

# Un modèle de croissance aléatoire : le monde découvert par $N$ explorateurs

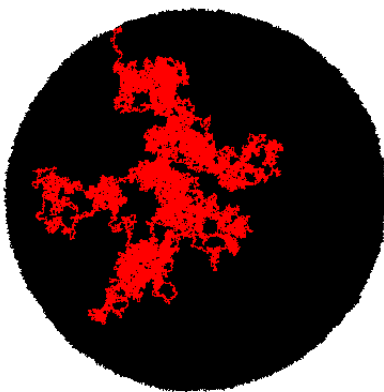
Paul MELOTTI et Alexis PRÉVOST  
sous la direction de Pierre BERTIN

13 mai 2013

## Introduction

Nous allons étudier dans ce mémoire l'évolution du monde découvert par des explorateurs dans le cas discret. Le résultat principal est celui de [1] qui montre qu'asymptotiquement celui-ci est une boule. Le modèle est le suivant : on lance  $N$  explorateurs sur  $\mathbb{Z}^d$  les uns après les autres. On définit la région explorée récursivement de la façon suivante : on lance le  $k^{\text{ème}}$  explorateur qui effectue une marche aléatoire symétrique et s'arrête dès qu'il tombe sur une case non explorée (on dit qu'il s'installe). La région explorée à l'instant  $k$  est alors la région explorée à l'instant  $k - 1$  plus la position du  $k^{\text{ème}}$  explorateur installé. A. Asselah et A. Gaudillière ont montré dans [1] que la région explorée tendait vers une boule, avec une erreur presque sûrement inférieure à  $\alpha\sqrt{\log(n)}$  en dimension 3 et  $\alpha \log(n)$  en dimension 2.

Nous allons travailler ici sur l'article [2] d'A. Gaudillière et A. Asselah qui essaie d'établir l'optimalité des majorations précédentes. Il montre en particulier que  $\sqrt{\log(n)}$  est optimal en dimension supérieure à 3 pour l'erreur interne, mais ne conclut pas pour la dimension 2. En ce qui concerne l'erreur externe, ils prouvent un résultat qui permet de penser que  $\sqrt{\log(n)}$  est optimal en dimension supérieure à 3 sans tout à fait permettre de conclure.



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Premières Propriétés</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Propriété abélienne</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>L'erreur externe</b>	<b>7</b>
3.1	En dimension supérieure à 3 . . . . .	7
3.2	En dimension 2 . . . . .	13
<b>4</b>	<b>L'erreur interne</b>	<b>13</b>
<b>A</b>	<b>Preuves annexes</b>	<b>14</b>
A.1	Proposition 3.2 . . . . .	14
A.2	Proposition 3.4 . . . . .	15

# 1 Premières Propriétés

On appelle  $\mathbb{B}(y, R) = \{x \in \mathbb{Z}^d, \|x - y\| < R\}$  la boule dans  $\mathbb{Z}^d$  de centre  $y$  et de rayon  $R$ . Le bord de cette boule est alors :

$$\partial\mathbb{B}(y, R) = \{x \notin \mathbb{B}(y, R) \mid \exists z \in \mathbb{B}(y, R), \|x - z\| < 1\} \quad (1.1)$$

Commençons par définir ce qu'est la région explorée par  $N$  explorateurs :

**Définition 1.1.** On appelle explorateur une marche aléatoire symétrique de  $\mathbb{Z}^d$  partant d'un point  $z$ . Tous les explorateurs seront pris indépendants. Soit  $\Lambda$  la région de  $\mathbb{Z}^d$  préalablement explorée et  $\xi^n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  les positions de départ des explorateurs qui suivent des marches aléatoires indépendantes  $(S_1, \dots, S_n)$  symétriques sur  $\mathbb{Z}^d$ . On définit alors récursivement  $A(\Lambda, \xi^n)$  la région explorée par les explorateurs de la manière suivante :

$$-A(\Lambda, \emptyset) = \Lambda$$

- $A(\Lambda, \xi^k) = A(\Lambda, \xi^{k-1}) \cup \{S_k(\tau_k)\}$  où  $\tau_k = \inf\{t \geq 0 \mid S_k(t) \notin A(\Lambda, \xi^{k-1})\}$  est le premier temps pour lequel  $S_k$  sort de la région explorée. On dit que l'explorateur s'installe à l'instant  $\tau_k$ .

On notera par la suite  $A(\xi^n) = A(\emptyset, \xi^n)$  et  $A_R(\xi^n) = A(\xi^n) \cap \mathbb{B}(0, R)$ . On notera aussi plus simplement  $A(n) = A((0, \dots, 0))$  où le vecteur est de taille  $n$ .

On va désormais essayer d'estimer la forme asymptotique de cette région explorée pour des explorateurs partant de l'origine, et notamment la différence entre celle-ci et une boule correspondante, c'est à dire la boule de volume le nombre d'explorateurs lancés. On va définir pour cela les notions d'erreur interne et externe.

L'erreur externe, notée  $\delta_O$ , est la différence entre le tentacule le plus long et le rayon du cercle limite :

$$n + \delta_O(n) = \inf\{p \geq 0 \mid A(b(n)) \subset \mathbb{B}(0, p)\} \quad (1.2)$$

où  $b(n) = \text{Card}(\mathbb{B}(0, n))$  est le "volume" de la boule de rayon  $n$ . L'erreur interne, notée  $\delta_I$ , est la différence entre le rayon du cercle limite et le trou le plus profond :

$$n - \delta_I(n) = \sup\{p \geq 0 \mid \mathbb{B}(0, p) \subset A(b(n))\} \quad (1.3)$$

Il est important ici de constater que ces deux notions, illustrées sur la figure suivante, ne sont définies que lorsqu'on lance un nombre d'explorateur de la forme  $b(k)$ .

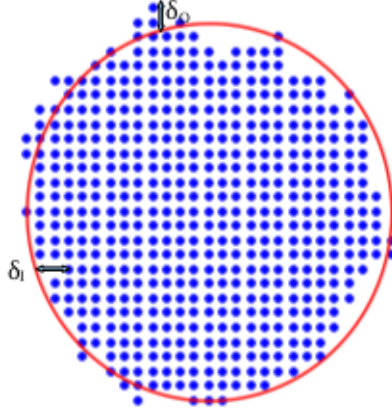


FIGURE 1 – Exemple de région explorée par  $b(13)$  explorateurs

Le premier résultat concernant les erreurs internes et externes assure que la région explorée ressemble bien asymptotiquement à une boule.

**Théorème 1.2.** *En dimension  $d \geq 3$ ,  $\exists \beta_d > 0$  tel que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_I(n)}{\sqrt{\log(n)}} \leq \beta_d \text{ et } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_O(n)}{\sqrt{\log(n)}} \leq \beta_d \quad (1.4)$$

*En dimension 2,  $\exists \beta_2 > 0$  tel que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_I(n)}{\log(n)} \leq \beta_2 \text{ et } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_O(n)}{\log(n)} \leq \beta_2 \quad (1.5)$$

Pour illustrer ce résultat, voici un exemple d'évolution de  $\frac{\delta_I(n)}{\log(n)}$  et  $\frac{\delta_O(n)}{\log(n)}$  en dimension 2 :

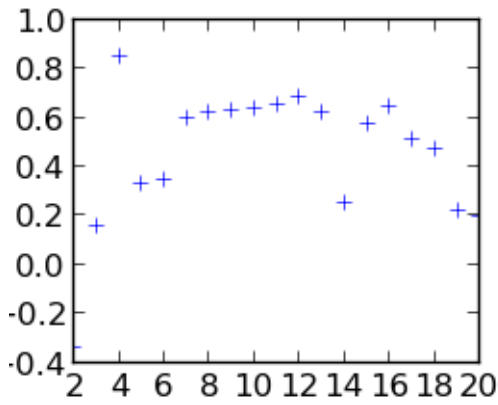


FIGURE 2 – Erreur interne

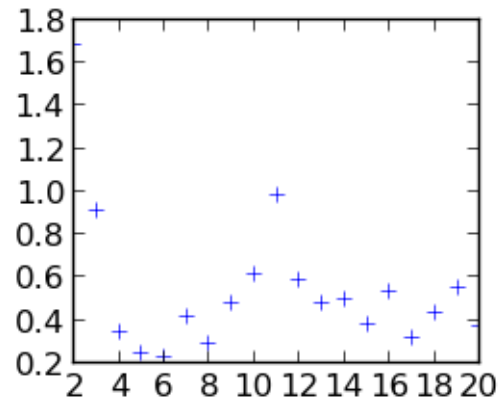


FIGURE 3 – Erreur externe

On peut naturellement s'interroger sur l'optimalité de cet ordre de fluctuations en  $\sqrt{\log(n)}$  pour  $d \geq 3$ ,  $\log(n)$  pour  $d = 2$ . On va prouver ici deux théorèmes pour étudier cette question.

**Théorème 1.3.** *En dimension  $d \geq 3$ ,  $\exists \alpha_d > 0$  tel que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\exists k \geq n, \delta_0(k) \geq h(k) \mid \delta_I(n) < h(n)) = 1 \quad (1.6)$$

où  $h(n) = \alpha_d \sqrt{\log(n)}$ .

*En dimension  $d=2$ ,  $\exists \alpha_2 > 0$  tel que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\exists k \geq n, \delta_0(k) \geq h(k) \mid \delta_I(n) < h(n)) = 1 \quad (1.7)$$

où  $h(n) = \alpha_2 \sqrt{\log(n) \log(\log(n))}$

Autrement dit, si les trous ne sont pas trop grand, alors de longs tentacules apparaissent. Ce théorème montre que l'erreur externe croît comme on s'y attendait sous l'hypothèse d'une erreur interne faible, mais il ne permet malheureusement pas de conclure.

Le cas de l'erreur interne est quand à lui complètement déterminé en dimension supérieure à 3 grâce au résultat suivant, qui dit que presque sûrement de grands trous apparaissent une infinité de fois :

**Théorème 1.4.** *En dimension  $d \geq 3$ ,  $\exists \alpha_d > 0$  tel que*

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{\delta_I(n) \geq h(n)\}) = 1 \quad (1.8)$$

où  $h(n) = \alpha_d \sqrt{\log(n)}$

Introduisons dès à présent quelques définitions qui nous seront utiles par la suite.

**Définition 1.5.** Soit  $\Lambda$  une partie de  $\mathbb{Z}^d$ ,  $S$  une marche aléatoire discrète,  $\gamma$  et  $R$  des entiers positifs.

- i)  $\rho(\gamma) = \sup\{n \geq 0, b(n) \leq \gamma\}$  est le rayon de la plus grande boule de volume inférieur à  $\gamma$ .
- ii)  $H(S; \Lambda) = \inf\{n \geq 0, S(n) \in \Lambda\}$  (ou  $H(\Lambda)$  en l'absence d'ambiguïté sur  $S$ ) est le premier instant pour lequel la marche aléatoire  $S$  atteint  $\Lambda$ .
- iii) Si  $\eta : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{N}$  est telle que  $\eta(z)$  est le nombre d'explorateurs partis de  $z$ , la région explorée en partant de  $\eta$  sera la région définie en faisant partir les explorateurs dans un ordre prédéfini sur  $\mathbb{Z}^d$ .
- iv)  $W_R(\Lambda; \eta, z)$  est le nombre d'explorateurs, partant de la configuration  $\eta$  et de la région explorée  $\Lambda$ , qui passent par  $z \in \mathbb{B}(0, R)$  avant de sortir de  $\mathbb{B}(0, R)$ .
- v)  $W_R(\Lambda; \eta, z)$  est le nombre d'explorateurs, partant de la configuration  $\eta$  et de la région explorée  $\Lambda$ , qui passent par  $z \in \partial \mathbb{B}(0, R)$  au moment où ils sortent de  $\mathbb{B}(0, R)$ .
- vi)  $\zeta_z^N$  est le vecteur  $(z, \dots, z)$  de taille  $N$ .

*Remarque.* Si  $\mathbb{B}(0, R) \subset \Lambda$ ,  $W_R(\mathbb{B}(0, R); \eta, z) = W_R(\Lambda; \eta, z)$ . On appelle alors cette quantité  $M_R(\eta, z)$ .

## 2 Propriété abélienne

Insérer ici la propriété abélienne si on fait la démo avec l'exemple qui sert après. Dire que ça justifie l'utilisation d'un ordre choisi au pif sur  $\mathbb{Z}^d$

Mémo : Je me sers dans le dernier lemme de l'erreur externe du résultat qui est sur le livre qu'on a emprunté. Si on l'a démontré, penser à modifier ça.

Dans le même lemme je me sers aussi du fait que  $b(n+h(n))-b(n) \leq ch(n)n^{d-1}$  et la même chose dans l'autre sens. Le démontrer un jour.

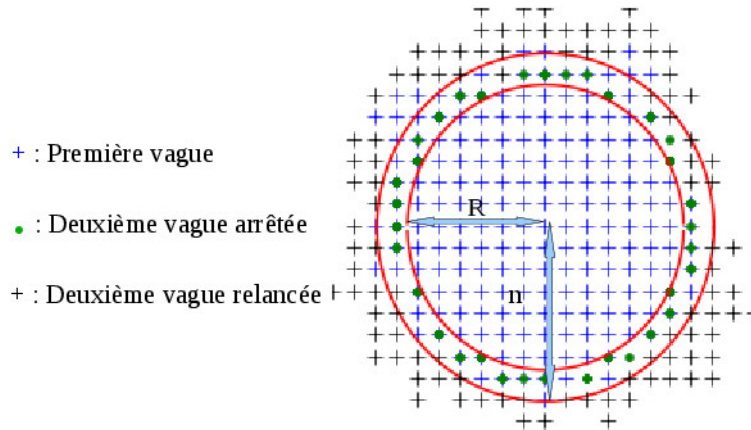


FIGURE 4 – La région explorée par vagues

### 3 L'erreur externe

On va prouver ici le théorème 1.3, d'abord en dimension supérieure à 3, puis en dimension 2.

#### 3.1 En dimension supérieure à 3

Pour  $\alpha$  et  $\gamma$  choisis par la suite, on pose  $h(n) = \alpha\sqrt{\log(n)}$  et  $L(n) = \gamma\sqrt{\log(n)}$ .  $h$  représente ici l'erreur externe et  $L$  l'erreur interne, et il est important de conserver cette distinction à l'esprit même si on prendra  $\alpha = \gamma$  par la suite. On rappelle qu'on veut démontrer ici la formule suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\exists k \geq n, \delta_0(k) \geq h(k) \mid \delta_I(n) < L(n)) = 1$$

Pour estimer l'erreur externe, on va commencer par minorer la probabilité de fabriquer un tentacule qui sorte de  $\mathbb{B}(0, R)$  lorsqu'on fait partir  $N$  explorateurs de  $z$ , avec  $\|z\| < R$  (on prendra par la suite  $R$  de la forme  $\|z\| + h(n)$ ).

**Proposition 3.1.** *Il existe  $c > 1$  tel que  $\forall z \in \mathbb{Z}^d$ , si on prend  $R$  tel que  $N \geq c(R - \|z\|)$  et  $R \geq \|z\| + 1$ , on ait, pour tout  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ ,*

$$P(A(\Lambda, \zeta_z^N) \not\subset \mathbb{B}(0, R)) \geq \exp(-c(R - \|z\|)^2)$$

*Démonstration.* On commence par remarquer qu'on peut prendre  $\Lambda = \emptyset$  car  $A(\emptyset, \xi) \subset A(\Lambda, \xi) \Rightarrow P(A(\Lambda, \xi) \not\subset \mathbb{B}(0, R)) \geq P(A(\emptyset, \xi) \not\subset \mathbb{B}(0, R))$ . Le reste de la démonstration consiste à créer un tentacule qui sort de  $\mathbb{B}(0, R)$  en partant de  $z$ . Pour cela posons

$$x_n = (\|z\| + n) \frac{z}{\|z\|}$$

La suite  $x_n$  est une suite de points partant de  $z$  et qui arrive sur  $\mathbb{B}(0, R)$  perpendiculairement à celle-ci. Pour tout cube unitaire centré en  $x_n$ , il existe  $z_n \in \mathbb{Z}^d$  dans ce cube. Soit  $p$  le plus petit entier tel que  $\|x_p\| \geq R + 1$ , alors  $\|z_p\| \geq R$ . On définit alors  $(y_1 = z, y_2, \dots, y_k = z_p)$  une suite de plus proches voisins dans  $\mathbb{Z}^d$ , où l'on va chercher à prendre  $k$  suffisamment petit.

On peut trouver une constante  $c_1$  qui permet de prendre  $k \leq c_1 p$ . Pour cela, on procède de la façon suivante : on appelle  $C$  le diamètre de la figure composée de deux cube unitaire partageant une face, de façon à avoir  $\|z_n - z_{n-1}\| \leq C$ . Il est alors possible de relier  $z_n$  à  $z_{n-1}$  par une suite de plus proches voisins de taille inférieure à  $c_1 = dC$ , ce qui prouve le résultat. On alors  $k \leq c_1(R - \|z\| + 2) \leq c(R - \|z\|)$  pour  $c$  une constante suffisamment grande. Comme  $N \geq c(R - \|z\|)$ , on peut forcer les  $k$  premiers explorateurs à s'installer successivement sur  $y_1, \dots, y_k$ , et la probabilité de cet événement est :

$$\left(\frac{1}{2d}\right)^{\sum_{n=1}^k n} \geq \exp(-c(R - \|z\|)^2)$$

quitte à augmenter la constante  $c$ . La présence d'un tel tentacule impliquant que les explorateurs sortent de  $\mathbb{B}(0, R)$ , on a bien le résultat voulu.  $\square$

On fixe désormais l'entier  $n$ , et on va essayer d'estimer la probabilité de trouver un entier  $k \geq n$  pour lequel l'erreur externe dépasse  $h(k)$ . Pour cela on va agir comme décrit dans la section 2 en lançant les explorateurs de l'origine en deux vagues, la première de  $b(n)$  explorateurs et la deuxième de  $X_n$  explorateurs, où  $X_n$  est une variable aléatoire discrète indépendante des marches des explorateurs, dont la loi sera fixée par la suite. On arrête ces derniers explorateurs sur  $\Sigma = \partial\mathbb{B}(0, r_n)$  avant de les faire repartir, avec  $r_n = n - L(n)$ .

La propriété abélienne montre alors que la région explorée de cette façon est la même, en loi, que celle explorée en lançant directement  $X_n + b(n)$  explorateurs. On cherche à trouver  $X_n$  tel que l'évènement  $\delta_O(R_n) \geq h(R_n)$  où  $R_n = \rho(b(n) + X_n) + 1$  arrive avec une probabilité proche de 1.

Après avoir arrêté la deuxième vague sur  $\Sigma$ , on considère l'évènement : partant d'un point  $z$  de  $\Sigma$ , en relançant les explorateurs arrêtés en  $z$ , on construit un tentacule qui sort de  $\mathbb{B}(0, R_n + \delta_O(R_n))$ . On note cet évènement  $\text{cov}(z)$  :

$$\text{cov}(z) = \{A(\Lambda_n, \zeta_z^{N_z}) \not\subset \mathbb{B}(0, R_n + h(R_n))\} \quad (3.1)$$

où  $N_z$  est le nombre d'explorateurs arrêtés en  $z$  et  $\Lambda_n$  est la région explorée au moment où on a arrêté la deuxième vague.

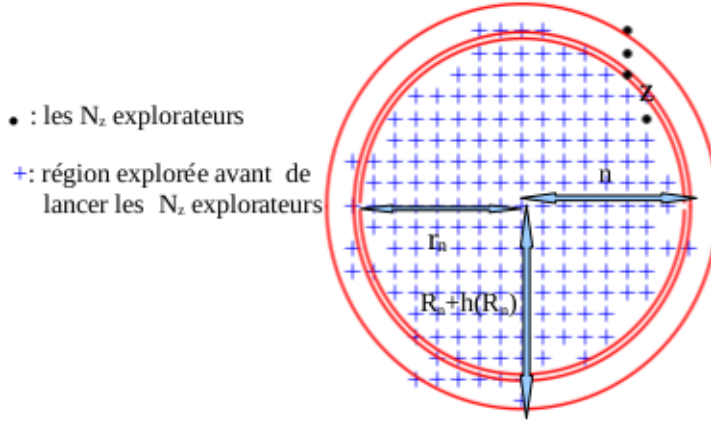


FIGURE 5 – Un exemple où  $\text{cov}(z)$  est réalisé

On constate que l'évènement  $\delta_O(R_n) \geq h(R_n)$  est lié à  $\{\text{cov}(z), z \in \Sigma\}$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P(\delta_O(R_n) \geq h(R_n)) &\geq P(A(b(R_n)) \not\subset \mathbb{B}(0, R_n + h(R_n))) \\ &\geq P(A(b(n) + X_n) \not\subset \mathbb{B}(0, R_n + h(R_n))) \\ &\geq P(A(\Lambda_n, \sum_{z \in \Sigma} \zeta_z^{N_z}) \not\subset \mathbb{B}(0, R_n + h(R_n))) \\ &\geq P(\bigcup_{z \in \Sigma} \text{cov}(z)) \end{aligned} \quad (3.2)$$



Il nous faut désormais estimer  $P(\bigcup_{z \in \Sigma} \text{cov}(z))$ . Pour cela, il serait intéressant d'avoir indépendance entre les  $\text{cov}(z)$  sous certaines hypothèses, ce qu'on va obtenir en prenant pour  $X_n$  une variable de Poisson. En effet, les variables de Poisson ont la propriété suivante :

**Proposition 3.2.** *Si  $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$  est une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi  $U$  à valeur dans  $E$ ,  $X$  une variable de Poisson indépendante des  $U_n$  de paramètre  $\lambda$ ,  $\{E_i, i \in \{1, \dots, n\}\}$  une partition de  $E$ , et si on pose*

$$X_i = \sum_{n \leq X} 1_{U_n \in E_i}$$

alors les  $X_i$  sont des variables de Poisson indépendantes de paramètre  $\lambda P(U \in E_i)$

*Démonstration.* Voir Annexe A.1. □

Cette propriété ne permet pas pour autant d'affirmer que les  $N_z$  sont des variables de Poisson pour  $z \in \Sigma$ , mais cela sera vrai lorsque  $\delta_I(n) < L(n)$ . On définit donc pour tout  $z \in \Sigma$

$$\text{cov}_2(z) = \{A(\Delta_n, \zeta_z^{N'_z}) \not\subset \mathbb{B}(0, R_n + h(R_n))\} \quad (3.3)$$

où  $N'_z$  est le nombre d'explorateurs de la première vague qui touchent  $\Sigma$  en  $z$  lorsque la région explorée initiale est  $\Delta_n = \mathbb{B}(0, r_n)$ .

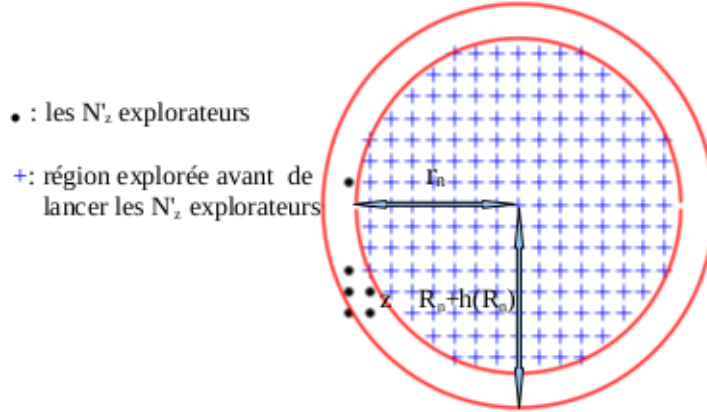


FIGURE 6 – Un exemple où  $\text{cov}_2(z)$  est réalisé

On remarque que la seule différence entre  $\text{cov}(z)$  et  $\text{cov}_2(z)$  est la région explorée avant de lancer la deuxième vague. C'est ici qu'il est important de se placer dans le cas  $\delta_I(n) < L(n)$ , et on restera dans ce cas jusqu'à la fin de cette partie, puisqu'on a alors :

$$W_{n-L(n)}(A(\zeta_0^{b(n)}); X_n 1_0, z) = M_{n-L(n)}(X_n 1_0, z)$$

et donc  $N'_z = N_z$  et  $\text{cov}_2(z) \subset \text{cov}(z)$ .

Soit  $U$  la variable aléatoire à valeur dans  $\Sigma$  calculée en regardant en quel point une marche aléatoire symétrique atteint  $\Sigma$ . On alors :

$$N'_z = \sum_{p \leq X_n} 1_{U_p=z}$$

D'après la proposition 3.2 les  $N'_z$  sont alors des variables de Poisson indépendantes, et donc les  $\text{cov}_2(z)$  sont indépendants. Ils sont de plus indépendants de  $\delta_I(n)$  puisque celui-ci ne dépend que de la première vague alors que  $\text{cov}_2$  en est indépendant. Résumons ce qu'on a fait jusqu'à présent :

$$\begin{aligned} P(\exists k \geq n, \delta_0(k) \geq h(k) \mid \delta_I(n) < L(n)) &\geq P(\delta_0(R_n) \geq h(R_n) \mid \delta_I(n) < L(n)) \\ &\geq P\left(\bigcup_{z \in \Sigma} \text{cov}(z) \mid \delta_I(n) < L(n)\right) \\ &\geq P\left(\bigcup_{z \in \Sigma} \text{cov}_2(z) \mid \delta_I(n) < L(n)\right) \\ &= P\left(\bigcup_{z \in \Sigma} \text{cov}_2(z)\right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Il faut maintenant trouver  $\lambda_n$ , le paramètre de la loi de Poisson  $X_n$ , pour que tout ceci tende vers 1. La technique consiste à majorer  $R_n + h(R_n)$  de façon à pouvoir appliquer la proposition 3.1 :

**Lemme 3.3.** *Pour  $n$  suffisamment grand,*

$$X_n \leq b(n + h(n)) - b(n) \Rightarrow R_n + h(R_n) \leq n + 3h(n) \quad (3.5)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} X_n \leq b(n + h(n)) - b(n) &\Rightarrow X_n + b(n) \leq b(n + h(n)) \Rightarrow R_n - 1 \leq n + h(n) \\ &\Rightarrow h(R_n) \leq 2h(n) - 1 \end{aligned}$$

pour  $n$  suffisamment grand, d'où le résultat.  $\square$

On prend alors  $\lambda_n = \frac{b(n+h(n))-b(n)}{2}$  pour pouvoir se placer dans le cas du lemme précédent sans difficulté, en effet, on aura souvent  $X_n$  plus petit que  $2\lambda_n$  :

**Proposition 3.4.** *Soit  $X_\lambda$  une variable de Poisson de paramètre  $\lambda$ . On a :*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P(X_\lambda > 2\lambda) = 0$$

*Démonstration.* Voir annexe A.2.  $\square$

En utilisant le lemme 3.3, on a donc :

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{z \in \Sigma} \text{cov}_2(z)\right) &\geq P\left(\bigcup_{z \in \Sigma} \text{cov}_2(z) \cap \{X_n \leq \lambda_n\}\right) \\
&\geq P\left(\bigcup_{z \in \Sigma} \{A(\Lambda_n, \zeta_z^{N'_z}) \not\subset \mathbb{B}(0, n + 3h(n))\}\right) P(X_n \leq \lambda_n) \\
&= P(X_n \leq \lambda_n) \left(1 - \prod_{z \in \Sigma} (1 - P(A(\Lambda_n, \zeta_z^{N'_z}) \not\subset \mathbb{B}(0, n + 3h(n))))\right) \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Or, d'après la proposition 3.1,

$$\begin{aligned}
&P(A(\Lambda_n, \zeta_z^{N'_z}) \not\subset \mathbb{B}(0, n + 3h(n))) \\
&= P(A(\Lambda_n, \zeta_z^{N'_z}) \not\subset \mathbb{B}(0, n + 3h(n)) \mid N'_z \geq c(3h(n) + L(n))) P(N'_z \geq c(3h(n) + L(n))) \\
&\geq \exp(-c(3h(n) + L(n))^2) P(N'_z \geq c(3h(n) + L(n))) \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Il ne reste donc plus qu'à minorer  $P(N'_z \geq c(3h(n) + L(n)))$  :

**Lemme 3.5.**  $\forall c_1 > 0, \exists C \geq 0$  tel que

$$P(N'_z \geq c_1 h(n)) \geq \exp(-Ch(n)) \quad (3.8)$$

*Démonstration.* D'après la proposition 3.2,  $N'_z$  est une variable de poisson de paramètre  $\mu = \lambda_n P(S(H(\Sigma)) = z)$  où  $S$  est une marche aléatoire symétrique sur  $\mathbb{Z}^d$  partant de 0. En utilisant le lemme 1.7.4 de [3], on a des constantes  $c_2$  et  $c_3$  telles que :

$$\frac{c_2}{(n - L(n) + 1)^{d-1}} \leq \frac{c_2}{\|z\|^{d-1}} \leq P(S(H(\Sigma)) = z) \leq \frac{c_3}{\|z\|^{d-1}} \leq \frac{c_3}{(n - L(n))^{d-1}}$$

De plus  $c_4 h(n) n^{d-1} \leq \lambda_n \leq c_5 h(n) n^{d-1}$ , donc  $c_6 h(n) \leq \mu \leq c_7 h(n)$ . On a donc, en posant  $a = \lfloor c_1 h(n) \rfloor + 1$  :

$$\begin{aligned}
P(N'_z \geq c_1 h(n)) &\geq P(N'_z = a) = e^{-\mu} \frac{\mu^a}{a!} \\
&\geq e^{-c_7 h(n)} \frac{(c_6 h(n))^{c_1 h(n)}}{a!} \\
&\sim e^{-c_7 h(n)} \frac{(c_6 h(n))^{c_1 h(n)}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{e}{c_1 h(n)}\right)^{[c_1 h(n)]+1} \\
&\geq e^{(-c_7 + c_1(1 - \ln(c_1) + \ln(c_6)))h(n) + 2} \frac{1}{h(n)^2 \sqrt{2\pi a}} \\
&\geq \exp(-Ch(n))
\end{aligned}$$

□

En prenant  $h(n) = L(n)$  et en utilisant 3.4, 3.6, 3.7, 3.8 et que  $1 - x \leq e^{-x}$ , on a finalement :

$$\begin{aligned}
& P(\exists k \geq n, \delta_0(k) \geq h(k) \mid \delta_I(n) < L(n)) \\
& \geq P(X_n \leq \lambda_n) \left(1 - \prod_{z \in \Sigma} (1 - \exp(-c(4h(n))^2 - Ch(n)))\right) \\
& \geq P(X_n \leq \lambda_n) (1 - \exp(-\kappa n^{d-1} \exp(-Ch(n) - c'h(n)^2))) \\
& \geq P(X_n \leq \lambda_n) (1 - \exp(-\kappa n^{d-1} \exp(-c''h(n)^2))) \\
& = P(X_n \leq \lambda_n) (1 - \exp(-\kappa n^{d-1-\alpha^2 c''}))
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Il suffit maintenant de fixer  $\alpha$  suffisamment petit pour que  $d - 1 - \alpha^2 c''$  soit positif pour terminer la preuve du théorème 1.3.

Il n'est pas clair *a priori* que ce théorème nous donne vraiment une indication sur l'optimalité de  $h(n)$  pour l'erreur externe, mais on peut voir qu'il implique le résultat intéressant suivant :

**Corollaire 3.6.**

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{\delta_I(n) \geq L(n)\} \cup \{\delta_O(n) \geq h(n)\}) = 1 \tag{3.10}$$

*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned}
& P(\exists k \geq n, \delta_I(k) \geq L(k) \text{ ou } \delta_O(k) \geq h(k)) \\
& \geq P(\delta_I(n) \geq L(n) \text{ ou } \exists k \geq n, \delta_0(k) \geq h(k)) \\
& = P(\delta_I(n) \geq L(n)) + P(\exists k \geq n, \delta_0(k) \geq h(k) \mid \delta_I(n) < L(n))P(\delta_I(n) < L(n)) \\
& = 1 - P(\delta_I(n) < L(n))(1 - P(\exists k \geq n, \delta_0(k) \geq h(k) \mid \delta_I(n) < L(n)))
\end{aligned}$$

Et donc,

$$\begin{aligned}
& P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{\delta_I(n) \geq L(n)\} \cup \{\delta_O(n) \geq h(n)\}) \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\exists k \geq n, \delta_I(k) \geq L(k) \text{ ou } \delta_O(k) \geq h(k)) \\
& = 1
\end{aligned}$$

□

Autrement dit, pour une infinité de termes, l'erreur interne ou l'erreur externe est d'ordre  $\sqrt{\log n}$ , donc le théorème 1.2 est d'une certaine façon optimal. On verra dans la partie 4 que 3.10 est en fait vraie pour l'erreur interne seule, mais on ne sait pas si elle est vraie pour l'erreur externe seule.

### 3.2 En dimension 2

## 4 L'erreur interne

Pour  $z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$  on note  $\Sigma(z) = \partial\mathbb{B}(0, \|z\|)$ . Remarquons que  $z \in \Sigma(z)$ . Pour  $\Lambda \subset \Sigma(z)$  et  $n$  un entier et  $R > 0$ , on définit aussi la variable aléatoire  $N_z(n, \Lambda, R)$  comme le nombre de marches aléatoires parmi  $n$  marches partant de 0 qui atteignent  $\Sigma(z)$  en  $\Lambda$  puis visitent  $z$  avant de sortir de  $\mathbb{B}(0, \|z\| + R)$ .

**Lemme 4.1.** *Soit  $X$  une variable de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Il existe  $\kappa > 0$  tel que pour tout  $z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$  et  $R > 0$ ,*

$$P(N_z(X, \Lambda, \infty) = 0, N_z(X, \Lambda', R) = 0) \leq \exp\left(-\kappa \frac{\lambda R}{\|z\|^{d-1}}\right)$$

où  $\Lambda = \mathbb{B}(z, R) \cap \Sigma(z)$  et  $\Lambda' = \Sigma(z) \setminus \Lambda$ .

## A Preuves annexes

### A.1 Proposition 3.2

*Démonstration.*

Ce sont des variables de Poisson :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_i = k) &= \mathbb{P}\left(\sum_{n \leq X} 1_{U_n \in E_i} = k\right) \\
&= \sum_{p=k}^{\infty} \mathbb{P}(1_{X=p} \sum_{n \leq p} 1_{U_n \in E_i} = k) \\
&= \sum_{p=k}^{\infty} \binom{p}{k} \mathbb{P}(X = p) \mathbb{P}(U_1 \in E_i) \dots \mathbb{P}(U_k \in E_i) \mathbb{P}(U_{k+1} \notin E_i) \dots \mathbb{P}(U_p \notin E_i) \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \mathbb{P}(U \in E_i)^k \sum_{p=k}^{\infty} \frac{(1 - \mathbb{P}(U \in E_i))^{p-k} \lambda^p}{(p-k)!} \\
&= \frac{(\lambda \mathbb{P}(U \in E_i))^k}{k!} e^{-\lambda \mathbb{P}(U \in E_i)}
\end{aligned}$$

Elles sont indépendantes :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} X_i = k_i\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{n \leq X} \bigcap_{i \in I} 1_{U_n \in E_i} = k_i\right) \\
&= \sum_{p=\sum_{i \in I} k_i}^{\infty} \prod_{i \in I} \binom{p - \sum_{j \in I, j < i} k_j}{k_i} \mathbb{P}(X = p) \left(\prod_{i \in I} \mathbb{P}(U \in E_i)^{k_i}\right) \mathbb{P}(U \notin \bigcup_{i \in I} E_i)^{p - \sum_{i \in I} k_i} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\prod_{i \in I} (k_i!)} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{P}(U \in E_i)^{k_i}\right) \sum_{p=\sum_{i \in I} k_i}^{\infty} \frac{\lambda^p}{(p - \sum_{i \in I} k_i)!} \mathbb{P}(U \notin \bigcup_{i \in I} E_i)^{p - \sum_{i \in I} k_i} \\
&= \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = k_i)
\end{aligned}$$

□

## A.2 Proposition 3.4

*Démonstration.* Posons  $p = 2\lfloor \lambda \rfloor + 1$  :

$$\begin{aligned}
 P(X_\lambda > 2\lambda) &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+p}}{(k+p)!} \leq e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+2\lambda+2}}{(k+2\lambda)!} \leq e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+2\lambda+2}}{(2\lambda)^{k-1}(2\lambda)!} \\
 &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2\lambda+3}}{(2\lambda)!} \\
 &\sim e^{-\lambda} \lambda^{2\lambda+3} \left(\frac{e}{2\lambda}\right)^{2\lambda} \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} \\
 &\sim \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda \frac{\lambda^3}{\sqrt{4\pi\lambda}}
 \end{aligned}$$

□

## Références

- [1] Amine ASSELAH et Alexandre GAUDILLIÈRE : Sub-logarithmic fluctuations for internal DLA. 2010.
- [2] Amine ASSELAH et Alexandre GAUDILLIÈRE : Lower bounds on fluctuations for internal DLA. 2010.
- [3] Lawler GREGORY : *Intersection of Random Walks*. Birkhäuser Boston, 1991.