



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**

# **ROTINA COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE DE TRELIÇAS ESPACIAIS**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**Bruna Moro Druzian**

**Santa Maria, RS, Brasil**

**Julho de 2015**

# **ROTINA COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE DE TRELIÇAS ESPACIAIS**

**por**

**Bruna Moro Druzian**

**Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em  
Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), como  
requisito parcial para obtenção do grau de  
Engenheiro Civil**

**Orientador: Prof. Dr. João Kaminski Junior**

**Santa Maria, RS, Brasil**

**Julho de 2015**

**Universidade Federal de Santa Maria  
Centro de Tecnologia  
Curso de Engenharia Civil**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,  
aprova o Trabalho de Conclusão de Curso

**ROTINA COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE DE TRELIÇAS  
ESPACIAIS**

elaborado por  
**Bruna Moro Druzian**

como requisito parcial para a obtenção do grau de  
Engenheiro Civil

**Comissão examinadora:**

---

**João Kaminski Junior, Dr.**  
(Presidente/Orientador)

---

**Larissa Degliuomini Kirchhof, Dr.a**  
(Universidade Federal de Santa Maria)

---

**Marco Antônio Silva Pinheiro, Dr.**  
(Universidade Federal de Santa Maria)

**Santa Maria, 21 de julho de 2015**

*"A vida não oferece  
Promessas, nem garantias...  
Apenas possibilidades  
e oportunidades."*

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida, e não somente nestes anos como universitária, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer.

Ao meu pai, Marivaldo Iop Druzian, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

A minha mãe, Zenira Teresinha Moro, por servir de exemplo.

A minha família pelo apoio. Aos meus primos e tios pelo mais puro carinho.

Agradeço a todos os professores do curso de engenharia civil por me proporcionarem o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional, por tanto que se dedicaram a mim, não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender. A palavra mestre, nunca fará justiça aos professores dedicados aos quais sem nominar terão os meus eternos agradecimentos.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, eivado pela acendrada confiança no mérito e ética aqui presentes.

Ao meu orientador João Kaminski Junior, pela oportunidade, aprendizado, suporte e incentivo.

Aos amigos de ensino fundamental e médio, Diego Rivero, Dimitrius Norbert, Luiza Arend e Thais Boelter por fortalecerem a nossa amizade sempre.

Aos amigos que mudaram a minha vida, Glaucio Souza e Thiago Palharini, pelas palavras boas proferidas e o incentivo.

Aos amigos de faculdade André Venturini, Diego Adorna, Fernando Zucchi, Francisco Dalosto, Lucas Tassinari, Tais Gomes e Thamila Brum, por seguirem comigo ao longo desta caminhada.

Aos amigos italianos Andrea Ciardulli, Carol Ciardulli, Andrea Fabbri, Simone Bonaduce, Monique Grechi e Giuseppe Gonçalves pela "amicizia".

Ao meu orientador de estágio na Itália, Michelle Chiarato, pela oportunidade e conhecimento dados.

Aos colegas de trabalho da Sarkis Engenharia Estrutural, especialmente ao Professor Paulo Sarkis por ter me passado amplos conhecimentos.

E a todos que direta ou indiretamente, fizeram parte da minha formação tanto pessoal como profissional.

## **RESUMO**

Trabalho de Conclusão de Curso  
Curso de Engenharia Civil  
Universidade Federal de Santa Maria

### **ROTINA COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE DE TRELIÇAS ESPACIAIS**

AUTOR: BRUNA MORO DRUZIAN

ORIENTADOR: Prof. Dr. JOÃO KAMINSKI JUNIOR.

Santa Maria, 21 de julho de 2015.

Dada à complexidade do projeto e execução das estruturas, torna-se cada vez mais imprescindível à utilização de ferramentas que agilizem esses processos. O computador, um instrumento de uso recorrente, é uma destas ferramentas que agiliza e dinamiza o trabalho do profissional, embora não dispense uma análise detalhada e criteriosa dos resultados apresentados pelo mesmo. Neste contexto, este trabalho objetiva elaborar uma rotina computacional, em linguagem Fortran, para a análise de treliças espaciais, baseado no método da rigidez, com o propósito de determinar a resposta da estrutura mostrando os resultados de todas as etapas da solução do problema, ou seja, desde a montagem das matrizes de rigidez de barra, em coordenadas locais e globais, das matrizes de rotação das barras, passando pela geração da matriz de rigidez global da estrutura, dos vetores de carga, até as matrizes envolvidas na solução do sistema de equações pelo método Cholesky e os vetores de resultados, em termos de deslocamentos dos nós, reações nos apoios e esforços nas barras. Por fim, esses resultados deverão ser confrontados com aqueles fornecidos por outros programas de análise de estruturas como, por exemplo, o MASTAN2. Assim, feitas as comparações é possível concluir a aplicabilidade e validade da rotina computacional.

Palavras-chave: Treliças espaciais; estruturas reticuladas; análise estrutural; método da rigidez.

## **ABSTRACT**

Term paper  
Civil Engineering Course  
Universidade Federal de Santa Maria

### **COMPUTER ROUTINE FOR ANALYSIS SPACE TRUSSES**

**AUTHOR: BRUNA MORO DRUZIAN**

**Tutor: Dr. JOÃO KAMINSKI JUNIOR.**

**Santa Maria, 2015 July 17th.**

The increase complexity of designing and constructing structures has made it increasingly essential to use tools that streamline these processes. The computer is one of those tools that speeds up and streamlines the work of the engineering professionals. However it does not exempt a detailed and careful analysis of the results presented at the end of the process. This project presents a computational routine in Fortran language for analysis of spatial trusses based on the stiffness method, with the purpose of calculating the structure. The outcome shows in detail all steps, therefore, producing a more comprehensive analysis. The user compares the information contained in its calculation memory to the data provided by the program in a text file, which contains all the logic sequence which achieves a dynamic teaching program.

**Keywords:** Space trusses; reticulated structure; Structural analysis; method of stiffness.

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>2 REVISÃO DE LITERATURA</b>	<b>11</b>
2.1 Conceitos fundamentais	11
2.2 Treliças espaciais	13
2.3 Método dos deslocamentos aplicado a treliças espaciais	15
2.3.1 Dados da estrutura	15
2.3.2 Estruturas com barras inclinadas	15
2.3.2.1 Rotação no espaço	16
2.3.3 Numeração arbitrária e numeração prioritária	20
2.3.4 Determinação da matriz de rigidez de barra no sistema de coordenadas local	22
2.3.5 Determinação da matriz de rigidez de barra no sistema de coordenadas global	27
2.3.6 Montagem da matriz de rigidez global da treliça espacial	28
2.3.7 Determinação do vetor de cargas	29
2.3.8 Sistema de equações para o cálculo dos deslocamentos livres	29
2.3.9 Determinação das reações de apoio	30
2.3.10 Cálculo das ações de extremidade de barra	30
<b>3 O PROGRAMA DE TRELIÇAS ESPACIAIS</b>	<b>32</b>
3.1 Informações gerais	32
3.2 Arquivos de dados	32
3.2.1 O Arquivo 'Entrada.txt'	32
3.2.2 O Arquivo '[nome_da_estrutura_dados].txt'	33
3.2.3 O Arquivo '[nome_da_estrutura_saida].txt'	34
<b>4 EXEMPLO NUMÉRICO DO PROGRAMA Trelicas_Espaciais</b>	<b>35</b>
4.1 Exemplo de aplicação do programa Trelicas_Espaciais	35
<b>5 ANÁLISE DE RESULTADOS</b>	<b>37</b>
<b>6 CONCLUSÕES</b>	<b>41</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>43</b>
<b>APÊNDICE A – Fluxograma de Treliças Espaciais</b>	<b>44</b>
<b>APÊNDICE B - Manual do Usuário do Programa Trelicas_Espaciais</b>	<b>50</b>
<b>ANEXO 1 – Método Cholesky</b>	<b>55</b>
<b>ANEXO 2 - Saída de resultados do programa Trelicas_espaciais</b>	<b>57</b>



# 1 INTRODUÇÃO

Desde a década de 60, o computador tem sido utilizado como instrumento para análise de estruturas. Embora nesta época fosse, principalmente, usado em institutos de pesquisa e universidades, nos anos 70, o seu emprego passou a ser corrente, e nos anos que procederam, com a criação de programas gráficos interativos, a análise de estruturas passou a ser feita com o uso de programas computacionais.

A análise computacional não permite ao calculista abster-se das teorias que descrevem o comportamento estrutural, mas enseja interligá-las de modo a facilitar a sua aplicação.

É importante salientar que o sistema computacional só terá validade à medida que o profissional saiba utilizar as ferramentas de modo a obter o resultado esperado. Mister se faz conhecer os principais métodos alavancados à teoria e ao cálculo estrutural.

Conforme Martha (2010) denomina-se análise estrutural a etapa do projeto estrutural correspondente à determinação de esforços internos e externos (reações), e as correspondentes tensões, da mesma maneira que se determinam os deslocamentos e suas respectivas deformações na estrutura analisada. A devida análise é realizada para os possíveis estágios de carregamento e solicitações, os quais são previamente determinados.

O projeto estrutural objetiva a concepção de uma estrutura que satisfaça todas as necessidades para as quais esta será dimensionada, levando-se em conta a segurança, a utilização, a economia, a estética, o ambiente, a construção e a legalidade.

Para proceder-se com a análise estrutural é necessária a criação de um modelo estrutural cujo comportamento da estrutura seja pensado para diferentes solicitações. O modelo estrutural constitui-se em um modelo matemático no qual se instituem todas as hipóteses realizadas para o comportamento da estrutura. Exemplificam-se: equilíbrio entre forças e tensões, as relações entre deslocamentos e deformações, o comportamento dos materiais componentes na estrutura quando submetidos às solicitações, e para as condições de interação da estrutura com outros sistemas. Essa previsão de comportamento estrutural é atinente a sua satisfatoriedade frente às condições de segurança e uso (MARTHA, 2010).

Ainda segundo Martha (2010), as teorias desenvolvidas que descrevem o comportamento estrutural iniciaram-se com o estudo de estruturas reticuladas (estruturas formadas por barras). Os métodos clássicos amplamente usados para a análise de estruturas reticuladas são: o Método das Forças (ou da Flexibilidade) e o Método dos Deslocamentos

(ou da Rigidez). O primeiro não é muito comum na análise computacional devido à necessidade de intervenção humana ao longo do processo de cálculo.

Portanto, a análise de estruturas em sistemas computacionais abrange amplamente o método dos deslocamentos, dada sua adaptação às principais linguagens de programação.

O método dos deslocamentos é apropriado para análise de elementos como vigas, treliças (planas ou espaciais), pórticos (planos ou espaciais), grelhas, entre outros.

Um caso de aplicação das estruturas reticuladas espaciais são as treliças espaciais. Essas têm sido muito utilizadas, principalmente como coberturas em obras de grande porte. Entre suas características estão: grande rigidez, baixo peso, possibilidade de pré-fabricação, facilidade de transporte e de montagem, questões que as tornam muito competitivas quando comparadas a outras soluções estruturais.

As treliças espaciais estão sendo cada vez mais empregadas no mercado da construção civil, sendo essas aplicadas de diferentes formas. Estruturas reticuladas tridimensionais são estruturas formadas por barras (elementos lineares) dispostas em vários planos. O foco deste trabalho é o desenvolvimento de um programa computacional, em linguagem Fortran, para a análise de treliças espaciais, com propósito didático.

Desse modo, este trabalho tem como principal objetivo o desenvolvimento de uma rotina computacional capaz de analisar uma treliça espacial, definida pelo usuário, por meio do método da rigidez, de modo a corroborar para o seu entendimento didático. O usuário tem como resultado todos os meandros da resolução deste tipo de estrutura, dispondo dos valores de todas as matrizes e vetores envolvidos. Os resultados gerados pelo programa são comparados com os do *software* MASTAN2, ratificando a validade e aplicabilidade da rotina computacional.

O presente trabalho se justifica, uma vez que para um melhor entendimento de treliça espacial, necessário é o desenvolvimento de um programa computacional a fim de visualizar e compreender com mais afinco os passos da resolução do método dos deslocamentos, bem como propiciar isso de uma maneira rápida e simplificada.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

### 2.1 Conceitos fundamentais

O método das forças (método da flexibilidade) e o método dos deslocamentos (método da rigidez) têm sua formulação matemática bastante semelhante. A escolha do método de análise deve-se a sua facilidade de aplicação para diferentes composições estruturais. O método dos deslocamentos serve tanto para estruturas isostáticas quanto hiperestáticas, sendo amplamente empregado na análise das segundas, principalmente quando se tem um elevado grau de indeterminação estática.

O Quadro 1 resume as principais diferenças entre os métodos acima expostos.

MÉTODO DAS FORÇAS	MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS
<p><i>Idéia básica:</i></p> <p>Determinar, dentro do conjunto de soluções em forças que satisfazem as condições de equilíbrio, quais das soluções faz com que as condições de compatibilidade também sejam satisfeitas.</p>	<p><i>Idéia básica:</i></p> <p>Determinar, dentro do conjunto de soluções em deslocamentos que satisfazem as condições de compatibilidade, qual das soluções faz com que as condições de equilíbrio também sejam satisfeitas.</p>
<p><i>Metodologia:</i></p> <p>Superpor uma série de soluções estaticamente determinadas (isostáticas) que satisfazem as condições de equilíbrio da estrutura para obter uma solução final que também satisfaz as condições de compatibilidade.</p>	<p><i>Metodologia:</i></p> <p>Superpor uma série de soluções que cineticamente determinadas (configurações deformadas conhecidas) que satisfazem as condições de compatibilidade da estrutura para obter uma solução final que também satisfaz as condições de equilíbrio.</p>
<p><i>Incógnitas:</i></p> <p>Hiperestáticos: forças e momentos associados a vínculos excedentes à determinação estática da estrutura.</p>	<p><i>Incógnitas:</i></p> <p>Deslocabilidades: componentes de deslocamentos e rotações nodais que definem a configuração deformada da estrutura.</p>

Quadro 1 – Comparação entre os métodos das forças e dos deslocamentos.  
MARTHA 2010, p. 95.

<p><i>Número de incógnitas:</i></p> <p>É o número de incógnitas excedentes das equações de equilíbrio, denominado <i>grau de hiperestaticidade</i>.</p>	<p><i>Número de incógnitas:</i></p> <p>É o número de incógnitas excedentes das equações de compatibilidade, denominado <i>grau de hipergeometria</i>.</p>
<p><i>Estrutura auxiliar utilizada nas soluções básicas:</i></p> <p>Sistema principal (SP): estrutura estaticamente determinada (isostática) obtida da estrutura original pela eliminação dos vínculos excedentes associados aos hiperestáticos. Essa estrutura auxiliar viola condições de compatibilidade da estrutura original.</p>	<p><i>Estrutura auxiliar utilizada nas soluções básicas:</i></p> <p>Sistema hipergeométrico (SH): estrutura cineticamente determinada (estrutura com configuração deformada conhecida) obtida da estrutura original pela adição dos vínculos necessários para impedir as deslocabilidades. Essa estrutura auxiliar viola condições de equilíbrio da estrutura original.</p>
<p><i>Equações finais:</i></p> <p>São equações de compatibilidade expressas em termos dos hiperestáticos. Essas equações recompõem as condições de compatibilidade violadas nas soluções básicas.</p>	<p><i>Equações finais:</i></p> <p>São equações de equilíbrio expressas em termos das deslocabilidades. Essas equações recompõem as condições de equilíbrio violadas nas soluções básicas.</p>
<p><i>Termos de carga das equações finais:</i></p> <p>Deslocamentos e rotações nos pontos dos vínculos liberados no SP provocados pela solicitação externa (carregamento).</p>	<p><i>Termos de carga das equações finais:</i></p> <p>Forças e momentos (reações) nos vínculos adicionais no SH provocados pela solicitação externa (carregamento).</p>
<p><i>Coeficientes das equações finais:</i></p> <p>Coeficientes de flexibilidade: deslocamentos e rotações nos pontos dos vínculos liberados no SP provocados por hiperestáticos com valores unitários atuando isoladamente.</p>	<p><i>Coeficientes das equações finais:</i></p> <p>Coeficientes de rigidez: Forças e momentos nos vínculos adicionais no SH para impor configurações deformadas com deslocabilidades isoladas com valores unitários.</p>

Quadro 1 – Comparação entre os métodos das forças e dos deslocamentos.  
MARTHA 2010, p. 95.

Sem dúvida, o método da rigidez possui maior adaptabilidade à programação automática que o método da flexibilidade, uma vez que nesse todos os deslocamentos são restringidos e só existe um sistema principal. Contrariamente, no método das forças introduzem-se algumas liberações para a obtenção da estrutura isostática, podendo existir mais de um sistema principal.

## 2.2 Treliças espaciais

Treliças espaciais são estruturas reticuladas espaciais. Suas barras são definidas em um espaço de eixos cartesianos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , as barras e as cargas podem estar em qualquer direção no espaço e as ligações dessas barras são rotuladas. A célula mínima para a criação de uma treliça é um tetraedro, em três dimensões, definido como um simplex de ordem 3 (ou 3-simplex). Conforme MARTHA (2010):

Uma *treliça* é um modelo estrutural reticulado em que todas as ligações existentes entre barras são articuladas, isto é, existem rótulas em todos os nós. Na análise de uma treliça, as cargas são consideradas atuantes diretamente sobre os nós. A consequência disso, em conjunto com a hipótese de ligações articuladas, é que uma treliça apresenta apenas esforços internos axiais (esforços normais de tração ou compressão) p. 30.

Treliças planas têm suas barras agrupadas em um mesmo plano de eixos cartesianos  $X$  e  $Y$ . Um exemplo de treliça plana é mostrado na Figura 1.

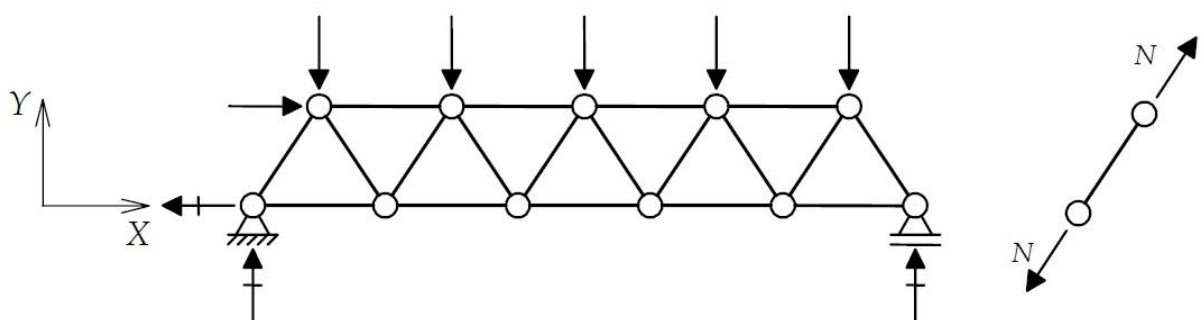


Figura 1 – Eixos globais, cargas, reações de apoio e esforços internos normais de uma treliça plana.  
WEST apud MARTHA, 1989, p.30.

Os esforços axiais existentes em uma treliça podem ser entendidos através de uma barra isolada, como indicado na Figura 1. Visto que a ligação entre as barras é rotulada e não

existem cargas aplicadas nas barras, os momentos fletores são nulos, assim, o esforço interno na barra possui necessariamente a direção axial (esforço normal  $N$  indicado na Figura 1).

Contudo, as ligações articuladas são hipotéticas (diversas vezes não existem articulações nos nós), desta forma, esta é uma simplificação para o comportamento real da estrutura. A simplificação é justificada, dado que os eixos das barras concorrem praticamente em um único ponto em cada ligação, como mostrado na Figura 2.

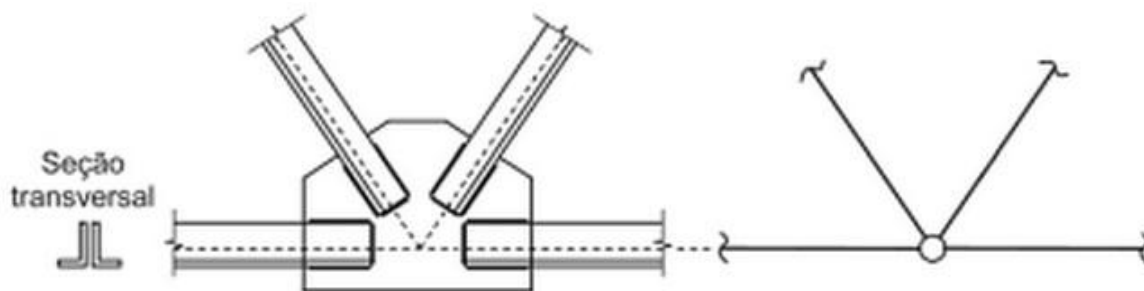


Figura 2 – Ligação rígida de barras em treliça e modelo de nó com articulação completa.  
SÜSSEKIND *apud* MARTHA, 1977, p.31.

Na Figura 2, mostra-se uma ligação rígida entre as barras de uma treliça, as barras possuem uma seção transversal em cantoneira dupla e estão soldadas por uma chapa. A execução dessa ligação é feita de maneira que os eixos das barras (linhas tracejadas) converjam em apenas um ponto. Se a ligação em um nó de treliça apresenta-se dessa forma ou aproximadamente, é comprovado experimentalmente que o comportamento estrutural é dado por esforços internos axiais. Dada à condição, utiliza-se uma rótula completa no modelo estrutural.

As barras da treliça apresentam peso próprio, o que violaria a hipótese de que existem apenas cargas aplicadas diretamente sobre os nós da treliça. Essa aproximação no modelo estrutural é respeitada pela configuração das ligações com os eixos das barras convergindo em um ponto. Desse modo, o efeito global de transferência de cargas através de esforços normais prevalece, isto é, os esforços cortantes e momentos fletores são ínfimos quando comparados aos esforços normais.

A utilização de treliças espaciais é muito recente, sua primeira aplicação comercial aconteceu na década de 30 pela indústria alemã MERO. Na década de 60 surgiram outras empresas européias e americanas que implementaram essas estruturas espaciais. Entre as décadas de 60 e 70, no Brasil, foi construída no Centro de Exposições do Anhembi, em São

Paulo, a primeira treliça espacial em grandes dimensões (Figura 3). Este foi considerado um marco na engenharia e arquitetura nacional, impulsionando o uso dessas estruturas.



Figura 3 – Treliça espacial, totalmente montada no chão do Centro de Exposições do Anhembi dias antes de ser erguida por guindastes. (Fonte: <http://www.ebanataw.com.br/trelica/trelica.php>)

## 2.3 Método dos deslocamentos aplicado a treliças espaciais

### 2.3.1 Dados da estrutura

Para a análise de uma treliça espacial através do método dos deslocamentos necessário se faz a informação sobre os dados da estrutura. Estes dados são elementos de um pré-projeto ou definidos por um calculista.

É indispensável o conhecimento da geometria, o número de nós e de barras da estrutura, as condições de apoio, as ações externas, as propriedades físicas do material e a área da seção transversal das barras.

### 2.3.2 Estruturas com barras inclinadas

Em vigas contínuas todas as barras estão contidas no mesmo plano e no mesmo eixo horizontal, sendo denominadas colineares. No caso das treliças, pórticos e grelhas (estruturas

reticuladas), as barras possuem qualquer orientação (direção), podendo estas ser situadas no plano ou no espaço. Para obter uma solução adequada para essas barras deve-se imaginar um vetor  $\vec{V}$  qualquer, referenciado a um sistema de coordenadas no espaço, no caso de estruturas espaciais, denominado sistema de coordenadas global  $X - Y - Z$ , e um sistema de coordenadas alternativo, denominado local  $x^L - y^L - z^L$ , situado na mesma origem do sistema global.

### 2.3.2.1 Rotação no espaço

A matriz de rigidez de um elemento de barra é obtida em um sistema denominado de local, bem como as forças nodais equivalentes aos carregamentos distribuídos na barra. No entanto, o equilíbrio da estrutura é atingido no sistema global de referência.

Quando se deseja passar as componentes de dado vetor de um sistema de coordenadas global para um sistema de coordenadas local, ou vice-versa, deve-se ter o conhecimento do ângulo formado (Figura 4) entre os sistemas local e global, em que a rotação acontece entre sistemas de coordenadas contidos no mesmo espaço ( $X'-Y'-Z'$ ). Essa transformação é feita através da matriz de rotação que, quando aplicada aos deslocamentos globais, fornece os deslocamentos locais. Para uma barra genérica ' $i$ ' no espaço, esta matriz é definida da seguinte forma:

$$r^i = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\beta & \sin\beta & \sin\alpha \cdot \cos\beta \\ -\cos\theta \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta & \cos\theta \cdot \cos\beta & -\cos\theta \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta + \sin\theta \cdot \cos\alpha \\ \sin\theta & -\sin\theta \cdot \cos\beta & \sin\alpha \cdot \sin\theta \cdot \sin\beta + \cos\theta \cdot \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (1)$$

Em que  $\theta$  é o ângulo da barra do sistema em eixos locais para o sistema global, medido no sentido anti-horário conforme a Figura 4.



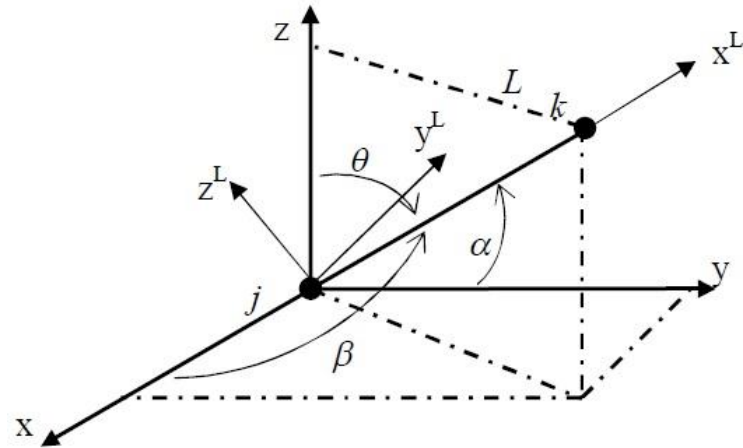


Figura 4 – Ângulos em relação aos eixos locais da barra no espaço.

Por trigonometria tem-se que, definindo-se  $L_x = x_k - x_j$ ,  $L_y = y_k - y_j$ ,  $L_z = z_k - z_j$  e  $L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}$ , chega-se:

$$\cos(\alpha) = \frac{L_x}{L}, \cos(\beta) = \frac{L_y}{L} \text{ e } \cos(\theta) = \frac{L_z}{L} \quad (2)$$

A Figura 5 mostra uma barra de treliça espacial no sistema global e a Figura 6 mostra a transformação da barra da treliça espacial do sistema global para o sistema local.

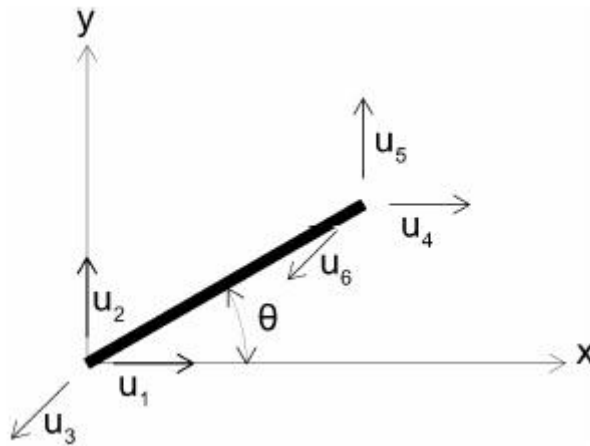


Figura 5 – Deslocamentos da barra de treliça espacial no sistema global.

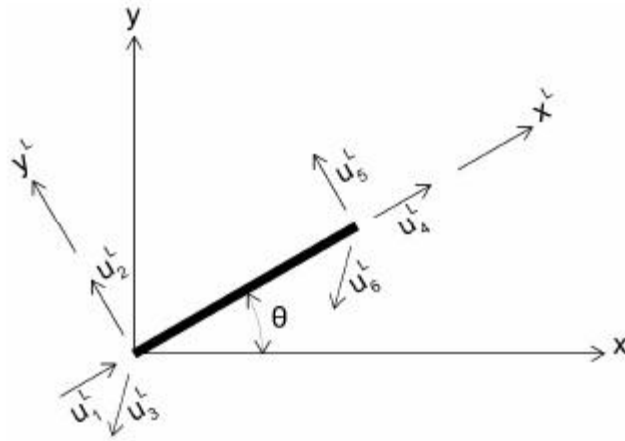


Figura 6 – Transformação dos deslocamentos para o sistema local.

Deste modo, para cada grau de liberdade da barra de uma treliça espacial, os vetores podem ser relacionados da seguinte forma:

$$U^{i,L} = R^i \cdot U^i \quad (3)$$

em que:  $U^{i,L} = \{u_1^L, u_2^L, u_3^L, u_4^L, u_5^L, u_6^L\}$  é o vetor de deslocamento local e  $U^i$  é o vetor de deslocamentos global  $U^i = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ , 'i' indica a barra atual e a matriz de rotação completa ( $R^i$  que neste caso fica sendo uma matriz 6 x 6) tem-se:

$$R^i = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \quad (4)$$

Da mesma maneira, a matriz de rotação pode ser usada para a transformação das forças no sistema local ( $F^{i,L}$ ) e no sistema global ( $F^i$ ).

$$F^{i,L} = R^i \cdot F^i \quad (5)$$

Sendo:  $F^i$  o vetor de solicitação nas extremidades da barra em coordenadas globais;  $K^i$  a matriz de rigidez da barra em coordenadas globais;  $Fep^i$  o vetor de forças de engastamento perfeito em coordenadas globais;  $R^{iT}$  a matriz transposta de rotação;  $Fep^{i,L}$  é o vetor de forças de engastamento perfeito em coordenadas locais;  $R^i$  é a matriz de rotação e  $U^i$  o vetor deslocamento em coordenadas globais.

Fazendo as aplicações das equações, chega-se na equação fundamental da barra no sistema global:

$$F^i = K^i \cdot U^i + F_{ep} \quad (6)$$

Assim, fica definida a matriz de rigidez global para a treliça espacial como:

$$K^i = R^{iT} \cdot K^{i,L} \cdot R^i \quad (7)$$

E também,

$$F_{ep}^i = R^{iT} \cdot F_{ep}^{i,L} \quad (8)$$

A matriz de rigidez global para uma barra genérica 'i' de treliça espacial é dada por:

$$K^i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} \cos^2 \alpha & \frac{EA}{L} \cos \alpha \cdot \cos \beta & \frac{EA}{L} \cos \alpha \cdot \cos \theta & -\frac{EA}{L} \cos^2 \alpha & -\frac{EA}{L} \cos \alpha \cdot \cos \beta & -\frac{EA}{L} \cos \alpha \cdot \cos \theta \\ \frac{EA}{L} \cos \alpha \cdot \cos \beta & \frac{EA}{L} \cos^2 \beta & \frac{EA}{L} \cos \beta \cdot \cos \theta & -\frac{EA}{L} \cos \alpha \cdot \cos \beta & -\frac{EA}{L} \cos^2 \beta & -\frac{EA}{L} \cos \beta \cdot \cos \theta \\ \frac{EA}{L} \cos \alpha \cdot \cos \theta & \frac{EA}{L} \cos \beta \cdot \cos \theta & \frac{EA}{L} \cos^2 \theta & -\frac{EA}{L} \cos \alpha \cdot \cos \theta & -\frac{EA}{L} \cos \beta \cdot \cos \theta & -\frac{EA}{L} \cos^2 \theta \\ -\frac{EA}{L} \cos^2 \alpha & -\frac{EA}{L} \cos \alpha \cdot \cos \beta & -\frac{EA}{L} \cos \alpha \cdot \cos \theta & \frac{EA}{L} \cos^2 \alpha & \frac{EA}{L} \cos \alpha \cdot \cos \beta & \frac{EA}{L} \cos \alpha \cdot \cos \theta \\ -\frac{EA}{L} \cos \alpha \cdot \cos \beta & -\frac{EA}{L} \cos^2 \beta & -\frac{EA}{L} \cos \beta \cdot \cos \theta & \frac{EA}{L} \cos \alpha \cdot \cos \beta & \frac{EA}{L} \cos^2 \beta & \frac{EA}{L} \cos \beta \cdot \cos \theta \\ -\frac{EA}{L} \cos \alpha \cdot \cos \theta & -\frac{EA}{L} \cos \beta \cdot \cos \theta & -\frac{EA}{L} \cos^2 \theta & \frac{EA}{L} \cos \alpha \cdot \cos \theta & \frac{EA}{L} \cos \beta \cdot \cos \theta & \frac{EA}{L} \cos^2 \theta \end{bmatrix} \quad (9)$$

Em que:

$\alpha$  é o ângulo formado pelo eixo longitudinal da barra e o eixo 'X' do plano que contém a barra, no sentido anti-horário.

$\beta$  é o ângulo formado pelo eixo longitudinal da barra e o eixo 'Y' do plano que contém a barra, no sentido anti-horário.

$\theta$  é o ângulo formado pelo eixo longitudinal da barra e o eixo 'Z' do plano que contém a barra, no sentido anti-horário.

### 2.3.3 Numeração arbitrária e numeração prioritária

Um nó de uma treliça espacial apresenta três possibilidades de deslocamento: uma translação na direção 'X', uma translação na direção 'Y' e uma translação na direção 'Z' no espaço onde está inserida. A numeração arbitrária das possibilidades de deslocamento (ou GDL – graus de liberdade) da estrutura segue a numeração dos nós, sendo irrelevante essa, em um mesmo nó é priorizado respectivamente o deslocamento em relação ao eixo 'X', o deslocamento em relação ao eixo 'Y' e o deslocamento em relação ao eixo 'Z'.

A estrutura em treliça espacial mostrada na Figura 7 é composta por seis elementos de barra, os quais possuem o mesmo módulo de elasticidade ( $E$ ) e a mesma área de seção transversal ( $A$ ), sendo que  $E = 20.000\text{kN/cm}^2$ ,  $A = 10\text{cm}^2$ . Todos os dados relacionados à geometria da estrutura, bem como a numeração arbitrária dos nós, são apresentados na Figura 7.

Nós	Coordenadas (m)		
	X	Y	Z
1	0	0	0
2	0	0	0,75
3	1	0	0
4	0	1	0

Barras	Nós	
	J	K
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	2	3
5	2	4
6	3	4

	Cargas (kN)		
	X	Y	Z
Nó 4	37	-1	30

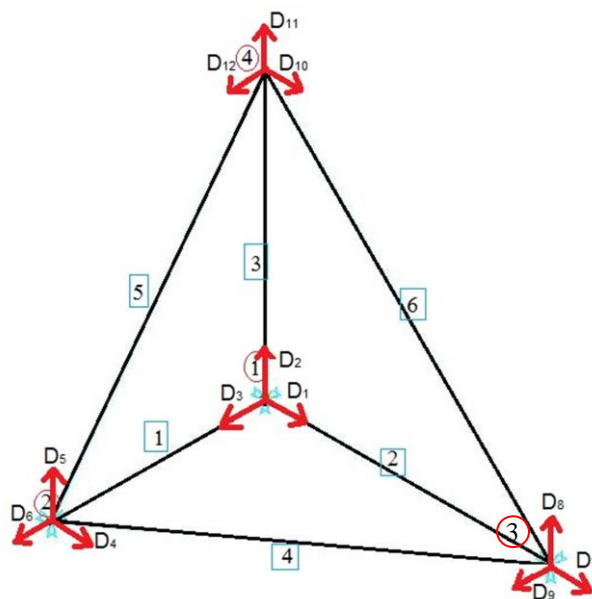


Figura 7 – Treliça espacial na numeração arbitrária.

A treliça espacial da Figura 7 apresenta quatro nós ( $NJ = 4$ ), seis barras ( $M = 6$ ), os nós 1, 2 e 3 estão totalmente restringidos ( $NRJ = 3$ ), assim, tem-se nove deslocamentos restringidos ( $NR = 9$ ;  $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9$ ) e três deslocamentos livres ( $N = 3$ ;  $D_{10}, D_{11}$  e  $D_{12}$ ), totalizando doze GDL ( $N + NR = 3 + 9 = 12$ ).

Na numeração prioritária, primeiro devem ser numerados os deslocamentos livres e por último os deslocamentos restringidos, priorizando os deslocamentos em relação aos eixos, respectivamente, 'X', 'Y' e 'Z'. Na numeração prioritária, a treliça terá a seguinte numeração para os graus de liberdade (GDL):

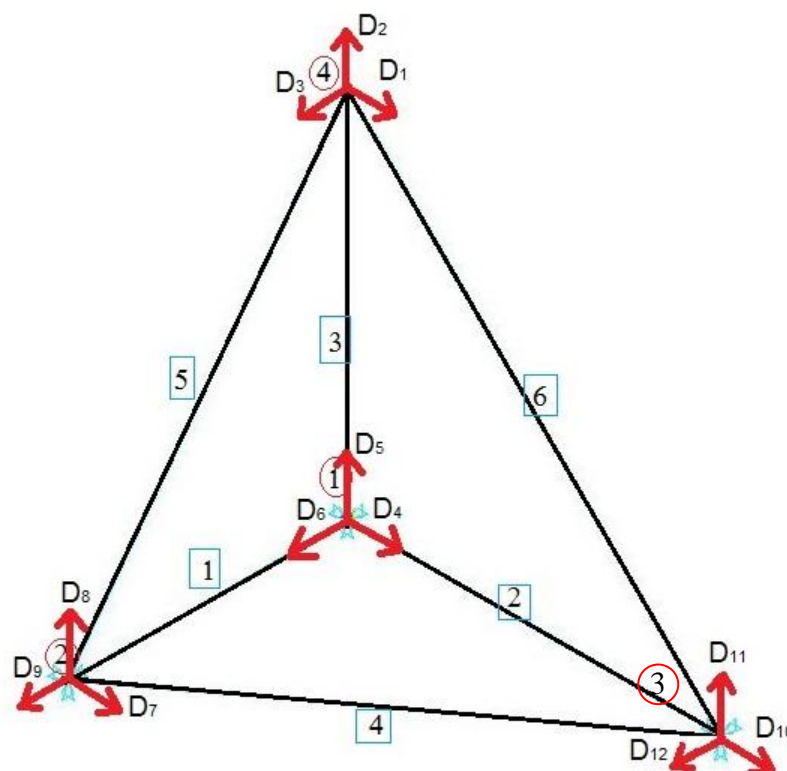


Figura 8 – Treliça espacial na numeração prioritária.

A treliça espacial da Figura 8 apresenta-se na numeração prioritária, sendo, os deslocamentos restringidos ( $NR = 9$ ;  $D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}$  e  $D_{12}$ ) e os deslocamentos livres ( $N = 3$ ;  $D_1, D_2$  e  $D_3$ ), totalizando doze GDL ( $N + NR = 3 + 9 = 12$ ).

### 2.3.4 Determinação da matriz de rigidez de barra no sistema de coordenadas local

Uma barra de uma treliça espacial pode ter qualquer orientação no espaço em que está situada. Considerando a barra genérica de nó inicial J e nó final K abaixo:

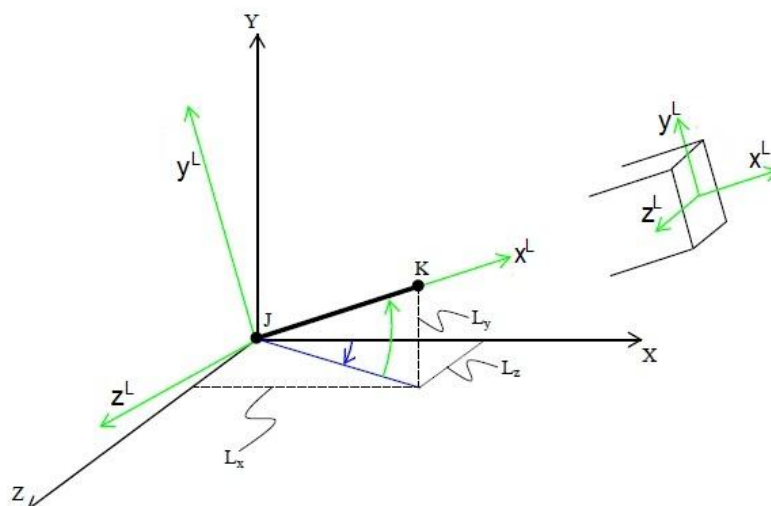


Figura 9 - Barra genérica de treliça espacial referenciada no sistema local.

Na Figura 9 é mostrada uma barra genérica de uma treliça espacial no sistema de coordenadas local  $x^L y^L z^L$  cujo zero é coincidente com o nó J e o eixo  $x^L$  coincide com eixo axial da barra. É possível realizar esse mesmo processo para cada barra de uma estrutura e obter um sistema de coordenadas locais para cada elemento, bem como um sistema de equações matriciais para esses. Porém, para montar o sistema global é necessário converter cada sistema de coordenadas local no sistema de coordenadas global. Essa conversão é feita por uma matriz de rotação, apresentada no subitem 2.3.2.1.

No sistema de referência local, o eixo  $x^L$  coincide com o eixo longitudinal da barra. Assim, a orientação da barra no espaço não tem importância, e a numeração dos GDL da barra será sempre a mesma, conforme mostra a Figura abaixo:

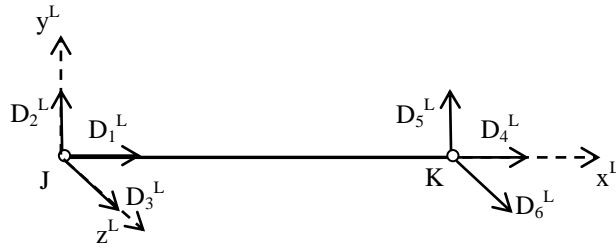


Figura 10 – Numeração dos GDL de uma barra de treliça espacial no sistema de referência local.

Para a obtenção da matriz de rigidez de barra no sistema de referência local, é necessário impor um deslocamento unitário a cada um dos deslocamentos possíveis dos nós, assumindo a barra apoiada sobre dois apoios triplos rotulados.

Sendo ‘A’ a área da seção transversal da barra e ‘E’ o módulo de elasticidade longitudinal do material, considerando as equações da resistência dos materiais:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (10)$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (11)$$

$$\varepsilon = \Delta L \cdot L \quad (12)$$

e introduzindo as equações (11) e (12) em (10), tem-se:

$$P = \frac{E \cdot A \cdot \Delta L}{L} \quad (13)$$

Sabendo que  $\Delta L = 1$ , para uma barra de treliça espacial genérica, os valores dos coeficientes de rigidez  $SM_{11}^L$ ,  $SM_{21}^L$ ,  $SM_{31}^L$ ,  $SM_{41}^L$ ,  $SM_{51}^L$  e  $SM_{61}^L$  resultam:

Fazendo  $D_1^L = 1$ , tem-se:

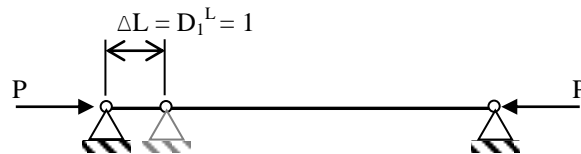


Figura 11 – Deslocamento unitário na direção de  $D_1^L$ .

$$\begin{matrix} SM_{11}^L \\ SM_{21}^L \\ SM_{31}^L \\ SM_{41}^L \\ SM_{51}^L \\ SM_{61}^L \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{EA}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Para  $D_2^L = 1$ , tem-se:

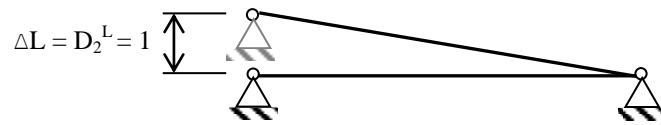


Figura 12 – Deslocamento unitário na direção de  $D_2^L$ .

Como a barra é rotulada, o deslocamento na direção de  $D_2^L$  não gera esforços. Logo:

$$\begin{matrix} SM_{12}^L \\ SM_{22}^L \\ SM_{32}^L \\ SM_{42}^L \\ SM_{52}^L \\ SM_{62}^L \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Para  $D_3^L = 1$ , tem-se:



Figura 13 – Deslocamento unitário na direção de  $D_3^L$ .

Como a barra é rotulada, o deslocamento na direção de  $D_3^L$  não gera esforços. Logo:



$$\begin{matrix} SM_{13}^L \\ SM_{23}^L \\ SM_{33}^L \\ SM_{43}^L \\ SM_{53}^L \\ SM_{63}^L \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Fazendo  $D_4^L = 1$ , tem-se:

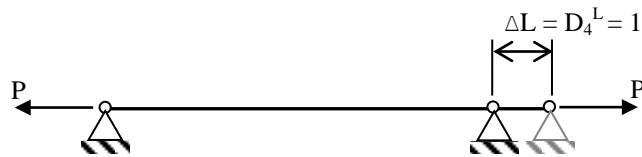


Figura 14 – Deslocamento unitário na direção de  $D_4^L$ .

Assim como no primeiro caso, onde  $D_1^L = 1$ , com  $D_4^L = 1$  resulta:

$$\begin{matrix} SM_{14}^L \\ SM_{24}^L \\ SM_{34}^L \\ SM_{44}^L \\ SM_{54}^L \\ SM_{64}^L \end{matrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{EA}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Para  $D_5^L = 1$ , tem-se:

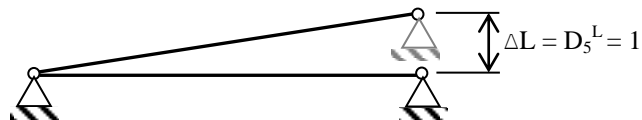


Figura 15 – Deslocamento unitário na direção de  $D_5^L$ .

Assim como no caso em que  $D_2^L = 1$ , para o deslocamento  $D_5^L = 1$  não são gerados esforços. Portanto:

$$\begin{matrix} SM_{15}^L \\ SM_{25}^L \\ SM_{35}^L \\ SM_{45}^L \\ SM_{55}^L \\ SM_{65}^L \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Para  $D_6^L = 1$ , tem-se:

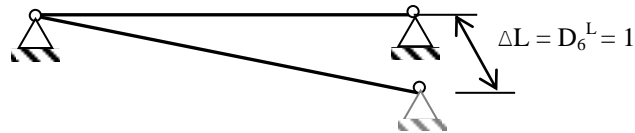


Figura 16 – Deslocamento unitário na direção de  $D_6^L$ .

Assim como no caso em que  $D_3^L = 1$ , para o deslocamento  $D_6^L = 1$  não são gerados esforços. Portanto:

$$\begin{matrix} SM_{16}^L \\ SM_{26}^L \\ SM_{36}^L \\ SM_{46}^L \\ SM_{56}^L \\ SM_{66}^L \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Desta forma, a matriz de rigidez de barra de uma treliça espacial no sistema de referência local resulta:

$$SM_L = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

### 2.3.5 Determinação da matriz de rigidez de barra no sistema de coordenadas global

A matriz de rigidez de barra no sistema de referência global ‘SM<sub>i</sub>’ é obtida através da seguinte equação:

$$SM_i = R_i^T \cdot SM_i^L \cdot R_i \quad (21)$$

em que:

$R_i^T$  é a transposta da matriz de rotação  $R_i$ .

A relação entre os sistemas de referência local e global é determinada pela matriz de rotação de barra  $\mathbf{R}$ , que, para uma barra “i” (subíndice que identifica a barra) de treliça espacial, é:

$$R_i = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\alpha \cdot \cos\beta & \cos\alpha \cdot \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ \cos\alpha \cdot \cos\beta & \cos\beta & \cos\beta \cdot \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ \cos\alpha \cdot \cos\theta & \cos\beta \cdot \cos\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \cos\alpha \cdot \cos\beta & \cos\alpha \cdot \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha \cdot \cos\beta & \cos\beta & \cos\beta \cdot \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha \cdot \cos\theta & \cos\beta \cdot \cos\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (22)$$

Os cossenos diretores são determinados em função das coordenadas dos nós:

$$\cos\alpha = \frac{(x_k - x_j)}{L} \quad (23)$$

$$\cos\beta = \frac{(y_k - y_j)}{L} \quad (24)$$

$$\cos\theta = \frac{(z_k - z_j)}{L} \quad (25)$$

$$L = \sqrt{(x_K - x_j)^2 + (y_K - y_j)^2 + (z_K - z_j)^2} \quad (26)$$

em que L é o comprimento da barra.

Substituindo as matrizes 20 e 22 em 21, a matriz de rigidez de barra no sistema de referência global fica:

$$SM = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos\alpha^2 & \cos\alpha \cdot \cos\beta & \cos\alpha \cdot \cos\theta & -\cos\alpha^2 & -\cos\alpha \cdot \cos\beta & -\cos\alpha \cdot \cos\theta \\ \cos\alpha \cdot \cos\beta & \cos\beta^2 & \cos\beta \cdot \cos\theta & -\cos\alpha \cdot \cos\beta & -\cos\beta^2 & -\cos\beta \cdot \cos\theta \\ \cos\alpha \cdot \cos\theta & \cos\beta \cdot \cos\theta & \cos\theta^2 & -\cos\alpha \cdot \cos\theta & -\cos\beta \cdot \cos\theta & -\cos\theta^2 \\ -\cos\alpha^2 & -\cos\alpha \cdot \cos\beta & -\cos\alpha \cdot \cos\theta & \cos\alpha^2 & \cos\alpha \cdot \cos\beta & \cos\alpha \cdot \cos\theta \\ -\cos\alpha \cdot \cos\beta & -\cos\beta^2 & -\cos\beta \cdot \cos\theta & \cos\alpha \cdot \cos\beta & \cos\beta^2 & \cos\beta \cdot \cos\theta \\ -\cos\alpha \cdot \cos\theta & -\cos\beta \cdot \cos\theta & -\cos\theta^2 & \cos\alpha \cdot \cos\theta & \cos\beta \cdot \cos\theta & \cos\theta^2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

### 2.3.6 Montagem da matriz de rigidez global da treliça espacial

A matriz de rigidez é uma propriedade intrínseca da estrutura, isto é, independe do carregamento, podendo ser determinada imediatamente após definir-se a topologia da estrutura.

Com as matrizes de rigidez de todas as barras no sistema de coordenadas global, a matriz de rigidez global **SJ** de uma treliça espacial pode ser montada, seguindo igualmente o procedimento usado para vigas contínuas, ou seja, os coeficientes de rigidez de barra em coordenadas globais de todas as barras  $i$  (**SM<sub>i</sub>**) são colocados nas respectivas posições dentro da matriz **SJ**, em função da numeração prioritária dos GDL. Para cada grau de liberdade de um nó, no qual concorram duas ou mais barras, os correspondentes coeficientes de rigidez devem ser somados.

Assim, a matriz de rigidez global **SJ** de uma treliça espacial é montada através da soma dos coeficientes de rigidez de todos os nós nos quais concorram duas ou mais barras, na numeração prioritária.

Assim, a matriz **SJ** pode ser dividida em quatro sub-matrizes:

$$SJ = \begin{bmatrix} S & SDR \\ SRD & SRR \end{bmatrix} \quad (28)$$

em que: **S** é a matriz de rigidez correspondente aos deslocamentos livres (deslocamentos incógnitos), usada para o cálculo desses deslocamentos.

**SRD** é a matriz que contém as ações na estrutura restringida correspondentes aos deslocamentos restringidos (vínculos) na estrutura original, quando um deslocamento unitário é aplicado na direção de um deslocamento livre. Essa matriz é utilizada para o cálculo das reações de apoio.

**SDR** é a matriz transposta de **SRD** (a matriz **SJ** é simétrica em relação à diagonal principal).

**SRR** é a matriz que contém as ações na estrutura restringida correspondentes aos deslocamentos restringidos na estrutura original, quando se aplica um deslocamento unitário que está restringido na estrutura original. Esta matriz só será utilizada no caso da existência de deslocamentos de apoio.

### 2.3.7 Determinação do vetor de cargas

Na análise matricial, os valores desconhecidos (incógnitos: deslocamentos livres, reações de apoio e ações de extremidade de barra), estão localizados em pontos específicos da estrutura (os nós). Desse modo, as ações aplicadas ao longo das barras devem ser transformadas em ações nodais equivalentes, aplicadas nos respectivos graus de liberdade dos nós.

As equações básicas utilizadas para a resolução de treliças espaciais são as mesmas usadas para resolução de vigas contínuas:

$$AD = ADL + S \cdot D \quad (29)$$

$$AR = ARL + SRD \cdot D \quad (30)$$

$$AM_i^L = AM_i^L + SM_i^L \cdot D_i^L = AM_i^L + SM_i^L \cdot R_i \cdot D_i \quad (31)$$

O vetor **ADL** é o vetor das ações nodais equivalentes, com sinais invertidos, visto que contém as reações e os momentos de engastamento perfeito da estrutura restringida, correspondente aos deslocamentos livres, referente a aplicação das cargas nas barras. No vetor **AD** entram as ações diretamente aplicadas nos nós da estrutura, referentes aos deslocamentos livres. O vetor **D** contém os deslocamentos livres. Como as treliças possuem apenas cargas aplicadas diretamente sobre os nós o vetor **ADL** é nulo.

O vetor **AC** de ações pode ser particionado, resultando em:

$$AC = A + AE = \begin{Bmatrix} AD - ADL \\ AR - ARL \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{AC} \\ AR - ARL \end{Bmatrix} \quad (32)$$

O vetor **A** é definido como o vetor que contém todas as ações aplicadas diretamente nos graus de liberdade da estrutura, na numeração prioritária.

O vetor **AE** é definido como o vetor que contém as forças nodais equivalentes aplicadas em todos os graus de liberdade da estrutura, na numeração prioritária. É formado pela soma das reações e momentos de engastamento perfeito das barras que concorrem a um mesmo nó para cada grau de liberdade do nó, com sinal contrário.

### 2.3.8 Sistema de equações para o cálculo dos deslocamentos livres

Após a determinação do vetor **AC** e a matriz de rigidez global **SJ**, o sistema de equações para o cálculo dos deslocamentos incógnitos pode ser resolvido.

Os deslocamentos nodais são calculados através do sistema:

$$\overline{AC} = S \cdot D \quad (33)$$

O vetor  $\overline{AC}$  é chamado de vetor de cargas nodais. Seus elementos representam as ações aplicadas diretamente sobre os deslocamentos livres, na numeração prioritária. O vetor  $D$  contém os deslocamentos livres (incógnitos) a serem determinados.

A equação 33 pode ser solucionada por qualquer método de resolução de sistemas de equações. Para sistemas simétricos como este, pode-se utilizar o Método Cholesky a fim de reduzir o número de operações necessárias na solução do sistema de equações. O Método Cholesky é apresentado no ANEXO 1.

### 2.3.9 Determinação das reações de apoio

Uma vez que foram calculados os deslocamentos livres, as reações de apoio podem ser obtidas.

As ações externas aplicadas solicitam as barras de uma estrutura até atingirem os pontos de apoio. Nestes pontos, as ações são absorvidas e geram reações. Em uma treliça espacial, estas reações são determinadas através da resolução da seguinte equação:

$$AR = ARL + SRD \cdot D \quad (34)$$

Os vetores  $AR$  e  $ARL$  contêm tantos elementos quanto o número de deslocamentos restringidos na estrutura original. No primeiro estão representadas as reações a serem determinadas. No vetor  $ARL$  estão contidas as ações aplicadas diretamente sobre os deslocamentos restringidos.

### 2.3.10 Cálculo das ações de extremidade de barra

A equação usada no método da rigidez para calcular as seis ações de extremidade de uma barra genérica “i” de treliça espacial ( $AM_i^L$ ), em coordenadas locais, é dada por:

$$AM_i^L = SM_i^L \cdot D_i^L \quad (35)$$

No qual:  $SM_i^L$  é a matriz de rigidez de barra no sistema local e  $D_i^L$  é o vetor que contém os seis deslocamentos da barra “i” no sistema local. Para determinar o vetor  $D_i^L$  basta

pré-multiplicar o vetor  $\mathbf{D}_i$  (vetor que contém os seis deslocamentos da barra “i” no sistema global) pela matriz de rotação de barra  $\mathbf{R}_i$ . Logo:

$$\mathbf{AM}_i^L = \mathbf{SM}_i^L \cdot \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{D}_i \quad (36)$$

Após a realização do cálculo das ações de extremidade de barra em coordenadas locais, é importante observar a convenção de sinais para o traçado dos diagramas de esforços normais (EN). Para o nó inicial J,  $\mathbf{AM}_1^L$  positivo (+) indica compressão (-). Para o nó final K,  $\mathbf{AM}_4^L$  deve resultar sempre com um valor igual e de sinal contrário ao  $\mathbf{AM}_1^L$ . Inversamente, no caso de  $\mathbf{AM}_1^L$  ser negativo e  $\mathbf{AM}_4^L$  positivo, a barra estará tracionada. Nas barras de treliça não existem esforços além dos axiais, assim, os valores de  $\mathbf{AM}_2^L$ ,  $\mathbf{AM}_3^L$ ,  $\mathbf{AM}_5^L$  e  $\mathbf{AM}_6^L$  devem resultar sempre iguais à zero.

## 3 O PROGRAMA DE TRELIÇAS ESPACIAIS

### 3.1 Informações gerais

O programa Trelicas\_Espaciais foi desenvolvido na linguagem Fortran utilizando o compilador Force 2.0 Fortran Compiler and Editor. Seu objetivo é analisar estruturas na forma de treliças espaciais e fornecer, como resultado, todo o desenvolvimento matricial necessário para analisar a estrutura, bem como os deslocamentos dos nós, as reações de apoio e as ações de extremidade das barras da treliça.

Tanto a entrada quanto a saída de dados utilizam arquivos de texto com extensão ‘.txt’, padrão do Bloco de Notas do Microsoft Windows<sup>®</sup>, entre outros editores de texto de diversos sistemas operacionais.

As treliças analisadas pelo programa Trelicas\_Espaciais podem ser isostáticas ou hiperestáticas, tendo pelo menos uma ação concentrada com valor diferente de zero aplicada sobre qualquer nó da estrutura.

Devido a possíveis conflitos entre os arquivos de texto e o compilador, é recomendado não utilizar sinais gráficos (acento agudo, crase, til, etc.) e espaços tanto no nome dos arquivos quanto no seu conteúdo.

### 3.2 Arquivos de dados

O programa Trelicas\_Espaciais utiliza dois arquivos de entrada (‘Entrada.txt’ e ‘[nome\_da\_estrutura\_dados].txt’) e um arquivo de saída de resultados (‘[nome\_da\_estrutura\_saida].txt’). Estes arquivos devem ser salvos na mesma pasta do arquivo ‘Trelicas\_Espaciais.EXE’.

#### 3.2.1 O Arquivo ‘Entrada.txt’

O arquivo ‘Entrada.txt’ informa ao programa o nome do arquivo de entrada de dados e de saída de resultados da estrutura analisada. Genericamente, o arquivo deve apresentar o seguinte conteúdo:



```
Arquivo de entrada de dados:
Exemplo_trelica_espacial_dados.txt
Arquivo de saída de dados:
Exemplo_trelica_espacial_saida.txt
```

### 3.2.2 O Arquivo '[nome\_da\_estrutura\_dados].txt'

O arquivo '[nome\_da\_estrutura\_dados].txt' contém os dados geométricos da estrutura (coordenadas dos nós, áreas das seções transversais das barras, etc) e as informações sobre as ações aplicadas. Genericamente, o arquivo deve apresentar o seguinte conteúdo:

```
Nome da treliça:
[caracteres]
Número de barras:
[Inteiro maior que zero]
Número de apoios simples:
[Inteiro]
Número de apoios duplos:
[Inteiro]
Número de apoios triplos:
[Inteiro]
Número de nós:
[Inteiro]
Módulo de elasticidade do material:
[Real]
Coordenadas dos nós:
[Número do nó (Inteiro), Coordenada X (Real), Coordenada
Y(Real), Coordenada Z (Real)]
Barras:
[Número da barra (Inteiro), Nó inicial (Inteiro), Nó final
(inteiro), Área da seção transversal (Real)]
Restrições nodais:
[Número do nó com restrição (Inteiro), Restrição em X (1 -
restrito; 0 - livre), Restrição em Y (1 - restrito; 0 - livre),
Restrição em Z (1 - restrito; 0 - livre)]
Número de nós com cargas:
[Inteiro maior que zero]
Cargas nos nós:
[Número dos nós com cargas (Inteiro), Valor da carga em X
(Real), Valor da carga em Y (Real), Valor da carga em Z (Real)]
```

As informações entre colchetes devem ser substituídas pelos valores respectivos da estrutura a ser analisada.

É importante ressaltar que as unidades de entrada devem ser escolhidas pelo usuário, ou seja, escolhida a unidade do módulo de elasticidade em kN/cm<sup>2</sup> (kilonewtons por centímetro quadrado), as coordenadas dos nós deverão ser dadas em centímetros, a área da seção transversal em centímetros quadrados e as cargas em kilonewtons. Dessa maneira, ter-

se-á os deslocamentos em centímetros, as reações de apoio e ações de extremidade de barra em kilonewtons.

### 3.2.3 O Arquivo '[nome\_da\_estrutura\_saida].txt'

O arquivo '[nome\_da\_estrutura\_saida].txt' é gerado automaticamente quando o arquivo 'Trelicas\_Espaciais.exe' é executado. Em seu conteúdo está o desenvolvimento da análise matricial da treliça espacial, bem como os resultados desta análise (deslocamentos dos nós, reações de apoio e esforços axiais nas barras).

Nas primeiras linhas deste arquivo são escritos os dados da estrutura, seguidos, então, pelas matrizes e vetores da análise estrutural, e por fim, todos os resultados.

## 4 EXEMPLO NUMÉRICO DO PROGRAMA Trelicas\_Espaciais

### 4.1 Exemplo de aplicação do programa Trelicas\_Espaciais

Para este exemplo de aplicação do programa Trelicas\_Espaciais, será utilizada a mesma treliça espacial da Figura 7 (p.20).

O primeiro passo é criar o arquivo ‘Entrada.txt’ no Bloco de Notas do Windows® (ou outro editor de textos), cujo conteúdo deve ser o seguinte:

```
Arquivo de entrada de dados:
TRELICAESPACIALTCCdados.txt
Arquivo de saída de dados:
TRELICAESPACIALTCCsaida.txt
```

Este arquivo deve, então, ser armazenado na mesma pasta que o arquivo ‘Trelicas\_Espaciais.exe’ (pasta raiz do programa).

Em seguida deve ser criado o arquivo com os dados da treliça. Observando a Figura 7 e obedecendo as regras de formatação apresentadas na seção 3.2.2, o conteúdo deste arquivo deve ser o seguinte:

```
Nome da estrutura:
TRELICAESPACIALTCC
Numero de barras:
6
Numero de apoios simples:
0
Numero de apoios duplos:
0
Numero de apoios triplos:
3
Numero de nos:
4
Modulo de elasticidade do material:
2.00e8
Coordenadas dos nos:
1,0,0,0
2,0,0,0.75
3,1,0,0
4,0,1,0
Barras:
1,1,2,1.0e-3
2,1,3,1.0e-3
3,1,4,1.0e-3
4,2,3,1.0e-3
5,2,4,1.0e-3
6,3,4,1.0e-3
Restrições nodais:
1,1,1,1
2,1,1,1
3,1,1,1
```

```
4,0,0,0  
Número de nós com cargas:  
1  
Cargas nos nós:  
4,37,-1,30
```

Este arquivo deve ser salvo com o nome atribuído no arquivo ‘Entrada.txt’, ou seja, ‘TRELICAESPACIALTCCdados.txt’, também na pasta raiz do programa.

O último passo é executar o arquivo. Esse arquivo deve, então, ser armazenado na mesma pasta que o arquivo ‘Trelicas\_Espaciais.exe’. O arquivo de saída de resultados é gerado automaticamente com o nome atribuído no ‘Entrada.txt’. Neste exemplo, o nome do arquivo será ‘TRELICAESPACIALTCCsaida.txt’.

O arquivo de resultados da análise do programa da Figura 7 é apresentado no ANEXO 2.

## 5 ANÁLISE DE RESULTADOS

Os valores da rotina computacional do programa de treliças espaciais do exemplo do item anterior foram comparados aos resultados obtidos pelo programa MASTAN2, a fim de aferir os resultados do programa.

A seguir são apresentados os resultados obtidos no programa MASTAN2 para a mesma treliça espacial do item anterior.

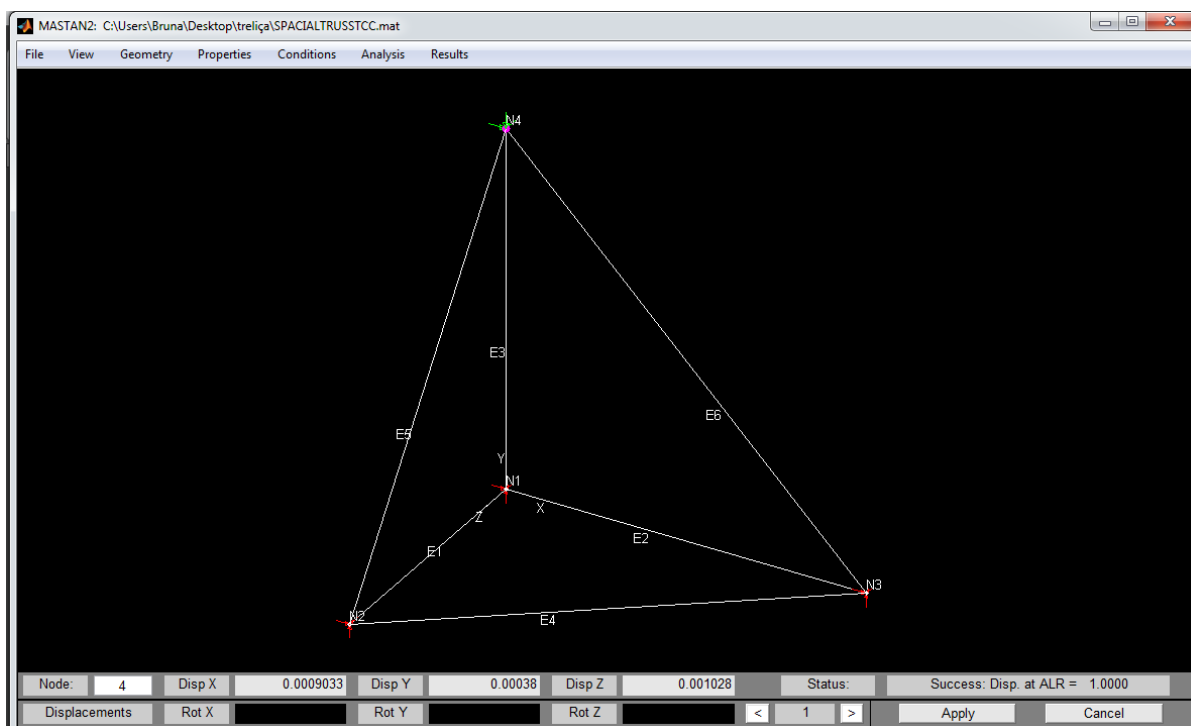


Figura 17 - Valores dos deslocamentos no nó 4 pelo programa MASTAN2.

Resultados da rotina computacional			Resultados do <i>Software</i> Mastan2		
UX (m)	UY (m)	UZ (m)	Disp X	Disp Y	Disp Z
0.903259E-03	0.380000E-03	0.102750E-02	0,0009033	0,00038	0,001028

Tabela 1 – Comparação dos deslocamentos livres entre a rotina computacional e o *software* MASTAN2.

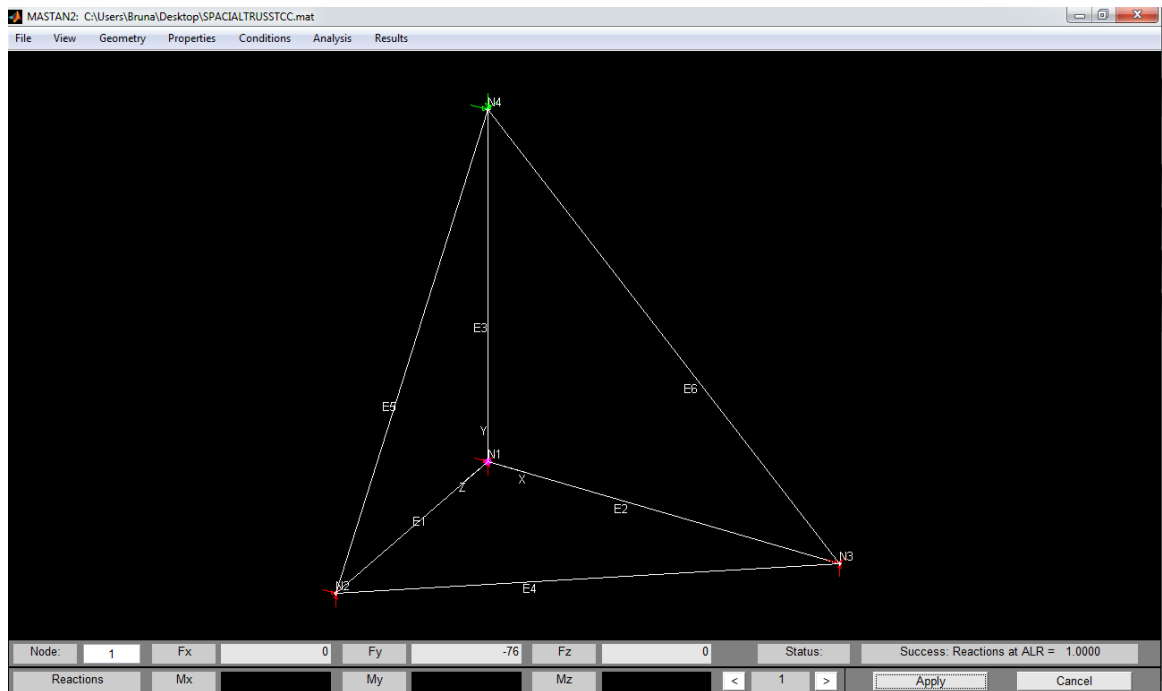


Figura 18 - Reações de apoio no nó 1.

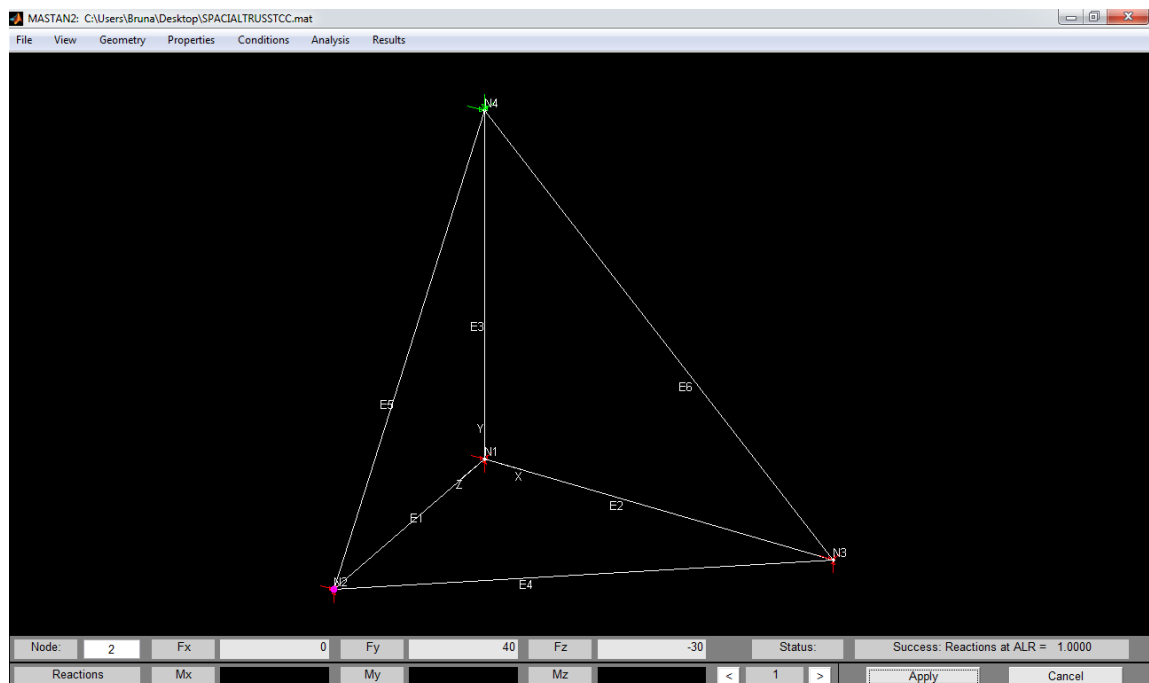


Figura 19 - Reações de apoio no nó 2.

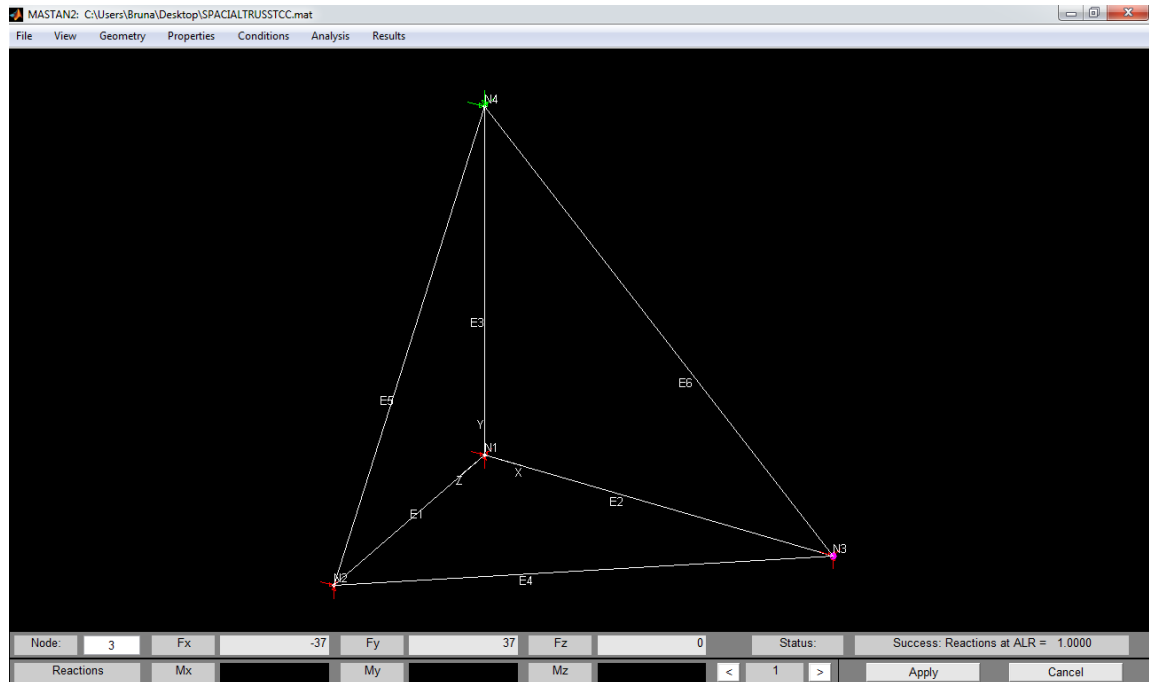


Figura 20 - Reações de apoio no nó 3.

Nó	Resultados da rotina computacional			Resultados do <i>Software</i> Mastan2		
	R. X (kN)	R. Y (kN)	R. Z (kN)	Fx	Fy	Fz
1	0	-76	0	0	-76	0
2	0	40	-30	0	40	-30
3	-37	37	0	-37	37	0
4	0	0	0	0	0	0

Tabela 2 - Comparação das reações de apoio entre a rotina computacional e o *software* MASTAN2.





## 6 CONCLUSÕES

O avanço tecnológico dos últimos anos possibilitou o desenvolvimento de programas computacionais para cálculo estrutural. Contudo, é importante lembrar que um sistema computacional, por mais sofisticado que esse seja, é apenas uma ferramenta auxiliar. A responsabilidade pelo projeto é sempre do engenheiro que o manipula.

A análise de estruturas atrelada a rotinas computacionais originou dinamicidade para a engenharia. Entretanto, os cálculos manuais ou o entendimento destes não deixam de ser importantes, principalmente porque se necessita dos mesmos para verificação dos resultados dos programas computacionais. Dessa forma, as ferramentas computacionais agilizam o cálculo e auxiliam o projetista na interpretação de resultados.

Dada a grande importância do ensino dos métodos tradicionais, o curso de engenharia civil possui matérias relacionadas à análise matricial. Essas disciplinas são tão necessárias para a formação de profissionais que almejam atuar nas áreas de cálculo estrutural.

As estruturas mais comumente utilizadas na construção civil, e, portanto, com maior ênfase no ensino destas disciplinas, são vigas contínuas, grelhas, treliças e pórticos. O cálculo de estruturas espaciais é apresentado de forma bastante teórica, visto que a resolução dessas estruturas despendem muito tempo, dado o tamanho das matrizes. Dessa maneira, o programa desenvolvido procurou analisar as treliças espaciais, sendo verificado a sua validade ao compararem-se seus resultados com o programa MASTAN2, complementando o aprendizado da disciplina de Análise Matricial de Estruturas.

A entrada e a saída de dados, no formato texto, propiciam a compreensão do estudante quanto ao funcionamento dos programas. O arquivo de saída de dados, particularmente, exhibe todo o conteúdo necessário para que o usuário identifique os possíveis erros cometidos em seu memorial de cálculo.

Uma gama de linguagens computacionais têm sido formuladas desde meados do século XX, algumas servem como línguas de uso geral e outras são desenvolvidas para aplicações específicas. A linguagem de programação escolhida, Fortran, desenvolvida na década de 1950 pela IBM, foi escolhida devido à sua facilidade, seu processamento de grande velocidade e precisão, tornando-se na área de análise numérica, amplamente empregada.

No meio acadêmico e profissional são disponibilizados diversos programas de análise estrutural, mas a maioria desses não apresenta ao usuário as etapas intermediárias de cálculo, disponibilizando apenas os resultados finais.

Os programas MASTAN e ANSYS, são amplamente empregados para resolução de estruturas espaciais no meio acadêmico, no entanto, esses não permitem a visualização minuciada dos meandros dos cálculos realizados para a obtenção final de resultados. Desse modo, necessário se faz compreender a rotina computacional utilizada até a auferição final dos resultados.

As rotinas de cálculo reestabelecem o raciocínio prático do acadêmico. Quando bem assimiladas, possibilitam que o usuário tenha conclusões plausíveis sobre o comportamento estrutural apenas através da observação geométrica das barras da estrutura e das ações a ela aplicadas.

Por conseguinte, levando-se em conta que os *softwares* são a realidade da engenharia estrutural, é imprescindível que futuros engenheiros possuam conhecimentos relativos à teoria e a prática, almejando assim, um modelo tecnicamente e economicamente viável, com segurança e durabilidade, não passível de erros.

## BIBLIOGRAFIA

EBANATAW. Treliças e estruturas treliçadas. Disponível em <<http://www.ebanataw.com.br/trelica/trelica.php>>. Acesso em: 19 abr. 2015.

GERE, J. M.; WEAVER, JR., W., “**Análise de Estruturas Reticuladas**”, Editora Guanabara Koogan, 1a. edição, 1987, 444 p. .

GUERRA, C.. **Otimização paramétrica de estruturas treliçadas por algoritmos genéticos**. 126f. Dissertação (dissertação de mestrado) – UFRGS: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Poto Alegre, 2008.

KAMINSKI, J.; GOMES, H. M., **Notas de aula: Análise Matricial de Estruturas "A"**. UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA: Santa Maria, 2011.

MARTHA, L. F., **Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010, 524 p..

SANTOS, M. I.; KLEIN, S. P., **Análise Matricial de Estruturas de Barras pelo Método de Rigidez – Caderno Técnico Nº 66**. Porto Alegre: PPGE/C/UFRGS, 1984, 76 p..

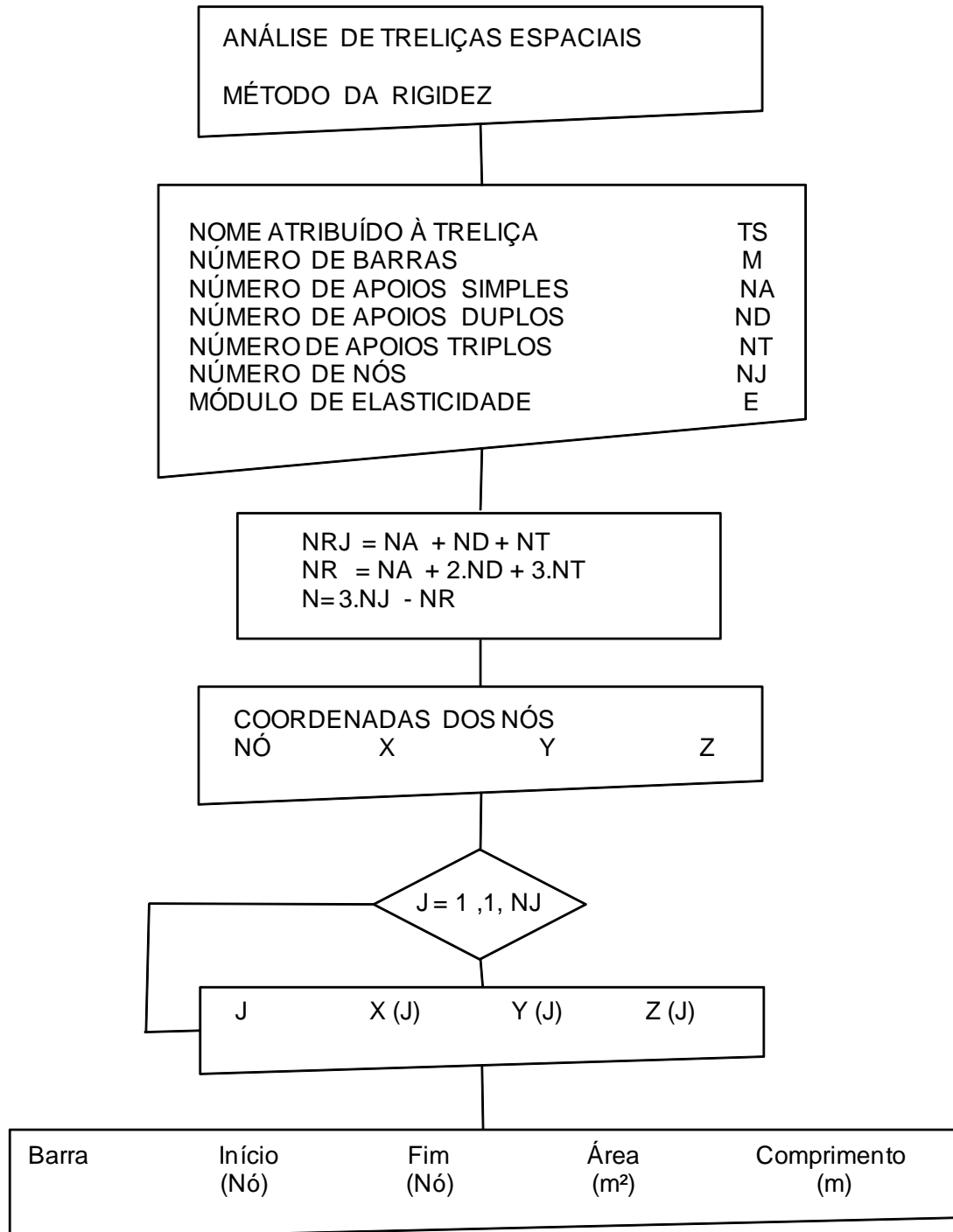
SORIANO, H.L., **Análise de Estruturas: Análise de estruturas - Formulação Matricial e Implementação Computacional**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2005, 346 p..

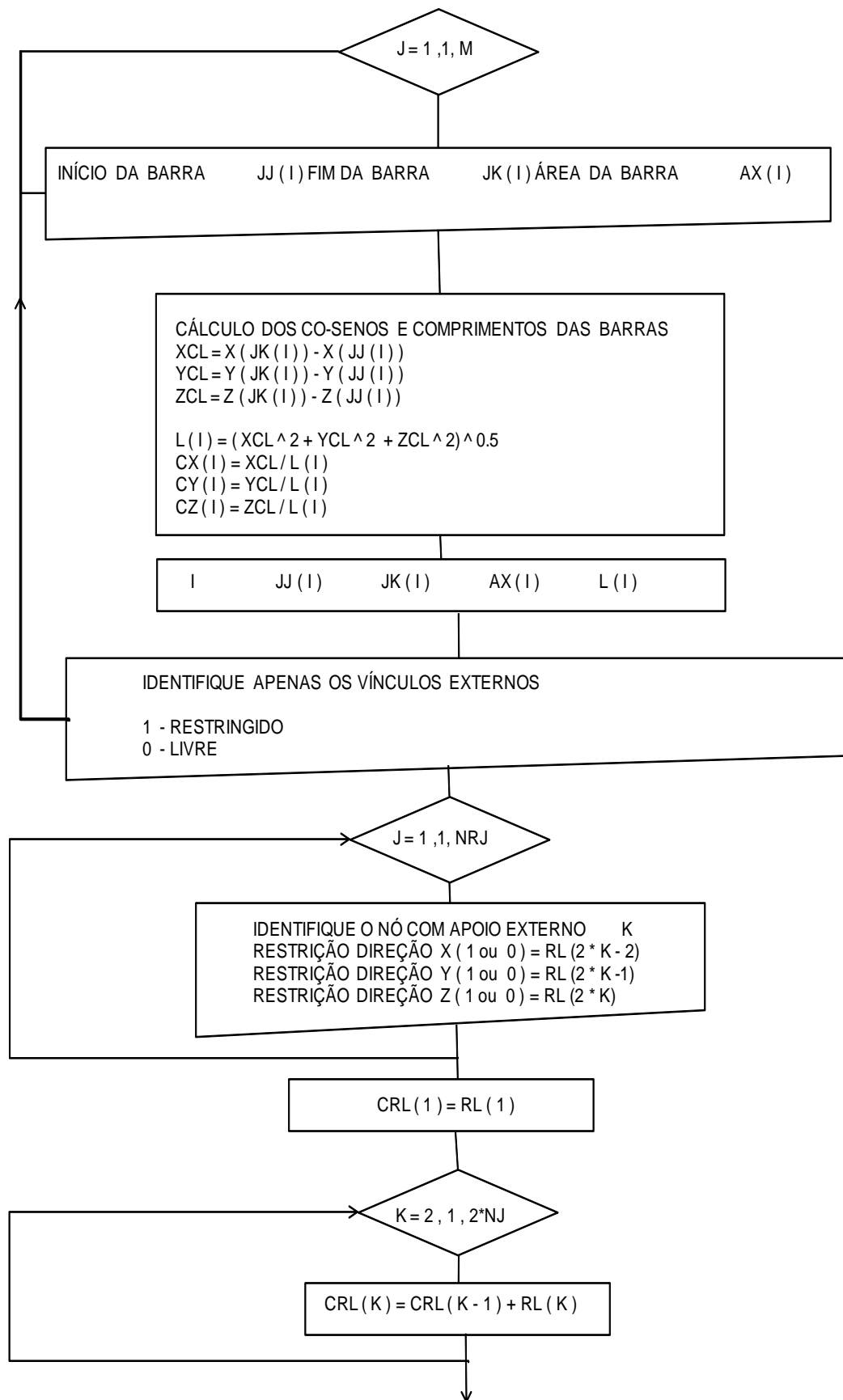
SÜSSEKIND, J. C. **Curso de Análise Estrutural**. 9a edição. v.1. 6 ed. São Paulo. Editora Globo, 1989,

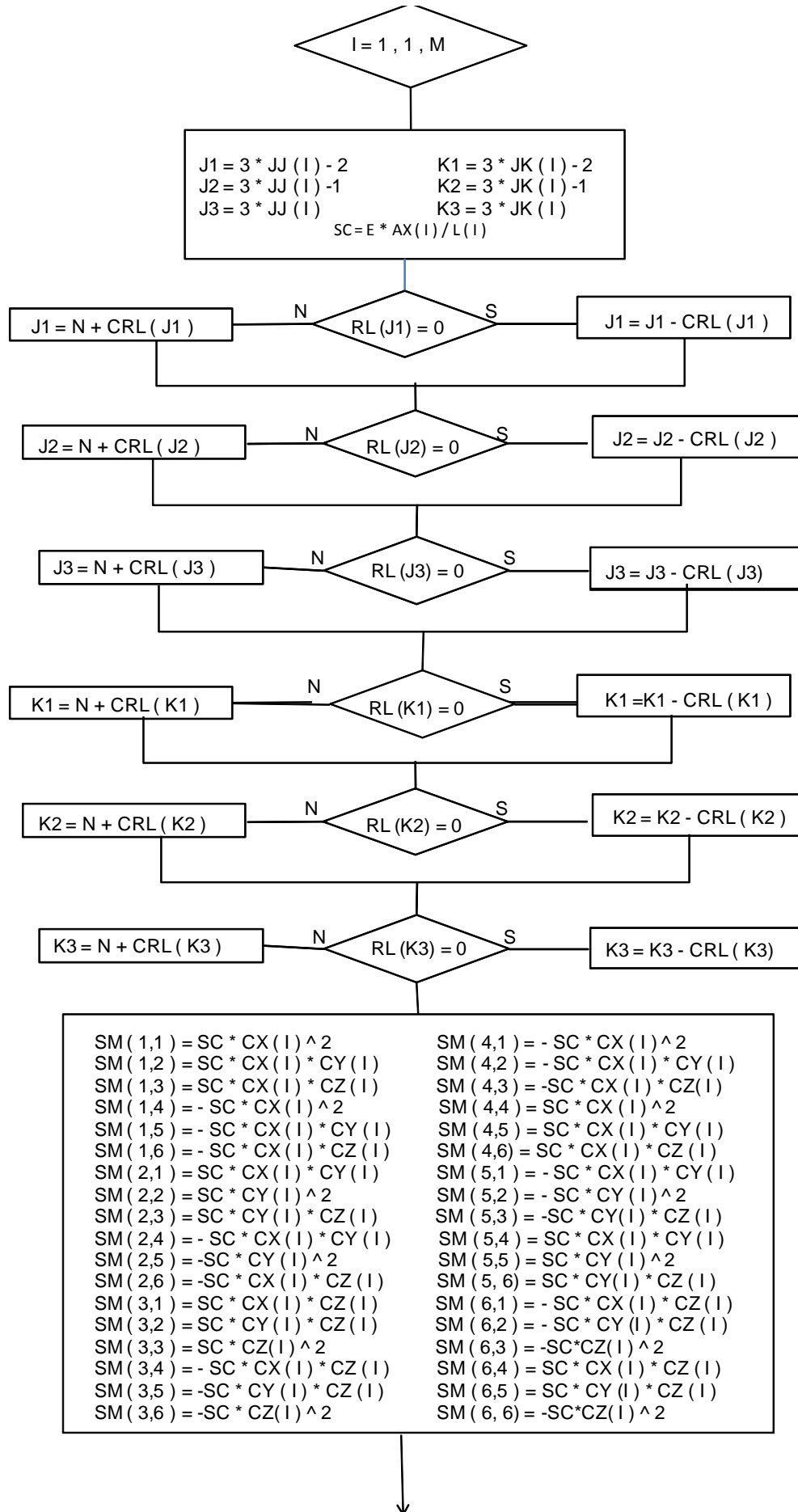
SUZUKI, M., S.. **Análise estrutural de treliças espaciais no software excel® utilizando o método dos elementos finitos**. 125f. Monografia (monografia em engenharia civil) – UNESP: Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Guaratinguetá, 2012.

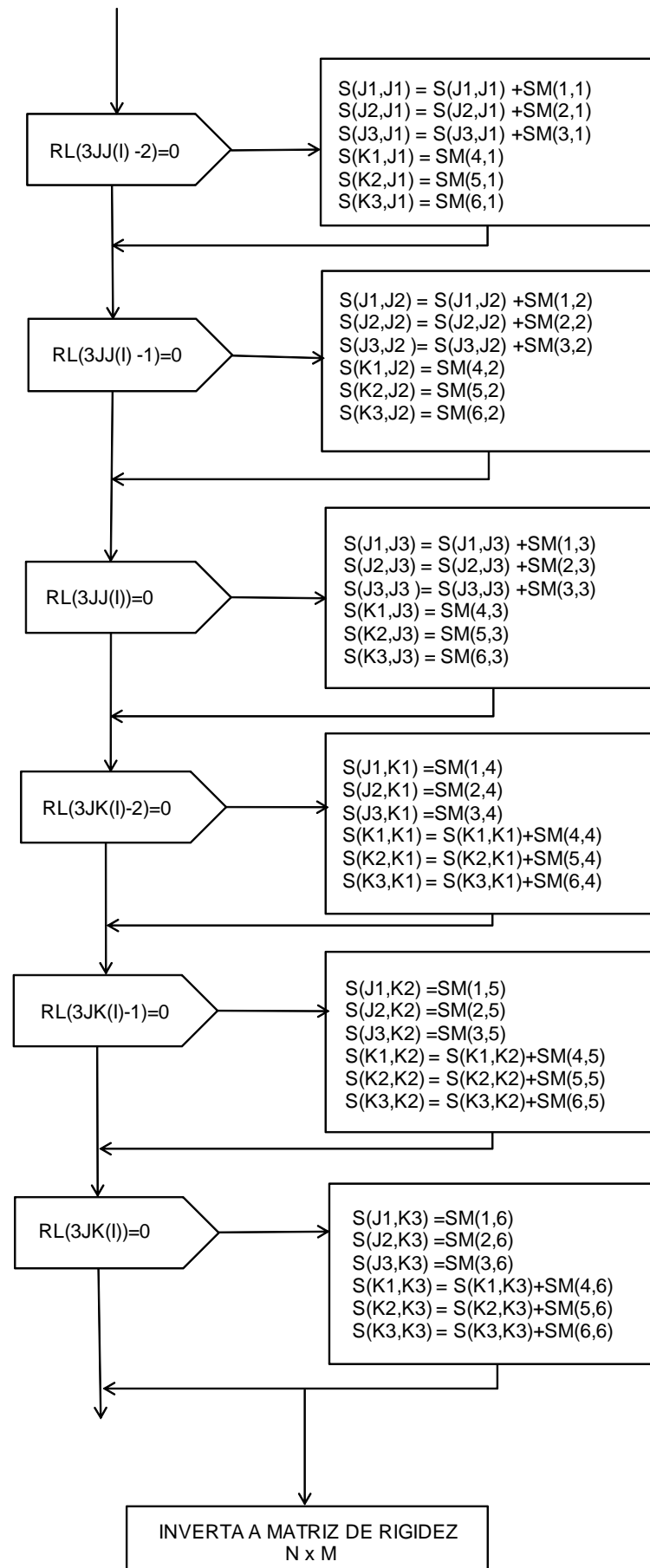
## APÊNDICE A – Fluxograma de Treliças Espaciais

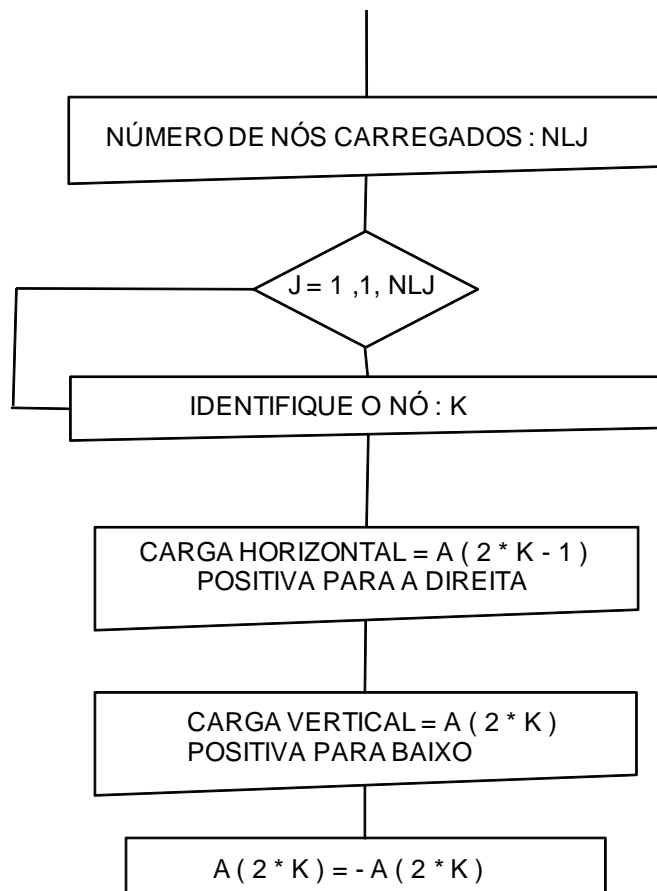
Adaptado de GERE e WEAVER, 1987.



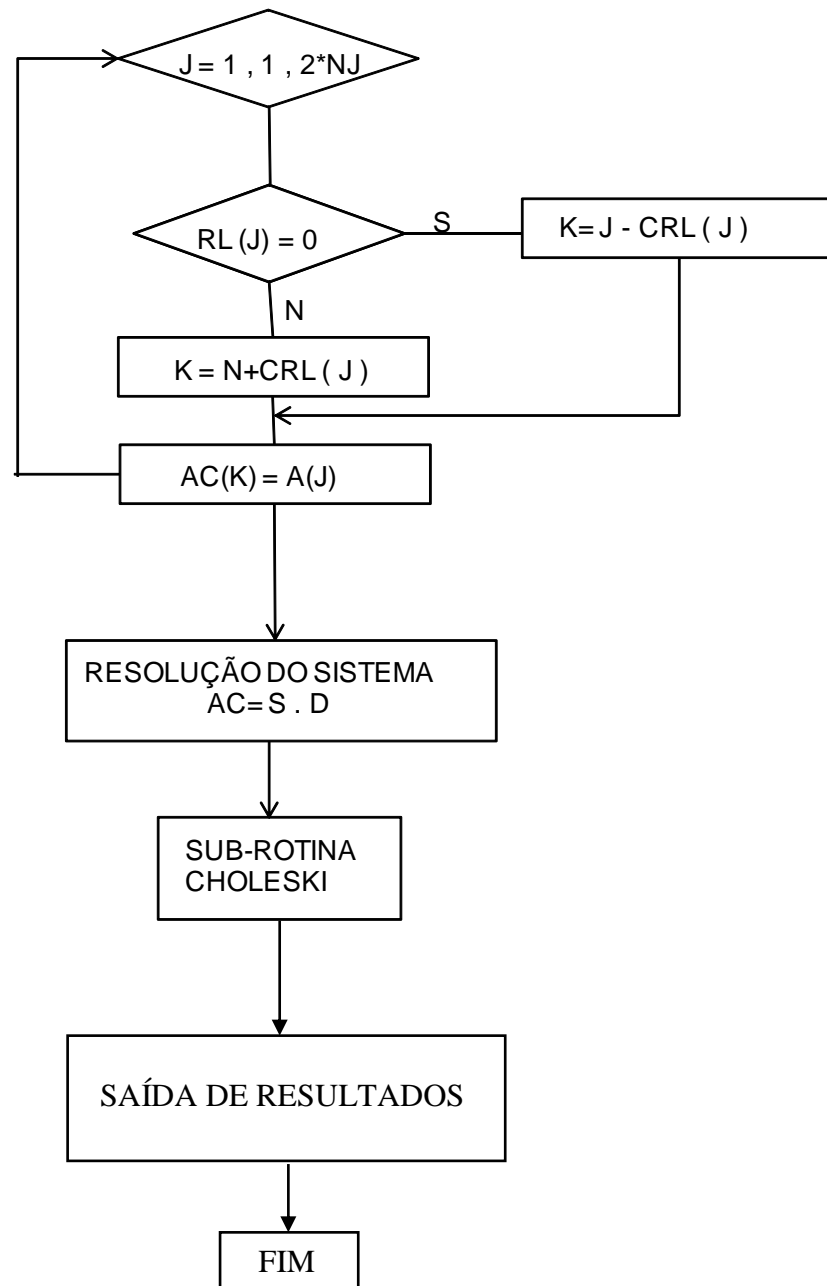












## APÊNDICE B - Manual do Usuário do Programa Trelicas\_Espaciais

O programa *Trelicas\_Espaciais* utiliza arquivos texto (extensão .txt) como entrada e saída de dados. Este manual fornece as informações necessárias para a criação dos arquivos e obtenção dos resultados.

As estruturas analisadas pelo programa são treliças espaciais, as quais possuem ações aplicadas somente sobre os nós. Todos os nós de uma treliça, por simplificação, são rotulados.

### Observações:

- não utilize sinais gráficos (acentuação) no nome e/ou no conteúdo dos arquivos;
- o separador decimal deve ser um ponto (.);
- para separar os dados utilize uma vírgula (,);
- as indicações de texto que devem ser inseridos nos arquivos estão entre chaves ([...]), as quais somente destacam a informação e devem ser desconsideradas.
- atenção para as unidades de entrada, as unidades de entrada devem ser escolhidas pelo usuário, ou seja, escolhida a unidade do módulo de elasticidade em 'kN/m<sup>2</sup>', as coordenadas dos nós deverão ser dadas em 'm', a área da seção transversal em 'm<sup>2</sup>' e as cargas em 'kN'. Dessa maneira, ter-se-á os deslocamentos em metros, as reações de apoio e ações de extremidade de barra em kilonewtons.

### **1º Passo: criação do arquivo Entrada.txt**

Abra o Bloco de Notas do Windows. Na primeira linha escreva “Arquivo de entrada de dados:” (sem as aspas). Na segunda linha, escreva o nome do arquivo que contém os dados da estrutura (a construção do arquivo de dados será explicada adiante). Na terceira linha, escreva “Arquivo de saída de dados:”. Na quarta linha escreva o nome desejado para o arquivo que conterá os resultados. Não insira espaços nos nomes dos arquivos.

Por exemplo:

```
Arquivo de entrada de dados:
TRELICAESPACIAL_DADOS.TXT
Arquivo de saída de dados:
TRELICAESPACIAL_SAIDA.TXT
```

Em seguida salve o arquivo com o nome “Entrada.txt”, o qual deve estar na mesma pasta do arquivo *Trelicas\_Espaciais.exe* (arquivo executável do programa).

## 2º Passo: criação do arquivo de dados

Abra o Bloco de Notas do Windows. Na primeira linha digite “Nome da trelica:”. Insira, na segunda linha, o nome desejado para a estrutura. Não insira espaços no nome da estrutura.

```
| Nome da trelica:
| [digite o nome da estrutura]
```

Na terceira linha escreva “Numero de barras:”. Na quarta linha digite o número total de barras da treliça espacial (número inteiro e maior que zero). Na quinta linha digite “Numero de apoios simples:”. Na sexta linha insira o número de apoios simples (restrição em uma direção) da estrutura (número inteiro maior ou igual à zero). Na sétima linha digite “Numero de apoios duplos:”. Na oitava linha digite o número de apoios duplos (restrição em duas direções) da estrutura (número inteiro maior ou igual à zero). Na nona linha digite “Numero de apoios triplos:”. Na décima linha insira o número de apoios triplos (restrição em três direções) da estrutura (número inteiro maior ou igual à zero). Na décima primeira linha escreva “Numero de nós:”. Na décima segunda linha insira o número total de nós da estrutura (número inteiro e maior do que um). Na décima terceira linha digite “Modulo de elasticidade do material:”. Na décima quarta linha digite o valor do módulo de elasticidade do material.

```
| Numero de barras:
| [Inteiro maior que zero]
| Número de apoios simples:
| [Inteiro]
| Número de apoios duplos:
| [Inteiro]
| Número de apoios triplos:
| [Inteiro]
| Número de nós:
| [Inteiro]
| Módulo de elasticidade do material:
| [Real]
```

Na décima quinta linha escreva “Coordenadas dos nós:”. A seguir, crie uma linha para cada nó da estrutura com os seguintes dados: número do nó (inteiro maior que zero), coordenada X (número real), coordenada Y (número real) e coordenada Z (número real).

```
| Coordenadas dos nós:
| [Número do nó (Inteiro), Coordenada X (Real), Coordenada Y (Real),
| Coordenada Z (Real)]
| ...
```

Na linha seguinte digite “Barras:”. Em seguida, crie uma linha para cada barra da estrutura com o seguinte conteúdo: número da barra (inteiro maior que zero), nó inicial (inteiro maior que zero), nó final (inteiro maior que zero) e área da barra (valor real maior que zero).

```
Barras:
[(N° da barra - inteiro), (nó inicial - inteiro), (nó final -
inteiro), (área da seção transversal - real)]
[(N° da barra - inteiro), (nó inicial - inteiro), (nó final -
inteiro), (área da seção transversal - real)]
...
```

Na próxima linha escreva “Restricoes nodais:”. Depois crie uma linha para cada nó com algum tipo de restrição externa, a qual deverá conter: número do nó, restrição em X (valor 1 para restringido ou 0 para livre), restrição em Y (valor 1 para restringido ou 0 para livre) e restrição em Z (valor 1 para restringido ou 0 para livre).

```
[Número do nó com restrição (Inteiro), Restrição em X (1 -
restrito; 0 - livre), Restrição em Y (1 - restrito; 0 - livre),
Restrição em Z (1 - restrito; 0 - livre)]
...
```

Na linha abaixo escreva “Numero de nos com carga:”. Na linha seguinte digite o número de nós com cargas. Na próxima linha digite “Carga nos nos:”. Em seguida crie tantas linhas quanto o número de nós com carga, as quais deverão conter: número do nó com carga, valor da carga em X (número real, positivo para a direita, negativo para a esquerda), valor da carga em Y (número real, positivo para baixo, negativo para cima) e valor da carga em Z (número real, positivo para fora no plano, negativo para dentro do plano),.

```
Número de nós com cargas:
[Inteiro maior que zero]
[Número dos nós com cargas (Inteiro), Valor da carga em X (Real),
Valor da carga em Y (Real), Valor da carga em Z (Real)] ...
```

Salve o arquivo com o nome desejado no formato texto (.txt, padrão do Bloco de Notas do Windows), por exemplo: TRELICAESPACIAL\_dados.txt, na mesma pasta do arquivo Entrada.txt e do arquivo executável do programa Trelicas\_Espaciais.

Exemplo de conteúdo do arquivo de dados TRELICAESPACIAL\_dados.txt para a seguinte estrutura:

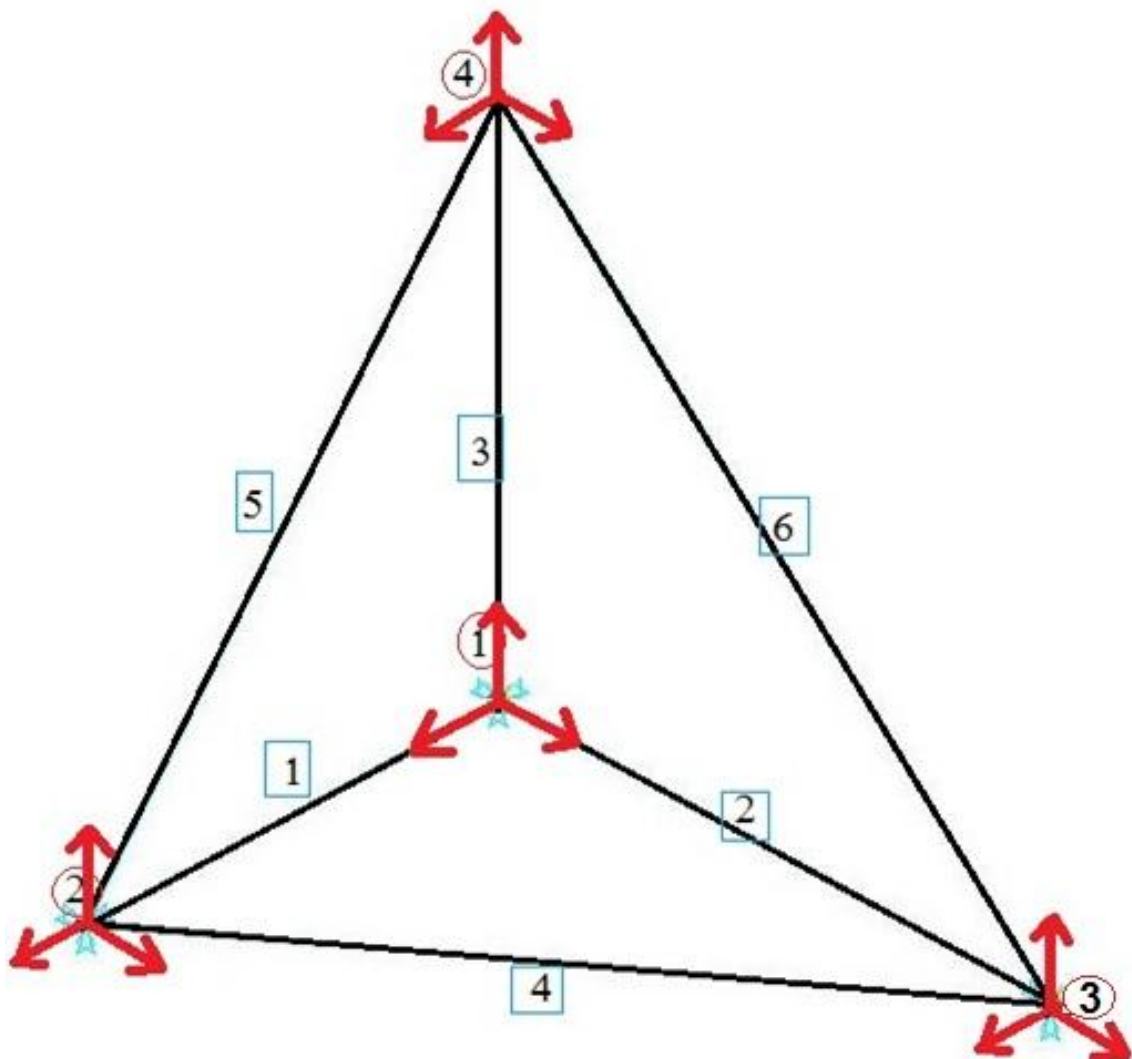
Nós	Coordenadas (m)		
	X	Y	Z
1	0	0	0
2	0	0	0,75
3	1	0	0
4	0	1	0

Cargas (kN)			
	X	Y	Z
Nó 4	37	-1	30

Barras	Nós	
	J	K
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	2	3
5	2	4
6	3	4



Módulo de Elasticidade:  $E = 20.000 \text{ kN/cm}^2$

Área da seção transversal das barras:  $A = 10 \text{ cm}^2$

```

Nome da trelica:
TRELICAESPACIAL
Numero de barras:
6
Numero de apoios simples:
0
Numero de apoios duplos:
0
Numero de apoios triplos:
3
Numero de nos:
4
Modulo de elasticidade do material:
2.0e8
Coordenadas dos nos:
1,0,0,0
2,0,0,0.75
3,1,0,0
4,0,1,0
Barras:
1,1,2,1.0e-3
2,1,3,1.0e-3
3,1,4,1.0e-3
4,2,3,1.0e-3
5,2,4,1.0e-3
6,3,4,1.0e-3
Restricoes nodais:
1,1,1,1
2,1,1,1
3,1,1,1
Numero de nos com cargas:
1
Cargas nos nos:
4,37,-1,30

```

### 3º Passo: execução do programa

Abra a pasta do programa e dê um duplo clique sobre o arquivo Trelicas\_Espaciais.exe. Note que foi criado um novo arquivo de texto com o nome do arquivo de saída inserido no Entrada.txt. Este arquivo contém os dados da estrutura e os resultados da análise executada pelo programa.

## ANEXO 1 – Método Cholesky

### Método Cholesky

Em algumas situações, os sistemas de equações aplicados à análise matricial de estruturas podem tornar-se muito complexos para serem calculados pelos métodos convencionais de operações entre matrizes. Além disso, programas de análise computacional avançada podem demandar muito tempo para resolver sistemas matemáticos que envolvam muitas variáveis.

Entre diversos métodos conhecidos, o de Cholesky é muito utilizado para reduzir o número de operações necessárias para a obtenção de resultados de sistemas de equações. Para o cálculo manual, o Método Cholesky reduz a possibilidade de erros provenientes do excesso de informações. Por outro lado, no caso do cálculo computacional, o número de operações é significativamente menor em sistemas considerados grandes do que a resolução através dos processos convencionais de multiplicação de matrizes.

O Método Cholesky consiste em transformar uma matriz simétrica em um produto de duas matrizes triangulares, uma superior e outra inferior, sendo uma matriz transposta da outra.

No caso da análise de estruturas, a matriz de rigidez ‘S’, que é simétrica, pode ser considerada como o produto de duas matrizes triangulares:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N1} & S_{N2} & \cdots & S_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ 0 & C_{22} & \cdots & C_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix}$$

As matrizes do Método Cholesky, neste caso, podem ser chamadas de C e C<sup>T</sup>.

O produto de uma linha “i” da matriz C com uma coluna “j” da matriz C<sup>T</sup> resulta no valor de S<sub>ij</sub> na matriz S. Deste modo:

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^i C_{ik}^T \cdot C_{kj} \quad (1)$$

Ou

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^i C_{ki} \cdot C_{kj} \text{ para } j \geq i, \text{ utilizando apenas a matriz } C. \quad (2)$$

Substituindo a matriz de rigidez S na equação (1) por suas matrizes triangulares equivalentes do Método Cholesky, obtém-se que:

$$\overline{\mathbf{AC}} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} \quad (3)$$

Considerando o vetor auxiliar  $\mathbf{B}$ , onde  $\mathbf{B} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}$ , e aplicando a substituição na equação (3), tem-se que:

$$\overline{\mathbf{AC}} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B} \quad (4)$$

Como a matriz  $\mathbf{C}^T$  é uma matriz triangular, é fácil obter os componentes do vetor auxiliar  $\mathbf{B}$  através de substituição progressiva.

Fazendo  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{B}$ , por retro-substituição obtém-se o vetor  $\mathbf{D}$ .



## ANEXO 2 - Saída de resultados do programa Trelicas\_espaciais

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

##### TRELICAS ESPACIAIS #####

VERSAO: BRUNA DRUZIAN

\*\*\*\*\*

NOME DA ESTRUTURA:

\*\*\*\*\*

TRELICAESPACIALTCC

\*\*\*\*\*

DADOS DA ESTRUTURA:

\*\*\*\*\*

NUMERO DE BARRAS:	6
NUMERO DE APOIOS SIMPLES:	0
NUMERO DE APOIOS DUPLOS:	0
NUMERO DE APOIOS TRIPLOS:	3
NUMERO DE NOS:	4
MODULO DE ELASTICIDADE:	200000000.0

## COORDENADAS DOS NOS:

NO	X	Y	Z
1	0.000000	0.000000	0.000000
2	0.000000	0.000000	0.750000
3	1.000000	0.000000	0.000000
4	0.000000	1.000000	0.000000

## DADOS DAS BARRAS:

BARRA	NO INICIAL	NO FINAL	AREA
1	1	2	0.001000
2	1	3	0.001000
3	1	4	0.001000
4	2	3	0.001000
5	2	4	0.001000
6	3	4	0.001000

## RESTRICOES NODAIS:

NO	Restr. X	Restr. Y	Restr. Z
1	1	1	1
2	1	1	1
3	1	1	1

CARGAS (ACOES CONCENTRADAS) :

NO	PX	PY	PZ
4	37.0000	-1.0000	30.0000

NUMERO DE DESLOCAMENTOS LIVRES: 3

NUMERO DE DESLOCAMENTOS RESTRINGIDOS: 9

\*\*\*\*\*

RESULTADOS:

\*\*\*\*\*

#### COMPRIMENTOS E CO-SENOS DIRETORES DAS BARRAS:

BARRA	COMP.	COS-X	COS-Y	COS-Z
1	0.7500	0.00000	0.00000	1.00000
2	1.0000	0.00000	1.00000	0.00000
3	1.0000	1.00000	0.00000	0.00000
4	1.2500	0.00000	0.80000	-0.60000
5	1.2500	0.80000	0.00000	-0.60000
6	1.4142	0.70711	-0.70711	0.00000

#### MATRIZES DE RIGIDEZ DE BARRA NO SISTEMA

#### DE COORDENADAS LOCAL (SML)

#### E MATRIZES DE ROTACAO (R):

BARRA: 1

MATRIZ SML:

266667.	0.00000	0.00000	-266667.	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-266667.	0.00000	0.00000	266667.	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ DE ROTACAO (R):

0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.00000

BARRA: 2

MATRIZ SML:

200000.	0.00000	0.00000	-200000.	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-200000.	0.00000	0.00000	200000.	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ DE ROTACAO (R):

1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

BARRA: 3

MATRIZ SML:

200000.	0.00000	0.00000	-200000.	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-200000.	0.00000	0.00000	200000.	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ DE ROTACAO (R):

0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

BARRA: 4

MATRIZ SML:

160000.	0.00000	0.00000	-160000.	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-160000.	0.00000	0.00000	160000.	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ DE ROTACAO (R):

0.800000	0.00000	-0.480000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-0.480000	-0.00000	-0.600000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.800000	0.00000	-0.480000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	-0.480000	-0.00000	-0.600000

BARRA: 5

MATRIZ SML:

160000.	0.00000	0.00000	-160000.	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-160000.	0.00000	0.00000	160000.	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ DE ROTACAO (R):

0.00000	0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.800000	-0.480000	0.00000	0.00000	0.00000
-0.00000	-0.480000	-0.600000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.800000	-0.480000
0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000	-0.480000	-0.600000



BARRA: 6

MATRIZ SML:

141421.	0.00000	0.00000	-141421.	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-141421.	0.00000	0.00000	141421.	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ DE ROTACAO (R):

-0.707107	-0.500000	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-0.500000	0.707107	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	-0.707107	-0.500000	-0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	-0.500000	0.707107	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000

#### MATRIZES DE RIGIDEZ DE BARRA NO SISTEMA

#### DE COORDENADAS GLOBAL (SM)

####  $SM = RT * SML * R$

BARRA: 1

0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000
0.00000	0.00000	266667.	-0.00000	-0.00000	-266667.
-0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-0.00000	-0.00000	-266667.	0.00000	0.00000	266667.

BARRA: 2

200000.	0.00000	0.00000	-200000.	-0.00000	-0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000
-200000.	-0.00000	-0.00000	200000.	0.00000	0.00000
-0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

BARRA: 3

0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000
0.00000	200000.	0.00000	-0.00000	-200000.	-0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000
-0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-0.00000	-200000.	-0.00000	0.00000	200000.	0.00000
-0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

BARRA: 4

102400.	0.00000	-76800.0	-102400.	-0.00000	76800.0
0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000
-76800.0	-0.00000	57600.0	76800.0	0.00000	-57600.0
-102400.	-0.00000	76800.0	102400.	0.00000	-76800.0
-0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000
76800.0	0.00000	-57600.0	-76800.0	-0.00000	57600.0

BARRA: 5

0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000
0.00000	102400.	-76800.0	-0.00000	-102400.	76800.0
-0.00000	-76800.0	57600.0	0.00000	76800.0	-57600.0
-0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000
-0.00000	-102400.	76800.0	0.00000	102400.	-76800.0
0.00000	76800.0	-57600.0	-0.00000	-76800.0	57600.0

BARRA: 6

70710.7	-70710.7	-0.00000	-70710.7	70710.7	0.00000
-70710.7	70710.7	0.00000	70710.7	-70710.7	-0.00000
-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000
-70710.7	70710.7	0.00000	70710.7	-70710.7	-0.00000
70710.7	-70710.7	-0.00000	-70710.7	70710.7	0.00000
0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000

#### MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DA ESTRUTURA (SJ):

```
####      |   S   |  SDR  |
#### SJ = |-----|-----|
####      |  SRD  |  SRR  |
```

## #### MATRIZ SJ NA NUMERACAO PRIORITARIA:

70710.7	-70710.7	0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000	-70710.7	70710.7	0.00000
-70710.7	373111.	-76800.0	-0.00000	-200000.	-0.00000	-0.00000	-102400.	76800.0	70710.7	-70710.7	-0.00000
0.00000	-76800.0	57600.0	-0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000	76800.0	-57600.0	0.00000	-0.00000	-0.00000
-0.00000	-0.00000	-0.00000	200000.	0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-200000.	-0.00000	-0.00000
-0.00000	-200000.	-0.00000	0.00000	200000.	0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000
-0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	266667.	-0.00000	-0.00000	-266667.	-0.00000	-0.00000	-0.00000
-0.00000	-0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	102400.	0.00000	-76800.0	-102400.	-0.00000	76800.0
-0.00000	-102400.	76800.0	-0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000	102400.	-76800.0	-0.00000	-0.00000	0.00000
0.00000	76800.0	-57600.0	-0.00000	-0.00000	-266667.	-76800.0	-76800.0	381867.	76800.0	0.00000	-57600.0
-70710.7	70710.7	0.00000	-200000.	-0.00000	-0.00000	-102400.	-0.00000	76800.0	373111.	-70710.7	-76800.0
70710.7	-70710.7	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000	-70710.7	70710.7	0.00000
0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	76800.0	0.00000	-57600.0	-76800.0	0.00000	57600.0

## #### MATRIZ S NA NUMERACAO PRIORITARIA:

70710.7	-70710.7	0.00000
-70710.7	373111.	-76800.0
0.00000	-76800.0	57600.0

#### MATRIZ SRD NA NUMERACAO PRIORITARIA:

-0.00000	-0.00000	-0.00000
-0.00000	-200000.	-0.00000
-0.00000	-0.00000	-0.00000
-0.00000	-0.00000	0.00000
-0.00000	-102400.	76800.0
0.00000	76800.0	-57600.0
-70710.7	70710.7	0.00000
70710.7	-70710.7	-0.00000
0.00000	-0.00000	-0.00000

#### MATRIZ SDR NA NUMERACAO PRIORITARIA:

-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000	-70710.7	70710.7	0.00000
-0.00000	-200000.	-0.00000	-0.00000	-102400.	76800.0	70710.7	-70710.7	-0.00000
-0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000	76800.0	-57600.0	0.00000	-0.00000	-0.00000

#### MATRIZ SRR NA NUMERACAO PRIORITARIA:

200000.	0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-200000.	-0.00000	-0.00000
0.00000	200000.	0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000
0.00000	0.00000	266667.	-0.00000	-0.00000	-266667.	-0.00000	-0.00000	-0.00000
-0.00000	-0.00000	-0.00000	102400.	0.00000	-76800.0	-102400.	-0.00000	76800.0
-0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000	102400.	-76800.0	-0.00000	-0.00000	0.00000
-0.00000	-0.00000	-266667.	-76800.0	-76800.0	381867.	76800.0	0.00000	-57600.0
-200000.	-0.00000	-0.00000	-102400.	-0.00000	76800.0	373111.	-70710.7	-76800.0
-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000	-70710.7	70710.7	0.00000
-0.00000	-0.00000	-0.00000	76800.0	0.00000	-57600.0	-76800.0	0.00000	57600.0

#### VETOR AC-BARRA (NUMERACAO PRIORITARIA):

37.000000  
-1.000000  
30.000000

#### VETOR DOS DESLOCAMENTOS (D) NA NUMERACAO

#### PRIORITARIA:

0.903259E-03  
0.380000E-03  
0.102750E-02

#### VETOR ARL (nao , nulo se existir pelo menos  
#### uma carga aplicada na direcao de um  
#### deslocamento restringido):

-0.0000  
-0.0000  
-0.0000  
-0.0000  
-0.0000  
-0.0000  
-0.0000  
-0.0000  
-0.0000

#### VETOR DAS REACOES DE APOIO (AR) NA NUMERACAO  
#### PRIORITARIA

-0.0000  
-76.0000  
-0.0000  
0.0000  
40.0000  
-30.0000  
-37.0000  
37.0000  
0.0000



#### MATRIZ C: MATRIZ S FATORADA NO METODO CHOLESKI

265.915	-265.915	0.00000
0.00000	549.909	-139.659
0.00000	0.00000	195.180

#### VETOR DOS DESLOCAMENTOS (D) NA NUMERACAO

#### ARBITRARIA:

0.00000
0.00000
0.00000
0.00000
0.00000
0.00000
0.00000
0.00000
0.00000
0.903259E-03
0.380000E-03
0.102750E-02

#### VETOR DAS REACOES DE APOIO (AR) NA NUMERACAO

#### ARBITRARIA:

-0.0000  
 -76.0000  
 -0.0000  
 0.0000  
 40.0000  
 -30.0000  
 -37.0000  
 37.0000  
 0.0000  
 0.0000  
 0.0000  
 0.0000

#### DESLOCAMENTOS DOS NOS E REACOES DE APOIO:

NO	UX	UY	UZ	R. X	R. Y	R. Z
1	0.00000	0.00000	0.00000	-0.0000	-76.0000	-0.0000
2	0.00000	0.00000	0.00000	0.0000	40.0000	-30.0000
3	0.00000	0.00000	0.00000	-37.0000	37.0000	0.0000
4	0.903259E-03	0.380000E-03	0.102750E-02	0.0000	0.0000	0.0000

#### ACOES DE EXTREMIDADE DE BARRA:

BARRA	COMPRESSAO	TRACAO
1		-0.0000
2		-0.0000
3		76.0000
4		-0.0000
5	-50.0000	
6	-52.3259	

FIM