества.

Объяснение части явлений поведения вещества в магнитном поле опирается на *теорему Лармора*. Теорема гласит, что влияние внешнего магнитного поля на связанные в атоме заряды q массы m , в первом порядке по полю, сводится к появлению дополнительного вращения заряда вокруг направления поля \mathbf{B} с угловой скоростью $\tilde{\omega}$ равной:

$$\tilde{\omega} = -\frac{q}{2mc}\mathbf{B} \quad (6.32)$$

Последовательное доказательство этой теоремы лежит вне данного курса, но для оценки правильности этого выражения можно рассмотреть силы действующие на связанный в атоме заряд находящийся во внешнем поле.

Перейдем в систему координат связанную с зарядом, локализованным в составе атома. В данной системе координат на заряд электронной оболочки действуют силы Лоренца, Кариолиса и центробежная сила. Сила Лоренца равна: $\mathbf{F}_l = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]/c$. Сила Кариолиса (при переходе к системе координат связанной с зарядом), определяется выражением: $\mathbf{F}_k = 2m[\mathbf{v}' \times \tilde{\omega}]$ а центробежная сила $\mathbf{F}_c = mv^2/R = m\omega^2 R$.

Так как центробежная сила пропорциональна квадрату частоты, а следовательно на основании (6.32) квадрату поля, в числе слагаемых, учи-

тывающих только линейные по полю члены, \mathbf{F}_c может быть опущена. Теорема Лармора формулируется для случая слабого поля, то есть как приближенное соотношение справедливое с точностью до линейных по полю слагаемых. В выражение для силы Кариолиса входит скорость $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - [\vec{\omega} \times \mathbf{r}]$. Как видно второе слагаемое, в данном выражении может быть опущено по той же причине, что и центробежная сила, как слагаемое более высокого порядка по полю. Таким образом остается приближенное равенство вида $\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_k = 0$ или $q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]/c = -2m[\mathbf{v} \times \vec{\omega}]$ из которого и вытекает формула (6.32)

Диамагнетизм.

На основании теоремы Лармора *диамагнетизм* или возникновение наведенного магнитного момента, направленного против внешнего индуцирующего поля в веществе, атомы которого не имеют собственного магнитного момента при отсутствии поля, качественно объясняется следующим образом. Под действием поля заряды атомов приобретают дополнительную скорость, связанную с вращением вокруг направления поля равную $\delta\mathbf{v} = [\vec{\omega} \times \mathbf{r}]$. В результате в атоме возникает наведенный замкнутый ток с плотностью $\mathbf{j} = \rho\delta\mathbf{v}$. Появление такого тока приводит к возникновению наведенного магнитного момента атома:

$$\delta\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] dv = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r} \times \rho[\vec{\omega} \times \mathbf{r}]] = \frac{1}{2c} \int \left[\vec{\omega} r^2 - \mathbf{r}(\vec{\omega} \cdot \mathbf{r}) \right] \rho dv.$$

Усреднение наведенного магнитного момента по объему атома приводит к выражению (угловые скобки обозначают операцию усреднения):

$$\langle \delta\vec{\mu} \rangle = \frac{\vec{\omega}}{2c} \langle (r^2 - z^2) \rho dv \rangle = \frac{\vec{\omega}}{2c} Zq \langle x^2 + y^2 \rangle = \frac{\vec{\omega}}{2c} Zq \frac{2}{3} \langle r^2 \rangle = -\frac{Zq^2 \langle r^2 \rangle}{6mc^2} \mathbf{B}.$$

Здесь допускается, что $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \langle r^2 \rangle/3$ в силу симметрии атомной системы. Обозначая далее через N - число атомов в единице объема для вектора магнитного момента единицы объема получим очевидное соотношение:

$$\mathbf{M} = N \langle \delta\vec{\mu} \rangle = \chi \mathbf{B}; \quad \chi = -\frac{NZq^2}{6mc^2} \langle r^2 \rangle < 0,$$

качественно объясняющее явление диамагнетизма.

Установлено, что данный вывод содержит существенную неточность при определении операции усреднения. Теорема Борна-ван Левин [17] показывает, что в классической системе диамагнетизм всегда равен нулю, то есть

$\langle r^2 \rangle = 0$. Однако оказалось, что приведенный выше ошибочный вывод параметра χ для диамагнетизма точно согласуется с результатом квантово-механического расчета, где $\langle r^2 \rangle$ определяется в соответствии с принципами квантовой теории.

Парамагнетизм.

Парамагнетизм, проявляется в веществе атомы которого имеют отличный от нуля собственный магнитный момент. При наложении внешнего поля в таком веществе возникает диамагнитное намагничение атомов и, кроме того, добавляются процессы связанные со взаимодействием магнитного момента с внешним полем. Опыт и расчеты наведенного диамагнитного момента в атоме показывают, что величина этого момента, как правило, много меньше величины собственного магнитного момента атома. Поэтому диамагнитный эффект в таких средах не рассматривается. Таким образом остается учесть влияние магнитного поля собственно на магнитный момент атома. В этом случае имеются два конкурирующих процесса – ориентирующий и разориентирующий магнитный момент атома в пространстве. Магнитное поле стремится ориентировать магнитный момент атома по направлению поля, а столкновения атомов из-за теплового движения разориентируют атомы.

Учитывая, что энергия взаимодействия магнитного момента с внешним полем равна $W = -(\vec{\mu} \cdot \mathbf{B})$ для объяснения парамагнетизма, в силу имеющейся симметрии, можно воспользоваться результатами приведенными в разделе об определении вектора поляризации полярных диэлектриков (§13). Таким образом, результат вычисления вектора намагничения может быть представлен следующим образом:

$$\mathbf{M} = N\mu L(a) \frac{\mathbf{B}}{B}; \quad a \equiv \frac{\mu B}{kT}. \quad (6.33)$$

Оценка численного значения параметра a приводит к условию $a \ll 1$. В этом случае:

$$\chi \approx \frac{N\mu^2}{3kT} > 0, \quad (6.34)$$

так как $L(a) \approx a/3$ для $a \ll 1$.

§7 Ферромагнетизм.

Общие проявления ферромагнетизма и свойства ферромагнетиков следующие:

-*насыщение намагниченности*, что проявляется в невозможности намагнитить ферромагнитное вещество больше определенной величины;

-*остаточная намагниченность*, которая проявляется ненулевой намагниченностью вещества при выключении внешнего намагничивающего поля;

-*разрушение остаточной намагниченности* при достижении определенной критической температуры (температура Кюри);

- сильная *локальная* спонтанная намагниченность по объему вещества.

В целом такие явления не характерны для диа- и пара - магнетиков. *Явление ферромагнетизма* может быть объяснено только с использованием квантовых свойств вещества и в первую очередь на основе понятия спинового магнитного момента.

Спин электрона.

Качественное представление о явлении ферромагнетизма можно сформировать с использованием понятия спина электрона. *Спин* электрона - это векторное свойство, которое наряду с зарядом и массой определяет поведение электрона во внешнем поле.

Спин электрона - это внутренний механический момент \mathbf{s} , который может ориентироваться в пространстве по направлению внешнего поля лишь двояко. Проекция спина электрона на направление поля принимает только два значения $\pm\hbar/2$, где \hbar - постоянная Планка.

Два возможных состояния спина условно называют состояниями "спин-вверх" и "спин-вниз". Слово "внутренний" момент используется в определении спина в том смысле, что данное свойство (момент) является неотъемлемой характеристикой электрона, подобно заряду и массе электрона, которые нельзя "отнять" от электрона. Нет электрона без спина, как нет его без заряда или массы.

Магнитный спиновый момент.

С внутренним механическим моментом (спином) электрона связан маг-

нитный спиновый момент $\vec{\mu}_s$. Экспериментально установлено, что:

$$\vec{\mu}_s = \frac{q}{mc} \mathbf{s}.$$

Таким образом в системе электронов, образующих атом появляется суммарный магнитный момент, который и определяет неклассический характер явления намагничивания. Неклассичность поведения магнитного спинового момента определяется его пространственным квантованием, то есть свойством только двоякой ориентации в пространстве по отношению ко внешнему магнитному полю.

Намагниченность ферромагнетика.

Если обозначить число атомов в единице объема вещества, магнитные моменты которых направлены "вверх" через r , а "вниз" через l , и число атомов в единице объема через n , ($n = r + l$), то величина магнитного момента единицы объема равна: $M = r\mu - l\mu$. Максимально возможная намагниченность при этом определяется выражением: $M_{max} = n\mu$.

Введем для удобства понятие относительной намагниченности. Обозначим отношение намагниченности вещества к максимально возможному значению намагниченности через $y = M/M_{max}$. В результате можно написать два очевидных тождества:

$$y = \frac{r}{n} - \frac{l}{n}; \quad 1 = \frac{r}{n} + \frac{l}{n}$$

или

$$r = \frac{n}{2}(1 + y); \quad l = \frac{n}{2}(1 - y)$$

Из термодинамики известно, что основное состояние системы определяется минимум свободной энергии F равной: $F = U - TS$. Здесь U - потенциальная энергия системы, T - абсолютная температура, а S - энтропия системы. Если внешнее поле равно нулю $B = 0$, то $U = 0$ и $F_0 = -TS$.

Энтропия системы состоящей из n штук частиц, часть из которых (r штук) находится в одном состоянии, а часть (l штук) во втором состоянии равна: $S = k \ln\{n!/(r!l!)\}$. Учитывая, что $\ln n! \approx n(\ln n - 1)$ получим для свободной энергии системы в этом случае:

$$\begin{aligned} F_0 &= -kT \ln \frac{n!}{r!l!} \approx -kT \left[n \ln n - r \ln r - l \ln l \right] = \\ &= kT \frac{n}{2} \left[(1 + y) \ln(1 + y) + (1 - y) \ln(1 - y) \right]. \end{aligned}$$

Необходимое условие минимума свободной энергии, как условие возникновения стационарного состояния в зависимости от относительной намагниченности y есть:

$$\frac{\partial F_0}{\partial y} = kT \frac{n}{2} \left[\ln(1+y) + 1 - \ln(1-y) - 1 \right] = kT \frac{n}{2} \ln \frac{1+y}{1-y} = 0.$$

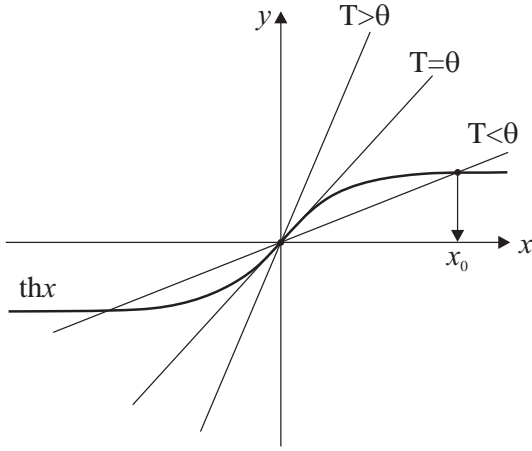


Рис. 6.1:

Из полученного равенства видно, что условие минимума свободной энергии выполняется только при $y = 0$. Следовательно в свободном состоянии намагниченность системы спинов равна нулю.

Если предположить, что имеется некоторая энергия взаимодействия магнитных спиновых моментов атомов, то в произвольном случае эта энергия может быть лишь квадратичной функ-

цией от y , так как нет выделенного направления. Допустим такая энергия имеет вид: $U = -nJy^2$, где J константа. В этом случае $F = -nJy^2 - ST$ и условие минимума свободной энергии имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = kT \frac{n}{2} \ln \frac{1+y}{1-y} - 2nJy = 0; \quad \ln \frac{1+y}{1-y} = 2 \frac{\Theta}{T} y; \quad \Theta \equiv \frac{2J}{k}.$$

В результате условие возникновения минимума определяется из трансцендентного уравнения, которое качественно объясняет ряд явлений ферромагнетизма:

$$y = \text{th} \left(\frac{\Theta}{T} y \right); \quad \frac{T}{\Theta} x = \text{th} x. \quad (6.35)$$

Действительно, как следует из (6.35) при $T \geq \Theta$ графики функций Tx/Θ и $\text{th} x$ имеют только одну точку пересечения $x = 0$ рис 6.1. Вычисляя вторую производную от F по относительной намагниченности y можно убедиться, что точка $x = 0$ не соответствует стационарному, то есть устойчивому состоянию (так как вторая производная $F'' > 0$ что соответствует точке максимума, а не минимума). Однако при $T < \Theta$ имеется 2 точки пересечения $x = 0$ и $x = x_0 \geq 0$. Точка $x = x_0$ удовлетворяет условию минимума свободной энергии F , а следовательно соответствует основному или устойчивому состоянию, что и объясняет качественно возникновение явление ферромагнетизма.

Учет квантовых эффектов.

Последовательное объяснение ферромагнетизма без полного привлечения методов квантовой механики невозможно. Если выполнить квантовомеханический расчет для системы спинов во внешнем поле, что выходит за рамки данного курса, то уравнение (6.35) примет вид:

$$y = \text{th} \left(\frac{\Theta}{T} y + \frac{\mu B}{kT} \right) = \text{th} \left\{ \frac{\mu}{kT} \left(\frac{k\Theta}{\mu} y + B \right) \right\} = \text{th} \left\{ \frac{\mu}{kT} (B_{eff} + B) \right\}.$$

Здесь $B_{eff} = k\theta y/T$. Это означает, что в веществе возникает дополнительное поле индукция которого пропорциональна намагниченности $b\mathbf{M}$, где b - константа.

Таким образом на основании (6.33), намагниченность вещества примет вид:

$$\mathbf{M} = n\mu L \left(\mu \frac{B + bM}{kT} \right) \frac{\mathbf{B}}{B} \approx n\mu^2 \frac{B + bM}{3kT} \frac{\mathbf{B}}{B},$$

где $L(x) = \text{cth} x - 1/x$ - функция Ланжевена (4.73). Решая последнее равенство относительно \mathbf{M} находим:

$$M = \frac{n\mu^2}{3kT(T - \Theta/3)} B.$$

Данное выражение объясняет появление температуры Кюри для ферромагнетика.

Глава 7

Постоянное магнитное поле. Семинары.

§1 Основные формулы и определения

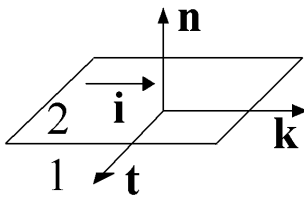
Закон (определение)	Формулы
Система уравнений Максвелла (дифференциальная форма)	$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}. \quad (7.1)$ <p>\mathbf{B} - вектор индукции; \mathbf{j} - плотность тока; $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, \mathbf{H} - напряженность поля; \mathbf{M} - магнитный момент единицы объема. c — скорость света.</p> <p>В случае однородной, изотропной среды $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, μ - магнитная проницаемость среды</p>
Интегральная форма записи системы Максвелла	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0; \quad \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I = \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}). \quad (7.2)$
Векторный потенциал \mathbf{A}	$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (7.3)$
Закон Био-Саввара-Лапласа	$d\mathbf{B} = \frac{I}{cr^3} [d\mathbf{l} \times \mathbf{r}] \quad (7.4)$ <p>\mathbf{r} - вектор направленный от элемента тока $d\mathbf{l}$ к точке наблюдения поля. I — сила тока.</p>
Дифференциальное уравнение для определения \mathbf{A} и частное решение неоднородного уравнения Пуассона (однородная, изотропная среда)	$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -4\pi \frac{\mu}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (7.5)$ $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' } dv' \quad (7.6)$
Магнитный момент системы токов	$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] dv \quad \rightarrow \quad \frac{I}{2c} \oint_L [\mathbf{r} \times d\mathbf{l}] \quad (7.7)$
Магнитный момент замкнутого тока	$\vec{\mu} = \frac{IS}{c} \mathbf{n}, \quad S = \int_S ds \quad (7.8)$

Закон (определение)	Формула
Вектор Герца магнитного типа $\mathbf{\Pi}_m$	$\mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{\Pi}_m; \quad (7.9)$ $\mathbf{B} = \text{rot rot } \mathbf{\Pi}_m$
Дифференциальное уравнение для $\mathbf{\Pi}_m$. Частное решение уравнения Пуассона.	$\nabla^2 \mathbf{\Pi}_m = -4\pi \mathbf{M}; \quad \mathbf{\Pi}_m(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' } dv' \quad (7.10)$
Поверхностные уравнения	$B_{2n} - B_{1n} = 0; \quad H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i \quad (7.11)$ <p>i — поверхностная плотность тока</p> $\frac{1}{\mu_2} H_{2n} - \frac{1}{\mu_1} H_{1n} = 0; \quad \mu_2 B_{2\tau} - \mu_1 B_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i$ $\frac{1}{\mu_2} [\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{A}_2] - \frac{1}{\mu_1} [\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{A}_1] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}; \quad (7.12)$ $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2. \quad (7.13)$
Энергия единицы объема w . Энергия в объеме V	$w = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{8\pi}; \quad \varepsilon = \int_V w dv. \quad (7.14)$
Сила, действующие на точечный заряд	$\mathbf{F} = \frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (7.15)$
Плотность силы	$\frac{d\mathbf{F}}{dv} = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] \quad (7.16)$
Энергия магнитного момента в поле	$U = -(\tilde{\mu} \cdot \mathbf{B}) \quad (7.17)$
Выражение для проекции силы на ось l с использованием тензора натяжений Максвелла M_{kl}	$F_l = \oint_S \sum_{k=1}^3 M_{kl} n_k ds, \quad (7.18)$ $M_{kl} = \frac{1}{4\pi} \left[B_k H_l - \frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \delta_{kl} \right]$ <p>\mathbf{n} — нормаль к ds.</p>

§2 Система уравнений Максвелла

Магнитостатика - раздел электродинамики, в котором изучается частный случай электромагнитного поля, создаваемого постоянными во времени токами. Описание такого поля и передаваемого посредством этого поля силового взаимодействия токов основывается на частом случае системы уравнений Максвелла. Система уравнений может быть представлена как в дифференциальной (7.1), так и в интегральной формах (7.2).

Векторы индукции \mathbf{B} и напряженности поля \mathbf{H} удовлетворяют *принципу суперпозиции*.



В однородном изотропном магнетике $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, где μ - магнитная проницаемость среды. На границе раздела двух сред нормальные и тангенциальные составляющие поля удовлетворяют соотношениям:

Рис. 7.1:
$$B_{2n} - B_{1n} = 0; \quad H_{2t} - H_{1t} = \frac{4\pi}{c}i. \quad (7.19)$$

Здесь i - плотность поверхностного тока $\mathbf{i} = ik$, \mathbf{k} - единичный вектор. Если обозначить единичный вектор нормали к поверхности раздела \mathbf{n} , а единичный вектор касательный к поверхности (по направлению тангенциальной составляющей) \mathbf{t} , то так определенные векторы образуют правый базис $[\mathbf{n} \times \mathbf{t}] = \mathbf{k}$.

Пример 7.§2.1. Вблизи границы раздела двух магнетиков μ_1 , μ_2 (рис. 7.1) магнитная индукция во втором магнетике равна \mathbf{B}_2 . При этом вектор индукции наклонен к вектору нормали границы под углом α_2 . Найти магнитную индукцию вблизи границы раздела внутри магнетика с проницаемостью μ_1 . [3]

► Величина искомого вектора индукции равна $B_1 = \sqrt{B_{1n}^2 + B_{1t}^2}$ где B_{1n} - нормальная и B_{1t} - тангенциальная составляющие вектора индукции внутри магнетика μ_1 . На границе раздела, в соответствии с (7.19), выполняются равенства:

$$B_{1n} = B_{2n} = B_2 \cos \alpha_2;$$

$$B_{1t} = \mu_1 H_{1t} = \mu_1 H_{2t} = \mu_1 B_{2t} / \mu_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} B_2 \sin \alpha_2.$$

В результате величина искомого вектора равна:

$$B_1 = B_2 \sqrt{\cos^2 \alpha_2 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \sin^2 \alpha_2}. \quad (7.20)$$

Угол между направлением нормали и направлением вектора индукции можно найти из выражения:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = B_{1t}/B_{1n} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \operatorname{tg} \alpha_2; \quad \alpha_1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \operatorname{tg} \alpha_2 \right). \quad \blacktriangleleft$$

Пример 7.§2.2. Можно ли создать в пространстве постоянный ток с объемной плотностью $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 f(r)$, где \mathbf{j}_0 - постоянный вектор, $f(r)$ - произвольная функция, r - модуль радиуса-вектора? [3]

► В соответствии с системой уравнений (7.1), в случае постоянного тока плотность тока должна удовлетворять условию стационарности $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$. В связи с этим вычислим, чему равна $\operatorname{div} \mathbf{j}$ в данном примере:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \cdot \operatorname{grad} f(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{r}) \neq 0. \quad (7.21)$$

Следовательно, создать такой постоянный ток в пространстве нельзя. \blacktriangleleft

Пример 7.§2.3. Определить распределение объемной плотности тока в пространстве, если напряженность магнитного поля тока имеет вид $\mathbf{H} = f(\mathbf{r})[\tilde{\mu} \times \mathbf{r}]$, где $f(\mathbf{r})$ - произвольная дифференцируемая функция, а $\tilde{\mu}$ - постоянный вектор. Определить, при какой функции $f(\mathbf{r})$ плотность тока удовлетворяет условию стационарности? [3]

► На основании уравнений (7.1) находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{c}{4\pi} \left\{ [\operatorname{grad} f \times [\tilde{\mu} \times \mathbf{r}]] + f[\tilde{\nabla} \times [\tilde{\mu} \times \mathbf{r}]] \right\} = \\ &= \frac{c}{4\pi} \left\{ \tilde{\mu}(\mathbf{r} \cdot \operatorname{grad} f) - \mathbf{r}(\tilde{\mu} \cdot \operatorname{grad} f) + f \tilde{\mu} \operatorname{div} \mathbf{r} - f(\tilde{\mu} \cdot \tilde{\nabla})\mathbf{r} \right\} = \\ &= \frac{c}{4\pi} \left\{ \tilde{\mu}(\mathbf{r} \cdot \operatorname{grad} f) - \mathbf{r}(\tilde{\mu} \cdot \operatorname{grad} f) + 2f \tilde{\mu} \right\}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

В частном случае, если f зависит только от модуля радиуса вектора, то $\operatorname{grad} f(r) = f'_r \mathbf{r}/r$, в результате находим:

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \left\{ 2f \tilde{\mu} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} [\mathbf{r} \times [\tilde{\mu} \times \mathbf{r}]] \right\}. \quad (7.23)$$

Выражения (7.22), (7.23) удовлетворяют условию стационарности при любой $f(\mathbf{r})$, т.к. $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} \equiv 0$. \blacktriangleleft

Пример 7.§2.4. По бесконечному линейному проводнику протекает постоянный ток I . Определить магнитное поле, создаваемое этим током в любой точке пространства. (рис.7.2)

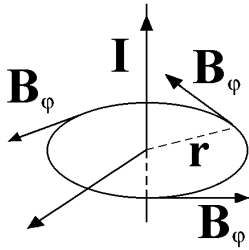


Рис. 7.2:

► Из условий симметрии системы очевидно, что вектор индукции может быть направлен лишь по касательной к окружности, лежащей в плоскости ортогональной линии тока (рис.7.2). Это вытекает из условия инвариантности физической системы относительно сдвига начала координат вдоль линии тока и вращения системы координат вокруг оси, совпадающей с линией тока. На основании цилиндрической симметрии можно заключить, что на окружности произвольного радиуса r величина вектора индукции постоянна. В результате из (7.2) находим:

$$\oint_L (\mathbf{B} d\mathbf{l}) = \oint_{\text{окр } r} B_\varphi dl = B_\varphi \oint_r dl = B_\varphi 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I.$$

Окончательно для величины вектора индукции имеем:

$$B_\varphi = \frac{2I}{cr}. \quad \blacktriangleleft \quad (7.24)$$

Комментарий: соотношение (7.2) является в теории магнитостатического поля аналогом теоремы Гаусса в электростатике. Применение соотношения (7.2) целесообразно при условии, если интегральный член можно вычислить на основании условий симметрии системы.

Пример 7.§2.5. Внутри бесконечного цилиндра радиуса R параллельно его оси течет ток с объемной плотностью зависящей только от модуля радиуса вектора цилиндрической системы координат $\mathbf{j} = \mathbf{j}(r)$. Найти напряженность поля внутри и снаружи цилиндра.

► Представив цилиндр с током как совокупность линейных проводников, на основании принципа суперпозиции и, повторяя рассуждения, приведенные в примере 7.§2.4, получим, что вектор напряженности лежит в плоскости ортогональной оси цилиндра и направлен по касательной к окружности с центром на оси цилиндра.

Выберем в формуле (7.2) в качестве контура интегрирования окружность радиуса r , лежащую в плоскости ортогональной оси цилиндра (пусть это

плоскость x, y), тогда

$$\oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{l}) = \oint_r H dl = H_\varphi \int_r dl = H_\varphi \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}). \quad (7.25)$$

Здесь H_φ -составляющая поля в направлении положительного изменения угла цилиндрической системы координат φ , а S — круг, для которого окружность радиуса r является границей. Плоскость круга ортогональна оси цилиндра. Так как плотность тока $\mathbf{j} = j(r)\mathbf{k}$, где \mathbf{k} — единичный вектор, направленный вдоль оси цилиндра и $d\mathbf{s} = \mathbf{k}ds = \mathbf{k}rdrd\varphi$, ток через круг радиуса r равен:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{j} d\mathbf{s} &= \int j(r') ds = \int_0^r \int_0^{2\pi} j(r') r' dr' d\varphi = 2\pi \int_0^r j(r') r' dr' = \\ &= \begin{cases} 2\pi \int_0^R j(r') r' dr', & \text{если } r \geq R; \\ 2\pi \int_0^r j(r') r' dr', & \text{если } r < R. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.26)$$

В результате находим окончательно для напряженности поля:

$$H_r = H_\varphi = 0; \quad H_\varphi = \begin{cases} 4\pi(\int_0^R j(r') r' dr')/rc, & \text{если } r \geq R; \\ 4\pi(\int_0^r j(r') r' dr')/rc, & \text{если } r < R. \end{cases} \quad (7.27)$$

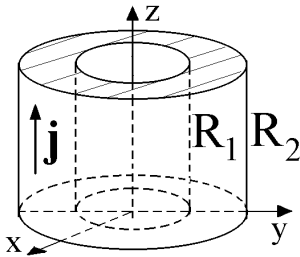


Рис. 7.3:

Пример 7.§2.6. В пространстве между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями радиусов R_1 и R_2 , ($R_1 < R_2$) течет ток плотности $\mathbf{j}(r)$ параллельно оси цилиндров (r — модуль радиуса-вектора цилиндрической системы координат). Найти напряженность магнитного поля в любой точке пространства. (рис. 7.3)

► Условия симметрии задачи аналогичны условиям симметрии в примерах 7.§2.4, 7.§2.5, то есть для окружности радиуса r , лежащей в плоскости x, y :

$$\oint_r \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_\varphi \cdot 2\pi r. \quad (7.28)$$

Соответственно для силы тока I находим:

$$I = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = \begin{cases} 0, & \text{если } r < R_1; \\ 2\pi(\int_{R_1}^r j(r') r' dr'), & \text{если } R_1 < r < R_2; \\ 2\pi(\int_{R_1}^{R_2} j(r') r' dr'), & \text{если } r > R_2. \end{cases} \quad (7.29)$$

На основании (7.2), (7.28), (7.29) получаем окончательно величины полей в различных точках пространства. При этом $H_r = H_z = 0$. ◀

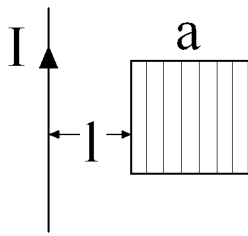


Рис. 7.4:

Пример 7.§2.7. Квадратная рамка со стороной a находится в одной плоскости с прямолинейным током I . На каком расстоянии от тока расположена ближайшая сторона рамки, если поток магнитного поля через поверхность рамки равен ϕ_0 (задача N198 в [3])

► Вектор индукции магнитного поля в любой точке рамки ортогонален плоскости рамки и равен $B_\varphi = 2I/cr$ (см. пример 7.§2.4), где r – кратчайшее расстояние от произвольной точки внутри рамки до линии тока. По определению поток вектора индукции через рамку определяется поверхностным интегралом по площади рамки:

$$\phi_0 = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_l^{l+a} B(y) dy \int_{-a/2}^{a/2} dz = \frac{2Ia}{c} \ln \frac{l+a}{l}. \quad (7.30)$$

Решая данное уравнение относительно l , находим:

$$l = a \left\{ \exp \left[\frac{\phi_0 c}{2Ia} \right] - 1 \right\}^{-1}. \quad \blacktriangleleft \quad (7.31)$$

Пример 7.§2.8. Ток I течет по проводнику, намотанному плотно по винтовой линии на поверхность бесконечного цилиндра (соленоид). На единицу длины соленоида приходится n витков проводника. Опыт показывает, что для бесконечно длинного соленоида поле снаружи отсутствует. Определить поле внутри соленоида.

► Из условий симметрии ясно, что вектор индукции \mathbf{B} направлен вдоль оси соленоида. Выберем контур интегрирования в теореме Ампера (7.2) в виде прямоугольника, две стороны которого параллельны оси соленоида и расположены внутри и вне соленоида соответственно. При вычислении циркуляции вектора индукции по внешней стороне контура и по линиям, ортогональным оси соленоида, получим результат, равный 0. Таким образом, ненулевой вклад в циркуляцию вектора индукции появляется лишь при интегрировании по внутренней стороне. Обозначим длину этой стороны прямоугольника через l . В результате:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot l = 4\pi n l \frac{I}{c} \rightarrow B = 4\pi n \frac{I}{c}. \quad \blacktriangleleft \quad (7.32)$$

Пример 7.§2.9. Вычислить магнитное поле, создаваемое токовым

торроидом (токовый торроид- металлический провод, плотно намотанный на каркас, имеющий форму тора, по которому протекает ток I). Полное число витков в торроиде n .

► Из условий симметрии ясно, что вектор индукции отличен от нуля только во внутренней части тора. При этом в каждой точке пространства вектор \mathbf{B} направлен по касательной к окружности с центром на оси тора. Поэтому для использования теоремы (7.2) в качестве контура интегрирования следует взять окружность с центром на оси тора, лежащую ортогонально оси. При этом если окружность расположена внутри торроида, то она охватывает ток силой nI . В результате:

$$B \cdot 2\pi r = 4\pi n \frac{I}{c}, \quad B = 2n \frac{I}{cr}. \quad (7.33)$$

Из сравнения (7.33) с (7.24) видно, что внутри торроида магнитное поле совпадает с полем прямолинейного бесконечного тока силы nI , текущего вдоль оси. Кроме того, устремив n и радиус тора к бесконечности (при постоянном сечении тора) получим выражение, найденное в предыдущем примере для магнитного поля бесконечно длинного соленоида.

Если выбранный круговой контур лежит вне торроида, то токов он не охватывает, поэтому для такого контура $B \cdot 2\pi r = 0$ и это означает, что поле вне торроида отсутствует. ◀

Комментарий: Представленное решение предполагает, что линии тока лежат строго в меридианальных плоскостях. У реальной системы это не так, что приводит к возникновению тока вокруг оси торроида. Эта составляющая тока приводит к возникновению поля, аналогичного полю кругового тока.

Пример 7.§2.10. Вычислить магнитное поле бесконечной проводящей плоскости, по которой в одном направлении течет равномерно распределенный ток с линейной плотностью i (линейная плотность тока - это ток, приходящийся на единицу длины).

► Разобьём мысленно плоскость с током на тонкие нити с током. Рассматривая пару таких нитей, симметричных относительно некоторой линии параллельной направлению тока, в соответствии с принципом суперпозиции можно установить, что результирующее поле \mathbf{B} направлено параллельно плоскости с током и лежит в плоскости ортогональной плоскости тока.

Учитывая симметрию системы, выберем квадратный контур L со стороной l параллельной \mathbf{B} , плоскость которого ортогональна плоскости с током

и пересекает ее. В результате получим:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2Bl = 4\pi i \frac{l}{c}; \quad B = 2\pi \frac{i}{c}. \quad \blacktriangleleft \quad (7.34)$$

Комментарий: 1) Из (7.34) следует, что магнитное поле с обеих сторон плоскости однородно и противоположно направлено. Этот результат справедлив и для ограниченной плоскости с током, но лишь для точек вблизи плоскости удаленных от ее границ.

2) Относительная легкость, с которой проведен расчет полей в приведенных выше примерах на основании (7.2), оказалась возможной благодаря наличию симметрий в системах. В общем случае возможность применения этой теоремы ограничена.

Задание на дом: Решить задачи: 7.§6.1-7.§6.3. (стр. 256).

§3 Векторный потенциал. Закон Био-Савара-Лапласа.

Широко применяемые способы описания магнитостатического поля основаны на использовании векторного потенциала \mathbf{A} (7.3) и закона Био-Савара-Лапласа (7.4).

Вектор \mathbf{A} определен не однозначно, так как индукция \mathbf{B} не меняется, если выполнить градиентное преобразование потенциала: $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \chi$, где χ - произвольная функция. Чтобы ограничить произвол в выборе векторного потенциала, обычно на \mathbf{A} накладывают дополнительное условие, например:

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (7.35)$$

В магнитоизотропной, неоднородной среде \mathbf{A} , с учетом (7.35), удовлетворяет уравнению:

$$\left[\text{rot } \mathbf{A} \times \text{grad } \frac{1}{\mu} \right] + \frac{1}{\mu} \nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (7.36)$$

Здесь μ - магнитная проницаемость среды $\mu = \mu(\mathbf{r})$. В однородной среде $\mu = \text{const}$ и уравнение для векторного потенциала имеет вид неоднородного уравнения Пуассона (7.5).

На границе раздела двух сред для векторного потенциала и его производных выполняются граничные условия (7.12), (7.13):

Решение уравнения (7.5), при отсутствии граничных условий, имеет вид

(7.6). С учетом (7.3) на основании (7.6) для вектора \mathbf{B} находим:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu}{c} \int \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (7.37)$$

В случае линейного тока \mathbf{A} и \mathbf{B} могут быть вычислены из уравнений (7.6), (7.37) с заменой $\mathbf{j}(\mathbf{r}') dv' \Leftrightarrow I d\mathbf{l}'$, где элемент $d\mathbf{l}'$ направлен по току. В частности, из (7.37) получаем:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu I}{c} \int_L \frac{[d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (7.38)$$

Выражение (7.38) в соответствии с принципом суперпозиции эквивалентно закону Био-Савара-Лапласа:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu I}{c} \frac{[d\mathbf{l} \times \mathbf{R}]}{R^3}, \quad (7.39)$$

где \mathbf{R} - расстояние от элемента тока $d\mathbf{l}$ до точки, в которой определяется значение поля.

Пример 7.§3.1. Бесконечный цилиндр радиуса R с магнитной проницаемостью $\mu = 1$, равномерно заряженный с объемной плотностью $\rho = \text{const}$, вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью $\tilde{\omega}$. Найти векторный потенциал внутри и снаружи цилиндра. (См. задачу 219 в [3])

► Вращение цилиндра создает в пространстве ток с объемной плотностью $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \rho [\mathbf{r} \times \tilde{\omega}]$. Таким образом, в цилиндрической системе координат:

$$j_r = j_z = 0; \quad j_\varphi = \rho \omega r \quad r \leq R, \quad j_\varphi = 0, \quad r > R. \quad (7.40)$$

Из условий симметрии ясно, что в цилиндрической системе $A_r = A_z = 0$, а $A_\varphi = A_\varphi(r)$.

В цилиндрической системе координат компоненты векторного лапласиана $\Delta \mathbf{A}$ имеют вид [2]:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} |_{r=0} &= \Delta A_r - \frac{1}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}; \quad \Delta \mathbf{A} |_{\varphi=0} = \Delta A_\varphi - \frac{1}{r^2} A_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial r}; \\ \Delta \mathbf{A} |_{z=0} &= \Delta A_z. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Обозначим значения векторного потенциал во внутренней и внешней областях цилиндра следующим образом:

$$A_\varphi(r) = A_1, \quad r \leq R; \quad A_\varphi(r) = A_2, \quad r > R. \quad (7.42)$$

В результате на основании (7.5) находим:

$$\Delta A_{1\varphi} - \frac{1}{r^2} A_{1\varphi} = -\frac{4\pi}{c} \rho \omega r; \quad \Delta A_{2\varphi} - \frac{1}{r^2} A_{2\varphi} = 0. \quad (7.43)$$

Подставляя явный вид оператора Δ в цилиндрической системе координат, получаем обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 A_{1\varphi}}{dr^2} + r \frac{dA_{1\varphi}}{dr} - A_{1\varphi} &= -\frac{4\pi}{c} \rho \omega r^3, \\ r^2 \frac{d^2 A_{2\varphi}}{dr^2} + r \frac{dA_{2\varphi}}{dr} - A_{2\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Уравнения (7.44) должны быть решены с учетом граничных условий:

$$A_{1\varphi}(R) = A_{2\varphi}(R); \quad \left. \frac{dA_{1\varphi}}{dr} \right|_{r=R} = \left. \frac{dA_{2\varphi}}{dr} \right|_{r=R}. \quad (7.45)$$

Общее решение однородных уравнений (7.44) необходимо искать в виде: $A_{i\varphi} = \text{const} \cdot r^s$. В результате для s имеем алгебраическое уравнение второго порядка $s(s-1) + s - 1 = 0$ решение которого есть: $s_1 = 1, s_2 = -1$. Таким образом, общее решение однородных уравнений (7.44) имеет вид:

$$A_{i\varphi} = C_{1i}r + C_{2i}/r. \quad (7.46)$$

Частное решение неоднородного уравнения (7.44) есть:

$$A_{\varphi} = -\frac{\pi}{2c} \rho \omega r^3. \quad (7.47)$$

В результате, с учетом (7.45) получаем окончательно:

$$\begin{aligned} A_{1r} = A_{1z} &= 0; & A_{1\varphi} &= \frac{\pi}{c} \rho \omega r(R^2 - r^2/2). \\ A_{2r} = A_{2z} &= 0; & A_{2\varphi} &= \frac{\pi}{2c} \rho \omega R^4/r. \quad \blacktriangleleft \end{aligned} \quad (7.48)$$

Комментарий В данном примере следует обратить внимание на то, как определяется оператор Лапласа от компонент вектора в криволинейной системе координат (подробнее см. в [2],[23]).

Пример 7.§3.2. Заряд Q распределен по объему шара радиуса R с объемной плотностью $\rho = \rho_0 r^n$. Здесь ρ_0 — размерная константа, r — модуль радиус-вектора, а n — произвольное число. Найти индукцию магнитного поля в центре шара, который вращается с угловой скоростью $\tilde{\omega}$.

► Поместим начало координат в центр шара, направив ось Z вдоль вектора $\tilde{\omega}$. В соответствии с (7.37) вектор индукции в центре шара имеет вид:

$$\mathbf{B}(0) = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(r')]}{r'^3} dv' = \frac{1}{c} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{[\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(r')]}{r'^3} r'^2 dr' \sin \theta' d\theta' d\varphi'. \quad (7.49)$$

Объемная плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \rho \mathbf{v}(\mathbf{r}') = \rho [\tilde{\omega} \times \mathbf{r}']$. В результате:

$$\mathbf{B}(0) = \frac{1}{c} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r') \frac{r'^2 \tilde{\omega} - \omega z' \mathbf{r}'}{r'^3} dv' \quad (7.50)$$

Интегрирование в (7.50) подынтегральных функций, содержащих произведение декартовых координат $x'z'$ и $y'z'$, являющихся нечетными функциями по своим координатам, в симметричных пределах дает 0. Оставшиеся слагаемые определяют значение вектора \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(0) &= \frac{\tilde{\omega}}{c} \int \rho(r') \frac{x'^2 + y'^2}{r'^3} dv' = \frac{\tilde{\omega}}{c} \rho_0 \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r'^{n+1} \sin^2 \theta' r' dr' \sin \theta' d\theta' d\varphi' = \\ &= \frac{8\pi}{3(n+2)} \frac{\rho_0}{cR} R^{n+2} \tilde{\omega}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned} \quad (7.51)$$

Пример 7.§3.3. Найти поле в любой точке пространства, создаваемое круговым линейным током силы I , радиуса R . Плотность тока в такой системе можно представить в виде (ток расположен в плоскости x - y):

$$j_\varphi = I \delta(\cos \theta') \frac{\delta(r' - R)}{R}. \quad (7.52)$$

Здесь $r \theta \varphi$ — переменные сферической системы координат. [3]

► Покажем, что плотность тока определенная формулой (7.52) действительно соответствует круговому току силы I . Для этого проинтегрируем плотность тока по сечению, ортогональному току. Если выбрать бесконечно малый элемент поверхности ортогональным положительному направлению изменения угла φ , то стороны этого элемента поверхности будут равны $r' d\theta'$ и $dr' \sin \theta'$, соответственно. Таким образом, $ds' = r' \sin \theta' d\theta' dr'$. После замены переменной $\cos \theta' = x$ получим для интеграла определяющего силу тока:

$$I = \int_S j_\varphi ds' = \frac{I}{R} \int_{-1}^1 \delta(x) dx \int_0^\infty \delta(r' - R) r' dr' = I.$$

В силу симметрии системы, т.к. \mathbf{j} имеет лишь φ -составляющую, отличную от нуля, то и \mathbf{A} имеет лишь одну составляющую, отличную от нуля — A_φ . Однако A_φ нельзя вычислить непосредственно, подставляя j_φ в (7.6), так как

векторное уравнение Пуассона (7.5) сводится к трем независимым скалярным уравнениям лишь в декартовых координатах. В криволинейных ортогональных координатах дифференциальный оператор связывает все составляющие вектора (см. [2], [23]). Например, в цилиндрической системе координат компоненты вектора $\Delta \mathbf{A}$ представлены формулами (7.41), а в сферической системе координат компоненты вектора $\Delta \mathbf{A}$ приведены в упражнении §6.9 на стр 257. Поэтому выполним вычисления для декартовых компонент вектора \mathbf{A} .

Составляющие плотности тока в декартовых координатах имеют вид:

$$j_x = -j_\varphi \sin \varphi'; \quad j_y = -j_\varphi \cos \varphi', \quad (7.53)$$

где величина плотности тока j_φ определена выражением (7.52).

В силу цилиндрической симметрии задачи при вычислении векторного потенциала можно выбрать точку наблюдения лежащей в плоскости xz , (т.е. $\varphi = 0$), что не уменьшит общности решения. В этом случае x -составляющая векторного потенциала A_x равна нулю, так как $A_x \sim j_x = j_\varphi \sin 0 = 0$ и остается лишь y -составляющая векторного потенциала. В результате:

$$A_y(r, \theta) = \frac{I}{cR} \int \frac{\cos \varphi'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(\cos \theta') \delta(r' - R) r'^2 dr' \sin \theta' d\theta' d\varphi'. \quad (7.54)$$

По определению модуль разности векторов $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ равен:

$$\sqrt{r^2 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') + r'^2} = \sqrt{r^2 - 2rr'(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi') + r'^2}. \quad (7.55)$$

Подставляя (7.55) в (7.54), после интегрирования по $d\theta'$ и dr' находим:

$$A_y(r, \theta) = \frac{IR}{c} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{\sqrt{r^2 - 2rR \sin \theta \cos \varphi' + R^2}}. \quad (7.56)$$

Данный интеграл выражается через полные эллиптические интегралы $K(x)$ и $E(x)$ [14]:

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \alpha}}; \quad E(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \alpha} d\alpha. \quad (7.57)$$

Окончательно получим:

$$A_y(r, \theta) = \frac{4IR}{c\sqrt{R^2 + 2rR \sin \theta + r^2}} \left[\frac{2 - x^2}{x^2} K(x) - \frac{2}{x^2} E(x) \right], \quad (7.58)$$

где аргумент эллиптических интегралов определяется выражением:

$$x \equiv \sqrt{\frac{4rR \sin \theta}{R^2 + r^2 + 2rR \sin \theta}}. \quad (7.59)$$

В силу цилиндрической симметрии имеем $A_\varphi = A_y$. Составляющие вектора магнитной индукции определяются из:

$$B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi); \quad B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi); \quad B_\varphi = 0. \quad (7.60)$$

Решение этой же задачи можно найти, используя разложения модуля разности векторов по сферическим функциям. Рассматривая, аналогично предыдущему случаю, плоскость $x - z$ ($\varphi = 0$), для A_y компоненты векторного потенциала находим:

$$A_y = \operatorname{Re} \frac{4\pi I}{cR} \sum_{l,m} \frac{Y_{l,m}(\theta, 0)}{2l+1} \int \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \delta(\cos \theta') \delta(r' - R) e^{i\varphi'} Y_{l,m}^*(\theta', \varphi') dv', \quad (7.61)$$

здесь $r_{>}, r_{<}$ большая, меньшая из двух переменных r, R и интегрирование проводится по всему пространству в переменных сферической системы координат. Наличие множителя $\exp(i\varphi')$ в подынтегральном выражении в (7.61) означает, что в сумме по m отличны от нуля лишь слагаемые с $m = 1$, так как под интегралом по φ' появится выражение $\exp[i(1-m)\varphi']$. Интеграл от такой функции в пределах от 0 до 2π равен 2π при $m = 1$ и равен нулю во всех остальных случаях. Выполняя интегрирования в (7.61), находим:

$$A_y = \frac{8\pi^2 IR}{c} \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{l,1}(\theta, 0) Y_{l,1}^*\left(\frac{\pi}{2}, 0\right). \quad (7.62)$$

Используя явный вид сферической функции $Y_{l,1}^*\left(\frac{\pi}{2}, \varphi'\right)$ [14], получаем:

$$Y_{l,1}^*\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} P_l^1(0). \quad (7.63)$$

Здесь P_l^1 - присоединенный полином Лежандра [14]. С учетом свойств присоединенных полиномов Лежандра [14] находим:

$$A_\varphi = -\frac{\pi IR}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n (n+1)!} \cdot \frac{r_{<}^{2n+1}}{r_{>}^{2n+2}} \cdot P_{2n+1}^1(\cos \theta), \quad (7.64)$$

где $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)$, $r_{<}, r_{>}$ - меньшая - большая переменные, соответственно, из радиальной переменной точки наблюдения r и радиуса окружности с током R . ◀

Выражение (7.64) существенно проще для вычислений значения поля, чем результат, представленный формулой (7.58).

Задание на дом: Решить задачи 7.§6.4 - 7.§6.8 на стр. 256.

§4 Поле системы замкнутых токов на больших расстояниях. Магнитный момент системы токов.

На больших расстояниях от области, где протекают замкнутые токи, векторный потенциал и индукция магнитного поля принимают вид:

$$\mathbf{A} \approx \frac{[\tilde{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{r}]}{r^3}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \approx \frac{3(\tilde{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} - \tilde{\boldsymbol{\mu}}}{r^3}, \quad (7.65)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, \mathbf{r} - радиус вектор точки наблюдения в системе координат, в которой определена система токов \mathbf{j} , а $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ - магнитный момент системы замкнутых токов (7.7). Для замкнутого линейного тока I на основании (7.7) магнитный момент равен (7.8): Интеграл в (7.8) вычисляется по произвольной поверхности S , границей которой является линейный ток I . Если ток лежит в плоскости, то направление \mathbf{n} связано с направлением тока I правилом "правого винта".

Пример 7.§4.1. Установить связь магнитного момента с механическим для заряженной частицы массы m , заряда q , движущейся по замкнутой траектории.

► Механический момент \mathbf{l} или момент импульса определяется в классической механике как вектор следующего вида: $\mathbf{l} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$, где \mathbf{r} - радиус-вектор, а \mathbf{p} - импульс частицы. Подставим в (7.7) величину плотности тока точечной заряженной частицы $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q)$. Здесь \mathbf{v} - скорость движения, а \mathbf{r}_q - радиус-вектор положения заряда в пространстве. В результате:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r} \times \mathbf{v}q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q)] dv = \frac{q}{2mc} [\mathbf{r}_q \times \mathbf{p}] = \frac{q}{2mc} \mathbf{l}. \quad \blacktriangleleft \quad (7.66)$$

Данное соотношение выполняется и для системы N частиц с одинаковыми зарядами и массами:

$$\mathbf{M} = \frac{q}{2mc} \mathbf{L}; \quad \mathbf{M} = \sum_{i=1}^N \tilde{\boldsymbol{\mu}}_i; \quad \mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{l}_i.$$

Пример 7.§4.2. Доказать, что для замкнутых токов определение магнитного момента не зависит от выбора начала координат.

► Определения магнитного момента системы замкнутых токов в системах координат S и S' следующие:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] dv; \quad \tilde{\boldsymbol{\mu}}' = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}] dv'. \quad (7.67)$$

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$, с учетом (7.67) получим:

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{2c} \int_V [(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \times \mathbf{j}] dv = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] dv + \frac{1}{2c} [\mathbf{a} \times \int_V \mathbf{j} dv]. \quad (7.68)$$

Последнее слагаемое в (7.68) обращается в ноль в силу

$$\int_V \mathbf{j} dv = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \oint I_{L_i} d\mathbf{l} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N I \oint_{L_i} d\mathbf{l} = 0.$$

Таким образом, $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}'$ и определение магнитного момента не зависит от выбора начала отсчета системы координат. ◀

Пример 7.§4.3. В сферических координатах компоненты вектора объемной плотности тока в одном из возбужденных состояний атома водорода равны:

$$j_r = j_\theta = 0 \quad j_\varphi = \frac{e\hbar}{3^8 \pi m a^7} r^3 \exp\left(-\frac{2r}{3a}\right) \sin \theta \cos^2 \varphi, \quad (7.69)$$

где a - боровский радиус, \hbar - постоянная Планка, m и e - масса и заряд электрона. Вычислить магнитный момент такого тока. [3]

► По определению (7.7) магнитный момент тока равен:

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] dv = \frac{1}{2c} \int_V \begin{bmatrix} \mathbf{a}_r & \mathbf{a}_\theta & \mathbf{a}_\varphi \\ j_r & j_\theta & j_\varphi \\ r_r & r_\theta & r_\varphi \end{bmatrix} dv, \quad (7.70)$$

где $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_\varphi$ - единичные векторы сферической системы координат, j_r, j_θ, j_φ - компоненты плотности тока в сферической системе координат, r_r, r_θ, r_φ - компоненты радиус-вектора в сферической системе координат. Таким образом, получаем:

$$\tilde{\mu} = -\frac{1}{2c} \int_V \mathbf{a}_\theta r j_\varphi dv. \quad (7.71)$$

Интегрирование в (7.71), включающее все пространство, удобно выполнить в сферической системе координат, в которой $dv = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$. При этом следует иметь в виду, что базис сферической системы координат меняется от точки к точке, поэтому запишем \mathbf{a}_θ в декартовой системе координат:

$$\mathbf{a}_\theta = \mathbf{i} \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{j} \cos \theta \sin \varphi - \mathbf{k} \sin \theta, \quad (7.72)$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ - базис декартовой системы координат. При интегрировании (7.71) по углу φ вклад слагаемых при единичных векторах \mathbf{i}, \mathbf{j} равен нулю, так как

интегрируется периодическая функция на полном периоде. В результате:

$$\tilde{\mu} = \frac{e\hbar\mathbf{k}}{2c3^8\pi m a^7} \int_0^\infty r^6 \exp\left(-\frac{2r}{3a}\right) dr \int_0^\pi \sin^2\theta \cos^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{e\hbar}{2mc} \mathbf{k}. \quad \blacktriangleleft \quad (7.73)$$

Пример 7.§4.4. Согласно классической модели, электрон заряда e и массы m представляет собой однородно заряженный шар радиуса $r_0 = e^2/mc^2$. Здесь c — скорость света. Рассматривая магнитный спиновый момент как результат вращения электрона вокруг своей оси симметрии, определить с какой угловой скоростью должен вращаться электрон, чтобы его магнитный момент был бы равен экспериментально измеряемой величине $\mu = e\hbar/2mc$. Какова при этом будет линейная скорость точек электрона, лежащих на его диаметре? [3]

► Вычислим магнитный момент шара, заряженного с постоянной объемной плотностью, который вращается с угловой скоростью ω . Из-за вращения шара произвольная точка \mathbf{r} шара движется с линейной скоростью $v_\varphi = r \sin\theta \cdot \omega$. Таким образом, возникает перенос заряда с плотностью тока $j_\varphi = \rho\omega r \sin\theta$. Рассуждения, аналогичные тем, что были выполнены в примере 7.§4.3 для магнитного момента шара, дают:

$$\tilde{\mu} = \left(\frac{1}{2c} \int_V r j_\varphi \sin\theta dv\right) \mathbf{k},$$

здесь V — объем шара. Таким образом,

$$\mu = \frac{\rho\omega}{2c} \int_0^{r_0} r^4 dr \int_0^\pi \sin^2\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{5} \frac{\omega e r_0^2}{c}. \quad (7.74)$$

По условию задачи вычисленный магнитный момент должен быть равен экспериментально измеренному значению:

$$\frac{1}{5} \frac{\omega e r_0^2}{c} = \frac{e\hbar}{2mc}. \quad (7.75)$$

Отсюда можно найти величину угловой скорости, с которой должен вращаться электрон, чтобы возникший из-за вращения ток привел к экспериментально измеренному значению магнитного момента электрона:

$$\omega = \frac{5\hbar}{2mr_0^2} = \frac{5}{2} \frac{mc^2}{\hbar} \alpha^{-2}, \quad (7.76)$$

где $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры. Подставляя численные значения фундаментальных констант, находим $\omega \approx 10^{25} \text{ сек}^{-1}$. Так как

классический радиус электрона $r_0 = e^2/mc^2 \approx 10^{-13}$ см, линейная скорость движения точек электрона, лежащих на его диаметре, будет иметь порядок величины $v = \omega r \approx 10^{12}$ см/сек, что на два порядка больше скорости света. Таким образом, данная модель не может рассматриваться в качестве модели при изучении спинового магнитного момента. ◀

Пример 7.§4.5. *Линейный ток I протекает по проводнику в форме половины окружности, замкнутой на три стороны прямоугольника, длины которых равны, $R, 2R$ и R , соответственно. Сторона $2R$ параллельна диаметру основания полуокружности. Определить поле на больших расстояниях от тока.*

► На основании (7.65) индукция магнитного поля определяется магнитным моментом тока. Для плоского тока, в соответствии с (7.8), вектор магнитного момента равен $\tilde{\mu} = IS \cdot \mathbf{n}/c$, где S - площадь фигуры, ограниченной рассматриваемым током, \mathbf{n} - нормаль к плоскости, направленная в сторону так, чтобы выполнялось условие - при наблюдении против направления нормали ток направлен против часовой стрелки (это известно в классической электродинамике как правило "буравчика"). В данном примере :

$$S = 2R^2 + \pi R^2/2 = \frac{\pi R^2}{2} \left[1 + \frac{4}{\pi} \right]. \quad (7.77)$$

Следовательно

$$\mathbf{B} = \frac{3(\tilde{\mu} \cdot \mathbf{n}') \mathbf{n}' - \tilde{\mu}}{r^3} = \frac{IS}{c} \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \mathbf{n}' - \mathbf{n}}{r^3}, \quad (7.78)$$

где \mathbf{n}' - единичный вектор в направлении на точку наблюдения из выбранного начала координат, совпадающего с центром полуокружности. ◀

Задание на дом: Решить задачи 7.§6.9 на стр. 257, 7.§6.13 - 7.§6.17 на стр. 257.

§5 Энергия и силы в магнитном поле. Энергия тока во внешнем поле.

Полная энергия ε магнитного поля в объеме V определяется выражением (7.14). Интегрирование в (7.14) осуществляется по всему пространству, где есть поле. В частном случае объемного тока, текущего в ограниченной области пространства V , энергия магнитного поля системы может быть пред-

ставлена в виде (6.14):

$$\varepsilon = \frac{1}{2c} \int_V (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}) dv. \quad (7.79)$$

Здесь \mathbf{A} -векторный потенциал поля, создаваемого током \mathbf{j} .

Для системы N штук проводников:

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^N \varepsilon_{kk} + \sum_{k,n=1; k < n}^N \varepsilon_{kn}, \quad (7.80)$$

где

$$\varepsilon_{kk} = \frac{1}{2c} \int_{V_k} (\mathbf{j}_k \cdot \mathbf{A}_k) dv, \quad (7.81)$$

-собственная магнитная энергия " k "-го проводника объема V_k , а ε_{kn} - энергия взаимодействия " k "-го и " n "-го проводников.

$$\varepsilon_{kn} = \frac{1}{c^2} \int_{V_k} \int_{V_n} \frac{(\mathbf{j}_k(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}_n(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv dv' \leftrightarrow \frac{I_k I_n}{c^2} \oint_{L_k} \oint_{L_n} \frac{(d\mathbf{l}_k \cdot d\mathbf{l}_n)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (7.82)$$

Собственную энергию и энергию взаимодействия представляют в виде:

$$W_{kk} = \frac{I_k^2}{2c^2} L_{kk}, \quad W_{kn} = \frac{I_k I_n}{c^2} L_{kn}, \quad (7.83)$$

где $L_{kk} \equiv L_k$ - называется коэффициент самоиндукции, а L_{kn} - коэффициенты взаимной индукции.

Для системы токов, находящихся во внешнем слабо неоднородном поле,

$$\varepsilon = \frac{1}{c} \int_V (\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{R})) dv \approx (\tilde{\mu} \cdot \mathbf{B}) + \dots \quad (7.84)$$

Сила действующая в магнитном поле на элемент $d\mathbf{l}$ с током I вычисляется с использованием закона Ампера:

$$d\mathbf{F} = \frac{I}{c} [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]. \quad (7.85)$$

Для нахождения силы, действующей на проводник конечной длины, необходимо проинтегрировать выражение (7.85) по линии проводника. Для точечного заряда выражение (7.85) имеет вид (7.15):

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

Силы в магнитном поле могут быть вычислены с использованием тензора натяжений Максвелла M_{ki} (7.18).

Пример 7.§5.1. Доказать, что вид формулы (7.79) не изменится в результате градиентных преобразований векторного потенциала $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{grad}\chi$.

► По определению:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{1}{2c} \int_V (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}') dv = \frac{1}{2c} \int_V (\mathbf{j} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{grad}\chi)) dv = \\ &= \frac{1}{2c} \int_V (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}) dv - \frac{1}{2c} \int_V (\mathbf{j} \cdot \mathbf{grad}\chi) dv = \frac{1}{2c} \int_V (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}) dv - \frac{1}{2c} \int_V \operatorname{div}(\chi \mathbf{j}) = \\ &= \frac{1}{2c} \int_V (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}) dv - \frac{1}{2c} \oint_S \chi (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}).\end{aligned}$$

Для ограниченных токов нормальная составляющая тока равна нулю на поверхности S , ограничивающей систему токов. Таким образом, поверхностный интеграл в последнем выражении равен нулю, и следовательно, инвариантность формулы (7.79) относительно градиентных преобразований доказана. ◀

Пример 7.§5.2. Шар радиуса R , равномерно заряженный с объемной плотностью ρ , вращается вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью $\tilde{\omega}$. Вычислить энергию магнитного поля шара (см. задачу 221 в [3]).

► Решением задачи о поле шара являются следующие выражения для точек, лежащих внутри шара ($r \leq R$):

$$B_r = \beta \left(\frac{R^2}{3} - \frac{r^5}{5} \right) \cos \theta, \quad B_\theta = \beta \left(\frac{2r^2}{5} - \frac{R^2}{3} \right) \sin \theta, \quad B_\varphi = 0. \quad (7.86)$$

Здесь B_r, B_θ, B_φ – составляющие вектора индукции магнитного поля вдоль единичных векторов сферической системы координат, $\beta = 4\pi\rho\omega/c$. Для точек вне шара поле равно :

$$\mathbf{B} = \frac{3(\tilde{\mu} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} - \tilde{\mu}}{r^3}, \quad (7.87)$$

где $\mu = \beta R^5/15$ – магнитный момент шара, направленный вдоль оси вращения. Подставляя (7.86), (7.87) в (7.14), находим:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\beta^2}{8\pi} \left\{ \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5} \right)^2 \cos^2 \theta + \left(\frac{2r^2}{5} - \frac{R^2}{3} \right)^2 \sin^2 \theta \right] r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \int_R^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^5}{15} \right)^2 \frac{3 \cos^2 \theta + 1}{r^6} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi \right\} = \frac{10\mu^2}{7R^3}. \quad \blacktriangleleft \quad (7.88)\end{aligned}$$

Пример 7.§5.3. По двум concentрическим бесконечным цилиндрическим поверхностям текут одинаковые, но противоположно направленные токи силы I . Радиусы цилиндров R_1 и R_2 , ($R_1 < R_2$). Вычислить энергию магнитного поля, приходящуюся на единицу длины цилиндров.

► Поле внутри цилиндров $B = 2I/cr$, где r - радиальная переменная цилиндрической системы координат, c - скорость света. В других точках поле равно нулю. В результате на основании (7.14) находим для энергии поля внутри цилиндров высоты H :

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^H \int_0^{2\pi} \left(\frac{2I}{cr} \right)^2 r dr dz d\varphi = \frac{I^2 H}{c^2} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Таким образом, энергия, приходящаяся на единицу длины цилиндров, равна:

$$\frac{\varepsilon}{H} = \frac{I^2}{c^2} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad \blacktriangleleft \quad (7.89)$$

Пример 7.§5.4. Вычислить коэффициенты взаимной индукции двух прямых параллельных линий токов I . Расстояние между проводниками равно h . Длина проводников l .

► На основании (7.83)

$$\begin{aligned} L_{12} &= \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \int_0^l \int_0^l \frac{dy_1 dy_2}{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + h^2}} = \\ &= \int_0^l \ln \frac{(l - y) + \sqrt{(l - y)^2 + h^2}}{\sqrt{y^2 + h^2} - y} dy. \end{aligned} \quad (7.90)$$

Интегрируя (7.90) по частям, получаем:

$$L_{12} = l \ln \left(\frac{h}{\sqrt{l^2 + h^2} - l} \right) - 2(\sqrt{l^2 + h^2} - h) + l \ln \left(\frac{l}{\sqrt{l^2 + h^2} - l} \right). \quad \blacktriangleleft \quad (7.91)$$

Пример 7.§5.5. Однородно заряженный цилиндр произвольной высоты и радиуса R вращается вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью $\tilde{\omega}$. Определить энергию взаимодействия цилиндра с внешним магнитным полем \mathbf{B} .

► На основании (7.7) вычислим магнитный момент цилиндра:

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{2c} \int_0^R \int_0^H \int_0^{2\pi} r \rho r \tilde{\omega} r dr dz d\varphi = \frac{QR^2}{4c} \tilde{\omega}, \quad (7.92)$$

где ρ – плотность заряда. На основании (7.84) энергия магнитного момента во внешнем поле определяется скалярным произведением вектора индукции и вектора магнитного момента. В результате

$$\varepsilon = \frac{Q}{4c} R^2 (\tilde{\omega} \cdot \mathbf{B}). \quad \blacktriangleleft$$

Пример 7.§5.6. Оценить по порядку величины самоиндукцию тонкого замкнутого проводника радиуса R и длины $l \gg R$. [17]

► На расстояниях $r \ll l$ от оси проводника его поле мало отличается от поля прямого проводника. Считая распределение тока равномерным по сечению, магнитная энергия внутри проводника равна :

$$W_1 = \int_0^R \int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{B^2}{8\pi} r dr dz d\varphi = \frac{1}{8\pi} \int_0^R \left(\frac{2I}{cR^2} \right)^2 r^2 r dr \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{I^2 l}{4c^2}. \quad (7.93)$$

Для энергии вне проводника получаем :

$$W_2 = \int_R^\infty \frac{B^2}{8\pi} r dr dz d\varphi = \frac{I^2}{c^2} l \int_R^\infty \frac{dr}{r}. \quad (7.94)$$

Подынтегральное выражение (7.94) правильно описывает поле только на расстояниях $r \ll l$. При $r \gg l$ поле убывает быстрее, так как на больших расстояниях $B \sim 1/r^3$. В результате можно получить оценку W_2 , если интегрирование ограничить областью $r \sim l$:

$$W_2 \approx \frac{I^2}{c^2} l \ln \left(\frac{l}{R} \right). \quad (7.95)$$

В результате для коэффициента самоиндукции находим:

$$L \approx \frac{2c^2}{I^2} W_2 \approx 2 \left[\frac{l}{4} + l \ln \left(\frac{l}{R} \right) \right] \approx 2l \ln \left(\frac{l}{R} \right). \quad \blacktriangleleft \quad (7.96)$$

Пример 7.§5.7. Два равномерно заряженных шара радиуса R вращаются с угловыми скоростями $\tilde{\omega}_1$ и $\tilde{\omega}_2$. Заряды шаров q_1 и q_2 . Шары находятся на расстоянии $l \gg R$ друг от друга. Определить энергию взаимодействия шаров.

► На основании (7.65) поле, создаваемое первым шаром в точке расположения второго шара, равно:

$$\mathbf{B} = \frac{3(\tilde{\mu}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \tilde{\mu}_1}{l^3}, \quad (7.97)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{l}/l$ – единичный вектор в направлении от первого шара ко второму, $\tilde{\mu}_1$ – магнитный момент первого шара. Энергия взаимодействия магнитного

момента второго шара с полем, создаваемым первым шаром, равна :

$$\varepsilon = (\tilde{\mu}_2 \cdot \mathbf{B}) = \frac{3(\tilde{\mu}_1 \cdot \mathbf{n})(\tilde{\mu}_2 \cdot \mathbf{n}) - (\tilde{\mu}_1 \cdot \tilde{\mu}_2)}{l^3}. \quad (7.98)$$

Магнитные моменты шаров на основании (7.74) равны $-\tilde{\mu}_i = R^2 q_i \tilde{\omega}_i / 5c$. В результате для энергии взаимодействия шаров находим :

$$\varepsilon = \left(\frac{R^2}{5c} \right)^2 q_1 q_2 \frac{(\tilde{\omega}_1 \cdot \mathbf{n})(\tilde{\omega}_2 \cdot \mathbf{n}) - (\tilde{\omega}_1 \cdot \tilde{\omega}_2)}{l^3}. \quad \blacktriangleleft \quad (7.99)$$

Пример 7.§5.8. Два длинных параллельных провода (сопротивление которых пренебрежимо мало) замкнуты с одной стороны на сопротивление R , а с другого конца подключены к источнику постоянного напряжения. Радиус сечения каждого провода в $\eta = 20$ раз меньше расстояния между осями проводов. Определить значение сопротивления R , при котором сила взаимодействия проводов обращается в нуль.

► На каждом из проводов (протекает по ним ток или нет) имеются поверхностные заряды противоположных знаков (в соответствии со знаками полюсов источника постоянного напряжения). Следовательно, кроме силы взаимодействия токов посредством магнитного поля F_m , необходимо еще учесть электрическую силу F_e , действующую на провод со стороны другого провода. Обозначим величину заряда на единицу длины τ , а расстояние между проводами l . По теореме Гаусса в электростатике, выбирая произвольную поверхность S в виде цилиндра высоты h соосно с проводником, можно определить напряженность электрического поля, создаваемое заряженным проводником на произвольном расстоянии r от него. Тогда:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E 2\pi r h = 4\pi q = 4\pi \tau h. \quad (7.100)$$

Таким образом, величина электрической силы взаимодействия проводников, приходящаяся на единицу длины провода, равна:

$$F_e = \tau E = \tau \frac{2\tau}{l} = \frac{2\tau^2}{l} \quad (7.101)$$

Магнитная составляющая силы, приходящаяся на единицу длины провода, вычисляется на основании формул (7.24), (7.85). В результате величина магнитной силы F_m , приходящейся на единицу длины проводника, есть:

$$F_m = \frac{2}{c^2} \frac{I^2}{l}. \quad (7.102)$$

Отметим, что обе силы, электрическая и магнитная, направлены в противоположные стороны. Электрическая сила вызывает притяжение проводников, т.к. обусловлена взаимодействием зарядов противоположных знаков, а магнитная сила вызывает отталкивание проводников. Отношение этих сил равно:

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{I^2}{c^2 \tau^2}. \quad (7.103)$$

Между величинами I и τ существует связь. Определим емкость проводников приходящуюся на единицу длины выражением $C_\tau = \tau/U$. Взаимная емкость двух проводников определяется как коэффициент C в соотношении $q = C(\varphi_2 - \varphi_1) = C\Delta\varphi$. Для определения $\Delta\varphi$ по принципу суперпозиции представим $\Delta\varphi = |\Delta\varphi_+| + |\Delta\varphi_-|$, где $|\Delta\varphi_\pm|$ - разности потенциалов на поверхностях проводников, создаваемые зарядами (\pm) проводников. По определению, для $|\Delta\varphi_+|$ находим:

$$|\Delta\varphi_+| = \int_{R_0}^{l-R_0} E dr = \int_{R_0}^{l-R_0} \frac{2\tau}{r} dr = 2\tau \ln \frac{l-R_0}{R_0}, \quad (7.104)$$

где R_0 - радиус проводников. Очевидно, что $|\Delta\varphi_-| = |\Delta\varphi_+|$. Таким образом, с учетом если выразить расстояние между проводниками в единицах радиуса проводника $l = \eta R_0$, получим для величины емкости приходящейся на единицу длины:

$$C_\tau = \frac{\tau}{|\Delta\varphi|} = \frac{1}{4 \ln[(l-R_0)/R_0]} = \frac{1}{4 \ln(\eta-1)}. \quad (7.105)$$

В результате:

$$\tau = C_\tau U = \frac{1}{4 \ln(\eta-1)} U = \frac{RI}{4 \ln(\eta-1)}. \quad (7.106)$$

На основании последнего равенства находим:

$$\frac{I}{\tau} = \frac{4}{R} \ln(\eta-1). \quad (7.107)$$

Подставляя (7.107) в (7.103), для отношения сил получим:

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{16 \ln^2(\eta-1)}{c^2 R^2}. \quad (7.108)$$

Очевидно, что результирующая сила взаимодействия обращается в нуль, когда соотношение (7.108) равно единице. Обозначим величину сопротивления, при котором силы равны и уравновешены, через R_c . На основании

(7.108) имеем: $R_c = \ln(\eta - 1)/c$. Таким образом, если сопротивление $R < R_c$, то $F_m > F_e$ и провода отталкиваются, если же $R > R_c$, то $F_m > F_e$ и провода притягиваются. ◀

Задание на дом: Решить задачу §6.18 на стр. 258.

§6 Упражнения к гл.7.

§6.1. Определить распределение объемной плотности тока в пространстве, если напряженность поля равна: $\mathbf{H} = (\tilde{\mu} \cdot \mathbf{r})[\tilde{\mu} \times \mathbf{r}]$. (см. задачу 140а [3]).

§6.2. Доказать, что для замкнутого тока с плотностью \mathbf{j} выполняется равенство $\int \mathbf{j} dv = 0$, где интегрирование проводится по всему объему с током, а функция \mathbf{j} непрерывна внутри данного объема (см. задачу 144 [3]).

§6.3. По бесконечной цилиндрической поверхности радиуса R параллельно ее оси течет однородный ток с поверхностной плотностью \mathbf{i}_0 . Найти индукцию магнитного поля в любой точке пространства (см. задачу 144 [3]).

§6.4. Внутри бесконечного цилиндра радиуса R параллельно его оси течет ток с объемной плотностью, зависящей только от модуля радиуса вектора цилиндрической системы координат r , $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 r^3$ (\mathbf{j}_0 - постоянный вектор). Найти напряженность магнитного поля в любой точке пространства.

§6.5. В цилиндре радиуса R_1 протекает однородный постоянный ток с плотностью $\mathbf{j}_1 = \text{const}$. В цилиндрическом слое, охватывающем цилиндр R_1 с внешним радиусом R_2 , протекает постоянный ток $\mathbf{j}_2 = \text{const}$ в противоположном направлении. При каком соотношении между токами поле вне проводника равно нулю?

§6.6. Внутри бесконечного цилиндра радиуса R параллельно его оси течет ток с объемной плотностью $\mathbf{j} = \text{const}$. Вычислить поток вектора напряженности магнитного поля через квадратную рамку со стороной $a > R$, если одна из сторон рамки совпадает с осью цилиндра.

§6.7. Ток I течет по длинному прямому проводнику в форме полуцилиндрической поверхности радиуса R . Найти магнитную индукцию на оси данной поверхности (решение см. в [22], стр 148).

§6.8. Внутри однородного длинного прямого провода круглого сечения имеется круглая цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси провода и смещена относительно последней на расстояние l . По проводу течет постоянный ток плотности \mathbf{j} . Найти магнитную индукцию внутри по-

лости (решение см. в [22], стр 148).

§6.9. Шар радиуса R , равномерно заряженный с объемной плотностью ρ , вращается вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью $\tilde{\omega}$. Найти векторный потенциал в любой точке пространства (решение см. в [3], задача 221).

При решении потребуется вид векторного лапласиана $\nabla^2 \mathbf{A}$ в сферической системе координат (см. в [2]).

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} |_{r=}& \nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} A_\theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \nabla^2 \mathbf{A} |_{\theta=}& \nabla^2 A_\theta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \nabla^2 \mathbf{A} |_{\varphi=}& \nabla^2 A_\varphi - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}.\end{aligned}$$

§6.10. В сферических координатах компоненты вектора плотности тока в одном из возбужденных состояний атома водорода равны:

$$j_r = j_\theta, \quad j_\varphi = \frac{1}{23^8} \frac{e\hbar}{\pi m a^7} r^3 \exp\left(-\frac{2r}{3a}\right) \sin^3 \theta,$$

где $a = \hbar^2 / m e^2$ - Боровский радиус, \hbar - постоянная Планка, m - масса электрона, e - его заряд. Найти индукцию магнитного поля в начале координат

§6.11. Решить задачи, рассмотренные в упражнениях §6.4 – §6.6, §6.8 – §6.10, методом, основанным на использовании закона Био-Савара-Лапласа.

§6.12. Средняя плотность заряда электронного облака в атоме водорода равна $\rho = \frac{e}{\pi a^3} \exp(-\frac{2r}{a})$, где a - Боровский радиус (см. упражнение §6.10), r - расстояние от протона, e - заряд электрона. Если поместить атом во внешнее однородное поле с индукцией $\mathbf{B} = \text{const}$, то электронное облако придет во вращение (теорема Лармора), которое создаст в пространстве объемную плотность тока $\mathbf{j} = \frac{e\rho}{2mc} [\mathbf{r} \times \mathbf{B}]$. Определить, на какую величину изменится вектор индукции поля в центре атома? (см. задачу 173 в [3]).

§6.13. Шар радиуса R заряжен равномерно с постоянной плотностью ρ до величины заряда Q . Одна половина шара вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 , а другая, с угловой скоростью ω_2 в противоположном направлении. Найти магнитное поле в центре шара.

§6.14. По тонкому кольцу радиуса R течет ток I . Определить вектор индукции магнитного поля на оси кольца. (См. задачу 189 в [3]).

§6.15. Найти векторный потенциал \mathbf{A} и вектор индукции магнитного поля на больших расстояниях от шара радиуса R , заряженного с постоянной объемной плотностью ρ , вращающегося с угловой скоростью $\vec{\omega}$.

§6.16. Ток течет по тонкой трубке в форме окружности радиуса R . Определить индукцию магнитного поля на больших расстояниях от тока. Сравнить ответ с результатом, полученным в упражнении §6.3.

§6.17. Два цилиндра высоты H и радиуса R заряжены с постоянной объемной плотностью ρ и вращаются вокруг осей симметрии с угловыми скоростями $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$. Оси цилиндров находятся в одной плоскости и расположены под углом α друг к другу. Найти поле, создаваемое такой системой на больших расстояниях.

§6.18. Определить энергию магнитного поля тока, протекающего по цилиндрическому проводнику радиуса R с плотностью тока $\mathbf{j} = \mathbf{j}(r)$.

Глава 8

Теория излучения. Лекции.

§1 Потенциалы Лиенара–Вихерта.

Система произвольно движущихся зарядов или переменные во времени токи создают переменное электромагнитное поле. В этом случае характеристики в распределении зарядов и токов, а также функции определяющие поле являются функциями времени.

Поле точечного заряда.

Поле произвольно движущегося точечного заряда e является элементарным примером системы создающей переменное во времени поле. Пусть траектория движения заряда задана радиус - вектором $\mathbf{r}_e(t)$.

Уравнения для определения скалярного φ и векторного \mathbf{A} потенциалов имеют следующий вид:

$$\square \varphi = \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho(\mathbf{r}, t); \quad (8.1)$$

$$\square \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (8.2)$$

Для точечного заряда e объемная плотность заряда ρ и объемная плотность тока \mathbf{j} равны:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t)); \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho \mathbf{v} = \mathbf{v} e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t)), \quad (8.3)$$

где $\mathbf{r}_e(t)$ – радиус-вектор заряда e , а \mathbf{r} – радиус вектор произвольной точки в пространстве,

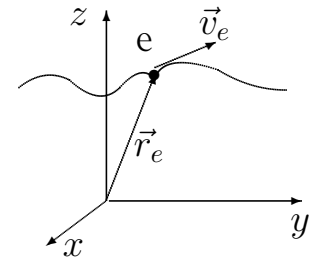


Рис. 8.1:

Запаздывающий потенциал.

Решение неоднородного волнового уравнения (8.1) может быть записано следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (8.4)$$

Представленное решение уравнения (8.1) соответствует запаздывающему решению неоднородного волнового уравнения. Такой тип решения выбирается для удовлетворения физического принципа причинности, который означает, что поле в произвольной точке пространства в момент времени t создается зарядом в момент времени $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$, предшествующий моменту времени наблюдения на величину времени запаздывания, необходимого для того, чтобы электромагнитное поле дошло от точки расположения заряда \mathbf{r}' до точки наблюдения \mathbf{r} .

Введем для упрощения вычисления интеграла (8.4) дополнительное интегрирование по времени t' , в результате решение (8.4) можно переписать следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right) dv' dt'. \quad (8.5)$$

Подставим выражение для $\rho(\mathbf{r}', t')$ из (8.3) в (8.5) и проинтегрируем по пространственным переменным вектора \mathbf{r}' :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{e \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_e(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right) dv' dt' = \\ &= \int \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|} \delta\left(-t' + t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|\right) dt' \end{aligned} \quad (8.6)$$

Для вычисления интеграла (8.6) необходимо использовать правило вычисления интегралов от дельта - функции Дирака сложного аргумента $\int f(t) \delta(\varphi(t)) dt$.

Вспомогательное равенство.

Общее правило вычисления таких интегралов основывается на соотношении, которое получено в теории обобщенных функций

$$\delta(\phi(t)) = \sum_i \frac{\delta(t - t_i)}{\left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=t_i}}, \quad (8.7)$$

где t_i - корни уравнения $\phi(t) = 0$.

Таким образом для вычисления интеграла (8.6) необходимо найти решение уравнения:

$$\phi(t') = t' - t + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')| = 0. \quad (8.8)$$

Обозначим корень уравнения (8.8) через ξ . То есть при $t' = \xi$, $\phi(\xi) = 0$.

$$\xi = t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(\xi)|$$

Найдем теперь выражение для частной производной в (8.7) с учетом явного выражения для ϕ в формуле (8.8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(t')}{\partial t'} &= 1 + \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')| \right\} = 1 + \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ \frac{1}{c} \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_e(t') + r_e^2(t')} \right\} = \\ &= 1 - \frac{\mathbf{v}_e(t')}{c} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|} = 1 - \frac{1}{c} \mathbf{v}_e(t') \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{R} \left(R - \frac{1}{c} \mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{R} \right), \end{aligned} \quad (8.9)$$

где $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t'))/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')| \equiv \mathbf{R}/R$ — единичный вектор, а $\mathbf{v}_e(t')$ — скорость движения частицы. Следовательно выражение (8.6) можно представить в виде:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|} \frac{\delta(t' - \xi)}{|1 - \frac{1}{c}\mathbf{v}_e(t') \cdot \mathbf{n}(t')|} dt' = \frac{e}{R(\xi) - \frac{1}{c}\mathbf{v}(\xi) \cdot \mathbf{R}(\xi)}.$$

Скалярный потенциал.

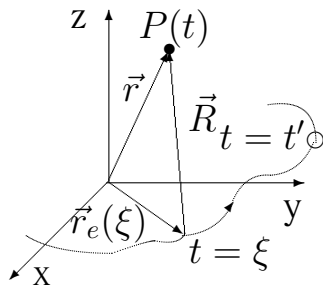


Рис. 8.2:

В соответствии с полученным результатом значение скалярного потенциала в точке с радиус-вектором \mathbf{r} в момент времени ξ , являющийся корнем уравнения $\xi - t + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(\xi)| = 0$ определяется выражением:

$$\varphi(\mathbf{r}, \xi) = \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(\xi)|} \cdot \frac{1}{(1 - \mathbf{v}(\xi) \cdot \mathbf{n}/c)}, \quad (8.10)$$

При скорости $\mathbf{v}(\xi) \ll c \Rightarrow \varphi(\mathbf{r}, \xi) = e/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t)|$, то есть совпадает с электростатическим значением потенциала покоящегося заряда.

Векторный потенциал.

Для векторного потенциала \mathbf{A} вычисления полностью аналогичные вычислению скалярного потенциала приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t - t' - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dv' dt', \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, \xi) &= \frac{e\mathbf{v}(\xi)}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(\xi)|} \frac{1}{(1 - (\mathbf{v}(\xi) \cdot \mathbf{n})/c)}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Выражения (8.10) и (8.11) для $\varphi(\mathbf{r}, \xi)$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \xi)$ называются потенциалами Лиенара — Вихерта.

Векторы поля.

Напряженности полей создаваемые произвольно движущимся зарядом можно найти по определению исходя из значений скалярного и векторного потенциалов:

$$\mathbf{E} = \frac{e(1 - v^2/c^2)(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c)}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^3} + \frac{e[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c) \times \dot{\mathbf{v}}]]}{c^2 R(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^3} \quad (8.12)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_e(\xi)$ и $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$.

В представленных выражениях для электромагнитного поля в отличие от статических полей появились слагаемые, убывающие на больших расстояниях от системы как r^{-1} .

Выводы.

Два важных следствия вытекают из (8.12)

1. Если заряд движется с $\mathbf{v} = \text{const}$, тогда $\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$. Следовательно слагаемое в выражении для \mathbf{E} , имеющее на больших расстояниях асимптотику $\sim r^{-1}$ появляется только для ускоренно движущихся частиц. Для частиц, движущихся с постоянной скоростью поле равно:

$$\mathbf{E} = \frac{e (1 - v^2/c^2) (\mathbf{n} - v/c)}{R^2 (1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^3}, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}].$$

2. При $R \rightarrow \infty$ и $v \ll c$ выражение для поля примет вид:

$$\mathbf{E} \approx \frac{e [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}}]]}{c^2 R} = \frac{[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]]}{c^2 R}; \quad \mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]$$

§2 Поле точечного диполя.

Важной модельной системой создающей переменное электромагнитное поле является зависящий от времени точечный диполь $\mathbf{d}(t)$. Прототипом зависящего от времени диполя являются два равных, но разноименных заряда находящиеся на расстоянии l друг от друга, величина которых меняется с течением времени. Если размеры диполя l малы по сравнению с размерами выбранной системы, то можно использовать модельное представление о точечном диполе.

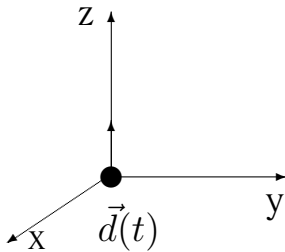


Рис. 8.3:

Переменный во времени точечный диполь, расположенный в начале координат, называется вибратором Герца. В соответствии с общей теорией электромагнитного поля, поле такой системы удобно вычислить с использованием векторов Герца. Дипольный и магнитный моменты единицы объема системы, состоящей из одного точечного электрического

диполя расположенного в начале координат, имеют вид, соответственно:

$\mathbf{P} = \mathbf{d}(t)\delta(\mathbf{r})$, $\mathbf{M} = 0$. В силу равенства нулю магнитного момента единицы объема, поле такой системы определяется вектором Герца электрического типа, а вектор Герца магнитного типа равен нулю.

Вектор Герца точечного диполя

Вектор Герца электрического типа удовлетворяет уравнению:

$$\square \Pi_e \equiv \nabla^2 \Pi_e - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial t^2} = -4\pi \mathbf{P} = -4\pi \mathbf{d}(t) \delta(\mathbf{r}). \quad (8.13)$$

Запаздывающее решение неоднородного волнового уравнения (8.13) имеет вид:

$$\Pi_e(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = \frac{\mathbf{d}(t - r/c)}{r}. \quad (8.14)$$

Поле точечного диполя.

Общие выражения, устанавливающие связь векторов Герца с напряженностями полей определяются равенствами:

$$\mathbf{E} = -4\pi \mathbf{P} + \text{rot rot } \Pi_e - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \Pi_m); \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \quad (8.15)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\Pi}_e}{\partial t} - \text{rot } \vec{\Pi}_m \right); \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}.$$

Из (8.15) следует, что поле точечного диполя в любой точке пространства, кроме начала координат, определяется следующими выражениями:

$$\mathbf{E} = \text{rot rot } \tilde{\Pi}_e = \mathbf{D}; \quad \mathbf{B} = \text{rot} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\Pi}_e}{\partial t} \right) = \mathbf{H}.$$

Используя явное выражение (8.14) для вектора Герца электрического типа, после векторных преобразований находим выражения для векторов полей:

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}(\tau)) - \mathbf{d}(\tau)}{r^3} + \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{d}}(\tau)) - \dot{\mathbf{d}}(\tau)}{c r^2} + \frac{1}{c^2 r} \left[\mathbf{n} \times \left[\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}(\tau) \right] \right], \quad (8.16)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} = -\frac{1}{c r^2} \left[\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{d}}(\tau) \right] - \frac{1}{c^2 r} \left[\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}(\tau) \right],$$

здесь \mathbf{n} - единичный радиус вектор в направлении точки наблюдения поля $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, $\tau = t - r/c$ - время запаздывания.

Структура поля точечного диполя

Как следует из (8.16) полученные выражения можно разбить на слагаемые трех типов в зависимости от расстояния до точки наблюдения. Это слагаемые пропорциональные $\sim r^{-3}$, $\sim r^{-2}$ и $\sim r^{-1}$. Обозначим слагаемые, входящие в (8.16) и содержащие различные степени r в знаменателе через $\mathbf{E}^{(1)}$, $\mathbf{E}^{(2)}$, $\mathbf{E}^{(3)}$ и $\mathbf{B}^{(1)} \equiv 0$, $\mathbf{B}^{(2)}$, $\mathbf{B}^{(3)}$, соответственно. Следовательно в пространстве можно выделить три области и записать векторы напряженности и индукции в виде суммы трех слагаемых:

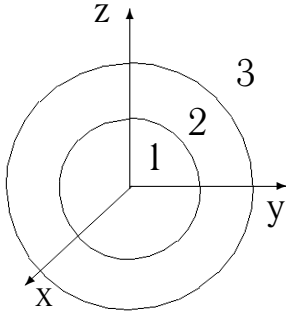


Рис. 8.4:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} + \mathbf{E}^{(3)},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(2)} + \mathbf{B}^{(3)}.$$

Первая область (рис. 8.4) носит название *ближняя зона* и определяется тем, что поле в этой области $\sim r^{-3}$. Эта область возникает на малых расстояниях и как следует из (8.16) основной вклад в поле определяется слагаемыми $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{B}^{(1)} \equiv 0$.

Вторая область - *промежуточная зона* - это область в которой все слагаемые дают сравнимый вклад в величину поля.

Наконец третья область носит название *волновая зона* - и поле в этой области пространства $\sim r^{-1}$. Как следует из (8.16) основной вклад в величину поля, в этом случае, определяется слагаемыми $\mathbf{E}^{(3)}$, $\mathbf{B}^{(3)}$.

Использованные выше определения областей можно сформулировать в конкретных математических условиях. По определению в ближней зоне выполняется неравенство $|\mathbf{E}^{(1)}| \gg |\mathbf{E}^{(2)}|$, то есть

$$|\mathbf{d}/r^3| \gg |\dot{\mathbf{d}}/cr^2|.$$

Если диполь зависит от времени периодически: $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos(\omega t)$, то $|\dot{\mathbf{d}}/cr^2| \equiv |\omega \mathbf{d}_0/cr^2|$ и, следовательно, в ближней зоне имеем: $r^{-1} \gg \omega/c$. То есть ближняя зона возникает на расстояниях

$$r \ll c/\omega.$$

В волновой зоне $|\mathbf{E}^{(3)}| \gg |\mathbf{E}^{(2)}|$ и при $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos(\omega t)$ имеем: $|\omega^2 \mathbf{d}_0/c^2 r| \gg |\omega \mathbf{d}_0/cr^2| \Rightarrow \omega/c \gg r^{-1}$. То есть волновая зона возникает на расстояниях

$$r \gg c/\omega.$$

Пример.

В качестве примера рассмотрим точечный диполь у которого $\omega \simeq 50$ Гц. Расстояние на которых возникает волновая зона у такой системы равно:

$$r_{\text{волн.}} \gg \frac{3 \cdot 10^{10}}{50} \sim 10^9 \text{ см} = 10^7 \text{ м} = 10^4 \text{ км} = 10000 \text{ км}.$$

Следовательно расстояние на котором такой диполь имеет структуру и величину характерную для волновой зоны приближенно равно расстоянию до Луны. Однако, если $\omega \sim 10^6 \div 10^7$, то волновая зона возникает уже на расстояниях порядка сотен метров. Таким образом, в зависимости от частоты изменения диполя во времени существенно зависит область появления волновой зоны.

§3 Поле точечного диполя в волновой зоне.

Поле в волновой зоне определяется слагаемыми $\mathbf{E}^{(3)}$ и $\mathbf{B}^{(3)}$, имеющими асимптотику $1/r$. Так для $\mathbf{B}^{(3)}$ на основании (8.16) имеем:

$$\mathbf{B} \simeq \mathbf{B}^{(3)} = -\frac{1}{c^2 r} [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}].$$

Вычислим векторное произведение в системе координат $x'y'z'$ (см. рис. 8.5), считая, что вектор \mathbf{d} направлен вдоль оси z' . В результате:

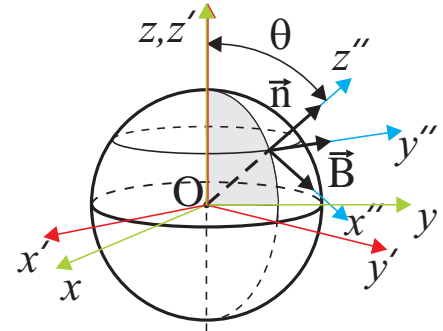


Рис. 8.5:

$$\mathbf{B}^{(3)} = -\frac{1}{c^2 r} [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}] = -\frac{1}{c^2 r} \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \\ 0 & 0 & \ddot{d}(\tau) \end{vmatrix} = -\frac{1}{c^2 r} \mathbf{i}' \ddot{d}(\tau) \sin \theta.$$

Таким образом, в силу цилиндрической симметрии вектор касательный к окружности, лежащей в плоскости параллельной плоскости xy определяет направление $\mathbf{B}^{(3)}$. Для определения направления вектора $\mathbf{E}^{(3)}$, вычислим векторное произведение: $\mathbf{E} \simeq \mathbf{E}^{(3)} = \frac{1}{c^2 r} [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]] = -[\mathbf{n} \times \mathbf{B}^{(3)}]$, в системе координат с осями x'', y'', z'' (см. рис. 8.5):

$$\mathbf{E}^{(3)} = -[\mathbf{n} \times \mathbf{B}^{(3)}] = -\begin{vmatrix} \mathbf{i}'' & \mathbf{j}'' & \mathbf{k}'' \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & B^{(2)} & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}'' B^{(3)}. \quad (8.17)$$

Следовательно вектор напряженности $\mathbf{E}^{(3)}$ направлен в положительном направлении оси x'' и таким образом векторы $\mathbf{E}^{(3)}$, \mathbf{n} , $\mathbf{B}^{(3)}$ образуют тройку взаимноортогональных векторов, при этом:

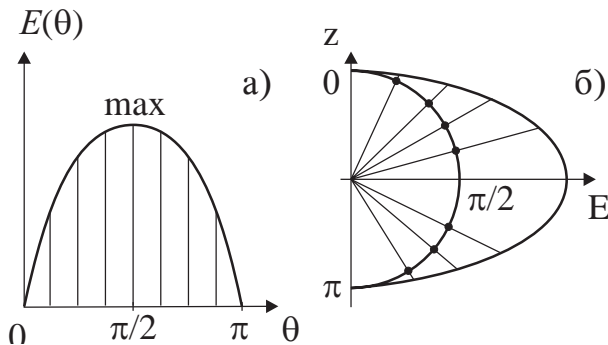


Рис. 8.6:

$$|\mathbf{E}^{(3)}| = |\mathbf{B}^{(3)}| = \frac{1}{c^2 r} \ddot{d}(\tau) \sin \theta.$$

Если изобразить график зависимости величины напряжённости поля \mathbf{E} от угла θ , то он будет иметь вид приведенный на рис. 8.6а. Из рисунка видно, что в плоскости ор-

тогональной вектору дипольного момента, то есть при $\theta = \pi/2$, значение поля максимально, а в направлении дипольного момента величина поля равна нулю. В общем случае значение поля зависит от угла между направлением вектора дипольного момента и направлением радиус-вектора точки наблюдения поля.

Часто зависимость величины поля от угла между вектором дипольного момента и радиус-вектором точки наблюдения изображают в сферической системе координат и называют диаграммой углового распределения (рис. 8.6б). В этом случае величину поля при заданном значении угла θ откладывают от условно выбранной полуокружности произвольного радиуса.

§4 Мощность излучения.

Одной из важных характеристик процесса излучения является величина энергии излучаемая системой в единицу времени или *мощность излучения*.

Данное понятие тесно связано с определением вектора Пойнтинга:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}].$$

Из общей теории электромагнитного поля известно, что количество энергии проходящей через площадку $d\sigma$ в единицу времени выражается через вектор \mathbf{S} и определяется скалярным произведением вида: $(\mathbf{S} \cdot d\vec{\sigma})$. Здесь $d\vec{\sigma} \equiv d\sigma \mathbf{n}$, \mathbf{n} -единичный вектор нормали к бесконечно малому элементу поверхности $d\sigma$.

Мощность излучения точечного диполя.

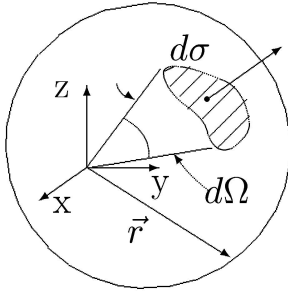


Рис. 8.7:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \oint_{\text{сфера } r} (\mathbf{S} \cdot d\vec{\sigma}) = -\frac{c}{4\pi} \oint_{\text{сфера } r} \left(\left[[\mathbf{n} \times \mathbf{B}^{(3)}] \times \mathbf{B}^{(3)} \right] \cdot \mathbf{n} \right) d\sigma. \quad (8.18)$$

Здесь использована связь (8.17) между векторами $\mathbf{E}^{(3)}$ и $\mathbf{B}^{(3)}$.

Элемент поверхности можно выразить через элемент телесного угла $d\sigma = r^2 d\Omega$. Раскрывая двойное векторное произведение в (8.18), получим:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{c}{4\pi} \oint_{\text{сфера } r} \left\{ \mathbf{n} B^{(3)2} - \mathbf{B}^{(3)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}^{(3)}) \right\} \cdot \mathbf{n} r^2 d\Omega. \quad (8.19)$$

Так как в волновой зоне векторы \mathbf{n} , $\mathbf{E}^{(3)}$, $\mathbf{B}^{(3)}$ ортогональны, следовательно $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}^{(3)}) = 0$. Поэтому для выражения (8.19) находим:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{c}{4\pi} \oint_{\text{сфера } r} \left| \frac{1}{c^2 r} [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}] \right|^2 r^2 d\Omega. \quad (8.20)$$

Если радиус сферы r устремить к бесконечности, то вычисление предела

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)$$

показывает, что существует его конечное, не равное нулю значение. Таким образом свойства переменного электромагнитного поля точечного диполя таковы, что энергия поля или сигнал может передаваться на бесконечно большое расстояние.

Если учитывать слагаемые поля промежуточной и ближней зоны, то есть слагаемые содержащие $1/r^2$ и $1/r^3$, то в случае $r \rightarrow \infty$ они дадут нулевой вклад в энергию передаваемую на бесконечно большие расстояния. Таким образом при $r \rightarrow \infty$ ненулевой вклад в передаваемую энергию дают только слагаемые, определяющие поле в волновой зоне $E^{(3)}$ и $B^{(3)}$.

Интенсивность дипольного излучения.

Вычислим (8.20) в явном виде:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi c^3} \ddot{d}^2(\tau) \sin^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Здесь θ — угол между векторами \mathbf{d} и \mathbf{n} и ось z сферической системы координат направлена вдоль вектора \mathbf{d} . Сделав замену переменной интегрирования $\cos \theta = x \Rightarrow dx = -\sin \theta d\theta$, для энергии излученной дипольным моментом в единицу времени или интенсивности дипольного излучения получим формулу:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 2\pi \frac{1}{4\pi c^3} \ddot{d}^2(\tau) \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2(\tau); \quad \tau = t - \frac{r}{c}. \quad (8.21)$$

Угловое распределение излучения.

Для произвольной поверхности S формулу (8.20) можно переписать в виде:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \oint_S I(\theta) d\Omega. \quad (8.22)$$

Физический смысл функции $I(\theta)$ — это энергия, которая распространяется в единицу времени внутри телесного угла $d\Omega$. В связи с этим функция $I(\theta)$ называется *функцией углового распределения излучения*.

В случае точечного диполя находящегося в начале системы координат функция углового распределения излучения имеет вид:

$$I(\theta) = \frac{1}{4\pi c^3} \left| \left[\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}} \right] \right|^2. \quad (8.23)$$

Здесь θ — угол между вектором дипольного момента и единичным вектором \mathbf{n} в направлении излучения.

Рассмотрим некоторые простейшие примеры использования формулы (8.21) для вычисления величины интенсивности излучения электромагнитного поля.

Точечный заряд.

Как следует из (8.21) энергия излученная точечным дипольным моментом в единицу времени определяется второй производной по времени от диполь-

ного момента системы. Это означает, в частности, что если заряженная частица движется с ускорением, то она излучает электромагнитное поле. Дипольный момент такой частицы $\mathbf{d} = q\mathbf{r}$ и вторая производная от \mathbf{d} определяется ускорением частицы. Данный результат следует также и из выражения для потенциалов Лиенара - Вихерта.

Пусть заряд q движется с ускорением \mathbf{a} , тогда:

$$\mathbf{d} = q\mathbf{r}; \quad \ddot{\mathbf{d}} = q\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{a}.$$

На основании (8.21) для интенсивности излучения таким зарядом получим:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2q^2a^2}{3c^3}.$$

При выводе этого выражения использованы кинематические определения классической механики Ньютона, справедливые при скоростях движения \mathbf{v} , удовлетворяющих условию $v \ll c$. Если воспользоваться выражениями для потенциалов Лиенара-Вихерта, при выводе которых не предполагалась малость скорости движения частицы, то повторяя вывод для интенсивности излучения с составляющими поля пропорциональными r^{-1} , можно получить интенсивности излучения заряженной частицы движущейся с произвольной скоростью.

Дипольный момент.

Рассмотрим зависящий от времени дипольный момент меняющийся с частотой ω , то есть $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \sin(\omega t)$. На основании (8.21) интенсивность излучения такой системы равна:

$$I = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3c^3} \omega^4 d_0^2 \sin^2 \omega (t - r/c).$$

В полученном выражении осталась зависимость от времени. Если это выражение усреднить за период изменения дипольного момента, можно получить среднюю величину интенсивности не зависящую от времен:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} dt = \frac{2}{3c^3} \omega^4 d_0^2 \langle \sin^2 (\omega (t - r/c)) \rangle.$$

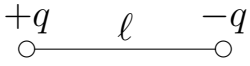
Так как $\langle \sin^2 (\omega (t - r/c)) \rangle = 1/2$, окончательно находим:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle = \frac{\omega^4}{3c^3} d_0^2 \sim \frac{1}{\lambda^4}, \quad (8.24)$$

где λ - длина волны излученного электромагнитного поля. $\omega = 2\pi/T = 2\pi c/\lambda$.

Линейный проводник.

Рассмотрим проводник длины ℓ к которому подводится переменное напряжение, тогда на концах проводника будут возникать зависящие от времени заряды $+q$ и $-q$. Такую систему можно заменить диполем с дипольным моментом $d = eq$. В результате:



$$d = \ell q; \quad \dot{d} = \ell \dot{q} = \ell I; \quad \ddot{d} = \ell \dot{I},$$

где I сила тока в проводнике $I = I_0 \sin(\omega t)$, а точка над символом означает производную по времени. Такой проводник является примитивной антенной, то есть он излучает электромагнитное поле и энергия излучения этой антенны, усредненная за период колебания тока равна:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle = \frac{2}{3c^3} \ell^2 \langle \dot{I}^2 \rangle = \frac{2}{3c^3} \ell^2 \cdot I_0^2 \omega^2 \frac{1}{2} \sim \frac{1}{\lambda^2}.$$

Из полученного выражения видно, что антенна в виде линейного проводника излучает тем больше энергии, чем меньше длина волны излучения $\lambda \equiv 2\pi c/\omega$.

Точечный магнитный момент.

Для точечного дипольного момента \mathbf{d} , расположенного в начале координат векторы Герца удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{cases} \square \mathbf{\Pi}_e = -4\pi \mathbf{P}, & \text{где } \mathbf{P} = \mathbf{d} \delta(\mathbf{r}) \\ \square \mathbf{\Pi}_m = -4\pi \mathbf{M}, & \text{где } \mathbf{M} = 0. \end{cases}$$

При этом $\mathbf{E} = \mathbf{D} = \text{rot rot } \vec{\Pi}_e$.

Если в начале координат находится точечный магнитный момент $\vec{\mu}$, то векторы Герца удовлетворяют уравнениям вида:

$$\begin{cases} \square \mathbf{\Pi}_e = -4\pi \mathbf{P}, & \text{где } \mathbf{P} = 0 \\ \square \mathbf{\Pi}_m = -4\pi \mathbf{M}, & \text{где } \mathbf{M} = \vec{\mu}(t) \delta(\mathbf{r}). \end{cases}$$

При этом $\mathbf{B} = \mathbf{H} = \text{rot rot } \mathbf{\Pi}_m$. Следовательно в случае точечного магнитного момента формулы для вычисления поля окажутся симметричными со случаем вычисления поля точечного диполя с учетом замены $\mathbf{d} \rightarrow \vec{\mu}$.

Интенсивность излучения точечного магнитного момента определяется аналогично (8.22), называется *интенсивностью магнитно-дипольного излучения* и имеет вид:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mu}^2(\tau), \quad \tau = t - \frac{r}{c}. \quad (8.25)$$

Как следует из представленного выражения интенсивность магнитно-дипольного излучения на много порядков меньше, чем интенсивность электрически дипольного излучения, так как определение магнитного момента системы токов содержит c^{-1} :

§5 Теория излучения произвольной системы зарядов и токов.

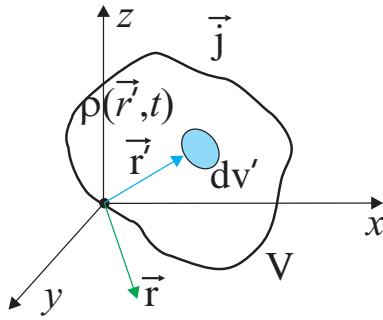


Рис. 8.8:

В предыдущих параграфах получены выражения для интенсивности излучения двух специальных систем - точечный дипольный момент, и точечный магнитный момент. Рассмотрим теперь произвольную замкнутую систему зарядов и токов (рис.8.8) и определим интенсивность излучения такой системы.

В произвольном случае скалярный φ и векторный \mathbf{A} потенциалы удовлетворяют неоднородным волновым уравнениям:

$$\square \varphi = -4\pi \rho(\mathbf{r}, t); \quad \square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

Запаздывающие потенциалы

Решение уравнения для скалярного потенциала, удовлетворяющее принципу причинности (запаздывающий потенциал) имеет вид:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (8.26)$$

Волновая зона.

Как следует из предыдущего рассмотрения при определении интенсивности излучения интерес представляют составляющие поля, имеющие асимптотическое поведение на больших расстояниях порядка $\sim 1/r$, так как остальные слагаемые вклада в интенсивность излучения не вносят. Поэтому точное решение (8.26) можно разложить в ряд по параметру $r'/r \ll 1$, так как в волновой зоне $r \gg r'$.

Разложение в ряд $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ есть:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2} = r \left(1 - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{1/2} \simeq r \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \dots \right).$$

С учетом данного разложения, запаздывающий аргумент плотности распределения заряда ρ может быть представлен в виде:

$$\rho \simeq \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right) + \dots \right) = \rho \left(\mathbf{r}', \tau - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')}{cr} \dots \right),$$

здесь $\tau \equiv t - r/c$ — время запаздывания.

Время за которое поле пройдет через систему равно $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/cr$. Так как точка наблюдения находится далеко от системы (т.е. $r \gg r'$), то параметр $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/cr \ll \tau$ и функцию ρ можно разложить в ряд по параметру малости $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/cr$. В результате:

$$\rho \left(\mathbf{r}', \tau + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr} \right) \approx \rho(\mathbf{r}', \tau) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', \tau)}{\partial \tau} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho(\mathbf{r}', \tau)}{\partial \tau^2} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr} \right)^2 + \dots$$

Такое разложение сходится, если скорость изменения плотности заряда не является быстро осциллирующей функцией времени и приводит к разложению по обратным степеням скорости света. Другими словами, помимо выделения слагаемых соответствующих полю волновой зоны в точном решении появляется разложение по второму параметру малости — отношению скорости движения зарядов системы к скорости света. Таким образом, выражение (8.26) для скалярного потенциала может быть переписано в виде:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \dots \right) \left\{ \rho(\mathbf{r}', \tau) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', \tau)}{\partial \tau} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr} + \dots \right\} dv'.$$

Первое приближение.

Если в представленном разложении ограничиться первыми не исчезающими членами по параметру малости содержащему скорость света, то получим:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{r} \int \rho(\mathbf{r}', \tau) dv' + \frac{1}{r} \int \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', \tau)}{\partial \tau} dv' \dots$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Для электронейтральной системы $Q = 0$, поэтому в данном случае находим для скалярного потенциала:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mathbf{n}}{cr} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', \tau) dv' = \frac{\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{d}}(\tau)}{cr}, \quad (8.27)$$

где $\mathbf{d}(\tau) = \int_V \mathbf{r}' \rho dv'$ — дипольный момент системы в момент времени τ .

Решение волнового уравнения для векторного потенциала \mathbf{A} имеет вид:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

Разложим плотность тока, аналогично плотности заряда и представим вектор \mathbf{j} в виде:

$$\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', \tau + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr}\right) = \mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau) + \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau)}{\partial \tau} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr} + \dots \quad (8.28)$$

Оставляя только первый не исчезающий член в разложении (8.28), будем иметь:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau) dv' \quad (8.29)$$

Для дальнейших преобразований вычислим производную от дипольного момента по времени τ , которую с учетом закона сохранения заряда представим в виде:

$$\dot{\mathbf{d}} = \frac{\partial}{\partial \tau} \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', \tau) dv' = \int \mathbf{r}' \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', \tau)}{\partial \tau} dv' = - \int \mathbf{r}' \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau) dv'$$

Записав вектор \mathbf{r}' в декартовых координатах, докажем следующее соотношение:

$$\dot{\mathbf{d}} = - \int (\mathbf{i}x' + \mathbf{j}y' + \mathbf{k}z') \operatorname{div} \mathbf{j} dv' = \int \mathbf{j}(\tau) dv'. \quad (8.30)$$

Для доказательства (8.30) рассмотрим тождественное преобразование :

$$\int x' \operatorname{div} \mathbf{j} dv' = - \int \operatorname{div} (x' \mathbf{j}) dv' + \int j_x dv',$$

которое вытекает из $\operatorname{div} (x' \mathbf{j}) = \mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} x' + x' \operatorname{div} \mathbf{j}$. По теореме Остроградского-Гаусса, интеграл по объему замкнутой системы зарядов и токов содержащий $\operatorname{div} (x' \mathbf{j})$ можно свести к интегралу по поверхности, ограничивающую данную систему. В силу того, что нормальная составляющая плотности тока на поверхности равна нулю имеем $\int \operatorname{div} (x' \mathbf{j}) dv' = 0$. В результате получим вспомогательное равенство:

$$\int x' \operatorname{div} \mathbf{j} dv' = \int j_x dv'.$$

Аналогичные преобразования для проекций y' и z' приводят к доказательству равенства (8.30)

В рассматриваемом приближении для скалярного и векторного потенциалов находим выражения:

$$\varphi \simeq \frac{\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{d}}(\tau)}{cr}; \quad \mathbf{A} \simeq \frac{\dot{\mathbf{d}}(\tau)}{cr}. \quad (8.31)$$

Из найденных выражений для \mathbf{A} и φ вытекает, что они удовлетворяют условию калибровки Лоренца. При вычислении напряженности поля и вектора индукции на основе (8.31) необходимо удерживать только члены порядка r^{-1} , которые будут появляться при дифференцировании вектора дипольного момента, но не знаменателей данных выражений. В результате:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi = \dots = -[\mathbf{n} \times \mathbf{B}],$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \dots = -\frac{1}{cr} [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}(\tau)]$$

Найденные выражения точно совпадают с выражениями для $\mathbf{E}^{(3)}$ и $\mathbf{B}^{(3)}$ (8.16), полученными для поля точечного диполя в волновой зоне. Таким образом интенсивность излучения в данном приближении вычисляется так же как и для точечного диполя, равна (8.21) и называется интенсивностью электрически дипольного излучения. При этом использованное приближение называется *дипольным приближением*.

Второе приближение.

Учтем теперь второй член разложения (8.28), который в сравнении с первым слагаемым содержит малость c^{-1} . Преобразуем это слагаемое тождественно:

$$\frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')}{c} \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}'\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{2c} \left[[\mathbf{r}' \times \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}'\tau)}{\partial \tau}] \times \mathbf{n} \right] + \frac{1}{2c} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}'\tau)}{\partial \tau} + (\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}'\tau)}{\partial \tau}) \mathbf{r}' \right\},$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. В результате в векторном потенциале появится дополнительное слагаемое, которое принимает следующий вид:

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{2c} [\dot{\vec{\mu}} \times \mathbf{n}] + \frac{1}{2c^2 r} \frac{\partial}{\partial \tau} \int \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{r}' \right\} dv'.$$

Здесь $\vec{\mu}$ — магнитный момент системы токов, $\dot{\vec{\mu}}$ — производная по времени от магнитного момента. Дальнейшие преобразования полученного выражения приводят к следующему выражению для дополнительного векторного потенциала в волновой зоне [17]:

$$\mathbf{A}' = \frac{[\dot{\vec{\mu}} \times \mathbf{n}]}{cr} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}}}{6c^2 r} + \frac{\mathbf{n}}{6c^2 r} \int \ddot{\rho}(\mathbf{r}', \tau) r'^2 dv'.$$

здесь компоненты вектора \mathbf{Q} определены с использованием компонент тензора квадрупольного момента Q_{ik} , $i, k \in 1, 2, 3$ по следующему определению: $Q_i = \sum_{k=1}^3 Q_{ik} n_k$. Найденные дополнительные слагаемые для векторного потенциала приводят к следующим выражениям для векторов напряженности электрического поля и вектора индукции магнитного поля [17]:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{r c^2} \left\{ [\mathbf{n} \times \ddot{\boldsymbol{\mu}}(\tau)] + \frac{1}{6c} [[\ddot{\mathbf{Q}}(\tau) \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}], \right\} \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{r c^2} \left\{ [[\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\tau) \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}] + \frac{1}{6c} [\ddot{\mathbf{Q}}(\tau) \times \mathbf{n}] \right\}.\end{aligned}$$

Вычисляя с полученными выражениями полную интенсивность излучения, после преобразований, с учетом интенсивности электрически дипольного излучения получим следующее выражение определяющее интенсивности электрического дипольного, магнитно-дипольного и электрически-квадрупольного излучений:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2(\tau) + \frac{2}{3c^3} \ddot{\mu}^2(\tau) + \frac{1}{180c^5} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left(\frac{\partial^3 Q_{\alpha\beta}}{\partial \tau^3}(\tau) \right)^2 + \dots \quad (8.32)$$

Мультипольное разложение.

В общем случае выражение (8.32) содержит бесконечный ряд слагаемых по возрастающим степеням c^{-1} и вклад последующих членов ряда намного меньше предыдущих. Наибольшим в этом ряду является слагаемое, соответствующее электрически-дипольному излучению. Для удобства используются следующие обозначения для отдельных членов ряда (8.32):

$$I = E1 + M1 + E2 + M2 + E3 + \dots$$

где I — полная интенсивность излучения системы, $E1$ — интенсивность электрически-дипольного излучения, $M1$ — интенсивность магнитно-дипольного излучения, $E2$ — интенсивность электрически-квадрупольного излучения, $M2$ — интенсивность магнитно-квадрупольного излучения, $E3$ — интенсивность электрически-октапольного излучения и так далее.

Системы, которые имеют равные нулю одновременно \mathbf{d} , $\ddot{\boldsymbol{\mu}}$, $Q_{\alpha\beta}$ встречаются достаточно редко, поэтому в практических вычислениях первые три члена ряда (8.32) оказываются достаточными в большинстве случаев для достижения необходимой точности вычислений.

§6 Реакция излучения. Сила реакции излучения.

Система зарядов и токов, излучающая электромагнитное поле передает полю энергию и импульс. Таким образом по законам сохранения энергии и импульса, в процессе излучения возникает влияние излученного электромагнитного поля на саму излучающую систему. Это влияние называется реакцией излучения и может быть определено с использованием понятий введенных в классической механике.

Из механики известно, что работа силы на конечном участке пути равна:

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}; \quad A = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_L \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dt} dt = \int_L (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dt.$$

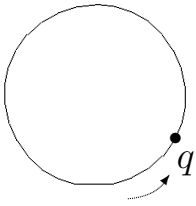


Рис. 8.9:

Рассмотрим для примера заряд q движущийся по окружности L с ускорением \mathbf{a} (рис.8.9), тогда: $\mathbf{d} = q\mathbf{r}$; $\ddot{\mathbf{d}} = q\mathbf{a}$ и в соответствии с общей теорией излучения заряд излучает электромагнитное поле с интенсивностью:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3} a^2(\tau)$$

Импульс уносимый полем меняет импульс самого заряда. Изменение импульса можно охарактеризовать силой \mathbf{F}_p в соответствии со вторым законом Ньютона. В результате за конечный промежуток времени имеем:

$$- \int_{t_0}^{t_k} \frac{2q^2}{3c^3} a^2 dt = \int_{t_0}^{t_k} (\mathbf{F}_p \cdot \mathbf{v}) dt.$$

В данном соотношении учтено, что энергия переданная полю вычитается из энергии частицы. Преобразуем левую часть этого равенства путем интегрирования по частям:

$$\mathcal{E} = \frac{2q^2}{3c^3} \int_{t_0}^{t_k} \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = \frac{2q^2}{3c^3} \left[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) \Big|_{t_0}^{t_k} - \int_{t_0}^{t_k} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}) \right]. \quad (8.33)$$

В силу того, что интенсивность излучения мала, можно допустить приближенно, что частица придет практически в ту же точку из которой она начала двигаться (т.е. энергия, которую потеряет частица за время движения чрезвычайно мала). Следовательно приближенно имеют место равенства: $\mathbf{a}(t_k) \simeq \mathbf{a}(t_0)$, $\mathbf{v}(t_k) \simeq \mathbf{v}(t_0)$; $\Rightarrow (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})(t_k) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})(t_0) \simeq 0$. В результате формула (8.33) может быть переписана в виде:

$$-\mathcal{E} = \frac{2q^2}{3c^3} \int_{t_0}^{t_k} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right) dt = \int_{t_0}^{t_k} (\mathbf{F}_p \cdot \mathbf{v}) dt.$$

Сила реакции излучения.

Таким образом силу реакции излучения \mathbf{F}_p приближенно можно определить равенством:

$$\mathbf{F}_p = \frac{2q^2}{3c^3} \dot{\mathbf{a}} \quad (8.34)$$

Формула (8.34) справедлива если сила реакции излучения много меньше действующей на систему внешней силы. Поэтому использовать выражение (8.34) для силы реакции излучения без учета внешних сил некорректно.

Пример.

Примером некорректного использования выражения (8.34) для силы реакции излучения является ее применение без учета внешних сил. Если записать закон Ньютона, для простоты в одномерном случае, только для силы реакции излучения, то получим:

$$m\ddot{x} = ma = \frac{2q^2}{3c^3} \frac{da}{dt}. \quad (8.35)$$

Решение данного уравнения очевидно имеет вид:

$$a = a_0 \exp\left(\frac{t}{\tau}\right),$$

где a_0 -ускорение частицы в начальный момент времени, а $\tau = 2q^2/3c^3m$. Из полученного выражения видно, что при $t \rightarrow \infty$ ускорение частицы неограниченно возрастает. То есть частица под действием собственного излучения самоускоряется. Однако данное заключение не корректно, так как выражение (8.34) выведено в приближении малости силы реакции излучения по сравнению с силой, заставляющей частицу двигаться по определенной траектории с ускорением. А в данном примере эта внешняя сила равна нулю.

Сила реакции излучения называется также силой лучистого трения.

§7 Спектральное распределение излучения.

Заряженный осциллятор.

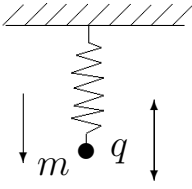


Рис. 8.10:

Рассмотрим частицу заряда q и массы m , которая колеблется на пружине жесткостью k . Такая система называется *заряженный осциллятор* (рис. 8.10). Так как частица имеет заряд и движется с ускорением, она излучает электромагнитное поле. Определим влияние процесса излучения на такой заряженный осциллятор.

Если частица не заряжена ($q = 0$), то уравнение движения и его решение при условии, что частица в начальный момент времени $t = 0$ находилась в точке с координатой x_0 и покоилась, имеют вид:

$$m\ddot{x} = -kx; \longrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0; \quad x = x_0 \cos(\omega t); \quad (8.36)$$

где $\omega_0^2 = k/m$. То есть частица колеблется с частотой ω_0 около положения равновесия с амплитудой колебаний x_0 .

Когда $q \neq 0$ уравнение движения с учетом силы реакции излучения примет вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F_p = -kx + \frac{2q^2}{3c^3} \frac{d^3 x}{dt^3}, \quad (8.37)$$

где сила реакции излучения F_p — малая поправка относительно упругой возвращающей силы $-kx$, (т.е. $|kx| \gg F_p$).

Уравнение (8.37) является обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка с постоянными коэффициентами. Найдем приближенное решение данного уравнения с учетом малости силы лучистого трения. Понизим порядок уравнения (8.37) с учетом решения уравнения движения без силы лучистого трения: $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$. Таким образом

$$m\ddot{x} \simeq -kx - 2\frac{\omega_0^2 q^2}{3c^3} \dot{x}.$$

В результате уравнение (8.37) совпадает с хорошо известным уравнением колебаний при наличии силы трения:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \gamma = \frac{2q^2}{3mc^3} \omega_0^2.$$

Решение этого уравнения представим в виде:

$$x(t) = \text{Re} \left\{ x_0 \exp(i\omega_0 t - \frac{\gamma}{2} t) \right\},$$

что соответствует затухающим колебаниям с частотой ω_0 . Учитывая, что γ — малый параметр, для ускорения получим:

$$a(t) = \operatorname{Re} \left\{ a_0 \exp(i\omega_0 t - \frac{\gamma}{2}t) \right\}.$$

Энергия излучения заряженного осциллятора.

Пусть до момента времени $t = 0$ частица находилась в состоянии покоя, а в момент времени $t = 0$ систему вывели из положения равновесия. Тогда энергия, излученная этой системой за все время движения определяется выражением:

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty I(t) dt = \int_0^\infty \frac{2q^2}{3c^3} a^2(\tau) d\tau, \quad \tau = t - r/c.$$

Для вычисления интеграла по времени в выражении для полной энергии излучения, воспользуемся Фурье преобразованием для ускорения частицы.

По определению прямое и обратное Фурье-преобразования для произвольной функции $f(t)$ имеют следующий вид:

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

В результате:

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \frac{2q^2}{3c^3} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a(\omega) e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a(\omega') e^{i\omega' t} d\omega' dt$$

В последнем выражении можно вычислить интеграл по dt от произведения функций $e^{i\omega t}$ и $e^{i\omega' t}$, что дает $2\pi\delta(\omega + \omega')$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Спектральное распределение излучения.

Из свойств преобразования Фурье следует, что в общем случае комплексные функции Фурье-образов удовлетворяют соотношению: $a(-\omega) = a^*(\omega)$, поэтому для полной энергии, излученной системой имеем:

$$\mathcal{E} = \int \frac{2q^2}{3c^3} |a(\omega)|^2 d\omega = \int I(\omega) d\omega$$

Подынтегральное выражение $I(\omega) d\omega$ определяет энергию, которая излучается системой в интервале частот $d\omega$, а функция $I(\omega)$ называется *спектральной функцией распределения излучения*.

Практически, представленные выше выражения позволяют сформулировать правила вычисления спектральной функции распределения излу-

чения для излучения любого типа – электрически дипольного, магнитно-дипольного, квадрупольного и т.д. Из (8.32) видно, что во всех случаях интенсивность излучения определяется квадратом функции зависящей от времени. Поэтому тривиальное повторение фурье-преобразований для этих функций можно получить явное выражение для спектральной функции распределения излучения любой мультипольности (подробнее см. в главе 9).

Пример.

Вычислим, например, $I(\omega)$ для заряженного осциллятора. Для этого найдем Фурье-образ ускорения $a(t)$. Так как система до момента времени $t = 0$ покоилась и была выведена из положения равновесия для $t \geq 0$:

$$a(t) = \begin{cases} \operatorname{Re} [a_0 \exp(i\omega_0 t - \frac{\gamma}{2}t)] , & \text{при } t > 0 \\ 0, & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

В результате:

$$a(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty a_0 \exp \left\{ i(\omega_0 - \omega)t - \frac{\gamma}{2}t \right\} dt = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(-1)}{i(\omega_0 - \omega) - \frac{\gamma}{2}}.$$

Таким образом:

$$I(\omega) = \frac{const}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Чтобы найти $const$ можно связать ее с полной энергией излучения системы. То есть:

$$\mathcal{E} = I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{const}{[(\omega - \omega_0) + i\frac{\gamma}{2}] [(\omega - \omega_0) - i\frac{\gamma}{2}]} d\omega$$

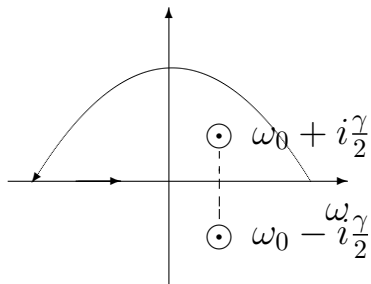


Рис. 8.11:

Так как подынтегральная функция имеет два полюса в комплексной плоскости ω , для интегрирования можно замкнуть контур по полуокружности бесконечного радиуса и воспользоваться теоремой о вычетах (рис. 8.11). В результате найдем:

$$I_0 = \frac{2\pi i const}{\omega_0 + i\frac{\gamma}{2} - \omega_0 + i\frac{\gamma}{2}} = \frac{2\pi}{\gamma} const;$$

$$const = I_0 \frac{\gamma}{2\pi}.$$

Следовательно спектральное распределение излучения заряженного осциллятора определяется выражением:

$$I(\omega) = \frac{I_0}{2\pi} \cdot \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \quad (8.38)$$

Выводы.

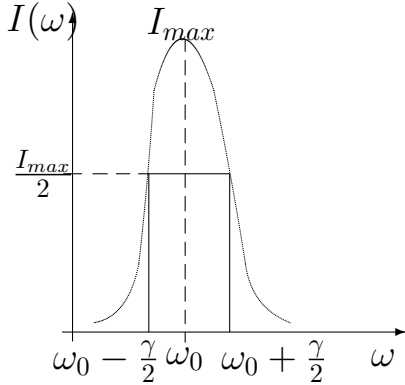


Рис. 8.12: форма спектральной линии излучения.

Из полученного выражения вытекает, что заряженный осциллятор излучает электромагнитное поле на всех частотах.

Если в (8.38) положить $\gamma = 0$, то можно найти что

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} I(\omega) = \delta(\omega - \omega_0).$$

То есть в пределе, соответствующем пренебрежению законами сохранения энергии и импульса система излучает переменное монохроматическое поле с частотой ω_0 . Данный результат

означает, что создать источник монохроматического излучения невозможно в принципе, так как законы сохранения энергии и импульса являются универсальными и экспериментально не установлено каких-либо отклонений от них. Однако, так как γ величина малая, излучение как функция частоты концентрируется, в основном, вблизи ω_0 .

Найдем значения функций $I(\omega)$ в точках ω_0 и $\omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}$. По определению:

$$I(\omega_0) = \frac{I_0}{2\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2} = \frac{2 I_0}{\pi \gamma}; \quad I(\omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}) = \frac{I_0}{2\pi} \frac{\gamma}{\frac{\gamma^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4}} = \frac{I_0}{\pi \gamma} \quad (8.39)$$

Таким образом, значение $I(\omega_0 \pm \frac{\gamma}{2})$ в два раза меньше, чем $I(\omega_0)$. Расстояние между точками $\omega_0 - \frac{\gamma}{2}$ и $\omega_0 + \frac{\gamma}{2}$ на оси частот, равное γ , называется шириной излучаемой спектральной линии, а кривая, которая изображает зависимость спектральной функции распределения от частоты (рис.8.12) называется формой спектральной линии излучения.

Глава 9

Теория излучения. Семинары.

§1 Общие определения

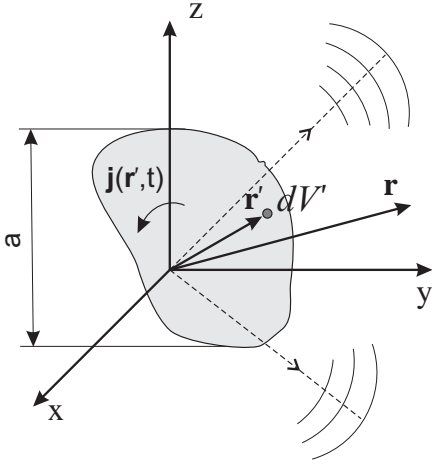


Рис. 9.1:

Скалярный и векторный потенциалы произвольной системы зарядов с плотностью $\rho(\mathbf{r}, t)$ и токов с плотностью $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ (рис. 9.1) определяются выражениями:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad (9.1)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (9.2)$$

Известно [17], что система произвольно движущихся зарядов излучает электромагнитное поле. В соответствии с общей теорией излучения особое значение имеет поле, созданное системой зарядов в волновой зоне или на расстояниях $r \gg c/\omega$. Здесь r – расстояние до точки наблюдения от системы зарядов, ω – частота электромагнитного поля, c – скорость света. Если $r \gg c/\omega \gg a$, где a – характерные размеры системы, векторный потенциал (9.2) можно разложить в ряд по переменной $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')/cr$, что соответствует разложению по малому параметру $a/(c/\omega) \ll 1$. В этом случае первые три члена разложения векторного потенциала имеют вид [17]:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}(\tau)}{cr} + \frac{[\dot{\vec{\mu}}(\tau) \times \mathbf{n}]}{cr} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}}(\tau)}{6c^2r} + \dots, \quad (9.3)$$

где точка над вектором означает дифференцирование по времени, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ – единичный радиус-вектор точки наблюдения, $\tau = t - r/c$ – время запаздывания, \mathbf{d} – дипольный момент системы зарядов, $\vec{\mu}$ – магнитный момент системы токов, а \mathbf{Q} – вектор, декартовы компоненты которого определены следующим соотношением:

$$Q_i = \sum_{k=1}^3 Q_{ik} n_k, \quad i \in 1, 2, 3. \quad (9.4)$$

Здесь Q_{ik} – компоненты тензора квадрупольного момента системы, n_k – компоненты единичного радиус-вектора.

Так как в волновой зоне вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} связан с вектором индукции \mathbf{B} равенством $\mathbf{E} = [\mathbf{B} \times \mathbf{n}]$, для определения электромагнитного поля достаточно определить вектор индукции магнитно-

го поля $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. В результате:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}(\tau) \times \mathbf{n}]}{c^2 r} + \frac{[[\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\tau) \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}]}{c^2 r} + \frac{[\ddot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n}]}{6c^3 r} + \dots \quad (9.5)$$

В произвольной точке волновой зоны плотность потока энергии определяется вектором Умова-Пойнтинга:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = \frac{cB^2}{4\pi} \mathbf{n}. \quad (9.6)$$

Таким образом, энергия электромагнитного поля, излученная системой в единицу времени по всем направлениям (интенсивность излучения), определяется выражением:

$$I = \oint (\mathbf{S} \cdot d\vec{\sigma}) = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2(\tau)}{3c^3} + \frac{2\ddot{\boldsymbol{\mu}}^2(\tau)}{3c^3} + \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\ddot{Q}_{\alpha\beta}^2(\tau)}{180c^5} + \dots \quad (9.7)$$

Представленные в выражении (9.7) слагаемые определяют интенсивность электрически-дипольного (E1), магнитно-дипольного (M1) и электрически-квадрупольного излучения (E2), соответственно.

§2 Интенсивность электрически-дипольного излучения

В соответствии с (9.7) интенсивность электрически-дипольного излучения определяется выражением:

$$I_d(t) = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2(\tau)}{3c^3}, \quad \tau = t - r/c, \quad (9.8)$$

где $\ddot{\mathbf{d}}$ — вторая производная по времени от дипольного момента системы. Энергия, излученная системой за конечный интервал времени от t_n до t_k , есть:

$$\mathcal{E} = \int_{t_n}^{t_k} I dt. \quad (9.9)$$

Если $t_n = -\infty$ и $t_k = +\infty$, выражение (9.9) определяет полную энергию, излученную системой.

Пример 9.§1.1 *Через конденсатор пролетела частица с массой m и зарядом e . Расстояние между обкладками конденсатора l , а напряжённость электрического поля \mathbf{E} в нём однородна и постоянна. Угол*

между вектором \mathbf{E} и направлением скорости \mathbf{v}_0 частицы при попадании в конденсатор равнялся α (рис. 10.6). Найти энергию \mathcal{E} , теряемую частицей на дипольное излучение за время движения через конденсатор. (Задача №288 в [3])

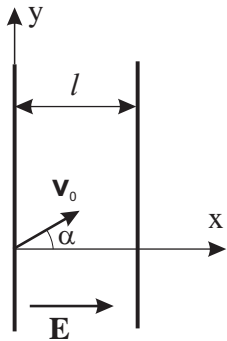


Рис. 9.2:

► Расположим начало координат в точке попадания частицы в конденсатор. Ось y направим вдоль, а ось x — перпендикулярно пластинам конденсатора (рис. 10.6). На основании закона Ньютона $m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}$. Так как дипольный момент частицы $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, находим $\ddot{\mathbf{d}} = e\ddot{\mathbf{r}} = e^2\mathbf{E}/m$. Таким образом, на основании (9.8) для интенсивности дипольного излучения I получим выражение:

$$I = \frac{2e^2\ddot{\mathbf{r}}^2}{3c^3} = \frac{2e^4E^2}{3m^2c^3}.$$

По оси x частица движется с постоянным ускорением, равным $a_x = eE/m$, а по оси y с постоянной скоростью $v_0 \sin \alpha$. Поэтому из закона движения для координат $x(t)$ и $y(t)$ заряда имеем:

$$x = tv_0 \cos \alpha + \frac{Ee}{2m}t^2, \quad y = tv_0 \sin \alpha. \quad (9.10)$$

Подставляя в (9.10) $x = l$ и решая квадратное уравнение относительно t , найдем время, в течение которого частица находится в конденсаторе:

$$t_0 = \frac{m}{eE} \left(-v_0 \cos \alpha + \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + \frac{2Eel}{m}} \right).$$

Таким образом, энергия, излученная частицей за время пролета через конденсатор, будет иметь вид:

$$\mathcal{E} = It_0 = \frac{2e^3Ev_0}{3mc^3} \left(\sqrt{\frac{2eEl}{mv_0^2} + \cos^2 \alpha} - \cos \alpha \right).$$

Пусть заряд частицы равен заряду электрона, масса — массе электрона, скорость частицы при влете $v_0 = 0,01$ с, $\alpha = 0^\circ$, напряженность поля $E = 10^5$ В/см, расстояние между обкладками конденсатора равно $l = 1$ см. В этом случае отношение энергии, потерянной электроном на излучение, к его начальной кинетической энергии $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0 \sim 10^{-10}$. ◀

Пример 9.§1.2 Частица с массой m и зарядом e пролетает по диаметру шара радиуса R , внутри которого равномерно распределён заряд Q . Заряды частицы и шара противоположного знака. Перед

влётom в шар частица имела кинетическую энергию \mathcal{E}_0 . Определить энергию \mathcal{E} , теряемую частицей на дипольное излучение во время пролёта через шар. (Задача №289 в [3])

► Выберем начало координат в центре шара (рис. 9.3). Пусть движение происходит вдоль оси x . Напряженность поля и потенциал внутри шара ($r \leq R$) равны, соответственно:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{R^3} \mathbf{r}, \quad \varphi = \frac{3Q}{2R} - \frac{Qr^2}{2R^3}.$$

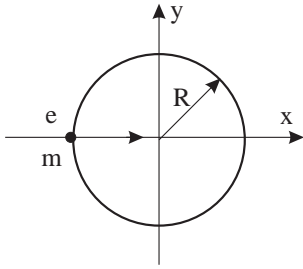


Рис. 9.3:

Здесь \mathbf{r} — радиус-вектор произвольной точки шара. Используя уравнение движения $m\ddot{x} = eQx/R^3$, на основании (9.8) и определения дипольного момента частицы $d = ex$ ($\ddot{d} = e\ddot{x}$) найдем интенсивность излучения движущейся частицы:

$$I = \frac{2\ddot{d}^2}{3c^3} = \frac{2e^4Q^2x^2}{3m^2c^3R^6}.$$

Полная энергия, теряемая частицей за время пролета через шар, равна:

$$\mathcal{E} = \int_0^{t_0} I dt = \int_{-R}^R I \frac{dx}{\dot{x}}. \quad (9.11)$$

Для вычисления интеграла (9.11) удобно воспользоваться законом сохранения энергии:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + e\varphi(x) = \mathcal{E}_0 + e\varphi(R), \quad \text{или} \quad \frac{m\dot{x}^2}{2} = \mathcal{E}_0 + \frac{Qe}{2R^3}(x^2 - R^2).$$

Здесь учтено, что потенциал $\varphi = Qx^2/2R^3$. Выражая отсюда \dot{x} и подставляя скорость движения \dot{x} в (9.11), получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{2Q^2e^4}{3c^3m^2R^6} \sqrt{\frac{mR^3}{|Qe|}} \int_{-R}^R \frac{x^2 dx}{\sqrt{(U+1)R^2 - x^2}} = \\ &= \frac{2Qe^3}{3mc^2R^2} \sqrt{\frac{|Qe|}{mc^2R}} \left[(U+1) \arcsin(U+1)^{-1/2} - \sqrt{U} \right], \end{aligned}$$

где использовано обозначение $U \equiv 2\mathcal{E}_0R/|Qe|$. ◀

Пример 9.§1.3 В классической модели атома Резерфорда электрон с массой m и зарядом e вращается по круговой орбите вокруг неподвижного ядра с зарядом $Z|e|$ (рис.9.4). Найти закон убывания полной энергии \mathcal{E} электрона, обусловленный дипольным излучением. Вычислить время t_n , по истечении которого электрон упадет на ядро

вследствие потери энергии на дипольное излучение. В начальный момент времени $t_0 = 0$ электрон находится на расстоянии R от ядра (Задача №300 в [3]).

► Отклонение от кругового движения, вызванное потерей энергии электрона на излучение, за один оборот вокруг ядра весьма мало. Поэтому в каждый момент времени кинетическая и потенциальная энергии электрона выражаются через его полную энергию \mathcal{E} . Это обстоятельство дает возможность выразить интенсивность электрически дипольного излучения через полную энергию электрона.

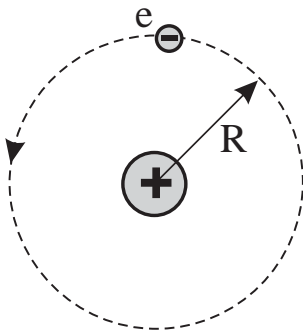


Рис. 9.4:

Для этого воспользуемся известной из механики теоремой вириала. Суть теоремы состоит в том, что если частица движется в потенциальном поле с энергией $U(x) = Ax^k$, где x - координата, а A - константа, то кинетическая энергия T связана с потенциальной U выражением: $T = kU/2$. Так как в данном случае потенциальная энергия электрона в поле ядра $U = -Ze^2/r$, где r расстояние от ядра до частицы (т.е. $k = -1$), то

полная энергия следующим образом выражается через потенциальную:

$$\mathcal{E} = T + U = -\frac{1}{2}U + U = \frac{1}{2}U = -\frac{Ze^2}{2r}.$$

Соответственно уравнение движения электрона в поля ядра имеет вид $m\ddot{\mathbf{r}} = -Ze^2\mathbf{r}/r^3$. В результате интенсивность дипольного излучения равна:

$$I = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} = \frac{2e^2\ddot{\mathbf{r}}^2}{3c^3} = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{Ze^2}{mr^2} \right)^2 = \frac{32\mathcal{E}^4}{3c^3(mZe)^2}.$$

Так как интенсивность излучения — это энергия электромагнитного поля, излучаемая в единицу времени, а из закона сохранения энергии следует, что $\mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{поля}} = \text{const}$, то $I = -\frac{d\mathcal{E}}{dt}$. В результате получаем уравнение для изменения энергии частицы со временем

$$-\frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}^4} = \frac{32}{3c^3(mZe)^2} dt.$$

Отсюда можно найти закон убывания полной энергии электрона с течением времени:

$$\frac{1}{\mathcal{E}^3} = \frac{1}{\mathcal{E}_0^3} + \frac{32t}{c^3(mZe)^2},$$

где \mathcal{E}_0 — энергия частицы в начальный момент времени $\mathcal{E}_0 = -Ze^2/(2R)$.

При падении частицы на центр $\mathcal{E} \rightarrow -\infty$, так как $\mathcal{E} = -Ze^2/(2r)$. В результате можно вычислить время падения электрона на ядро равно

$$t_{\pi} = \frac{m^2 c^3 R^3}{4Ze^4}.$$

Известно, что в атоме водорода электрон с наибольшей вероятностью находится на расстоянии $R = a_0 = \hbar^2/me^2 \approx 0,5 \cdot 10^{-8}$ см. Отсюда время падения электрона на ядро составляет $t_{\pi} \sim 10^{-15}$ сек. Как видно, полученный результат противоречит наблюдаемому времени “жизни” атома водорода, который находится в основном состоянии бесконечно долго. ◀

Этот пример демонстрирует неприменимость результатов классической теории (и механики и электродинамики) для описания таких объектов микромира как атомы и молекулы.

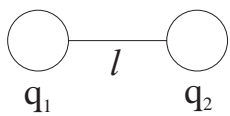


Рис. 9.5:

Пример 9.§1.4 *Простейшая линейная антенна представляет собой тонкий прямолинейный провод длины l , по которому протекает ток $J = J_0 \cos \omega t$. Определить интенсивность I излучения антенны в среднем по времени за период колебания тока (Задача №292 в [3]).*

► Пусть проводник соединяет две сферы (рис. 9.5). Заряды на сферах периодически меняются со временем. Заряд каждой сферы $q = q_0 \sin \omega t$. В этом случае ток $J = \dot{q} = q_0 \omega \cos \omega t$. В целом система представляет из себя простейший диполь: $d = ql = q_0 l \sin \omega t$, $\dot{d} = \dot{q}l = Jl$; $\ddot{d} = \dot{J}l$. В результате интенсивность дипольного излучения такой системы равна:

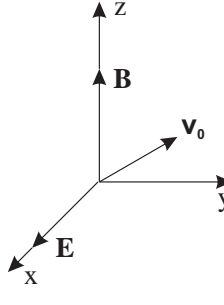
$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2(\tau) = \frac{2J_0^2 \omega^2}{3c^3} l^2 \sin^2 \omega(t - r/c), \quad J_0 = q_0 \omega.$$

Интенсивность, усредненная за период колебания тока $T = 2\pi/\omega$, равна:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt = \frac{J_0^2 \omega^2 l^2}{3c^3}, \quad \text{так как} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 9.§1.5 *Протон с массой m и зарядом e движется в скрещенных электрическом и магнитном полях с напряженностью \mathbf{E} и индукцией \mathbf{B} , которые удовлетворяют условиям $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = 0$. Внешние поля однородны и постоянны, а протон в начальный момент времени $t_0 = 0$ имел скорость \mathbf{v}_0 . Определить энергию дипольного излучения, теряемую частицей за время t (Задача №291 в [3]).*

► Выберем систему координат, как указано на рис. 9.6. Уравнение движения в этом случае есть:



$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = eE\mathbf{i} + \frac{e}{c}v_y B\mathbf{i} - \frac{e}{c}v_x B\mathbf{j},$$

так как

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}.$$

Рис. 9.6:

Таким образом, квадрат ускорения $\ddot{\mathbf{r}}^2$ равен:

$$\ddot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{m^2} \left(eE + \frac{e}{c}v_y B \right)^2 + \frac{e^2}{c^2}v_x^2 B^2 = \frac{e^2}{m^2 c^2} B^2 \left[\left(v_y + \frac{E}{B} \right)^2 + v_x^2 \right].$$

В скрещенных полях квадрат ускорения является интегралом движения, что можно проверить прямым дифференцированием. Используя уравнения движения $m\ddot{x} = eE + \frac{e}{c}\dot{y}B$, $m\ddot{y} = -\frac{e}{c}B\dot{x}$, получаем:

$$\frac{d}{dt} \frac{m^2 \ddot{\mathbf{r}}^2}{2} = \frac{eB}{cm} \left[\left(eE + \frac{e}{c}\dot{y}B \right) \left(-\frac{e}{c}B\dot{x} \right) + \left(-\frac{e}{c}B\dot{x} \right) \left(eE + \frac{e}{c}\dot{y}B \right) \right] = 0.$$

Поэтому интенсивность излучения — постоянная величина. Следовательно, энергия дипольного излучения, теряемая частицей за время t есть:

$$\mathcal{E} = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3}t = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{r}}^2 t = \frac{2e^4 B^2}{3m^2 c^5} \left[\left(v_{0y} + \frac{Ec}{B} \right)^2 + v_{0x}^2 \right] t. \quad \blacktriangleleft$$

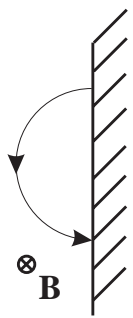


Рис. 9.7:

Пример 9.§1.6 Индукция \mathbf{B} магнитного поля в полупространстве однородна, постоянна и направлена параллельно граничной плоскости. В это полупространство влетает протон с массой m и зарядом e . Скорость \mathbf{v} протона при влёте перпендикулярна граничной плоскости (рис. 9.7). Определить энергию \mathcal{E} , теряемую протоном на дипольное излучение за время движения в магнитном поле (Задача №290 в [3]).

► Уравнение движения протона имеет вид: $m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$. Отсюда

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{mc}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad \ddot{\mathbf{r}}^2 = \left(\frac{e}{mc} \right)^2 v^2 B^2.$$

Энергия частицы в магнитном поле не меняется с течением времени $\dot{\mathcal{E}} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) = 0$. Поэтому $v^2 = \text{const}$ и $\ddot{\mathbf{r}}^2 = \text{const}$. Так как $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, $\ddot{\mathbf{d}} = e\ddot{\mathbf{r}}$ для

интенсивности дипольного излучения имеем:

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2 = \frac{2e^4 v^2 B^2}{3m^2 c^5}.$$

Выясним, как будет двигаться протон в магнитном поле. Из уравнения движения получаем $\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$. Направив ось z вдоль вектора \mathbf{B} , находим:

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0, \quad \text{где} \quad \omega = \frac{eB}{mc}. \quad (9.12)$$

Умножим второе из уравнений в (9.12) на мнимую единицу i и сложим с первым уравнением из (9.12). В результате:

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y). \quad (9.13)$$

Интегрируя (9.13), получим $v_x + iv_y = v \exp[-i(\omega t + \alpha)]$. Отделив действительную и мнимую части, находим:

$$v_x = v \cos(\omega t + \alpha), \quad v_y = -v \sin(\omega t + \alpha), \quad (9.14)$$

где α — угол, который составляет вектор \mathbf{v} с осью x в момент времени $t = 0$. Интегрируя (9.14), имеем:

$$x = x_0 + r \sin(\omega t + \alpha), \quad y = y_0 + r \cos(\omega t + \alpha), \quad r = v/\omega. \quad (9.15)$$

Интегрируя дважды третье уравнение в (9.12), находим $z = z_0$. Выбирая систему координат так, что $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, ясно, что протон движется по окружности радиуса r с периодом обращения $T = 2\pi/\omega$. Таким образом, энергия излучения протона за время движения в поле есть:

$$\mathcal{E} = I \frac{T}{2} = \frac{2\pi e^3 v^2 B}{3mc^4}. \quad \blacktriangleleft$$

§3 Квадрупольное и магнитно-дипольное излучение

В соответствии с общей теорией излучения на основании (9.7) интенсивность магнитно-дипольного излучения определяется выражением:

$$I_\mu = \frac{2\ddot{\mu}^2(\tau)}{3c^3}, \quad \tau = t - r/c, \quad (9.16)$$

где $\ddot{\mu}$ — вторая производная от магнитного момента системы по времени. Соответственно интенсивность квадрупольного излучения, как следует из

(9.7) равна:

$$I_Q = \frac{1}{180c^5} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left(\frac{\partial^3 Q_{\alpha\beta}}{\partial \tau^3} \right)^2 (\tau). \quad (9.17)$$

Пример 9.§3.1 Простейшая рамочная антенна представляет собой прямоугольную рамку со сторонами a и b , по которой течёт линейный ток $J = J_0 \cos \omega t$. Определить интенсивность I длинноволнового излучения антенны в среднем по времени за период колебания тока (Задача №313 в [3]).

► По определению магнитный момент линейного тока J равен

$$\vec{\mu} = \frac{J}{2c} \int [\mathbf{r} \times d\mathbf{l}].$$

Так как $[\mathbf{r} \times d\mathbf{l}] = 2\mathbf{n} ds$, где ds — площадь элементарного треугольника, образованного двумя радиус-векторами, проведенными к обоим концам элемента длины $d\mathbf{l}$, а \mathbf{n} — нормаль к поверхности треугольника, магнитный момент замкнутого контура с током определяется выражением: $\vec{\mu} = \mathbf{n} JS/c$. В данной задаче $S = ab$. Таким образом,

$$\vec{\mu} = \frac{abJ_0}{c} \cos(\omega t) \mathbf{n}, \quad \ddot{\vec{\mu}} = -\frac{abJ_0\omega^2}{c} \cos(\omega t) \mathbf{n}.$$

Отсюда интенсивность магнитно-дипольного излучения такой антенны равна:

$$I = \frac{2J_0^2\omega^4 a^2 b^2}{3c^5} \cos^2(\omega t),$$

а интенсивность, усредненная за период колебания тока, есть:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt = \frac{J_0^2\omega^4 a^2 b^2}{3c^5}. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 9.§3.2 В тонкой неподвижной квадратной рамке со стороной l возбуждён ток $J = J_0 e^{-\alpha t^2}$. Определить полную энергию \mathcal{E} излучения за время $-\infty < t < \infty$. (Задача №320 в [3])

► Ток в квадратной рамке создает магнитный момент

$$\vec{\mu} = \frac{Jl^2}{c} \mathbf{n} = \frac{J_0 l^2}{c} e^{-\alpha t^2} \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к рамке. Так как $\vec{\mu}$ зависит от времени, возникает магнитно-дипольное излучение, интенсивность которого определяется выражением (9.16). Вычисляя производные от магнитного момента,

получим:

$$\dot{\vec{\mu}} = \frac{J_0 l^2}{c} e^{-\alpha t^2} (-2\alpha t) \mathbf{n}, \quad \ddot{\vec{\mu}} = \frac{J_0 l^2}{c} e^{-\alpha t^2} (4\alpha^2 t^2 - 2\alpha) \mathbf{n},$$

$$\ddot{\vec{\mu}}^2 = \frac{l^4}{c^2} J_0^2 e^{-2\alpha t^2} 4\alpha^2 (4\alpha^2 t^4 - 4\alpha t^2 + 1).$$

Таким образом, полная энергия, излученная рамкой за время $-\infty < t < \infty$, определяется выражением:

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} I_{\mu} dt = \frac{J_0^2 l^4 \alpha}{c^5} \sqrt{2\pi\alpha}. \quad \text{Здесь учтено, что} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 9. §3.3 Однородно заряженный тонкий диск радиуса R вращается вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$. Полный заряд диска равен q . Найти интенсивность I излучения такой системы. (Задача №343 в [3])

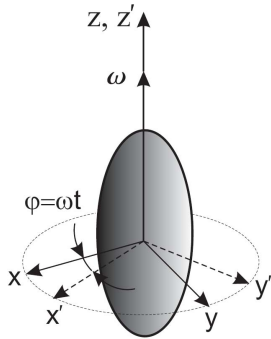


Рис. 9.8:

► Магнитный момент диска $\vec{\mu} = qR^2\vec{\omega}/8c$ и $\ddot{\vec{\mu}} = 0$, следовательно, магнитно-дипольное излучение отсутствует. Излучение обусловлено изменяющимся квадрупольным моментом. Вычислим компоненты тензора квадрупольного момента $Q_{\alpha\beta}$. Свяжем с диском систему координат K' : оси x' и z' лежат в плоскости диска, а ось y' перпендикулярна плоскости диска (см. рис. 9.8). Компоненты тензора квадрупольного момента в системе координат K' равны:

$$Q_{\alpha\beta}' = \int \sigma (3x_{\alpha}'x_{\beta}' - \delta_{\alpha\beta}r'^2) ds', \quad \alpha, \beta \in 1, 2, 3.$$

Вычисление этих компонент приводит к следующим результатам:

$$Q_{yy}' = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma (3y'^2 - r'^2) r' dr' d\alpha' = -\frac{qR^2}{2}, \quad Q_{xx}' = Q_{zz}' = \frac{qR^2}{4},$$

$$Q_{xy} = Q_{xz} = Q_{yz} = 0.$$

Или в матричном виде:

$$Q_{\alpha\beta}' \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{qR^2}{4}.$$

Компоненты тензора квадрупольного момента $Q_{\alpha\beta}$ в системе K найдем, используя стандартное преобразование поворота системы координат на угол $\varphi = \omega t$ вокруг осей z, z' :

$$Q_{\mu\nu} = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 a_{\mu\alpha} Q'_{\alpha\beta} a_{\beta\nu}^T,$$

где матрица преобразований имеет вид

$$a_{\mu\alpha} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате: $Q = aQ'a^T$,

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{qR^2}{4}.$$

После умножения матриц для матрицы тензора квадрупольного момента в системе координат K находим:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos^2 \omega t - 2 \sin^2 \omega t & 3 \sin \omega t \cos \omega t & 0 \\ 3 \sin \omega t \cos \omega t & \sin^2 \omega t - 2 \cos^2 \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{qR^2}{4}. \quad (9.18)$$

Вычисляя третью производную по времени от Q , после стандартных тригонометрических преобразований получим:

$$\frac{\partial^3 Q}{\partial t^3} = \frac{3}{2}(2\omega)^3 \begin{pmatrix} \sin 2\omega t & -\cos 2\omega t & 0 \\ -\cos 2\omega t & -\sin 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{qR^2}{4}.$$

И соответственно

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^3 \left[\frac{\partial^3 Q_{\alpha\beta}}{\partial t^3} \right]^2 = 18\omega^6 q^2 R^4.$$

Таким образом, интенсивность излучения однородно заряженного диска, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра, равна:

$$I = \frac{1}{180c^5} 18\omega^6 q^2 R^4 = \frac{q^2 R^4 \omega^6}{10c^5}. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 9.§3.4 Однородный шар радиуса R вращается около своего диаметра с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$. Ось вращения наклонена под углом θ к направлению внешнего постоянного однородного магнитного поля \mathbf{B} . Заряд и масса шара Q и m . Определить интенсивность излучения I (Задача №318 в [3]).

► Магнитный момент шара равен:

$$\vec{\mu} = \frac{QR^2}{5c} \vec{\omega}. \quad (9.19)$$

Воспользуемся известным уравнением движения для механического момента \mathbf{L} системы:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{K}, \quad \text{где} \quad \mathbf{K} = \sum [\mathbf{r} \times \mathbf{f}]$$

— сумма моментов всех сил \mathbf{f} , действующих на систему. Учитывая связь между магнитным и механическим моментами: $\vec{\mu} = Q\mathbf{L}/2mc$, а также выражение для момента сил, действующих на систему токов с магнитным моментом $\vec{\mu}$: $\mathbf{K} = [\vec{\mu} \times \mathbf{B}]$, получим следующее уравнение движения магнитного момента, находящегося во внешнем поле:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\vec{\mu} \times \mathbf{B}], \quad \frac{d\vec{\mu}}{dt} = \frac{Q}{2mc} [\vec{\mu} \times \mathbf{B}], \quad \frac{d^2\vec{\mu}}{dt^2} = \frac{Q^2}{(2mc)^2} [[\vec{\mu} \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B}],$$

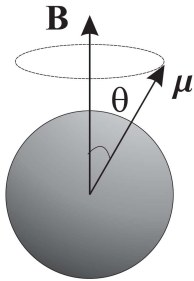


Рис. 9.9:

$$\ddot{\mu}^2 = \frac{Q^4}{(2mc)^4} (\mu^2 \mathbf{B}^4 - \mathbf{B}^2 (\vec{\mu} \cdot \mathbf{B})^2). \quad (9.20)$$

Выберем систему координат так, что направление оси z совпадает с направлением магнитного поля (см. рис. 9.9). Тогда

$$\dot{\vec{\mu}} = \frac{Q}{2mc} [\vec{\mu} \times \mathbf{B}] = \frac{Q}{2mc} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mu_x & \mu_y & \mu_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}.$$

Отсюда:

$$\frac{d\mu_x}{dt} = \Omega \mu_y, \quad \frac{d\mu_y}{dt} = -\Omega \mu_x, \quad \frac{d\mu_z}{dt} = 0, \quad \text{где} \quad \Omega = \frac{QB}{2mc}. \quad (9.21)$$

Умножая второе уравнение в (9.21) на i и складывая с первым, получим:

$$\frac{d}{dt} (\mu_x + i\mu_y) = -i\Omega (\mu_x + i\mu_y).$$

Интегрируя последнее равенство, имеем $\mu_x + i\mu_y = \mu_t \exp[-i(\Omega t + \alpha)]$. Отделяя действительную и мнимую части в полученном соотношении, находим:

$$\mu_x = \mu_t \cos(\Omega t + \alpha), \quad \mu_y = -\mu_t \sin(\Omega t + \alpha), \quad (9.22)$$

где μ_t — проекция вектора $\vec{\mu}$ на плоскость xy . Интегрируя уравнение $\dot{\mu}_z = 0$ в (9.21), получаем $\mu_z = \text{const}$, и, следовательно, $(\vec{\mu} \cdot \mathbf{B}) = \text{const}$. Таким образом, с учетом (9.22), получаем, что магнитный момент вращается вокруг направления поля, сохраняя свою абсолютную величину и угол с направлением поля (ларморова прецессия). *Частота вращения*

$$\Omega = \frac{QB}{2mc}$$

носит название ларморовой частоты. Учитывая, что $(\vec{\mu} \cdot \mathbf{B}) = \mu B \cos \theta$, получим из (9.20)

$$\ddot{\mu}^2 = \frac{Q^4}{(2mc)^4} \mu^2 B^4 (1 - \cos^2 \theta) = \frac{Q^4}{(2mc)^4} \mu^2 B^4 \sin^2 \theta.$$

С учетом равенства (9.19) и значения ларморовой частоты Ω находим окончательно для интенсивности излучения вращающегося шара следующее выражение:

$$I = \frac{Q^2 \omega^2}{600c} \left(\frac{QRB}{mc^2} \right)^4 \sin^2 \theta.$$

§4 Спектральное распределение излучения

Спектральная плотность излучения $I(\omega)$ определяется как энергия, приходящаяся на единичный интервал частот. Полная энергия, излученная за все время действия источника \mathcal{E} , связана со спектральной плотностью излучения $I(\omega)$ следующим соотношением:

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty d\mathcal{E}_\omega = \int_0^\infty I(\omega) d\omega.$$

В соответствии с общей теорией излучения мультипольное разложение энергии, излученной в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$, представляется в виде бесконечного ряда. Первые три члена этого ряда (с учетом Е2-излучения) равны:

$$d\mathcal{E}_\omega = \left(\frac{2|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2}{3c^3} + \frac{2|\ddot{\vec{\mu}}(\omega)|^2}{3c^3} + \frac{|\ddot{Q}_{\alpha\beta}(\omega)|^2}{180c^5} + \dots \right) d\omega, \quad (9.23)$$

где $\ddot{\mathbf{d}}(\omega)$, $\ddot{\vec{\mu}}(\omega)$ и $\ddot{Q}_{\alpha\beta}(\omega)$ — Фурье компоненты вторых производных по времени дипольного $\mathbf{d}(t)$, магнитного $\vec{\mu}(t)$ и третьей производной по времени квадрупольного $Q_{\alpha\beta}(t)$ моментов соответственно. При этом последовательно слагаемые ряда (9.23) определяют спектральную плотность электрически-дипольного (E1), магнитно-дипольного (M1) и электрически-квадрупольного излучения (E2). Фурье компонента $f(\omega)$ функции $f(t)$ определяется соотношением:

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt.$$

Пример 9.§4.1 До начального момента времени $t_0 = 0$ электрон с массой m и зарядом e покоился. При $t \geq 0$ он движется под действием электрического поля с напряженностью $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$. Найти энергию $d\mathcal{E}_\omega$, излученную электроном на частотах от ω до $\omega + d\omega$ (Задача №351 в [3]).

► Закон движения электрона под действием поля запишется в виде $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{E}e$, где e — заряд электрона. Дипольный момент электрона равен: $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$. Дифференцируя дважды по времени $\mathbf{d}(t)$, с учетом уравнения движения находим:

$$\ddot{\mathbf{d}}(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ \frac{e^2 \mathbf{E}_0}{m} \exp(-\alpha t) \cos \omega_0 t, & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Для вычисления спектральной плотности распределения излучения вычислим Фурье-образ $\ddot{\mathbf{d}}(t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{d}}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{i\omega t} \frac{e^2 \mathbf{E}_0}{m} e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 \mathbf{E}_0}{2m} \int_0^{+\infty} [e^{i(\omega+\omega_0)t} + e^{i(\omega-\omega_0)t}] e^{-\alpha t} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 \mathbf{E}_0}{2m} \left[\frac{1}{\alpha - i(\omega + \omega_0)} + \frac{1}{\alpha - i(\omega - \omega_0)} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2 = \frac{e^4 E_0^2}{2\pi m^2} \frac{\alpha^2 + \omega^2}{[\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2]}.$$

На основании (9.23) находим искомую энергию электрически-дипольного излучения в интервале частот $d\omega$:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2e^4 E_0^2}{3\pi m^2 c^3} \frac{\alpha^2 + \omega^2}{[\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2]} d\omega. \quad \blacktriangleleft \quad (9.24)$$

Пример 9.§4.2 *Неподвижный шар равномерно заряжен с объемной плотностью ρ положительным зарядом. Внутри шара на расстоянии a от его центра в моменты времени $t \leq 0$ покоился электрон с массой m и зарядом e . В последующее время $t > 0$ электрон движется под действием электрического поля шара. Учитывая силу радиационного трения, определить энергию $d\mathcal{E}_\omega$ дипольного излучения, приходящуюся на интервал частот от ω до $\omega + d\omega$ (Задача №353 в [3]).*

► Сила радиационного трения — это сила, действующая на излучающую заряженную частицу со стороны излучаемого частицей электромагнитного поля. В случае, если скорость движения частицы $v \ll c$, сила радиационного трения имеет вид:

$$\mathbf{F} = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\mathbf{a}}, \quad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (9.25)$$

где e и \mathbf{r} — заряд и радиус-вектор частицы, \mathbf{a} — ускорение.

Напряженность электрического поля, создаваемая заряженным шаром внутри него, равна: $\mathbf{E} = 4\pi\rho\mathbf{r}/3$. Следовательно, уравнение движения электрона внутри шара с учетом силы (9.25) запишется в виде:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{4}{3}\pi\rho|e|\mathbf{r} + \frac{2e^2}{3c^3}\dot{\mathbf{a}}, \quad \text{или} \quad \ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} - \frac{2e^2}{3c^3m}\dot{\mathbf{a}} = 0, \quad (9.26)$$

где введено обозначение $\omega_0^2 = \frac{4}{3m}\pi\rho|e|$. Сила радиационного трения много меньше кулоновской силы, поэтому уравнение (9.26) можно решать методом последовательных приближений. Отбрасывая член с третьей производной в уравнении (9.26), получаем: $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega_0^2\mathbf{r}$ откуда $\dot{\mathbf{a}} = -\omega_0^2\dot{\mathbf{r}}$. Подставляя это выражение в (9.26) и вводя обозначение: $\gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3c^3m}$, получаем следующее уравнение:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = 0. \quad (9.27)$$

Так как электрон движется по прямой, выберем ось x в направлении движения электрона. Общее решение дифференциального уравнения (9.27) в этом случае с учетом $\gamma \ll \omega_0$ есть:

$$x(t) = \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t).$$

Подставляя начальные условия $x(0) = c$, $\dot{x}(0) = 0$, находим значения констант $A = c$, $B = \gamma c / (2\omega_0)$. В результате:

$$x(t) = \exp(-\frac{\gamma}{2}t) \left(c \cos \omega_0 t + \frac{\gamma a}{2\omega_0} \sin \omega_0 t \right). \quad (9.28)$$

Второе слагаемое в (9.28) можно отбросить, так как $\gamma \ll \omega_0$. С учетом этого для $\ddot{\mathbf{d}}$ получим:

$$\ddot{\mathbf{d}}(t) = \omega_0^2 |e| \mathbf{c} \exp(-\frac{\gamma}{2}t) \cos \omega_0 t.$$

Сравнивая полученное выражение для $\ddot{\mathbf{d}}(t)$ с выражением для $\ddot{\mathbf{d}}(t)$ в примере 9.§4.1, находим для Фурье компонент дипольного момента:

$$|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2 = \frac{\omega_0^4 e^2 c^2}{2\pi} \frac{\gamma^2/4 + \omega_0^2}{[\gamma^2/4 + (\omega + \omega_0)^2][\gamma^2/4 + (\omega - \omega_0)^2]}. \quad (9.29)$$

Как следует из (9.29), основной вклад в $|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2$ вносят значения $\omega \approx \omega_0$. Полагая $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$, получим:

$$|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2 \simeq \frac{\omega_0^4 e^2 c^2}{8\pi [\gamma^2/4 + (\omega - \omega_0)^2]}. \quad (9.30)$$

Таким образом, с учетом сделанных приближений на основании (9.23) энергия излучения в интервале частот $d\omega$ есть:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{e^2 c^2 \omega_0^4}{6\pi c^3} \frac{1}{\gamma^2/4 + (\omega - \omega_0)^2} d\omega. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 9.§4.3. *Магнитный момент токов, текущих в весьма малой области пространства, меняется со временем по закону $\vec{\mu} = \vec{\mu}_0 \exp(-t^2/T^2)$, где $\vec{\mu}_0$ — постоянный вектор, а T — постоянная. Определить энергию $d\mathcal{E}_\omega$, излученную в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$ за бесконечное время от $t = -\infty$ до $t = \infty$ (Задача №366 в [3]).*

► Энергия $d\mathcal{E}_\omega$, излученная в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$, в данном случае определяется слагаемым, соответствующим магнитно-дипольному излучению

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2|\ddot{\vec{\mu}}(\omega)|^2}{3c^3} d\omega. \quad (9.31)$$

По свойству Фурье преобразования имеем $\ddot{\vec{\mu}}(\omega) = -\omega^2 \vec{\mu}(\omega)$. Фурье образ $\vec{\mu}(\omega)$ равен:

$$\vec{\mu}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \vec{\mu}_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega t - t^2/T^2) dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{\mu}_0 T \exp\left(-\frac{\omega^2 T^2}{4}\right).$$

При вычислении в показателе экспоненты необходимо выделить полный квадрат и использовать интеграл Пуассона. Таким образом,

$$\ddot{\mu}(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\omega^2\vec{\mu}_0T \exp\left(-\frac{\omega^2T^2}{4}\right).$$

На основании (9.31) получаем окончательный ответ:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2\mu_0^2T^2\omega^4}{3c^3} \exp\left(-\frac{\omega^2T^2}{2}\right)d\omega. \blacktriangleleft$$

Пример 9.§4.4. На отрезке длины l течет линейный ток $J = J_0e^{-\alpha t}\sin\omega_0t$, где постоянные величины удовлетворяют неравенствам $\alpha l \ll c$ и $\omega_0 l \ll c$. В моменты времени $t \leq 0$ ток равнялся нулю. Найти энергию $d\mathcal{E}_\omega$, излученную на частотах от ω до $\omega + d\omega$ (Задача №352 в [3]).

► В данной системе возникает электрически-дипольное излучение, так как $\mathbf{d}(t) = q(t)\mathbf{l}$, где вектор \mathbf{l} направлен вдоль отрезка длиной l и по модулю равен длине отрезка. Дифференцируя $\mathbf{d}(t)$ и подставляя выражение для J , находим:

$$\dot{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{l}J_0e^{-\alpha t}\sin\omega_0t.$$

Найдем Фурье образ для функции $\dot{\mathbf{d}}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{d}}(\omega) &= \frac{\mathbf{l}J_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\omega t - \alpha t} \sin\omega_0t dt = \\ &= \frac{\mathbf{l}J_0}{2i\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{\alpha - i(\omega + \omega_0)} - \frac{1}{\alpha - i(\omega - \omega_0)} \right]. \end{aligned} \quad (9.32)$$

С использованием свойств Фурье преобразования, получаем: $\ddot{\mathbf{d}}(\omega) = -i\omega\dot{\mathbf{d}}(\omega)$. Отсюда, после подстановки выражения для $\dot{\mathbf{d}}(\omega)$ из формулы (9.32) получим следующее выражение для $|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2$:

$$|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2 = \frac{J_0^2 l^2 \omega^2 \omega_0^2}{2\pi[\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2]}. \quad (9.33)$$

Подставляя это выражение в формулу (9.23), находим окончательно:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2J_0^2 l^2 \omega_0^2}{3\pi c^3} \frac{\omega^2}{[\alpha + (\omega + \omega_0)^2][\alpha + (\omega - \omega_0)^2]} d\omega. \blacktriangleleft$$

Пример 9.§4.5 Электрон с массой m и зарядом e влетает в полупространство, в котором напряженность \mathbf{E} электрического поля однородна и постоянна. Направление скорости \mathbf{v}_0 электрона при

влете образует с вектором \mathbf{E} острый угол α . Определить энергию $d\mathcal{E}_\omega$, излученную в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$ за все время движения во внешнем поле (Задача №360 в [3]).

► Пусть вектор \mathbf{E} направлен перпендикулярно к плоскости, разделяющей два полупространства. Ось y направим вдоль вектора \mathbf{E} , начало координат поместим в точку влета электрона в поле. Основной вклад в излучение дает дипольное излучение. Вторая производная от дипольного момента, очевидно, равна: $\ddot{\mathbf{d}} = -|e|\ddot{\mathbf{r}}$. Закон движения электрона в электрическом поле запишется в виде $m\ddot{\mathbf{r}} = -|e|\mathbf{E}$. Откуда получаем $\ddot{\mathbf{d}} = e^2\mathbf{E}/m$. Фурье образ дипольного момента выражается через интеграл:

$$\ddot{\mathbf{d}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2\mathbf{E}}{m} \int_0^\tau e^{i\omega t} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2\mathbf{E}}{\omega m} \exp(i\omega\tau/2) \sin \frac{\omega\tau}{2}, \quad (9.34)$$

где τ — время движения электрона в поле. Это время можно найти, решив уравнение движения. С учетом начальных условий решение уравнения движения есть:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t - \frac{|e|\mathbf{E}}{2m} t^2.$$

Проецируя это уравнение на ось y и выбирая $y = 0$, получаем соотношение, из которого можно найти время нахождения частицы в поле

$$v_0 \cos \alpha t - \frac{|e|E}{2m} t^2 = 0. \quad (9.35)$$

Очевидно, что электрон влетевший в поле, пролетев по параболе, вылетает из него. Таким образом, уравнение (9.35) имеет два решения для t : $t = 0$ и $t = 2v_0 m \cos \alpha / |e|E$. Первое решение соответствует моменту влета электрона в электрическое поле, а второе — равно τ — искомому времени движения частицы в поле. Подставляя τ в (9.34) и $\ddot{\mathbf{d}}(\omega)$ в (9.23), получаем энергию, излученную электроном в поле в интервале частот $d\omega$:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{8e^4 E^2}{3\pi m^2 c^3 \omega^2} \sin^2 \frac{\omega m v_0 \cos \alpha}{|e|E} d\omega. \quad \blacktriangleleft \quad (9.36)$$

Пример 9.§4.6. По неподвижной тонкой рамке в неограниченном промежутке времени $-\infty < t < \infty$ течет линейный ток $J = J_0 \frac{\tau t}{\tau^2 + t^2}$, где J_0 и τ — некоторые постоянные. Площадь рамки S , а ее линейные размеры малы по сравнению с величиной st , где s — скорость света в вакууме. Определить энергию $d\mathcal{E}_\omega$, излученную на частотах в интервале от ω до $\omega + d\omega$ (Задача №367 в [3]).

► Излучение данной системы — магнитно-дипольное. Магнитный момент линейного тока вычисляется по формуле:

$$\vec{\mu}(t) = \frac{J}{c} \mathbf{S} = \frac{J_0 \tau t}{c(\tau^2 + t^2)} \mathbf{S}, \quad (9.37)$$

где вектор \mathbf{S} по модулю равен площади рамки S и направлен перпендикулярно плоскости рамки. Фурье образ функции $\vec{\mu}(t)$ ищем в виде:

$$\vec{\mu}(\omega) = \mathbf{S} \frac{J_0}{\sqrt{2\pi c}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau t}{\tau^2 + t^2} \exp(i\omega t) dt.$$

Этот интеграл вычисляется с использованием теории вычетов, в результате получаем:

$$\vec{\mu}(\omega) = \frac{iJ_0 \tau \pi}{\sqrt{2\pi c}} \exp(-\omega \tau) \mathbf{S}.$$

На основании свойств фурье преобразования находим:

$$\ddot{\vec{\mu}}(\omega) = -\omega^2 \vec{\mu} = -\frac{iJ_0 \omega^2 \tau \pi}{\sqrt{2\pi c}} \exp(-\omega \tau) \mathbf{S}.$$

Таким образом, искомая энергия излучения имеет вид:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2\pi J_0^2 S^2 \tau^2}{3c^5} \omega^4 \exp(-2\omega \tau) d\omega. \quad \blacktriangleleft$$

§5 Угловое распределение излучения

Угловое распределение излучения определяет энергию, излучаемую системой в единицу времени внутрь телесного угла $d\Omega = \sin^2 \theta d\theta d\varphi$, где θ и φ — углы сферической системы координат. В свободном пространстве структура поля в волновой зоне определяется тройкой ортогональных векторов \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{n} , где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении распространения поля, при этом $E = B$, $\mathbf{E} = [\mathbf{B} \times \mathbf{n}]$. Вектор Умова-Пойнтинга в этом случае (т.к. $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) = 0$) равен :

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = \frac{cB^2}{4\pi} \mathbf{n}. \quad (9.38)$$

Энергия, проходящая в единицу времени через бесконечно малый элемент поверхности $d\sigma = r^2 d\Omega$, равна

$$dI = \mathbf{S} \cdot d\vec{\sigma} = |\mathbf{S}| r^2 d\Omega = \frac{cB^2 r^2}{4\pi} d\Omega. \quad (9.39)$$

Из общей теории излучения следует, что мультипольное разложение вектора индукции на больших расстояниях можно представить в виде бесконечного ряда (см. [17]):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}(\tau) \times \mathbf{n}]}{c^2 r} + \frac{[[\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\tau) \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}]}{c^2 r} + \frac{[\ddot{\mathbf{Q}}(\tau) \times \mathbf{n}]}{6c^3 r} + \dots, \quad \tau = t - r/c, \quad (9.40)$$

где вектор \mathbf{Q} имеет компоненты $Q_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 Q_{\alpha\beta} n_\beta$, $Q_{\alpha\beta}$ — тензор квадрупольного момента.

Формула (9.40) заметно упрощается, когда излучающая система характеризуется только одним дипольным моментом, магнитным моментом или тензором квадрупольного момента, и угловое распределение интенсивности излучения принимает в этих случаях вид

$$dI_d = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}(\tau) \times \mathbf{n}]^2}{4\pi c^3} d\Omega \quad \rightarrow \quad E1\text{-излучение}, \quad (9.41)$$

$$dI_\mu = \frac{[\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\tau) \times \mathbf{n}]^2}{4\pi c^3} d\Omega \quad \rightarrow \quad M1\text{-излучение}, \quad (9.42)$$

$$dI_Q = \frac{[\ddot{\mathbf{Q}}(\tau) \times \mathbf{n}]^2}{144\pi c^5} d\Omega \quad \rightarrow \quad E2\text{-излучение}. \quad (9.43)$$

Угловое распределение энергии, излученной за все время действия источника, получается путем интегрирования интенсивности излучения (9.39) по времени

$$d\mathcal{E} = \frac{c r^2}{4\pi} d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} B^2(\mathbf{r}, t) dt. \quad (9.44)$$

Разлагая в (9.44) индукцию магнитного поля $B(\mathbf{r}, t)$ в интеграл Фурье по переменной t , можно определить энергию $d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega}$, излученную в телесный угол $d\Omega$ на частотах в интервале ω до $\omega + d\omega$:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{c r^2}{2\pi} |\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega)|^2 d\Omega d\omega. \quad (9.45)$$

Пример 9.§5.1. Частица с массой m и зарядом e движется перпендикулярно однородному постоянному магнитному полю с индукцией \mathbf{B}_0 . Скорость частицы по абсолютной величине равна v . Найти интенсивность dI дипольного излучения в телесный угол $d\Omega$ в среднем по времени за период движения частицы (Задача №375 в [3]).

► Интенсивность дипольного излучения в элемент $d\Omega$ телесного угла выражается через индукцию \mathbf{B} магнитного поля излучаемой волны, которая, согласно (9.40), равна:

$$\mathbf{B} = \frac{[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]}{c^2 r} + \dots, \quad (9.46)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, а \mathbf{r} — радиус-вектор точки наблюдения. Так как дипольный момент заряда $\mathbf{d} = e\mathbf{r}_e$ (\mathbf{r}_e — радиус-вектор положения заряда в пространстве), $\ddot{\mathbf{d}} = e\ddot{\mathbf{r}}_e$. Ускорение частицы определяется из уравнения движения:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}_e = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] \Rightarrow \begin{cases} \dot{v}_x = \omega v_y, \\ \dot{v}_y = -\omega v_x, \end{cases} \quad (9.47)$$

где учтено, что частица движется в плоскости xy , ортогональной вектору \mathbf{B} , и введено обозначение $\omega \equiv \frac{eB}{mc}$. Решая (9.47), находим, что частица движется по окружности с угловой скоростью ω . Отсюда,

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{e^2}{mc} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] = -\frac{e^2 v B_0}{mc} \mathbf{n}'(t),$$

где

$$\mathbf{n}'(t) = \mathbf{i} \cos(\omega t) + \mathbf{j} \sin(\omega t). \quad (9.48)$$

Здесь \mathbf{n}' — единичный вектор, направленный по радиус-вектору \mathbf{r}_e частицы. По определению, единичный радиус-вектор точки наблюдения есть:

$$\mathbf{n} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}.$$

Таким образом, интенсивность dI дипольного излучения в телесный угол $d\Omega$ в момент времени t равна:

$$dI = \frac{v^2 \omega^2}{4\pi c^3} [\mathbf{n}' \times \mathbf{n}]^2 d\Omega. \quad (9.49)$$

Учитывая равенство $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]^2 = a^2 b^2 - (\mathbf{a}\mathbf{b})^2$, находим:

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}' \times \mathbf{n}]^2 &= 1 - (\mathbf{n}\mathbf{n}')^2 = 1 - (\cos \varphi \cos \omega t + \sin \varphi \sin \omega t)^2 \sin^2 \theta = \\ &= 1 - \cos^2(\omega t - \varphi) \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Очевидно, что среднее за период полученного выражения равно:

$$\langle [\mathbf{n}' \times \mathbf{n}]^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T [\mathbf{n}' \times \mathbf{n}]^2 dt = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (9.50)$$

Таким образом, с учетом (9.50) получаем окончательно:

$$\langle dI \rangle = \frac{e^4 v^2 B_0^2}{8\pi m^2 c^5} (1 + \cos^2 \theta) d\Omega. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 9.§5.2. Протон с массой m и зарядом e покидает неподвижное ядро, радиус которого R , а остаточный заряд Ze . При вылете из ядра скорость протона равнялась нулю. Найти угловое распределение $d\mathcal{E}$ полной энергии дипольного излучения, обусловленного кулоновским взаимодействием протона с ядром. (Задача №377 [3])

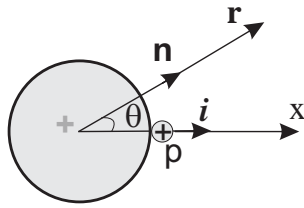


Рис. 9.10:

► С учетом (9.40) и (9.44) получим:

$$d\mathcal{E} = \int_0^\infty \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2 d\Omega dt.$$

На основании уравнения движения для второй производной по времени от дипольного момента находим

$$\ddot{\mathbf{d}} = e \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{Ze^3}{mr^2} \mathbf{i}.$$

Здесь \mathbf{i} — единичный вектор в направлении движения протона (ось x рис.9.10). Если \mathbf{n} — единичный вектор в направлении точки наблюдения, то

$$[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2 = \frac{Z^2 e^6}{m^2 x^4} \sin^2 \theta.$$

Отсюда:

$$d\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi c^3} \frac{Z^2 e^6}{m^2} \sin^2 \theta \int_0^\infty \frac{dt}{x^4}, \quad (9.51)$$

где $x = x(t)$. Зависимость энергии излучения от угла между \mathbf{n} и \mathbf{d} определяется множителем $\sin^2 \theta$. Для определения величины энергии излучения надо вычислить лишь общий множитель:

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty \frac{dt}{x^4} = \int_R^\infty \frac{dx}{x^4 \dot{x}}. \quad (9.52)$$

На основании закона сохранения энергии имеем:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{Ze^2}{x} = \frac{Ze^2}{R},$$

отсюда можно выразить скорость частицы \dot{x} через координату x :

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2Ze^2}{mR} \left(1 - \frac{R}{x}\right)}.$$

Подставляя \dot{x} в (9.52) и выполняя замену переменной $u = 1 - R/x$, $du = Rdx/x^2$, $u(x=R) = 0$, $u(x=\infty) = 1$, можно вычислить общий множитель \mathcal{J} в (9.51):

$$\mathcal{J} = \sqrt{\frac{mR}{2Ze^2}} \int_0^1 \frac{1}{R^3} \frac{du}{\sqrt{u}} (1-u)^2 = \sqrt{\frac{mR}{2Ze^2}} \frac{1}{R^3} \frac{16}{15}, \quad \text{т.к.} \quad \int_0^1 \frac{(1-y)^2 dy}{\sqrt{y}} = \frac{16}{15}.$$

Окончательно получим следующее выражение для углового распределения излучения:

$$d\mathcal{E} = \frac{e^2}{15\pi R} \sqrt{\left(\frac{2Ze^2}{mRc^2}\right)^3} \sin^2 \theta d\Omega. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 9.§5.3. Однородно заряженный цилиндр радиуса R и высоты h вращается с постоянной угловой скоростью ω около оси, проходящей через среднюю точку цилиндра перпендикулярно оси его симметрии. Полный заряд равен q . Определить интенсивность dI излучения в телесный угол $d\Omega$ в среднем по времени за период вращения (Задача №379 в [3]).

► Начало покоящейся системы координат поместим в средней точке цилиндра, а ось z выберем вдоль вектора угловой скорости (см. рис. 9.11). Дипольный момент цилиндра равен нулю. Магнитный момент вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндра от времени не зависит. Поэтому излучение будет определяться изменяющимся во времени квадрупольным моментом.

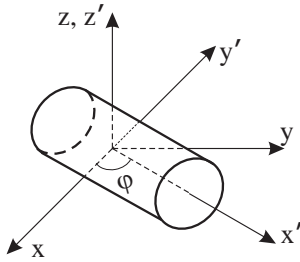


Рис. 9.11:

Жестко связанная с цилиндром штрихованная система координат $x'y'z'$ вращается около оси z' ($z' \equiv z$), причем ось x' совпадает с осью цилиндра. Тензор квадрупольного момента Q' в штрихованной системе координат $x'y'z'$ имеет вид:

$$Q'_{\alpha\beta} = Q \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{q}{4} \left(\frac{h^2}{3} - R^2 \right).$$

Найдем теперь компоненты тензора квадрупольного момента $Q_{\alpha\beta}$ в неподвижной системе координат:

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma, \delta=1}^3 a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} Q'_{\gamma\delta} = \sum_{\gamma, \delta=1}^3 a_{\alpha\gamma} Q'_{\gamma\delta} a_{\delta\beta}^T, \quad \alpha, \beta \in 1, 2, 3, \quad (9.53)$$

где $a_{\alpha\gamma}$ — матрица преобразования компонент радиуса-вектора при повороте системы координат: $x_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha\beta} x'_\beta$. Учитывая выбор систем координат (см. рис. 9.11), для матрицы поворота имеем:

$$a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом $z = z'$, $\varphi = \omega t$. Вычисляя произведение матриц на основании (9.53)

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \cos 2\varphi + 1 & 3 \sin 2\varphi & 0 \\ 3 \sin 2\varphi & -3 \cos 2\varphi + 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} Q. \end{aligned} \quad (9.54)$$

Отсюда можно определить выражение для $\ddot{Q}_{\alpha\beta}$:

$$\ddot{Q}_{\alpha\beta} = -12Q\omega^3 \begin{pmatrix} -\sin 2\omega t & \cos 2\omega t & 0 \\ \cos 2\omega t & \sin 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Единичный радиус-вектор точки наблюдения, выраженный через переменные сферической системы координат, есть:

$$\mathbf{n} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}.$$

Обозначая через n_α компоненты единичного радиус-вектора точки наблюдения поля, вычислим компоненты третьей производной по времени вектора \mathbf{Q} :

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_1 &= \sum_{\alpha=1}^3 \ddot{Q}_{1\alpha} n_\alpha = -(-\sin 2\omega t \sin \theta \cos \varphi + \cos 2\omega t \sin \theta \sin \varphi) 12Q\omega^3 = \\ &= 12Q\omega^3 \sin \theta \sin(2\omega t - \varphi), \\ \ddot{Q}_2 &= \sum_{\alpha=1}^3 \ddot{Q}_{2\alpha} n_\alpha = -12Q\omega^3 \sin \theta (\cos 2\omega t \cos \varphi + \sin 2\omega t \sin \varphi) = \\ &= -12Q\omega^3 \sin \theta \cos(2\omega t - \varphi), \end{aligned}$$

$$\ddot{Q}_3 = \sum_{\alpha=1}^3 \ddot{Q}_{3\alpha} n_{\alpha} = 0,$$

или

$$\ddot{\mathbf{Q}} = 12Q\omega^3 \sin \theta \left\{ \sin(2\omega t - \varphi) \mathbf{i} - \cos(2\omega t - \varphi) \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} \right\}.$$

В результате из (9.43) следует выражение для энергии излучаемой такой системой в единицу времени в элемент телесного угла $d\Omega$:

$$\begin{aligned} dI_Q &= \frac{[\ddot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n}]^2}{144\pi c^5} d\Omega = \frac{Q^2 \omega^6}{\pi c^5} \sin^2 \theta \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta\right) d\Omega = \\ &= \frac{Q^2 \omega^6}{2\pi c^5} (1 - \cos^4 \theta) d\Omega. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

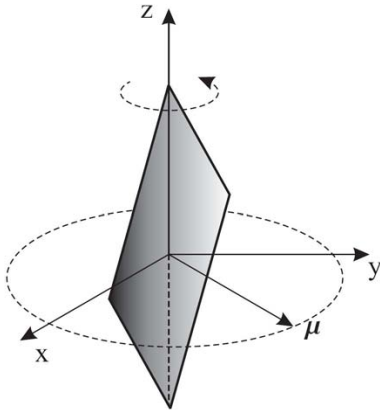


Рис. 9.12:

Пример 9.§5.4. Прямоугольная рамка с постоянным линейным током J вращается вокруг своей диагонали с постоянной угловой скоростью ω . Площадь рамки равна S , а ее линейные размеры малы по сравнению с длиной излучаемой волны. Найти интенсивность dI излучения в телесный угол $d\Omega$ в среднем по времени за период вращения рамки (Задача №376 в [3]).

► По определению магнитный момент рамки равен:

$$\vec{\mu}(t) = \frac{\mathcal{J}S}{c} \mathbf{n}'(t) = \frac{\mathcal{J}S}{c} (\mathbf{i} \cos \omega t + \mathbf{j} \sin \omega t + \mathbf{k} 0).$$

Соответственно, вторая производная магнитного момента имеет вид:

$$\ddot{\vec{\mu}} = -\frac{\mathcal{J}S}{c} \omega^2 \mathbf{n}'(t).$$

Интенсивность dI излучения в телесный угол $d\Omega$ определяется формулой (9.42):

$$dI = \frac{[[\ddot{\vec{\mu}}(\tau) \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}]^2}{4\pi c^3} d\Omega = \frac{1}{4\pi c^3} \frac{\mathcal{J}^2 S^2 \omega^4}{c^2} [[\mathbf{n}' \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}]^2 d\Omega,$$

где $\tau = t - r/c$, \mathbf{n} — единичный вектор в направлении телесного угла $d\Omega$.

$$[[\mathbf{n}' \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}]^2 = 1 - \cos^2(\omega\tau - \varphi) \sin^2 \theta.$$

Соответственно, среднее за период выражение имеет вид:

$$\langle [[\mathbf{n}' \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}]^2 \rangle = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta).$$

Таким образом окончательно получаем:

$$\langle dI \rangle = \frac{\mathcal{J}^2 S^2 \omega^4}{8\pi c^5} (1 + \cos^2 \theta) d\Omega. \blacktriangleleft$$

Пример 9.§5.5. Квадрупольный момент Q тела вращения меняется со временем по закону $Q = Q_0 e^{-(t/T)^2}$, где Q_0 и T — постоянные. Найти энергию $d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega}$, излученную в телесный угол $d\Omega$ на частотах в интервале от ω до $\omega + d\omega$ за бесконечное время от $t = -\infty$ до $t = \infty$ (Задача №382 в [3]).

► По определению, у тела вращения компоненты тензора квадрупольного момента удовлетворяют соотношениям $Q_{11} = Q_{22} = -\frac{1}{2}Q_{33}$. В силу этого компонента $Q_{33} = Q$ — называется квадрупольным моментом тела вращения. Таким образом, компоненты вектора $\ddot{\mathbf{Q}}$ равны

$$\ddot{\mathbf{Q}} \Rightarrow \left(-\frac{\ddot{Q}}{2} n_x, -\frac{\ddot{Q}}{2} n_y, \ddot{Q} n_z \right) = -\frac{1}{2} \ddot{Q} \mathbf{n} + \frac{3}{2} \ddot{Q} \mathbf{k} n_z.$$

Фурье компонента функции $Q(t)$ есть:

$$Q(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega t) Q_0 \exp\left(-\frac{t^2}{T^2}\right) dt = \frac{Q_0 T}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\omega^2 T^2}{4}\right).$$

Соответственно $\ddot{\mathbf{Q}}(\omega) = i\omega^3 Q(\omega) \left(-\frac{1}{2} \mathbf{n} + \frac{3}{2} n_z \mathbf{k}\right)$. На основании (9.45)

$$\frac{d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega}}{d\Omega d\omega} = \frac{|\ddot{\mathbf{Q}}(\omega) \times \mathbf{n}|^2}{72\pi c^5}.$$

Окончательно получаем:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{Q_0^2 T^2 \omega^6}{256\pi c^5} \exp\left(-\frac{\omega^2 T^2}{2}\right) \sin^2 2\theta d\Omega d\omega. \blacktriangleleft$$

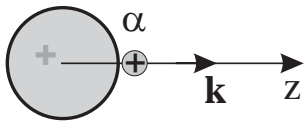


Рис. 9.13:

Пример 9.§5.6. При распаде неподвижного ядра радиуса R образовалась α -частица со скоростью, равной нулю. Заряд α -частицы q , а ее радиус пренебрежимо мал по сравнению с R . В результате кулоновского отталкивания α -частица удалится на бесконечность. Найти угловое распределение $d\mathcal{E}$ полной энергии излучения с учетом малого слагаемого порядка $v/c \ll 1$, где v — скорость α -частицы на бесконечности. (Задача №383 в [3])

► Магнитный момент такой системы равен нулю. Вычисляя тензор квадрупольного момента в системе координат представленной на рис.9.13, получим:

$$Q_{xx} = -qz^2, \quad Q_{yy} = -qz^2, \quad Q_{zz} \equiv Q_0 = 2qz^2.$$

Или в матричном виде:

$$Q_{\alpha\beta} \Rightarrow -\frac{Q_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \ddot{Q}_{\alpha\beta} \Rightarrow -\frac{\ddot{Q}_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

С учетом определения компонент вектора \mathbf{Q} ($Q_\alpha \equiv \sum_{\beta=1}^3 Q_{\alpha\beta} n_\beta$) получим:

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \ddot{Q} \mathbf{n} = (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} - 2n_z \mathbf{k}) \left(-\frac{\ddot{Q}_0}{2} \right) = -\frac{\ddot{Q}_0}{2} (\mathbf{n} - 3n_z \mathbf{k}),$$

т.к. $n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} - 2n_z \mathbf{k} = \mathbf{n} - 3n_z \mathbf{k}$; \mathbf{n} — единичный вектор в направлении точки наблюдения, α -частица движется вдоль оси z (см. рис. 9.13). В результате

$$[\ddot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n}] = \frac{3}{2} \ddot{Q}_0 n_z [\mathbf{k} \times \mathbf{n}], \quad \ddot{\mathbf{d}} = q\ddot{\mathbf{r}} = \frac{Ze q^2}{m} \frac{1}{r^2} \mathbf{k}. \quad (9.55)$$

движения частицы. Энергия излучения α -частицы в рассматриваемом приближении внутрь телесного угла $d\Omega$ равна:

$$d\mathcal{E} = d\Omega \int_0^\infty \frac{1}{4\pi c^3} \left([\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2 + \frac{1}{3c} [\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}] [\ddot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n}] \right) dt. \quad (9.56)$$

Первое слагаемое в (9.56) имеет вид:

$$\int_0^\infty \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2 dt = \frac{q^2}{15\pi R} \sqrt{\left(\frac{2Ze q}{mRc^2} \right)^3} \sin^2 \theta = \frac{q^2}{15\pi R} \left(\frac{v}{c} \right)^3 \sin^2 \theta.$$

С учетом (9.55) получим:

$$[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}] [\ddot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n}] = \frac{Ze q^2}{mr^2} \frac{3}{2} \ddot{Q}_0 n_z [\mathbf{k} \times \mathbf{n}]^2.$$

При этом

$$Q_0 = 2qz^2, \quad \dot{Q}_0 = 4qz\dot{z}, \quad \ddot{Q}_0 = 2q(2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z}), \quad \ddot{\ddot{Q}}_0 = 4q(3\dot{z}\ddot{z} + z\dddot{z}).$$

Соответственно из уравнения движения имеем следующие равенства:

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} \frac{Ze q}{z^2} = \frac{\beta}{z^2}, \quad \ddot{\ddot{z}} = -\frac{2\beta}{z^3} \dot{z}, \quad \text{где} \quad \beta = \frac{Ze q}{m}.$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{z^2} (3\dot{z}\ddot{z} + z \ddot{\dot{z}}) dt = \int_0^\infty \frac{1}{z^2} \left(3\dot{z} \frac{\beta}{z^2} - z \frac{2\beta}{z^3} \dot{z} \right) dt,$$

так как $dt = \frac{dz}{\dot{z}}$, то $\int_0^\infty \frac{1}{z^2} \left(3\dot{z} \frac{\beta}{z^2} - z \frac{2\beta}{z^3} \dot{z} \right) dt = \beta \int_R^\infty \frac{dz}{z^4} = \frac{\beta}{3R^3}.$

Таким образом, второе слагаемое в (9.56) равно:

$$\frac{1}{4\pi c^4} \frac{2Ze q^2}{m} \frac{Ze q}{m} \frac{1}{3R^3} n_z [\mathbf{k} \times \mathbf{n}]^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^4 \frac{2}{16\pi} \frac{q^2}{3R} n_z [\mathbf{k} \times \mathbf{n}]^2,$$

где использованы соотношения:

$$\frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{Ze q}{R}, \quad v_\infty = \sqrt{\frac{2Ze q}{mR}}, \quad n_z = \cos \theta, \quad [\mathbf{k} \times \mathbf{n}]^2 = \sin^2 \theta.$$

Окончательно для углового распределения излучения получим:

$$d\mathcal{E} = \frac{q^2}{15\pi R} \left(\frac{v}{c}\right)^3 \left(1 + \frac{5}{8} \frac{v}{c} \cos \theta\right) \sin^2 \theta d\Omega. \quad \blacktriangleleft$$

Глава 10

Электромагнитные волны.

§1 Электромагнитные волны в вакууме

Система уравнений Максвелла имеет отличные от нуля решения даже при отсутствии зарядов и токов. Эти решения соответствуют переменному электромагнитному полю, которое может существовать вдали от создавшего его источника. При отсутствии зарядов и токов система уравнений Максвелла в вакууме имеет вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (10.1)$$

Вычисления операции rot от закона электромагнитной индукции Фарадея из (10.1) можно получить уравнение которому удовлетворяет вектор напряженности электрического поля

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B}; \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

С Учетом уравнений (10.1) находим для \mathbf{E} окончательно

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (10.2)$$

Аналогично вычисления ротора от обобщенного закона Ампера в (10.1) приводит к следующему уравнению для вектора индукции магнитного поля в вакууме:

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (10.3)$$

Волновое уравнение.

Уравнения (10.2), (10.3) являются однородными волновыми уравнениями и для каждой скалярной функции проекции векторов имеют общую структуру волнового уравнения:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (10.4)$$

Данное уравнение имеет несколько типов решений, которые играют важную роль в теории электромагнитного поля.

Плоская волна.

Если \mathbf{r} - радиус- вектор произвольной точки в пространстве, а \mathbf{s} - единичный вектор в произвольном направлении, то любое решение уравнения (10.4) вида

$$\phi = \phi(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}, t)$$

называется *плоской волной*, так как в определенный момент времени функция ϕ имеет постоянное значение в плоскостях $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = \text{const}$, перпендикулярных к единичному вектору \mathbf{s} .

Если выбрать положение новых декартовых осей так, чтобы ось z' была направлена вдоль вектора \mathbf{s} , то

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = xs_x + ys_y + zs_z = z'.$$

При этом из данного определения вытекает что:

$$\frac{\partial}{\partial x} = s_x \frac{\partial}{\partial z'}.$$

Последнее утверждение находится в соответствии с определением правила дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial x} f(z') = \frac{\partial f}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} = s_x \frac{\partial}{\partial z'} f.$$

Аналогично можно определить, что

$$\frac{\partial}{\partial y} = s_y \frac{\partial}{\partial z'}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = s_z \frac{\partial}{\partial z'}.$$

В соответствии с представленными равенствами для оператора ∇^2 в выбранной системе координат получим

$$\nabla^2 = s_x^2 \frac{\partial^2}{\partial z'^2} + s_y^2 \frac{\partial^2}{\partial z'^2} + s_z^2 \frac{\partial^2}{\partial z'^2} = (s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) \frac{\partial^2}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2}.$$

Следовательно, волновое уравнение (10.4) будет иметь в этой системе координат следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = 0, \quad (10.5)$$

где $u = z' - ct$, $v = z' + ct$. Последнее равенство позволяет представить общее решение уравнения (10.5) в виде суперпозиции двух произвольных функций $\phi_1(u)$ и $\phi_2(v)$:

$$\phi = \phi_1(u) + \phi_2(v) = \phi_1(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} - ct) + \phi_2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + ct), \quad (10.6)$$

По определению видно, что аргумент функции $\phi_1(u)$ не изменяется при замене (z', t) на $(z' + c\tau, t + \tau)$, где τ - произвольный интервал времени. Поэтому функция $\phi_1(u)$ описывает возмущение, распространяющееся со скоростью c в положительном направлении вектора \mathbf{s} . Аналогично функция $\phi_2(v)$

определяет возмущение, распространяющееся с той же скоростью, но против положительного направления вектора \mathbf{s} .

Сферическая волна.

Кроме плоских волн волновое уравнение допускает решения в виде сферически расходящихся и сходящихся волн. Рассмотрим сферически симметричные решения волнового уравнения в сферической системе координат $\phi = \phi(r, t)$, где r - расстояние от начала координат до произвольной точки. В этом случае волновое уравнение в сферической системе координат имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \phi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = 0. \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \phi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \phi) = 0.$$

Последнее уравнение совпадает с волновым уравнением для плоских волн, если выполнить замены $z' \rightarrow r$ и $\phi \rightarrow r\phi$. Таким образом в случае сферических волн решение волнового уравнения есть:

$$\phi = \frac{1}{r} \phi_1(r - ct) + \frac{1}{r} \phi_2(r + ct). \quad (10.7)$$

Как и в случае плоских волн функции ϕ_1 и ϕ_2 - произвольные, при этом первое слагаемое в (10.7) является расходящейся из начала координат сферической волной, а второе слагаемое - ϕ_2 - сферической волной сходящейся к началу координат.

Гармоническая волна.

Для переменного электромагнитного поля особый интерес представляет периодическая зависимость решения волновых уравнений от времени. В случае, если зависимость от времени решения волнового уравнения в фиксированной точке пространства определяется выражением:

$$a \cos(\omega t + \delta),$$

то такие решения называются *гармоническими*. При этом a - называется *амплитудой волны*, $\omega t + \delta$ - *фазой*, ω - *угловой частотой*. ω определяет число колебаний за 2π секунд. Величина $T = 2\pi/\omega$ называется *периодом колебаний*, так как при изменении $t \rightarrow t + T$ величина решения не меняется. Гармоническая плоская волна есть:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = a \cos \left[\omega \left(t - \frac{1}{c} \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} \right) + \delta \right].$$

Величина гармонической функции ϕ не меняется, если заменить $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + \lambda$, где $\lambda = 2\pi c/\omega = cT$ называется *длиной волны*.

Волновой вектор.

В теории электромагнитного поля вводится вектор $\mathbf{k} = \mathbf{s}\omega/c$, который называется *волновым вектором*. В этом случае гармоническая плоская волна имеет вид $a \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$.

Плоская электромагнитная волна.

Как следует из (10.2), (10.3) среди множества решений волновых уравнений для векторов \mathbf{E} , \mathbf{B} существуют решения в виде плоских волн. Это означает, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} являются функциями от аргумента $u = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} - ct$. Таким образом, для производных от векторов поля по времени и координатам находим

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u}; \quad \frac{\partial E_i}{\partial x_k} = \frac{\partial E_i}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_k} = s_k \frac{\partial E_i}{\partial u},$$

где $k \in 1, 2, 3$. Следовательно из системы уравнений Максвелла для пустого пространства получим:

$$(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}) = 0; \quad (\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}) = 0; \quad \left[\mathbf{s} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u} \right] = -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u}; \quad \left[\mathbf{s} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u} \right] = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u};$$

Проинтегрировав последние уравнения по u и опуская постоянную интегрирования, что соответствует пренебрежению постоянным полем во всем пространстве, найдем связь векторов поля и вектора \mathbf{s} :

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{s} \times \mathbf{B}], \quad \mathbf{B} = [\mathbf{s} \times \mathbf{E}] \quad (10.8)$$

Равенства (10.8) выражают свойство поперечности электромагнитного поля в неограниченном пространстве в вакууме. Другими словами векторы \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{s} образуют правую ортогональную систему векторов, и векторы \mathbf{E} , \mathbf{B} лежат в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{s} который определяет направление распространения волны. Величины векторов поля равны $E = B$, но сами векторы ортогональны друг другу.

Поляризация электромагнитных волн.

В случае плоской гармонической волны, при произвольном выборе системы координат, любая из декартовых компонент векторов поля имеет вид:

$$a \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta) = \operatorname{Re} \{a \exp [-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta)]\} = \operatorname{Re} \{a \exp [-i(\varphi + \delta)]\},$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{s}\omega/c$.

Выберем ось z в направлении вектора \mathbf{k} . В этом случае отличными от нуля компонентами поля являются только проекции векторов на оси x, y . Рассмотрим кривую, которую описывает конец вектора электрического поля со временем, в некоторой фиксированной точке пространства. Данная кривая является геометрическим местом точек, координаты которых равны E_x, E_y :

$$E_x = a_1 \cos(\varphi + \delta_1), \quad E_y = a_2 \cos(\varphi + \delta_2). \quad (10.9)$$

Исключая из данных уравнений время, получим уравнение конического сечения [10]:

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 - 2\frac{E_x}{a_1}\frac{E_y}{a_2}\cos\delta = \sin^2\delta; \quad \delta \equiv \delta_2 - \delta_1. \quad (10.10)$$

Эллиптическая поляризация.

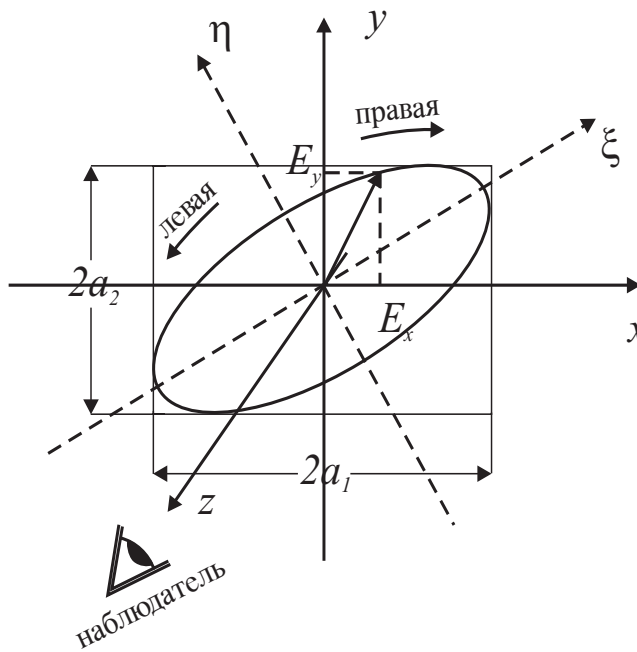


Рис. 10.1:

Кривая (10.10) является эллипсом, вписанным в прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат и равны $2a_1$ и $2a_2$ (см. рис. 10.1). Оси эллипса ξ, η не совпадают с направлением осей координат x, y . В этом случае говорят, что волна эллиптически поляризована. Волна, связанная с вектором индукции также имеет эллиптическую поляризацию. Различаются два типа эллиптической поляризации в соответствии с направлением, в котором конец электрического вектора описывает эллипс. Поляризация называется правой, если с точки зрения наблюдателя, смотрящего навстречу световому лучу, конец электрического вектора описывает эллипс, двигаясь по часовой стрелке. В случае, если вектор движется против часовой стрелки, поляризация называется левой. В двух частных случаях эллипс вырождается в окружность или в прямую линию.

Линейная поляризация.

При условии $\delta = m\pi$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ $E_y = E_x (-1)^m a_2/a_1$ эллипс вырождается в прямую линию. В этом случае возникает *линейная поляризация*. Одну из декартовых осей, например x , можно направить вдоль этой прямой и остается только одна из компонент электрического поля E_x . При этом вектор индукции оказывается линейно поляризованным вдоль оси y .

Круговая поляризация.

При условиях $\delta = m\pi/2$, $a_1 = a_2 = a$ уравнение (10.10) переходит в уравнение окружности $E_x^2 + E_y^2 = a^2$ и возникает *круговая поляризация*. При этом, если $\sin \delta > 0$ -поляризация называется *правой*, а для $\sin \delta < 0$ — *левой*.

Если вместо вещественного описания компонент поля используется комплексное (экспонента вместо косинусов), то

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{a_2}{a_1} \exp [i(\delta_2 - \delta_1)] = \frac{a_2}{a_1} \exp (i\delta).$$

Из значения этого отношения также можно определить тип поляризации. Так линейная поляризация возникает при $\delta = m\pi$, правая круговая поляризация при $a_1 = a_2$, $\delta = \pi/2$, а левая круговая поляризация при $a_1 = a_2$, $\delta = -\pi/2$.

§2 Рассеяние электромагнитных волн

При взаимодействии переменного электромагнитного поля с зарядами на заряды со стороны поля действует переменная во времени сила. Под действием поля заряды начинают двигаться с ускорением и, следовательно, излучают электромагнитное поле. В результате при взаимодействии переменного поля с зарядами происходит преобразование первичного поля в поле излучаемое зарядами. Так как угловое распределение излучения, в общем случае отлично от нуля по всем направлениям, происходит преобразование первичного поля в поле вынужденного излучения зарядов. Такой процесс называется *рассеянием электромагнитного поля* на зарядах. Заряды могут находиться как в свободном так и в связанном состояниях, например в атомах, молекулах или ядрах.

Рассеяние на осцилляторе.

Рассмотрим процесс рассеяния электромагнитных волн на заряженном линейном гармоническом осцилляторе. Такая система является моделью связанного заряда.

Пусть плоская монохроматическая, линейно поляризованная электромагнитная волна частоты ω падает на осциллятор. Уравнение движения заряда в этом случае, с учетом силы реакции излучения (8.34), имеет вид:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\mathbf{a}} + e \mathbf{E} \exp(i\omega t) + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B} \exp(i\omega t)].$$

Здесь $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ — скорость, а $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$ — ускорение частицы, \mathbf{E} и \mathbf{B} — пространственные составляющие векторов напряженности и индукции поля, соответственно. Кроме того для сокращения использована комплексная форма записи для напряженности поля. Это означает, что в окончательных выражениях необходимо оставить только действительную часть найденного решения. Учитывая малость силы реакции излучения, можно записать приближенно $\dot{\mathbf{a}} \approx -\omega_0^2 \mathbf{r}$, где $\omega_0^2 = k/m$ — собственная частота осциллятора. В плоской электромагнитной волне $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$, поэтому для случая движения частицы со скоростью $v \ll c$ магнитной составляющей силы Лоренца можно пренебречь. Таким образом, уравнение движения заряда под действием переменного электрического поля, с учетом сформулированных приближений, имеет вид:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} + \gamma \dot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m} \mathbf{E} \exp(i\omega t); \quad \gamma \equiv \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^2}{mc^3}. \quad (10.11)$$

В случае, когда длина волны падающего на осциллятор поля велика по сравнению с амплитудой колебаний осциллятора, можно пренебречь зависимостью \mathbf{E} от координат. Полагая в этом случае $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \exp(i\omega t)$, частное решение уравнения (10.11) можно представить в виде:

$$\mathbf{r} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \frac{e}{m} \mathbf{E} \exp(i\omega t). \quad (10.12)$$

В соответствии с выражением (10.12) интенсивность излучения, рассеянного внутри телесного угла $d\Omega$ на основании (8.23) может быть представлена в виде:

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3} [\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{n}]^2 d\Omega = \frac{e^4 \omega^4 E^2}{4\pi m^2 c^3} \frac{\sin^2 \alpha}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \cos^2(\omega t - \delta) d\Omega,$$

где $\delta = \arctg[\gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)]$, \mathbf{n} -единичный радиус вектор в направлении точки наблюдения, α -угол между вектором электрического поля (вектором поляризации) и направлением радиус вектора точки наблюдения.

Средняя за период T интенсивность излучения равна:

$$\langle dI \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dI dt = r_0^2 I_0 \frac{\omega^4 \sin^2 \alpha}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} d\Omega. \quad (10.13)$$

Здесь $r_0 = e^2/mc^2$ -классический радиус электрона, $I_0 = cE^2/4\pi$.

Сечение рассеяния.

Процесс рассеяния электромагнитного поля принято характеризовать дифференциальным сечением рассеяния $d\sigma$, которое определяется как отношение интенсивности рассеянного внутрь телесного угла $d\Omega$ излучения dI к интенсивности падающего излучения I_0 .

$$d\sigma = \frac{dI}{I_0}. \quad (10.14)$$

Интенсивность падающего излучения определяется модулем вектора Умова- Пойнтинга S . Так в случае плоской волны $|\mathbf{S}| = cE^2/4\pi = I_0$.

В соответствии с определением размерность сечения рассеяния совпадает с размерностью площади.

Сечение рассеяния на осцилляторе.

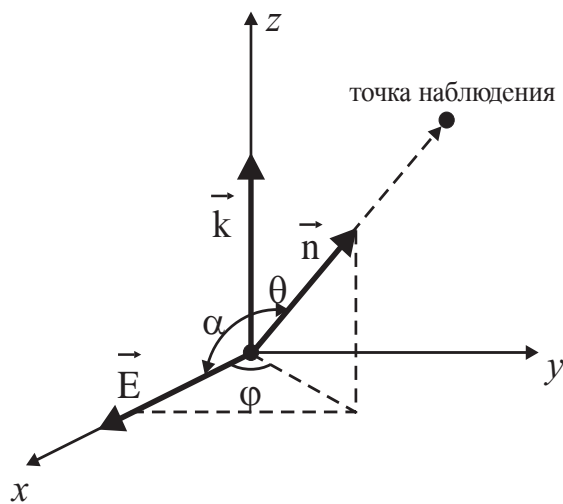


Рис. 10.2:

Для дифференциального сечения рассеяния электромагнитного поля на осцилляторе на основании (10.14), (10.13) получим:

$$d\sigma = r_0 \frac{\omega^4 \sin^2 \alpha}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} d\Omega. \quad (10.15)$$

Если выбрать сферическую систему координат, в которой ось z направлена по вектору распространения электромагнитного поля \mathbf{k} , а ось x вдоль направления вектора \mathbf{E} (см. рис. 10.2) то с

использованием угловых переменных θ, φ выбранной сферической системы координат проекция вектора \mathbf{n} на направление вектора \mathbf{E} равна $\sin \theta \cos \varphi$.

С другой стороны, по определению, $\cos \alpha$ - есть проекция вектора \mathbf{n} на направление вектора \mathbf{E} . По этой причине выражение (10.15) можно переписать с использованием переменных сферической системы координат в виде

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \quad (10.16)$$

Практически часто необходимо знать сечение рассеяния неполяризованного излучения. Это приводит к процессу усреднения выражения (10.15) по возможным направлениям поляризации. В сферической системе координат усреднение сечения выражается усреднением по всем значениям азимутального угла φ . Учитывая, что среднее значение по φ дает $\langle \cos^2 \varphi \rangle = 1/2$, на основании (10.16) имеем:

$$\langle \sin^2 \alpha \rangle = \langle 1 - \cos^2 \alpha \rangle = \langle 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \rangle = 1 - \frac{\sin^2 \theta}{2} = \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}.$$

Полученное выражение показывает, что максимальная величина интенсивности излучения приходится на значение углов $\theta = 0$, $\theta = \pi$, то есть в направлении падающего излучения и в противоположном направлении.

Полное сечение рассеяния.

Интеграл от дифференциального сечения по всем направлениям вектора \mathbf{n} дает величину, получившую наименование полного сечения рассеяния. Так интегрируя (10.15) по всем направлениям телесного угла получим полное сечение рассеяния неполяризованного излучения на осцилляторе:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}. \quad (10.17)$$

Данная формула носит название дисперсионной формулы классической электродинамики. Формула (10.17) имеет весьма общий характер и по форме совпадает с результатом, который получается в квантовой механике.

При малых частотах $\omega \ll \omega_0$, когда частота переменного поля много меньше собственной частоты осциллятора, выражение (10.17) имеет вид:

$$\sigma \approx \frac{8\pi}{3} r_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4.$$

Формула Томсона.

При больших частотах $\omega \gg \omega_0$ формула (10.17) переходит в формулу Томсона, полученную для сечения рассеяния электромагнитного поля на

свободном заряде

$$\sigma \approx \frac{8\pi}{3} r_0^2.$$

В этом случае полное сечение оказывается постоянным и не зависит ни от частоты рассеиваемого излучения, ни от свойств осциллятора. В соответствии с универсальной формулой Томсона сечение определяется "классическим радиусом" электрона и описывает рассеяние излучения электронами любых атомных и молекулярных систем. Например, при рассеянии излучения электронами входящими в состав атома, если энергия взаимодействия электрона с полем много больше энергии взаимодействия электронов атома с ядром. При этом рассеяние излучения частицами входящими в состав ядра можно пренебречь, так как сечение рассеяния обратно пропорционально квадрату массы частицы — рассеивателя.

§3 Электромагнитные волны в однородных изотропных средах

Свойства однородной изотропной среды определяются диэлектрической проницаемостью ϵ , магнитной проницаемостью μ и удельной проводимостью σ . Материальные уравнения в этом случае имеют примитивный вид: $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. Учитывая, что при наличии проводимости объемная плотность заряда в проводящей среде равна нулю, уравнения Максвелла в этом случае имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (10.18)$$

Волновое уравнение в однородной изотропной среде.

Вычисляя ротор от законов электромагнитной индукции Фарадея и от обобщенного закона Ампера с учетом уравнений (10.18) найдем волновые уравнения для определения векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Если искать решения данных уравнений в виде монохроматических волн частоты ω , то есть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)$, то вместо последних уравнений получим:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0, \quad k \equiv \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu - i \frac{4\pi \sigma \mu}{\omega}}, \quad (10.19)$$

где k - величина комплексного волнового вектора, который удобно представить в виде: $k = k_0(n - i\kappa)$. Здесь $k_0 = \omega/c$, а n и κ называются коэффициентами преломления и поглощения, соответственно. Определим комплексный волновой вектор равенством $\mathbf{k} = k \mathbf{s}$, где \mathbf{s} - единичный вектор в направлении распространения волны.

Векторы поля в однородной изотропной среде.

В соответствии с решением волновых уравнений (10.19) векторы электромагнитного поля могут быть представлены в виде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}_1 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})], \quad \mathbf{H} = \mathbf{A}_2 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})].$$

Связь между электрическим и магнитным векторами следует из закона электромагнитной индукции Фарадея

$$\text{rot } \mathbf{E} = -i[\mathbf{k} \times \mathbf{E}] = -i \frac{\omega}{c} \sqrt{n^2 + \kappa^2} [\mathbf{s} \times \mathbf{E}] \exp\left(-i \arctg \frac{\kappa}{n}\right).$$

Отсюда находим

$$\mathbf{B} = \sqrt{n^2 + \kappa^2} [\mathbf{s} \times \mathbf{E}] \exp(-i \arctg \kappa/n). \quad (10.20)$$

Коэффициенты затухания и преломления.

Как следует из (10.20) в отличие от случая распространения электромагнитных волн в вакууме, амплитуды электрического и магнитных полей отличаются друг от друга. Однако, как и в вакууме, электромагнитные волны в однородной, изотропной среде поперечны, но в среде происходит затухание электромагнитных волн по экспоненциальному закону. Величина затухания определяется параметром κ . Возводя в квадрат равенство

$$\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu - i \frac{4\pi \sigma \mu}{\omega}} = \frac{\omega}{c} (n - i\kappa),$$

найдем явный вид параметров n и κ как функции физических параметров среды и частоты поля:

$$n^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\epsilon^2 \mu^2 + \left(\frac{4\pi \sigma \mu}{\omega} \right)^2} + \epsilon \mu \right\}, \quad \kappa^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\epsilon^2 \mu^2 + \left(\frac{4\pi \sigma \mu}{\omega} \right)^2} - \epsilon \mu \right\}.$$

Представленные формулы определяют закон дисперсии в среде с проводимостью. Знаки корней выбираются из условия, чтобы n и κ являлись действительными функциями и, чтобы параметр κ , характеризующий условия затухания поля был положительно определенной величиной.

Рассмотрим предельные случаи полученных выражений для n и κ . Пусть $\sigma \ll \epsilon\omega/(4\pi)$. В этом случае ток проводимости мал по сравнению с током смещения, что имеет место в идеальном диэлектрике, и представленные выражения упрощаются:

$$n \approx \sqrt{\epsilon\mu}, \quad \kappa \approx 2\pi \frac{\sigma}{\omega} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}.$$

Это означает, что $n \gg \kappa$. Если полностью пренебречь величиной κ , то такую среду принято называть прозрачной, так как в ней происходит распространение электромагнитной волны без затухания. В такой среде

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})], \quad \mathbf{B} = \sqrt{\epsilon\mu} \mathbf{A} \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})], \quad \mathbf{k} = \frac{\omega}{v} \mathbf{s},$$

где v – фазовая скорость распространения волны равная $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$. Отсюда понятен смысл наименования коэффициента n как показателя преломления, так как в классической оптике показателем преломления называется отношение скоростей света в вакууме и среде $n = c/v = \sqrt{\epsilon\mu}$.

Таким образом электромагнитные волны в непроводящей среде отличаются от волн в вакууме только скоростью распространения, которая в среде меньше скорости света в вакууме в n раз. Кроме того амплитуды электрического и магнитного полей различны, а фазы одинаковы. При наличии слабого поглощения фаза магнитного поля отстает от фазы электрического поля на величину $\arctg(\kappa/n)$.

В обратном предельном случае, когда ток проводимости много больше тока смещения находим:

$$n \approx \kappa \approx \sqrt{\frac{2\pi \sigma \mu}{\omega}}.$$

В этом случае происходит сильное поглощение электромагнитного поля на небольших расстояниях и о распространении волны можно говорить только условно.

§4 Электромагнитные волны в анизотропных средах

Система уравнений Максвелла для описания поля в анизотропной среде без зарядов и токов имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (10.21)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — векторы напряженности электрического и магнитного поля, соответственно, а \mathbf{D} и \mathbf{B} — векторы индукции. Рассмотрим для простоты описание поля в электрически анизотропной среде, предполагая, что в отношении магнитных свойств среда однородна и изотропна. Магнитная анизотропия может быть учтена в дальнейшем аналогично учету электрической анизотропии. В электрически анизотропной среде вектор \mathbf{D} , вообще говоря, не параллелен вектору \mathbf{E} . Так материальное уравнение связывающее компоненты обоих векторов имеет вид:

$$D_k = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ki} E_i, \quad k = 1, 2, 3. \quad (10.22)$$

Тензор диэлектрической проницаемости

Девять величин ε_{ik} характеризуют свойства среды и образуют *тензор диэлектрической проницаемости*. Исходя из рассмотрения плотности энергии в среде [10] можно установить, что тензор ε_{ik} симметричен. В свою очередь симметричность тензора позволяет привести выражение для электрической энергии к форме при которой сохраняются лишь квадраты компонент поля и отсутствуют их произведения. Это означает, что существует такая система координат, связанная с анизотропной средой, в которой материальные уравнения и выражение для плотности электрической энергии принимают максимально простую функциональную форму:

$$D_k = \varepsilon_k E_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (10.23)$$

$$\omega_e = \frac{1}{8\pi} \sum_{i=1}^3 E_i^2 = \frac{1}{8\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\varepsilon_i} D_i^2. \quad (10.24)$$

Такая система называется *системой главных диэлектрических осей*, а коэффициенты ε_i — *главными диэлектрическими проницаемостями*.

В кристаллах моноклинной и триклинной систем может возникать явление, которое называется *дисперсией осей*. Данное явление состоит в изменении значений главных диэлектрических проницаемостей и направлений осей в зависимости от частоты поля. Однако при рассмотрении монохроматических волн, о которых будет идти речь ниже, явление дисперсии можно не учитывать.

Таким образом, в анизотропной среде энергия, вообще говоря, распространяется не в направлении нормали к волне. При этом плотность электрической W_e и магнитной W_m энергий равны между собой в силу известных свойств смешанного произведения:

$$w_e = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{8\pi} = -\frac{n}{8\pi} \mathbf{E} \cdot [\mathbf{s} \times \mathbf{H}], \quad w_m = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{8\pi} = \frac{n}{8\pi} \mathbf{H} \cdot [\mathbf{s} \times \mathbf{E}]. \quad (10.27)$$

Поэтому плотность энергии определяется выражением

$$\omega = w_e + w_m = \frac{n}{c} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{s}). \quad (10.28)$$

Лучевая скорость

Описанная структура поля устанавливает различие между фазовой скоростью, направление которой совпадает с \mathbf{s} и скоростью распространения энергии, которая называется *лучевой скоростью* и совпадает с направлением вектора $\vec{\tau}$. Величина лучевой скорости v_τ определяется отношением плотности потока энергии $|\mathbf{S}|$ через единичную площадку перпендикулярную потоку к энергии единицы объема

$$v_\tau \equiv \frac{S}{\omega}.$$

В результате связь лучевой и фазовой скорости устанавливается соотношением

$$v_p = v_\tau (\vec{\tau} \cdot \mathbf{s}) = v_\tau \cos \alpha.$$

Формулы Френеля

Используя главные диэлектрические оси, соотношение (10.26) примет следующий вид:

$$\mu \varepsilon_k E_k = n^2 [E_k - s_k (\mathbf{E} \cdot \mathbf{s})], \quad k \in 1, 2, 3. \quad (10.29)$$

Данное уравнение представляет собой систему трех линейных однородных уравнений для E_k допускающую нетривиальное решение при равенстве нулю определителя системы. Это означает, что между показателем преломления n , компонентами вектора \mathbf{s} и главными диэлектрическими проницаемостями ε_k выполняется следующее соотношение вытекающее из (10.29)

$$E_k = n^2 s_k \frac{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E})}{n^2 - \mu \varepsilon_k}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (10.30)$$

Умножив полученное равенство на s_k , просуммировав результат по k от 1 до 3 и разделив на общий множитель $(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E})$ получим

$$n^2 \sum_{k=1}^3 \frac{s_k^2}{n^2 - \mu \varepsilon_k} = 1. \quad (10.31)$$

Вычтем из полученного равенства величину равную единице $\sum_k s_k^2 = 1$ и умножим полученный результат на $-n^2$. В результате:

$$\sum_{k=1}^3 \frac{s_k^2}{1/n^2 - 1/(\mu \varepsilon_k)} = 0. \quad (10.32)$$

Введем три *главные скорости распространения* по следующему определению:

$$v_k \equiv \frac{c}{\sqrt{\mu \varepsilon_k}}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Окончательно с учетом определения фазовой скорости выражения (10.30), (10.32) принимают вид:

$$E_k = \frac{v_k^2}{v_k^2 - v_p^2} s_k (\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}), \quad k = 1, 2, 3; \quad (10.33)$$

$$\sum_{k=1}^3 \frac{s_k^2}{v_p^2 - v_k^2} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (10.34)$$

Уравнения (10.31), (10.33), (10.34) являются эквивалентными формулами *уравнения волновых нормалей Френеля*. В силу того что уравнение Френеля квадратично относительно v_p^2 каждому направлению вектора \mathbf{s} соответствуют две фазовые скорости v_p . Для каждого из двух значений v_p из (10.33) можно определить отношения $E_x : E_y : E_z$ и на их основании отношение $D_x : D_y : D_z$. Так как эти отношения вещественны поля \mathbf{E} и \mathbf{D} линейно поляризованы. *Таким образом в анизотропной среде допускается распространение двух монохроматических, плоских, линейно поляризованных волн с различными скоростями.* Аналогичную формулу можно вывести и для лучевой скорости [10].

Так как каждому вектору \mathbf{s} , в общем случае, соответствует две фазовые скорости v_p , то для каждого направления нормали имеется два направления луча.

§5 Отражение и преломление плоской волны

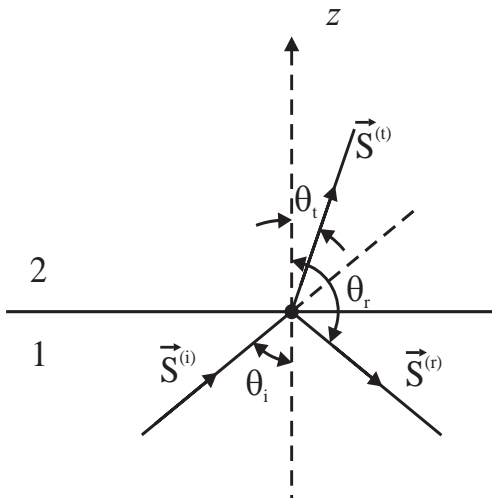


Рис. 10.4:

Если на границу раздела двух однородных сред падает плоская волна, то, в общем случае, она разделяется на две волны – отраженную от границы раздела и прошедшую во вторую среду. Существование двух волн вытекает из граничных условий, которым удовлетворяют векторы поля на границе раздела двух сред. Эти условия не удается выполнить, если не допустить возможность существования этих двух типов волн. Из общих соображений можно предположить, что образующиеся волны также как и

падающая являются плоскими.

Одно из важных свойств плоской волны состоит в том, что волна полностью определена, если известно поведение волны во времени хотя бы в одной точке пространства. Действительно, если $\mathbf{E}(t)$ представляет собой зависимость напряженности поля от времени в некоторой точке, то эта зависимость в другой точке, отстоящей от заданной на \mathbf{r} , будет $\mathbf{E}(t - \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}/v)$, где \mathbf{s} – единичный вектор в направлении распространения волны.

На границе раздела двух сред вторичные поля будут также изменяться во времени, как и первичное поле падающей волны. Обозначим через $\mathbf{s}^{(i)}$, $\mathbf{s}^{(r)}$, $\mathbf{s}^{(t)}$ единичные векторы в направлении распространения падающей, отраженной и прошедшей волн, соответственно (рис. 10.4). В соответствии с изложенными выше предположениями, приравнивая аргументы трех функций в точке \mathbf{r} на границе раздела двух сред $z = 0$ должны выполняться равенства [10]:

$$t - \frac{\mathbf{s}^{(i)} \cdot \mathbf{r}}{v_1} = t - \frac{\mathbf{s}^{(r)} \cdot \mathbf{r}}{v_1} = t - \frac{\mathbf{s}^{(t)} \cdot \mathbf{r}}{v_2}, \quad (10.35)$$

где v_1 и v_2 – скорости распространения электромагнитного поля в первой и второй средах. В данном случае первой средой выбрана среда, в которой находится первичная падающая волна.

Если граница раздела двух сред находится в плоскости $z = 0$, тогда компоненты вектора $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ и на основании (10.35) можно установить ра-

венства

$$\frac{x s_x^{(i)} + y s_y^{(i)}}{v_1} = \frac{x s_x^{(r)} + y s_y^{(r)}}{v_1} = \frac{x s_x^{(t)} + y s_y^{(t)}}{v_2}. \quad (10.36)$$

Так равенство (10.36) должно выполняться в любой точке поверхности на границе раздела, имеют место следующие соотношения:

$$\frac{s_x^{(i)}}{v_1} = \frac{s_x^{(r)}}{v_1} = \frac{s_x^{(t)}}{v_2}; \quad \frac{s_y^{(i)}}{v_1} = \frac{s_y^{(r)}}{v_1} = \frac{s_y^{(t)}}{v_2}. \quad (10.37)$$

Плоскость, определяемая вектором $\mathbf{s}^{(i)}$ и вектором нормали к границе раздела называется плоскостью падения. Соотношения (10.37) показывают, что векторы $\mathbf{s}^{(r)}$ и $\mathbf{s}^{(t)}$ также лежат в плоскости падения. Выберем, для определенности, плоскостью падения плоскость xz и обозначим через $\theta_i, \theta_r, \theta_t$ — углы, которые образуют единичные векторы \mathbf{s} падающей, отраженной и преломленной волн с положительным направлением оси z (предполагается, что ось z направлена из первой среды во вторую). В этом случае

$$s_x^{(j)} = \sin \theta_j; \quad s_y^{(j)} = 0; \quad s_z^{(j)} = \cos \theta_j; \quad j \in i, r, t. \quad (10.38)$$

Законы отражения.

Подставляя соотношения (10.38) в первую систему равенств (10.37), находим:

$$\frac{\sin \theta_i}{v_1} = \frac{\sin \theta_r}{v_1} = \frac{\sin \theta_t}{v_2}. \quad (10.39)$$

Отсюда вытекает, что синус угла падения равен синусу угла отражения. И так как $\cos \theta_r \leq 0$, найдем, что $\cos \theta_r = -\cos \theta_i$ и следовательно $\theta_r = \pi - \theta_i$. Данные утверждения составляют закон отражения.

Законы преломления.

На основании (10.39) найдем также, что:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}.$$

Данное соотношение вместе с утверждением о том, что вектор прошедшей волны лежит в плоскости падения составляет закон преломления или закон Снеллиуса. Если $n_{12} > 1$ то

$$\sin \theta_t = \frac{1}{n_{12}} \sin \theta_i < \sin \theta_i,$$

то есть для каждого угла падения существует вещественный угол преломления. Однако, если вторая среда менее плотна, чем первая ($n_{12} < 1$), то вещественное значение угла прохождения получается лишь для таких углов падения, для которых $\sin \theta_i \leq n_{12}$. Для больших значений углов падения имеет место полное внутреннее отражение.

Формулы Френеля.

Рассмотрение вопроса о связи амплитуд полей в процессе отражения или преломления основано на граничных условиях. Разлагая каждый вектор на компоненты -параллельную границе раздела A_{\parallel} и перпендикулярную A_{\perp} , а также обозначая амплитуду вектора электрического поля падающей волны буквой A , отраженной волны буквой R и прошедшей волны буквой T , можно установить формулы, которые *называются формулами Френеля* [10]

$$T_{\parallel} = \frac{2 \sin \theta_t \sin \theta_i}{\sin (\theta_i + \theta_t) \cos (\theta_i - \theta_t)} A_{\parallel}, \quad T_{\perp} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin (\theta_i + \theta_t)} A_{\perp},$$

$$R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg} (\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg} (\theta_i + \theta_t)} A_{\parallel}, \quad R_{\perp} = -\frac{\sin (\theta_i - \theta_t)}{\sin (\theta_i + \theta_t)} A_{\perp}.$$

Впервые эти соотношения были получены Френелем в 1823 году на основе теории, рассматривавшей свет как колебания упругой среды. Для нормального падения $\theta_i = 0 = \theta_t$ и формулы Френеля имеют вид:

$$T_{\parallel} = \frac{2}{n+1} A_{\parallel}, \quad T_{\perp} = \frac{2}{n+1} A_{\perp}, \quad R_{\parallel} = \frac{n-1}{n+1} A_{\parallel}, \quad R_{\perp} = -\frac{n-1}{n+1} A_{\perp},$$

где $n = n_2/n_1$.

Давление излучения.

Вопросы связанные с преломлением и отражением на поверхности металла относятся к специальному разделу - металлооптика. По сути такая задача решается на основе рассмотренного подхода с той лишь разницей, что показатель преломления в этом случае становится комплексным и требуется уточнение некоторых понятий и определений [10]. Рассмотрим, в этой связи, только вопрос об оценке величины давления, которое оказывает электромагнитное поле при нормальном падении на проводник.

Под действием поля вблизи поверхности проводника возникает плотность электрического тока равная $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. В соответствии с определением силы Лоренца на бесконечно малый элемент объема dv действует бесконеч-

но малая сила равная

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{c}[\mathbf{j} \times \mathbf{B}] dv = \frac{1}{c}jB \mathbf{n} dv = \frac{1}{c}jE \mathbf{n} dv = \frac{1}{c} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \mathbf{n}. \quad (10.40)$$

Здесь сделано предположение, что в волне $E = B$ и произведение $jE dv$ определяет изменение энергии в единицу времени внутри dv в соответствии с законом сохранения энергии в дифференциальной форме, \mathbf{n} - единичный вектор в направлении распространения волны.

Рассмотрим бесконечно малую площадку ds на поверхности металла. За время dt через эту площадку в проводник поступит энергия равная $c dt ds w$, где $w = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})/8\pi$ - энергия единицы объема электромагнитного поля. Соответственно за единицу времени поступит энергия $c w ds$. В результате, на основании (10.40), силу действующую на бесконечно малый объем проводника можно представить в виде: $d\mathbf{F} = \mathbf{n} w ds$. Таким образом можно сказать, что на поверхности проводника возникает давление (сила на единицу поверхности), равное:

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{F}}{ds} = w \mathbf{n} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{8\pi} \mathbf{n}.$$

Данный результат соответствует случаю, когда все электромагнитное поле поглощается проводником. В общем случае можно ввести коэффициент отражения $0 \leq k \leq 1$, который будет определять какая доля энергии поля отражается от поверхности. При $k = 0$ вся энергия поглощается проводником, при $k = 1$ - вся энергия поля отражается от проводника (идеальное зеркало). В общем случае величина давления поля на поверхность проводника равна

$$\mathbf{p} = (1 + k) w \mathbf{n}; \quad w = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{8\pi}.$$

§6 Распространение энергии электромагнитного поля вдоль линий передач.

Линиями передач являются устройства, позволяющие направлено передавать энергию электромагнитного поля из одной области пространства в другую. Примерами таких устройств являются проводники электрического тока, кабели, волноводы и т.п.

Плотность потока энергии электромагнитного поля, в общем случае, определяется вектором Умова-Пойнтинга:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]. \quad (10.41)$$

Исследование данного вектора в различных устройствах, служащих целям передачи энергии электромагнитного поля, позволяет установить физические процессы, сопровождающие процесс передачи энергии.

Цилиндрический проводник.

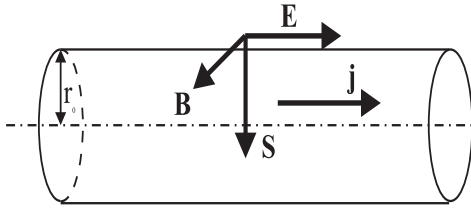


Рис. 10.5:

Рассмотрим для примера длинный цилиндрический прямой проводник с радиусом сечения r_0 , вдоль которого течет постоянный ток с плотностью \mathbf{j} . (см. рис. 10.5) При отсутствии сторонних сил, плотность тока внутри такого проводника равна: $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ и равномерно распределена по сечению проводника. Следовательно напряженность поля, поддерживающая этот постоянный ток есть: $\mathbf{E} = \mathbf{j}/\sigma$.

Вектор касательной к проводнику и направление плотности тока в данном случае совпадают. Вследствие непрерывности тангенциальных составляющих напряженности электрического поля ($E_{1\tau} = E_{2\tau}$) на границе раздела проводник-вакуум и отсутствием нормальных к границе раздела составляющих напряженности поля внутри проводника, такое же поле \mathbf{j}/σ существует вблизи поверхности с внешней стороны проводника. Индукция магнитного поля \mathbf{B} вблизи поверхности и с внешней и с внутренней стороны проводника перпендикулярна вектору плотности тока \mathbf{j} и направлена по касательной к окружности, соосной с осью проводника. На поверхности проводника величина вектора индукции ортогональна вектору напряженности электрического поля и определяется в соответствии с равенствами:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}, \quad 2\pi r_0 B = \pi r_0^2 \frac{4\pi}{c} j, \quad B = \frac{2\pi j r_0}{c}.$$

Таким образом, на внешней поверхности проводника вектор Пойнтинга направлен по радиусу проводника к его центру и равен:

$$S = \frac{c}{4\pi} E B \sin 90^\circ = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{\sigma} j \frac{2\pi j r_0}{c} = \frac{j^2}{2\sigma} r_0.$$

Это означает, что внутрь проводника втекает энергия электромагнитного поля, которое создается постоянным током. Следовательно на участке проводника длиной l за единицу времени в проводник втекает энергия ε равная:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = S (2\pi r_0 l) = \frac{j^2}{2\sigma} r_0 (2\pi r_0 l) = \frac{1}{\sigma} j^2 \pi r_0^2 l = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) V, \quad (10.42)$$

где V -объем линейного цилиндрического проводника длины l .

Закон Джоуля - Ленца.

Закон сохранения энергии в системе заряды-поле означает, что работа, совершаемая полем над зарядами, производится либо за счет уменьшения энергии поля, либо за счет притока энергии в систему извне.

Покажем, что вся втекающая в проводник энергия электромагнитного поля в этом тривиальном примере тратится на нагревание проводника. В соответствии с законом Джоуля-Ленца количество теплоты Q , которое выделяется в единицу времени в линейном проводнике с сопротивлением R , по которому протекает ток I равно $Q = R I^2$. Применив этот закон к бесконечно малому цилиндру высоты dl с поперечным сечением ds , ось которого совпадает с направлением тока I получим $dQ = (j ds)^2 (dl / (\sigma ds))$. Таким образом, количество теплоты q , которое выделяется в единице объема проводника в единицу времени равно

$$q = j^2 / \sigma = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}).$$

Последнее равенство называется законом Джоуля-Ленца в дифференциальной форме. Сравнивая это выражение с выражением для энергии втекающей в проводник (10.42) нетрудно убедиться в справедливости высказанного выше предположения. Следовательно, при прохождении электрического тока вся выделяемая в виде теплоты энергия поступает в проводник из окружающего пространства.

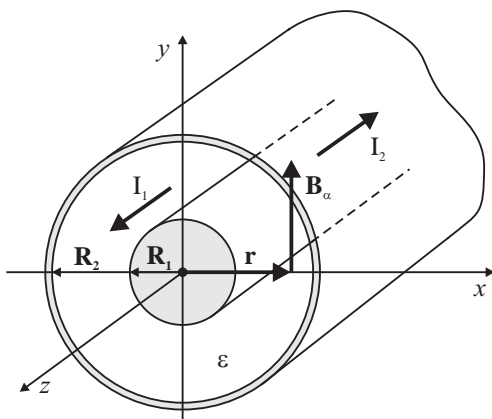


Рис. 10.6:

Данный пример подсказывает, что в общем случае энергия передаваемая током по проводам, движется в пространстве, окружающем провода, т.е. провода играют роль направляющих, вдоль которых распространяется энергия.

Кабель без сопротивления.

Рассмотрим процесс передачи энергии от источника к потребителю с помощью кабеля. Кабель можно рассматривать как два соосных цилиндрических проводника, пространство между которыми заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ (10.6). Эти два проводника состоят из центрального провода и цилиндрической оболочки. По этим проводникам направление тока противоположно.

Поле в кабеле.

В пространстве между проводниками возникает и магнитное, и электрическое поле. Структура магнитного поля аналогична полю линейного проводника - линии индукции образуют концентрические окружности в плоскости ортогональной оси кабеля. Величина вектора магнитной индукции внутри кабеля для $r > R_1$ определяется выражением: $2\pi r B_\alpha = 4\pi I/c$ или $B_\alpha = 2I/cr$. Во внешней области поле отсутствует.

Для описания структуры электрического поля для простоты будем считать, что кабель не обладает сопротивлением и не имеет потерь по длине кабеля. Это означает, что разность потенциалов между центральным проводником и оболочкой $\Delta\varphi = \text{const}$ и радиальная составляющая вектора Пойнтинга в цилиндрической системе координат, связанной с осью кабеля, равна нулю. Отсутствие радиальной составляющей вектора плотности потока энергии означает, что проекция вектора напряженности электрического поля на ось кабеля $E_z = 0$. А в силу цилиндрической симметрии системы и $E_\alpha = 0$. Следовательно электрическое поле имеет отличную от нуля только радиальную составляющую, которая удовлетворяет уравнению:

$$\text{div}(\epsilon \mathbf{E}) = \frac{\epsilon}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r E_r) = 0.$$

Решение данного уравнения имеет вид: $E_r = A/r$ при этом константа A определяется разностью потенциалов между центральным проводником и оболочкой:

$$\Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = A \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = A \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Таким образом напряженность электрического поля имеет только одну радиальную составляющую, равную:

$$E_r = \frac{\Delta\varphi}{\ln(R_2/R_1)} \frac{1}{r}.$$

Плотность потока энергии.

С учетом структуры поля, вектор плотности потока энергии в кабеле направлен вдоль оси кабеля и равен:

$$S_z = \frac{c}{4\pi} E_r B_\alpha = \frac{c}{4\pi} \frac{\Delta\varphi I}{\ln(R_2/R_1)} \frac{2}{cr^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta\varphi I}{\ln(R_2/R_1)} \frac{1}{r^2}, \quad (10.43)$$

то есть энергия электромагнитного поля движется вдоль кабеля. Вне кабеля напряженность поля равна нулю, вследствие чего энергия вне кабеля отсутствует. На основании (10.43) выражение для полного потока энергии через поперечное сечение кабеля равно:

$$\int_S S_z d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2\pi \ln(R_2/R_1)} \frac{\Delta\varphi I}{r^2} r dr d\varphi = \Delta\varphi I = UI. \quad (10.44)$$

Известно, что потребляемая мощность P определяется выражением $P = IU$. Это означает, что вся энергия используемая потребителем, движется вдоль кабеля в пространстве между центральным проводником и оболочкой.

Переменный ток.

Для переменного тока, при изменении направления тока на обратное, составляющие поля E_r и B_φ меняют знаки, а направление вектора плотности потока энергии не меняется. Поэтому и для переменного тока энергия в кабеле также направлена к потребителю. Следует отметить, что для высокочастотного переменного тока частоты ω , когда c/ω имеет порядок расстояния между проводами, линия передачи начинает излучать электромагнитную энергию подобно антенне. Кроме того, при очень высоких частотах появляются существенные потери в изоляции проводников, что приводит к некоторым техническим ограничениям возможностей передачи энергии по проводникам. В связи с этим для передачи энергии на больших частотах обычные линии передач неприменимы и необходимо использовать устройства передачи энергии других типов, например волноводы.

§7 Волноводы.

Волноводы представляют собой металлические трубки различной формы и сечения, обычно с неизменной по длине формой поперечного сечения.

Теория распространения электромагнитного поля внутри волноводов основывается на системе уравнений Максвелла и на рассмотрении решений волновых уравнений при наличии граничных условий. Однако вопрос о распространении волн в волноводах существенно отличается от вопроса распространения электромагнитного поля в неограниченном пространстве, так как для волноводов речь идет о распространении электромагнитных волн

внутри ограниченного пространства или о решениях волновых уравнений со сложными граничными условиями.

Прямоугольный волновод.

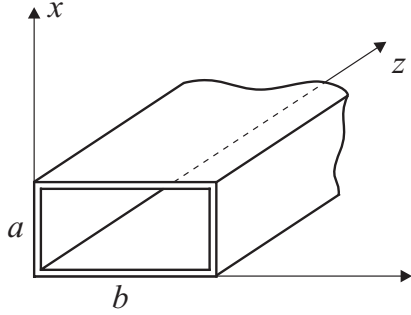


Рис. 10.7:

Рассмотрим для простоты прямоугольный волновод, стенки которого выполнены из идеального проводника. Пусть стороны прямоугольного сечения волновода равны a и b , соответственно. Направим ось Z по оси волновода (рис. 10.7). Так как рассматриваются волны, распространяющиеся вдоль оси волновода, то зависимость всех величин от времени t и координаты z естественно выбрать в виде:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y)e^{i(\omega t - k_z z)}, \quad \mathbf{B}(x, y, z, t) = \mathbf{B}(x, y)e^{i(\omega t - k_z z)}. \quad (10.45)$$

В результате, волновые уравнения $\square \mathbf{E} = 0$, $\square \mathbf{B} = 0$ в декартовой системе координат примут вид:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} = \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{E}; \quad (10.46)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} = \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{B}. \quad (10.47)$$

Эти уравнения, совместно с уравнениями, связывающими электрическое и магнитное поле в волне $\text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}/c$ — закон электромагнитной индукции, $\text{rot } \mathbf{B} = \dot{\mathbf{E}}/c$ — обобщенный закон Ампера (точка над вектором обозначает производную по времени), позволяют найти электромагнитные волны, распространяющиеся в волноводе, при выполнении определенных граничных условий.

Например, поле внутри идеального проводника, как известно, равно нулю, а на внешней поверхности с нормалью \mathbf{n} поле равно $\mathbf{E} = 4\pi\sigma$, где σ — поверхностная плотность заряда.

Из закона электромагнитной индукции и закона Ампера путем подстановки соотношений (10.45) можно выразить компоненты поля через E_z и B_z . Вычисления приводят к следующему результату [9]:

$$E_x = \frac{1}{c^2 k_z^2 - \omega^2} \left(i c^2 k_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + i \omega c \frac{\partial B_z}{\partial y} \right), \quad (10.48)$$

$$E_y = \frac{1}{c^2 k_z^2 - \omega^2} \left(i c^2 k_z \frac{\partial E_z}{\partial y} - i \omega c \frac{\partial B_z}{\partial x} \right), \quad (10.49)$$

$$B_x = \frac{1}{c^2 k_z^2 - \omega^2} \left(i c^2 k_z \frac{\partial B_z}{\partial x} - i \omega c \frac{\partial E_z}{\partial y} \right), \quad (10.50)$$

$$B_y = \frac{1}{c^2 k_z^2 - \omega^2} \left(i c^2 k_z \frac{\partial B_z}{\partial y} + i \omega c \frac{\partial E_z}{\partial x} \right). \quad (10.51)$$

Представленные решения позволяют классифицировать электромагнитное поле внутри волновода на несколько типов.

Типы волн в волноводе.

Если предположить, что в волноводе могут существовать поперечные волны, то есть $E_z = B_z = 0$, тогда из (10.46), (10.47) следует, что компоненты поля равны нулю, если $c^2 k_z^2 \neq \omega^2$. В случае же, если $c^2 k_z^2 = \omega^2$, как это имеет место для плоской монохроматической волны в неограниченном пространстве, то (10.47) приводит к двумерному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} = 0, \quad (10.52)$$

На стенках волновода магнитное поле, в силу граничных условий для идеального проводника направлено по касательной к стенкам волновода, а линии магнитного поля должны иметь характер замкнутых кривых. При этом линии поля не входят в идеальный проводник и, следовательно, не охватывают никаких токов. В поперечной волне продольная компонента плотности тока смещения также отсутствует, так что замкнутые магнитные линии не охватывают и токов смещения.

Однако из теории электромагнитного поля известно, что линии магнитного поля, которые не охватывают никаких токов, существовать не могут. Следовательно, поперечные электромагнитные волны в волноводе распространяться не могут в принципе.

Аналогичный результат следует и из анализа решений уравнения (10.52), так как для двумерного уравнения Лапласа доказано, что единственным решением такой краевой задачи является решение $\mathbf{B} = 0$. Если магнитное поле в волне отсутствует, то очевидно равно нулю и электрическое поле. Представленные здесь рассуждения относятся только к случаю, когда граница стенок волновода является замкнутой. В случае, если граница незамкнута (например имеется щель в стенке волновода), то в таких волноводах возможно распространение поперечных электромагнитных волн.

Отсутствие в волноводах поперечных электромагнитных волн еще не означает, невозможности распространения в них электромагнитного поля. В волноводах могут образовываться продольные волны, которые не могут существовать в неограниченном пространстве. Продольными волнами называются волны, которые имеют отличную от нуля компоненту поля по оси волновода. Для продольных волн в волноводе общепринятой считается следующая их классификация:

1. поперечно-магнитные волны (ТМ-волны; transverse magnetic), определяемые требованиями: $E_z \neq 0$, $B_z = 0$. Решения уравнений (10.46), (10.47) выражаются в этом случае только через E_z ;
2. поперечно-электрические волны (ТЕ-волны; transverse electric), определяемые требованиями: $E_z = 0$, $B_z \neq 0$. Решения уравнений (10.46), (10.47) выражаются в этом случае только через B_z .

В открытых, несвязных волноводах существуют, также поперечные электромагнитные ТЕМ-волны, когда $E_z = 0$, $B_z = 0$, и гибридные волны, когда $E_z \neq 0$, $B_z \neq 0$. Этот случай в настоящем изложении не рассматривается.

Пример.

Рассмотрим для примера волны ТМ типа. Тогда для $E_z(x, y)$ получим уравнение:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_z, \quad (10.53)$$

которое необходимо решить с учетом граничного условия $E_z = 0$ при $x = 0$, $x = a$ и $y = 0$, $y = b$. Остальные компоненты легко определить на основании (10.48)-(10.51). Решение уравнения (10.53), удовлетворяющее сформулированным выше граничным условиям имеет вид:

$$E_z = A \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(\omega t - k_z z)}, \quad (10.54)$$

где $k_x = n\pi/a$, $k_y = m\pi/b$, n, m - любые целые числа не равные нулю. Как видно решение имеет вид бегущей волны в направлении оси волновода и стоячей волны в ортогональной оси волновода плоскости. В соответствии с уравнением (10.53) числа k_x , k_y , k_z связаны общим соотношением:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} - \frac{m^2 \pi^2}{b^2}}. \quad (10.55)$$

Как следует из (10.54) существует бесконечный набор решений для TM волны, соответствующих различным значениям n и m . Такие волны называются модами и обозначаются TM_{nm} волны.

Граничная частота.

Из равенства (10.55) видно, что величина k_z является вещественной только при выполнении следующего условия:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \geq \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2}.$$

и в этом случае действительно вдоль оси волновода распространяется электромагнитная волна. Если это условие не выполняется, то k_z становится мнимой величиной и в соответствии с видом решения для E_z (10.45) получим экспоненциальное затухание поля по оси волновода.

Таким образом, через прямоугольный волновод могут проходить волны только с частотой больше критической частоты ω_0 :

$$\omega_0 = c \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2}}.$$

определяемой параметрами волновода.

Аналогично решается задача для определения поля и условий распространения TE - волны. В этом случае также возникает понятие граничной частоты, ниже которой волны в волноводе не распространяются. Эта частота совпадает с ω_0

§8 Дифракция.

Электромагнитная волна, распространяясь в пространстве встречает различные препятствия, с которыми происходит ее взаимодействие. При различных соотношениях длины волны, геометрических размеров и форм препятствия взаимодействие может выразиться в процессах отражения, преломления, прохождения, рассеяния, поглощения, огибания и т.д. В общем случае взаимодействие препятствия и электромагнитной волны состоит в рассеянии электромагнитной волны препятствием. Изучение явления огибания препятствий электромагнитными волнами и рассеяние волн на геометрических объектах (препятствиях) является задачей теории дифракции.

Тождество Грина.

Для описания явления дифракции электромагнитного поля воспользуемся известным тождеством Грина (которое следует из теоремы Остроградского-Гаусса выбрав в качестве вектора интегрирования вектор $\mathbf{a} = \varphi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \varphi$)

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dv = - \oint_S (\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}) ds. \quad (10.56)$$

Здесь $\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к поверхности S , ограничивающий объем V .

Обычно теорема Грина формулируется для внешней нормали, но в теории дифракции удобнее рассматривать дифференцирование именно вдоль внутренней нормали. Функции φ и ψ в теореме Грина - произвольные дважды дифференцируемые функции.

Пусть функция $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет волновому уравнению:

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -f(\mathbf{r}, t). \quad (10.57)$$

В качестве функции ψ выберем функцию Грина неоднородного волнового уравнения $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (10.58)$$

Функция Грина.

Как следует из уравнения (10.58) функция Грина волнового уравнения зависит только от разности координат $\mathbf{r} - \mathbf{r}' \equiv \mathbf{R}$ и времени $t - t' \equiv \tau$. Для нахождения явного вида функции Грина представим ее в виде интеграла Фурье:

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \int G(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - i\omega \tau} d\mathbf{k} d\omega, \quad (10.59)$$

где $G(\mathbf{k}, \omega)$ - Фурье образ функции Грина. Для дельта-функции Дирака имеем следующее интегральное определение:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - i\omega \tau} d\mathbf{k} d\omega. \quad (10.60)$$

Подставляя выражения (10.59) и (10.60) в (10.58), для $G(\mathbf{k}, \omega)$ получим:

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \omega^2/c^2}.$$

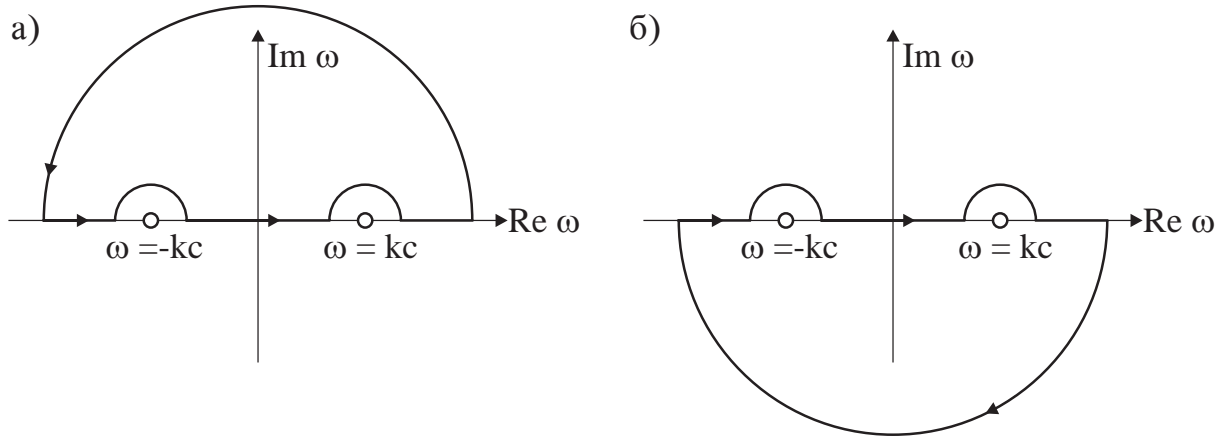


Рис. 10.8:

В результате функция Грина волнового уравнения может быть представлена в виде:

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -\frac{c^2}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - i\omega\tau)}{(\omega - kc)(\omega + kc)}. \quad (10.61)$$

Запаздывающая функция Грина.

Решение (10.61) является сингулярной функцией, так как при интегрировании по ω в точках $\omega = \pm kc$ имеются два полюса. Правила обращения с сингулярными функциями не вытекают только из математических определений. В общей теории сингулярных функций, связанных с волновым уравнением имеется несколько определений типов решений для функции Грина. Один из таких типов решений приводит к определению функции Грина, которая генерирует запаздывающие решения неоднородного волнового уравнения, удовлетворяющие физическому принципу причинности.

Принцип причинности требует, чтобы возмущение пришедшее в некоторую точку от источника возмущения приходило позднее, чем оно было создано в источнике. Такая функция Грина называется запаздывающей функцией Грина волнового уравнения и обозначается G^{ret} . Запаздывающая функция Грина определяется как решение, равное нулю при условии $t - t' = \tau < 0$, то есть $G^{ret}(\mathbf{r}, t < t'; \mathbf{r}', t') = 0$. Для выполнения этого условия необходимо рассматривать интегрирование в (10.61) в комплексной плоскости ω . Учитывая, что знак мнимой экспоненты при ω отрицателен ясно, что для равенства нулю интеграла (10.61) при $\tau < 0$ необходимо обойти полюса сверху и замкнуть контур интегрирования в верхней полуплоскости ω . При этом внутри контура полюсов нет и интеграл оказывается

равным нулю (рис. 10.8.а).

При $\tau > 0$ контур интегрирования замыкается в нижней полуплоскости и внутри контура оказываются два полюса (рис. 10.8.б). На основании теоремы о вычетах, интеграл в этом случае равен сумме вычетов в обоих полюсах, в результате:

$$G^{ret}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{c}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} \sin(kc\tau) \frac{d\mathbf{k}}{k} = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(\tau - R/c)}{R}. \quad (10.62)$$

Здесь $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\tau = t - t' > 0$.

Интеграл Кирхгофа.

Подставим выражения (10.57) и (10.58) в тождество Грина (10.56) и для сокращения записи условимся обозначать набор пространственных переменных и времени одним символом: $\mathbf{r}, t \equiv x$, $\mathbf{r}', t' \equiv x'$. В результате:

$$\begin{aligned} \int_V \left\{ \varphi(x') \left[-\delta(x-x') + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(x, x')}{\partial t'^2} \right] - G(x, x') \left[-f(x') + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(x')}{\partial t'^2} \right] \right\} dv' = \\ = - \oint_S \left[\varphi(x') \frac{\partial G(x, x')}{\partial n'} - G(x, x') \frac{\partial \varphi(x')}{\partial n'} \right] ds' \end{aligned} \quad (10.63)$$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения (10.63) по t' от t_0 до $t_1 > t$:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_V \left\{ \varphi(x') \left[-\delta(x-x') + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(x, x')}{\partial t'^2} \right] - G(x, x') \left[-f(x') + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(x')}{\partial t'^2} \right] \right\} dv' dt' = \\ = - \int_{t_0}^{t_1} \oint_S \left[\varphi(x') \frac{\partial G(x, x')}{\partial n'} - G(x, x') \frac{\partial \varphi(x')}{\partial n'} \right] ds' dt'. \end{aligned} \quad (10.64)$$

Слагаемые, содержащие вторые производные по времени в (10.64) можно преобразовать тождественно следующим образом:

$$\varphi(x') \frac{\partial^2 G(x, x')}{\partial t'^2} - G(x, x') \frac{\partial^2 \varphi(x')}{\partial t'^2} = \frac{\partial}{\partial t'} \left[\varphi(x') \frac{\partial G(x, x')}{\partial t'} - G(x, x') \frac{\partial \varphi(x')}{\partial t'} \right]$$

Выполняя очевидные интегрирования в (10.64) получим:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \int_V G(x, x') f(x') dv' dt' + \frac{1}{c^2} \int_V \left[\varphi(x') \frac{\partial G(x, x')}{\partial t'} - G(x, x') \frac{\partial \varphi(x')}{\partial t'} \right] \Big|_{t_0}^{t_1} dv' + \end{aligned}$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \oint_S \left[\varphi(x') \frac{\partial G(x, x')}{\partial n'} - G(x, x') \frac{\partial \varphi(x')}{\partial n'} \right] ds' dt'.$$

Выберем в качестве функции Грина волнового уравнения запаздывающую функцию Грина. Так, как по определению в интеграле по времени $t_1 > t$, следовательно $G = 0$ и в полученном равенстве остаются только слагаемые на нижнем пределе интегрирования по времени во втором интеграле в правой части равенства. В результате:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) = & \int_{t_0}^{t_1} \int_V G(x, x') f(x') dv' dt' + \frac{1}{c^2} \int_V \left[G(x, x') \frac{\partial \varphi(x')}{\partial t'} - \varphi(x') \frac{\partial G(x, x')}{\partial t'} \right] \Big|_{t'=t_0} dv' + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \oint_S \left[\varphi(x') \frac{\partial G(x, x')}{\partial n'} - G(x, x') \frac{\partial \varphi(x')}{\partial n'} \right] ds' dt'. \end{aligned}$$

Предположим, что внутри рассматриваемого объема нет источников, то есть ($f = 0$) и кроме того в начальный момент времени $\varphi = 0$ и $\partial \varphi / \partial t' = 0$. Это означает, что все поле внутри объема создается за счет возмущения, образующегося на границе. В этом случае поле внутри объема будет определяться выражением:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int_{t_0}^{t_1} dt' \oint_S \left[\varphi(\mathbf{r}', t') \frac{\partial G^{ret}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')}{\partial n'} - G^{ret}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}', t')}{\partial n'} \right] ds'. \quad (10.65)$$

В данном выражении $\frac{\partial}{\partial n'} = \mathbf{n}' \cdot \text{grad}'$, где \mathbf{n}' — единичный вектор внутренней нормали к поверхности S . Подставим явное выражение (10.62) для запаздывающей функции Грина волнового уравнения. Вычисление производной от G^{ret} по направлению нормали приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^{ret}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')}{\partial n'} ds' &= \text{grad}' G^{ret} \cdot \mathbf{n}' ds' = \text{grad}' G^{ret} \cdot ds'. \\ \text{grad}' G^{ret} &= \frac{\partial G^{ret}}{\partial R} \text{grad}' R = -\frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{R}}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\delta(\tau - R/c)}{R} \right] = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{R}}{R} \left[-\frac{\delta(\tau - R/c)}{R^2} - \frac{\dot{\delta}(\tau - R/c)}{c R} \right]. \quad \dot{\delta} \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} \delta\left(\tau - \frac{R}{c}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, при интегрировании (10.65) по t' получим:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int_{t_0}^{t_1} dt' \oint_S \left\{ \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t - t' - R/c)}{R} \text{grad}' \varphi(\mathbf{r}', t') + \right. \\ \left. + \varphi(\mathbf{r}', t') \frac{1}{4\pi R} \left[-\frac{\delta(t - t' - R/c)}{R^2} - \frac{\dot{\delta}(t - t' - R/c)}{cR} \right] \right\} ds'.$$

Или окончательно:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{\text{grad}' \varphi(\mathbf{r}', t')}{R} - \frac{\mathbf{R}}{R^3} \varphi(\mathbf{r}', t') - \frac{\mathbf{R}}{cR^2} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \right] ds', \quad (10.66)$$

где $t' \equiv t - R/c$

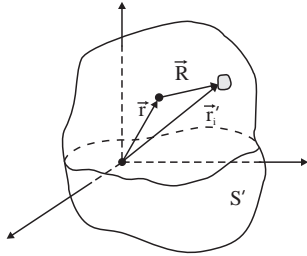


Рис. 10.9:

Интеграл (10.66) называется интегралом Кирхгофа. Функция $\varphi(\mathbf{r}, t)$, входящая в него, не является решением задачи на определение поля, потому что значения φ и $\partial\varphi/\partial n'$ на поверхности S не произвольны, а находятся из решения краевой задачи. Однако, если они известны, то интеграл Кирхгофа дает выражение $\varphi(\mathbf{r}, t)$ в любой точке объема.

Если все величины поля зависят от времени периодически по закону $\exp(i\omega t)$, то общий временной множитель в интеграле Кирхгофа после подстановки $t' = t - R/c$ сократится и для величин, зависящих только от координат, получим:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{e^{-ikR}}{R} \left[\text{grad}' \varphi(\mathbf{r}') - \frac{\mathbf{R}}{R^2} \varphi(\mathbf{r}') - ik \frac{\mathbf{R}}{R} \varphi(\mathbf{r}') \right] ds', \quad (10.67)$$

где $k = \omega/c$, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Таким образом, в соответствии с (10.67) поле в произвольной точке пространства внутри объема ограниченного поверхностью S определяется значением поля φ и его производных на поверхности S (рис. 10.9)

Условие излучения.

Во многих случаях источник рассеянных электромагнитных волн находится в ограниченной области. Сферически расходящаяся волна на больших расстояниях от области рассеяния имеет вид:

$$\varphi \sim \frac{e^{-ikR}}{R}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial R} \sim -\varphi \left(ik + \frac{1}{R} \right) \quad (10.68)$$

Приближение Кирхгофа.

Так как величины φ и $\partial\varphi/\partial n'$ на поверхности не могут задаваться произвольно, а должны быть найдены из решения краевой задачи, то правая часть уравнения (10.69) неизвестна. Поэтому задачи теории дифракции решают в приближении Кирхгофа, которое состоит в следующих двух допущениях:

1. $\varphi = 0$; $\partial\varphi/\partial n' = 0$ на непроницаемых частях экрана;
2. φ и $\partial\varphi/\partial n'$ равны их значениям в падающей волне при отсутствии экранов или препятствий.

В областях длин волн видимого диапазона можно считать $k \gg 1/R$. Имея в виду, что $|\text{grad}' \varphi| \sim k\varphi$, и пренебрегая членами $1/R$, можно привести (10.69) к виду:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{e^{-ikR}}{R} \left(ik \frac{\mathbf{R}}{R} \varphi(\mathbf{r}') - \text{grad}' \varphi(\mathbf{r}') \right) ds. \quad (10.70)$$

Такое приближение называется *оптическим*.

§9 Дифракция Френеля.

Дифракцией Френеля называется такая дифракция, при которой экран освещается пучком параллельных лучей, а плоскость изображений расположена не очень далеко от плоскости экрана. В этом случае

$$\text{grad}' \varphi = -\mathbf{n}\varphi ik$$

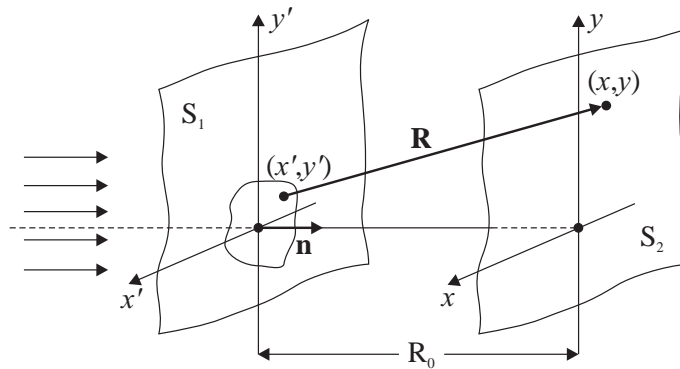


Рис. 10.11:

и (10.70) принимает вид:

$$\varphi(x, y) = \frac{ik}{4\pi} \int_{S_1} \frac{e^{-ikR}}{R} \psi(x', y') \left[\cos(\widehat{\mathbf{R}, \mathbf{n}}) + 1 \right] dx' dy', \quad (10.71)$$

где $(\widehat{\mathbf{R}, \mathbf{n}})$ — угол между \mathbf{R} и \mathbf{n} , причем \mathbf{R} — вектор, направленный из (x', y') в (x, y) ; \mathbf{n} — единичный вектор нормали к S_1 , направленный в сторону плоскости изображения S . Если воспользоваться малостью углов отклонения, а именно $\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \ll R_0$, то получим: $\cos(\widehat{\mathbf{R}, \mathbf{n}}) \approx 1$;

$$R = \sqrt{R_0^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2} \approx R_0 + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2R_0}, \quad (10.72)$$

и при подстановке (10.72) в (10.71) найдем окончательно:

$$\varphi(x, y) = \frac{ik}{2\pi} \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} \int_{S_1} \psi(x', y') \exp \left\{ \frac{-ik[(x - x')^2 + (y - y')^2]}{2R_0} \right\} dx' dy' \quad (10.73)$$

§10 Дифракция Фраунгофера.

В дифракции Фраунгофера предполагается, что размеры объекта много меньше расстояния до источника освещения и расстояния до плоскости наблюдения (или предполагается, что источник и наблюдатель находятся в бесконечности). При этих условиях можно считать, что $\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{R}})$ меняется незначительно и равен $\cos \alpha$, а

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_0^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2} \approx \sqrt{R_0^2 + x^2 + y^2 - 2(xx' + yy')} \approx \\ &\approx r_0 - \frac{x}{r_0}x' - \frac{y}{r_0}y', \end{aligned}$$

где $r_0 = \sqrt{R_0^2 + x^2 + y^2}$, $|x'| \ll |x|$, $|y'| \ll |y|$.

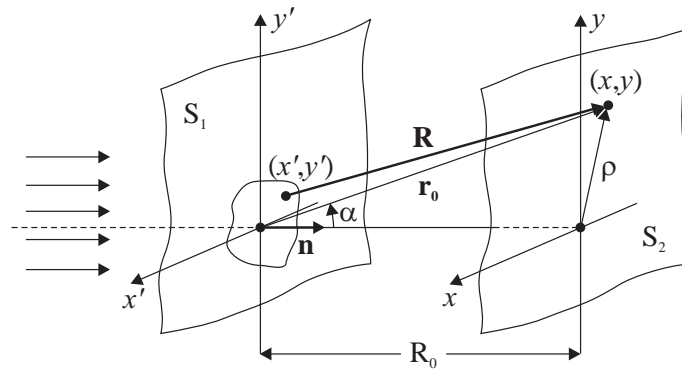


Рис. 10.12:

Для фиксированного значения (x, y) r_0 меняется незначительно и может

считаться константой. Поэтому в указанном приближении получим:

$$\varphi(x, y) = \frac{ik}{4\pi}(1 + \cos \alpha) \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \int_{S_1} \psi(x', y') e^{ik(x x' + y y')/r_0} dx' dy', \quad (10.74)$$

Интеграл (10.74) имеет вид интеграла Фурье, что делает его математически удобным в практических приложениях.

Глава 11

Квазистационарное электромагнитное поле.

§1 Квазистационарное электромагнитное поле

Решение ряда задач электродинамики оказывается достаточным при использовании приближения получившего наименование *приближение квазистационарного поля*. Квазистационарное электромагнитное поле – это частный случай переменного во времени поля изменение которого достаточно медленно и практически такое поле близко к стационарному. Это означает, что изменение поля в какой-то части рассматриваемой системы практически мгновенно передается в любую другую точку системы. Другими словами, в точных решениях можно пренебречь запаздыванием или конечностью скорости распространения поля. Например, решения волновых уравнений для векторного и скалярного потенциалов в приближении пренебрегающем запаздыванием имеют следующий вид:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'; \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'.$$

Следовательно потенциалы в этом приближении являются решением уравнений по форме совпадающих с уравнениями для стационарных полей

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}, t) = -4\pi \rho(\mathbf{r}, t); \quad \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t).$$

Отсюда проистекает и название приближения – поле похожее на стационарное, но зависящее от времени.

Более общее условие возникновения квазистационарного поля формулируется условием

$$|\text{grad } \varphi| \gg \left| \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right| \quad (11.1)$$

В случае рассмотрения поля в хороших проводниках условие квазистационарности сводится к пренебрежению плотностью тока смещения в сравнении с плотностью тока проводимости в системе уравнений Максвелла:

$$\left| \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \right| \gg \left| \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right|; \quad \left| \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} \right| \gg \left| \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|. \quad (11.2)$$

Здесь σ – проводимость вещества, а ε – диэлектрическая проницаемость.

Для однородной изотропной среды и для периодической зависимости поля с частотой ω от времени условие квазистационарности электромагнитного поля можно представить в виде неравенства:

$$\sigma \gg \omega \varepsilon; \quad \omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (11.3)$$

Система уравнений Максвелла в квазистационарном приближении имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho; & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \\ \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}; & \mathbf{H} &= \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}; & \mathbf{j} &= \sigma\mathbf{E}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

В силу того, что объемная плотность заряда в проводнике за короткий промежуток времени исчезает $\rho = \rho_0 \exp(-t/\tau)$, вектор электрической индукции поля в проводнике удовлетворяет уравнению $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$. Поэтому уравнения для определения векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в квазистационарном приближении в однородных изотропных проводниках $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ есть:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0; \quad \nabla^2 \mathbf{H} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0; \quad (11.5)$$

§2 Скин-эффект

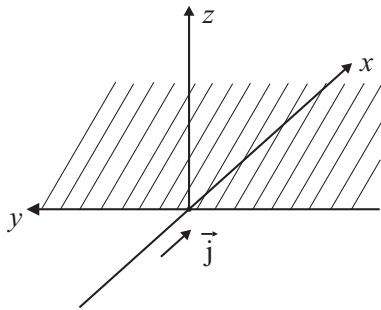


Рис. 11.1:

Явление затухания электромагнитных волн по мере их проникновения вглубь проводника *называется скин-эффектом*.

Описание скин-эффекта в первом приближении можно рассматривать в квазистационарном приближении.

Полубесконечный проводник

Рассмотрим для описания данного явления решение уравнений (11.5) для полубесконечного проводника по которому протекает ток вектор плотности которого направлен вдоль оси x $\mathbf{j} = \mathbf{i} j_x(x, y, z, t)$ (рис. 11.1).

В силу бесконечной симметрии системы по оси y j_x не зависит от переменной y . В соответствии с законом сохранения заряда $\operatorname{div} \mathbf{j} = \partial j_x / \partial x = 0$, поэтому j_x не зависит также и от переменной x . В результате:

$$\mathbf{j} = \mathbf{i} j_x(z, t); \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} = \mathbf{i} E_x(z, t)$$

Пусть, для примера, ток периодически зависит от времени

$$j_x(z, t) = j(z) \exp(i\omega t); \quad E_x(z, t) = E(z) \exp(i\omega t). \quad (11.6)$$

Подставляя (11.6) в (11.5) получим уравнение для $E(z)$:

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} - i \frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2} E(z) = 0$$

Общее решение данного уравнения имеет вид:

$$E(z) = A \exp(ikz) + B \exp(-ikz); \quad (11.7)$$

где A и B произвольные константы, а k равно:

$$k \equiv \sqrt{-i \frac{4\pi}{c^2} \sigma \mu \omega} = \sqrt{\exp(-i \frac{\pi}{2}) \frac{4\pi}{c^2} \sigma \mu \omega} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4\pi}{c^2} \sigma \mu \omega}$$

Толщина скин слоя.

Если ввести обозначение

$$\delta \equiv \frac{c}{\sqrt{2\pi \sigma \mu \omega}}, \quad (11.8)$$

то решение уравнения (11.7) можно переписать следующим образом:

$$E(z) = A \exp \left[-i(1-i) \frac{z}{\delta} \right] + B \exp \left[i(1-i) \frac{z}{\delta} \right]. \quad (11.9)$$

В последнем выражении следует выбрать константу B равной нулю, так как в противном случае в решении появится слагаемое, соответствующее не физическому возрастанию поля на бесконечности от границы раздела. Оставшаяся часть решения показывает, что чем дальше от границы раздела, тем слабее поле и ток, при этом затухание увеличивается экспоненциально с ростом координаты z .

$$E_x(z) = A \exp \left(-i \frac{z}{\delta} \right) \exp \left(-\frac{z}{\delta} \right).$$

Таким образом, поле и ток локализованы в основном в области, имеющей характерный размер δ по оси ортогональной направлению тока и границы раздела.

Принято называть расстояние δ характеризующее размеры области в которой локализуется поле толщиной скин-слоя, а само явление затухание переменного поля и тока внутри скин-слоя - скин-эффектом.

Из закона электромагнитной индукции Фарадея $\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \dot{\mathbf{H}}/c$ следует, что вектор напряженности магнитного поля направлен параллельно оси y и напряженность магнитного поля равна:

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{j} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -i\omega \frac{\mu}{c} \mathbf{H}; \quad |H_y| \approx \frac{c}{\omega \delta} |E_x|.$$

Рассмотренный пример бесконечного проводника, занимающего полпространства выбран в качестве примера для простоты вычислений. Если рассмотреть цилиндрический проводник, то характер заключения не изменится. Также как и в прямолинейной геометрии получится, что поле и ток затухают внутри цилиндрического слоя толщины δ (11.8).

Существенно, что толщина скин-слоя зависит от частоты тока ω . Так например, для медного проводника по которому протекает ток частоты 50 герц $\delta \approx 1$ см. В то же время, если частота тока $\omega \approx 10^5$ герц, то $\delta \approx 10^{-3}$ см.

Очевидно, что в случае постоянного тока $\omega = 0$ и $\delta = \infty$

§3 Система линейных проводников

Закон Ома в дифференциальной форме при наличии источников тока определяется выражением $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_s)$, где \mathbf{E}_s — напряженность сторонних сил. Рассмотрим произвольный контур с током L . В этом случае:

$$\oint_L \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \oint_L \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \varepsilon, \quad (11.10)$$

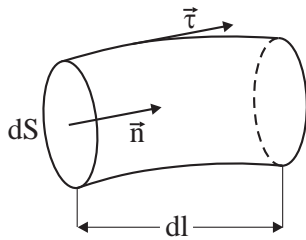


Рис. 11.2:

где ε — электродвижущая сила. Для тонкого проводника, сечение которого ds (рис. 11.2) вектор касательной $\vec{\tau}$ совпадает с направлением вектора нормали к сечению ds . В силу этого имеют место предельные соотношения:

$$\frac{1}{\sigma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\sigma} ds \vec{\tau} \frac{dl}{ds} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} \cdot ds \frac{dl}{ds} \Leftrightarrow I \frac{1}{\sigma} \frac{dl}{ds} = I dR,$$

где I сила тока, а R — сопротивление контура. С учетом полученного равенства найдем

$$\oint_L \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = I \oint_L dR = I R.$$

В результате выражение (11.10) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} I R &= \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \varepsilon = - \oint_L \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad } \varphi \right) \cdot d\mathbf{l} + \varepsilon = \\ &= - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} - \oint_L d\varphi + \varepsilon = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} - (\varphi_2 - \varphi_1) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (11.11)$$

Здесь S поверхность для которой контур L является границей, а значения потенциалов φ_2 и φ_1 определяют потенциалы в точках разрыва цепи контура (конденсатор), если такие имеются.

Учитывая определение емкости конденсатора $C = Q/(\varphi_2 - \varphi_1)$ вместо (11.11) получим соотношение для рассматриваемого контура с током:

$$I R = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} - \frac{Q}{C} + \varepsilon. \quad \Phi \equiv \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}.$$

Здесь Φ поток вектора индукции магнитного поля через поверхность S для которой контур L является границей.

Уравнения для системы проводников.

Пусть в общем случае имеется N штук контуров с токами I_k , с сопротивлениями R_k и емкостями C_k . В этом случае для системы линейных проводников получим систему уравнений:

$$I_k R_k + \frac{1}{c} \frac{d\Phi_k}{dt} + \frac{Q_k}{C_k} = \varepsilon_k, \quad k \in 1, 2 \dots N. \quad (11.12)$$

Приближение квазистационарного поля.

Покажем, что для N контуров с током поток вектора индукции магнитного поля через контур L_k в квазистационарном приближении определяется соотношением:

$$\Phi_k = c \sum_{i=1}^N L_{ki} I_i, \quad k \in 1, 2 \dots N. \quad (11.13)$$

Здесь L_{ki} -коэффициенты, зависящие от геометрии проводников с током. L_{ki} называются коэффициентами взаимной индукции при $i \neq k$ и коэффициентами самоиндукции при $k = i$.

Для доказательства (11.13) учтем, что в квазистационарном приближении обобщенный закон Ампера совпадает с видом закона в стационарном магнитном поле, то есть $\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}/c$. Следовательно уравнение для векторного потенциала в случае однородной магнитоизотропной среды имеет вид, совпадающий с уравнением для стационарного магнитного поля

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}(\mathbf{r}, t).$$

Решение данного уравнения в случае отсутствия специальных граничных условий имеет вид интеграла Пуассона:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'.$$

Если ток линейный, то для векторного потенциала создаваемого линейным током в контуре L находим:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{c} \oint_L \frac{I(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{l}. \quad (11.14)$$

Рассмотрим два линейных тока I_1 и I_2 , протекающих в контурах L_1 и L_2 , соответственно. В этом случае поток вектора индукции магнитного поля через первый контур Φ_1 складывается из потока вектора индукции, создаваемого вторым током $\phi_1(2)$ и потока вектора индукции, создаваемого самим первым контуром $\phi_1(1)$.

По определению поток вектора индукции \mathbf{B}_2 , создаваемого вторым током через первый контур равен

$$\phi_1(2) = \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{s}_1 = \int_{S_1} \text{rot } \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{s}_1 = \oint_{L_1} \mathbf{A}_2(\mathbf{r}_1) \cdot d\mathbf{l}_1$$

Подставляя в полученное выражение значение векторного потенциала (11.14) получим:

$$\phi_1(2) = \oint_{L_1} \left(\frac{\mu}{c} \oint_{L_2} \frac{I_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\mathbf{l}_2 \right) d\mathbf{l}_1 \equiv c L_{12} I_2, \quad (11.15)$$

где

$$L_{12} \equiv \frac{\mu}{c^2} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

-коэффициент взаимоиנדукции, определяемый только геометрией токов. По аналогии с (11.15) поток вектора индукции через первый контур, создаваемый самим током в первом контуре можно записать в виде:

$$\phi_1(1) = c L_{11} I_1. \quad (11.16)$$

Здесь L_{11} коэффициент самоиндукции или просто индуктивность контура. В результате, для потока вектора индукции магнитного поля через первый контур на основании (11.15), (11.16) получим:

$$\Phi_1 = c \sum_{i=1}^2 L_{1i} I_i. \quad (11.17)$$

Аналогично находится выражение для потока вектора индукции через второй контур.

Рассматривая таким же образом произвольное число контуров с токов получаем выражение (11.13), что и требовалось доказать.

Система уравнений для квазистационарных токов.

На основании (11.13) система уравнений (11.12) в квазистационарном приближении существенно упрощается и имеет вид:

$$I_k R_k + \sum_{i=1}^N L_{ki} \frac{dI_i}{dt} + \frac{Q_k}{C_k} = \varepsilon_k, \quad k \in 1, 2, \dots, N. \quad (11.18)$$

Контур с током.

Рассмотрим для примера один контур с током, содержащий сопротивление R , индуктивность L и емкость C . Уравнение (11.18) в этом случае имеет

вид:

$$RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon. \quad (11.19)$$

Дифференцируя данное уравнение по времени, получим дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами для определения силы тока в контуре:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (11.20)$$

Общий случай решения уравнения (11.20) можно рассмотреть выбрав периодическую зависимость от времени электродвижущей силы ε :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \exp(-i\omega t).$$

Такая зависимость от времени источника тока означает, что и сила тока имеет аналогичную зависимость от времени $I = I_0 \exp(-i\omega t)$. В результате вместо (11.20) получаем алгебраическое уравнение:

$$ZI = \varepsilon; \quad Z \equiv R - i \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (11.21)$$

В данном соотношении Z называется *комплексным сопротивлением или импедансом*. Решение уравнения (11.20) есть:

$$I = \operatorname{Re} \frac{\varepsilon}{Z} = \operatorname{Re} \frac{\varepsilon_0 \exp(-i\omega t)}{|Z| \exp(i\alpha)}; \quad \operatorname{tg} \alpha \equiv \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

Другими словами

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0 \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (11.22)$$

Из (11.22) вытекает:

1. сила тока сдвинута по фазе относительно фазы источника напряжения;
2. если источник тока отключен $\varepsilon = 0$, то ток в контуре совершает колебания, частота которых определяется условием $Z = 0$. Данное условие приводит к алгебраическому уравнению второго порядка относительно ω :

$$R - i \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right) = 0,$$

решение которого есть:

$$\omega = -i \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2} \quad (11.23)$$

Как следует из (11.23) если подкоренное выражение отрицательно, то в цепи возникает затухающий апериодический разряд в силу мнимости величины ω . Если подкоренное выражение положительно, то в цепи возбуждаются затухающие во времени по закону $\exp(-Rt/2L)$ периодические колебания. Наконец, если в цепи нет сопротивления, то устанавливаются незатухающие периодические колебания с периодом T равным (формула Томсона):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Глава 12

Специальная теория относительности. Лекции.

§1 Основы специальной теории относительности

Из системы уравнений Максвелла вытекает, что электромагнитное поле распространяется со скоростью, которая получила название *скорость света* $c \approx 300000$ км/сек. Естественно возникает вопрос – в какой системе координат измеряется эта величина? Основываясь на принципах классической механики, если в системе координат, движущейся относительно заданной системы с некоторой скоростью v , находится источник света, то в неподвижной системе координат в направлении движения света, должен выполняться классический закон сложения скоростей и скорость света должна быть $c + v$. Однако проведенные экспериментальные исследования установили, что скорость света не зависит от скорости источника излучения. Кроме того на основе опыта и традиций классической механики электродинамика должна ответить на вопрос как и в какой среде передается электромагнитное излучение.

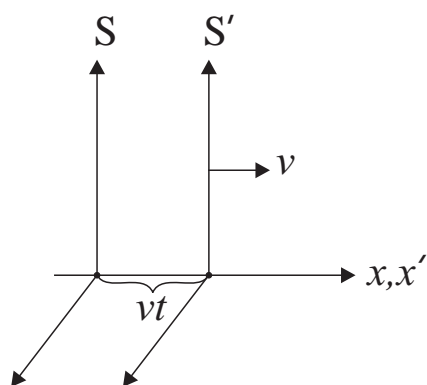


Рис. 12.1:

Механистическое толкование явлений, связанных с электромагнитным полем на первом этапе привело к понятию эфира, как механической среды и абсолютной, выделенной системы координат в которой распространяются поперечные электромагнитные волны. Исследования такой модели привели к необходимости приданию эфиру противоречивых свойств для объяснения различных физических явлений.

Так, для объяснения явления абберации звезд, необходимо было считать, что эфир не взаимодействует с обычным веществом и при движении вещества им не увлекается.

Опыты Физо по измерению скорости света в движущейся жидкости показывали, что если использовать понятие эфира, то при движении вещества (жидкости) эфир увлекается средой, но не полностью, а лишь частично, по определенному закону.

Наконец, для объяснения опытов Майкельсона-Морли необходимо было предположить, что эфир полностью увлекается движущейся средой. В результате стало очевидно, что понятие эфир не способно адекватно описать наблюдаемые явления и требуется предложить иной подход рассмотрения явлений, связанных с электромагнитным полем, не основанный на первых

принципах классической механики.

Принцип относительности Галилея

Одним из краеугольных принципов классической механики являлся принцип относительности, который требовал инвариантности уравнений движения относительно преобразований Галилея. Данные преобразования связывают координаты и время двух, движущихся друг относительно друга с постоянной скоростью систем координат. Если для простоты выбрать системы координат, как указано на рис. (12.1), то преобразования Галилея для декартовых координат и времени произвольной точки имеют вид:

$$x = x' + vt'; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = t'. \quad (12.1)$$

Данные преобразования основаны на геометрических представлениях о пространстве и, что принципиально важно, на принципе абсолютности времени. Этот принцип означает, что время во всех системах координат одно и тоже – абсолютно.

Эти интуитивные представления, возникшие в классической механике, как отражение простейших механических наблюдений, господствовавшие в физике на протяжении нескольких столетий оказались не соответствующими реальной картине окружающего мира.

Постулаты Эйнштейна.

Эйнштейном в 1905 году была сформулирована иная теория свойств пространства и времени, получившая название *специальная теория относительности*. Теория Эйнштейна основывается на двух постулатах:

- 1) При равных условиях все явления протекают одинаково в инерциальных системах отсчета – *специальный принцип относительности*.
- 2) Во всех инерциальных системах отсчета скорость света имеет одно и то же значение равное c – *принцип постоянства скорости света*.

Как ни странно, эти два постулата позволили объяснить все известные в то время явления, связанные с электромагнитным полем, не привлекая понятия эфира. *Специальный принцип относительности полностью отказывается от введения понятия абсолютного времени*, а принцип постоянства скорости света был положен Эйнштейном в основу теории, как отражение точно установленного экспериментального факта.

Формулировка нового принципа относительности означала, что классическая механика Ньютона, которая длительное время была мерилом понятия науки, нуждается в пересмотре, так как меняются ее основные принципы. Это привело к длительному неприятию специальной теории относительности и борьбы с ней по всем направлениям. Тем не менее предсказания этой теории были экспериментально подтверждены в 1935 году в экспериментах по изучению поперечного эффекта Доплера и в настоящее время представления о пространстве - времени, которые оказались заложенными специальной теорией относительности, не вызывают сомнения в области применимости этой теории. В дальнейшем специальная теория относительности была обобщена в рамках общей теорией относительности, выводы которой изучаются и по настоящее время.

Система отсчета

В постулатах Эйнштейна центральное место занимают такие "безобидные" понятия, как система отсчета и инерциальная система отсчета. В общем случае понятие "система отсчета" есть идеализация понятия об абсолютно твердом теле, состоящем из некоторых "опорных точек", расстояние между которыми постоянно.

В классической механике принято считать, что инерциальная система отсчета - это такая система "опорных точек", в которой материальная точка, не взаимодействующая с другими телами, движется равномерно и прямолинейно или покоится.

В рамках специальной теории относительности за инерциальными системами отсчета закрепляется более широкое понятие. А именно, в пределах каждой инерциальной системы устанавливается свое единое время и более того это время является внутренним свойством системы. Фактически это утверждение следует из первого постулата Эйнштейна, который исключил понятие абсолютности времени.

Синхронизация часов.

Как установить или определить это единое время в конкретной системе координат вытекает из второго постулата Эйнштейна. Определение единого времени системы координат осуществляется на основе мысленного эксперимента, который называется "синхронизацией часов".

Упрощенно эту процедуру можно представить следующим образом. Пусть в некоторой точке A имеются обыкновенные часы, отражающие привычный способ фиксации времени. И пусть наблюдатель из точки A в момент времени t_0 по часам A посылает световой сигнал наблюдателю в точку B , находящуюся на расстоянии l от A . В данной инерциальной системе отсчета расстояние определяется простым сравнением этого отрезка с эталоном длины. Тогда очевидно, что наблюдатель B регистрирует этот сигнал в момент времени $t_0 + l/c$ и, таким образом, он сможет установить на своих часах время, совпадающее со временем на часах A . Естественно, что наблюдатели должны договориться заранее о том в какой момент времени будет испущен сигнал в точке A .

Формально эту процедуру синхронизации часов можно повторить для произвольной точки системы координат и таким образом установить единое для данной системы координат время.

Лоренцева система координат.

В результате за каждой точкой пространства выбранной системы координат закрепляются четыре величины: три пространственные координаты x, y, z и время данной системы координат t . В соответствии с предложенной идеологией данной точке в другой инерциальной системе координат будут соответствовать свои четыре величины x', y', z', t' . Исторически такие инерциальные системы координат называются *Лоренцевскими*.

Свойства пространства - времени.

В специальной теории относительности первичными понятиями являются понятия "пространства" и "времени" - категории, обозначающие основные формы существования материи и поля. При этом "пространство" отражает порядок существования объектов, а "время" - порядок смены явлений. В общем случае свойства пространства и времени делят на *метрические*: протяженность, длительность и *топологические*: размерность, непрерывность, связанность, порядок и направление времени.

Теория относительности как специальная, так и общая определяют и изучают метрические свойства пространства и времени. Исследования топологических свойств пространства и времени проводятся в настоящее время и еще не приняли общезначимого значения.

Принципиально важно, что понятию свободного пространства приписывается свойства однородности и изотропности, а времени – свойство однородности.

Преобразования Лоренца.

Принцип постоянства скорости света противоречит принципу относительности Галилея, и преобразования Галилея не могут обеспечить его выполнение. В связи с этим возникает задача нахождения таких преобразований координат и времени двух инерциальных систем координат, движущихся с постоянной скоростью друг относительно друга, для которых выполняется второй постулат Эйнштейна.

Такие преобразования были найдены Лоренцом и для простейшего случая, когда две системы координат расположены как указано на рисунке (12.1), движутся вдоль совпадающих осей x, x' и в моменты времени $t = 0 = t'$ начала отсчета этих систем координат совпадали, преобразования координат и времени имеют вид:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + x'v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (12.2)$$

Обратные к (12.2) преобразования есть:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (12.3)$$

В частном случае $v \ll c$, преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. Кроме того преобразования Лоренца указывают на неразрывную связь понятий, относящихся к геометрическим понятиям пространства и характеристик, определяющих последовательность смены явлений – времени.

§2 Следствия из преобразований Лоренца

Из преобразований Лоренца вытекают следствия, которые демонстрируют ряд важных понятий специальной теории относительности. Рассмотрим некоторые из этих следствий.

Относительность одновременности

Данное следствие является естественным проявлением отказа от постулата об абсолютности времени. Наглядно относительность одновременности можно продемонстрировать на примере двумерной системы отсчета. Рассмотрим для простоты координату x и время t . Введем для удобства координату ct , имеющую, как и x размерность длины.

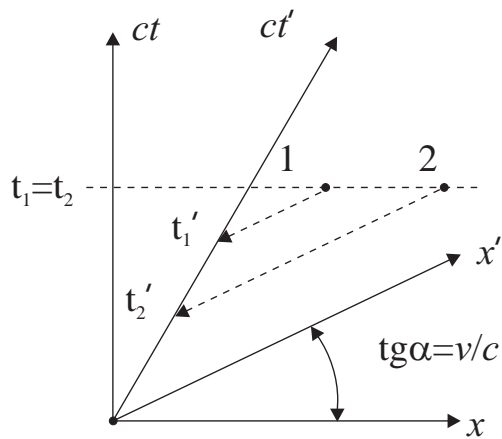


Рис. 12.2:

наклона $\operatorname{tg} \alpha = v/c$.

Изобразим систему координат x, ct в виде двумерной декартовой системы координат (рис. 12.2). Нарисуем в этой системе координат оси движущейся системы координат x', ct' . Очевидно, уравнение оси x' определяется соотношением $t' = 0$.

На основании (12.3) получим уравнение этой оси в переменных системы координат x, ct : $x - vt = 0$ или $ct = xv/c$, что является уравнением прямой линии с тангенсом угла

Соответственно уравнение оси ct' определяется соотношением $x' = 0$, а на основании (12.3) в переменных системы координат x, ct получим $ct = xc/v$. Это есть уравнение прямой с тангенсом угла наклона к оси ct равным α . В результате на рис. 12.2 одновременно изображены две лоренцевы системы координат.

Одновременные в системе координат x, ct события лежат на линии, параллельной оси x , а в системе координат x', ct' времена событий 1 и 2 определяются линиями, параллельными оси x' . Таким образом, два события A и B , одновременные в системе координат x, ct , не являются одновременными в любой другой инерциальной системе координат, движущейся относительно системы x, ct .

Сокращение длины движущегося масштаба

Рассмотрим процесс измерения движущейся линейки. Если для покоящегося объекта процесс измерения длины состоит в сравнении длины объекта с эталоном длины, который можно приложить к измеряемому объекту, то для движущегося объекта процесс измерения должен быть определен какой-то процедурой. По сути эта процедура задается одновременной, с точки зрения покоящегося наблюдателя, отметкой конца и начала движу-

щегося объекта на какой-то покоящейся матрице.

Для наглядности представим себе движущийся поезд. Пусть одновременно, с точки зрения покоящегося на полотне железной дороге наблюдателя, в конец и начало поезда ударяют молнии, которые оставляют следы на рельсах. Тогда, после того как поезд проехал наблюдатель имеет возможность подойти к рельсам и по оставленным молниями отметкам измерить то, что он будет называть длиной движущегося поезда.

Однако при этом, если с точки зрения покоящегося на Земле наблюдателя молнии ударили в поезд одновременно, то с точки зрения наблюдателя, находящегося в поезде события удара молний в начало и конец поезда произошли не одновременно, поэтому он будет считать, что измерение длины произведено неправильно и его результат - длина поезда, измеренная в собственной системе координат поезда, что можно сделать простым сравнением с эталоном, будет отличаться от результата измерения полученного наблюдателем на Земле.

В общем случае процесс измерения можно описать на языке преобразований начала x_2 и конца x_1 движущейся линейки. На основании (12.3)

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где учтено, что процесс измерения предполагает одновременную, с точки зрения покоящегося наблюдателя, отметку конца и начала отрезка, то есть $t_2 = t_1$. В полученном выражении $x'_2 - x'_1 = l_0$ - есть длина линейки в своей собственной системе координат, а $x_2 - x_1 = l$ - результат измерения. Таким образом, измеренная длина l связана с собственной длиной l_0 равенством

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Такое различие результатов называется сокращением длины движущегося объекта, хотя никаких изменений в собственной длине объекта не происходит. Полученное различие является следствием относительности одновременности и способа определения длины движущегося объекта. "Сокращение" измеренной длины происходит только в направлении движения. В направлениях, ортогональных скорости движения, изменения длин не происходит.

Замедление хода движущихся часов.

Рассмотрим часы, которые движутся со скоростью v в лабораторной системе координат S . Свяжем с часами собственную систему координат S' .

Запишем преобразования Лоренца для координат и времени этих систем (12.2) и учтем, что в своей собственной системе координат часы покоятся, то есть $x'_1 = x'_2$. В результате:

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1 + v(x'_2 - x'_1)/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Таким образом, интервал времени между двумя событиями в собственной системе координат оказывается меньше интервала времени, которое будет зарегистрировано на движущихся часах. Об этом следствии говорят как о замедлении хода движущихся часов.

Закон сложения скоростей.

Пусть в системе координат S' известна скорость точки \mathbf{u} . По определению, величины проекций этой скорости на декартовы оси в системе координат S' равны:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}; \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}; \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

Найдем проекции скоростей этой точки в системе координат S , относительно которой система координат S' движется с постоянной скоростью v , вдоль положительного направления совпадающих осей x, x' . С учетом преобразований Лоренца (12.2) получим, например, для проекции скорости на ось x :

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2} dt' + vdx'/c^2} = \frac{u'_x + v}{1 + v u'_x/c^2}. \quad (12.4)$$

Аналогичные преобразования для u_y и u_z приводят к следующему результату:

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v u'_x/c^2}; \quad u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{u'_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v u'_x/c^2}. \quad (12.5)$$

Выражения (12.4), (12.5) определяют закон сложения скоростей в специальной теории относительности. Как видно, он отличается от классического закона сложения скоростей $u_x = u'_x + v$ при скоростях сравнимых со скоростями света. Если в выражении (12.4) положить $u'_x = c$, то результат для u_x остается равным c , что и заложено во втором постулате Эйнштейна.

Инвариантность интервала.

Рассмотрим в системе координат S выражение $s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$, которое в специальной теории относительности носит название *квадрата*

интервала. Выполним преобразование Лоренца для пространственных и временной переменной в определении квадрата интервала:

$$s^2 = c^2 \frac{(t' + x'v/c^2)^2}{1 - v^2/c^2} - \frac{(x' + vt')^2}{1 - v^2/c^2} - y'^2 - z'^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = s'^2.$$

Таким образом, величина и определение квадрата интервала s остается постоянной в любой системе координат. Это свойство интервала называется инвариантностью интервала относительно преобразований Лоренца и обозначается $s^2 = \text{invar}$.

Абсолютные величины

Несмотря на то что специальная теория относительности указывает на относительность многих классических понятий, ряд величин и понятий остаются инвариантными и не зависят от того в какой системе координат они определяются или измеряются. *Такие величины называются абсолютными или инвариантными относительно преобразований Лоренца.*

Среди рассмотренных выше понятий к абсолютным относится, кроме интервала также и скорость света.

Собственное время

Еще одна абсолютная величина может быть сформирована из интервала и скорости света. Из определения интервала следует понятие бесконечно-малого интервала $ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dl^2}$, где $dl = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Вынося $c dt$ из под знака квадратного корня можно переписать полученное выражение следующим образом $ds = c dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$, где v - кинематическая скорость точки, но не скорость относительного движения.

В силу инвариантности интервала и абсолютности скорости света, очевидно остается инвариантным и отношение интервала к скорости света:

$$dt_s = ds/c = \text{invar}.$$

Данная инвариантная величина и *называется собственным временем.*

Ниже будет установлено, что в рамках специальной теории относительности имеется большое число инвариантных, относительно преобразований Лоренца, величин, которые играют важное значение при исследовании различных физических явлений.

§3 Четырехмерные обозначения в специальной теории относительности

В соответствии с идеологией специальной теории относительности одних пространственных координат недостаточно для описания движения материальных тел. Необходимо учитывать в какой системе координат происходит тот или иной процесс. При этом каждая система координат снабжена своим временем. Поэтому даже положение одной точки в пространстве задается набором четырех координат x, y, z, t , а все явления происходят в пространстве и времени. Таким образом, возникает проблема описания явлений в четырехмерном пространстве. Однако понятие многомерного пространства должно быть снабжено правилами и определениями, позволяющими оперировать с основными понятиями четырехмерного мира пространство-время.

Четыре радиус - вектор.

Введем следующие обозначения пространственных и временных переменных для рассмотрения начальных понятий четырехмерного пространства, которые соответствуют обозначениям тензорного анализа.

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \quad (12.6)$$

Набор четырех переменных x^μ , $\mu \in 0, 1, 2, 3$ называется *пространственно - временными координатами мировой точки*.

Предположим, что компоненты x^μ составляют проекции четырех-радиус вектора x . Так как в трехмерном пространстве радиус-вектор определяется как контравариантный вектор, то по аналогии и в четырехмерном пространстве положим, что x образует контравариантный вектор. Поэтому индекс нумерующий проекции x^μ пишется сверху.

Перепишем преобразования Лоренца (12.2) для частного случая расположения и относительного движения систем координат S и S' с учетом определений (12.6):

$$x^0 = \frac{x'^0 + vx'^1/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad x^1 = \frac{x'^1 + vx'^0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x^2 = x'^2, \quad x^3 = x'^3. \quad (12.7)$$

Здесь v - скорость относительного движения систем координат. В результате равенства (12.7) можно переписать в алгебраическом виде:

$$x^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \gamma^\mu_{\nu} x'^\nu, \quad \gamma^\mu_{\nu} \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}, \quad (12.8)$$

где в частном случае выбора систем координат матрица преобразований γ имеет вид:

$$\gamma^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.9)$$

Неоднородные преобразования Лоренца.

В общем случае, если оси систем координат расположены произвольно, γ имеет вид отличный от (12.9). В этом смысле имеется бесконечно много преобразований Лоренца, которые зависят от конкретного расположения осей систем координат.

Формула (12.8) описывает так называемые однородные преобразования Лоренца, когда в начальный момент времени $t = t' = 0$ и, кроме того, начала отсчета систем координат совпадают $x = x' = 0$. В общем случае преобразования Лоренца могут быть записаны следующим образом:

$$x^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \gamma^\mu_\nu x'^\nu + b^\mu, \quad (12.10)$$

где b^μ – константы. Данные преобразования *называются неоднородными преобразованиями Лоренца*.

Покажем, что частный случай преобразования Лоренца (12.8) есть поворот систем отсчета S, S' в пространстве $x^0 = ct, x^1 = x$ на мнимый угол. Для этого перепишем (12.7) введя следующие обозначения:

$$\text{ch } \psi = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \text{sh } \psi = \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \text{ch}^2 \psi - \text{sh}^2 \psi = 1.$$

В результате получим:

$$x^0 = x'^0 \text{ch } \psi + x'^1 \text{sh } \psi, \quad x^1 = x'^0 \text{sh } \psi + x'^1 \text{ch } \psi. \quad (12.11)$$

Если обозначить $\psi = -i\varphi$, где i – мнимая единица, то с учетом соотношений $\text{ch } i\varphi = \cos \varphi$ и $\text{sh } i\varphi = i \sin \varphi$ из (12.11) найдем:

$$x^0 = x'^0 \cos \varphi + ix'^1 \sin \varphi, \quad x^1 = ix'^0 \sin \varphi + x'^1 \cos \varphi.$$

Умножим полученное равенство на мнимую единицу i и обозначим $ix^0 \equiv x^4$, в результате:

$$x^4 = x'^4 \cos \varphi - x'^1 \sin \varphi, \quad x^1 = x'^4 \sin \varphi + x'^1 \cos \varphi. \quad (12.12)$$

Выражения, связывающие координаты x, y точки A на плоскости в двух системах координат, повернутых друг относительно друга на угол φ вокруг начала координат имеют вид:

$$x_A = x'_A \cos \varphi - y'_A \sin \varphi; \quad y_A = x'_A \sin \varphi + y'_A \cos \varphi.$$

Сравнивая данные выражения с (12.12) видно, что формулы совпадают. Поэтому преобразования Лоренца - есть поворот на мнимый угол в пространстве (ict, x) .

Таким образом, выражение (12.8) совпадает с конструктивным определением вектора и можно рассматривать x^μ как компоненты 4-вектора x в четырехмерном пространстве-времени по аналогии с 3-х мерным пространством, в котором компоненты радиус вектора удовлетворяют соотношению:

$$x^i = \sum_{k=1}^3 R^i_k x'^k,$$

где R матрица поворота систем координат в трехмерном пространстве.

По аналогии с 3-х мерным пространством введем также ковариантные компоненты 4-радиус вектора. По определению, ковариантные векторы - это векторы, компоненты, которых преобразуются при вращении систем координат как компоненты градиента скаляра $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$.

Четыре - градиент.

Определим компоненты четыре градиента следующим соотношением $\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}$, $\mu \in 0, \dots, 3$. Для определения правил преобразования компонент 4-градиента вычислим производную от скалярной функции $\varphi(x)$, с учетом зависимости $x = x(x')$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \sum_{\nu=0}^3 a_\mu^\nu \frac{\partial \varphi'}{\partial x'^\nu}, \quad a_\mu^\nu \equiv \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \quad (12.13)$$

Как видно, определение матрицы a отличается от определения матрицы γ (12.8). Таким образом в рассматриваемом четырех мерном пространстве должно учитываться отличие ко- и контра-вариантных векторов.

Чтобы найти явный вид a_μ^ν запишем обратное преобразование Лоренца (12.3) с учетом введенных четырехмерных обозначений.

$$x'^1 = \frac{x^1 - vx^0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x'^0 = \frac{x^0 - vx^1/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 b^\mu_\nu x^\nu, \quad (12.14)$$

где

$$b^\mu_\nu \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & -\frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}.$$

Следовательно, имеют место равенства $b(v) \equiv a(v) = \gamma(-v)$.

Определим следующие 4 компоненты пространственно временной точки x : $x_0 = ct$, $x_1 = -x$, $x_2 = -y$, $x_3 = -z$ для которых преобразования Лоренца имеют вид:

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^3 a_\mu^\nu x'_\nu.$$

что совпадает с законом преобразование компонент 4-градиента. Поэтому x_μ являются ковариантными компонентами 4-радиус вектора.

Ко- и контра- вариантыные компоненты.

Положение точки в 4-х мерном пространстве-времени задается 4-радиус-вектором x , ко- и контра- вариантыные компоненты которого определяются следующим образом:

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z) \equiv (ct, \mathbf{r}), \quad x^\mu \equiv \sum_{\lambda=0}^3 \gamma^\mu_\lambda x'^\lambda;$$

$$x_\mu \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (ct, -x, -y, -z) \equiv (ct, -\mathbf{r}), \quad x_\mu \equiv \sum_{\lambda=0}^3 a_\mu^\lambda x'_\lambda.$$

Используя данные определения, квадрат интервала можно представить следующим образом:

$$S^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu = \sum_{\mu=0}^3 x_\mu x^\mu.$$

Скалярное произведение 4-радиус-векторов.

Так как сумма ко- и контра- вариантных компонент 4-радиус вектора остается инвариантной в различных инерциальных системах координат, выражения вида:

$$\sum_{\mu=0}^3 x_\mu x^\mu = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu,$$

можно интерпретировать как скалярное произведение 4-радиус-векторов, так как такое произведение обладает тем же свойством, что и обычное скалярное произведение в трехмерном пространстве. При этом очевидно, что суммы вида:

$$\sum_{\mu=0}^3 (x^\mu)^2; \quad \sum_{\mu=0}^3 (x_\mu)^2$$

не образуют инвариантные величины относительно преобразований Лоренца, а следовательно не могут являться определением скалярного произведения во вводимом четырехмерном пространстве - времени.

На основании определения понятий 4-радиус вектора и скалярного произведения 4-радиус векторов можно по аналогии с трехмерным пространством ввести общее понятие 4-вектора.

Четыре - вектор.

4-вектором в рассматриваемом в рамках специальной теории относительности четырехмерном пространстве - времени следует определить набор из четырех функций - компонент вектора, которые при преобразованиях Лоренца удовлетворяют соотношениям:

$$A^\mu = \sum_{\lambda=0}^3 \gamma^\mu{}_\lambda A'^\lambda; \quad A_\mu = \sum_{\lambda=0}^3 a^\lambda{}_\mu A'_\lambda, \quad \mu \in 0, 1, 2, 3/ \quad (12.15)$$

Скалярное произведение 4-векторов.

Для произвольных 4-векторов *определение скалярного произведения имеет вид:*

$$(A \cdot B) \equiv \sum_{\mu=0}^3 A^\mu B_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 A_\mu B^\mu.$$

Скалярное произведение двух 4-векторов инвариантно в любой Лоренцевой системе координат.

Для доказательства данного утверждения рассмотрим следствие для матриц γ и a , вытекающее из определения инвариантности интервала:

$$\sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu = \sum_{\lambda=0}^3 x'^\lambda x'_\lambda = \text{invar.} \quad (12.16)$$

Подставим в левую часть равенства (12.16) формулы преобразования ко- и

контра-вариантных компонент векторов, в результате получим:

$$\sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu = \sum_{\mu=0}^3 \left(\sum_{\lambda=0}^3 \gamma^\mu_{\lambda} x'^\lambda \right) \left(\sum_{\nu=0}^3 a_\mu{}^\nu x'_\nu \right) = \sum_{\mu,\lambda,\nu=0}^3 \gamma^\mu_{\lambda} a_\mu{}^\nu x'^\lambda x'_\nu. \quad (12.17)$$

Из сравнения (12.16) и (12.17) ясно, что для выполнения равенства (12.16) необходимо, чтобы:

$$\sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu_{\lambda} a_\mu{}^\nu = \delta^\nu_{\lambda} \equiv \delta_{\nu\lambda}, \quad (12.18)$$

где $\delta_{\nu\lambda}$ -символ Кронекера.

Запишем теперь скалярное произведение двух произвольных 4-векторов и перейдем для каждого из векторов в другую инерциальную систему координат, тогда с учетом равенства (12.18) получим:

$$\sum_{\mu=0}^3 A^\mu B_\mu = \sum_{\lambda,\nu=0}^3 \left(\sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu_{\lambda} a_\mu{}^\nu \right) A'^\lambda B'_\nu = \sum_{\nu=0}^3 A'^\nu B'_\nu.$$

Что и доказывает инвариантность скалярного произведения 4-векторов при преобразованиях Лоренца.

Связь ко- и контра-вариантных составляющих 4-векторов может быть представлена в следующем виде: $A^0 = A_0$, $A^1 = -A_1$, $A^2 = -A_2$, $A^3 = -A_3$. Это утверждение следует из того обстоятельства, что: $\gamma(v) = a(-v)$.

Перепишем связь ко- и контра-вариантных составляющих 4-векторов следующим образом:

$$A^\mu = \sum_{\lambda=0}^3 g^{\mu\lambda} A_\lambda, \quad A_\mu = \sum_{\lambda=0}^3 g_{\mu\lambda} A^\lambda.$$

Определенные этим соотношением матрицы преобразований от ко- к контра-вариантным компонентам 4-векторов и наоборот равны между собой и имеют вид:

$$g^{\mu\lambda} = g_{\mu\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (12.19)$$

Четыре-тензор.

Имея определение 4-векторов можно по аналогии с трехмерным пространством определить тензоры произвольного ранга. В рамках специаль-

ной теории относительности имеют важное значение тензоры второго ранга. На основе определений, связанных с тензорами второго ранга нетрудно обобщить определения и на тензоры произвольного ранга.

Шестнадцать компонент, преобразующихся при переходе из одной инерциальной системы в другую по закону:

$$F^{\alpha\beta} = \sum_{\mu,\lambda=0}^3 \gamma_{\mu}^{\alpha} \gamma_{\lambda}^{\beta} F'^{\mu\lambda} \quad (12.20)$$

образуют контра-вариантный 4-тензор второго ранга.

Шестнадцать компонент, преобразующиеся по закону

$$F_{\alpha\beta} = \sum_{\mu,\lambda=0}^3 a_{\alpha}^{\mu} a_{\beta}^{\lambda} F'_{\mu\lambda}$$

образуют ко-вариантный 4-тензор второго ранга.

Наконец

$$F^{\alpha}_{\beta} = \sum_{\mu,\lambda=0}^3 \gamma_{\mu}^{\alpha} a_{\beta}^{\lambda} F'^{\mu}_{\lambda}$$

определяют смешанный 4-тензор второго ранга.

Метрический тензор.

Можно убедиться, например, что шестнадцать компонент матриц преобразования от ко- к контра-вариантным компонентам (12.19) и обратно образуют 4-тензор второго ранга.

Пусть, например, матрица линейного преобразования (12.19) определена в некоторой системе координат S' . Вычислим компоненты этой матрицы преобразования в системе координат S . Так для компоненты g^{00} получим:

$$g^{00} = \sum_{\mu,\lambda=0}^3 \gamma_{\mu}^0 \gamma_{\lambda}^0 g'^{\mu\lambda} = \sum_{\mu=0}^3 \gamma_{\mu}^0 (\gamma_{\mu}^0 g'^{\mu 0} + \gamma_{\mu}^1 g'^{\mu 1} + \gamma_{\mu}^2 g'^{\mu 2} + \gamma_{\mu}^3 g'^{\mu 3}) = 1.$$

Аналогично вычисляются и другие компоненты: $g^{11} = -1$, $g^{22} = -1$, $g^{33} = -1$, $g^{\alpha\beta} = 0$, если $\alpha \neq \beta$. Другими словами $g^{\alpha\beta} \equiv g^{\alpha\beta'}$. Таким образом для шестнадцати компонент $g^{\alpha\beta}$ выполняется соотношение

$$g^{\alpha\beta} = \sum_{\mu,\lambda=0}^3 \gamma_{\mu}^{\alpha} \gamma_{\lambda}^{\beta} g'^{\mu\lambda},$$

которое совпадает с определением контра-вариантного 4-тензора, поэтому $g^{\alpha\beta}$ и есть 4-тензор.

То же относится и к $g_{\alpha\beta}$, и g^α_β . Тензор g называется метрическим тензором. С помощью метрического тензора производится опускание и поднятие индекса у любого 4-тензора или 4-вектора.

$$\begin{aligned} A^\mu &= \sum_{\lambda=0}^3 g^{\mu\lambda} A_\lambda, & F^{\alpha\beta} &= \sum_{\lambda=0}^3 g^{\alpha\lambda} F^\beta_\lambda = \sum_{\lambda,\mu=0}^3 g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} F_{\lambda\mu}; \\ A_\mu &= \sum_{\lambda=0}^3 g_{\mu\lambda} A^\lambda, & F_{\alpha\beta} &= \sum_{\lambda=0}^3 g_{\alpha\lambda} F^\lambda_{;\beta} = \sum_{\lambda,\mu=0}^3 g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} F^{\lambda\mu}. \end{aligned}$$

С использованием определения метрического тензора квадрат интервала можно переписать в виде:

$$S^2 = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu = \sum_{\mu,\lambda=0}^3 g^{\mu\lambda} x_\mu x_\lambda = \sum_{\mu,\lambda=0}^3 g_{\mu\lambda} x^\mu x^\lambda. \quad (12.21)$$

Формула (12.21) поясняет, почему $g^{\alpha\beta}$ называется метрическим тензором: данный тензор позволяет определить инвариантное расстояние между двумя точками в четырехмерном пространстве-времени или, как это принято называть в геометрии математических пространств, установить метрику этого пространства.

С использованием метрического тензора, скалярное произведение двух 4-векторов запишется следующим образом:

$$(A \cdot B) = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu B_\mu = \sum_{\mu,\lambda=0}^3 g^{\mu\lambda} A_\lambda B_\mu = \sum_{\mu,\lambda=0}^3 g_{\mu\lambda} A^\mu B^\lambda.$$

Пространство Минковского.

В современной геометрии используется понятие псевдоевклидова пространства: n - мерное пространство с координатами x^1, \dots, x^n в котором квадрат длины вектора $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ задается формулой:

$$|\xi|^2 \equiv \langle \xi, \xi \rangle = \sum_{i=1}^p (\xi^i)^2 - \sum_{i=1}^q (\xi^{p+i})^2.$$

Символически такое пространство обозначаемого следующим образом $R^n_{p,q}$, где $p + q = n$. При $n = 4$, $p = 1$, как видно, получаем пространство-время специальной теории относительности или пространство Минковского $R^4_{1,3} \equiv R^4_1$.

В соответствии с введенными выше определениями очевидны следующие обозначения и определения:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \equiv \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla \right) = (\partial_0, \nabla) \quad (12.22)$$

– ковариантный 4-градиент;

$\partial^\mu \equiv \left(\frac{\partial}{c\partial t}, -\nabla \right) = (\partial^0, -\nabla)$ – контра-вариантный 4-градиент;

$\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = \partial_k \varphi$ – ковариантный 4-вектор, если φ – скаляр;

$\partial_\nu A^\mu$; – 4-тензор второго ранга; $\sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu A^\mu$ – 4-дивергенция;

– $\sum_{\mu=0}^3 \partial^\mu \partial_\mu = \square$ – оператор Д’Аламбера.

$\square \varphi$ – скаляр; $\square A^\mu$ 4-вектор.

§4 Кинематические определения в четырехмерном пространстве. 4-скорость. 4-ускорение.

В четырехмерном пространстве – времени специальной теории относительности вводится несколько кинематических определений для описания движения мировой точки.

4-скорость.

Определение 4-скорости имеет вид:

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{dt_s},$$

где $dt_s = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$ – собственное время.

Как следует из определения 4-скорости, 4-скорость – есть 4-вектор. Это утверждение вытекает из того, что dx^μ – есть 4-вектор, а dt_s – инвариантная величина.

Вычисления компонент 4-скорости приводят к следующему их явному виду:

$$u^\mu \equiv \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right); \quad u_\mu \equiv \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, -\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right).$$

В силу того, что 4-скорость есть 4-вектор, очевидно, что квадрат 4-скорости – инвариантная величина

$$(u \cdot u) = \sum_{\mu=0}^3 u^\mu u_\mu = \frac{c^2}{1 - v^2/c^2} - \frac{v^2}{1 - v^2/c^2} = c^2 = \text{invar.}$$

В силу того, что 4-скорость - есть 4-вектор, закон преобразования ее компонент при переходе из одной инерциальной системы к другой имеет вид:

$$u^\mu = \sum_{\lambda=0}^3 \gamma^\mu_{\lambda}(v) u'^{\lambda}.$$

В результате, например, для специального случая выбора систем координат при их относительной скорости движения V , получим:

$$u^1 = \frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} u'^0 + \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} u'^1;$$

или

$$\frac{v_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \frac{c}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \frac{v'_x}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}},$$

здесь v - скорость движения точки в системе координат S , v' - скорость движения точки в системе координат S' , а V - скорость относительного движения систем координат друг относительно друга.

Тождественные преобразования последнего выражения приводят к закону сложения скоростей.

4-ускорение.

Производная от 4-скорости по собственному времени называется в кинематике специальной теории относительности 4-ускорением:

$$w^\alpha \equiv \frac{du^\alpha}{dt_s}.$$

Явный вид компонент 4-ускорения есть:

$$w^\alpha \equiv \left(\frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{(1 - u^2)^2}; \frac{\mathbf{a}}{1 - u^2} + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{(1 - u^2)^2} \right).$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt}; \quad \mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt}; \quad \mathbf{u} \equiv \frac{\mathbf{v}}{c};$$

Из определения 4-ускорения следует, что 4-ускорение есть 4-вектор. То есть, в соответствии с общим определением 4-векторов правила преобразования компонент 4-ускорения определяются матрицей преобразования Лоренца. Квадрат 4-ускорения и произведения 4-ускорения на 4-координату или 4-скорость - инвариантные величины в Лоренцевских системах отсчета.

Скалярное произведение 4-ускорения на 4-скорость равно нулю, поэтому говорят, что 4-скорость ортогональна 4-ускорению. Доказательство ортогональности 4-скорости и 4-ускорения основывается на инвариантности квадрата 4-скорости. Дифференцируя соотношение $u \cdot u = c^2$ по собственному времени получим доказательство условия ортогональности u и w

§5 Релятивистская механика.

Классическая механика Ньютона не удовлетворяет постулатам специальной теории относительности, которая требует от уравнений инвариантности относительно преобразований Лоренца. Механика удовлетворяющая постулатам теории относительности называется *релятивистской*.

В рамках широко используемого Лагранжевого формализма вывод уравнений движения основывается на принципе наименьшего действия $\delta S = 0$, где функции действия определяется равенством:

$$S = \int_{(1)}^{(2)} L dt. \quad (12.23)$$

Здесь L -функция Лагранжа, которая в общем случае определяется как разность кинетической и потенциальной энергии системы.

Для получения уравнений, инвариантных относительно преобразований Лоренца, необходимо построить функцию действия инвариантную относительно этих преобразований.

Свободная частица.

Рассмотрим, для примера, свободную частицу. При отсутствии каких-либо сил и полей единственная релятивистская инвариантная величина, характеризующая движение частицы из точки 1 в точку 2 в 4-х мерном пространстве является длина ее мировой линии, которая определяется как интеграл от интервала ds . Поэтому действие, удовлетворяющее требованиям специальной теории относительности, можно задать в виде:

$$S = \text{const} \int_{(1)}^{(2)} ds = \text{const} \int_{(1)}^{(2)} \frac{ds}{dt} dt = \text{const} \int_{(1)}^{(2)} c \sqrt{1 - v^2/c^2} dt, \quad (12.24)$$

где const — инвариантная постоянная.

Сравнивая полученное выражение с (12.23), можно установить, что

функция Лагранжа свободной частицы должна иметь вид:

$$L = \text{const } c \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (12.25)$$

Так как при $v/c \ll 1$ релятивистская механика должна переходить в механику Ньютона, разложим функцию Лагранжа в ряд по малому параметру v/c . В результате: $L \simeq \text{const } c (1 - v^2/2c^2 \dots)$. Таким образом, очевидно, что для согласованного предельного перехода, const должна быть выбрана равной $-mc$, где m — масса частицы, так как функция Лагранжа свободной частицы определенная с точностью до аддитивной постоянной в механике Ньютона равна $L_n = mv^2/2$. В результате, релятивистски инвариантное выражение для функции Лагранжа имеет вид:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Энергия и импульс свободной частицы.

На основе результатов Лагранжева подхода можно определить выражения для импульса и энергии свободной частицы. Так выражение для импульса определяется как градиент от функции Лагранжа по скорости частицы, то есть:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (12.26)$$

Соответственно определение энергии в Лагранжевом формализме приводит к выражению:

$$\varepsilon = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (12.27)$$

Полученные выражения для импульса (12.26) и энергии (12.27) отличаются от выражений известных в классической механике Ньютона

$$\mathbf{p}_n = m\mathbf{v}, \quad \varepsilon_n = mv^2/2.$$

Энергия покоя.

Принципиальным отличием релятивистского выражения для энергии является определение колоссальной энергии покоя частицы равной

$$\varepsilon = mc^2. \quad (12.28)$$

В соответствии с данной формулой, например, в одном грамме вещества энергия покоя равна $\approx 10^{14}$ джоулей. Такая величина эквивалентна энергии

выделяющейся при сжигании угля в количестве около 3000 тонн, что эквивалентно железнодорожному составу с углем из 50 вагонов. Установление связи энергии и массы частицы открыло возможность превращения массы в энергию, которая позднее была реализована в реакциях деления тяжелых ядер и в реакциях слияния легких ядер — термоядерный синтез.

4 — импульс.

Релятивистские выражения для энергии и импульса образуют 4-вектор, который получил название 4-импульс p^μ . Определение 4-импульса связано с определением 4-скорости u^μ следующим соотношением: $p^\mu = m u^\mu$, где m — масса покоя частицы. В соответствии с определением 4-импульс образует 4-вектор

$$p^\mu = m u^\mu \equiv \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \equiv \left(\frac{\varepsilon}{c}, \mathbf{p} \right); \quad p_\mu \equiv \left(\frac{\varepsilon}{c}, -\mathbf{p} \right)$$

Квадрат 4-импульса является инвариантной величиной равной $m^2 c^2$

$$\sum_{\mu=0}^3 p_\mu p^\mu = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2; \quad \varepsilon^2 = m^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2.$$

Уравнения Минковского.

Обобщение уравнений движения частицы, находящихся под действием внешних сил, на релятивистский случай выполнено Минковским.

Лоренцевская инвариантность уравнений требует, чтобы физические уравнения имели структуру равенства 4-векторов $A^\alpha = B^\alpha$, или равенства 4-тензоров второго ранга $A^{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta} \dots$, или равенства 4-тензоров произвольного ранга. Отсюда вытекает возможность обобщения уравнений Ньютона на релятивистский случай в виде:

$$\frac{dp^\alpha}{dt_s} = f^\alpha \quad \alpha \in 0, 1, 2, 3, \quad (12.29)$$

где p^α — 4 импульс, а $f^\alpha = (f^0, \mathbf{f})$ — 4-вектор, получивший название *4-сила Минковского*. В соответствии с (12.29) пространственные компоненты 4-силы Минковского равны:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt_s} = \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{1 - v^2/c^2} dt} \Rightarrow \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \mathbf{F}.$$

В последнем соотношении учтено, что для обеспечения предельного перехода к нерелятивистской механике необходимо положить $\mathbf{F} = \mathbf{f} \sqrt{1 - v^2/c^2}$, где \mathbf{F} — обычная сила, определенная в нерелятивистской механике Ньютона.

В силу ортогональности 4-скорости u^μ и 4-ускорения $w^\mu = du^\mu/dt_s$, очевидно, что скалярное произведение 4-скорости и 4-силы Минковского равно нулю, в результате для нулевой компоненты 4-силы Минковского получим выражение $f^0 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f})/c$. Таким образом, нулевая компонента уравнения Минковского имеет вид:

$$\frac{dp^0}{dt_s} = f^0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \frac{1}{c} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}).$$

В результате уравнения движения для релятивистской частицы могут быть записаны окончательно в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}), \quad \mathbf{p} \equiv \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \varepsilon \equiv \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

§6 Элементарная квантовая теория электромагнитного поля.

В начале XX века Планком было показано, что испускание или поглощение электромагнитного поля осуществляется порциями (квантами). При этом энергия ε кванта электромагнитного поля пропорциональна частоте ω колебаний поля $\varepsilon = \hbar\omega$ ($\hbar \simeq 1.05 \cdot 10^{-27}$ эрг.сек. — постоянная Планка). Такая корпускулярная модель электромагнитного поля предполагает, что поле состоит из порций (квантов) поля, которые получили название *фотоны*. Эйнштейном было предложено рассматривать фотоны как объекты аналогичные частицам и имеющим энергию ε и импульс \mathbf{p} .

Энергия и импульс фотона

В рамках теории Эйнштейна для электромагнитного поля частоты ω , распространяющегося в направлении волнового вектора $\mathbf{k} = \mathbf{n}\omega/c$, где \mathbf{n} — единичный вектор, энергия и импульс фотона имеют вид:

$$\varepsilon = \hbar\omega; \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \quad (12.30)$$

где \hbar — постоянная Планка.

При этом взаимодействие электромагнитного поля (фотонов) с частицами осуществляется аналогично процессу взаимодействия механических ча-

стиц на основе законов сохранения энергии и импульса всей системы частиц и фотонов.

4 — импульс фотона

На основании определений (12.30) 4-импульс фотона равен

$$q^\mu = \left(\hbar \frac{\omega}{c}, \hbar \mathbf{k} \right); \quad q_\mu = \left(\hbar \frac{\omega}{c}, -\hbar \mathbf{k} \right). \quad (12.31)$$

4-импульс фотона является 4-вектором и, следовательно, преобразования Лоренца для q^μ имеют вид:

$$q^\mu = \sum_{\lambda=0}^3 \gamma^\mu_{\lambda} q^{\lambda'} \quad (12.32)$$

Квадрат 4-импульса фотона, как и квадрат любого 4-вектора, является инвариантной величиной численное значение которой следует из определения и как показывают непосредственные вычисления этот инвариант равен нулю:

$$\sum_{\mu=0}^3 q^\mu q_\mu = \hbar^2 \frac{\omega^2}{c^2} - \hbar^2 k^2 = \hbar^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0. \quad (12.33)$$

Соотношение (12.33) означает, что масса фотона равна нулю, так как квадрат 4-импульса частицы массы m равен $m^2 c^2$.

Смысл квантовой теории электромагнитного поля Эйнштейна заключается в том, что обмен энергией и импульсом между взаимодействующими системами происходит путем рождения или уничтожения квантов электромагнитного поля. Последнее означает возможность применения фундаментальных законов сохранения энергии и импульса в процессах с участием электромагнитного поля. В системе частицы- электромагнитное поле законы сохранения энергии и импульса означают сохранение суммы 4-импульса всех частиц p_i и 4-импульса фотонов, образующих систему в целом, т.е.:

$$\sum_{k=1}^{N_1} p_k^\mu + \sum_{k=1}^{N_2} q_k^\mu = const. \quad (12.34)$$

В ряде случаев необходимо применять описанную здесь квантовую теорию электромагнитного поля для поля, распространяющегося в среде с показателем преломления $n(\omega)$, зависящем от частоты излучения. В этом случае энергия и импульс фотона определяются равенствами:

$$\varepsilon = \hbar \omega; \quad \mathbf{p} = n(\omega) \hbar \mathbf{k}. \quad (12.35)$$

§7 4-ток. 4-потенциал.

Для рассмотрения вопросов, связанных с определениями специальной теории относительности в рамках электродинамики введем 4-мерные обозначения для характеристик и источников поля.

4-ток.

4-ток определяется следующим соотношением:

$$j^\mu \equiv (c\rho, \mathbf{j}) \equiv (j^0, j^1, j^2, j^3), \quad j_\mu \equiv (c\rho, -\mathbf{j}).$$

В результате закон сохранения заряда можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0; \quad \sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu j^\mu = 0; \quad \sum_{\mu=0}^3 \partial^\mu j_\mu = 0. \quad (12.36)$$

Здесь $\partial_\mu = (\partial_0, \vec{\nabla})$, $\partial_0 = \partial^0 = \partial/c\partial t$, $\partial^\mu = (\partial^0, -\vec{\nabla})$ - операторы 4-ко- и 4-контравариантного дифференцирования, соответственно, являющиеся 4-векторами. В силу того, что (12.36) имеет форму скалярного произведения, а закон сохранения заряда выполняется в любой системе координат, можно сделать заключение о том, что определенный выше 4-ток является 4-вектором, то есть его компоненты при преобразованиях Лоренца ведут себя как любой 4-вектор

$$j^\mu = \sum_{\lambda=0}^3 \gamma^\mu{}_\lambda j^\lambda.$$

Например, для случая специального выбора систем координат эти преобразования имеют вид:

$$j^0 = \frac{j'^0 + j'^2 v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad j^1 = \frac{j'^1 + j'^0 v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad j^2 = j'^2; \quad j^3 = j'^3.$$

Здесь v — скорость относительного движения систем координат. Очевидно, что плотность заряда ρ — зависит от выбора системы координат $\rho = \rho'/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ и не является инвариантной величиной, в отличие от заряда, который инвариантен во всех системах.

4-потенциал.

Система уравнений Максвелла в вакууме при использовании векторного \mathbf{A} и скалярного φ потенциалов, удовлетворяющих условиям калибровки

Лоренца, является системой неоднородных волновых уравнений:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho \quad \Rightarrow \quad \square \varphi = -4\pi \rho,$$

где оператор д'Аламбера $\square = -\sum_{\mu=0}^3 \partial^\mu \partial_\mu = \square' = -\sum_{\mu=0}^3 \partial'^\mu \partial'_\mu = \text{invar.}$

Определим понятие 4-потенциала следующим равенством:

$$A^\mu \equiv (\varphi, \mathbf{A}), \quad A_\mu \equiv (\varphi, -\mathbf{A}).$$

Используя данное определение уравнения для потенциалов в четырех мерных обозначениях примут вид:

$$\square A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (12.37)$$

Полученное уравнение означает, что определенный выше 4-потенциал является 4-вектором, так как с правой стороны равенства (12.37) стоит величина j^μ , являющийся 4-вектором, а в силу инвариантности оператора \square , выражение $\square A^\mu$ - есть 4 - вектор. Таким образом A^μ -4-вектор. Это означает, что 4-потенциал преобразуется по общему для всех 4-векторов правилу:

$$A_\mu = \sum_{\lambda=0}^3 \gamma^\mu_{\lambda} A'^{\lambda}. \quad (12.38)$$

Таким образом электромагнитное поле в общем случае не является инвариантной величиной и зависит от системы координат в которой оно наблюдается.

Второй важный вывод, который следует из 4-х мерной записи системы уравнений Максвелла в форме (12.37) состоит в том, что эта форма в явном виде показывает инвариантность системы уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца. То есть система уравнений для описания электромагнитного поля исходно удовлетворят принципам специальной теории относительности.

Для доказательства выполним преобразование Лоренца всех величин, входящих в систему уравнений Максвелла (12.37) в выбранной системе координат. В результате получим:

$$\sum_{\lambda=0}^3 \gamma^\mu_{\lambda} [\square' A'^{\lambda} + \frac{4\pi}{c} j'^{\lambda}] = 0.$$

В силу произвольности преобразований Лоренца последнее равенство имеет место если

$$\square' A'^{\lambda} = -\frac{4\pi}{c} j'^{\lambda}.$$

что и доказывает инвариантность формы записи системы уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца что является требованием специальной теории относительности.

§8 Тензор электромагнитного поля.

Четырехмерная формулировка системы уравнений Максвелла возможна не только с использованием 4-потенциала, но и с использованием компонент векторов поля **Е**, **В**. С этой целью вводится 4-тензор второго ранга, состоящий из компонент поля, который и называется *тензором электромагнитного поля*.

Для построения тензора электромагнитного поля воспользуемся определениями скалярного и векторного потенциалов

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Рассмотрим для примера E_x -компоненту электрического поля. С учетом определения ко- и контра-вариантных составляющих 4-потенциала и 4-радиус-вектора получим:

$$E_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0.$$

Аналогично для других компонент электрического поля

$$E_y = \partial_0 A_2 - \partial_2 A_0, \quad E_z = \partial_0 A_3 - \partial_3 A_0.$$

Из определения ротора векторного потенциала для компоненты магнитного поля B_x находим:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\partial A_3}{\partial x^2} + \frac{\partial A_2}{\partial x^3} = \partial_3 A_2 - \partial_2 A_3.$$

Аналогично для двух других компонент магнитного поля:

$$B_y = \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1, \quad B_z = \partial_2 A_1 - \partial_1 A_2.$$

Таким образом, компоненты поля выражаются в виде следующей комбинацией производных от 4-потенциала

$$F_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha, \quad \alpha, \beta \in 0, \dots, 3. \quad (12.39)$$

Шестнадцать компонент $F_{\alpha\beta}$, определенных соотношением (12.39) образуют 4-тензор, так как являются произведением компонент 4-векторов, то есть при преобразованиях Лоренца удовлетворяют соотношению:

$$F_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda,\mu=0}^3 a_{\alpha}^{\lambda} a_{\beta}^{\mu} F'_{\lambda\mu}, \quad (12.40)$$

где матрица преобразований a связана с матрицей преобразования Лоренца соотношением $a = \gamma(-v)$. Таким образом, $F_{\alpha\beta}$ образует ко-вариантный тензор второго ранга, который может быть представлен и в контра-вариантной форме

$$F^{\mu\nu} = \sum_{\alpha,\beta=0}^3 g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta},$$

(g — метрический тензор) и в форме смешанного тензора F^{μ}_{ν} или F_{ν}^{μ} в соответствии с правилами преобразований от ко- к контравариантной форме и обратно. Преобразования Лоренца для контра-вариантного и смешанного тензоров имеют вид, соответственно:

$$F^{\alpha\beta} = \sum_{\lambda,\mu=0}^3 \gamma^{\alpha}_{\lambda} \gamma^{\beta}_{\mu} F'_{\lambda\mu}, \quad F^{\alpha}_{\beta} = \sum_{\lambda,\mu=0}^3 \gamma^{\alpha}_{\lambda} a_{\beta}^{\mu} F'^{\lambda}_{\mu}. \quad (12.41)$$

Свойства тензора электромагнитного поля.

На основании определения тензора электромагнитного поля можно установить следующие общие свойства:

1. Тензор электромагнитного поля антисимметричен, то есть $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$. Если расположить шестнадцать компонент тензора в виде матрицы размерности 4×4 , то это свойство означает, что тензор антисимметричен относительно главной диагонали.
2. $F_{\alpha\alpha} = 0$ для $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Если расположить шестнадцать компонент тензора в виде квадратной матрицы, диагональные члены такой матрицы равны нулю.
3. Явный вид тензора вытекает из определения его компонент. Для ко-вариантного и контра-вариантного тензора представленного в виде квад-

ратной матрицы размерности 4×4 получим:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}; \quad F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответственно для смешанных тензоров имеем:

$$F^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}; \quad F_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Тензор электромагнитного поля инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\tilde{\mathbf{A}}' \rightarrow \mathbf{A} + \text{grad } \chi; \quad \tilde{\varphi}' \rightarrow \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}; \quad \Rightarrow \quad A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi,$$

где χ - произвольная скалярная функция. Доказательство следует из определения (12.39):

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \tilde{A}_\beta - \partial_\beta \tilde{A}_\alpha = \partial_\alpha (A_\beta - \partial_\beta \chi) - \partial_\beta (A_\alpha - \partial_\alpha \chi) = F_{\alpha\beta}$$

Система уравнений Максвелла.

Используя определение тензора электромагнитного поля можно представить систему уравнений Максвелла в вакууме в следующем виде:

$$\sum_{\alpha=0}^3 \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta; \quad (12.42)$$

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0. \quad (12.43)$$

Здесь $\beta, \lambda, \mu, \nu \in 0, 1, 2, 3$.

Рассмотрим, например, первое из уравнений (12.42) для случая $\beta = 0$

$$\sum_{\alpha} \partial_\alpha F^{0\alpha} = -\frac{4\pi}{c} j^0; \quad \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{01} + \partial_2 F^{02} + \partial_3 F^{03} = -\frac{4\pi}{c} (c\rho).$$

Подставляя явный вид компонент тензора электромагнитного поля и компонент 4-тока получим:

$$-\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z} = -4\pi\rho \rightarrow \text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

что соответствует закону Кулона в дифференциальной форме.

Вычисляя явный вид уравнения (12.42) при $\beta = 1, 2, 3$, получим проекции векторного уравнения для обобщенного закона Ампера на декартовы оси:

$$c(\text{rot } \mathbf{B})_k = 4\pi (\mathbf{j})_k + (\dot{\mathbf{E}})_k, \quad k = x, y, z.$$

Здесь точка над вектором означает дифференцирование по времени. В силу того, что в 4-х мерном уравнении (12.42) объединились два уравнения системы уравнений Максвелла - закон Кулона и закон Ампера, об этих уравнениях говорят как о первой паре системы уравнений Максвелла.

Аналогично уравнения (12.43) приводят к закону электромагнитной индукции Фарадея и закону отсутствия магнитных зарядов. В этом случае, при различных значениях λ, μ, ν имеется 64 уравнения из которых не являются тождественными нулями только четыре, приводящие ко второй паре системы уравнений Максвелла.

Дуальный тензор.

Если ввести тензор четвертого ранга по следующему определению:

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} = \begin{cases} 1 & (\lambda\mu\nu\rho) \rightarrow (0, 1, 2, 3) \text{ четные перестановки} \\ -1 & (\lambda\mu\nu\rho) \rightarrow (0, 1, 2, 3) \text{ нечетные перестановки} \\ 0 & \text{во всех остальных случаях} \end{cases}$$

то тензор $*F^{\lambda\mu}$, который получается вычислением свертки по двум индексам в соответствии с определением:

$$*F^{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu, \rho=0}^3 \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}, \quad (12.44)$$

называется тензором дуальным к тензору второго ранга $F_{\lambda\mu}$ или дуальным тензором. Дуальный к $F_{\lambda\mu}$ тензор обозначается значком $*$ слева от тензора, как указано в (12.44)

С учетом определения дуального тензора, вторую пару системы уравнений Максвелла вместо выражения $\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$ можно представить в виде похожем на первую пару системы уравнений Максвелла:

$$\sum_{\lambda=0}^3 *F^{\lambda\mu} = 0; \quad \mu \in 0, 1, 2, 3.$$

§9 Преобразование напряженностей полей. Инварианты поля.

Тензор электромагнитного поля является естественным инструментом для установления связи напряженностей полей в различных системах координат. Формулы (12.40), (12.41) позволяют вычислить значения векторов поля в произвольной лоренцевской системе координат, если в какой-то системе координат поле известно.

Формулы преобразования векторов поля.

Рассмотрим, для примера, вычисление компоненты напряженности электрического поля E_x в системе координат S , если поле в системе координат S' известно. Здесь предполагается специальный выбор движения системы координат S' относительно системы координат S со скоростью v вдоль совпадающих осей x .

Воспользуемся контравариантным тензором электромагнитного поля, в этом случае преобразования Лоренца приводят к следующему результату:

$$F^{01} \equiv -E_x = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \gamma^0_{\mu} \gamma^1_{\nu} F'^{\mu\nu} = -\frac{E'_x}{1 - v^2/c^2} + \frac{vE'_x/c}{1 - v^2/c^2} = -E'_x$$

Аналогичные вычисления для других компонент тензора электромагнитного поля приводят к следующим формулам преобразования полей:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + v B'_z/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E_z = \frac{E'_z - v B'_y/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad (12.45)$$

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \frac{B'_y - v E'_z/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad B_z = \frac{B'_z + v E'_y/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (12.46)$$

Представленные выражения в явном виде демонстрируют тот факт, что электромагнитное поле не является инвариантной величиной и зависит от системы координат в которой оно наблюдается.

Инварианты поля.

Несмотря на относительность поля из компонент поля могут быть составлены инвариантные величины, которые не зависят от выбора систем координат. Эти величины называются инвариантами поля. Для их вывода воспользуемся тем обстоятельством, что свертка произведений тензоров, является инвариантной величиной.

Простейшей сверткой является свертка самого тензора электромагнитного поля $\sum_{\alpha=0}^3 F_{\alpha}^{\alpha}$. В силу явного вида компонент тензора электромагнитного поля такая свертка является величиной тождественно равной нулю, так как диагональные компоненты тензора электромагнитного поля равны нулю.

Следующей возможной сверткой является свертка двух тензоров электромагнитного поля. Вычисление данного выражения дает:

$$\sum_{\alpha\beta=0}^3 F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 2(B^2 - E^2) = \text{invar}.$$

Таким образом, для электромагнитного поля в любой системе координат остается инвариантной величина $B^2 - E^2 = J_1 = \text{invar}$, которая называется *первым инвариантом электромагнитного поля*.

Доказательство инвариантности рассматриваемой свертки тензора электромагнитного поля можно продемонстрировать явными вычислениями:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha\beta=0}^3 F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} &= \sum_{\alpha\beta=0}^3 \left(\sum_{\lambda\mu=0}^3 \gamma_{\lambda}^{\alpha} \gamma_{\mu}^{\beta} F'^{\lambda\mu} \right) \left(\sum_{\tau\sigma=0}^3 a_{\alpha}^{\tau} a_{\beta}^{\sigma} F'_{\tau\sigma} \right) = \\ &= \sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu,\tau,\sigma=0}^3 \underbrace{\gamma_{\lambda}^{\alpha} a_{\alpha}^{\tau}}_{\delta_{\lambda\tau}} \cdot \underbrace{\gamma_{\mu}^{\beta} a_{\beta}^{\sigma}}_{\delta_{\mu\sigma}} \cdot F'^{\lambda\mu} F'_{\tau\sigma} = \sum_{\lambda,\mu=0}^3 F'^{\lambda\mu} F'_{\lambda\mu} = \text{invar}. \end{aligned}$$

Следующей возможной сверткой является свертка произведения трех тензоров электромагнитного поля. Однако, из-за антисимметрии тензора электромагнитного поля, следует, что свертка любого нечетного числа произведений компонент тензора является величиной тождественно равной нулю.

Следующая возможность состоит в рассмотрении произведения четырех тензоров поля. Такая свертка тензоров не равна нулю и приводит к еще одному инварианту поля, который называется *вторым инвариантом поля*. Непосредственные вычисления свертки четырех тензоров приводит к следующему выражению:

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=0}^3 F^{\alpha\beta} F_{\beta\gamma} F^{\gamma\delta} F_{\delta\alpha} = \text{invar} = 2(B^2 - E^2)^2 + 4(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2,$$

здесь $J_2 = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})^2$ и называется вторым инвариантом электромагнитного поля.

Вычисление последующих свертков от четного числа тензоров электромагнитного поля показывает, что все ненулевые выражения определяются уже установленными первым и вторым инвариантом поля.

Таким образом, из векторов электромагнитного поля можно построить два инварианта, которые остаются постоянными в любой системе отсчета.

Следствия наличия инвариантов поля.

Наличие установленных инвариантов поля означает, что если в какой-то системе координат векторы ортогональны $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$, то эта ортогональность имеет место во всех системах координат.

Кроме того, если в какой-то системе координат первый инвариант поля положителен $J_1 > 0$, то можно найти такую инерциальную систему в которой электрическое поле полностью отсутствует $\mathbf{E} = 0$ и есть только магнитное поле. Наоборот если в какой-то системе координат электромагнитное поле таково, что первый инвариант поля отрицателен $J_1 < 0$, это означает, что можно выбрать лоренцевскую систему отсчета в которой имеется только электрическое поле, а $\mathbf{B} = 0$.

§ 10 Тензор энергии-импульса электромагнитного поля.

С использованием тензора электромагнитного поля система уравнений Максвелла определяется уравнениями (12.42), (12.43). Выполним ряд тождественных преобразований с этими уравнениями. Умножим левую и правую стороны уравнения (12.42) на тензор электромагнитного поля: $F_{\beta\rho}$ и просуммируем по β . В результате:

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^3 F_{\beta\rho} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} \sum_{\beta=0}^3 F_{\beta\rho} j^\beta \quad (12.47)$$

Перепишем тождественно левую часть равенства (12.47) следующим образом:

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^3 \left[\partial_\alpha (F_{\beta\rho} \cdot F^{\alpha\beta}) - \underbrace{F^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \cdot F_{\beta\rho})}_{(*)} \right] = \frac{4\pi}{c} \sum_{\beta=0}^3 F_{\beta\rho} j^\beta \quad (12.48)$$

Отмеченное звездочкой слагаемое в последнем равенстве можно переписать в виде:

$$- F^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \cdot F_{\beta\rho}) = -\frac{1}{2} \{ F^{\alpha\beta} \partial_\alpha F_{\beta\rho} + F^{\alpha,\beta} \partial_\alpha F_{\beta\rho} \}. \quad (12.49)$$

Во втором слагаемом правой части тождества (12.49) переобозначим индексы суммирования $\alpha \Rightarrow \beta$, что не меняет результата под знаком суммы. Таким образом, правую часть тождества (12.49) можно представить в виде:

$$-\frac{1}{2} \{F^{\alpha\beta} \partial_\alpha F_{\beta\rho} + F^{\alpha\beta} \partial_\alpha F_{\beta\rho}\} = -\frac{1}{2} \{F^{\alpha\beta} \partial_\alpha F_{\beta\rho} + F^{\beta\alpha} \partial_\beta F_{\alpha\rho}\}. \quad (12.50)$$

Учитывая свойство антисимметрии тензора электромагнитного поля, преобразуем выражение (12.50) и представим его следующим образом:

$$-\frac{1}{2} \{F^{\alpha\beta} \partial_\alpha F_{\beta\rho} + F^{\alpha\beta} \partial_\beta F_{\rho\alpha}\} = -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \{\partial_\alpha F_{\beta\rho} + \partial_\beta F_{\rho\alpha}\} \quad (12.51)$$

Так как на основании (12.43) $\{\partial_\alpha F_{\beta\rho} + \partial_\beta F_{\rho\alpha}\} = -\partial_\rho F_{\alpha\beta}$ для правой части равенства (12.51) получим:

$$-\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \{\partial_\alpha F_{\beta\rho} + \partial_\beta F_{\rho\alpha}\} = \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \partial_\rho F_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \partial_\rho (F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}). \quad (12.52)$$

В результате, представленные тождественные преобразования приводят к следующему выражению для (12.48):

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^3 \left[\partial_\alpha (F^{\alpha\beta} F_{\rho\beta}) - \frac{1}{4} \partial_\rho (F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}) \right] = -\frac{4\pi}{c} \sum_{\beta=0}^3 j^\beta F_{\beta\rho}$$

Перепишем окончательно данное выражение в виде:

$$\sum_{\alpha=0}^3 \partial_\alpha T^\alpha_\rho = \frac{1}{c} \sum_{\alpha=0}^3 j^\alpha F_{\alpha\rho}, \quad T^\alpha_\rho \equiv -\frac{1}{4\pi} \left[\sum_{\beta=0}^3 F^{\alpha\beta} F_{\rho\beta} - \frac{1}{4} J_1 \delta^\alpha_\rho \right] \quad (12.53)$$

Здесь J_1 -первый инвариант электромагнитного поля.

Шестнадцать компонент T^α_ρ , $\alpha, \rho \in 0, \dots, 3$ образуют 4-тензор второго ранга, который *называется тензором энергии-импульса*.

Тензор натяжений Максвелла.

Для нахождения явного вида тензора энергии импульса необходимо воспользоваться определением тензора электромагнитного поля и провести суммирование его компонент в соответствии с (12.53). В результате получим:

$$T^\alpha_\rho = \begin{pmatrix} \frac{E^2+B^2}{8\pi} & -\frac{[\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{B}}]_x}{4\pi} & -\frac{[\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{B}}]_y}{4\pi} & -\frac{[\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{B}}]_z}{4\pi} \\ \frac{[\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{B}}]_x}{4\pi} & T^1_1 & T^1_2 & T^1_3 \\ \frac{[\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{B}}]_y}{4\pi} & T^2_1 & T^2_2 & T^2_3 \\ \frac{[\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{B}}]_z}{4\pi} & T^3_1 & T^3_2 & T^3_3 \end{pmatrix} \quad (12.54)$$

Пространственная часть тензора энергии - импульса T_k^i , $i, k \in 1, 2, 3$ связана с тензором натяжений Максвелла $M_{ik} = T_k^i$ и равна:

$$M_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[E_i E_k + B_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (E^2 + B^2) \right]; \quad i, k \in 1, 2, 3 \equiv x, y, z.$$

Закон сохранения энергии - импульса.

Уравнение (12.53) в частных случаях выбора ρ соответствует законам сохранения энергии и импульса. Пусть, например, $\rho = 0$. В этом случае из (12.53) находим:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) + \operatorname{div} \left(\frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{4\pi} \right) = -\frac{1}{c} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}),$$

что соответствует дифференциальной форме закона сохранения энергии.

Положим в (12.53) $\rho = k$, где $k = 1, 2, 3$. В этом случае получим закон сохранения импульса

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]_k}{4\pi c} \right) = - \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\ell} T_k^\ell - \left(\rho E_k + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]_k \right).$$

§11 Электродинамика движущихся сред.

Предыдущее изложение показывает, что законы электродинамики могут быть записаны в релятивистски инвариантной форме. Однако, так как вещество состоит из огромного числа атомов и молекул, то есть огромного числа заряженных частиц, реально использовать установленные законы для вещества не представляется возможным. Так как в этом случае необходимо учесть движение всех заряженных частиц вещества. По этой причине оказывается необходимым феноменологическое рассмотрение уравнений электромагнитного поля при наличии движущегося вещества.

Феноменологические уравнения поля.

Пусть в инерциальной системе отсчета S' вещество покоится, а в системе отсчета S движется со скоростью \mathbf{v} . Феноменологические уравнения для электромагнитного поля в покоящейся системе координат имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{D}' = 4\pi \rho'; \quad \operatorname{div} \mathbf{B}' = 0; \quad (12.55)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}' = \frac{1}{4\pi} \mathbf{j}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'}.$$

При этом векторы поля связаны материальными уравнениями:

$$\mathbf{D}' = \epsilon \mathbf{E}'; \quad \mathbf{B}' = \mu \mathbf{H}', \quad (12.56)$$

в которых ϵ, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемость среды, соответственно.

Используя преобразования Лоренца можно вывести вид уравнений (12.55), (12.56) в произвольной системе координат S . В общем случае среду можно рассматривать как единый объект. В том случае, если различные части вещества движутся с разными скоростями, то вещество можно разбить на маленькие части, движущиеся с одной постоянной скоростью. Если среда движется с ускорением, то следует рассматривать малые интервалы времени, в течении которых скорость можно считать постоянной.

Релятивистская форма уравнений поля в среде

Чтобы применить преобразования Лоренца к (12.55), (12.56) необходимо представить эти уравнения в тензорной форме. С этой целью введем дополнительный тензор электромагнитного поля, составленный из компонент векторов \mathbf{D} и \mathbf{H} по следующему определению:

$$f^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (12.57)$$

В результате, с учетом определения тензора электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ составленного из компонент векторов поля \mathbf{E}, \mathbf{B} (12.39) система уравнений Максвелла в среде примет вид:

$$\sum_{\alpha=0}^3 \partial'_\alpha f^{\alpha\beta'} = \frac{4\pi}{c} j^{\beta'}; \quad \partial'_\lambda F'_{\mu\nu} + \partial'_\mu F'_{\nu\lambda} + \partial'_\nu F'_{\lambda\mu} = 0, \quad (12.58)$$

здесь $j_\mu \equiv (c\rho, \mathbf{j})$ — 4-ток. Данная система уравнений имеет инвариантный вид в любой лоренцевской системе отсчета.

Материальные уравнения (12.56) определены только в неподвижной системе координат и в четырехмерной форме могут быть представлены в виде:

$$f^{0k'} = \epsilon F^{0k'}; \quad f^{km'} = \frac{1}{\mu} F^{km'}; \quad k, m \in 1, 2, 3. \quad (12.59)$$

Для определения вида материальных уравнений в произвольной системе координат необходимо выполнить преобразования Лоренца и перейти в произвольную систему координат.

Преобразование Лоренца.

В соответствии с уравнением (12.58) $f^{\alpha\beta}$ — 4-тензор. Поэтому преобразование Лоренца для данного тензора имеют вид:

$$f^{\alpha\beta} = \sum_{\lambda\mu=0}^3 \gamma_{\lambda}^{\alpha} \gamma_{\mu}^{\beta} f^{\lambda\mu} \quad (12.60)$$

Перепишем данное выражение выделив суммирование по пространственным и временным компонентам. В результате с учетом равенства $f^{00} = 0$ получим:

$$\begin{aligned} f^{\alpha\beta} &= \sum_{m=1}^3 \gamma_0^{\alpha} \gamma_m^{\beta} f^{0m'} + \sum_{k=1}^3 \gamma_k^{\alpha} \gamma_0^{\beta} f^{k0'} + \sum_{k,m=1}^3 \gamma_k^{\alpha} \gamma_m^{\beta} f^{km'} = \\ &= \sum_{k=1}^3 \left(\gamma_0^{\alpha} \gamma_k^{\beta} - \gamma_k^{\alpha} \gamma_0^{\beta} \right) f^{0k'} + \sum_{k,m=1}^3 \gamma_k^{\alpha} \gamma_m^{\beta} f^{km'}. \end{aligned}$$

Последнее соотношение можно переписать с учетом равенств (12.59) в следующем виде:

$$f^{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^3 \left(\gamma_0^{\alpha} \gamma_k^{\beta} - \gamma_k^{\alpha} \gamma_0^{\beta} \right) \epsilon F^{0k'} + \sum_{k,m=1}^3 \gamma_k^{\alpha} \gamma_m^{\beta} \frac{1}{\mu} F^{km'} \quad (12.61)$$

Подставляя в последнее равенство преобразование Лоренца для тензора электромагнитного поля вида:

$$F^{\alpha\beta} = \sum_{\sigma\tau=0}^3 a_{\sigma}^{\alpha} a_{\tau}^{\beta} F^{\sigma\tau},$$

где a — матрица обратная к матрице γ и суммируя по k и m , получим:

$$f^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{\mu} \sum_{\sigma,\tau=0}^3 \left[(\epsilon\mu - 1) \delta_{\tau}^{\beta} \gamma_0^{\alpha} - (\epsilon\mu - 1) \delta_{\tau}^{\alpha} \gamma_0^{\beta} \right] a_{\sigma}^0 F^{\sigma\tau}. \quad (12.62)$$

Здесь δ_{β}^{α} — 4-символ Кронекера, равный 1 при $\alpha = \beta$ и 0 при $\alpha \neq \beta$. При выводе равенства (12.62) использовано, что $F^{00} = 0$ и кроме того:

$$\sum_{k=1}^3 \gamma_k^{\alpha} a_{\tau}^k = \delta_{\tau}^{\alpha} - \gamma_0^{\alpha} a_{\tau}^0.$$

Чтобы определить величину γ_0^α будем рассуждать следующим образом. 4-координаты начала отсчета системы S' в системе S имеют вид:

$$x^{\mu'} \equiv \{x^{0'}, \mathbf{r}' = 0\}; \quad x^\mu \equiv \{x^0 = ct, \mathbf{r}(t)\}.$$

Таким образом, дифференцируя равенство $x^\mu = \gamma_0^\mu x^{0'}$ по времени t системы координат S для $k = 1, 2, 3$ получим:

$$v^k = \frac{dx^k}{dt} = \gamma_0^k \frac{dx^{0'}}{dt}.$$

Аналогично для $\mu = 0$

$$\frac{dx^0}{dt} = c = \gamma_0^0 \frac{dx^{0'}}{dt}.$$

В соответствии с определением метрического тензора g имеем:

$$1 = g_{00} = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \gamma_0^\mu \gamma_0^\nu g_{\mu\nu} = (c^2 - v^2) \left(\frac{dx^{0'}}{dt} \right)^{-1}.$$

Таким образом находим для γ_0^μ

$$\gamma_0^k \equiv \frac{v^k}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{u^k}{c}, \quad k \in 1, 2, 3; \quad \gamma_0^0 \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{u^0}{c},$$

где u^k — 4-скорость.

Материальные уравнения.

Окончательно материальные уравнения в произвольной системе координат могут быть представлены на основании (12.62) в виде:

$$f^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2 \mu} \sum_{\sigma, \tau=0}^3 [(\epsilon \mu - 1) \delta_\tau^\alpha u^\beta - (\epsilon \mu - 1) \delta_\tau^\beta u^\alpha] u_\sigma F^{\sigma\tau}. \quad (12.63)$$

В трехмерных обозначениях полученное равенство означает выполнение следующих соотношений:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \left\{ \epsilon \left(1 - \frac{v^2}{c^2 n^2} \right) \mathbf{E} + \frac{n^2 - 1}{\mu} \left[\frac{\mathbf{v}}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right] \right\}, \quad (12.64)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \left\{ \frac{1 - n^2 v^2/c^2}{\mu} \mathbf{B} + \frac{n^2 - 1}{\mu} \left[\frac{\mathbf{v}}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] \right] \right\}. \quad (12.65)$$

Здесь $n^2 \equiv \epsilon \mu$. В случае малых скоростей движения среды с точностью до членов первого порядка по v/c из (12.65) получим:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} - \frac{n^2 - 1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \frac{n^2 - 1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}]. \quad (12.66)$$

Граничные условия.

Граничные условия также претерпевают изменения при движении вещества. Однако нормальные составляющие векторов индукции электрического и магнитного полей ведут себя на границе раздела аналогично случаю неподвижной среды, так как $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$:

$$D_{n2} - D_{n1} = 0; \quad B_{n2} - B_{n1} = 0. \quad (12.67)$$

Поведение тангенциальных составляющих полей можно определить путем перехода от неподвижной системы отсчета к движущейся. В соответствии с формулами релятивистских преобразований полей можно определить требование непрерывности тангенциальных компонент следующих комбинированных векторов [18]:

$$\mathbf{E}^* \equiv \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]; \quad \mathbf{H}^* \equiv \mathbf{H} - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{D}]. \quad (12.68)$$

Проецируя данные векторы на плоскость, перпендикулярную вектору нормали к границе раздела \mathbf{n} получаются следующие граничные условия:

$$[\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)] = \frac{v_n}{c} (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), \quad [\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] = -\frac{v_n}{c} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1). \quad (12.69)$$

Тензорная форма закона Ома.

Для записи закона Ома в тензорной форме выразим 4-ток в системе координат S через характеристики системы координат S' в которой вещество покоится. В соответствии с законом Ома и определениями 4-тока и тензора электромагнитного поля имеем в системе S' :

$$j^{k'} = \sigma F^{0k}; \quad k \in 1, 2, 3.$$

Выполняя преобразование к системе координат S получим:

$$j^\mu = -\frac{1}{c^2} u^\mu \sum_{\nu=0}^3 u_\nu j^\nu + \frac{\sigma}{c} \sum_{\nu=0}^3 u_\nu F^{\mu\nu}, \quad \mu \in 0, 1, 2, 3. \quad (12.70)$$

Для трехмерных векторов последнее равенство имеет вид:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2; \quad \mathbf{j}_1 \equiv \frac{\sigma}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} \left[\mathbf{E}^* - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}^*) \right]; \quad \mathbf{j}_2 \equiv \varrho \mathbf{v}. \quad (12.71)$$

где \mathbf{j}_1 называется плотностью тока проводимости, а \mathbf{j}_2 — конвекционным током:

§12 Эффект Доплера.

Эффект Доплера - это явление изменения частоты периодических процессов в различных системах координат. Рассмотрим это явление на примере переменного электромагнитного поля частоты ω .

Рассмотрим две системы координат S и S' , движущиеся вдоль совпадающих осей x, x' с относительной скоростью v . Пусть в момент времени $t'_1 = t_1$ по часам системы S' в начале координат этой системы происходит вспышка света. Наблюдатель, находящийся в начале координат S зарегистрирует эту вспышку в момент времени

$$t_n = t_1 + \frac{x}{c} = t_1 + \frac{vt_1}{c} = t_1 \left(1 + \frac{v}{c}\right) = t'_1 \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = t'_1 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}.$$

Соответственно, для интервала между двумя вспышками получим следующее выражение, связывающее интервалы времени в разных системах отсчета :

$$\Delta t = \Delta t' \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \quad (12.72)$$

Пусть в системе координат S' интервалы времени между вспышками постоянны и равны T' . Другими словами период процесса в собственной системе координат равен T' . В соответствии с представленным результатом в лабораторной системе координат период процесса меняется и зависит от скорости источника. Удобнее в этом случае ввести понятие частоты периодического процесса $\omega = 2\pi/T$ в лабораторной и собственной $\omega' = 2\pi/T'$ системах координат.

Как следует из (12.72) в случае, если источник удаляется от наблюдателя, частота измеренная наблюдателем лабораторной системы координат меньше собственной частоты источника.

$$\omega = \omega' \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.$$

Такой эффект Доплера называют красным смещением, так как для света уменьшение частоты, соответствует возрастанию длины волны и в области оптического диапазона это означает смещение длины волны в сторону красного света.

Если источник движется на наблюдателя, тогда:

$$\omega = \omega' \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$

Это означает, что частота, зарегистрированная наблюдателем, будет больше собственной частоты источника, и в этом случае *говорят о фиолетовом смещении* в том смысле, что если бы речь шла об электромагнитной волне оптического диапазона, то наблюдаемая покоящимся наблюдателем длина волны излучения была бы зарегистрирована в сравнении с длиной волны источника смещенной в сторону фиолетового света.

Для переменного электромагнитного поля, фиксированной частоты ω , распространяющегося в свободном пространстве зависимость от координат и времени определяется множителем $\exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, где \mathbf{k} - волновой вектор. Волновой вектор направлен по направлению распространения волны и численно равен $k = \omega/c$.

Множитель $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ называется фазой электромагнитной волны. Так как в соответствии с эффектом Доплера частота зависит от выбора системы координат, а координаты и время удовлетворяют известным преобразованиям Лоренца, то видно, что фаза электромагнитной волны является инвариантной величиной $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{invar}$. Такое же заключение можно сделать и на основании второго инварианта электромагнитного поля.

Следовательно, если ввести понятие 4-волновой вектор по определению: $k^\mu \equiv (\omega/c, \mathbf{k})$, то фаза электромагнитной волны запишется в форме совпадающей со скалярным произведением: $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \sum_{\mu=0}^3 k^\mu x_\mu = \text{invar}$. А так как x_μ - есть 4-вектор, то определенный выше 4-волновой вектор является 4-вектором и при переходе из одной системы координат в другую преобразуется по общему для всех 4-векторов закону:

$$k^\mu = \sum_{\lambda=0}^3 \gamma^\mu_{\lambda} k'^{\lambda},$$

где γ - матрица преобразований Лоренца.

При специальном выборе систем координат (движение вдоль совпадающих осей x) преобразования временных компонент 4-волнового вектора приводит к следующим выражениям для прямых и обратных преобразований:

$$\omega = \frac{\omega' + v \cdot k'_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega' \frac{(1 + v/c \cos \theta')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\omega' = \omega \frac{1 - v/c \cos \theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \Rightarrow \omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c \cos \theta}. \quad (12.73)$$

Последнее выражение наиболее удобно для применения, так как определяет частоту наблюдаемую в лабораторной системе координат через собственную частоту источника и угол между волновым вектором и вектором скорости движущегося источника в лабораторной системе координат.

Продольный эффект Доплера.

Выражение (12.73) при значении угла $\theta = 0$ или $\theta = \pi$ определяет так называемый *продольный эффект Доплера*. В частном случае $\theta = 0$, волновой вектор совпадает с направлением скорости движения источника, источник движется на наблюдателя и возникает фиолетовое смещение. При значении угла $\theta = \pi$ — волновой вектор направлен против скорости движения источника, источник удаляется от наблюдателя и проявляется красное смещение.

Поперечный эффект Доплера.

Самым принципиальным результатом выражения (12.73) является то обстоятельство, что данная формула предсказывает существование так называемого *поперечного эффекта Доплера* $\theta = \pi/2$. В этом случае направления скорости источника и волнового вектора ортогональны. С точки зрения классической механики поперечного эффекта Доплера не может быть в принципе из-за абсолютности времени. Кроме того, в направлении ортогональном скорости не происходит изменения пространственных переменных. Тем не менее существование поперечного эффекта Доплера было подтверждено экспериментально в 1935 году и стало первым экспериментальным доказательством справедливости специальной теории относительности.

§13 Действие в электромагнитном поле.

Функция действия для системы "заряженные частицы - поле" может быть представлена в виде суммы трех слагаемых [19]:

$$S = S_p + S_f + S_{pf} \quad (12.74)$$

где S_p — функция действия системы частиц, S_f — функция действия для электромагнитного поля, S_{pf} — функция действия взаимодействия частиц с полем.

Функция действия для системы частиц может содержать только 4-координаты и, следовательно, может быть представлена в виде:

$$S_p = - \sum_{i=1}^N m_i c \int ds \quad (12.75)$$

Функция действия, определяющая взаимодействие заряженных частиц с электромагнитным полем должна содержать переменные характеризующие координаты частиц и переменные поля. С учетом использованных выше величин такая часть действия может быть записана следующим образом:

$$S_{pf} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{c} \int \sum_{\mu=0}^4 A^\mu dx_\mu \quad (12.76)$$

Функция действия для поля S_f - зависит только от переменных, определяющих свойства поля в отсутствии заряженных частиц. Поля удовлетворяют принципу суперпозиции. Это означает, что уравнения для описания поля должны быть линейными. Следовательно в S_f - могут содержаться только квадратичные по полю слагаемые. Так как S_f должна быть скалярной функцией, то существует единственный скаляр второго порядка по полю, который может быть построен из тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$. Поэтому

$$S_f = const \int \int \sum_{\lambda, \mu=0}^3 F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} dv dt \quad (12.77)$$

В системе единиц Гаусса $const = -1/16\pi$. Таким образом, действие для системы "заряженные частицы - электромагнитное поле" определяется суммой слагаемых (12.75)-(12.77).

§14 Принцип наименьшего действия в электродинамике.

Известно, что принцип наименьшего действия позволяет получить уравнения движения исходя из вида функции действия. Для заряженной частицы, находящейся в фиксированном электромагнитном поле функция действия имеет вид:

$$S_1 = S_p + S_{pf} = \int_a^b \left(-mc ds + \frac{q}{c} \sum_{\mu=0}^3 A^\mu dx_\mu \right) = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (12.78)$$

где L - функция Лагранжа или Лагранжиан:

$$L \equiv -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\varphi. \quad (12.79)$$

Градиент функции L по переменной \mathbf{v} в соответствии с методом Лагранжа в механике определяет обобщенный импульс частицы в поле \mathbf{p} :

$$\mathbf{p} = \text{grad}_{\mathbf{v}} L \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \quad (12.80)$$

Исходя из вида функции Лагранжа можно найти функцию Гамильтона для частицы находящейся в поле:

$$\mathcal{H} = \mathbf{v} \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + q\varphi. \quad (12.81)$$

Гамильтониан системы выражается через импульс, что с учетом соотношения (12.80) приводит к следующему соотношению:

$$\left(\frac{\mathcal{H} - q\varphi}{c} \right)^2 = m^2 c^2 + \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 \quad (12.82)$$

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2} + q\varphi \quad (12.83)$$

Уравнение Гамильтона-Якоби.

Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы в электромагнитном поле следует из (12.82) с использованием определений $\mathbf{p} \rightarrow \text{grad } S$, $\mathcal{H} \rightarrow -\frac{\partial S}{\partial t}$ и имеет вид:

$$\left(\text{grad } S - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + q\varphi \right)^2 + m^2 c^2 = 0 \quad (12.84)$$

Уравнения Лагранжа.

На основании (12.78), (12.79) нетрудно получить уравнение движения заряженной частицы в поле, так как принцип наименьшего действия $\delta S = 0$ приводит в общем случае, к уравнению Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \quad (12.85)$$

$\text{grad}_{\mathbf{v}} L$ - определяется выражением (12.80). Найдем $\text{grad}_{\mathbf{r}} L$:

$$\text{grad}_{\mathbf{r}} L = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{q}{c} \text{grad}_{\mathbf{r}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - q \text{grad}_{\mathbf{r}} \varphi \quad (12.86)$$

Используя формулу векторного анализа

$$\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{b} \times \text{rot} \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \text{rot} \mathbf{b} \quad (12.87)$$

перепишем уравнение (12.86) в виде:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{q}{c}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{A} - q \text{grad} \varphi. \quad (12.88)$$

Таким образом, уравнение Лагранжа имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{p} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) = \frac{q}{c}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{A} - q \text{grad} \varphi \quad (12.89)$$

В соответствии с определением полной производной по времени от векторного потенциала

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}.$$

Окончательно находим:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{q}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - q \text{grad} \varphi + \frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{A}]. \quad (12.90)$$

Если ввести определения

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi, \quad \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}, \quad (12.91)$$

то уравнение (12.90) примет вид:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \mathbf{E} + \frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad (12.92)$$

что совпадает с уравнением движения заряда в поле под действием силы Лоренца.

Первая пара уравнений Максвелла.

Таким образом, соотношения (12.91) позволяют определить первую пару системы уравнений Максвелла

$$\text{div} \mathbf{B} = 0; \quad \text{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (12.93)$$

Вторая пара уравнений Максвелла.

Для вывода второй пары системы уравнений Максвелла из принципа наименьшего действия воспользуемся действием вида:

$$S_2 = S_{pf} + S_f \quad (12.94)$$

и проварьируем переменные поля.

$$\delta S = \int \left[\frac{1}{c^2} \sum_{\mu=0}^3 j^\mu \delta A_\mu - \frac{1}{16\pi c} \delta \sum_{\lambda,\mu=0}^3 F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} \right] d\Omega = 0 \quad (12.95)$$

Подставляя в (12.95) определение тензора электромагнитного поля $F_{\lambda\mu} = \partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda$, находим:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} \sum_{\mu=0}^3 j^\mu \delta A_\mu - \frac{1}{8\pi} \sum_{\lambda,\mu=0}^3 F^{\lambda\mu} \delta(\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda) \right\} d\Omega = \quad (12.96) \\ &= \int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} \sum_{\mu=0}^3 j^\mu \delta A_\mu - \frac{1}{8\pi} \sum_{\lambda,\mu=0}^3 F^{\lambda\mu} \partial_\lambda \delta A_\mu + \frac{1}{8\pi} \sum_{\lambda,\mu=0}^3 F^{\lambda\mu} \partial_\mu \delta A_\lambda \right\} d\Omega \end{aligned}$$

Выполним замену индексов суммирования $\lambda \rightleftharpoons \mu$ в третьем слагаемом выражения (12.96). В результате получим:

$$\delta S = \int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} \sum_{\mu=0}^3 j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{4\pi} \sum_{\lambda,\mu=0}^3 F^{\lambda\mu} \partial_\lambda \delta A_\mu \right\} d\Omega = 0. \quad (12.97)$$

Проинтегрировав второе слагаемое в (12.97) по частям приходим к равенству:

$$\int \sum_{\mu=0}^3 \left[\left(\frac{1}{c} j^\mu - \frac{1}{4\pi} \sum_{\lambda=0}^3 \partial_\lambda F^{\lambda\mu} \right) \delta A_\mu \right] d\Omega = 0 \quad (12.98)$$

Таким образом из (12.98) следует:

$$\sum_{\lambda=0}^3 \partial_\lambda F^{\lambda\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad (12.99)$$

что и определяет вторую пару системы уравнений Максвелла.

Глава 13

Специальная теория относительности. Семинары.

§1 Преобразования Лоренца

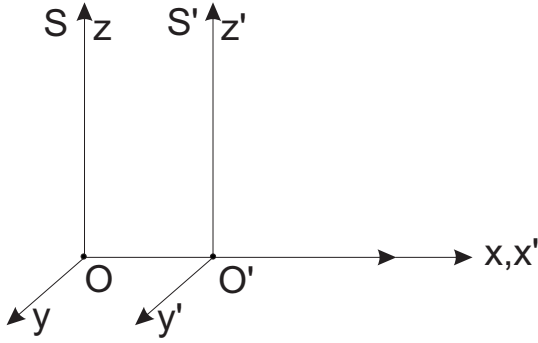


Рис. 13.1:

Из постулатов специальной теории относительности следует, что если две системы S и S' расположены и движутся, как указано на рис. 13.1 и в момент времени $t = t' = 0$ их начала отсчета *совпадали*, то связь пространственно-временных координат этих систем определяется преобразованиями Лоренца:

$$x = \Gamma(v)(x' + vt'); \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \Gamma(v)\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad (13.1)$$

$\Gamma(v) = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Обратные преобразования к (13.1) имеют вид

$$x' = \Gamma(v)(x - vt); \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \Gamma(v)\left(t - \frac{v}{c^2}x\right). \quad (13.2)$$

Пример 13.§1.1 Вывести формулы преобразований Лоренца, исходя из принципа постоянства скорости света.

► Рассмотрим системы отсчета S и S' (рис. 13.1). Пусть в начале координат в момент времени $t = t' = 0$ происходит вспышка света. Рассмотрим данное событие с точки зрения наблюдателя в S . Для $t > 0$ свет распространяется в виде сферической волны с центром в т.О. К моменту t фронт волны доходит до точки с координатами x, y, z . Следовательно, имеет место соотношение:

$$s_1^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0. \quad (13.3)$$

С точки зрения наблюдателя, находящегося в S' , по принципу постоянства скорости света:

$$s_2'^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0. \quad (13.4)$$

Так как равенства (13.3) и (13.4) выполняются одновременно, координаты x, y, z, t связаны с координатами x', y', z', t' . Из однородности пространства-времени следует, что x', y', z', t' выражаются линейными соотношениями через x, y, z, t . При этом, так как плоскости XY и $X'Y'$, XZ и $X'Z'$ преобразуются в себя, то из условия $z = 0$ следует, что $z' = 0$, а из $y = 0$ следует, что $y' = 0$ независимо от x и t . Поэтому:

$$y' = \kappa(v)y; \quad z' = \kappa(v)z, \quad (13.5)$$

где κ независимый от x, y, z, t коэффициент, который из-за изотропии пространства может быть только функцией v . По этой же причине коэффициенты при y и z одинаковы. Так как с точки зрения наблюдателя в S' система S удаляется со скоростью $-v$ имеем:

$$y = \kappa(-v)y'; \quad z = \kappa(-v)z'. \quad (13.6)$$

Т.к. координаты y и z поперечные по отношению к направлению скорости относительного движения, их преобразование не должно зависеть от направления v , поэтому $\kappa(v) = \kappa(-v)$. Таким образом, из формул (13.5) и (13.6) вытекает, что $\kappa^2 = 1$, т.е. $\kappa = \pm 1$. Учитывая, что в пределе $v \rightarrow 0, y' \rightarrow y, z' \rightarrow z$, окончательно находим $\kappa = 1$ и, следовательно:

$$y = y', \quad z = z'. \quad (13.7)$$

Аналогично из линейности связи координат и эквивалентности систем отсчета S и S' вытекает, что при $s_1^2 \neq 0$ имеют место соотношения $s_2'^2 = \alpha(v)s_1^2$, $s_1^2 = \alpha(v)s_2'^2$. Таким образом, с учетом (13.4), (13.5), (13.7) получаем:

$$c^2t^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2. \quad (13.8)$$

Примем теперь, что

$$x' = ax + bt, \quad t' = fx + gt, \quad (13.9)$$

где коэффициенты a, b, f, g зависят только от v . Так как в системе S' положение точки $O'(x' = 0, y' = 0, z' = 0)$ определяется уравнениями $0 = ax + bt$, $y = 0, z = 0$, т.е. $x = -(b/a)t$ и $-b/a = v$, то, подставляя (13.9) в (13.8), находим коэффициенты a, b, f, g . Явные выражения для коэффициентов имеют следующий вид:

$$a = \pm\Gamma(v); \quad b = \mp v\Gamma(v); \quad g = \pm\Gamma(v); \quad f = \mp \frac{v}{c^2}\Gamma(v).$$

Здесь $\Gamma(v) \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Для обеспечения предельного перехода $x' \rightarrow x, t' \rightarrow t$ при $v \rightarrow 0$ необходимо выбрать положительные знаки, что приводит к формулам (13.2) и (13.1). ◀

Некоторые следствия, вытекающие из преобразований Лоренца, традиционно принято считать основными. Это:

1. - относительность одновременности;
2. - сокращение длины движущегося масштаба;
3. - замедление хода движущихся часов;

4. - закон сложения скоростей.

Последнее следствие означает, что если в системе отсчета S' точка совершает движение $x' = x'(t')$, $y' = y'(t')$, $z' = z'(t')$, и проекции ее скорости в S' есть:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}, \quad (13.10)$$

то проекции скорости этой частицы в системе S равны:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v / c^2}; \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u'_x v / c^2}; \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u'_x v / c^2}; \quad (13.11)$$

Пример 13.§1.2 Метровая линейка ($l_0 = 100$ см) движется относительно наблюдателя со скоростью $v = 0.6$ с, направленной вдоль линейки. Какую длину l линейки измерит наблюдатель?

► На основании (13.2) $x'_2 - x'_1 = \Gamma(v) [(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)]$. Так как процесс измерения длины движущегося объекта состоит в одновременной фиксации начала и конца объекта по часам системы координат в которой проводится измерение, $t_2 - t_1 = 0$. И так как, по определению $x_2 - x_1 = l$ и $x'_2 - x'_1 = l_0$ находим: $l = l_0 \sqrt{1 - 0.6^2} = 80$ см. ◀

Пример 13.§1.3 Пион имеет период полураспада $\sim 1.8 \cdot 10^{-8}$ сек. Если пучок пионов движется со скоростью $v = 0.99$ с, то: а) во сколько раз увеличится время жизни пиона, измеренное в лабораторной системе? б) за какое время половина пионов из пучка распадется? в) как далеко они пролетят за это время?

► Так как $\Gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1/\sqrt{1 - 0.99^2} \simeq 7.09$, период полураспада увеличится в 7.09 раз и станет равным $\tau = 12.7 \cdot 10^{-8}$ сек. Соответственно за это время пионы пройдут путь $x = v\tau = 0.99с \cdot 12.7 \cdot 10^{-8}$ сек. = 37.9 м. ◀

Пример 13.§1.4 В оба конца 20-ти метрового вагона, движущегося со скоростью 200 км/час одновременно, с точки зрения наблюдателя на Земле, ударяют молнии. Какую разницу во времени между ударами молний зафиксируют пассажиры вагона? [28]

► Пусть $x_1 t_1$ и $x_2 t_2$ - пространственно-временные координаты начала и конца вагона в системе координат, связанной с Землей. Соответственно $x'_1 t'_1$ и $x'_2 t'_2$ - пространственно-временные координаты тех же точек в системе, связанной с вагоном. На основании (13.1) имеем:

$$t_1 = \Gamma(v)(t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1), \quad t_2 = \Gamma(v)(t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2),$$

где v - скорость движения вагона относительно Земли. В результате: $t_1 - t_2 = \Gamma(v)[t'_1 - t'_2 + v(x'_1 - x'_2)/c^2]$. По условию задачи $t_1 = t_2$, а $x'_1 - x'_2 = l$ длина вагона. Таким образом: $t'_1 - t'_2 = -vl/c^2 \simeq -1.24 \cdot 10^{-14}$ сек. Знак “-” указывает на то, что $t'_1 < t'_2$, т.е., с точки зрения пассажиров поезда, сначала молния ударяет в начало вагона, а затем через $\sim 1.24 \cdot 10^{-14}$ сек в конец вагона. ◀

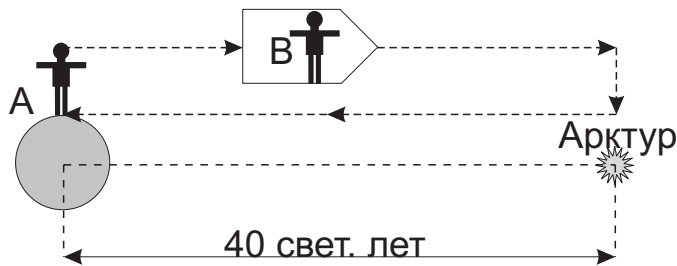


Рис. 13.2:

Пример 13.§1.5 Близнец В совершает путешествие к звезде Арктур и обратно со скоростью $v = 0.99$ с. Каким будет возраст каждого из близнецов по окончании путешествия, если до начала

им было по 20 лет?

► С точки зрения наблюдателя А (см. рис.13.2) ракета пролетает 80 световых лет со скоростью 0.99 с, т.е. промежуток времени от начала до конца путешествия составит $\Delta t = 80 \text{ свет.лет} / 0.99 \text{ с} \simeq 80.8$ лет. Поэтому возраст А будет $20 + 80.8 = 100.8$ лет. Кроме того близнец А считает, что часы в ракете идут в $\sqrt{1 - 0.99^2} = 0.141$ раз медленнее, чем на Земле, поэтому для В время путешествия составит лишь $80.8 \cdot 0.141 = 11.4$ года и В по окончании путешествия будет $20 + 11.4 = 31.4$ года и он окажется моложе А на 69.4 лет!

Если рассуждать с точки зрения В, то по его измерениям расстояние от Земли до Арктура равно $40\sqrt{1 - 0.99^2} \simeq 5.64$ световых лет. Так как Земля удаляется от него со скоростью 0.99 с, то он достигнет Арктура через $\Delta t = 5.64 \text{ свет.лет} / 0.99 \text{ с} \simeq 5.7$ лет, а все путешествие по его расчетам займет 11.4 лет, что совпадает с результатом, полученным А.

Если теперь рассчитать возраст А с точки зрения В, то получится, что А к концу путешествия станет моложе В. Это и есть парадокс близнецов. Данный парадокс устраняется, если заметить, что А всегда остается в одной инерциальной системе, тогда как В, поворачивая обратно, изменяет ее. Поэтому решение задачи с точки зрения А верно, а с точки зрения В нет. ◀

Пример 13.§1.6 Часы на пружине совершают колебательное движение вдоль оси X (при $t = 0$; $x = x_0$, $t' = 0$) с частотой ω . Каково будет различие в показаниях данных часов с неподвижными часами (расположенными в начале координат) через один период?

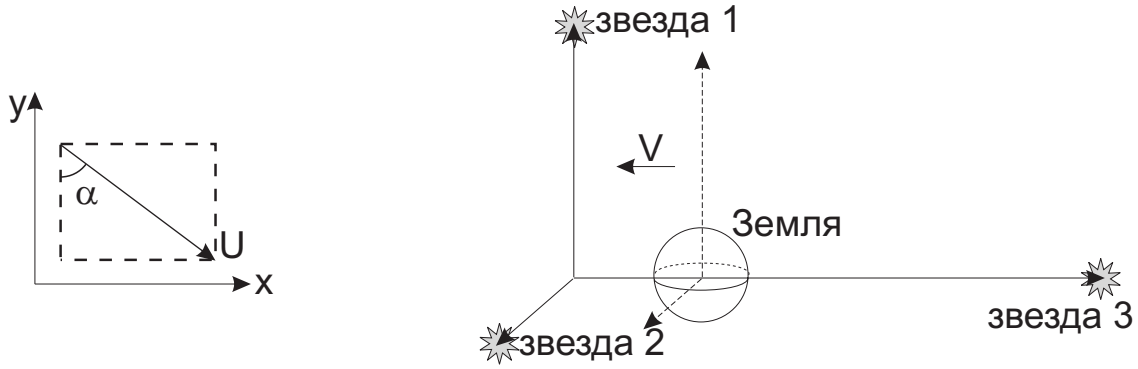


Рис. 13.3:

► Если часы совершают неравномерное движение вдоль оси X по закону $x = f(t)$, то можно рассуждать следующим образом. Пусть Δt достаточно мало, тогда от t до $t + \Delta t$ часы движутся с постоянной скоростью $v = \dot{f}(t)$. Следовательно, интервал времени от t до $t + \Delta t$ по покоящимся часам связан с интервалом времени от t' до $t' + \Delta t'$ по движущимся часам соотношением: $\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \dot{f}^2/c^2}$. В результате, подставляя $f(t) = x_0 \cos \omega t$, для конечных интервалов времени находим:

$$t' = \int_0^t \sqrt{1 - \dot{f}^2(\tau)/c^2} d\tau = \int_0^t \sqrt{1 - (x_0 \omega/c)^2 \sin^2(\omega \tau)} d\tau, \quad (13.12)$$

или $t' = E(\omega t; \omega x_0/c)/\omega$, где $E(\varphi; r)$ - эллиптический интеграл второго рода. Таким образом, разность хода часов за один период составит

$$\Delta t = T - E(2\pi; \omega x_0/c)/\omega. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 13.§1.7 Объяснить явление абберации света в рамках специальной теории относительности.

► Явление абберации света можно рассматривать как проявление относительности понятия “угол”. Пусть в плоскости X, Y в системе координат S движется частица со скоростью U (рис. 13.3). В соответствии с рисунком имеем: $U_y = U \cos \alpha$, $U_x = U \sin \alpha$. Аналогично в другой инерциальной системе S' необходимо записать $U'_y = U' \cos \alpha'$, $U'_x = U' \sin \alpha'$. Так как по определению $\tan \alpha = U_x/U_y$, то на основании (13.11) получим:

$$\tan \alpha = \frac{U_x}{U_y} = \frac{U'_x + v}{1 + \frac{U'_x v}{c^2}} \cdot \frac{1 + \frac{U'_x v}{c^2}}{U'_y} \Gamma(v) = \frac{U' \sin \alpha' + v}{U' \cos \alpha'} \Gamma(v) = \tan \alpha. \quad (13.13)$$

Равенство (13.13) демонстрирует тот факт, что величина угла зависит от того, из какой системы отсчета угол измеряется.

Для объяснения аберрации рассмотрим систему координат, связанную с “неподвижными” звездами (рис. 13.3). Тогда, с точки зрения наблюдателя на Земле, эта система движется со скоростью v (движение Земли относительно неподвижных звезд). Предполагая, что свет – это поток частиц – фотонов, можно использовать (13.13) для случая $\alpha' = 0, U' = c$. В результате:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{c} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \simeq \frac{v}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots\right) \simeq \frac{v}{c}.$$

Это и есть величина угла аберрации. ◀



Рис. 13.4:

Пример 13.§1.8 Объяснить опыты Физо по измерению скорости света в движущейся жидкости, исходя из принципов специальной теории относительности.

► Скорость распространения электромагнитного поля в покоящейся среде с показателем преломления n равна c/n . Поэтому скорость света в движущейся жидкости может быть вычислена на основании закона сложения скоростей (13.11). Пусть система S' связана с движущейся жидкостью (т.е. $U'_x = c/n$), а v – скорость движения жидкости (рис. 13.4), тогда скорость света, измеренная из лабораторной системы координат, есть:

$$U_x = \frac{c/n \pm v}{1 \pm cv/n c^2} \simeq \left(\frac{c}{n} \pm v\right) \left(1 \mp \frac{v}{cn}\right) \simeq \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{c^2}\right). \quad (13.14)$$

Как видно, (13.14) есть в точности то выражение, которое было экспериментально установлено в опытах Физо. ◀

Пример 13.§1.9 Два сверхзвуковых самолета летят навстречу друг другу. Их скорости относительно Земли соответственно 1500 и 3000 км/час. Какова скорость первого самолета (1500 км/час), измеренная пассажирами второго самолета? [28]

► При решении такого рода задач необходимо понять, что в законе сложения скоростей (13.11) есть три абстрактных тела: системы S, S' и точка. Если обозначить скорость точки относительно S через $U_{T/S}$, скорость точки относительно S' через $U_{T/S'}$, а скорость S' относительно S через $U_{S'/S}$, то закон сложения скоростей примет вид:

$$U_{T/S} = \frac{U_{T/S'} + U_{S'/S}}{1 + U_{T/S'} U_{S'/S} / c^2}. \quad (13.15)$$

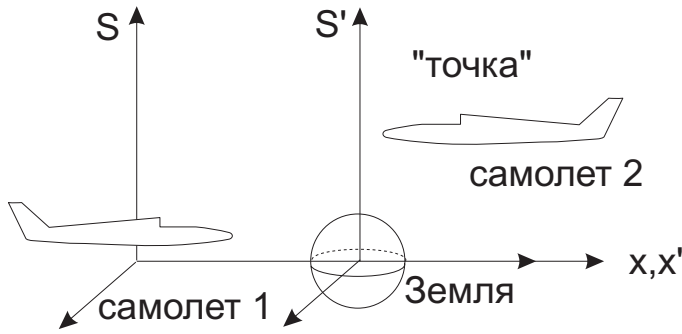


Рис. 13.5:

Формула (13.15) наглядно демонстрирует смысл всех сомножителей, входящих в нее, что упрощает решение задач, в которых рассматривается движение трех или более “тел”. В данном примере свяжем понятия S, S' , “точка” с самолетами и Землей следующим образом: “точка” = самолет 2, система S = самолет 1, система $S' =$ Земля. Тогда $U_{T/S}$ - скорость движения самолета 2 относительно самолета 1 или то, что требуется определить в данном примере, $U_{T/S'}$ - скорость движения самолета 2 относительно Земли (3000 км/час), наконец $U_{S'/S}$ - скорость движения самолета 1 относительно Земли (1500 км/час). Таким образом, на основании (13.15) находим: $U = 4499.999999986$ км/час. ◀

§2 Четырехмерные обозначения.

Любые 4 величины A^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), которые преобразуются при переходе от одной инерциальной системы S к другой S' по закону:

$$A^\mu = \sum_{\lambda=0}^3 \gamma^\mu_{\lambda} A'^{\lambda}, \quad (13.16)$$

где γ^μ_{λ} - матрица преобразований Лоренца, образуют *контравариантный* 4-вектор. Имеется бесконечно много преобразований Лоренца, т.е. бесконечно много матриц γ в зависимости от относительного движения систем координат. В частном случае выбора систем координат как указано на рис. 13.1 матрица γ имеет вид:

$$\gamma = \begin{pmatrix} \Gamma(v) & \Gamma(v) v/c & 0 & 0 \\ \Gamma(v) v/c & \Gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13.17)$$

Ковариантный 4-вектор определяется как набор 4-х величин A_μ , которые преобразуются при переходе из одной системы координат в другую по зако-

ну:

$$A_\mu = \sum_{\lambda=0}^3 a_\mu{}^\lambda A'_\lambda, \quad (13.18)$$

где матрица a совпадает с γ с заменой $v \rightarrow -v$, т.е. $a \equiv \gamma(-v)$.

В специальной теории относительности, кроме 4-векторов, используется понятие 4-тензоров. Контравариантным 4-тензором второго ранга называется объект, состоящий из 16 величин $F^{\alpha,\beta}$ ($\alpha, \beta \in 0 \dots 3$), которые связаны с компонентами $F'^{\alpha,\beta}$ в произвольной лоренцевской системе координат соотношением:

$$F^{\lambda\mu} = \sum_{\alpha,\beta=0}^3 \gamma^\lambda{}_\alpha \gamma^\mu{}_\beta F'^{\alpha\beta}. \quad (13.19)$$

Кроме контравариантного 4-тензора определяется также и ковариантный 4-тензор второго ранга, как объект, 16 компонент которого преобразуются при переходе от одной инерциальной системы координат к другой по закону:

$$F_{\lambda\mu} = \sum_{\alpha,\beta=0}^3 a_\lambda{}^\alpha a_\mu{}^\beta F'_{\alpha\beta}. \quad (13.20)$$

Связь ко- и контра-вариантных составляющих 4-векторов имеет вид:

$$A^\mu = \sum_{\lambda=0}^3 g^{\mu\lambda} A_\lambda, \quad A_\mu = \sum_{\lambda=0}^3 g_{\mu\lambda} A^\lambda. \quad (13.21)$$

16 элементов $g^{\mu\lambda} = g_{\mu\lambda}$ образуют 4-тензор 2-го ранга, который имеет специальное название “метрический тензор” и его компоненты равны: $g^{00} = 1, g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$, остальные $g^{\alpha\beta} = 0 (\alpha \neq \beta)$. Соотношения (13.21) фактически определяют правила “опускания” или “поднимания” индекса в 4-векторе или 4-тензоре

$$F^{\lambda\mu} = \sum_{\alpha,\beta=0}^3 g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta} F_{\alpha\beta}, \quad F^{\lambda\mu} = \sum_{\alpha=0}^3 g^{\lambda\alpha} F_\alpha{}^\mu \quad \text{и т.п.}$$

Для 4-векторов определено следующие понятие скалярного произведения:

$$A \cdot B = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu B_\mu = \sum_{\mu=0}^3 A_\mu B^\mu. \quad (13.22)$$

Соответственно для 4-тензоров и 4-векторов определена операция “свертки”, как сумма по одной или нескольким парам одноименных индексов. На-

пример, свертка тензора $F^{\alpha\beta}$ и 4-вектора A_β есть сумма по индексу β следующего вида:

$$\sum_{\beta=0}^3 F^{\alpha\beta} A_\beta \equiv F^{\alpha\beta} A_\beta = v^\alpha. \quad (13.23)$$

В выражении (13.23) показана общепринятая условность опускания изображения операции суммирования по одноименным ко- и контра-вариантным индексам. В соответствии с данными определениями скалярное произведение двух 4-векторов – есть свертка этих векторов.

Для тензоров определены обычные алгебраические понятия. Так равенство тензоров означает, что равны компоненты тензоров $A^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta}$. Сумма или разность $C^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} \pm B^{\alpha\beta}$ определяются в обычном алгебраическом понимании для компонент тензоров.

Пример 13.§2.1 Доказать, что матрицы преобразований Лоренца γ из (13.16) и a из (13.18) удовлетворяют условию ортогональности:

$$\sum_{\alpha=0}^3 \gamma^\alpha{}_\lambda a_\alpha{}^\nu = \delta_\lambda^\nu = \delta_{\nu\lambda}, \quad (13.24)$$

где δ_λ^ν или $\delta_{\nu\lambda}$ – обычный (4-мерный) символ Кронекера.

► Для доказательства рассмотрим совокупность 4-х переменных ct, x, y, z и обозначим $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$. Так определенные 4-компоненты образуют 4-вектор, который называется 4-координата или 4-радиус вектор. При этом соотношения (13.1) примут форму соотношения (13.16)

На основании (13.20) ковариантный 4-радиус вектор имеет следующие компоненты $x_\beta \equiv (ct, -x, -y, -z)$. Запишем теперь скалярное произведение 4-координат:

$$x \cdot x = \sum_{\alpha=0}^3 x^\alpha x_\alpha = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Такая величина, получившая название квадрат интервала, является инвариантной величиной при преобразованиях Лоренца (см. пример 13.§1.1), т.е.: $\sum_\alpha x^\alpha x_\alpha = \sum_\alpha x'^\alpha x'_\alpha = \text{invar}$. Подставляя в левую часть данного равенства преобразования ко- и контравариантных компонент 4-векторов

(13.16), (13.18) находим:

$$\sum_{\alpha=0}^3 \left(\sum_{\lambda=0}^3 \gamma^{\alpha}_{\lambda} x'^{\lambda} \right) \cdot \left(\sum_{\mu=0}^3 a_{\alpha}^{\mu} x'_{\mu} \right) = \sum_{\lambda, \mu=0}^3 \left(\sum_{\alpha=0}^3 \gamma^{\alpha}_{\lambda} a_{\alpha}^{\mu} \right) x'^{\lambda} x'_{\mu}$$

Так как последнее выражение должно быть равно $\sum_{\mu=0}^3 x'^{\mu} x'_{\mu}$, очевидно что выполняется равенство (13.24). ◀

Пример 13.§2.2 Доказать, что для любых 4-векторов их скалярное произведение является инвариантом при преобразованиях Лоренца, т.е.:

$$A \cdot B = \sum_{\mu} A^{\mu} B_{\mu} = \sum_{\mu} A'^{\mu} B'_{\mu} = A' \cdot B' = \text{invar.} \quad (13.25)$$

► Согласно (13.16), (13.18) и на основании (13.24) получим

$$A \cdot B = \sum_{\mu=0}^3 A^{\mu} B_{\mu} = \sum_{\mu, \lambda, \nu=0}^3 \gamma^{\mu}_{\lambda} a_{\mu}^{\nu} A'^{\lambda} B'_{\nu} = \sum_{\lambda=0}^3 A'^{\lambda} \cdot B'_{\lambda} = A' B'. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 13.§2.3 Доказать, что “метрический тензор” есть 4-тензор.

► Для доказательства этого утверждения необходимо проверить, что для метрического тензора выполняются соотношения (13.19) и (13.20). Компоненты тензоров $g'^{\lambda\mu}$ и $g'_{\lambda\mu}$ в произвольной системе координат S' можно представить в виде диагональной матрицы у которой $g'^{00} = 1$, $g'^{11} = g'^{22} = g'^{33} = -1$ Вычислим на основании (13.19) компоненты метрического тензора в системе координат S , например:

$$g^{00} = \gamma^0_0 \gamma^0_0 g'^{00} + \gamma^0_1 \gamma^0_1 g'^{11} = \Gamma^2(v) - \frac{v^2}{c^2} \Gamma^2(v) = 1.$$

$$g^{10} = \gamma^1_0 \gamma^0_0 g'^{00} + \gamma^1_1 \gamma^0_1 g'^{11} = \frac{v}{c} \Gamma^2(v) - \frac{v}{c} \Gamma^2(v) = 0.$$

Аналогично проверяется выполнение (13.19) для остальных компонент $g^{\lambda\mu}$ и (13.20) для $g_{\lambda\mu}$. В результате в системе координат S получим матрицу g , являющейся диагональной матрицей с теми же элементами, что и g' . ◀

Пример 13.§2.4 Две системы отсчета движутся относительно лабораторной системы координат со скоростями \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 . Доказать, что их относительная скорость удовлетворяет соотношению [27]:

$$v^2 = \frac{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]^2 / c^2}{[1 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) / c^2]^2}. \quad (13.26)$$

► Воспользуемся определением 4-скорости: $U^\alpha \equiv dx^\alpha/dt_s$, где dt_s - бесконечно малый интервал собственного времени $dt_s = ds/c$, ds - бесконечно малый интервал. По определению 4-скорость есть 4-вектор, так как dt_s - инвариант, а dx^α - 4 вектор. Запишем 4-скорости систем S_1 и S_2 в системе отсчета, связанной с S_1 . По определению:

$$U_1 = (c, \mathbf{0}), \quad U_2 = \left(c\Gamma(\mathbf{v}), \mathbf{v}\Gamma(\mathbf{v}) \right). \quad (13.27)$$

Здесь \mathbf{v} - относительная скорость движения системы координат S_2 по отношению к системе координат S_1 . Так как U_1, U_2 - 4-векторы, их скалярное произведение инвариантно $U_1 U_2 = U'_1 U'_2$.

В лабораторной системе 4-скорости систем S_1 и S_2 известны по условию задачи:

$$U'_1 = \left(c\Gamma(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_1\Gamma(\mathbf{v}_1) \right), \quad U'_2 = \left(c\Gamma(\mathbf{v}_2), \mathbf{v}_2\Gamma(\mathbf{v}_2) \right). \quad (13.28)$$

Составляя скалярное произведение 4-векторов (13.27) и (13.28), получаем уравнение для определения v .

$$c^2\Gamma(\mathbf{v}) = c^2\Gamma(\mathbf{v}_1)\Gamma(\mathbf{v}_2) - (\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)\Gamma(\mathbf{v}_1)\Gamma(\mathbf{v}_2).$$

Возводя полученное равенство в квадрат находим:

$$c^2 - v^2 = c^2 \frac{(c^2 - v_1^2)(c^2 - v_2^2)}{[c^2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)]^2}.$$

Учитывая, что имеет место алгебраическое тождество $(c^2 - v_1^2)(c^2 - v_2^2) = c^4 - c^2(v_1^2 + v_2^2) + v_1^2 v_2^2$ и кроме того, что $v_1^2 v_2^2 = [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]^2 + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2$, получим выражение (13.26). ◀

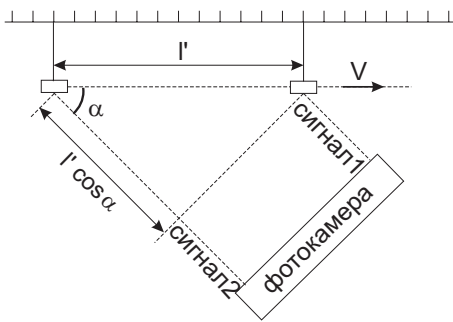


Рис. 13.6:

Пример 13.§2.5 Объект, имеющий длину l_0 в собственной системе, сфотографирован с большого расстояния (рис. 13.6). Направление на фотокамеру составляет угол α с направлением скорости объекта v . Чему равна кажущаяся длина объекта, измеренная по фотоснимку [27]?

► Ответ $l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ соответствует процессу измерения, при котором в лабораторной системе одновременно засекаются начало и конец объекта. Однако в данном случае регистрируются сигналы, пришедшие одновременно в фотоаппарат! Поэтому сигнал 2 должен пройти дополнительный путь

$l' \cos \alpha$, где l' - кажущаяся длина объекта. Из преобразований Лоренца следует:

$$l_0 = \Delta x = \left[\Delta x' - v \Delta t' \right] \Gamma(v) = \left[l' - (v l' \cos \alpha) / c \right] \Gamma(v).$$

Таким образом, длина объекта измеренная по фотоснимку связана с длиной объекта в собственной системе равенством:

$$l' = \frac{l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v \cos \alpha)/c}. \quad \blacktriangleleft$$

§3 Релятивистская механика

Обобщением уравнений Ньютона на случай движения частицы с произвольной скоростью (вплоть до $v \sim c$) являются уравнения (12.29):

$$\frac{dp^\alpha}{dt_s} = F^\alpha, \quad \alpha \in 0, 1, 2, 3, \quad (13.29)$$

где p - 4-импульс $p^\alpha = m u^\alpha$, m - масса частицы, u^α - 4-скорость, компоненты которой определяются соотношением $u^\alpha = dx^\alpha/dt_s$ (x^α - компоненты 4-радиус-вектора, $dt_s = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$ - собственное время), $f \equiv (f^0, \mathbf{f})$ - 4-сила Минковского, пространственно-временные компоненты которой выражаются через “обычную” ньютонову силу \mathbf{F} равенствами:

$$f^0 = \Gamma(v) \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}), \quad \mathbf{f} = \Gamma(v) \mathbf{F}. \quad (13.30)$$

Здесь \mathbf{v} -скорость движения частицы.

В соответствии с определением 4-импульс имеет следующие пространственно-временные компоненты $p^\alpha \equiv (p^0, \mathbf{p}) \equiv (\varepsilon/c, \mathbf{p})$:

$$p^0 = \frac{\varepsilon}{c} = mc \Gamma(v) = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} \Gamma(v) = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (13.31)$$

здесь ε - энергия частицы, m - масса частицы. Кроме того, квадрат 4-импульса является релятивистски инвариантная величина:

$$p^2 = \sum_{\alpha=0}^3 p^\alpha p_\alpha = m^2 c^2. \quad (13.32)$$

Релятивистские определения энергии и импульса в (13.31) отличаются от определений энергии и импульса используемых в механике Ньютона и только в предельном случае $v \ll c$ релятивистские и нерелятивистские выражения совпадают. Для практических нужд уравнения (13.29) удобнее писать в

следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}). \quad (13.33)$$

Как ясно из (13.29), уравнения релятивистской механики (13.29) или (13.33) инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Написанные выше уравнения обобщаются и на случай системы частиц. В результате удастся решать задачи об упругих столкновениях, рассеянии частиц на фиксированном потенциале, распаде частиц и т.п. При этом используется фундаментальный динамический закон, состоящий в том, что сумма 4-импульсов всех частиц остается постоянной. Этот закон выражает законы сохранения энергии и импульса. Будем о нем говорить как о законе сохранения 4-импульса.

Энергия частицы в системе координат, в которой она покоится называется “энергией покоя”. Энергия покоя частицы массы m равна mc^2 . В релятивистской механике понятие “кинетической” энергии вводится по следующему определению: $k = \varepsilon - mc^2$.

Пример 13.§3.1 *Какая энергия заключена в 1 г. угля? Сколько надо сжечь угля, чтобы выделилась такая же энергия, если известно, что при сгорании 1 г. угля в результате реакции горения выделяется ~ 7000 ккал $\cong 2.9 \cdot 10^4$ Дж.*

► Энергия покоя 1 г. угля равна: $\varepsilon = mc^2 = (10^{-3} \text{ кг}) (3 \cdot 10^8 \text{ м/сек})^2 \cong 9 \cdot 10^{13} \text{ Дж} \cong 10^{14} \text{ Дж}$. Для получения такой же энергии химическим путем необходимо сжечь $m = 10^{14} \text{ Дж} / 2,9 \cdot 10^4 \text{ Дж/г} \cong 3 \cdot 10^9 \text{ г} = 3 \cdot 10^6 \text{ кг} = 3000 \text{ т. угля}$. Для наглядности отметим, что 1 железнодорожный вагон угля весит 60 т. То есть такое количество угля можно перевезти в 50 вагонах. ◀

Пример 13.§3.2 *При взрыве 1 тонны тринитротолуола выделяется $\sim 10^9$ кал $= 4.18 \cdot 10^9$ Дж. Какое количество вещества преобразуется в энергию при взрыве 100 мегатонного ядерного заряда?*

$$\text{►} \quad m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{4,18 \cdot 10^9 \text{ Дж} \cdot 10^8 \text{ т}}{9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{сек}^2} = 4,6 \text{ кг} \quad \text{◀}$$

Пример 13.§3.3 *В ускорителях протоны достигают энергии, в 400 раз превышающую их энергию покоя. Какова скорость движения этих протонов?*

$$\text{►} \quad 400 mc^2 = mc^2 \Gamma(v), \text{ т.е.: } v = c \sqrt{1 - (1/400)^2} \cong 0.999997 c. \quad \text{◀}$$

Пример 13.§3.4 *Частица с массой покоя m_1 и скоростью \mathbf{v}_1 сталкивается с покоящейся частицей с массой m_2 , которая поглощает на-*

летевшую частицу. Найти массу покоя и скорость \mathbf{v} образовавшейся составной частицы.[27]

► Пусть p_c - 4-импульс образовавшийся составной системы, а $p(1)$ и $p(2)$ 4-импульсы налетающей m_1 и покоящейся m_2 частиц, соответственно. На основании закона сохранения 4-импульса имеем:

$$p_c = p(1) + p(2) = \begin{bmatrix} m_1 c \Gamma(v_1), & m_1 \mathbf{v}_1 \Gamma(v_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2 c, & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (13.34)$$

Для определения массы составной частицы M воспользуемся инвариантностью квадрата 4-импульса $p_c^2 = M^2 c^2$. Откуда

$$M = \frac{1}{c} \sqrt{p_c^2} = \frac{1}{c} \sqrt{p(1)^2 + 2p(1) \cdot p(2) + p(2)^2} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \Gamma(v_1)}$$

так как $p(1)^2 = m_1^2 c^2$, $p(2)^2 = m_2^2 c^2$, $2p(1) \cdot p(2) = 2m_1 m_2 c^2 \Gamma(v_1)$.

Для нахождения скорости составной частицы отметим, что из (13.34) известны ее импульс \mathbf{p}_c и энергия ε_c : $\mathbf{p}_c = m_1 \mathbf{v}_1 \Gamma(v_1)$; $\varepsilon_c/c = m_1 c \Gamma(v_1) + m_2 c$. Соответственно из (13.31) ясно, что между скоростью, энергией и импульсом любой частицы имеет место равенство $\mathbf{p} = \varepsilon \mathbf{v}_c / c^2$ (так как $\varepsilon/c^2 = m \Gamma(v)$). Отсюда

$$\mathbf{v}_c = \frac{c^2 \mathbf{p}_c}{\varepsilon_c} = \mathbf{v}_1 \cdot \left[1 + \frac{m_2}{m_1} \Gamma^{-1}(v_1) \right]^{-1}$$

Пример 13.§3.5 В системе, в которой нейтрон покоится, β - распад изотропен, а скорость испущенного электрона $v = 0.77c$ (β - распад: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$). Какие значения вектора импульса \mathbf{p} электрона в лабораторной системе отсчета возможны, если нейтрон пролетает через лабораторию со скоростью u [27]?

► В системе отсчета, связанной с покоящимся нейтроном 4-импульс электрона обозначим через p' , тогда считая, что электрон движется в плоскости x, y , имеем: $p' \equiv (\varepsilon'/c, p'_x = |\mathbf{p}'| \cos \theta', p'_y = |\mathbf{p}'| \sin \theta', 0)$, $\varepsilon' = m c^2 \Gamma(v)$. На основании преобразований Лоренца для компонент p'_x и p'_y находим в лабораторной системе:

$$p_x = \Gamma(u) \left(p'_x + \frac{u}{c^2} \varepsilon' \right) = \Gamma(u) \left[|\mathbf{p}'| \cos \theta' + \frac{u}{c^2} \varepsilon' \right]; \quad p_y = p'_y = |\mathbf{p}'| \sin \theta'.$$

Подставляя значение $\sin \theta'$ и $\cos \theta'$ из последних двух равенств в тригонометрическое тождество $\sin^2 \theta' + \cos^2 \theta' = 1$, находим:

$$\left[\frac{p_x - \Gamma(u) u \varepsilon' / c^2}{\Gamma(u) |\mathbf{p}'|} \right]^2 + \left[\frac{p_y}{\Gamma(u) |\mathbf{p}'|} \right]^2 = 1$$

Таким образом ясно, что в лабораторной системе отсчета конец вектора импульса в пространстве $(p_x p_y)$ (импульсное пространство) лежит на эллипсе с центром в точке $(u\varepsilon'\Gamma(u)/c^2, 0)$. ◀

Пример 13.§3.6 Доказать, что изолированный свободный электрон не может ни поглотить, ни излучить квант электромагнитного поля.

► Допустим, что такой процесс поглощения (излучения) возможен. Обозначим через p_e и p'_e 4-импульсы электрона до поглощения (излучения) и после поглощения (излучения) фотона. Соответственно 4-импульс фотона обозначим p_γ . По закону сохранения 4-импульса имеем $p_e \pm p_\gamma = p'_e$. Возводя в квадрат полученное равенство находим: $(p_e p_\gamma) = 0$.

Однако, например, в системе отсчета, в которой $p_e = (mc, \mathbf{0})$ и $p_\gamma = (\hbar\omega/c, \hbar\mathbf{k})$ находим: $(p_\gamma p_e) = m_e \hbar\omega = m_e \varepsilon_\gamma = 0$,. Равенство нулю скалярного произведения 4-векторов означает, что энергия фотона должна быть равна нулю, следовательно фотон не существует. Таким образом, изолированный электрон не может ни поглотить, ни испустить фотон. ◀

Пример 13.§3.7 Вычислить пороговую энергию, при которой нуклон N претерпевает реакцию $\gamma + N \rightarrow N + \pi$, где γ - фотон, π - пи-мезон, N - нуклон. Объяснить с помощью данной реакции обрешение спектра космических лучей, считая фотоны реликтовыми (их температура $\sim 3^\circ K$, а энергия $\sim kT$, где k - постоянная Больцмана), $m_N = 940 \text{ мэВ}$, $m_\pi = 140 \text{ мэВ}$ [27].

► Для указанной реакции закон сохранения 4-импульса имеет следующий вид: $p_\gamma + p_N = p'_N + p_\pi$. Эдесь p_γ - 4-импульс фотона, p_N и p'_N - 4-импульсы нуклона до и после реакции, p_π - 4-импульс пи-мезона. В системе центра масс при достижении порога реакции для 4-импульса образовавшихся частиц имеем $p'_N + p_\pi = ((m_N + m_\pi)c, \mathbf{0})$. Квадрат 4-импульса является инвариантом т. е:

$$(p_\gamma + p_N)^2 = 2p_\gamma p_N + p_N^2 = (m_N + m_\pi)^2 / c^2 \quad (13.35)$$

В лабораторной системе отсчета $p_\gamma = (\varepsilon_\gamma/c, \hbar\mathbf{k}) = (\hbar\omega/c, \hbar\mathbf{k})$, $p_N = (\varepsilon_N/c, \mathbf{p}_N)$. В результате из (13.35) находим:

$$2\varepsilon_\gamma \varepsilon_N / c^2 - 2|\hbar\mathbf{k}||\mathbf{p}_N| \cos \theta + m_N^2 c^2 = c^2(m_N^2 + 2m_N m_\pi + m_\pi^2). \quad (13.36)$$

В силу того, что $|\hbar\mathbf{k}| = \varepsilon_\gamma/c$ при центральном столкновении (наиболее энергетически выгодном) $\theta = \pi$ получим из (13.36):

$$2\varepsilon_\gamma(\varepsilon_N + |\mathbf{p}_N|c) = m_\pi(m_\pi + 2m_N)/c^4 \quad (13.37)$$

Так как импульс \mathbf{p}_N связан с энергией соотношением $\varepsilon_N^2 = p_N^2 c^2 + m_N^2 c^4$, уравнение (13.37) является уравнением для определения граничной энергии нуклона ε_N . Это уравнение можно решить приближенно с учетом $\varepsilon_N \gg m_N c^2$. В этом случае $\varepsilon_N = m_\pi c^4 (2m_N + m_\pi) / 4\varepsilon_\gamma$. Подставляя сюда $\varepsilon_\gamma = \hbar\omega = kT \simeq 2.5 \cdot 10^{-10}$ МэВ и $m_\pi c^2 = 140$ МэВ, $m_N c^2 = 940$ МэВ, находим, что для нуклона с энергией $\varepsilon_N \sim 2.8 \cdot 10^{14}$ МэВ возможна реакция $\gamma + N \rightarrow N' + \pi$, что качественно объясняет обрывание спектра космических лучей. ◀

Пример 13. §3.8 Рассмотрим реакцию $A \rightarrow B + C$ для частиц с массами m_A, m_B, m_C . 1) Доказать, что, если A покоится в лабораторной системе, то частица B обладает энергией

$$\varepsilon_B = c^2(m_A^2 + m_B^2 - m_C^2)/2m_A \quad (13.38)$$

2) Доказать, что если при излучении покоящийся атом переходит из состояния $E_i = Mc^2$ в состояние $(M - \delta)c^2$, то энергия излученного фотона удовлетворяет неравенству $\hbar\omega < \delta c^2$. Объясните почему в эффекте Мёссбауэра $\hbar\omega = \delta c^2$. 3) Если A распадается, двигаясь в лабораторной системе, найти соотношение между углом, под которым испускается частица B (по отношению к направлению движения A) и энергиями частиц A и B [27].

► 1. Из закона сохранения 4-импульса следует, что $p_A = p_B + p_C$. Перепишем его в виде $p_C^2 = (p_A - p_B)^2$. Так как $p_C^2 = m_C^2 c^2$, а в лабораторной системе $p_A = (m_A c, \mathbf{0})$, $p_B = (\varepsilon_B/c, \mathbf{p}_B)$ находим: $m_C^2 c^2 = m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 - 2\varepsilon_B m_A$ откуда следует выражение (13.38).

2. Пусть A есть первоначальный атом, B - фотон, C - атом в конечном состоянии. Тогда на основании (13.38) получим:

$$\varepsilon_B = \hbar\omega = c^2[M^2 - (M - \delta)^2]/2M = c^2(\delta - \delta^2/2M) < \delta c^2$$

В реальных условиях $\hbar\omega \neq \delta c^2$, т.к. часть энергии уходит на отдачу атома M . В эффекте Мёссбауэра импульс отдачи распределяется между $\sim 10^{23}$ атомами, поэтому энергия отдачи пренебрежимо мала.

3. В этом случае 4-импульс частицы A : $p_A = (\varepsilon/c, \mathbf{p}_A)$, а частицы B : $p_B = (\varepsilon_B/c, \mathbf{p}_B)$. В результате для закона сохранения 4-импульса имеем $p_C^2 = (p_A - p_B)^2$ или $m_C^2 c^2 = m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 - 2\varepsilon_B \varepsilon_A / c^2 + 2|\mathbf{p}_A||\mathbf{p}_B| \cos \theta$. Отсюда с учетом $p = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2 c^4}/c$, находим

$$m_C^2 c^2 = m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 - 2 \left\{ \varepsilon_A \varepsilon_B - \sqrt{(\varepsilon_A^2 - m_A^2 c^4)(\varepsilon_B^2 - m_B^2 c^4)} \cos \theta \right\} / c^2,$$

или

$$\cos \theta = \frac{c^4 (m_A^2 + m_B^2 - m_C^2) + 2\varepsilon_A \varepsilon_B}{2\sqrt{(\varepsilon_A^2 - m_A^2 c^4)(\varepsilon_B^2 - m_B^2 c^4)}}. \quad \blacktriangleleft$$

Сила, действующая на заряд q в электромагнитном поле, есть сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (13.39)$$

Это выражение справедливо при любых скоростях движения частицы. С учетом основных уравнений движения релятивистской частицы (13.33) для заряженной частицы имеем:

$$\dot{\mathbf{p}} \equiv \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad \dot{\varepsilon} \equiv \frac{d\varepsilon}{dt} = q(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \quad (13.40)$$

В этих уравнениях \mathbf{p} и ε - релятивистские импульсы и энергия частицы (13.31). Как следует из (13.40), в магнитном поле $\dot{\varepsilon} = 0$, т.е. энергия сохраняется. Наличие такого интеграла движения в магнитном поле существенно облегчает решение задач.

Движение заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле можно рассматривать с использованием метода Лагранжа или метода Гамильтона. В этих случаях введение переменных, характеризующих электромагнитное поле в уравнения движения, достигается на основании так называемой минимальной замены: импульс частицы заменяется на обобщенный импульс $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - q\mathbf{A}/c$ где \mathbf{A} векторный потенциал.

Пример 13. §3.9 *Электрон с зарядом e массой m движется со скоростью \mathbf{v} вдоль оси x , в лабораторной системе отсчета и в точке $x = 0$ попадает в однородное электрическое поле напряженности \mathbf{E} , направленное вдоль оси y . Найти траекторию движения электрона.*

► Запишем уравнение (13.29) для $\alpha = 1$ получим $dp^1/dt_s = 0$, и следовательно $U^1 = \text{const}$, где U^μ - компоненты 4-скорости электрона. С учетом движения частицы в области, где $\mathbf{E} = 0$, имеем $U^1 = v\Gamma(v) = \text{const}$, а так как $U^1 = dx/dt_s$, найдем $t_s = x/v\Gamma(v)$. Запишем теперь уравнения (13.29) для $\alpha = 0$ и $\alpha = 2$ получим с учетом (13.30)

$$\frac{dU^0}{dt_s} = \omega U^{(2)}, \quad \frac{dU^{(2)}}{dt_s} = \omega U^{(0)}, \quad \omega \equiv \frac{eE}{mc}. \quad (13.41)$$

Объединяя последние два уравнения, находим $d^2U^{(2)}/dt_s^2 = \omega^2 U^{(2)}$. Общее решение этого уравнения есть: $U^{(2)} = A \cdot \text{sh}(\omega t_s) + B \cdot \text{ch}(\omega t_s)$, где A и B произвольные константы. Учитывая начальное условие $U^{(2)}(0) = 0$,

получаем $B = 0$, т.е. $U^{(2)} = A \cdot \text{sh}(\omega t_s)$. На основании (13.41) находим $U^{(0)}(t_s) = A \cdot \text{ch}(\omega t_s)$ и так как при $t_s = 0$, $U^{(0)}(0) = c\Gamma(v)$. Отсюда $A = c\Gamma(v)$ т. е.:

$$\frac{dy}{dt_s} = U^{(2)} = c\Gamma(v) \text{sh}(\omega t_s). \quad (13.42)$$

Интегрируя (13.42) по dt_s с учетом $t_s = x/v\Gamma(v)$: и начального условия $y = 0$ при $x = 0$, находим траекторию движения электрона:

$$y = \Gamma(v) \frac{c}{\omega} \left[\text{ch} \left\{ \frac{\omega x}{v\Gamma(v)} \right\} - 1 \right]. \quad \blacktriangleleft \quad (13.43)$$

Пример 13.§3.10 *Определить характер движения заряженной частицы в постоянном магнитном поле с индукцией \mathbf{B} .*

► На основании (13.39) уравнения движения имеют вид:

$$\dot{\mathbf{p}} \equiv \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad \dot{\varepsilon} \equiv \frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \quad (13.44)$$

Учитывая, что $\mathbf{p} = \varepsilon \mathbf{v}/c^2$ и постоянство во времени энергии частицы на основании (13.44):

$$\dot{\mathbf{v}} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{ec}{\varepsilon} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (13.45)$$

Дифференцируя (13.45) по времени и подставляя $\dot{\mathbf{v}}$ из (13.45) получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 \mathbf{v}}{dt^2} + \left(\frac{ecB}{\varepsilon} \right)^2 \mathbf{v} = \left(\frac{ec}{\varepsilon} \right)^2 \mathbf{B} (\mathbf{v} \mathbf{B}) \quad (13.46)$$

Представим скорость в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$, где \mathbf{v}_{\parallel} - составляющая скорости частицы, параллельная направлению поля, а \mathbf{v}_{\perp} - составляющая скорости, лежащая в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{B} . Из (13.46) получаем следующие уравнения для \mathbf{v}_{\parallel} и \mathbf{v}_{\perp} :

$$\ddot{\mathbf{v}}_{\perp} + \omega^2 \mathbf{v}_{\perp} = 0, \quad \dot{\mathbf{v}}_{\parallel} = 0, \quad \omega = ecB/\varepsilon.$$

Отсюда ясно, что характер движения частицы - вращение с частотой ω в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{B} и движение с постоянной скоростью, в направлении, параллельном \mathbf{B} . При этом радиус окружности в плоскости, перпендикулярной \mathbf{B} , равен:

$$R = \frac{|\mathbf{v}_{\perp}|}{\omega} = \frac{|\mathbf{v}_{\perp}| \varepsilon}{ceB} = \frac{c|\mathbf{p}_{\perp}|}{eB} \quad (13.47)$$

Здесь \mathbf{p}_{\perp} - проекция импульса на плоскость, перпендикулярную \mathbf{B} . Такая траектория движения соответствует винтовой линии. \blacktriangleleft

Пример 13.§3.11 Как известно из классической механики, при медленном изменении условий движения остаются постоянными так называемые адиабатические инварианты [4]. Пусть магнитное поле меняется медленно. Выяснить, как малые изменения магнитного поля влияют на характер движения заряженной частицы. Объяснить на основе результата данной задачи как “работают” магнитное зеркало и магнитные “ловушки”. Объяснить также связь магнитных ловушек с наличием радиационных поясов Земли (движение считать нерелятивистским) [19].

► Так как движение в плоскости, перпендикулярной \mathbf{B} , периодически, то адиабатическим инвариантом является циркуляция проекции вектора обобщенного импульса вдоль окружности произвольного радиуса:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \left(\mathbf{p}_\perp - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{p}_\perp \cdot d\mathbf{l} - \frac{e}{2\pi c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

Так как \mathbf{p}_\perp постоянно по абсолютной величине и направлено по $d\mathbf{l}$ с учетом теоремы Стокса находим:

$$I = \frac{1}{2\pi} 2\pi R p_\perp + \frac{|e|}{2\pi c} B \pi R^2 = R p_\perp + \frac{|e|B}{2c} R^2.$$

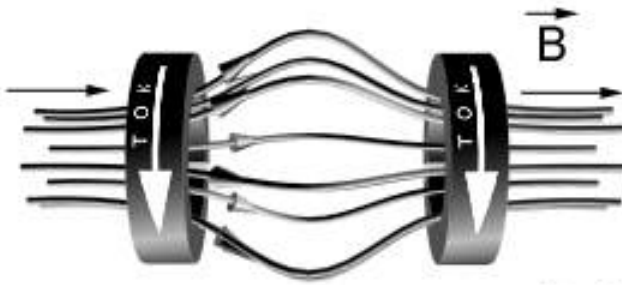


Рис. 13.7:

Подставляя в полученное выражение (13.47), находим: $I = (3cp_\perp^2)/(2|e|B)$, т.е. при медленном изменении B , $p_\perp \sim \sqrt{B}$. Так как при движении в магнитном поле $\varepsilon = \text{const}$ (т.е. $p^2 = \text{const}$ в нерелятивистском пределе), $\mathbf{p} = \mathbf{p}_\parallel + \mathbf{p}_\perp$ или, $p_\parallel^2 = p^2 - p_\perp^2 = p^2 - \text{const}' B(\mathbf{r})$. Из условия $p_\parallel^2 \geq 0$ ясно, что проникновение части-

цы в область достаточно сильного поля невозможно. При движении в направлении увеличивающегося поля радиус винтовой траектории убывает пропорционально $1/\sqrt{B}$. При достижении границы, на которой $|\mathbf{p}_\parallel| = 0$, частица отражается и начинает двигаться в противоположном направлении, – это магнитное зеркало. Устройство с двумя магнитными зеркалами является магнитной ловушкой (рис. 13.7).

Радиационные пояса Земли – это области земной магнитосферы, в ко-

торых магнитное поле Земли удерживает заряженные частицы — протоны, электроны, α - частицы, ядра химических элементов и т.п. Конфигурация силовых линий магнитного поля Земли, почти совпадающая с полем магнитного диполя создает для заряженных частиц магнитную ловушку (см. рис. 13.8) ◀.

Неоднородность магнитного поля приводит также к медленному поперечному смещению - дрейфу центра винтовой траектории частицы. Центр винтовой линии называется ведущим центром.

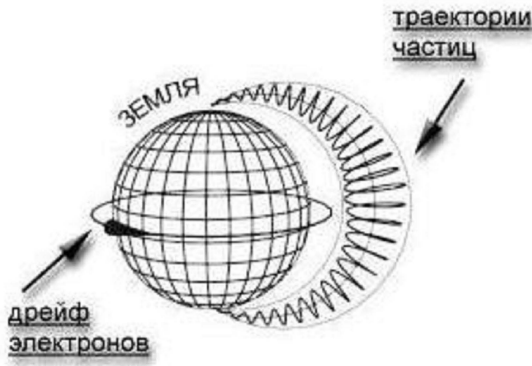


Рис. 13.8:

Пример 13.§3.12 *Определить скорость дрейфа ведущего центра нерелятивистской заряженной частицы в слабом однородном магнитном поле. [19]*

► Рассмотрим сначала случай движения по круговой орбите. Представим радиус-вектор частицы \mathbf{r} в виде суммы векторов: $\mathbf{r} = \mathbf{R}(t) + \vec{\xi}(t)$, где \mathbf{R} - вектор, определяющий движение ведущего центра, а $\vec{\xi}$ - вектор, определяющий быстрое вращение частицы вокруг ведущего центра.

Усредним силу, действующую на частицу $e[\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})]/c$ по периоду кругового движения. При этом учтем, что поле меняется слабо $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{R}) + (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{B}(\mathbf{R}) + \dots$. При усреднении члены первого порядка по $\vec{\xi}$ обращаются в нуль, а члены второго порядка приводят к появлению дополнительной силы

$$\mathbf{F} = e\langle [\dot{\vec{\xi}} \times (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{B}]/c \rangle.$$

Так как для кругового движения $\dot{\vec{\xi}} = \omega[\vec{\xi} \times \mathbf{n}]$, $\xi = v_{\perp}/\omega$, $\mathbf{n} = \mathbf{B}/B$, $\omega = eB/mc$ - угловая скорость вращения частицы. Среднее значение произведения компонент вектора $\vec{\xi}$, вращающегося в плоскости перпендикулярной к \mathbf{n} есть: $\langle \xi_{\alpha} \xi_{\beta} \rangle = \delta_{\alpha\beta} \xi^2/2$, в результате [19]:

$$\mathbf{F} = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B} \left[[\mathbf{n} \times \vec{\nabla}] \times \mathbf{B} \right] = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B} \left[-\mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{B} + \sum_{k=0}^3 n_k \vec{\nabla} B_k \right].$$

В силу уравнений электромагнитного поля $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$, имеем:

$$\sum_{k=0}^3 n_k \vec{\nabla} B_k = (\mathbf{n} \vec{\nabla}) \mathbf{B} + [\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}] = (\mathbf{n} \vec{\nabla}) \mathbf{B} = B (\mathbf{n} \vec{\nabla}) \mathbf{n} + \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \vec{\nabla} B)$$

Отсюда поперечная к \mathbf{n} сила, приводящая к смещению орбиты, равна

$$\mathbf{F}_\perp = -\frac{mv_\perp^2}{2} (\mathbf{n} \tilde{\nabla}) \mathbf{n} = \frac{mv_\perp^2}{2\rho} \vec{\nu},$$

где ρ - радиус кривизны силовой линии поля, $\vec{\nu}$ - единичный вектор, направленный от центра кривизны. Если частица движется ещё и вдоль \mathbf{n} со скоростью (\mathbf{v}_\parallel), то можно использовать приведенное решение, если перейти к системе отсчета вращающейся вокруг мгновенного центра кривизны силовой линии с угловой скоростью v_\parallel/ρ . В результате в этой системе появляется дополнительная поперечная сила (центробежная сила), равная $\vec{\nu}mv_\parallel^2/\rho$. Таким образом, полная поперечная сила равна:

$$\mathbf{F}_\perp = \vec{\nu} \frac{m}{\rho} \left(v_\parallel^2 + \frac{v_\perp^2}{2} \right); \quad \mathbf{v} = \frac{c [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{B^2}.$$

Эта сила и вызывает дрейф центра винтовой линии со скоростью

$$\mathbf{v}_d = \frac{1}{\omega\rho} \left(v_\parallel^2 + \frac{v_\perp^2}{2} \right) [\vec{\nu} \times \mathbf{n}]. \quad \blacktriangleleft$$

§4 Релятивистская формулировка электродинамики

Использование 4-х мерных обозначений в электродинамике приводит к определениям двух следующих 4-векторов: 4-ток $j \equiv (c\rho, \mathbf{j})$ и 4-потенциал $A \equiv (\varphi, \mathbf{A})$. В определении 4-тока ρ - объемная плотность заряда, \mathbf{j} - плотность тока, c - скорость света, а в определении 4-потенциала φ - скалярный, \mathbf{A} - векторный потенциалы.

Компоненты напряженностей полей образуют тензор электромагнитного поля, ковариантные компоненты которого определяются равенством:

$$F_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}. \quad (13.48)$$

Явная запись ко- или контравариантного тензора электромагнитного поля может быть представлена в виде матриц:

$$F_{\alpha\beta} \equiv \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\alpha\beta} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (13.49)$$

На основании введенных 4-х мерных обозначений систему уравнений Максвелла в вакууме можно записать либо с использованием 4-тока и 4-потенциала (12.37):

$$\square A^\alpha = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha, \quad \alpha \in 0, 1, 2, 3, \quad (13.50)$$

либо с использованием тензора электромагнитного поля (12.42), (12.43):

$$\sum_{\alpha=0}^3 \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta, \quad \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0, \quad (13.51)$$

где $\beta, \lambda, \mu, \nu \in 0, 1, 2, 3$.

Пример 13.§4.1 Доказать, что 4-ток j - есть 4-вектор.

► Закон сохранения заряда в дифференциальной форме с учетом определений ∂_μ и j^μ имеет вид: $(\partial \cdot j) = 0$. Данный закон не зависит от выбора системы координат, другими словами $(\partial \cdot j)$ — инвариантная величина. Так как 4-градиент ∂ есть 4-вектор, то данное равенство является скалярным произведением 4-вектора ∂ на 4-вектор, который определен как 4-ток. Таким образом 4-ток есть 4-вектор. ◀

На основании (12.15) компоненты 4 - тока при преобразованиях Лоренца удовлетворяют равенству:

$$j^\mu = \sum_{\lambda=0}^3 \gamma^\mu_\lambda j'^\lambda. \quad (13.52)$$

Пример 13.§4.2 Шар радиуса R заряжен равномерно по объему в собственной системе отсчета до заряда Q . Какова плотность заряда шара, измеренная наблюдателем, относительно которого шар движется со скоростью v .

► В системе координат связанной с шаром компоненты 4-тока равны $j'^\mu \equiv (j'^0, 0) = (c\rho', 0)$. Из (13.52) для плотности заряда в лабораторной системе координат находим:

$$j^0 = \sum_{\lambda=0}^3 \gamma^0_\lambda j'^\lambda; \quad c\rho = \frac{c\rho' - 0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = c\rho' \Gamma(v).$$

Таким образом плотность заряда измеренная наблюдателем, относительно которого шар движется равна

$$\rho = \frac{3}{4\pi} \frac{Q}{R^3} \Gamma(v). \quad \blacktriangleleft$$

Пример 13.§4.3 Доказать, что 4-потенциал A есть 4-вектор.

► Используя определения 4-тока и 4-потенциала, система уравнений Максвелла имеет вид (13.50). Так как \square - инвариант, а 4-ток есть 4-вектор, отсюда вытекает, что 4-потенциал A есть 4-вектор. ◀

Таким образом, при преобразованиях Лоренца компоненты 4-потенциала преобразуются в соответствии с общим для 4-векторов соотношением (12.15).

Пример 13.§4.4 Найти электромагнитные потенциалы φ и \mathbf{A} точечного заряда e движущегося со скоростью $\mathbf{v} = \text{const}$.

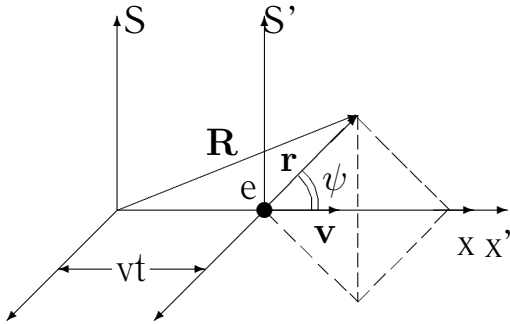


Рис. 13.9:

► В системе координат S' , связанной с зарядом, потенциалы $\varphi' = e/r'$; $\mathbf{A}' = 0$. Используя преобразование Лоренца для скалярного потенциала в системе S , найдем: $\varphi = \varphi' \Gamma(v) = e\Gamma(v)/r'$, где: $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \Gamma(v)\sqrt{(x - vt)^2 + (y^2 + z^2)}/\Gamma^{-2}(v)$. В результате величина φ , выраженная через переменные системы S равна:

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{(x - vt)^2 + (y^2 + z^2)/\Gamma^2(v)}} = \frac{e}{r} \Gamma(v \sin \psi), \quad (13.53)$$

т. к. $x - vt = r \cos \psi$, $y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \psi$ (см. рис. 13.9). Соответственно для векторного потенциала получим:

$$A_x = \Gamma(v) \left[A'_x + \frac{v}{c} A'^0 \right] = \frac{v}{c} \varphi = \frac{ev}{cr} \Gamma(v \sin \psi); \quad A_y = A_z = 0. \quad (13.54)$$

Пример 13.§4.5 Доказать, что тензор электромагнитного поля есть 4-тензор.

► Так как тензор электромагнитного поля (13.48) определяется через 4-векторы ∂ и A , то при преобразовании Лоренца имеем:

$$F_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda, \mu=0}^3 \left(a_{\alpha}^{\mu} a_{\beta}^{\lambda} \partial'_{\mu} A'_{\lambda} - a_{\beta}^{\lambda} a_{\alpha}^{\mu} \partial'_{\lambda} A'_{\mu} \right) = \sum_{\lambda, \mu=0}^3 a_{\alpha}^{\mu} a_{\beta}^{\lambda} F'_{\mu\lambda},$$

что и является определением 4-тензора (см. (13.19)). ◀

Законы преобразования электромагнитного поля

На основании (13.49) и (13.18) или (13.19) легко установить законы преобразования электрического и магнитного полей при переходе из одной

инерциальной системы отсчета в другую. Если системы сорентированы, как на рис.13.1, получим:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \Gamma(v) \left(E'_y + \frac{v}{c} B'_z \right), \quad E_z = \Gamma(v) \left(E'_z - \frac{v}{c} B'_y \right), \quad (13.55)$$

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \Gamma(v) \left(B'_y - \frac{v}{c} E'_z \right), \quad B_z = \Gamma(v) \left(B'_z + \frac{v}{c} E'_y \right).$$

Несмотря на относительный характер электромагнитного поля из компонент поля можно составить две инвариантные величины:

$$J_1 = 2 (B^2 - E^2); \quad J_2 = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2. \quad (13.56)$$

Пример 13.§4.6 Записать формулы преобразования (13.55) в векторном виде.

► Введем в рассмотрение составляющие векторов поля параллельные и перпендикулярные скорости относительного движения \mathbf{v} , $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}$. По определению данные компоненты поля можно выразить через вектор скорости относительного движения и вектор напряженности поля:

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \frac{\mathbf{v}}{v} \left(\mathbf{E} \frac{\mathbf{v}}{v} \right), \quad \mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{v}}{v^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}).$$

Как следует из (13.55) закон преобразования таких компонент электрического поля имеет вид:

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel}, \quad \mathbf{E}_{\perp} = \Gamma(v) \left\{ \mathbf{E}' - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}'] \right\}_{\perp},$$

В результате закон преобразования вектора \mathbf{E} при переходе из одной системы координат к другой есть:

$$\mathbf{E} = \Gamma(v) \left\{ \mathbf{E}' - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}'] \right\} + \{1 - \Gamma(v)\} \frac{\mathbf{v}}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}'). \quad (13.57)$$

Аналогично для вектора индукции \mathbf{B} можно записать:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp} = \mathbf{B}'_{\parallel} + \Gamma(v) \left\{ \mathbf{B}'_{\perp} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}']_{\perp} \right\}$$

или окончательно:

$$\mathbf{B} = \Gamma(v) \left\{ \mathbf{B}' + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}'] \right\} + \{1 - \Gamma(v)\} \frac{\mathbf{v}}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}'). \quad \blacktriangleleft \quad (13.58)$$

Пример 13.§4.7 Найти поле точечного заряда, движущегося с постоянной скоростью \mathbf{v} .

► Используя (13.53) и (13.54), находим дифференцированием:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) e \frac{\mathbf{r}}{r^3} \Gamma^3(v \sin \psi). \quad (13.59)$$

Соответственно для вектора индукции:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) e \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{r}]}{r^3} \Gamma^3(v \sin \psi). \quad \blacktriangleleft \quad (13.60)$$

Решение данной задачи можно найти другим способом, основываясь на соотношениях (13.57), (13.56). При этом следует исходить из системы координат связанной с зарядом, в котором электрическое поле совпадает с полем точечного заряда, а магнитное поле отсутствует. Непосредственное преобразование поля к лабораторной системе координат приводит к результату (13.59), (13.60).

Пример 13.§4.8 Доказать, что при $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) + (B^2 - E^2) \neq 0$ всегда найдется преобразование Лоренца, переводящее \mathbf{B} и \mathbf{E} в параллельные векторы $[\mathbf{E}' \times \mathbf{B}] = 0$ (Указание: рассмотреть векторы $\mathbf{v} = c\alpha [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$, где c — скорость света, и подобрать коэффициент α) [3], [27].

► Как следует из формул преобразования полей (13.57) и (13.58), если в некоторой системе координат векторы поля параллельны, то в другой системе координат, движущейся параллельно векторам поля, векторы сохраняют взаимную параллельность. Поэтому, в общем случае, будем искать систему координат с заданными свойствами среди систем, движущихся перпендикулярно векторам поля.

В соответствии с выражением (13.57) обратное преобразование имеет вид

$$\mathbf{E}' = \Gamma(v) \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\} + \{1 - \Gamma(v)\} \frac{\mathbf{v}}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}).$$

Пусть $\mathbf{v} = c\alpha [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$. В результате имеем следующее выражение для поля \mathbf{E}' :

$$\mathbf{E}' \Gamma^{-1}(v) = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = (1 - \alpha B^2) \mathbf{E} + \alpha (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}.$$

Аналогичные преобразования выражения (13.67) дают:

$$\mathbf{B}' \Gamma^{-1}(v) = \mathbf{B} - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] = (1 - \alpha E^2) \mathbf{B} + \alpha (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{E}.$$

Рассмотрим теперь частные случаи взаимного расположения векторов поля.

1. Если $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = 0$ и $E = B$, то векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} невозможно сделать параллельными. Это следует из явного вида векторного произведения векторов $[\mathbf{E}' \times \mathbf{B}']$:

$$[\mathbf{E}' \times \mathbf{B}'] \Gamma^{-2} = (1 - \alpha E^2)^2 [\mathbf{E} \times \mathbf{B}].$$

Последнее равенство означает, что для обеспечения параллельности векторов \mathbf{E}' , \mathbf{B}' необходимо положить $\alpha = 1/E^2$. Однако в этом случае скорость движения штрихованной системы координат должна равняться скорости света:

$$|\mathbf{v}| = c\alpha |[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]| = c\alpha E^2 \sin 90^\circ = c,$$

что не возможно.

2. Если $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = 0$, но $E^2 \neq B^2$, то выбрав значение коэффициента α в виде $\alpha = 1/\max(E^2, B^2)$, можно выполнить равенство $[\mathbf{E}' \times \mathbf{B}'] = 0$ которое в данном случае не будет означать параллельность векторов, а будет означать равенство нулю либо вектора $\mathbf{E}' = 0$ (при $B^2 > E^2$), либо $\mathbf{B}' = 0$ (при $B^2 < E^2$).
3. Если $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \neq 0$, то коэффициент α должен удовлетворять следующему соотношению: $\alpha^2 [(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 - E^2 B^2] = 1 - \alpha (E^2 + B^2)$. Учитывая очевидное векторное равенство $[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]^2 = E^2 B^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2$ найдем уравнение для определения α :

$$\alpha^2 [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]^2 - \alpha (E^2 + B^2) + 1 = 0.$$

Решение данного уравнения с учетом очевидного физического условия $v < c$ имеет вид:

$$\alpha = \frac{E^2 + B^2 - \sqrt{(E^2 - B^2)^2 + 4(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2}}{2[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]^2}. \quad \blacktriangleleft$$

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

Для описания свойств электромагнитного поля, помимо тензора электромагнитного поля, вводится тензор, получивший название “тензор энергии-импульса”, который в случае вакуума имеет вид (12.53):

$$T^\alpha_\rho = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\beta=0}^3 F^{\alpha\beta} F_{\rho\beta} + \frac{1}{16\pi} J_1 \delta^\alpha_\rho. \quad (13.61)$$

Тензор энергии-импульса удовлетворяет уравнению (закон сохранения энергии и импульса):

$$\sum_{\alpha=0}^3 \partial_{\alpha} T^{\alpha}_{\rho} = \frac{1}{c} \sum_{\alpha=0}^3 j^{\alpha} F_{\alpha\rho}. \quad (13.62)$$

Его 16 компонент равны $T^0_0 = \omega$, $\omega = (E^2 + B^2)/8\pi$ - плотность энергии электромагнитного поля. $-T^0_k = g_k = T^k_0 = [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]_k/4\pi$, ($k=1,2,3$). g_k - проекция плотности импульса на ось k :

$$T^i_k \equiv M_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[E_i E_k + B_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (E^2 + B^2) \right]. \quad (13.63)$$

M_{ik} - называется тензором натяжений Максвелла. Сила, приложенная к поверхности S в электромагнитном поле, выражается через тензор натяжений Максвелла следующим образом:

$$F_k = \oint_S \sum_{i=1}^3 M_{ik} n_i ds, \quad k \in 1, 2, 3, \quad (13.64)$$

где F_k - проекция силы на k -ю ось, а \mathbf{n} - нормаль к поверхности.

Пример 13.§4.9 Доказать, что тензор энергии-импульса электромагнитного поля удовлетворяет соотношению:

$$\sum_{\alpha=0}^3 T^{\mu}_{\alpha} T^{\alpha}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \left[(E^2 - B^2)^2 + 4 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \right] / (8\pi)^2.$$

► Так как данное равенство содержит инварианты поля, достаточно показать, что оно выполняется в какой-либо одной системе отсчета.

1. Рассмотрим систему отсчета в которой выполняются равенства $E^2 = B^2$ и $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = 0$. Выберем $\mathbf{E} = E_0 \cdot \mathbf{i}$, $\mathbf{B} = E_0 \cdot \mathbf{j}$. В соответствии с определением элементов тензора энергии-импульса (12.54) отличными от нуля будут лишь компоненты тензора $T^0_0 = T^0_3 = T^3_0 = E_0^2/4\pi$. Вычисляя с полученным тензором сумму $\sum_{\alpha} T^{\mu}_{\alpha} T^{\alpha}_{\nu}$ при любых значениях $\mu, \nu \in 0 \dots 3$ получим значение данной суммы равное нулю.

2. В системе отсчета в которой $(E^2 - B^2) + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \neq 0$ на основании результатов примера 13.§4.8 векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} можно сделать параллельными. Пусть $\mathbf{E} = E\mathbf{i}$, $\mathbf{B} = B\mathbf{i}$. В результате отличными от нуля будут лишь компоненты тензора энергии-импульса

$$T^0_0 = T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = \frac{E^2 + B^2}{8\pi}.$$

В результате при любых значениях $\mu, \nu \in 0 \dots 3$ для рассматриваемой суммы получим

$$\sum_{\alpha=0}^3 T^\mu_\alpha T^\alpha_\nu = \delta_{\mu\nu} \frac{(E^2 + B^2)^2}{(8\pi)^2} = \delta_{\mu\nu} \frac{(E^2 - B^2)^2 + 4E^2 B^2}{(8\pi)^2} \quad \text{ч.т.д.} \quad \blacktriangleleft$$

§5 Эффект Доплера.

Эффектом Доплера называют явление изменения частоты колебаний (или длины волны λ) источника колебаний, воспринимаемой наблюдателем, при движении источника и наблюдателя относительно друг друга.

Эффект Доплера имеет чисто кинематическое происхождение. С точки зрения СТО эффект Доплера для плоских волн вида

$$A e^{(-i\varphi)} = A \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$$

есть следствие инвариантности 4-скаляра $\varphi = \sum_r k^\mu x_\mu = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ при преобразованиях Лоренца. Здесь k^μ - компонента 4-волнового вектора $k \equiv (\omega/c, \mathbf{k})$, x - 4-координата, \mathbf{k} - волновой вектор, $|\mathbf{k}| = \omega/c$. 4-волновой вектор есть 4-вектор, поэтому закон преобразования 4-волнового вектора имеет вид (12.73):

$$k^\mu = \sum_{\lambda=0}^3 \gamma^\mu_\lambda k'^\lambda. \quad (13.65)$$

Наиболее часто используется следующая форма записи эффекта Доплера:

$$\omega = \frac{\omega' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v \cos(\theta)/c}, \quad (13.66)$$

где ω' - частота источника в собственной системе отсчета, ω - частота, воспринимаемая наблюдателем, θ - угол между вектором \mathbf{k} и \mathbf{v} (скорость относительного движения). При $\theta = 0$ или $\theta = \pi$ наблюдается *продольный* эффект Доплера, а при $\theta = \pi/2$ *поперечный* эффект, который связан с чисто релятивистским эффектом замедления времени и не имеет никакой волновой специфики.

Эффект Доплера проявляется в широком классе физических явлений и имеет самые разнообразные применения. Например, в астрофизике, проявление эффекта Доплера в наблюдаемых спектрах излучения астрофизических объектов позволяет в ряде случаев определить расстояние до источника излучения от Земли (особенно для источников, движущихся с большими

скоростями). В этом случае используется закон Хаббла:

$$v = H \cdot R, \quad (13.67)$$

где v – скорость объекта, H – постоянная Хаббла, $H \simeq 2.5 \cdot 10^{-18} \text{ сек}^{-1}$, R – расстояние до излучающего объекта.

Пример 13.§5.1 *С какой скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы его водитель принял красный сигнал светофора за зеленый ?*

► Длина волны красного света $\lambda \simeq 7000$ ангстрем, зеленого $\lambda \simeq 5000$ ангстрем. Так как источник красного света движется на наблюдателя, то в соответствии с (13.66) имеем:

$$\frac{1}{\lambda_{\text{набл}}} = \frac{1}{\lambda_{\text{ист}}} \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}},$$

так как $\theta = 0$, $\omega = 2\pi c/\lambda$. В данном случае $\lambda_{\text{ист}} = 7000 \text{ }^\circ\text{A}$, что соответствует красному свету, а $\lambda_{\text{набл}} = 5000 \text{ }^\circ\text{A}$, то есть длине волны зеленого цвета. Таким образом

$$\frac{1}{5000} = \frac{1}{7000} \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}; \quad \text{или} \quad \frac{25}{49} = \frac{1 - v/c}{1 + v/c}, \quad \text{т.е.} \quad v = \frac{c}{3}. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 13.§5.2 *В начале 1982г. в созвездии Стрельца был зарегистрирован квазар (квазар – это звездная система, излучающая как целая галактика, энергия излучения $\approx 10^{47}$ эрг/сек, регистрирующаяся как звезда–квазизвезда), для которого красное смещение $z = (\lambda_{\text{набл}} - \lambda_{\text{исп}})/\lambda_{\text{исп}}$ оказалось равным $z = \sqrt{24} - 1$. Определить расстояние до этого объекта и его скорость.*

► В модели расширяющейся вселенной излучение квазара наблюдаемое на Земле соответствует продольному эффекту Доплера, когда источник излучения удаляется от наблюдателя. В этом случае $\theta = \pi$ и

$$\lambda_{\text{исп}} = \lambda_{\text{набл}} \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.$$

Подставляя данное выражение в определение величины красного смещения z , найдем:

$$z = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} - 1 = \sqrt{24} - 1.$$

Решая данное выражение относительно v получим $v = 23c/25 = 0.92c$. В то время это была самая большая скорость, зарегистрированная в астрономии.

На основании закона Хаббла расстояние до этого объекта равно:

$$R = \frac{0.92c}{2.5 \cdot 10^{-18}} = 10^{28} \text{ см} = 10^{26} \text{ м} \simeq 1.2 \cdot 10^{10} \text{ свет.лет.} \quad \blacktriangleleft$$

Т. е. в 1982 году до Земли дошел свет, испущенный этим объектом ~ 12 миллиардов лет назад. Для сравнения отметим, что возраст вселенной оценивается величиной порядка 13–15 миллиардов лет!

Пример 13. §5.3 Доказать, что при условии $v \ll c$ (v - скорость движения источника излучения) выражение (13.66) в случае продольного эффекта Доплера совпадает с выражением, рассчитанным в рамках механики Ньютона, и отличается для поперечного эффекта.

► 1. *Продольный эффект.* Получим формулу для изменения частоты излучения в рамках механики Ньютона.

Пусть в момент времени $t'_1 = t_1$ по часам системы S' (рис.13.1) в начале координат S' происходит вспышка света. Система S' перемещается вдоль положительного направления оси x со скоростью v . В момент времени $t = 0$ начала отсчета систем координат совпадали. Наблюдатель, находящийся в начале координат S , регистрирует эту вспышку в момент времени $t_{н1} = t'_1 + vt'_1/c = t'_1(1 + v/c)$. Так как в момент t' система S' будет находиться в точке $x = vt'_1 = vt_1$ и свету необходимо время vt'_1/c , чтобы пройти расстояние от места вспышки до начала координат системы S , где находится наблюдатель.

Вторую вспышку, произошедшую в системе S' в момент $t'_2 = t_2$, наблюдатель регистрирует в $t_{н2} = t'_2(1 + v/c)$. Интервал времени между вспышками в S' : $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ и вспышками зарегистрированными наблюдателем $\Delta t = t_{н2} - t_{н1}$ в S связаны соотношением: $\Delta t = \Delta t'(1 + v/c)$. Отсюда для периодического процесса с периодом T' имеем: $T = T'(1 + v/c)$, а для частот: $\omega = \omega'/(1 + v/c)$.

Из формулы (13.66) (в которой необходимо положить $\theta = \pi$, так как источник удаляется) следует такое же выражение с точностью до членов $\sim v^2/c^2$. Для этого необходимо разложить выражение (13.66) в ряд Тейлора по параметру v/c и оставить только линейные по v/c слагаемые.

2. *Поперечный эффект* который соответствует значению угла $\theta = \pi/2$ в (13.66) в механике Ньютона полностью отсутствует в силу принципа абсолютности времени. В рамках специальной теории относительности на ос-

новании (13.66) имеем:

$$\omega \simeq \omega' \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right). \quad \blacktriangleleft$$

Так как поперечный эффект есть прямое следствие специальной теории относительности этот эффект может служить проверкой принципов теории. Справедливость формулы (13.66) была экспериментально доказана в опытах Айвза и Стилвела в 1938 г. (см. подробнее в [24]).

§6 “Парадоксы” специальной теории относительности (СТО)

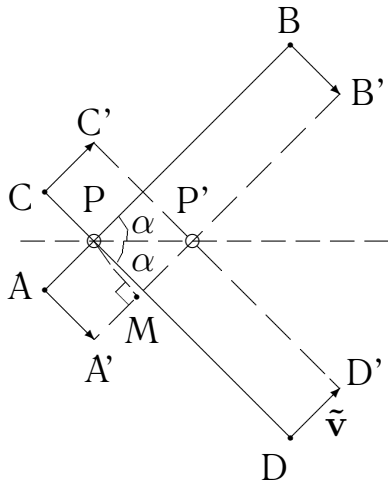


Рис. 13.10:

Многие выводы СТО кажутся противоречащими нашим обычным (обыденным) наблюдениям. Поэтому СТО подвергалась систематическим нападкам со стороны как профессионалов, так и любителей, “обнаруживших” внутренние противоречия СТО. Обнаруженные противоречия в дальнейшем оказывались мнимыми (кажущимися). Исторически их стали называть парадоксами.

Ниже перечислен ряд “парадоксов” СТО без их объяснения. Обучающемуся предлагается самостоятельно объяснить несостоя-

тельность парадоксальных утверждений.

1. Два стержня (см.рис. 13.10) AB и CD , расположенные под углом 2α , движутся со скоростями $v = \text{const}$, оставаясь параллельными своему первоначальному положению. Определим скорость движения точки пересечения стержней P . Пусть через единицу времени стержни займут положение AB и CD соответственно. Так как угол BPP' равен углу $PP'M$ (так как

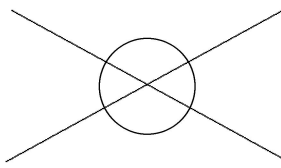


Рис. 13.11:

$AB \parallel A'B'$), из прямоугольного треугольника PMP' следует, что $PP' = PM / \sin \alpha$.

Следовательно, точка пересечения P движется со скоростью $v / \sin \alpha$ и при фиксированном v всегда найдется такое α , что $v / \sin \alpha > c$.

Парадоксальным в этом утверждении считается наличие скорости больше скорости света.

2. Если в предыдущем примере на стержни надеть кольцо, то при движении стержней кольцо можно заставить перемещаться со скоростью больше c (рис 13.11).

3. Рычаг AB имеет ось вращения в т. O ($3 \cdot AO = OB$) (рис 13.12).

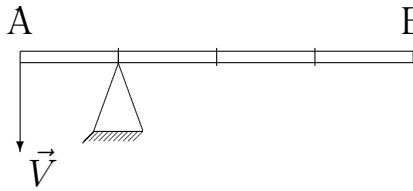


Рис. 13.12:

Если заставить двигаться т. A со скоростью больше 100000 км/сек, то точка B будет двигаться со скоростью больше 300000 км/сек., то есть опять скорость больше скорости света, в то время как в теории относительности предельной скоростью считается скорость

света.

4. *Парадокс “зайчика”*. Пусть в центре сферы большого радиуса вращается прожектор (лазер). Луч которого попадает на поверхность сферы, образуя “зайчик”. За один оборот прожектора “зайчик” описывает на сфере дугу, длина которой $2\pi R$. Если период вращения T (ω - частота), то скорость движения “зайчика” $v = 2\pi R/T = 2\pi\omega$ можно сделать больше c .

5. *Вариант парадокса “зайчика”*. В электронных трубках луч движется по экрану со скоростью 10000 км/сек. Если увеличить расстояние от катода до экрана в 50 раз, то скорость перемещения луча по экрану составит 500000 км/сек, что больше c !

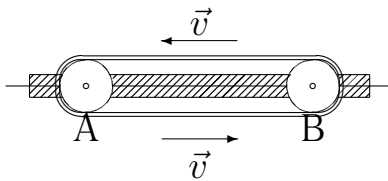


Рис. 13.13:

6. *Парадокс “транспортера”*. Приведем транспортер в действие так, чтобы скорость движения ленты приблизилась к световой (рис 13.13).

Тогда с точки зрения покоящегося наблюдателя длина горизонтальных частей ленты сократится:

$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$, хотя расстояние между центрами шкивов A и B на станине остается прежним. Следовательно, в ленте возникает напряжение, которое можно обнаружить динамометром. Если же наблюдателя разместить на ленте транспортера, то лента будет покоящейся, а станина будет двигаться с большой скоростью. В этом случае с точки зрения наблюдателя на транспортере должно сократиться расстояние AB , что приведет к провисанию ленты!

То есть, описание одного и того же явления из разных систем отсчета привело к взаимоисключающим результатам - натяжение - провисание ленты.

7. Парадокс “колеса”. Пусть есть неподвижное колесо. Приведем его в быстрое вращение относительно т. O . При этом участки обода AB, BC, \dots, HA сокращаются, тогда как “радиальные” спицы сохраняют свою длину. То есть при неизменной длине диаметра длина окружности уменьшится в $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ раз (рис 13.14).

Если, например, скорость такова, что $1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \simeq 10$, то окружность станет приблизительно втрое! короче своего диаметра!!, то есть прямая перестанет служить кратчайшим расстоянием между точками.

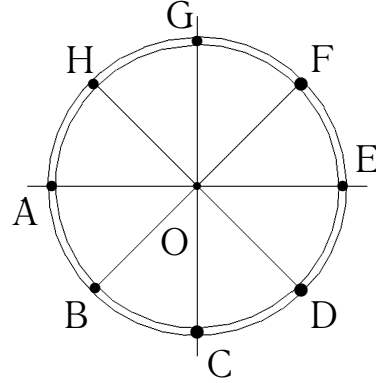


Рис. 13.14:

§7 Упражнения к гл. 13

§7.1 Показать, что постулаты СТО противоречат классической механике.

§7.2 Привести 10 примеров инерциальных систем отсчета.

§7.3 Граница видимой вселенной отстоит от нас на расстоянии 10^{10} свет. лет. Космический путешественник движется со скоростью такой, что $\Gamma(v) = 10^8$. Как далеко в световых годах отстоит граница видимой вселенной по наблюдениям космонавта?

§7.4 Доказать, что $\partial_\mu \varphi$ - 4-вектор (φ - скаляр, $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$).

§7.5 Доказать, что 4-дивергенция $\sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu A^\mu$ - инвариант. (A_μ - 4 вектор).

§7.6 Доказать, что $\partial_\mu A_\nu$ - ковариантный 4-тензор 2-го ранга. (A_ν - 4 вектор).

§7.7 Доказать, что $\square \varphi$ - скаляр, а $\square A^\mu$ - 4-вектор. (φ - скаляр, A_ν - 4 вектор).

§7.8 Показать, что два последовательных преобразования Лоренца дают преобразование Лоренца с относительной скоростью (13.11).

§7.9 Доказать, что символ Кронекера есть 4-тензор.

§7.10 Показать, что матрица преобразований Лоренца не является 4-тензором.

§7.11 Вывести формулы преобразования Лоренца для радиус-вектора \mathbf{r} , и t , не предполагая, что скорость \mathbf{v} системы S' относительно S параллельна оси x . Результат представить в векторной форме.

§7.12 Какую массу нужно перевести в энергию, чтобы обеспечить годовую потребность России в электроэнергии ($\simeq 10^{15}$ квт.час)?

§7.13 Сколько "граммов" излучает 100-ватная лампочка за год?

§7.14 Поток мощности от Солнца на Землю $\simeq 1$ кВт/м². Сколько "грамм" вещества переносится на Землю за год (радиус Земли $\simeq 6000$ км).

§7.15 Получить соотношение, связывающее импульс с кинетической энергией и массой покоя m

§7.16 Обычно ускорители на высокие энергии ускоряют частицы массой m до определенной энергии E . Затем эти частицы "бомбардируют" неподвижную мишень, состоящую из частиц той же массы покоя, что и у налетающих частиц. Однако эквивалентный результат может быть достигнут при столкновении двух встречных пучков с более низкой энергией E' . Получить формулу, выражающую энергию E' через E .

Ответ: $E' = \sqrt{mc^2(E + mc^2)/2}$.

§7.17 На реальном ускорителе на встречных протон-протонных пучках достигается энергия пучка $\simeq 30$ ГэВ каждый. Какова должна быть эквивалентная энергия пучка у обыкновенного ускорителя для достижения той же эффективности? $m_p c^2 \simeq 0.938$ ГэВ.

§7.18 На покоящуюся частицу с массой m с момента времени $t = 0$ действует постоянная сила F . Какова скорость этой частицы при $t = \infty$?

§7.19 (Комптоновское рассеяние). Фотон с длиной волны λ "налетает" на покоящийся электрон с массой m и рассеивается с длиной волны λ' под углом θ к первоначальному направлению движения. Вывести соотношение: $\lambda' - \lambda = (1 - \cos \theta) \hbar/mc$.

§7.20 Рассеяние ультрарелятивистской $E \gg mc^2$ заряженной частицы на фотоне называется обратным комптоновским рассеянием. Какова максимальная энергия, которую частица может передать фотону с энергией $\hbar\omega \ll mc^2$? Сколько энергии может передать протон космических лучей с $E \sim 10^{20}$ эВ реликтовому фотону с $T = 3K$?

§7.21 Рассмотрим упругое столкновение частицы массы m_1 с покоящейся частицей массой $m_2 < m_1$. Если θ — максимальный угол рассеяния частицы m_1 , то в нерелятивистском приближении $\sin \theta = m_2/m_1$. Доказать, что это верно при любых скоростях движения.

§7.22 До какой максимальной энергии может разогнать электроны циклотрон, работающий на постоянной частоте с ускоряющим потенциалом V ? (Решение см. в [27], задача 2.14).

§7.23 Объяснить принцип работы электронного проектора, электронно-оптического преобразователя, электронного умножителя, электронного ос-

циллографа, электронного микроскопа.

§7.24 Объяснить принцип работы циклотрона, бетатрона.

§7.25 Объяснить принцип работы синхротрона, микротрона, фазотрона, синхрофазотрона.

§7.26 Доказать, что при равномерном движении заряженной частицы в среде с показателем преломления $n(\omega)$ может происходить излучение фотонов (эффект Вавилова-Черенкова). Выразить угол между направлением распространения фотона и направлением скорости частицы через скорость частицы, частоту фотона и показатель преломления. (см. задачу №675 в [4]).

§7.27 Релятивистская частица с зарядом $-q$ и массой m движется в поле неподвижного точечного заряда Ze . Найти уравнение траектории частицы. Рассмотреть нерелятивистский предел.

§7.28 В некотором электромагнитном поле электрический вектор \mathbf{E} образует угол θ с вектором магнитной индукции \mathbf{B} , причем угол θ инвариантен для всех наблюдателей. Чему равен θ ?

§7.29 Пусть $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = 0$. Доказать, что при $B^2 - E^2 < 0$ существует преобразование Лоренца, обращающее в ноль магнитное поле, а при $B^2 - E^2 > 0$, обращающее в ноль электрическое поле. Найти скорости движения соответствующих систем относительно лабораторной.

§7.30 Наблюдаемая длина волны хорошо известной спектральной линии в излучении далекой галактики равна 0.5 мкм. Стандартная длина волны этой линии 0.4 мкм. С какой скоростью удаляется галактика? Каково расстояние от нее до Земли?

§7.31 Получить формулу для эффекта Доплера в случае звука.

§7.32 Найти поле равномерно движущегося диполя \mathbf{d} .

§7.33 Найти поле равномерно движущегося магнитного момента $\vec{\mu}$.

§7.34 Два заряда движутся параллельно друг другу со скоростями \mathbf{v} . Определить силу взаимодействия между ними в системе, относительно которой они движутся.

§7.35 Нейтрон с магнитным моментом $\vec{\mu}$ движется со скоростью $v \ll c$ в кулоновском поле ядра с зарядом q . Найти силу, приложенную к нейтрону (пренебрегая членами $\sim v^2/c^2$).

§7.36 Монохроматическая плоская волна частоты ω падает под углом θ на плоское зеркало, которое движется со скоростью \mathbf{v} в направлении своей нормали навстречу к волне. Определить угол θ_2 отражения от движущегося зеркала и частоту отраженной волны (решение см. в [3], задача 442).

§7.37 Найти величину э. д. с. электромагнитной индукции, возникающей при движении проводника в магнитном поле.

Глава 14

Дополнительные главы электродинамики.

§1 Элементарные определения физики плазмы

Плазмой называется состояние вещества при котором присутствуют свободные электроны, положительно заряженные атомы или ионы и нейтральные атомы или молекулы.

В простейшем случае плазму можно представить как ионизованный газ. В зависимости от степени ионизации атомов условно плазму делят на холодную и горячую. Холодная плазма – это состояние ионизованного газа при котором число положительно заряженных ионов незначительно. Очевидно, что для отрыва большого числа электронов от многоэлектронного атома требуется приложить большое количество энергии. В этом смысле сильно ионизованную плазму можно называть горячей.

Плазма – наиболее распространенное состояние вещества в природе. Звезды – это гигантские области горячей, то есть сильно ионизованной плазмы. Внешняя поверхность земной атмосферы окружена плазменной оболочкой, которая называется ионосферой. Плазма возникает при любых типах газовых разрядов (молния, искра, электрическая дуга и т.п.).

Электрические силы, связывая разноименные заряды в плазме обеспечивают квазинейтральность плазмы. Разделение положительных и отрицательных зарядов в объеме плазмы приводит к возникновению электрических полей, стремящихся восстановить равновесное распределение зарядов.

Для того, чтобы оценить напряженность поля, которая может возникать при нарушении нейтральности плазмы, предположим, что в некотором объеме имеющем характерные линейные размеры x , произошло полное разделение положительных и отрицательных зарядов. Электрическое поле в данной области удовлетворяет уравнению: $\text{div } \mathbf{E} \approx E/x = 4\pi\rho = 4\pi n e$. Здесь n число электронов в единице объема, e – заряд электрона. Таким образом величина поля, возникающего в пространстве при разделении зарядов в области с размерами x имеет следующий порядок величины:

$$E \approx 4\pi n e x. \quad (14.1)$$

Потенциал плазмы в области разделения зарядов по порядку величины будет равен:

$$\varphi \approx E x = 4\pi n e x^2. \quad (14.2)$$

Пример.

► В качестве примера рассмотрим полностью ионизованную водородную плазму, находившуюся первоначально при нормальной температуре и давлении ≈ 1 мм. рт. ст. Число электронов и ионов в кубическом сантиметре такой плазмы $n \approx 10^{17}$. Поэтому на основании (14.1) в объеме с диаметром порядка одного миллиметра возникнет напряженность поля порядка 10^{10} в/см или разность потенциалов (14.2) порядка 10^9 вольт. ◀

Такое распределение зарядов в плазме не реально, так как оно будет скомпенсировано движением зарядов противоположных знаков и произойдет компенсация нарушения квазинейтральности. Однако в очень малых областях в силу теплового движения заряженных частиц нарушение квазинейтральности может происходить.

Дебаевский радиус экранирования.

При заданной концентрации зарядов и температуры плазмы существует характерный линейный размер δ , определяющий размеры области неоднородности распределения зарядов в плазме. Этот размер можно оценить из равенства энергии заряда в поле и его тепловой энергии $e\varphi \approx kT$. Здесь $k \approx 10^{-16}$ эрг/град - постоянная Больцмана, а T - абсолютная температура:

$$4\pi n e \delta^2 \approx kT \quad \rightarrow \quad \delta = \sqrt{\frac{kT}{4\pi n e^2}}. \quad (14.3)$$

Такую же характерную величину можно получить рассматривая вопрос об экранировании электрического поля в плазме. Пусть в плазму внесен точечный заряд q . Тогда одноименные с q заряды немного отойдут от пробного заряда, а разноименные с q приблизятся. В результате проявится эффект экранировки поля заряда q , который может быть оценен исходя из решения уравнения:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho = -4\pi e(n_+ - n_-). \quad (14.4)$$

Здесь n_+ и n_- - число ионов и электронов в единице объема плазмы, соответственно.

В условиях статистического равновесия пространственное распределение частиц определяется распределением Больцмана:

$$n_+ = n \exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right); \quad n_- = n \exp\left(\frac{e\varphi}{kT}\right).$$

Рассматривая область не слишком близко к пробному заряду, в которой

$e\varphi \ll kT$ для плотности заряда можно получить приближенное выражение:

$$\rho = e \left[n \exp \left(-\frac{e\varphi}{kT} \right) - n \exp \left(\frac{e\varphi}{kT} \right) \right] \approx ne \left(1 - \frac{e\varphi}{kT} - 1 - \frac{e\varphi}{kT} \right) = -2 \frac{ne^2}{kT} \varphi. \quad (14.5)$$

Таким образом в случае сферической симметрии уравнение (14.4) принимает вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\varphi) = \frac{1}{\delta'^2} \varphi; \quad \frac{1}{\delta'^2} \equiv 8\pi \frac{ne^2}{kT} \quad (14.6)$$

Решение уравнения (14.6) можно представить в виде:

$$r\varphi = A \exp \left(-\frac{r}{\delta'} \right) + B \exp \left(\frac{r}{\delta'} \right). \quad (14.7)$$

Из физических условий константа $B \equiv 0$, так как при $r \rightarrow \infty$ потенциал $\varphi \rightarrow 0$. При $r \rightarrow 0$, то есть вблизи пробного заряда потенциал должен совпадать с потенциалом точечного заряда q . В результате $A = q$. Окончательно получим:

$$\varphi = \frac{q}{r} \exp \left(-\frac{r}{\delta'} \right). \quad (14.8)$$

Как видно постоянная δ' на множитель $\sqrt{2}$ отличается от величины δ (14.3). Однако если допустить, что экранировка осуществляется только более подвижными электронами, то в выражении (14.5) для ρ останется только одна компонента, а константа δ' окажется совпадающей с константой δ [7] и формула для потенциала запишется в виде:

$$\varphi = \frac{q}{r} \exp \left(-\frac{r}{\delta} \right). \quad \delta \equiv \sqrt{\frac{kT}{4\pi n e^2}} \quad (14.9)$$

Параметр δ в физике плазмы называется *дебаевским радиусом экранирования*. Дебаевский радиус характеризует размер области в которой проявляется отклонения плазмы от квазинейтральности. Используя понятие дебаевского радиуса экранирования Ленгмюром было предложено определение плазмы как особого состояния вещества содержащего разноименно заряженные частицы в котором дебаевская длина мала по сравнению с размерами занимаемыми самой плазмой.

Плазменная частота.

Очевидно, что заряды плазмы одновременно входят в состав экранирующего объема и сами являются пробными зарядами. Это означает, что области неоднородности плазмы постоянно возникают и разрушаются по объему плазмы. Время, в течении которого области неоднородности существуют,

можно оценить, разделив δ на скорость движения более быстрых электронов:

$$\tau = \frac{\delta}{v} = \sqrt{\frac{kT}{4\pi n e^2}} \sqrt{\frac{m}{kT}} = \sqrt{\frac{m}{4\pi n e^2}}. \quad (14.10)$$

Здесь учтено, что скорость движения электрона массы m можно оценить на основании соотношения $mv^2 \approx kT$. Величина, обратная τ , называется *плазменной* или *ленгмюровской частотой*:

$$\frac{1}{\tau} \equiv \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}} \quad (14.11)$$

Высокочастотное поле в плазме.

Своеобразие свойств плазмы проявляется существенно под действием высокочастотного электрического поля. Пусть в плазме имеется переменное электрическое поле с напряженностью $E = E_0 \exp(i\omega t)$. Комплексная форма используется только для упрощения промежуточных вычислений. Если частота поля столь велика, что за время $t \approx 1/\omega$ вероятность столкновения электрона с ионами ничтожно мала, то можно рассматривать движение электрона пренебрегая столкновениями. Уравнение движения в этом случае имеет вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -eE_0 \exp(i\omega t).$$

Интегрируя данное уравнение, получим для x :

$$x = \frac{e}{m\omega^2} E_0 \exp(i\omega t).$$

Как следует из последнего выражения, смещение электрона x сдвинуто по фазе относительно действующей силы ($-eE$) на 180° . Это означает, что вектор поляризации \mathbf{P} направлен против поля и, следовательно, диэлектрическая проницаемость ϵ меньше единицы. По определению

$$\epsilon = 1 + 4\pi \frac{P}{E}; \quad P = -n e x = -n \frac{e^2}{m\omega^2} E \exp i\omega t.$$

В результате с учетом соотношения (14.11) находим для диэлектрической проницаемости:

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}}.$$

Отсюда следует, например, что при $\omega < \omega_0$ диэлектрическая проницаемость отрицательна, а следовательно, электромагнитные волны с частотами меньшими ω_0 не проникают в плазму и полностью отражаются от ее поверхности.

§2 Магнитная изоляция плазмы и пинч-эффект

Для описания движения плазмы можно использовать уравнения гидродинамики [8]. Если пренебречь вязкостью плазмы, уравнение движения примет вид:

$$\delta \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \text{grad } p.$$

Здесь \mathbf{f} - сила действующая на единицу объема плазмы, δ - плотность, а p - давление газа плазмы.

Если в плазме протекает ток, плотность которого \mathbf{j} , то сила, действующая на единицу объема, определяется выражением $\mathbf{f} = \mu[\mathbf{j} \times \mathbf{H}]/c$. Таким образом, уравнение движения плазмы имеет в этом случае вид:

$$\delta \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mu}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] - \text{grad } p. \quad (14.12)$$

Неподвижная плазма.

В частном случае неподвижной плазмы $\mathbf{v} = 0$ из уравнения (14.12) следует уравнение гидростатики:

$$\text{grad } p = \frac{\mu}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]. \quad (14.13)$$

Исключая из последнего уравнения плотность тока на основании системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении находим:

$$\text{grad } p = \frac{\mu}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{H}]. \quad (14.14)$$

Учитывая векторное равенство:

$$[\text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{H}] = (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} - \text{grad } \frac{H^2}{2},$$

уравнение (14.14) примет вид:

$$\text{grad } p = \frac{\mu}{4\pi} \text{grad } \frac{H^2}{2} + \frac{\mu}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H}. \quad (14.15)$$

Для упрощения выражения (14.15) выберем направление поля вдоль оси x и рассмотрим частный случай $\mathbf{H} = \mathbf{H}(y, z)$. В этом случае $(\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} = 0$ и формула (14.15) приводит к результату:

$$p + \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})}{8\pi} = \text{const}. \quad (14.16)$$

Выражение (14.16) показывает, что полное давление в плазме складывается из магнитного давления $\mu H^2/8\pi$ и газового давления, сумма которых остается в плазме постоянной величиной. Из соотношения (14.16) следует, что в области пространства не заполненном плазмой, значение \mathbf{H} больше, чем во внутренней области, заполненной плазмой. Это означает, что *плазма не может расширяться в пустоту. Магнитное поле изолирует плазму, заменяя собой непроницаемую стенку.*

Пинч-эффект.

Еще одно важное гидростатическое явление в плазме – это явление самосжатия плазменного шнура собственным магнитным полем тока. Данное явление называется пинч-эффект.

Пусть плазма представляет из себя цилиндр радиуса R , ось которого совпадает с осью z , по которому протекает ток с плотностью \mathbf{j} . Магнитное поле тока создает магнитное давление, которое уравнивается давлением в плазме. Пусть, для примера, плотность тока постоянна по сечению цилиндра плазмы. Тогда в цилиндрических координатах уравнение (14.13) примет вид:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{c} j H_\varphi. \quad (14.17)$$

Интегрирование уравнения (14.17) приводит к результату:

$$p = p_0 - \frac{1}{c^2} \pi j^2 r^2; \quad r < R, \quad (14.18)$$

$$p = 0; \quad r > R. \quad (14.19)$$

Здесь $p_0 = n_0 k T$ – давление, а n_0 – плотность газа в центре плазменного цилиндрического шнура.

Формулы (14.18), (14.19) показывают, что газовое давление и плотность выше в центре, чем на периферии цилиндра. Собственное магнитное поле сжимает и удерживает плазменный цилиндрический шнур. При этом радиус плазменного шнура постоянен, а выделяющееся джоулево тепло разогревает плазму.

Явление самосжатия плазменного цилиндра, получившее название пинч-эффект, приводит к отрыву плазмы от стенок сосуда и формирует более тонкий плазменный шнур [9].

§3 Транспортные явления в проводящих средах

В проводящих средах электрическое и магнитное поле приводит к появлению эффектов, столь же важных, как и эффекты поляризации и намагничивания. Рассмотрим последовательно влияние электрического и магнитных полей на явления в проводниках.

Электрическое поле.

В проводящих средах носители зарядов способны перемещаться под действием электрического поля. Процессы переноса заряда определяют ряд так называемых транспортных явлений, важнейшими из которых являются явления переноса заряда и тепла по проводнику.

В однородном изотропном проводнике, имеющем одинаковую температуру в любой точке проводника, электрический ток вызывается приложенным электрическим полем. В линейном по полю приближении плотность тока пропорциональна напряженности поля $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, где σ — проводимость среды.

При протекании тока в проводнике происходит выделение тепла и, следовательно, диссипация энергии поля. Для линейных проводников установлено, что количества тепла Q , выделяющееся в проводнике в единицу времени пропорционально квадрату силы тока I и сопротивлению проводника R :

$$\frac{dQ}{dt} = I^2 R = I^2 \rho \frac{l}{S} = \frac{I^2}{S^2} \frac{l S}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) V.$$

Здесь l — длина проводника, S — поперечное сечение проводника, $V = lS$ — объем проводника длины l . Данный закон называется законом Джоуля — Ленца. Дифференциальная форма закона, то есть тепло q , выделяющееся в единицу времени в единице объема равно:

$$q = \frac{1}{\sigma} j^2 = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) = \sigma E^2. \quad (14.20)$$

Взаимодействие электронов и ионов проводника приводят при наличии электрического поля \mathbf{E} к появлению потока тепла плотность которого в линейном приближении может быть записана в виде:

$$\mathbf{g} = \gamma \mathbf{E}. \quad (14.21)$$

В неоднородных средах выражения (14.20) и (14.21) усложняются и принимают более сложные выражения.

Рассмотрим для примера неоднородность связанную с температурной неоднородностью. Разность температуры различных участков проводника приводит к диффузии носителей заряда из более нагретых областей проводника к менее нагретым. В результате появляется дополнительный электрический ток и поток тепла. С учетом градиента температуры в проводнике выражения (14.20) и (14.21) примут следующий вид:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \beta \text{grad } T; \quad \mathbf{g} = \gamma \mathbf{E} + \xi \text{grad } T. \quad (14.22)$$

Здесь T — абсолютная температура, коэффициент β определяет величину термоэлектрического эффекта, а ξ величину теплопроводности проводника. Коэффициенты, появившиеся в (14.22) и выражениях, являющихся их обобщением называются кинетическими коэффициентами. Данные коэффициенты связаны друг с другом. Взаимная связь этих коэффициентов, устанавливается принципом Онсагера [17], подробное рассмотрение которого приводится в курсе статистической физики. Так для коэффициентов β и γ установлено, что: $\gamma = -\beta T$. В результате в рассматриваемом приближении температурной неоднородности получим для тепла, выделяющегося в единицу времени в единице объема проводника следующее выражение:

$$q = \frac{1}{\sigma} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) + T \left(\mathbf{j} \cdot \text{grad} \left(\frac{\beta}{\sigma} \right) \right) + \text{div} (k \text{grad } T). \quad (14.23)$$

Здесь $k = -(\xi + \beta^2 T / \sigma)$.

Эффект Пельтье

Выделение или поглощение тепла при прохождении тока через спай двух различных проводников называется эффектом Пельтье. Эффект открыт в 1834 году.

Если оба контактирующих проводника поддерживаются при одинаковой температуре, то плотность потока тепла может быть записана в виде:

$$\mathbf{g} = \gamma \mathbf{E} \approx \frac{\gamma}{\sigma} \mathbf{j} = -\frac{\beta T}{\sigma} \mathbf{j}.$$

Обозначим $\Pi = -\beta T / \sigma$. Данный коэффициент называется коэффициентом Пельтье и он различен для различных металлов. Поэтому разность плотностей потоков тепла, подводимого и уносимого током от контакта, равна:

$$g = (\Pi_1 - \Pi_2) j_n,$$

где j_n нормальная составляющая плотности тока к границе контакта первого и второго проводников. Π_1, Π_2 — коэффициенты Пельтье первого и второго

го проводников, соответственно. Знак эффекта Пельтье зависит от направления тока.

Эффект Томсона

Выделение или поглощение тепла в проводнике вдоль которого имеется градиент температуры называется эффектом Томсона.

Если рассмотреть второе слагаемое в (14.23) то тепловыделение в проводнике с температурным градиентом можно представить в виде:

$$q_t = T \left(\mathbf{j} \cdot \text{grad} \left(\frac{\beta}{\sigma} \right) \right) = T \frac{d}{dT} \left(\frac{\beta}{\sigma} \right) (\mathbf{j} \cdot \text{grad} T) = \varrho (\mathbf{j} \cdot \text{grad} T),$$

где ρ - коэффициент Томсона. Эффект Томсона в отличии от эффекта Джоуля - Ленца линеен по току. Поэтому, в зависимости от направления тока по отношению к направлению температурного градиента, а также в зависимости от знака коэффициента ϱ , эффект Томсона может проявляться как поглощением, так и выделением тепла.

Термоэлектродвижущая сила

Если привести в контакт три проводника, при этом внешние проводники сделать из одного материала и поддерживать температуры зон контактов соответственно равными T_1 и $T_2 \neq T_1$, а температуру концов цепи — одинаковой, то в цепи возникнет разность потенциалов, которая называется термоэлектродвижущей силой ε_t . Величину ε_t можно получить из формулы (14.22)

$$\varepsilon_t = - \oint_L (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = - \oint_L \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{j} + \frac{\beta}{\sigma} \text{grad} T \right) \cdot d\mathbf{l} = - \oint_L \frac{\beta}{\sigma} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{l}} \cdot d\mathbf{l} = - \oint_L \frac{\beta}{\sigma} dT$$

Данный интеграл разбивается на сумму трех интегралов, вычисленных вдоль каждого из трех проводников. После интегрирования получим:

$$\varepsilon_t = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\beta_1}{\sigma_1} - \frac{\beta_2}{\sigma_2} \right) dT$$

Соотношения Томсона

Из представленных равенств следует, что коэффициенты Пельтье Π и Томсона ϱ связаны соотношением:

$$\varrho = T \frac{d}{dT} \left(\frac{\Pi}{T} \right) \quad (14.24)$$

В результате термоэлектродвижущая сила равна:

$$\varepsilon_t = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} (\Pi_1 - \Pi_2) \quad (14.25)$$

Соотношения (14.24), (14.25) называются соотношениями Томсона.

Транспортные эффекты в магнитном поле

В магнитном поле соотношения (14.22) с учетом слагаемых линейных по полю можно записать в следующем виде [17]:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} - \frac{\beta}{\sigma} \text{grad } T + R [\mathbf{H} \times \mathbf{j}] + N [\mathbf{H} \times \text{grad } T] + \dots \quad (14.26)$$

$$\mathbf{g} = \frac{\gamma}{\sigma} \mathbf{j} - k \text{grad } T + N T [\mathbf{H} \times \mathbf{j}] + L [\mathbf{H} \times \text{grad } T] + \dots \quad (14.27)$$

где $k \equiv \xi + \gamma \beta / \sigma$.

Эффект Холла

Слагаемое $R[\mathbf{H} \times \mathbf{j}]$ в (14.26) определяет влияние магнитного поля на ток. Данное слагаемое приводит к появлению тока, перпендикулярного электрическому полю и пропорционального напряженности магнитного поля. Данное явление называется *эффектом Холла*. Из этого же выражения следует, что эффект Холла приводит к появлению электрического поля, перпендикулярного к току. Коэффициент R называется константой Холла. Данный коэффициент может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Эффект Нернста

Влияние магнитного поля на термоэлектродвижущую силу, определяемое последним слагаемым в (14.26) называется *эффектом Нернста*.

Третье слагаемое в (14.27) определяет влияние магнитного поля на эффект Пельтье. Данный эффект называется эффектом Эттингсгаузена. Наконец, последнее слагаемое в (14.27) определяет влияние магнитного поля на теплопроводность и называется эффектом Риги-Людека.

§4 Электродинамика сверхпроводников

Явление сверхпроводимости было открыто Оннесом в 1911 году при наблюдении изменения зависимости сопротивления R ртути от температуры.

Было обнаружено, что при температуре $T_c \approx 4^\circ\text{K}$ сопротивление ртути стало приблизительно на 16 порядков меньше, чем у чистой меди. Другими словами $R(\text{ртути}) \rightarrow 0$ рис 14.1. Дальнейшие экспериментальные исследования показали что:

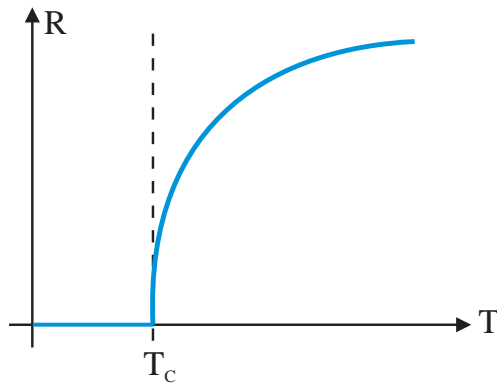


Рис. 14.1:

1) Для ряда проводников существует критическая температура T_c , ниже которой сопротивление проводников не обнаруживается. Критическая температура характерна для данного материала. Сверхпроводимость обнаружена у нескольких десятков металлических элементов, у большого числа сплавов, у группы интерметаллических соединений, у некоторых полу-

проводников и полимеров.

2) Магнитное поле может разрушить сверхпроводящее состояние. При этом если для $T = 0$ магнитное поле приводящее к разрушению сверхпроводящего состояния обозначить через $H_c(0)$, то экспериментальная зависимость критического значения напряженности, при которой происходит разрушение сверхпроводящего состояния, имеет вид:

$$H_c(T) = H_c(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (14.28)$$

3) В сверхпроводящем состоянии происходит квантование магнитного потока. Данное экспериментальное наблюдение было установлено следующим образом. Пусть при $T > T_c$ замкнутое кольцо из проводника помещено в магнитное поле. Силовые линии магнитного поля пересекают плоскость кольца и дают определенное значение потока вектора индукции. Понизим температуру до T_c и выключим магнитное поле. При выключении поля поток вектора индукции магнитного поля начнет уменьшаться, но его изменение индуцирует в проводящем кольце ток, который не затухает с течением времени, а в кольцо "вмораживается" магнитный поток. Такой ток называется *сверхтоком*. Сверхток экспериментально наблюдался в течении двух с половиной лет, но никаких изменений в его величине не было обнаружено. Экспериментально было установлено, что замороженный магнитный поток кратен величине:

$$\Phi_0 = \pi \frac{\hbar c}{e},$$

где \hbar — постоянная Планка $\approx 10^{-27}$ эрг·сек, c — скорость света, e — величина заряда электрона. Кратность замороженного потока определенной величине указывает на квантовый характер явления сверхпроводимости.

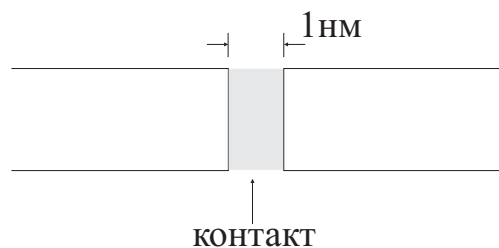


Рис. 14.2:

4) На сверхпроводящем контакте проводников наблюдается эффект Джозефсона, предсказанный теоретически в 1962 году. Суть эффекта состоит в том, что при протекании тока через контакт двух проводников разделенных слоем диэлектрика (см. рис 14.2), толщина которого

$\sim 10^{-9}$ см. (обычно пленка окиси металла) при значении тока меньше некоторого критического значения I_c падение напряжения на контакте отсутствует (стационарный эффект Джозефсона). В то время как при значении тока $I > I_c$ на контакте возникает падение напряжения и контакт начинает излучать электромагнитные волны. Излучать может только переменный ток, протекающий в этом случае через контакт при постоянном падении напряжения V на контакте. Частота излучения связана с V соотношением $\hbar\omega = 2eV$. Соответственно на вольт-амперной характеристике появляются скачки.

5) Происходит выталкивание \mathbf{B} из сверхпроводника. Данное явление получило название эффект Мейснера-Оксенфельда. Таким образом определение идеального сверхпроводника удовлетворяет условиям $\mathbf{B} = 0$, $\rho = 0$. Эффект Мейснера связан с тем, что при значении вектора индукции меньше критического в поверхностном слое вещества толщиной $\sim 10^{-6}$ см. появляется незатухающий ток, возбуждающий магнитное поле в точности компенсирующее магнитное поле в толще сверхпроводника.

Модель Лондонов.

Классическая теория явлений сверхпроводимости первоначально была построена на использовании модели и уравнений Лондонов. В рамках этой модели все электроны делятся на два типа — сверхпроводящие и нормальные. Физическая природа двух типов электронов в модели не обсуждается. Полное число электронов в единице объема n определяется суммой числа сверхпроводящих n_s и нормальных n_n электронов $n = n_s + n_n$. Изменение числа нормальных и сверхпроводящих электронов в объеме проводника в зависимости от температуры проводника показан на рис 14.3.

Рассмотрим бесконечно малый объем сверхпроводника dv . Масса сверхпроводящих электронов внутри этого бесконечно малого объема равна $n_s m dv$, а заряд $n_s e dv$. В результате уравнение движения (Ньютона) для сверхпроводящих электронов внутри объема dv под действием напряженности электрического поля \mathbf{E} имеет вид:

$$n_s m dv \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = n_s e dv \mathbf{E}.$$

Умножая полученное равенство на заряд электрона и учитывая, что плотность тока $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = n e \mathbf{v}$, перепишем последнее равенство в виде:

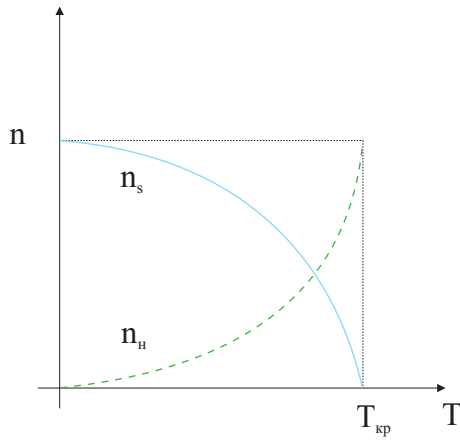


Рис. 14.3:

$$\frac{d\mathbf{j}_s}{dt} = \frac{n_s e^2}{m} \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} = \frac{d}{dt} (\Lambda \mathbf{j}_s), \quad \Lambda \equiv \frac{m}{n_s e^2}. \quad (14.29)$$

В соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея, на основании (14.29) получим:

$$\text{rot} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Lambda \mathbf{j}_s \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

Проинтегрировав данное уравнение по времени находим:

$$\Lambda \text{rot} \mathbf{j}_s + \frac{1}{c} \mathbf{B} = \Lambda \text{rot} \mathbf{j}_s + \frac{1}{c} \text{rot} \mathbf{A} = 0.$$

Выразим в последнем уравнении плотность сверхпроводящего тока из обобщенного закона Ампера, в котором опущено слагаемое, соответствующее току смещения. В результате:

$$\text{rot rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c^2 \Lambda} \mathbf{B}.$$

Выполняя тождественные преобразования получаем уравнение для \mathbf{B} :

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B}; \quad \lambda^2 \equiv \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}. \quad (14.30)$$

Решение данного уравнения есть:

$$\mathbf{B}(z) = \mathbf{B}(0) \exp \left(-\frac{z}{\lambda} \right).$$

Параметр λ

$$\lambda = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}}$$

называется лондоновской глубиной проникновения магнитного поля. Нетрудно оценить величину глубины проникновения. При $n_s \approx 10^{22} \text{см}^{-3}$ $\lambda \approx 10^{-5} \text{см}$.

Так как λ есть функция от числа сверхпроводящих электронов, то λ зависит от температуры. Эмпирически установлено, что:

$$\lambda(T) = \frac{\lambda(0)}{1 - (T/T_s)^4}.$$

Квантование магнитного потока.

Квантование магнитного потока может быть качественно объяснено на основе соотношения, известного из квантовой теории:

$$\oint_L \mathbf{p}_s \cdot d\mathbf{l} = \pi n \hbar, \quad n \in 1, 2, 3, \dots$$

Подставляя значение обобщенного импульса $\mathbf{p}_s = m\mathbf{v}_s + e\mathbf{A}/c$, с учетом равенства $\mathbf{v}_s = \mathbf{j}_s/n_s e$ получим:

$$\oint_L \left[\frac{m}{n_s e} \mathbf{j}_s + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right] \cdot d\mathbf{l} = \pi n \hbar, \quad n \in 1, 2, 3, \dots$$

Первый интеграл равен нулю в силу замкнутости тока, в результате:

$$\frac{e}{c} \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{e}{c} \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \frac{e}{c} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{e}{c} \Phi = \pi n \hbar.$$

Таким образом для магнитного потока можно написать окончательно выражение демонстрирующее его квантование:

$$\Phi = n \frac{\pi \hbar c}{e} = n \frac{\pi h c}{2\pi e} = n \frac{h c}{2e} = n \Phi_0.$$

Таким образом в соответствии с уравнениями Лондонов магнитный поток принимает лишь значения кратные кванту потока $\Phi_0 = h c/e^*$, где $e^* \equiv 2e$ - заряд носителей сверхпроводящего тока. Заряд носителей равный удвоенному заряду электрона находит свое объяснение в теории Куперовских пар, в соответствии с которой два электрона с противоположными спинами, взаимодействуя через кристаллическую решетку образуют связанное состояние - куперовскую пару. Каждая пара обладает нулевым значением спина и подчиняется статистике Бозе-Эйнштейна, а не статистике Ферми - Дирака как обычные электроны. В сверхпроводящем состоянии пары испытывают Бозе конденсацию (все могут находиться в низшем энергетическом состоянии) и поэтому система куперовских пар обладает свойством сверхтекучести.

В результате сверхпроводимость представляет собой сверхтекучесть электронной жидкости.

§5 Метод конформного отображения

Метод конформного отображения применяется при рассмотрении систем поля которых можно рассматривать в плоскости. *Поле, зависящее только от двух координат, называется плоским.* В этом случае широко применяется теория функций комплексного переменного в соответствии со следующими рассуждениями [18].

Электростатическое поле в вакууме удовлетворяет уравнениям:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

Первое из этих уравнений позволяет ввести скалярный потенциал $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi(x, y)$, при этом потенциал φ удовлетворяет двумерному однородному уравнению Пуассона $\nabla^2 \varphi = 0$. В соответствии со вторым уравнением можно ввести вспомогательный вектор \mathbf{a} по определению $\mathbf{E} = \operatorname{rot} \mathbf{a}$. При этом в случае плоского поля вектор электрического поля можно выбрать лежащим в плоскости x, y , тогда вектор \mathbf{a} можно считать направленным в ортогональном направлении к выбранной плоскости, то есть вдоль оси z . $\mathbf{a} = \mathbf{k} a_z$.

Скалярную функцию a_z обозначим через $\psi \equiv a_z(x, y)$. В результате компоненты электрического поля можно записать исходя из двух определений:

$$E_x = -(\operatorname{grad} \varphi)_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (\operatorname{rot} \mathbf{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (14.31)$$

$$E_y = -(\operatorname{grad} \varphi)_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (\operatorname{rot} \mathbf{a})_y = -\frac{\partial a_z}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (14.32)$$

Таким образом для функций φ и ψ выполняются равенства:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (14.33)$$

Из данного равенства вытекает, что функция ψ , также как и скалярный потенциал удовлетворяют однородному двумерному уравнению Пуассона $\Delta \psi = 0$.

Соотношения (14.33) совпадают с известными в теории функций комплексного переменного условиями Коши - Римана, которые являются необходимыми и достаточными, для того, чтобы установить аналитичность

функции

$$\omega = \varphi - i\psi \quad (14.34)$$

в комплексной плоскости $\xi = x + iy$. Аналитичность функции ω означает, что ω имеет в каждой точке определенную производную, не зависящую от направления. Например, производная по направлению оси x равна:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -E_x + i E_y. \quad (14.35)$$

Функция ω называется комплексным потенциалом.

В соответствии с (14.31) и (14.32) линии постоянных значений $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ — ортогональны, так как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Таким образом, линии постоянных значений ψ являются силовыми линиями поля. Исходя из соотношения $d\psi = 0$ для уравнения силовых линий получим:

$$d\psi = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy,$$

или

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}. \quad (14.36)$$

Комплексный потенциал заряженной линии.

Простейшим примером комплексного потенциала является потенциал бесконечной заряженной прямой нити, расположенной, для примера, вдоль оси z единица длины которой заряжена с линейной плотностью τ . Учитывая условия цилиндрической симметрии системы данную задачу удобно рассматривать в цилиндрической системе координат [18]. В этом случае напряженность поля лежит в плоскости параллельной плоскости $x - y$, зависит только от расстояния до заряженной линии ρ и направлена вдоль радиуса вектора цилиндрической системы координат. Ось z , совпадает с заряженной линией.

$$E_\rho = 2\tau\rho \int_0^\infty \frac{1}{(\rho^2 + z^2)} dz = \frac{2\tau}{\rho}, \quad E_\phi = 0; \quad E_z = 0.$$

Градиент скалярного потенциала в цилиндрической системе координат определяется выражением:

$$\text{grad } \varphi = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

где \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_ϕ , \mathbf{e}_z — базисные единичные векторы цилиндрической системы координат. В результате выражение для скалярного потенциала имеет вид:

$$\varphi(\rho) = - \int \frac{2\tau}{\rho} d\rho = -2\tau \ln \rho.$$

Для определения мнимой части комплексного потенциала выпишем ротор вектора \mathbf{a} в цилиндрической системе координат:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_\rho \frac{2\tau}{\rho} = \text{rot } \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho \mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \psi \end{vmatrix} = \mathbf{e}_\rho \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} - \mathbf{e}_\phi \frac{\partial \psi}{\partial \rho}.$$

Отсюда $\psi = 2\tau \phi$. Таким образом комплексный потенциал в данном примере равен:

$$w = \varphi - i\psi = -2\tau \ln \rho - i2\tau\phi = -2\tau \ln (\rho e^{i\phi}) = -2\tau \ln \xi.$$

Если заряженная линия проходит через точку $\xi_0 = x_0 + i y_0$, то комплексный потенциал равен:

$$w = -2\tau \ln (\xi - \xi_0).$$

Соотношение $w = w(\xi)$ осуществляет *конформное отображение* плоскости комплексного переменного ξ на плоскость комплексного переменного w . Конформные преобразования не изменяют углов, однако сами координатные линии в плоскости могут деформироваться. Это свойство положено в основу введения новых координатных систем и выбора таких систем в которых решение можно найти относительно просто.

Принцип суперпозиции поля, основанный на линейности системы уравнений Максвелла означает, что суперпозиция комплексных потенциалов определяет комплексный потенциал новой задачи. Кроме того, так как все производные и интегралы от аналитической функции также являются аналитическими функциями, это означает, что по заданному решению какой-либо задачи w_1 можно отыскать бесчисленное множество решений различных задач. В этом и состоит преимущество данного метода, практическое применение которого можно найти в [20]

§6 Электромагнитные флуктуации

Флуктуации - это случайные отклонения физических величин от их средних значений. Флуктуации возникают у любых величин зависящих от случайных факторов.

Количественная характеристика флуктуаций основывается на методах разработанных в теории вероятностей и математической статистики. Простейшей мерой флуктуации заданной величины x является дисперсия или средний квадрат отклонения от её среднего значения.

$$\sigma_x^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2.$$

В данном выражении черта сверху величины означает статистическое усреднение, как говорят в статистической физике по ансамблю значений величины, но не по времени.

Аналогично мерой флуктуации могут служить среднеквадратичное отклонение $\sigma_x \equiv \sqrt{\sigma_x^2}$ или величина относительного среднеквадратичного отклонения $\delta_x \equiv \sigma_x / \bar{x}$.

В системе многих частиц образующих вещество флуктуации вызываются хаотическим тепловым движением атомов или молекул. Основы теории флуктуаций заложены в работах Дж. Гибса, А. Эйнштейна и М. Смолуховского в начале XX - го века. С помощью так называемых распределений Гибса можно вычислить флуктуации в состоянии статистического равновесия для систем находящихся в различных физических условиях. При этом величины флуктуаций определяются значениями равновесных термодинамических параметров и их производных.

Корреляции

Помимо флуктуаций величин x_i в описании процессов системы многих частиц важную роль играют величины, получившие название *корреляций* между ними и определяемые соотношением: $\overline{\Delta x_i \Delta x_k}$. Корреляции определяют взаимное влияние флуктуаций.

Для величин зависящих от координат x и времени t в общем случае имеют место пространственно-временные корреляции между флуктуациями этих величин относящихся к различным пространственно-временным точкам системы:

$$\overline{\Delta a(x_1, t_1) \Delta b(x_2, t_2)} = F(x_2 - x_1, t_2 - t_1).$$

Функции F называются *пространственно-временными корреляционными функциями*.

Флуктуации тесно связаны с неравновесными процессами в системе. В общем случае существует связь между флуктуациями физических величин в равновесном состоянии и неравновесными свойствами системы при внеш-

нем воздействии.

Флуктуационно - диссипативная теорема

Теорема статистической физики устанавливающая связь между флуктуациями в равновесном состоянии и неравновесными свойствами системы называется *флуктуационно - диссипативной теоремой*.

Содержание теоремы можно описать следующим образом. Пусть $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$ некоторое периодическое силовое возмущение действующее на систему, t - время, ω - частота. Реакция системы на данное возмущение приводит к изменению среднего значения величины x на $\delta\bar{x}$, при этом для фурье-компонент имеет место равенство $\delta\bar{x}(\omega) = \alpha(\omega) f(\omega)$. Здесь $\alpha(\omega)$ - обобщенная восприимчивость системы, которая и определяет неравновесные свойства системы.

В соответствии с флуктуационно - диссипативной теоремой фурье-образ корреляционной функции вида

$$\psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\overline{\Delta x(t) \Delta x(0)} + \overline{\Delta x(0) \Delta x(t)} \right] \exp(-i\omega t) dt,$$

связан с обобщенной восприимчивостью соотношением

$$\psi(\omega) = \hbar \operatorname{cth} \left(\frac{\hbar \omega}{2 k T} \right) \operatorname{Im} \alpha(\omega).$$

Здесь \hbar - постоянная Планка, k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура.

§7 Элементы нелинейной электродинамики

Нелинейная электродинамика получила свое развитие после создания источников мощного когерентного электромагнитного излучения - лазеров и мазеров. С помощью импульсных лазеров можно получать интенсивности электромагнитного излучения в оптическом диапазоне $I \sim 10^7 - 10^9$ Вт/см² и более, а мощные лазерные системы позволяют достичь интенсивностей $I \sim 10^{16}$ Вт/см² и более. Это означает, что напряженности поля $I \sim E^2$ в таких пучках сравнимы или даже превосходят внутриатомное поле. В таких полях возникают явления, которые отсутствуют или не проявляются в слабых полях, что являлось предметом изучения линейной электродинамики. Этот новый круг физических явлений составляют предмет изучения так называемой нелинейной электродинамики. Первоначально эти яв-

ления относились к видимому диапазону электромагнитного поля и назывались нелинейной оптикой. Сильное световое поле меняет оптические характеристики среды, которые становятся функциями напряженности электрического поля. Другими словами, поляризация среды начинает нелинейно зависеть от напряженности. В дальнейшем, нелинейные эффекты стали исследоваться и в других диапазонах электромагнитного поля.

В 60-ых годах XX-го столетия были открыты многочисленные нелинейные эффекты и явления при взаимодействии электромагнитного поля с веществом. Среди них такие как удвоение частоты света в кристаллах — генерация 2-ой гармоники; генерация 3-ей гармоники; вынужденное комбинационное рассеяние света; самофокусировка света и другие.

Математическое описание нелинейных эффектов основывается на уравнении связывающем вектор поляризации среды с вектором напряженности электрического поля. Как известно линейная электродинамика основывается на соотношении $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$, где χ — диэлектрическая восприимчивость среды, зависящая только от свойств самой среды. В соответствии с этим соотношением процесс взаимодействия внешнего поля с молекулой определяет появление наведенного дипольного момента молекулы, колеблющегося с частотой внешнего поля. В результате переизлученное поле должно иметь ту же частоту, что и падающее. То есть, например, удвоение частоты в рамках линейной электродинамики невозможно.

Однако для интенсивного поля, когда напряженность поля порядка внутриатомного уже не достаточно учесть только линейные по полю члены и это означает, что вектор поляризации в однородной изотропной среде будет представляться рядом включающим более высокие степени по напряженности поля. Так для величины вектора поляризации можно записать

$$P = \chi^{(1)} E + \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 + \dots, \quad (14.37)$$

где $\chi^{(i)}$ — нелинейные восприимчивости. Уравнение (14.37) является основой нелинейной электродинамики. Так если на вещество падает волна $E = E_0 \cos(\omega t - kx)$, то в соответствии с 14.37 помимо линейного слагаемого

$$P^{(l)} = \chi^{(1)} E_0 \cos(\omega t - kx)$$

у вектора поляризации среды содержится и нелинейный член, по крайней

мере второго порядка

$$P = \chi^{(2)} E^2 = \frac{\chi^{(2)} E_0^2}{2} [1 + \cos 2(\omega t - kx)] . \quad (14.38)$$

Последнее слагаемое в (14.38) описывает поляризацию, изменяющуюся с частотой 2ω , то есть генерацию второй гармоники. Аналогично можно качественно объяснить явление генерации третьей гармоники и другие нелинейные эффекты.

Нелинейный отклик молекул или атомов вещества на мощное электромагнитное излучение является универсальной причиной нелинейных электродинамических или оптических эффектов, хотя существуют и иные причины такие как нагрев среды лазерным излучением или сжатие среды в электромагнитном поле (электрострикция). Строгая теория нелинейных эффектов может быть построена на основе квантовомеханического описания атомов и молекул.

Литература

- [1] *Борисенко А.И., Тарапов И.В.* Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М., 1968. 252 с.
- [2] *Арфкен Г.* Математические методы в физике. М., 1970. 712 с.
- [3] *Алексеев А.И.* Сборник задач по классической электродинамике. М., 1977. 318 с.
- [4] *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Сборник задач по электродинамике. М., 1970. 503 с.
- [5] *Будак В.М., Фомин С.В.* Кратные интегралы и ряды. М., 1967. 608 с.
- [6] *де Гроот С.Р., Сатторп Л.Г.* Электродинамика. М., Наука, 1982.
- [7] *Арцимович А.А., Лукьянов С.Ю.* Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. М., Наука, 1978.
- [8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М., Наука, 1986.
- [9] *Левич В.Г.* Курс теоретической физики. Том 1 М., Наука, 1969.
- [10] *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М., Наука, 1973. 719 с.
- [11] *Карцев В.* Приключения великих уравнений. М., Знание, 1986, 288 с.
- [12] *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика. т.6. М., Мир, 1966, 343с.
- [13] *Джackson Дж.* Классическая электродинамика. М., 1965. 722 с.
- [14] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1971, 1108 с.
- [15] *Варшавович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория волнового момента. Ленинград, Наука, 1975.
- [16] *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М., Наука, 1976.

- [17] *Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н.* Классическая электродинамика. М., Наука, 1988.
- [18] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 2002.
- [19] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М., Наука, 2001.
- [20] *Радыгин В.М., Голубева О.В.* Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М., Высшая школа, 1983.
- [21] *Прудников А.И., Бычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М., 1981. 798 с.
- [22] *Иродов И.Е.* Основные законы электродинамики. -М.: Высш. шк., 1983, -279с.
- [23] *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. -М.: Изд-во Иностран. лит., 1958. -1054с.
- [24] *Ансельм А.И.* Очерки развития физической теории в первой трети XX века. -М.: Наука, 1986, 244 с.
- [25] *Борн М.* Эйнштейновская теория относительности. М.: Мир, 1972, 386 с.
- [26] *Соколовский Ю.И.* Начала теории относительности. М.: Просвещение, 1979, 159 с.
- [27] *Лайтман А., Пресс В., Прейс Р. и др.* Сборник задач по теории относительности и гравитации. М.: Мир, 1979, 535 с.
- [28] *Орир Дж.* Физика, т.2, М.: Мир, 1981, 622 с.

Оглавление

1	Введение	2
§1	Предисловие	3
§2	Как изучать курс?	5
§3	Введение. История возникновения и развития электродинамики	6
2	Векторный и тензорный анализ. Семинары.	10
§1	Векторная алгебра	11
§2	Дифференцирование векторов	19
§3	Интегрирование векторов	23
§4	Вращения и инверсия системы координат	30
§5	Системы координат	40
§6	Векторный анализ	48
§7	Тензорный анализ	56
3	Основные уравнения электродинамики. Лекции.	67
§1	Экспериментальные данные, лежащие в основе электродинамики. Электростатика.	68
§2	Экспериментальные данные, лежащие в основе электродинамики. Магнитостатика.	77
§3	Закон электромагнитной индукции Фарадея.	82
§4	Ток смещения. Система уравнений Максвелла.	85
§5	Системы единиц измерения.	88
§6	Скалярный и векторный потенциалы.	91
§7	Электромагнитное поле в веществе.	95
§8	Поляризация среды. Дипольный момент.	99
§9	Магнитный момент.	103
§10	Параметризация средней плотности тока связанных зарядов в линейной электродинамике.	105

§11	Физический смысл слагаемых в $\overline{\langle \mathbf{j} + \mathbf{j}_{in} \rangle}$	107
§12	Система уравнений Максвелла в среде.	111
§13	Фурье-преобразования системы уравнений Максвелла.	114
§14	Дисперсионные соотношения Крамерса-Кронига.	116
§15	Векторы Герца.	118
§16	Энергия электромагнитного поля	122
§17	Импульс электромагнитного поля	127
4	Постоянное электрическое поле. Лекции	129
§1	Основные уравнения электростатики.	130
§2	Граничные условия	132
§3	Поле произвольной системы зарядов.	136
§4	Поле системы зарядов на больших расстояниях	140
§5	Электростатика проводников	143
§6	Метод изображений	147
§7	Энергия электростатического поля	150
§8	Энергия системы зарядов во внешнем поле	153
§9	Силы в электростатическом поле	156
§10	Связь объемных и поверхностных сил.	159
§11	Молекулярная теория диэлектриков	163
§12	Поляризация неполярных диэлектриков.	163
§13	Поляризация полярных диэлектриков.	166
5	Постоянное электрическое поле. Семинары.	169
§1	Основные формулы и определения	170
§2	Теорема Гаусса	172
§3	Решение задач электростатики методом интеграла Пуассона	176
§4	Решение неоднородного уравнения Пуассона	181
§5	Уравнение Лапласа в декартовых и цилиндрических координатах	187
§6	Метод изображений.	192
§7	Дипольный момент. Тензор квадрупольного момента. Поле системы зарядов на больших расстояниях	198
§8	Силы и энергия в электростатическом поле	202
§9	Упражнения к гл. 5.	204

6	Постоянное магнитное поле. Лекции.	208
§1	Основные уравнения. Граничные условия	209
§2	Поле системы токов	211
§3	Энергия постоянного магнитного поля	214
§4	Силы в постоянном магнитном поле	218
§5	Энергия системы токов во внешнем поле	221
§6	Вещество в магнитном поле. Диамагнетизм. Парамагнетизм.	223
§7	Ферромагнетизм.	227
7	Постоянное магнитное поле. Семинары.	231
§1	Основные формулы и определения	232
§2	Система уравнений Максвелла	234
§3	Векторный потенциал. Закон Био-Саввара-Лапласа.	240
§4	Поле системы замкнутых токов на больших расстояниях. Магнитный момент системы токов.	246
§5	Энергия и силы в магнитном поле. Энергия тока во внешнем поле.	249
§6	Упражнения к гл.7.	256
8	Теория излучения. Лекции.	259
§1	Потенциалы Лиенара-Вихерта.	260
§2	Поле точечного диполя.	263
§3	Поле точечного диполя в волновой зоне.	266
§4	Мощность излучения.	267
§5	Теория излучения произвольной системы зарядов и токов. .	272
§6	Реакция излучения. Сила реакции излучения.	277
§7	Спектральное распределение излучения.	279
9	Теория излучения. Семинары.	283
§1	Общие определения	284
§2	Интенсивность электрически-дипольного излучения	285
§3	Квадрупольное и магнитно-дипольное излучение	291
§4	Спектральное распределение излучения	296
§5	Угловое распределение излучения	302
10	Электромагнитные волны.	312
§1	Электромагнитные волны в вакууме	313

§2	Рассеяние электромагнитных волн	318
§3	Электромагнитные волны в однородных изотропных средах .	322
§4	Электромагнитные волны в анизотропных средах	324
§5	Отражение и преломление плоской волны	329
§6	Распространение энергии электромагнитного поля вдоль линий передач.	332
§7	Волноводы.	336
§8	Дифракция.	340
§9	Дифракция Френеля.	347
§10	Дифракция Фраунгофера.	348
11	Квазистационарное электромагнитное поле.	350
§1	Квазистационарное электромагнитное поле	351
§2	Скин-эффект	352
§3	Система линейных проводников	354
12	Специальная теория относительности. Лекции.	359
§1	Основы специальной теории относительности	360
§2	Следствия из преобразований Лоренца	364
§3	Четырехмерные обозначения в специальной теории относительности	369
§4	Кинематические определения в четырехмерном пространстве. 4-скорость. 4-ускорение.	377
§5	Релятивистская механика.	379
§6	Элементарная квантовая теория электромагнитного поля. . .	382
§7	4-ток. 4-потенциал.	384
§8	Тензор электромагнитного поля.	386
§9	Преобразование напряженностей полей. Инварианты поля.	390
§10	Тензор энергии-импульса электромагнитного поля.	392
§11	Электродинамика движущихся сред.	394
§12	Эффект Доплера.	399
§13	Действие в электромагнитном поле.	401
§14	Принцип наименьшего действия в электродинамике.	402
13	Специальная теория относительности. Семинары.	406
§1	Преобразования Лоренца	407
§2	Четырехмерные обозначения.	413

§3	Релятивистская механика	418
§4	Релятивистская формулировка электродинамики	427
§5	Эффект Доплера.	434
§6	“Парадоксы” специальной теории относительности (СТО) .	437
§7	Упражнения к гл. 13	439
14	Дополнительные главы электродинамики.	443
§1	Элементарные определения физики плазмы	444
§2	Магнитная изоляция плазмы и пинч-эффект	448
§3	Транспортные явления в проводящих средах	450
§4	Электродинамика сверхпроводников	453
§5	Метод конформного отображения	458
§6	Электромагнитные флуктуации	460
§7	Элементы нелинейной электродинамики	462