2. TIPURI DE DATE ŞI CALCULE NUMERICE

In această primă aplicație se vor învăța principalele noțiuni cu care se operează în MathCAD. In MathCAD, aşa cum s-a arătat, se poate lucra cu una sau mai multe regiuni pe „foaia de lucru”. O regiune se crează automat, în momentul în care se acționează „clic” cu buton stânga- mouse. In acest moment, în dreptul cursorului (simbol cruce roşie), se poate introduce o expresie de calcul.

Exemplul 1

Oriunde doriți pe „foaia de lucru” (pe ecran), acționați buton stânga mouse. In acel loc apare cursorul + şi se poate începe de la tastatură introducerea expresiei de calcul. Astfel introducem calculul unei sume simple:

$\boxed{1 + 2}$

Se observă că toată expresia scrisă la tastatură până într-un anumit moment este grafic vizualizată într-un chenar, acesta fiind de fapt regiunea introdusă. De asemenea, se observă că, la scriere, caracterul curent introdus este „marcat” printr-un „colțar” de culoare albastră.

$\boxed{1 + 2}$

Atenție! Dacă acționați spacebar-ul veți observa că „adunați” în colțarul de marcare unul , două sau intrega expresie srisă anterior; acum asupra acesteia putem lucra ca asupra unui singur caracter.

$\boxed{1 + 2 + \blacksquare}$

O altă observație importantă este că programul, după introducerea unui operator (în cazul nostru de adunare), în expresie apare un simbol numit *placeholder* arătând că în acel loc trebuie untrodus un caracter pentru continuarea scrierii corecte a expresiei.

Introduceți , de exemplu, cifra 9 şi apoi tastați direct tasta ce conține semnul =. Toate aceste introduceri in expresia de calcul se pot realiza dacă activăm paleta **Calculator** din meniul **View.**

Exemplul 2

Să exersăm introducerea şi rezolvarea unei ecuații de grad superior pentru condiții date. In dreptul cursorului (oriunde pe foaia de lucru) se va tasta:

f(x):x+x^3-(x^2+ \ 3) Pe foaia de lucru apare : $f(x):=x+x^3-(x^2+\sqrt{3})$

Apoi vom introduce pentru variabilă o valoare pentru care vom calcula rezultatul funcției.

x: 3 $x=3$
f(x) = $f(x)=19.268$

Obs. 1.Tipărirea expresiei se poate face utilizând tastatura sau activând paleta **Calculator**

2. Fiecare din cele trei expresii tipărite reprezintă o regiune ce se poate „muta” oriunde pe foaia de lucru. Incercați să mutați regiunea ce conține expresia x=3. Faceți clic mouse în dreptul acestei expresii ; imediat aceasta va apare într-un chenar iar ultimul caracter introdus va avea marcat placeholder-ul. Mişcând uşor mous-ul peste această regiune veți vedea apărând simbolul unei palme întinse. Faceți clic mouse în acest moment şi fără a elibera mouse „trageți” regiunea oriunde doriți pe foaia de lucru. Incercați să mutați regiunea ce conține f(x)= deasupra primei expresii de calcul. Se va obține:

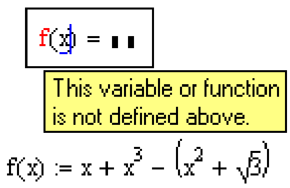


Fig.5

Aceasta arată că programul vă avertizează prin marcaj cu roşu asupra variabilei sau funcției ce nu este corect introdusă în acel loc sau are o lipsă de definiție, şi de asemenea vă şi dă un mesaj de eroare (pe fond galben.)

Concluzie: Expresiile de calcul pot fi introduse oriunde pe foaia de lucru (pe lățimea acesteia) dacă respectă principiul „citirii logice” al expresiilor şi instrucțiunilor , adică de la stânga la dreapta şi de sus în jos.

Exemplul 3

Să exersăm definirea şi atribuirea de variabile. Să introducem variabila „An”.
Definire:

An: 1925 An:=1925

In acest mod, am atribuit variabilei „An” valoarea 1925. Variabila poate fi utilizată oriunde in expresiile pe care le vom introduce ulterior. Să vedem ce stie programul legat de acestă variabilă. Tastăm:

An= An =1925

Dacă dorim să atribuim altă valoare acestei variabile este suficient să înlocuim în expresia de definiție a variabilei valoarea „1925” cu valoarea dorită. (ex:2003). Atenție! Odată înlocuită atribuirea, noua valoare va fi actualizată în tot ceea ce înseamnă calcul ulterior! Astfel, este suficient să faceți clic mouse în dreptul expresiei de evaluare (An=). Vedeți că evaluarea este actualizată.

Exemplul 4

Să exersăm calculul funcțiilor pentru mai multe variabile. Să reluam Exemplul 2. După introducerea expresiei funcției f(x), să introducem ca valori pentru variabilă un şir de valori:

x:0;6 x=0..6

Apoi, vom introduce expresia de evaluare: **f(x)=**

f(x) =
-1.732
-0.732
4.268
19.268
50.268
103.268
184.268

Dacă dorim să obținem evaluarea funcției pentru alte valori ale variabilei x este suficient să schimbăm numai expresia de definire a şirului de valori ale lui x. Astfel, dacă dorim să definim şirul de valori x=0,0.5,1,1.5,2 (pas 0.5) vom tasta:

x:0,0.5;6 x=0,0.5..6

Reveniți la expresia de evaluare a funcției f(x). Se obține un şir de cinci valori.

Unități de măsură

Programul MathCAD oferă posibilitatea asocierii unităților de măsură datelor numerice introduse. La accesarea meniului **Insert unit** se deschide o fereastră de dialog care are două opțiuni: **Dimension** şi respectiv **System.** Prima opțiune deschide lista tuturor unităților de măsură ce se pot ataşa (**Unit**) corespunzător dimensiunii alese (**Dimension**) în corelație cu cea de a doua opțiune, sistemul de unități de măsură adoptat.

In lista paginii **Dimensionless** sunt date toate unitățile de măsură din sistemul internațional, SI

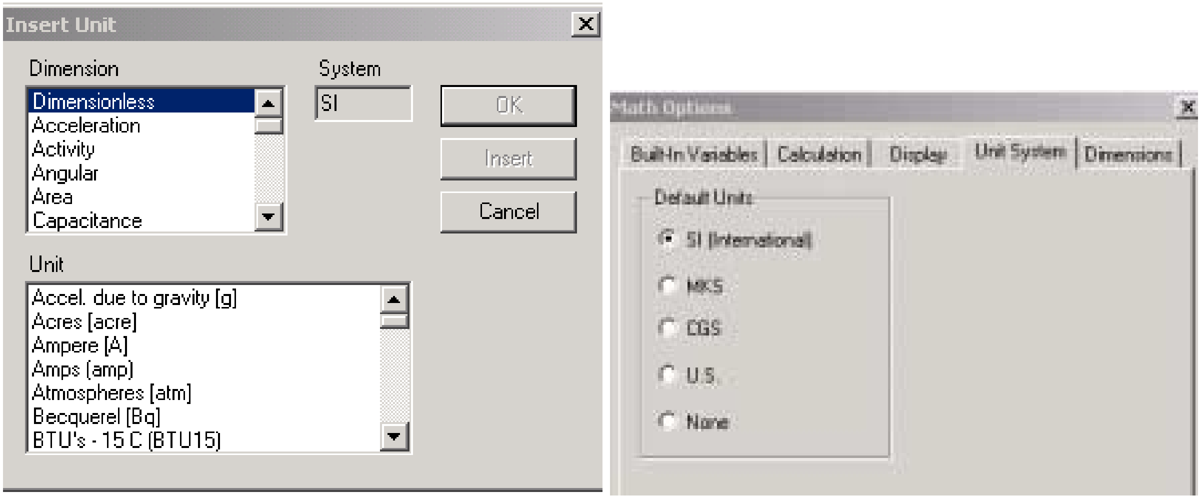


Fig.6

Alegerea sistemului de unități se realizează din meniul **Math>Option>Unit System.**

Pentru a introduce unitatea de masură asociată unei variabile numerice seprocedează în modul următor:

1. Clic mouse stânga pe câmpul variabilei (sau constantei) numerice

$x := 44$

2. Se tastează asterisc (*) care inserează simbolul de înmulțire (multiplicare) şi un *placeholder*, un loc de completat.

$x := 44 \cdot \blacksquare$

3. Se tastează numele unității de măsură sau se aplică din meniul **Insert** > **Unit**

$x := 44 \cdot kg$

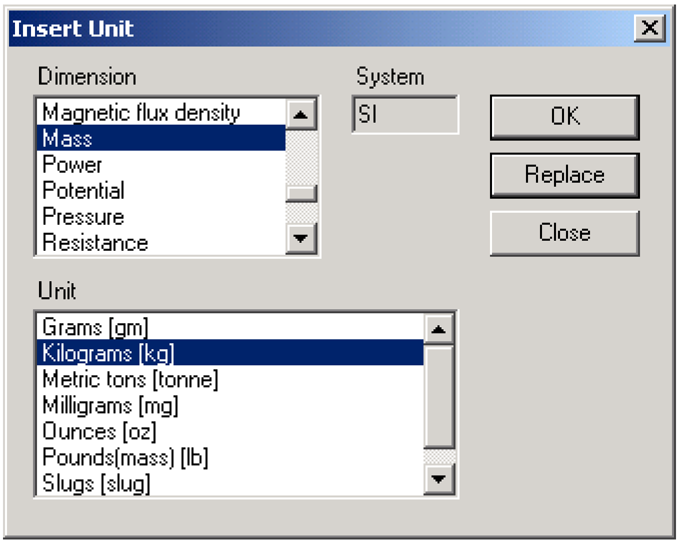


Fig.7

Pentru a modifica local unitatea de măsură utilizată se utilizează acelaşi procedeu, introducând în locul unității existente unitatea dorită prin **Replace** sau direct de la tastatură.

3. APLICAȚII

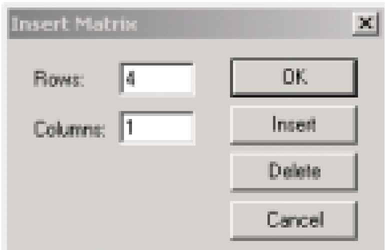
3.1.Rezolvări de ecuații şi sisteme de ecuații

3.1.1. Rezolvarea ecuației de gradul al doilea.

Să rezolvăm patru ecuații de gradul al doilea. Ca date inițiale se cunosc valorile coeficienților ecuațiilor cât şi formulele de calcul vectorizate.

Coeficienții ecuațiilor sunt:

a: Insert > Insert Matrix> Se obține:



$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fig.8

De asemenea se introduc coeficienții **b, c** şi relațiile de calcul pentru soluțiile **x1** şi **x2**

$$b := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad x1_i := \frac{-b_i + \sqrt{\left(b_i\right)^2 - 4 \cdot a_i \cdot c_i}}{2\,a_i}$$

$$x2_i := \frac{-b_i - \sqrt{\left(b_i\right)^2 - 4 \cdot a_i \cdot c_i}}{2\,a_i}$$

Deoarece coeficienții sunt introduşi ca vectori, realțiile de calcul sunt vectorizate. Pentru rezultat se vor introduce expresiile de evaluare **x1=** , **x2=**

3.1.2. Rezolvarea unui sistem de n ecuații lineare cu n necunoscute

Să rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} 2x + y + 0.5 = 0.1 \\ x - 2y = -0.3 \\ -1.25x + 6y - z = 1 \end{cases}$$

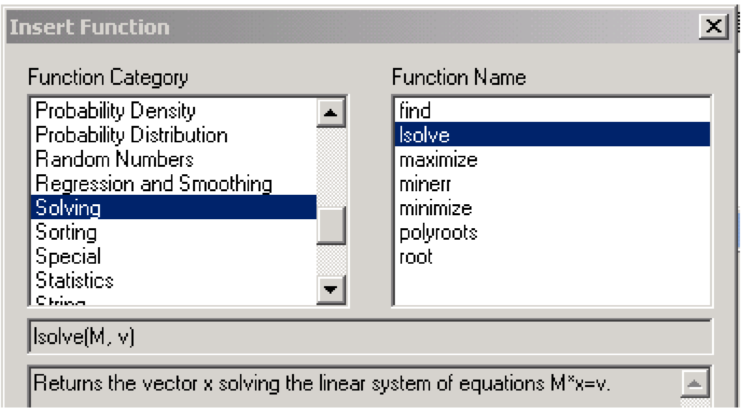
Aceasta înseamnă că în Mathcad vom introduce matricea coeficienților (notată M) şi vectorul termenilor liberi, v

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0.5 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1.25 & 6 & -1 \end{pmatrix} \qquad v := \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vecorul soluțiilor să îl notă cu variabila „soln”. Deci vom introduce:

$$soln := lsolve(\blacksquare, \blacksquare)$$

Pentru rezolvare vom utiliza una dintre funcțiile aflate în biblioteca programului Mathcad.Aceste funcții sunt grupate pe categorii. Din Meniul principal accesăm **Insert>Insert function.** Dintre funcțiile **Solving** alegem funcția **lsolve** (linear solve).



Cele două locuri libere vor fi completate cu notațiile "M" şi respectiv "v".

Introduceți apoi expresia de evaluare,

soln=

Fig.9

<u>Obs.</u> La această categorie de funcții există funcții de găsirea ale rădăcinilor unui polinom (**polyroots),** de găsire a rădăcinii într-un interval **(root),** de găsire ale soluțiilor unui sistem de ecuații nelineare, când acestea sunt estimate **(find),** de găsire a argumentelor pentru care funcțiile ating valoarea maximă sau minimă **(maximize, minimize).**

3.1.3. Rezolvarea unui sistem de n ecuații nelineare cu n necunoscute

Să rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

In Mathcad rezolvarea acestui sistem implică un algoritm preformat care cuprinde aşanumitul „solve block" şi se referă la un set de câțiva paşi ce trebuie realizați. Acest algoritm este aplicat la rezolvarea unui sistem nelinear de ecuații, la optimizarea unei probleme, la aplicarea programării în Mathcad. Practic se va proceda:

1. Se introduc valori de estimare pentru variabilele **x** şi **y.**
2. Se tastează cuvântul **Given** ca o variabilă (nu ca text)
3. Dedesubtul cuvântului Given se introduc expresiile ecuațiilor iar în loc de semnul egal se va utiliza **operatorul boolean „ =".**
4. Din meniul **Insert>Insert function> Solving>Find** .Se inserează Find.
5. Se cmpletează în funcția **Find** variabilele x şi y şi se tastează semnul egal, de evaluare.

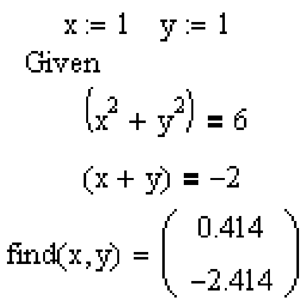


Fig.10

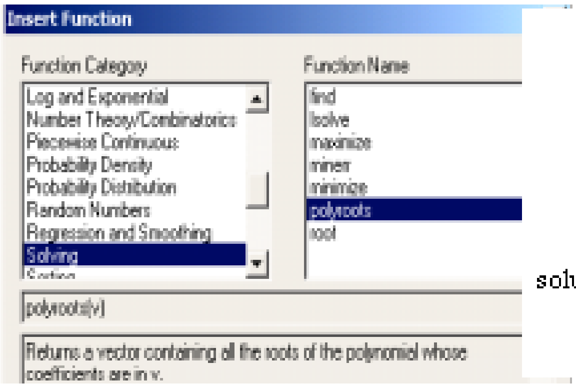
3.2. Calculul rădăcinilor unui polinom

Să calculăm rădăcinile polinomului $P(x)= x^3 – 6x + 2$.

Se introduce şi se tastează vectorul "v" al **tuturor** coeficienților, inclusiv termenul constant.

Apoi se defineşte o variabilă (de ex. "soluție") căreia i se va atribui din meniul **Insert>Insert function> Solving>Polyroot** inserarea "polyroot(v).

<u>Obs.</u> La tastarea expresiei de evaluare, adică vectorul **solutie** vom dori sa-l scriem ca vector transpus. Deci se utilizează paleta de calcul vectorial **şi nu calcul aritmetic.**



$$v := \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$solutie := polyroots(v)$$

$$solutie^{T} = \begin{pmatrix} -2.602 & 0.34 & 2.262 \end{pmatrix}$$

Fig.11

3.3. Interpolarea şi extrapolarea funcţiilor

O problemă frecvent întâlnită în activitatea de calcul şi proiectare de către un ingine este interpolarea. Astfel sunt uzuale situaţiile de găsire a unei funcţii cunoscând numai un set de date sau de măsurători ce caracterizează această funcţie. Programul MathCAD pune la dispoziţia utilizatorului o funcţie de interpolare lineară (uneşte punctele din vectorul de date) numită **linterp** şi o funcţie de interpolare splină şi anume funcţia **interp**.

Să găsim funcţia de interpolare lineară pentru un set de date exprimat sub forma unei matrici de două coloane. Matricea de date o denumim **date**.

$$date := \begin{pmatrix} 1.2 & 2 \\ 6 & 3.6 \\ 11 & 4 \\ 18 & 9.5 \end{pmatrix} \qquad date := csort(date, 0)$$

$$X := date^{\langle 0 \rangle} \qquad Y := date^{\langle 1 \rangle}$$

$$interpolare(x) := linterp(X, Y, x)$$

$$interpolare(3) = 2.6$$
$$interpolare(16.5) = 8.321$$

Cu această ocazie învăţăm o altă posibilitate oferită de MathCAD şi anume rearanjarea unui set de date. Se utilizează funcţia **csort** (*A*, ***coloană***) prin care se rearanjează datele din liniile matricei „*A*” după ordonarea crescătoare sau descrescătoare a datelor din coloana „*coloana*”

Apoi se introduce vectorul „*X*” ceconţine datele din coloana unu a matricei şi vectorul „Y” ce conţine datele din coana a doua.

Fig. 12

Apoi se introduce funcţia **linterp (X,Y,x)** ce interpolează valori în orice punct „x” când punctele din vectorul „X – Y” sunt unite prin linii drepte. Ca exemplu se calculează valorile în alte două puncte (3, 16.5)

Pentru interpolarea splină se aplică acelaşi algoritm, aplicându-se funcţia **interp(vs, X,Y,x)** unde **vs** este vectorul de specificaţie al categoriei de interpolare splină:

- dacă **vs** se introduce ca **lspline(X,Y)** se va crea o funcţie de interpolare cubică cu condiţii de terminare lineară;
- dacă **vs** se introduce ca **pspline(X,Y)** se va crea o funcţie de interpolare cubică cu condiţii de terminare parabolică;
- dacă **vs** se introduce ca **lspline(X,Y)** se va crea o funcţie de interpolare cubică cu condiţii de terminare cubică.

$$\text{interpolare}(x) := \text{interp}(\text{lspline}(X,Y),X,Y,x)$$

$$\text{interpolare}(3) = 2.76$$
$$\text{interpolare}(16.5) = 7.696$$

$$\text{interpolare}(x) := \text{interp}(\text{pspline}(X,Y),X,Y,x)$$

$$\text{interpolare}(3) = 2.852$$
$$\text{interpolare}(16.5) = 7.696$$

$$\text{interpolare}(x) := \text{interp}(\text{cspline}(X,Y),X,Y,x)$$

$$\text{interpolare}(3) = 2.957$$
$$\text{interpolare}(16.5) = 7.4$$

Fig. 13

In ceea ce priveşte extrapolarea unei funcţii cunoscute pachetul MathCAD pachetul MathCAD dispune de funcţia **predict (set,m,n).** Astfel, pentru un set de date se doreşte predicţionarea a **n** valori care să aproximeze funcţia construită pe baza a **m** valori din setul dat.

Obs. In exemplul următor setul are 5 valori (deci „m" ia valoarea 4) şi dorim cunosterea a următoarelor 3 valori (în ordine descrescătoare, deci „n" ia valoarea 3). La numărul valorilor de set numărătoarea începe, implicit, de la zero!

$$\text{set} := \begin{pmatrix} 11 \\ 8.5 \\ 6.2 \\ 4.7 \\ 3.1 \end{pmatrix} \qquad p := \text{predict}(\text{set},4,3) \qquad p = \begin{pmatrix} 0.429 \\ -3.261 \\ -6.852 \end{pmatrix}$$

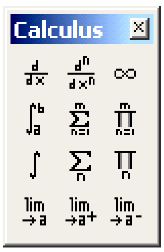
Fig. 14

3.4. Derivare numerică

Programul MathCAD oferă posibilitatea de determinare numerică a valorii derivatei într-un punct, până la derivata de ordinul 5 inclusiv, a unei funcţii derivative.

Algoritmul este prezentat prinnurmătorul exemplu:

1. Se scrie expresia funcţiei derivative — Se obţine:
   f (x) : x^2+Insert function>trigonometric>**sin (2x)** — f(x)=x^2+sin(2x)
2. Se introduce valoarea variabilei pentru punctul de calcul
   x : -6 — x=-6
3. Din paleta **Calculus** se apelează butonul de rezolvare a derivatei de primul ordin



Rezultatul se obţine completând locurile libere in preforma (simbolul) derivatei cu funcţia "f(x)" respectiv variabila "x".

$$\frac{d}{dx}f(x) = -10.312$$

3.5. Integrarea unei funcţii într-un interval definit

Evaluarea numerică a integralei unei funcţii date peste un interval se face untilizând de asemenea paleta **Calculus**

Algoritmul este prezentat prinnurmătorul exemplu:

1. Se scrie expresia funcției de integrat — Se obține:

f (x) : x^2+Insert function>trigonometric>**sin (2x)** — $f(x)=x^2+\sin(2x)$

2. Se introduc capetele intervalului peste vare realizăm integrarea

a : -6 **b : 3** — a=-6 b=3

3. Din paleta **Calculus** se apelează butonul de rezolvare a integralei definite

Rezultatul se obține completând locurile libere in preforma (simbolul) inegralei

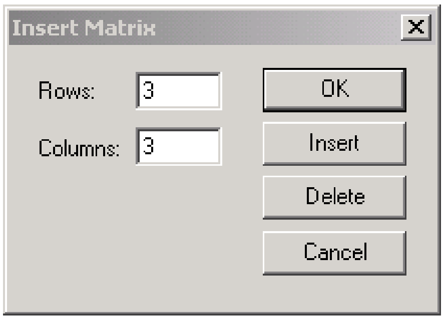
$$\int_a^b f(x)\,dx = 80.942$$

3.6. Calcul matriceal şi vectorial

Programul MathCAD dispune de o complexă bază de lucru pentru calcul matriceal şi vectorial. Pentru a crea un vector sau o matrice în cel mai simplu mod, vom proceda astfel:

1.Vom introduce numele matricei ca variabilă alocată, $M := \blacksquare$;

2. Vom apela meniul **Insert** >**Matrix** care va deschide următoarea fereastră de dialog:



In această fereastră se completează numărul de linii (rows) şi respectiv de coloane (columns). La comanda **Insert** va apare o preformatã a matricei dorite.

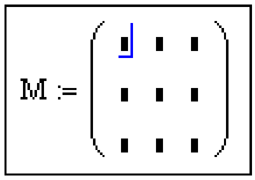
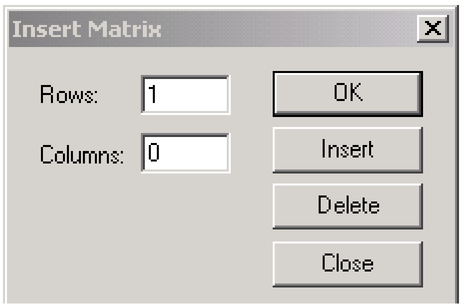


Fig.15

3. Se completează locurile lobere cu valorile numerice

4. Pentru modificarea structurii unei matrici se aplică acelaşi procedeu de inserare. O nouă linie este introdusă sub linia în care este activ markerul



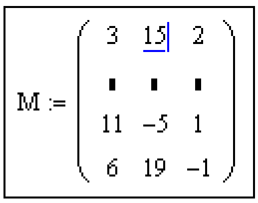


Fig.16

O nouă coloană este introdusă în dreapta coloanei în care este activ markerul

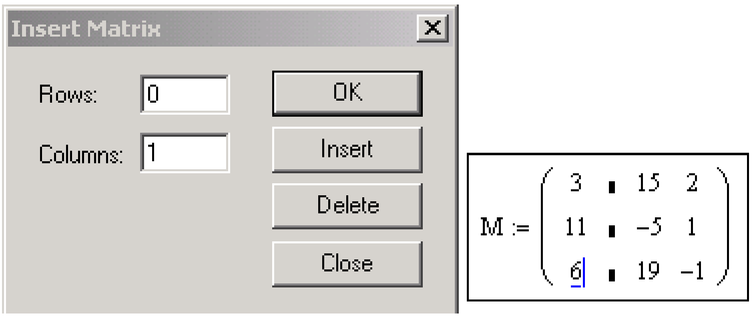


Fig.17

Pentru a şterge se procedează în acelaşi mod, folosind comanda **Delete** din această fereastră. De asemenea, se şterge linia (dacă se selecteză rows:1) sau coloana (columns:1) în acelaşi mod faţă de poziţia markerului

3.7. Calcul statistic şi distribuţii de probabilitate

Programul MathCAD oferă un bogat capitol de lucru dedicat calculului statistic şi resoectiv funcţii de distribuţie de probabilitate.

Este suficient să apelăm paleta **Insert >Function** sau simbolul  pentru a putea introduce una dintre multiplele funcţii de calcul statistic. Dăm câteva exemple:

<u>Calcul statistic</u>

gmean – media geometrică
hist - crearea unei histograme
hmean - media armonică
mean - media aritmetică (a eşantionului)
median - mediana eşantionului
moda - moda (modul) al eşantionului
var - dispersia (varianţa)
Stdev - abaterea standard (abaterea medie pătratică)

<u>Distribuţia de probabilitate (simbolizarea repartiţiei)</u>

Programul oferă din bibliotecă funcţii atât pentru densitatea de probabilitate (încep cu litera „d") cât şi funcţii pentru distribuţia cumulativă (încep cu litera „p") şi respectiv funcţii inverse (încep cu litera „q"). Exemplu:

dnorm – distribuţie normală standard, **pnorm** – distribuţie cumulativă normală standard, **qnorm** – inversa de probabilitate cumulativă;
cnorm – distribuţie normală
pbeta – distribuţie cumulativă Beta de parametrii s1, s2
pbinom – distribuţie cumulativă binomială pentru k reuşite din n încercări
pexp – distribuţie exponenţială de rată r
pgamma – distribuţie cumulativă Gama cu parametru de formă s
pweibull – distribuţie cumulativă Weibull cu parametru de formă s
pt – distribuţie cumulativă Student
punif – distribuţie cumulativă uniformă pe interval definit

<u>Exemplu:</u>

Să generăm un şir de numere reale crescător de la numărul –2 la +5 cu raţia pasul de 0.1 unităţi. Acest set de valori îl vom prelucra statistic. Aplicăm o reţea probabilistă pentru o repartiţie normală; aceasta înseamnă că variabila „x" a şirului de valori ascultă de o lege normală de parametrii μ (centrul de densitate la $x=\mu$), respectiv dispersia, σ^2.

Să considerăm pentru exemplu μ=1.8 şi σ^2=1

$$x := -2, -1.9 .. 5$$

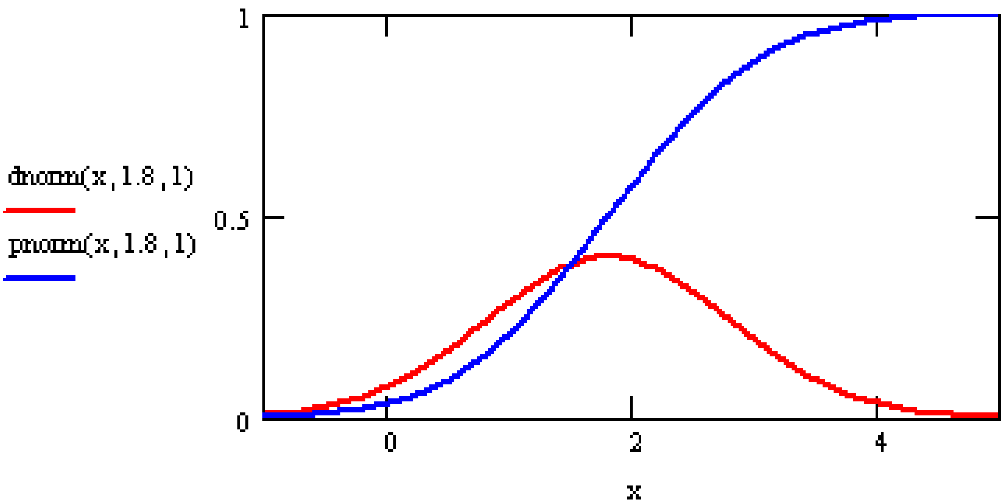
Se introduce **Insert >Function>Probability Density>Dnorm**

$$\boxed{\text{dnorm}(\blacksquare, \blacksquare, \blacksquare)}$$

Se completează parametrii:

$$\text{dnorm}(x, 1.8, 1)$$

Se aplică semnul de evaluare. Se obţine un tabel de valori pentru această distribuţie. In acelaşi mod se aplică şi funcţia **pnorm.** Grafic, se observă că **dnorm** generează forma „clopot”, de funcţie cunoscută de densitate, în timp ce **pnorm** este o funcţie cumulativă pe baza repartiţiei obţinute.



In ce priveşte funcţia qnorm putem verifica obţinerea valorii de centru (x=μ) pentru ca aria de sub graficul de repartiţie pnorm să atingă valoarea 0.5 (probabiliatea de 50%).

$$\text{qnorm}(0.5, 1.8, 1) = 1.8$$