



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
Universidade Federal de Ouro Preto  
Escola de Minas – Departamento de Engenharia Civil  
Curso de Graduação em Engenharia Civil

---



Felipe Rodrigues Vieira Souza

Implementação Computacional do Método da Rigidez Direta para Análise de Sistemas  
Estruturais Planos

Ouro Preto

2017

Felipe Rodrigues Vieira Souza

Implementação Computacional do Método da Rigidez Direta para Análise de Sistemas  
Estruturais Planos

Monografia apresentada ao Curso de  
Engenharia Civil da Universidade Federal de  
Ouro Preto como parte dos requisitos para a  
obtenção do Grau de Engenheiro Civil

Área de concentração: Estruturas

Orientadora: Profa. Andréa Regina Dias da Silva (D.Sc.)

Ouro Preto  
2017

S729i

Souza, Felipe Rodrigues Vieira.

Implementação computacional do método da rigidez direta para análise de sistemas estruturais planos [manuscrito] / Felipe Rodrigues Vieira Souza. - 2017.

52f.:

Orientador: Prof. Dr. Andréa Regina Dias da Silva.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil.

1. Método da Rigidez Direta. 2. Método dos Deslocamentos. 3. Análise Estrutural. I. Silva, Andréa Regina Dias da. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

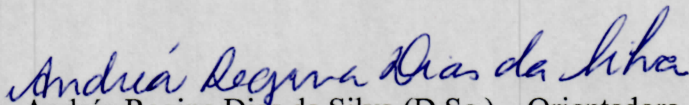
CDU: 624

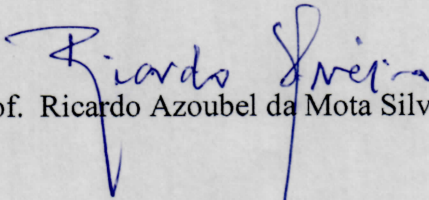
Catálogo: [ficha@sisbin.ufop.br](mailto:ficha@sisbin.ufop.br)

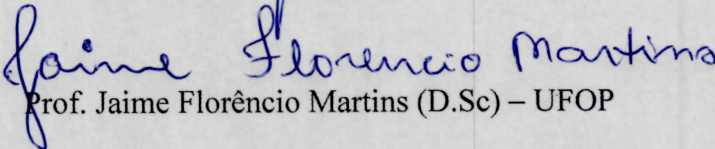
Felipe Rodrigues Vieira Souza

Implementação Computacional do Método da Rigidez Direta para Análise de Sistemas  
Estruturais Planos

Monografia de conclusão de curso para  
obtenção do Grau de Engenheiro Civil na  
Universidade Federal de Ouro Preto, defendida  
e aprovada em 31 de Março de 2017, pela banca  
examinadora constituída pelos professores:

  
Profa. Andréa Regina Dias da Silva (D.Sc.) – Orientadora – UFOP

  
Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira (D.Sc.) – UFOP

  
Prof. Jaime Florêncio Martins (D.Sc.) – UFOP

## **RESUMO**

Neste trabalho, é apresentado o Método da Rigidez Direta (Método dos Deslocamentos) em termos da sua formulação matricial e sua implementação computacional para sistemas estruturais planos. O Método da Rigidez Direta é largamente utilizado por softwares de engenharia estrutural, sendo um dos maiores métodos de análise estrutural utilizado mundialmente. Conceitos fundamentais, tais como, rigidez de elemento, matriz de rotação de elemento, ações de solicitação externas, descontinuidade axial, cisalhante e à rotação, reações de apoio e esforços de extremidade, além da metodologia da formulação matricial do método são abordados. Particularmente neste trabalho, o programa computacional desenvolvido é capaz de modelar e analisar sistemas estruturais planos, contendo diferentes propriedades geométricas e físicas, e oferecendo possibilidade de carregamento pontual, uniforme distribuído, triangular e devido à variação de temperatura. Há também a opção de modelação de descontinuidades e recalques de apoio. O programa computacional será validado com software de análise estrutural comumente utilizado no meio acadêmico e profissional através da sua aplicação à solução de problemas que abordem as funcionalidades implementadas.

Palavras-chave: Método da Rigidez Direta. Método dos Deslocamentos. Análise Estrutural.

## **ABSTRACT**

This work is the Direct Stiffness Method (Displacement Method) in terms of its matrix formulation and its computational implementation for structural systems. The Direct Stiffness Method is widely used by structural engineering software, being one of the largest methods of structural analysis. It is approached in the work concepts and methodology of the method's formulation, such as concepts of element stiffness, element rotation matrix, external loads, axial discontinuity, shear and rotating, support reactions and element end forces. Particularly in this work, the developed computer program is capable of modeling and analyzing structural systems, offering possibility of punctual loading, distributed uniform, triangular and due to temperature variation. As well, a modeling of discontinuities and settlement of support. The computational program will be validated with structural analysis software commonly used in academic and professional environments through problems that test the implemented tools.

**Keywords:** Direct Stiffness Method. Displacement Method. Structural analysis.

# Sumário

Capítulo 1 .....	7
1.1 Introdução .....	7
1.2 Objetivo .....	8
1.3 Organização do Trabalho .....	8
Capítulo 2 .....	10
2.1 Engenharia Estrutural .....	10
2.2 Análise Estrutural .....	11
2.3 Resumo histórico do Método da Rigidez Direta .....	11
2.4 Método da Rigidez Direta .....	12
Capítulo 3 .....	14
3.1 Rigidez de um elemento .....	14
3.2 Matriz de rotação <b>R</b> .....	16
3.3 Sistema de equações de equilíbrio .....	18
3.4 Ações nodais e ações de engastamento perfeito .....	20
3.5 Alocação da matriz de rigidez global e resolução do sistema de equações .....	22
3.6 Descontinuidades (Axial, Cisalhante e Rotação) .....	24
3.7 Reações de apoio .....	25
3.8 Esforços de extremidade de elemento .....	26
3.9 Recalque de apoio .....	27
3.10 Fluxograma das rotinas do programa .....	28
Capítulo 4 .....	30
4.1 Introdução .....	30
4.2 Problema 1 .....	30
4.3 Problema 2 .....	35
4.4 Problema 3 .....	42

Capítulo 5 .....	48
Referências .....	50
Anexo .....	51



# Capítulo 1

## Introdução e Objetivo

### 1.1 Introdução

Neste trabalho de conclusão de curso, visa-se o desenvolvimento de um programa computacional de análise de sistemas estruturais reticulados planos de edifícios, baseado no Método da Rigidez Direta, utilizando a linguagem computacional de programação *Fortran* (CHAPMAN, 2003). A validação de resultados obtidos nas análises desenvolvidas será feita utilizando o software FTOOL desenvolvido por pesquisadores da PUC-Rio (MARTHA, 2012).

Referente ao Método da Rigidez Direta, objetiva-se a compreensão da formulação do método e, sobretudo, sua implementação computacional, uma vez que, esse método é utilizado na elaboração de softwares de análise estrutural no mercado. Para alcançar esse objetivo, fundamentos importantes, tais como, conceitos de rigidez de elemento estrutural, diagramas de esforços internos, deslocamentos nodais da estrutura, diferentes tipos de carregamentos externos, Método das Forças, Princípio dos Trabalhos Virtuais, relações de transformação de eixos, técnicas de resolução de sistemas de equações, descontinuidades ou articulações de extremidade de elemento, diferentes condições de contorno, e efeitos de recalque de apoio foram estudados.

Por último, e não menos importante, referente à linguagem computacional *Fortran* utilizada para desenvolvimento do programa computacional e à utilização de pacotes comerciais para validação dos resultados obtidos, objetiva-se a compressão da linguagem computacional largamente utilizada na engenharia, possibilitando o desenvolvimento dos algoritmos necessários para o programa computacional de análise estrutural e sua futura expansão, como também o uso de softwares de análise estrutural regularmente utilizado pelo na academia e mercado como o FTOOL para validação dos resultados obtidos.

## 1.2 Objetivo

Objetiva-se neste trabalho de conclusão de curso estudar e implementar estratégias computacionais voltadas para a análise de estruturas reticuladas planas. Especificamente, será estudado o Método da Rigidez Direta (dos Deslocamentos), e a sua implementação computacional será desenvolvida em linguagem computacional *Fortran*. O programa se limitará à realização de análises física e geometricamente lineares devendo, porém disponibilizar ao usuário ferramentas que facilitem a modelagem de sistemas estruturais complexos, entre as quais citam-se: diferentes carregamentos (uniformemente distribuídos, triangulares, trem de cargas concentradas e variação de temperatura), diversos tipos de seções transversais (retangulares, circulares, tubulares, entre outras), simulação de descontinuidades de deslocamentos (liberação de deslocamento axial, transversal, e de rotação) e recalque de apoio. Em resumo, o trabalho de conclusão de curso deverá abordar os seguintes tópicos específicos:

1. Estudo do Método da Rigidez Direta (dos deslocamentos) para sistemas estruturais reticulados planos;
2. Estudo da linguagem de programação *Fortran*;
3. Desenvolvimento de programa computacional em *Fortran* para a análise de sistemas reticulados planos via Método da Rigidez Direta;
4. Validação de programa desenvolvido via comparação de resultados obtidos com os pacotes comerciais, no caso utilizado FTOOL, disponíveis na instituição.

## 1.3 Organização do Trabalho

Este trabalho de conclusão de curso é constituído por cinco capítulos e um anexo. Os fundamentos teóricos necessários para um melhor entendimento do Método da Rigidez Direta e sua implementação computacional para análise de sistemas estruturais planos, e a validação da metodologia adotada nas análises serão apresentados ao longo deste trabalho.

Inicialmente, no Capítulo 2, apresentam-se revisões bibliográficas acerca dos conceitos abordados neste trabalho, como definições e fundamentos da engenharia estrutural, análise estrutural, resumo histórico do Método da Rigidez Direta e detalhes do método.

Serão destacados, no Capítulo 3, aspectos específicos da metodologia utilizada para a implementação computacional do Método da Rigidez Direta, em que são detalhados os conceitos de rigidez de um elemento, matriz de rotação, sistemas de equações de equilíbrio, ações nodais e ações de engastamento perfeito, alocação da matriz de rigidez global e resolução do sistema de equações, descontinuidades de extremidade de elemento, reações de apoio, esforços de extremidade e o fluxograma do programa desenvolvido.

No Capítulos 4, serão abordadas as aplicações utilizando-se o programa desenvolvido e comparando resultados obtidos com o software FTOOL, com o intuito de validar o trabalho desenvolvido. Ao todo serão feitas três aplicações. No Capítulo 5, faz-se a conclusão e a discussão dos resultados obtidos, sugerindo-se melhorias e aperfeiçoamentos futuros do trabalho.

Por fim, no Anexo, serão apresentados os arquivos de entrada e saídas dos exemplos de aplicação do Capítulo 4 utilizados pelo programa desenvolvido.

# Capítulo 2

## Revisão Bibliográfica

### 2.1 Engenharia Estrutural

A engenharia estrutural é uma área de especialização da engenharia que trata do planejamento, projeto, construção e manutenção de sistemas estruturais. Estrutura é interpretada como a parte da edificação que resiste às ações externas e as transmite ao solo, devendo ainda ser durável e garantir o conforto do usuário. Uma estrutura é formada por elementos estruturais como pilares, vigas, lajes, entre outros, que possuem geralmente uma ou duas dimensões preponderantes. Nesse contexto, uma estrutura pode ser definida como um conjunto de elementos estruturais cuja função é atender às demandas de projeto (MARTHA, 2010).

A engenharia estrutural está ligada ao desenvolvimento de formulações teóricas e empíricas que expliquem os fenômenos físicos ocorridos nas estruturas, ou seja, a resposta do sistema estrutural às ações externas. Essa área naturalmente também envolve pesquisas com materiais empregados na construção desses sistemas. Desse modo, os engenheiros se deparam com problemas matemáticos complexos, os quais, mesmo após a consideração de hipóteses simplificadoras, podem levar a um grande número de equações para a descrição de situações práticas de projeto, sendo impraticável sua resolução por processos analíticos manuais.

No início da década de 1960, o computador começou a ser utilizado para cálculos de engenharia, e nas décadas procedentes sua utilização tornou-se comum (MARTHA, 2010). Na verdade, o uso do computador possibilita a realização de um número grande de operações aritméticas em pouco tempo, e assim a obtenção da resposta satisfatória de um sistema estrutural qualquer.

## 2.2 Análise Estrutural

A análise estrutural é uma das etapas fundamentais no desenvolvimento de um projeto estrutural, onde se prevê o comportamento do sistema diante das ações solicitantes (solicitações externas). Sua finalidade é obter deslocamentos, esforços e tensões, com o objetivo de dimensionar a estrutura.

Neste trabalho, são consideradas apenas estruturas reticuladas, que se caracterizam por elementos que tem uma dimensão preponderante em relação às demais (SORIANO, 2005). Basicamente, o sistema estrutural é composto por nós e elementos, onde os nós são formados pelo encontro de elementos. Particularmente serão consideradas estruturas planas, de modo que as forças aplicadas atuam em um plano que contenha um dos eixos principais da seção.

Dentre os métodos existentes para obtenção de deslocamentos e esforços em estruturas reticuladas, destacam-se, o Método das Forças (Método da Flexibilidade) e o Método dos Deslocamentos (Método da Rigidez Direta). A formulação matricial do Método da Rigidez Direta é especialmente conveniente para a implementação computacional, pois sua formulação é direcionada para isso.

## 2.3 Resumo histórico do Método da Rigidez Direta

O contexto histórico do Método da Rigidez Direta nasceu no campo da aeronáutica, com a necessidade de desenvolver aviões capazes de voar em alta velocidade e com baixo coeficiente de arrasto. Como também, nesse contexto, as duas grandes guerras mundiais WWI (1914-1918) e WWII (1939-1945) contribuíram, de modo que as grandes nações como Estados Unidos, Reino Unido e Alemanha poderiam realizar aprimoramentos em seus aviões de guerra, deixando-os mais resistentes, velozes e seguros (FELIPPA, 2000).

De modo a descrever sobre a história do método, é preciso primeiramente que se faça uma retrospectiva da história da análise matricial e do contexto histórico que precedeu a sua criação. No artigo “*A Historical Outline of Matrix Structural Analysis: A Play in Three Acts*”, Collar e Duncan, que trabalhavam no Departamento de Aerodinâmica do Laboratório Nacional de Física do Reino Unido, deram início em 1930 à definição de conceitos importantes como rigidez,

flexibilidade e matrizes dinâmicas. A partir desse momento, tanto o Método das Forças como o Método dos Deslocamentos se destacavam entre as duas melhores soluções para os engenheiros, não havendo um consenso de qual método era mais eficiente à aplicação computacional limitada da época (FELIPPA, 2000).

Entre 1938 e 1954, não houve grandes avanços, sendo conhecido como o “período do silêncio”, principalmente devido às grandes guerras mundiais. Contudo, somente em 1954, no artigo “*Energy Theorems and Structural Analysis*” (ARGYRIS e KELSEY, 1954) foi apresentado uma formulação unificada do Método das Forças e do Método dos Deslocamentos, baseando-se no teorema da energia, o que contribuiu para aplicações práticas dos métodos, que no futuro seria usado para formular o Método da Rigidez Direta (FELIPPA, 2000).

No artigo “*The direct stiffness method of structural analysis*” (TURNER, 1959), foi apresentado o primeiro trabalho sobre o Método da Rigidez Direta enquanto, o autor Turner, trabalhava na empresa Boeing na Alemanha. Foi feita uma combinação entre os Métodos da Força e do Método dos Deslocamentos, sendo o primeiro uma ferramenta para se obter os coeficientes de rigidez da estrutura. Esse método demonstrou ser simples, de fácil aplicação e de formulação elegante, conquistando vários engenheiros e contribuindo bastante para o aprimoramento do Método dos Elementos Finitos – *Finite Element Method*, FEM (SORIANO, 2009). Várias empresas, engenheiros e acadêmicos difundiram o método através de seus meios de influência, como também universidades como Berkeley e Washington University começaram a lecionar o Método da Rigidez Direta para seus alunos de graduação e mestrado (FELIPPA, 2000).

## 2.4 Método da Rigidez Direta

O Método da Rigidez Direta segundo o livro “Análise de Estruturas – Formulação Matricial e Implementação Computacional” (SORIANO, 2005) basicamente utiliza como incógnitas primárias deslocamentos adequadamente escolhidos, que são os graus de liberdade da estrutura, diferenciando-se assim do Método das Forças em que as incógnitas são esforços produzidos pela “quebra” de restrições da estrutura hiperestática, de modo a torná-la isostática.

O Método da Rigidez Direta é formulado em torno do equilíbrio de cada nó de um modelo em função de seus deslocamentos. Assim, os deslocamentos são as incógnitas do método. O sistema de equações algébricas compacto do Método da Rigidez Direta é:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez da estrutura,  $\mathbf{f}$  o vetor de cargas nodais e  $\mathbf{u}$  vetor de deslocamentos nodais.

Os tipos de estruturas reticuladas e respectivos graus de liberdade de seus elementos são indicados na Tabela 1. A simbologia  $\mu$  é utilizada para deslocamentos e  $\theta$  para rotações em relação ao sistema cartesiano de referência.

Tabela 1 – Tipos de estruturas reticuladas

<b>Tipo de Estrutura Reticulada</b>	<b>Número de graus de liberdade por nó</b>	<b>Graus de liberdade</b>
<b>Treliça Plana</b>	2	$\mu_1$ e $\mu_2$
<b>Treliça Espacial</b>	3	$\mu_1, \mu_2$ e $\mu_3$
<b>Pórtico Plano</b>	3	$\mu_1, \mu_2$ e $\theta_3$
<b>Grelha</b>	3	$\mu_3, \theta_1$ e $\theta_2$
<b>Pórtico Espacial</b>	6	$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \theta_1, \theta_2$ e $\theta_3$

# Capítulo 3

## Metodologia

### 3.1 Rigidez de um elemento

Define-se a rigidez de elemento,  $k_{ij}^{(e)}$ , como a ação que surge na direção do  $i$ -ésimo grau de liberdade devido ao deslocamento genérico  $u_j$ . Como exemplo, as Figuras 1 e 2 exemplificam as rigidezes do elemento quando é aplicado uma rotação unitária na direção 6.

Em relação às simbologias encontrada na Figura 1,  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  representam os eixos coordenados globais;  $X'_1$ ,  $X'_2$  e  $X'_3$  representam os eixos coordenados locais de cada elemento;  $u_6$  representa o deslocamento unitário (ou rotação) aplicado na direção do grau de liberdade número 6, porém, é necessário deixar claro que a escolha desse deslocamento unitário é apenas para fins de exemplificação, podendo ser em qualquer grau de liberdade do elemento (direções 1,2,3,4,5 e 6). Já na Figura 2,  $k_{ij}$  representa a rigidez de elemento na direção do grau de liberdade  $(i)$ , devido ao deslocamento  $(j)$ ; e, por fim,  $k'$  é a rigidez correspondente ao sistema de eixos locais.

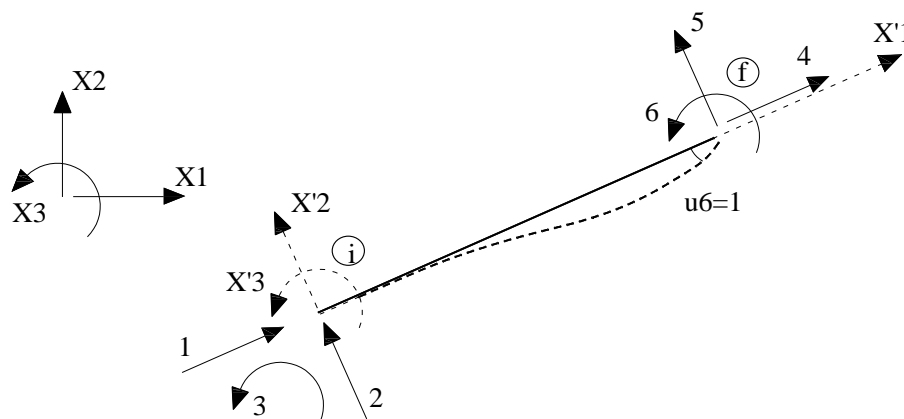


Figura 1 – Elemento submetido à rotação unitária na extremidade direita



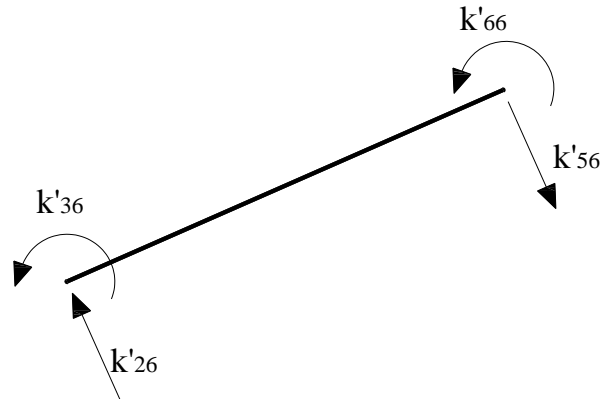


Figura 2 – Rigidezes devido à rotação unitária da Figura 1

Tendo em vista um elemento de um pórtico plano, sabendo-se o elemento possui seis graus de liberdade, e aplicando um deslocamento unitário para cada um, é possível construir a matriz de rigidez do elemento  $k_{ij}^{(e)}$ . Impondo-se deslocamentos unitários segundo cada um dos referidos deslocamentos, enquanto todos os demais são nulos, pode-se obter através do Método das Forças (MARTHA, 2010) os coeficientes de rigidez do elemento, como as Figuras 3, 4 e 5.

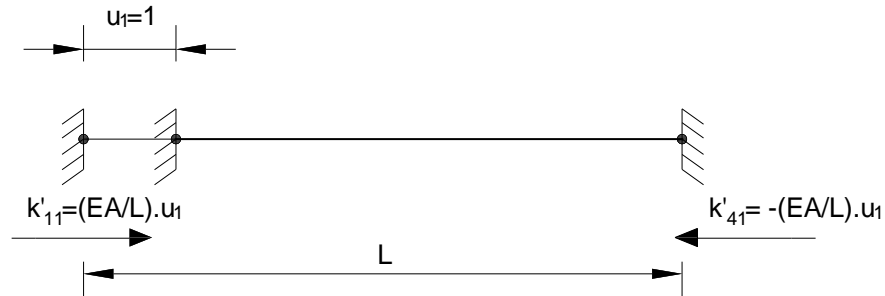


Figura 3 – Rigidezes devido deslocamento unitário no grau de liberdade 1

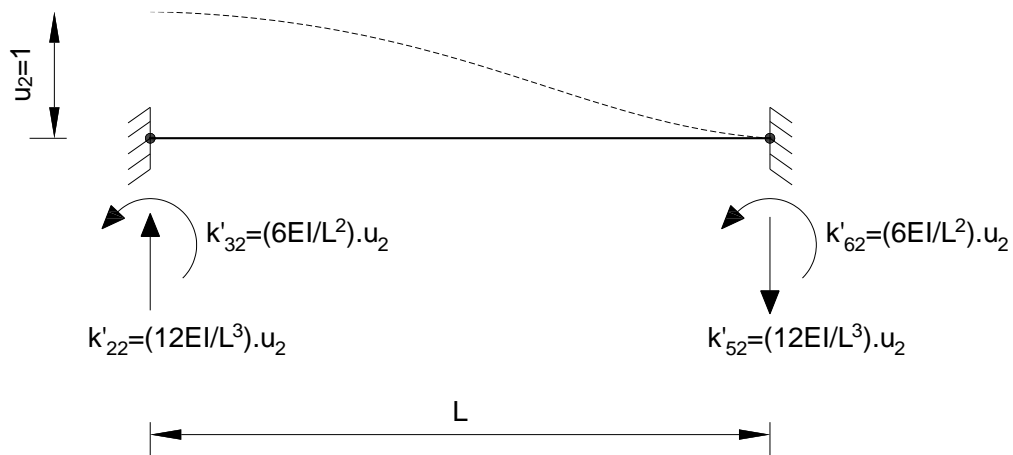


Figura 4 – Rigidezes devido deslocamento unitário no grau de liberdade 2

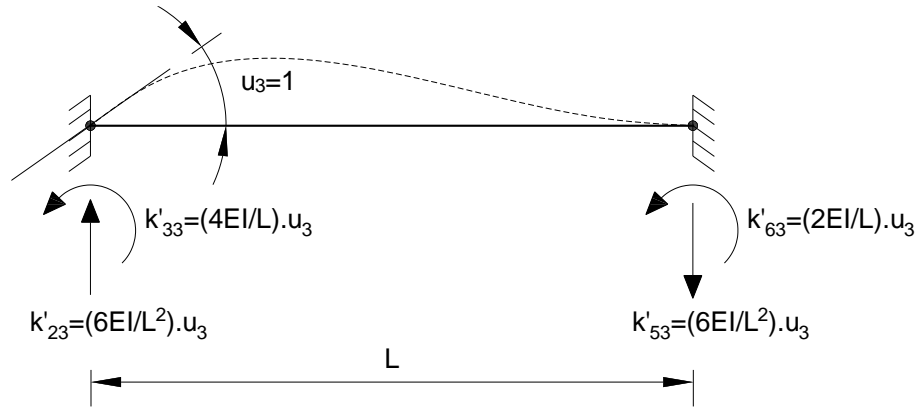


Figura 5 – Rigidezes devido deslocamento unitário no grau de liberdade 3

Desse modo, aplicando-se o método das forças para cada grau de liberdade, é possível obter os coeficientes da matriz de rigidez de elemento abaixo, considerando apenas efeitos à flexão e axial:

$$\mathbf{k}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \cdot & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \cdot & \cdot & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (2)$$

### 3.2 Matriz de rotação R

A formulação do Método da Rigidez Direta trabalha com dois eixos de referência, eixo local e global, como ilustra a Figura 6. O eixo local de cada elemento estabelece as variáveis referenciadas com o eixo centroidal e com os eixos principais de inércia de cada elemento, ou seja, todo elemento tem seu próprio eixo de referência local próprio. Já o eixo global da estrutura, tem o objetivo de referenciar todas as variáveis em somente um eixo de referência. Essa estratégia é utilizada para facilitar a transformação de informações que estão referenciadas de um tipo de eixo para outro.

A matriz de rotação fornece condições de transformar variáveis referenciadas no eixo local para o eixo global da estrutura, e vice-versa. Essa matriz é construída através das coordenadas dos nós fornecidas inicialmente ao programa, na sub-rotina de entrada denominada *input*, neste trabalho, e através desses valores, é possível referenciar o elemento em relação ao eixo global da estrutura. Para pórticos planos (número de grau de liberdade igual a 3 por nó), tem-se:

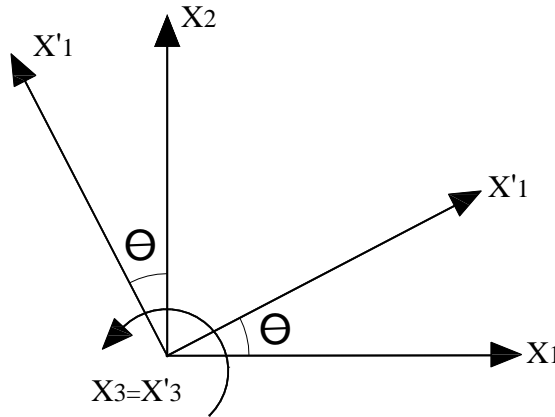


Figura 6 – Eixos local e global

Utilizando-se a representação gráfica da Figura 6, é possível construir a matriz de rotação do elemento. Vale ressaltar que, cada elemento possui uma matriz de rotação. O eixo centroidal do elemento é representado pelo eixo  $X'_1$ , e os eixos principais de inércia do elemento são representados pelos eixos  $X'_2$  e  $X'_3$ . Logo, a partir das coordenadas dos nós do elemento, tem-se:

$$\mathbf{R}^{(e)} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix}, \text{ onde } \lambda_{ij} = \cos(X'_i; X_j) \quad (3)$$

na qual  $X_j$  representa os eixos globais da estrutura,  $L_e$  é o comprimento de elemento,  $\lambda_{11} = \cos(X'_1; X_1) = \cos \theta$ ;  $\lambda_{12} = \cos(X'_1; X_2) = \sin \theta$ ;  $\lambda_{21} = -\lambda_{21}$ ;  $\lambda_{22} = \lambda_{11}$ ;  $\lambda_{13} = \lambda_{31} = \lambda_{23} = \lambda_{32} = 0$ ;  $\lambda_{33} = \cos(0^\circ) = 1$

Logo  $\mathbf{R}$  é:

$$\mathbf{R}^{(e)} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Aplicando-se o conceito apresentado da transformação de eixos, segue as seguintes relações para transformar variáveis definidas no sistema de eixo local para o global, e vice-versa:

1. Transformação de vetores

a) Eixo local para global:  $\mathbf{f} = \mathbf{R}^T \mathbf{f}'$  (5)

b) Eixo global para local:  $\mathbf{f}' = \mathbf{R} \mathbf{f}$  (6)

2. Transformação de matrizes

a) Eixo local para global:  $\mathbf{k}_{ij}^{(e)} = \mathbf{R}^T \mathbf{k}'_{ij} \mathbf{R}$  (7)

b) Eixo global para local:  $\mathbf{k}'_{ij} = \mathbf{R} \mathbf{k}_{ij}^{(e)} \mathbf{R}^T$  (8)

### 3.3 Sistema de equações de equilíbrio

Seja um sistema estrutural qualquer, com  $n$  elementos e  $n$  nós como ilustra a Figura 7, a seguir.

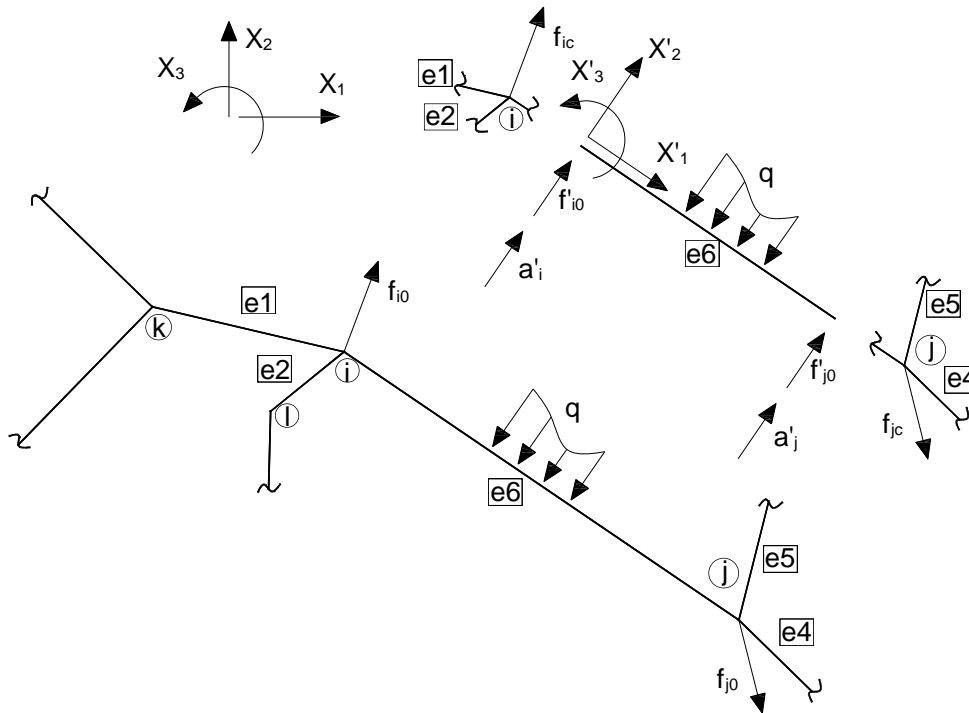


Figura 7 – Sistema estrutural genérico

Nessa figura,  $f_{i0}, f_{j0}$  representam ações de engastamento perfeito associadas ao carregamento externo,  $a'_i, a'_j$  ações (locais) de extremidade de elemento em função de sua deformação, e por fim  $f_{ic}, f_{jc}$  ações nodais concentradas nos nós associados ao carregamento externo.

Na representação da Figura 7 há um sistema estrutural qualquer genérico, em que a obtenção do sistema global de equações do Método da Rigidez Direta se dá por meio da imposição da condição de equilíbrio em todos os nós do modelo. Como exemplo, na Figura 8 temos o nó “i” da estrutura genérica. Logo, aplicando a condição de equilíbrio para o nó (i) genérico, pode-se escrever:

$$f_{ic} - \sum_{j=1}^{nei} f_{i0}^{(eji)} - \sum_{j=1}^{nei} a'_i{}^{(eji)} = 0 \quad (9)$$

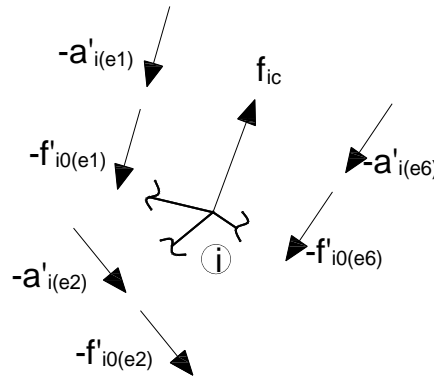


Figura 8 – Equilíbrio Nodal

na qual  $nei$  é o número de elementos que concorrem no nó (i);  $e_{ji}$  a numeração do  $j$ -ésimo elemento que concorre no nó (i).

Para as conectividades do nó i (elementos 1, 2 e 6), representados na Figura 8, tem-se:

$$\sum_{j=1}^{nei} a'_i{}^{(ej)} = a'_i{}^{(e1)} + a'_i{}^{(e2)} + a'_i{}^{(e6)} = k_{ik}^{(e1)} u_k^{(e1)} + k_{ii}^{(e1)} u_i^{(e1)} + k_{ii}^{(e2)} u_i^{(e2)} + k_{ii}^{(e2)} u_i^{(e2)} + k_{ii}^{(e6)} u_i^{(e6)} + k_{ij}^{(e6)} u_j^{(e6)} = f_{ic} - [f_{i0}^{(e1)} + f_{i0}^{(e2)} + f_{i0}^{(e6)}]$$

Logo, admitindo-se que o nó seja rígido, as equações de equilíbrio são:

$$\mathbf{K}_{ii} = \sum_{j=1}^{nei} \mathbf{k}_{ij}^{(eji)} \quad (10)$$

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_{ic} - \sum_{j=1}^{nei} \mathbf{f}_{i0}^{(eji)} \sum_{j=1}^{nei} \mathbf{k}_{ij}^{(eji)} \quad (11)$$

### 3.4 Ações nodais e ações de engastamento perfeito

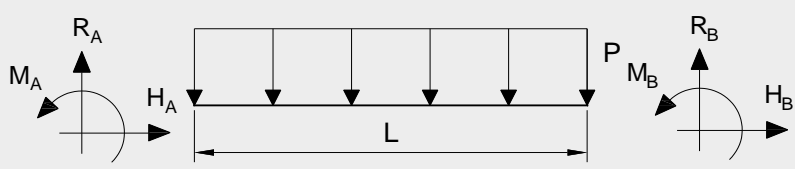
A Tabela 2 mostra os diferentes tipos de carregamentos implementados nos algoritmos do programa desenvolvido. Como o Método da Rigidez Direta trabalha com equilíbrio nodal, ou seja, equilíbrio dos nós do sistema estrutural, as solicitações externas devem ser transformadas em ações equivalentes aplicadas nas extremidades do elemento, onde será aplicada a condição de equilíbrio dos nós e resolução do sistema de equações.

Os carregamentos externos são divididos em duas categorias: carregamento externo aplicado diretamente nos nós e aplicado no elemento. Para carregamentos aplicados diretamente nos nós, o valor da ação é diretamente alocado no vetor de carga  $\mathbf{f}$ , referenciado ao eixo global da estrutura, já que esses carregamentos estão sendo aplicados diretamente no local onde está sendo imposta a condição de equilíbrio. Já os carregamentos aplicados no elemento devem ser transformados em ações equivalentes para os nós de extremidade do elemento, e essas ações equivalentes são denominadas ações de engastamento perfeito, que são primeiramente referenciados ao eixo local de elemento e posteriormente referenciadas ao eixo global através do processo de transformação de eixos pelas relações (3) e (4) da Seção 3.2 deste capítulo.

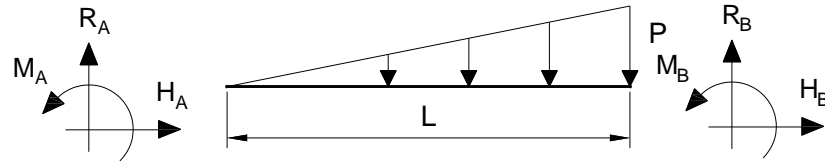
Na Tabela 2 é representado genericamente as ações de engastamento perfeito para qualquer carregamento, sendo cada caso de carregamento externo detalhado a seguir:

Tabela 2 – Tipos de carregamentos aplicados no elemento

#### Carregamentos de elemento

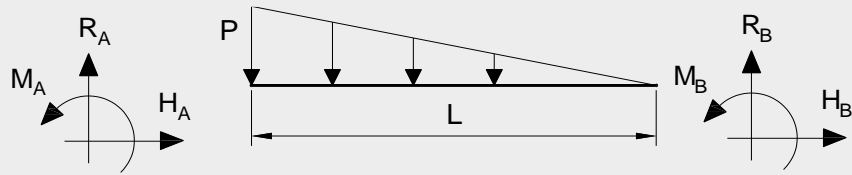
1	 $M_A = -M_B = \frac{PL^2}{12}, \quad R_A = R_B = \frac{PL}{2}$
---	---

2



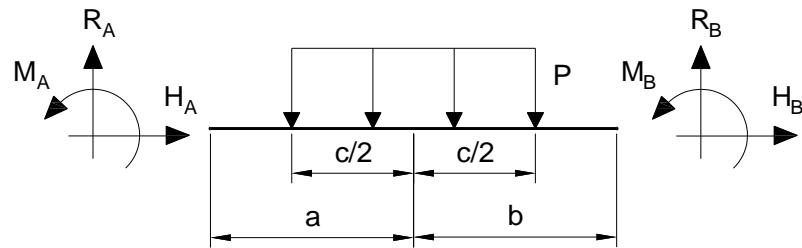
$$M_A = \frac{PL^2}{30}, \quad M_B = -\frac{PL^2}{20}, \quad R_A = \frac{3PL}{20}, \quad R_B = \frac{7PL}{20}$$

3



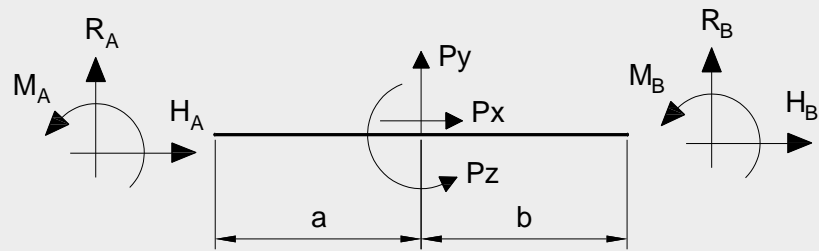
$$M_A = \frac{PL^2}{20}, \quad M_B = -\frac{PL^2}{30}, \quad R_A = \frac{7PL}{20}, \quad R_B = \frac{3PL}{20}$$

4



$$M_A = \frac{PL}{20} \{12ab^2 + c^2(L-3b)\}, \quad M_B = -M_A - \frac{3Pc^3(b-a)}{12L^2}, \quad R_A = \frac{Pcb}{L} + \frac{M_A + M_B}{L}, \quad R_B = Pc - R_A$$

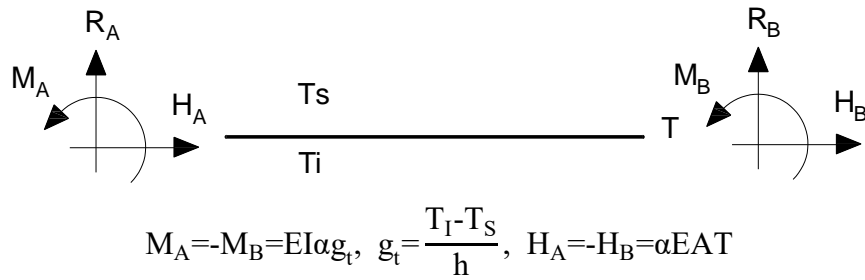
5



$$M_A = \frac{P_Y ab^2}{L^2} + P_Z b(2a-b)/L^2, \quad M_B = \frac{P_Y ba^2}{L^2} + P_Z a(2b-a)/L^2, \quad H_A = -\frac{P_X b}{L}, \quad H_B = -\frac{P_X a}{L}$$

$$R_A = \frac{P_Y b}{L} + \frac{M_A + M_B}{L} + \frac{6P_Y ab}{L^3}, \quad R_B = P_Y - R_A - \frac{6P_Y ab}{L^3}$$

6



### 3.5 Alocação da matriz de rigidez global e resolução do sistema de equações

A partir dos conceitos apresentados na Seção 3.3 e 3.4, onde são apresentados o sistema de equações de equilíbrio e as ações nodais de engastamento perfeito, é possível montar a matriz de rigidez global da estrutura  $\mathbf{K}$  e o vetor de cargas  $\mathbf{f}$  respectivamente, e através da resolução do sistema da Equação (1), encontra-se o vetor de deslocamentos  $\mathbf{u}$ .

É importante todos os parâmetros estarem referenciados ao mesmo eixo de referência, no caso o global da estrutura, de modo que todas as informações devem estar referenciadas a um único eixo de referência. Logo, para realizar a montagem da matriz de rigidez global da estrutura  $\mathbf{K}$ , é preciso referenciar os coeficientes de rigidez apresentados na Seção 3.1 do eixo local para o eixo global utilizando-se a Equação (7) de transformação de eixos para matrizes. Do mesmo modo, para realizar a montagem do vetor de cargas  $\mathbf{f}$ , é preciso referenciar as ações de engastamento perfeito que são referenciadas ao eixo local de elemento para o eixo global, e esse processo se dá pela Equação (5) de transformação de eixo para vetores.

Serão utilizados tanto a Figura 10, ilustrada a seguir, quanto a Equação (12), que exemplificam o processo de obtenção dos termos de rigidez para o grau de liberdade 3. Esse processo de cálculo é estendido para qualquer grau de liberdade. Como a matriz possui suas linhas e colunas referenciadas com os graus de liberdade da estrutura, o processo de montagem ocorre com a alocação dos coeficientes de rigidez de elemento que surgem na direção dos graus de liberdade da estrutura quando é aplicado o deslocamento unitário para um certo grau de liberdade, mantendo todos os outros nulos. Por exemplo, quando há o deslocamento unitário do grau de liberdade 3 e todos os restantes são nulos, como na Figura 10, na direção do grau de liberdade 1 da estrutura surgem as rigidezes  $k_{13}^{(1)}$  do elemento 1 (A) e  $k_{46}^{(2)}$  do elemento 2 (B). Ou seja, o



coeficiente  $K_{13}$  da matriz  $\mathbf{K}$ , cuja rigidez significa a força que surge na direção do grau de liberdade 1 devido ao deslocamento unitário do grau de liberdade 3, é  $K_{13} = k_{13}^{(1)} + k_{46}^{(2)}$ .

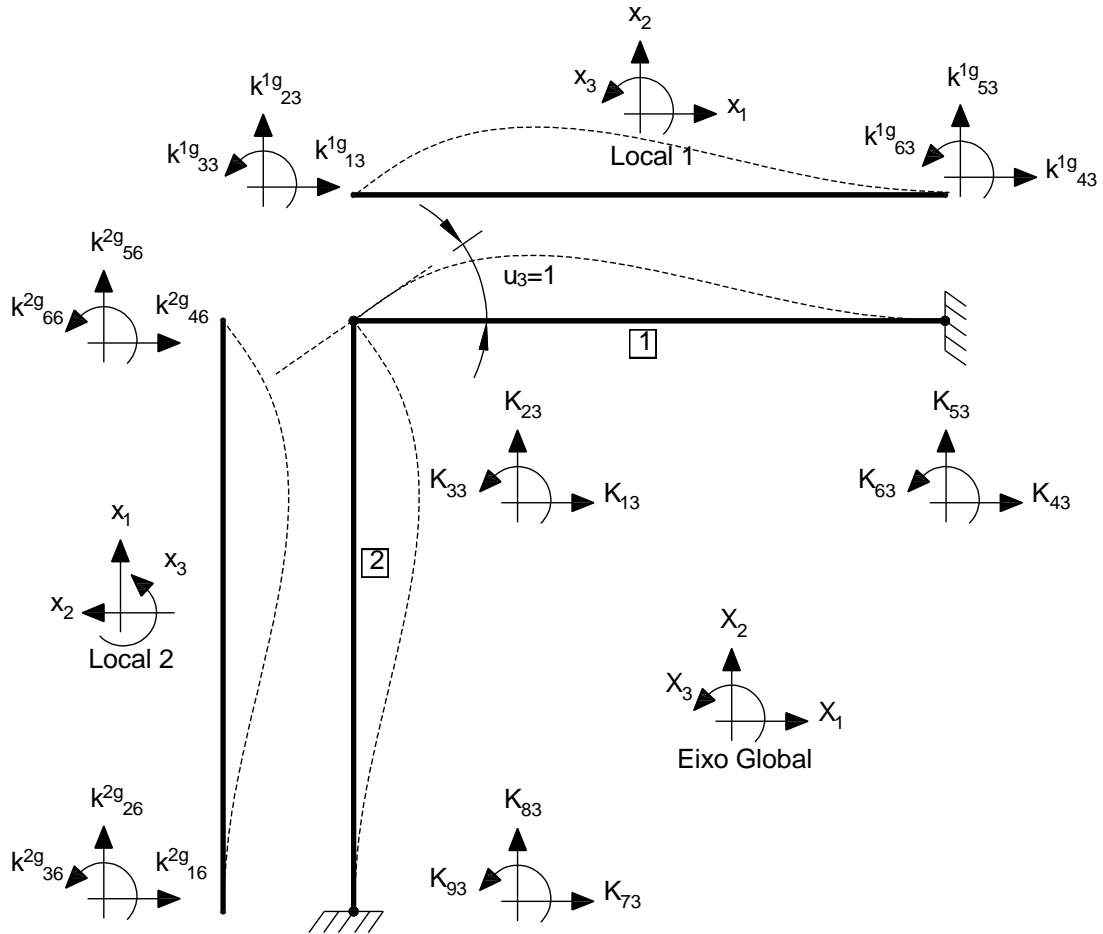


Figura 9 – Coeficientes de rigidez referenciados para eixos locais e global (elementos A e B são representados como 1 e 2 respectivamente)

Utilizando-se esse processo para todos os graus de liberdade da estrutura, a Matriz de Rigidez Global da Estrutura  $\mathbf{K}$  é montada.

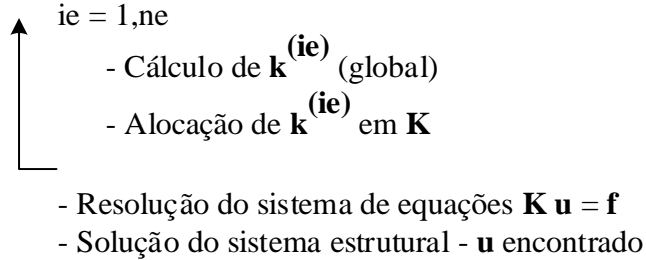
A forma compacta da Equação (12) apresentada acima é:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1)$$

na qual  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez global da Estrutura,  $\mathbf{u}$  os deslocamentos nodais da estrutura (incógnita do sistema estrutural) e  $\mathbf{f}$  vetor de cargas externas aplicadas no sistema estrutura, como já mencionado no Capítulo 2, Seção 2.4.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccccc}
 & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) & (8) & (9) \\
 (1) & k_{11}^{(1)}+k_{44}^{(2)} & k_{12}^{(1)}+k_{45}^{(2)} & k_{13}^{(1)}+k_{46}^{(2)} & k_{14}^{(1)} & k_{15}^{(1)} & k_{16}^{(1)} & k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} \\
 (2) & k_{21}^{(1)}+k_{54}^{(2)} & k_{22}^{(1)}+k_{55}^{(2)} & k_{23}^{(1)}+k_{56}^{(2)} & k_{24}^{(1)} & k_{25}^{(1)} & k_{26}^{(1)} & k_{51}^{(2)} & k_{52}^{(2)} & k_{53}^{(2)} \\
 (3) & k_{31}^{(1)}+k_{64}^{(2)} & k_{32}^{(1)}+k_{62}^{(2)} & k_{33}^{(1)}+k_{66}^{(2)} & k_{34}^{(1)} & k_{35}^{(1)} & k_{36}^{(1)} & k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} \\
 (4) & k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)} & k_{45}^{(1)} & k_{46}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\
 (5) & k_{51}^{(1)} & k_{52}^{(1)} & k_{53}^{(1)} & k_{54}^{(1)} & k_{55}^{(1)} & k_{56}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\
 (6) & k_{61}^{(1)} & k_{62}^{(1)} & k_{63}^{(1)} & k_{64}^{(1)} & k_{65}^{(1)} & k_{66}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\
 (7) & k_{14}^{(2)} & k_{15}^{(2)} & k_{16}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & k_{77}^{(2)} & k_{78}^{(2)} & k_{79}^{(2)} \\
 (8) & k_{24}^{(2)} & k_{25}^{(2)} & k_{26}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & k_{87}^{(2)} & k_{88}^{(2)} & k_{89}^{(2)} \\
 (9) & k_{34}^{(2)} & k_{35}^{(2)} & k_{36}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & k_{97}^{(2)} & k_{98}^{(2)} & k_{99}^{(2)}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{c}
 u_1 \\
 \vdots \\
 u_i \\
 u_j \\
 u_k \\
 u_l \\
 \vdots \\
 u_{nno}
 \end{array} \right|
 =
 \left| \begin{array}{c}
 f_1 \\
 \vdots \\
 f_j \\
 \vdots
 \end{array} \right|
 \end{array}
 \quad (12)
 \end{array}$$

Em síntese, para obtenção da matriz de rigidez global e resolução do sistema de equações para encontrar as incógnitas do sistema estrutural, ou seja, deslocamentos nodais, o fluxograma utilizado é o escrito a seguir:



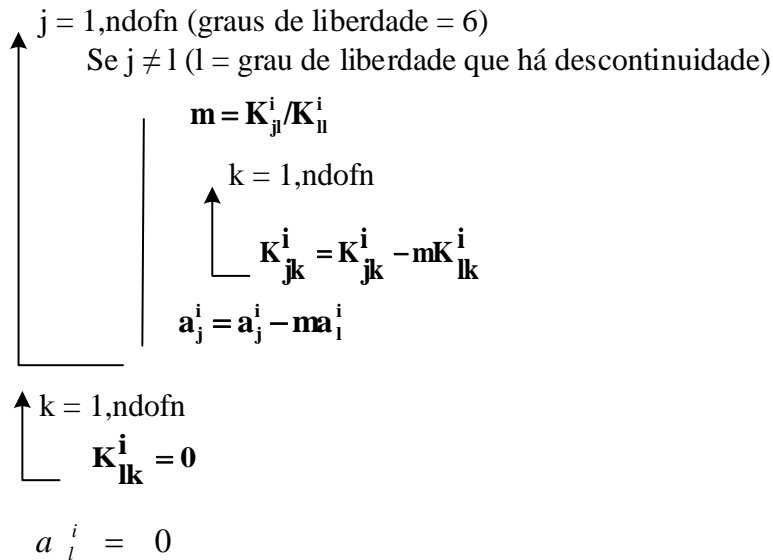
### 3.6 Descontinuidades (Axial, Cisalhante e Rotação)

Elementos podem conectar entre si ou com o meio exterior de maneira a permitir deslocamentos relativos entre extremidades de barras, de modo que os esforços seccionais correspondentes a esses deslocamentos fiquem nulos. Essas ligações podem ser denominadas descontinuidades ou articulações em extremidade de barra (SORIANO, 2005). Por exemplo, um caso comum é a descontinuidade a momento fletor, comumente chamada de rótula. Nesse caso, há a liberação da rotação da seção transversal desta ligação, de modo que o momento fletor na seção seja nulo.

A técnica utilizada para contabilizar o efeito das descontinuidades é alterar a matriz de rigidez global e o vetor de cargas, anulando-se a rigidez na direção do grau de liberdade em que a

descontinuidade exista, como também anular a força que surge nessa direção devido ao deslocamento do elemento na direção da descontinuidade.

A rotina computacional para as modificações na matriz de rigidez e no vetor de carga para contabilizar o efeito da descontinuidade é indicada a seguir:



na qual  $K_{ij}^i$  é o coeficiente de rigidez de elemento e  $a_j^i$  o esforço de extremidade (força equivalente do vetor de cargas).

### 3.7 Reações de apoio

O processo de encontro das reações de apoio se dá utilizando as incógnitas encontradas pela resolução das equações de equilíbrio, que são os deslocamentos nodais, e então realizar o processo inverso ao utilizado no fluxograma do programa. Com os deslocamentos de cada nó, referenciados globalmente, é possível saber as ações locais de extremidade de elemento que surgem devido à deformação, multiplicando-se as rigidezes dos graus de liberdade do nó do apoio pelos seus respectivos deslocamentos. E então, para encontrar a reação de apoio basta realizar o equilíbrio entre a reação, ações locais de extremidade devido à deformação e de ações aplicadas diretamente no apoio (ações nodais concentradas nos nós associados ao carregamento externo). Vale ressaltar ainda que todos os parâmetros devem ser referenciados ao eixo global, para as informações terem o mesmo eixo de referência.

As reações de apoio  $R_{im}$  representadas na Figura 10 a seguir podem ser encontradas através da seguinte relação expressa pela Equação (13) (reação segundo o m-ésimo grau de liberdade):

$$f_{im} - (a_{im}^{e1} + a_{im}^{e2} + a_{im}^{e3}) + R_{im} = 0$$

$$R_{im} = -f_{im} + \sum_{j=1}^n K_{imj} u_j = -f_{im} + f_{imr}^{(d)} \quad (13)$$

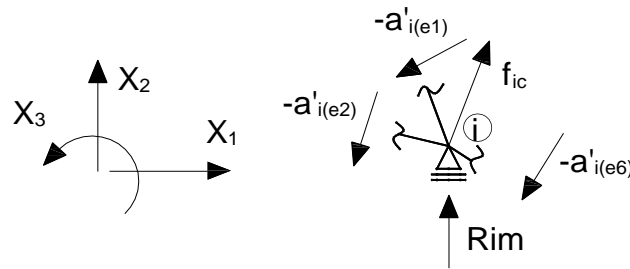


Figura 10 – Reação de apoio

### 3.8 Esforços de extremidade de elemento

Similarmente ao processo feito para o encontro das reações de apoio é utilizado para encontrar os esforços de extremidade, na Figura 11, porém, nesse caso com todos os parâmetros referenciados ao eixo local do elemento em que se deseja encontrar os esforços de extremidade.

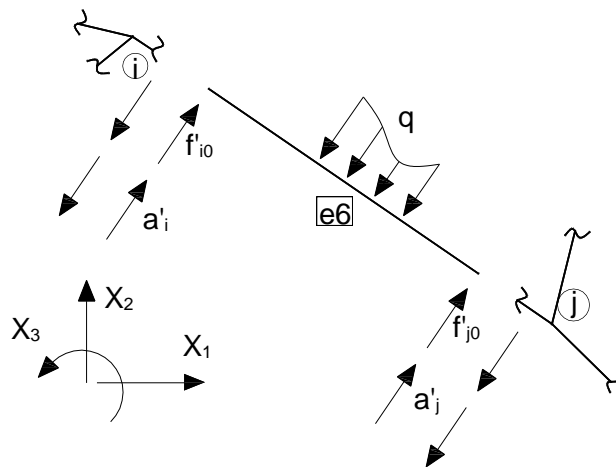


Figura 11 - Esforços de extremidade de elemento

Nessa linha de pensamento, os esforços de extremidade de elemento são encontrados realizando o equilíbrio do nó entre as ações externas aplicadas diretamente no nó, ações de engastamento perfeito devido aos carregamentos externos de elemento e das ações de extremidade de elemento devido ao deslocamento (encontrado pela multiplicação entre a matriz de rigidez do elemento e os deslocamentos nodais referenciados localmente).

Os esforços de extremidade de elemento  $\mathbf{a}_i^e$  podem ser encontrados a partir da relação a seguir:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{if}^e = \mathbf{f}_{i0}^e + \mathbf{k}_{ii}^e(\mathbf{R}^e \mathbf{u}_i^e) + \mathbf{k}_{ij}^e(\mathbf{R}^e \mathbf{u}_j^e) \\ \mathbf{a}_{jf}^e = \mathbf{f}_{j0}^e + \mathbf{k}_{ji}^e(\mathbf{R}^e \mathbf{u}_i^e) + \mathbf{k}_{jj}^e(\mathbf{R}^e \mathbf{u}_j^e) \end{cases} \quad (14)$$

ou ainda, na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{if}^e \\ \mathbf{a}_{jf}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{i0}^e \\ \mathbf{f}_{j0}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii}^e & \mathbf{k}_{ij}^e \\ \mathbf{k}_{ji}^e & \mathbf{k}_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^e \\ \mathbf{u}_j^e \end{bmatrix} \quad (15)$$

### 3.9 Recalque de apoio

Recalques de apoio são os deslocamentos prescritos localizados no apoio do sistema estrutural, sendo estes deslocamentos ocorrendo na direção de uma das direções dos graus de liberdade do nó, provocando esforços na estrutura em casos em que a estrutura não é isostática.

A consideração do efeito do recalque de apoio se dá na alteração do vetor de deslocamentos  $\mathbf{u}$ , como ilustrado na equação (16) a seguir, sendo a parcela  $u_r$  correspondente ao valor do recalque de apoio aplicado no grau de liberdade oito:

$$\mathbf{u}^g = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 + u_r \\ u_9 \end{bmatrix} \quad (16)$$

### 3.10 Fluxograma das rotinas do programa

Como ilustrado no fluxograma do programa desenvolvido da Figura 12, o programa é dividido em sub-rotinas que efetuam tarefas diferentes, com o objetivo de organizar o fluxo de operações que o microprocessador e a linguagem de programação utilizam para solucionar o sistema estrutural.

Primeiramente, a primeira sub-rotina implementada foi a de leitura de dados, denominada *input* – Entrada de Informações. Nesta sub-rotina é realizado a leitura de dados necessários para solucionar o sistema estrutural, dos quais são por exemplo, número de nós, número de elementos, número de nós por elemento, número de grau de liberdade dos nós, quantidade de diferentes materiais e seções transversais dos elementos, coordenadas dos nós da estrutura, conectividade dos elementos, leitura de condições de contorno e solicitações externas. Como também realiza alguns cálculos básicos como comprimento de elementos.

Na etapa de *assembly* (montagem), cujas sub-rotinas são destinadas ao processamento dos dados coletados na sub-rotina *input*, efetuam os cálculos estruturais, tais como o cálculo das matrizes de rotação de eixos locais de elemento para o eixo global da estrutura, matrizes de rigidez de elemento e de pórtico, como também montagem do vetor de carga e a solução do sistema de equações de equilíbrio do Método da Rigidez Direta. As sub-rotinas responsáveis por esta etapa são: rotação, *element\_stiffness* (matriz de rigidez de elemento), *struct\_stiffness* (matriz de rigidez global), *vectorf* (vetor de cargas) e *displacements* (deslocamentos nodais).

Por fim, na última etapa do fluxograma do programa computacional, temos as sub-rotinas que fornecerão os dados de *output* (saída), como esforços internos e reações de apoios. As duas últimas sub-rotinas são denominadas *element\_forces* (esforços internos) e *reactions* (reações de apoio).

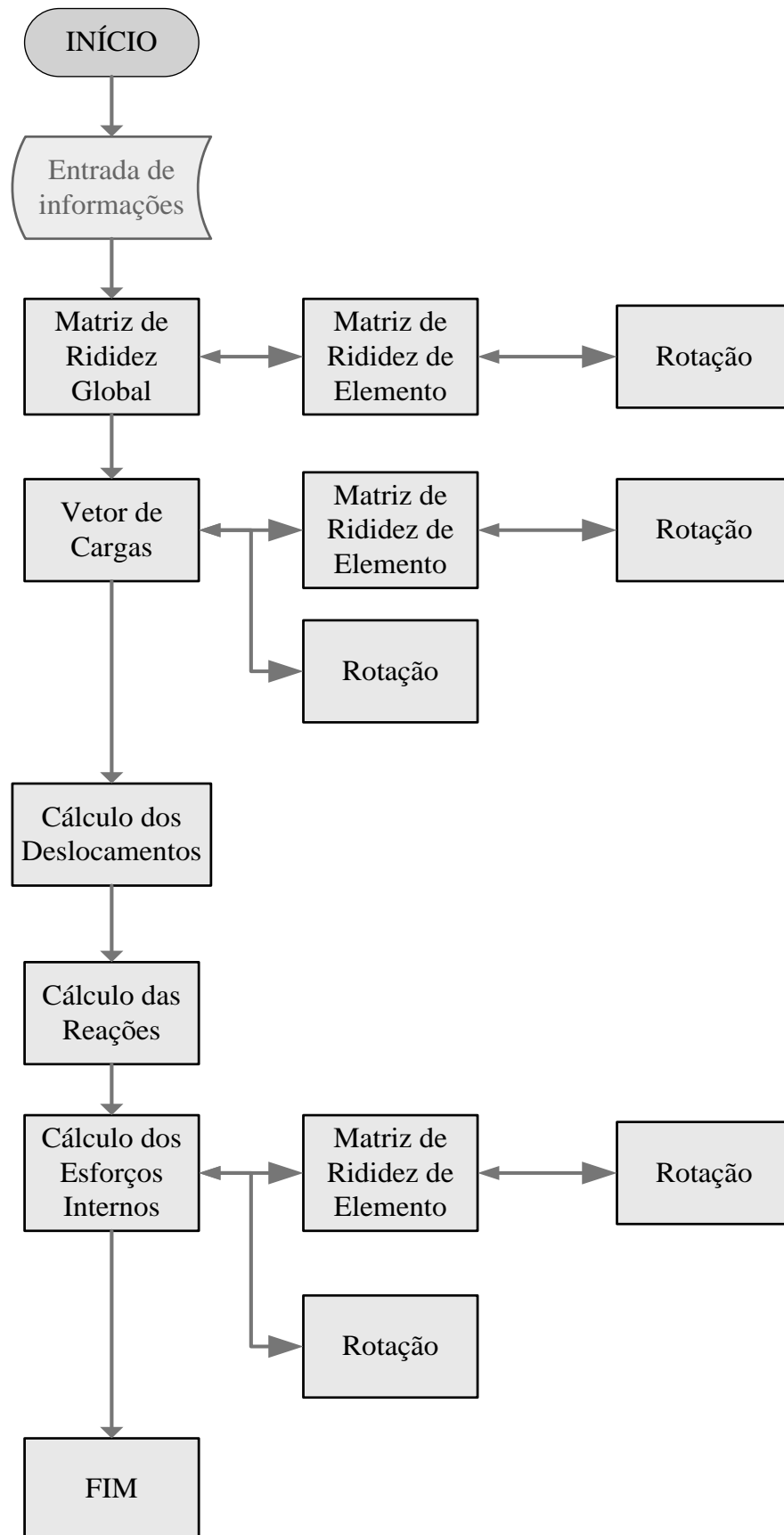


Figura 12 - Fluxograma do programa desenvolvido

# Capítulo 4

## Aplicações

### 4.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentadas aplicações numéricas para ilustrar a versatilidade do programa computacional desenvolvido neste trabalho. Para sua validação, os resultados obtidos serão comparados com aqueles encontrados usando o programa FTOOL.

### 4.2 Problema 1

A primeira aplicação é retirada do livro “Matrix Analysis of Framed Structures” (WEAVER, W. J. e GERE, J. M., 1980), Problema 4.18-7, página 280. O sistema estrutural analisado é mostrado na Figura 14. As propriedades físicas e geométricas do modelo estudado são apresentadas na Tabela 3.

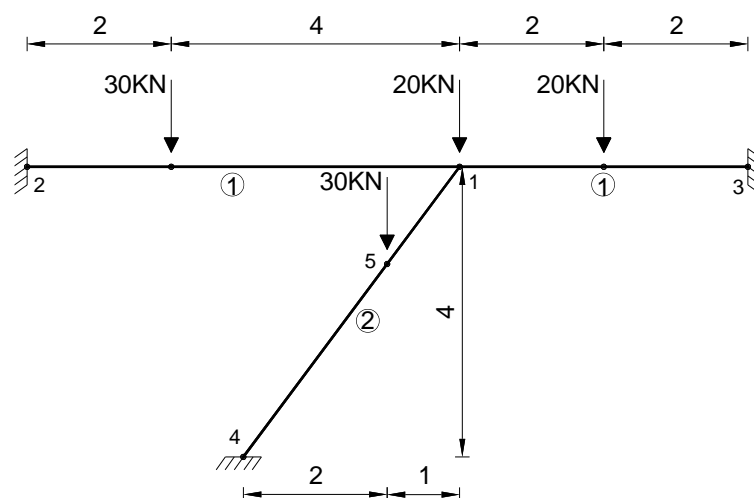


Figura 14 - Problema 4.18-7 - livro “Matrix Analysis of Framed Structures”



Tabela 3 – Dados do problema 1

**Propriedades físicas e geométricas**

$E_{\text{material}}$		$200 \cdot 10^6 \text{ KN/m}^2$	
$A_1$	$0.01 \text{ m}^2$	$A_2$	$0.03 \text{ m}^2$
$I_{z1}$	$1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$	$I_{z2}$	$1,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$

Espera-se testar aspectos básicos como elementos inclinados, carregamentos pontuais ortogonais e inclinados, com localização não centralizada no elemento, e condições de contorno simples.

As Figuras 15 e 16 representam os diagramas de Esforço Normal, com informações fornecidas pelo FTOOL e pelo programa desenvolvido respectivamente, tendo seus valores em kN.

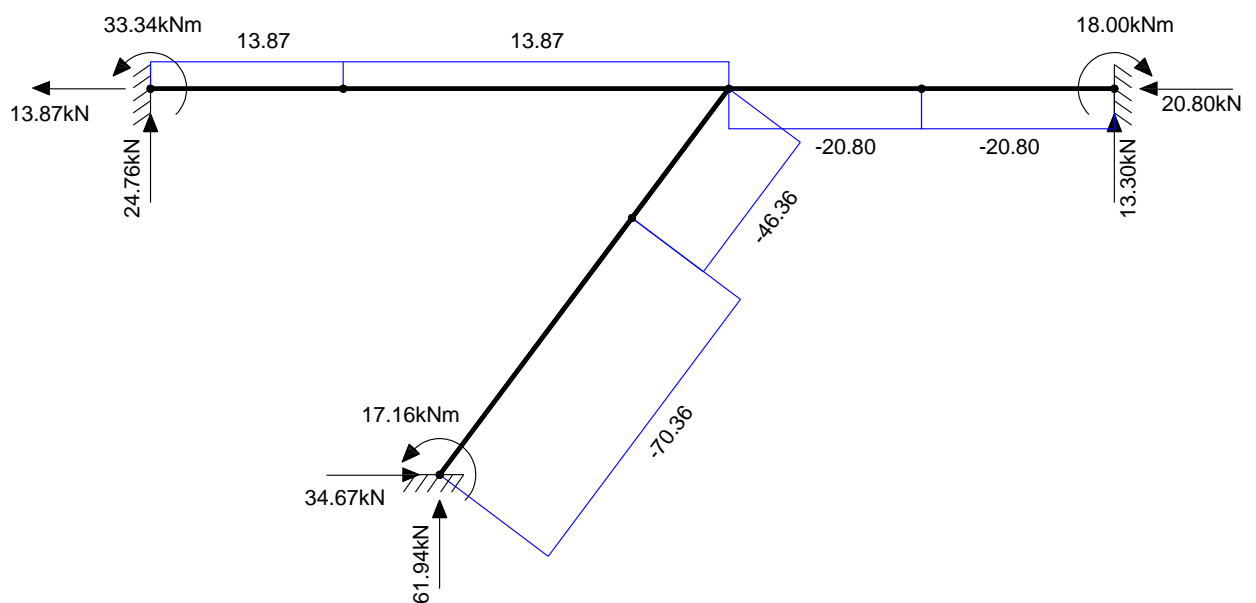


Figura 15 – Problema 1 - diagrama de Esforço Normal (kN) – Ftool

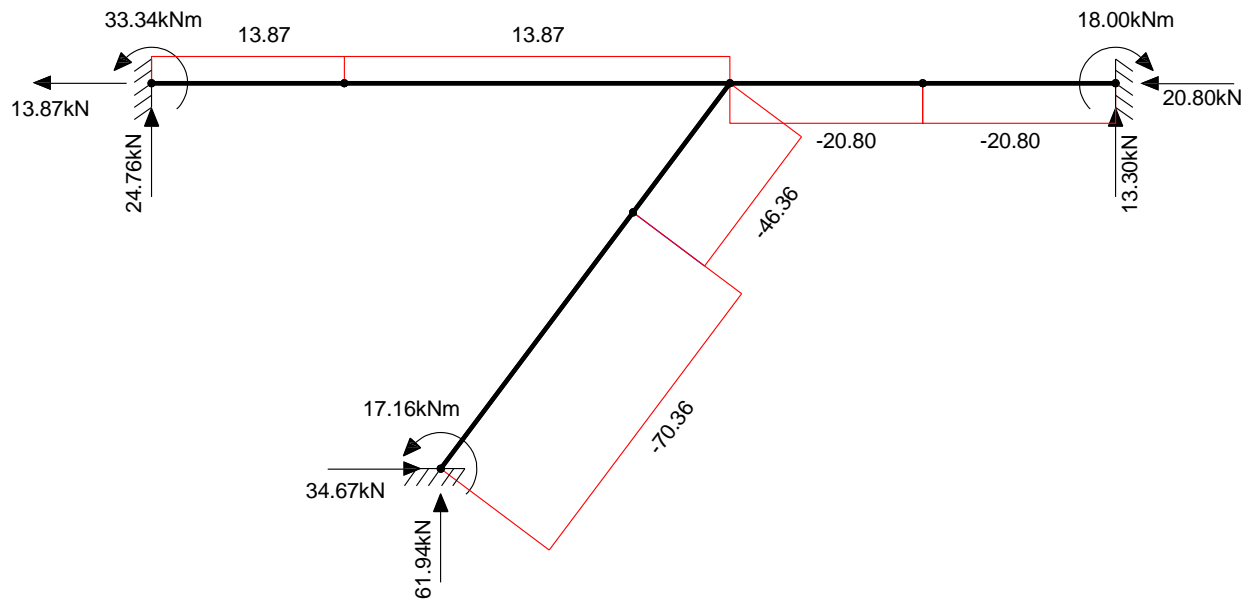


Figura 16 – Problema 1 - diagrama de Esforço Normal (kN) – programa desenvolvido

As Figuras 17 e 18 representam os diagramas de Esforço Cortante, com informações fornecidas pelo FTOOL e pelo programa desenvolvido respectivamente, tendo seus valores em kN.

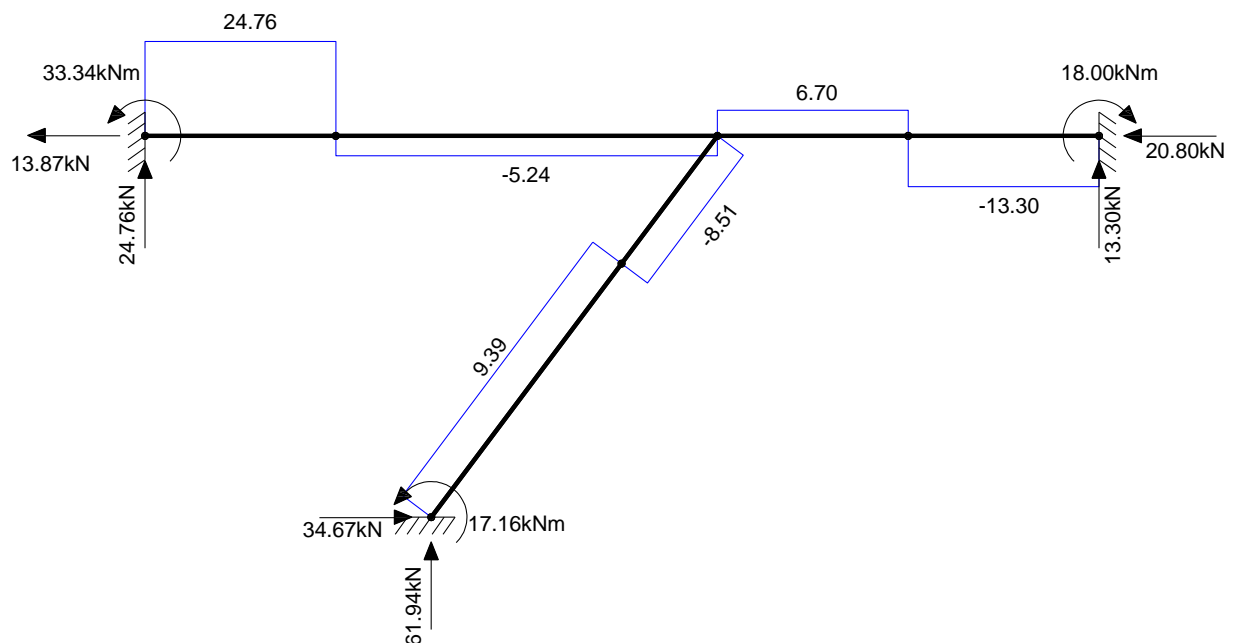


Figura 17 – Problema 1 - diagrama de Esforço Cortante (kN) – Ftool

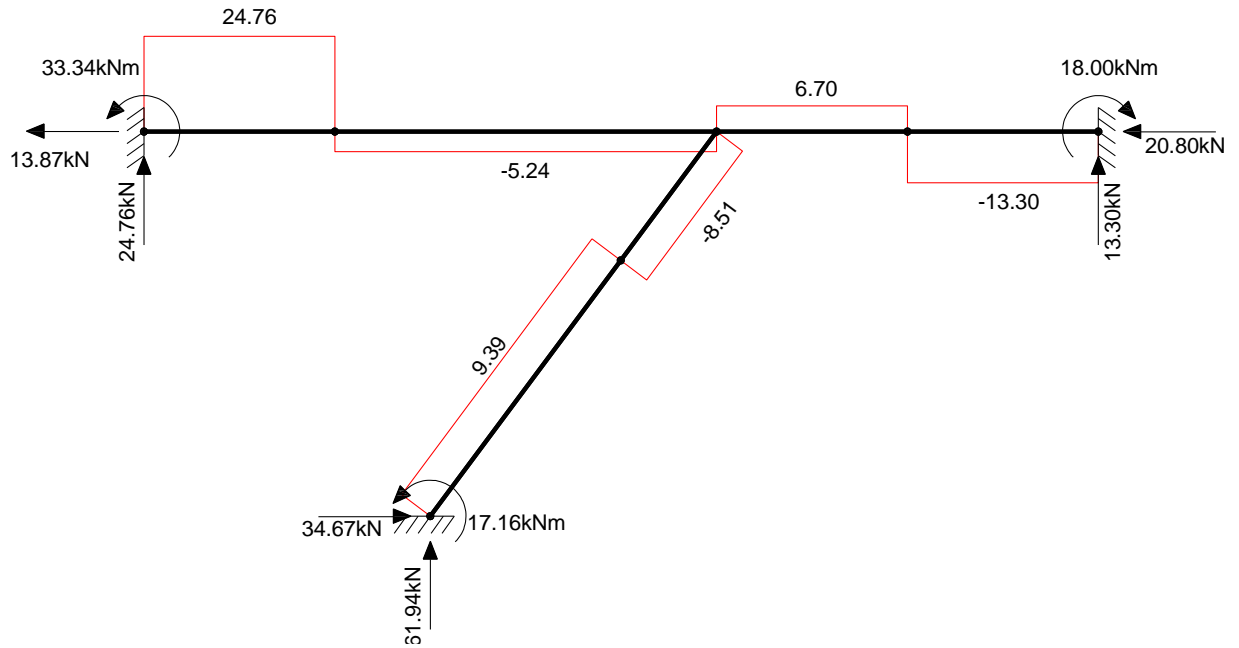


Figura 18 – Problema 1 - diagrama de Esforço Cortante (kN) – programa desenvolvido

Por fim, as Figuras 19 e 20 representam os diagramas de Momento Fletor, com informações fornecidas pelo FTOOL e pelo programa desenvolvido respectivamente, tendo seus valores em kNm.

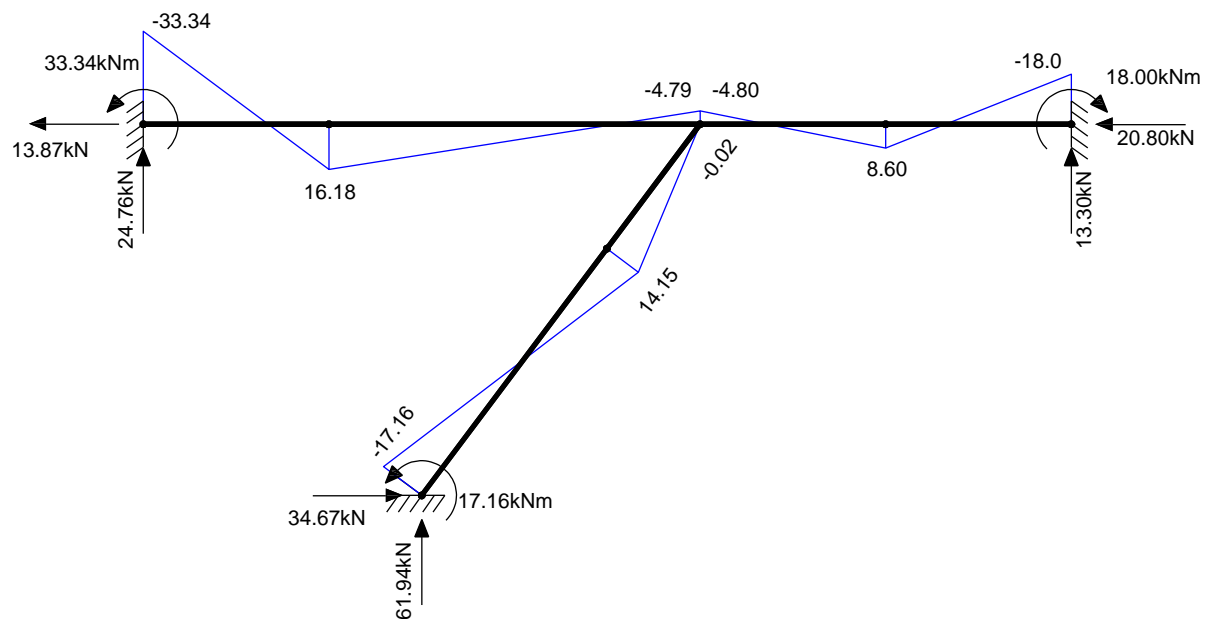


Figura 19 – Problema 1 - diagrama de Momento Fletor (kNm) – Ftool

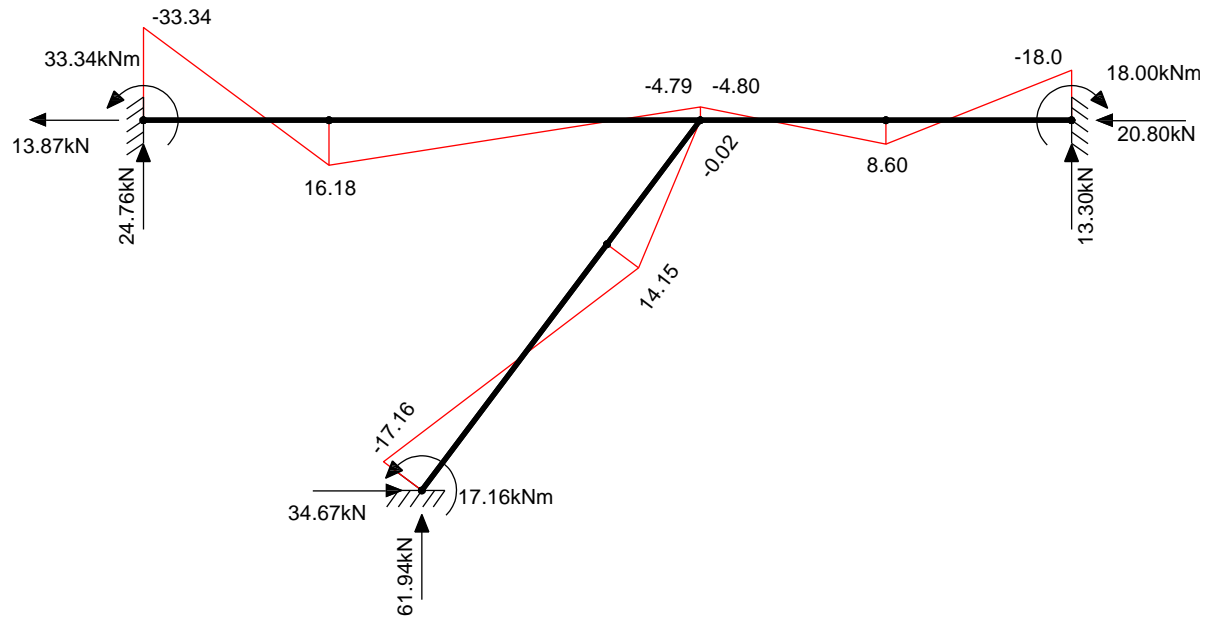


Figura 20 – Problema 1 - diagrama de Momento Fletor (kNm) – programa desenvolvido

A seguir, as tabelas comparativas com informações do Problema 1 fornecidas pelo FTOOL e pelo programa desenvolvido. As tabelas contêm informações acerca dos deslocamentos nodais, reações de apoio e esforços internos, expressados através das Tabelas 4, 5 e 6 respectivamente.

Tabela 4 – Comparativo para deslocamentos

Deslocamentos (u)							
Nó	Programa desenvolvido			FTOOL			Desvio (%)
	ux (m)	uy (m)	uz (rad)	ux (m)	uy (m)	uz (rad)	
1	1,396E-04	-9,157E-04	1,791E-04	1,396E-04	-9,157E-04	1,791E-04	0,00
2	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,00
3	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,00
4	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,00
5	5,975E-05	-9,363E-05	-1,396E-05	5,975E-05	-9,363E-05	-1,396E-05	0,00

Tabela 5 – Comparativo reações de apoio

<b>Reações de apoio</b>							
<b>Nó</b>	<b>Programa desenvolvido</b>			<b>FTOOL</b>			<b>Desvio (%)</b>
	<b>R<sub>x</sub> (kN)</b>	<b>R<sub>y</sub> (kN)</b>	<b>R<sub>z</sub> (kNm)</b>	<b>R<sub>x</sub> (kN)</b>	<b>R<sub>y</sub> (kN)</b>	<b>R<sub>z</sub> (kNm)</b>	
<b>2</b>	-13,87	24,76	33,34	-13,87	24,76	33,34	0,000
<b>3</b>	-20,8	13,3	-18	-20,8	13,3	-18	0,000
<b>4</b>	34,67	61,94	17,16	34,67	61,94	17,16	0,000

Tabela 6 – Comparativo esforços internos

<b>Esforços internos</b>						
<b>Elemento</b>	<b>Programa desenvolvido</b>					
	<b>N<sub>i</sub> (kN)</b>	<b>V<sub>i</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>i</sub> (kNm)</b>	<b>N<sub>f</sub> (kN)</b>	<b>V<sub>f</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>f</sub> (kNm)</b>
<b>1</b>	13,87	24,76	-33,34	13,87	-5,24	-4,79
<b>2</b>	-20,8	6,7	-4,8	-20,8	-13,3	-18
<b>3</b>	-70,36	9,39	-17,16	-70,36	9,39	14,15
<b>4</b>	-46,36	-8,51	14,15	-46,36	-8,51	-0,02
	<b>FTOOL</b>					
	<b>N<sub>i</sub> (kN)</b>	<b>V<sub>i</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>i</sub> (kNm)</b>	<b>N<sub>f</sub> (kN)</b>	<b>V<sub>f</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>f</sub> (kNm)</b>
<b>1</b>	13,87	24,76	-33,34	13,87	-5,24	-4,79
<b>2</b>	-20,8	6,7	-4,8	-20,8	-13,3	-18
<b>3</b>	-70,36	9,39	-17,16	-70,36	9,39	14,15
<b>4</b>	-46,36	-8,51	14,15	-46,36	-8,51	-0,02

### 4.3 Problema 2

O problema 2, representado na Figura 21, é retirado do livro “*Matrix Analysis of Framed Structures*” (WEAVER, W. J. e GERE, J. M., 1980), Problema 4.12-5, página 276. Para simplificação, serão adotados  $P = 10\text{ kN}$  e  $L = 2\text{ m}$ . As propriedades físicas e geométricas do modelo estudado são apresentadas na Tabela 7.

Espera-se validar aspectos tais quais carregamentos mais sofisticados como carregamento triangular, carregamento pontual ortogonal e inclinado, condição de contorno de segundo e primeiro grau – sem consideração de condição de contorno por aplicação de recalque, e

descontinuidades de extremidade de elemento, que nesse exemplo será validada a descontinuidade à flexão, comumente chamada de rótula.

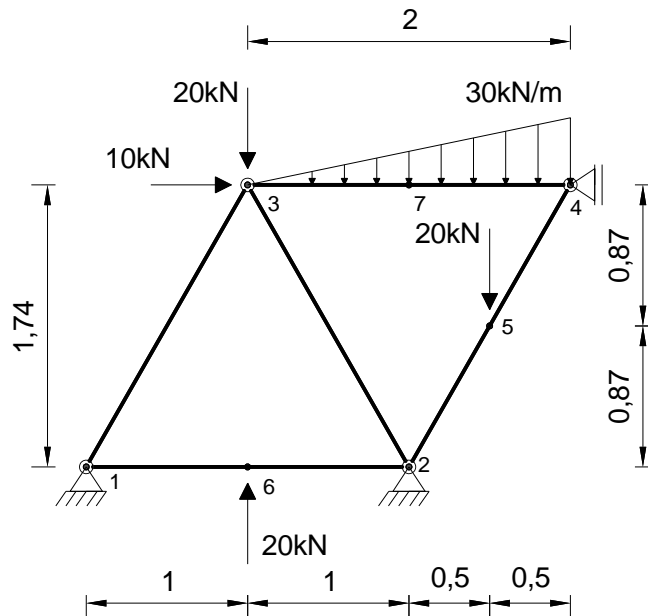


Figura 21 - Problema 4.12-5 - livro “*Matrix Analysis of Framed Structures*”

Tabela 7 – Dados do Problema 2

**Propriedades físicas e geométricas**

<b>E<sub>material</sub></b>	200.10 <sup>6</sup> KN/m <sup>2</sup>
<b>A<sub>1</sub></b>	0.01 m <sup>2</sup>
<b>I<sub>z1</sub></b>	1,5.10 <sup>-3</sup> m <sup>4</sup>

As Figuras 22 e 23 representam os Diagramas de Esforço Normal, com informações fornecidas pelo FTOOL e pelo Programa Desenvolvido respectivamente, tendo seus valores em kN.

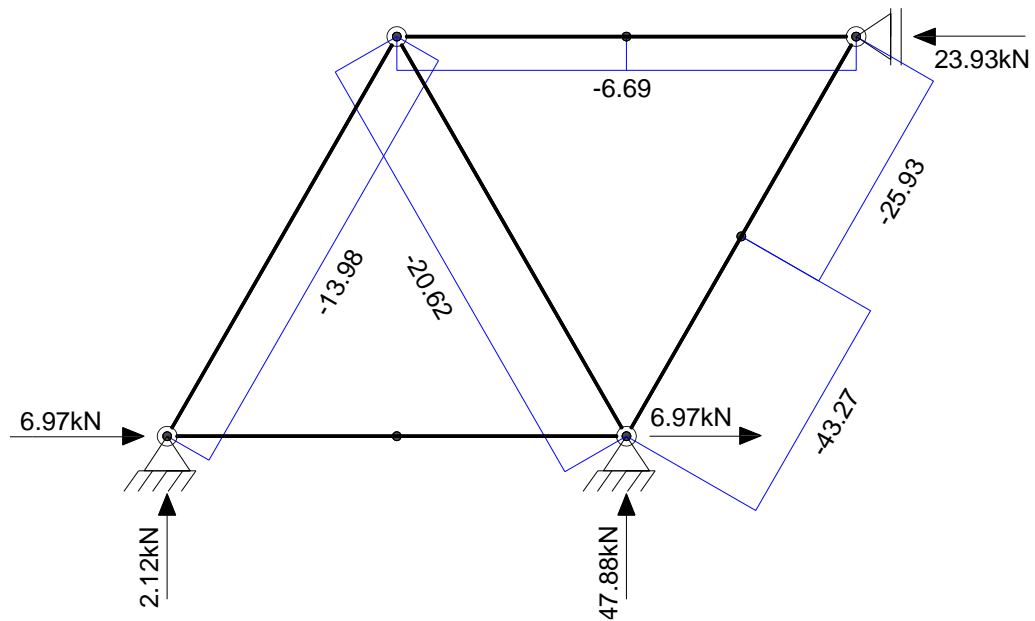


Figura 22 – Problema 2 - diagrama de Esforço Normal (kN) – Ftool

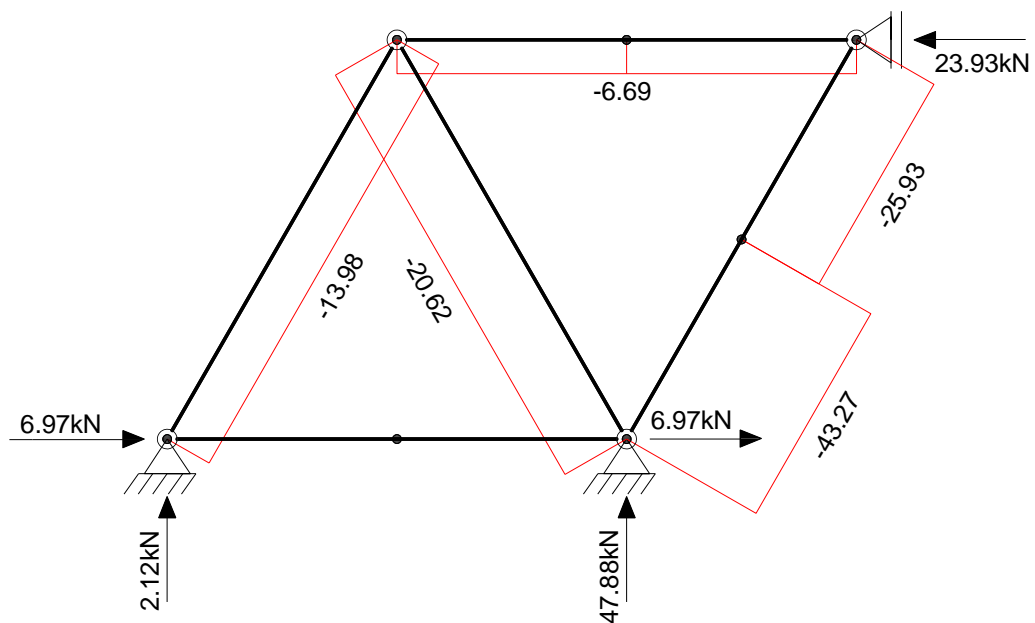


Figura 23 – Problema 2 - diagrama de Esforço Normal (kN) – programa desenvolvido

As Figuras 24 e 25 representam os diagramas de Esforço Cortante, com informações fornecidas pelo FTOOL e pelo programa desenvolvido respectivamente, tendo seus valores em kN.

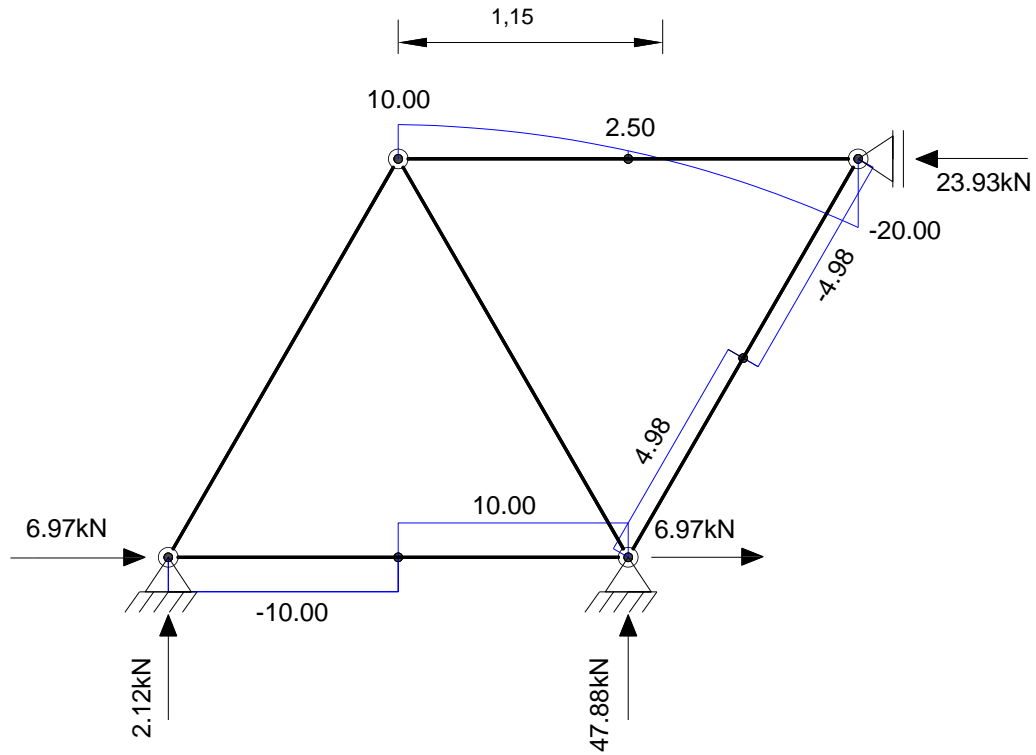


Figura 24 – Problema 2 - diagrama de Esforço Cortante (kN) – Ftool

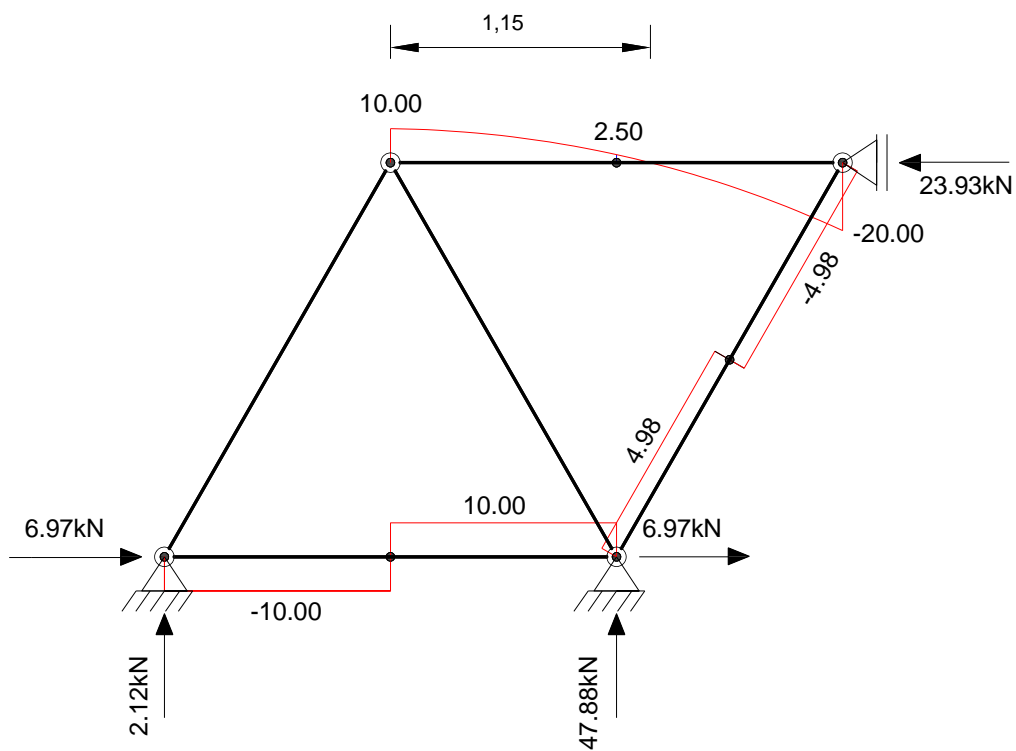


Figura 25 – Problema 2 - diagrama de Esforço Cortante (kN) – programa desenvolvido



Por fim, as Figuras 26 e 27 representam os diagramas de Momento Fletor, com informações fornecidas pelo FTOOL e pelo programa desenvolvido respectivamente, tendo seus valores em kNm.

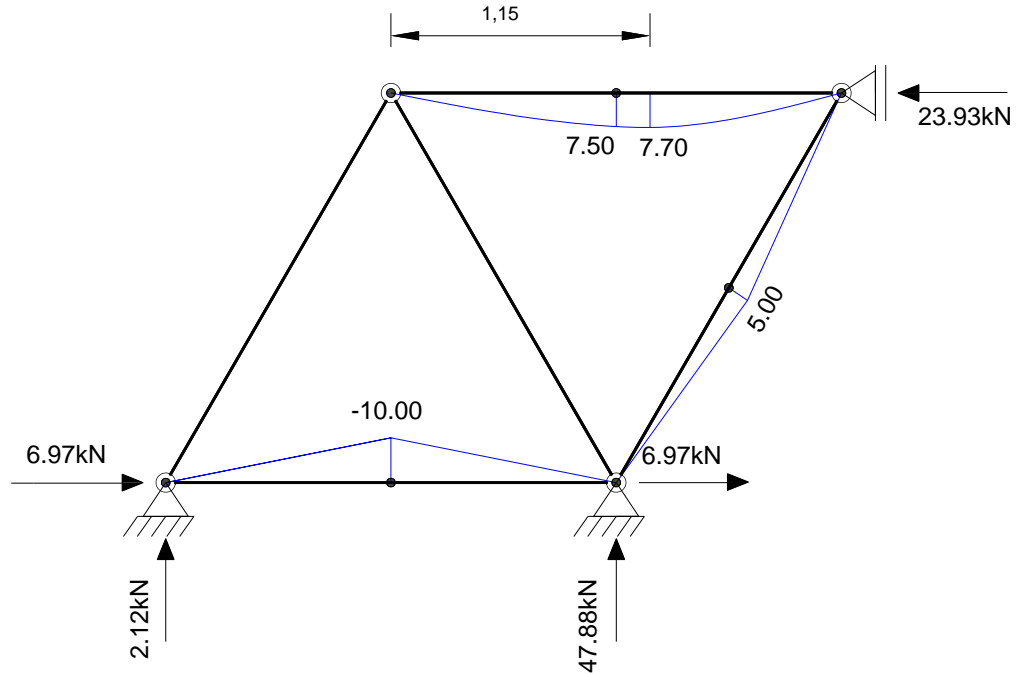


Figura 26 – Problema 2 - diagrama de Momento Fletor (kNm) – Ftool

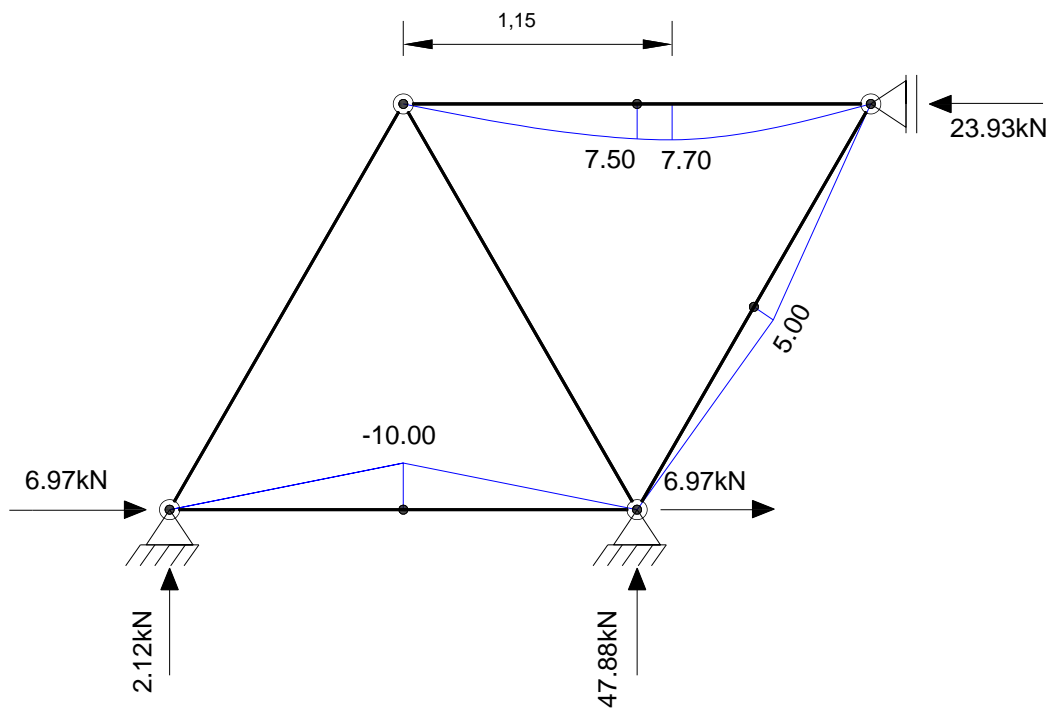


Figura 27 – Problema 2 - diagrama de Momento Fletor (kNm) – programa desenvolvido

A seguir, as tabelas comparativas com informações do Problema 2 fornecidas pelo FTOOL e pelo programa desenvolvido. As tabelas contêm informações acerca dos deslocamentos nodais, reações de apoio e esforços internos, expressados através das Tabelas 8, 9 e 10 respectivamente.

Tabela 8 – Comparativo para deslocamentos

Deslocamentos (u)							
Nº	Programa desenvolvido			FTOOL			Desvio (%)
	ux (m)	uy (m)	uz (rad)	ux (m)	uy (m)	uz (rad)	
1	0,00E+00	0,00E+00	-7,861E-06	0,00E+00	0,00E+00	-7,861E-06	0,00
2	0,00E+00	0,00E+00	2,081E-06	1,072E-09	-3,209E-06	2,080E-06	-0,016
3	6,69E-06	-2,002E-05	2,081E-06	6,690E-06	-2,002E-05	2,080E-06	-0,016
4	0,00E+00	-4,005E-05	7,766E-06	0,00E+00	-4,003E-05	7,766E-06	-0,050
5	2,682E-06	-2,658E-05	-9,943E-06	2,682E-06	-2,658E-05	-9,943E-06	0,00
6	0,00E+00	1,11E-05	0,00E+00	0,00E+00	1,11E-05	0,00E+00	0,00
7	3,334E-06	-4,045E-05	-1,098E-05	3,334E-06	-4,045E-05	-1,098E-05	0,00

Tabela 9 – Comparativo reações de apoio

Reações de apoio							
Nó	Programa desenvolvido			FTOOL			Desvio (%)
	Rx (kN)	Ry (kN)	Rz (kNm)	Rx (kN)	Ry (kN)	Rz (kNm)	
2	6,97	2,12	0	6,97	2,12	0	0,000
3	6,97	47,88	0	6,97	47,88	0	0,000
4	-23,93	0	0	-23,93	0	0	0,000

Tabela 10 – Comparativo esforços internos

<b>Esforços internos</b>						
<b>Elemento</b>	<b>Programa desenvolvido</b>					
	<b>N<sub>i</sub> (kN)</b>	<b>V<sub>i</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>i</sub> (kNm)</b>	<b>N<sub>f</sub> (kN)</b>	<b>V<sub>f</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>f</sub> (kNm)</b>
<b>1</b>	0	-10	0	0	-10	-10
<b>2</b>	-13,98	0	0	-13,98	0	0
<b>3</b>	-20,62	0	0	-20,62	0	0
<b>4</b>	-6,69	10	0	-6,69	2.50	7.50
<b>5</b>	-25,93	-4,98	5	-25,93	-4,98	0
<b>6</b>	-43,27	4,98	0	-43,27	4,98	5
<b>7</b>	0	10	-10	0	10	0
<b>8</b>	-6.69	2.50	7.50	-6.69	-20	0
	<b>FTOOL</b>					
	<b>N<sub>i</sub> (kN)</b>	<b>V<sub>i</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>i</sub> (kNm)</b>	<b>N<sub>f</sub> (kN)</b>	<b>V<sub>f</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>f</sub> (kNm)</b>
<b>1</b>	0	-10	0	0	-10	-10
<b>2</b>	-13,98	0	0	-13,98	0	0
<b>3</b>	-20,62	0	0	-20,62	0	0
<b>4</b>	-6,69	10	0	-6,69	2.50	7.50
<b>5</b>	-25,93	-4,98	5	-25,93	-4,98	0
<b>6</b>	-43,27	4,98	0	-43,27	4,98	5
<b>7</b>	0	10	-10	0	10	0
<b>8</b>	-6.69	2.50	7.50	-6.69	-20	0

### 4.4 Problema 3

O problema 3 é uma adaptação do Exemplo 2.13, do livro “Análise Matricial e Implementação Computacional” (SORIANO, 2005) e está representado pela Figura 28. Visa-se nesse problema validar carregamentos já verificados nos Problemas 1 e 2, como também por variação de temperatura, e aplicação de recalque de apoio. As propriedades físicas e geométricas do modelo estudado são apresentadas na Tabela 11.

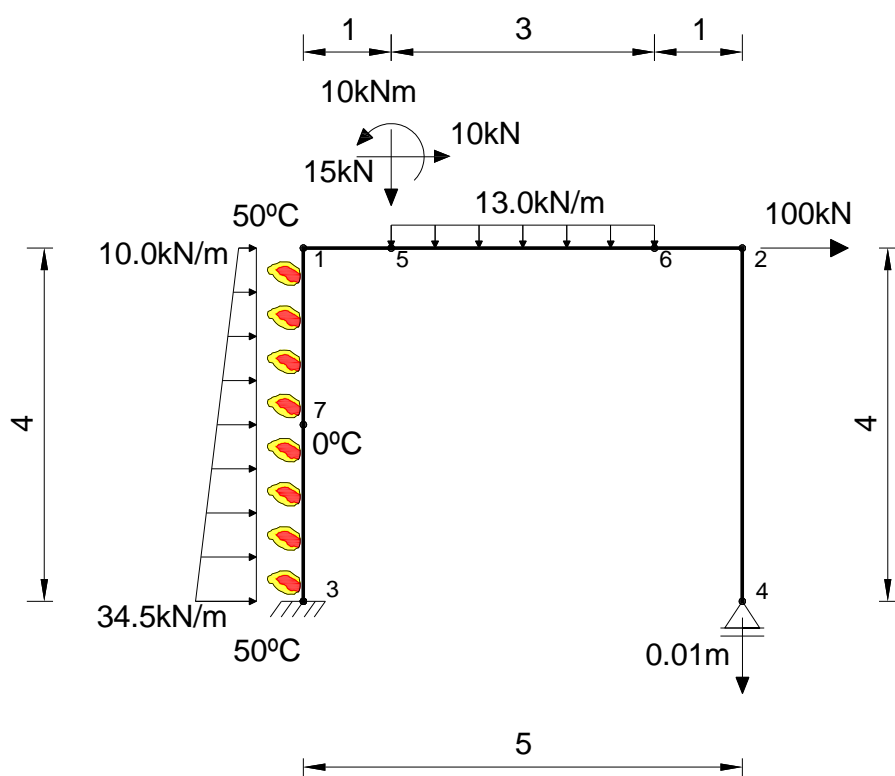


Figura 28 - Problema 2.13 adaptado do livro “Análise Matricial e Implementação Computacional”

Tabela 11 – Dados do problema 3

## Propriedades físicas e geométricas

<b>E<sub>material</sub></b>	210.10 <sup>5</sup> KN/m <sup>2</sup>
<b>A<sub>1</sub></b>	0.5 m <sup>2</sup>
<b>I<sub>z1</sub></b>	4,1667.10 <sup>-2</sup> m <sup>4</sup>

As Figuras 29 e 30 representam os Diagramas de Esforço Normal, com informações fornecidas pelo FTOOL e pelo Programa Desenvolvido respectivamente, tendo seus valores em kN.

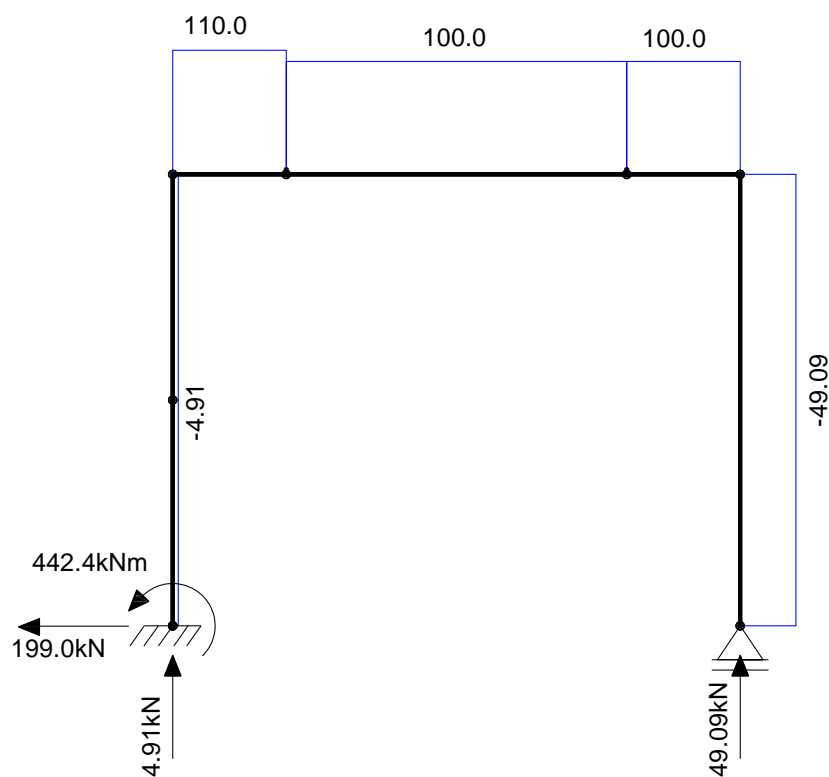


Figura 29 – Problema 3 - diagrama de Esforço Normal (kN) – Ftool

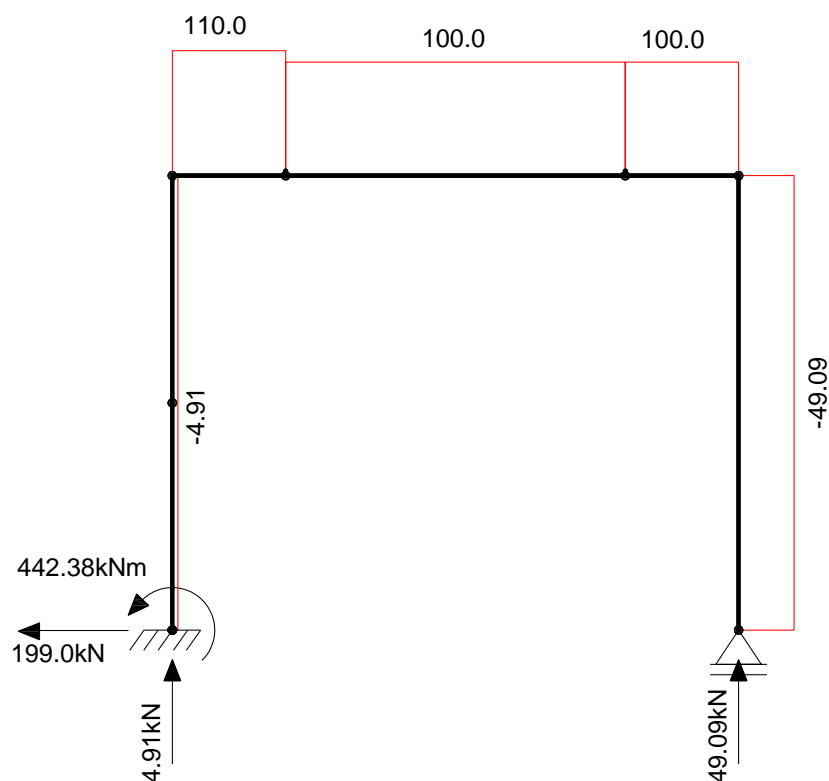


Figura 30 – Problema 3 - diagrama de Esforço Normal (kN) – programa desenvolvido

As Figuras 31 e 32 representam os diagramas de Esforço Cortante, com informações fornecidas pelo FTOOL e pelo programa desenvolvido respectivamente, tendo seus valores em kN.

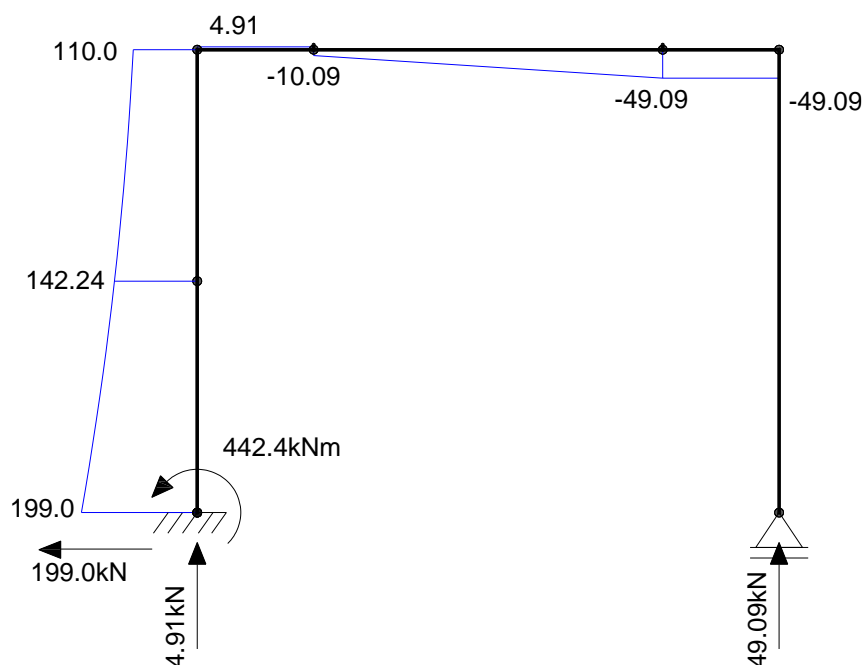


Figura 31 – Problema 3 - diagrama de Esforço Cortante (kN) – Ftool

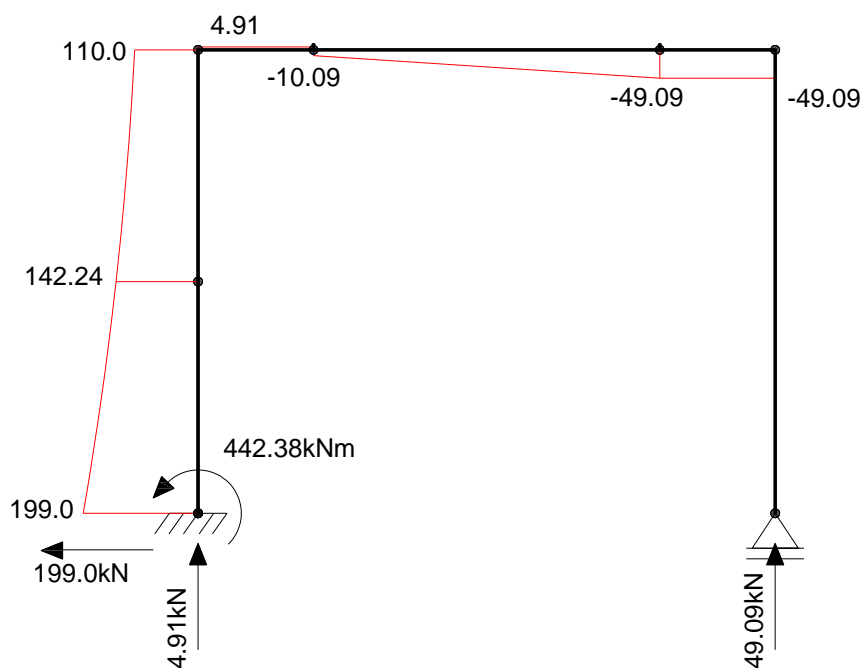


Figura 32 – Problema 3 - diagrama de Esforço Cortante (kN) – programa desenvolvido

Por fim, as Figuras 33 e 34 representam os diagramas de Momento Fletor, com informações fornecidas pelo FTOOL e pelo programa desenvolvido respectivamente, tendo seus valores em kNm.

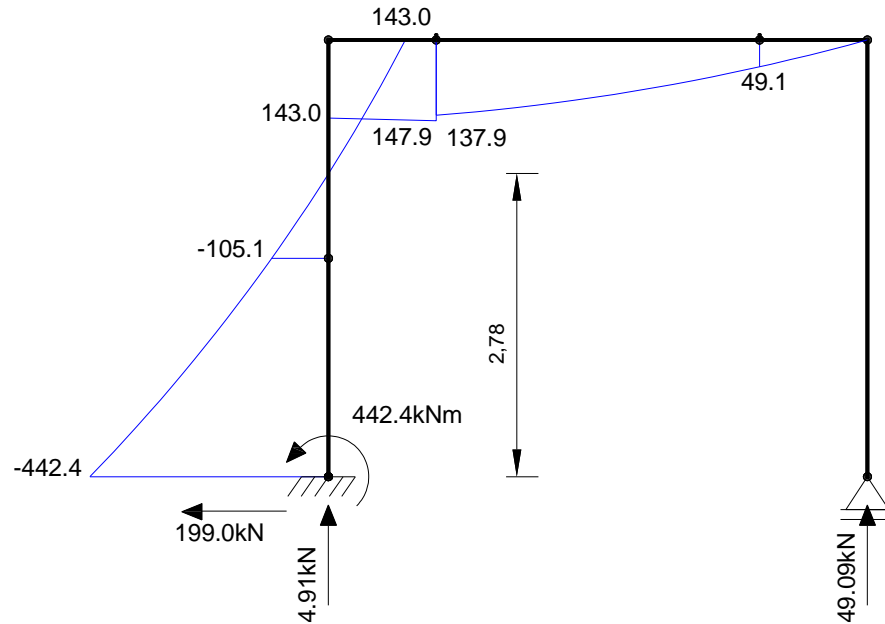


Figura 33 – Problema 3 - diagrama de Momento Fletor (kNm) – Ftool

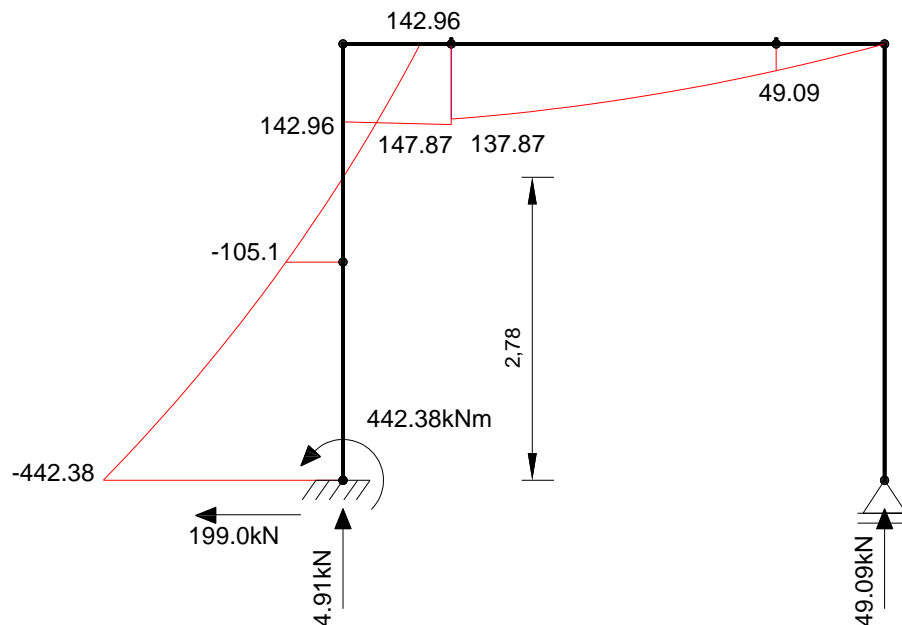


Figura 34 – Problema 3 - diagrama de Momento Fletor (kNm) – programa desenvolvido

A seguir, as tabelas comparativas com informações do Problema 3 fornecidas pelo FTOOL e pelo programa desenvolvido. As tabelas contêm informações acerca dos deslocamentos nodais, reações de apoio e esforços internos, expressados através das Tabelas 12, 13 e 14 respectivamente.

Tabela 12 – Comparativo para deslocamentos

<b>Deslocamentos (u)</b>							
<b>Nº</b>	<b>Programa desenvolvido</b>			<b>FTOOL</b>			<b>Desvio (%)</b>
	<b>ux (m)</b>	<b>uy (m)</b>	<b>uz (rad)</b>	<b>ux (m)</b>	<b>uy (m)</b>	<b>uz (rad)</b>	
<b>1</b>	5,98E-03	9,981E-04	-2,549E-03	5,98E-03	9,981E-04	-2,549E-03	0,00
<b>2</b>	6,028E-03	-1,002E-02	-2,001E-03	6,028E-03	-1,002E-02	-2,001E-03	0,00
<b>3</b>	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00
<b>4</b>	-1,974E-03	-1,000E-02	-2,001E-03	-1,974E-03	-1,000E-02	-2,001E-03	0,00
<b>5</b>	5,990E-03	-1,468E-03	-2,383E-03	5,990E-03	-1,468E-03	-2,383E-03	0,00
<b>6</b>	6,019E-03	-8,009E-03	-2,029E-03	6,019E-03	-8,009E-03	-2,029E-03	0,00
<b>7</b>	1,727E-03	4,982E-04	1,602E-02	1,727E-03	4,982E-04	1,602E-02	0,00

Tabela 13 – Comparativo Reações de Apoio

<b>Reações de Apoio</b>							
<b>Nó</b>	<b>Programa Desenvolvido</b>			<b>FTOOL</b>			<b>Desvio (%)</b>
	<b>Rx (kN)</b>	<b>Ry (kN)</b>	<b>Rz (kNm)</b>	<b>Rx (kN)</b>	<b>Ry (kN)</b>	<b>Rz (kNm)</b>	
<b>3</b>	-199,0	4,91	442,38	-199,0	4,91	442,38	0,000
<b>4</b>	0,00	49,09	0,00	0,00	49,09	0,00	0,000



Tabela 14 – Comparativo Esforços Internos

<b>Esforços internos</b>						
<b>Elemento</b>	<b>Programa desenvolvido</b>					
	<b>N<sub>i</sub> (kN)</b>	<b>V<sub>i</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>i</sub> (kNm)</b>	<b>N<sub>f</sub> (kN)</b>	<b>V<sub>f</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>f</sub> (kNm)</b>
<b>1</b>	110,0	4,91	142,96	110,0	4,91	147,87
<b>2</b>	-4,91	199,0	-442,38	-4,91	142,24	-105,1
<b>3</b>	-49,09	0,00	0,00	-49,09	0,00	0,00
<b>4</b>	100,0	-10,09	137,87	100,0	-49,09	49,09
<b>5</b>	100,0	-49,09	49,09	100,0	-49,09	0,00
<b>6</b>	-4,91	142,24	-105,1	-4,91	110,0	142,96
	<b>FTOOL</b>					
	<b>N<sub>i</sub> (kN)</b>	<b>V<sub>i</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>i</sub> (kNm)</b>	<b>N<sub>f</sub> (kN)</b>	<b>V<sub>f</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>f</sub> (kNm)</b>
<b>1</b>	110,0	4,91	143,00	110,0	4,91	147,9
<b>2</b>	-4,91	199,0	-443,0	-4,91	142,24	-105,1
<b>3</b>	-49,1	0,00	0,00	-49,1	0,00	0,00
<b>4</b>	100,0	-10,1	137,9	100,0	-49,1	49,1
<b>5</b>	100,0	-49,1	49,1	100,0	-49,1	0,00
<b>6</b>	-4,91	142,24	-105,1	-4,91	110,0	143,0

# Capítulo 5

## Conclusão

De posse dos resultados, vê-se que o programa implementado está funcionando corretamente o que possibilita a sua utilização para análise de sistemas estruturais reticulados planos. Problemas retirados de bibliografias consagradas no meio acadêmico foram analisados com o programa computacional desenvolvido no trabalho de conclusão de curso. Para validação do programa, compararam-se grandezas básicas de análise estrutural, tais como deslocamentos nodais, esforços normais, cortantes, momento fletores e reações de apoio, tendo, em geral, boa concordância entre os resultados observados no programa computacional desenvolvido e o software FTOOL.

No Problema 1, visa-se a validação de aspectos básicos de um programa de análise estrutural, cuja importância é fundamental para a funcionalidade do programa. Portanto, aspectos como carregamento concentrados básicos, elementos inclinados, uso de diferentes seções e condições de contorno básicos foram testados. Como resultado, a validação do programa desenvolvido para o Problema 1 foi bastante positiva, havendo nenhum desvio entre os dados comparados entre os programas.

No Problema 2, aspectos como carregamento triangular, descontinuidade em extremidade de barra, e aspectos básicos também tratados no Problema 1, foram validados. O programa computacional desenvolvido novamente demonstrou ser correto, tendo desvios apenas nos deslocamentos nodais, porém, insignificantes, pois trata-se de diferenças de um milésimo de milímetro ( $10^{-6}$  metros), sendo, portanto, desprezível.

Como último problema apresentado, o Problema 3 é adaptado, de modo que o programa computacional desenvolvido possa ser validado para todos os tipos de carregamentos implementados, como por exemplo, elementos submetidos à variação de temperatura e a recalque de apoio. Novamente, os resultados obtidos entre os programas não apresentaram desvios significativos, havendo um desvio na reação de apoio na ordem de 0,005% (0,02 KNm),

sendo novamente, desprezível, cuja provável causa seja arredondamento de casa decimais pelo FTOOL.

Para trabalhos futuros, sugere-se a expansão do algoritmo implementado, inserindo-se um módulo de geração automática de nós para facilitar a inserção de dados no arquivo de *input* como também para obter mais informações em seções não próximas às extremidades de elementos. Sugere-se ainda a implementação de módulos para seções de inércia variável (base e/ou altura variável ao longo do elemento) e também seção qualquer, ambas utilizando métodos de integração numérica como a de Gauss-Legendre, como também consideração do efeito cisalhante para seções retangulares, circulares, seções I e H, tubulares e qualquer. Por fim, sugere-se também o desenvolvimento de uma interface gráfica, similar à utilizada pelo FTOOL, por exemplo, de modo que a inserção de dados seja facilitada.

Ressalta-se que este trabalho de conclusão de curso foi de grande valia para o estudante, que se expôs a novas abordagens técnicas de temas tratados durante a graduação. Isso se refletiu, positivamente, no aumento do seu nível de conhecimento em engenharia. Ainda, nesse contexto, o uso de softwares utilizados no meio acadêmico e profissional como o FTOOL, utilizado neste trabalho para meros fins de validação das formulações implementadas. Naturalmente, isso será muito útil para a sua formação geral, em estruturas, visto que, em sua vida profissional futura, a utilização desses softwares será de fundamental importância, tanto no desenvolvimento de seus projetos de engenharia como em atividades acadêmicas.

# Referências

- ARGYRIS, J. H.; KELSEY, S. Energy Theorems and Structural Analysis. **Aircraft Engrg**, London, Outubro 1954.
- CHAPMAN, S. J. **EFORTRAN 90/95 for Scientists and Engineers**. Mcgraw-Hill College, 2003.
- DUNCAN, W. J.; COLLAR, A. R. A method for the solution of oscillations problems by matrices. **Phil. Mag.**, 1934. 865.
- DUNCAN, W. J.; COLLAR, A. R. Matrices applied to the motions of damped systems. **Phil. Mag.**, 1935. 197.
- FELIPPA, C. A. A Historical Outline of Matrix Structural Analysis: A Play in Three Acts. **Center for Aerospace Structures**, Boulder, Colorado, June 2000. 1-16.
- MARTHA, L. F. Análises de Estruturas. 1. ed. ed. [S.l.]: CAMPUS, 2010. p. 536.
- MARTHA, L.F. **FTOOL - Um programa gráfico-interativo para ensino de comportamento de estruturas**. Versão educacional 3.00, Rio de Janeiro, agosto de 2012.
- SORIANO, H. L. **Análise de Estruturas - Formulação Matricial e Implementação Computacional**. [S.l.]: Ciência Moderna, 2005.
- SORIANO, H. L. **Elementos Finitos - Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas**. [S.l.]: Ciência Moderna, 2009.
- SUSSEKIND, J. C. Curso de Análise Estrutural. 7. ed. [S.l.]: Editora Globo, 1973. Cap. 1, p. 1.
- TURNER, M. J. The direct stiffness method of structural analysis. **Structural and Materials Panel Paper, AGARD Meeting**, Aachen, Germany, 1959.
- WEAVER, W. J.; GERE, J. M. **Matrix Analysis of Framed Structures**. Second Ed. ed. New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1980.

# Anexo

## Arquivos de entrada e saída dos problemas do Capítulo 4

### PROBLEMA 1 - ENTRADA

nno,nel,nnoel,ndofn,ntm,nts,ndim,itypestruct  
5,4,2,3,1,2,2,1

Efeito Flexão e axial; Consideração do efeito cisalhante  
1,0

nu. nó,	coor x,	coor y,	coor z
1	0	0	0
2	-6	0	0
3	4	0	0
4	-3	-4	0
5	-1	-1.33	0

num. do elemento,	nó inicial,	nó final,	tipo de material,	tipo de secao
1	2	1	1	1
2	1	3	1	1
3	4	5	1	2
4	5	1	1	2

descontinuidades						
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1

intm,E(Mod. Long. Elast. KPA),coef de Poisson  
1 2.0E8 0.2 1.0E-5

ints,IZZ,A(Area),altura seção
1 0.00150.01 1
2 0.00180.03 1

nnc,nelc			
2	2		

nú. nó carregado	nnoc,	carga X GLOBAL!,	carga Y,	carga Z
1	0	-20	0	
5	0	-30	0	

carregamentos de elementos				
1	5			
0	-30	0	2	4

```

2      5
0      -20    0      2      2

```

nu. de nos com condições de contorno de deslocamento prescrito (nccdesl)

3

nó, restricao x, restricao y, restricao z,desl. prs x,y,z

```

2      1      1      1      0      0      0
3      1      1      1      0      0      0
4      1      1      1      0      0      0

```

### PROBLEMA 1 - SAÍDA

### ANÁLISE FEITA CONSIDERANDO OS EFEITOS: FLEXÃO E AXIAL SOMENTE ###

nó	coord x	coord y
1	0.000	0.000
2	-6.000	0.000
3	4.000	0.000
4	-3.000	-4.000
5	-1.000	-1.330

Elemento	Nó inicial	Nó final	Tipo do material	Tipo da seção
1	2	1	1	1
2	1	3	1	1
3	4	5	1	2
4	5	1	1	2

Elemento	Comprimento
1	6.000
2	4.000
3	3.336
4	1.664

Tipo do material	E	G	Coef. de Dilatação
1	0.200E+09	0.833E+08	0.100E-04

Tipo da seção	I	Área	Altura da Seção
1	0.00150	0.01000	1.00000
2	0.00180	0.03000	1.00000

# Vetor de deslocamentos nodais

```

-----
nó      dx      dy      dz
1      0.4160E-04  -0.9608E-04  0.1871E-04
2      0.0000E+00  0.0000E+00  0.0000E+00
3      0.0000E+00  0.0000E+00  0.0000E+00
4      0.0000E+00  0.0000E+00  0.0000E+00
5      0.5975E-04  -0.9363E-04  -0.1396E-04

```

# Reações de apoio

```

-----
nó      Rx      Ry      Rz
2      -13.87    24.76    33.34
3      -20.80    13.30   -18.00
4       34.67    61.94    17.16

```

# Esforços internos

nel	Ni	Vi	Mi	Nf	Vf	Mf
1	13.87	24.76	-33.34	13.87	-5.24	-4.79
2	-20.80	6.70	-4.80	-20.80	-13.30	-18.00
3	-70.36	9.39	-17.16	-70.36	9.39	14.15
4	-46.36	-8.51	14.15	-46.36	-8.51	-0.02

## PROBLEMA 2 - ENTRADA

nno,nel,nnoel,ndofn,ntm,nts,ndim,itypestruct  
6,7,2,3,1,1,2,1

Efeito Flexão e axial; Consideração do efeito cisalhante  
1,0

nu. nó,coor x,coor y, coor z  
1 0 0 0  
2 2 0 0  
3 1 1.74 0  
4 3 1.74 0  
5 2.5 0.87 0  
6 1 0 0

num. do elemento,nó inicial,nó final,tipo de material,tipo de secao  
1 1 6 1 1  
2 1 3 1 1  
3 2 3 1 1  
4 3 4 1 1  
5 5 4 1 1  
6 2 5 1 1  
7 6 2 1 1

descontinuidades  
1 1 1 0 1 1 1  
2 1 1 1 1 1 0  
3 1 1 1 1 1 1  
4 1 1 0 1 1 1  
5 1 1 1 1 1 0  
6 1 1 0 1 1 1  
7 1 1 1 1 1 0

intm,E(Mod. Long. Elast. KPA),coef de Poisson  
1 2.0E8 0.2 1.0E-5

ints,IZZ,A(Area),altura seção  
1 0.00150.01 1

nnc,nelc  
3 1

nú. nó carregado nnoc, valor da carga em X GLOBAL!, valor da carga em Y, valor da carga em Z ccno

3	10	-20	0
6	0	20	0
5	0	-20	0

Carregamentos de elementos

4	2
-30	

nu. de nos com condições de contorno de deslocamento prescrito (nccdesl)

3

nó, restricao x, restricao y, restricao z, desl. prs x,y,z

1	1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0

## PROBLEMA 2 - SAÍDA

### ANÁLISE FEITA CONSIDERANDO OS EFEITOS: FLEXÃO E AXIAL SOMENTE ###

nó	coord x	coord y
1	0.000	0.000
2	2.000	0.000
3	1.000	1.740
4	3.000	1.740
5	2.500	0.870
6	1.000	0.000
7	2.000	1.740

Elemento	Nó inicial	Nó final	Tipo do material	Tipo da seção
1	1	6	1	1
2	1	3	1	1
3	2	3	1	1
4	3	7	1	1
5	5	4	1	1
6	2	5	1	1
7	6	2	1	1
8	7	4	1	1

Elemento	Comprimento
1	1.000
2	2.007
3	2.007
4	1.000
5	1.003
6	1.003
7	1.000
8	1.000

Tipo do material	E	G	Coef. de Dilatação
1	0.200E+09	0.833E+08	0.100E-04



Tipo da seção	I	Área	Altura da Seção
1	0.00150	0.01000	1.00000

# Vetor de deslocamentos nodais

nó	dx	dy	dz
1	0.0000E+00	0.0000E+00	-0.7861E-05
2	0.0000E+00	0.0000E+00	0.2081E-05
3	0.6690E-05	-0.2002E-04	0.2081E-05
4	0.0000E+00	-0.4005E-04	0.7766E-05
5	0.2682E-05	-0.2658E-04	-0.9943E-05
6	0.0000E+00	0.1111E-04	0.0000E+00
7	0.3345E-05	-0.4045E-04	-0.1098E-04

# Reações de apoio

nó	Rx	Ry	Rz
1	6.97	2.12	0.00
2	6.97	47.88	0.00
4	-23.93	0.00	0.00

# Esforços internos

nel	Ni	Vi	Mi	Nf	Vf	Mf
1	0.00	-10.00	0.00	0.00	-10.00	-10.00
2	-13.98	0.00	0.00	-13.98	0.00	0.00
3	-20.62	0.00	0.00	-20.62	0.00	0.00
4	-6.69	10.00	0.00	-6.69	2.50	7.50
5	-25.93	-4.98	5.00	-25.93	-4.98	0.00
6	-43.27	4.98	0.00	-43.27	4.98	5.00
7	0.00	10.00	-10.00	0.00	10.00	0.00
8	-6.69	2.50	7.50	-6.69	-20.00	0.00

### PROBLEMA 3 - ENTRADA

```
nno,nel,nnoel,ndofn,ntm,nts,ndim,itypestruct
```

```
4,3,2,3,1,1,2,1
```

```
Efeito Flexão e axial; Consideração do efeito cisalhante
```

```
1,0
```

```
nu. nó,coor x,coor y, coor z
```

1	0	4	0
2	5	4	0
3	0	0	0
4	5	0	0

```
num. do elemento,nó inicial,nó final,tipo de material,tipo de secao
```

1	1	2	1	1
2	3	1	1	1
3	4	2	1	1

```
descontinuidades
```

1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1

intm,E(Mod. Long. Elast. KPA),coef de Poisson

1 2.1E7 0.2 1.0E-5

ints,IZZ,A(Area),altura seção

1 0.04166667 0.5 1

nnc,nelc

1 5

nú. nó carregado nnoc, valor da carga em X GLOBAL!, valor da carga em Y, valor da carga em Z ccno

2 100 0 0

carregamentos de elemento

2 6

0 25 50

2 1

-10

2 3

-24.5

1 5

10 -15 10 1 4

1 4

-13 2.5 2.5 3

nu. de nos com condições de contorno de deslocamento prescrito (nccdesl)

2

nó, restricao x, restricao y, restricao z,desl. prs x,y,z

3 1 1 1 0 0 0

4 0 1 0 0 -0.01 0

### PROBLEMA 3 - SAÍDA

### ANÁLISE FEITA CONSIDERANDO OS EFEITOS: FLEXÃO E AXIAL SOMENTE ###

nó	coord x	coord y
1	0.000	4.000
2	5.000	4.000
3	0.000	0.000
4	5.000	0.000
5	1.000	4.000
6	4.000	4.000
7	0.000	2.000

Elemento	Nó inicial	Nó final	Tipo do material	Tipo da seção
1	1	5	1	1
2	3	7	1	1
3	4	2	1	1
4	5	6	1	1
5	6	2	1	1
6	2	1	1	1

Elemento	Comprimento
1	1.000
2	2.000
3	4.000
4	3.000
5	1.000
6	2.000

Tipo do material	E	G	Coef. de Dilatação
1	0.210E+08	0.875E+07	0.100E-04

Tipo da seção	I	Área	Altura da Seção
1	0.04167	0.50000	1.00000

## # Vetor de deslocamentos nodais

nó	dx	dy	dz
1	0.5980E-02	0.9981E-03	-0.2549E-02
2	0.6028E-02	-0.1002E-01	-0.2001E-02
3	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
4	-0.1974E-02	-0.1000E-01	-0.2001E-02
5	0.5990E-02	-0.1468E-02	-0.2383E-02
6	0.6019E-02	-0.8009E-02	-0.2029E-02
7	0.1727E-02	0.4982E-03	0.1602E-02

## # Reações de apoio

nó	Rx	Ry	Rz
3	-199.00	4.91	442.38
4	0.00	49.09	0.00

## # Esforços internos

nel	Ni	Vi	Mi	Nf	Vf	Mf
1	110.00	4.91	142.96	110.00	4.91	147.87
2	-4.91	199.00	-442.38	-4.91	142.24	-105.1
3	-49.09	0.00	0.00	-49.09	0.00	0.00
4	100.00	-10.09	137.87	100.00	-49.09	49.09
5	100.00	-49.09	49.09	100.00	-49.09	0.00
6	-4.91	142.24	-105.1	-4.91	110.00	142.96