Un modèle de croissance aléatoire : le monde découvert par N explorateurs

Paul MELOTTI et Alexis PRÉVOST
sous la direction de Pierre BERTIN

10 juin 2013

Introduction

Nous allons étudier dans ce mémoire l'évolution du monde découvert par des explorateurs dans le cas discret. Le résultat principal est celui de [1] qui montre qu'asymptotiquement celui-ci est une boule. Le modèle est le suivant : on lance N explorateurs sur $\mathbb{Z}^d$ les uns après les autres. On définit la région explorée récursivement de la façon suivante : on lance le $k^{\text{ème}}$ explorateur qui effectue une marche aléatoire symétrique et s'arrête dès qu'il tombe sur une case non explorée (on dit qu'il s'installe). La région explorée à l'instant k est alors la région explorée à l'instant $k-1$ plus la position du $k^{\text{ème}}$ explorateur installé. A. Asselah et A. Gaudillière ont montré dans [1] que la région explorée tendait vers une boule, avec une erreur presque sûrement inférieure à $\alpha\sqrt{\log(n)}$ en dimension 3 ou plus et $\alpha\log(n)$ en dimension 2.

Nous allons travailler ici sur l'article [2] d'A. Gaudillière et A. Asselah qui essaie d'établir l'optimalité des majorations précédentes. Il montre en particulier que $\sqrt{\log(n)}$ est optimal en dimension supérieure à 3 pour l'erreur interne, mais ne conclut pas pour la dimension 2. En ce qui concerne l'erreur externe, ils prouvent un résultat qui permet de penser que $\sqrt{\log(n)}$ est optimal en dimension supérieure à 3 sans tout à fait permettre de conclure.

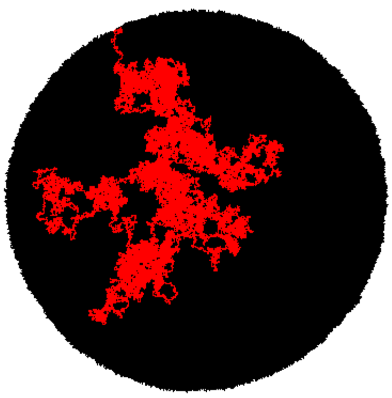

Table des matières

1 Historique

Le modèle qui nous intéresse est un exemple de modèle de croissance aléatoire couramment nommé IDLA (Internal Diffusion Limited Aggregation). Il a été introduit en 1986 par P. Meakin et J.M. Deutch [3] dans le cadre de la chimie théorique pour décrire des processus comme l'électro-polissage. Dès l'introduction du modèle, il a semblé important de connaître la forme asymptotique du cluster obtenu, mais aussi l'ordre des variation par rapport à cette forme limite puisqu'il s'agissait de polir des matériaux.

P. Diaconis et W. Fulton ont formalisé mathématiquement le processus en 1991 [4] et démontré certaines de ces propriétés, en particulier une propriété très utile de commutativité dont on fait usage dans la partie 3. Le modèle de croissance qu'ils proposent est alors original car il s'agit du premier modèle qui semble donner des clusters de forme sphérique.

G. Lawler, M. Bramson, M. et D. Griffeath ont pour la première fois montré en 1992 dans [5] que la forme asymptotique de la région explorée était une boule, dans le sens suivant : on appelle $\mathbb{B}(y,R) = \{x \in \mathbb{Z}^d, \|x-y\| < R\}$ la boule dans $\mathbb{Z}^d$ de centre y et de rayon R, et $b(n) = \mathrm{Card}(\mathbb{B}(0,n))$. On note $A(k)$ la région explorée après avoir lancé k explorateurs. Alors :

Théorème 1.1 (Lawler, Bramson, Griffeath)**.** *Pour tout $\epsilon > 0$, presque sûrement,*

$$\mathbb{B}(0, n(1-\epsilon)) \subset A(b(n)) \subset \mathbb{B}(0, n(1-\epsilon))$$

pour tout n assez grand.

Puis, le problème de l'ordre des fluctuations autour de la boule a été étudié par G. Lawler qui montre en 1995 [6] que les fluctuations sont presque sûrement majorées par $n^{1/3}\log^4(n)$ en dimension 2 ou plus. Toutefois, des simulations suggèrent que l'ordre des fluctuations est plutôt logarithmique. Aucune amélioration notable de ces résultats n'est publiée, jusqu'en 2010, lorsque A. Asselah et A. Gaudillière montrent dans [1] que l'erreur est presque sûrement inférieure à $\alpha\sqrt{\log(n)}$ en dimension 3 ou plus et $\alpha\log(n)$ en dimension 2. Ils publient un second article [2] auquel nous nous intéressons ici, qui établit l'optimalité de ce résultat, du moins pour ce qui est de l'erreur interne.

2 Premières Propriétés

Commençons par définir ce qu'est la région explorée par N explorateurs :

Définition 2.1. On appelle explorateur une marche aléatoire symétrique de $\mathbb{Z}^d$ partant d'un point z. Tous les explorateurs seront pris indépendants. Soit Λ la région de $\mathbb{Z}^d$ préalablement explorée et $\xi^n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ les positions de départs des explorateurs qui suivent des marches aléatoires indépendantes $(S_1, \ldots, S_n)$ symétriques sur $\mathbb{Z}^d$. On définit alors récursivement $A(\Lambda, \xi^n)$ la région explorée par les explorateurs de la manière suivante :

- $A(\Lambda, \emptyset) = \Lambda$
- $A(\Lambda, \xi^k) = A(\Lambda, \xi^{k-1}) \cup \{S_k(\tau_k)\}$ où τ_k=$\inf\{t \geqslant 0 | S_k(t) \notin A(\Lambda, \xi^{k-1})\}$ est le premier temps pour lequel S_k sort de la région explorée. On dit que l'explorateur s'installe à l'instant τ_k.

On notera par la suite $A(\xi^n) = A(\emptyset, \xi^n)$ et $A_R(\Lambda, \xi^n) = A(\Lambda, \xi^n) \cap \mathbb{B}(0, R)$. On notera aussi plus simplement $A(n) = A((0, \ldots, 0))$ où le vecteur est de taille n.

On va désormais essayer d'estimer la forme asymptotique de cette région explorée pour des explorateurs partant de l'origine, et notamment la différence entre celle-ci et une boule correspondante, c'est à dire la boule de volume le nombre d'explorateurs lancés. On va définir pour cela les notions d'erreur interne et externe.

L'erreur externe, notée δ_O, est la différence entre le tentacule le plus long et le rayon du cercle limite :

$$n + \delta_O(n) = \inf\{p \geqslant 0 \mid A(b(n)) \subset \mathbb{B}(0, p)\} \tag{2.1}$$

où $b(n) = \mathrm{Card}(\mathbb{B}(0, n))$ est le “volume” de la boule de rayon n. L'erreur interne, notée δ_I, est la différence entre le rayon du cercle limite et le trou le plus profond :

$$n - \delta_I(n) = \sup\{p \geqslant 0 \mid \mathbb{B}(0, p) \subset A(b(n))\} \tag{2.2}$$

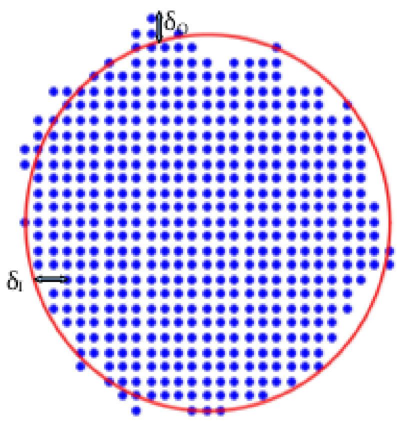

FIGURE 1 – Exemple de région explorée par $b(13)$ explorateurs

Il est important ici de constater que ces deux notions, illustrées sur la figure 1, ne sont définies que lorsqu'on lance un nombre d'explorateur de la forme $b(k)$ car il est difficile dans le cas général de connaitre le rayon de la boule asymptotiquement atteinte.

Le premier résultat concernant les erreurs internes et externes, prouvé par A. Gaudillière et A. Asselah dans [1], assure que la région explorée ressemble bien asymptotiquement à une boule.

Théorème 2.2. *En dimension $d \geqslant 3$, $\exists \beta_d > 0$ tel que*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\delta_I(n)}{\sqrt{\log(n)}} \leqslant \beta_d \textit{ et } \limsup_{n\to\infty} \frac{\delta_O(n)}{\sqrt{\log(n)}} \leqslant \beta_d \tag{2.3}$$

En dimension 2, $\exists \beta_2 > 0$ tel que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\delta_I(n)}{\log(n)} \leqslant \beta_2 \textit{ et } \limsup_{n\to\infty} \frac{\delta_O(n)}{\log(n)} \leqslant \beta_2 \tag{2.4}$$

Pour illustrer ce résultat, voici un exemple d'évolution de $\frac{\delta_I(n)}{\log(n)}$ et $\frac{\delta_O(n)}{\log(n)}$ en dimension 2 :

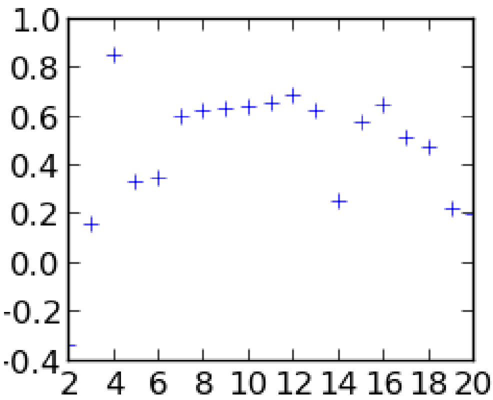

FIGURE 2 – Erreur interne

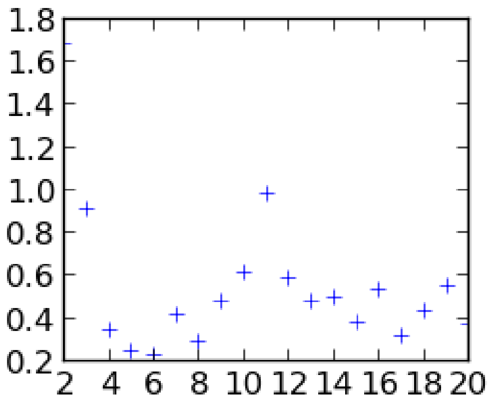

FIGURE 3 – Erreur externe

On peut naturellement s'interroger sur l'optimalité de cet ordre de fluctuations en $\sqrt{\log(n)}$ pour $d \geqslant 3$, $\log(n)$ pour $d = 2$. On va prouver ici deux théorèmes dont la démonstation initiale est dans [2] pour étudier cette question.

Théorème 2.3. *En dimension $d \geqslant 3$, $\exists \alpha_d > 0$ tel que*

$$\lim_{n\to\infty} P(\exists k \geqslant n,\ \delta_0(k) \geqslant h(k) \mid \delta_I(n) < h(n)) = 1 \tag{2.5}$$

où $h(n) = \alpha_d \sqrt{\log(n)}$.

Remarque. Dans [2], ils prouvent également qu'en dimension $d = 2$, $\exists \alpha_2 > 0$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} P(\exists k \geqslant n,\ \delta_0(k) \geqslant h(k) \mid \delta_I(n) < h(n)) = 1 \tag{2.6}$$

où $h(n) = \alpha_2 \sqrt{\log(n)\log(\log(n))}$

Autrement dit, si les trous ne sont pas trop grand, alors de longs tentacules apparaissent. Ce théorème montre que l'erreur externe croît comme on s'y attendait sous l'hypothèse d'une erreur interne faible, mais il ne permet malheureusement pas de conclure.

Le cas de l'erreur interne est quand à lui complètement déterminé en dimension supérieure à 3 grâce au résultat suivant, qui dit que presque sûrement de grands trous apparaissent une infinité de fois :

Théorème 2.4. *En dimension $d \geqslant 3$, $\exists \alpha_d > 0$ tel que*

$$P(\limsup_{n\to\infty}\{\delta_I(n) \geqslant h(n)\}) = 1 \tag{2.7}$$

où $h(n) = \alpha_d \sqrt{\log(n)}$

Introduisons dès à présent quelques définitions qui nous seront utiles par la suite.

Définition 2.5. Soit Λ une partie de $\mathbb{Z}^d$, S une marche aléatoire discrète, y un point de $\mathbb{Z}^d$ et γ et R des entiers positifs.

i) $\partial\mathbb{B}(y, R) = \{x \notin \mathbb{B}(y, R) \mid \exists z \in \mathbb{B}(y, R),\ \|x - z\| < 1\}$ est le bord de la boule de centre y et de rayon R.

ii) $\rho(\gamma) = \sup\{n \geqslant 0,\ b(n) \leqslant \gamma\}$ est le rayon de la plus grande boule de volume inférieur à γ.

iii) $H(S; \Lambda) = \inf\{n \geqslant 0,\ S(n) \in \Lambda\}$ (ou $H(\Lambda)$ en l'absence d'ambiguïté sur S) est le premier instant pour lequel la marche aléatoire S atteint Λ.

iv) Si $\eta : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{N}$ est telle que $\eta(z)$ est le nombre d'explorateurs partis de z, la région explorée en partant de η sera la région définie en faisant partir les explorateurs dans un ordre prédéfini sur $\mathbb{Z}^d$.

v) $W_R(\Lambda; \eta, z)$ est le nombre d'explorateurs, partant de la configuration η et de la région explorée Λ, qui passent par $z \in \mathbb{B}(0, R)$ avant de sortir de $\mathbb{B}(0, R)$.

vi) $W_R(\Lambda; \eta, z)$ est le nombre d'explorateurs, partant de la configuration η et de la région explorée Λ, qui passent par $z \in \partial\mathbb{B}(0, R)$ au moment où ils sortent de $\mathbb{B}(0, R)$.

vii) Pour $z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ on note $\Sigma(z) = \partial\mathbb{B}(0, \|z\|)$. Remarquons que $z \in \Sigma(z)$.

viii) ζ_z^N est le vecteur $(z, \ldots, z)$ de taille N.

Remarque. Si $\mathbb{B}(0, R) \subset \Lambda$, $W_R(\mathbb{B}(0, R); \eta, z) = W_R(\Lambda; \eta, z)$. On appelle alors cette quantité $M_R(\eta, z)$.

3 Propriété abélienne

Théorème 3.1. *Propriété abélienne Soit n un entier naturel,* Λ *une partie de* $\mathbb{Z}^d$*,* $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ *et* $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ *deux vecteurs de* $\left(\mathbb{Z}^d\right)^n$ *égaux à permutation des coordonnées près. On a alors l'égalité en loi :*

$$A(\Lambda, \xi) = A(\Lambda, \zeta)$$

Illustrons ce théorème avec l'exemple de l'exploration par vague qui nous servira par la suite. On va réaliser la région explorée A(n+m) en 3 vagues. La première vague consiste à faire partir n explorateurs de l'origine et à considérer la région explorée correspondante $A_1 = A(n)$ (en bleu sur la figure 4).

Pour la deuxième vague, on fait partir m explorateurs de l'origine avec pour région préalablement explorée A_1 et on les arrête sur $\mathbb{B}(0, R)$ (en vert sur 4). On note A_2 la région explorée après les deux vagues et Δ_R la configuration des explorateurs de la deuxième vague arrêtés sur $\partial\mathbb{B}(0, R)$:

$$A_2 = A_1 \cup A_R(A_1, \zeta_0^N) \qquad \Delta_R = \{\zeta_z^{W_R(A_1;\zeta_0^m, z)}, z \in \partial\mathbb{B}(0, R))\}$$

Pour la troisième vague on relance les explorateurs arrêtés Δ_R avec pour région préalablement explorée A_2 (en noir sur la figure 4) et on pose $A_3 = A_2 \cup A(A_2; \Delta_R)$. La propriété abélienne nous donne alors l'égalité en loi :

$$A_3 = A(n + m)$$

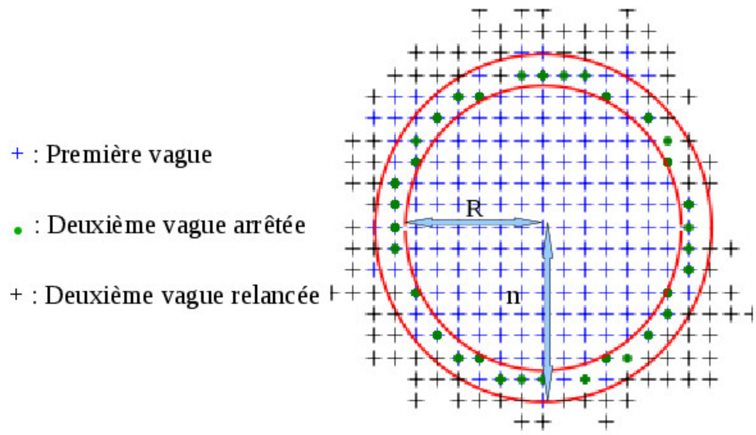

FIGURE 4 – La région explorée par vagues

4 L'erreur externe

On va prouver ici le théorème 2.3 : en dimension supérieure ou égale à 3,

$$\lim_{n\to\infty} P(\exists k \geqslant n,\ \delta_0(k) \geqslant h(k) \mid \delta_I(n) < L(n)) = 1$$

4.1 Conditions d'apparition d'un tentacule

On pose $h(n) = \alpha\sqrt{\log(n)}$ et $L(n) = \gamma\sqrt{\log(n)}$ où α et γ sont des constantes à choisir par la suite. h représente ici l'erreur externe et L l'erreur interne, et il est important de conserver cette distinction à l'esprit même si on prendra $\alpha = \gamma$ par la suite.

Pour estimer l'erreur externe, on va commencer par minorer la probabilité de fabriquer un tentacule qui sorte de $\mathbb{B}(0, R)$ lorsqu'on fait partir N explorateurs de z, avec $\|z\| < R$ (on prendra par la suite R de la forme $\|z\| + h(n)$).

Proposition 4.1. *Il existe $c > 1$ tel que $\forall z \in \mathbb{Z}^d$, si on prend R tel que $N \geqslant c(R - \|z\|)$ et $R \geqslant \|z\| + 1$, on ait, pour tout $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$,*

$$P(A(\Lambda, \zeta_z^N) \not\subset \mathbb{B}(0, R)) \geqslant \exp(-c(R - \|z\|)^2)$$

Démonstration. On commence par remarquer qu'on peut prendre $\Lambda{=}\emptyset$ car $A(\emptyset, \xi) \subset A(\Lambda, \xi) \Rightarrow P(A(\Lambda, \xi) \not\subset \mathbb{B}(0, R)) \geqslant P(A(\emptyset, \xi) \not\subset \mathbb{B}(0, R))$. Le reste de la démonstration consiste à créer un tentacule qui sort de $\mathbb{B}(0, R)$ en partant de z. Pour cela posons

$$x_n = (\|z\| + n)\frac{z}{\|z\|}$$

La suite x_n est une suite de points partant de z et qui arrive sur $\mathbb{B}(0, R)$ perpendiculairement à celle-ci. Pour tout cube unitaire centré en x_n, il existe $z_n \in \mathbb{Z}^d$ dans ce cube. Soit p le plus petit entier tel que $\|x_p\| \geqslant R + 1$, alors $\|z_p\| \geqslant R$. On définit alors $(y_1 = z, y_2, \ldots, y_k = z_p)$ une suite de plus proches voisins dans $\mathbb{Z}^d$, où l'on va chercher à prendre k suffisamment petit.

On peut trouver une constante c_1 qui permet de prendre $k \leqslant c_1 p$. Pour cela, on procède de la façon suivante : on appelle C le diamètre de la figure composée de deux cube unitaire partageant une face, de façon à avoir $\|z_n - z_{n-1}\| \leqslant C$. Il est alors possible de relier z_n à z_{n-1} par une suite de plus proches voisins de taille inférieure à $c_1 = dC$, ce qui prouve le résulat. On alors $k \leqslant c_1(R - \|z\| + 2) \leqslant c(R - \|z\|)$ pour c une constante suffisamment grande. Comme $N \geqslant c(R - \|z\|)$, on peut forcer les k premiers explorateurs à s'installer successivement sur $y_1, \ldots, y_k$, et la probabilité de cet événement est :

$$(\frac{1}{2d})^{\sum_{n=1}^{k} n} \geqslant \exp(-c(R - \|z\|)^2)$$

quitte à augmenter la constante c. La présence d'un tel tentacule impliquant que les explorateurs sortent de $\mathbb{B}(0, R)$, on a bien le résultat voulu. □

4.2 Construction d'un tentacule

On fixe désormais l'entier n, et on va essayer d'estimer la probabilité de trouver un entier $k \geqslant n$ pour lequel l'erreur externe dépasse $h(k)$. Pour cela on va utiliser un processus par vague comme décrit dans la section 3 en lançant les explorateurs de l'origine en trois vagues :

La première est consituée de $b(n)$ explorateurs partis de l'origine qui explorent A_1, la deuxième de X_n explorateurs arrêtés partis de l'origine, où X_n est une variable aléatoire discrète indépendante des marches des explorateurs dont la loi sera fixée par la suite, et la troisième est constituée des explorateurs de la seconde vague relancés. Les explorateurs de la deuxième vague sont arrêtés sur $\Sigma = \partial\mathbb{B}(0, r_n)$ avant de les faire repartir, avec $r_n = n - L(n)$.

La propriété abélienne montre alors que la région explorée de cette façon est la même, en loi, que celle explorée en lançant directement $X_n + b(n)$ explorateurs. On cherche à trouver X_n tel que l'évènement $\delta_O(R_n) \geqslant h(R_n)$ où $R_n = \rho(b(n) + X_n) + 1$ arrive avec une probabilité tendant vers 1.

Après avoir arrêté la deuxième vague sur Σ, on considère l'événement : partant d'un point z de Σ, en relançant les explorateurs arrêtés en z, on construit un tentacule qui sort de $\mathbb{B}(0, R_n + h(R_n))$. On note cet évènement $\mathrm{cov}(z)$:

$$\mathrm{cov}(z) = \{A(\Lambda_n, \zeta_z^{N_z}) \not\subset \mathbb{B}(0, R_n + h(R_n))\} \tag{4.1}$$

où $N_z = W_{r_n}(A_1; \zeta_0^{X_n}, z)$ est le nombre d'explorateurs arrêtés en z et Λ_n est la région explorée au moment où on a arrêté la deuxième vague. Les cov(z) ne sont pas indépendants pour le moment.

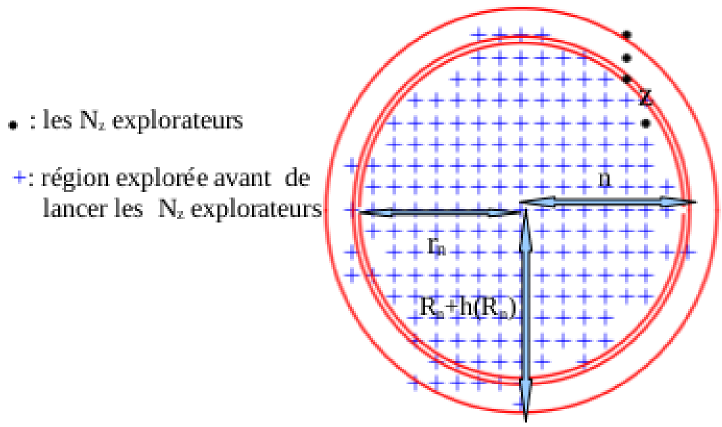

FIGURE 5 – Un exemple où $\mathrm{cov}(z)$ est réalisé

On constate que l'évènement $\delta_O(R_n) \geqslant h(R_n)$ est lié à $\{\mathrm{cov}(z), z \in \Sigma\}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P(\delta_O(R_n) \geqslant h(R_n)) &\geqslant P(A(b(R_n)) \not\subset \mathbb{B}(0, R_n + h(R_n))) \\ &\geqslant P(A(b(n) + X_n) \not\subset \mathbb{B}(0, R_n + h(R_n))) \\ &\geqslant P(A(\Lambda_n, \sum_{z\in\Sigma} \zeta_z^{N_z}) \not\subset \mathbb{B}(0, R_n + h(R_n))) \\ &\geqslant P(\bigcup_{z\in\Sigma} \mathrm{cov}(z)) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Il nous faut désormais estimer $P(\bigcup_{z\in\Sigma} \mathrm{cov}(z))$. Pour cela, il serait intéressant d'avoir indépendance entre les $\mathrm{cov}(z)$ sous certaines hypothèses, ce qu'on va obtenir en prenant pour X_n une variable de Poisson. En effet, les variables de Poisson ont la propriété de découpage A.1, qui laisse penser que les N_z seront indépendantes et de loi connue.

Cette propriété ne permet pas pour autant d'affirmer que les N_z sont des variables de Poisson pour $z \in \Sigma$, mais cela sera vrai lorsque $\delta_I(n) < L(n)$. On définit donc pour tout $z \in \Sigma$

$$\mathrm{cov}_2(z) = \{A(\Delta_n, \zeta_z^{N'_z}) \not\subset \mathbb{B}(0, R_n + h(R_n))\} \tag{4.3}$$

où $N'_z = W_{r_n}(\Delta_n; \zeta_0^{X_n}, z)$ est le nombre d'explorateurs de la deuxième vague qui touchent Σ en z lorsque la région explorée initiale est $\Delta_n = \mathbb{B}(0, r_n)$.

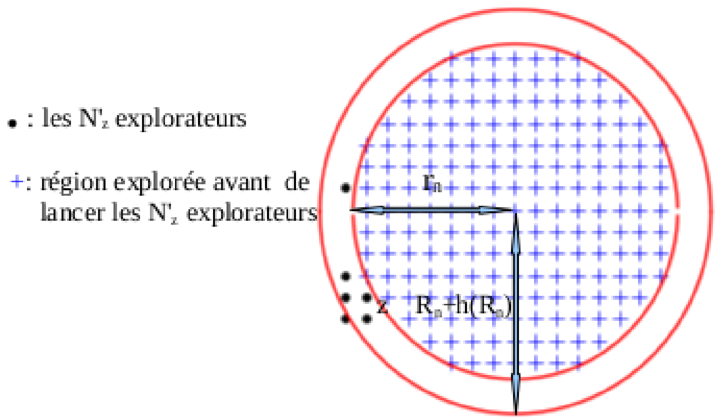

FIGURE 6 – Un exemple où $\mathrm{cov}_2(z)$ est réalisé

On remarque que la seule différence entre $\mathrm{cov}(z)$ et $\mathrm{cov}_2(z)$ est la région explorée avant de lancer la deuxième vague. C'est ici qu'il est important de se placer dans le cas $\delta_I(n) < L(n)$, et on restera dans ce cas jusqu'à la fin de cette partie, puisqu'on a alors :

$$W_{n-L(n)}(A(\zeta_0^{b(n)}); X_n 1_0, z) = M_{n-L(n)}(X_n 1_0, z)$$

et donc $N'_z = N_z$ et $\mathrm{cov}_2(z) \subset \mathrm{cov}(z)$.

Soit U la variable aléatoire à valeur dans Σ calculée en regardant en quel point une marche aléatoire symétrique atteint Σ. On alors :

$$N'_z = \sum_{p \leqslant X_n} 1_{U_p = z}$$

D'après la proposition A.1 les N'_z sont alors des variables de Poisson indépendantes, et donc les $\mathrm{cov}_2(z)$ sont indépendants. Ils sont de plus indépendants de $\delta_I(n)$ puisque celui-ci ne dépend que de la première vague alors que cov_2 en est indépendant. Résumons ce qu'on a fait jusqu'à présent :

$$\begin{aligned} P(\exists k \geqslant n,\ \delta_0(k) \geqslant h(k) \mid \delta_I(n) < L(n)) &\geqslant P(\delta_0(R_n) \geqslant h(R_n) \mid \delta_I(n) < L(n)) \\ &\geqslant P(\bigcup_{z\in\Sigma} \mathrm{cov}(z) \mid \delta_I(n) < L(n)) \\ &\geqslant P(\bigcup_{z\in\Sigma} \mathrm{cov}_2(z) \mid \delta_I(n) < L(n)) \\ &= P(\bigcup_{z\in\Sigma} \mathrm{cov}_2(z)) \end{aligned} \tag{4.4}$$

4.3 Estimation de l'erreur externe

Il faut maintenant trouver λ_n, le paramètre de la loi de Poisson X_n, pour que tout ceci tende vers 1. La technique consiste à majorer $R_n + h(R_n)$ de façon à pouvoir appliquer la proposition 4.1 :

Lemme 4.2. *Pour n suffisamment grand,*

$$X_n \leqslant b(n + h(n)) - b(n) \Rightarrow R_n + h(R_n) \leqslant n + 3h(n) \tag{4.5}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} X_n \leqslant b(n + h(n)) - b(n) \Rightarrow X_n + b(n) \leqslant b(n + h(n)) &\Rightarrow R_n - 1 \leqslant n + h(n) \\ &\Rightarrow h(R_n) \leqslant 2h(n) - 1 \end{aligned}$$

pour n suffisamment grand, d'où le résultat. □

On prend alors $\lambda_n = \frac{b(n+h(n))-b(n)}{2}$ pour pouvoir se placer dans le cas du lemme précédent sans difficulté, en effet, on aura souvent X_n plus petit que $2\lambda_n$: d'après la propriété annexe A.2,

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n < 2\lambda_n) = 1 \tag{4.6}$$

En utilisant le lemme 4.2, on a donc :

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{z\in\Sigma} \mathrm{cov}_2(z)) &\geqslant P(\bigcup_{z\in\Sigma} \mathrm{cov}_2(z) \cap \{X_n \leqslant \lambda_n\}) \\ &\geqslant P(\bigcup_{z\in\Sigma} \{A(\Lambda_n, \zeta_z^{N'_z}) \not\subset \mathbb{B}(0, n+3h(n))\}) P(X_n \leqslant \lambda_n) \\ &= P(X_n \leqslant \lambda_n)\big(1 - \prod_{z\in\Sigma} \big(1 - P(A(\Lambda_n, \zeta_z^{N'_z}) \not\subset \mathbb{B}(0, n+3h(n)))\big)\big) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Or, d'après la proposition 4.1,

$$\begin{aligned} &P(A(\Lambda_n, \zeta_z^{N'_z}) \not\subset \mathbb{B}(0, n+3h(n))) \\ &= P(A(\Lambda_n, \zeta_z^{N'_z}) \not\subset \mathbb{B}(0, n+3h(n)) \mid N'_z \geqslant c(3h(n)+L(n))) P(N'_z \geqslant c(3h(n)+L(n))) \\ &\geqslant \exp(-c(3h(n)+L(n))^2) P(N'_z \geqslant c(3h(n)+L(n))) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Il ne reste donc plus qu'à minorer $P(N'_z \geqslant c(3h(n)+L(n)))$:

Lemme 4.3. $\forall c_1 > 0, \exists C \geqslant 0$ *tel que*

$$P(N'_z \geqslant c_1 h(n)) \geqslant \exp(-Ch(n)) \tag{4.9}$$

Démonstration. D'après la proposition A.1, N'_z est une variable de poisson de paramètre $\mu = \lambda_n P(S(H(\Sigma)) = z)$ où S est une marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^d$ partant de 0. En utilisant le lemme 1.7.4 de [7], on a des constantes c_2 et c_3 telles que :

$$\frac{c_2}{(n - L(n) + 1)^{d-1}} \leqslant \frac{c_2}{\|z\|^{d-1}} \leqslant P(S(H(\Sigma)) = z) \leqslant \frac{c_3}{\|z\|^{d-1}} \leqslant \frac{c_3}{(n - L(n))^{d-1}}$$

De plus, d'après le lemme A.4, $c_4 h(n) n^{d-1} \leqslant \lambda_n \leqslant c_5 h(n) n^{d-1}$, donc $c_6 h(n) \leqslant \mu \leqslant c_7 h(n)$. On a donc, en posant $a = \lfloor c_1 h(n) \rfloor + 1$:

$$\begin{aligned} P(N'_z \geqslant c_1 h(n)) &\geqslant P(N'_z = a) = e^{-\mu} \frac{\mu^a}{a!} \\ &\geqslant e^{-c_7 h(n)} \frac{(c_6 h(n))^{c_1 h(n)}}{a!} \\ &\sim e^{-c_7 h(n)} \frac{(c_6 h(n))^{c_1 h(n)}}{\sqrt{2\pi a}} \Big(\frac{e}{c1 h(n)}\Big)^{[c_1 h(n)]+1} \\ &\geqslant e^{(-c_7 + c_1(1 - ln(c_1) + ln(c_6)))h(n) + 2} \frac{1}{h(n)^2 \sqrt{2\pi a}} \\ &\geqslant \exp(-Ch(n)) \end{aligned}$$

□

En prenant $h(n) = L(n)$ et en utilisant 4.4, 4.7, 4.8, 4.9 et que $1 - x \leqslant e^{-x}$, on a finalement :

$$
\begin{aligned}
&P(\exists k \geqslant n,\ \delta_0(k) \geqslant h(k) \mid \delta_I(n) < L(n)) \\
&\geqslant P(X_n \leqslant \lambda_n)\big(1 - \prod_{z\in\Sigma}\big(1 - \exp(-c(4h(n))^2 - Ch(n))\big)\big) \\
&\geqslant P(X_n \leqslant \lambda_n)(1 - \exp(-\kappa n^{d-1}\exp(-Ch(n) - c'h(n)^2))) \\
&\geqslant P(X_n \leqslant \lambda_n)(1 - \exp(-\kappa n^{d-1}\exp(-c''h(n)^2))) \\
&= P(X_n \leqslant \lambda_n)(1 - \exp(-\kappa n^{d-1-\alpha^2 c''}))
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

Il suffit maintenant de fixer α suffisamment petit pour que $d - 1 - \alpha^2 c''$ soit positif pour terminer la preuve du théorème 2.3.

Il n'est pas clair *a priori* que ce théorème nous donne vraiment une indication sur l'optimalité de $h(n)$ pour l'erreur externe, mais on peut voir qu'il implique le résultat intéressant suivant :

Corollaire 4.4.

$$
P(\limsup_{n\to\infty}\{\delta_I(n) \geqslant L(n)\} \cup \{\delta_O(n) \geqslant h(n)\}) = 1 \tag{4.11}
$$

Démonstration. On a :

$$
\begin{aligned}
&P(\exists k \geqslant n, \delta_I(k) \geqslant L(k)\ ou\ \delta_O(k) \geqslant h(k)) \\
&\geqslant P(\delta_I(n) \geqslant L(n)\ ou\ \exists k \geqslant n, \delta_0(k) \geqslant h(k)) \\
&= P(\delta_I(n) \geqslant L(n)) + P(\exists k \geqslant n, \delta_0(k) \geqslant h(k) \mid \delta_I(n) < L(n))P(\delta_I(n) < L(n)) \\
&= 1 - P(\delta_I(n) < L(n))\big(1 - P(\exists k \geqslant n, \delta_0(k) \geqslant h(k) \mid \delta_I(n) < L(n))\big)
\end{aligned}
$$

Et donc,

$$
\begin{aligned}
&P(\limsup_{n\to\infty}\{\delta_I(n) \geqslant L(n)\} \cup \{\delta_O(n) \geqslant h(n)\}) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(\exists k \geqslant n, \delta_I(k) \geqslant L(k)\ ou\ \delta_O(k) \geqslant h(k)) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

□

Autrement dit, pour une infinité de termes, l'erreur interne ou l'erreur externe est d'ordre $\sqrt{\log n}$, donc le théorème 2.2 est d'une certaine façon optimal. On verra dans la partie 5 que 4.11 est en fait vraie pour l'erreur interne seule.

5 L'erreur interne

Pour établir le Théorème 2.4, nous allons procéder de façon similaire. Nous lançons cette fois-ci non pas une vague d'explorateurs à partir de $A(b(n))$, mais un grand nombre $F(n)$ de vagues successives. Pour $k \leqslant F(n)$, la $k^{\text{ème}}$ vague consistera en un lancer de X_k explorateurs depuis l'origine, où X_k sera une varible de Poisson de paramètre λ_k à déterminer plus tard.

On note R_k le rayon théorique après la $k^{\text{ème}}$ vague :

$$R_k = \rho(b(n) + X_1 + \cdots + X_k)$$

Et A_k l'évènement qui nous intéresse :

$$A_k = \{\delta_I(R_k) > h(R_k)\}$$

On note aussi B_k son analogue pour l'erreur externe :

$$B_k = \{\delta_O(R_k) > L(R_k)\}$$

Le but sera de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k\leqslant F(n)} A_k\right) = 1 \tag{5.1}$$

Une propriété simple nous sera utile par la suite :

Remarque. Quel que soit $k \leqslant F(n)$, on a toujours :

$$A(b(R_k))^c \cap (\mathbb{B}(0,R_k) \cup \partial\mathbb{B}(0,R_k)) \neq \emptyset \tag{5.2}$$

En effet, le cas échéant, on aurait $(\mathbb{B}(0,R_k) \cup \partial\mathbb{B}(0,R_k)) \subset A(b(R_k))$ et donc strictement plus de $b(R_k)$ sites seraient occupés par les explorateurs, alors qu'on n'a lancé que $b(R_k)$ explorateurs.

5.1 Lorsque A_{k-1}^c est réalisé

On suppose dans cette partie que l'évènement A_{k-1}^c est réalisé, pour $1 \leqslant k \leqslant F(n)-1$. Utilisons alors l'ensemble non vide donné par 5.2 au rang $k-1$: il existe un Z_k non encore visité, tel que $\|Z_k\| \leqslant R_{k-1}+1$. Comme A_{k-1}^c est réalisé et que $Z_k \in A(b(R_{k-1}))^c$, nécessairement,

$$R_{k-1} - h(R_{k-1}) \leqslant \|Z_k\| \leqslant R_{k-1} + 1. \tag{5.3}$$

On va s'appuyer sur ce Z_k pour construire un évènement I_k qui pourra s'interpréter par : soit Z_k est un trou laissé à la prochaine vague k, soit un long tentacule apparaît à la vague k.

Définition 5.1. i) Soit n un entier et $R > 0$, on définit la variable aléatoire $N_z(n, R)$ comme le nombre de marches aléatoires parmi n marches partant de 0 visitent z avant de sortir de $\mathbb{B}(0, \|z\| + R)$:

$$N_z(n, R) = \text{Card}\{i \leqslant n \mid H(z) < H(\mathbb{B}^c(O, \|z\| + R))\} \tag{5.4}$$

ii) Soit $\Lambda_k = \mathbb{B}(Z_k, L(R_k)) \cap \Sigma(Z_k)$ et $\Lambda'_k = \Sigma(Z_k) \setminus \Lambda_k$ et :

$$I_k = \{N_{Z_k}(X_k, 7L(R_{k-1})) = 0\} \tag{5.5}$$

Si I_k est réalisé, on aimerait pouvoir dire que dans le cas où Z_k n'est pas visité (un trou apparaît) on a $\delta_I(R_k) \geqslant h(R_k)$ et que dans le cas contraire (un long tentacule apparaît) on a $\delta_O(R_k) \geqslant L(R_k)$. Pour cela, il faut montrer que sous certaines conditions sur X_k on a $R_k - \|Z_k\| \geqslant h(R_k)$ et $\|Z_k\| - R_k + 7L(R_{k-1}) \geqslant L(R_k)$.

Cela sera assuré pour X_k dans un bon intervalle, donné par le lemme suivant, qui induira du coup le choix des paramètres λ_k :

Lemme 5.2. *Pour k suffisamment grand, si $\mu_k = b(R_{k-1} + 2h(R_{k-1})) - b(R_{k-1})$,*

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\mu_k \leqslant X_k \leqslant 2\mu_k \quad &\Rightarrow \quad (i)\ R_k - \|Z_k\| \geqslant h(R_k) \\ &\quad\ \ \text{et} \quad (ii)\ \|Z_k\| - R_k + 7L(R_{k-1}) \geqslant L(R_k) \end{aligned}$$

Démonstration. D'une part,

$$\begin{aligned} X_k \leqslant 2(b(R_{k-1} + 2h(R_{k-1})) - b(R_{k-1})) \quad &\Rightarrow \quad X_k + b(R_{k-1}) \leqslant b(R_{k-1} + 4h(R_{k-1})) \\ &\Rightarrow \quad R_k \leqslant R_{k-1} + 4h(R_{k-1}) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} X_k \geqslant \frac{2}{3}(b(R_{k-1} + 2h(R_{k-1})) - b(R_{k-1})) \quad &\Rightarrow \quad X_k + b(R_{k-1}) \geqslant b(R_{k-1} + \frac{4}{3}h(R_{k-1})) \\ &\Rightarrow \quad R_k \geqslant R_{k-1} + \frac{4}{3}h(R_{k-1}) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} R_k - \|Z_k\| \quad &\geqslant \quad R_k - R_{k-1} - \ 1 \ \text{ par (5.3)} \\ &\geqslant \quad \frac{4}{3}h(R_{k-1}) - 1 \ \text{ par (5.6)} \\ &\geqslant \quad h(R_k) \ \text{ par (5.6), pour } k \text{ assez grand,} \end{aligned}$$

ce qui prouve (i).

Pour le (ii) on a :

$$\begin{aligned} \|Z_k\| - R_k + 7L(R_{k-1}) \quad &\geqslant \quad R_{k-1} - R_k + 7L(R_{k-1}) - h(R_{k-1}) \ \text{ par (5.3)} \\ &\geqslant \quad -5h(R_{k-1}) + 7L(R_{k-1}) \ \text{ par (5.6)} \\ &\geqslant \quad L(R_k) \ \text{ par (5.6), pour } k \text{ assez grand.} \end{aligned}$$

$\square$

On voit donc qu'il est judicieux de prendre $\lambda_k = \mu_k = b(R_{k-1}+2h(R_{k-1})) - b(R_{k-1})$. Ainsi, lorsque la variable de Poisson X_k est comprise entre $\frac{2}{3}$ et 2 fois sa moyenne, on a bien $I_k \subset A_k \cup B_k$.

Enfin, on a besoin de s'assurer que la probabilité de I_k est assez grande, ce qui est donné par le lemme technique suivant :

Lemme 5.3. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, si X une variable de Poisson de paramètre λ, z un point de $\in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ et $R > 0$,*

$$P(N_z(X,R) = 0) \geqslant \exp\left(-C\frac{\lambda R}{\|z\|^{d-1}}\right)$$

Démonstration. Notons $\Lambda = \mathbb{B}(z,R) \cap \Sigma(z)$ et $\Lambda' = \Sigma(z) \setminus \Lambda$. Notons aussi :

$$N_z(n,\Lambda,R) = \text{Card}\{i \leqslant n \ \mid \ S_i(H(\Sigma(z))) \in \Lambda,\ H(z) < H(\mathbb{B}^c(O,\|z\|+R))\}$$

c'est-à-dire le nombre de marches aléatoires parmi les $N_z(n,R)$ qui atteignent $\Sigma(z)$ en un point de Λ.

D'après la proposition A.1, $N_z(X,\Lambda,\infty)$ et $N_z(X,\Lambda',R)$ sont des variables de Poisson indépendantes. Ainsi :

$$\begin{aligned} P(N_z(X,R)=0) &\leqslant P(N_z(X,\Lambda,\infty)=0, N_z(X,\Lambda',R)=0) \\ &= \exp\left(-E[N_z(X,\Lambda,\infty)] - E[N_z(X,\Lambda',R)]\right) \end{aligned}$$

On va montrer que chacune de ces espérances est majorée par un terme du type $c\frac{\lambda R}{\|z\|^{d-1}}$.

- Pour la première, on se sert du fait que $P_0(S(H(\Sigma(z))) = y) \leqslant \frac{c_1}{\|z\|^{d-1}}$ (Lemme 1.7.4 de [7]) et $P_y(H(z) < \infty) \leqslant \frac{c_2}{1+\|y-z\|^{d-2}}$ (Théorème 1.5.4 de [7]), ainsi que de la propriété de Markov fort, pour écrire :

$$\begin{aligned} E[N_z(X,\Lambda,\infty)] &= \lambda\ P_0(S(H(\Sigma(z))) \in \Lambda,\ H(z) < \infty) \\ &= \lambda\ P_0(S(H(\Sigma(z))) = z) \\ &\quad +\lambda \sum_{y\in\Lambda\setminus\{z\}} P_0(S(H(\Sigma(z))) = y,\ H(z) < \infty) \\ &= \lambda\ P_0(S(H(\Sigma(z))) = z) \\ &\quad +\lambda \sum_{y\in\Lambda\setminus\{z\}} P_0(S(H(\Sigma(z))) = y)\ P_y(H(z) < \infty) \\ &\leqslant \lambda\frac{c_1}{\|z\|^{d-1}}\left(1 + \sum_{y\in\Lambda\setminus\{z\}} \frac{c_2}{1+\|y-z\|^{d-2}}\right) \end{aligned}$$

En arrangeant plutôt la somme selon $k = \lfloor \|y-z\| \rfloor$, et en observant que pour un k fixé on a moins de $c_3 k^{d-2}$ positions de y correspondants, on obtient :

$$\begin{aligned}
E[N_z(X,\Lambda,\infty)] &\leqslant c_4 \frac{\lambda}{\|z\|^{d-1}} \left(1 + \sum_{k=1}^{R} \frac{k^{d-2}}{1+k^{d-2}}\right) \\
&\leqslant c_5 \frac{\lambda R}{\|z\|^{d-1}}
\end{aligned}$$

– Pour la seconde espérance, on utilise le résultat du Lemme 5(b) de [8] qui assure que $P_y(H(z) < H(\mathbb{B}^c(0,\|z\|+h))) \leqslant \frac{c_6 R^2}{\|z-y\|^d}$, et on utilise la même transformation sur la somme :

$$\begin{aligned}
E[N_z(X,\Lambda',R)] &= \lambda\ P_0(S(H(\Sigma(z))) \in \Lambda',\ H(z) < H(\mathbb{B}^c(0,\|z\|+h))) \\
&= \lambda \sum_{y\in\Lambda'} P_0(S(H(\Sigma(z))) = y)\ P_y(H(z) < H(\mathbb{B}^c(0,\|z\|+h))) \\
&\leqslant \lambda \sum_{y\in\Lambda'} \frac{c_1}{\|z\|^{d-1}}\ \frac{c_6 R^2}{\|z-y\|^d} \\
&\leqslant c_7 \frac{\lambda R^2}{\|z\|^{d-1}} \sum_{k=R}^{2\|z\|+2} \frac{k^{d-2}}{k^d} \\
&\leqslant c_7 \frac{\lambda R^2}{\|z\|^{d-1}} \sum_{k=R}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\
&\leqslant c_8 \frac{\lambda R}{\|z\|^{d-1}}
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient d'une comparaison série-intégrale sur la somme.

□

En appliquant ce lemme à X_k, Z_k et $L(R_{k-1})$, on obtient :

$$\begin{aligned}
P(I_k) &\geqslant \exp\left(-C' \frac{\lambda_k L(R_{k-1})}{\|Z_k\|^{d-1}}\right) \\
&\geqslant \exp\left(-C' \frac{\lambda_k L(R_{k-1})}{(R_{k-1} - h(R_{k-1}))^{d-1}}\right) \\
&\geqslant \exp\left(-C' \frac{c_1 R_{k-1}^{d-1} h(R_{k-1}) L(R_{k-1})}{(R_{k-1} - h(R_{k-1}))^{d-1}}\right) \\
&\geqslant \exp\left(-\kappa h(R_{k-1}) L(R_{k-1})\right) \\
&\geqslant \exp\left(-\kappa h(R_{F(n)}) L(R_{F(n)})\right) \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

car λ_k est de l'ordre de $R_{k-1}^{d-1} h(R_{k-1})$ d'après le lemme A.4 et $R_{k-1} - h(R_{k-1})$ est de l'ordre de R_{k-1}.

5.2 Minorations

Résumons ce qu'on a fait jusqu'à présent : on a montré qu'il existait un évènement I_k tel que $\frac{2}{3}\lambda_k \leqslant X_k \leqslant 2\lambda_k \Rightarrow A^c_{k-1} \cap I_k \subset A_k \cup B_k$ et $P(I_k) \geqslant \exp\left(-\kappa h(R_{F(n)})L(R_{F(n)})\right)$. Notre but est de montrer que $\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k\leqslant F(n)} A_k\right) = 1$. La fonction $F(n)$ est toujours à choisir.

On note $\mathcal{G}_k$ la filtration associée à l'exploration par vagues. On note C_k l'évènement $\{\frac{2}{3}\lambda_k \leqslant X_k \leqslant 2\lambda_k\}$. On a donc :

$$C_k \cap A^c_{k-1} \cap I_k \subset A_k \cup B_k \tag{5.7}$$

Remarquons maintenant que $\bigcap_{k\leqslant N} C_k \subset \bigcup_{k\leqslant N} A_k \cup \bigcup_{k\leqslant N} A^c_k \cap C_k$, ce qui donne :

$$P\left(\bigcup_{k\leqslant N} A_k\right) \geqslant P\left(\bigcap_{k\leqslant N} C_k\right) - P\left(\bigcup_{k\leqslant N} A^c_k \cap C_k\right) \tag{5.8}$$

Lemme 5.4. *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a*

$$P\left(\bigcup_{k\leqslant N} A^c_k \cap C_k\right) \leqslant \sum_{k\leqslant N} P(B_k) - (1-\exp(\alpha(n)))^N$$

où $\alpha(n) = -\kappa h(R_{F(n)})L(R_{F(n)})$ obtenu dans 5.6.

Démonstration. On procède par récurrence sur $N \in \mathbb{N}$: la propriété est vraie en $N = 0$, et si elle est vraie pour $N < F(n)$ alors :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k\leqslant N+1} A^c_k \cap C_k\right) &\leqslant E[1_{\bigcup_{k\leqslant N} A^c_k \cap C_k} P(A^c_N \cap A^c_{N+1} \cap C_{N+1} \mid \mathcal{G}_N)] \\ &\leqslant E[1_{\bigcup_{k\leqslant N} A^c_k \cap C_k} (P(B_{N+1} \mid \mathcal{G}_N) + 1 - P(I_{N+1} \mid \mathcal{G}_N))] \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inclusion $A^c_N \cap A^c_{N+1} \cap C_{N+1} \subset I^c_{N+1} \cup B_{N+1}$, qui découle de l'inclusion fondamentale 5.7 au rang $N + 1$.

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k\leqslant N+1} A^c_k \cap C_k\right) &\leqslant P(B_{N+1}) + (1-\exp(\alpha(n)))P\left(\bigcup_{k\leqslant N} A^c_k \cap C_k\right) \\ &\leqslant P(B_{N+1}) + \sum_{k\leqslant N} P(B_k) - (1-\exp(\alpha(n)))\,(1-\exp(\alpha(n)))^N \\ &\leqslant \sum_{k\leqslant N+1} P(B_k) - (1-\exp(\alpha(n)))^{N+1} \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

En appliquant le lemme 5.4 à 5.8, avec $N = F(n)$, on trouve :

$$P\left(\bigcup_{k\leqslant F(n)} A_k\right) \geqslant 1 - \sum_{k\geqslant F(n)} (P(B_k) + P(C_k^c)) - (1-\exp(-\kappa h(R_{F(n)})L(R_{F(n)})))^{F(n)} \tag{5.9}$$

On va alors choisir $F(n) = \lfloor \frac{n}{h(n)} \rfloor$, en effet, pour ce choix on a :

- $P(B_k)$ décroît plus vite que toute puissance de n pour γ suffisamment grand d'après un résultat de [1] donc $\sum_{k\geqslant F(n)} P(B_k) \to_{n\to\infty} 0$.
- $P(C_k^c) \leqslant \frac{C}{\lambda_k}$ d'après les résultats annexes A.2 et A.3. Comme $\lambda_k \geqslant \lambda_n \sim h(n)n^{d-1}$ on a :

$$\sum_{k\geqslant F(n)} P(C_k^c) \leqslant \frac{n}{h(n)}\frac{C}{h(n)n^{d-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

- $R_{F(n)}$ est d'ordre n donc

$$(1-\exp(-\kappa h(R_{F(n)})L(R_{F(n)})))^{F(n)} \leqslant \exp\left(-\frac{n}{h(n)}\exp(-\kappa' h(n)L(n))\right)$$

Or, comme $h(n) = \sqrt{\alpha\log(n)}$ et $L(n) = \sqrt{\gamma\log(n)}$,

$$\frac{n}{h(n)}\exp(-\kappa' h(n)L(n)) = \frac{n^{1-\kappa'\sqrt{\alpha\gamma}}}{\sqrt{\alpha\log(n)}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

pourvu qu'on ait pris α assez petit ($\alpha < \frac{1}{\gamma\kappa'^2}$).

Avec ce choix, 5.9 implique alors que

$$P\left(\bigcup_{k\leqslant F(n)} A_k\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

ce qui achève la preuve du théorème 2.4.

A Propriétés annexes

A.1 Découpage d'une variable de Poisson

Proposition A.1. *Si $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi U à valeur dans E, X une variable de Poisson indépendante des U_n de paramètre λ, $\{E_i, i \in \{1, \dots, n\}\}$ une partition de E, et si on pose*

$$X_i = \sum_{n \leqslant X} 1_{U_n \in E_i}$$

alors les X_i sont des variables de Poisson indépendantes de paramètre $\lambda P(U \in E_i)$

Démonstration. Ce sont des variables de Poisson :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_i = k) &= \mathbb{P}(\sum_{n \leqslant X} 1_{U_n \in E_i} = k) \\
&= \sum_{p=k}^{\infty} \mathbb{P}(1_{X=p} \sum_{n \leqslant p} 1_{U_n \in E_i} = k) \\
&= \sum_{p=k}^{\infty} \binom{p}{k} \mathbb{P}(X = p)\mathbb{P}(U_1 \in E_i)...\mathbb{P}(U_k \in E_i)\mathbb{P}(U_{k+1} \notin E_i)...\mathbb{P}(U_p \notin E_i) \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\mathbb{P}(U \in E_i)^k \sum_{p=k}^{\infty} \frac{(1 - \mathbb{P}(U \in E_i))^{p-k}\lambda^p}{(p-k)!} \\
&= \frac{(\lambda\mathbb{P}(U \in E_i))^k}{k!} e^{-\lambda\mathbb{P}(U \in E_i)}
\end{aligned}$$

Elles sont indépendantes :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} X_i = k_i) \\
&= \mathbb{P}(\sum_{n \leqslant X} \bigcap_{i \in I} 1_{U_n \in E_i} = k_i) \\
&= \sum_{p=\sum_{i \in I} k_i}^{\infty} \prod_{i \in I} \binom{p - \sum_{j \in I, j<i} k_j}{k_i} \mathbb{P}(X = p)(\prod_{i \in I} \mathbb{P}(U \in E_i)^{k_i})\mathbb{P}(U \notin \bigcup_{i \in I} E_i)^{p - \sum_{i \in I} k_i} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\prod_{i \in I}(k_i!)}(\prod_{i \in I} \mathbb{P}(U \in E_i)^{k_i}) \sum_{p=\sum_{i \in I} k_i}^{\infty} \frac{\lambda^p}{(p - \sum_{i \in I} k_i)!}\mathbb{P}(U \notin \bigcup_{i \in I} E_i)^{p - \sum_{i \in I} k_i} \\
&= \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = k_i)
\end{aligned}$$

□

A.2 Estimations sur une variable de Poisson

Proposition A.2. *Soit X_λ une variable de Poisson de paramètre λ. On a :*

$$P(X_\lambda > 2\lambda) = O_{\lambda\to\infty}(\frac{1}{\lambda})$$

Démonstration. On a $E[X_\lambda] = \lambda$ et $V(X_\lambda) = \lambda$. Ainsi,

$$P(X_\lambda > 2\lambda) \leqslant P(|X_\lambda - E[X_\lambda]| > \lambda)$$

et on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff :

$$\begin{aligned} P(X_\lambda > 2\lambda) &\leqslant \frac{1}{\lambda^2}V(X_\lambda) \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

□

Proposition A.3. *Soit X_λ une variable de Poisson de paramètre λ. On a :*

$$P(X_\lambda < \frac{2}{3}\lambda) = O_{\lambda\to\infty}(\frac{1}{\lambda})$$

Démonstration. La preuve est la même que pour la proposition précédente. □

A.3 Estimation de $b(n)$

Lemme A.4. *i) Soit ω_d le volume de la boule unité de $\mathbb{Z}^d$, on a :*

$$b(n) \sim \omega_d n^d$$

ii) Soit a_n une suite telle que $a_n \to \infty$ et $a_n = o(n)$, on a :

$$b(n + a_n) - b(n) \sim \omega_d a_n n^{d-1}$$

Démonstration. i) On note λ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$. Notons $V(n) = \omega_d n^d$ le volume de la boule de rayon n et $\alpha_d = \sqrt{d}$ le diamètre d'un cube unité. On peut paver $\mathbb{R}^d$ par des cubes unités dont les centres appartiennent à $\mathbb{Z}^d$. On note c_z un tel cube, avec z son centre. On pose alors :

$$A(n) = \bigcup_{c_z \cap B(0,n) \neq \emptyset} c_z$$

On remarque que $c(n) := \lambda(A(n)) = \mathrm{Card}\{z \mid c_z \cap B(0,n) \neq \emptyset\}$ vérifie :

$$\begin{aligned} |c(n) - V(n)| = c(n) - V(n) &\leqslant \lambda(\bigcup_{z \mid c_z \cap B(0,n) \neq \emptyset, c_z \not\subset B(0,n)} c_z) \\ &\leqslant \lambda(B(0, n+\alpha_d)) - \lambda(B(0, n-\alpha_d)) \\ &= ((n+\alpha_d)^d - (n-\alpha_d)^d)\omega_d \\ &\sim 2\alpha_d n^{d-1}\omega_d \end{aligned}$$

De même :

$$|c(n)-b(n)| = c(n)-b(n) \leqslant \mathrm{Card}(\{z \ \mid \ c_z \cap B(0,n) \neq \emptyset, c_z \not\subset B(0,n)\})$$
$$\sim 2\alpha_d n^{d-1}\omega_d$$

Et on a donc :

$$|\frac{b(n)}{V(n)} - 1| \leqslant \frac{1}{V(n)}(|c(n)-b(n)| + |c(n)-V(n)|) = O(\frac{1}{n})$$

ii) Posons :

$$A'(n) = \bigcup_{c_z \subset B(0,n)} c_z$$

et $c'(n) = \lambda(A'(n))$

$$\begin{aligned}
&b(n+a_n) - b(n)\\
&= (b(n+a_n) - c(n+a_n)) + (c(n+a_n) - c'(n)) + (c'(n) - b(n))\\
&\leqslant c(n+a_n) - c'(n)\\
&\leqslant c(n+a_n) - V(n+a_n+\alpha_d) + V(n+a_n+\alpha_d) - V(n-\alpha_d) + V(n-\alpha_d) - c'(n)\\
&\leqslant V(n+a_n+\alpha_d) - V(n-\alpha_d)\\
&= \omega_d((n+a_n+\alpha_d)^d - (n-\alpha_d)^d)\\
&= \omega_d a_n n^{d-1} + o(\omega_d a_n n^{d-1})
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
&b(n+a_n) - b(n)\\
&= (b(n+a_n) - c'(n+a_n)) + (c'(n+a_n) - c(n)) + (c(n) - b(n))\\
&\geqslant c'(n+a_n) - c(n)\\
&\geqslant c'(n+a_n) - V(n+a_n-\alpha_d) + V(n+a_n-\alpha_d) - V(n+\alpha_d) + V(n+\alpha_d) - c(n)\\
&\geqslant V(n+a_n-\alpha_d) - V(n+\alpha_d)\\
&= \omega_d((n+a_n-\alpha_d)^d - (n+\alpha_d)^d)\\
&= \omega_d a_n n^{d-1} + o(\omega_d a_n n^{d-1})
\end{aligned}$$

D'où

$$b(n+a_n) - b(n) \sim \omega_d a_n n^{d-1}$$

□

Références

[1] Amine Asselah et Alexandre Gaudillière : Sub-logarithmic fluctuations for internal DLA. *Arxiv preprint*, 2010.

[2] Amine Asselah et Alexandre Gaudillière : Lower bounds on fluctuations for internal DLA. *Arxiv preprint*, 2010.

[3] Paul Meakin et John M. Deutch : The formation of surfaces by diffusion limited annihilation. *J.Chem.Phys.*, 85(4):2320–2325, 1986.

[4] Persi Diaconis et William Fulton : A growth model, a game, an algebra, lagrange inversion, and characteristic classes. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, 49(1):95–119, 1991.

[5] Gregory Lawler, Maury Bramson et David Griffeath : Internal diffusion limited aggregation. *Ann. Probab.*, 20(4):2117–2140, 1992.

[6] Gregory Lawler : Subdiffusive fluctuations for internal diffusion limited aggregation. *Ann. Probab.*, 23(1):71–86, 1995.

[7] Gregory Lawler : *Intersection of Random Walks.* Birkhäuser Boston, 1991.

[8] David Jerison, Lionel Levine et Scott Sheffield : Internal dla in higher dimensions. *Arxiv preprint*, 2012.