Modelos de Programación Lineal (PL)

Métodos cuantitativos para la toma de decisiones

Informática Empresarial

Jonathan Fernández González

Introducción

- Las decisiones administrativas implican hacer un mejor uso de los recursos y los recursos se utilizan para elaborar diferentes productos o servicios.

- PL: es una técnica de modelado matemático, que ayuda en la planeación y toma de decisiones sobre asignación de recursos

- Programar:

  En la administración (como ciencia) es modelar y resolver matemáticamente un problema

Requerimientos de un problema de PL

- La PL se utiliza en problemas de muchos tipos (industriales, financieros, comercio, contabilidad, agricultura, etc.)

Todos los problemas tienen propiedades y suposiciones comunes

Requerimientos de un problema de PL

- Minimizar o maximizar un objetivo
- Limitaciones o restricciones
- Alternativas disponibles
- Relaciones matemáticas lineales
- Certeza
- Divisibilidad
- Variables no negativas

- Todos los problemas buscan minimizar o maximizar alguna cantidad

Esto es la **<u>función objetivo</u>** de un problema de PL

Todo objetivo se debe establecer con claridad y definir matemáticamente

Requerimientos de un problema de PL

- Minimizar o maximizar un objetivo
- **Limitaciones o restricciones**
- Alternativas disponibles
- Relaciones matemáticas lineales
- Certeza
- Divisibilidad
- Variables no negativas

• Los problemas de PL tienen en común limitaciones o restricciones, que acotan el grado en que se puede alcanzar el objetivo

• Personal, maquinarias disponibles, cantidad de dinero

Se desea minimizar o maximizar una función objetivo sujeta a recursos limitados (restricciones)

Requerimientos de un problema de PL

Minimizar o maximizar un objetivo → Limitaciones o restricciones → **Alternativas disponibles** → Relaciones matemáticas lineales → Certeza → Divisibilidad → Variables no negativas

- Si no hay alternativas para elegir, no hay necesidad de usar PL

  - En la fabricación de tres productos diferentes, se puede utilizar PL para decidir cómo distribuir entre ellos sus recursos de producción limitados

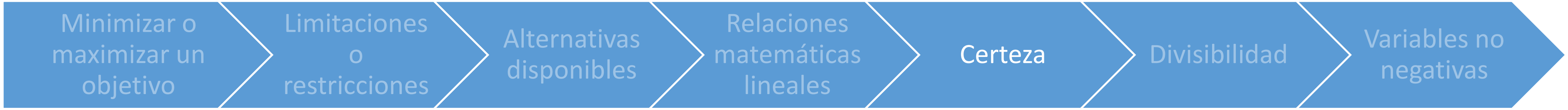
Requerimientos de un problema de PL

Minimizar o maximizar un objetivo → Limitaciones o restricciones → Alternativas disponibles → Relaciones matemáticas lineales → Certeza → Divisibilidad → Variables no negativas

- La función objetivo y las restricciones se deben expresar en ecuaciones o desigualdades lineales (de primer grado)

Lineal Implica: Proporcionalidad y adición

Requerimientos de un problema de PL



- En PL existen condiciones de certeza, es decir se conoce con certeza el número en el objetivo y en las restricciones y no cambian durante el estudio

Requerimientos de un problema de PL

- Minimizar o maximizar un objetivo
- Limitaciones o restricciones
- Alternativas disponibles
- Relaciones matemáticas lineales
- Certeza
- **Divisibilidad**
- Variables no negativas

- Se supone divisibilidad, las soluciones no necesitan números enteros

Requerimientos de un problema de PL

Minimizar o maximizar un objetivo → Limitaciones o restricciones → Alternativas disponibles → Relaciones matemáticas lineales → Certeza → Divisibilidad → **Variables no negativas**

- Todas las respuestas o variables no son negativos (valores negativos de cantidades físicas son imposibles)

Formulación de problemas con PL

- Se desarrolla un modelo matemático que representa un problema administrativo, para esto se debe entender el problema administrativo al que se enfrenta, una vez entendido, es posible desarrollar la formulación matemática del problema

- Los pasos son los siguientes:

Formulación de problemas con PL

Los pasos son los siguientes:

1. Entender cabalmente el problema
2. Identificar el objetivo y las restricciones
3. Definir las variables de decisión
4. Utilizar las variables de decisión para escribir expresiones matemáticas de la función objetivo y las restricciones.

Ejemplo

- Una compañía fabrica mesas y sillas de bajo precio, los procesos de producción son muy similares ya que cada una requiere cierto número de horas de trabajo en el departamento de carpintería y un número de horas en el departamento de pintura y barnizado de la siguiente manera:

	Horas por unidad	
Departamento	Mesas (M)	Sillas (S)
Carpintería	4	3
Pintura y barnizado	2	1

Ejemplo

- Durante el periodo de producción actual, están disponibles 240 horas de tiempo de carpintería y 100 horas de tiempo de pintura y barnizado
- La utilidad generada por cada mesa es de 70 y la de cada silla es de 50 dólares

	Horas por unidad		
Departamento	Mesas (M)	Sillas (S)	Horas x Semana
Carpintería	4	3	240
Pintura y barnizado	2	1	100
Utilidad unitaria	$ 70.00	$ 50.00	

- ¿Cuál es la mejor combinación de mesas y sillas a fabricar para obtener una utilidad máxima?

Solución gráfica

- El proceso gráfico es útil cuando existen únicamente dos variables de decisión (número de mesas a producir y el número de sillas a producir)

- La variable Mesas se representa en el eje horizontal y la variable sillas en el eje vertical

1 restricción es:

$4M + 3S <=240$

$4M + 3S =240$

Región factible

- En PL, la región factible de un problema debe satisfacer todas las condiciones especificadas por las restricciones del problema, por lo que es la región donde se traslapan todas las restricciones

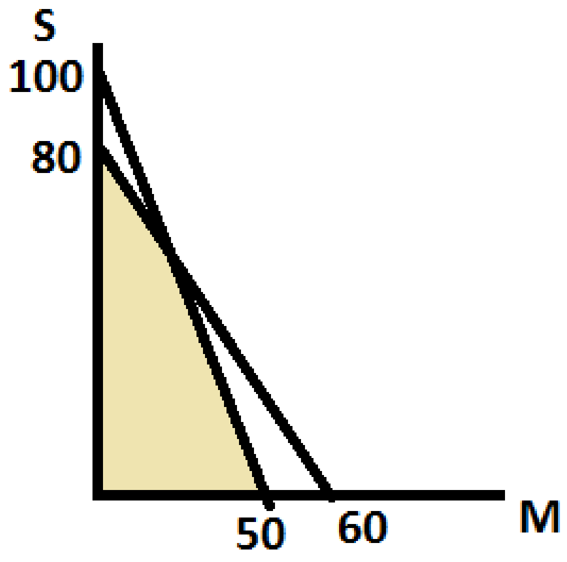
En la gráfica, cualquier punto dentro es la solución factible y cualquier punto fuera es la solución no factible

Es Factible fabricar

70 mesas y 40 sillas?

50 mesas y 5 sillas?

30 mesas y 20 sillas?

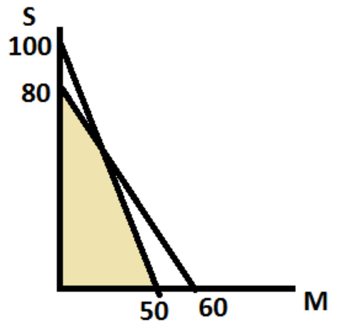


Recta de Isoutilidad

- Después de que se grafica la región factible, se debe encontrar la solución óptima al problema.
- La solución óptima es el punto que se encuentra en la región factible que genera mayor utilidad.

¿Cómo se selecciona el rendimiento con la mayor utilidad?

Un método es con la recta de isoutilidad



Recta de Isoutilidad

Se debe elegir una cantidad monetaria arbitraria (Pequeña)

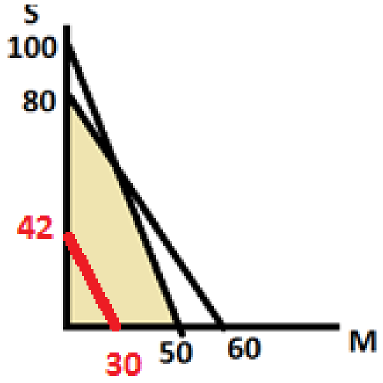
Se puede utilizar en este caso $2.100 (este nivel de utilidad no trasgrede ninguna de las restricciones.

$$2100=70M+50S \ \ = \text{recta de isoutilidad}$$

$$2100=70\ (0)\ +50\ S = 42$$

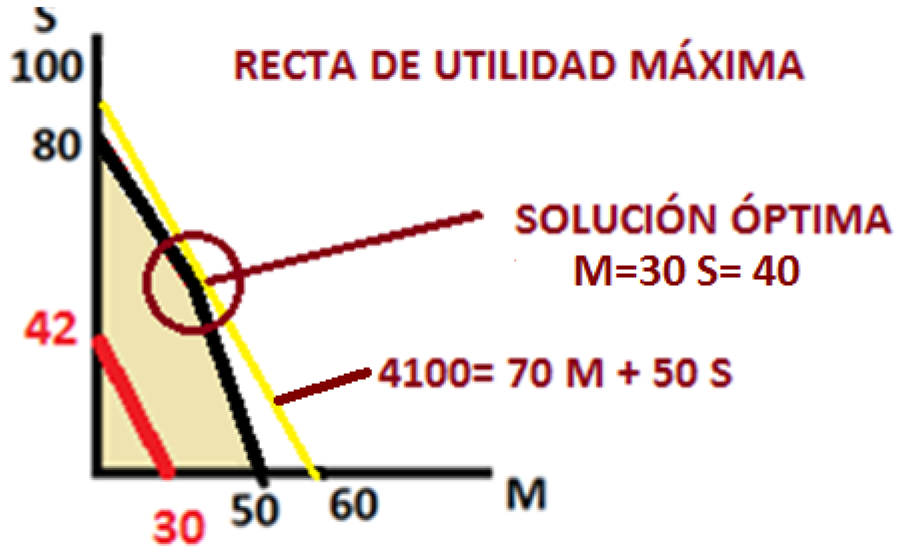
$$2100=70\ M + 50\ (0) = 30$$

¿Esta recta produce la utilidad total?



Recta de Isoutilidad

- Producir 30 mesas y 40 sillas da la utilidad máxima



Método solución punto esquina

- Otro método para resolver problemas de PL utiliza el método punto esquina

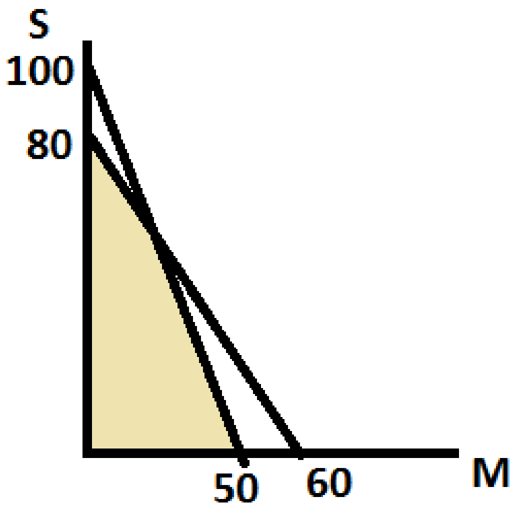
- Implica considerar la utilidad en cada punto esquina de la región factible

- La teoría matemática en problemas de PL establece una solución óptima a cualquier problema se encuentra en un punto esquina o punto extremo de la región factible

Solo se necesita encontrar los valores de las variables en cada esquina: Se encontrará una solución óptima en cada uno o más de ellos.

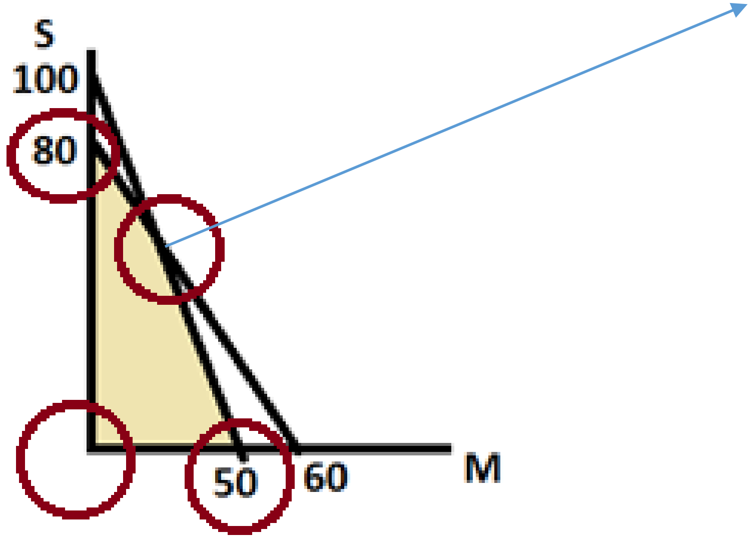
Método solución punto esquina

- El primer paso es graficar las restricciones y encontrar la región factible.



Método solución punto esquina

- El segundo paso consiste en encontrar los puntos esquina de la región factible.



Se debe encontrar de manera Algebraica

Método solución punto esquina

- Se debe resolver las dos ecuaciones simultáneamente para las dos variables

Una forma en la que se pueden resolver ecuaciones simultaneas es por eliminación, para esto se escoge la variable a eliminar

Escogemos la variable Mesa (M) y la multiplicamos o dividimos entre un número para que el coeficiente de esa variable M en una ecuación sea negativo.

Método solución punto esquina

$$4M + 3S = 240 \quad \text{(Carpintería)}$$
$$2M + 1S = 100 \text{ (Pintura)}$$

- Como escogimos eliminar M, multiplicamos la ecuación Pintura por -2

$$-2(2M + 1S = 100) = -4M - 2S = -200$$

Luego de hacer esto despejamos eliminar a M y despejar S

$$S = 40$$

Método solución punto esquina

$$4M + 3S = 240$$

$$-4M - 2S = -200$$

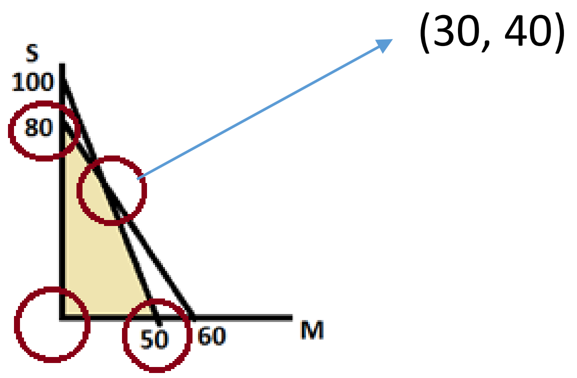
$$1S = 40$$

$$S = 40$$

Y luego se sustituye s = 40 en cualquiera de las ecuaciones originales para obtener M

$$4M + 3(40) = 240$$

$$M = 30$$



Método solución punto esquina

- El último paso es calcular el valor de la función objetivo en cada uno de los puntos esquina y se selecciona el mejor.

Mesas (M)	Sillas (S)	Utilidad
0	0	70(0)+ 50 (0) = 0
50	0	
0	80	
30	40	

Holgura y excedente

- Además de la solución óptima al problema en PL, es útil saber si se están utilizando todos los recursos disponibles.

- Holgura = cantidad de un recurso que no se utiliza

- Para una restricción menor o igual a

Holgura = (cantidad de recursos disponibles) – (cantidad de recursos utilizados)

Holgura y excedente

- En el ejemplo habían 240 horas de tiempo en carpintería disponible

Si se fabrican 20 mesas y 25 sillas, ¿cuánto sería el tiempo de holgura?

$$4M + 3S = 4\,(20) + 3\,(25) = 155$$

$$240 - 155 = 85$$

Para la solución (30 , 40) cuanto es el tiempo de holgura

Holgura y excedente

- El término excedente se emplea con las restricciones igual o mayor que, para indicar la cantidad en que se ha superado el lado derecho de una restricción

Excedente = (cantidad real) – (cantidad mínima)

Suponga una restricción de mesas y sillas combinadas menor o igual a 42 unidades

M + S >= 45

Holgura y excedente

- La compañía fabrica 20 mesas y 25 sillas, la cantidad total es de 45

Excedente = 45 – 42 = 3

Se producen 3 unidades más del mínimo

El ejemplo con solución óptima de (30 40) puede tener la restricción

M + S >= 45

¿Cuántas unidades se producen de más?

Holgura y excedente

- La holgura y el excedente representan la diferencia entre el lado izquierdo y el lado derecho de una restricción

El término **holgura** se utiliza para referirse a restricciones menores o iguales

El término **excedente** se refiere a restricciones mayores o iguales

Holgura y excedente

- La mayoría de programas para PL dará la cantidad de holgura y excedente que exista para cada restricción en la solución óptima

- Si la restricción tiene holgura o excedente cero para la solución óptima se llama **restricción precisa**

Un programa de cómputo especificará so la restricción es precisa o no

Problemas de minimización

Problemas de minimización

- Una empresa productora de pollos de engorde, está considerando comprar dos marcas diferentes de alimento y mezclarlas para ofrecer una buena dieta de bajo costo para sus aves.
- Cada alimento contiene en proporciones variables, algunos o los tres ingredientes nutricionales esenciales para pollos de engorde.

Problemas de minimización

Requerimiento mensual mínimo

A: 90 gramos
B: 48 gramos
C: 1,5 gramos

- Cada kilo de la mara 1 contiene:

5 gramos del ingrediente A
4 gramos del ingrediente B
0,5 gramos del ingrediente C

Precio de $2 por kilo

- Cada kilo de la marca 2 contiene:

10 gramos del ingrediente A
3 gramos del ingrediente B
No tiene ingrediente C

Precio de $3 por kilo

Programación entera, programación por metas y programación no lineal

Métodos cuantitativos para la toma de decisiones

Informática Empresarial

Jonathan Fernández González

Introducción

- Uno de los supuestos de la PL es que las variables de decisión pueden tomar valores fraccionarios como $X_1 = 0,33$ $X_2 = 1,57$

- Un gran número de problemas se resuelven solamente si se tienen valores enteros (vehículos a comprar, computadoras a comprar etc.)

- Un problema de la PL es que obliga a los tomadores de decisiones a establecer un solo objetivo

Introducción

- Un gerente puede querer maximizar la utilidad, pero también puede querer maximizar la participación en el mercado, mantener las fuerzas de trabajo completas y minimizar costos.

- Una empresa puede tener como objetivo, maximizar la extracción de recursos, la fiabilidad y seguridad, y minimizar el costo de operación como los impactos ambientales generados en la comunidad.

Programación entera

- Un modelo de programación entera es un modelo con restricciones y una función objetivo idénticas a las formuladas en PL.
- La diferencia es que una o más variables de decisión tiene que tomar un valor entero en la solución final. Existen tres tipos:

1. Programación entera pura
2. Programación entera mixta
3. Programación entera cero-uno

Ejemplo de programación entera

Una empresa fabrica dos productos (A y B), el proceso de producción de ambos productos implica dos procesos, cableado y ensamblaje de la siguiente manera:

2 horas para cablear A y 3 para B

El ensamble requiere de 6 horas A y 5 para B

La capacidad de producción solo tiene disponibles 12 horas para cableado y 30 horas para ensamble. Si cada producto A genera ingresos de $7 y cada producto B $6

¿Cómo se formularía la decisión de mezcla de producción en PL buscando maximizar las utilidades?

Ejemplo de programación entera

Maximizar utilidad = $7X_1 + 6 X_2$

$2X_1 + 3X_2 <= 12$

$6X_1 + 5X_2 <= 30$

$X_1, X_2 >= 0$

X_1 = producción de A

X_2 = producción de B

Resultado:

$X_1 = 3,75$

$X_2 = 1,5$

Variables	X1	X2			
Valores	3.75	1.5	Total		
Ingresos	7	6	35.25		
Restricciones			LHS		Rhs
Cableado	2	3	12	<=	12
Ensamble	6	5	30	<=	30

Ejemplo de programación entera

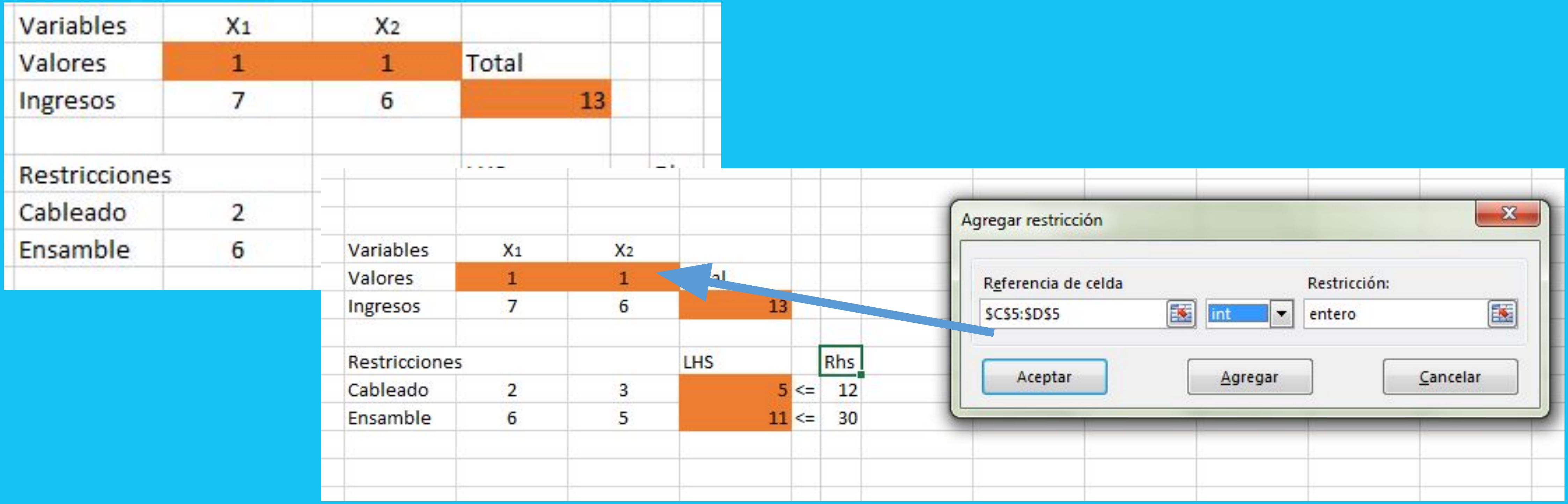
Resultado:
$X_1 = 3{,}75$
$X_2 = 1{,}5$

Redondear estos resultados puede hacer que:
- Salgan de la zona factible
- No sería una respuesta práctica

Si se redondea a una solución factible, puede que esta no sea óptima.

Ejemplo de programación entera

Una solución obtenida con programación entera, nunca genera una utilidad mayor que la que se logra con PL, casi siempre significa un valor menor.



Ejemplo de programación entera

Variables	X1	X2			
Valores	5	0	Total		
			35		
			LHS		Rhs
			10	<=	12
			30	<=	30

Variables	X1	X2			
Valores	3.75	1.5	Total		
Ingresos	7	6	35.25		
Restricciones			LHS		Rhs
Cableado	2	3	12	<=	12
Ensamble	6	5	30	<=	30

Planeamiento con variables 0-1 (binarias)

- Se asigna 0 si no se satisface una condición
- Se asigna 1 si satisface una condición

En problemas de asignación, que implica decidir que individuos asignar un conjunto de trabajos (1 si se le asigna y 0 si no se le asigna)

Ejemplo

- Una empresa especializada en carteras de inversión tiene las siguientes peticiones de un cliente:

- Por lo menos dos compañías petroleras de (A, D y E) deben estar en la cartera de inversión
- No se puede hacer más de una inversión en compañías petroleras (B y C)
- Se tiene que adquirir una de dos carteras de acciones de empresas petroleras (F y G)

El cliente dispone de $3 millones para invertir. El objetivo es maximizar el rendimiento anual sujeto a las restricciones.

Ejemplo

El cliente dispone de $3 millones para invertir. El objetivo es maximizar el rendimiento anual sujeto a las restricciones.

Cartera	Compañía	Rendimiento anual	Costo por acciones en millones
1	A	50	480
2	B	80	540
3	C	90	680
4	D	120	1000
5	E	110	700
6	F	40	510
7	G	75	900

X=1 si se compra la acción

X=0 si no se compra la acción

Ejemplo

Maximizar rendimiento= $50X_1 + 80X_2 + 90X_3 + 120X_4 + 110X_5 + 40X_6 + 75X_7$

$X_1 + X_4 + X_5 >= 2$

$X_2 + X_3 <= 1$

$X_6 + X_7 = 1$

$480X_1 + 540X_2 + 680X_3 + 1000X_4 + 700X_5 + 510X_6 + 900X_7 <= 3.000$

Cartera	Compañía	Rendimiento anual	Costo por acciones en millones
1	A	50	480
2	B	80	540
3	C	90	680
4	D	120	1000
5	E	110	700
6	F	40	510
7	G	75	900

Ejemplo

Maximizar rendimiento= $50X_1 + 80X_2 + 90X_3 + 120X_4 + 110X_5 + 40X_6 + 75X_7$

$X_1 + X_4 + X_5 >= 2$

$X_2 + X_3 <= 1$

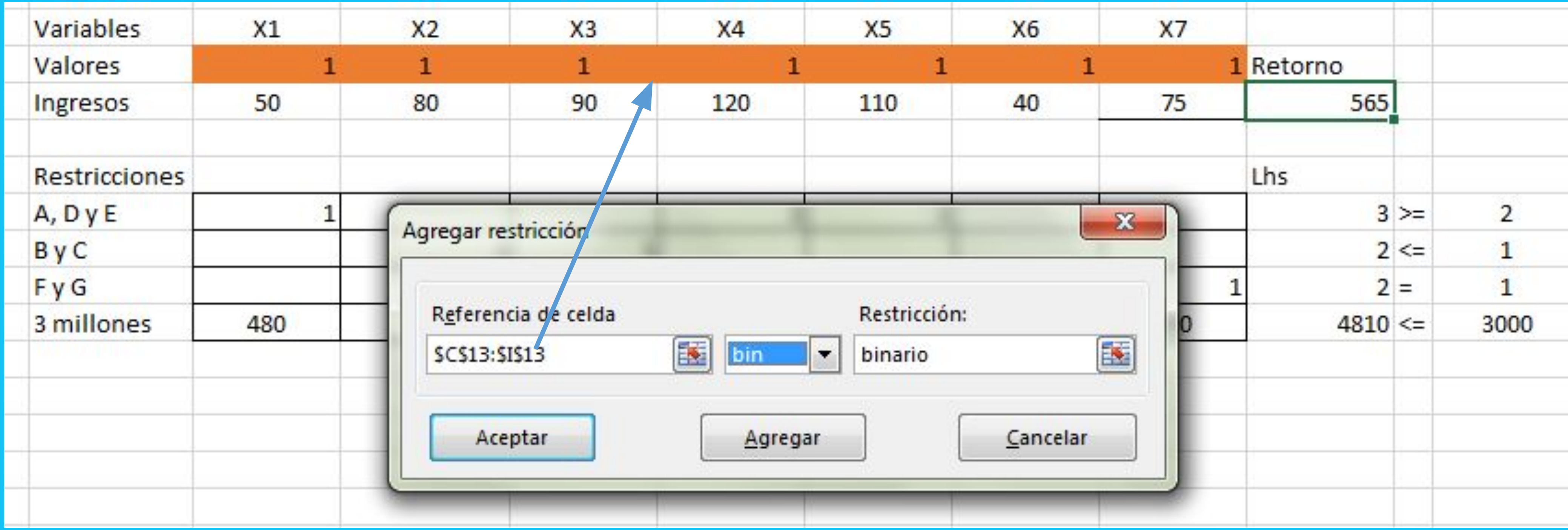
$X_6 + X_7 = 1$

$480X_1 + 540X_2 + 680X_3 + 1000X_4 + 700X_5 + 510X_6 + 900X_7 <= 3.000$

Variables	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7			
Valores	1	1	1	1	1	1	1	Retorno		
Ingresos	50	80	90	120	110	40	75	565		
Restricciones								Lhs		
A, D y E	1			1	1			3	>=	2
B y C		1	1					2	<=	1
F y G						1	1	2	=	1
3 millones	480	540	680	1000	700	510	900	4810	<=	3000

Ejemplo

•



Variables X1 X2 X3 X4 X5 X6 X7
Valores 1 1 1 1 1 1 1 Retorno
Ingresos 50 80 90 120 110 40 75 565
Restricciones
Lhs
A, D y E 1
3 >= 2
B y C
2 <= 1
F y G
1
2 = 1
3 millones 480
4810 <= 3000
Agregar restricción
Referencia de celda
$C$13:$I$13
bin
Restricción:
binario
Aceptar
Agregar
Cancelar

Ejemplo

•

Variables	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7			
Valores	0	0	1	1	1	1	0	Retorno		
Ingresos	50	80	90	120	110	40	75	360		
Restricciones								Lhs		
A, D y E	1			1	1			2	>=	2
B y C		1	1					1	<=	1
F y G						1	1	1	=	1
3 millones	480	540	680	1000	700	510	900	2890	<=	3000

Programación no lineal

- A diferencia de los métodos de PL, los procedimientos para resolver programación no lineal PNL, no siempre dan la solución óptima.

- En PNL la solución específica puede ser mejor que cualquier otro punto cercano, pero podría no ser el mejor punto en general. Este se llama **óptimo local,** y la mejor solución sería **óptimo global.**

Función objetivo no lineal y restricciones lineales

- Se comercializan dos modelos de hornos tostadores, el microtostador (X_1) y el horno con autolipieza (X_2), cada microtostador genera una utilidad de $28 dólares sin importar la cantidad vendida, pero el de autolimpieza se incrementa conforme se venden más unidades

($21 X_2 + 0,25 X_2^{\ 2}$).

$$\text{Maximizar utilidad} = 28 X_1 + 21 X_2 + 0,25 X_2^{\ 2}$$

Función objetivo no lineal y restricciones lineales

Maximizar utilidad = $28 X_1 + 21 X_2 + 0,25 X_2^{\ 2}$

Las restricciones lineales son: una según la capacidad de producción y la otra el tiempo de ventas disponible

$X_1 + X_2 <= 1000$ (capacidad de producción)

$0,5X_1 + 0,4X_2 <= 500$ horas de tiempo de ventas disponibles

$X_1, X_2 >= 0$

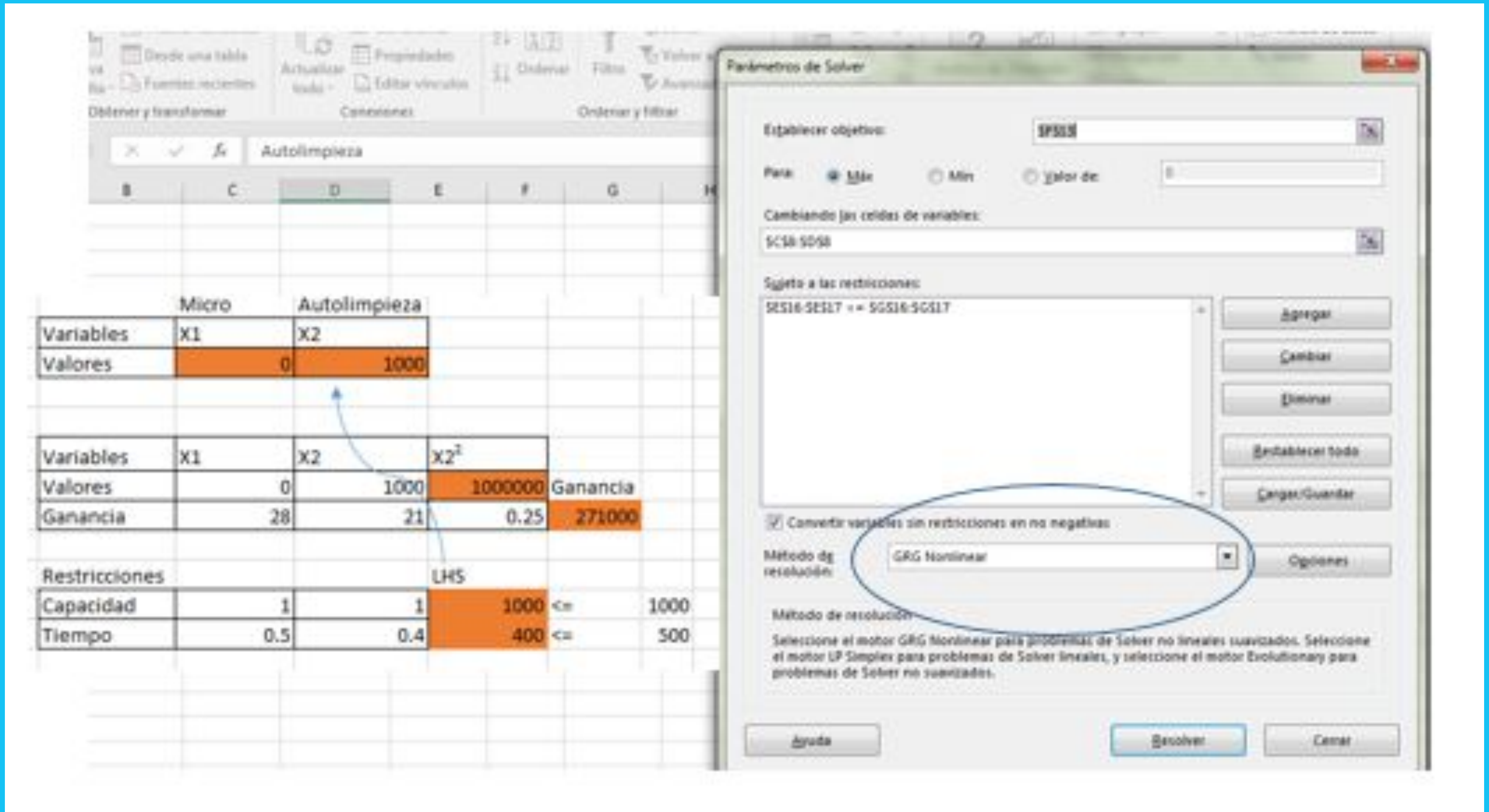
Función objetivo no lineal y restricciones lineales

	Micro	Autolimpieza
Variables	X1	X2
Valores	1	1

Variables	X1	X2	$X2^2$	
Valores	1	1	1	Ganancia
Ganancia	28	21	0.25	49.25

Restricciones			LHS		
Capacidad	1	1	2	<=	1000
Tiempo	0.5	0.4	2	<=	500

Función objetivo no lineal y restricciones lineales



Función objetivo no lineal y restricciones lineales

	Micro	Autolimpieza
Variables	X1	X2
Valores	0	1000

Variables	X1	X2	$X2^2$	
Valores	0	1000	1000000	Ganancia
Ganancia	28	21	0.25	271000

Restricciones			LHS		
Capacidad	1	1	1000	<=	1000
Tiempo	0.5	0.4	400	<=	500

Función objetivo no lineal y restricciones no lineales

- La utilidad anual de un hospital depende del número de pacientes admitidos X_1 y el número de pacientes que se someterán a cirugía X_2

$$13X_1 + 6X_1X_2 + 5X_2 + 1/X_2$$

Restricciones

$2X_1^2 + 4X_2 <= 90$ Capacidad de cuido de enfermos en miles de días

$X_1 + 4X_2^3 <= 75$ Capacidad de rayos X en miles

$8X_1 - 2X_2 <= 61$ presupuesto de ventas requerido en miles

Función objetivo no lineal y restricciones no lineales

Variables	X1	X2
Valores	6,0662586	4,10025264

Variables	X1	$X1^2$	X1*X2	X2	$X2^3$	1/X2			
Valores	6,0662586	36,7994938	24,873193	4,10025	68,934	0,2438874	Ganancia		
Ganancia	13	0	6	5	0	1	248,84567		
Restricciones							LHS		
Enfermería		2		4			89,999998	<=	90
Rayos X	1				1		75	<=	75
Presupuesto	8			-2			40,329564	<=	61

Función objetivo lineal y restricciones no lineales

- Una empresa fabrica arandelas y juntas de caucho y combina dos ingredientes Caucho X_1 y Aceite X_2. El costo del caucho es de \$5 dólares el kilo y el aceite de 7 dólares el litro.

Minimizar costos= $5X_1 + 7X_2$

Restricciones

$3X_1 + 0{,}25X_1^2 + 4X_2 + 0.3X_2^2 >= 125$ (Dureza)

$13X_1 + X_1^3 >= 80$ (Resistencia a tensión)

$0{,}7X_1 + X_2 >= 17$ (Elasticidad)

Variables	X1	X2	
Valores	3.32532549	14.67227216	Costo total
Costo	5	7	119.332533

Variables	X1	$X1^2$	$X1^3$	X2	$X2^2$			
Valores	3.32532549	11.0577896	36.7707496	14.67227	215	Ganancia		
Restricciones						LHS		
Enfermería	3	0.25		4	0.3	136.012184	>=	125
Rayos X	13		1			79.9999809	>=	80
Presupuesto	0.7			1		17	>=	17

Programación por metas

- Maximizar utilidades o minimizar costos no siempre son los únicos objetivos que tiene una compañía

- El problema de la programación lineal y entera es que su función objetivo se mide solo en una dimensión, no es posible tener múltiples metas, solo si están en las mismas unidades como dólares.

Programación por metas

- La programación por metas permite manejar problemas de decisión que implican diversas metas.

- Es común que la toma de decisiones por metas se logre solo a expensas de otras metas, se deben establecer jerarquías enfrentado las metas de mayor prioridad de primero.

- La programación por metas intenta alcanzar de forma satisfactoria muchos objetivos, lo que difiere de la programación lineal.

Programación por metas

- La programación por metas difiere de la PL, en la función objetivo, que en lugar de tratar de maximizar o minimizar la función objetivo, la programación por metas trata de minimizar las desviaciones entre las metas establecidas y las que en realidad se pueden dar según las restricciones dadas. (variables de holgura y excedentes)

- En programación por metas, las variables de desviación en general, son las únicas variables de la función objetivo, y el objetivo es minimizar el total de esas variables de desviación

Ejemplo de programación por metas

$$\text{Maximizar utilidad} = 7X_1 + 6\,X_2$$

$$2X_1 + 3X_2 <= 12$$

$$6X_1 + 5X_2 <= 30$$

$$X_1, X_2 >= 0$$

X_1 = producción de A

X_2 = producción de B

En este ejemplo, la gerencia tenía solo un objetivo, las utilidades, sí la gerencia establece ahora que el nivel de utilidades de $30 dólares es satisfactorio durante un periodo de tiempo, se tendría una programación por metas.

Ejemplo de programación por metas

En este ejemplo, la gerencia tenía solo un objetivo, las utilidades, sí la gerencia establece ahora que el nivel de utilidades de $30 dólares es satisfactorio durante un periodo de tiempo, se tendría una programación por metas.

Primero se definen las variables de desviación:

d_1^-= resultado por debajo del objetivo de utilidad

d_1^+= resultado por arriba del objetivo de utilidad

Ahora se establece un modelo de programación de una sola meta:

Ejemplo de programación por metas

Ahora se establece un modelo de programación de una sola meta:

Minimizar el resultado por debajo o por encima del objetivo de utilidad = $d_1^- + d_1^+$ sujeta a las restricciones

$7X_1 + 6X_2 + d_1^- - d_1^+ = \$30$ restricción de meta de utilidad

$2X_1 + 3X_2 <= 12$

$6X_1 + 5X_2 <= 30$

$X_1, X_2, d_1^-, d_1^+ >= 0$

Ejemplo de programación por metas

$$7X_1 + 6X_2 + d_1^- - d_1^+ = \$30 \text{ restricción de meta de utilidad}$$

$$2X_1 + 3X_2 <= 12$$

$$6X_1 + 5X_2 <= 30$$

$$X_1, X_2, d_1^-, d_1^+ >= 0$$

Sí el resultado fuera $X_1 = 3$ y $X_2 = 2$; se obtiene una utilidad de 33, se excede en 3; d_1^+ debe ser igual a 3 y d_1^- igual a 0

Si la meta objetivo es = 30; d_1^- y d_1^+ son igual a 0

MODELOS DE REDES

Métodos cuantitativos para la toma de decisiones

Informática Empresarial

Jonathan Fernández González

Introducción

- Las redes sirven para modelar una amplia gama de problemas.
- Problemas de redes: el problema del árbol de expansión mínima, el problema del flujo máximo y el problema de la ruta más corta.
- Se mostrarán técnicas de solución especiales y, cuando sea adecuado, se dará una formulación de programación lineal

Introducción

- La técnica del árbol de expansión mínima determina el camino a través de la red que conecta todos los puntos, al tiempo que minimiza la distancia total.
- Cuando los puntos representan casas en una sección, esta técnica es útil para determinar la mejor forma de conectarlas a la energía eléctrica, al sistema de agua, etcétera, de modo que se minimice la distancia total o la longitud de los cables o las tuberías.

Introducción

- La técnica del flujo máximo encuentra el máximo flujo de cualquier cantidad o sustancia que pasa por la red. Esta técnica puede determinar, por ejemplo, el número máximo de vehículos (autos, camiones y otros) que pueden transitar por la red de carreteras de un lugar a otro.

Introducción

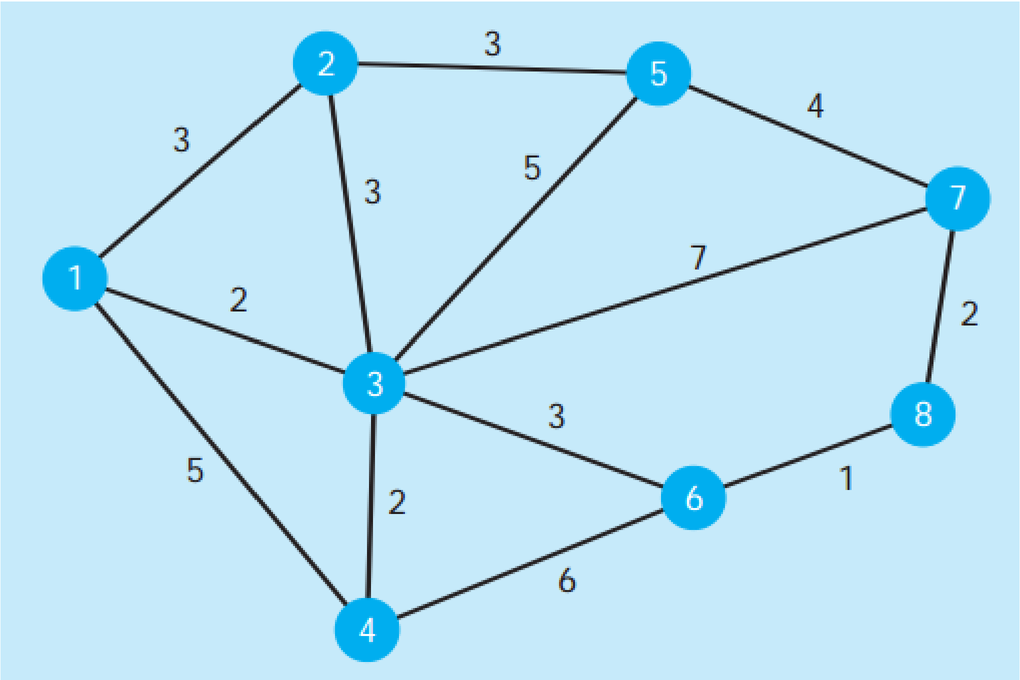
- La técnica de la ruta más corta calcula la trayectoria más corta a través de una red. Por ejemplo, la ruta más corta de una ciudad a otra por la red de carreteras.

Introducción

- En muchos casos, los problemas de redes más pequeños se resuelven por inspección o de manera intuitiva. Sin embargo, en problemas más grandes, encontrar la solución puede ser difícil y requerir técnicas de redes poderosas. Los problemas más grandes quizá requieran cientos e incluso miles de iteraciones. La computarización de tales técnicas necesita el enfoque sistemático que estudiaremos.

Problema del árbol de expansión mínima

- La técnica del árbol de expansión mínima implica conectar todos los puntos de una red, al tiempo que minimiza la distancia entre ellos



Problema del árbol de expansión mínima

- Considere una compañía, que desarrolla un proyecto habitacional de lujo en San José. El dueño, tiene que determinar la forma menos costosa de suministrar agua y electricidad a cada casa, hay ocho casas y la distancia entre cada una se muestra en la red, en cientos de metros. La distancia entre las casas 1 y 2, por ejemplo, es de 300 metros (número 3 entre los nodos 1 y 2).
- Entonces, la técnica del árbol de expansión mínima sirve para determinar la distancia mínima para conectar todos los nodos. El enfoque se describe como sigue:

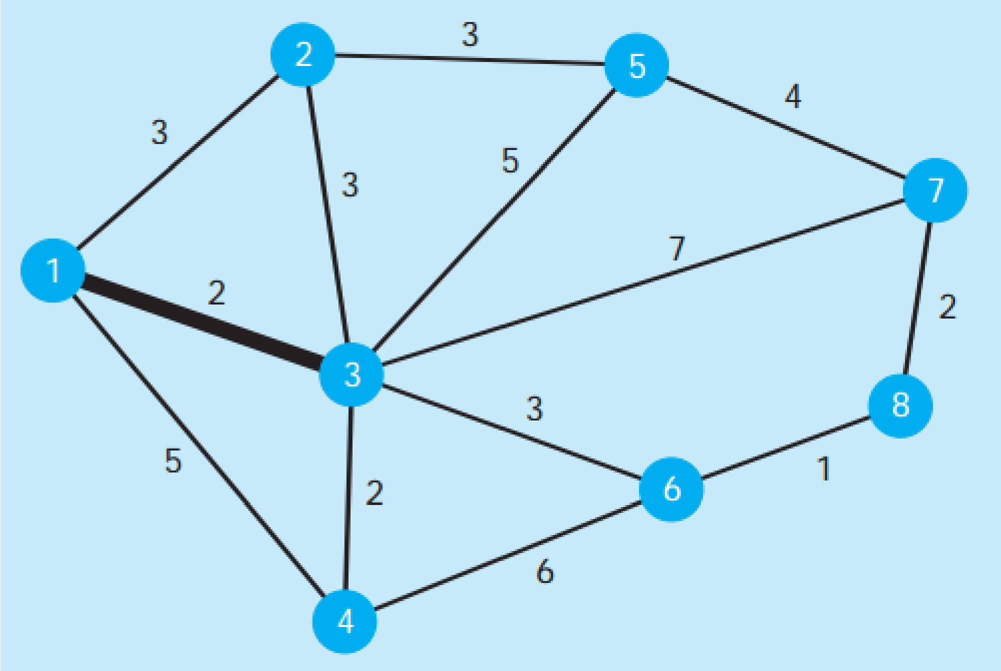
Problema del árbol de expansión mínima

- **Pasos para la técnica del árbol de expansión mínima:**

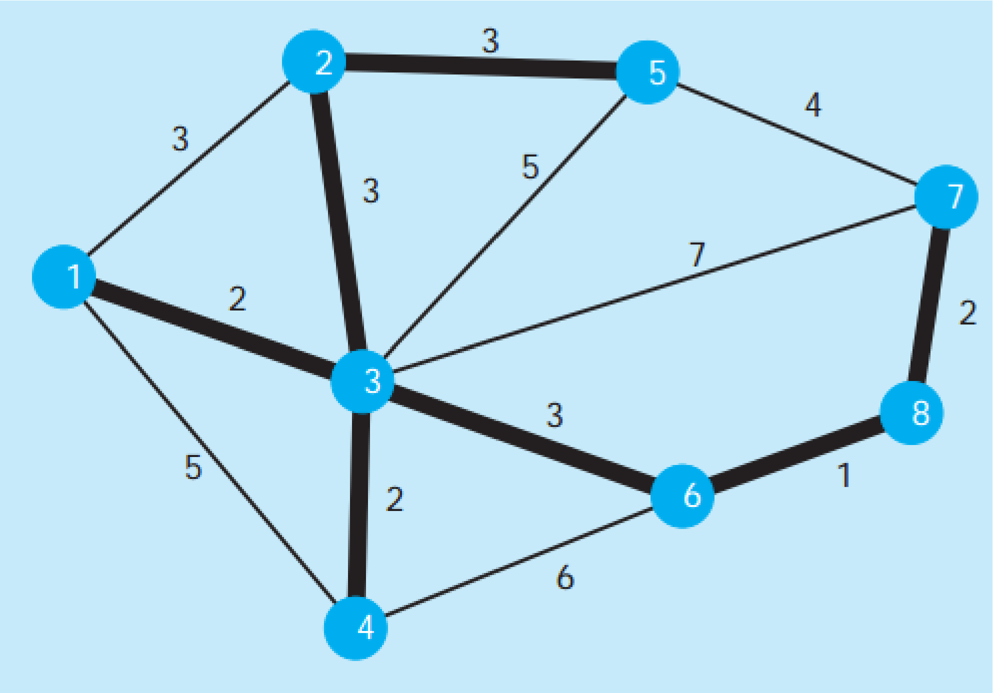
1. Seleccionar cualquier nodo en la red.
2. Conectar este nodo con el nodo más cercano que minimice la distancia total.
3. Considerar todos los nodos que están conectados, encontrar y conectar el nodo más cercano que no esté conectado. Si hay un empate en el nodo más cercano, seleccionar uno de manera arbitraria. Un empate sugiere que existe más de una solución óptima.
4. Repetir el paso 3 hasta que todos los nodos estén conectados.

Problema del árbol de expansión mínima

- Comenzamos con la selección arbitraria del nodo 1. Como el nodo más cercano es el nodo 3, a una distancia de 2 (200 metro), conectamos el nodo 1 al nodo 3



Problema del árbol de expansión mínima



ARCO SELECCIONADO	LONGITUD DEL ARCO	DISTANCIA TOTAL
1–3	2	2
3–4	2	4
2–3	3	7
2–5	3	10
3–6	3	13
6–8	1	14
7–8	2	16

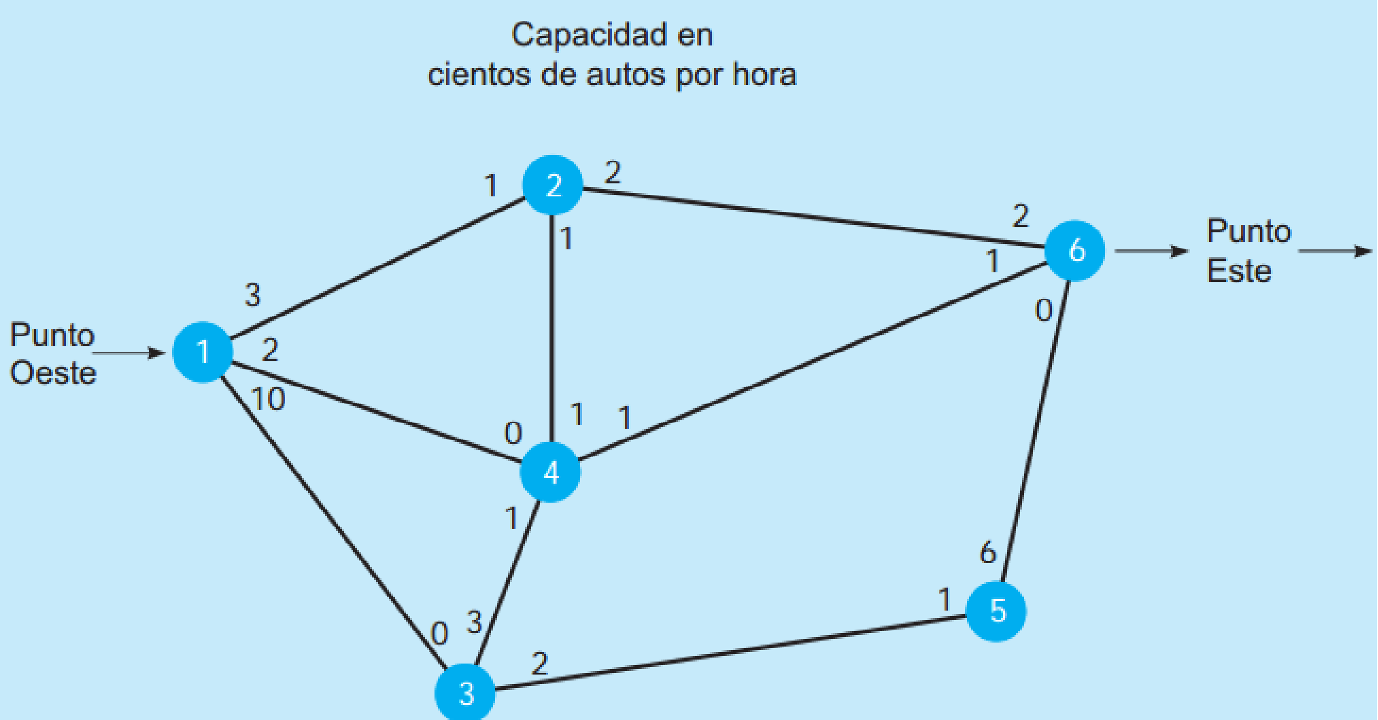
Problema del flujo máximo

- El problema del flujo máximo implica determinar la cantidad máxima de material que en una red puede fluir de un punto (el origen) a otro (el destino final).

- Los ejemplos de este tipo de problema incluyen determinar el número máximo de autos que circulan por un sistema de carreteras, la cantidad máxima de líquido que fluye por una red de tuberías y la cantidad máxima de datos que pueden fluir por una red de cómputo.

Problema del flujo máximo

- Un pequeño pueblo en, está en el proceso de desarrollar un sistema de caminos para el área del centro. Uno de los planeadores de la ciudad, quiere determinar el número máximo de automóviles que pueden fluir por el pueblo de oeste a este.



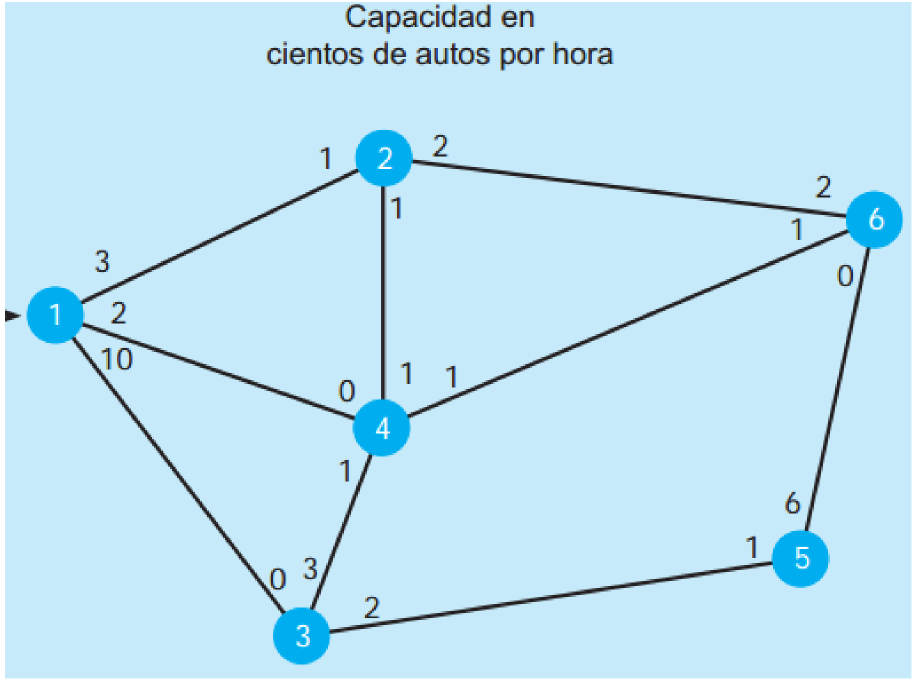
Problema del flujo máximo

El flujo máximo desde el nodo 2 hasta los nodos 1, 4 y 6 es:

El flujo máximo de regreso del nodo 2 al nodo 1 es de 100 automóviles por hora (1).

Cien autos por hora (1) pueden fluir del nodo 2 al nodo 4 y 200 autos (2) pueden fluir al nodo 6.

Note que el tránsito fluye en ambas direcciones por una calle. Un cero (0) significa que no hay flujo o que es una calle de un sentido.

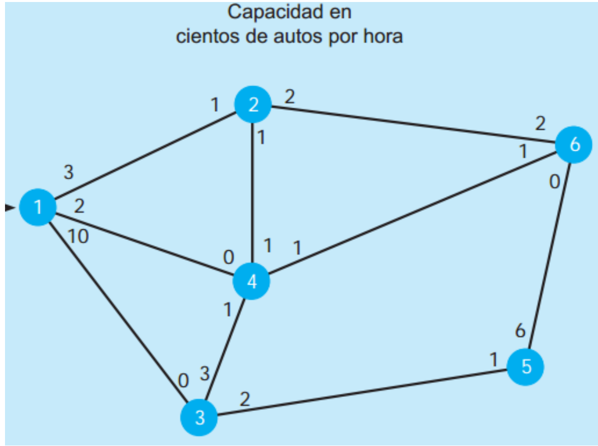


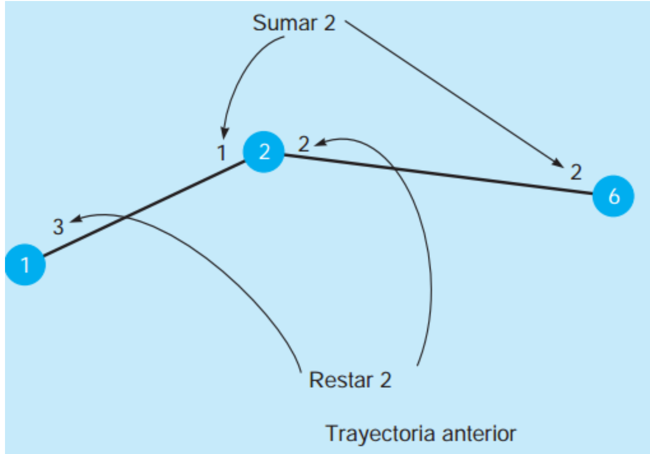
Problema del flujo máximo

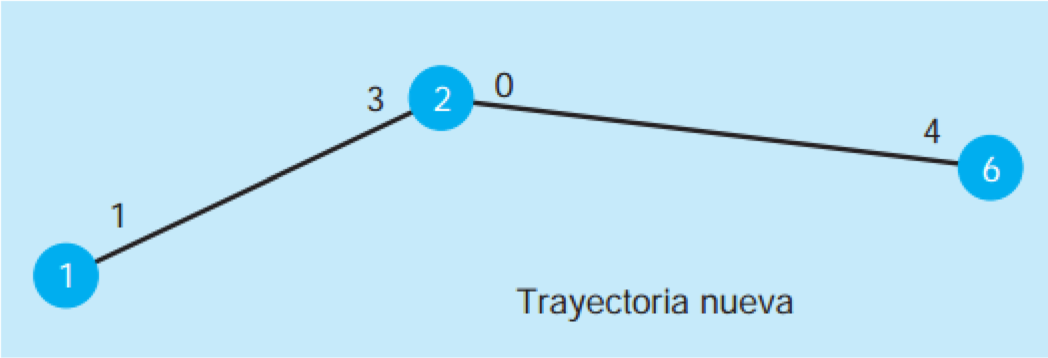
Cuatro pasos de la técnica del flujo máximo

Problema del flujo máximo

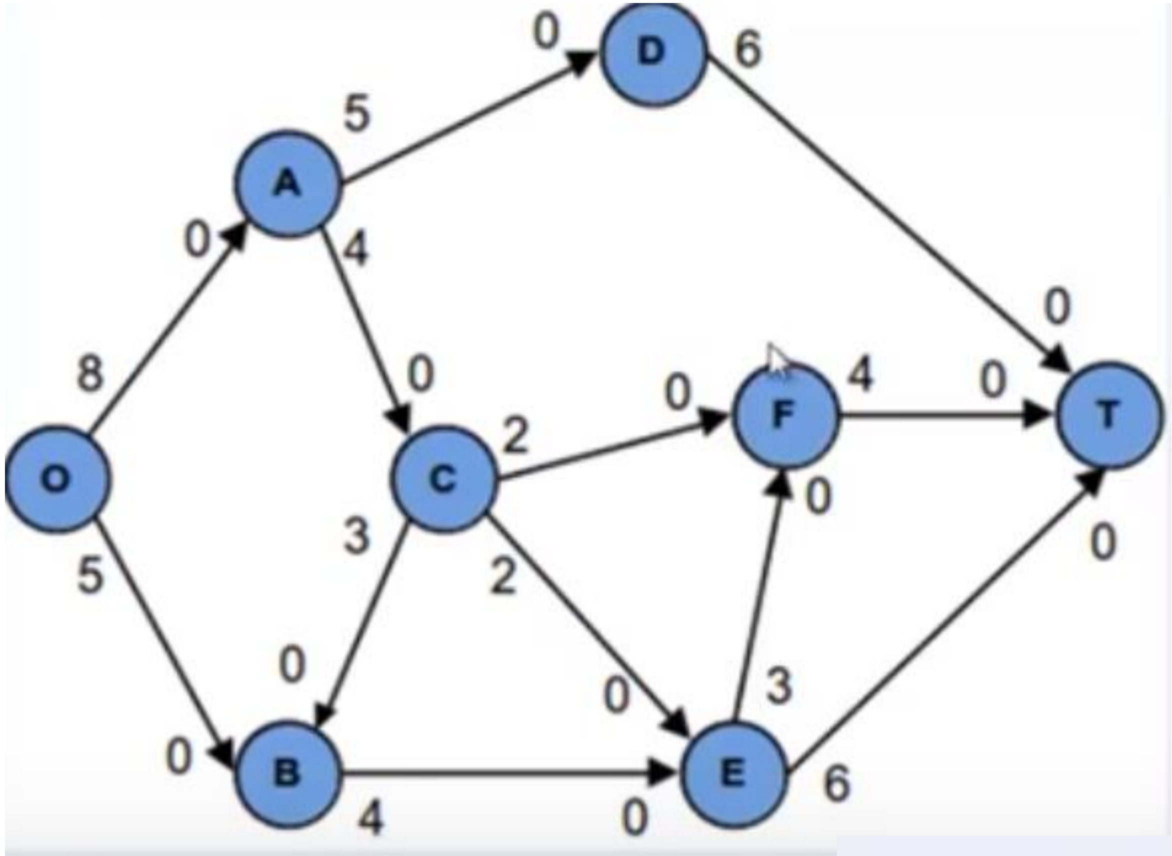
- Comenzamos eligiendo arbitrariamente la trayectoria 1–2–6, en la parte superior de la red. ¿Cuál es el flujo máximo de oeste a este? Es 2 porque tan solo 2 unidades pueden fluir del nodo 2 al 6. Ahora ajustamos las capacidades de flujo
- Como se observa, restamos el flujo máximo de 2 a lo largo de la ruta 1–2–6 en la dirección del flujo (oeste a este) y sumamos 2 a la trayectoria en la dirección contraria al flujo (este a oeste)

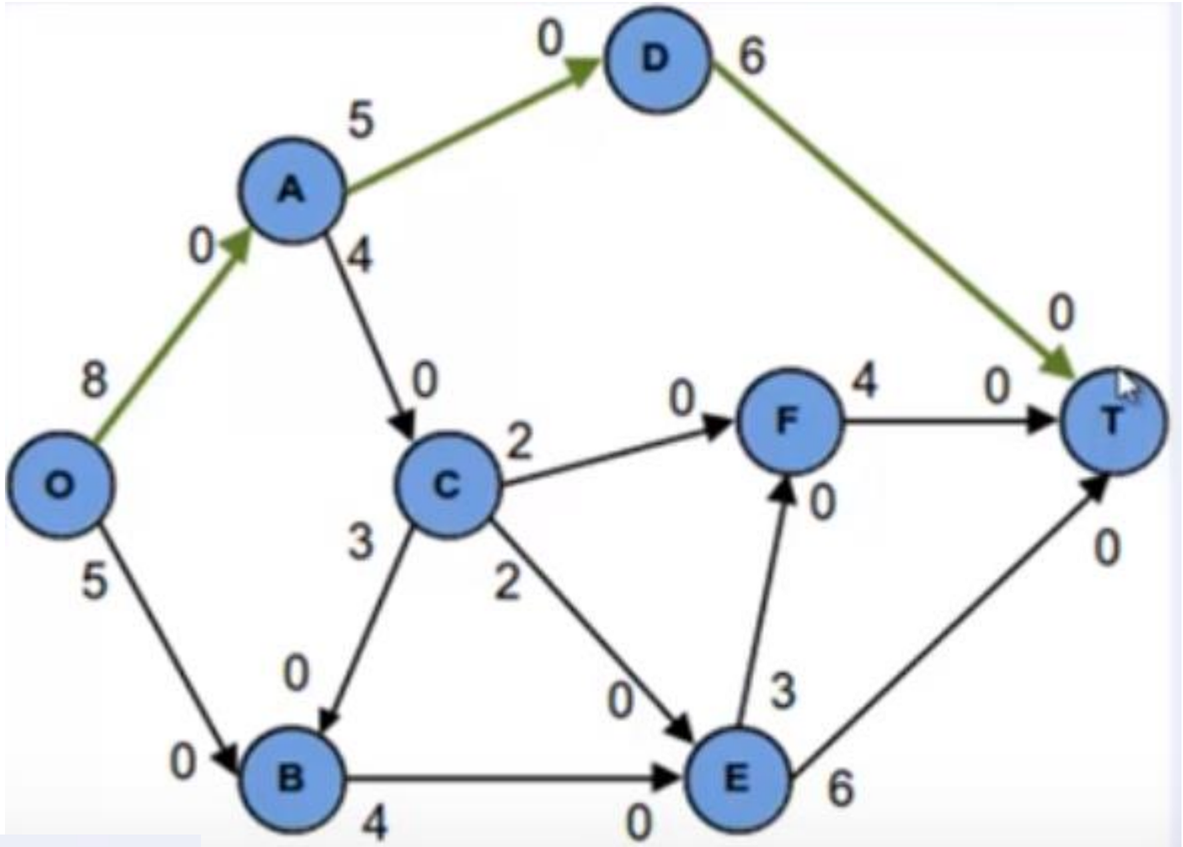






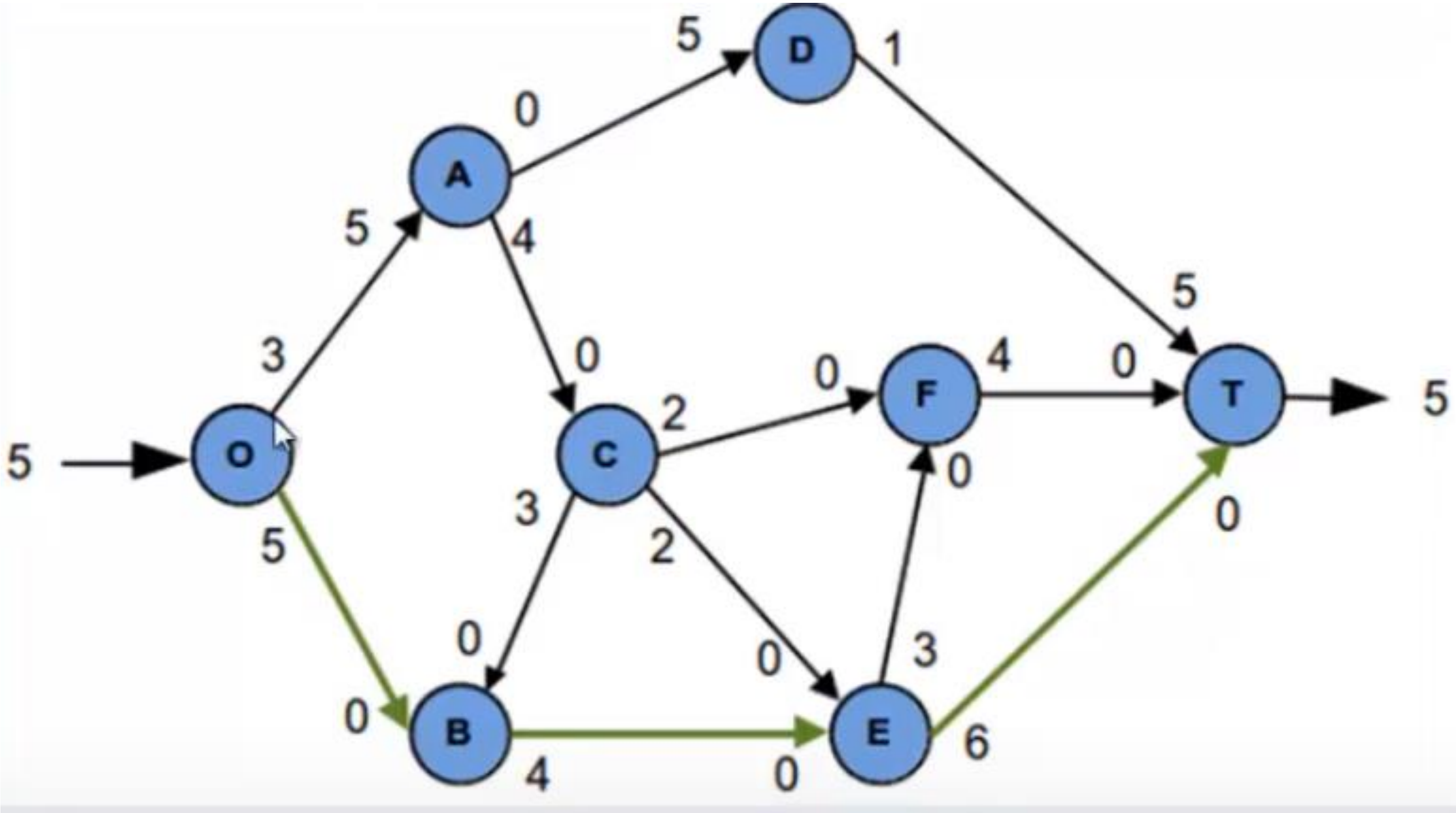
Problema del flujo máximo





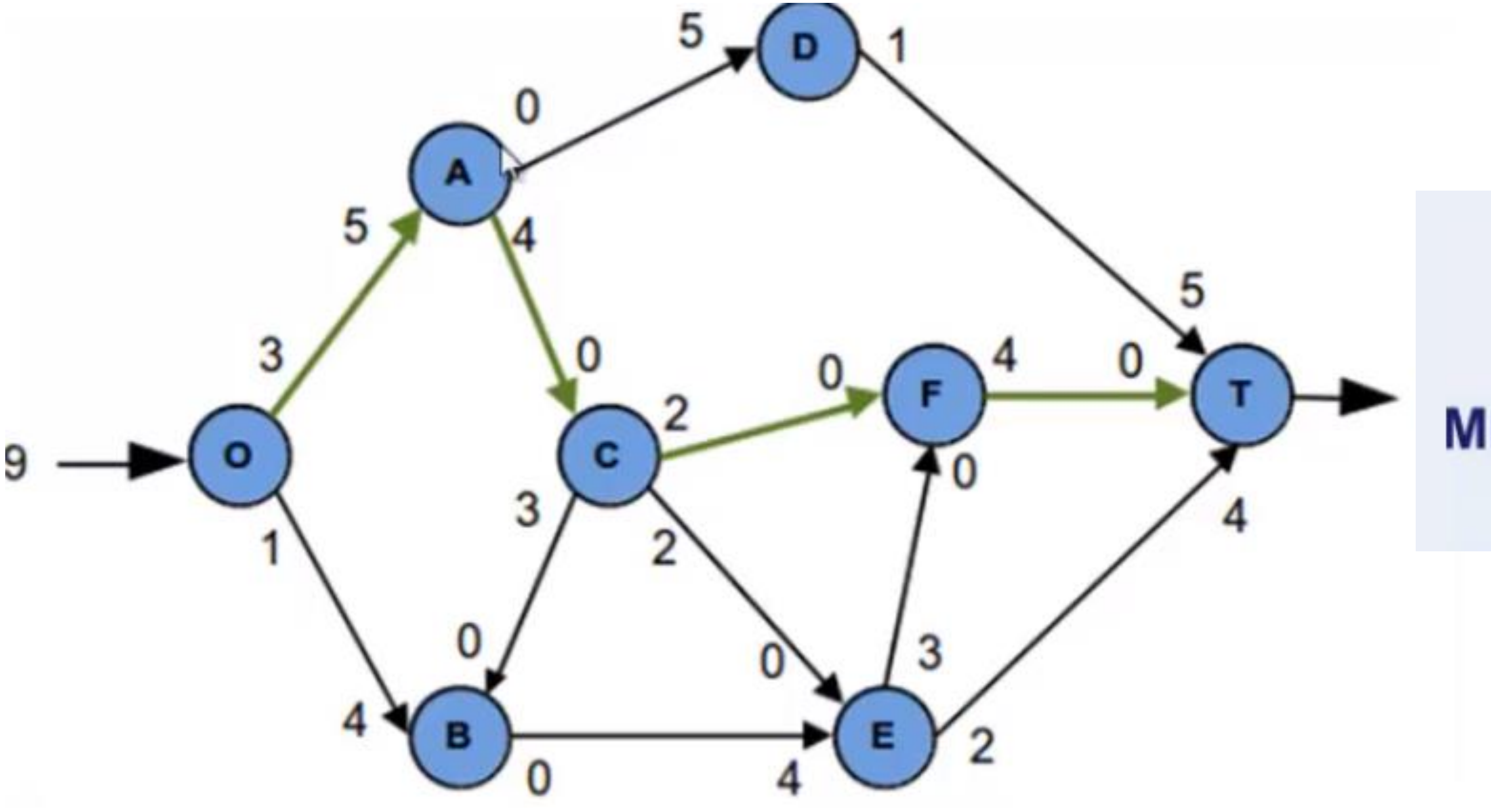
Capacidad trayectoria:
Mínimo {8, 5, 6} = 5

Problema del flujo máximo



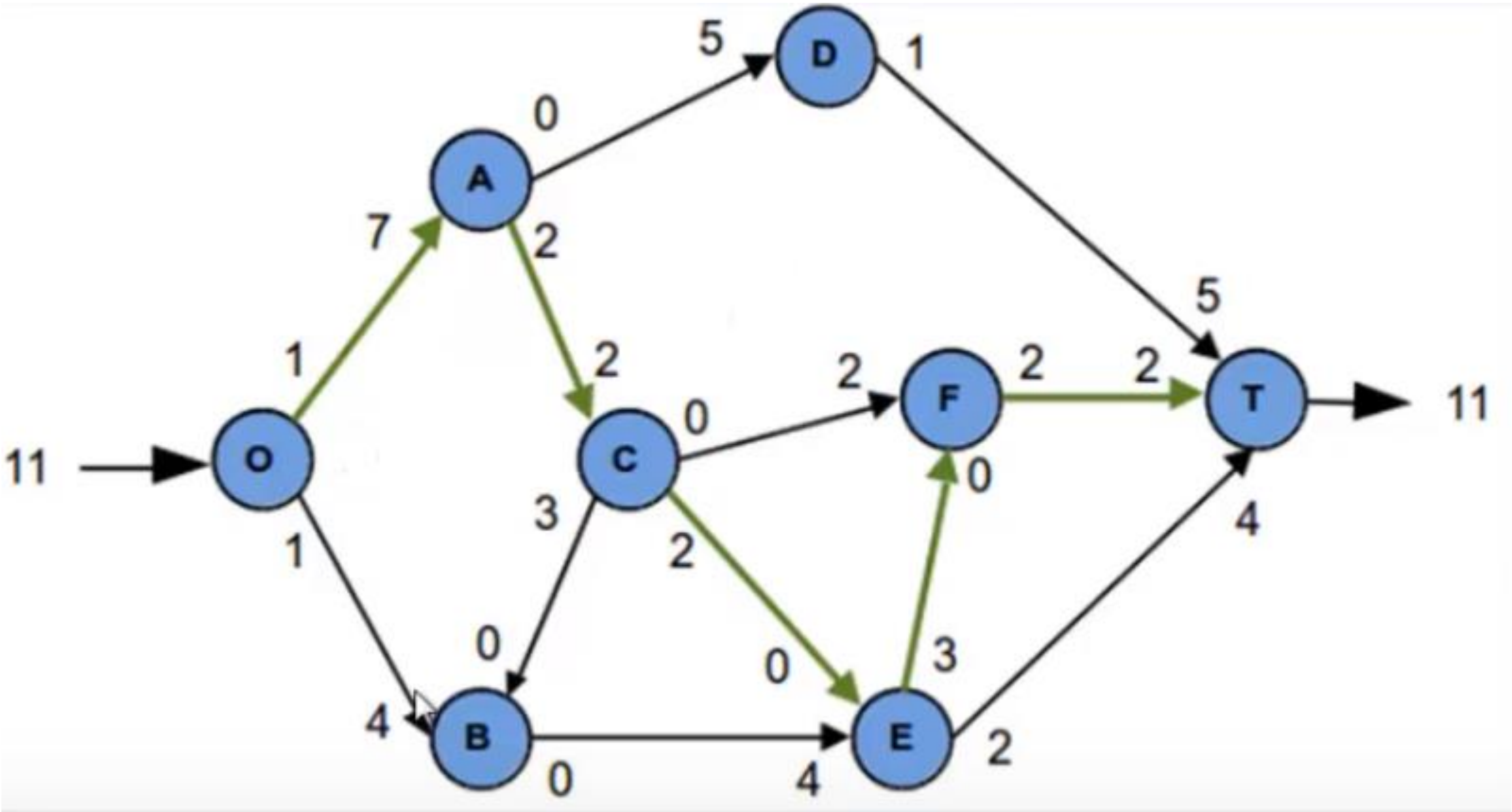
Capacidad trayectoria:
Mínimo {5, 4, 6} = 4

Problema del flujo máximo



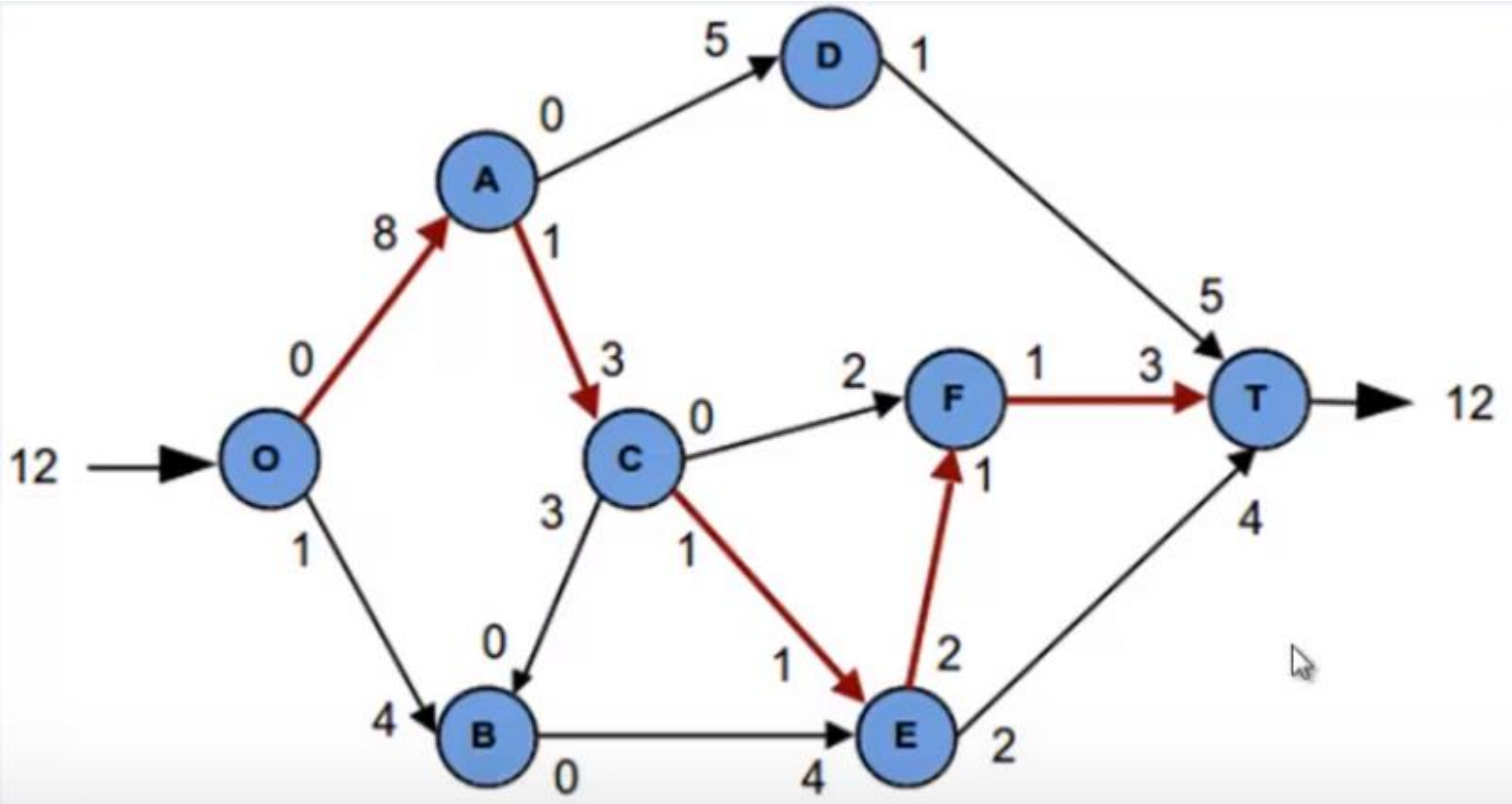
Capacidad trayectoria:
Mínimo {3, 4, 2, 4} = 2

Problema del flujo máximo



Capacidad trayectoria:
Mínimo {1, 2, 2, 3, 2} = 1

Problema del flujo máximo



Problema del flujo máximo

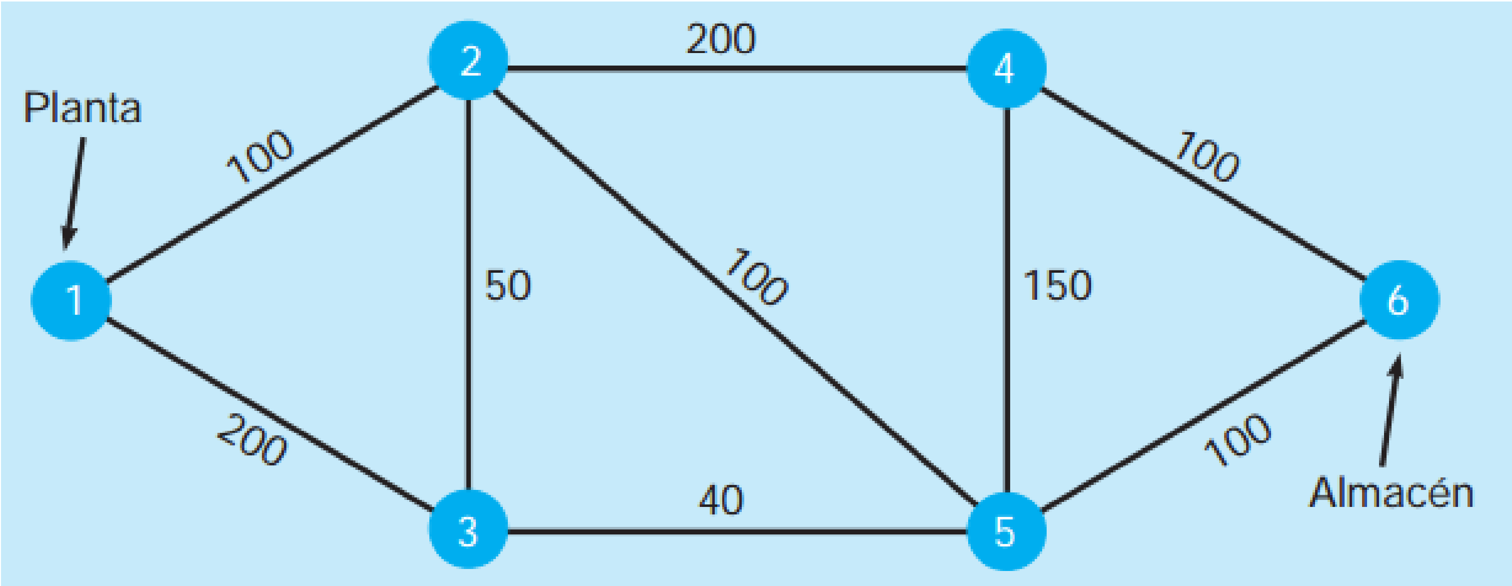
- Problema del flujo máximo con solver !!!

Problema de la ruta más corta

- El objetivo del problema de la ruta más corta es encontrar la menor distancia para ir de un lugar a otro. En una red, esto suele implicar la determinación de la ruta más corta de un nodo a cada uno de los otros nodos. Este problema se resuelve con la técnica de la ruta más corta, o bien, planteándolo como un programa lineal con variables 0–1

Problema de la ruta más corta

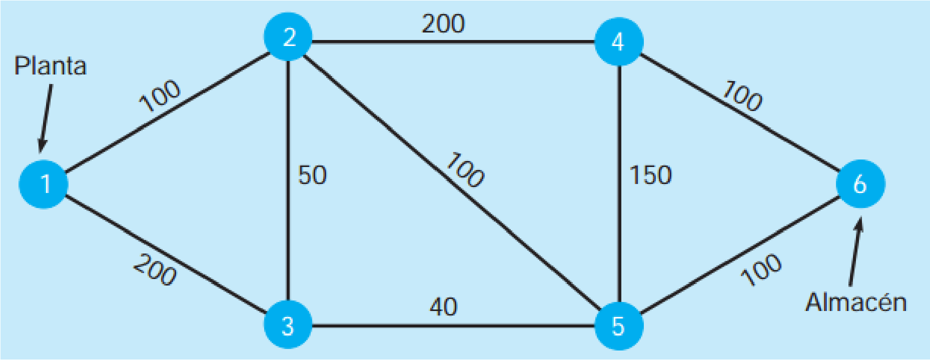
- Todos los días, una empresa debe transportar camas, sillas y otros muebles de la fábrica al almacén; necesita pasar por varias ciudades y desea encontrar la ruta con la distancia más corta.



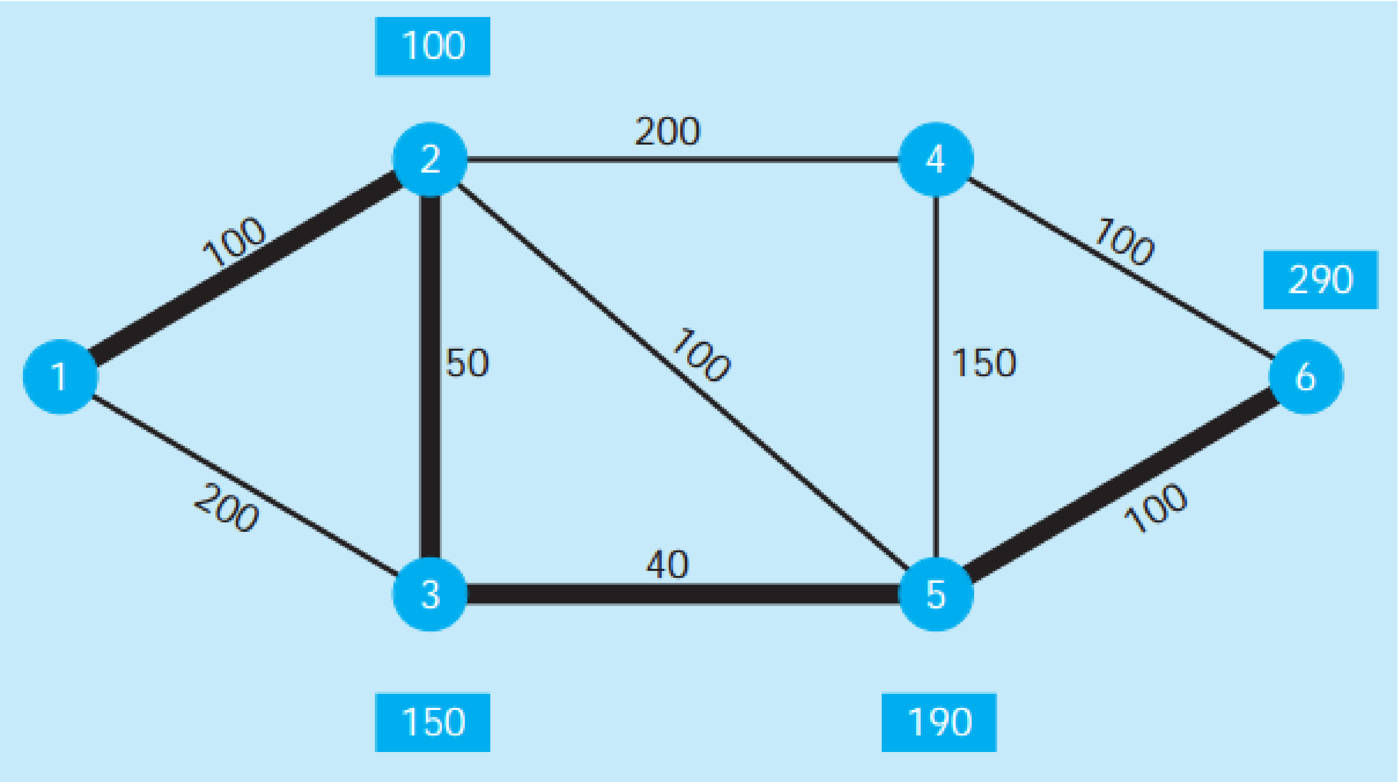
Problema de la ruta más corta

Pasos de la técnica de la ruta más corta

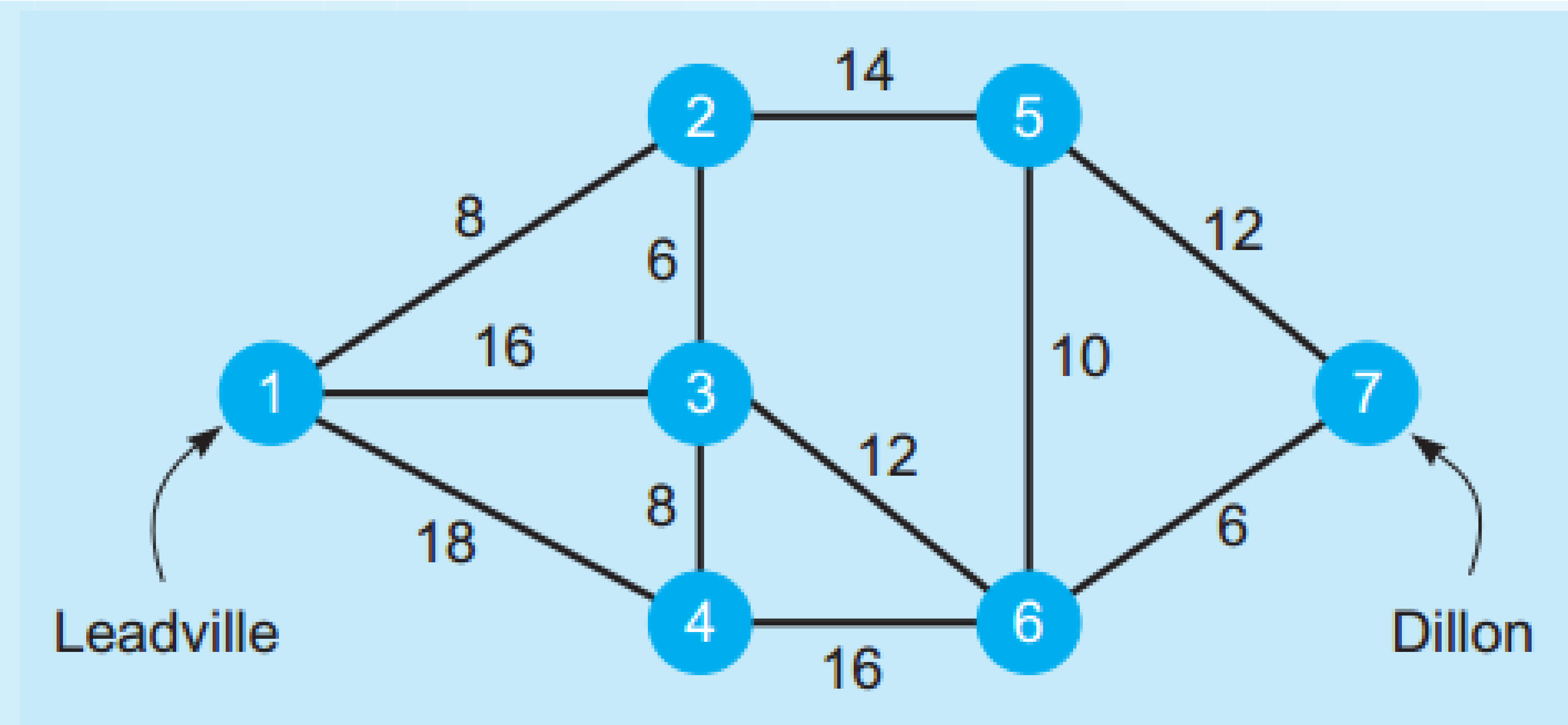
1. Encontrar el nodo más cercano al origen (planta). Colocar la distancia en un cuadro al lado del nodo.
2. Encontrar el siguiente nodo más cercano al origen (planta) y poner la distancia en un cuadro al lado del nodo. En algunos casos, deberán revisarse varias rutas para encontrar el nodo más cercano.
3. Repetir este proceso hasta que se haya revisado la red completa. La última distancia en el nodo final será la distancia de la ruta más corta. Debería observar que la distancia colocada en el cuadro al lado de cada nodo será la distancia de la ruta más corta a ese nodo. Tales distancias se usan como resultados parciales para encontrar el siguiente nodo más cercano.



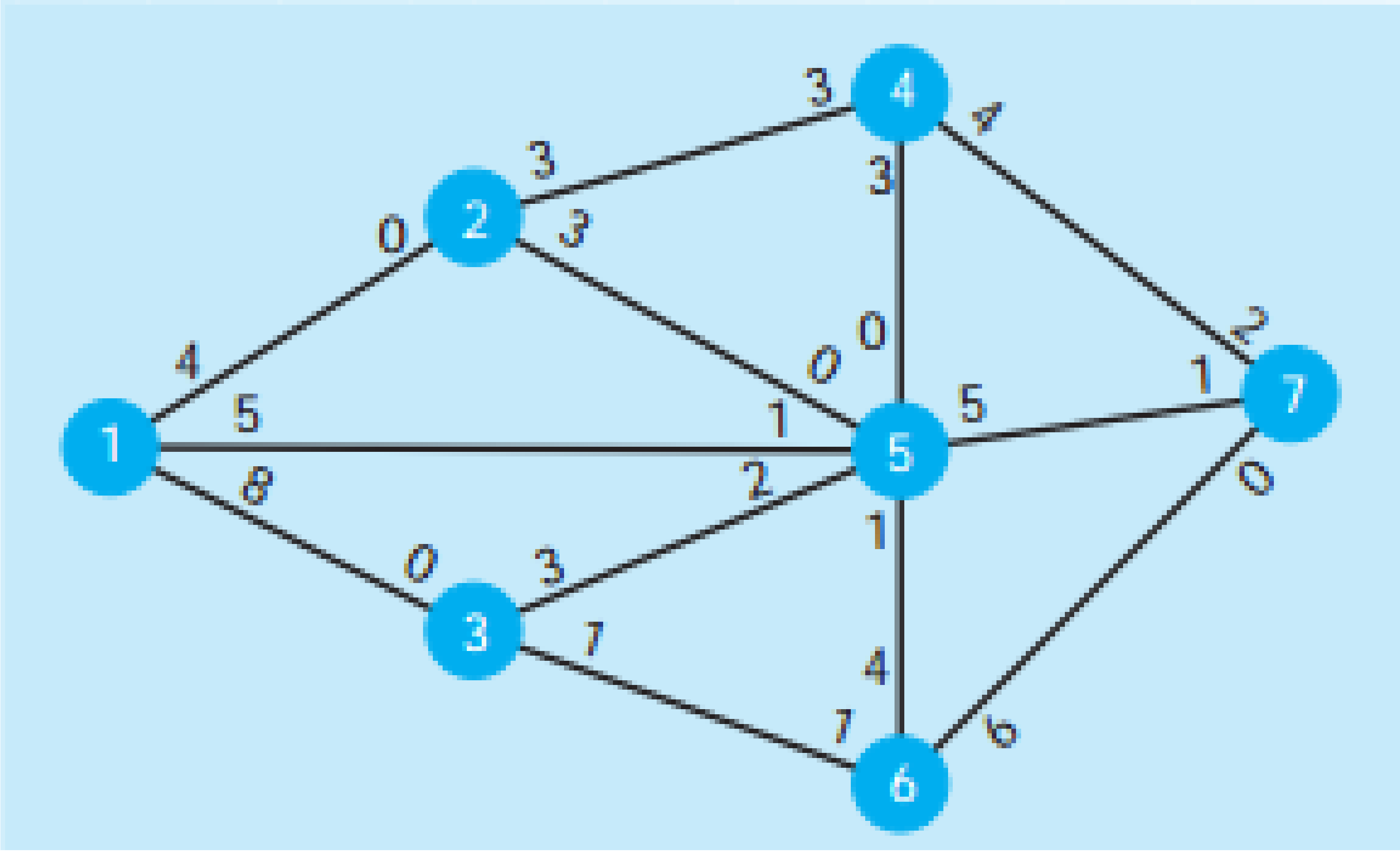
Problema de la ruta más corta



Práctica Ruta Corta



Práctica Flujo Máximo



Modelos de Teorías de Colas

Métodos cuantitativos para la toma de decisiones

Informática Empresarial

Jonathan Fernández González

Modelos de Teorías de Colas

El estudio de líneas de espera (teoría de colas), es una de las técnicas de análisis cuantitativo que se utilizan con mayor frecuencia.

Las líneas de espera son un suceso cotidiano, que afecta a las personas que van de compras a las tiendas, a cargar gasolina, a hacer depósitos bancarios, o bien, a quienes esperan en el teléfono a que conteste la primera operadora disponible

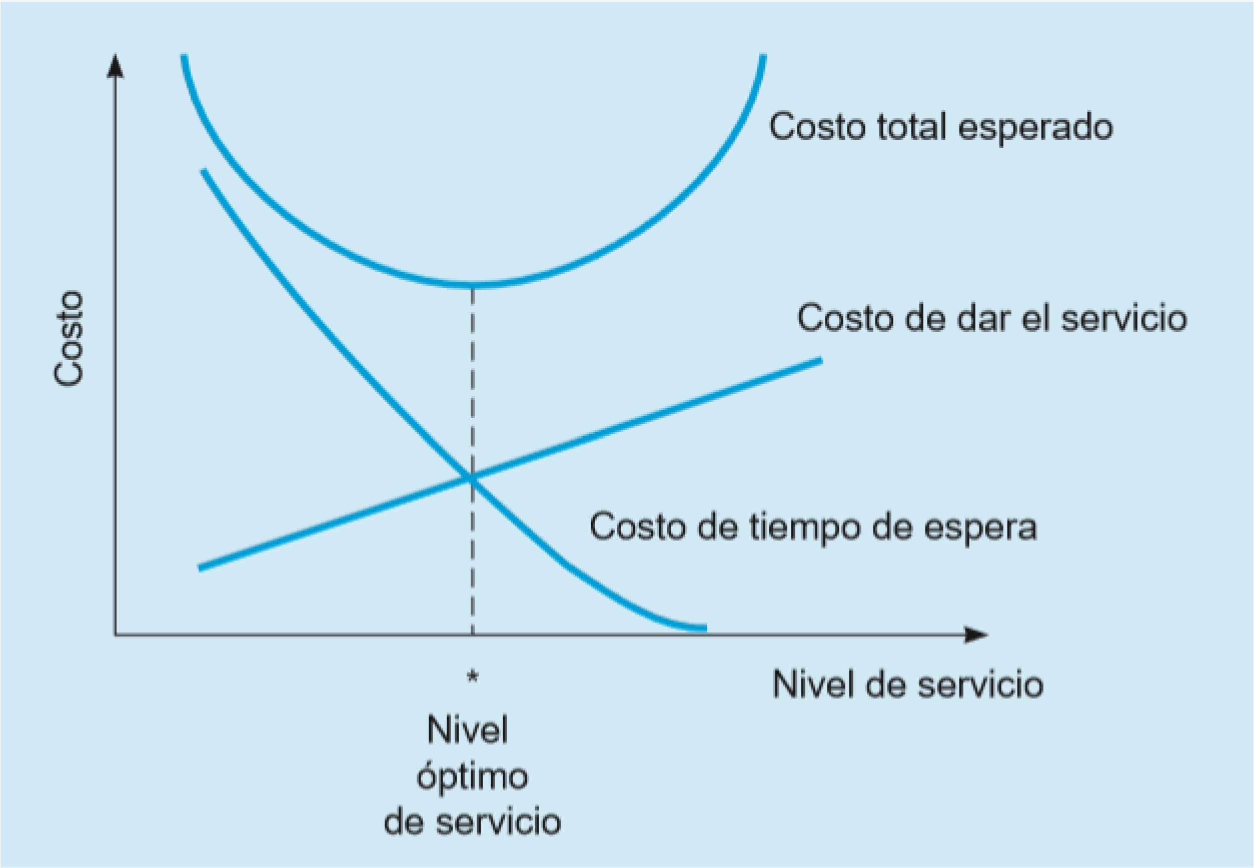
Los tres componentes básicos de un proceso de colas son las llegadas, las instalaciones de servicio y la línea de espera real.

Modelos de Teorías de Colas

La mayoría de los problemas de líneas de espera se centran en la cuestión de encontrar el nivel ideal de servicio que debería proporcionar una empresa.

Los supermercados deben decidir cuántas cajas registradoras tener abiertas. Las estaciones de gasolina tienen que decidir cuántas bombas de servicio abrir y cuántos empleados asignar al turno

Modelos de Teorías de Colas



Modelos de Teorías de Colas

		NÚMERO DE CUADRILLAS DE ESTIBADORES QUE TRABAJAN			
		1	2	3	4
a)	Número promedio de barcos que llegan por turno	5	5	5	5
b)	Tiempo promedio que cada barco espera para ser descargado (horas)	7	4	3	2
c)	Total de horas-barco perdidas por turno ($a \times b$)	35	20	15	10
d)	Costo estimado por hora del tiempo ocioso del barco	$1,000	$1,000	$1,000	$1,000
e)	Valor del tiempo perdido del barco o costo de espera ($c \times d$)	$35,000	$20,000	$15,000	$10,000
f)	Salario de la cuadrilla de estibadores,* o costo del servicio	$6,000	$12,000	$18,000	$24,000
g)	Costo total esperado ($e + f$)	$41,000	$32,000	$33,000	$34,000

Costo óptimo

*Los salarios de los equipos de estibadores se calculan con base en el número de personas de una cuadrilla típica (supuestamente de 50 individuos), multiplicado por el número de horas que cada persona trabaja por día (12 horas), multiplicado por un salario por hora de $10 la hora. Si se emplean dos cuadrillas, simplemente se duplica la cifra.

Características de un sistema de colas

Un sistema de colas está compuesto por 3 partes:

- Las llegadas o entrada al sistema (que a veces se conocen como población potencial)
- La cola o línea de espera misma
- La instalación de servicio

Características de un sistema de colas

- **Características de llegada**

La fuente de entrada que genera las llegadas o los clientes al sistema de servicio muestra tres características principales.

El tamaño de la población potencial, el patrón de llegadas al sistema de colas y el comportamiento de las llegadas.

Características de llegada

TAMAÑO DE LA POBLACIÓN POTENCIAL Los tamaños de las poblaciones se consideran ilimitados (esencialmente infinitos) o limitados (finitos)

PATRÓN DE LLEGADAS AL SISTEMA Los clientes llegan a la instalación de servicio de acuerdo con algún patrón conocido o bien, llegan aleatoriamente.

Características de llegada

COMPORTAMIENTO DE LAS LLEGADAS La mayoría de los modelos de colas suponen un cliente paciente.

Los clientes pacientes son personas o máquinas que esperan en la cola hasta que se les atiende y no se cambian de fila.

La gente trata de eludir la espera o se rehúsa a aceptarla. Eludir se refiere a clientes que rechazan incorporarse a la fila de espera porque es demasiado larga

Características de las líneas de espera

La línea de espera en sí misma es el segundo componente de un sistema de colas.

La longitud de la fila puede ser limitada o ilimitada. los modelos analíticos de colas se estudian con la suposición de una longitud de cola ilimitada.

Una cola es ilimitada cuando su tamaño no está restringido, como en el caso de la caseta de pago en la autopista que atiende automóviles.

Características de las líneas de espera

Una segunda característica de las líneas de espera está relacionada con la disciplina en la cola, que se refiere a la regla con la cual los clientes que están en la línea van a recibir el servicio.

La mayoría de los sistemas utilizan la disciplina en la cola conocida como regla de primeras entradas, primeras salidas (PEPS).

Características de las instalaciones de servicio

- Es importante examinar dos propiedades básicas:

La configuración del sistema de servicio

El patrón de los horarios de servicio

La configuración del sistema de servicio

- Los sistemas de servicio generalmente se clasifican en términos del número de canales, o del número de servidores, y el número de fases o de número de paradas de servicio, que deben realizarse.

Sistema de un solo canal

Sistema multicanal

La configuración del sistema de servicio

- Un **sistema de una sola fase** es aquel donde el cliente recibe el servicio en una sola estación y luego sale del sistema

- Un **Sistema multifase** tiene diferentes paradas de servicio**.**

Características de las instalaciones de servicio

CONFIGURACIONES BÁSICAS DE LOS SISTEMAS DE COLAS

- Si el tiempo de servicio es constante, le toma la misma cantidad de tiempo atender a cada uno de los clientes

- Con frecuencia los tiempos de servicio se distribuyen aleatoriamente

En muchos casos, es posible suponer que los tiempos de servicio aleatorios se describen con la **distribución de probabilidad exponencial negativa**.

Patrón de los horarios de servicio.

La distribución exponencial es importante en el proceso de construcción de los modelos matemáticos de colas, debido a que muchos de los respaldos teóricos del modelo se basan en la suposición de llegadas de tipo Poisson y de servicios de tipo exponencial

Identificación de modelos usando notación de Kendall

- La **notación de Kendall** básica de tres símbolos tiene la forma:

Distribución de llegadas/Distribución de tiempos de servicio/Número de canales de servicio abiertos

- *M* distribución de Poisson del número de ocurrencias (o tiempos exponenciales)
- *D* tasa constante (determinística)
- *G* distribución general con media y varianza conocidas

Identificación de modelos usando notación de Kendall

- Así, un modelo de un solo canal con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales se representaría por:

M/M/1

Cuando se agrega un segundo canal:

M/M/2

Modelo de colas de un solo canal con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales (M/M/1)

- Suposiciones del modelo:

1. Las llegadas se atienden sobre una base de PEPS.
2. Cada llegada espera a ser atendida independientemente de la longitud de la fila; es decir, no se elude ni se rehúsa.
3. Las llegadas son independientes de las llegadas anteriores, pero su número promedio (la tasa de llegadas) no cambia a lo largo del tiempo.
4. Las llegadas se describen con una distribución de probabilidad de Poisson y provienen de una población infinita o muy grande.
5. Los tiempos de servicio también varían de un cliente al siguiente y son independientes entre sí, pero se conoce su tasa promedio.
6. Los tiempos de servicio ocurren de acuerdo con una distribución de probabilidad exponencial negativa.
7. La tasa de servicio promedio es mayor que la tasa de llegadas promedio.

Modelo de colas de un solo canal con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales (M/M/1)

Las siete ecuaciones de colas para el modelo de un solo canal y una sola fase describen las características de operación importantes del sistema de servicio

Ecuaciones de colas

λ = número medio de llegadas por periodo (por ejemplo, por hora)

μ = número medio de personas o artículos que se atienden por periodo

Cuando se determina la tasa de llegada (λ) y la tasa de servicio (μ), se debe utilizar el mismo periodo. Por ejemplo, si λ es el número promedio de llegadas por hora, entonces μ debe indicar el número promedio que podría atenderse por hora.

Las ecuaciones de colas se presentan a continuación.

Ecuaciones de colas

1. El número promedio de clientes o unidades en el sistema, L, es decir, el número en la fila más el número que se está atendiendo:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

2. El tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema, W, es decir, el tiempo que pasa en la fila más el tiempo en que se le atiende:

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Ecuaciones de colas

3. El número promedio de clientes en la cola, L_q:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

4. El tiempo promedio que pasa un cliente esperando en la cola, W_q:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

5. El **factor de utilización** del sistema, ρ (la letra griega rho), es decir, la probabilidad de que se esté utilizando la instalación de servicio:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Ecuaciones de colas

6. Porcentaje de tiempo ocioso, P_0, es decir, la probabilidad de que nadie esté en el sistema:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

7. La probabilidad de que el número de clientes en el sistema sea mayor que k, $P_{n>k}$:

$$P_{n>k} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}$$

Modelo de colas de un solo canal con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales (M/M/1)

Ejemplo:

- Un taller de mecánico, es capaz de instalar nuevos silenciadores a una tasa promedio de 3 por hora, o aproximadamente 1 cada 20 minutos.

Los clientes que necesitan el servicio llegan al taller a un promedio de 2 por hora.

Calcule los valores numéricos de las características de operación anteriores para un modelo de un solo canal

λ = llegan 2 automóviles por hora

μ = se atienden 3 autos por hora

Modelo de colas de un solo canal con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales (M/M/1)

- Cuando se busca determinar el costo diario, se tiene que buscar el número de llegadas por día.

- El dueño del taller estima un costo del tiempo de espera de los clientes en términos de insatisfacción y pérdida de la buena voluntad en $50 por hora del tiempo en espera en la fila (después de que los automóviles están en reparación, a los clientes deja de importarles la espera)

El costo total del servicio es:

$$\text{Costo total del servicio} = (\text{Número de canales})\ (\text{Costo por canal})$$
$$\text{Costo total del servicio} = mC_s$$

donde:

m = número de canales

C_s = costo de servicio (costo de mano de obra) de cada canal

Cuando el costo de tiempo de espera se basa en el tiempo en el sistema, el costo de espera es:

$$\begin{aligned}\text{Costo total de espera} &= (\text{Tiempo total pasado en espera por todas las llegadas})(\text{costo de la espera})\\ &= (\text{Número de llegadas})(\text{Espera promedio por llegada})C_w\end{aligned}$$

así,

$$\text{Costo total de espera} = (\lambda W)C_w$$

Si el costo del tiempo de espera se basa en el tiempo en la cola, lo anterior será

$$\text{Costo total de espera} = (\lambda W_q)\,C_w$$

Estos costos se basan en cualesquiera unidades de tiempo (frecuentemente horas) que se utilicen para determinar λ. Cuando se suma el costo del servicio total con el costo de espera total, se obtiene el costo total del sistema de colas. Cuando el costo de espera se basa en el tiempo en el sistema, este es:

$$\text{Costo total} = \text{Costo total de servicio} + \text{Costo total de espera}$$
$$\text{Costo total} = mC_s + \lambda WC_w$$

Cuando el costo de espera se basa en el tiempo en la cola, el costo total es:

$$\text{Costo total} = mC_s + \lambda W_q C_w$$

Modelo de colas de un solo canal con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales (M/M/1)

El dueño del taller estima un costo del tiempo de espera de los clientes en términos de insatisfacción y pérdida de la buena voluntad en $50 por hora del tiempo en espera en la fila (después de que los automóviles están en reparación, a los clientes deja de importarles la espera)

En promedio un auto espera 2/3 de hora

Se atienden aproximadamente 16 autos por día (2 por hora X 8 horas)

El tiempo de espera para la reparación es de 2/3 X 16 = 32/3

$$\text{Costo total de espera diario} = (8 \text{ horas por día})\lambda W_q C_w = (8)(2)\left(\tfrac{2}{3}\right)(\$50) = \$533.33$$

Modelo de colas de un solo canal con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales (M/M/1)

El dueño del taller estima un costo del tiempo de espera de los clientes en términos de insatisfacción y pérdida de la buena voluntad en $50 por hora del tiempo en espera en la fila (después de que los automóviles están en reparación, a los clientes deja de importarles la espera)

El costo asignado al servicio es el salario de $15 por hora

$$\text{Costo total del servicio diario} = (\text{8 horas por día})mC_s = 8(1)(\$15) = \$120$$

Modelo de colas de canales múltiples con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales (M/M/m)

- Un sistema de colas de canales múltiples, donde dos o más servidores o canales se encuentran disponibles para atender a los clientes que llegan.
- Se supone que los clientes esperan el servicio en una sola fila y, luego, se dirigen al primer servidor disponible.
- Un ejemplo de este tipo de línea de espera de una sola fase y multicanal se encuentra actualmente en muchos bancos. Se forma una fila común y el cliente que se encuentra al principio de la cola se dirige al primer cajero disponible

Modelo de colas de canales múltiples con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales (M/M/m)

- El sistema multicanal supone que las llegadas siguen una distribución de probabilidad de Poisson y que los tiempos de servicio están distribuidos de forma exponencial.
- El primero en llegar es el primero en ser atendido, y se supone que todos los servidores funcionan al mismo ritmo.
- También se aplican otras suposiciones que se presentaron anteriormente para el modelo de un solo canal.

Modelo de colas de canales múltiples con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales (M/M/m)

- Ecuaciones

m = número de canales abiertos,

λ = tasa de llegadas promedio, y

μ = tasa de servicio promedio en cada canal

Modelo de colas de canales múltiples con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales (M/M/m)

- Ecuaciones

1. La probabilidad de que haya cero clientes o unidades en el sistema es:

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{m\mu}{m\mu - \lambda}} \text{ para } m\mu > \lambda$$

2. El número promedio de clientes o unidades en el sistema es:

$$L = \frac{\lambda\mu(\lambda/\mu)^m}{(m-1)!(m\mu - \lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

Modelo de colas de canales múltiples con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales (M/M/m)

- Ecuaciones

3. El tiempo promedio que una unidad pasa en la línea de espera o recibiendo servicio (es decir, dentro del sistema) es:

$$W = \frac{\mu(\lambda/\mu)^m}{(m-1)!(m\mu-\lambda)^2}P_0 + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda}$$

4. El número promedio de clientes o unidades que se encuentran en la línea esperando ser atendidos:

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu}$$

Modelo de colas de canales múltiples con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales (M/M/m)

- Ecuaciones

5. El tiempo promedio que un cliente o unidad pasa en la cola esperando ser atendido:

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda}$$

6. Tasa de utilización:

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$$

Ejemplo

- Arnold encuentra que con un costo mínimo después impuestos puede abrir un segundo sitio de atención (bahía) en el taller, en el cual se pueden instalar silenciadores, para esto contrataría a un segundo trabajador. Se podría esperar que el nuevo mecánico instalara los silenciadores a la misma tasa, aproximadamente $\mu = 3$ por hora. Los clientes, que seguirían llegando a la tasa de $\lambda = 2$ por hora, esperarían en una sola fila hasta que uno de los dos mecánicos se desocupara.
- Para saber cómo se compara esta opción con el anterior sistema de línea de espera de un solo canal, Arnold calcula varias características de operación para el sistema de canales $m = 2$.

Modelo de tiempo de servicio constante (M/D/1)

Algunos sistemas tienen tiempos de servicio constante en vez de tiempos exponencialmente distribuidos. Cuando los clientes o los equipos se procesan de acuerdo con un ciclo fijo, como en el caso de un lavado de autos automático o el de un juego en un parque de diversiones, son adecuadas las tasas de servicio constante. Ya que las tasas constantes son ciertas, los valores de Lq, Wq, Ly W siempre son menores de lo que serían en los modelos anteriores, que tienen tiempos de servicio variables.

Modelo de tiempo de servicio constante (M/D/1)

En realidad, tanto la longitud promedio de la cola como el tiempo de espera promedio en la cola disminuyen a la mitad con el modelo de tasa de servicio constante.

Las fórmulas son:

Modelo de tiempo de servicio constante (M/D/1)

Las fórmulas son:

1. Longitud promedio de la cola:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

2. Tiempo de espera promedio en la cola:

$$W_q = \frac{\lambda}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

Modelo de tiempo de servicio constante (M/D/1)

Las fórmulas son:

3. Número promedio de clientes en el sistema:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

4. Tiempo promedio en el sistema:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Ejemplo

- Una compañía recolecta y compacta latas de aluminio y botellas de. Los conductores de sus camiones, quienes llegan a descargar dichos materiales para su reciclaje, esperan actualmente un promedio de 15 minutos antes de vaciar sus cargas. El costo del salario del conductor y el tiempo inactivo del camión mientras están en la cola se valoró en $60 por hora.
- Se puede comprar un nuevo compactador automático, que procesaría las cargas de los camiones a una tasa constante de 12 vehículos por hora (es decir, 5 minutos por camión). Los camiones llegan de acuerdo con una distribución de Poisson a una tasa promedio de 8 por hora.
- Si se utiliza el nuevo compactador, su costo se amortizaría a una tasa de $3 por camión descargado.

Respuestas

- Costo de espera actual / viaje = 15

$$\textit{Nuevo}\ \text{sistema: } \lambda = \text{llegan 8 camiones/hora}$$

$$\mu = \text{12 camiones/hora atendidos}$$

Respuestas

Nuevo sistema: λ = llegan 8 camiones/hora

μ = 12 camiones/hora atendidos

$$\text{Tiempo de espera promedio en la cola} = W_q = \frac{\lambda}{2\mu(\mu - \lambda)} = \frac{8}{2(12)(12 - 8)}$$

$$= \frac{1}{12} \text{ de hora}$$

$$\text{Costo de espera/viaje con el nuevo compactador} = \left(\tfrac{1}{12} \text{ de hora de espera}\right)(\$60/\text{costo por hora}) = \$5/\text{viaje}$$

$$\text{Ahorros con el nuevo equipo} = \$15 \text{ (sistema actual)} - \$5 \text{ (sistema nuevo)}$$

$$= \$10/\text{viaje}$$

$$\text{Costo amortizado del equipo nuevo} = \underline{\$3/\text{viaje}}$$

$$\text{Ahorro neto} = \$7/\text{viaje}$$

Modelo de población finita (M/M/1 con fuente finita)

- Cuando existe una población limitada de clientes potenciales para una instalación de servicio, es necesario considerar un modelo diferente de colas. Este modelo se utilizaría, por ejemplo, si se consideraran reparaciones del equipo en una fábrica que tiene cinco máquinas
- La razón por la que este modelo difiere de los tres modelos de colas anteriores es que ahora existe una relación de dependencia entre la longitud de la cola y la tasa de llegadas.

Modelo de población finita (M/M/1 con fuente finita)

- Un modelo de población potencial finita que se apoya en las siguientes suposiciones:

1. Solamente hay un servidor.
2. La población de unidades que buscan servicio es finita.
3. Las llegadas siguen una distribución de Poisson y los tiempos de servicio se distribuyen exponencialmente.
4. Los clientes son atendidos con base en el principio de primero en llegar, primero en ser atendido.

Modelo de población finita (M/M/1 con fuente finita)

λ = tasa de llegadas promedio, μ = tasa de servicio promedio, N = tamaño de la población

las características operativas de este modelo de población finita con un único canal o servidor en turno son las siguientes:

1. Probabilidad de que el sistema esté vacío:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

Modelo de población finita (M/M/1 con fuente finita)

2. Longitud promedio de la cola:

$$L_q = N - \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda}\right)(1 - P_0)$$

3. Número promedio de clientes (unidades) dentro del sistema:

$$L = L_q + (1 - P_0)$$

4. Tiempo de espera promedio en la cola:

$$W_q = \frac{L_q}{(N - L)\lambda}$$

Modelo de población finita (M/M/1 con fuente finita)

5. Tiempo promedio en el sistema:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

6. Probabilidad de *n* unidades en el sistema:

$$P_n = \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \qquad n = 0, 1, \ldots, N$$

Ejemplo

- Los registros existentes indican que cada una de las cinco impresoras de alta velocidad, necesitan reparación después de aproximadamente 20 horas de uso. Se ha determinado que las problemas con las impresoras tienen distribución de Poisson. El único técnico que está de turno puede dar servicio a una impresora en un promedio de dos horas, siguiendo una distribución exponencial.

Para calcular las características de operación del sistema, primero se observa que la tasa promedio de llegadas es $\lambda = {}^{1}\!/_{20} = 0.05$ impresoras/hora. La tasa promedio de servicio es $\mu = {}^{1}\!/_{2} = 0.50$ impresoras/hora.

Ejemplo

En la terminal de un aeropuerto se han incorporado diez robots para incrmentar el servicio al cliente, surgiendo el problema que no se aplica un mantenimiento preventivo a los robots y presentan una gran variabilidad en la distribución de averías. Cada robot sigue una distribución exponencial de averías (o distribución entre llegadas) con un tiempo promedio de 200 horas entre una y otra avería, y un coste de 30 euros/hora. Para afrontar la situación se encarga a una persona para el mantenimiento, que necesita un promedio de diez horas para reparar un robot, con tiempos de reparación distribuidos exponencialmente, y un coste de 10 euros/hora, dedicándose a otras actividades cuando no hay robots que reparar. ¿Cuál es el coste diario que origina el tiempo ocioso de la mano de obra y los robots?

Ejemplo

Es un modelo de cola $M/M/1$ de población finita, los $N=10$ robots constituyen la población de clientes,

Tasa de llegadas: $\lambda=\dfrac{1}{200}=0,005$ averías/hora

Tasa de servicio: $\mu=\dfrac{1}{10}=0,1$ robots/hora

En un laboratorio reciben muestras para ser analizadas, el microbiólogo es capaz de analizar cada una de las muestras en 15 minutos, las muestras llegan al laboratorio en un promedio de 3 por hora

La compañía tiene que evaluar la mejor opción en función del tiempo de atención (análisis) de las muestras

Entre las opciones que tiene es:

Remplazar al microbiólogo actual y contratar a uno que pueda analizar 5 muestras por hora (ya que es más experimentado)

Contratar a un nuevo empleado que pueda analizar las muestras, considerando que en el peor de los casos pueda analizar 4 muestras por hora

Determine, ¿qué tipo de modelos de colas utilizar?

Calcule:

El promedio de las muestras en el sistema

El tiempo promedio que pasa una muestra en el sistema

La cantidad de muestras que esperan en promedio en fila

El tiempo promedio de espera para cada muestra

Probabilidad de que no hay muestras en el sistema

La probabilidad de que el microbiólogo este ocupado

Ejemplo

Para el modelo de un solo canal donde.

Λ=3

μ= 4 muestras por hora

L= El promedio de las muestras en el sistema

W= El tiempo promedio que pasa una muestra en el sistema

Lq= La cantidad de muestras que esperan en promedio en fila

Wq= El tiempo promedio de espera para cada muestra

P0= Probabilidad de que no hay muestras en el sistema

Ro= La probabilidad de que el microbiólogo este ocupado

Análisis Markov

Métodos cuantitativos para la toma de decisiones

Informática Empresarial

Jonathan Fernández González

Análisis Markov

- Es una técnica que maneja las probabilidades de ocurrencia futuras mediante el análisis de probabilidades conocidas en el presente.

- Aplicaciones

Análisis de participación en el mercado

Predicción de deudas incobrables

Predicción de matrículas

Predicción de fallos de maquinarias

Análisis Markov

- Supone que un sistema comienza en un estado o condición inicial

Predecir estados futuros implica conocer las posibilidades (probabilidades) de cambio del sistema de un estado a otro.

Para un problema dado, las probabilidades se pueden recolectar y colocar en una matriz.

Esta matriz de probabilidades de transición muestra la probabilidad de que el sistema cambie de un periodo al siguiente

Análisis Markov

- Suposiciones:

1. Existe un número limitado o finito de estados posibles
2. La probabilidad de cambiar los estados permanece igual con el paso del tiempo
3. Podemos predecir cualquier estado futuro a partir de los estados anteriores y de la matriz probabilidades de transición
4. El tamaño y composición del sistema no cambia durante el análisis.

Estados y probabilidades de los estados

- Los estados sirven para identificar todas las condiciones posibles de un proceso o sistema.

Si una máquina funciona se pude decir que ese es su primer estado

Si una máquina no funciona se puede decir que ese es su segundo estado

En el análisis Markov se suponen que los estados son colectivamente exhaustivos y mutuamente excluyentes.

Estados y probabilidades de los estados

- Después de identificar estados, el siguiente paso es determinar la probabilidad de que el sistema esté en dicho estado (**vector de probabilidades de estado**)

$$\pi(i) = vector\ de\ probabilidades\ de\ estado\ para\ el\ periodo\ i$$
$$\pi(i) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3 \ldots\ldots, \pi_n)$$

Donde n= al número de estados

$\pi_1, \pi_2, \pi_3 \ldots\ldots, \pi_n$ = probabilidad de estar en el estado 1, estado 2, ….., estado n

Estados y probabilidades de los estados

- Ejemplo, con un solo artículo:

- Una máquina que está funcionando bien:

$$\pi(1) = (1, 0)$$

$\pi(1)$= al vector de estado para la máquina en el periodo 1

$\pi_1 = 1$ = probabilidad de estar en el primer estado

$\pi_2 = 0$ = probabilidad de estar en el segundo estado

Vector de probabilidades de estado

- Ejemplo, con tres tiendas (A, B, C):

- Puede haber 100.000 personas compran en las tres tiendas durante un mes dado.

40.000 compran en la Tienda A	Estado 1
30.000 compran en la Tienda B	Estado 2
30.000 compran en la Tienda C	Estado 3

Vector de probabilidades de estado

- Calcule la probabilidad de que una persona compre en una de las tres tiendas

- Estado 1: tienda A   40.000/100.000 = 0,4
- Estado 2: tienda B   30.000/100.000 = 0,3
- Estado 3: tienda C   30.000/100.000 = 0,3

Vector de probabilidades de estado

- Estado 1: tienda A   40.000/100.000 = 0,4
- Estado 2: tienda B   30.000/100.000 = 0,3
- Estado 3: tienda C   30.000/100.000 = 0,3

Estas probabilidades se colocan en el vector de probabilidades como:

$$\pi(1) = (0.4, 0.3, 0.3)$$

Vector de probabilidades de estado

Estas probabilidades se colocan en el vector de probabilidades como:

$$\pi(1) = (0.4, 0.3, 0.3)$$

Donde:

$\pi(1)$= vector de probabilidades de estado para tres tiendas en el periodo 1

$\pi_1 = 0.4$ = Probabilidad de que una persona compre en A   Estado 1

$\pi_2 = 0.3$ = Probabilidad de que una persona compre en B   Estado 2

$\pi_3 = 0.3$ = Probabilidad de que una persona compre en C   Estado 3

Vector de probabilidades de estado

- El vector de estado para las tres tiendas de abarrotes representan la **participación en el mercado** para las mismas en el primer periodo.

La gerencia de las tres tiendas está interesada en la manera en que cambian sus participaciones de mercado en el tiempo.

Vector de probabilidades de estado

- Un estudio determinó que el 80% de los clientes que compran en A en un mes regresarán a esa misma tienda

Del restante 20%, 10 cambiarán a la tienda B y 10 cambiará a C

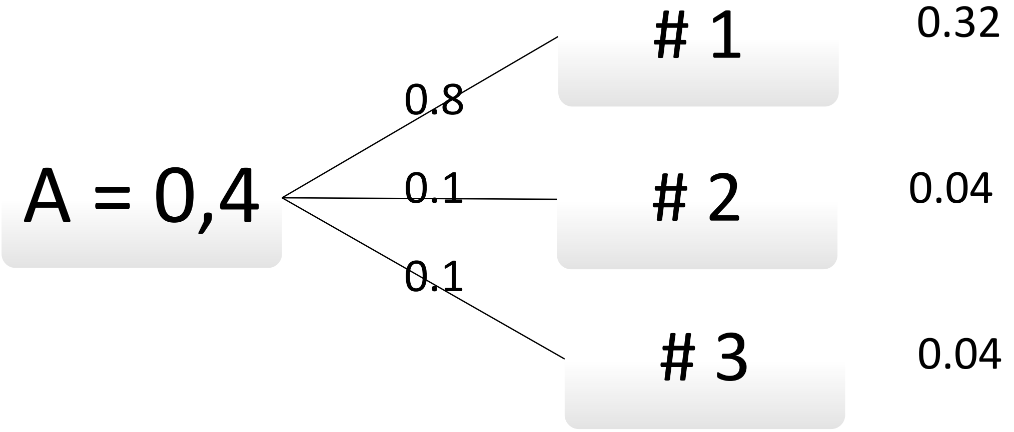
Para los clientes de B, 70% regresan, 10% cambia a A y 20% cambia a C

Para los clientes de C, 60% regresan, 20% cambia a A y 20% cambia a B

Calcule las participaciones del mercado de A, B y C

Vector de probabilidades de estado

Calcule las participaciones del mercado de A, B y C



Para la participación del mercado de A del 40%, el 32% regresa y un 4% compra en B y el 4% compra en C

¿Cuánto es la participación total de mercado de A para el siguiente mes?

Matriz de probabilidades de transición

- Permite ir de un estado actual a un estado futuro

Es una matriz de probabilidades condicionales de estar en un estado futuro dado que estamos en el estado actual.

Sea P_{ij} = a la probabilidad condicional de estar en le estado j en el futuro, dado que el estado actual es i

Matriz de probabilidades de transición

P_{12} es la probabilidad de estar en el estado 2 en el futuro, dado que el evento estaba en el estado 1 del periodo anterior.

Definimos P = matriz de probabilidades de transición

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ P_{m1} & & \cdots & & P_{mn} \end{bmatrix}$$

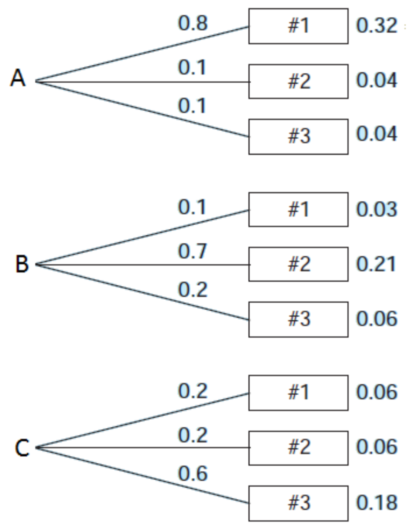
Los valores P_{ij} individuales casi siempre se determinan en forma empírica.

Si 10% de las personas que comparan en la tienda A, comprarán en la tienda B en el siguiente periodo, entonces sabemos que P_{12} es 10%

Matriz de probabilidades de transición

- Usamos los datos históricos de la tres tiendas para determinar qué porcentaje de clientes cambiaría cada mes. Ponemos estas probabilidades de transición en la siguiente matriz:

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$



$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Matriz de probabilidades de transición

Renglón 1

$0.8 = P_{11}$ = probabilidad de estar en el estado 1 después de estar en el estado 1 el periodo anterior

$0.1 = P_{12}$ = probabilidad de estar en el estado 2 después de estar en el estado 1 el periodo anterior

$0.1 = P_{13}$ = probabilidad de estar en el estado 3 después de estar en el estado 1 el periodo anterior

Renglón 2

$0.1 = P_{21}$ = probabilidad de estar en el estado 1 después de estar en el estado 2 el periodo anterior

$0.7 = P_{22}$ = probabilidad de estar en el estado 2 después de estar en el estado 2 el periodo anterior

$0.2 = P_{23}$ = probabilidad de estar en el estado 3 después de estar en el estado 2 el periodo anterior

Renglón 3

$0.2 = P_{31}$ = probabilidad de estar en el estado 1 después de estar en el estado 3 el periodo anterior

$0.2 = P_{32}$ = probabilidad de estar en el estado 2 después de estar en el estado 3 el periodo anterior

$0.6 = P_{33}$ = probabilidad de estar en el estado 3 después de estar en el estado 3 el periodo anterior

Predicción de la participación futura en el mercado

- Después de determinar las probabilidades de estado y la matriz de probabilidades de transición, se pueden determinar las probabilidades futuras.

Se puede comparar la probabilidad de que un individuo compre en una de las tiendas en el futuro, lo que es equivalente a la participación en el mercado.

Predicción de la participación futura en el mercado

.

$$\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

fx {=+MMULT(D5:F7,B5:B7)}

0.41
0.31
0.28

Análisis Markov en operación de maquinaria

- Según los registros de operación de una maquinara:

En los últimos dos años, el 80% de las veces, la máquina funcionaba correctamente en el mes actual, si había funcionado correctamente en el mes anterior, el 20% del tiempo la máquina funcionaba mal en cualquier mes, cuando funcionaba correctamente el mes anterior

El 90% de las veces la máquina estaba mal ajustada en cualquier mes dado, si estaba mal ajustada el mes anterior, solo el 10% opero bien en un mes, en el que el anterior no operaba correctamente

Análisis Markov en operación de maquinaria

En los últimos dos años, el 80% de las veces, la máquina funcionaba correctamente en el mes actual, si había funcionado correctamente en el mes anterior, el 20% del tiempo la máquina funcionaba mal en cualquier mes, cuando funcionaba correctamente el mes anterior

El 90% de las veces la máquina estaba mal ajustada en cualquier mes dado, si estaba mal ajustada el mes anterior, solo el 10% opero bien en un mes, en el que el anterior no operaba correctamente

Estos valores se utilizan para construir la matriz de probabilidades de transición, el estado 1 es una situación donde la máquina funciona correctamente, el estado 2 donde la máquina no lo hace.

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Análisis Markov en operación de maquinaria

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$P_{11} = 0.8 =$ probabilidad de que la máquina funcione *correctamente* este mes, dado que funcionaba *correctamente* el mes pasado

$P_{12} = 0.2 =$ probabilidad de que la máquina *no* funcione correctamente este mes, dado que funcionaba *correctamente* el mes pasado

$P_{21} = 0.1 =$ probabilidad de que la máquina funcione *correctamente* este mes, dado que *no* funcionaba correctamente el mes pasado

$P_{22} = 0.9 =$ probabilidad de que la máquina *no* funcione correctamente este mes, dado que *no* funcionaba correctamente el mes pasado

Análisis Markov en operación de maquinaria

- ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina funcione correctamente dentro de un mes? Y ¿dentro de dos meses?

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

0.8	Primer mes
0.2	
0.66	Segundo mes
0.34	

fx {=+MMULT(D13:E14,B13:B14)}

La probabilidad de que la máquina funcione correctamente dentro de un mes, dado que ahora funciona correctamente es de 0.80, la probabilidad de que no funcione correctamente en un mes es de 0.20

Estados absorbentes y matriz fundamental

- En los ejemplos vistos hasta ahora, suponen que es posible que el proceso o sistema vaya de un estado a cualquier otro, entre dos periodos. Sin embargo, en algunos casos no se puede ir a otro estado en el futuro.

- Un sistema de cuentas por cobrar generalmente coloca las deudas o las cuentas por cobrar de sus clientes en una de varias categorías o estados, dependiendo de lo atrasada que esté la cuenta sin pagar más antigua.

Estados absorbentes y matriz fundamental

- Cuatro estados o categorías típicos para una aplicación de cuentas por cobrar son los siguientes:

Estado 1 (π_1): pagadas, todas las cuentas

Estado 2 (π_2): deuda incobrable, atrasada por más de tres meses

Estado 3 (π_3): atrasada menos de un mes

Estado 4 (π_4): atrasada entre uno y tres meses

Estados absorbentes y matriz fundamental

- En un periodo dado, en este caso un mes, un cliente puede estar en uno de estos cuatro estados.

Un cliente puede:

Pagar todo (estado 1)

Tener una deuda atrasada más de tres meses, que es una deuda incobrable (estado 2).

Tener su deuda más antigua atrasada menos de un mes (estado 3)

Tener su deuda más antigua atrasada entre uno y tres meses (estado 4)

Estados absorbentes y matriz fundamental

- La probabilidad de estar en la categoría pagada para cualquier cuenta en un mes futuro, dado que el cliente está en la categoría de pagada por una compra este me es de 100% o 1

- Si una cuenta no se paga en tres meses, suponemos que la compañía la cancela y no trata de cobrarla en el futuro. Así, una vez que una persona está en la categoría de deuda incobrable, esa persona permanecerá ahí para siempre.

Estados absorbentes y matriz fundamental

- Para cualquier estado absorbente, la probabilidad de que un cliente esté en ese estado en el futuro es de 1, en tanto que la probabilidad de que un cliente esté en otro estado es de 0.

Las probabilidades para los otros dos estados:

1. Deuda de menos de un mes
2. Deuda de uno a tres meses de antigüedad

Son las siguientes:

Estados absorbentes y matriz fundamental

Las probabilidades para los otros dos estados:

1. Deuda de menos de un mes

- Existe una probabilidad de 0.60 de estar en la categoría de pagada.
- Una probabilidad de 0 de estar en la categoría de deuda incobrable
- Una probabilidad de 0.20 de permanecer en la categoría de menos de un mes
- Una probabilidad de 0.20 de estar en la categoría de entre uno y tres meses en el siguiente periodo

Estados absorbentes y matriz fundamental

1. Deuda de menos de un mes

- Una probabilidad de 0 de estar en la categoría de deuda incobrable

La probabilidad de estar en la categoría de deuda incobrable el siguiente mes es de 0, porque en tan solo un mes es imposible ir del estado 3, menos de un mes, al estado 2, más de tres meses

Estado 1 (π_1): pagadas, todas las cuentas

Estado 2 (π_2): deuda incobrable, atrasada por más de tres meses

Estado 3 (π_3): atrasada menos de un mes

Estado 4 (π_4): atrasada entre uno y tres meses

Estados absorbentes y matriz fundamental

Las probabilidades para los otros dos estados:

2. Deuda de uno a tres meses de antigüedad

- Existe una probabilidad de 0.40 de estar en la categoría de pagada
- Una probabilidad de 0.10 de estar en la de deuda incobrable
- Una probabilidad de 0.30 de estar en la categoría de menos de un mes
- Una probabilidad de 0.20 de permanecer en la categoría de entre uno y tres meses el siguiente mes

Estados absorbentes y matriz fundamental

Matriz de las probabilidades

	SIGUIENTE MES			
ESTE MES	PAGADA	DEUDA INCOBRABLE	<1 MES	1 A 3 MESES
Pagada	1	0	0	0
Deuda incobrable				
Menos de 1 mes				
1 a 3 meses				

Estados absorbentes y matriz fundamental

	SIGUIENTE MES			
ESTE MES	PAGADA	DEUDA INCOBRABLE	<1 MES	1 A 3 MESES
Pagada	1	0	0	0
Deuda incobrable	0	1	0	0
Menos de 1 mes	0.6	0	0.2	0.2
1 a 3 meses	0.4	0.1	0.3	0.2

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Estados absorbentes y matriz fundamental

- Si conocemos la fracción de personas en cada una de las cuatro categorías o estados para un periodo determinado, es posible determinar la fracción de personas en estos cuatro estados o categorías, para cualquier periodo futuro.

- Estas fracciones se colocan en un vector de probabilidades de estado y se multiplican por la matriz de probabilidades de transición

Estados absorbentes y matriz fundamental

- Todos estarán en la categoría de pagada o deuda incobrable, lo cual se debe a que las categorías son estados absorbentes.

- Si encontramos la cantidad total de dinero que quedará como pagada o deuda incobrable, ayudamos a la compañía a manejar sus deudas incobrables y sus flujos de efectivo.

- **Un análisis así requiere lo que se conoce como matriz fundamental.**

Matriz fundamental

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} I \qquad\qquad 0 \\ \downarrow \qquad\qquad \downarrow \\ P = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{array}\right] \\ \uparrow \qquad\qquad \uparrow \\ A \qquad\qquad B \end{array}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Matriz fundamental

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \multicolumn{2}{c}{I} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \multicolumn{2}{c}{\downarrow} & \multicolumn{2}{c}{\downarrow} \end{array} \\
P = & \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{array}\right] \\
 & \begin{array}{cccc} \multicolumn{2}{c}{\uparrow} & \multicolumn{2}{c}{\uparrow} \\ \multicolumn{2}{c}{A} & \multicolumn{2}{c}{B} \end{array}
\end{array}
$$

$$
I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}
$$

donde

$I =$ matriz identidad (tiene unos en la diagonal y ceros en otra parte)

$0 =$ matriz con tan solo ceros.

La matriz fundamental se calcula como:

$$F = (I - B)^{-1}$$

Matriz fundamental

$$F = (I - B)^{-1}$$

$$F = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.38 & 0.34 \\ 0.52 & 1.38 \end{bmatrix}$$

Matriz fundamental

- Ahora se utiliza la matriz fundamental para calcular la cantidad de dinero en deuda incobrable que esperaríamos a la larga.
- Primero necesitamos multiplicar la matriz fundamental, F, por la matriz A.

$$FA = \begin{bmatrix} 1.38 & 0.34 \\ 0.52 & 1.38 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$FA = \begin{bmatrix} 0.97 & 0.03 \\ 0.86 & 0.14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} I & 0 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ P = & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{array}\right] \\ & \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ A & B \end{array} \end{array}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Matriz fundamental

- La nueva matriz FA tiene un significado importante. Indica la probabilidad de que una cantidad que está en uno de los estados no absorbentes termine en uno de ellos.

- El renglón superior de esta matriz indica las probabilidades de que una cantidad en la categoría de menos de un mes termine en la categoría de pagada o deuda incobrable.

Matriz fundamental

$$FA = \begin{bmatrix} 0.97 & 0.03 \\ 0.86 & 0.14 \end{bmatrix}$$

- La probabilidad de que esta cantidad de menos de un mes termine pagada es de 0.97, en tanto que la probabilidad de que una cantidad de menos de un mes termine como deuda incobrable es de 0.03

- El segundo renglón tiene una interpretación similar para el otro estado no absorbente:
- La categoría de entre uno y tres meses. Por lo tanto, 0.86 es la probabilidad de que una cantidad atrasada entre uno y tres meses termine pagada, y 0.14 es la probabilidad de que una cantidad atrasada entre uno y tres meses nunca se pague y se convierta en deuda incobrable

Matriz fundamental

- Si conocemos las cantidades en las categorías de menos de un mes y de entre uno y tres meses, determinamos la cantidad de dinero que se pagará y la cantidad que se convertirá en deuda incobrable. Sea la matriz M la cantidad de dinero que está en cada estado no absorbente de la siguiente manera:

$$M = (M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n)$$

donde

n = número de estados no absorbentes
M_1 = cantidad en el primer estado o categoría
M_2 = cantidad en el segundo estado o categoría
M_n = cantidad en el n-ésimo estado o categoría

Matriz fundamental

- Suponga que hay \$2,000 en la categoría de menos de un mes, y \$5,000 en la de uno a tres meses. Entonces, ¿cómo se representa M?

M= (2.000, 5.000)

Las cantidades de dinero que terminarán como pagada y como deuda incobrable se calculan multiplicando la matriz M por la matriz FA que se calcularon antes. Los cálculos son:

Cantidad pagada y cantidad de deuda incobrable = MFA

Matriz fundamental

$$\begin{aligned}\text{Cantidad pagada y cantidad de deuda incobrable} &= MFA \\ &= (2{,}000,\ 5{,}000)\begin{bmatrix} 0.97 & 0.03 \\ 0.86 & 0.14 \end{bmatrix} \\ &= (6{,}240,\ 760)\end{aligned}$$

Entonces, del total de \$7,000 (\$2,000 en la categoría de menos de un mes y \$5,000 en la de uno a tres meses), \$6,240 se pagarán al final y \$760 terminarán como deuda incobrable.

Práctica

El dueño de un instituto de enseñanza está preocupado por la matrícula decreciente.

El instituto se especializa en capacitar a programadores y operadores de computadoras. Con el paso de los años, ha habido mucha competencia entre los tres principales institutos en la región.

Para entender mejor cuál de estos institutos está surgiendo como líder, se decidió realizar una encuesta, en la cual observó el número de estudiantes que se cambiaban de uno a otro durante sus carreras académicas.

Práctica

- En promedio, el primer instituto puede retener al 65% de los estudiantes inscritos originalmente. De los estudiantes inscritos originales, 20% se cambian al segundo instituto y 15% al tercer instituto
- Del segundo instituto, 90% de sus estudiantes realizan el programa académico completo y se estima que cerca de la mitad de los estudiantes lo dejan y se van al primer instituto y la otra mitad al tercer instituto
- El tercer instituto puede retener al 80% de sus estudiantes después de que se inscriben. De los estudiantes inscritos originales, 10% se cambian al segundo instituto y el otro 10% se unen al primero

Práctica

Actualmente, el primer instituto tiene 40% del mercado. El segundo instituto, que es mucho más nuevo, tiene 35% del mercado. El porcentaje restante, 25%, consiste en estudiantes del tercer instituto

Se desea determinar la participación en el mercado de el primer instituto para el siguiente año.

Solución

Instituto	1	2	3
1	65%	20%	0,15%
2	5%	90%	5%
3	10%	10%	80%

Solución

Instituto	1	2	3
1	65%	20%	15%
2	5%	90%	5%
3	10%	10%	80%

$$(0.40\ 0.35\ 0.25)\begin{bmatrix} 0.65 & 0.20 & 0.15 \\ 0.05 & 0.90 & 0.05 \\ 0.10 & 0.10 & 0.80 \end{bmatrix}$$

Participaciones en el mercado

1	2	3
0,3025	0,42	0,2775

Práctica 2

- Una universidad administra exámenes de competencias en computación cada año. Los exámenes permiten a los estudiantes “eximirse” de la clase introducción a la computación que imparte la universidad.

Los resultados de los exámenes se pueden clasificar en uno de los siguientes cuatro estados:

- Estado 1: aprobar todos los exámenes de computación y eximirse del curso
- Estado 2: no aprobar todos los exámenes de computación en el tercer intento y tener que tomar el curso
- Estado 3: reprobar los exámenes de computación en el primer intento
- Estado 4: reprobar los exámenes de computación en el segundo intento

Práctica 2

- El coordinador de los exámenes del curso observó la siguiente matriz de probabilidades de transición:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

- Actualmente, hay 200 estudiantes que no aprobaron todos los exámenes en el primer intento. Además, hay 50 estudiantes que no aprobaron en el segundo intento. A largo plazo, ¿cuántos estudiantes estarán exentos del curso por aprobar los exámenes? ¿Cuántos de los 250 estudiantes requerirán tomar el curso de computación?

Matriz de transición

DE	A			
	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0.8	0	0.1	0.1
4	0.2	0.2	0.4	0.2

Matriz de transición

	A			
DE	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0.8	0	0.1	0.1
4	0.2	0.2	0.4	0.2

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Matriz de transición

DE	A			
	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0.8	0	0.1	0.1
4	0.2	0.2	0.4	0.2

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$F = (I - B)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.1 \\ -0.4 & 0.8 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.176 & 0.147 \\ 0.588 & 1.324 \end{bmatrix}$$

Matriz de transición

- Ahora multiplicamos la matriz F por la matriz A. Este paso se necesita para determinar cuántos estudiantes quedan exentos del curso y cuántos lo requieren.

$$FA = \begin{bmatrix} 1.176 & 0.147 \\ 0.588 & 1.324 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.971 & 0.029 \\ 0.735 & 0.265 \end{bmatrix}$$

Solución

- El último paso es multiplicar los resultados de la matriz FA por la matriz M, como sigue:

$$\begin{aligned} MFA &= \begin{pmatrix} 200 & 50 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0.971 & 0.029 \\ 0.735 & 0.265 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 231 & 19 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- El número de estudiantes que quedarán exentos del curso es de 231. El número de estudiantes que tendrán que tomar el curso es de 19

Control Estadístico de Calidad

Jonathan Fernández González

Introducción

Las organizaciones emplean tácticas de administración de la calidad. La administración de la calidad, o como es más común llamarla, el control de calidad (CC) es fundamental en toda la organización.

Una de las funciones más importantes de los gerentes es asegurar que su empresa pueda entregar un producto de calidad en el lugar correcto, en el momento correcto y al precio correcto.

¿Qué es la calidad?

Introducción

Hay quienes creen que un producto de alta calidad es más fuerte, durará más, es más pesado y, en general, es más durable que los demás productos.

En algunos casos, esta es una buena definición de un producto de calidad, aunque no siempre es así.

Introducción

La calidad de un producto o servicio es el grado en el que ese producto o servicio cumple con las especificaciones.

Cada vez con mayor frecuencia, las definiciones de calidad incluyen un énfasis adicional en cumplir las necesidades del cliente.

“Calidad es el grado en el cual un producto específico se ajusta a un diseño o especificación”.

H. L. Gilmore. “Product Conformance Cost”, *Quality Progress* (junio de 1974): 16.

“Calidad es la totalidad de las características de un bien o servicio que se apoya en su capacidad para satisfacer las necesidades establecidas o implicadas”.

Ross Johnson y William O. Winchell. *Production and Quality*. Milwaukee, WI: American Society of Quality Control, 1989, p. 2.

“Calidad es la adecuación para el uso”.

J. M. Juran, ed. *Quality Control Handbook,* 3a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1974, p. 2.

“La calidad está definida por el consumidor; el cliente quiere productos y servicios que, durante sus vidas útiles, cumplan con sus necesidades y expectativas a un costo que represente valor”.

Definición de Ford según la presentó William W. Scherkenbach. *Deming’s Road to Continual Improvement*. Knoxville, TN: SPC Press, 1991, p. 161.

“Aunque la calidad no se pueda definir, usted sabe lo que es”.

R. M. Pirsig. *Zen and the Art of Motorcycle Maintenance*. Nueva York: Bantam Books, 1974, p. 213.

Introducción

La administración de calidad total (TQM, por total quality management) se refiere a la importancia dada a la calidad que abarca a toda la organización, desde el proveedor hasta el cliente.

La TQM resalta un compromiso de la gerencia de guiar a toda la compañía hacia **la excelencia en todos los aspectos** del producto o servicio que sean importantes para el cliente.

Control estadístico de procesos

El control estadístico de procesos incluye establecer estándares, normas de supervisión, toma de mediciones, así como efectuar acciones correctivas, mientras se produce un bien o servicio.

Se examinan muestras de la salida del proceso; si están dentro de los límites aceptables, se permite que el proceso continúe.

Si caen fuera de ciertos intervalos especificados, el proceso se detiene y, por lo general, se localiza y elimina la causa asignable.

Control estadístico de procesos

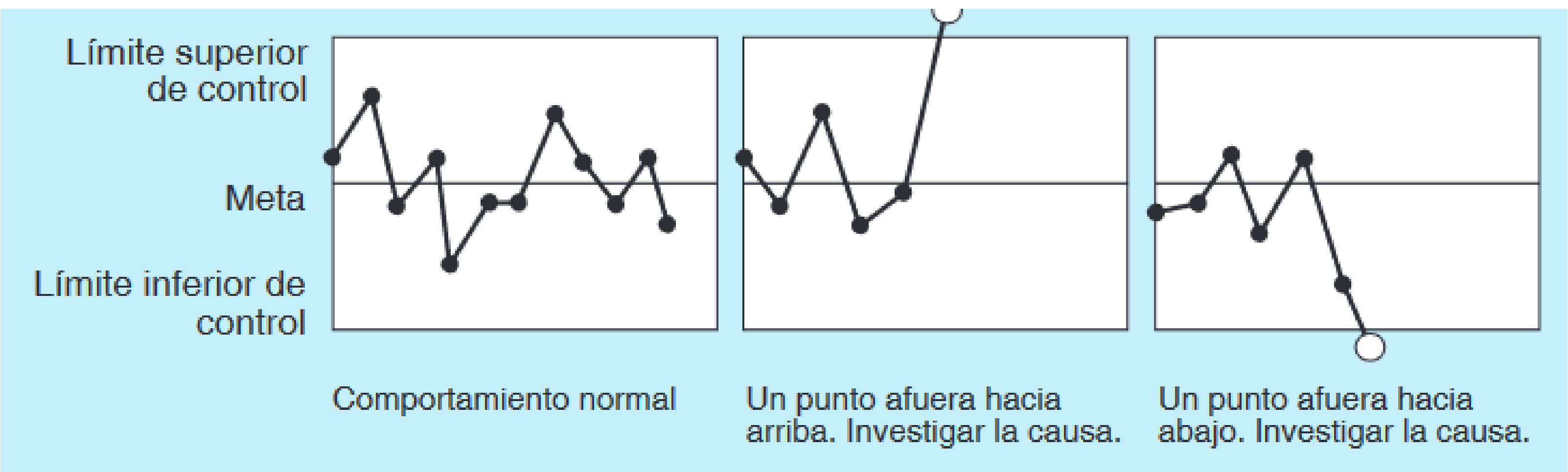
Las gráficas de control muestran los límites superior e inferior para el proceso que se quiere controlar.

Una gráfica de control es una presentación gráfica de los datos en el tiempo, y se elabora de manera que los datos nuevos puedan compararse rápidamente con el desempeño anterior.

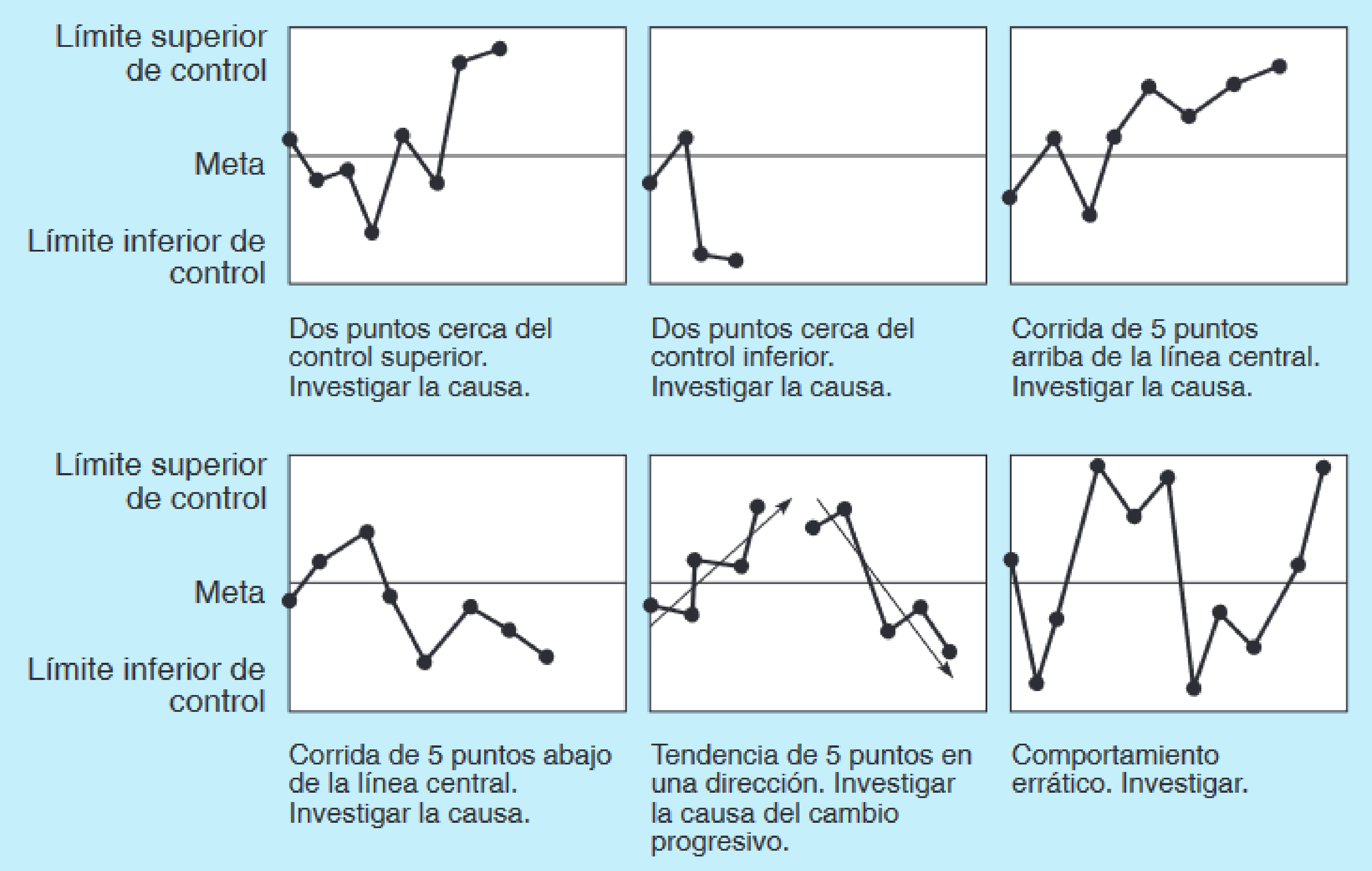
Se toman muestras de la salida de los procesos y se grafican los promedios de tales muestras en una gráfica que contiene los límites.

Control estadístico de procesos

Cuando los promedios de las muestras caen dentro de los límites de control superior e inferior y no hay patrón discernible alguno, se dice que el proceso está bajo control; de otra manera, el proceso está fuera de control o fuera de ajuste.



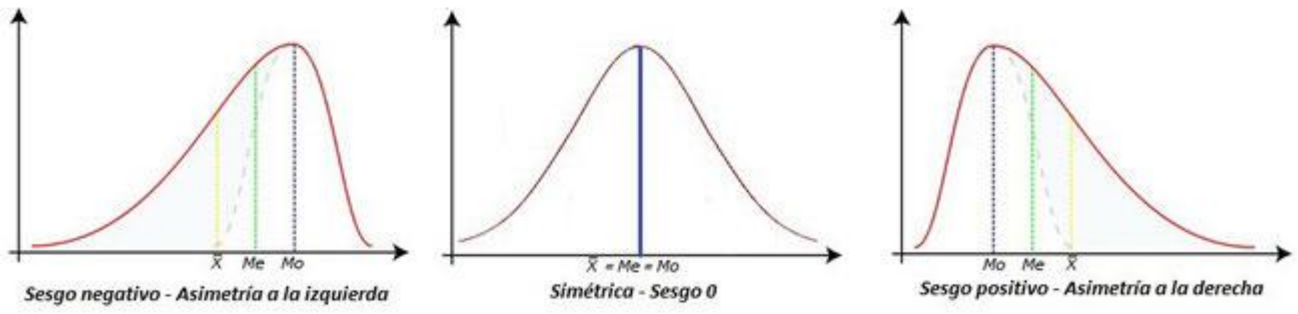
Control estadístico de procesos

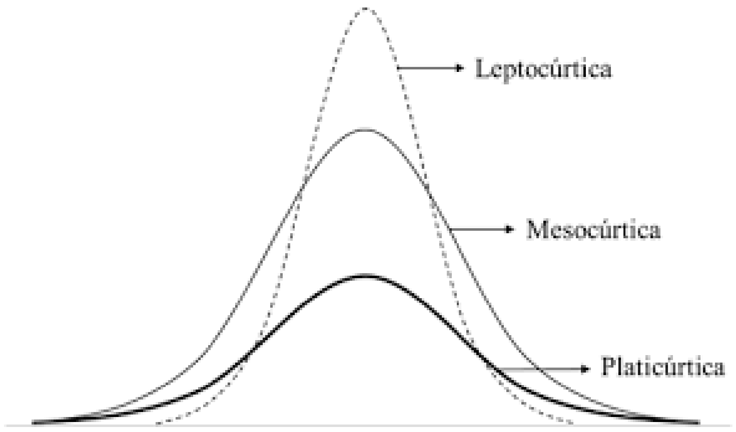


Variabilidad en el proceso

Todos los procesos están sujetos a cierto grado de variabilidad.

La clave es mantener las variaciones bajo control





ELABORACIÓN DE GRÁFICAS DE CONTROL

Cuando se elaboran gráficas de control, se utilizan promedios de muestras pequeñas (con frecuencia de cinco elementos o partes), en vez de los datos sobre las partes individuales.

Las piezas individuales tienden a ser muy erráticas para visualizar las tendencias con rapidez.

La finalidad de las gráficas de control es ayudar a distinguir entre la variación natural y las variaciones debidas a causas asignables.

VARIACIONES NATURALES

Las variaciones naturales afectan a casi todos los procesos de producción y deben esperarse. Estas variaciones son aleatorias e incontrolables.

Las variaciones naturales son las muchas fuentes de variación dentro de un proceso que está estadísticamente bajo control

VARIACIONES NATURALES

Aunque los valores medidos individuales son todos diferentes, como grupo forman un patrón que se puede describir como una distribución.

Cuando las distribuciones son normales, se caracterizan por dos parámetros:

1. Media, μ (la medida de tendencia central, en este caso, el valor promedio)
2. Desviación estándar, σ (variación, la cantidad por la que los valores pequeños difieren de los grandes)

Siempre que la distribución (precisión de la salida) permanezca dentro de los límites especificados,

se dice que el proceso está “bajo control” y se toleran variaciones modestas.

VARIACIONES ASIGNABLES

Cuando un proceso no está bajo control, debemos detectar y eliminar causas especiales (asignables) de la variación.

Estas variaciones no son aleatorias y pueden controlarse cuando se determina la causa de la variación.

Los factores como el desgaste de una máquina, un equipo mal ajustado, la fatiga o falta de capacitación en los trabajadores son todas fuentes potenciales de **variaciones asignables**

La habilidad de un proceso para operar dentro del control estadístico está determinada por la variación total que viene de causas naturales:

- La variación mínima que se puede lograr después de eliminar las causas asignables.

El objetivo de un sistema de control de procesos es, entonces, proporcionar una señal estadística cuando se presenten las causas asignables de variación.

La señal puede acelerar la acción adecuada para eliminar las causas asignables.

Gráficas de control para variables

Las gráficas de control para la media, $\overline{\boldsymbol{x}}$ y el rango, **R**, se usan para vigilar procesos que se miden en unidades continuas (peso, atura y volumen)

La gráfica $\overline{\boldsymbol{x}}$ (gráfica x-barra) nos indica si han ocurrido cambios en la tendencia central de un proceso.

Esto se puede deber a factores como desgaste de herramientas, un incremento gradual en la temperatura, un método diferente utilizado en el segundo turno o materiales nuevos más fuertes.

Gráficas de control para variables

Los valores de la gráfica **R** indican que ocurrió una ganancia o una pérdida en la uniformidad.

Dicho cambio puede deberse a cojinetes desgastados, una pieza mal ajustada en una herramienta, un flujo errático de lubricantes a una máquina o al descuido por parte del operario de una máquina.

Los dos tipos de gráficas van de la mano cuando se vigilan las variables.

Teorema del límite central

El fundamento estadístico para las gráficas $\overline{\boldsymbol{x}}$ es el teorema del límite central.

En términos generales, **este teorema establece que** sin importar la distribución de la población de todas las partes o los servicios, la **distribución de las $\overline{\boldsymbol{x}}$** (cada una de ellas es una media de una muestra extraída de la población) **tenderá a seguir una curva normal**, cuando el tamaño de la muestra sea grande.

Por fortuna, aun **cuando n sea bastante pequeña** (digamos, 4 o 5), la distribución de los promedios todavía seguirá aproximadamente una curva normal.

Teorema del límite central

El teorema también establece que:

1. La media de la distribución de las $\boldsymbol{\bar{x}}$ (denotada por $\mu_{\bar{x}}$) es igual a la media de toda la población (denotada por μ),
2. La desviación estándar de la distribución muestral, $\sigma_{\bar{x}}$, será la desviación de la población,σ_x , dividida entre la raíz cuadrada del tamaño de la muestra, n.

$$\mu_{\bar{x}} = \mu \quad \text{y} \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Aunque habría ocasiones en que conozcamos $\mu_{\bar{x}}$ (y μ), con frecuencia debemos estimarlas con el promedio de todas las medias muestrales (que se escribe $\bar{\bar{x}}$).

Teorema del límite central

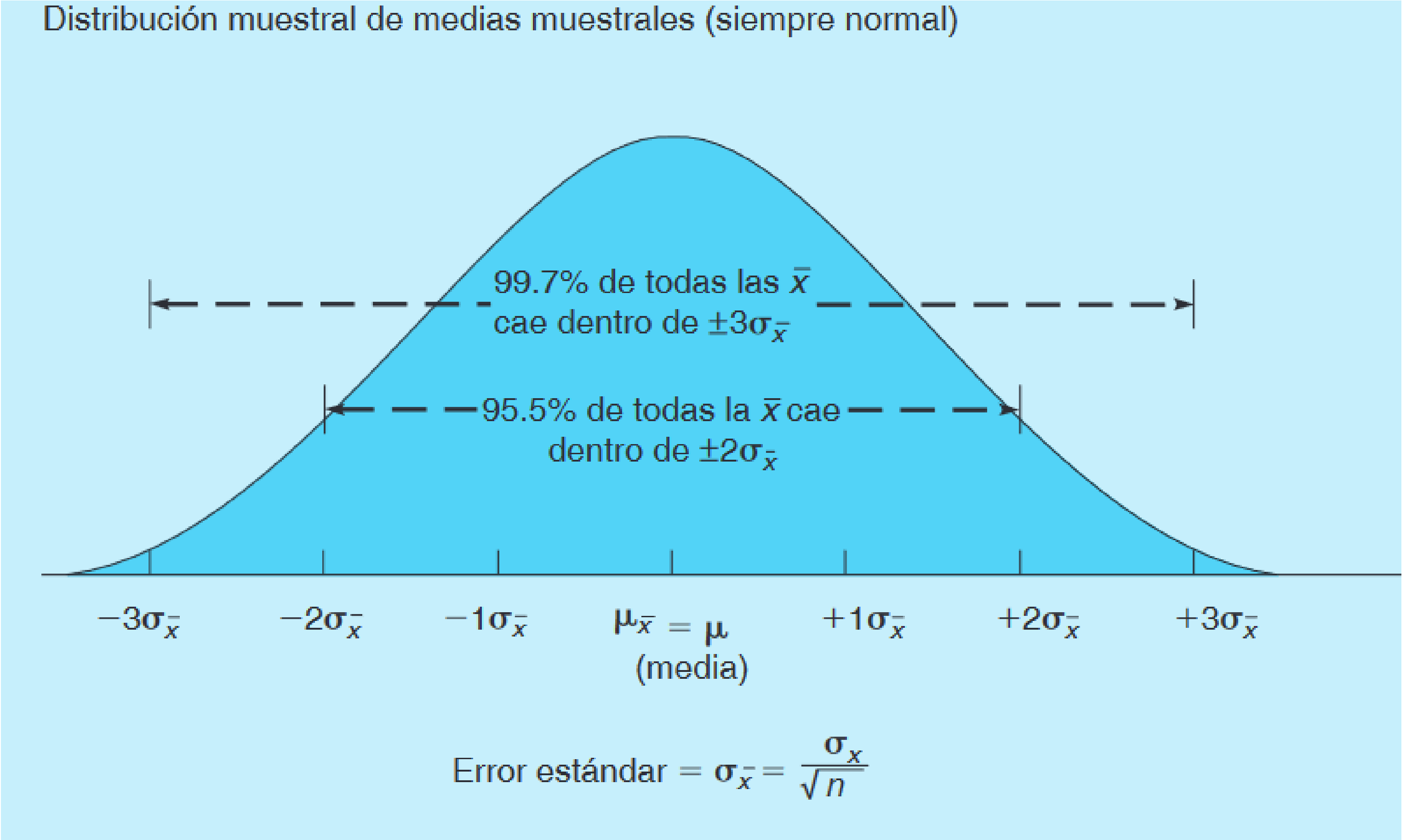
Al ser una distribución normal, podemos establecer que:

99.7% de las veces, los promedios muestrales caen dentro de $\pm 3\sigma_{\bar{x}}$ de la media de la población, si el proceso tiene solo variaciones aleatorias.

95.5% de las veces, los promedios muestrales caen dentro de $\pm 2\sigma_{\bar{x}}$ de la media de la población, el proceso tiene solo variaciones aleatorias.

Si un punto en la gráfica de control cae fuera de los límites de control $\pm 3\sigma_{\bar{x}}$, estamos 99.7% seguros de que el proceso ha cambiado. Esta es la teoría detrás de las gráficas de control.

Teorema del límite central



Establecimiento de límites en las gráficas $\bar{x}$

Si conocemos las desviación estándar a partir de datos históricos de la población del proceso, $\sigma_{\bar{x}}$, podemos establecer los límites de control superior e inferior con las fórmulas:

$$\text{Límite de control superior (LCS)} = \bar{\bar{x}} + z\sigma_{\bar{x}}$$

$$\text{Límite de control inferior (LCI)} = \bar{\bar{x}} - z\sigma_{\bar{x}}$$

$\bar{\bar{x}}$ = media de las medias muestrales

z = número de desviaciones estándar normales (2 para 95.5% de confianza, 3 para 99.7%)

$\sigma_{\bar{x}}$ = desviación estándar de la distribución muestral de medias muestrales $= \dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$

Ejemplo

$\overline{\overline{x}}$ = media de las medias muestrales

z = número de desviaciones estándar normales (2 para 95.5% de confianza, 3 para 99.7%)

$\sigma_{\overline{x}}$ = desviación estándar de la distribución muestral de medias muestrales $= \dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$

Un lote grande de producción de cajas de hojuelas de maíz se muestrea cada hora. Para establecer límites de control que incluyan 99.7% de las medias de las muestras, se seleccionan y pesan 36 cajas al azar. Se estima en 2 onzas la desviación estándar de la población total de cajas, mediante el análisis de registros anteriores.

La media promedio de todas las muestras tomadas es de 16 onzas.

$\overline{\overline{x}} =$

$z =$

$\sigma_{\overline{x}} =$

Ejemplo

$$\text{Límite de control superior (LCS)} = \bar{\bar{x}} + z\sigma_{\bar{x}}$$
$$\text{Límite de control inferior (LCI)} = \bar{\bar{x}} - z\sigma_{\bar{x}}$$

$$\text{Error estándar} = \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Un lote grande de producción de cajas de hojuelas de maíz se muestrea cada hora. Para establecer límites de control que incluyan 99.7% de las medias de las muestras, se seleccionan y pesan 36 cajas al azar. Se estima en 2 onzas la desviación estándar de la población total de cajas, mediante el análisis de registros anteriores.

La media promedio de todas las muestras tomadas es de 16 onzas.

$\bar{\bar{x}} =$

$z =$ tenemos $\bar{\bar{x}} = 16$ onzas, $\sigma_{\bar{x}} = 2$ onzas, $n = 36$ y $z = 3$

$\sigma_{\bar{x}} =$

Ejemplo

Un lote grande de producción de cajas de hojuelas de maíz se muestrea cada hora. Para establecer límites de control que incluyan 99.7% de las medias de las muestras, se seleccionan y pesan 36 cajas al azar. Se estima en 2 onzas la desviación estándar de la población total de cajas, mediante el análisis de registros anteriores.

La media promedio de todas las muestras tomadas es de 16 onzas.

tenemos $\bar{\bar{x}} = 16$ onzas, $\sigma_{\bar{x}} = 2$ onzas, $n = 36$ y $z = 3$

$$\text{LCS}_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + z\sigma_{\bar{x}} = 16 + 3\left(\frac{2}{\sqrt{36}}\right) = 16 + 1 = 17 \text{ onzas}$$

$$\text{LCI}_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - z\sigma_{\bar{x}} = 16 - 3\left(\frac{2}{\sqrt{36}}\right) = 16 - 1 = 15 \text{ onzas}$$

Establecimiento de límites en las gráficas $\bar{x}$

- Si no se dispone de las desviaciones estándar del proceso o si es difícil calcularlas, se aplican las siguientes ecuaciones. En la práctica, el cálculo de los límites de control se basa en el rango promedio más que en las desviaciones estándar.

$$\mathrm{LCS}_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R}$$
$$\mathrm{LCI}_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R}$$

$\bar{R}$ = promedio de las muestras

A_2 = valor encontrado en la tabla

$\bar{\bar{x}}$ = media de las medias muestrales

TAMAÑO DE MUESTRA, n	FACTOR MEDIO, A_2	RANGO SUPERIOR, D_4	RANGO INFERIOR, D_3
2	1.880	3.268	0
3	1.023	2.574	0
4	0.729	2.282	0
5	0.577	2.114	0
6	0.483	2.004	0
7	0.419	1.924	0.076
8	0.373	1.864	0.136
9	0.337	1.816	0.184
10	0.308	1.777	0.223
12	0.266	1.716	0.284
14	0.235	1.671	0.329
16	0.212	1.636	0.364
18	0.194	1.608	0.392
20	0.180	1.586	0.414
25	0.153	1.541	0.459

Fuente: Reimpreso con autorización de la American Society for Testing and Materials, copyright 1951. Tomado de Special Technical Publication 15-C, "Quality Control of Materials", pp. 63 y 72.

Ejemplo

$$LCS_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R}$$
$$LCI_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R}$$

$\bar{R}$ = promedio de las muestras

A_2 = valor encontrado en la tabla

$\bar{\bar{x}}$ = media de las medias muestrales

- Las botellas de gaseosa Súper Cola se etiquetan con "peso neto de 16 onzas". Se ha encontrado un promedio general del proceso de 16.01 onzas, tomando varios lotes de muestras, donde cada muestra contiene cinco botellas. El rango promedio del proceso es de 0.25 onzas. Queremos determinar los límites de control superior e inferior para los promedios de este proceso.

TAMAÑO DE MUESTRA, n	FACTOR MEDIO, A_2	RANGO SUPERIOR, D_4	RANGO INFERIOR, D_3
2	1.880	3.268	0
3	1.023	2.574	0
4	0.729	2.282	0
5	0.577	2.114	0
6			
7			
8			
9			
10			
12			
14			
16			
18			
20			
25			

$$\begin{aligned} LCS_{\bar{x}} &= \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R} \\ &= 16.01 + (0.577)(0.25) \\ &= 16.01 + 0.144 \\ &= 16.154 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} LCI_{\bar{x}} &= \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R} \\ &= 16.01 - 0.144 \\ &= 15.866 \end{aligned}$$

Fuente: Reimpreso con autorización de la American Society for Testing and Materials, copyright 1951.

Determinación de límites en la gráfica R

Acabamos de determinar los límites de control superior e inferior para el promedio del proceso.

Además de preocuparse por el promedio del proceso, los gerentes se interesan en la dispersión o variabilidad.

Aun cuando el promedio del proceso esté bajo control, su variabilidad puede no estarlo. Por ejemplo, quizás algo se aflojó en una pieza del equipo

Determinación de límites en la gráfica R

El promedio de las muestras puede seguir igual, pero la variación dentro de las muestras podría ser demasiado grande. Por tal razón, es muy común buscar **una gráfica de control para los rangos**, con la finalidad de supervisar la variabilidad del proceso. La teoría detrás de las gráficas de control para los rangos es la misma que para el promedio del proceso.

Determinación de límites en la gráfica R

Los límites se establecen de manera que contengan ± 3 desviaciones estándar de la distribución del rango promedio $\overline{R}$.

Con unas cuantas suposiciones para simplificar, podemos establecer los límites de control superior o inferior para los rangos

Determinación de límites en la gráfica R

$$LCS_R = D_4\overline{R}$$
$$LCI_R = D_3\overline{R}$$

LCS_R = límite superior de la gráfica de control para el rango
LCI_R = límite inferior de la gráfica de control para el rango
D_4 y D_3 = valores de la tabla

TAMAÑO DE MUESTRA, n	FACTOR MEDIO, A_2	RANGO SUPERIOR, D_4	RANGO INFERIOR, D_3
2	1.880	3.268	0
3	1.023	2.574	0
4	0.729	2.282	0
5	0.577	2.114	0
6	0.483	2.004	0
7	0.419	1.924	0.076
8	0.373	1.864	0.136
9	0.337	1.816	0.184
10	0.308	1.777	0.223
12	0.266	1.716	0.284
14	0.235	1.671	0.329
16	0.212	1.636	0.364
18	0.194	1.608	0.392
20	0.180	1.586	0.414
25	0.153	1.541	0.459

Fuente: Reimpreso con autorización de la American Society for Testing and Materials, copyright 1951. Tomado de Special Technical Publication 15-C, "Quality Control of Materials", pp. 63 y 72.

Ejemplo

Considere un proceso donde el rango promedio sea de 53 libras. Si el tamaño de la muestra es de 5, queremos determinar los límites de control superior e inferior en la gráfica.

TAMAÑO DE MUESTRA, n	FACTOR MEDIO, A_2	RANGO SUPERIOR, D_4	RANGO INFERIOR, D_3
2	1.880	3.268	0
3	1.023	2.574	0
4	0.729	2.282	0
5	0.577	2.114	0

$$\mathrm{LCS}_R = D_4\overline{R}$$
$$\mathrm{LCI}_R = D_3\overline{R}$$

LCS_R = límite superior de la gráfica de control para el rango

LCI_R = límite inferior de la gráfica de control para el rango

D_4 y D_3 = valores de la tabla

$$\begin{aligned}\mathrm{LCS}_R &= D_4\overline{R} \\ &= (2.114)(53 \text{ libras}) \\ &= 112.042 \text{ libras}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{LCI}_R &= D_3\overline{R} \\ &= (0)(53 \text{ libras}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Fuente: Reimpreso con autorización de la American Society for Testing and Materials, copyright 1951. Tomado de Special Technical Publication 15-C, "Quality Control of Materials", pp. 63 y 72.

Gráficas de control para atributos

Las gráficas de control para $\bar{x}$ y R no se aplican cuando se muestrean atributos, los cuales suelen clasificarse como defectuosos o no defectuosos.

Medir artículos defectuosos implica contarlos (número de las bombillas eléctricas malas en un lote dado, o número datos para registros que se ingresaron con errores)

Gráficas de control para atributos

Hay dos tipos de gráficas de control de atributos:

1. Las que miden el porcentaje de defectos en una muestra, llamadas graficas p

2. Las que cuentan el número de defectos, llamadas gráficas c

Gráficas p

Las gráficas p son el medio principal para controlar atributos.

Aunque los atributos de ser buenos o malos siguen una distribución binomial, se puede usar la distribución normal para calcular los límites de las gráficas p cuando el tamaño de la muestra es grande.

El procedimiento se parece al enfoque de las gráficas $\bar{x}$, el cual también está basado en el teorema del límite central

Gráficas p

$$\mathrm{LCS}_p = \overline{p} + z\sigma_p$$
$$\mathrm{LCI}_p = \overline{p} - z\sigma_p$$

donde

$\overline{p}$ = proporción media o fracción de defectuosos en una muestra

z = número de desviaciones estándar ($z = 2$ para límites de 95.5%; $z = 3$ para límites de 99.7%)

σ_p = desviación estándar de la distribución muestral

σ_p se estima por $\hat{\sigma}_p$, que es:

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{\overline{p}(1 - \overline{p})}{n}}$$

donde n es el tamaño de cada muestra.

Ejemplo

Con un paquete de software popular para bases de datos, los analistas ingresan diariamente miles de registros de seguros. Las muestras del trabajo de 20 analistas se indican en la siguiente tabla. **Cien registros** ingresados por cada uno se examinaron con cuidado para determinar si contenían errores; se calculó la fracción de defectos en cada muestra.

NÚMERO DE MUESTRA	NÚMERO DE ERRORES	FRACCIÓN DE DEFECTOS	NÚMERO DE MUESTRA	NÚMERO DE ERRORES	FRACCIÓN DE DEFECTOS
1	6	0.06	11	6	0.06
2	5	0.05	12	1	0.01
3	0	0.00	13	8	0.08
4	1	0.01	14	7	0.07
5	4	0.04	15	5	0.05
6	2	0.02	16	4	0.04
7	5	0.05	17	11	0.11
8	3	0.03	18	3	0.03
9	3	0.03	19	0	0.00
10	2	0.02	20	4	0.04
				80	

Ejemplo

Con un paquete de software popular para bases de datos, los analistas ingresan diariamente miles de registros de seguros. Las muestras del trabajo de 20 analistas se indican en la siguiente tabla. **Cien registros** ingresados por cada uno se examinaron con cuidado para determinar si contenían errores; se calculó la fracción de defectos en cada muestra.

Deseamos establecer límites de control que incluyan 99.7% de las variaciones aleatorias en el proceso de captura, cuando está bajo control.
Así, z = 3

NÚMERO DE MUESTRA	NÚMERO DE ERRORES	FRACCIÓN DE DEFECTOS	NÚMERO DE MUESTRA	NÚMERO DE ERRORES	FRACCIÓN DE DEFECTOS
1	6	0.06	11	6	0.06
2	5	0.05	12	1	0.01
3	0	0.00	13	8	0.08
4	1	0.01	14	7	0.07
5	4	0.04	15	5	0.05
6	2	0.02	16	4	0.04
7	5	0.05	17	11	0.11
8	3	0.03	18	3	0.03
9	3	0.03	19	0	0.00
10	2	0.02	20	4	0.04
				80	

Ejemplo

Con un paquete de software popular para bases de datos, los analistas ingresan diariamente miles de registros de seguros. Las muestras del trabajo de 20 analistas se indican en la siguiente tabla. **Cien registros** ingresados por cada uno se examinaron con cuidado para determinar si contenían errores; se calculó la fracción de defectos en cada muestra.

Deseamos establecer límites de control que incluyan 99.7% de las variaciones aleatorias en el proceso de captura, cuando está bajo control.

Así, z = 3

$$\overline{p} = \frac{\text{Número total de errores}}{\text{Número total de registros examinados}} = \frac{80}{(100)(20)} = 0.04$$

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{(0.04)(1-0.04)}{100}} = 0.02$$

(Nota: 100 es el tamaño de cada muestra = n)

$$LCS_p = \overline{p} + z\hat{\sigma}_p = 0.04 + 3(0.02) = 0.10$$

$$LCI_p = \overline{p} - z\hat{\sigma}_p = 0.04 - 3(0.02) = 0$$

(ya que no podemos tener porcentajes negativos de defectos)

Gráficas c

En el ejemplo presentado, contamos el número de registros defectuosos en la base de datos.

Un registro defectuoso es aquel que no es exactamente correcto. Sin embargo, un registro malo puede contener más de un defecto.

Usamos las gráficas c para controlar el número de defectos por unidad de salida (o por registro seguros, en este caso).

Gráficas c

Las gráficas de control para defectos ayudan a vigilar procesos en los cuales puede ocurrir un número grande de errores potenciales, pero el número real de que ocurran es relativamente pequeño.

La distribución de probabilidad de Poisson, cuya variancia es igual a su media, es la base de las gráficas c. Como $\bar{c}$ es el número medio de defectos por unidad, la desviación estándar es igual a $\sqrt{\bar{c}}$.

Para calcular límites de control de 99.7% para c, aplicamos la fórmula:

$$\bar{c} \pm 3\sqrt{\bar{c}}$$

EJEMPLO

Una empresa de transportes recibe varias quejas al día acerca del comportamiento de sus conductores.

En un periodo de 9 días (donde días es la unidad de medida), el dueño recibe el siguiente número de llamadas de pasajeros enfadados: 3, 0, 8, 9, 6, 7, 4, 9, 8, con un total de 54 quejas.

Para calcular los límites de control de 99.7%, tomamos:

$$\bar{c} \pm 3\sqrt{\bar{c}}$$

EJEMPLO

Una empresa de transportes recibe varias quejas al día acerca del comportamiento de sus conductores.

En un periodo de 9 días (donde días es la unidad de medida), el dueño recibe el siguiente número de llamadas de pasajeros enfadados: 3, 0, 8, 9, 6, 7, 4, 9, 8, con un total de 54 quejas.

Para calcular los límites de control de 99.7%, tomamos:

$$\bar{c} = \frac{54}{9} = 6 \text{ quejas por día}$$

Entonces,

$$\text{LCS}_c = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} = 6 + 3\sqrt{6} = 6 + 3(2.45) = 13.35$$

$$\text{LCI}_c = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} = 6 - 3\sqrt{6} = 6 - 3(2.45) = 0$$

(porque no puede haber un límite de control negativo)