Simulateur de Portefeuille Intelligent

Rapport de Projet Détailé

Laila Ait Bella

April 27, 2025

Contents

1 Introduction **2**

2 Fondements Théoriques **2**

2.1 Théorie Moderne du Portefeuille (Markowitz, 1952) 2

2.2 Gestion du Risque 2

2.3 Simulation de Monte Carlo 3

3 Méthodologie Approfondie **3**

3.1 Chargement et Pré-traitement des Données 3

3.2 Optimisation du Portefeuille avec CVXPY 3

3.3 Projection Future par Simulation Monte Carlo 4

3.3.1 Hypothèses de Modélisation 4

3.3.2 Processus de Simulation 4

4 Formules de Calcul Détailées **5**

5 Bibliothèques Python Utilisées **6**

6 Conclusion **6**

1 Introduction

Dans un contexte financier de plus en plus volatile, la gestion efficace des portefeuilles d'actifs devient primordiale pour les investisseurs. Le but de ce projet est de proposer un simulateur interactif capable :

- d'optimiser la répartition d'un portefeuille,
- de maximiser le rendement attendu tout en contrôlant le risque,
- de simuler l'évolution du capital sur plusieurs années,
- et de sensibiliser à l'importance de la diversification.

Le simulateur repose sur des techniques modernes de finance quantitative, en particulier la Théorie Moderne du Portefeuille et la simulation de Monte Carlo.

2 Fondements Théoriques

2.1 Théorie Moderne du Portefeuille (Markowitz, 1952)

La théorie moderne du portefeuille, développée par Harry Markowitz en 1952, constitue le fondement de l'optimisation financière moderne. Elle repose sur les principes suivants :

- **Principe d'optimisation** : Un portefeuille est dit optimal s'il offre le meilleur rendement espéré pour un niveau de risque donné, ou inversement, le risque le plus faible pour un niveau de rendement cible.
- **Diversification** : En combinant des actifs dont les rendements ne sont pas parfaitement corrélés, il est possible de réduire la volatilité globale du portefeuille sans nécessairement diminuer son rendement attendu.
- **Frontière efficiente** : L'ensemble des portefeuilles optimaux constitue la *frontière efficiente*, représentant la meilleure combinaison rendement/risque accessible pour un investisseur rationnel.

2.2 Gestion du Risque

La gestion du risque est une composante essentielle de la construction de portefeuille :

- **Volatilité** : La volatilité est utilisée comme mesure du risque ; elle évalue l'amplitude des fluctuations potentielles du portefeuille autour de son rendement moyen.
- **Profil Investisseur et Aversion au Risque** : Afin d'adapter l'optimisation aux préférences individuelles, un coefficient d'aversion au risque λ est introduit. Ce paramètre module l'importance donnée à la minimisation du risque par rapport à la maximisation du rendement :
  - *Profil Prudent* : λ élevé, forte préférence pour la stabilité.
  - *Profil Modéré* : λ moyen, équilibre entre rendement et risque.
  - *Profil Dynamique* : λ faible, recherche de rendement plus élevé malgré une plus forte volatilité.

2.3 Simulation de Monte Carlo

La simulation de Monte Carlo est utilisée pour évaluer l'évolution future potentielle du capital de manière probabiliste :

- **Estimation probabiliste** : Contrairement à une projection déterministe, la simulation génère un grand nombre de scénarios futurs possibles en tenant compte des incertitudes du marché.
- **Prise en compte de l'incertitude** : En simulant l'évolution du portefeuille selon un processus stochastique basé sur une loi normale des rendements journaliers, la méthode permet d'obtenir une distribution de résultats possibles (capital futur) et non une seule valeur estimée.

3 Méthodologie Approfondie

3.1 Chargement et Pré-traitement des Données

- L'utilisateur fournit un fichier CSV ou Excel avec :
  - Une colonne Date,
  - Plusieurs colonnes correspondant aux prix journaliers de chaque actif.
- Les données sont indexées par date pour garantir un suivi temporel correct.
- **Calcul des rendements journaliers** : Pour chaque actif, on calcule :

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{1}$$

  où r_t est le rendement à la date t et P_t est le prix à t.
- Suppression des valeurs manquantes pour garantir des calculs fiables.

3.2 Optimisation du Portefeuille avec CVXPY

Objectif : Maximiser l'expression suivante :

$$\mathbb{E}[r_p] - \lambda \times Var(r_p) \tag{2}$$

- $\mathbb{E}[r_p]$ est le rendement attendu du portefeuille,
- $Var(r_p)$ est la variance du portefeuille (mesure du risque),
- λ est le paramètre d'aversion au risque selon le profil (Prudent, Modéré, Dynamique).

Variables :

- $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$: les poids à affecter à chaque actif.
- Σ : la matrice de covariance des actifs.

Contraintes imposées :

- **Diversification** : chaque actif doit être représenté à au moins 5% et au plus 80% du portefeuille.
- **Total investi** :

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \tag{3}$$

Formulation Quadratique : La variance est un terme quadratique ($w^\top \Sigma w$), ce qui justifie l'usage de **CVXPY** pour sa modélisation et résolution.

3.3 Projection Future par Simulation Monte Carlo

La simulation de Monte Carlo a été utilisée pour estimer l'évolution potentielle du capital investi jusqu'en 2028, en tenant compte de l'incertitude inhérente aux marchés financiers.

3.3.1 Hypothèses de Modélisation

- **H1.** Le rendement journalier des actifs suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec :
  - μ : rendement journalier moyen,
  - σ : volatilité journalière historique du portefeuille optimisé.

  Cette hypothèse repose sur la théorie du **mouvement brownien géométrique**, introduite par **Louis Bachelier (1900)**, et généralisée dans les travaux modernes par le **Modèle de Black-Scholes (1973)**.
- **H2.** Les rendements journaliers sont indépendants d'un jour à l'autre (absence de mémoire dans les rendements), hypothèse classique basée sur l'**hypothèse du marché efficient** de **Fama (1970)**.
- **H3.** Le capital est mis à jour de manière discrète, jour par jour, en supposant des réinvestissements instantanés sans coût de transaction.

3.3.2 Processus de Simulation

1. Détermination des paramètres :

   $$r_{\text{moyen}} = (1 + r_{\text{annuel}})^{1/252} - 1 \quad \text{et} \quad \sigma_{\text{journalier}} = \text{écart-type(rendements pondérés)}$$

2. Simulation de rendements aléatoires $r_t \sim \mathcal{N}(r_{\text{moyen}}, \sigma^2_{\text{journalier}})$ pour chaque jour futur.
3. Mise à jour du capital :

   $$C_{t+1} = C_t \times (1 + r_t)$$

4. Répétition sur 1000 simulations indépendantes.
5. Analyse des résultats : moyenne des trajectoires, capital minimum et maximum observés, calcul de l'intervalle de confiance à 80%.

4 Formules de Calcul Détailées

Chaque formule est accompagnée de la signification des variables.

Rendement Moyen par Actif

$$\bar{r} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} r_i$$

où :

- $\bar{r}$: rendement moyen de l'actif sur la période,
- N : nombre total de jours (période d'observation),
- r_i : rendement de l'actif au jour i.

Covariance entre deux actifs

$$cov(X, Y) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

où :

- $cov(X, Y)$: covariance entre les actifs X et Y,
- X_i : rendement de l'actif X au jour i,
- Y_i : rendement de l'actif Y au jour i,
- $\bar{X}$: rendement moyen de l'actif X,
- $\bar{Y}$: rendement moyen de l'actif Y,
- N : nombre total de jours.

Rendement attendu du portefeuille

$$\mathbb{E}[r_p] = \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i$$

où :

- $\mathbb{E}[r_p]$: rendement moyen attendu du portefeuille,
- n : nombre total d'actifs dans le portefeuille,
- w_i : poids de l'actif i dans le portefeuille,
- $\bar{r}_i$: rendement moyen de l'actif i.

Variance du portefeuille

$$Var(r_p) = w^\top \Sigma w$$

où :

- $Var(r_p)$: variance du rendement du portefeuille (mesure du risque global),
- w : vecteur des poids des actifs du portefeuille,
- Σ : matrice de covariance entre les actifs,
- $w^\top$: transposée du vecteur w.

Projection du Capital

$$Capital_t = Capital_{t-1} \times (1 + rendement_t)$$

où :

- $Capital_t$: capital à la date t,
- $Capital_{t-1}$: capital à la date précédente $(t-1)$,
- $rendement_t$: rendement du portefeuille au jour t.

5 Bibliothèques Python Utilisées

- **pandas** : manipulation de données temporelles,
- **numpy** : calculs matriciels et statistiques,
- **matplotlib** : génération de graphiques financiers,
- **cvxpy** : modélisation d'optimisation convexe,
- **streamlit** : développement rapide d'application web interactive.

6 Conclusion

Le simulateur de portefeuille intelligent présente une solution simple, robuste et efficace pour comprendre les principes clés de l'optimisation financière. Il combine mathématiques appliquées, probabilités et techniques de visualisation modernes.

Note : Ce projet est à but exclusivement pédagogique et ne constitue pas un conseil d'investissement.

References

[1] Harry Markowitz, *Portfolio Selection*, Journal of Finance, vol. 7, no. 1, pp. 77–91, 1952.

[2] Eugene F. Fama, *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*, Journal of Finance, vol. 25, no. 2, pp. 383–417, 1970.

[3] Steven Diamond and Stephen Boyd, *CVXPY: A Python-Embedded Modeling Language for Convex Optimization*, Journal of Machine Learning Research, vol. 17, no. 83, pp. 1–5, 2016.

[4] Streamlit Inc., *Streamlit: Turn Data Scripts into Shareable Web Apps*, Disponible à : `https://streamlit.io/`