ESKF test

1　状態量・誤差状態量

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{a}_b \\ \boldsymbol{\omega}_b \\ \boldsymbol{g} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta x} = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{p} \\ \delta\boldsymbol{v} \\ \delta\theta \\ \delta\boldsymbol{a}_b \\ \delta\boldsymbol{\omega}_b \\ \delta\boldsymbol{g} \end{bmatrix} \tag{1}$$

状態量のクォータニオンは 3 次元ベクトルを使用していることに注意．これは q_x, q_y, q_z の 3 次元ベクトルであり，ノルムの条件から q_w を求める．

2　真の状態

物体が三次元空間上で回転しながら動く状況を適当に考えた．(添え字 t は $true$ の意)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_t(t) &= \begin{bmatrix} x_t(t) \\ y_t(t) \\ z_t(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\Omega t \\ 2\sin 2\Omega t \\ 3\sin 3\Omega t \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\boldsymbol{g_t} t^2 \\
\boldsymbol{v}_t(t) &= \begin{bmatrix} v_{xt}(t) \\ v_{yt}(t) \\ v_{zt}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega\cos\Omega t \\ 4\Omega\cos 2\Omega t \\ 9\Omega\cos 3\Omega t \end{bmatrix} + \boldsymbol{g_t} t \\
\boldsymbol{a}_t(t) &= \begin{bmatrix} a_{xt}(t) \\ a_{yt}(t) \\ a_{zt}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Omega^2\sin\Omega t \\ -8\Omega^2\sin 2\Omega t \\ -27\Omega^2\sin 3\Omega t \end{bmatrix} + \boldsymbol{g_t} \\
\boldsymbol{\omega}_t(t) &= \begin{bmatrix} \omega_{xt}(t) \\ \omega_{yt}(t) \\ \omega_{zt}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\omega t \\ 2\sin\omega t \\ 3\sin\omega t \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2}$$

真の状態は解析的に求まるようにした．クォータニオンについては，初期値を $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ として（順番は $\begin{bmatrix} q_w & q_x & q_y & q_z \end{bmatrix}$）として，$d\boldsymbol{q}$ を $d\boldsymbol{\omega}$ から求めて，$\boldsymbol{q} \otimes d\boldsymbol{q}$ によって求める．

3　種々の計算早見表

3.1　クォータニオン積

$$\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} p_w q_w - p_x q_x - p_y q_y - p_z q_z \\ p_w q_x + p_x q_w + p_y q_z - p_z q_y \\ p_w q_y - p_x q_z + p_y q_w + p_z q_x \\ p_w q_z + p_x q_y - p_y q_x + p_z q_w \end{bmatrix} \tag{3}$$

3.2 クォータニオンから回転行列への変換公式

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} q_w^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 & 2(q_x q_y - q_w q_z) & 2(q_x q_z + q_w q_y) \\ 2(q_x q_y + q_w q_z) & q_w^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2 & 2(q_y q_z - q_w q_x) \\ 2(q_x q_z - q_w q_y) & 2(q_y q_z + q_w q_x) & q_w^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

3.3 外積行列

$$\left[\omega\right]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

3.4 $\boldsymbol{q}\{\boldsymbol{\theta}\}$

$$\boldsymbol{\theta} = \|\boldsymbol{\theta}\|\boldsymbol{u} \tag{6}$$
$$\tag{7}$$

なる $\boldsymbol{u}$ を用いて，$\theta = \|\boldsymbol{\theta}\|$ とすれば,

$$\boldsymbol{q}\{\boldsymbol{\theta}\} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \tag{8}$$

4 ノミナル状態のキネマティクス（離散時間）

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &\leftarrow \boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}\Delta t + \frac{1}{2}(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_b) + \boldsymbol{g})\Delta t^2 \\ \boldsymbol{v} &\leftarrow \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_b) + \boldsymbol{g})\Delta t \\ \boldsymbol{q} &\leftarrow \boldsymbol{q} \otimes \boldsymbol{q}\{(\boldsymbol{\omega}_m - \omega_b)\Delta t\} \\ \boldsymbol{a}_b &\leftarrow \boldsymbol{a}_b \\ \boldsymbol{\omega}_b &\leftarrow \boldsymbol{\omega}_b \\ \boldsymbol{g} &\leftarrow \boldsymbol{g} \end{aligned} \tag{9}$$

センサ (IMU) からの値が届いたら上式に従ってノミナル状態を更新する.

5 誤差状態のキネマティクス（離散時間）

$$\hat{\delta\boldsymbol{x}} \leftarrow \boldsymbol{F_x}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_m) \cdot \hat{\delta\boldsymbol{x}} \tag{10}$$
$$\boldsymbol{P} \leftarrow \boldsymbol{F_x} \boldsymbol{P} \boldsymbol{F_x}^\top + \boldsymbol{F_i} \boldsymbol{Q_i} \boldsymbol{F_i} \tag{11}$$

誤差状態ベクトルの推定値 $\hat{\delta\boldsymbol{x}}$ は $\boldsymbol{0}$ であるため，一つ目の式は必ず $\boldsymbol{0}$ を返すので計算を省いてよい（初期値も $\boldsymbol{0}$ なので）．時間経過によって誤差の共分散は上がっていくため，誤差の共分散更新はセンサ (IMU) の積分と同周波数で行う．行列 $\boldsymbol{F_x}$ は遷移行列であり，様々な方法で近似される．今回は二次近似した行列 $\boldsymbol{\Phi}$ を $\boldsymbol{F_x}$ として用いた.

5.1 遷移行列

遷移行列は以下のような形で表される（Φ は二次までのオイラー法）.

$$
\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix}
\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\Delta t & -\frac{1}{2}\boldsymbol{R}\left[\boldsymbol{a}\right]_\times \Delta t^2 & -\frac{1}{2}\boldsymbol{R}\Delta t^2 & 0 & \frac{1}{2}\boldsymbol{I}\Delta t^2 \\
0 & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{R}\left[\boldsymbol{a}\right]_\times \Delta t & -\boldsymbol{R}\Delta t & \frac{1}{2}\boldsymbol{R}\left[\boldsymbol{a}\right]_\times \Delta t^2 & \boldsymbol{I}\Delta t \\
0 & 0 & \boldsymbol{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}^\top & 0 & -\boldsymbol{I}\Delta t & 0 \\
0 & 0 & 0 & \boldsymbol{I} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{I} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{I}
\end{bmatrix} \tag{12}
$$

$$
\boldsymbol{F_i} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \boldsymbol{I} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \boldsymbol{I} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \boldsymbol{I} \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \tag{13}
$$

$$
\boldsymbol{Q_i} = \begin{bmatrix}
\boldsymbol{V_i} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \boldsymbol{\Theta_i} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \boldsymbol{A_i} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\Omega_i}
\end{bmatrix} \tag{14}
$$

$\boldsymbol{F_i Q_i F_i^\top}$ の部分は単位行列に簡単化したが，していいかは不明．本当は実装すべき．$\boldsymbol{V_i}$ とかは摂動の共分散行列．$\boldsymbol{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}$ の部分は $\boldsymbol{\omega}\Delta t$ を表す $\boldsymbol{q}$ を式 (8) によって求め，そのクォータニオンによる回転効果を表す回転行列 $\boldsymbol{R}$ を式 (4) によって求めれば実装としは簡単だと考えられる．

6 観測

GPS による位置，速度の観測を入れることを想定する．GPS の観測の頻度は IMU の値取得頻度よりも遅く，IMU によって得た値を積分して得られたノミナル状態から，GPS の観測によって誤差を推定し，落とすことを考える．
一般的には観測方程式は

$$
\boldsymbol{y} = h(\boldsymbol{x}_t) + \boldsymbol{v} \tag{15}
$$

$$
\boldsymbol{v} \sim \mathcal{N}\{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{V}\} \tag{16}
$$

となる．今回は単純に位置，速度が取れるものとして，

$$
\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_t \\ \boldsymbol{v}_t \end{bmatrix} + \boldsymbol{v} \tag{17}
$$

としている．この際注意すべきは，位置・速度のみの観測でも姿勢やバイアスに対して，それぞれ回転行列，誤差の共分散行列を通して修正が入るということである．機体に積まれている加速度センサは機体座標系での加速度ベクトルを測るため，観測によって得られるデータと機体搭載の加速度センサの値によって得られるデータが食い違っている場合，回転行列（すなわち姿勢）がおかしいと気づくはず．

7 ESKF

ESKF は拡張カルマンフィルタの原理を用いて，誤差状態を線形化し，誤差状態を見積もることを目的としている．誤差状態システムは常に原点付近ではたらくため，線形化の妥当性が保証されている．フィルタによる誤差状態の推定は下記の式によって為される．

$$
\boldsymbol{K} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^\top(\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^\top + \boldsymbol{V})^{-1} \tag{18}
$$

$$
\hat{\delta \boldsymbol{x}} \leftarrow \boldsymbol{K}(\boldsymbol{y} - h(\hat{\boldsymbol{x}_t})) \tag{19}
$$

$$
\boldsymbol{P} \leftarrow (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{H})\boldsymbol{P} \tag{20}
$$

このときの真の状態の推定値 $\boldsymbol{x}_t$ は誤差を未だ観測しておらず，現時点では誤差状態の平均値は $\boldsymbol{0}$ であるから，$\hat{\boldsymbol{x}_t} = \boldsymbol{x}$ となる．

7.1　ヤコビアン

ヤコビアンは

$$\boldsymbol{H} = \left.\frac{\partial h}{\partial \delta \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}} = \left.\frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{x}_t}\right|_{\boldsymbol{x}} \left.\frac{\partial \boldsymbol{x}_t}{\partial \delta \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{X}_{\delta \boldsymbol{x}} \tag{21}$$

であり，$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{x}}$ は普通の EKF で用いられるヤコビアンである（今回は単純に対角に 1 が並んだ 6×19 の単位行列もどきになる）．さらに，$\boldsymbol{X}_{\delta \boldsymbol{x}}$ については,

$$\boldsymbol{X}_{\delta \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_6 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{Q}_{\delta \boldsymbol{\theta}} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{I}_9 \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\delta \boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_x & -q_y & -q_z \\ q_w & -q_z & q_y \\ q_z & q_w & -q_x \\ -q_y & q_x & q_w \end{bmatrix} \tag{23}$$

として計算できる．

7.2　誤差状態のノミナルへの反映

誤差状態をノミナル状態へ反映する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &\leftarrow \boldsymbol{p} + \hat{\delta \boldsymbol{p}} \\ \boldsymbol{v} &\leftarrow \boldsymbol{v} + \hat{\delta \boldsymbol{v}} \\ \boldsymbol{q} &\leftarrow \boldsymbol{q} \otimes \boldsymbol{q}\{\hat{\delta \boldsymbol{\theta}}\} \\ \boldsymbol{a}_b &\leftarrow \boldsymbol{a}_b + \hat{\delta \boldsymbol{a}_b} \\ \boldsymbol{\omega}_b &\leftarrow \boldsymbol{\omega}_b + \hat{\delta \boldsymbol{\omega}_b} \\ \boldsymbol{g} &\leftarrow \boldsymbol{g} + \hat{\delta \boldsymbol{g}} \end{aligned} \tag{24}$$

7.3　ESKF の初期化

誤差状態をノミナルに反映したのち，誤差状態 $\hat{\delta \boldsymbol{x}}$ を初期化する．これは新しい姿勢誤差は新しいノミナル状態の姿勢座標を基準に相対的に表現されるからである．ESKF の誤差の初期化は以下のようになる．

$$\hat{\delta \boldsymbol{x}} \leftarrow 0 \tag{25}$$

$$\boldsymbol{P} \leftarrow \boldsymbol{G}\boldsymbol{P}\boldsymbol{G}^\top \tag{26}$$

となる．G は具体的には

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_6 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} - \left[\frac{1}{2}\hat{\delta \boldsymbol{\theta}}_\times\right] & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{I}_9 \end{bmatrix} \tag{27}$$

として表されるが，今回は簡略化して単位行列として扱った．より正確な上式の形の $\boldsymbol{G}$ を用いれば，長期的な誤差ドリフトを減らすのに有利に働く可能性がある．

8　全体の流れ

1. IMU の値が届いたら，IMU の値を積分してノミナル状態量 $\boldsymbol{x}$ を更新する（式 (9)）．
   同時並行で，誤差状態 $\delta \boldsymbol{x}$ の共分散行列 $\boldsymbol{P}$ の更新も行う（予測更新，式 (11)）．このとき，$\delta \boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{0}$ のままであることに注意（実際には更新は行うべきだが，$\boldsymbol{0} \rightarrow \boldsymbol{0}$ なので行わなくてよい）．

$$\boldsymbol{P} \leftarrow \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}}^\top + \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}} \tag{28}$$

2. GPS（IMU よりも低頻度）の観測が届いたら，以下を順に行う．

(1) $\delta\boldsymbol{x}$ を更新（式 (18,19)）．

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^\top(\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^\top + \boldsymbol{V})^{-1} \tag{29}$$

$$\hat{\delta\boldsymbol{x}} \leftarrow \boldsymbol{K}(\boldsymbol{y} - h(\hat{\boldsymbol{x}}_t)) \tag{30}$$

(2) $\boldsymbol{P}$ を更新（式 (20)）．

$$\boldsymbol{P} \leftarrow (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{H})\boldsymbol{P} \tag{31}$$

(3) $\delta\boldsymbol{x}$ をノミナルに反映（式 24）．

(4) $\delta\boldsymbol{x}$ を $\mathbf{0}$ に初期化（式 (25)）．

$$\hat{\delta\boldsymbol{x}} \leftarrow 0 \tag{32}$$

(5) $\boldsymbol{P}$ を初期化（式 (26)）．

$$\boldsymbol{P} \leftarrow (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{H})\boldsymbol{P} \tag{33}$$