

FAKULTA
ELEKTROTECHNIKY
A KOMUNIKAČNÍCH
TECHNOLOGIÍ

Moderní numerické metody

Doc. RNDr. Jaromír Baštinec, CSc.
RNDr. Michal Novák, Ph.D.

Obsah

1	Úvod	7
1.1	Označení	8
2	Princip numerických metod, teorie chyb, Banachova věta o pevném bodu.	9
2.1	Úvod	9
2.2	Chyby při numerických výpočtech.	9
2.3	Šíření chyb při aritmetických operacích	10
2.4	Podmíněnost úloh	11
2.5	Richardsonova extrapolace	13
2.6	Metriky, kontrakce, Banachova věta	15
2.7	Shrnutí	20
3	Řešení soustav lineárních rovnic.	21
3.1	Úvod	21
3.2	Soustavy lineárních rovnic — Základní pojmy	21
3.3	Řešení soustav	22
3.4	Gaussova eliminační metoda	27
3.5	Úplný a částečný výběr hlavního prvku	28
3.6	Metoda LU-rozkladu	29
3.7	Řešení pomocí inverzní matice	32
3.8	Iterační metody řešení	32
3.9	Jacobiho iterační metoda	34
3.10	Gaussova – Seidelova iterační metoda	35
3.11	Stabilita řešení numerické úlohy	37
3.12	Relaxační metody	38
3.13	Metoda největšího spádu	40
3.14	Metoda sdružených gradientů	40
3.15	Shrnutí	42
4	Řešení rovnic.	43
4.1	Úvod	43
4.2	Základní pojmy	43
4.3	Startovací metody	43
4.4	Grafická metoda	44
4.5	Tabelování funkce	44
4.6	Metoda bisekce – půlení intervalu	44
4.7	Iterační metody	45
4.8	Metoda prosté iterace	45
4.9	Metoda regula falsi	47
4.10	Metoda sečen	48
4.11	Příklady na procvičení	49
4.12	Metoda tečen	50

4.13	Modifikovaná Newtonova metoda	52
4.14	Příklady na procvičení	54
4.15	Newtonova metoda pro komplexní kořeny	56
4.16	Kombinovaná metoda sečen a tečen	56
4.17	Příklady na procvičení	57
4.18	Řád metody	58
4.19	Algebraické rovnice	60
4.20	Příklady na procvičení	63
4.21	Metoda Laguerrova	64
4.22	Metoda Graeffova – Lobačevského	65
4.23	Metoda Schurova	69
4.24	Shrnutí	71
5	Vlastní čísla	72
5.1	Úvod	72
5.2	Základní pojmy	72
5.3	Numerické metody pro hledání vlastních čísel	73
5.4	Klasické metody určení koeficientů charakteristického polynomu	74
5.4.1	Krylovova metoda	74
5.4.2	Faddějevova-Leverrierova metoda	74
5.5	Poloha a odhad vlastních čísel	76
5.5.1	Geršgorinovy věty	76
5.6	Metody výpočtu dominantního vlastního čísla	78
5.6.1	Mocninná metoda	79
5.6.2	Metoda Rayleighova podílu	82
5.6.3	Výpočet dalších vlastních čísel mocninnou metodou	84
5.7	Metody pro výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů symetrických matic	85
5.7.1	Jacobiho metoda	85
5.7.2	Householderova matice zrcadlení	93
5.7.3	Givensova-Householderova metoda	96
5.7.4	QR-rozklad	101
5.7.5	Konstrukce QR -rozkladu	101
5.7.6	Srovnání algoritmů	109
5.7.7	QR -rozklad a vlastní čísla matice \mathbf{A} – QR -algoritmus	110
5.8	Podmíněnost problému vlastních čísel	111
5.8.1	Globální číslo podmíněnosti	111
5.8.2	Odhad chyby vypočítaného vlastního čísla	113
5.8.3	Relativní chyba vypočítaného vlastního čísla	114
5.9	Shrnutí	114
6	Soustavy nelineárních rovnic	115
6.1	Úvod	115
6.2	Základní pojmy	115
6.3	Iterační metoda	115
6.4	Newtonova metoda	118

6.5	Shrnutí	121
7	Řešení obyčejných diferenciálních rovnic.	122
7.1	Úvod	122
7.2	Cauchyova úloha.	122
7.3	Základní analytické metody.	125
7.3.1	Lineární rovnice	125
7.3.2	Bernoulliho rovnice	127
7.3.3	Exaktní rovnice	129
7.4	Jednokrokové metody	131
7.4.1	Diferenční metody řešení Cauchyovy úlohy založené na diskretizaci proměnné.	131
7.5	Eulerova metoda	132
7.5.1	První modifikace Eulerovy metody	133
7.5.2	Druhá modifikace Eulerovy metody	133
7.6	Příklady na procvičení	133
7.7	Metody Rungeho – Kuttovy	136
7.7.1	Stabilita	138
7.8	Vícekrokové metody.	140
7.8.1	Adamsovy metody	140
7.8.2	Metoda prediktor – korektor	144
7.8.3	Metoda prediktor – modifikátor – korektor	144
7.8.4	Příklady na procvičení	145
7.9	Metody založené na užití derivací vyšších řádů	146
7.10	Metody Taylorovy řady	148
7.11	Shrnutí	150
8	Diferenciální rovnice vyšších řádů	151
8.1	Úvod	151
8.2	Základní pojmy	151
8.3	Metody pro rovnice druhé řádu	153
8.4	Užití Taylorovy řady	154
8.5	Shrnutí	155
9	Řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic	156
9.1	Úvod	156
9.2	Základní pojmy	156
9.3	Eulerova metoda pro soustavy dif.rovnic	157
9.4	Příklady na procvičení	158
9.5	Rungeho-Kuttova metoda pro soustavy dif.rovnic	159
9.6	Příklady na procvičení	162
9.7	Metoda Taylorovy řady	163
9.8	Zaokrouhlovací chyby	165
9.9	Další problémy, které mohou nastat	165
9.10	Řízení délky kroku	167

9.11 Shrnutí	167
10 Řešení okrajových úloh pro obyčejné dif. rovnice.	169
10.1 Úvod	169
10.2 Základní pojmy	169
10.3 Metoda střelby	170
10.4 Metoda konečných diferencí	171
10.5 Metoda konečných objemů	182
10.6 Příklady na procvičení	185
10.7 Shrnutí	185
11 Metoda konečných prvků.	186
11.1 Úvod	186
11.2 Základní pojmy	186
11.3 Shrnutí	189
12 Parciální diferenciální rovnice	190
12.1 Úvod	190
12.2 Základní pojmy	190
12.3 Parciální diferenciální rovnice prvního řádu	192
12.4 Formulace počáteční úlohy.	193
12.5 Nejjednodušší příklady parciálních rovnic prvního řádu	193
12.5.1 Rovnice typu $\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = 0$	193
12.5.2 Rovnice typu $\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = f(x,y)$	195
12.5.3 Rovnice typu $\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = f_1(x) \cdot f_2(z)$	198
12.6 Řešené příklady	200
12.7 Cvičení	202
12.7.1 Lineární homogenní parciální rovnice prvního řádu	202
12.8 Shrnutí	202
13 Parciální diferenciální rovnice druhého řádu	203
13.1 Úvod	203
13.2 Klasifikace rovnic na hyperbolické, parabolické a eliptické)	203
13.3 Transformace proměnných.	205
13.4 Řešené příklady	213
13.5 Cvičení	215
13.6 Metoda konečných diferencí pro PDR	215
13.7 Shrnutí	221
14 Metoda konečných prvků pro parciální dif. rovnice	223
14.1 Úvod	223
14.2 Základní pojmy	223
14.3 Shrnutí	228

15 Výsledky	230
15.1 Metoda sečen	230
15.2 Modifikovaná Newtonova metoda	231
15.3 Kombinovaná metoda sečen a tečen	233
15.4 Algebraické rovnice	234
15.5 Vícekrokové metody řešení počátečních úloh	237
15.6 Eulerova metoda pro soustavy	240
15.7 Metody Rungeho–Kuttovy pro soustavy	245
15.8 Metoda konečných diferencí	263
16 Dodatky	267
16.1 Ukázky zadání	267

Seznam obrázků

4.1	Problém malého úhlu φ	46
4.2	Geometrický smysl metody sečen	48
4.3	Geometrický smysl metody tečen	51
4.4	Problém u metody tečen	52
4.5	Geometrický smysl modifikované metody tečen	53
4.6	Geometrický smysl kombinované metody sečen a tečen	57
7.1	Příklad řešení diferenciální rovnice	124
7.2	Geometrický smysl Eulerovy metody	133
7.3	Geometrický smysl první modifikace Eulerovy metody	134
7.4	Geometrický smysl druhé modifikace Eulerovy metody	134
10.1	Geometrický smysl metody střelby	171
12.1	Počáteční křivka z příkladu 12.7	196
12.2	Zobrazení řešení příkladu 12.7	197
13.1	Hranice oblasti	216
13.2	Problém u metody konečných diferencí	218

1 Úvod

Motto:

Učitel Vám může pootevřít dvěře, vstoupit už musíte sami.

Čínské přísloví

Cílem předmětu **Moderní numerické metody** je naučit Vás použití vybraných numerických metod při řešení úloh, které obecně nejdou řešit analytickým způsobem. Snahou autorů bylo, aby jste zvládli nejen praktické použití numerických metod, ale aby jste se naučili i poznávat jejich možnosti, omezení a nedostatky. Text obsahuje i řadu příkladů pro samostatnou práci, včetně jejich výsledků.

Uvítáme Vaše názory, připomínky a komentáře.

Autoři

1.1 Označení

\mathbb{N}	množina přirozených čísel
\mathbb{Z}	množina celých čísel
\mathbb{R}	množina reálných čísel
\mathbb{Q}	množina racionálních čísel
\mathbb{I}	množina iracionálních čísel
\mathbb{C}	množina komplexních čísel
$P_n(x)$	polynom n -tého stupně proměnné x
$A_{m,n}$	matice typu m, n (s m řádky a n sloupce)
$A = (a_{ij})$	matice s prvky a_{ij}
I	jednotková matice
\mathcal{O}	nulová matice
$\det A = A $	determinant matice A
A^{-1}	matice inverzní k matici A
$\text{adj } A$	matice adjungovaná k matici A
A_{ks}	algebraický doplněk prvku a_{ks}
$\text{hod}(A)$	hodnota matice A
$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$	vektorový prostor všech uspořádaných n -tic
$\dim P$	dimenze prostoru P .
$a \cdot a$	skalární součin vektorů a, b
$\ x\ $	norma vektoru x
\square	konec důkazu
$\langle A \rangle$	lineární obal množiny A
$M_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}$	matice přechodu od báze \mathcal{A} k bázi \mathcal{A}'
$a \perp b$	vektor a je ortogonální na vektor b
$f _V = g$	zúžení funkce na podmnožinu
$A \times B$	kartézský součin množin A, B
$a \times b$	vektorový součin vektorů a, b
$[a, b, c]$	smíšený součin vektorů a, b, c

2 Princip numerických metod, teorie chyb, Banachova věta o pevném bodu.

2.1 Úvod

Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře se základy teorie chyb, rozdělením chyb a jejich šíření při provádění základních aritmetických operací.

Dále si připomeneme Banachovu větu o pevném bodě, která je teoretickým základem pro všechny iterační metody.

Seznámí se s podmínkami, které nám zaručují konvergenci jednotlivých iteračních metod k přesnému řešení. Budeme se věnovat odhadům přesnosti výpočtu.

2.2 Chyby při numerických výpočtech.

Omyly člověka, poruchy stroje či zařízení jsou také chybami, ale těmi se nebudeme zabývat. Slovo chyba budeme užívat ve smyslu odchylek, které jsou pravidelným a nerozlučným doprovodem každého numerického řešení.

Rozeznáváme chyby:

- vstupních dat
 - chyby měření
 - chyby způsobené zobrazením vstupních dat v počítači, (Příklad π , e , $\sqrt{2}$, ...).
- numerické metody
 - limitu nahradíme členem posloupnosti s dosti vysokým indexem.
Například: nahrazení funkce jejím rozvojem do Taylorovy řady.
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$
Volme $x = 1$, potom při použití prvních tří členů řady budeme mít chybu nejvýše $\frac{1}{7!}$.
 - úlohu nahradíme jednodušší.
Například: Určit povrch Země. Použijeme-li vztah $S = 4\pi r^2$ pro povrch koule o poloměru r , potom se dopouštíme chyby, protože jsme Zemi - geoid nahradili koulí.
- zaokrouhlovací
 - číslo s nekonečným dekadickým rozvojem nahradíme číslem s konečným počtem členů,
 - velká čísla se v počítači zobrazují v semilogaritmickém tvaru,
 - všechny nepřesnosti způsobené realizací algoritmu v počítači, včetně nepřesného provádění aritmetických operací.

Přitom je vhodné mít na paměti, že při řešení konkrétní úlohy se obvykle vyskytují všechny druhy chyb současně.

Při výpočtech jsme často nuceni nahradit číslo x jeho aproximací x_n .

$$x - x_n = \Delta x \quad - \text{absolutní chyba aproximace } x_n.$$

$$|x - x_n| \leq \varepsilon(x_n) \quad - \text{odhad absolutní chyby – s ní se pracuje}$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{x - x_n}{x}, \quad x \neq 0 \quad - \text{relativní chyba aproximace } x_n$$

$$\left| \frac{x - x_n}{x} \right| \leq \frac{\varepsilon(x_n)}{|x|} = \delta(x_n) \quad - \text{odhad relativní chyby.}$$

Absolutní hodnota relativní chyby se často uvádí v procentech.

2.3 Šíření chyb při aritmetických operacích

Věta 2.1 *Absolutní chyba součtu (rozdílů) je rovna součtu (rozdílů) absolutních chyb.*

$$\Delta(x \pm y) = \Delta x \pm \Delta y.$$

Důkaz: Máme $x \pm y = (x_n + \Delta x) \pm (y_n + \Delta y) = (x_n \pm y_n) + (\Delta x \pm \Delta y)$.

Odečtením získáme tvrzení věty. □

Věta 2.2

$$\Delta(x \cdot y) \approx x_n \Delta y + y_n \Delta x.$$

Důkaz:

$$x \cdot y = (x_n + \Delta x) \cdot (y_n + \Delta y) = x_n \cdot y_n + x_n \Delta y + y_n \Delta x + \Delta x \Delta y,$$

tvrzení věty dostaneme, jestliže zanedbáme člen $\Delta x \Delta y$, o kterém předpokládáme, že je dostatečně malý. □

Věta 2.3

$$\Delta \left(\frac{x}{y} \right) \approx \frac{\Delta x}{y_n} - \frac{x_n \Delta y}{(y_n)^2}.$$

Důkaz:

Obdobně
$$\frac{x}{y} = \frac{x_n + \Delta x}{y_n + \Delta y} = \frac{x_n + \Delta x}{y_n} \left(1 + \frac{\Delta y}{y_n} \right)^{-1} =$$

poslední závorku vpravo chápeme jako součet geometrické řady a dostáváme

$$= \frac{x_n + \Delta x}{y_n} \left(1 - \frac{\Delta y}{y_n} + \dots \right) \approx$$

a zanedbáním vyšších řádů dostaneme

$$\approx \frac{x_n}{y_n} + \frac{\Delta x}{y_n} - \frac{x_n \Delta y}{(y_n)^2}$$

Odečtením dostaneme tvrzení věty. □

Věta 2.4

$$\delta(xy) \leq \delta(x) + \delta(y),$$

$$\delta\left(\frac{x}{y}\right) \leq \delta(x) + \delta(y).$$

Relativní chyba součinu či podílu nepřevýší součet relativních chyb činitelů.

Důkaz: Analogicky. Samostatně.

Definice 2.1 *Nechť A (množina vstupních dat), B (množina výstupních dat) jsou metrické normované prostory. Řekneme, že úloha*

$$y = U(x), \quad x \in A, y \in B$$

je korektní na (A, B) jestliže

- 1) $\forall x \in A \quad \exists! y \in B$ *takové, že platí $y = U(x)$.*
- 2) *Toto řešení spojitě závisí na vstupních datech, t.j.*

$$x_n \rightarrow x, U(x_n) = y_n \Rightarrow U(x_n) \rightarrow U(x) = y.$$

Poznámka 2.1 *Jestliže A, B jsou Banachovy prostory¹, pak ke spojitě závislosti řešení stačí*

$$\|y_n - y\|_B \leq L\|x_n - x\|_A, \quad L = \text{const.}$$

Symbol $\|\cdot\|_B$ označuje normu v prostoru B .

Mnohdy dostačuje jen jiná formulace úlohy, aby se z nekorektní úlohy stala úloha korektní.

Příklad 2.1 *“Určit všechny kořeny polynomu.”*

Stačí doplnit podmínku jednoznačnosti: “Určit největší reálný kořen” a máme korektní úlohu.

Běžně se za korektní úlohy považují i úlohy, které lze pouhou změnou formulace převést na korektní.

Příklad 2.2 *Nekorektní úloha z “Mladého světa”*

“Kolik stojí kilo hrušek, když v poli stojí jedna?”

2.4 Podmíněnost úloh

Definice 2.2 *Řekneme, že korektní úloha je dobře podmíněna, jestliže malá změna ve vstupních datech vyvolá malou změnu řešení.*

$$C_p = \frac{\left\| \frac{\Delta y}{y} \right\|}{\left\| \frac{\Delta x}{x} \right\|} = \frac{\text{relativní chyba řešení}}{\text{relativní chyba vstupu}}$$

nazýváme číslem podmíněnosti úlohy $y = U(x)$.

¹Jsou definovány dále, viz poznámka (2.4)

Protože většinou umíme stanovit pouze odhady, tak

$$C_p \approx \frac{\delta(y)}{\delta(x)}.$$

Jestliže $C_p \approx 1$ je úloha velmi dobře podmíněná .

Pro C_p velké jde o špatně podmíněnou úlohu. Ale tento pojem je velmi relativní. V praxi se hovoří o špatně podmíněné úloze pro $C_p \geq 100$.

Někteří autoři místo o dobré či špatné podmíněnosti používají termín malá či velká citlivost vzhledem ke vstupním datům.

Příklad 2.3

$$p(x) = x^2 + x - 1150,$$

$$p(33) = -28, \quad p\left(\frac{100}{3}\right) \approx -5.6,$$

$$\Delta(x) = \frac{1}{3} \quad \Delta(y) = 22.4 \quad \Rightarrow C_p \approx 79.178.$$

Přitom jde o hodnoty blízké ke kořenu $x = 33.41533576$.

Příklad 2.4 Podmíněnost matic.

Nechť máme soustavu lineárních algebraických rovnic $Ax = b$, kde A je matice koeficientů, b je sloupec pravých stran a x je sloupec neznámých. Nechť x_n je aproximace řešení této soustavy. Označme $r = b - Ax_n$, kde r je reziduum. Je-li r malé, ještě to nic neříká o přesnosti výpočtu.

$$r = Ax - Ax_n = A(x - x_n),$$

$$A^{-1}r = x - x_n$$

a jsou-li prvky matice A^{-1} dostatečně velké, může být i rozdíl $x - x_n$ velký i pro velmi malé r .

Platí
$$C_p = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|.$$

Symbolem $\|\cdot\|$ označujeme normu matice, viz definici (2.12).

Příklad 2.5

$$A = \begin{pmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0.34 \\ 0.97 \end{pmatrix}$$

Jde o špatně podmíněnou soustavu s $C_p > 2249.5$ (pro Eukleidovskou normu dostáváme $C_p > 1622$).

Řešení špatně podmíněné soustavy musíme interpretovat velmi opatrně. Je to vlastnost dané matice a proto je vhodné se jim vyhýbat a hledat jiné způsoby řešení problémů.

Poznámka 2.2 *Teoretické odhady chyb bývají značně pesimistické. Horní hranice chyb bývá většinou jen zřídka dosaženo, protože v průběhu výpočtu dochází k určité vzájemné kompenzaci chyb. Příkladem může být Eratosthenovo² měření obvodu Země.*

2.5 Richardsonova extrapolace

Jde o univerzální postup, který nám umožňuje pomocí základní metody s nižší přesností vytvářet metody s přesností vyšší.

Nechť je základní metoda reprezentovaná funkcí $F(h)$ s parametrem h (může jím být například velikost kroku dané metody). Pomocí této metody umíme spočítat hodnotu $F(h)$ pro malé $h > 0$. Chceme co nejpřesněji aproximovat hodnotu $F(0)$, kterou ale neumíme určit přímo z funkce $F(h)$.

Nechť funkci $F(h)$ můžeme zapsat ve tvaru mocninné řady

$$F(h) = a_0 + a_1 h^2 + a_2 h^4 + a_3 h^6 + \dots \quad (2.1)$$

Pro malé h můžeme položit $h = 0$ a dostaneme aproximaci $F(0) \approx a_0$.

Hledejme lepší aproximaci. Podle (2.1) platí

$$F\left(\frac{h}{2}\right) = a_0 + a_1 \left(\frac{h}{2}\right)^2 + a_2 \left(\frac{h}{2}\right)^4 + a_3 \left(\frac{h}{2}\right)^6 + \dots \quad (2.2)$$

Odstraníme z rovnic (2.1) a (2.2) člen obsahující druhou mocninu. Ten totiž představuje největší chybu v rozdílu $a_0 - F(h)$ i $a_0 - F\left(\frac{h}{2}\right)$. Rovnici (2.2) vynásobíme čtyřmi a odečteme od ní (2.1), dostaneme

$$\begin{aligned} 4F\left(\frac{h}{2}\right) - F(h) &= 4a_0 + 4a_1 \left(\frac{h}{2}\right)^2 + 4a_2 \left(\frac{h}{2}\right)^4 + 4a_3 \left(\frac{h}{2}\right)^6 + \dots \\ &\quad - a_0 - a_1 h^2 - a_2 h^4 - a_3 h^6 - \dots \\ &= 3a_0 + 4a_2 \left(\frac{h}{2}\right)^4 - a_2 h^4 + 4a_3 \left(\frac{h}{2}\right)^6 - a_3 h^6 + \dots \\ &= 3a_0 + a_2 \left(\frac{1}{4} - 1\right) h^4 + a_3 \left(\frac{1}{8} - 1\right) h^6 + \dots \end{aligned}$$

² **Eratosthenés z Kýreny** (275 — 195 př.n.l.) rodák z Kýreny v nynější Lybii. Základní vzdělání získal v Athénách. Později působil v Alexandrii, pracoval společně s Eukleidem, Apoloniem z Pergy (260 — 170 př.n.l.), byl přítelem Archimedovým (287 — 212 př.n.l.). Eratosthenés byl všestranným pracovníkem — věnoval se gramatice, literární historii, matematice, astronomii, chronologii, etice, geografii a kartografii. Pokusil se změřit a vypočítat obvod Země. Jeho výsledek je neuvěřitelně přesně (chyba je asi 0,8%). Jeho kolegové a spolupracovníci mu za jeho pracovitost a dosažené výsledky přezdívali “Pentathlos”, t.j. atlet-pětibojař, který dosahuje výborných výsledků v různých oblastech, ale ani v jedné z nich se nestane nejlepším. Tato přezdívka je spojena s jemnou výčitkou. Stoupenci specializace mu s jistou povýšeností přezdívali “Beta” — (název čísla 2) t.j. druhořadý. Někdy je také tato přezdívka vysvětlována tím, že Eratosthenés byl jako padesátiletý povolán ke dvoru Ptolemaia III. (vládl 247 — 221 př.n.l.), kde se stal vychovatelem následníka trůnu. A s tímto titulem, asi jako finanční zabezpečení, byl jmenován i *druhým* hlavním knihovníkem alexandrijské knihovny. Eratosthenés ke konci života oslepl a dobrovolně odešel ze světa. Z celého jeho rozsáhlého díla se dochovaly pouze zlomky jako citace pozdějších autorů. Eratosthenovo síto k určení prvočísel v množině $\{1, 2, \dots, n\}$ se stalo východiskem pro celou jednu část teorie čísel

Rovnici vydělíme třemi a dostaneme novou funkci

$$F_2(h) = \frac{4F\left(\frac{h}{2}\right) - F(h)}{3} = a_0 + a_2^{(2)}h^4 + a_3^{(2)}h^6 + \dots \quad (2.3)$$

Přitom platí, že $|a_i^{(2)}| < |a_i|$, $i = 2, 3, \dots$. Proto je $F_2(h)$ lepší aproximací pro a_0 než $F(h)$.

Pro dosti malá h je také $F_2(h)$ lepší aproximací než $F\left(\frac{h}{2}\right)$, protože rozdíl $F_2(h) - a_0$ začíná až čtvrtou mocninou h .

Dostali jsme tak metodu F_2 , která je pro dostatečně malá h lepší než metoda F .

Analogickým způsobem můžeme odstranit z F_2 čtvrtou mocninu a získáme ještě lepší aproximaci $F(0)$.

Podle (2.3) platí

$$F_2\left(\frac{h}{2}\right) = a_0 + a_2^{(2)}h^4 + a_3^{(3)}h^6 + \dots \quad (2.4)$$

Rovnici (2.4) vynásobíme 16 a odečteme od ní rovnici (2.3), výsledek dělíme 15. Dostaneme

$$F_3(h) = \frac{16F_2\left(\frac{h}{2}\right) - F_2(h)}{15} = a_0 + a_3^{(3)}h^6 + \dots$$

Takto můžeme pokračovat dále a získávat stále lepší aproximace pro které platí

$$F_{i+1}(h) = \frac{4^i F_i\left(\frac{h}{2}\right) - F_i(h)}{4^i - 1} = a_0 + a_{i+1}^{(i+1)}h^{2i+2} + \dots$$

přičemž $F_1(h) = F(h)$. Výpočet si můžeme zapsat do tabulky (vyplňuje se po řádcích)

T_{00}				
T_{10}	T_{11}			
T_{20}	T_{21}	T_{22}		
T_{30}	T_{31}	T_{32}	T_{33}	
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

přičemž

$$T_{s0} = F\left(\frac{h}{2^s}\right), \quad s = 0, 1, \dots$$

$$T_{si} = \frac{4^i T_{s,i-1} - T_{s-1,i-1}}{4^i - 1}.$$

Výpočet ukončíme a hodnotu T_{ss} považujeme za dostatečně přesnou, jestliže $|T_{ss} - T_{s,s-1}| < \varepsilon$, kde ε je předem zadaná požadovaná přesnost.

Se speciálním případem Richardsonovy extrapolace jste se setkali v předmětu BMA3, když jste si při numerické integraci vyjádřili Simpsonovu metodu pomocí lichoběžníkového pravidla.

2.6 Metriky, kontrakce, Banachova věta

Definice 2.3 Necht' M je neprázdná množina. Zobrazení $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y, z \in M$ následující axiomy

$$1. \quad d(x, y) \geq 0 \wedge d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad (\text{nezápornost})$$

$$2. \quad d(x, y) = d(y, x), \quad (\text{symetrie})$$

$$3. \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad (\text{trojúhelníková nerovnost})$$

nazveme metrikou a dvojici (M, d) metrickým prostorem.

Příklad 2.6

$$\begin{aligned} a) \quad M &\equiv \mathbb{R}, & d(x, y) &= |x - y| \\ b) \quad M &\equiv \mathbb{R}^n, & d(x, y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} & (\text{Eukleidovská metrika}) \\ c) \quad M &\equiv \mathbb{R}^n, & d(x, y) &= \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i| & (\text{krychlová metrika}) \\ d) \quad M &\equiv \mathbb{R}^n, & d(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| & (\text{oktaetická metrika}) \end{aligned}$$

Definice 2.4 Bod $x \in M$ je limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v metrickém prostoru (M, d) , jestliže $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$, takové, že $\forall n > n_0 : d(x_n, x) < \varepsilon$. Posloupnost, která má limitu, se nazývá konvergentní. Označení $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Věta 2.5 Každá posloupnost v (M, d) může mít nejvýše jednu limitu.

Důkaz byl proveden v 1. semestru.

Definice 2.5 Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá cauchyovská³, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} : d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$.

Věta 2.6 Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.

Důkaz: Protože je $\{x_n\}$ konvergentní, existuje limita $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. To ale (podle předchozích definic) znamená, že $\forall \varepsilon/2 > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 : d(x_n, x) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Potom ale i $\forall p \in \mathbb{N}$ je i $d(x_{n+p}, x) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Takže máme (s využitím trojúhelníkové nerovnosti)

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x) + d(x_{n+p}, x) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \quad \square$$

³**L.A. Cauchy** (1789 – 1857) Francouzský matematik, jeden z tvůrců moderní matematiky. Je autorem více než 800 prací z teorie čísel, algebry, matematické analýzy, diferenciálních rovnic, mechaniky, aj. S využitím pojmu “limity” vybudoval systematicky základy analýzy. Po červencové revoluci 1830 pobýval nějakou dobu v Praze.

Poznámka 2.3 Z následujícího příkladu vyplývá, že větu nelze obrátit.

Příklad 2.7 $M = \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $x_n = \frac{1}{n}$, $\lim x_n = 0 \notin M$. Protože každá posloupnost v (M, d) může mít nevyšší jednu limitu, je tento příklad příkladem posloupnosti, která je cauchyovská, ale není v (M, d) konvergentní.

Definice 2.6. Metrický prostor (M, d) se nazývá úplný, jestliže v něm má každá cauchyovská posloupnost limitu.

Příklad 2.8 Každá uzavřená neprázdná podmnožina metrického prostoru.

Definice 2.7 Na množině M je definována binární operace $\circ : M \times M \rightarrow M$, jestliže $\forall x, y \in M$ platí $(x \circ y) \in M$.

Příklad 2.9 Na množině celých čísel tvoří sčítání binární operaci, protože součet libovolných dvou celých čísel je opět celé číslo.

Na množině celých čísel dělení netvoří binární operaci, protože dělení nulou není definováno a existuje nekonečně mnoho dvojic celých čísel, jejichž podíl není číslo celé, jako například čísla 2 a 3.

Definice 2.8 Nechť M je množina a (\circ) je binární operace na M . Uspořádaná dvojice (M, \circ) se nazývá grupou, jestliže platí

$$A) \quad (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \quad \forall x, y, z \in M,$$

$$B) \quad \exists e \in M : e \circ x = x \circ e = x, \quad \forall x \in M,$$

$$C) \quad \forall x \in M \exists x^{-1} \in M : x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e.$$

Definice 2.9 Pokud v grupě (M, \circ) platí navíc komutativní zákon

$$D) \quad x \circ y = y \circ x, \quad \forall x, y \in M,$$

pak mluvíme o komutativní grupě (abelovské grupě).

Definice 2.10 Nechť $(L, +)$ je komutativní grupa, a nechť je dále definována operace $\cdot : \mathbb{R} \times L \rightarrow L$, $(\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$, která splňuje následující podmínky $\forall x, y \in L, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$ asociativita pro násobení
2. $\alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y)$ distributivita I.
 $(\alpha + \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\beta \cdot x)$ distributivita II.
3. $1 \cdot x = x$

Potom uspořádaná trojice $(L, +, \cdot)$ tvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} . Prvky z L budeme nazývat vektory, prvky z \mathbb{R} skaláry. Značit budeme vektory malými písmeny latinky a skaláry malými písmeny řecké abecedy.

Definice 2.11 Vektorový prostor \mathcal{V} nazveme normovaným prostorem, jestliže existuje zobrazení $\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že $\forall x, y \in \mathcal{V}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ platí:

1. $\|x\| \geq 0 \wedge \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathcal{O}$, kde \mathcal{O} je nulový vektor.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Toto zobrazení nazýváme vektorovou normou.

Věta 2.7 Nechť \mathcal{V} je normovaný prostor. Definujeme metriku d následovně $\forall x, y \in \mathcal{V}, d(x, y) = \|x - y\|$. Potom (\mathcal{V}, d) je metrický prostor.

Důkaz: Samostatně, prověrkou axiomů.

Poznámka 2.4 Metrický prostor, který je úplný v takto definované metrice se nazývá Banachův⁴.

Příklad 2.10

a) $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$, potom lze $d(x, y)$ definovat takto

$$d(x, y) = \max_i |x_i - y_i|.$$

b) $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$, potom je metrikou funkce

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

c) $\mathcal{V} = C[a, b]$ množina všech spojitých funkcí na $[a, b]$.⁵ Skalární součin je $x \bullet y = \int_a^b x(t)y(t)dt$, potom

$$\|x\| = \sqrt{x \bullet x}, \quad d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt}.$$

Definice 2.12 Nechť M_n je množina všech čtvercových matic řádu n . Nechť $\forall A, B \in M_n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ zobrazení $\|\cdot\| : M_n \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje axiomy

1. $\|A\| \geq 0 \wedge \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \mathcal{O}$, kde \mathcal{O} je nulová matice.
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$.

⁴**Stefan Banach** (1892 — 1945) vynikající polský matematik. Jeden ze zakladatelů moderní funkcionální analýzy.

⁵ $[a, b]$ označuje uzavřený interval a (a, b) otevřený interval.

$$3. \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

$$4. \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Potom toto zobrazení nazveme maticovou normou.

Příklad 2.11 Mějme matici A s prvky a_{ij} , $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, potom její eukleidovská norma má tvar

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definice 2.13 Řekneme, že maticová norma $\|A\|_1$ je souhlasná s vektorovou normou $\|x\|_2$ v \mathbb{R}^n , jestliže $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_1 \cdot \|x\|_2$.

Příklad 2.12 Souhlasné normy

$$a) \quad \|x\|_2 = \max_i |x_i|, \quad \|A\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in M_n,$$

$$b) \quad \|x\|_2 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

$$c) \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|A\|_1 \leq \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

V posledním případě jde o odhad. Přesný tvar je $\|A\| = \sqrt{\varrho(A^T A)} = \sqrt{\varrho(AA^T)}$, kde $\varrho(B)$ je spektrální poloměr⁶ matice B .

Definice 2.14 Nechť (M, d) je metrický prostor. Zobrazení $\varphi : M \rightarrow M$ nazveme kontrakcí, jestliže existuje konstanta k , $0 \leq k < 1$ taková, že platí

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq k \cdot d(x, y).$$

Číslo k se nazývá koeficient kontrakce.

Definice 2.15 Nechť φ je zobrazení z M do M . Bod $\tilde{x} \in M$ nazveme pevným bodem zobrazení φ , jestliže je zobrazen sám na sebe, tj. platí

$$\tilde{x} = \varphi(\tilde{x}).$$

⁶Spektrální poloměr matice B je $\varrho(B) = \max_i \{|\lambda_i|\}$, kde λ_i jsou vlastní čísla matice B .

Věta 2.8 Banachova věta o pevném bodu

Nechť (M, d) je úplný metrický prostor, φ je kontrakce na M s koeficientem k . Potom:

1) Existuje právě jeden bod $\tilde{x} \in M$ takový, že je splněna rovnice

$$\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}.$$

2) Zvolíme-li $x_1 \in M$ libovolně a sestrojíme-li posloupnost $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ předpisem

$$x_{i+1} = \varphi(x_i), \text{ pak } \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \tilde{x}.$$

3) Platí odhady pro $n = 1, 2, \dots$

$$d(x_n, \tilde{x}) \leq \frac{k^{n-1}}{1-k} d(x_1, x_2),$$

$$d(x_n, \tilde{x}) \leq \frac{k}{1-k} d(x_{n-1}, x_n).$$

Důkaz: Posloupnost $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, kde $x_{i+1} = \varphi(x_i)$ se nazývá iterační proces, x_1 je počáteční aproximace, x_n je n -tá aproximace.

a) Nejprve ukážeme, že pevný bod, pokud existuje, je určen jednoznačně. Předpokládejme, že existují dva různé body $a \in M, b \in M$ pro něž platí $a = \varphi(a), b = \varphi(b), d(a, b) \neq 0$. Potom

$$d(a, b) = d(\varphi(a), \varphi(b)) \leq k d(a, b), \quad (2.5)$$

po zkrácení nenulovým $d(a, b)$ dostaneme

$$1 \leq k.$$

Protože φ je kontrakce, platí pro k nerovnost $0 \leq k < 1$. Dostali jsme spor. Odtud plyne, že nerovnost (2.5) je splněna pouze pro případ $d(a, b) = 0$, což je spor s předpokladem, že body a, b jsou různé a tedy pevně bod, pokud existuje, je určen jednoznačně.

b) Dále máme

$$\begin{aligned} d(x_j, x_{j+1}) &= d(\varphi(x_{j-1}), \varphi(x_j)) \leq k d(x_{j-1}, x_j) = \\ &= k d(\varphi(x_{j-2}), \varphi(x_{j-1})) \leq k^2 d(x_{j-2}, x_{j-1}) = \dots \Rightarrow \\ d(x_j, x_{j+1}) &\leq k^{j-1} d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

a protože $0 \leq k < 1$ dostáváme, že $\lim_{j \rightarrow \infty} d(x_j, x_{j+1}) = 0$.

Pro $p \in \mathbb{N}$ pak máme $\forall n \in \mathbb{N}$

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \quad (2.6)$$

$$\leq (k^{n-1} + k^n + \dots + k^{n+p-2}) d(x_1, x_2) \leq$$

$$\leq (k^{n-1} + k^n + \dots) d(x_1, x_2) = \frac{k^{n-1}}{1-k} d(x_1, x_2). \quad (2.7)$$

Protože $0 \leq k < 1$, tak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0 \quad \text{pro} \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

a to znamená, že naše posloupnost $\{x_j\}$ je cauchyovská a tedy existuje \tilde{x} tak, že $\tilde{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, protože prostor (M, d) je úplný.

c) První odhad plyne přímo z (2.7) pro $p = \infty$, a druhé odhad dostaneme z (2.7), když v (2.6) položíme $p = \infty$. Potom

$$\begin{aligned} d(x_n, \tilde{x}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) + \cdots \leq \\ &\leq d(x_{n-1}, x_n)(k + k^2 + k^3 + \cdots) \leq \frac{k}{1-k} d(x_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

□

2.7 Shrnutí

Seznámili jsme se se základy teorie chyb a jejich šíření při provádění základních aritmetických operací. Vyslovili a dokázali jsme si Banachovu větu o pevném bodě a jako její důsledek jsme si odvodili vzorce pro odhad přesnosti numerického výpočtu.

3 Řešení soustav lineárních rovnic.

3.1 Úvod

Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře s aplikacemi Banachovy věty při hledání řešení soustav lineárních algebraických rovnic. Nejdříve si ale připomeneme finitní metody řešení těchto soustav, a to nejen Gaussovu a Jordanovu eliminační metodu, ale i řešení pomocí inverzní matice a pomocí LU rozkladu. Potom se seznámíme s aplikací Banachovy věty pro soustavy lineárních algebraických rovnic. Zde si zopakujeme Jacobiho a Gaussovu-Seidelovu iterační metodu a ukážeme si některé další metody, které se používají především pro řešení soustav vysokých řádů.

Seznámíme se s podmínkami, které nám zaručují konvergenci jednotlivých iteračních metod k přesnému řešení soustavy rovnic. Budeme se věnovat odhadům přesnosti výpočtu.

3.2 Soustavy lineárních rovnic — Základní pojmy

Definice 3.1 Maticová rovnice $Ax = b$, kde $A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $b \in \mathbb{R}_{m,1}$, $x \in \mathbb{R}_{n,1}$ se nazývá soustava lineárních algebraických rovnic.

V rozepsaném tvaru máme

$$\begin{array}{cccccccl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad (3.1)$$

A je matice koeficientů, b je sloupec pravých stran,

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \text{ se nazývá matice rozšířená.}$$

Každý sloupec (sloupcová matice) α pro který platí $A\alpha = b$ se nazývá řešením soustavy (3.1).

Definice 3.2

Soustava (3.1) je řešitelná, má-li aspoň jedno řešení.

Soustava (3.1) je jednoznačně řešitelná, má-li právě jedno řešení.

Soustava (3.1) je víceznačně řešitelná, má-li více než jedno řešení.

Definice 3.3 Soustava lineárních algebraických rovnic se nazývá homogenní, jestliže je tvaru

$$Ax = \mathcal{O}, \quad (3.2)$$

kde \mathcal{O} je nulový sloupec. V opačném případě mluvíme o nehomogenní soustavě.

Definice 3.4 Je-li $Ax = b$ nehomogenní soustava, tak přidruženou homogenní soustavou rozumíme soustavu $Ax = \mathcal{O}$ (t.j. homogenní soustavu se stejnou maticí koeficientů jakou má nehomogenní soustava).

Příklad 3.1 Mějme danu nehomogenní soustavu

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Přidružená homogenní soustava má tvar

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

3.3 Řešení soustav

Věta 3.1 Nechť soustava $Ax = b$ má regulární matici koeficientů. Potom má tato soustava právě jedno řešení.

Můžeme je určit použitím “Cramerových vzorců”⁷ vzorců :

k -tý člen řešení je zlomek, v jehož jmenovateli je determinant matice koeficientů A a v čitateli determinant matice, kterou získáme z matice A nahrazením k -tého sloupce sloupcem pravých stran soustavy (3.1) a ostatní sloupce ponecháme.

Důkaz: Máme $Ax = b$, $|A| \neq 0$, takže existuje A^{-1} . Potom

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A)b = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} b.$$

Ted' si jen stačí uvědomit, že v prvním řádku matice $\text{adj } A$ jsou algebraické doplňky příslušné k prvnímu sloupci matice A . Potom součin prvního řádku matice $\text{adj } A$ se sloupcem b můžeme podle Laplaceovy věty o rozvoji determinantu chápat jako rozvoj determinantu matice podle prvního sloupce, kde matice má jako první sloupec sloupec b a zbývající sloupce jsou z matice A . Obdobně pro další prvky. \square

Příklad 3.2 Najít řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

⁷ **Gabriel Cramer** (31.7.1704 – 4.1.1752) švýcarský matematik, přírodovědec a technik. V matematice se věnoval hlavně geometrii a teorii pravděpodobnosti. V r. 1750 vydal knihu o algebraických křivkách, kde je v dodatku uveden způsob vyloučení $(n - 1)$ neznámých ze soustavy n rovnic o n neznámých. Přes nevhodnou symboliku tím položil základy teorie determinantů.

Řešení: Určíme si determinant matice koeficientů

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 14$$

Determinant matice A je nenulový, soustava je tedy jednoznačně řešitelná. Spočítáme si determinanty matic D_i , kde matice D_i vznikne z matice A nahrazením i -tého sloupce sloupcem pravých stran naší soustavy.

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 14, \quad |D_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -28, \quad |D_3| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Potom $x_i = \frac{|D_i|}{|A|}$, takže máme

$$x_1 = \frac{14}{14} = 1, \quad x_2 = \frac{-28}{14} = -2, \quad x_3 = \frac{0}{14} = 0.$$

Vyhodnocení: Cramerovy vzorce sice dávají přesné řešení, ale je zapotřebí pro ně vypočítat $(n + 1)$ determinantů n -tého řádu. Pro rozsáhlejší soustavy je jejich použití problematické, protože ani s pomocí výpočetní techniky nejsme schopni určit přesné hodnoty determinantů. Cramerovy vzorce nemají obecnou platnost, předpokládají regularitu matice koeficientů.

Věta 3.2 Frobeniova⁸, Kroneckerova⁹ — Capelliho¹⁰, existenční.

Soustava (3.1) je řešitelná právě tehdy, když hodnota matice koeficientů se rovná hodnotě matice rozšířené.

Poznámka 3.1 POZOR

$h(A) < h(A|b)$ — soustava (3.1) nemá řešení,

$h(A) = h(A|b)$ — soustava (3.1) je řešitelná,

$h(A) > h(A|b)$ — nemůže nikdy nastat. Přidáním dalšího sloupce můžeme hodnotu matice zvýšit, ale nikdy ne snížit.

⁸**Georg Ferdinand Frobenius** (26.10.1849 – 3.8.1917) německý matematik. Zabýval se hlavně algebrou. Vyslovil existenční větu pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic. Patří mu vynikající práce z oblasti kvadratických forem, maticového počtu a teorie konečných grup. Zavedl řadu pojmů moderní algebry.

⁹**Leopold Kronecker** (7.12.1823 — 29.12.1891) německý matematik. Zabýval se teorií čísel, teorií kvadratických forem, teorií grup, teorií eliptických funkcí. Byl odpůrcem Cantorovy teorie množin. Odvodil metodu, kterou lze vždy nalézt všechny racionální kořeny polynomu s racionálními koeficienty (i když mnohdy obtížně a zdlouhavě). Dokázal existenční větu pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic.

¹⁰**Alfredo Capelli** (5.6.1859 – 28.1.1910) italský matematik, působil v Neapoli. Významně přispěl k rozvoji teorie algebraických rovnic. Dále se zabýval teorií funkcí komplexní proměnné a teorií diferenciálních rovnic.

Důkaz: Nechť je soustava (3.1) řešitelná. Potom existuje sloupec

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$$

takový, že platí $A\alpha = b$. Vezmeme si matici rozšířenou soustavy (3.1) a od posledního sloupce odečteme α_1 násobek prvního sloupce, α_2 násobek druhého sloupce, atd. až α_n násobek n -tého sloupce. Dostaneme

$$(A|b) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 - \alpha_1 a_{11} - \alpha_2 a_{12} - \dots - \alpha_n a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 - \alpha_1 a_{21} - \alpha_2 a_{22} - \dots - \alpha_n a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m - \alpha_1 a_{m1} - \alpha_2 a_{m2} - \dots - \alpha_n a_{mn} \end{array} \right).$$

Protože α je řešením soustavy (3.1), tak platí pro všechna $i = 1, 2, \dots, m$

$$b_i - \alpha_1 a_{i1} - \alpha_2 a_{i2} - \dots - \alpha_n a_{in} = 0.$$

V posledním sloupci budou stát samé nuly a my máme

$$(A|b) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{array} \right) \sim A$$

Nulový sloupec jsme vynechali. Použili jsme pouze elementární úpravy, které nemění hodnotu matice. Proto platí: Jestliže je soustava (3.1) řešitelná, potom $h(A) = h(A|b)$.

Z druhé strany: Nechť je $h(A) = h(A|b) = k$. Potom bazový minor řádu k musí ležet v matici A . Nechť je vlevo nahoře. Potom každý sloupec matice $(A|b)$ je lineární kombinací bazových sloupců.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = \\ &= \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{mk} \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} a_{1,k+1} \\ a_{2,k+1} \\ \dots \\ a_{m,k+1} \end{pmatrix} + \dots + 0 \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

To ovšem znamená, že sloupec $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)^T$ je řešením soustavy (3.1). Neboli platí: Jestliže je $h(A) = h(A|b) = k$, potom je soustava (3.1) řešitelná. \square

Důsledek 3.1 *Je-li soustava (3.1) řešitelná, t.j. $h(A) = h(A|b) = h$, pak pro $h = n$ má soustava (3.1) právě jedno řešení a pro $h < n$ má soustava (3.1) nekonečně mnoho řešení, která závisí na $(n - h)$ parametrech.*

Důsledek 3.2 Je-li soustava (3.1) řešitelná, t.j. $h(A) = h(A|b) = h$, potom nikdy nemůže nastat případ, že $h > n$.

Příklad 3.3 Řešte soustavu

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\2x + y + 2z &= 1 \\x + y + 3z &= 2\end{aligned}$$

Protože $|A| = -2 \neq 0$, jde o kramerovskou soustavu, která má řešení

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = 1, \quad z = \frac{1}{2}.$$

Příklad 3.4 Řešte soustavu

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x + y + 2z &= 1 \\x + y + 3z &= 2\end{aligned}$$

$|A| = 0$, proto nemůžeme použít Cramerových vzorců.

$$h(A) = 2, \quad h(A|b) = 3 \Rightarrow h(A) \neq h(A|b),$$

podle věty 3.2 nemá soustava řešení.

Příklad 3.5 Řešte soustavu

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x + y + 2z &= 1 \\2x + 2z + 4z &= 2\end{aligned}$$

$|A| = 0$, proto nemůžeme použít Cramerových vzorců.

$$h(A) = 2, \quad h(A|b) = 2 \Rightarrow h(A) = h(A|b),$$

Řešení závisí na jednom parametru.

$$\begin{aligned}x &= 1 - t \\y &= t \\z &= 0.\end{aligned}$$

Věta 3.3 Homogenní soustava (3.2) je vždy řešitelná.

Důkaz: Nulový sloupec je vždy řešením. □

Definice 3.5 Nulové řešení soustavy (3.2) nazveme triviálním.

Věta 3.4 Homogenní soustava má netriviální řešení právě tehdy, když hodnota matice koeficientů je menší jak počet neznámých.

Věta 3.5 Nechť u, v jsou řešením soustavy (3.2). Potom i jejich libovolná lineární kombinace $\alpha u + \beta v$ je řešením soustavy (3.2).

Důsledek 3.3 Každá lineární kombinace řešení soustavy (3.2) je opět řešením soustavy (3.2).

Věta 3.5 mluví jen o dvou řešeních, ale jejich počet není omezen. Důkaz se provádí matematickou indukcí.

Definice 3.6 Maximální počet lineárně nezávislých řešení soustavy (3.2) nazveme fundamentální soustavou řešení soustavy (3.2).

Věta 3.6 Každá víceznačně řešitelná soustava (3.2) má vždy fundamentální soustavu řešení.

Příklad 3.6 Řešte homogenní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 7x_5 &= 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 11x_5 &= 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - 13x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení: Koeficienty soustavy si zapíšeme do matice a pomocí elementárních řádkových úprav si matici převedeme na stupňovitý tvar.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -27 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Máme dvě rovnice o pěti neznámých. Volíme si proto tři parametry. Zvolme $x_2 = 3s$, $x_4 = 3t$, $x_5 = 3u$, kde $s, t, u \in \mathbb{R}$. Potom

$$x = \begin{pmatrix} -2s - 2t + 8u \\ 3s \\ -9u \\ 3t \\ 3u \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Trojice vektorů vpravo pak představuje fundamentální soustavu řešení.

Je-li $h < n$, potom proměnné y_{h+1}, \dots, y_n prohlásíme za parametry a soustavu upravíme na tvar

$$\begin{aligned}
c_{1,1}y_1 + c_{1,2}y_2 + \cdots + c_{1,h}y_h &= d_1 - c_{1,h+1}y_{h+1} - \cdots - c_{1,n}y_n \\
c_{2,2}y_2 + \cdots + c_{2,h}y_h &= d_2 - c_{2,h+1}y_{h+1} - \cdots - c_{2,n}y_n \\
&\dots\dots\dots \dots\dots\dots \\
c_{h,h}y_h &= d_h - c_{h,h+1}y_{h+1} - \cdots - c_{h,n}y_n
\end{aligned}$$

Tato soustava je ekvivalentní s původní soustavou $Ax = b$ a každé volbě parametrů y_{h+1}, \dots, y_n odpovídá právě jedno řešení. Parametrů je celkem $(n - h)$. Jestliže za prvky y_{h+1}, \dots, y_n bereme sloupce regulární matice řádu $(n - h)$, potom bereme za parametry lineárně nezávislé prvky a obdržíme obecné řešení soustavy (3.1).

Tento postup se nazývá Gaussova¹¹ eliminační metoda.

Jestliže budeme dále pokračovat v řádkových úpravách, můžeme soustavu (3.3) upravit na tvar

$$\begin{aligned}
y_1 + 0y_2 + \cdots + 0y_h &= g_1 - f_{1,h+1}y_{h+1} - \cdots - f_{1,n}y_n \\
y_2 + \cdots + 0y_h &= g_2 - f_{2,h+1}y_{h+1} - \cdots - f_{2,n}y_n \\
&\dots\dots\dots \dots\dots\dots \\
y_h &= g_h - f_{h,h+1}y_{h+1} - \cdots - f_{h,n}y_n
\end{aligned}$$

a nebo po vybechání nulových prvků

$$\begin{aligned}
y_1 &= g_1 - f_{1,h+1}y_{h+1} - \cdots - f_{1,n}y_n \\
y_2 &= g_2 - f_{2,h+1}y_{h+1} - \cdots - f_{2,n}y_n \\
&\dots \quad \dots \\
y_h &= g_h - f_{h,h+1}y_{h+1} - \cdots - f_{h,n}y_n
\end{aligned}$$

zde máme na hlavní diagonále vlevo jednotky a zbývající prvky nalevo jsou nulové. Tento postup se nazývá Jordanova¹² eliminace.

3.5 Úplný a částečný výběr hlavního prvku

Při Gaussově eliminační metodě si postupně upravujeme soustavu $Ax = b$ na ekvivalentní soustavu $A^{(k)}x = b^{(k)}$, kde $A^{(k)}, b^{(k)}$ jsou matice koeficientů a sloupec pravých stran po k -tém kroku. Postup je následující:

¹¹ **K.F.Gauss** (1777 — 1855) německý matematik, fyzik, geofyzik, geodet, astronom. Jeden z nejvýznamnějších matematiků všech dob. Všestranný vědec, který pracoval ve všech oblastech matematiky. Všude dosáhl prvořadých výsledků a předznamenal mnohdy další rozvoj. Byl též velmi zručný numerický matematik, který objevil řadu numerických metod. Jako první dospěl k principům neeuclidovské geometrie, ale výsledky v této oblasti nechtěl pro jejich převratnost publikovat, proto patří priorita objevu N.I.Lobačevskému. V algebře jako první dokázal *Základní větu algebry*. Rozvinul teorii kvadratických forem, zavedl přesně komplexní čísla, rozvinul metody řešení soustav algebraických rovnic.

¹² **Camille Marie Edmond Jordan** (5.1.1838 – 21.1.1922) francouzský matematik. Do r. 1873 pracoval jako inženýr, pak vyučoval na polytechnice. Zabýval se algebrou, teorií čísel, teorií funkcí, geometrií, topologií, diferenciálními rovnicemi, teorií míry, a j.

První krok:

Nechť je prvek $a_{11} \neq 0$ (v opačném případě provedeme přehození řádků), prvky prvního řádku vynásobíme multiplikátorem $(-a_{k1}/a_{11})$ a přičteme k prvkům k -tého řádku, pro $k = 2, \dots, n$. Tím získáme v prvním sloupci na prvním místě nenulový prvek a zbývající prvky jsou nulové.

Druhý krok:

Nechť je prvek $a_{22} \neq 0$, pokud tomu tak není provedeme přehození řádků (vyjma prvního) a nebo sloupců (opět vyjma prvního). Prvky druhého řádku vynásobíme multiplikátorem $(-a_{k2}/a_{22})$ a přičteme k prvkům k -tého řádku, pro $k = 3, \dots, n$. Tím získáme v druhém sloupci na druhém místě nenulový prvek a zbývající prvky jsou nulové.

Pokračujeme dále stejným způsobem. Obecně

$$A = \left(a_{ij}^{(0)} \right), b = \left(a_{1,n+1}^{(0)}, a_{2,n+1}^{(0)}, \dots, a_{n,n+1}^{(0)} \right)^T$$

a pro $k = 1, 2, \dots, n-1$

$$m_{ik} = -\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad \text{pro } i = k+1, k+2, \dots, n,$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} + m_{ik} a_{kj}^{(k-1)}, \quad \text{pro } j = k+1, k+2, \dots, n, n+1.$$

Pokud bude u multiplikátoru m_{ik} dělitel $a_{kk}^{(k-1)}$ příliš malý, budou nám narůstat zaokrouhlovací chyby, které velmi brzy znehodnotí celý výsledek. Proto se používá *eliminace s výběrem hlavního prvku*. Prvek $a_{kk}^{(k-1)}$ nazveme hlavním prvkem k -tého kroku eliminace. Abychom minimalizovali vliv zaokrouhlovacích chyb, je vhodné vybírat jako hlavní prvky takové prvky matice A , které mají největší absolutní hodnotu. Potom budeme vždy mít multiplikátor nejvýše roven jedné (v absolutní hodnotě) a každá dílčí zaokrouhlovací chyba se také násobí stejným číslem, t.j. nezvětšuje se.

Pokud vybíráme hlavní prvek ze všech prvků, které v daném kroku přicházejí v úvahu, pak mluvíme o *úplném výběru hlavního prvku*. Tato metoda je sice přesnější, ale časově náročná. Proto se často používá *částečný výběr hlavního prvku*, kdy hlavní prvek vybíráme pouze z některých prvků, které v daném kroku přicházejí v úvahu. Nejčastěji se vybírají pouze z daného sloupce, t.j. z prvků $a_{k,k}^{(k-1)}, a_{k+1,k}^{(k-1)}, a_{k+2,k}^{(k-1)}, \dots, a_{n,k}^{(k-1)}$.

3.6 Metoda LU-rozkladu

Definice 3.8 Matice $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ nazveme *horní trojúhelníkovou maticí*, když $a_{ij} = 0 \forall i > j$.

Matice A nazveme *dolní trojúhelníkovou maticí*, když $a_{ij} = 0 \forall i < j$.

Mějme soustavu $Ax = b$ s regulární maticí A . Potom existují matice L, U takové, že L je dolní trojúhelníková matice a U je horní trojúhelníková matice a matice $A = LU$. Jestliže si zvolíme prvky na hlavní diagonále jedné z matic L, U , potom je rozklad matice A určen jednoznačně.

Metoda řešení soustavy lineárních rovnic LU-rozkladem spočívá v tom, že si nejdříve určíme matice L a U a potom řešíme dvě soustavy

$$Ly = b,$$

$$Ux = y.$$

V matici L zvolme za diagonální prvky jedničky, t.j. $l_{ii} = 1, i = 1, \dots, n$. Potom z rovnosti $A = LU$ plyne

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \quad i = 1, \dots, j,$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{p=1}^{j-1} l_{ip} u_{pj} \right), \quad i = j+1, j+2, \dots, n.$$

Postupně počítáme první řádek matice U , potom první sloupec matice L , druhý řádek matice U , druhý sloupec matice L , atd.

V případě, že matice koeficientů soustavy je speciálního tvaru, dostáváme varianty metody LU-rozkladu.

Příklad 3.7 Mějme soustavu $Ax = b$, kde matice A je třídiagonální

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

Řešení: LU rozkladem matice A získáme dvoudiagonální matice L a U , kde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_n & 1 \end{pmatrix}$$

a

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

kde koeficienty $\alpha_i, \beta_j, i, j = 1, 2, \dots, n$, určíme podle vztahů

$$\alpha_1 = a_1,$$

$$\beta_i = \frac{b_i}{\alpha_{i-1}}, \quad \alpha_i = a_i \beta_i c_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Tento postup se označuje jako Thomasův algoritmus.

Řešení naší soustavy je potom určeno dvojicí dvoudiagonálních soustav

$$\begin{aligned} Ly &= b, \\ Ux &= y. \end{aligned}$$

Postupným dosazováním dostaneme

$$\begin{aligned} Ly = b &\Rightarrow y_1 = b_1, \\ y_i &= b_i - \beta_i y_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

a nakonec

$$\begin{aligned} Ux = y &\Rightarrow x_n = \frac{y_n}{\alpha_n} \\ x_i &= \frac{y_i - c_i x_{i+1}}{\alpha_i}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1. \end{aligned}$$

Definice 3.9 Matice A se nazývá pásová, jestliže existují taková přirozená čísla p, q , že

$$a_{ij} = 0 \quad \text{když} \quad j > i + p \quad \text{nebo} \quad i > j + q.$$

Číslo $p + q + 1$ se nazývá šířkou pásu.

V případě, že matice A je pásová, potom si můžeme výrazně zkrátit výpočet, pokud budeme počít pouze s prvky uvnitř pásu.

Definice 3.10 Matice $A = (a_{ij})$ se nazývá symetrická, jestliže platí

$$A^T = A, \quad \text{t.j.} \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Definice 3.11 Symetrická matice $A = (a_{ij})$ je pozitivně definitní, jestliže pro libovolný nenulový vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ platí

$$x^T A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j > 0.$$

Je-li matice A symetrická a pozitivně definitní, potom existuje právě jedna horní trojúhelníková matice U s kladnými diagonálními prvky, že platí

$$A = U^T U.$$

Postup odvození je analogický jako v předešlém případě. Dostaneme

$$\begin{aligned} u_{jj} &= \sqrt{\left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} u_{jk}^2\right)}, \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ u_{ij} &= \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{p=1}^{j-1} u_{ip} u_{pj}\right) \quad \text{pro} \quad i = j+1, j+2, \dots, n. \end{aligned}$$

Příklad 3.8 Určete LU -rozklad matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5/3 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/4 & 1 & 0 \\ 1/3 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 8/3 & 4/3 & -22/3 \\ 0 & 0 & 2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -25/2 \end{pmatrix}$$

Příklad 3.9 Matici A vyjádřete ve tvaru $A = U^T U$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2.5 & 1 & 1.5 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1.5 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1/3 & 5/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & -1 & 2 \\ 0 & 3/2 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

3.7 Řešení pomocí inverzní matice

Jestliže je matice koeficientů soustavy $Ax = b$ regulární, potom existuje inverzní matice A^{-1} a můžeme použít postup

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A^{-1}Ax &= A^{-1}b, \\ x &= A^{-1}b. \end{aligned}$$

Podmínkou je, že jsme schopni efektivně určit inverzní matici A^{-1} . Zvláště pro matice vyšších řádů jde o obtížnou úlohu.

3.8 Iterační metody řešení

Předpokládejme, že soustava (3.1) je řešitelná. Upravíme si ji na tvar

$$x = Cx + d. \quad (3.3)$$

Nechť $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)^T$ je libovolný vektor z \mathbb{R}^n . Definujme si posloupnost

$$x^{k+1} = Cx^k + d, \quad k = 1, 2, \dots,$$

neboli

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j^k + d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots$$

Tyto vztahy nám definují prostý iterační proces. V případě, že řešení závisí na parametrech, tj. v případě víceznačně řešitelné soustavy, je třeba zvolit konkrétní hodnoty parametrů a ně potom hledat řešení. Je důležité určit podmínky konvergence, které nám zaručí existenci limitu iteračního procesu a tím i existenci řešení.

Věta 3.8 Označme \mathcal{V}_n vektorový prostor dimenze n . Nechť je v \mathcal{V}_n dána vektorová norma a s ní souhlasná maticová norma. Nechť matice C soustavy (3.3) splňuje podmínku $\|C\| < 1$. Potom

1. Soustava (3.3) (a tedy i soustava (3.1)) má právě jedno řešení \tilde{x} .
2. Iterační proces $x^{k+1} = Cx^k + d$, $k = 1, 2, \dots$ konverguje k \tilde{x} a navíc x^1 může být libovolný prvek z \mathcal{V}_n .
3. Platí odhady (pro $k = 1, 2, \dots$)

$$\|x^k - \tilde{x}\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \|x^k - x^{k-1}\|,$$

$$\|x^k - \tilde{x}\| \leq \frac{\|C\|^{k-1}}{1 - \|C\|} \|x^2 - x^1\|.$$

Důkaz: Matice C je čtvercová. Norma určuje ve \mathcal{V}_n metriku $d(x, y) = \|x - y\|$. Vzhledem k této metrice je prostor \mathcal{V}_n úplný. (Plyne bezprostředně z definice.) Jestliže si definujeme zobrazení $\varphi : \mathcal{V}_n \rightarrow \mathcal{V}_n$, $\varphi(x) = Cx + d$, pak máme $\forall u, v \in \mathcal{V}_n$

$$\begin{aligned} d(\varphi(u), \varphi(v)) &= d(Cu + d, Cv + d) = \|Cu + d - Cv - d\| = \\ &= \|C(u - v)\| \leq \|C\| \cdot \|u - v\| = \|C\| \cdot d(u, v). \end{aligned}$$

Přitom jsme užili souhlasnosti obou norem a protože podle předpokladů věty je $\|C\| < 1$, máme, že zobrazení φ je kontrakce s koeficientem $\|C\|$. Použitím Banachovy věty o pevném bodě dostáváme zbytek důkazu. \square

Označme

$$\alpha_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |c_{ij}|, \quad \text{řádková norma}$$

$$\alpha_2 = \max_j \sum_{i=1}^n |c_{ij}|, \quad \text{sloupcová norma}$$

$$\alpha_3 = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad \text{Eukleidovská norma}$$

Věta 3.9 Je-li některá z hodnot $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ menší než 1, pak

1. Soustava $x = Cx + d$ (a tedy i soustava $Ax = b$) má právě jedno řešení \tilde{x} .
2. Posloupnost iterací $x^{k+1} = Cx^k + d$ konverguje k tomuto řešení pro libovolnou počáteční aproximaci.

Důkaz: Zřejmě, jde o aplikaci předchozí věty pro konkrétní tvar maticové normy. \square

Poznámka 3.2 Při konkrétním výpočtu je třeba pracovat se souhlasnými normami.

Příklad 3.10 $C = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}$, pak $\alpha_1 = 0.9$
 $\alpha_2 = 1.1$
 $\alpha_3 = \sqrt{1.1} = 1.0488 \dots$

Protože $\alpha_1 < 1$ bude iterační proces s touto maticí konvergovat.

V praxi se nejčastěji používají následující metody s přesným algoritmem pro vytvoření iteračního procesu. Vždy přitom předpokládáme, že soustava (3.1) je jednoznačně řešitelná, neboli matice A je regulární.

3.9 Jacobiho iterační metoda

U Jacobiho¹³ iterační metody se přechod od soustavy (3.1) k soustavě (3.3) se provádí následovně: předpokládáme, že $a_{ii} \neq 0$, potom prvky na hlavní diagonále soustavy $Ax = b$ ponecháme na místě a zbývající členy převedeme na pravou stranu, poté vydělíme koeficienty u neznámých na hlavní diagonále. Dostaneme

$$c_{ii} = 0, \quad c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad \text{pro } i \neq j, \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}},$$

iterační vztahy mají tvar pro $k = 1, 2, \dots$

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j^k + d_i.$$

Jestliže $\exists i : a_{ii} = 0$ pak provedeme přehození pořadí rovnic, tak aby byla naše podmínka splněna. Vzhledem k regularitě matice A to lze vždy provést. (V opačném případě by jsme totiž měli $a_{ij} = 0 \forall j \in \{1, \dots, n\}$, neboli máme matici s nulovým sloupcem a ta je singulární, což je spor s předpokládanou regularitou matice A .)

Definice 3.12 Čtvercová matice A je diagonálně dominantní, jestliže platí

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad \text{nebo } |a_{ii}| > \sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{ki}|.$$

Věta 3.10 Je-li matice A diagonálně dominantní, pak je regulární.

Bez důkazu.

Věta 3.11 Je-li matice A diagonálně dominantní, pak Jacobiho iterační metoda konverguje pro libovolnou volbu počáteční aproximace.

Důkaz:

$$\sum_{j=1}^n |c_{ij}| = c_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n c_{ij} = 0 + \sum_{j=1, j \neq i}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| = \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| < 1$$

a tedy $\alpha_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |c_{ij}| < 1$. Podle věty 5.13 dostáváme naše tvrzení. \square

¹³**C.G.J. Jacobi** (1804 – 1851) německý matematik. Zabýval se teorií čísel, teorií funkcí, diferenciálními rovnicemi, algebrou.

3.10 Gaussova – Seidelova iterační metoda

U Gaussovy – Seidelovy¹⁴ metody se přechod od soustavy (3.1) k soustavě (3.3) se provádí stejně jako u Jacobiho metody, t.j. opět předpokládáme, že $a_{ii} \neq 0$, potom

$$c_{ii} = 0, \quad c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, i \neq j, \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}},$$

ale iterační vztahy mají tvar

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^n c_{ij} x_j^k + d_i.$$

Pro $a_{ii} = 0$ opět zaměníme pořadí rovnic.

Věta 3.12 *Platí:*

1. *Je-li matice A diagonálně dominantní, pak Gaussova – Seidelova metoda konverguje pro libovolný počátek.*
2. *Je-li některá z hodnot $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ menší než 1, pak Gaussova – Seidelova metoda konverguje pro libovolný počátek.*
3. *Je-li matice A symetrická a pozitivně definitní, pak Gaussova – Seidelova metoda konverguje pro libovolný počátek.*

Bez důkazu.

Poznámka 3.3 *Všechny uvedené podmínky konvergence jsou postačující. Nutnou a postačující podmínkou konvergence iteračního procesu $x^{k+1} = Cx^k + d$ je $\rho(C) < 1$, kde ρ je spektrální poloměr matice C (= největší absolutní hodnota vlastního čísla matice C).*

Poznámka 3.4 *Máme-li soustavu $Ax = b$, kde A je regulární matice, která však nesplňuje výše uvedené podmínky konvergence, tak vynásobením A^T zleva dostaneme soustavu*

$$A^T A x = A^T b,$$

kde matice koeficientů ($A^T A$) je symetrická a pozitivně definitní. A tedy pro takovou soustavu Gaussova – Seidelova metoda konverguje. Obecně ale dosti pomalu.

Obě metody (Jacobiho i Gaussovu-Seidelovu) si můžeme zapsat s využitím prvků původní matice A . Dostaneme tak předpis pro Jacobiho metodu ve tvaru

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^k \right)$$

¹⁴**K.F.Gauss** (1777 – 1855) německý matematik. Poslední z matematiků, který pracoval prakticky ve všech částech matematiky.

P.L.Seidel – (1821 – 1896) německý matematik, zabýval se hlavně analýzou. V r.1874 navrhl iterační metodu řešení soustav algebraických rovnic

a pro Gaussovu-Seidelovu metodu ve tvaru

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k \right).$$

Gaussova – Seidelova iterační metoda konverguje většinou rychleji, než Jacobiho metoda, ale existují výjimky.

Příklad 3.11 *Jacobiho i Gaussovou-Seidelovou metodou řešte soustavu, porovnejte rychlost konvergence.*

$$\begin{array}{rrrr} 10x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = & 6 \\ -x_1 & +10x_2 & -2x_3 & = & 7 \\ -x_1 & -x_2 & +10x_3 & = & 8 \end{array}$$

Řešení: Přesné řešení naší rovnice je $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Zvolme nulový počátek a potom dostaneme pro Jacobiho metodu posloupnost iterací

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,7 \\ 0,8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0,9 \\ 0,92 \\ 0,93 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0,970 \\ 0,976 \\ 0,986 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0,9918 \\ 0,9931 \\ 0,9958 \end{pmatrix} \sim \dots$$

a pro Gaussovu-Seidelovu metodu dostaneme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,76 \\ 0,936 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0,9392 \\ 0,98112 \\ 0,99203 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0,994630 \\ 0,997869 \\ 0,9992499 \end{pmatrix} \sim \dots$$

Větší rychlost konvergence u Gaussovy-Seidelovy metody je zřejmá.

Příklad 3.12 *Jacobiho i Gaussovou-Seidelovou metodou řešte soustavu:*

$$\begin{array}{rrrr} x_1 & +x_2 & & = & 1 \\ 2(1-\varepsilon)x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ & & x_3 & +x_4 & = & -1 \\ -(1-\varepsilon)^2x_1 & & & +x_4 & = & 5 \end{array}$$

kde $0 < \varepsilon < 0,1$.

Řešení: Jacobiho metoda konverguje, Gaussova-Seidelova diverguje.

Příklad 3.13 *Jacobiho i Gaussovou-Seidelovou metodou řešte soustavu:*

$$\begin{array}{rrrr} 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & -1 \end{array}$$

Řešení: Jacobiho metoda diverguje, Gaussova-Seidelova konverguje.

Příklad 3.14 *Jacobiho i Gaussovou-Seidelovou metodou řešte soustavu:*

$$\begin{array}{rrrr} 2x_2 & +4x_3 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 0,375 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Řešení: Obě metody divergují.

3.11 Stabilita řešení numerické úlohy

Při použití jakékoliv numerické metody vznikají zaokrouhlovací chyby – na počátku řešení při zadávání vstupních dat, během výpočtu při provádění početních operací, které se všechny promítnou do výsledku.

Pokud chceme získat smysluplné výsledky, musíme si vybírat stabilní algoritmy.

Algoritmus je stabilní, jestliže

1. je dobře podmíněný, tj. málo citlivý na změny ve vstupních datech,
2. numericky stabilní, tj. málo citlivý na vliv zaokrouhlovacích chyb, které vznikají během výpočtu.

Jinak řečeno – Úloha je stabilní, jestliže drobná změna vstupních hodnot vyvolá jen drobnou změnu ve výsledku.

Jakákoliv numerická úloha obsahující soustavy lineárních algebraických rovnic je obecně vzato nestabilní.

Příklad 3.15 Mějme danu soustavu

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 8, \\ 2x + 6.00001y &= 8.00001, \end{aligned}$$

která má řešení $x = 1$, $y = 1$.

Drobnou změnou zadání získáme soustavu

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 8, \\ 2x + 5.99999y &= 8.00002 \end{aligned}$$

která ale má výrazně odlišné řešení $x = 10$, $y = -2$.

Změna vstupních hodnot byla řádově 10^{-5} a u výstupních hodnot jde o přechod od jednotek k desítkám.

U rozsáhlejších soustav mohou být změny ještě výraznější. Záleží na tvaru matice koeficientů soustavy.

Platí: jestliže mají matice A a matice A^{-1} srovnatelné prvky, potom je úloha $Ax = b$ stabilní. V opačném případě jde o nestabilní úlohu.

V předchozím příkladu máme

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 6.00001 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{2 \cdot 10^{-5}} \begin{pmatrix} 6.00001 & -6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300000.5 & -300000 \\ -100000 & 100000 \end{pmatrix}.$$

Prvky matice A jsou řádově jednotky, prvky matice inverzní jsou řádově statisíce, máme tedy výrazně nestabilní matici. Pro druhou matici získáme analogický výsledek.

3.12 Relaxační metody

Relaxační metoda pro Jacobiho metodu má tvar

$$x_i^{k+1} = (1 - \omega)x_i^k + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i, j \neq i}^n a_{ij}x_j^k \right).$$

Relaxační metoda pro Gaussovou-Seidelovou metodu má tvar

$$x_i^{k+1} = (1 - \omega)x_i^k + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right).$$

Prvek $\omega > 0$ se nazývá relaxační parametr. Volíme jej tak, aby jsme urychlili konvergenci základní metody. Volbou $\omega = 1$ dostaneme původní metodu.

Efektivní volba relaxačního parametru ω závisí na zvolené základní metodě a na tvaru matice A .

Ve speciálních případech je možné relaxační parametr vypočítat, jinak záleží hlavně na zkušenosti a dobrém odhadu.

Věta 3.13 *Nechť A je třídiagonální, symetrická, pozitivně definitní matice. Potom pro spektrální poloměr platí $\varrho^2(C) < 1$ a optimální hodnotu relaxačního parametru můžeme určit podle vztahu*

$$\omega_{\text{optimum}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \varrho^2(C)}}$$

kde C je iterační matice pro Jacobiho metodu.

Příklad 3.16 *Mějme danu soustavu*

$$\begin{aligned} 2x - 1 - x_2 &= 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0, \\ -x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Najděte pro ni optimální relaxační parametr.

Řešení: Jacobiho iterační matice má tvar

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \lambda_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\varrho(C) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

a proto

$$\omega_{optimum} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{2}}} \approx 1,172.$$

Pokud vezmeme $\omega = 1,17$, potom například pro dosažení přesnosti 10^{-3} musíme provést 5 iterací, zatímco při použití Gaussovy-Seidelovy iterační metody potřebujeme pro dosažení stejné přesnosti 10 iterací.

Poznámka 3.5 *Jestliže v iteračním procesu*

$$x^{k+1} = Cx^k + d$$

nastává cyklus, potom $\varrho(C) = 1$.

Ale opak neplatí. Je-li $\varrho(C) = 1$ ještě nemusí v iteračním procesu nastat cyklus. Metoda může divergovat a nebo i konvergovat. Chování metody závisí na vlivu zaokrouhlovacích chyb.

Jestliže vznikne cyklus u soustavy dvou rovnic, potom se hodnoty pohybují po kuželošéčkách.

Podobně pro soustavy vyšších řádů se budou hodnoty pohybovat po polochách druhého řádu.

Superrelaxační metoda

Pokud je v relaxační metodě

$$x_i^{k+1} = (1 - \omega)x_i^k + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right).$$

parametr $\omega > 1$, potom mluvíme o *superrelaxační metodě* a označujeme ji SOR.

Porovnáním SOR a Gaussovy-Seidelovy metodu dostaneme tvar

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega (GS(x_i^k) - x_i^k),$$

kde $GS(x_i^k)$ označuje iteraci získanou pomocí Gaussovy-Seidelovy metody. Opět pro $\omega = 1$ dostaneme původní Gaussovu-Seidelovu metodu.

Konvergence metody SOR je velmi citlivá na správnou volbu parametru ω .

SOR můžeme přepsat do tvaru

$$x^{k+1} = Bx^k + c,$$

kde B je iterační matice a $c = (I - B)A^{-1}b$. Nutnou a postačující podmínkou konvergence je opět $\varrho(B) < 1$.

3.13 Metoda největšího spádu

Patří mezi gradientní metody. Hledáme při ní nejrychlejší změnu rezidua $r = Ax - b$. Její algoritmus je následující: pro $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} Ax^k - b &= r^k, \\ x^{k+1} &= x^k + \frac{(r^k)^T r^k}{(r^k)^T A r^k}, \\ r^{k+1} &= r^k - \alpha^k A r^k, \\ \alpha^k &= \frac{(r^k)^T r^k}{(r^k)^T A r^k}. \end{aligned}$$

Potom platí $(r^{k+1})^T r^k = 0$ pro všechna k .

3.14 Metoda sdružených gradientů

Označujeme ji MSG (conjugate gradient method). Mějme opět naši soustavu $Ax = b$, kde A je komplexní matice.

Definice 3.13 Řekneme, že matice A^H je hermitovsky sdružená s maticí A , jestliže $A^H = (\overline{A})^T$.

Řekneme, že vektor v^H je hermitovsky sdružený s vektorem v , jestliže $v^H = (\overline{v})^T$.

Přitom jako obvykle (\overline{a}) značí prvek komplexně sdružený k prvku a . Algoritmus metody MSG je následující:

Mějme soustavu $Ax = b$, kde $A = A^H$. Necht' x^0 je vektor počáteční aproximace takové, že $Ax \neq b$, potom pro $k = 0, 1, 2, \dots$ máme

$$\begin{aligned} p^0 &= r^0 = b - Ax^0, \\ \alpha^k &= \frac{(r^k)^H r^k}{(p^k)^H A p^k}, \\ x^{k+1} &= x^k + \alpha^k p^k, r^{k+1} = r^k - \alpha^k A p^k, \\ \beta^k &= \frac{(r^{k+1})^H r^{k+1}}{(r^k)^H r^k}, \\ p^{k+1} &= r^{k+1} + \beta^k p^k. \end{aligned}$$

Koeficienty α^k, β^k jsou reálné i pro komplexní matice A .

Věta 3.14 Jestliže matice A je hermitovská pozitivně definitní matice (tj. $A^H = A$ a $x^H A x > 0$ pro všechny nenulové vektory x), potom metoda MSG konverguje.

Pro plné matice vyžaduje metoda MSG $2n^3 + O(n^2)$ kroků, kde n je řád matice soustavy. Proto při svém objevení v roce 1952 příliš nezaula. Pro srovnání, klasická Gaussova eliminační metoda vyžaduje $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ kroků. V roce 1969 Strassen publikoval svoji variantu Gaussovy metody, která potřebuje už pouze $O(n^{2,81})$ kroků a tento výsledek byl později ještě zlepšen na hodnotu $O(n^{2,38})$. Další pokusy o zlepšení výsledku pokračují. Exponent zřejmě nebude menší jak 2, protože v plné matici je n^2 prvků a každého z nich se eliminační metoda týká.

Proto metoda MSG zpočátku nezaula. Až později se zjistilo, že pokud budeme pracovat s řídkou maticí, potom se její konvergence výrazně zrychluje a počet kroků strmě klesá.

Na příkladu si ukážeme, že i tato metoda může havarovat.

Příklad 3.17 *Mějme homogenní soustavu s reálnou symetrickou maticí*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom $b = \mathcal{O}$ a pro matici A platí

$$D_1 = 1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

takže matice A není pozitivně definitní.

Zvolme $x_0 = (4, 4, 3)^T$, potom dostaneme

$$p^0 = r^0 = (-18, -18, 0)^T,$$

$$x^1 = (0, 0, 3)^T,$$

$$r^1 = (-6, 6, 0)^T,$$

$$p^1 = (-8, 4, 0)^T,$$

$$(p^1)^T A p_1 = 0$$

neboli *algoritmus selhal*.

Každá hermitovská a pozitivně definitní matice má kladná vlastní čísla $\lambda_n \geq \lambda_{n-1} \geq \dots \geq \lambda_1 > 0$. A to i v případě, že matice A je komplexní.

Definujme si *číslo podmíněnosti* matice A vztahem

$$K(A) = \frac{\max_i \lambda_i}{\min_i \lambda_i} = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

Vždy platí $K(A) \geq 1$.

Zavedeme si dále normu (energetickou normu) předpisem

$$\|x\|_A = \sqrt{x^H A x}.$$

Věta 3.15 *Nechť A je hermitovská pozitivně definitní matice a x^0 je počáteční aproximace přesného řešení x^* soustavy $Ax = b$. Pak pro algoritmus MSG platí odhad*

$$\|x^* - x^k\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{K(A)} - 1}{\sqrt{K(A)} + 1} \right) \|x^* - x^0\|_A$$

pro všechna k a kde $K(A)$ je číslo podmíněnosti matice A .

3.15 Shrnutí

Zopakovali jsme si metody řešení soustavy lineárních algebraických rovnic. Společným rysem všech uváděných metod, t.j. Gaussovy a Jordanovy eliminační metody, použití inverzní matice i LU rozkladu je, že po provedení konečného počtu kroků získáme výsledek, který je konečný, včetně případných chyb. Všechny uvedené metody jsou použitelné pro libovolnou řešitelnou soustavu.

Naproti tomu iterační metody, se kterými jsme se seznámili později, nám zaručují dosažení výsledku pouze pro soustavy s maticí koeficientů, která splňuje podmínky konvergence = nedají se tedy použít vždy. Pokud je však můžeme použít, tj. pokud jsou splněny podmínky konvergence, potom se přiblížíme k přesnému řešení s libovolnou přesností.

4 Řešení rovnic.

4.1 Úvod

Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře s numerickými metodami řešení rovnic typu $f(x, y) = 0$.

Začneme seznámením se startovacími metodami - grafickou, tabelovací a metodou půlení intervalu. Úkolem startovacích metod je dostatečně zúžit interval, na kterém hledáme řešení.

Potom se budeme věnovat iteračním metodám. Ty nám umožní se přiblížit k hledanému řešení s libovolnou přesností, ale pouze tehdy, když jsou splněny podmínky konvergence pro danou metodu.

Protože budeme požadovat splnění konvergenčních podmínek pouze na nějakém okolí hledaného řešení, bude pro nás vždy výhodné, pokud se dokážeme vhodnou startovací metodou přiblížit k řešení.

V aplikacích se často vyskytují algebraické rovnice, proto se jim budeme věnovat samostatně na konci kapitoly.

4.2 Základní pojmy

Definice 4.1 *Kořenem rovnice $f(x) = 0$ nazveme každé číslo α takové, že $f(\alpha) = 0$.*

Uvedeme si některé metody pro řešení rovnic obecně a speciální metody pro určení kořenů polynomu.

Při řešení rovnic rozeznáváme

- a) přímé metody – např. pro kvadratickou rovnici,
- b) iterační metody – těmi se budeme zabývat.

Vždy nás bude zajímat zde konvergují k správnému řešení, za jakých podmínek a jak rychle.

Věta 4.1 *Nechť $f(x)$ je spojitá na $[a, b]$, $f(a)f(b) < 0$. Potom existuje aspoň jedno $\alpha \in (a, b)$ takové, že $f(\alpha) = 0$.*

Důkaz: Plyne z věty o střední hodnotě pro konkrétní hodnotu $c = 0$. □

Věta 4.2 *Nechť $f(x)$ je spojitá na $[a, b]$, $f(a)f(b) < 0$, $f'(x)$ existuje a nemění znaménko $\forall x \in (a, b)$, potom je v (a, b) právě jeden kořen rovnice $f(x) = 0$.*

Důkaz: Jde o důsledek předchozí věty pro případ ryze monotonní funkce. □

Příklad 4.1 $f(x) = x + e^x$, tato funkce je spojitá pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

$$f(+\infty) = +\infty, \quad f(-\infty) = -\infty,$$

$$f'(x) = 1 + e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{existuje právě jeden reálný kořen.}$$

4.3 Startovací metody

Výpočet můžeme podstatně urychlit, jestliže umíme odhadnout, kde leží kořen rovnice. Pro přibližné stanovení polohy kořene používáme startovací metody.

4.4 Grafická metoda

1. Nakreslíme si graf funkce $f(x)$ a z něj můžeme odečíst potřebné údaje.
2. Rovnici $f(x) = 0$ si upravíme na tvar $g(x) = h(x)$. Umíme-li nakreslit grafy obou těchto funkcí, potom jejich průsečíky určují kořeny.

Příklad 4.2 $x^2 - \cos x = 0$.

VYHODNOCENÍ

1. Velmi nepřesná, ale velmi rychlá metoda,
2. Pokud věnujeme grafu *slušnou* pozornost, je schopen provést separaci kořenů a mnohdy i napomoci při určení, zda vůbec má rovnice nějaký reálný kořen.
3. V grafu nejdříve volíme měřítko a až po té do něj zakreslujeme hodnoty funkce.
4. Závěry vždy nutno ověřit výpočtem.

4.5 Tabelování funkce

Na intervalu $[a, b]$ si libovolně volíme posloupnost $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ a určíme příslušné funkční hodnoty. Jestliže $f(x_k)f(x_{k+1}) < 0$, potom podle věty 4.1 leží v intervalu $[x_k, x_{k+1}]$ aspoň jeden kořen.

4.6 Metoda bisekce – půlení intervalu

Nechť $f(x)$ je spojitá na $[a, b]$, $f(a)f(b) < 0$. Sestrojíme si posloupnost intervalů $[a, b] = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$. $I_k = [a_k, b_k] \supset \dots$. Je-li $f(a_{k-1})f(b_{k-1}) < 0$, potom $[a_k, b_k]$ bude ten z intervalů $[a_{k-1}, s_k], [s_k, b_{k-1}]$, $s_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + b_{k-1})$ v jehož koncových bodech má funkce f opačná znaménka. Pokud neuděláme chybu – t.j. pokud vyloučíme chybu lidského faktoru, tak bude kořen α ležet v každém z intervalů $[a_k, b_k]$.

Posloupnost $\{a_k\}$ je neklesající a shora omezená libovolným z čísel b_i . Posloupnost $\{b_k\}$ je nerostoucí a zdola omezená kterýmkoliv číslem a_j . To znamená, že každá z těchto posloupností má limitu. Dále platí

$$b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}$$

a tedy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (b_k - a_k) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \alpha.$$

Pro odhad chyby máme

$$|a_k - \alpha| \leq \frac{b - a}{2^k}, \quad |b_k - \alpha| \leq \frac{b - a}{2^k}.$$

VYHODNOCENÍ

1. Konverguje pomalu.
2. Pokud v $[a, b]$ leží více kořenů, určíme tímto postupem jen jeden.
3. Jednoduchá.
4. Prostý odhad chyby.
5. Nezáleží na vlastnostech funkce f .

4.7 Iterační metody

Nechť f je spojitá na $[a, b]$, $f(a)f(b) < 0$, potom podle věty 4.1 existuje aspoň jedno $\alpha \in [a, b]$ takové, že $f(\alpha) = 0$. Sestrojíme si posloupnost $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ tak, že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$.

Výpočet ukončíme buď v souladu s teoretickým odhadem chyby a nebo užitím empirického kritéria:

a) Je-li $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ pro zadané $\varepsilon > 0$.

Pokud máme pochybnosti, provedeme další šetření:

Je-li posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ rostoucí a $f(x_k + \varepsilon)f(x_k) < 0$, pak platí $|x_k - \alpha| < \varepsilon$.

Je-li posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ klesající a $f(x_k - \varepsilon)f(x_k) < 0$, pak platí $|x_k - \alpha| < \varepsilon$.

b) Je-li $|f(x_k)| < \delta$ pro zvolené $\delta > 0$.

POZOR: Takto braná podmínka může být velmi ošidná. Viz obrázek:

Jestliže bude úhel φ velmi malý, potom i pro malé δ je x_n výrazně odlišné od α .

Definice 4.2 Řekneme, že funkce $g(x)$ splňuje na $[a, b]$ Lipschitzovu¹⁵ podmínku s konstantou $k \in [0, 1)$, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : |g(x_1) - g(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|.$$

Důsledek 4.1 Jestliže $g(I) \subset I = [a, b]$, potom je g kontrakce.

4.8 Metoda prosté iterace

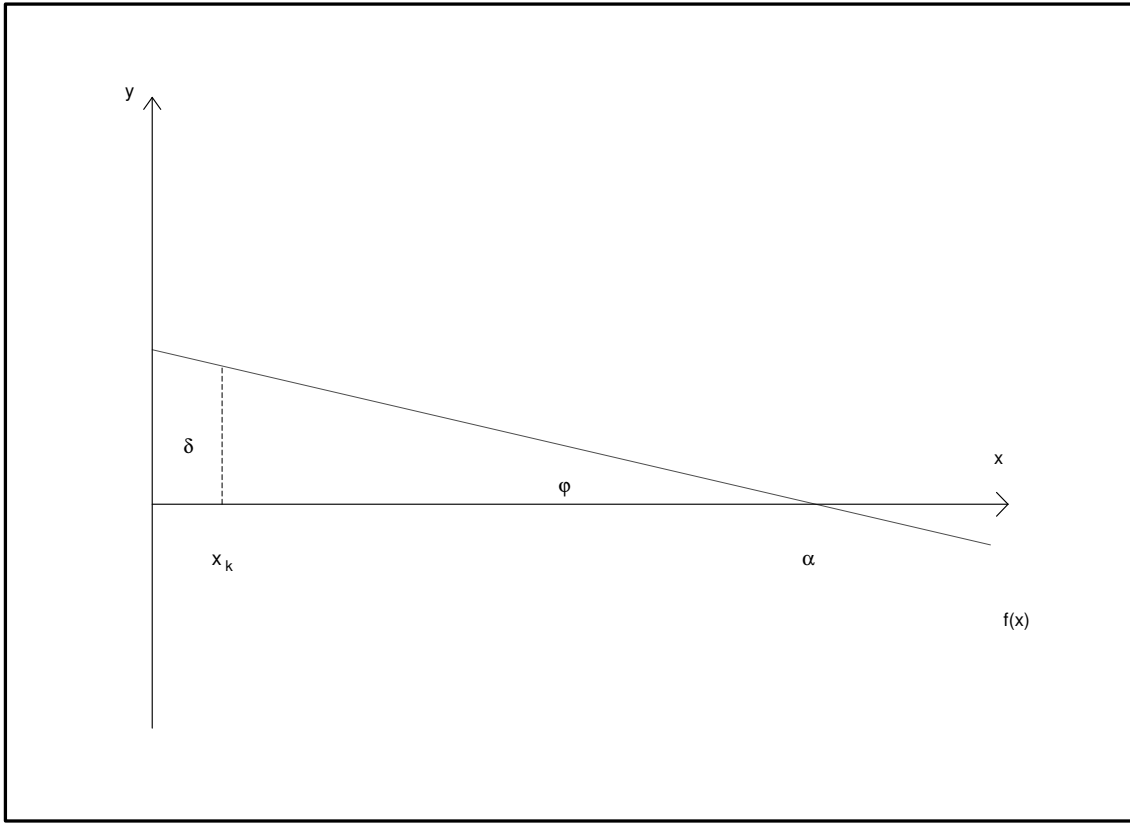
Nechť f je spojitá na $[a, b]$, $f(a)f(b) < 0$. Rovnici $f(x) = 0$ si upravíme na tvar $x = g(x)$.

POZOR: Úprava nemusí být jednoznačná, většinou ji lze provést více způsoby.

Příklad 4.3

$$\begin{aligned} x^3 - 2x + 7 = 0 &\Rightarrow x = (x^3 + 7)/2, \\ &x = \sqrt[3]{2x - 7}, \\ &x = (2x - 7)/x^2, \\ &x = \sqrt{(2x - 7)/x}. \end{aligned}$$

¹⁵**R.O.S.Lipschitz** (1832 – 1903) německý matematik. Zabýval se teorií čísel, diferenciálními rovnicemi, geometrií, teorií řad.



Obrázek 4.1: Problém malého úhlu φ

Věta 4.3 *Nechť $\forall x \in I = [a, b]$ je $g(x) \subset I$, $g(x)$ splňuje na I Lipschitzovu podmínku s konstantou $k \in [0, 1)$. Potom má rovnice $x = g(x)$ v I právě jedno řešení α a posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaná předpisem $x_{n+1} = g(x_n)$ k němu konverguje pro libovolný počátek $x_1 \in I$. Pro odhad chyby platí*

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{k^{n-1}}{1 - k} |x_1 - x_2|.$$

Důkaz: Metrika je $d(x, y) = |x - y|$ a vzhledem k ní je (I, d) úplným metrickým prostorem. A tedy jsou splněny všechny podmínky Banachovy věty o pevném bodě. Jako její důsledek dostaneme zbytek důkazu. \square

Důsledek 4.2 *Nechť pro všechna $x \in I$ platí*

$$1) \quad \text{existuje } g'(x),$$

$$2) \quad \max_{x \in I} |g'(x)| \leq k < 1.$$

Pak $g(x)$ splňuje na I Lipschitzovu podmínku.

Důkaz: Plyne z věty o střední hodnotě. □

Lipschitzova podmínka se obtížně prověřuje. Důsledek 4.2 se prověřuje lépe a rychleji. Provedené zúžení třídy použitelných funkcí není podstatné.

Důsledek 4.3 *Mějme rovnice $f(x) = 0$ upravenou na tvar $x = g(x)$, potom:*

- a) *Jestliže $x = g(x)$, $g(I) \subset I$ a $\forall x \in I : |g'(x)| > 1$, potom přejdeme k inverzní funkci $g^{-1} = h$ a máme $x = h(x)$, $|h'(x)| < 1$.*
- b) *Vždy musí platit $|g'(x)| \leq \underline{k} < 1$. Derivace g se nemůže libovolně přibližovat k 1.*
- c) *Jestliže $-1 < g' \leq 0$, pak kořen leží mezi dvěma po sobě jdoucími aproximacemi.*
- d) *Pro odhad dosažené přesnosti platí pro konvergentní posloupnosti*

$$|x_n - \alpha| < \frac{k}{1 - k} |x_n - x_{n-1}|.$$

- e) *Nechť jsou splněny předpoklady věty 4.3. Jestliže pro některé k platí $x_k \notin I$, potom jsme udělali někde chybu a je nutno prověřit výpočet.*

4.9 Metoda regula falsi

Nechť $f(x)$ je spojitá na $[a, b]$, $f(a)f(b) < 0$. Spojíme body $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ přímkou. Její průsečík s osou x je bod $(s, 0)$,

$$s = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a) = b - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(b).$$

- a) Jestliže $f(a)f(s) < 0$, potom položíme $a := a, b := s$.
 - b) Jestliže $f(b)f(s) < 0$, potom položíme $a := s, b := b$.
- Výpočet opakujeme pokud nedosáhneme požadované přesnosti.

VYHODNOCENÍ:

1. Metoda regula falsi je vždy konvergentní.
2. Může být efektivnější než metoda půlení intervalu.
3. Je jednoduchá. Neklade přílišné nároky na separaci kořenů.
4. Určí vždy jen jeden kořen.
5. Konvergence je však obvykle dosti pomalá.
6. Neplatí odhad $|\alpha - x_n| \leq K |x_n - x_{n-1}|$.

4.10 Metoda sečen

Jde o variantou metody regula falsi .

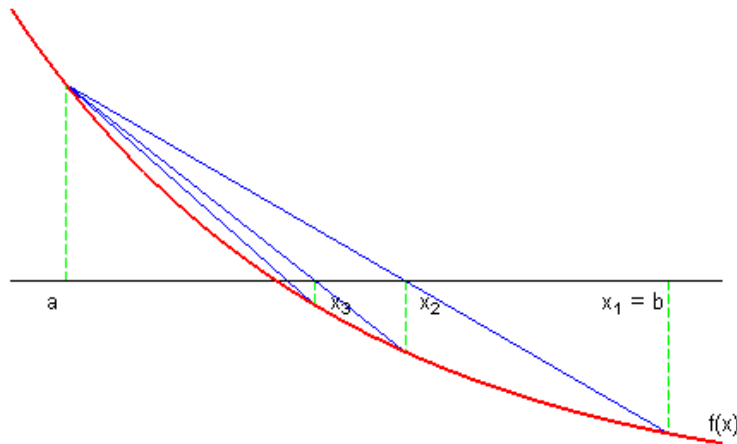
Nechť f je spojitá na $[a, b]$, $f(a)f(b) < 0$, $f''(x)$ nemění na $[a, b]$ znaménko, neboli $f(x)$ je na celém intervalu buď konvexní a nebo konkávní, a má tedy na intervalu (a, b) právě jeden kořen. Pak pro

a) $\text{sign } f(a) = \text{sign } f''(x)$ je

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} f(x_n), \quad x_1 = b,$$

b) $\text{sign } f(a) \neq \text{sign } f''(x)$ je

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n), \quad x_1 = a.$$



Obrázek 4.2: Geometrický smysl metody sečen

V obou případech jde o jednostrannou konvergenci.

POZOR: Záleží na tom, z kterého bodu začnete provádět iterace.

VYHODNOCENÍ:

1. Metoda sečen je vždy konvergentní.
2. Je efektivnější než metoda půlení intervalu.
3. Konvergence je však obvykle dosti pomalá.
4. Předpokladem konvergence je pouze jeden prostý kořen na intervalu I .
5. Neplatí odhad $|\alpha - x_n| \leq K |x_n - x_{n-1}|$.

4.11 Příklady na procvičení

S přesností ϵ najděte na intervalu $\langle a, b \rangle$ kořen rovnice $f(x) = 0$, kde:

Příklad 4.4 $f(x) = e^x - \sin x - \frac{3}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $\epsilon = 0,01$

Příklad 4.5 $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - x^2 - 1$, $a = 0,1$, $b = 1,1$, $\epsilon = 0,01$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností na intervalu $\langle 0,5; 1,5 \rangle$.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností na intervalu $\langle 0,5; 1 \rangle$.

Otázka: Lze zvolit interval s krajním bodem $x = 0$?

Příklad 4.6 $f(x) = \sin \frac{x}{2} - x^2$, $a = 0,2$, $b = 1,2$, $\epsilon = 0,01$

Otázka: Bylo by možné volit za výchozí interval jeden z intervalů $\langle -0,5; 0,5 \rangle$, resp. $\langle 0; 0,5 \rangle$? Výpočet by jistě probíhal rychleji, protože hledaný kořen leží velmi blízko bodu $x = 0,5$.

Příklad 4.7 $f(x) = e^{\frac{x}{2}} \cos x - 1$, $a = 0,5$, $b = 1$, $\epsilon = 0,01$

Příklad 4.8 $f(x) = e^x \sin x - \frac{1}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $\epsilon = 0,01$

Úprava zadání: Najděte kořen s touž přesností na intervalu $\langle 0; 0,5 \rangle$.

Příklad 4.9 $f(x) = e^{x^2} - x - \frac{4}{3}$, $a = 0$, $b = 1$, $\epsilon = 0,01$

Úprava zadání: Najděte kořen s touž přesností na intervalu $\langle 0,5; 1,5 \rangle$

Otázka: Jak je možné, že se výsledky tak výrazně liší?

Příklad 4.10 $f(x) = x \sin x + \cos x - 2x^2$, $a = 0$, $b = 1$, $\epsilon = 0,01$

Příklad 4.11 $f(x) = x \cos x - x^2 \sin x - x^2 + \frac{1}{5}$, $a = -1,5$, $b = -0,5$, $\epsilon = 0,01$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností na intervalu $\langle -2; -1 \rangle$.

Příklad 4.12 $f(x) = x \sin x - x^2 \cos x - x^3 + 1$, $a = 0,2$, $b = 1,2$, $\epsilon = 0,01$

Příklad 4.13 $f(x) = x^3 - x^2 - x + e^x - 2$, $a = 0,5$, $b = 1,5$, $\epsilon = 0,01$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností na intervalu $\langle 0; 2 \rangle$.

Příklad 4.14 $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} - 1$, $a = 0,5$, $b = 1,5$, $\epsilon = 0,01$

4.12 Metoda tečen

Často se metoda tečen označuje jako Newtonova¹⁶ metoda.

Nechť rovnice $f(x) = 0$ má jednoduchý reálný kořen α na intervalu $I = [a, b]$. Předpokládejme, že existují na I nenulové derivace $f(x)$. Potom je možno rozvinout f do Taylorovy¹⁷ řady v okolí libovolného bodu $x_0 \in I$.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

Nyní v rovnici $f(x) = 0$ nahradíme funkci $f(x)$ prvními dvěma členy Taylorova rozvoje (t.j. provedeme linearizaci)

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

a určíme kořen x_1 této rovnice

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

V okolí bodu x_1 můžeme zase rovnici $f(x) = 0$ aproximovat lineární částí Taylorova rozvoje

$$f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) = 0$$

s kořenem

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

stejným způsobem pak můžeme pokračovat dále. Dostaneme tak posloupnost

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Věta 4.4 *Nechť $f(x)$ je definovaná a spojitá na I , $f(a)f(b) < 0$, $f'(x) \neq 0 \forall x \in I$, $f''(x)$ nemění znaménko na I , potom iterační proces*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

konverguje pro libovolné $x_0 \in I$ pro něž platí $f(x_0)f''(x_0) > 0$.

Bez důkazu.

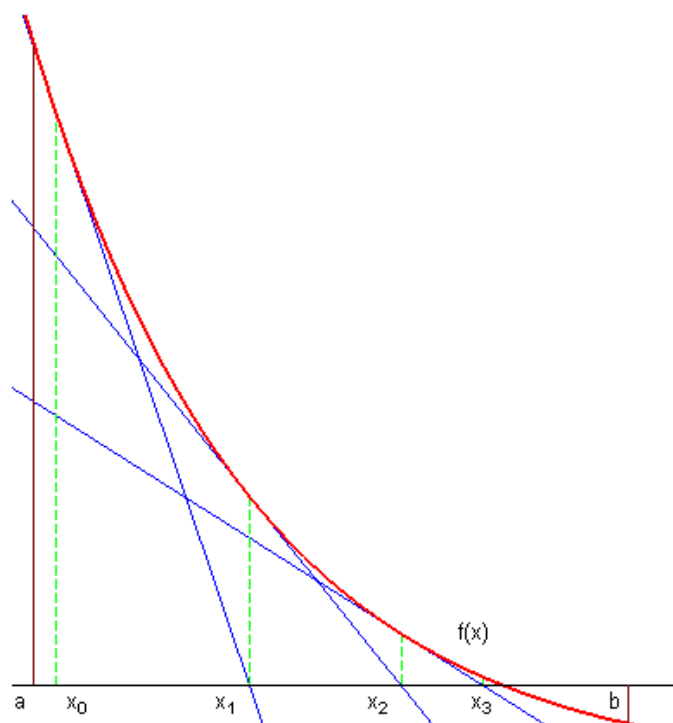
Věta 4.5 *Nechť platí předpoklady věty 4.4 a dále*

$$\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| < b - a, \quad \left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| < b - a,$$

potom Newtonova metoda konverguje pro libovolné $x_0 \in I$.

¹⁶**I.Newton** – (1642 – 1727) anglický matematik, fyzik, astronom, optik a filosof. Jeden z největších světových vědců všech dob. Prakticky současně s Leibnizem a nezávisle na něm vybudoval diferenciální a integrální počet. Významné jsou i jeho práce z algebry, teorie řad, numerické matematiky, a j.

¹⁷**B.Taylor** (1685 – 1737) anglický matematik, věnoval se matematické analýze, teorii řad, matematické fyzice – položil základy matematického popisu kmitající struny



Obrázek 4.3: Geometrický smysl metody tečen

Bez důkazu.

Pro odhad chyby platí:

Nechť $m_1 = \min |f'(x)|$, $M_2 = \max |f''(x)|$ pro $x \in I$, potom

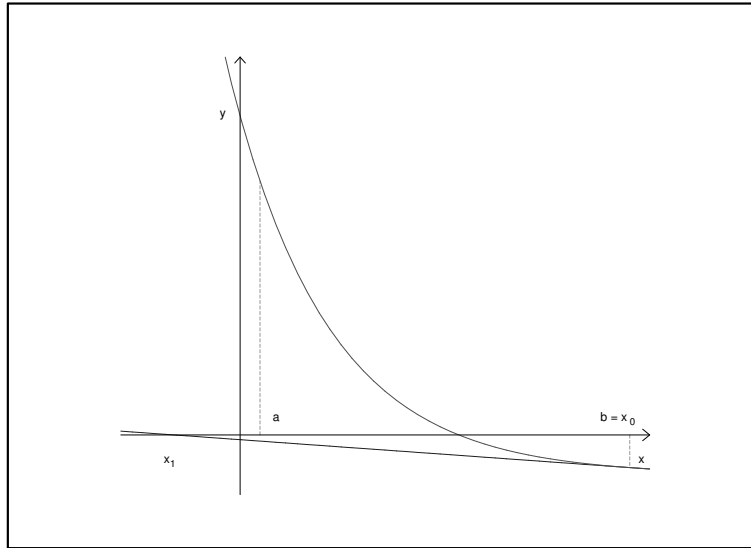
$$|\alpha - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2.$$

Tento odhad plyne z Taylorova rozvoje:

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}(\alpha - x_0)^2.$$

Je-li tedy $\frac{M_2}{2m_1}(\alpha - x_0)^2 \leq k < 1$, potom Newtonova metoda konverguje a to velmi rychle.
VYHODNOCENÍ:

1. Jestliže derivaci nahradíme diferencí, dostaneme metodu sečen.
2. Konverguje dostatečně rychle.
3. Podmínkou konvergence je u Newtonovy metody jednoduchý kořen α .
4. V případě vícenásobných kořenů je $f'(\alpha) = 0$ a tedy iterační vztah není v tomto bodě definován a nejsou splněny podmínky věty 4.4.
5. $f(x_0)f''(x_0) > 0$ je podmínka postačující, ne nutná. Ale při jejím nesplnění můžeme dojít ke sporu, kdy hodnota x_k bude ležet mimo interval I .



Obrázek 4.4: Problém u metody tečen

Příklad 4.15 Najděte kladný kořen rovnice $\sin x - \frac{x}{2} = 0$.

Řešení: Grafickou metodou odhadneme, že kořen leží v intervalu $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Pro použití Newtonovy metody máme

$$f(x) = \sin x - \frac{x}{2},$$

$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{2},$$

$$f''(x) = -\sin x.$$

V tomto případě můžeme použít obou krajních bodů a dojdeme k cíli:

x_0	π	$\frac{\pi}{2}$
x_1	2.09440	2.0
x_2	1.91322	1.9010
x_3	1.89567	1.89551
x_4	1.89549	1,89549

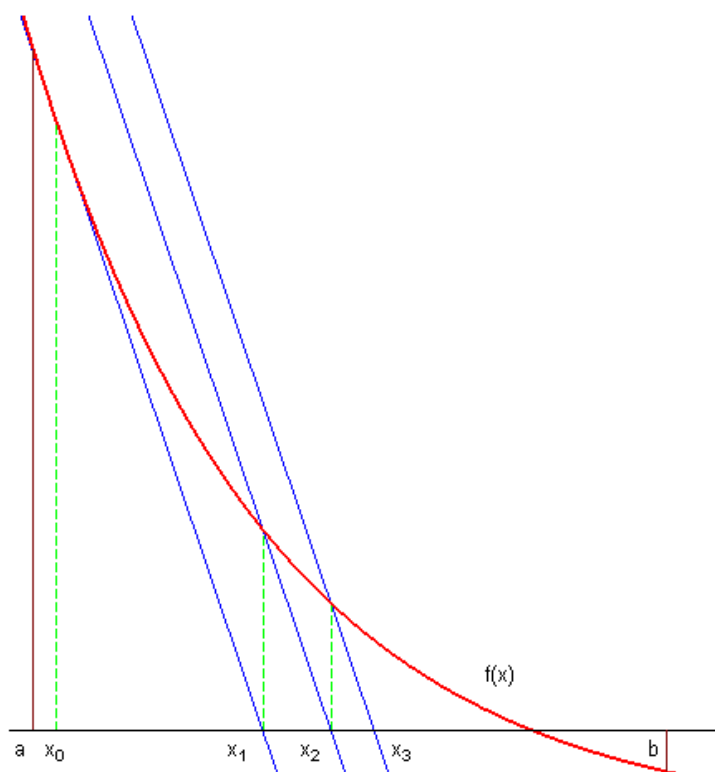
4.13 Modifikovaná Newtonova metoda

Každý krok Newtonovy metody vyžaduje výpočet funkční hodnoty $f(x)$ a derivace $f'(x)$ v bodě x_n . Náročný a problematický může být zejména výpočet derivace. Jestliže se derivace podstatně nemění, tak je možno použít následující tvar iteračního vzorce:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} = x_n - \frac{f(x_n)}{c}, \quad c = f'(x_0), \quad n = 0, 1, \dots$$

Jestliže $f(x)$ je polynomem, tak při každém kroku ušetříme skoro polovinu operací.

POZOR:



Obrázek 4.5: Geometrický smysl modifikované metody tečen

1. Dochází zde ke spomalení konvergence.
2. Stojí za to si předem pořádně prověřit podmínky konvergence – máme potom zaručeno, že se dostaneme k cíli.

Existují i další modifikace, např. že se derivace počítá v každém druhém, každém desátém kroku, atd.

Pokud při rozvoji do Taylorovy řady použijeme pro druhou derivaci její aproximaci interpolačním polynomem, dostaneme další modifikaci Newtonovy metody. Iterační proces má potom tvar

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} - \frac{[f(x_i)]^2}{2[f'(x_i)]^3} \cdot \tilde{f}''(x_i),$$

kde

$$\tilde{f}''(x_i) = -\frac{6}{h_i^2} [f(x_i) - f(x_{i-1})] + \frac{2}{h_i} [2f'(x_i) + f'(x_{i-1})],$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}.$$

Vzorec je řádu 3.

Příklad 4.16 Řešme touto metodou stejnou úlohu jako v příkladu 4.15.

Řešení: Vezmeme si počáteční hodnoty $x_1 = \pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$ a dostaneme

x_1	π
x_2	$\frac{\pi}{2}$
x_3	1.78659
x_4	1.89414
x_5	1.89549

Jde o výrazné zlepšení Newtonovy metody, které je ale zapláceno tím, že potřebuje 2 výchozí hodnoty.

4.14 Příklady na procvičení

Modifikovanou Newtonovou metodou najděte s přesností ε kořen rovnice $f(x) = 0$. Počáteční aproximaci volte, jak je uvedeno; požadavkem *najít kořen s přesností ε* rozumíme požadavek zastavit výpočet, pokud se následující dvě aproximace liší o méně než ε .

Příklad 4.17 $f(x) = e^x - \sin x - \frac{3}{2}$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 0,01$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 0,5$.

Příklad 4.18 $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - x^2 - 1$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 0,01$

Otázka: Když srovnáte získaný výsledek s výsledkem získaným pomocí metody sečen ($x \doteq 5742$ pro interval $< 0,1; 1,1 >$, resp. $x \doteq 0,5682$ pro interval $< 0,5; 1,5 >$), je vidět, že se poměrně značně odlišuje. Jak je to možné?

Příklad 4.19 $f(x) = \sin \frac{x}{2} - x^2$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 0,01$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 0,5$.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 1,5$.

Otázka: Lze zvolit za počáteční aproximaci některý z bodů $x_0 = 0,4$, $x_0 = 0,2$, $x_0 = -0,2$?

Příklad 4.20 $f(x) = e^{\frac{x}{2}} \cos x - 1$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 0,01$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 1,5$.

Úprava zadání: Pokud řešíme tutéž úlohu metodou sečen, zjistíme, že kořen s danou přesností je $x \doteq 0,86$. Při modifikované Newtonově metodě a volbě počáteční aproximace $x_0 = 1$ jsme také získali kořen $x \doteq 0,86$. Při volbě $x_0 = 1,5$ najděte další aproximace, dokud nebude $x \doteq 0,86$.

Příklad 4.21 $f(x) = e^x \sin x - \frac{1}{2}$, $x_0 = 1,5$, $\varepsilon = 0,01$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 1$.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 0,5$.

Příklad 4.22 $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 0,01$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 1,5$.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 2$.

Příklad 4.23 $f(x) = x \sin x + \cos x - 2x^2$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 0,01$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 1,5$.

Příklad 4.24 $f(x) = x \cos x - x^2 \sin x - x^2 + \frac{1}{5}$, $x_0 = -1,5$, $\varepsilon = 0,01$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = -1$.

Příklad 4.25 $f(x) = x \sin x - x^2 \cos x - x^3 + 1$, $x_0 = 0$, $\varepsilon = 0,01$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 1$.

Příklad 4.26 $f(x) = x^3 - x^2 - x - e^x$, $x_0 = 1,5$, $\varepsilon = 0,01$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 2$.

Příklad 4.27 $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} + 1$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 0,01$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 1,5$.

Úprava zadání: Zvolte počáteční aproximaci tak, aby bylo možné najít kořen.

4.15 Newtonova metoda pro komplexní kořeny

Nechť $f(z)$ je komplexní funkce, která je analytická v okolí jejího izolovaného nulového bodu $w = \alpha + i\beta$, $f(w) = 0$. Potom stejně jako v případě reálných kořenů si odvodíme z Taylorovy řady

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}.$$

Věta 4.6 *Je-li $f(z)$ analytická v uzavřeném okolí bodu z_0 o poloměru R a jestliže $\forall z : |z - z_0| \leq R$ platí*

$$1. \quad \left| \frac{1}{f'(z_0)} \right| \leq A,$$

$$2. \quad \left| \frac{f(z_0)}{f'(z_0)} \right| \leq B \leq \frac{R}{2},$$

$$3. \quad |f''(z)| \leq C,$$

$$4. \quad ABC = \mu \leq 1.$$

Potom má rovnice $f(z) = 0$ jedinný kořen w v oblasti $|z - z_0| < R$ a iterační proces

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

konverguje k tomuto kořenu.

Bez důkazu.

POZOR: Jestliže chceme najít komplexní kořen, musíme volit jako z_0 komplexní číslo. Jinak se budeme pohybovat v oboru \mathbb{R} .

4.16 Kombinovaná metoda sečen a tečen

Metoda sečen i tečen konvergují jednostraně. Konvergence se může podstatně urychlit, jestliže použijeme obě metody současně. Potom budou aproximace konvergovat k řešení z obou stran. Přitom se vyhneme problémům s nevhodnou konvergencí u jedné z metod pro speciální případy, kdy funkce protíná osu x pod nevhodným úhlem.

Věta 4.7 *Nechť jsou splněny předpoklady věty 4.4. Označme a_0 ten z bodů a, b pro který platí $f(a_0)f''(a_0) > 0$, druhý označme b_0 . Potom posloupnosti $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergují k řešení α rovnice $f(x) = 0$, t.j. $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \alpha$, kde*

$$a_{k+1} = a_k - \frac{f(a_k)}{f'(a_k)},$$

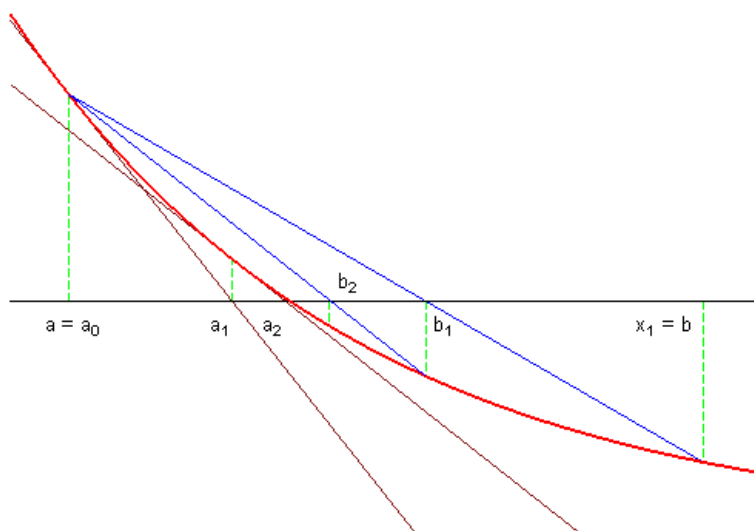
$$b_{k+1} = \frac{b_k f(a_{k+1}) - a_{k+1} f(b_k)}{f(a_{k+1}) - f(b_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Důkaz: Prověrkou.

□

VYHODNOCENÍ:

1. Metoda má stejné výhody jako metody tečen a sečen.
2. Kořen vždy leží mezi prvky a_k, b_k pro libovolné k .
3. Lze snáze odhadnout chybu.
4. Jde o oboustrannou konvergenci.



Obrázek 4.6: Geometrický smysl kombinované metody sečen a tečen

4.17 Příklady na procvičení

Kombinovanou metodou tečen a sečen najděte na intervalu $\langle a, b \rangle$ s přesností ε kořen rovnice $f(x) = 0$. Požadavkem *najít kořen s přesností ε* rozumíme požadavek zastavit výpočet, pokud pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ platí, že $|a_k - b_k| < \varepsilon$.

Všechny výsledky srovnajte s výsledky získanými pomocí metody sečen a modifikované Newtonovy metody. Číslování příkladů si odpovídá.

Příklad 4.28 $f(x) = e^x - \sin x - \frac{3}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $\varepsilon = 0,01$

Příklad 4.29 $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - x^2 - 1$, $a = 0,1$, $b = 1,1$, $\varepsilon = 0,01$

Příklad 4.30 $f(x) = \sin \frac{x}{2} - x^2$, $a = 0,2$, $b = 1,2$, $\varepsilon = 0,01$

Příklad 4.31 $f(x) = e^{\frac{x}{2}} \cos x - 1$, $a = 0,5$, $b = 1$, $\varepsilon = 0,01$

Příklad 4.32 $f(x) = e^x \sin x - \frac{1}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $\varepsilon = 0,01$

Příklad 4.33 $f(x) = e^{x^2} - x - \frac{4}{3}$, $a = 0$, $b = 1$, $\varepsilon = 0,01$

Příklad 4.34 $f(x) = x \sin x + \cos x - 2x^2$, $a = 0$, $b = 1$, $\varepsilon = 0,01$

Příklad 4.35 $f(x) = x \cos x - x^2 \sin x - x^2 + \frac{1}{5}$, $a = -1,5$, $b = -0,5$, $\varepsilon = 0,01$

Příklad 4.36 $f(x) = x \sin x - x^2 \cos x - x^3 + 1$, $a = 0,2$, $b = 1,2$, $\varepsilon = 0,01$

Příklad 4.37 $f(x) = x^3 - x^2 - x + \exp(x) - 2$, $a = 0,5$, $b = 1,5$, $\varepsilon = 0,01$

4.18 Řád metody

Při numerickém řešení rovnice $f(x) = 0$ (a to i na počítači) je řada činností, které není účelné algoritmizovat, ale je účelnější je provádět mimo rámec výpočtu – separace kořenů, výběr metody, ověření splnitelnosti předpokladů, volba počáteční aproximace, odhad chyby, ...

Definice 4.3 *Iterační proces $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ je r -tého řádu v bodě α , jestliže platí:*

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) &= \alpha, \\ \varphi'(\alpha) &= \varphi''(\alpha) = \dots = \varphi^{(r-1)}(\alpha) = 0, \\ \varphi^{(r)}(\alpha) &\neq 0.\end{aligned}$$

Nechť jsou derivace φ do řádu r včetně spojité v okolí bodu α . Potom podle Taylorova vzorce máme

$$\varphi(x) = \varphi(\alpha) + \frac{\varphi'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{\varphi''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \dots + \frac{\varphi^{(r-1)}(\alpha)}{(r-1)!}(x-\alpha)^{r-1} + \frac{\varphi^{(r)}(\xi)}{r!}(x-\alpha)^r, \xi \in (x, \alpha),$$

což si můžeme podle definice 4.3 přepsat na tvar

$$\varphi(x) = \varphi(\alpha) + \frac{\varphi^{(r)}(\xi)}{r!}(x-\alpha)^r$$

a protože $\varphi(\alpha) = \alpha$, $\varphi(x_n) = x_{n+1}$ máme

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{\varphi^{(r)}(\xi_n)}{r!}(x_n - \alpha)^r,$$

kde ξ_n leží mezi x_n a α a závisí na x_n .

Absolutní chyba aproximace x_{n+1} je tedy

$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{\varphi^{(r)}(\xi_n)}{r!}(x_n - \alpha)^r$$

a tedy máme odhad

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq K|(x_n - \alpha)^r|, \quad K = \sup \left| \frac{\varphi^{(r)}(\xi_n)}{r!} \right|.$$

Konstanta K se nazývá asymptotická konstanta chyby.

$$\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^r} = K \neq 0 \quad \text{jiná definice} \right)$$

Čím je r větší, tím rychleji nám iterační proces konverguje.

Metoda prosté iterace je řádu 1.

Metoda sečen je řádu $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

Metoda tečen je řádu 2.

Dokonce i varianta Newtonovy metody pro násobné kořeny je v bodě α řádu 2.

Varianta Newtonovy metody s 2. derivací je řádu 3.

Věta 4.8 *Nechť α je p -násobným kořenem rovnice $f(x) = 0$. Potom*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{pf(x_n)}{f^{(p)}(x_n)}$$

je v okolí bodu α řádu 2.

Důkaz: Podle předpokladů je $f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(p-1)}(\alpha) = 0$, $f^{(p)}(\alpha) \neq 0$. Tím se v Taylorově rozvoji anulují první členy a my máme

$$f(x) = \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!}(x - \alpha)^p + \dots,$$

označme si $A = \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!}$ a potom máme

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{pA(x_n - \alpha)^p + \dots}{pA(x_n - \alpha)^{p-1} + \dots} = x_n - (x_n - \alpha) \frac{1 + \dots}{1 + \dots} = \\ &= x_n - (x_n - \alpha)R(x), \end{aligned}$$

kde $R(\alpha) = 1$. Označme $\varphi(x) = x - \frac{pf(x)}{f^{(p)}(x)}$. Potom

$$\varphi(\alpha) = \alpha, \quad \varphi'(x) = 1 - R(x) - (x - \alpha)R'(x),$$

takže $\varphi'(\alpha) = 0$, ale obecně je $\varphi''(\alpha) \neq 0$ a tedy je to metoda 2. řádu. □

4.19 Algebraické rovnice

Definice 4.4 *Algebraická rovnice je výraz tvaru $P_n(x) = 0$, kde*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pro určení kořenů algebraické rovnice můžeme použít všechny předchozí metody. Algebraické rovnice se však vyskytují velmi často v nejrozličnějších aplikacích a mají své vlastní specifické vlastnosti. Proto se jimi budeme zabývat zvlášť.

Věta 4.9 O poloze kořenů.

Mějme rovnici $P_n(x) = 0$. Označme

$$A = \max\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \dots, |a_0|\}, \quad B = \max\{|a_n|, |a_{n-1}|, \dots, |a_1|\},$$

potom pro kořeny x_k polynomu $P_n(x)$ platí

$$\frac{|a_0|}{|a_0| + B} \leq |x_k| \leq \frac{|a_n| + A}{|a_n|}.$$

Bez důkazu.

Příklad 4.38 *Odhadnout polohu kořenů pro rovnici*

$$P_6(x) = x^6 + 101x^5 + 425x^4 - 425x^2 - 101x - 1 = 0.$$

Máme $A = 425$, $B = 425$ a dosazením dostaneme

$$\frac{1}{1 + 425} \leq |x_k| \leq \frac{1 + 425}{1},$$

$$\frac{1}{426} \leq |x_k| \leq 426.$$

Přesné řešení v tomto případě je

$$\begin{array}{ll} x_1 = 1 & x_4 = -0.241 \\ x_2 = -1 & x_5 = -4.143 \\ x_3 = -0.0104 & x_6 = -96.601 \end{array}$$

a všechny kořeny leží v námi určeném intervalu.

Věta 4.10 Cauchyova o poloze kořenů.

Všechny kořeny polynomu $P_n(x)$ jsou obsaženy v kruhu Γ v komplexní rovině, kde

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 + \eta_k\}$$

a

$$\eta_k = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|.$$

Bez důkazu.

Věta 4.11 Descartesova¹⁸

Počet kladných kořenů rovnice $P_n(x) = 0$ je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$, přičemž nulové koeficienty jsou vynechány, a nebo je o sudý počet menší.

Bez důkazu.

Příklad 4.39 Polynom s kladnými koeficienty nemůže mít žádné kladné kořeny, protože v posloupnosti jeho koeficientů není žádná znaménková změna.

Důsledek 4.4 Počet záporných kořenů dostaneme z Descartesovy věty, když místo polynomu $P_n(x)$ vezmeme $P_n(-x)$.

Příklad 4.40 Odhadnout počet kladných a záporných kořenů pro rovnici

$$P_6(x) = x^6 + 101x^5 + 425x^4 - 425x^2 - 101x - 1 = 0.$$

V posloupnosti $\{1, 101, 425, -425, -101, -1\}$ je pouze jedna znaménková změna a proto bude mít tento polynom pouze jeden kladný kořen. Pro záporné kořeny máme

$$P_6(-x) = x^6 - 101x^5 + 425x^4 - 425x^2 + 101x - 1 = 0.$$

V posloupnosti $\{1, -101, 425, -425, 101, -1\}$ je pět znaménkových změn a proto tento polynom může mít pět záporných kořenů a nebo tři a nebo jen jeden.

Jde o stejný polynom jako v příkladu 4.38 a proto víme, že náš polynom má pět záporných kořenů.

Definice 4.5 Sturmovou¹⁹ posloupností pro polynom $P_n(x)$ nazveme posloupnost

$M(x), M_1(x), \dots, M_r(x)$, kde

$M(x) = P_n(x)$,

$M_1(x) = M'(x)$,

$M_2(x)$ je zbytek po dělení $M(x) : M_1(x)$ násobený číslem (-1) ,

$M_3(x)$ je zbytek po dělení $M_1(x) : M_2(x)$ násobený číslem (-1) ,

atd.

$M_r(x)$ je zbytek po dělení $M_{r-2}(x) : M_{r-1}(x)$ násobený číslem (-1) ,

přičemž zbytek $M_{r+1}(x)$ po dělení $M_{r-1}(x) : M_r(x)$ je nulový.

Věta 4.12 Sturmova.

Označme $N(c)$ počet znaménkových změn ve Sturmově posloupnosti pro $x = c$, přičemž nulové prvky vynecháme. Jestliže polynom $P_n(x)$ nemá násobné kořeny a jestliže je $P_n(a) \neq 0$, $P_n(b) \neq 0$, potom počet reálných kořenů tohoto polynomu ležících v intervalu (a, b) je roven $N(a) - N(b)$.

¹⁸**R.Descartes** (1596 – 1650) francouzský matematik, filosof, fyzik, fyziolog. Jeden ze zakladatelů moderní vědy. Hlavní význam má jeho zavedení analytické geometrie. Pravděpodobně se zúčastnil bitvy na Bílé hoře na straně císařských.

¹⁹**J.Ch.F.Sturm** (1803 – 1855) francouzsko-švýcarský matematik. Zabýval se především diferenciálními rovnicemi.

Bez důkazu.

Příklad 4.41 Mějme rovnici $x^4 - 4x + 1 = 0$, potom

$$M(x) = x^4 - 4x + 1,$$

$$M_1(x) = 4x^3 - 4 \Rightarrow M_1(x) = x^3 - 1,$$

Vždy dělíme polynom polynomem, můžeme jej proto i vynásobit kladným číslem, tím se ovlivní pouze velikost a ne znaménko.

$$M_2(x) = 3x - 1,$$

$$M_3(x) = 1.$$

Potom máme

	$-\infty$	0	$+\infty$
M	+	+	+
M_1	-	-	+
M_2	-	-	+
M_3	+	+	+
$N(c)$	2	2	0

Počet záporných kořenů je $N(-\infty) - N(0) = 2 - 2 = 0$.

Počet kladných kořenů je $N(0) - N(+\infty) = 2 - 0 = 2$.

Přesné řešení je

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.250992157490491, \\ x_2 &= 1.4933585565601, \\ x_{3,4} &= -0.872175357025343 \pm i1.38103159782422 \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice dostaneme chybu řádově 10^{-19} .

Poznámka 4.1 Připomeňme si, jak se dělí polynomy. Dělíme mezi sebou první členy polynomů - v našem případě dělíme první člen, tj. x^4 členem x^3 a dostaneme

$$x^4 - 4x + 1 : x^3 - 1 = x + ?.$$

Nyní prvkem x vynásobíme dělence a odečteme od dělitele

$$x^4 - 4x + 1 - (x^3 - 1) \cdot x = x^4 - 4x + 1 - x^4 - x = -3x + 1.$$

Protože stupeň výsledného polynomu je menší jak stupeň dělitele, ukončujeme výpočet. Pokud by byl stupeň výsledku větší nebo roven stupni dělitele, pokračujeme ve výpočtu stejným způsobem = dělíme první členy polynomů mezi sebou a ... Takže jsme dostali

$$x^4 - 4x + 1 : x^3 - 1 = x, \text{ zbytek } -3x + 1$$

a nebo, jiný zápis

$$\frac{x^4 - 4x + 1}{x^3 - 1} = x + \frac{-3x + 1}{x^3 - 1}.$$

Ve Sturmově větě požadujeme, aby $P_n(x)$ měl pouze prosté kořeny.

Věta 4.13 *Jestliže pro poslední člen Sturmovy posloupnosti platí $M_r = \text{const.}$, pak má $P_n(x)$ pouze prosté kořeny.*

Důkaz: Nechť $P_n(x)$ má i násobné kořeny, zapíšeme si polynom $P_n(x)$ ve tvaru součinu kořenových činitelů

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_m)^{k_m},$$

kde x_1, x_2, \dots, x_m jsou navzájem různé kořeny $P_n(x)$ a k_1, k_2, \dots, k_m jsou jejich násobnosti. Potom

$$\begin{aligned} P'_n(x) &= a_n[k_1(x - x_1)^{k_1-1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_m)^{k_m} + \\ &+ (x - x_1)^{k_1}k_2(x - x_2)^{k_2-1} \dots (x - x_m)^{k_m} + \dots + \\ &+ (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots k_m(x - x_m)^{k_m-1}] = \\ &= a_n(x - x_1)^{k_1-1}(x - x_2)^{k_2-2} \dots (x - x_m)^{k_m-1} \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cdot [k_1(x - x_2) \dots (x - x_m) + (x - x_1)k_2(x - x_3) \dots (x - x_m) + \dots + (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{m-1})k_m] = \\ &= R(x)Q(x), \end{aligned}$$

kde $Q(x_k) \neq 0 \forall k = 1, 2, \dots, m$. Polynom $R(x)$ je největším společným dělitelem $P_n(x)$ a $P'_n(x)$. Určíme jej Eukleidovým²⁰ algoritmem. Potom

$$\frac{P_n(x)}{R(x)} = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)$$

má pouze prosté kořeny. Když si uvědomíme, že Sturmova posloupnost je shodná s Eukleidovým algoritmem (pro polynomy $P_n(x)$ a $P'_n(x)$) s přesností do znaménka, máme důkaz věty. \square

Důsledek 4.5 *Je-li α kořenem $P_n(x)$ a $P'_n(\alpha) = 0$, pak je α násobným kořenem. Je-li α kořenem $P_n(x)$ a je-li $P'_n(\alpha) \neq 0$, pak je α prostým kořenem.*

4.20 Příklady na procvičení

U každé z následujících rovnic určete horní a dolní odhad absolutní hodnoty kořenů, počet kladných a záporných kořenů (pomocí Descartovy věty), sestrojte Sturmovu posloupnost a podle Sturmovy věty určete počet kořenů ležících na intervalech $(-\infty, -10)$, $\langle -10, 10 \rangle$, $(10, \infty)$. Dále metodou Graeff-Lobačevského určete absolutní hodnoty reálných kořenů této rovnice (vycházejte z $P^2(x)$).

Příklad 4.42 $x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 36x - 36 = 0$

²⁰**Eukleides z Alexandrie** (asi 340 př.n.l. – asi 278 př.n.l.) Starořecký matematik, autor nejvýznamnější matematické knihy celé dosavadní historie. Zabýval se geometrií, optikou, teorií hudby. Jako jeden z prvních se začal zabývat logickými základy matematiky. Jeho hlavním dílem je kniha “Základy” (řecky “Stoicheia”), která byla skoro 2000 let učebnicí matematiky a dodnes neztratila svoji důležitost. Obsahuje planimetrii, stereometrii, geometrickou algebru, řešení kvadratických rovnic, teorii čísel aj. Je to první pokus o axiomatickou výstavbu matematické teorie.

Příklad 4.43 $x^5 + 11x^4 - 15x^3 - 155x^2 + 134x + 264 = 0$

Příklad 4.44 $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0$

Příklad 4.45 $x^3 - 9x^2 + 20x - 12 = 0$

Příklad 4.46 $80x^4 - 164x^3 - 240x^2 + 13x + 5 = 0$

Příklad 4.47 $20x^4 - 48x^3 - 389x^2 - 288x + 36 = 0$

Příklad 4.48 $2x^4 + 70x^3 + 290x^2 + 160x + 48 = 0$

Příklad 4.49 $x^3 + 9x^2 - 306x - 3240 = 0$

Příklad 4.50 $256x^4 - 96x^3 - 192x^2 + 46x + 21 = 0$

Příklad 4.51 $x^5 - 13x^4 + 63x^3 - 139x^2 + 136x - 48 = 0$

4.21 Metoda Laguerrova

Předpokládejme, že koeficienty polynomu $P_n(x)$ jsou reálné a všechny jeho kořeny jsou reálné a navíc prosté. Seřadíme si je podle velikosti. Nechť platí $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$. Definujme si dále $\alpha_0 = -\infty$, $\alpha_{n+1} = +\infty$, a označme $I_i = \langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle$, $i = 0, 1, \dots, n$. Potom, pro každé $\alpha \neq \alpha_j$, $j = 0, 1, \dots, n+1$, existuje právě jedno i takové, že platí $\alpha \in I_i$.

Sestrojíme si nyní kvadratickou funkci, která bude mít oba kořeny v I_i a v bodě α bude mít zápornou hodnotu. Takových funkcí můžeme sestrojit nekonečně mnoho.

Hlavní myšlenkou Laguerrovy metody je sestrojit takovou parabolu (grafem kvadratické funkce je parabola), která bude protínat osu x co nejbližše koncům intervalu I_i . Tím dostáváme iterační posloupnost

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k - \frac{nP_n(\alpha^k)}{(P_n(\alpha^k))' \pm \sqrt{H(\alpha^k)}}, \quad (4.1)$$

kde

$$H(\alpha) = (n-1) \left((n-1)(P_n'(\alpha))^2 - nP_n(\alpha)P_n''(\alpha) \right).$$

Věta 4.14 *Nechť P je reálný polynom stupně $n \geq 1$, jehož všechny kořeny jsou reálné a navzájem různé. Nechť α^0 je počáteční aproximace a $P(\alpha^0) \neq 0$. Potom iterační proces (4.1), kde znaménko před odmocninou volíme rovné $\text{sign}P'(\alpha^k)$, vytváří posloupnost $\{\alpha^k\}_{k=0}^\infty$, která konverguje monotonně a kubicky k některému z kořenů polynomu P .*

Je-li $P'(\alpha^k) = 0$, potom volíme znaménko před odmocninou v první iteraci libovolně. Přitom $P'(\alpha^k) \neq 0$ pro $k = 1, 2, \dots$.

Příklad 4.52 *Mějme polynom $P(x) = x \left(\frac{1}{3}x^2 + a^2 \right)$, $a > 0$. Potom $P(a) \neq 0$. Jestliže zvolíme $x^0 = a$, potom budeme dostávat*

$$x^{\text{sudé číslo}} = a, \quad x^{\text{liché číslo}} = -a.$$

Ke konvergenci nám stačí zvolit jinou počáteční aproximaci.

4.22 Metoda Graeffova – Lobačevského

Metoda Graeffova – Lobačevského²¹ slouží k přibližnému stanovení polohy všech kořenů polynomu. Nulové kořeny přitom předem vyloučíme, takže všude dále předpokládáme, že $a_0 \neq 0$.

Zapišme si rozklad $P_n(x)$ na kořenové činitele

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Jestliže nyní pravou stranu roznásobíme, pak srovnáním koeficientů dostaneme tzv. Vietovy²² vzorce.

$$\begin{aligned} \frac{a_{n-1}}{a_n} &= -(x_1 + x_2 + \cdots + x_n), \\ \frac{a_{n-2}}{a_n} &= (-1)^2 (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n), \\ &\quad \dots \\ \frac{a_0}{a_n} &= (-1)^n (x_1 x_2 x_3 \cdots x_n). \end{aligned}$$

Princip Graeffovy-Lobačevského metody si ukážeme na příkladu. Mějme kvadratickou rovnici $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, potom podle Vietových vzorců platí

$$x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2}, \quad x_1 x_2 = \frac{a_0}{a_2}. \quad (4.2)$$

Jestliže se kořeny (v absolutní hodnotě) od sebe dostatečně liší, t.j. $x_1 \gg x_2$, potom

$$\left| \frac{x_2}{x_1} \right| \ll 1,$$

potom

$$x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2},$$

$$x_1 \left(1 + \frac{x_2}{x_1} \right) = -\frac{a_1}{a_2}.$$

Zanedbáním druhého sčítance dostaneme

$$x_1 \approx -\frac{a_1}{a_2}.$$

²¹ **K.L.Graeffe** (1799 – 1873) německý matematik, žák K.F.Gausse. Věnoval se algebře, teoretické mechanice, historii matematiky. Metodu řešení algebraické rovnice navrhnul v r.1837.

N.I.Lobačevskij (1792 – 1856) ruský matematik. Vystudoval universitu v Kazani a celý život tam působil. Do historie matematiky vešel jako tvůrce neeukleidovské geometrie. První práce jsou z r.1826. Přestože byl vystaven nevybíravým útokům a zůstal prakticky nepochopen a osamocen, pokračoval v rozvíjení své geometrie. Uznání se mu dostalo až posmrtně.

²² **F.Viete** (1540 – 1603) francouzský matematik a právník. Jeho matematické práce byly psány velmi těžkým jazykem a proto dlouho nevěšly v obecnou známost. Jako první zavedl označování nejen neznámých ale i koeficientů písmeny, přitom počáteční písmena abecedy vyhradil pro koeficienty a koncová písmena pro neznámé. Rozluštil kód, který používali Španělé ve válce proti Francii.

Dosazením této hodnoty do rovnice

$$x_1 x_2 = \frac{a_0}{a_2}$$

dostaneme

$$x_2 \approx -\frac{a_0}{a_1}.$$

Tyto hodnoty můžeme brát jako první přiblížení.

Umocníme (4.2) a po úpravě máme

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{a_1^2 - 2a_0a_2}{a_2^2}, \quad x_1^2 x_2^2 = \frac{a_0^2}{a_2^2}.$$

Protože známe součet a součin kvadrátů kořenů, můžeme si sestavit rovnici $b_2 y^2 + b_1 y + b_0 = 0$ s kořeny $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$, kde

$$b_2 = a_2^2, \quad b_1 = -(a_1^2 - 2a_0a_2), \quad b_0 = a_0^2.$$

Zcela analogicky můžeme určit i jejich aproximace

$$y_1 \approx -\frac{b_1}{b_2}, \quad y_2 \approx -\frac{b_0}{b_1},$$

a odtud plyne, že

$$|x_1| \approx \sqrt{\left|\frac{b_1}{b_2}\right|}, \quad |x_2| \approx \sqrt{\left|\frac{b_0}{b_1}\right|}.$$

Přičemž jestliže je $\left|\frac{x_2}{x_1}\right| \ll 1$, tak člen $\left|\frac{x_2^2}{x_1^2}\right|$ bude ještě menší a tedy aproximace bude lepší.

O znaménku rozhodneme na základě dosazení do původní rovnice. A můžeme pokračovat dále.

Toto je v kostce základní princip G – L metody.

Obecně chceme najít aproximaci kořenů x_1, \dots, x_n rovnice $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, $a_n \neq 0$, přičemž předpokládáme, že kořeny tohoto polynomu jsou dobře rozlišitelné, t.j. $|x_1| > |x_2| > \dots > |x_n|$. Vytvoříme si posloupnost polynomů $P^0, P^1, \dots, P^k, \dots$, kde

$$\begin{aligned} P^0 &= P_n(x), \\ P^k(x) &= a_n^k x^n + a_{n-1}^k x^{n-1} + \dots + a_1^k x + a_0^k, \\ a_n^k &= (a_n^{k-1})^2, \\ -a_{n-1}^k &= (a_{n-1}^{k-1})^2 - 2a_n^{k-1} a_{n-2}^{k-1}, \\ a_{n-2}^k &= (a_{n-2}^{k-1})^2 - 2a_{n-1}^{k-1} a_{n-3}^{k-1} + 2a_n^{k-1} a_{n-4}^{k-1}, \\ &\dots \\ (-1)^{n-1} a_1^k &= (a_1^{k-1})^2 - 2a_2^{k-1} a_0^{k-1}, \end{aligned}$$

$$(-1)^n a_0^k = (a_0^{k-1})^2.$$

A pro kořeny pak platí

$$|x_j| = \sqrt[2^k]{\left| \frac{a_{n-j}^k}{a_{n-j+1}^k} \right|}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Výpočet zastavujeme, jestliže platí $|a_i^k| \approx (a_i^{k-1})^2 \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, n$.

VYHODNOCENÍ:

1. Podmínka dobré *rozlišitelnosti kořenů* znamená, že předpokládáme, že $P_n(x)$ má pouze reálné prosté kořeny.
2. Jestliže se absolutní hodnoty kořenů liší od sebe velmi málo, potom G – L metoda konverguje velmi pomalu – nevýhoda této metody.
3. Nepožaduje se separace kořenů. Stačí odstranit násobné, jako u Sturmovy věty.
4. Problematická je i otázka přesnosti.
5. Metoda nám určí *slušné* přiblížení kořene, které je potom nutno spřesnit jinou metodou.

Jestliže v posloupnosti $\{a_i^k\}, k = 1, 2, \dots, i = 0, 1, \dots, n$ dochází ke znaménkovým změnám, znamená to (ve většině případů), že polynom má i komplexní kořeny.

Předpokládejme, že

$$|\alpha_1| > |\alpha_2| > \dots > |\alpha_i| = |\alpha_{i+1}| > |\alpha_{i+2}| > \dots > |\alpha_n|,$$

$$\alpha_i = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

$$\alpha_{i+1} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi),$$

$$|\alpha_i| = |\alpha_{i+1}| = r.$$

Potom

$$r^2 = |\alpha_i| \cdot |\alpha_{i+1}| \approx \sqrt[2^k]{\left| \frac{a_{n-i}^k}{a_{n-i+1}^k} \right|} \sqrt[2^k]{\left| \frac{a_{n-i-1}^k}{a_{n-i}^k} \right|} = \sqrt[2^k]{\left| \frac{a_{n-i-1}^k}{a_{n-i+1}^k} \right|}$$

a potom

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$\alpha_i + \alpha_{i+1} = 2r \cos \varphi,$$

$$2r \cos \varphi = -\frac{a_{n-1}}{a_n} - \sum_{k=1, k \neq i, i+1}^n \alpha_k.$$

Známe součet a součin kořenů, aproximaci kořenů pak získáme řešením kvadratické rovnice

$$\xi^2 - (2r \cos \varphi)\xi + r^2 = 0,$$

$$\xi^2 - \left(-\frac{a_{n-1}}{a_n} - \sum_{k=1, k \neq i, i+1}^n \alpha_k \right) \xi + \sqrt[n]{\left| \frac{a_{n-i-1}^k}{a_{n-i+1}^k} \right|} = 0.$$

Opět je nutné počítat s chybou a výsledek doiterovat jinou metodou.

Příklad 4.53 *Graeffovou-Lobačevského metodou určete kořeny rovnice*

$$z^4 - 4z^3 + 3z^2 + 2z - 6 = 0$$

Řešení: Máme polynom 4. stupně. Sestavíme si odpovídající posloupnost polynomů s koeficienty a_i , $i = 0, 1, 2, 3, 4$:

k	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
0	1	-4	3	2	-6
1	1	-10	13	-40	36
2	1	-74	-559	-664	1296
3	1	-6594	218801	-1889824	1679616

Potom

$$|\alpha_1| \approx \sqrt[8]{\frac{6594}{1}} \doteq 3.001882007.$$

Dosazením do polynomu dostaneme

$$P_4(3.001882007) \approx 0.0377,$$

$$P_4(-3.001882007) \approx 204.44.$$

Proto za aproximaci prvního kořene přijímáme hodnotu $+3.001882007$. Dále

$$|\alpha_2| \approx \sqrt[8]{\frac{1679616}{1889824}} \doteq 0.9853682858.$$

Dosazením do polynomu dostaneme

$$P_4(0.9853682858) \approx -4.006,$$

$$P_4(-0.9853682858) \approx -0.288.$$

Proto za aproximaci prvního kořene přijímáme hodnotu -0.9853682858 . V dalších sloupcích dochází ke střídání znamének, budeme proto hledat komplexní kořeny:

$$r^2 = \sqrt[8]{\frac{1889824}{6594}} \approx 2.028425455 \approx |\alpha_3 \alpha_4|,$$

$$2r \cos \varphi = 4 - \alpha_1 - \alpha_2 \doteq 1.983486276.$$

Určíme si řešení kvadratické rovnice

$$\zeta^2 - 1.983486276\zeta + 2.028425455 = 0,$$

$$\alpha_{3,4} = 0.991743139 \pm j1.022289317.$$

4.23 Metoda Schurova

Mějme polynom

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad (4.3)$$

který je obecně vzato komplexní. I když metodu můžeme použít i pro reálné polynomy. Označme

$$f^*(z) = z^n \overline{f(\bar{z}^{-1})} = \overline{a_n} + \overline{a_{n-1}} z + \cdots + \overline{a_0} z^n,$$

kde \bar{u} je číslo komplexně sdružené k číslu u . Dále

$$T(f(z)) = \overline{a_0} f(z) - a_n f^*(z).$$

Speciálně platí

$$T(f(0)) = \overline{a_0} a_0 - a_0 \overline{a_n} = |a_0|^2 - |a_n|^2,$$

neboli $T(f(0))$ je reálné číslo.

Protože $T(f(z))$ je polynomem stupně nejvýše $n-1$, můžeme si definovat posloupnost polynomů

$$T^j(f(z)) = T(T^{j-1}(f(z))),$$

které mají klesající stupeň a proto jde o konečnou posloupnost.

Věta 4.15 Označme k nejmenší celé číslo, pro které platí $T^k(f(0)) = 0$. Nechť $f(0) \neq 0$. Jestliže pro $h : 0 < h < k$ platí, $T^h(f(0)) < 0$, potom má polynom nejméně jeden kořen uvnitř jednotkového kruhu se středem v počátku.

Je-li naopak $T^i(f(0)) > 0$ pro $1 \leq i \leq k$ a $T^{k-1}(f(z))$ je konstanta, neleží uvnitř jednotkového kruhu se středem v počátku žádný kořen.

Na základě této věty platí:

1. Je-li $f(0) = 0$, potom existuje kořen $z = 0$.
Je-li $f(0) \neq 0$, potom jdeme na bod 2.
2. Vypočteme $T(f(z))$. Je-li $T(f(0)) < 0$ existuje uvnitř jednotkového kruhu kořen.
Je-li $T(f(0)) \geq 0$ jdeme na bod 3.
3. Vypočítáme postupně $T^j(f(z))$ pro $j = 1, 2, \dots$, až buď $T^j(f(z)) < 0$ pro nějaké $j < k$, nebo $T^k(f(0)) = 0$.
V prvním případě leží uvnitř jednotkového kruhu aspoň jeden kořen.
Nastane-li druhý případ a je-li polynom $T^{k-1}(f(z))$ konstantní, neleží uvnitř jednotkového kruhu žádný kořen.

Poznámka 4.2 Všimněte si, že je-li $T^k(f(0)) = 0$ a $T^{k-1}(f(z))$ není konstanta, potom věta (4.15) neříká nic.

Má-li polynom $f(z)$ kořen uvnitř kruhu $|z| = \varrho$, potom má polynom

$$g(z) = f(\varrho z)$$

kořen uvnitř jednotkového kruhu.

A obecně: má-li $f(z)$ kořen uvnitř kruhu $|z - c| = \varrho$, má polynom

$$g(z) = f(\varrho z + c)$$

kořen uvnitř jednotkového kruhu.

Při hledání kořene proto postupujeme následovně:

1. Nemá-li polynom $f(z)$ kořen uvnitř jednotkového kruhu, budeme uvažovat polynom $g(z) = f(2z)$ a zkoumat, má-li kořen uvnitř jednotkového kruhu. Nemá-li, budeme zkoumat polynom $f(2^2 z)$, atd. Budeme pokračovat až nalezneme mezikruží

$$R = z^j \leq |z| < z^{j+1} = 2R, \quad (4.4)$$

takové, že polynom f má kořen v tomto mezikruží a současně nemá žádný kořen uvnitř kruhu o poloměru R .

Má-li polynom $f(z)$ kořen uvnitř jednotkového kruhu, potom budeme půlit polomeř tak dlouho, až dostaneme nerovnost typu (4.4). Opět tedy budeme mít mezikruží, ve kterém leží kořen.

2. Mezikruží (4.4) lze úplně pokrýt 8 překrývajícími se kruhy o poloměru $\frac{4}{5}R$ a se středy v bodech

$$\frac{3R}{2 \cos \frac{1}{8}\pi} e^{\frac{2\pi j k}{8}}, \quad k = 0, 1, \dots, 7.$$

Postupně prověřujeme jednotlivé kruhy, až nalezneme kruh, ve kterém leží aspoň jeden kořen.

3. Označme střed tohoto kruhu C_1 a pokračujeme jako v bodě 1. Přitom v každém kruhu půlíme polomeř. Začínáme od $\frac{4}{5}R$ až dostaneme mezikruží

$$R_1 = \frac{4}{5}R \cdot 2^{-j_1} \leq |z - C_1| < \frac{4}{5}R \cdot 2^{-(j_1-1)} = 2R_1,$$

které obsahuje kořen polynomu f . Stejně jako v bodě 2 pokryjeme mezikruží 8 kruhy.

Postup opakujeme pokud je třeba.

Příklad 4.54 Určete kořeny polynomu $f(z) = 4z^3 - 8z^2 + 9z - 18$.

Řešení: Sestrojíme si posloupnost polynomů:

$$f^*(z) = -18z^3 + 9z^2 - 8z + 4.$$

$$f_1(z) = T(f(z)) = -18f(z) - 4f^*(z) = 108z^2 - 130z + 308,$$

$$T(f(0)) = 0,$$

$$f_1^*(z) = 308z^2 - 130z + 108,$$

$$f_2(z) = T(f_1(z)) = T^2(f(z)) = 308f_1(z) - 108f_1^*(z) = 400(-65z + 208),$$

$$T^2(f(0)) = 83200,$$

$$f_2^*(z) = 400(208z - 65),$$

$$T(f_2(z)) = T^3(f(z)) = (208^2 - 65^2) \cdot 400^2,$$

$$T^3(z) = \textit{konstanta},$$

$$T^4(f(0)) = 0.$$

Tím jsme prokázali, že uvnitř jednotkového kruhu neleží žádný kořen. Pro $g(z) = f(2z)$ dostaneme

$$T(g(z)) = 700z - 700,$$

neboli

$$T(g(0)) = -700 < 0$$

a proto má $f(z)$ kořen v mezikruží $1 \leq |z| < 2$. A můžeme pokračovat dále. Přesné řešení je

$$z_1 = +2, \quad z_{2,3} = \pm \frac{3}{2}j.$$

4.24 Shrnutí

Seznámili jsme se s numerickými metodami řešení lineárních i nelineárních rovnic. Po úvodním seznámením se startovacími metodami - grafickou, tabelovací a metodou půlení intervalu, jsme přešli k iteračním metodám různých typů.

Iterační metody vyžadují pro svoji konvergenci splnění dalších doplňujících podmínek, bude pro nás vždy výhodné, pokud dokážeme vhodnou startovací metodou zúžit interval, na kterém hledáme kořen naší rovnice.

Seznámili jsme se s metodou prosté iterace, s metodami tečen a sečen a s jejich modifikacemi.

V závěru jsme se věnovali algebraickým rovnicím. Při řešení algebraických rovnic můžeme použít všechny dříve uvedené metody, ale protože algebraické rovnice mají i své specifické vlastnosti, které můžeme využít při hledání kořenů, věnovali jsme se jim samostatně.

5 Vlastní čísla

5.1 Úvod

Budeme se věnovat vlastním číslům a vlastním vektorům matic. Definujeme si oba pojmy, ukážeme si jejich základní vlastnosti a seznámíme se s vybranými metodami jejich numerického určení.

Vlastní čísla matic hrají důležitou úlohu například v teorii systémů diferenciálních rovnic.

5.2 Základní pojmy

Definice 5.1 *Nechť \mathbf{A} je čtvercová matice řádu n . Její vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou kořeny rovnice*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

zvané charakteristická rovnice. Ke každému vlastnímu číslu λ_i existuje aspoň jedno nenulové řešení soustavy rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_i\mathbf{x}$. Toto řešení \mathbf{x}_i , kde $\mathbf{x}_i^T = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(n)})$, nazveme pravým vlastním vektorem matice \mathbf{A} . (Všude v dalším bude pojem vlastní vektor značit výhradně pravý vlastní vektor.) Levý vlastní vektor \mathbf{y}_i odpovídající vlastnímu číslu λ_i je řešením rovnice $\mathbf{y}_i^T \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{y}_i^T$. Levý vlastní vektor matice \mathbf{A} je tedy vlastním vektorem transponované matice \mathbf{A}^T a snadno lze ukázat, že odpovídá-li levý vlastní vektor \mathbf{y}_k vlastnímu číslu λ_k a pravý vlastní vektor \mathbf{x}_i vlastnímu číslu λ_i a platí $\lambda_k \neq \lambda_i$ jsou vektory \mathbf{y}_k a \mathbf{x}_i ortogonální.

(Ve většině dále uvedených příkladů se budou vyskytovat reálné matice, budeme předpokládat, pokud nebude řečeno jinak, že matice \mathbf{A} je reálná. Mnohé věty budou však platit i pro komplexní matice nebo budeme-li předpokládat symetrii, pro hermitovské matice, jejich důkazy viz. [2])

Věta 5.1 *Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vlastní čísla matice \mathbf{A} , má matice \mathbf{A}_k vlastní čísla $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$. Obecněji, je-li $p(\mathbf{x})$ libovolný polynom, má matice $p(\mathbf{A})$ vlastní čísla*

$$p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n).$$

Věta 5.2 *Je-li matice \mathbf{A} reálná a symetrická, jsou všechna její vlastní čísla a všechny příslušné vlastní vektory reálné. Kromě toho vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou ortogonální a levý vlastní vektor a pravý vlastní vektor příslušné témuž vlastnímu číslu jsou si rovny.*

Věta 5.3 *Podobnostní transformace $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^{-1}$ nemění vlastní čísla matice \mathbf{A} .*

Věta 5.4 (Cayley-Hamilton) *Nechť je $f(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ charakteristická rovnice matice \mathbf{A} . Pak platí $f(\mathbf{A}) = 0$.*

Věta 5.5 *Vlastní čísla horní (dolní) trojúhelníkové matice jsou prvky na její diagonále.*

Věta 5.6 *Libovolná matice \mathbf{A} je podobná diagonální matici \mathbf{D} právě tehdy, když má kompletní soubor n lineárně nezávislých vlastních vektorů.*

5.3 Numerické metody pro hledání vlastních čísel

Podle základní definice víme, že vlastní čísla dané matice jsou kořeny jejího charakteristického polynomu. Z algebraické teorie víme, že kořeny polynomu stupně $n > 4$ nemůžeme algebraicky (tj. pomocí operací $\pm, \times, \div, \sqrt{}$ vyjádřit ve tvaru vzorce. Proto se obecně nedají získat vlastní čísla přesně (až na zaokrouhlovací chyby) po konečném počtu operací. K řešení našeho problému můžeme přistupovat více způsoby.

1. Použijeme-li libovolnou metodu na hledání kořenů charakteristického polynomu $p(\lambda)$. Pro jednoduchý kořen můžeme použít *Newtonovu metodu*

$$c_{i+1} = c_i - p(c_i)/p'(c_i) \quad i = 1, 2, \dots$$

při vhodné volbě počáteční aproximace c_0 , *metodu sečen*, *metodu půlení intervalu* atd. Modifikovaná Newtonova metoda se dá použít i na hledání násobných kořenů. V případě komplexně sdružené dvojice kořenů můžeme použít např. *Bairstowovu metodu*. Hledání velkého počtu kořenů tímto způsobem je však dost náročné a problém bývá nestabilní.

2. Získání vlastních čísel bez znalostí charakteristického polynomu, při využívání vlastností podobných matic. Cílem je najít podobnou matici v jednodušším tvaru, ze kterého se dá vlastní číslo určit (například z diagonální nebo trojúhelníkové matice). Takovou matici (někdy jen některé její vlastní číslo) můžeme získat jako limitu posloupnosti podobnostních transformací. Výběr těchto transformací bývá založen na speciálních vlastnostech matic a jejich vlastních vektorů

3. Nelineární přístup, vlastní problém

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

uvažujeme jako soustavu n rovnic pro $n + 1$ neznámých $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \lambda$, kterou doplníme normovanou podmínkou například $\sum \mathbf{x}_i^2 = 1$ na soustavu $n + 1$ nelineárních rovnic. Tato soustava se dá řešit například Newtonovou metodou. Přitom se však nevyužívají algebraické vlastnosti soustavy, které můžou výpočet značně ulehčit. Proto je tento postup značně neefektivní.

Poznámka 5.1 Pod pojmem *úplný problém vlastních čísel* se rozumí úloha najít všechna vlastní čísla a případně i příslušné vlastní vektory.

Pojem *částečný problém vlastních čísel* znamená najít jedno nebo více vlastních čísel spolu s příslušnými vlastními vektory.

Úplný a částečný problém vystupují jako naprosto odlišné úlohy nejen oborem implikací, ale i metodami řešení.

Řešení úplného problému je náročnější. Neexistuje univerzální algoritmus, který by byl stejně efektivní pro všechny typy matic

5.4 Klasické metody určení koeficientů charakteristického polynomu

Dříve se většina metod na výpočet vlastních čísel zakládala právě na výpočtu koeficientů charakteristického polynomu. Jejich výpočet pomocí součtu hlavních minorů je však nerentabilní. Existují mnohem jednodušší metody na určení koeficientů, které mají stejný charakter (tj. při výpočtu bez zaokrouhlování získáme po konečném počtu kroků přesné koeficienty). Zaokrouhlovací chyby však můžou vypočítané koeficienty hodně oddálit od jejich přesných hodnot. Proto se tyto metody moc nepoužívají.

5.4.1 Krylovova metoda

Charakteristickou rovnici můžeme zapsat ve tvaru

$$p(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \lambda^i = 0.$$

Z Cayleyovy – Hamiltonovy věty plyne

$$\mathbf{A}^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \mathbf{A}^i = \mathbf{0}.$$

Tedy pro každý vektor \mathbf{y} platí

$$\mathbf{A}^n \mathbf{y} + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \mathbf{A}^i \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (5.1)$$

Rovnice (5.1) je soustava n lineárních rovnic pro n neznámých b_0, \dots, b_{n-1} .

Poznámka 5.2 K výpočtu vektoru $\mathbf{A}^i \mathbf{y}$ podle rovnice $\mathbf{A}^i \mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{i-1} \mathbf{y})$ je třeba n^2 násobení, takže k sestavení soustavy (5.1) je třeba řádově n^3 operací.

5.4.2 Faddějevova-Leverrierova metoda

Metoda se opírá o fakt, že součet vlastních čísel libovolné matice je roven její stopě. Algoritmus Faddějevovy-Leverrierovy metody počítá jednoduchým způsobem kořeny charakteristické rovnice.

Algoritmus 1 Je dána matice \mathbf{A} řádu n .

Krok 1: Položme $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}$ pak $p_1 = \text{tr}(\mathbf{B}_1)$

Krok 2: $\mathbf{B}_2 = \mathbf{A}(\mathbf{B}_1 - p_1 \mathbf{I})$ a $p_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{B}_2)$

\vdots

Krok n : $\mathbf{B}_n = \mathbf{A}(\mathbf{B}_{n-1} - p_{n-1} \mathbf{I})$ a $p_n = \frac{1}{n} \text{tr}(\mathbf{B}_n)$

Krok $n+1$: Charakteristický polynom je ve tvaru

$$p(\lambda) = \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \dots - p_{n-1} \lambda - p_n.$$

Poznámka 5.3 Pro inverzní matici \mathbf{A}^{-1} platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{p_n}(\mathbf{B}_{n-1} - p_{n-1}\mathbf{I}).$$

Poznámka 5.4 Důkazy konvergence popsaných metod v této kapitole a analýzu chyb můžeme najít v literatuře, viz.[1],[9].

Příklad 5.1 Najděte koeficienty charakteristického polynomu užitím F.-L. metody pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 9 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{A} \Rightarrow \text{tr}(\mathbf{B}_1) = 30 \Rightarrow p_1 = 30$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{A}(\mathbf{B}_1 - 30\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} -165 & 22 & -42 & 18 \\ 22 & -139 & -33 & 3 \\ -42 & -33 & -175 & -17 \\ 18 & 3 & -17 & -159 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p_2 = \frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{B}_2) = \frac{1}{2}(-638) = -319$$

$$\mathbf{B}_3 = \mathbf{A}(\mathbf{B}_2 + 319\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 1066 & -106 & 146 & -70 \\ -106 & 992 & 132 & -34 \\ 146 & 132 & 1087 & -67 \\ 70 & -34 & 67 & 1085 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p_3 = \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{B}_3) = \frac{1}{3}4230 = 1470$$

$$\mathbf{B}_4 = \mathbf{A}(\mathbf{B}_3 - 1410\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} -2138 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2138 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2138 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2138 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p_4 = \frac{1}{4}\text{tr}(\mathbf{B}_4) = \frac{1}{4}(-8552) = -2138$$

$$\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^4 - 30\lambda^3 + 319\lambda^2 - 1410\lambda + 2138.$$

Poznámka 5.5 F.-L. metoda je i přes jednoduchý algoritmus méně výhodná než Krylovova metoda, protože vyžaduje skutečně počítat matice \mathbf{A}_k pro $k = 1, \dots, n$.

5.5 Poloha a odhad vlastních čísel

5.5.1 Geršgorinovy věty

Přesná znalost vlastních čísel dané matice nás v některých praktických aplikacích nemusí zajímat a stačí znát polohu vlastních čísel v určitých oblastech komplexní roviny. Tyto informace můžeme získat i bez přímých výpočtů vlastních čísel dané matice. K nalezení polohy vlastních čísel lze použít následující větu.

Věta 5.7 Geršgorinova věta

Nechť $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ je čtvercová matice řádu n . Definujme

$$r_i := \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.2)$$

Potom každé vlastní číslo λ matice \mathbf{A} splňuje aspoň jednu z následujících nerovností

$$|\lambda - a_{ii}| \leq r_i \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.3)$$

Jinými slovy, všechna vlastní čísla matice \mathbf{A} leží v oblasti

$$K = \bigcup_{i=1}^n R_i, \quad (5.4)$$

kde R_i jsou kruhy o poloměru r_i a středu a_{ii} .

Důkaz: Nechť λ je vlastní číslo matice \mathbf{A} a \mathbf{x} je vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu λ . Potom ze vztahu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ nebo ze vztahu $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ dostaneme

$$(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j \quad i = 1, \dots, n$$

kde x_i je i -tý prvek vektoru \mathbf{x} .

Nechť x_k je největší prvek vektoru \mathbf{x} (v absolutní hodnotě). Protože $|x_j|/|x_k| \leq 1$ pro $j \neq k$, je

$$|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{kj}|(|x_j|/|x_k|) \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}|. \quad (5.5)$$

Tedy λ leží v kruhu $\{\lambda : |\lambda - a_{kk}| \leq r_k\}$

□

Definice 5.2 Kruhy $R_i := \{z : |z - a_{ii}| \leq r_i\}$ $i = 1, \dots, n$, se nazývají Geršgorinovy kruhy v komplexní rovině.

Poznámka 5.6 Věta nám nazaručuje, že v každém kruhu bude nějaké vlastní číslo, pouze nám říká, že vlastní čísla matice \mathbf{A} leží ve sjednocení Geršgorinových kruhů. Následující věta polohu vlastních čísel upřesňuje.

Věta 5.8 Geršgorinova zobecněná věta

Nechť r Geršgorinových kruhů je disjunktních. Pak právě r vlastních čísel matice \mathbf{A} leží ve sjednocení těchto kruhů.

Důkaz: V důkazu této věty se používá vlastností z komplexní analýzy. viz [3]

□

Poznámka 5.7 Určení polohy vlastního čísla daná matice pomocí Geršgorinových vět je poměrně jednoduché. Pro zajímavost uvedeme ještě jednu větu, která sice také určuje polohu vlastních čísel, ale její použití je už složitější a v určitých příkladech nepraktické.

Věta 5.9 Nechť \mathbf{A} je čtvercová (obecně komplexní) matice n -tého řádu, nechť α je (komplexní) číslo, pro které stopa matice

$$\text{tr}((\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}) \neq 0.$$

Pak v každém uzavřeném kruhu obsahujícím číslo α a $\tilde{\alpha}$, kde

$$\tilde{\alpha} = \alpha - \frac{n}{\text{tr}((\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1})}$$

leží alespoň jedno vlastní číslo matice \mathbf{A} .

Definujme $r = \frac{n}{2\text{tr}((\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1})}$, pak v kruhu o středu $\frac{(\alpha - \tilde{\alpha})}{2}$ a poloměru r leží alespoň jedno vlastní číslo matice \mathbf{A} .

Poznámka 5.8 Tato věta není obecně známa a vyplývá z vět o kořenech polynomiální rovnice. Důkaz viz. [9]

Příklad 5.2 Užitím Geršgorinových vět určete přibližnou polohu vlastních čísel komplexní matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1+2i & 0 & 1/4 \\ -1/2 & 1/4 & -1 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 1/2 & -2-2i \end{pmatrix}$$

$$\textbf{\textit{Řešení 1}} \quad r_1 = \sum_{i=1, i \neq 1}^n |a_{1i}| = 1/2 + 1/4 + 1/2 = 1$$

$$r_2 = \sum_{i=1, i \neq 2}^n |a_{2i}| = 1/4 + 0 + 1/4 = 1/2$$

$$r_3 = \sum_{i=1, i \neq 3}^n |a_{3i}| = 1/2 + 1/4 + 1/2 = 5/4$$

$$r_4 = \sum_{i=1, i \neq 4}^n |a_{4i}| = 1/4 + 1/2 + 1/2 = 5/4$$

$$R_1 = \{z : |z - 2| \leq 1\}$$

$$R_2 = \{z : |z - 1 - 2i| \leq 1/2\}$$

$$R_3 = \{z : |z + 1| \leq 5/4\}$$

$$R_4 = \{z : |z + 2 + 2i| \leq 5/4\}$$

Podle Geršgorinových vět tedy leží jedno vlastní číslo v kruhu K_1 , jedno v kruhu K_2 a zbylá dvě ve sjednocení kruhů $K_3 \cup K_4$. viz obr(1).

Uved'me přesnou hodnotu vlastních čísel:

$$\lambda_1 = 1.9285 - i0.0446$$

$$\lambda_2 = 1.0063 + i2.0678$$

$$\lambda_3 = -0.9079 - i0.0855$$

$$\lambda_4 = -2.0269 - i1.9377$$

což přesně odpovídá poloze určené pomocí Geršgorinových kruhů.

Poznámky ke Geršgorinově větě

1. Ze vztahu (5.5) pro maximální souřadnici $|x_i|$ můžeme získat odhad

$$|\lambda_i| \geq |a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \geq \min_k (|a_{kk}| - \sum_{j \neq i} |a_{kj}|)$$

a

$$\min_i |\lambda_i| \geq (|a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|).$$

Pro matici s převládající diagonálou platí

$$0 < \min_i (|a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|) \leq |\lambda_i| \leq \max_i \sum_{j \neq i} |a_{ij}| = \|\mathbf{A}\|_\infty$$

2. K matici \mathbf{A} můžeme pomocí jednoduché podobnostní transformace $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D} = \mathbf{B}$ (\mathbf{D} je diagonální) získat podobnou matici \mathbf{B} , která má jiné Geršgorinovy kruhy. Potom všechna vlastní čísla leží v oblasti $K_{\mathbf{A}} \cap K_{\mathbf{B}}$. Cílem těchto transformací je rozklad oblasti K na souvislé komponenty, případná izolace jednoho kruhu, ve kterém pak můžeme zaručit existenci právě jednoho vlastního čísla.

3. Pokud $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)$ můžeme vytvořit Geršgorinovy kruhy i pro matici \mathbf{A}^T a získat oblast $K_{\mathbf{A}} \cap K_{\mathbf{A}^T}$, ve které vlastní čísel leží.

Příklad 5.3 Matice $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ resp. $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ mají stejné oblasti $K_{\mathbf{A}_1} = K_{\mathbf{A}_2} := K_{\mathbf{A}}$. Na obr.2 vidíme, že v případě matice \mathbf{A}_2 , žádný z kruhů neobsahuje vlastní číslo.

5.6 Metody výpočtu dominantního vlastního čísla

Úmluva: Očíslujeme-li vlastní čísla dané matice \mathbf{A} tak, aby platilo

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

(každé číslo píšeme tolikrát, kolik činí jeho násobnost), pak budeme vlastní číslo λ_1 nazývat *dominantní* vlastní číslo.

5.6.1 Mocninná metoda

Mocninná metoda je nejčastěji používanou metodou pro nalezení dominantního vlastního čísla a příslušného vlastního vektoru dané matice. Metoda je obzvláště vhodná pro řídké matice, protože spočívá pouze v násobení maticových vektorů.

Základní předpoklad k užití této metody je, že daná matice má dominantní vlastní číslo λ_1 a že nemá nelineární elementární dělitele, tj. že existuje n lineárně nezávislých vlastních vektorů této matice, kde n je řád matice.

Konstrukce:

Nechť \mathbf{x} je libovolný vektor, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, za předpokladu, že $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ je množina lineárně nezávislých vlastních vektorů, můžeme vektor \mathbf{x} vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, n$

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i. \quad (5.6)$$

Násobením obou stran rovnice (5.6) maticemi $\mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^k$ dostaneme systém rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mathbf{v}_i \\ \mathbf{A}^2\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{A}^2\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^2 \mathbf{v}_i \\ &\vdots \\ \mathbf{A}^k\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{A}^k\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k \mathbf{v}_i \end{aligned} \quad (5.7)$$

Pro λ_1^k , které jsme vypočítali ze systému (5.7), dostáváme

$$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lambda_1^k \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_i.$$

Z předpokladu, že λ_1 je dominantní vlastní číslo a tedy $|\lambda_1| > |\lambda_j| \quad j = 2, \dots, n$, plyne, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k = 0$$

a tedy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1^k \alpha_1 \mathbf{v}_1. \quad (5.8)$$

Tento postup bude konvergovat k nule, jestliže $|\lambda_1| < 1$ a divergovat, jestliže $|\lambda_1| \geq 1$, ovšem za předpokladu, že $\alpha_1 \neq 0$.

Poznámka 5.9 Popsaná konstrukce je i důkazem následující věty.

Věta 5.10 Von Mises

Jestliže matice \mathbf{A} má n lineárně nezávislých vektorů a je-li vlastní číslo λ_1 dominantní a pro vektor $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ platí, že $\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_1 \rangle \neq 0$. Pak

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\mathbf{A}^k \mathbf{x}_0}{\lambda_1^k} \right) = \alpha_1 \mathbf{v}_1. \quad (5.9)$$

Důsledek 5.1 Je-li \mathbf{y} libovolný vektor, který není ortogonální k vlastnímu vektoru \mathbf{v}_1 , plyne z věty 5.10, že

$$\lambda_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\mathbf{y}^T \mathbf{x}_{k+1}}{\mathbf{y}^T \mathbf{x}_k} \right),$$

kde

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0.$$

Definice 5.3 Čísla $\mathbf{y}^T \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_k$ se nazývají Schwarzovými konstantami.

Algoritmus 2 Je zadána matice \mathbf{A}

Krok 1: Zvolíme \mathbf{x}_0

Krok 2: Použijeme iterační formuli

$$\widehat{\mathbf{x}_{k+1}} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{Krok\ 3:} \quad \mathbf{x}_{k+1} = \frac{\mathbf{x}_k}{\max\{|\mathbf{x}_k^{(j)}|\}} \Rightarrow \lambda_1^{(i)} = \max_{j=1,\dots,n} \{|\mathbf{x}_n^j|\}$$

\vdots

Krok n: Zastavení výpočtu po n krocích $\Rightarrow \lambda_1^{(n)} = \max_{j=1,\dots,n} \{|\mathbf{x}_n^{(j)}|\}$
nebo zastavení výpočtu pro $|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}| < \delta$.

Poznámka 5.10 Nejčastější volbou počátečního vektoru \mathbf{x}_0 je vektor $\mathbf{x}_0 = (1, \dots, 1)^T$.

Příklad 5.4 Najděte dominantní vlastní číslo matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení 2 Zvolíme $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1, 1, 1)^T$

$$\widehat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 12 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix} \quad \lambda_1^{(1)} = 17 \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.7647 \\ 0.6471 \\ 0.7059 \\ 0.6471 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 9.7647 \\ 8.7647 \\ 9.5882 \\ 7.7059 \\ 12.3529 \end{pmatrix} \quad \lambda_1^{(2)} = 17 \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0.7905 \\ 0.7095 \\ 0.7762 \\ 0.6238 \\ 1 \end{pmatrix}$$

\vdots

$$\mathbf{x}_{10} = \begin{pmatrix} 0.7731 \\ 0.6957 \\ 0.7735 \\ 0.6125 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\mathbf{x}}_{11} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{10} = \begin{pmatrix} 10.0285 \\ 9.0247 \\ 10.0307 \\ 7.9454 \\ 12.9722 \end{pmatrix} \quad \lambda_1^{(11)} = 12.9722$$

Vlastní čísla matice \mathbf{A} jsou

$$\lambda_1 = 12.9722, \lambda_2 = 3.8755, \lambda_3 = -3.0794, \lambda_4 = -0.0297 - i0.0164.$$

Takže je vidět, že po jedenácti krocích jsme dostali přesné řešení zadaného příkladu.

Příklad 5.5 Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.5 & -2 & 0.4 \\ 3 & 0.86 & -0.5 \\ 2 & 1.5 & 1.5 \end{pmatrix}$ však metoda nebude konvergovat, protože číselné hodnoty budou oscilovat.

$$\lambda_1 = 2.13746 \quad \lambda_{2,3} = 0.86127 \pm i2.25118 \quad \Rightarrow |\lambda_{2,3}| = 2.66$$

Absolutní hodnoty vlastních čísel jsou si rovny a tedy mocninná metoda nedokáže určit dominantní vlastní číslo.

Poznámka 5.11 Nevýhody mocninné metody:

- odhad chyby

- konvergence (obvykle v praxi nevíme, zda jsou splněny předpoklady mocninné metody)
- volba \mathbf{x}_0 (bude-li vektor \mathbf{x}_0 takovou lineární kombinací vlastních vektorů, že koeficient u vlastního vektoru odpovídajícího dominantnímu vlastnímu číslu bude roven 0, potom mocninná metoda nevypočte dominantní vlastní číslo).

Poznámka 5.12 Rychlost konvergence mocninné metody závisí hlavně na volbě vektoru \mathbf{x}_0 a na velikosti podílu $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$.

5.6.2 Metoda Rayleighova podílu

Metoda Rayleighova podílu je modifikovanou mocninnou metodou a zaměřuje se na výpočet dominantního vlastního čísla symetrické matice. Pro tuto část tedy budeme vždy předpokládat, že matice \mathbf{A} je symetrická. Potom vlastní vektory musí být ortogonální (tj. $\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j = 0$ pro $i \neq j$, $\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = 1$).

Odvození:

1. Zvolíme \mathbf{x}_0 jako lineární kombinaci vlastních vektorů

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i.$$

2. Sestrojíme posloupnost

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A} \mathbf{x}_{k-1} \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}_k = \alpha_1 \mathbf{A}^k \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{A}^k \mathbf{v}_n$$

3. Platí $\mathbf{A} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$, potom

$$\mathbf{x}_k = \alpha_1 \lambda_1^k \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2^k \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k \mathbf{v}_n$$

kde λ_1^k je dominantní vlastní číslo.

4. Dostaneme

$$\mathbf{x}_k = \lambda_1^k \left[\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right) \mathbf{v}_i \right]$$

Výraz v hranaté závorce defínujeme jako \mathbf{w}_k , $\mathbf{w}_k \rightarrow \mathbf{o}$.

5. Analogicky \mathbf{x}_{k+1}

6. Vyjádříme součin $\mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k &= \lambda_1^k [\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) \mathbf{v}_i^T] \lambda_1^k [\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) \mathbf{v}_i] = \lambda_1^{2k} [\alpha_1^2 + \sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k}] = \\ &= \lambda_1^{2k} [\alpha_1^2 + \mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_k] \end{aligned}$$

a součin $\mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_{k+1}$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_{k+1} &= \lambda_1^k [\alpha_1 \mathbf{v}_1^T + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_i^T] \lambda_1^{k+1} [\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} \mathbf{v}_i] = \\ &= \lambda_1^{2k+1} [\alpha_1^2 + \sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k+1}] = \lambda_1^{2k} [\alpha_1^2 + \mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_{k+1}] \end{aligned}$$

Dostáváme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{x}_k^T \mathbf{A} \mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{x}_k^T \mathbf{A} \mathbf{x}_{k+1}}{\mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k} = \frac{\lambda_1^{2k+1} (\alpha_1^2 + \overbrace{\mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_{k+1}}^{\rightarrow 0})}{\lambda_1^{2k} (\alpha_1^2 + \underbrace{\mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_{k+1}}_{\rightarrow 0})} = \lambda_1$$

Poznámka 5.13 Součin $\mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_k$ konverguje k nule pro $k \rightarrow \infty$ dvakrát rychleji než \mathbf{w}_k k nulovému vektoru, z toho vyplývá, že metoda Raleighova podílu bude rychlejší než mocinná metoda.

Příklad 5.6 Metodou Rayleighova podílu určete dominantní vlastní číslo matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení 3 $\mathbf{x}_0 = (1 \ 1 \ 1)^T$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A} \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \lambda_1^{(1)} = \frac{\mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_0} = 2.3333$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{A} \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \lambda_1^{(2)} = \frac{\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1} = 2.4118$$

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \lambda_1^{(3)} = \frac{\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_3}{\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_2} = 2.4142$$

Vlastní čísla matice \mathbf{A} jsou

$$\lambda_1 = 2.4142, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -0.4142.$$

Tedy už po třech krocích jsme dostali přesné řešení.

5.6.3 Výpočet dalších vlastních čísel mocninnou metodou

Pokud již známe vlastní číslo λ_1 matice \mathbf{A} a k němu příslušný vlastní vektor \mathbf{v}_1 , můžeme vypočítat následující vlastní číslo λ_2 a vlastní vektor \mathbf{v}_2 opět mocninnou metodou, kterou použijeme na redukovanou matici.

Věta 5.11 O redukci

Nechť $\lambda_1 \neq 0$ je vlastní číslo matice \mathbf{A} s vlastním vektorem \mathbf{v}_1 a vektor \mathbf{x} je libovolný vektor s vlastností $\mathbf{x}^T \mathbf{v}_1 = 1$. Potom vlastní čísla matice

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{x}^T$$

jsou $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice \mathbf{A}).

Důkaz: Nechť \mathbf{e}^1 je jednotkový vektor s 1 na prvním místě a

$$\mathbf{J} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \delta_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \delta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

je Jordanův tvar matice, kde $\delta_i \in \{0, 1\}$ $i = 1, \dots, n-1$. Jsou-li $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sloupce matice \mathbf{V} , potom matice

$$\mathbf{C} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{V}$$

má tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{J} - \lambda_1 \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}^T \mathbf{V} = \mathbf{J} - \lambda_1 \mathbf{e}^1 (\mathbf{x}^T \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{x}^T \mathbf{v}_n) = \\ &= \mathbf{J} - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{x}^T \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{x}^T \mathbf{v}_n \\ \mathbf{0}_{1,n-1} & \mathbf{0}_{n-1,n-1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \delta_1 - \lambda_1 \mathbf{x}^T \mathbf{v}_2 & -\lambda_1 \mathbf{x}^T \mathbf{v}_3 & \cdots & -\lambda_1 \mathbf{x}^T \mathbf{v}_n \\ 0 & \lambda_2 & \delta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \delta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

což větu dokazuje (vlastní čísla jsou na diagonále).

□

Výběr vektoru \mathbf{x} :

Věta o redukci zaručuje široký výběr vektoru \mathbf{x} . Např.

1. Wielandtova redukce

Výhoda této metody je v tom, že v každé další fázi pracujeme s menší maticí a provádíme méně výpočtů. Položíme

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda_1} v_1^j r_j^T$$

kde r_j je j -tý řádek matice \mathbf{A} a $v_1^j \neq 0$. Index j vybereme tak, aby odpovídal největší složce vektoru \mathbf{x} .

2. Hotellingova redukce

Zde položíme $\mathbf{x} = \mathbf{y}_1$, kde \mathbf{y}_1 je levý vlastní vektor k λ_1 a je normalizován, tak že platí $\mathbf{y}_1^T \mathbf{x} = 1$. Protože \mathbf{y}_1 obvykle neznáme, používá se tato metoda nejnáze u symetrických matic, v tomto případě je $\mathbf{x}_i = \mathbf{v}_i$.

5.7 Metody pro výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů symetrických matic

5.7.1 Jacobiho metoda

Pomocí *Jacobiho metody* můžeme najít všechna vlastní čísla a jim odpovídající vlastní vektory symetrické matice \mathbf{A} . Metoda je vhodná hlavně pro *plné matice*.

\mathbf{A} je symetrická, tedy existuje ortonormální báze složená z vlastních vektorů

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mathbf{T}$$

λ_i jsou reálná vlastní čísla matice \mathbf{A} .

Na začátku *Jacobiho metody* položíme $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1$ a sestavujeme posloupnost $\{\mathbf{S}_k\}_{k \geq 1}$ elementárních ortogonálních matic takovou, aby

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{S}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{S}_k = (\mathbf{S}_1 \dots \mathbf{S}_k)^T \mathbf{A} (\mathbf{S}_1 \dots \mathbf{S}_k) \quad k = 1, 2, \dots$$

konvergující k $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Protože \mathbf{A}_{k+1} jsou podobné matici \mathbf{A} , mají stejná vlastní čísla.

Nechť \mathbf{S} je matice tvaru

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \cos \alpha & \dots & \sin \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & -\sin \alpha & \dots & \cos \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(tzn. rovinná rotace nebo Givensova transformace)

kde prvky $\cos \alpha$ jsou na pozicích (p,p) a (q,q), $\sin \alpha$ na pozici (p,q) a $-\sin \alpha$ na pozici (q,p).
Pak platí věta

Věta 5.12 *Nechť p, q jsou přirozená čísla, $1 \leq p < q \leq n$, α je reálné číslo, nechť \mathbf{S} je ortogonální matice.*

1. Je-li $\mathbf{A} = (a_{ij})$ symetrická, je $\mathbf{B} = \mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S} = (b_{ij})$ symetrická a

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij}^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2$$

2. Je-li $a_{pq} \neq 0$, existuje jediné $\alpha \in \langle -\pi/4, 0 \rangle \cup (0, \pi/4)$ tak, že

$$b_{pq} = 0.$$

Jedná se o jediné řešení rovnice

$$\cot g 2\alpha = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$$

ležící v této množině.

Potom

$$\sum_{i=1}^n b_{ii}^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 + 2a_{pq}^2.$$

Důkaz:

1. Protože $\mathbf{A} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$ a víme, že pro dvě matice platí, že

$$\text{tr}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{L}) = \text{tr}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{K}),$$

máme

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=2}^n a_{ij}^2 &= \text{tr}(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}^T) = \\ &= \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}^T) = \text{tr}(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B}) = \\ &= \sum_{i,j=2}^n b_{ij}^2. \end{aligned}$$

2. Transformace na pozicích (p,q);(q,q);(p,p);(q,p) má tvar

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} b_{pp} & b_{pq} \\ b_{qp} & b_{qq} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{qp} & a_{qq} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{pp} \cos \alpha - a_{pq} \sin \alpha & a_{pq} \cos \alpha - a_{qq} \sin \alpha \\ a_{pp} \sin \alpha + a_{pq} \cos \alpha & a_{pq} \sin \alpha + a_{qq} \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

a tedy

•

$$b_{pp} = a_{pp} \cos^2 \alpha - 2a_{pq} \sin \alpha \cos \alpha + a_{qq} \sin^2 \alpha$$

$$a_{pp} \cos^2 \alpha + a_{qq} \sin^2 \alpha - a_{pq} \sin 2\alpha$$

•

$$b_{pq} = b_{qp} =$$

$$a_{pp} \cos \alpha \sin \alpha + a_{pq} \sin^2 \alpha + a_{pq} \cos^2 \alpha - a_{qq} \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$a_{pq} \cos 2\alpha + 1/2(a_{pq} - a_{qq}) \sin 2\alpha$$

•

$$b_{qq} = a_{pp} \sin^2 \alpha + 2a_{pq} \sin \alpha \cos \alpha + a_{qq} \cos^2 \alpha$$

$$a_{pp} \sin^2 \alpha + a_{qq} \cos^2 \alpha + a_{pq} \sin 2\alpha$$

Stejně jako v (1)

$$a_{pp}^2 + a_{qq}^2 + 2a_{pq}^2 = b_{pp}^2 + b_{qq}^2 + 2b_{pq}^2$$

pro libovolné α .

Zvolíme-li α tak, aby platilo

$$\cot g 2\alpha = -\frac{a_{pp} - a_{qq}}{2a_{pq}}$$

je $b_{pq} = b_{qp} = 0$ a tedy

$$b_{pp}^2 + b_{qq}^2 = a_{pp}^2 + a_{qq}^2 + 2a_{pq}^2$$

ostatní $a_{ii} = b_{ii}$ pro $i \neq p, q$.

□

Poznámka 5.14 • Při transformaci

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}$$

se mění pouze p-té a q-té řádky a sloupce, přesněji pro libovolné α :

—

$$b_{ij} = a_{ij} \quad \text{pro } i \neq p, q \quad \text{a } j \neq p, q$$

—

$$b_{pi} = b_{ip} = a_{pi} \cos \alpha - a_{qi} \sin \alpha \quad \text{pro } i \neq p, q$$

—

$$b_{qi} = b_{iq} = a_{pi} \sin \alpha - a_{qi} \cos \alpha \quad \text{pro } i \neq p, q$$

—

$$b_{pp} = a_{pp} \cos^2 \alpha + a_{qq} \sin^2 \alpha - a_{pq} \sin 2\alpha$$

—

$$b_{qq} = a_{pp} \sin^2 \alpha + a_{qq} \cos^2 \alpha + a_{pq} \sin 2\alpha$$

—

$$b_{pq} = b_{qp} = a_{pq} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(a_{pp} - a_{qq}) \sin 2\alpha$$

- *Použijeme-li vztahy mezi goniometrickými funkcemi, lze prvky matice \mathbf{B} vyjádřit pomocí prvků matice \mathbf{A} .*

Postup výpočtu:

- Nejprve položíme

$$K = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}} \quad (= \cot g 2\alpha)$$

- Označíme-li $t = \tan \alpha$ je

$$t = \begin{cases} \text{kořen} & t^2 + 2Kt - 1 \quad \text{pro } K \neq 0 \\ 1 & \text{pro } K = 0 \end{cases}$$

- Dále

$$c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad (= \cos \alpha) \quad s = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad (= \sin \alpha)$$

- Pro prvky matice \mathbf{B} platí vztahy:

$$b_{pi} = b_{ip} = c \cdot a_{pi} - s \cdot a_{qi} \quad i \neq p, q$$

$$b_{qi} = b_{iq} = c \cdot a_{qi} + s \cdot a_{pi} \quad i \neq p, q$$

$$b_{pi} = b_{ip} = a_{pp} - t \cdot a_{pq}$$

$$b_{pi} = b_{ip} = a_{qq} + t \cdot a_{pq}$$

Uvedme odvození na př. pro b_{qq}

$$b_{qq} = a_{pp} \sin^2 \alpha + a_{qq}(1 - \sin^2 \alpha) + a_{pq} \sin 2\alpha =$$

$$a_{qq} - (a_{qq} + a_{pp}) \sin^2 \alpha + a_{pq} \sin 2\alpha =$$

$$a_{qq} + a_{pq}(\sin 2\alpha - 2 \cot 2\alpha \sin^2 \alpha).$$

Protože

$$-2 \cot 2\alpha \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha = \frac{\sin^2 2\alpha - 2 \cos^2 2\alpha \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

a dále čitatel

$$4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2 \sin^4 \alpha =$$

$$2 \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2 \sin^2 \alpha$$

je

$$b_{qq} = a_{qq} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} a_{pq} = a_{qq} + t \cdot a_{pq}.$$

Jeden krok Jacobiho metody:

Máme-li sestrojenou matici $\mathbf{A}_k = [a_{ij}^{(k)}]$, vybereme (p, q) tak, aby

$$a_{p,q}^{(k)} \neq 0.$$

Sestrojíme \mathbf{S}_k jako ve větě 5.12, určíme $\alpha \in (-\pi/4, 0) \cup (0, \pi/4)$ tak, aby

$$\cot 2\alpha_k = \frac{a_{qq}^{(k)} - a_{pp}^{(k)}}{2a_{pq}^{(k)}}$$

položíme

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{S}_k^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}_k = [a_{ij}^{(k+1)}]$$

Strategie pro volbu (p, q) :**1. Klasická Jacobiho metoda:**

Zvolíme (p, q) taková, aby platilo

$$|a_{pq}^{(k)}| = \max_{i \neq j} |a_{ij}^{(k)}|$$

a (p, q) se mění pro různá k .

2. Cyklická Jacobiho metoda:

Nulují se všechny nediagonální prvky cyklickou skyčkou, na př. (p, q) volíme

$$(1, 2) \quad (1, 3) \quad \dots \quad (1, n); (2, 3) \quad \dots \quad (2, n); \quad \dots \quad ; (n-1, n).$$

Zřejmě, je-li některý prvek nulový, postupujeme dále (tj. volíme $\alpha_k = 0$ nebo $\mathbf{S}_k = \mathbf{I}$)

3. Prahová Jacobiho metoda:

Postupujeme jako u cyklické Jacobiho metody, ale nediagonální prvky, které jsou v absolutní hodnotě menší než "jistá" mez, která se zmenšuje s každou smyčkou, se neamuluje.

Poznámka 5.15 *Co se týče konvergence, ukážeme myšlenku důkazu pro nejjednodušší případ. Označíme P_n množinu všech permutací čísel $1, 2, \dots, n$.*

Věta 5.13 *Posloupnost matic $\{\mathbf{A}_k\}_{k=1}^{\infty}$ získaných klasickou Jacobiho metodou je konvergentní,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}_k = \text{diag}(\lambda_{s(i)})$$

pro jistou permutaci $s \in P_n$.

K důkazu potřebujeme následující lemma.

Lemma 5.1 *Bud' \mathbf{X} konečnědimenzionální normovaný vektorový prostor, $\{\mathbf{x}_k\}$ ohraničená posloupnost v \mathbf{X} , která má pouze konečný počet hromadných bodů, nechť*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| = 0.$$

Potom je posloupnost $\{\mathbf{x}_k\}$ konvergentní.

Důkaz: Věty 5.13

Označme $\mathbf{A}_k = [a_{ij}^{(k)}] = \mathbf{D}_k + \mathbf{B}_k$, $\mathbf{D}_k = \text{diag}(a_{ii}^{(k)})$.

- Nejprve dokážeme, že $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{B}_k = 0$. Označme

$$\Omega_k = \sum_{i \neq j} |a_{ij}^{(k)}|^2,$$

potom zřejmě

$$\Omega_k \leq n(n-1) |a_{pq}^{(k)}|^2$$

protože máme $n(n-1)$ nediagonálních prvků a $|a_{pq}^{(k)}|$ z nich byla maximální. Dále podle věty 5.12

$$\Omega_{k+1} = \Omega_k - 2|a_{ij}^{(k)}|^2,$$

tedy

$$\Omega_{k+1} \leq \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right) \Omega_k$$

tj.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k = 0.$$

- Nyní dokážeme, že $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{D}_{k+1} - \mathbf{D}_k) = \mathbf{0}$. Pro diagonální prvky matice \mathbf{A}_{k+1} platí

$$a_{ii}^{(k+1)} - a_{ii}^{(k)} = \begin{cases} 0 & i \neq p, q \\ -\tan \alpha_k a_{pq}^{(k)} & i = p \\ \tan \alpha_k a_{pq}^{(k)} & i = q. \end{cases}$$

Protože $|\alpha_k| \leq \pi/4$ a $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{pq}^{(k)} = 0$ je důkaz proveden.

- Necht' $\{\mathbf{D}_{k'}\}$ je posloupnost, která konverguje k matici \mathbf{D} , potom také $\lim_{k' \rightarrow \infty} \mathbf{A}_{k'} = \mathbf{D}$, protože

$$\mathbf{A}_{k'} = \mathbf{D}_{k'} + \mathbf{B}_{k'} \quad \text{a} \quad \lim_{k' \rightarrow \infty} \mathbf{B}_{k'} = 0.$$

Tedy

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{D}) = \lim_{k' \rightarrow \infty} \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_{k'}) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}).$$

Matice $\mathbf{A}_{k'}$ a \mathbf{A} jsou podobné, tedy

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_{k'}) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$$

pro všechna k' .

Takže \mathbf{D} a \mathbf{A} mají stejné charakteristické polynomy, tedy i stejná vlastní čísla. \mathbf{D} proto musí být diagonální, $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_{s(i)})$

- Posloupnost $\{\mathbf{D}_k\}$ je ohraničená, neboť

$$\|\mathbf{D}_k\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^n |d_{ij}^{(k)}|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}^{(k)}|^2 \right)^{1/2} =$$

$$\|\mathbf{A}_k\|_2 = \|\mathbf{A}\|_2$$

Jsou tedy splněny předpoklady lemmatu a posloupnost $\{\mathbf{A}_k\}$ konverguje.

□

Příklad 5.7 Klasickou Jacobiho metodou určete všechna vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 9 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Maximální prvek (v absolutní hodnotě) je 3 na pozici $(1,3) \Rightarrow p = 1 \quad q = 3$

$$K = \frac{a_{33} - a_{11}}{2a_{13}} = \frac{1}{6} \neq 0 \Rightarrow$$

t je kořen (s menší absolutní hodnotou) polynomu

$$t^2 + \frac{1}{3} - 1 = 0$$

$$t = 0.84712708838304$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = 0.76301998247272 \quad s = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = 0.64637489613020$$

$$b_{13} = b_{31} = 0$$

$$b_{11} = a_{11} - t \cdot a_{13} = 5.45861873485088$$

$$b_{33} = a_{33} + t \cdot a_{13} = 11.54138126514912$$

$$b_{12} = c \cdot a_{12} - s \cdot a_{32} = -2.05576977473312 = b_{21}$$

$$b_{14} = c \cdot a_{14} - s \cdot a_{34} = -1.40939487860292 = b_{41}$$

$$b_{32} = c \cdot a_{32} + s \cdot a_{12} = 0.87966506881525 = b_{23}$$

$$b_{34} = c \cdot a_{34} + s \cdot a_{14} = 0.11664508634253 = b_{43}$$

$$b_{22} = a_{22} \quad b_{44} = a_{44} \quad b_{42} = b_{24} = a_{24}$$

Pak dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 5.45861873485088 & -2.05576977473312 & 0 & -1.40939487860292 \\ -2.05576977473312 & 6 & 0.87966506881525 & 0 \\ 0 & 0.87966506881525 & 11.54138126514912 & 0.11664508634253 \\ -1.40939487860292 & 0 & 0.11664508634253 & 7 \end{pmatrix}$$

Nyní opět vybereme maximální prvek a stejným způsobem postupujeme dál

⋮

Po 7 krocích se dostaneme k matici

$$B = \begin{pmatrix} 3.79407218081762 & 0.07086171427580 & -0.00393661412823 & 0.00516622055919 \\ 0.07086171427580 & 6.40219536739289 & -0.08436498867668 & -0.06428537120075 \\ -0.00393661412823 & -0.08436498867668 & 11.76776520507119 & o \\ 0.00516622055919 & -0.06428537120075 & 0 & 8.03596724671830 \end{pmatrix}$$

Zde už je vidět, že nediagonální prvky konvergují k nule. Po dalších sedmi krocích už dostaneme diagonální matici

$$B = \begin{pmatrix} 3.2957 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.5923 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11.7043 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.4077 \end{pmatrix}$$

kde diagonální prvky odpovídají vlastním číslům zadané matice \mathbf{A} .

Nyní se budeme zabývat konvergencí vlastních vektorů klasické Jacobiho metody, kterou dokážeme pomocí následující věty. Připomeňme, že

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{S}_k^T \cdot \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{S}_k = \mathbf{Q}_k^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_k$$

kde $\mathbf{Q}_k = \mathbf{S}_1 \dots \mathbf{S}_k$.

Věta 5.14 Předpokládejme, že všechna vlastní čísla matice \mathbf{A} jsou vzájemně různá. Potom posloupnost matic \mathbf{Q}_k , $k = 1, 2, \dots$, konstruovaných klasickou Jacobiho metodou konverguje k ortogonální matici, jejíž sloupce tvoří ortonormální množinu vlastních vektorů matice \mathbf{A} .

Důkaz: Opět použijeme lemma 5.1, ověříme jeho předpoklady.

- $\{\mathbf{Q}_k\}$ má pouze konečný počet hromadných bodů, které jsou nutně ve tvaru

$$[\pm p_{s(1)} \pm p_{s(2)} \pm \dots \pm p_{s(n)}], \quad s \in P_n,$$

kde p_1, \dots, p_n jsou sloupce ortonormální matice \mathbf{Q} , pro niž $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \text{diag}(\lambda_i)$. Nechť $\{\mathbf{Q}_{k'}\}$ je podposloupnost posloupnosti $\{\mathbf{Q}_k\}$, $\mathbf{Q}_{k'} \rightarrow \mathbf{Q}_k$. Podle věty 5.13 existují $s \in P_n$ tak, že

$$\text{diag}(\lambda_{s(i)}) = \lim_{k' \rightarrow \infty} \mathbf{A}_{k'} = \lim_{k' \rightarrow \infty} (\mathbf{Q}_{k'}^T \cdot \mathbf{A}_{k'} \cdot \mathbf{Q}_{k'}) = \mathbf{Q}_{k'}^T \cdot \mathbf{A}_{k'} \cdot \mathbf{Q}_{k'}$$

což bylo dokázáno. Všechna vlastní čísla jsou různá, tedy existuje pouze konečně mnoho hromadných bodů.

- Pro úhly určující \mathbf{S}_k máme

$$\tan 2\alpha_k = \frac{2a_{pq}^{(k)}}{a_{qq}^{(k)} - a_{pp}^{(k)}}, \quad |\alpha_k| \leq \pi/4.$$

Podle věty 5.13 odtud plyne, že existuje l tak, že pro $k \geq l$ je

$$|a_{qq}^{(k)} - a_{pp}^{(k)}| \geq \frac{1}{2} \min_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j| > 0.$$

Protože se dvojice (p, q) mění s k , nemůžeme dokázat, že posloupnosti $a_{qq}^{(k)}$ a $a_{pp}^{(k)}$ konvergují.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{pq}^{(k)} = 0,$$

tedy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{S}_k = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{Q}_{k+1} - \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_k(\mathbf{S}_k - \mathbf{I}) \rightarrow 0.$$

A konečně posloupnost $\{\mathbf{Q}_k\}$ je ohraničená, protože $\|\mathbf{Q}_K\| = 1$.

□

Poznámka 5.16 Při výpočtu můžeme průběžně kontrolovat výsledky tím, že po každém kroku zjišťujeme, zda

$$a_{pp}^{(k+0)} + a_{qq}^{(k+1)} = a_{pp}^{(k)} + a_{qq}^{(k)}.$$

Nebo vypočítáme metici $\mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^T$, která by se měla rovnat matici \mathbf{A} .

Poznámka 5.17 Přesnost Jacobiho metody závisí na tom, jak přesně se vypočítají odmocniny pro určení $\sin \alpha_k$ a $\cos \alpha_k$.

Poznámka 5.18 Ačkoliv se Jacobiho metoda používá převážně pro symetrické matice, pracuje často dobře i v případě nesymetrických matic. V tomto případě ovšem konverguje k trojúhelníkové matici a má-li výchozí matice komplexní vlastní čísla, je nutné použít místo matic \mathbf{S}_k vhodné unitární matice.

5.7.2 Householderova matice zrcadlení

Definice 5.4 Matice tvaru

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}) := \mathbf{I} - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}} = \mathbf{I} - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

se nazývá **Householderova matice** (někdy též elementární zrcadlení nebo Householderova transformace).

Vlastnosti:

- označení *matice zrcadlení* se používá proto, že aplikujeme-li matici $\mathbf{H}(\mathbf{u})$ pro nějaké \mathbf{u} na vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pak je vektor $\mathbf{H}(\mathbf{u})\mathbf{x}$ souměrný s vektorem \mathbf{x} podle nadroviny ortogonální k vektoru \mathbf{u} ;
- matice \mathbf{I} bývá považována za speciální případ Householderovy transformace – pro $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ je $\mathbf{H}(\mathbf{o}) = \mathbf{I}$;
- $\|\mathbf{H}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, tj. zrcadlení tedy nemění délku vektoru;
- $\mathbf{H}\mathbf{y} = \mathbf{y}$ pro každé $\mathbf{y} \in P = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v}^T \mathbf{u} = 0\}$.
- \mathbf{H} má jednoduchou vlastní hodnotu -1 a $(n-1)$ -násobnou vlastní hodnotu 1;
Důkaz: Neboť $\mathbf{y} \in P = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v}^T \mathbf{u} = 0\}$ má $n-1$ lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n-1}$ a $\mathbf{H}\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_i$ pro $i = 1, 2, \dots, n-1$. Takže 1 je $(n-1)$ -násobná vlastní hodnota. \mathbf{H} také zrcadlí \mathbf{u} na $-\mathbf{u}$, tj. $\mathbf{H}\mathbf{u} = -\mathbf{u}$. Takže -1 je vlastní hodnota matice \mathbf{H} , která musí být jednoduchá, neboť \mathbf{H} má pouze n vlastních hodnot.

□

- z věty o spektrálním rozkladu plyne

$$\det(\mathbf{H}) = (-1)1 \cdots 1 = -1;$$

- Matice \mathbf{H} je ortogonální a symetrická

Důkaz: Symetrie plyne z

$$\mathbf{H}^T(\mathbf{u}) = \mathbf{I}^T - 2\left(\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}\right)^T = \mathbf{I} - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|^2} = \mathbf{H}(\mathbf{u}).$$

Neboť platí

$$\mathbf{H}^2(\mathbf{u}) = \left(\mathbf{I} - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}\right) \left(\mathbf{I} - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}\right) = \mathbf{I}^2 - 4\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|^2} + 4\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T \mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|^4} = \mathbf{I},$$

je matice $\mathbf{H}(\mathbf{u})$ ortogonální.

□

Věta 5.15 Pro každé dva vektory $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$ a $\|\mathbf{y}\|_2 = \|\mathbf{z}\|_2$, platí

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}(\mathbf{y} - \mathbf{z})\mathbf{z}.$$

Jinými slovy, každé dva různé vektory o stejné normě lze převést jeden na druhý Householderovou transformací.

Důkaz: Platí

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{y} - \mathbf{z})\mathbf{z} &= \left(\mathbf{I} - \frac{2(\mathbf{y} - \mathbf{z})(\mathbf{y} - \mathbf{z})^T}{\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2}\right)\mathbf{z} = \mathbf{z} - 2\frac{\mathbf{y}^T \mathbf{z} - \|\mathbf{z}\|_2^2}{\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2}(\mathbf{y} - \mathbf{z}) = \\ &= \mathbf{z} + \frac{\|\mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{z}\|_2^2 - 2\mathbf{y}^T \mathbf{z}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2}(\mathbf{y} - \mathbf{z}) = \mathbf{z} + \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2}{\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2}(\mathbf{y} - \mathbf{z}) = \mathbf{y}. \end{aligned}$$

□

Důsledek 5.2 Jsou-li \mathbf{y} , \mathbf{z} dva vektory o stejné normě, potom existuje ortogonální matice \mathbf{Q} taková, že $\mathbf{y} = \mathbf{Q}\mathbf{z}$.

Důkaz: Pro $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$ stačí vzít $\mathbf{Q} = \mathbf{H}(\mathbf{y} - \mathbf{z})$, jinak $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$.

□

Věta 5.16 Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \mathbf{H}(x + \operatorname{sgn}(x_1)\|x\|_2 \mathbf{e}_1) & \text{pro } x_1 \neq \|x\|_2, \\ \mathbf{I} & \text{pro } x_1 = \|x\|_2 \end{cases}$$

ortogonální matice s vlastností

$$\mathbf{H}\mathbf{x} = \|x\|_2 \mathbf{e}_1.$$

Nebo-li, aplikujeme-li vhodnou matici \mathbf{H} na vektor \mathbf{x} , dostaneme vektor, který má všechny složky až na první nulové.

Důkaz: Je-li $x_1 = \|\mathbf{x}\|_2$, potom z $x_1^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ plyne, že $x_2 = \dots = x_n = 0$. Tedy $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 = \|\mathbf{x}\|_2 \mathbf{e}_1 = \mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{x}$.

Je-li $x_1 \neq \|\mathbf{x}\|_2$, potom $\mathbf{x} + \operatorname{sgn}(x_1)\|\mathbf{x}\|_2 \mathbf{e}_1 \neq 0$, takže vektory $\mathbf{y} = \operatorname{sgn}(x_1)\|\mathbf{x}\|_2 \mathbf{e}_1$ a $\mathbf{z} = \mathbf{x}$ jsou různé a platí pro ně $\|\mathbf{y}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{z}\|_2$, a odtud je

$$\mathbf{y} = \operatorname{sgn}(x_1)\|\mathbf{x}\|_2 \mathbf{e}_1 = \mathbf{H}(\mathbf{y} - \mathbf{z})\mathbf{z} = \mathbf{H}(-\mathbf{x} - \operatorname{sgn}(x_1)\|\mathbf{x}\|_2 \mathbf{e}_1)\mathbf{x}.$$

□

Poznámka 5.19 Pro vektor určující Householderovu matici lze volit buď $\|\mathbf{x}\|_2 \mathbf{e}_1$ nebo $-\|\mathbf{x}\|_2 \mathbf{e}_1$. Z důvodu minimalizace numerických chyb volíme stejné znaménko jako u první složky vektoru \mathbf{x} .

Věta 5.17 Pro každé \mathbf{x} takové, že $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$, je

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{x} + \operatorname{sgn}(x_1)\mathbf{w}_1) & \text{pro } \mathbf{x} \neq \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{I} & \text{pro } \mathbf{x} = \mathbf{e}_1 \end{cases}$$

ortogonální matice, jejímž prvním sloupcem je vektor \mathbf{x} .

Důkaz: Pro $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ je zřejmý.

Nechť tedy $\mathbf{x} \neq \mathbf{e}_1$. Protože $\|\mathbf{x}\|_2 = 1 = \|\mathbf{e}_1\|_2$, je podle Věty 5.17

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}(\mathbf{x} + \operatorname{sgn}(x_1)\mathbf{e}_1) = \mathbf{H}\mathbf{e}_1 = \mathbf{H}_{\bullet 1},$$

což je tvrzením věty.

□

Díky těmto větám tedy umíme najít vektor \mathbf{u} tak, že daný nenulový vektor \mathbf{x} se transformuje na vektor, který má nenulovou pouze první složku.

Příklad 5.8 *Lze*

$$\mathbf{x} = (-1, -2, 7)^T \xrightarrow{\mathbf{H}(\mathbf{u})} (\alpha, 0, 0)^T?$$

Protože $\|\mathbf{x}\|_2 = 3\sqrt{6}$, položíme $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|_2 \mathbf{e}_1 = (-1 - 3\sqrt{6}, -2, 7)^T$ a $\|\mathbf{u}\|_2 = 6(18 + \sqrt{6})$.
Dále

$$\mathbf{u}\mathbf{u}^T = \begin{pmatrix} -1 - 3\sqrt{6} \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} (-1 - 3\sqrt{6}, -2, 7) = \begin{pmatrix} 55 + 6\sqrt{6} & 2 + 6\sqrt{6} & -7 - 21\sqrt{6} \\ 2 + 6\sqrt{6} & 4 & -14 \\ -7 - 21\sqrt{6} & -14 & 49 \end{pmatrix},$$

takže

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}) = \frac{1}{3(18 + \sqrt{6})} \begin{pmatrix} -1 - 3\sqrt{6} & -2 - 6\sqrt{6} & 7 + 21\sqrt{6} \\ -2 - 6\sqrt{6} & 50 + 3\sqrt{6} & 14 \\ 7 + 21\sqrt{6} & 14 & 5 + 3\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Snadno lze ověřit, že

$$\mathbf{H}(\mathbf{u})\mathbf{x} = (3\sqrt{6}, 0, 0)^T.$$

5.7.3 Givensova-Householderova metoda

Jedná se o metodu speciálně vhodnou k hledání některých vlastních čísel symetrických matic, na př. všech vlastních čísel obsažených v předem zadaném intervalu.

Umožňuje počítat vlastní čísla s různou přesností. Na druhé staně nám neposkytuje informace o vlastních vektorech. Má dvě etapy:

- Householderova metoda pro redukci symetrické matice na tridiagonální tvar.
- Givensova metoda (metoda bisekce) pro výpočet vlastních čísel symetrické tridiagonální matice.

Householderova metoda

Nechť \mathbf{A} je symetrická matice, postupně se určuje $n-2$ ortogonálních matic $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_{n-2}$, tak aby matice

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{H}_{k-1}^T \cdot \mathbf{A}_{k-1} \cdot \mathbf{H}_{k-1} = (\mathbf{H}_1 \dots \mathbf{H}_{k-1})^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{H}_1 \dots \mathbf{H}_{k-1}), \quad k = 1, \dots, n-2$$

byly ve tvaru

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} \bullet & & & & & & & & \\ \bullet & \bullet & & & & & & & \\ & \bullet & \bullet & & & & & & \\ & & \bullet & \bullet & & & & & \\ & & & \bullet & \bullet & & & & \\ & & & & \bullet & \bullet & & & \\ & & & & & \bullet & \bullet & & \\ & & & & & & \bullet & \bullet & \\ & & & & & & & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

$a_k \rightarrow \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}$

$$\mathbf{A}_{n-1} = (\mathbf{H}_1 \dots \mathbf{H}_{n-2})^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{H}_1 \dots \mathbf{H}_{n-2})$$
$$\mathbf{A}_k \rightarrow \mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{H}_k^T \cdot \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{H}_k$$
$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\mathbf{H}}_k \end{bmatrix}$$
[illegible]

Matici \mathbf{H}_k můžeme popsat také jako Householderovu matici příslušnou vektoru $\mathbf{v}_k = [0, \dots, 0, \widetilde{\mathbf{v}}_k]^T$.

$$\mathbf{v}_k = [0, \dots, 0, a_{k+1,k}^{(k)} \pm (\sum_{i=k+1}^n |a_{ik}^{(k)}|^2)^{1/2}, a_{k+2}^{(k)}, \dots, a_{n,k}^{(k)}]^T,$$

Postupně určíme vektory

$$\mathbf{w}_k = (\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k)^{-1/2} \mathbf{v}_k,$$

$$\mathbf{q}_k = 2(\mathbf{I} - \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T) \mathbf{A}_k \mathbf{w}_k,$$

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k - \mathbf{w}_k \mathbf{q}_k^T - \mathbf{q}_k \mathbf{w}_k^T$$
$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - w_i^{(k)} q_j^{(k)} - q_i^{(k)} w_j^{(k)}$$

$$k + 1 \leq i, j \leq n.$$

Příklad 5.9 *Householdervou transformací předělte matici*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

na třídiagonální tvar.

$$\mathbf{v}_0 = (0 \quad 2 + (\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}) \quad 2 \quad 1)^T$$

$$\mathbf{w}_0 = (\mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_0)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}_0 = (0 \quad 0.912871 \quad 0.365148 \quad 0.182574)^T$$

$$\mathbf{q}_0 = 2(\mathbf{I} - \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_0^T) \mathbf{A} \mathbf{w}_0 = (5.477224 \quad -2.7386095 \quad 5.03904626 \quad 3.61496813)^T$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} - \mathbf{w}_0 \mathbf{q}_0^T - \mathbf{q}_0 \mathbf{w}_0^T = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -2.6 & -1.8 \\ 0 & -2.6 & -0.68 & -1.24 \\ 0 & -1.8 & -1.24 & 0.68 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 = (0 \quad 0 \quad -2.6 - \sqrt{-2.6^2 + (-1.8)^2} \quad -1.8)^T$$

$$\mathbf{w}_1 = (0 \quad 0 \quad -0.954514 \quad -0.298168)^T$$

$$\mathbf{q}_1 = (0 \quad 6.0365793 \quad -0.3770516 \quad 1.207794)^T$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 - \mathbf{w}_1 \mathbf{q}_1^T - \mathbf{q}_1 \mathbf{w}_1^T = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3.162278 & 0 \\ 0 & 3.162278 & -1.4 & -0.2 \\ 0 & 0 & -0.2 & 1.4 \end{pmatrix}$$

Givensova metoda

Metoda slouží k určení vlastních čísel symetrické třídiagonální matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ c_1 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & c_{n-2} & b_n \end{pmatrix}$$

Pokud je některé z c_i nula, rozpadá se matice \mathbf{B} na dvě třídiagonální matice stejného typu. Tedy bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $c_i \neq 0$, ($i = 1, \dots, n-1$). Označme

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ c_1 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{i-1} & b_{i-1} & c_{i-1} \\ & & & c_{i-2} & b_i \end{pmatrix}$$

$$i = 1, \dots, n$$

Věta 5.18 Polynomy $p_i(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, definované pro $i = 1, \dots, n$ rekurentně

$$p_0(\lambda) = 1$$

$$p_1(\lambda) = b_1 - \lambda$$

$$p_i(\lambda) = (b_i - \lambda)p_{i-1}(\lambda) - c_{i-1}^2 p_{i-2}(\lambda), \quad 2 \leq i \leq n$$

mají následující vlastnosti:

1. Polynom p_i je charakteristický polynom matice \mathbf{B}_i

$$(p_i(\lambda) = \det(\mathbf{B}_i - \lambda \mathbf{I})).$$

- 2.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} p_i(\lambda) = +\infty, \quad i = 1, \dots, n$$

3. Jestliže $p_i(\lambda_0) = 0$, potom $p_{i-1}(\lambda_0) \cdot p_{i+1}(\lambda_0) < 0$,
 $i = 1, \dots, n-1$

4. Polynom p_i má vzájemně i různých kořenů, které oddělují $i+1$ kořenů polynomu p_{i+1} , $i = 1, \dots, n$.

Důkaz: ad 1 Plyne rozvojem $\det(\mathbf{B}_i - \lambda \mathbf{I})$

ad 2 $p_i(\lambda) = (-1)^i \lambda^i - \dots \rightarrow \infty$ pro $\lambda \rightarrow \infty$

ad 3 Necht $p_i(\lambda_0) = 0$ pro nějaké i , $i = 1, \dots, n-1$, z definice p_i plyne

$$p_{i+1}(\lambda_0) = -c_i^2 \cdot p_{i-1}(\lambda_0).$$

Protože $c_i \neq 0$, dostaneme buď

$$p_{i-1}(\lambda_0) \cdot p_{i+1}(\lambda_0) < 0$$

nebo

$$p_{i-1}(\lambda_0) = p_{i-1}(\lambda_0) = p_{i+1}(\lambda_0)$$

což by indukcí vedlo k tomu, že

$$p_i(\lambda_0) = p_{i-1}(\lambda_0) = \dots = p_1(\lambda_0) = p_0(\lambda_0),$$

což je spor, protože $p_0(\lambda_0) = 1$.

ad 4 Plyne z 2 a 3.

□

Poznámka 5.20 Posloupnost polynomů splňující 2-4 se nazývá **Sturmova posloupnost** (používá se při výpočtu kořenu polynomů).

Příklad 5.10 Pomocí charakteristického polynomu určete vlastní čísla třídiagonální matice \mathbf{A}_2 z příkladu 5.9.

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3.162278 & 0 \\ 0 & 3.162278 & -1.4 & -0.2 \\ 0 & 0 & -0.2 & 1.4 \end{pmatrix}$$

$$p_0(\lambda) = 1$$

$$p_1(\lambda) = 4 - \lambda$$

$$p_2(\lambda) = (-2 - \lambda)(4 - \lambda) - 9$$

$$p_3(\lambda) = (-1.4 - \lambda)[(-2 - \lambda)(4 - \lambda) - 9] - 10(4 - \lambda)$$

$$p_4(\lambda) = (1.4 - \lambda)[(-1.4 - \lambda)[(-2 - \lambda)(4 - \lambda) - 9] - 10(4 - \lambda)] - 0.04[(-2 - \lambda)(4 - \lambda) - 9] = \lambda^4 - 2\lambda^3 - 29\lambda^2 + 58\lambda - 22$$

Kořeny polynomu $p_4(\lambda)$ jsou

$$\lambda_1 = -5.4355 \quad \lambda_2 = 5.4907 \quad \lambda_3 = 1.4289 \quad \lambda_4 = 0.5159$$

Věta 5.19 Buď i přirozené číslo, $1 \leq i \leq n$. Pro dané $\mu \in \mathbb{R}$ položme

$$\text{sgnp}_i(\mu) = \begin{cases} \text{sgnp}_i(\mu) & \text{je-li } p_i(\mu) \neq 0, \\ \text{sgnp}_{i-1}(\mu) & \text{je-li } p_i(\mu) = 0. \end{cases}$$

Potom $N(i, \mu)$, což je počet znaménkových změn v posloupnosti po sobě jdoucích prvků uspořádané množiny $N(i, \mu) = \{+, \text{sgnp}_1(\mu), \dots, \text{sgnp}_i(\mu)\}$ se rovná počtu kořenů polynomu p_i , které jsou menší než μ .

Tato věta umožňuje aproximaci (s libovolnou přesností) vlastních čísel matice $\mathbf{B} = \mathbf{B}_n$ a dokonce přímý výpočet vlastního čísla na dané pozici.

Předpokládejme na příklad, že chceme aproximaci i -tého vlastního čísla $\lambda_i^{(n)} = \lambda_i$ matice \mathbf{B} (jako předtím předpokládáme, že $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou vzájemně různá a uspořádaná sestupně).

Krok 1: Určíme interval $\langle a_0, b_0 \rangle$, v němž leží žádané vlastní číslo, na př. $-a_0 = b_0 = \|\mathbf{B}\|_\infty$.

Krok 2: $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$, spočteme $N(n, c_0)$. Potom buď

$$N(n, c_0) \geq i \quad a \quad \lambda_i \in \langle a_0, c_0 \rangle$$

nebo

$$N(n, c_0) < i \quad a \quad \lambda_i \in \langle c_0, b_0 \rangle$$

tím získáme interval $\langle a_1, b_1 \rangle$, v němž leží kořen λ_i .

Postupně získáme posloupnost intervalů $\langle a_k, b_k \rangle$, $k \geq 0$ takových, že $\lambda_i \in \langle a_k, b_k \rangle$ a

$$b_k - a_k = 2^{-k}(b_0 - a_0), \quad k \geq 0.$$

5.7.4 QR-rozklad

Definice 5.5 Dvojici matic \mathbf{Q} a \mathbf{R} nazveme **QR-rozkladem** matice \mathbf{A} , pokud platí, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R},$$

přičemž \mathbf{Q} je ortogonální matice a \mathbf{R} je horní trojúhelníková matice.

Nyní uvedeme věty o existenci QR-rozkladu a jeho jednoznačnosti.

Věta 5.20 K libovolné reálné matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, kde $m \geq n$, existuje ortogonální matice $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a horní trojúhelníková matice $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tak, že platí $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$.

Věta 5.21 Jsou-li sloupce matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, lineárně nezávislé, potom v QR-rozkladu jsou matice \mathbf{R} a prvních n sloupců matice \mathbf{Q} určeny až na znaménko jednoznačně.

Důkazy obou vět viz [49].

5.7.5 Konstrukce QR-rozkladu

QR-rozklad pomocí Gram-Schmidtova algoritmu

Věta 5.22 (Gram-Schmidtův QR-rozklad) K libovolné reálné matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, kde $m \geq n$, existuje ortogonální matice $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a horní trojúhelníková matice $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s nezápornými prvky na diagonále tak, že platí $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$. V případě lineárně nezávislých sloupců matice \mathbf{A} jsou prvky na diagonále kladné.

Základní myšlenka důkazu: Máme-li matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pak aplikací zobecněného Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu na sloupce matice \mathbf{A} (ty mohou být lineárně závislé i nezávislé) a doplněním těchto vektorů na bázi v \mathbb{R}^m získáme sloupce matice \mathbf{Q} .

Uvažujme matici $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 | \dots | \mathbf{a}_n)$ složenou ze sloupcových vektorů. Pak

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{a}_1, & \mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}, \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{a}_2 - p_{\mathbf{e}_1} \mathbf{a}_2, & \mathbf{e}_2 &= \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|}, \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{a}_3 - p_{\mathbf{e}_1} \mathbf{a}_3 - p_{\mathbf{e}_2} \mathbf{a}_3, & \mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|}, \\ & \vdots & & \\ \mathbf{u}_k &= \mathbf{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} p_{\mathbf{e}_j} \mathbf{a}_k, & \mathbf{e}_k &= \frac{\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|}, \end{aligned}$$

kde $p_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{u}$. Po úpravě obdržíme vzorce pro vektory \mathbf{a}_i

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{e}_1 \|\mathbf{u}_1\|, \\ \mathbf{a}_2 &= p_{\mathbf{e}_1} \mathbf{a}_2 + \mathbf{e}_2 \|\mathbf{u}_2\|, \\ \mathbf{a}_3 &= p_{\mathbf{e}_1} \mathbf{a}_3 + p_{\mathbf{e}_2} \mathbf{a}_3 + \mathbf{e}_3 \|\mathbf{u}_3\|, \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_k &= \sum_{j=1}^{k-1} p_{\mathbf{e}_j} \mathbf{a}_k + \mathbf{e}_k \|\mathbf{u}_k\|. \end{aligned}$$

Označme $\mathbf{Q} = (\mathbf{e}_1 | \dots | \mathbf{e}_n)$. Nyní máme

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_n \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_n \rangle \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{a}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{a}_n \rangle \end{pmatrix},$$

neboť $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{E}$ a $\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{a}_j \rangle = \|\mathbf{u}_j\|$, $\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{a}_k \rangle = 0$ pro $j > k$.

Příklad 5.11 Proved'me QR-rozklad matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$. Gram-Schmidtovým procesem dostaneme

$$\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 12 & -69 & -58 \\ 6 & 158 & 6 \\ -4 & 30 & -165 \end{pmatrix}.$$

Matici \mathbf{Q} potom získáme jako

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} \mid \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} \mid \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} \right) = \begin{pmatrix} 6/7 & -69/175 & -58/175 \\ 3/7 & 158/175 & 6/175 \\ -2/7 & 6/35 & -33/35 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$, takže

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}.$$

Algoritmus

Mějme matici \mathbf{A} . Položme

$$r_{11} = \|\mathbf{a}_1\|, \quad \mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{r_{11}},$$

pro $k = 2, \dots, n$ spočítejme:

$$\begin{aligned} r_{jk} &= \langle \mathbf{q}_j, \mathbf{a}_k \rangle \quad \text{pro } j = 1, \dots, k-1, \\ z_k &= \mathbf{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} \mathbf{q}_j, \\ r_{kn}^2 &= \langle z_k, z_n \rangle \\ \mathbf{q}_k &= \frac{z_k}{r_{kk}}. \end{aligned}$$

Metodu lze také upravit tak, že zaměníme pořadí operací. Tedy položíme

$$\mathbf{A}^0 \equiv \mathbf{A}.$$

Pak pro $k = 2, \dots, n$ spočteme

$$\begin{aligned} r_{kk} &= \|\mathbf{a}_k^{(k-1)}\|_2, \quad \mathbf{q}_k = \frac{\mathbf{a}_k^{(k-1)}}{r_{kk}}, \\ r_{ki} &= \mathbf{q}_k^T \mathbf{a}_i^{(k-1)} \quad \text{pro } i = k+1, \dots, n, \\ \mathbf{A}^{(k)} &= \mathbf{A}^{(k-1)} - \mathbf{q}_k r_k^T. \end{aligned}$$

Z formálního hlediska jde o změnu pořadí operací, ovšem z numerického hlediska obdržíme kvalitativně různé výsledky.

QR-rozklad pomocí Householderovy matice

Věta 5.23 (Householderův QR-rozklad) Každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ lze pomocí $s = \min\{n, m-1\}$ Householderových matic rozložit na součin \mathbf{QR} , a to tak, že platí

$$\mathbf{H}_s \cdots \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 \mathbf{A} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ 0 \end{pmatrix} & m > n, \\ (\mathbf{R}_1, 0) & m < n, \\ \mathbf{R} & m = n. \end{cases}$$

Důkaz: Konstrukce QR-rozkladu

Mějme reálnou matici \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Krok 1.: Zkonstruujeme Householderovu matici \mathbf{H}_1 tak, aby $\mathbf{H}_1 \mathbf{A}$ měla v prvním sloupci pouze samé 0 s výjimkou pozice $(1, 1)$, tj. aby

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxplus & \cdots \\ 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots \end{pmatrix}.$$

K tomu stačí získat vektor \mathbf{u}_n (dle předchozího) tak, že pro

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{E} - 2 \frac{\mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T}{\mathbf{u}_n^T \mathbf{u}_n}$$

platí

$$\mathbf{H}_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxplus \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Označme $\mathbf{A}^{(1)} := \mathbf{H}_1 \mathbf{A}$. $\mathbf{A}^{(1)}$ je tvaru

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots \\ 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Krok 2.: Zkonstruujeme Householderovu matici \mathbf{H}_2 tak, že $\mathbf{H}_2 \mathbf{A}^{(1)}$ má ve druhém sloupci 0 pod pozicí (2, 2) při zachování požadavku prvního kroku, tj.

$$\mathbf{A}^{(2)} := \mathbf{H}_2 \mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} \boxplus & \square & \cdots \\ 0 & \boxplus & \cdots \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Matici \mathbf{H}_2 získáme tak, že nejdříve zkonstruujeme Householderovu matici o rozměru $(m-1) \times (n-1)$

$$\hat{\mathbf{H}}_2 := \mathbf{E}_{n-1} - 2 \frac{\mathbf{u}_{n-1} \mathbf{u}_{n-1}^T}{\mathbf{u}_{n-1}^T \mathbf{u}_{n-1}}$$

takovou, že

$$\hat{\mathbf{H}}_2 \begin{pmatrix} a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxplus \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

a definujeme

$$\mathbf{H}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \hat{\mathbf{H}}_2 & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Tím získáme matici $\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{H}_2 \mathbf{A}^{(1)}$.

Analogicky pokračujeme dále.

Pro $k \leq s$.

Krok k-tý: Obecně vytváříme Householderovu matici

$$\widehat{\mathbf{H}}_k := \mathbf{E}_{n-k+1} - 2 \frac{\mathbf{u}_{n-k+1} \mathbf{u}_{n-k+1}^T}{\mathbf{u}_{n-k+1}^T \mathbf{u}_{n-k+1}}$$

o rozměru $(m - k + 1) \times (n - k + 1)$ takovou, že

$$\widehat{\mathbf{H}}_k \begin{pmatrix} a_{kk} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxplus \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definujeme

$$\mathbf{H}_k := \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{k-1} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{H}}_k \end{pmatrix},$$

čili můžeme počítat $\mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{H}_k \mathbf{A}^{(k-1)}$.

Tímto způsobem po s krocích obdržíme matici $\mathbf{A}^{(s)}$, která bude v horním trojúhelníkovém tvaru a bude právě maticí \mathbf{R} .

Protože

$$\mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{H}_k \mathbf{A}^{(k-1)} \quad k = 2, \dots, s,$$

máme

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^{(s)} = \mathbf{H}_s \mathbf{A}^{(s-1)} = \mathbf{H}_s \mathbf{H}_{s-1} \mathbf{A}^{(s-2)} = \dots = \mathbf{H}_s \mathbf{H}_{s-1} \dots \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 \mathbf{A}.$$

Položme

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{H}_s \mathbf{H}_{s-1} \dots \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1.$$

Máme hledanou ortogonální matici (neboť každá z \mathbf{H}_i je ortogonální). Celkem

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A},$$

tj.

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{R}.$$

(Zopakujme si, že $\mathbf{Q} = \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_2^T \dots \mathbf{H}_s^T = \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \dots \mathbf{H}_s$.)

□

Příklad 5.12 *Uvažme matici*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Krok 1.: Konstrukce \mathbf{H}_1 .

$$\mathbf{H}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxplus \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Potom tedy dle Příkladu 5.8 spočteme

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

takže

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{I}_3 - 2 \frac{\mathbf{u}_3 \mathbf{u}_3^T}{\mathbf{u}_3^T \mathbf{u}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Určeme

$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{H}_1 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{1-\sqrt{2}}{2} & -\frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{1+\sqrt{2}}{2} & -\frac{2+\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Krok 2.: Zkonstruujeme

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}_2 &= \begin{pmatrix} -0,2071 \\ -1,2071 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxplus \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}_2 &= \begin{pmatrix} -0,2071 \\ -1,2071 \end{pmatrix} - 1,2247 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,4318 \\ -1,2071 \end{pmatrix}, \\ \widehat{\mathbf{H}}_2 &= \begin{pmatrix} -0,1691 & -0,9856 \\ -0,9856 & 0,1691 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

tzp.

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1691 & -0,9856 \\ 0 & -0,9856 & 0,1691 \end{pmatrix},$$

a spočítáme

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{H}_2 \mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1,4142 & -2,1213 & -2,8284 \\ 0 & 1,2247 & 1,6330 \\ 0 & 0 & -0,5774 \end{pmatrix} = \mathbf{R}$$

Pro \mathbf{Q} nyní platí

$$\mathbf{Q} = \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0,8165 & 0,5774 \\ -0,7071 & 0,4082 & -0,5774 \\ -0,7071 & -0,4082 & 0,5774 \end{pmatrix}.$$

Celkem tedy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,8165 & 0,5774 \\ -0,7071 & 0,4082 & -0,5774 \\ -0,7071 & -0,4082 & 0,5774 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1,4142 & -2,1213 & -2,8284 \\ 0 & 1,2247 & 1,6330 \\ 0 & 0 & -0,5774 \end{pmatrix} = \mathbf{QR}.$$

QR-rozklad pomocí Givensovy matice

Definice 5.6 *Matice tvaru*

$$\mathbf{G}(i, j, c, s) := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} + (c-1)(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^T) + s(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T - \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^T),$$

kde $c^2 + s^2 = 1$, se nazývá Givensova matice.

Můžeme volit $c = \cos \alpha$ a $s = \sin \alpha$ pro nějaké α . Pak značíme Givensovu matici jako $\mathbf{G}(i, j, \alpha)$.

Opět chceme sestavit matice $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_s$ tentokrát však pomocí Givensových matic tak, aby $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{A}$ měla nuly pod prvkem $(1, 1)$ v prvním sloupci, matice $\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{Q}_2 \mathbf{A}^{(1)}$ měla nuly pod $(2, 2)$ ve druhém sloupci, atd. Každou z matic \mathbf{Q}_i lze sestavit jako součin Givensových matic – ten je možné sestavit takto:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &:= \mathbf{G}(1, m, \alpha) \mathbf{G}(1, m-1, \alpha) \cdots \mathbf{G}(1, 3, \alpha) \mathbf{G}(1, 2, \alpha) \\ \mathbf{Q}_2 &:= \mathbf{G}(2, m, \alpha) \mathbf{G}(2, m-1, \alpha) \cdots \mathbf{G}(2, 3, \alpha) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bud' $s = \min\{m-1, n\}$. Pak

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^{(s)} = \mathbf{Q}_s \mathbf{A}^{(s-1)} = \cdots = \mathbf{Q}_s \mathbf{Q}_{s-1} \cdots \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A}.$$

Nyní máme $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, kde $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}_s \cdots \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1$. To lze zformulovat do následující věty.

Věta 5.24 (Givensův QR-rozklad) *Bud' \mathbf{A} matice $m \times n$ a nechť $s = \min\{m-1, n\}$. Existuje s ortogonálních matic $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_s$ definovaných jako*

$$\mathbf{Q}_i := \mathbf{G}(i, m, \alpha) \mathbf{G}(i, m-1, \alpha) \cdots \mathbf{G}(i, i+1, \alpha),$$

že pro

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_2^T \cdots \mathbf{Q}_s^T$$

platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R},$$

kde \mathbf{R} je matice $m \times n$ s nulami pod hlavní diagonálou.

Znázorníme si schématicky Givensovu metodu redukce matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ na horní trojúhelníkový tvar (symbol \bullet značí prvky, které se transformací nezměnily, a \pm značí prvky, které se změnily):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} &\xrightarrow{\mathbf{G}(1, 2, \alpha)} \begin{pmatrix} \pm & \pm & \pm \\ 0 & \pm & \pm \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{G}(1, 3, \alpha)} \\ &\xrightarrow{\mathbf{G}(1, 3, \alpha)} \begin{pmatrix} \pm & \pm & \pm \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & \pm & \pm \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{G}(2, 3, \alpha)} \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \pm & \pm \\ 0 & 0 & \pm \end{pmatrix} = \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Příklad 5.13 *Nechť*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Krok 1.: Najdeme c a s tak, aby

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \oplus \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Neboť $a_{11} = 0$ a $a_{21} = 1$, musí být $c = 0$ a $s = 1$, tedy

$$\mathbf{G}(1, 2, \alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pak dostaneme

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{G}(1, 2, \alpha)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní najdeme c a s tak, aby

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} \\ \tilde{a}_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \oplus \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Neboť $\tilde{a}_{11} = 1$ a $\tilde{a}_{31} = 1$, bude $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tedy

$$\mathbf{G}(1, 3, \alpha) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Celkem

$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{G}(1, 3, \alpha) \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 2\sqrt{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Krok 2.: Určeme c a s tak, aby

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxplus \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Neboť $a_{22}^{(1)} = -1$ a $a_{32}^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, bude $c = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ a $s = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, tedy

$$\mathbf{G}(1, 3, \Theta) \mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 2\sqrt{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 2\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 2\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = R.$$

5.7.6 Srovnání algoritmů

Při výpočtu QR -rozkladu pomocí Householderovy matice je počet provedených operací roven číslu

$$n^2(3 - \frac{n}{3}).$$

K explicitnímu vyjádření matice \mathbf{Q} je navíc potřeba

$$2(m^2n - mn^2 + \frac{1}{3}n^3)$$

operací, tedy celkem

$$2m^2n - mn^2 + \frac{1}{3}n^3.$$

Zatímco pro QR -rozklad pomocí Givensovy matice je tento počet dvojnásobný, tj.

$$2n^2(3 - \frac{n}{3}).$$

Ovšem pokud v metodě s Givensovou maticí nahradíme matici rotace $\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$ a matice odrazu $\begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}$ maticemi $\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ s ortogonálními sloupci, pak se nám podaří snížit počet operací na úroveň metody využívající Householderovy matice – jedná se o tzv. **matice rychlé Givensovy transformace**.

Householderova matice má však tu nevýhodu, že v matici, kterou ji násobíme, nám změní všechny prvky (zatímco Givensova matice jen i -tý a k -tý řádek), takže nám například může z řídké matice vytvořit matici plnou.

V modifikované metodě s Gram-Schmidtovým algoritmem je počet operací mn^2 .

5.7.7 QR-rozklad a vlastní čísla matice \mathbf{A} – QR-algoritmus

Základní **QR-algoritmus**: Mějme matici \mathbf{A} . Sestrojme její QR-rozklad, tj.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 = \mathbf{Q}_0 \mathbf{R}_0,$$

určíme

$$\mathbf{A}_1 := \mathbf{R}_0 \mathbf{Q}_0.$$

Nyní sestrojme QR-rozklad matice \mathbf{A}_1 , tj.

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1,$$

a spočtěme

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{R}_1 \mathbf{Q}_1.$$

Takto pokračujeme analogicky dále.

Jistě platí

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{k+1} &= \mathbf{R}_k \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{R}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{Q}_k = \\ &= \mathbf{Q}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}^T \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{Q}_k = \cdots = (\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_k)^T \mathbf{A} (\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_k). \end{aligned}$$

Tedy matice $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots$ jsou *kongruentní* (tj. $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \iff \mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{B} \mathbf{P}$). Navíc díky ortogonalitě matic $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \dots$ jsou matice $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots$ také *podobné* (tj. $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ (též $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$) $\iff \mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}$). Tyto matice mají díky podobnosti stejná vlastní čísla jako matice \mathbf{A} . Posloupnost těchto matic konverguje za určitých předpokladů k horní trojúhelníkové (resp. horní blokově trojúhelníkové) matici, která má vlastní čísla na diagonále (resp. diagonální bloky mají vlastní čísla se stejnou absolutní hodnotou) seřazena podle velikosti počínaje největším vlastním číslem. Poddiagonální prvky (resp. poddiagonální bloky) konvergují k nule. Ovšem důkazy konvergence existují jen pro některé speciální typy matic. Například má-li matice \mathbf{A} kladná vlastní čísla, pak \mathbf{Q}_k konverguje k jednotkové matici a posloupnost matic \mathbf{A}_k k horní trojúhelníkové matici, přičemž diagonální prvky této matice jsou vlastní čísla matice \mathbf{A} .

Příklad 5.14 Určeme vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{3} & 1 \\ 3 & -\frac{5}{3} & 1 \\ 0 & \frac{11}{9} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Lze snadno ověřit, že vlastní čísla matice \mathbf{A} jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ a $\lambda_3 = 3$. Výsledky získané QR-algorem:

k	$a_{11}^{(k)}$	$a_{22}^{(k)}$	$a_{33}^{(k)}$
1	2,0	-1,6666667	1,6666667
5	3,1781374	-2,2260322	1,0478949
10	2,9486278	-1,9471270	0,9984996
15	3,0003596	-2,0064061	1,0000468
20	2,9991547	-1,9991527	0,9999984
25	3,0001104	-2,0001098	0,9999999

Ke zrychlení konvergence lze využít tzv. *posunutí* a počítat nikoli rozklad matice $\mathbf{A}_k = \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_k$, nýbrž matice

$$\mathbf{A}_k - \sigma_k \mathbf{I} = \tilde{\mathbf{Q}}_k \tilde{\mathbf{R}}_k.$$

Původní spektrum matice \mathbf{A} se tímto posune o σ_k (je výhodné volit jej jako nějakou aproximaci vlastního čísla; matice $\mathbf{A}_k - \sigma_k \mathbf{E}$ má vlastní čísla $\lambda_j - \sigma_k$, jsou-li λ_j vlastní čísla matice \mathbf{A}_k). Zaznamenáváme-li velikosti posunutí σ_k , snadno ze znalosti spektra matice \mathbf{A}_k najdeme spektrum matice \mathbf{A} . Protože ještě (v metodě bez posunutí)

$$\mathbf{A}_k = (\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_{k-1})^T \mathbf{A} (\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_{k-1}),$$

je

$$\mathbf{A} = (\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_{k-1})^T \mathbf{A}_k (\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_{k-1}).$$

Vlastní vektory \mathbf{y} matice \mathbf{A} dostaneme z vlastních vektorů matice \mathbf{A}_k podle vzorce

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{z}.$$

Týž vzorec (s maticemi $\tilde{\mathbf{Q}}_j$) zůstává v platnosti i pro metodu s posunutími, protože při posunutí se vlastní vektory nemění.

Volí-li se posunutí speciálně, dostáváme v některých důležitých případech i kubickou konvergenci (tzn. zhruba řečeno, počet platných míst se v každém kroku přibližně ztrojnásobí).

Poznámka 5.21 *Nejvýhodnější se jeví upravit nejdříve matici \mathbf{A} do tzv. Hessenbergova tvaru (tj. $a_{ij} = 0$ pro $j < i - 1$, $i, j = 1, \dots, n$) pomocí Gaussovy eliminace a pak na tuto upravenou matici použít QR-rozklad. Konvergence je potom rychlejší (obzvláště použijeme-li metodu posunu, kde za σ_k volíme tzv. Rayleighův podíl*

$$\mathbf{e}^{kT} \mathbf{H} \mathbf{e}^k / \mathbf{e}^{kT} \mathbf{e}^k,$$

kde \mathbf{H} je právě matice \mathbf{A} v Hessenbergově tvaru). Navíc platí, že je-li matice \mathbf{A} v Hessenbergově tvaru, pak každá z matic \mathbf{H}_k je také v Hessenbergově tvaru, a to i při metodě posunutí.

5.8 Podmíněnost problému vlastních čísel

Důležitou charakteristikou libovolného problému je jeho *podmíněnost*, která udává, jak významně se změní řešení problému, pokud změníme vstupní hodnoty. Podmíněnost problému vlastních čísel můžeme popsat pomocí tzv. *globálního čísla podmíněnosti*.

5.8.1 Globální číslo podmíněnosti

Vzhledem k zaokrouhlování řešíme ve skutečnosti problém

$$(\mathbf{A} + \mathbf{E} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

namísto

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Následkem zaokrouhlování při výpočtu dostáváme řešení problému $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mathbf{x}}$, který je přesným řešením problému s poruchou

$$(\mathbf{A} - \mathbf{E}_M - \tilde{\lambda}\mathbf{I})\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0},$$

kde \mathbf{E}_M zahrnuje zaokrouhlovací chyby během výpočtu.

Poznámka 5.22 *Analýza stability vlastního problému je velmi složitá a dá se uapokojivě provést jen pro jednoduché vlastní číslo anebo pro matici, která je diagonalizovatelná.*

Definice 5.7 *Matice \mathbf{A} je diagonalizovatelná, když existuje matice \mathbf{X} taková, že*

$$\mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{D},$$

kde \mathbf{D} je diagonální matice.

Věta 5.25 (Bauer, Fike) *Pokud je \mathbf{A} diagonalizovatelná matice s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, potom vlastní čísla matice $\mathbf{A} + \mathbf{E}$ leží v jednotkovém kruhu*

$$K_i = \{z; |z - \lambda_i| \leq c(\mathbf{X}) \cdot \|\mathbf{E}\|\},$$

kde $c(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X}\| \|\mathbf{X}^{-1}\|$ je číslo podmíněnosti matice vlastních vektorů v maticové normě $\|\cdot\|$.

Důkaz: Necht' $(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Potom buď $\lambda = \lambda_i$ pro nějaký index i a potom $\lambda \in K_i$, a nebo $\lambda \neq \lambda_i$ pro $i = 1, \dots, n$. Potom $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ je regulární matice. Matice

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{E}) = \mathbf{I} - (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}$$

je singulární. Proto podle vztahu

$$\rho[(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}] \geq 1$$

platí

$$\begin{aligned} 1 &\leq \|(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}\| = \|(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{XDX}^{-1})^{-1}\mathbf{E}\| = \|\mathbf{X}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{E}\| \leq \\ &\leq \|\mathbf{X}\| \|\mathbf{X}^{-1}\| \|\mathbf{E}\| \|(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}\| = c(\mathbf{X}) \|\mathbf{E}\| \|(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}\| = \\ &= c(\mathbf{X}) \|\mathbf{E}\| \max_i \left[\frac{1}{|\lambda - \lambda_i|} \right]. \end{aligned}$$

Přitom jsme využili skutečnost, že maticová norma diagonální matice je daná jejím maximálním diagonálním prvkem v absolutní hodnotě. Odtud

$$\min_i |\lambda - \lambda_i| \leq c(\mathbf{X}) \|\mathbf{E}\|.$$

□

Poznámka 5.23 *Číslo $c(\mathbf{X})$ charakterizuje míru odchylky porušených vlastních čísel v závislosti na velikosti poruchy $\|\mathbf{E}\|$.*

Důsledek 5.3 *Problém vlastních čísel normálních matic je dobře podmíněný.*

Důkaz: Protože normální matice jsou unitárně podobné diagonální matici a ve spetkrální normě

$$\|\mathbf{U}\|_2 = \|\mathbf{U}^*\|_2 = \|\mathbf{U}^{-1}\|_2 = 1,$$

potom $c_2(\mathbf{U}) = 1$.

□

5.8.2 Odhad chyby vypočítaného vlastního čísla

Přesnost vypočítaného vlastního čísla a vlastního vektoru ověřujeme pomocí reziduí.

Věta 5.26 (Odhad chyby vypočítaného vlastního čísla) *Nechť určené vlastní číslo $\tilde{\lambda}$ a k němu příslušný vypočítaný vlastní vektor $\tilde{\mathbf{x}}$ dávají (přesný) reziduální vektor*

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\lambda}\tilde{\mathbf{x}}.$$

Potom $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mathbf{x}}$ jsou přesné hodnoty vlastního čísla a vlastního vektoru matice s poruchou $\mathbf{A} + \mathbf{E}$, kde

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{r}\tilde{\mathbf{x}}^*}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_2^2}$$

a platí odhad

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| \leq \frac{\|\mathbf{y}\|_2 \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{r}\|_2}{|\mathbf{y}^T \mathbf{x}| \|\tilde{\mathbf{x}}\|_2}, \quad (5.10)$$

kde \mathbf{y} je levý vlastní vektor matice \mathbf{A} příslušný vlastnímu číslu λ .

Důkaz:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{A} - \frac{\mathbf{r}\tilde{\mathbf{x}}^*}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_2^2} \right) \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_2^2}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_2^2} \mathbf{r} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{r} = \tilde{\lambda}\tilde{\mathbf{x}} \\ |\lambda - \tilde{\lambda}| &\leq \frac{\|\mathbf{y}\|_2 \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{E}\|_2}{|\mathbf{y}^T \mathbf{x}|} + O\left(\frac{\|\mathbf{E}\|_2}{\|\mathbf{A}\|_2}\right)^2. \end{aligned}$$

Když

$$\|\mathbf{E}\|_2 = \frac{\|\mathbf{r}\|_2 \|\tilde{\mathbf{x}}^*\|_2}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_2} = \frac{\|\mathbf{r}\|_2}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_2}$$

dosadíme do nerovnosti, dostáváme

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| \leq \frac{\|\mathbf{y}\|_2 \|\mathbf{x}\|_2}{|\mathbf{y}^T \mathbf{x}|} \frac{\|\mathbf{r}\|_2}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_2} + O\left(\frac{\|\mathbf{E}\|_2}{\|\mathbf{A}\|_2}\right)^2 = c(\lambda) \frac{\|\mathbf{r}\|_2}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_2} + O\left(\frac{\|\mathbf{E}\|_2}{\|\mathbf{A}\|_2}\right)^2.$$

□

Poznámka 5.24 1. *Pro symetrické matice*

$$c(\lambda) = \frac{\|\mathbf{y}\|_2 \|\mathbf{x}\|_2}{|\mathbf{y}^T \mathbf{x}|} = 1 \quad a \quad |\lambda - \tilde{\lambda}| \leq \frac{\|\mathbf{r}\|_2}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_2}$$

.

2. *V praxi přesné hodnoty \mathbf{x} , \mathbf{y} neznáme, proto se ve vztahu (7.1) nahrazují hodnotami $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{y}}$, tj.*

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| \lesssim \frac{\|\tilde{\mathbf{y}}\|_2 \|\tilde{\mathbf{x}}\|_2}{|\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{x}}|} \frac{\|\mathbf{r}\|_2}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_2} = \frac{\|\tilde{\mathbf{y}}\|_2 \|\mathbf{r}\|_2}{|\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{x}}|} \quad (5.11)$$

5.8.3 Relativní chyba vypočítaného vlastního čísla

Pro jednoduché vlastní číslo $\lambda \neq 0$ můžeme pomocí (7.1) vyjádřit relativní chybu takto

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta\lambda|}{|\lambda|} &\approx \left| \varepsilon \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{x}}{\mathbf{y}^T \mathbf{x}} \frac{1}{\lambda} \right| \leq \varepsilon \frac{\|\mathbf{y}\|_2 \|\mathbf{x}\|_2}{|\mathbf{y}^T \mathbf{x}|} \frac{\|\mathbf{B}\|_2}{|\lambda|} = \varepsilon c(\lambda) \frac{\|\mathbf{B}\|_2}{|\lambda|} \approx \\ &\approx \varepsilon c(\lambda) \frac{\|\mathbf{A}\|_2}{|\lambda|} = \varepsilon c(\lambda) \frac{\|\mathbf{A}\|_2}{\rho(\mathbf{A})} \frac{\rho(\mathbf{A})}{|\lambda|}. \end{aligned}$$

5.9 Shrnutí

Zopakovali jsme si definici vlastních čísel matice a jejich základní vlastnosti. Seznámili jsme se s vybranými metodami jejich určení.

6 Soustavy nelineárních rovnic

6.1 Úvod

V druhé kapitole jsme se věnovali řešení soustav lineárních algebraických rovnic. V nejrůznějších aplikacích se ale vyskytují i nelineární rovnice (tém jsme se věnovali ve třetí kapitole) a soustavy nelineárních rovnic.

Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře s numerickými metodami řešení soustav nelineárních rovnic.

Nebudeme schopni řešit každou soustavu nelineárních rovnic. Pouze pokud budou splněny konvergenční podmínky, jsme schopni najít řešení. Proto je důležité se umět vhodně přiblížit k řešení a nebo umět odhadnout polohu řešení.

Z celé řady používaných metod si ukážeme použití prosté iterační metody a Newtonovy metody pro soustavy nelineárních rovnic a stanovíme si podmínky pro konvergenci těchto metod.

Opět nás bude zajímat i rychlost konvergence a možnost odhadu chyby po k -tém kroku iterace.

6.2 Základní pojmy

Soustavu n nelineárních rovnic si můžeme zapsat ve tvaru

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$\ddots \quad \ddots$$

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

A nebo ve vektorovém tvaru

$$\mathcal{F}(X) = \mathcal{O},$$

kde $\mathcal{F}(X) = (F_1(X), F_2(X), \dots, F_n(X))^T$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, \mathcal{O} je nulový sloupec.

6.3 Iterační metoda

Nechť \mathcal{F} je spojitě zobrazení na oblasti D . Rovnici $\mathcal{F}(X) = \mathcal{O}$, si přepíšeme na tvar $X = \Phi(X)$, zvolíme si $X_0 \in D$ a iterační vztah

$$(X_{k+1})^T = \Phi(X_k), \quad \Phi(X) = (\varphi_1(X), \varphi_2(X), \dots, \varphi_n(X))^T.$$

Věta 6.1 *Nechť v uzavřené oblasti D platí*

$$1) \quad \Phi(X) \in D \quad \forall X \in D,$$

$$2) \quad \exists q \in [0, 1) \text{ tak, že } \|\Phi(X) - \Phi(Y)\| \leq q\|X - Y\| \quad \forall X, Y \in D,$$

potom posloupnost $\{X_k\}$ konverguje k jedinému řešení \mathcal{R} a platí

$$\|X_k - \mathcal{R}\| \leq \frac{q}{1-q} \|X_k - X_{k-1}\|.$$

Důkaz: Plyne z Banachovy věty o pevném bodě 2.8. □

Poznámka 6.1 Jestliže Φ je diferencovatelná, pak podmínku 2 můžeme nahradit

$$2') \quad \exists q : \|\Phi'(X)\| \leq q < 1 \quad \forall X \in D,$$

kde $\Phi'(X)$ je matice s prvky
$$a_{ij} = \frac{\partial \varphi_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j}.$$

POZOR. Maticová norma v 2') musí být souhlasná s vektorovou normou.

Většinou bývá obtížné najít Φ a D , tak aby jsme měli zajištěnu konvergenci, zvláště u rozsáhlejších soustav. Někdy se užívá metoda pokusů. Pozor, v tom případě je nutno zvláště pečlivě prověřit výsledek.

Pokud máme soustavu dvou rovnic, potom můžeme určit $\Phi'(X)$ jednoduše podle vzorce: Necht

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

potom

$$\Phi'(X) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

neboli: prvky na hlavní diagonále přehodíme, u prvků na vedlejší diagonále změnímme znaménko a celou matici vydělíme hodnotou jejího determinantu.

Příklad 6.1 Metodou prosté iterace najděte kladné řešení (pokud existuje) pro soustavu

$$\begin{aligned} \sin(x+1) - y &= 0.5, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Řešení: Jde o průsečík kružnice se středem v počátku a o jednotkovém poloměru s posunutou goniometrickou funkcí. Grafickou metodou můžeme odhadnout polohu kořene

$$0.8 \leq x \leq 1, \quad 0.4 \leq y \leq 0.5.$$

Upravíme si rovnice do iteračního tvaru

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{1 - y^2}, \\ y &= \sin x + 1 - 0.5. \end{aligned}$$

Potom

$$\Phi'(X) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \\ \cos(x+1) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\|\Phi'(X)\| \doteq 0.5,$$

při použití řádkové normy. Zvolíme si počáteční aproximaci $x_0 = 0.85$, $z_0 = 0.46$ a dosazením do iteračních vztahů dostaneme

$$x_1 = \sqrt{1 - (z_0)^2} \doteq 0.882,$$

$$y_1 = \sin(x_0 + 1) - 0.5 \doteq 0.45.$$

Výpočet opakuje. Výsledky si zapíšeme do tabulky

k	x	y
0	0.85	0.46
1	0.882	0.45
2	0.893	1.448
3	0.894	0.448

Po dosazení posledních hodnot do jedné z rovnic dostaneme

$$(x_3)^2 + (y_3)^2 = 0.9999.$$

Chyba je řádově 10^{-4} . Pokud tato přesnost je postačující ukončujeme výpočet, pokud ne, pokračuje dále v iterování.

Příklad 6.2 *Metodou prosté iterace najděte řešení soustavy*

$$x = 0.2 + 0.1(-xy^2 + 3x),$$

$$y = 0.6 + 0.1(x^2y^3 - 2y),$$

v oblasti $\Omega = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Řešení: Nejprve si ověříme první podmínku věty 6.1, že $\Phi(\Omega) \subset \Omega$.

$$0 \leq 0.2 + 0.1(-xy^2 + 3x) \leq 1,$$

$$0 \leq 0.6 + 0.1(x^2y^3 - 2y) \leq 1.$$

Potom

$$\Phi'(X) = \begin{pmatrix} -0.1y^2 + 0.3 & -0.2xy \\ -0.2xy^3 & -0.3x^2y^2 - 0.2 \end{pmatrix}.$$

Určíme si odhad $\|\Phi'(X)\|$ v řádkové normě a dostaneme

$$\|\Phi'(X)\| = \max_{x,y \in \langle 0;1 \rangle} \{|-0.1y^2 + 0.3| + |0.2xy|, |0.2xy^3| + |-0.3x^2y^2 - 0.2|\} \leq \max\{0.3 + 0.2, 0.2 + 0.5\} = 0.7.$$

Máme splněnu druhou podmínku věty 6.1. Protože máme zaručenou konvergenci metody, můžeme iterovat. Volíme $x_0 = y_0 = 0$ a postupně dostáváme výsledky, které si opět zapíšeme do tabulky

k	x	y
0	0	0
1	0,2	0,6
2	0,2528	0,479136
3	0,270036	0,503402
...
8	0.275882	0.499209
9	0.27589	0.499211

Rozdíl posledních dvou iterací je řádově 10^{-5}). Pokud tato přesnost je postačující ukončujeme výpočet, pokud ne, pokračuje dále v iterování.

6.4 Newtonova metoda

Mějme soustavu $\mathcal{F}(X) = \mathcal{O}$, necht' \mathcal{F} jsou diferencovatelné v oblasti D . Potom rozvojem do Taylorovy řady v okolí bodu $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ dostaneme

$$\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(X_0) + \mathcal{F}'(X_0)(X - X_0) + \dots,$$

kde

$$\mathcal{F}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

je jakobián funkce \mathcal{F} , nebo v souřadnicích pro $i = 1, 2, \dots, n$

$$F_i(X) = F_i(X_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i(X_0)}{\partial x_j} (x_j - x_j^0) + \dots$$

Zanedbáním vyšších řádů pak dostaneme soustavu

$$\mathcal{F}(X) \approx \mathcal{F}(X_0) + \mathcal{F}'(X_0)(X - X_0).$$

Předpokládáme, že $\mathcal{F}(X) = \mathcal{O}$. Je-li \mathcal{F}' regulární, potom má soustava jedinné řešení

$$X_1 = X_0 - (\mathcal{F}'(X_0))^{-1} \mathcal{F}(X_0).$$

Jestliže je \mathcal{F}' regulární v bodě X_1 , postup opakujeme. Máme tak definovaně iterační proces

$$X_{n+1} = X_n - (\mathcal{F}'(X_n))^{-1} \mathcal{F}(X_n).$$

Problémy nám nastávají vždy s určením inverzní matice.

Vezmeme si nejjednodušší případ:

$\mathcal{F}(X) = \mathcal{O}$ je soustava dvou rovnic o dvou neznámých

$$F_1(x, y) = 0,$$

$$F_2(x, y) = 0.$$

Necht' F_1, F_2 jsou diferencovatelné v oblasti D . Potom rozvoj do Taylorovy řady nám v okolí bodu (x_k, y_k) dává pro $i = 1, 2$

$$F_i(x, y) = F_i(x_k, y_k) + \frac{\partial F_i(x_k, y_k)}{\partial x} (x - x_k) + \frac{\partial F_i(x_k, y_k)}{\partial y} (y - y_k) + \dots$$

a opět zanedbáme členy vyšších řádů a dostaneme aproximaci lineární funkcí.

$$\mathcal{F}(X) \approx \mathcal{F}(X_k) + \mathcal{F}'(X_k)(X - X_k),$$

kde \mathcal{F}' je Jacobián funkce \mathcal{F} ,

$$\mathcal{F}'(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (X - X_k) = \begin{pmatrix} x - x_k \\ y - y_k \end{pmatrix}.$$

Je-li \mathcal{F}' regulární v okolí bodu X_k , má naše soustava jedinné řešení X_{k+1} .

$$X_{k+1} = X_k - (\mathcal{F}'(X_k))^{-1}(\mathcal{F}(X_k)),$$

nebo v souřadnicích

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \frac{1}{\det \mathcal{F}'(X_k)} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial y} & -\frac{\partial F_1}{\partial y} \\ -\frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(x_k, y_k) \\ F_2(x_k, y_k) \end{pmatrix}.$$

Zde jsme využili vzorce z algebry: Pro $ad - bc \neq 0$ platí

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Výpočet ukončíme při splnění podmínky $\|X_{k+1} - X_k\| < \varepsilon$.

Příklad 6.3

$$F_1(x, y) = x^2 - 0.4x + y^2 - 4 = 0,$$

$$F_2(x, y) = x^2y + y - 1 = 0.$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x - 0.4, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = x^2 + 1,$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}'| &= \begin{vmatrix} 2x - 0.4 & 2y \\ 2xy & x^2 + 1 \end{vmatrix} = (2x - 0.4)(x^2 + 1) - 2xy^2 = \\ &= 2x^3 + 2x - 0.4x^2 - 0.4 - 4xy^2. \end{aligned}$$

Potom máme pro $x \in (2; 3)$, $y \in (0; 1)$. Pro určení oblasti D si stačí uvědomit, že $F_1(x, y) = 0$ je rovnicí kružnice a y nemůže nabývat záporných hodnot (Rovnice $F_2(x, y) = 0$ si můžeme upravit na tvar $y(x^2 + 1) = 1$, odkud už plyne, že $y \geq 0$.) $|\mathcal{F}'(x, y)| = 2x^3 + 2x - 0.4x^2 - 0.4 - 4xy^2 > 0 \Rightarrow$ v okolí tohoto bodu je derivace nenulová \Rightarrow můžeme začít iterovat podle vztahů:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{(x_k^2 + 1)(x_k^2 - 0.4x_k + y_k^2 - 4) - 2y_k(x_k^2y_k + y_k - 1)}{2x_k^3 + 2x_k - 0.4x_k^2 - 0.4 - 4x_ky_k^2}, \\ y_{k+1} &= y_k - \frac{(-2x_ky_k)(x_k^2 - 0.4x_k + y_k^2 - 4) + (2x_k - 0.4)(x_k^2y_k + y_k - 1)}{2x_k^3 + 2x_k - 0.4x_k^2 - 0.4 - 4x_ky_k^2}. \end{aligned}$$

Poznámka 6.2 Newtonovou metodou můžeme určit i kořen komplexní rovnice $f(z) = 0$. Nechť $z = x + jy$, $\operatorname{Re} f = u(x, y)$, $\operatorname{Im} f = v(x, y)$, potom máme soustavu dvou rovnic

$$u(x, y) = 0,$$

$$v(x, y) = 0,$$

kterou řešíme podle výše uvedených vztahů.

Příklad 6.4 Newtonovou metodou řešte soustavu

$$f_1 : x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0,$$

$$f_2 : x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0.$$

Řešení: Nejdříve si určíme o co se jedná: Upravíme si první rovnici, tj. doplníme ji na úplný kadrát.

$$x^2 + 2x + y^2 - 3 = 0,$$

$$(x + 1)^2 - 1 + y^2 - 3 = 0,$$

$$(x + 1)^2 + y^2 = 4.$$

Dostali jsme rovnici kružnice se středem $S = (-1; 0)$ a poloměrem $r = 2$. Analogicky pro druhou rovnici dostaneme

$$x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0,$$

$$x^2 + (y - 2)^2 - 4 - 5 = 0,$$

$$x^2 + (y - 2)^2 = 9.$$

Dostali jsme rovnici kružnice se středem $S = (0; 2)$ a poloměrem $r = 3$. Grafickou metodou odhadneme polohu kořenů

$$\Omega = \{0.8 < x < 0.9, -0.9 < y < -1\}.$$

Sestavíme si matici inverzní

$$\mathcal{F}'(X) = \begin{pmatrix} 2(x+1) & 2y \\ 2x & 2(y-2) \end{pmatrix},$$

Sestavíme si iterační rovnice

$$x^{k+1} = x^k + \frac{1}{2(y^k - 2x^k) - 4} [y^k f_2 - (y^k - 2)f_1],$$

$$y^{k+1} = y^k + \frac{1}{2(y^k - 2x^k) - 4} [x^k f_1 - (x^k + 1)f_2].$$

Protože máme zaručenou konvergenci metody, můžeme iterovat, výsledky si opět zapíšeme do tabulky

k	x	y
0	0.8	-0.9
1	0.8111	-0.9056
2	0.7889	-0.8845
...

Výpočet ukončíme v závislosti na požadované přesnosti.

Příklad 6.5 *Newtonovou metodou řešte soustavu*

$$\begin{aligned} f(x, y) : x^3 - xy^2 - 1 &= 0, \\ g(x, y) : y^3 - 2x^2y + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Řešení: Grafickou metodou odhadneme polohy kořenů. Ze tří kořenů si vybereme levý horní, který leží v oblasti

$$\Omega = \{-2 \leq x \leq -1, 1 \leq y \leq 2\}.$$

Výpočet ukončíme když

$$\max\{|f(x^{k+1}, y^{k+1})|, |g(x^{k+1}, y^{k+1})|\} < 10^{-5}.$$

Volíme $x^0 = -1$, $y^0 = 1$ a dostaneme

k	x	y
0	-1	1
1	-1.5	2
2	-1.379562	1.673966
3	-1.392137	1.629879
4	-1.394072	1.631182
5	-1.394069	1.631182

Všimněte si, že v okolí kořene $x = -1.39407$, $y = 1.63118$ je konvergence velmi rychlá.

6.5 Shrnutí

V aplikacích se často vyskytují soustavy rovnic a to lineárních i nelineárních.

Zabývali jsme se hledáním řešení soustav nelineárních rovnic. Ukázali jsme si podmínky, které nám zaručují konvergenci prosté iterační metody a Newtonovy metody pro soustavy nelineárních rovnic.

Zabývali jsme se rychlost konvergence těchto metod a možností odhadu chyby po k -tém kroku iterace.

Všechny tyto podmínky a odhady vycházejí z Banachovy věty o pevném bodu.

7 Řešení obyčejných diferenciálních rovnic.

7.1 Úvod

Matematicky popisujeme většinu fyzikálních a technických dějů pomocí diferenciálních rovnic. Pokud je popisovaný děj funkcí jedné proměnné, tak jde při popisu o obyčejné diferenciální rovnice. Pouze malou část z nich jsme schopni řešit analyticky, tj. buď vyjádřit řešení v explicitním tvaru $y = f(x)$ a nebo v implicitním tvaru $F(x, y) = 0$.

Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře s numerickými metodami řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Numerické řešení hledáme tehdy, když nejsme schopni nalézt analytické řešení a nebo pokud by jeho nalezení zabralo příliš mnoho času a nebo je pro nás příliš obtížné.

Nejdříve si připomeneme základní pojmy z teorie diferenciálních rovnic. Zformulujeme si znovu Cauchyovu úlohu. Zopakujeme si analytické řešení vybraných typů obyčejných diferenciálních rovnic.

Poté přejdeme k numerickým metodám. Začneme u jednokrokových metod. Budeme se zabývat Eulerovou metodou a jejími modifikacemi a metodou Rugeho-Kutty. Zmíníme se i o stabilitě řešení. Půjde o opakování z předmětu BMA3.

Pak se zaměříme na vícekové metody. Probereme si Adamsovy metody, metody prediktor-korektor a prediktor-modifikátor-korektor.

Všechny metody budou založeny na diskretizaci proměnné. Nebudeme hledat spojitou funkci, která vyhovuje dané rovnici, ale diskrétní funkci, která bude definována pouze na konečném počtu bodů a bude se v limitě blížit k přesnému řešení.

7.2 Cauchyova úloha.

Řád diferenciální rovnice je roven nejvyšší derivaci neznámé funkce, která se v rovnici vyskytuje. My se nejdříve budeme věnovat rovnicím prvního řádu.

Na intervalu $[a, b]$ máme řešit diferenciální rovnici prvního řádu

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (7.1)$$

s počáteční podmínkou

$$y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in [a, b]. \quad (7.2)$$

Nejčastěji se bere $x_0 = a$.

Definice 7.1 Úloha (7.1), (7.2) se nazývá počáteční úlohou (nebo Cauchyovou úlohou).

Věta 7.1 Picardova věta - o existenci a jednoznačnosti řešení.

Mějme oblast $D = \{(x, y) : |x - x_0| \leq p, |y - y_0| \leq q\}$. Nechť

1. $f(x, y)$ je spojitá v D po obou proměnných a tedy je v D ohraničená, t.j. $\forall (x, y) \in D : |f(x, y)| \leq M$, M je kladná konstanta.
2. $f(x, y)$ splňuje v D Lipschitzovu podmínku $|f(x, y) - f(x, u)| \leq L|y - u|$, kde L je kladná konstanta a $(x, y), (x, u)$ jsou libovolné body z D .

Potom má úloha (7.1), (7.2) právě jedno řešení, které je spojitě a spojitě diferencovatelné na intervalu $|x - x_0| < h$, $h = \min\{p, qM^{-1}\}$ a při těchto hodnotách je $|y - y_0| \leq q$, t.j. zůstává v D .

Bez důkazu.

Poznámka 7.1 Podmínka 2 věty 7.1 bude splněna automaticky, jestliže budou v D spojitě a tedy i ohraničené parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle y pro libovolný bod $(x, y) \in D$, t.j.

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq K, \quad K > 0.$$

POZOR: Velmi často se vyskytují úlohy, při nichž je funkce $f(x, y)$ spojitá a diferencovatelná, ale parciální derivace podle y jsou neohraničené. Potom je existence a hlavně jednoznačnost řešení garantována pouze v nějakém okolí bodu x_0 , které může být velmi malé.

Příklad 7.1 Mějme danu rovnici

$$y' = 2\sqrt{y}, \quad (y \geq 0).$$

Potom pro $y \neq 0$ máme

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} = 1 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{y})' = 1.$$

Integrací dostaneme

$$|\sqrt{y}| = x + C,$$

a po odstranění absolutní hodnoty, máme

$$\sqrt{y} = x + C, \quad \text{kde } x + C > 0 \quad \text{a tedy } x > -C,$$

$$y = \begin{cases} (x + C)^2, & x > -C \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

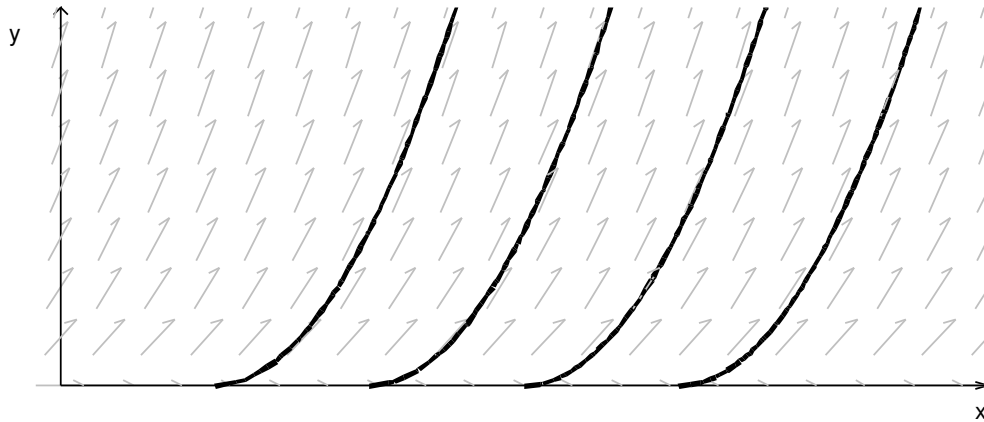
Jde tedy o pravé větve parabol, viz obrázek 7.1.

Při řešení jsme vyloučili $y = 0$. Je třeba prověřit, zda tím neztrácíme jedno řešení. V našem případě je funkce $y = 0$ také řešením. Je to parciální řešení.

Pro parciální derivace platí

$$f(x, y) = 2\sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}},$$

parciální derivace není definovaná pro $y = 0$ a pro $y > 0$ je derivace neohraničenou funkcí v okolí $y = 0$. Nemůžeme proto garantovat jednoznačnost pro všechny body osy x . Naopak, každým bodem $(x, 0)$ prochází nekonečně mnoho řešení.



Obrázek 7.1: Příklad řešení diferenciální rovnice

Příklad 7.2

$$x(y')^2 - 2yy' + 4x = 0,$$

je kvadratická rovnice vzhledem k y' . (Stále se jedná o diferenciální rovnici prvního řádu. Řád rovnice určuje nejvyšší řád derivace, ne její mocnina.) Po jejím vyřešení dostaneme

$$y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4x^2}}{x}, \quad (7.3)$$

kde $y^2 - 4x^2 > 0$, $x^2 + y^2 \neq 0$.

Označme $y = zx$,

kde $z = z(x)$ je nová neznámá funkce. Dosazením do (7.3) dostaneme

$$z'x + z = \frac{zx \pm \sqrt{z^2x^2 - 4x^2}}{x},$$

a po úpravě

$$z'x = \pm \sqrt{z^2 - 4}.$$

Pro $x \neq 0$, $\sqrt{z^2 - 4} \neq 0$ dostaneme

$$\frac{dz}{\pm \sqrt{z^2 - 4}} = \frac{dx}{x},$$

máme rovnici se separovanými proměnnými a její integrací dostaneme

$$z \pm \sqrt{z^2 - 4} = Cx,$$

$$\begin{aligned}\pm\sqrt{z^2 - 4} &= Cx - z, \\ z^2 - 4 &= C^2x^2 - 2Cxz + z^2,\end{aligned}$$

Zpětným dosazením $z = \frac{y}{x}$ dostaneme

$$C^2x^2 - 2Cy + 4 = 0.$$

A to je řešení pro

$$\begin{aligned}y^2 - 4x^2 &> 0, y > 0 \\ y^2 - 4x^2 &> 0, y < 0.\end{aligned}\tag{7.4}$$

V průběhu výpočtu jsme předpokládali, že $x \neq 0, z^2 - 4 \neq 0$. Je nutno prověřit, zda nejde o parciální řešení. V tomto případě ano. A pro $y = \pm 2x$ neplatí jednoznačnost.

Každým bodem v okolí bodu (x_0, y_0) , náležejícím do oblasti (7.4), procházejí právě dvě integrální křivky a to $y = 2x$ a $y = \frac{x^2}{x_0} + x_0$. Např. pro $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ a $y = x^2 + 1$ máme společný bod $(\sqrt{2}; 3)$.

7.3 Základní analytické metody.

7.3.1 Lineární rovnice

Příklad 7.3 Najděte řešení rovnice

$$y' + 2y = 4x.$$

Řešení: Rovnici si upravíme na kanonický tvar

$$y' = -2y + 4x.$$

Máme lineární nehomogenní rovnici. Najdeme řešení homogenní rovnice

$$y' = -2y.$$

$$\frac{dy}{y} = -2dx,$$

$$\ln |y| = -2x + \ln C,$$

$$y = C \cdot e^{-2x}.$$

Metodou variace konstanty najdeme řešení nehomogenní rovnice.

$$C \equiv K(x) \Rightarrow y = K(x)e^{-2x}.$$

Dosazením do původní rovnice dostaneme

$$K'(x)e^{-2x} + K(x)e^{-2x}(-2) = -2K(x)e^{-2x} + 4x,$$

$$K'(x)e^{-2x} = 4x,$$

$$\begin{aligned}
K'(x) &= 4xe^{2x}, \\
K(x) &= 4 \int xe^{2x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad u' = 1 \\ v' = e^{2x}, \quad v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| = \\
&= 4 \left[\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx \right] = 2xe^{2x} - 2 \left[\frac{1}{2}e^{2x} \right] + L, \\
K(x) &= 2xe^{2x} - e^{2x} + L.
\end{aligned}$$

Dosazením do řešení homogenní rovnice dostaneme výsledek

$$\begin{aligned}
y(x) &= K(x)e^{-2x}, \\
y(x) &= Le^{-2x} + 2x - 1.
\end{aligned}$$

Příklad 7.4 Najděte řešení rovnice

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

Řešení: Rovnici si upravíme na kanonický tvar

$$y' = -2xy + xe^{-x^2}.$$

Máme lineární nehomogenní rovnici. Najdeme řešení homogenní rovnice

$$\begin{aligned}
y' &= -2xy, \\
\frac{dy}{y} &= -2xdx, \\
\ln |y| &= -x^2 + \ln C, \\
y &= C \cdot e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

Metodou variace konstanty najdeme řešení nehomogenní rovnice.

$$C \equiv K(x) \Rightarrow y = K(x)e^{-x^2}.$$

Dosazením do původní rovnice dostaneme

$$\begin{aligned}
K'(x)e^{-x^2} + K(x)e^{-x^2}(-2x) &= -2xK(x)e^{-x^2} + xe^{-x^2}, \\
K'(x) &= x, \\
K(x) &= \frac{x^2}{2} + L.
\end{aligned}$$

Dosazením do řešení homogenní rovnice dostaneme výsledek

$$\begin{aligned}
y(x) &= K(x)e^{-x^2}, \\
y(x) &= e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + L \right).
\end{aligned}$$

7.3.2 Bernoulliho rovnice

Řešení Bernoulliho rovnice můžeme hledat buď vhodnou substitucí a nebo metodou variace konstanty. Obecně máme rovnici

$$y' = a(x)y + b(x)y^r, \quad r \in \mathbb{R}, \quad r \neq 1.$$

Volbou $u = y^{r-1}$ převedeme Bernoulliho rovnici na rovnici lineární. Ukážeme si použití metody *variace konstanty*.

Příklad 7.5 Najděte řešení rovnice

$$y' + 2xy = 2x^3y^3.$$

Řešení: Rovnici si upravíme na kanonický tvar

$$y' = -2xy + 2x^3y^3.$$

Máme Bernoulliho rovnici. Najdeme řešení homogenní rovnice

$$y' = -2xy.$$

$$\frac{dy}{y} = -2xdx,$$

$$\ln |y| = -x^2 + \ln C,$$

$$y = C \cdot e^{-x^2}.$$

Metodou variace konstanty najdeme řešení Bernoulliho rovnice.

$$C \equiv K(x) \Rightarrow y = K(x)e^{-x^2}.$$

Dosazením do původní rovnice dostaneme

$$K'(x)e^{-x^2} + K(x)e^{-x^2}(-2x) = -2xK(x)e^{-x^2} + 2x^3K^3(x)e^{-3x^2},$$

$$K'(x)e^{-x^2} = 2x^3K^3(x)e^{-3x^2},$$

$$K'(x) = 2x^3K^3(x)e^{-2x^2},$$

$$\frac{dK}{K^3(x)} = 2x^3e^{-2x^2}dx.$$

Budeme integrovat každou stranu rovnice samostatně:

$$\int \frac{K}{K^3(x)} = \int K^{-3}(x)dK = \frac{K^{-2}(x)}{-2}.$$

$$\int 2x^3e^{-2x^2}dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = t, \\ 2xdx = dt \end{array} \right| = \int te^{-2t}dt = \left| \begin{array}{ll} u = t, & u' = 1 \\ v' = e^{-2t}, & v = \frac{1}{-2}e^{-2t} \end{array} \right| =$$

$$-\frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{2} \int e^{-2t} dx = -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + L = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x^2} - \frac{1}{4}e^{-2x^2} + L$$

Dostali jsme

$$\begin{aligned} \frac{K^{-2}(x)}{-2} &= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x^2} - \frac{1}{4}e^{-2x^2} + L, \\ \frac{1}{K^2(x)} &= x^2e^{-2x^2} + \frac{1}{2}e^{-2x^2} + M, \end{aligned}$$

kde $M = -2L$ je konstanta. Dosazením do řešení homogenní rovnice dostaneme výsledek

$$\begin{aligned} y(x) &= K(x)e^{-x^2}, \\ y^2(x) &= K^2(x)e^{-2x^2}, \\ \frac{1}{y^2} &= \frac{1}{K^2(x)e^{-2x^2}}, \\ \frac{1}{y^2} &= \frac{e^{2x^2}}{K^2(x)}, \\ \frac{1}{y^2} &= x^2 + \frac{1}{2} + Me^{2x^2}. \end{aligned}$$

Příklad 7.6 Najděte řešení rovnice

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

Řešení: Rovnici si upravíme na kanonický tvar

$$y' = -\frac{1}{x}y + \frac{\ln x}{x}y^2.$$

Máme Bernoulliho rovnici. Najdeme řešení homogenní rovnice

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{x}y, \\ \frac{dy}{y} &= -\frac{1}{x}dx, \\ \ln |y| &= -\ln x + \ln C, \\ y &= \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

Metodou variace konstanty najdeme řešení Bernoulliho rovnice.

$$C \equiv K(x) \Rightarrow y = \frac{K(x)}{x}.$$

Dosazením do původní rovnice dostaneme

$$K'(x)\frac{1}{x} + K(x)\frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x}\frac{K(x)}{x} + \frac{\ln x}{x}\frac{K^2(x)}{x^2},$$

$$K'(x) = \frac{\ln x}{x^2} K^2(x),$$

$$\frac{dK}{K^2(x)} = \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Budeme integrovat každou stranu rovnice samostatně:

$$\int \frac{K}{K^2(x)} = \int K^{-2}(x) dK = \frac{K^{-1}(x)}{-1} = -\frac{1}{K(x)}.$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x, & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^{-2}, & v = -x^{-1} \end{array} \right| =$$

$$-\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + L$$

Dostali jsme

$$-\frac{1}{K(x)} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + L.$$

Dosazením do řešení homogenní rovnice dostaneme výsledek

$$\frac{1}{y(x)} = \frac{x}{K(x)},$$

$$\frac{1}{y(x)} = x \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + L \right),$$

$$y(x)(\ln x + 1 + Lx) = 1.$$

7.3.3 Exaktní rovnice

Příklad 7.7 Najděte řešení rovnice

$$(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0.$$

Řešení: Máme

$$P(x, y) = 2x^3 - xy^2, \quad Q(x, y) = 2y^3 - x^2y.$$

Potom

$$P_y = -2xy, \quad Q_x = -2xy.$$

Protože $P_y = Q_x$, jde o exaktní rovnici. Budeme hledat její kmenovou funkci.

$$dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

$$F(x, y) = \int P(x, y)dx = \int (2x^3 - xy^2)dx = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2y^2 + C(y).$$

Potom

$$F_y = -x^2y + C'(y).$$

A současně $F_y = Q$.

$$\begin{aligned} -x^2y + C'(y) &= 2y^3 - x^2y, \\ C'(y) &= 2y^3, \\ C(y) &= \frac{1}{2}y^4. \end{aligned}$$

Kmenová funkce má tedy tvar

$$F(x, y) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}y^4$$

a obecné řešení je tvaru

$$x^4 - x^2y^2 + y^4 = L,$$

kde L je konstanta.

Příklad 7.8 Najděte řešení rovnice

$$\frac{xdy}{x^2 + y^2} - \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right) dx = 0$$

Řešení: Máme

$$P(x, y) = - \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right), \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Potom

$$P_y = - \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad Q_x = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Protože $P_y = Q_x$, jde o exaktní rovnici. Budeme hledat její kmenovou funkci.

$$dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int P(x, y)dx = - \int \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + 1 \right) dx = \\ &= - \int \left(\frac{y}{y^2 \left(\frac{x^2}{y^2} + 1 \right)} + 1 \right) dx = - \frac{1}{y} \int \frac{1}{\frac{x^2}{y^2} + 1} dx - \int dx = - \arctan x - x + C(y). \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} F_y &= - \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \frac{-x}{y^2} + C'(y). \\ F_y &= \frac{x}{x^2 + y^2} + C'(y). \end{aligned}$$

A současně $F_y = Q$.

$$\frac{x}{x^2 + y^2} + C'(y) = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$C'(y) = 0,$$

$$C(y) = K.$$

Kmenová funkce má tedy tvar

$$F(x, y) = x + \arctan \frac{x}{y}$$

a obecné řešení je tvaru

$$x + \arctan \frac{x}{y} = L,$$

kde L je konstanta.

7.4 Jednokrokové metody

Numerické metody, kterými se budeme zabývat, nebudou rozlišovat zda řešení existuje či neexistuje, zda je jednoznačné či nikoliv. Proto je třeba předem provést prověrku podmínek věty 7.1.

My budeme vždy předpokládat, že jsou splněny podmínky věty 7.1 a že hledáme řešení diferenciální rovnice, které existuje a je jednoznačné.

7.4.1 Diferenční metody řešení Cauchyovy úlohy založené na diskretizaci proměnné.

Definice 7.2 Body $x_i : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ nazveme uzly sítě, $h_i = x_{i+1} - x_i$ je krok sítě. Je-li $h_i = h = \text{const.}$, pak mluvíme o pravidelné síti.

Definice 7.3 Numerickým řešením úlohy (7.1), (7.2) rozumíme určení hodnot y_0, y_1, \dots, y_n , které aproximují hodnoty $y(x)$ v uzlových bodech, t.j. $y_i \approx y(x_i), i = 1, 2, \dots, n$.

Takto získanou diskrétní funkci pak můžeme převést na spojitou funkci některou ze známých metod, jako je třeba interpolační polynom, splajn, metoda nejmenších čtverců atd.

Nechť $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$.

Jestliže $\Delta y_i = \varphi(x_i, y_i, h_i)$, pak jde o jednokrokovou metodu.

Jestliže $\Delta y_i = \varphi(x_i, y_i, h_i, x_{i-1}, y_{i-1}, h_{i-1}, \dots, x_{i-k}, y_{i-k}, h_{i-k})$, $k > 1$ pak jde o vícekrokovou metodu.

Konvergenci metody chápeme takto:

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} y_i = y(x_i), \text{ pro } i = 0, 1, \dots, n-1,$$

pak říkáme, že numerické řešení konverguje k teoretickému.

Chyba metody a řád konvergence vyžadují dodatečný matematický aparát a proto je vynecháme.

Kontrola se provádí nejčastěji metodou polovičního kroku tak, že srovnáváme hodnoty

$$y_h(x_i) \text{ a } y_{\frac{h}{2}}(x_{2i}),$$

kde $y_h(x_i)$ je hodnota funkce y v bodě $x_i = x_0 + ih$ pro krok h , $i = 1, \dots, n$ a $y_{\frac{h}{2}}(x_{2i})$ je hodnota funkce y ve stejném bodě $x_i = x_0 + 2i\frac{h}{2}$ pro krok $\frac{h}{2}$, $i = 1, \dots, n$.

7.5 Eulerova metoda

Eulerova²³ metoda pro řešení úlohy $y' = f(x, y)$, $y(a) = y_0$ na intervalu $[a, b]$. Označíme si $y_i = y(x_i)$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $h = \frac{b-a}{n}$. Potom z Taylorova rozvoje, po zanedbání vyšších řádů, dostaneme

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Pro $h_i \rightarrow 0$ posloupnost $\{y_i\}$ konverguje k přesnému řešení. Geometrický smysl metody - viz obrázek 7.2.

Příklad 7.9 Eulerovou metodou s krokem $h = 0.1$ řešte na intervalu $[1; 1.5]$ úlohu

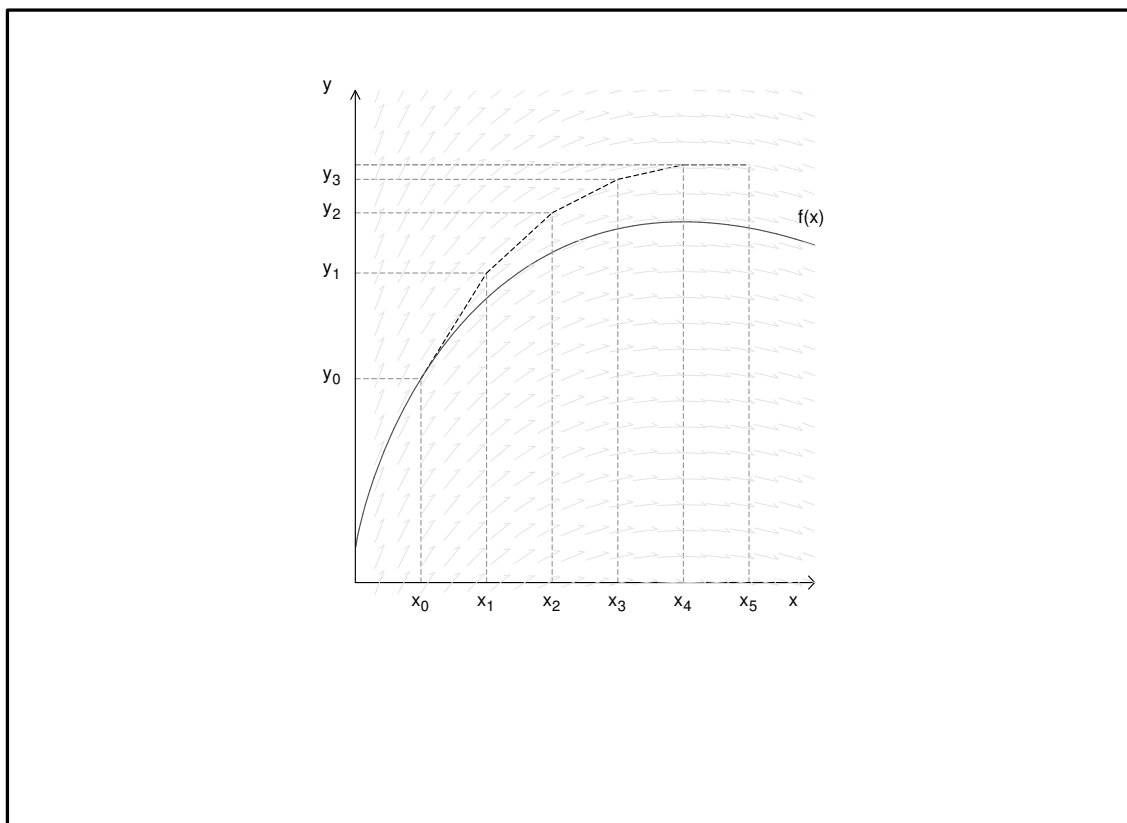
$$y' = y + (1+x)y^2, \quad y(1) = -1.$$

Řešení: Je uvedeno v tabulce:

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$
0	1	-1	1
1	1.1	-0.9	0.801
2	1.2	-0.8199	0.659019
3	1.3	-0.753998	0.553582
4	1.4	-0.698640	0.47294
5	1.5	-0.651361	

Eulerova metoda je nejjednodušší numerickou metodou pro řešení diferenciálních rovnic. I když se již v praxi příliš nepoužívá, hlavně pro její malou přesnost, její význam proto není menší. Je především pro svou jednoduchost východiskem mnoha teoretických úvah a tak, jejím zobecňováním můžeme dostat nové přesnější metody.

²³ **L.Euler** (1707 – 1783) švýcarské matematik, fyzik, astronom, mechanik. Jeden z nejvýznamnějších matematiků všech dob. V letech 1741 – 1766 působil v Berlíně, v letech 1727 – 1741 a 1766 – 1783 působil v Petrohradu v Rusku. Zabýval se prakticky všemi přírodními vědami, ve kterých bylo v jeho době možné aplikovat matematiku. Je autorem přes 860 prací. Přes polovinu jich diktoval už jako slepý. Věnoval se výrazně analýze, vybudoval trigonometrii prakticky do dnešní podoby, vytvořil analytickou teorii čísel, zavedl komplexní funkce, stojí u zrodu teorie grafů, ... Byl vynikajícím počtářem a zpracoval řadu numerických metod.



Obrázek 7.2: Geometrický smysl Eulerovy metody

7.5.1 První modifikace Eulerovy metody

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i))$$

Geometrická interpretace je zřejmá z obrázku 7.3

7.5.2 Druhá modifikace Eulerovy metody

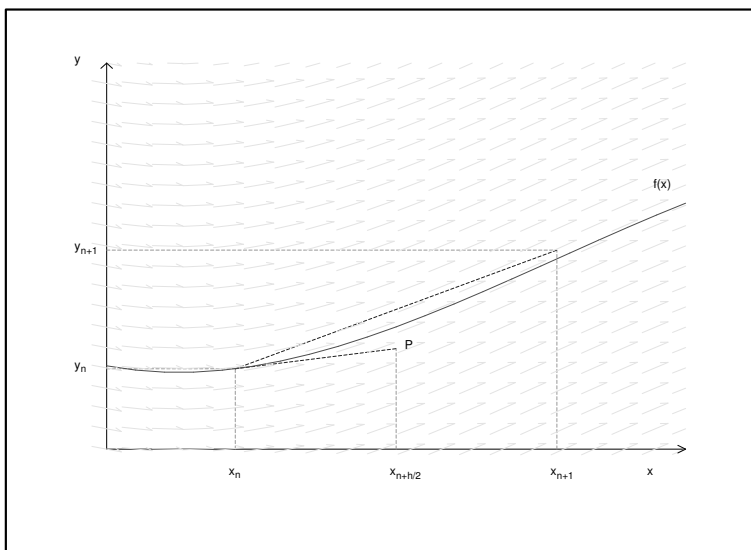
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)))$$

Geometrická interpretace plyne z obrázku 7.4 .

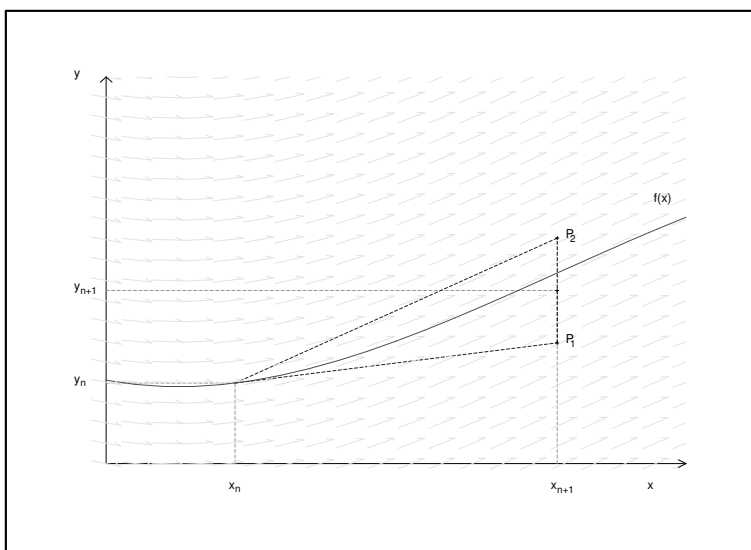
7.6 Příklady na procvičení

Eulerovou metodou najděte na intervalu $\langle a, b \rangle$ s krokem h řešení následujících soustav diferenciálních rovnic. Funkce u, v, w, y, z jsou funkcemi proměnné x .

Příklad 7.10 $y' = y + 4z$, $z' = y + z$, když $y(0) = 1$, $z(0) = 2$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$



Obrázek 7.3: Geometrický smysl první modifikace Eulerovy metody



Obrázek 7.4: Geometrický smysl druhé modifikace Eulerovy metody

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s krokem $h = 0,125$.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu, avšak za předpokladu, že $z(0) = 1$

Příklad 7.11 $y' = -7y + z$, $z' = -2y - 5z$, když $y(1) = 0$, $z(1) = 1$, $a = 1$, $b = 2$ a krok $h = 0,25$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $< 1; 1,5 >$ s krokem $h = 0,1$.

Příklad 7.12 $y' = 4y - z$, $z' = y + 2z$, když $y(0) = 0$, $z(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $< 0; 0,5 >$ s krokem $h = 0,1$.

Příklad 7.13 $y' = z$, $z' = -y + \frac{1}{\cos x}$, když $y(0) = 1$, $z(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $< 0; 0,5 >$ s krokem $h = 0,1$.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $< 0; 0,5 >$ s krokem $h = 0,05$.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu, avšak za počátečních podmínek $y(1) = 1$, $z(1) = 1$ na intervalu $< 1; 2 >$ s krokem $h = 0,25$.

Příklad 7.14 $u' = 2u + 4v + \cos x$, $v' = -u - 2v + \sin x$, když $u(0) = 0$, $v(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $< 0; 0,5 >$ s krokem $h = 0,1$.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $< 0; 0,5 >$ s krokem $h = 0,05$.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $< 0; 0,5 >$ s krokem $h = 0,1$, avšak za počátečních podmínek $u(0) = 1$ a $v(0) = 1$.

Příklad 7.15 $u' = -2u + v - 2w$, $v' = u - 2v + 2w$, $w' = 3u - 3v + 5w$, když $u(0) = 0$, $v(0) = 1$, $w(0) = 2$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Příklad 7.16 $u' = v + w + x$, $v' = u + v - w$, $w' = v + w$, když $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Příklad 7.17 $u' = v + \sin x$, $v' = u + e^x$, $w' = w + \cos x$, když $u(0) = 1$, $v(0) = 0$, $w(0) = 1$, $a = 0$, $b = 0,5$ a krok $h = 0,1$

Příklad 7.18 $u' = u + 2v + w$, $v' = u + w$, $w' = u + w$, když $u(0) = 1$, $v(0) = 2$, $w(0) = 0$, $a = 0$, $b = 0,5$ a krok $h = 0,1$

Příklad 7.19 $u' = -v$, $v' = -u$, $w' = u + v - w$, když $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = 1$, $a = 0$, $b = 0,5$ a krok $h = 0,1$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na téže intervalu, avšak s počátečními podmínkami $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = 0$; opět s krokem $h = 0,1$.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na téže intervalu, avšak s počátečními podmínkami $u(0) = 0,01$, $v(0) = 0,02$, $w(0) = 0,03$; opět s krokem $h = 0,1$.

Jiné označení se kterým se můžete setkat a další varianty, které si ale už nebudeme odvozovat, jen si u každé z nich uvedeme vzorec pro výpočet:

1. Eulerova metoda vpřed. Je to metoda se kterou jsme začínali.

$$y_{n+1} = y_n + hf_n.$$

2. Eulerova metoda vzad

$$y_{n+1} = y_n + f_{n+1}.$$

3. Crank-Nicolsonova metoda

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f_n + f_{n+1}].$$

4. Heumova metoda

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f_n + f(x_{n+1}, y_n + hf_n)].$$

7.7 Metody Rungeho – Kuttovy

Metody Rungeho – Kuttovy²⁴ jsou dány rekurentními vztahy

$$y_{j+1} = y_j + h_j \sum_{i=1}^r \alpha_i k_i, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

kde $k_1 = f(x_j, y_j)$, $k_i = f(x_j + \lambda_i h_j, y_j + \mu_i h_j k_{i-1})$, $i > 1$. Na každém kroku se vypočítávají hodnoty k_i a pomocí nich se určuje hodnota přírůstku. Poté se výpočet opakuje. Odvozují se tyto vztahy z Taylorova rozvoje pro přesný relativní přírůstek a pro jeho přibližnou hodnotu. Vede to na soustavu rovnic, která má nekonečně mnoho řešení. Vhodnou volbou parametrů pak získáme jednotlivé typy metody. Obě modifikace Eulerovy metody je možné získat i tímto postupem. Odvození viz např. [17], str.107, [3], str. 353 — 358.

Nejčastěji se používá R-K metoda 4.řádu. Její tvar pro ekvidistantní uzly je:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = hf(x_j, y_j),$$

$$k_2 = hf(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_1}{2}),$$

$$k_3 = hf(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_2}{2}),$$

$$k_4 = hf(x_j + h, y_j + k_3).$$

Příklad 7.20

$$y' = y - \frac{2x}{y}, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.2, \quad a = 0, \quad b = 1.$$

²⁴ **K.D.T.Runge** (1856 – 1927) německý matematik a fyzik. První profesor aplikované matematiky v Německu.

Řešení:

Analytické řešení je

$$y = \sqrt{2x + 1}.$$

Numerické řešení je uvedeno v tabulce.

j	x	y	k_i	přírůstek
0	0	1	$k_1 = 0.2$	
	0.1	1.1	$k_2 = 0.1838$	
	0.1	1.0918	$k_3 = 0.1817$	
	0.2	1.1817	$k_4 = 0.1686$	
				$\Delta y = 0.1832$
1	0.2	1.1832	$k_1 = 0.1690$	
	0.3	1.2677	$k_2 = 0.1589$	
	0.3	1.2626	$k_3 = 0.1575$	
	0.4	1.3407	$k_4 = 0.1488$	
				$\Delta y = 0.1584$
2	0.4	1.3416	...	

Doporučuji samostatně dopočítat a srovnat numerické řešení s analytickým.

Příklad 7.21 *Cauchyovu úlohu*

$$y' = x^2 + \frac{1}{10}y^2, \quad y(0) = 0, \quad a = 0, \quad b = 1,$$

řešte postupně Eulerovou metodou, první a druhou modifikací Eulerovy metody a metodou Rungeho-Kuttovou, výsledky srovnajte. Přesné řešení je $y(1) = 0.334930314854697$.

Řešení: Numerické řešení je uvedeno v tabulce. V prvním sloupci je uvedeno na kolik dílů dělíme interval $< 0; 1 >$. Jednotlivými metodami jsme se už zabývali, proto je v dalších sloupcích vždy uvedena až konečná hodnota $y_n(1)$, získaná danou metodou.

n	EM	1.mEM	2.mEM	R-K
5	0.240284311	0.331333136	0.341556796	0.334932164
10	0.285738187	0.334026264	0.336596144	0.334930446
20	0.309855335	0.334703844	0.335348142	0.334930324
50	0.324783702	0.334894044	0.334997310	0.334930315
100	0.329837423	0.334921244	0.334947076	0.334930315
200	0.332378958	0.334928047	0.334934507	0.334930315
500	0.333908592	0.334929952	0.334930986	0.334930315

Povšimněte si rychlosti konvergence u jednotlivých metod.

Další často užívanou numerickou metodou Rungeho-Kuttova typu je tzv. *tříosminové pravidlo*. Jeho tvar pro ekvidistantní uzly je:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4),$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n), \\
k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3}k_1\right), \\
k_3 &= f\left(x_n + \frac{2h}{3}, y_n - \frac{h}{3}k_1 + hk_2\right), \\
k_4 &= f(x_n + h, y_n + h(k_1 - k_2 + k_3)).
\end{aligned}$$

Jinou variantou metod Rungeho-Kuttova typu je Ralstonova metoda

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{9}h(2k_1 + 3k_2 + 4k_3), \\
k_1 &= f(x_i, y_i), \\
k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right), \\
k_3 &= f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i - \frac{3}{4}hk_2\right).
\end{aligned}$$

7.7.1 Stabilita

Metody typu Rungeho-Kuttovy jsou relativně přesné a mají vyhovující rychlost konvergence. Ale i zde se mohou vyskytnout problémy:

Příklad 7.22 Na intervalu $[a, b]$ hledáme řešení úlohy

$$y' = 5y - x^2 + 0.4x, \quad y(a = 0) = 0.$$

Řešení: Analytickým řešením této úlohy je funkce $y(x) = 0.2x^2$. Při numerickém řešení Rungeho-Kuttovou metodou dostaneme postupně pro krok $h = 0.2$ a $h = 0.1$:

x	y(x)
0.0	0.0
0.2	0.01
0.4	0.03
0.6	0.07
0.8	0.12
1.0	0.19
1.2	0.25
1.4	0.29
1.6	0.23
1.8	-0.12
2.0	-1.27
2.2	-4.64
2.4	-14.04

x	y(x)
0.0	0
0.1	0
0.2	0.01
0.3	0.02
0.4	0.03
0.5	0.05
0.6	0.07
0.7	0.10
0.8	0.13
0.9	0.16
1.0	0.2
1.1	0.24
1.2	0.28
1.3	0.33
1.4	0.38
1.5	0.44
1.6	0.49
1.7	0.54
1.8	0.58
1.9	0.62
2.0	0.62
2.1	0.59
2.2	0.49
2.3	0.27
2.4	-0.15
2.5	-0.90

Vidíme, že velmi brzy budeme v obou případech dostávat záporné hodnoty y . Nejde tedy o chybu metody. Důvodem je nestabilitnost této rovnice.

Mějme lineární diferenciální rovnici

$$y' = p(x)y + q(x),$$

jejím řešením je

$$y(x) = e^{\int_a^x p(t)dt} \left(\int_a^x q(t) e^{(-\int_a^t p(\tau)d\tau)} dt + K \right).$$

(Všimněte si, že v příkladu 7.22 se v řešení nevyskytují exponenciály.)

Předpokládejme, že na naši rovnici působí nějaká drobná porucha, popsaná funkcí $\delta(x)$, $|\delta(x)| \ll |f(x, y)| \equiv |p(x)y + q(x)|$. Potom

$$y' = f(x, y) + \delta(x) = p(x)y + q(x) + \delta(x),$$

a řešení dostaneme ve tvaru

potom

$$\tilde{y} = \tilde{K} e^{\int_a^x p(t)dt} + \int_a^x (q(t) + \delta(t)) e^{(\int_t^x p(\tau)d\tau)} dt.$$

Je zřejmé, že vliv poruch bude minimální, jestliže

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = p(x) < 0.$$

Takové lineární rovnice se pak nazývají *stabilními*. V případě rovnic vyšších řádů a nebo nelineárních je možné odvodit podmínky stability, ale jsou podstatně složitější.

VYHODNOCENÍ:

1. Vždy prověřovat podmínky konvergence řešení.
2. Vždy prověřovat podmínky existence a jednoznačnosti řešení.
3. Není vhodné hledat řešení na příliš dlouhém intervalu.

7.8 Vícekrokové metody.

Opět hledáme diskrétní funkci, která nám bude aproximovat přesné řešení rovnice $y' = f(x, y)$. Nechť $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$.

Jestliže $\Delta y_i = \varphi(x_i, y_i, h_i, x_{i-1}, y_{i-1}, h_{i-1}, \dots, x_{i-k}, y_{i-k}, h_{i-k})$, $k > 1$ pak jde o vícekrokovou metodu.

7.8.1 Adamsovy metody

Mějme danu úlohu (7.1), (7.2). Integrací (7.1) dostaneme

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Podintegrální funkci nahradíme interpolačním polynomem s uzly x_0, x_1, \dots, x_s , přitom předpokládáme, že známe v těchto bodech hodnoty funkce y . Potom můžeme numericky určit integrál a dostáváme

$$y(x) - y(x_0) = \sum_{k=0}^s c_k f(x_k, y(x_k)) + R,$$

kde R je chyba příslušného kvadraturního vzorce. Předpokládejme, že máme ekvidistantní uzly $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, s$. Nechť dále integrační meze splynou s některými uzly, t.j. $x_0 \equiv x_p$, $x \equiv x_q$, $p < q$. Použitím Lagrangeova interpolačního polynomu dostaneme

$$y(x_q) - y(x_p) = h \sum_{k=0}^s A_k f(x_k, y(x_k)) + R, \quad (7.5)$$

$$A_k = \frac{(-1)^{s-k}}{k!(s-k)!} \int_p^q \prod_{i=0, i \neq k}^s (t - i) dt,$$

$$R = h \int_p^q F[t, 0, 1, \dots, s] \prod_{i=0}^s (t - i) dt,$$

zde vystupuje poměrná difference funkce F , pro kterou platí

$$F(t) = y'(x_0 + ht).$$

Vztah (7.5) můžeme vzít za základ pro numerickou metodu.

$$y_q = y_p + h \sum_{k=0}^s A_k f(x_k, y_k) + R.$$

Volbou $p = s$, $q = s + 1$ získáme Adamsovy extrapolační metody. Říká se jim tak proto, že integrační interval se nachází vně intervalu, na němž je určen interpolační polynom.

Máme tedy vztah

$$y_{s+1} = y_s + h \sum_{k=0}^s A_k^s f_k + R.$$

Horní index u A_k^s zdůrazňuje přitom závislost na s , t.j. na počtu uzlů užitých při interpolaci. Zdůrazňuji na POČTU, nikoliv na samotných uzlech. Koeficienty A_k^s nezávisí na uzlech, na jejich hodnotách. Proto je možné vzorec “posunovat” po síti o celočíselné násobky h , takže jej můžeme psát ve tvaru

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{k=0}^s A_k^s f_{n-s+k} + R.$$

Budeme-li psát k místo $s - k$, pak přerovnááním sčítanců do pořadí od nejbližšího uzlu k nejvzdálenějšímu dostaneme

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{k=0}^s B_k^s f_{n-k} + R,$$

$$B_k^s = \frac{(-1)^k}{k!(s-k)!} \int_s^{s+1} \prod_{i=0, i \neq s-k}^s (t-i) dt, k = 0, 1, \dots, s.$$

Tyto vztahy nám definují Adamsovu extrapolační metodu řádu $s + 1$. (Někdy se označuje jako *Adams – Bashforthova* metoda). Chybu této metody můžeme popsat

$$R(x) = h^{s+2} \frac{y^{(s+2)}(\xi)}{(s+1)!} \int_s^{s+1} \prod_{i=0}^s (t-i) dt,$$

$\xi \in [x_0, x_{s+1}]$ a nebo po posunutí je $\xi \in [x_{n-s}, x_{n+1}]$. Pro volbu $s = 1, 2, \dots$ dostaneme:

Adamsovy extrapolační vzorce

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + hf_n + O\left(\frac{1}{2}y''(\xi)h^2\right) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}h(3f_n - f_{n-1}) + O\left(\frac{5}{12}y'''(\xi)h^3\right) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{12}h(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}) + O\left(\frac{3}{8}y^{(4)}(\xi)h^4\right) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{24}h(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) + O\left(\frac{251}{720}y^{(5)}(\xi)h^5\right) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{720}h(1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}) + \\
&\quad + O\left(\frac{95}{288}y^{(6)}(\xi)h^6\right) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{1440}h(4277f_n - 7923f_{n-1} + 9982f_{n-2} - 7298f_{n-3} + 2877f_{n-4} - \\
&\quad - 475f_{n-5}) + O(y^{(7)}h^7) \\
&\dots \quad \dots
\end{aligned}$$

Zde symbolem $O(a)$ rozumíme, že chyba je řádově rovna a .

Řešíme-li rovnici Adamsovou metodou řádu $s+1$, musíme znát hodnoty funkce v $(s+1)$ předchozích bodech. Protože však bývá zadána pouze jedna počáteční podmínka $y(x_0) = y_0$, musíme si dopočítat zbývající hodnoty y_1, \dots, y_s některou jednokrokovou metodou. Nejčastěji se používá Runge-Kuttova metoda čtvrtého řádu.

Příklad 7.23 Adamsovou extrapolační metodou řešte na intervalu $[0; 1]$ úlohu

$$y' = 0.1y + x^2, \quad y(0) = 0, \quad h = 0.1.$$

Řešení: Použijeme Adamsovu metodu čtvrtého řádu popsanou rovnicí

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{24}h(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}).$$

Vedle počáteční podmínky, která je součástí zadání úlohy, potřebuje znát ještě hodnoty funkce $y(x)$ v dalších třech bodech. Výsledky jsou uvedeny v tabulce:

x	$y(x)$	
0.0	0.0	Počáteční podmínka
0.1	0.0003333	Vypočteno metodou Rungeho-Kutty
0.2	0.0026667	Vypočteno metodou Rungeho-Kutty
0.3	0.0090003	Vypočteno metodou Rungeho-Kutty
0.4	0.0213354	
0.5	0.0416772	
0.6	0.0720404	
0.7	0.1144567	
0.8	0.1709877	
0.9	0.2437425	
1.0	0.3349011	

Jestliže v rovnici (7.5) zvolíme $p = s - 1$, $q = s$, pak integrační interval přiléhá k pravému okraji interpolačního intervalu. Poté zcela stejným způsobem si odvodíme Adamsovu interpolační metodu (někdy se označuje jako *Adamsova-Moultonova* metoda).

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{k=-1}^s C_k^s f_{n-k},$$

$$C_k^s = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!(s-k)!} \int_s^{s+1} \prod_{i=0, i \neq s-k}^{s+1} (t-i) dt, \quad k = -1, 0, 1, \dots, s.$$

Chyba této metody je dána výrazem

$$R = h^{s+3} \frac{y^{(s+3)}(\xi)}{(s+2)!} \int_s^{s+1} \prod_{i=0}^{s+1} (t-i) dt,$$

kde $\xi \in [x_{n-s}, x_{n+1}]$.

Adamsovy interpolační vzorce

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf_{n+1} + O\left(-\frac{1}{2}y''(\xi)h^2\right) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}h(f_{n+1} + f_n) + O\left(-\frac{1}{12}y'''(\xi)h^3\right) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{12}h(5f_{n+1} - 8f_n - f_{n-1}) + O\left(-\frac{1}{24}y^{(4)}(\xi)h^4\right) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{24}h(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) + O\left(-\frac{19}{720}y^{(5)}(\xi)h^5\right) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{720}h(251f_{n+1} + 64f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3}) + O(y^{(6)}(\xi)h^6) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{1440}h(475f_{n+1} + 1427f_n - 798f_{n-1} + 486f_{n-2} - 173f_{n-3} + 27f_{n-4}) + \\ &\quad + O(y^{(7)}(\xi)h^7) \\ \dots &\quad \dots \end{aligned}$$

Také při použití Adamsových interpolačních metod musíme k počáteční podmínce $y(x_0) = y_0$ dopočítat dalších s hodnot jinou vhodnou metodou. Další problém je ten, že hodnota y_{n+1} se vyskytuje na obou stranách každé rovnice, neboť $f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$. Možnost explicitního vyjádření y_{n+1} závisí na konkrétním tvaru funkce $f(x, y)$. Nejčastěji se používá pro výpočet iterační metoda. Zvolíme si vhodnou nultou iteraci y_{n+1}^0 a sestavíme si posloupnost $\{y_{n+1}^i\}$:

$$y_{n+1}^i = y_n + hC_{-1}^s f(x_{n+1}, y_{n+1}^{i-1}) + h \sum_{k=0}^s C_k^s f_{n-k}.$$

Hledaná hodnota y_{n+1} je pak limitou této posloupnosti, pokud jsme si zvolili vhodnou první iteraci. Je možné stanovit podmínky konvergence.

7.8.2 Metoda prediktor – korektor

Adamsovy metody se už většinou nepoužívají samostatně. Jejich kombinace, zvaná *Metody typu prediktor – korektor* využívají na každém kroku obou Adamsových metod:

1. **Prediktor** – explicitní metodou určíme y_{n+1}^k , $k = 0$.
2. Vypočteme si hodnotu $f_{n+1}^k = f(x_{n+1}, y_{n+1}^k)$.
3. **Korektor** – implicitní metodou vypočítáme lepší aproximaci y_{n+1}^{k+1} .
4. Zpřesníme výpočet pravé strany $f_{n+1}^{k+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{k+1})$.

Přitom body 3,4 je možno opakovat – jde zde zase o iterační proces a prediktor nám pro něj dává dobré přiblížení.

Obě metody bereme stejného řádu.

Příklad 7.24

$$\text{Prediktor} \quad y_{n+1}^0 = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}),$$

$$\text{Korektor} \quad y_{n+1}^{k+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1}^k + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}).$$

Příklad 7.25 Další často používaná metoda prediktor – korektor má tvar

$$y_{n+1}^0 = y_{n-3} + \frac{4}{3}h(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}),$$

$$y_{n+1}^{k+1} = \frac{9}{8}y_n - \frac{1}{8}y_{n-2} + \frac{3}{8}h(f(x_{n+1}, y_{n+1}^k) + 2f_n - f_{n-1}).$$

Zde je je prediktorem otevřený Simpsonův vzorec pro integraci a korektorem stabilní diferenční vzorec.

7.8.3 Metoda prediktor – modifikátor – korektor

Mějme metodu prediktor – korektor z příkladu 7.24. Prediktorem určíme y_{n+1}^{0p} . Tuto hodnotu si zpřesníme modifikátorem

$$y_{n+1}^0 = y_{n+1}^{0p} + \frac{251}{270}(y_n - y_n^{0p}),$$

kde v závorce je rozdíl hodnoty funkce y v předchozím bodě v konečném tvaru a její predikce. Při prvním kroku metody prediktor – korektor nemáme žádnou hodnotu y_n^{0p} a proto se modifikátor počítá až od druhého kroku. Modifikovanou hodnotu pak použijeme v korektoru. Další postup je shodný s metodou prediktor – korektor.

Existují i další varianty metod tohoto typu. Vždy závisí na tom, jakou integrační metodu či tvar interpolačního polynomu použijeme.

Jednou z nejstarších je metoda *Milnova*, kde je prediktorem otevřený Simpsonův vzorec a korektorem uzavřený Simpsonův vzorec:

$$y_{n+1}^0 = y_{n-3} + \frac{4}{3}h(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}) + \left(\frac{14}{45}y^{(5)}(\xi)h^5\right),$$

$$y_{n+1}^{k+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(f(x_{n+1}, y_{n+1}^k) + 4f_n + f_{n-1}) - \frac{1}{90}(y^{(5)}(\xi)h^5), k = 0, 1, \dots$$

Pro použití je třeba znát hodnoty ve čtyřech předcházejících uzlech. Odhad chyby je na každém kroku určen

$$R \leq \frac{1}{29}|y_i^p - y_i^k|,$$

zde je y_i^p prediktor a y_i^k jeho korekce. Často je nutno v průběhu výpočtu měnit krok h tak, aby chyba zůstala přiměřená – t.j. pokud je R velké, tak zmenšit krok, je-li R podstatně malé, tak je možno krok zvětšit.

Mnohdy bývá jednodušší provést celý výpočet na intervalu $[a, b]$ s krokem h a potom zopakovat výpočet s krokem $h/2$. Jestliže je i nyní chyba velká, provedeme výpočet s krokem $h/4$, atd.

POZOR: V případě zmenšení kroku je opět nutno dopočítat potřebné hodnoty funkce y vhodnou jednokrokovou metodou.

Modifikátor má u této metody tvar

$$y_{n+1}^0 = y_{n+1}^{0p} + \frac{28}{29}(y_n - y_n^{0p}).$$

Věta 7.2 *Nechť jsou splněny podmínky věty 7.1. Potom pro úlohu (7.1), (7.2) má metoda prediktor – korektor, kde je prediktor nejméně stejného řádu jako korektor, celkovou chybu řádově stejnou jako metoda, která používá korektor s nekonečným opakováním.*

Bez důkazu.

Podmínky této věty jsou splněny pro všechny výše uvedené konkrétní typy metod prediktor – korektor a prediktor – modifikátor – korektor. Je tedy vhodnější je používat přímo v uvedeném tvaru, bez iterace a vyšší přesnost zajistit zmenšením kroku.

7.8.4 Příklady na procvičení

Následující počáteční úlohy řešte na intervalu $\langle a, b \rangle$ s krokem h takto: Nejprve metodou Runge–Kutty 4. řádu dopočítejte všechny potřebné hodnoty a poté najděte zbývající hodnoty pomocí Adamsovy extrapolací metody třetího, poté čtvrtého a poté pátého řádu. Dále najděte zbývající hodnoty pomocí metody prediktor – korektor, kde za prediktor zvolte $y_{n+1}^0 = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$ a za korektor $y_{n+1}^{k+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1}^k + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$.

Příklad 7.26 $y' = x^2 - y$, $y(0) = 1$, na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0,2$

Příklad 7.27 $y' = x^2 + 4y$, $y(0) = 0$, na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0,2$

Příklad 7.28 $y' = e^x + y$, $y(0) = 1$, na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0,2$

Příklad 7.29 $y' = e^{x+1} - 2y$, $y(0) = 1$, na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0,2$

Příklad 7.30 $y' = e^{\frac{x}{2}} + 4y$, $y(0) = 0$, na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0,2$

Příklad 7.31 $y' = e^{x^2} + y$, $y(0) = 1$, na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0,2$

Příklad 7.32 $y' = e^{x^2} - y$, $y(0) = 1$, na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0,2$

Příklad 7.33 $y' = x^3 - 4y$, $y(0) = 1$, na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0,2$

Příklad 7.34 $y' = \frac{1}{2}x + y$, $y(0) = 2$, na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0,2$

Příklad 7.35 $y' = \frac{1}{10}x + y$, $y(0) = 2$, na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0,2$

7.9 Metody založené na užití derivací vyšších řádů

Jestliže použijeme ve vzorcích pro řešení diferenciální rovnice prvního řádu derivace vyšších řádů, můžeme dosáhnout snížení chyby. Takový vzorec můžeme odvodit z Eulerova-Mclaurinova sumačního vzorce, kdy místo $f(x)$ dosadíme derivaci $y'(x)$ a po úpravě dostaneme

$$y_{n+1} = y_1 + h \sum_{i=-1}^{n-1} y'_{n-i} - \frac{h}{2}(y'_{n+1} + y'_1) - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} h^{2k-1} (y_{n+1}^{(2k)} - y_1^{(2k)}), \quad (7.6)$$

kde máme lokální chybu

$$R_m = \frac{nh^{2m+2}B_{2m+2}}{(2m+2)!} y^{(2m+3)}(\xi),$$

kde B_{2k} jsou Bernoullivá čísla. Platí

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!},$$

$$\forall k > 0 : B_{2k+1} = 0,$$

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad \dots$$

Budeme se nyní věnovat vzorcům typu Prediktor - Korektor, které používají první i druhou derivaci. Vzorce pro korektor dostaneme tak, že Hermitův interpolační vzorec $h_j(x)$ pro body $x_{n+1}, x_n, \dots, x_{n-p}$ integrujeme od x_n do x_{n+1} . Dostaneme, přičemž \bar{f} označuje funkci komplexně sdruženou s funkcí f ,

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=-1}^p \left[\int_{x_n}^{x_{n+1}} h_{n-i}(x) dx \right] y'_{n-i} + \sum_{i=-1}^p \left[\int_{x_n}^{x_{n+1}} \bar{h}_{n-i}(x) dx \right] y''_{n-i}.$$

Lokální chyba je dána výrazem

$$R_n = \frac{y^{(2p+5)}}{(2p+4)!} \int_{x_n}^{x_{n+1}} [(x - x_{n+1}) \dots (x - x_{n-p})] dx.$$

Pro $p = 0$ dostaneme korektor čtvrtého řádu ve tvaru

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h (y'_{n+1} + y'_n) + \frac{1}{12}h^2 (-y''_{n+1} + y''_n),$$

přítom

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} f + \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Pro získání prediktoru použijeme Hermitův vzorec s uzly x_n, \dots, x_{n-p} a analogickými úpravami dostaneme výsledek. Takže celkově máme:

Prediktor

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(-y'_n + 3y'_{n-1}) + \frac{1}{12}h^2 (17y''_n + 7y''_{n-1}),$$

Modifiktor

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{n+1} &= y_{n+1}^0 + \frac{31}{30}(y_n - y_n^0), \\ (\tilde{y}_{n+1})' &= f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}), \\ (\tilde{y}_{n+1})'' &= f'_y(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})(\tilde{y}_{n+1})' + f'_x(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}). \end{aligned}$$

Korektor

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h (y'_{n+1} + y'_n) + \frac{1}{12}h^2 (-y''_{n+1} + y''_n).$$

Příklad 7.36 Numericky řešte úlohu $y' = -y$, $y(0) = 1$. Výsledek srovnajte s analytickým řešením $Y(x) = e^{-x}$.

Řešení: Výsledky jsou zapsány v tabulce

x	y	chyba
0	1	0
0.1	0.90483753	$-1.1 \cdot 10^{-7}$
0.2	0.81873093	$-1.8 \cdot 10^{-7}$
\ddots	\ddots	\ddots
3	$4.9787110 \cdot 10^{-2}$	$-4.2 \cdot 10^{-8}$
\ddots	\ddots	\ddots
15	$3.0590305 \cdot 10^{-7}$	$-7.3 \cdot 10^{-3}$

Povimněte si, že na konci výpočtu je už chyba v absolutní hodnotě větší než funkční hodnota.

Příklad 7.37 Numericky řešte úlohu $y' = y$, $y(0) = 1$. Výsledek srovnajte s analytickým řešením $Y(x) = e^x$.

Řešení: Výsledky jsou zapsány v tabulce

x	y	chyba
0	1	0
0.1	1.1051708	$1 \cdot 10^{-7}$
0.2	1.2214024	$4 \cdot 10^{-7}$
0.3	1.3498582	$6 \cdot 10^{-7}$
⋮	⋮	⋮
3	20.085520	$1.7 \cdot 10^{-5}$
⋮	⋮	⋮
15	3269011.1	6.3

Příklad 7.38 Numericky řešte úlohu $y' = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$, $y(0) = 0$. Výsledek srovnajte s analytickým řešením $Y(x) = \arctan x$.

Řešení: Výsledky jsou zapsány v tabulce

x	y	chyba
0	0	0
0.1	$9.9668686 \cdot 10^{-2}$	$-3.4 \cdot 10^{-8}$
0.2	0.19739560	$-4 \cdot 10^{-8}$
0.3	0.29145683	$-4 \cdot 10^{-8}$
⋮	⋮	⋮
3	1.2490458	0
⋮	⋮	⋮
15	1.5042272	$1 \cdot 10^{-6}$

7.10 Metody Taylorovy řady

Eulerovu metodu jsme si odvodili z Taylorovy řady

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{y''(x)h^2}{2!} + \frac{y'''(x)h^3}{3!} + \cdots + \frac{y^{(k)}(x)h^k}{k!} + O(h^{(k+1)}),$$

když jsme položili $k = 1$ a zanedbali jsme členy vyšších řádů. Přitom jsme se dopustili chyby řádově rovné $O(h^2)$. Dosazením za první derivaci $y'(x) = f(x, y)$ jsme dostali

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Podobně můžeme dostat pro $k = 2$ metodu druhého řádu. Stačí jen zanedbat členy řádů vyšších jak dvě a vzjádřit si druhou derivaci $y''(x)$. Dostáváme

$$y''(x) = \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot y' = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot f(x, y).$$

Dosazením tohoto vztahu do Taylorovy řady dostaneme vztah pro metodu Taylorovy řady druhého řádu:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{1}{2}h^2 \left[\frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial y} \cdot f(x_n, y_n) \right].$$

A obdobně můžeme pokračovat dále a dostaneme

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{1}{2}h^2 f_n^{(1)} + \dots + \frac{1}{k!} f_n^{(k)}.$$

Výrazy pro vyšší derivace funkce $f(x, y)$ mohou být obecně velmi složité. Pro některé speciální případy však tyto výrazy mohou nabývat jednoduchých tvarů. Potom je možné metodu Taylorovy řady vyššího řádu použít s velmi dobrými výsledky.

Příklad 7.39 Hledejme řešení úlohy $y' = qy$, $y(0) = y_0$, metodou Taylorovy řady.

Řešení: Rozvojem do Taylorovy řady dostaneme, pokud použijeme prvních l členů:

$$y_{i+1} = \sum_{j=0}^l \frac{h^j}{j!} y_i^{(j)} = \sum_{j=0}^l \xi_{i,j},$$

kde $\xi_{i,j} = \frac{h^j}{j!} y_i^{(j)}$. Současně ale platí

$$y^{(j)} = qy^{(j-1)}, \Rightarrow y_i^{(j)} = qy_i^{(j-1)}.$$

Potom

$$\frac{\xi_{i,j}}{\xi_{i,j-1}} = \frac{\frac{h^j}{j!} y_i^{(j)}}{\frac{h^{j-1}}{(j-1)!} y_i^{(j-1)}} = \frac{hy_i^{(j)}}{jy_i^{(j-1)}} = \frac{h}{j} \cdot q,$$

neboli

$$\xi_{i,j} = \frac{h}{j} q \xi_{i,j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, l.$$

Když si navíc uvědomíme, že $\xi_{i,0} = y_i$, tak jsme získali rekurentní posloupnost, která nám umožňuje spočítat řešení s libovolnou přesností. Všimněte si přitom, že všechny posloupnosti jsou stejné a nezávisí tím na i . Navíc je možné podle potřeby průběžně měnit krok h .

V obecném případě má metoda Taylorovy řady tvar:

Na intervalu $I = \langle a, b \rangle$ hledáme řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in I$, $a, b, y_0 \in \mathbb{R}$. Funkci y si rozvineme do Taylorovy řady

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x) + \frac{1}{3!}h^3 y'''(x) + \dots + \frac{1}{k!}h^k y^{(k)}(x) + O(h^{k+1}).$$

Pro $k = 1$ dostaneme, při zanedbání vyšších řádů, Eulerovu metodu s chybou $O(h^2)$. Pokud si zvolíme $k = 2$ dostaneme chybu $O(h^3)$. Stačí si jen vyjádřit druhou derivaci

$$y''(x) = \frac{d}{dx} (y'(x)) = \frac{d}{dx} (f(x, y)) = f'_x(x, y) + f'_y(x, y)y' = f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot f(x, y).$$

Neboli

$$y''(x) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot f(x, y).$$

Pro $k = 3$ potřebujeme ještě třetí derivaci.

$$y'''(x) = \frac{d}{dx} (y''(x)) = \frac{d}{dx} (f'_x + f'_y \cdot f) = f''_{xx} + f'_{xy} \cdot y' + f'_{yx} \cdot f + f'_y \cdot f'_x + f''_{yy} \cdot y' \cdot f + f'_y \cdot f'_y \cdot y'.$$

Výrazy pro vyšší derivace jsou obecně velmi složité. Ale pro speciální případy mohou být docela jednoduchého tvaru. Potom lze metodu Taylorovy řady velmi dobře použít. Aplikacemi této metody se zabýval již zemřelý prof. F. Melkes z UMAT FEKT VUT a nyní v tom pokračuje doc. J. Kunovský z FIT VUT.

7.11 Shrnutí

Zabývali jsme se řešením obyčejných diferenciálních rovnic. Připomenuli jsme si základní pojmy z teorie obyčejných diferenciálních rovnic a analytické metody řešení některých typů těchto rovnic. Analytické řešení jsme získali buď v explicitním tvaru $y = f(x)$ a nebo v implicitním tvaru $F(x, y) = 0$. Takto řešitelných rovnic je ale menšina.

Proto jsme se dále zabývali numerickými metodami řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Numerické jsme hledali na základě diskretizace proměnné. Místo spojité funkce, která je řešením u analytických metod, jsme hledali diskrétní funkci, která se až v limitě bude blížit přesnému řešení.

Z numerických metod jsme probrali jednokrokové metody - Eulerovu a její modifikace, metodou Rugeho-Kutty. Z vícekových metod jsme probrali Adamsovy metody, metody prediktor-korektor a prediktor-modifikátor-korektor.

Krátce jsme se zmínili i o stabilitě řešení. Obsah kurzy nepředpokládá u čtenáře znalosti o stabilitě. Jde pouze o informaci pro lepší pochopení problematiky numerických výpočtů.

8 Diferenciální rovnice vyšších řádů

8.1 Úvod

Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře se numerickým způsobem řešení obyčejných diferenciálních rovnic vyšších řádů.

Nejdříve si připomeneme pojem diferenciální rovnice vyššího řádu. Zformulujeme si co budeme rozumět řešením takové rovnice. Této problematice se předmět BMA3 nevěnoval.

Ukážeme si, jak můžeme diferenciální rovnici řádu n převést na soustavu n rovnic prvního řádu. Řešení soustav je potom věnována následující kapitola.

8.2 Základní pojmy

Definice 8.1 *Cauchyova úloha pro diferenciální rovnici n -tého řádu má tvar*

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \quad (8.1)$$

$$y(x_0) = k_0, y'(x_0) = k_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = k_{n-1}. \quad (8.2)$$

Kde $x \in I = [a, b]$, $k_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ jsou konstanty a f je funkce $n+1$ proměnných definovaná na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Řešením rozumíme pak funkci $y(x)$ definovanou a spojitou na I , která je na I n krát spojitě diferencovatelná, pro každé $x \in I$ splňuje rovnici (8.1) a vyhovuje podmínkám (8.2).

Definice 8.2 *Funkce $f(x, z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ splňuje v bodě $(x_0, k_0, k_1, \dots, k_{n-1}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ lokálně Lipschitzovu podmínku, jestliže existuje konstanta $K > 0$ a okolí U bodu $(x_0, k_0, k_1, \dots, k_{n-1})$, $U \subset \Omega$, takové, že pro každé dva body $(x_0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in U$, $(x_0, b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in U$, platí*

$$|f(x_0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) - f(x_0, b_0, b_1, \dots, b_{n-1})| \leq K \sum_{i=0}^{n-1} |a_i - b_i|.$$

Přitom okolím bodu $(x_0, k_0, k_1, \dots, k_{n-1})$ rozumíme libovolnou otevřenou kouli v \mathbb{R}^{n+1} se středem v tomto bodě.

Věta 8.1 *Lokální Lipschitzova podmínka v Ω pro funkci $f(x, z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ bude splněna, jestliže v Ω existují lokálně ohraničené parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial z_0}, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{n-1}}$.*

Lokální Lipschitzova podmínka je splněna automaticky, jsou-li tyto derivace spojitě v Ω .

Bez důkazu.

Věta 8.2 O existenci a jednoznačnosti řešení.

Nechť funkce $f(x, z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ je spojitá na otevřené množině $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pak pro každé $(x_0, k_0, k_1, \dots, k_{n-1}) \in \Omega$ má úloha (8.1), (8.2) aspoň jedno řešení.

Je-li navíc v každém bodě Ω splněna lokálně Lipschitzova podmínka, je toto řešení právě jedno.

Bez důkazu.

Pozor: Opět vždy nutno prověřit splnitelnost podmínek existence a jednoznačnosti řešení. Numerické metody řešení se tím nezabývají a vždy se předpokládá jejich platnost.

Mějme úlohu (8.1), (8.2). Zavedeme si nové neznámé funkce $y_i(x)$ předpisem:

$y = y_1$, $y' = y_2, \dots, y^{(n-1)} = y_n$, potom máme soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ \ddots &\quad \ddots \\ y_{n-1}' &= y_n, \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned} \tag{8.3}$$

Stejnou transformaci provedeme i s počátečními podmínkami (8.2).

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_1(x_0) = k_0, \\ y'(x_0) &= y_2(x_0) = k_1, \\ \ddots &\quad \ddots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_n(x_0) = k_n. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Tímto způsobem převedeme numerické řešení diferenciálních rovnic vyšších řádů na řešení soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu.

Věta 8.3 Funkce $y(x)$, $x \in I$ je řešením rovnice (8.1) právě tehdy, když jsou funkce $(y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ řešením soustavy (8.3).

Bez důkazu.

Diferenciální rovnice vyšších řádů mají rozsáhlé aplikace. Například v mechanice, teorii pružnosti, teorii elektrických obvodů, abychom se zmímili alespoň o těch oborech, se kterými se budete nejčastěji setkávat. Přitom jedna rovnice se může vyskytovat v několika oborech.

Příklad 8.1 Homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$$y'' + 2ay' + b^2y = 0, \quad a \geq 0, b > 0,$$

popisuje

1. Kmity struny

2. Matematické kyvadlo

3. Elektrický obvod RLC

Jde o tzv. rovnici lineárního oscilátoru.

Příklad 8.2 Nehomogenní rovnice tvaru

$$y'' + 2ay' + b^2y = f(x), \quad a \geq 0, b > 0,$$

popisuje tzv. nucené kmity. Výsledek potom podstatně závisí na konkrétním tvaru budícího “členu” $f(x)$.

8.3 Metody pro rovnice druhé řádu

Protože se rovnice druhé řádu často vyskytují v různých aplikacích, ukážeme si speciální metody pro jejich řešení. Obecný tvar rovnice druhé řádu je

$$y''(x) = f(x, y, y')$$

a počáteční podmínky

$$y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1,$$

kde $k_0, k_1 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty. Tuto rovnici lze přepsat na soustavu tvaru

$$\begin{aligned} z' &= f(x, y, z), \\ y' &= z. \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} y(x_0) &= k_0, \\ z(x_0) &= k_1. \end{aligned}$$

Pro její řešení můžeme použít libovolnou z obecných metod.

Pokud ale pravá strana nezávisí na y' , což se dosti často objevuje v aplikacích, můžeme dosáhnout podstatného zlepšení. Rovnice je potom ve tvaru

$$y''(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1.$$

Pro přímé odvození metody pro řešení rovnice je přirozené vzít numerickou metodu ve tvaru (označení je stejné jako v předchozím výkladu)

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^p a_i y_{n-i} + h^2 \sum_{i=1}^p b_i y''_{n-i},$$

kde $p \in \mathbb{N}$ nám určuje řád metody. Potom pro $b_{-1} = 0$ máme prediktor a pro $b_{-1} \neq 0$ máme korektor. Metodou neurčitých koeficientů si odvodíme parametry a_i, b_i a dostaneme např:

Prediktor

$$y_{n+1} = 2y_{n-1} + y_{n-3} + \frac{4}{3}h^2 (y''_n + y''_{n-1} + y''_{n-2}),$$

Korektor

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + \frac{1}{12}h^2 (y''_{n+1} + 10y''_n + y''_{n-1}).$$

A když nyní využijeme toho, že $y'' = f(x, y)$ dostaneme

Prediktor

$$y_{n+1} = 2y_{n-1} + y_{n-3} + \frac{4}{3}h^2 (f_n + f_{n-1} + f_{n-2}),$$

Korektor

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + \frac{1}{12}h^2 (f_{n+1} + 10f_n + f_{n-1}).$$

Pomocí metody polovičního kroku dostaneme řešení s potřebnou přesností.

8.4 Užití Taylorovy řady

Pro hledání řešení diferenciálních rovnic vyšších řádů můžeme opět použít Taylorovu řadu

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

Pokud dovedeme určit hodnoty derivací v bodě x_0 , jde o velmi efektivní metodu. Postup si ukážeme na příkladě.

Příklad 8.3 Najděte řešení počáteční úlohy

$$y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Řešení: Rovnici si upravíme na tvar

$$y'' = -xy' - y. \tag{8.5}$$

Dosazením počátečních podmínek dostaneme

$$y''(0) = -0 \cdot 1 - 0 = 0.$$

Dále derivací (16.1) postupně dostáváme

$$\begin{aligned} y''' &= -xy'' - 2y', \\ y^{(IV)} &= -xy''' - 3y'', \\ y^{(V)} &= -xy^{(IV)} - 4y''', \dots \end{aligned}$$

Postupným dosazováním už známých počátečních podmínek dostáváme

$$\begin{aligned} y'''(0) &= -0 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2, \\ y^{(IV)}(0) &= 0, \quad y^{(V)}(0) = 8, \dots \end{aligned}$$

Dosazením vypočítaných hodnot do Taylorovy řady

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

dostaneme

$$y(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \dots,$$

což je námi hledané řešení rovnice v okolí bodu 0.

8.5 Shrnutí

Připomněli jsme si definici diferenciální rovnice vyššího řádu a jejího řešení.

Ukázali jsme si, jak lze diferenciální rovnici řádu n převést na soustavu n diferenciálních rovnic prvního řádu. A odkázali jsme se na následující kapitolu, kde se budeme této problematice věnovat. Ukázali jsme si speciální metody pro rovnice druhého řádu, včetně použití Taylorovy řady.

9 Řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic

9.1 Úvod

V předchozí kapitole jsme si ukázali, jak můžeme řešení diferenciální rovnice vyššího řádu převést na řešení soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu.

Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře s numerickými metodami řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic.

Budeme se zabývat Eulerovou metodou a Rungeho-Kuttovou metou pro soustavy diferenciálních rovnic. Půjde o zobecnění už známých metod pro jednorozměrné řešení na vícedimenzionální případ.

Řešení budeme zase hledat ve tvaru diskrétní funkce, která za určitých podmínek v limitě konverguje k přesnému řešení.

9.2 Základní pojmy

Definice 9.1 *Cauchyovou úlohou pro soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu rozumíme soustavu rovnic (ve vektorovém tvaru)*

$$Y' = F(x, Y), \quad (9.1)$$

s počáteční podmínkou

$$Y(x_0) = Y_0, \quad (9.2)$$

kde $x \in I = [a, b]$, $Y = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$, $Y' = (y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x))^T$, $F(x, Y)$ je vektorová funkce $F(x, Y) = (f_1(x, Y), f_2(x, Y), \dots, f_n(x, Y))^T$ definovaná na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a $Y_0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ je vektor z \mathbb{R}^n .

Soustavu 9.1 si můžeme zapsat i ve skalárním tvaru

$$y_i = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), i = 1, 2, \dots, n.$$

Věta 9.1 *Nechť $F(x, Y)$ je spojitá na Ω . Pak pro každé $(x_0, Y_0) \in \Omega$ má úloha (9.1), (9.2) alespoň jedno řešení.*

Splňuje-li navíc $F(x, Y)$ v každém bodě Ω lokálně Lipschitzovu podmínku, je řešení právě jedno.

Bez důkazu.

Věta 9.2 *Nechť je dána soustava (9.1) a nechť funkce $f_i, \partial f_i / \partial y_j, i, j = 1, 2, \dots, n$, jsou spojitě v oblasti $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$. Potom pro libovolně bod $[x_0, Y_0] \in \Omega$ existuje právě jedno řešení Y soustavy (9.1), splňující podmínky (9.2), definované v takovém intervalu I , že $x_0 \in I$ a pro každé $x \in I$ je bod $[x, Y(x)] \in \Omega$.*

Bez důkazu.

Jde tady vlastně o zeslabení podmínek předchozí věty, protože ze spojitosti parciálních derivací v oblasti Ω plyne platnost lokální Lipschitzovy podmínky.

Numerické metody řešení Cauchyovy úlohy pro soustavy diferenciálních rovnic jsou podobné metodám řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici $y' = f(x, y)$.

9.3 Eulerova metoda pro soustavy dif.rovnic

Mějme danu úlohu (9.1), (9.2). Předpokládáme, že F je spojitá na Ω a splňuje lokálně Lipschitzovu podmínku, takže máme podle věty 9.1 zajištěnou existenci a jednoznačnost řešení. Potom můžeme postupovat analogicky jako u rovnice (7.1). Z Taylorova rozvoje dostaneme, po zanedbání derivací vyšších řádů, ve vektorovém tvaru pro krok $h = \frac{b-a}{n}$

$$Y_{i+1} = Y_i + hF(x_i, Y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (9.3)$$

V případě soustavy dvou diferenciálních rovnic máme

$$\begin{aligned} u' &= f(x, u(x), v(x)), \\ v' &= \varphi(x, u(x), v(x)), \\ u(x_0) &= u_0, \quad v(x_0) = v_0. \end{aligned}$$

Jestliže si pro tuto soustavu rozepíšeme vztahy (9.3) dostaneme

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + hf(x_i, u_i, v_i), \\ v_{i+1} &= v_i + h\varphi(x_i, u_i, v_i), \\ i &= 0, 1, \dots, n, \quad x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = (b-a)/n. \end{aligned}$$

Příklad 9.1 Řešte soustavu

$$\begin{aligned} u' &= v, \\ v' &= 1 + e^u, \\ u(0) &= 0, \quad v(0) = 0, \quad a = 0, \quad b = 0.4, \quad h = 0.1. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + 0.1v_0 = 0, \\ v_1 &= v_0 + 0.1(1 + e^{u_0}) = 0 + 0.1(1 + e^0) = 0.2, \\ u_2 &= u_1 + 0.1v_1, \\ v_2 &= v_1 + 0.1(1 + e^{u_1}). \end{aligned}$$

Další výsledky jsou uvedeny v tabulce

i	x	u	v
0	0	0	0
1	0.1	0	0.2
2	0.2	0.02	0.4
3	0.3	0.06	0.602
4	0.4	0.1202	0.8082

9.4 Příklady na procvičení

Eulerovou metodou najděte na intervalu $\langle a, b \rangle$ s krokem h řešení následujících soustav diferenciálních rovnic. Funkce u, v, w, y, z jsou funkcemi proměnné x .

Příklad 9.2 $y' = y + 4z$, $z' = y + z$, když $y(0) = 1$, $z(0) = 2$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s krokem $h = 0,125$.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu, avšak za předpokladu, že $z(0) = 1$

Příklad 9.3 $y' = -7y + z$, $z' = -2y - 5z$, když $y(1) = 0$, $z(1) = 1$, $a = 1$, $b = 2$ a krok $h = 0,25$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $\langle 1; 1,5 \rangle$ s krokem $h = 0,1$.

Příklad 9.4 $y' = 4y - z$, $z' = y + 2z$, když $y(0) = 0$, $z(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $\langle 0; 0,5 \rangle$ s krokem $h = 0,1$.

Příklad 9.5 $y' = z$, $z' = -y + \frac{1}{\cos x}$, když $y(0) = 1$, $z(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $\langle 0; 0,5 \rangle$ s krokem $h = 0,1$.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $\langle 0; 0,5 \rangle$ s krokem $h = 0,05$.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu, avšak za počátečních podmínek $y(1) = 1$, $z(1) = 1$ na intervalu $\langle 1; 2 \rangle$ s krokem $h = 0,25$.

Příklad 9.6 $u' = 2u + 4v + \cos x$, $v' = -u - 2v + \sin x$, když $u(0) = 0$, $v(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $\langle 0; 0,5 \rangle$ s krokem $h = 0,1$.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $\langle 0; 0,5 \rangle$ s krokem $h = 0,05$.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $\langle 0; 0,5 \rangle$ s krokem $h = 0,1$, avšak za počátečních podmínek $u(0) = 1$ a $v(0) = 1$.

Příklad 9.7 $u' = -2u + v - 2w$, $v' = u - 2v + 2w$, $w' = 3u - 3v + 5w$, když $u(0) = 0$, $v(0) = 1$, $w(0) = 2$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Příklad 9.8 $u' = v + w + x$, $v' = u + v - w$, $w' = v + w$, když $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Příklad 9.9 $u' = v + \sin x$, $v' = u + e^x$, $w' = w + \cos x$, když $u(0) = 1$, $v(0) = 0$, $w(0) = 1$, $a = 0$, $b = 0,5$ a krok $h = 0,1$

Příklad 9.10 $u' = u + 2v + w$, $v' = u + w$, $w' = u + w$, když $u(0) = 1$, $v(0) = 2$, $w(0) = 0$, $a = 0$, $b = 0,5$ a krok $h = 0,1$

Příklad 9.11 $u' = -v$, $v' = -u$, $w' = u + v - w$, když $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = 1$, $a = 0$, $b = 0,5$ a krok $h = 0,1$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na téže intervalu, avšak s počátečními podmínkami $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = 0$; opět s krokem $h = 0,1$.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na téže intervalu, avšak s počátečními podmínkami $u(0) = 0,01$, $v(0) = 0,02$, $w(0) = 0,03$; opět s krokem $h = 0,1$.

9.5 Rungeho-Kuttova metoda pro soustavy dif. rovnic

Postup je opět analogický s řešením rovnice (7.1). Odlišnost je pouze v tom, že y , f a $k_j, j = 1, 2, 3, 4$, chápeme jako vektory. Jinak zůstávají všechny vztahy beze změny. Konkrétní postup si ukážeme na příkladě:

Příklad 9.12 Mějme danu Cauchyovu úlohu pro soustavu dvou diferenciálních rovnic

$$y'(x) = f(x, y(x), z(x)),$$

$$z'(x) = \varphi(x, y(x), z(x)),$$

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0.$$

Nechť $y_i = y_0 + ih$, $z_i = z_0 + ih$, $h = (b - a)/n$ je krok. Potom R-K. metoda čtvrtého řádu je popsána vztahy $i = 1, 2, \dots, n - 1$,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4),$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i, z_i), \quad l_1 = h\varphi(x_i, y_i, z_i),$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}\right), \quad l_2 = h\varphi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}\right), \quad l_3 = h\varphi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}\right),$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3), \quad l_4 = h\varphi(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3).$$

Příklad 9.13 Pro soustavu tří rovnic máme:

$$y'(x) = f(x, y(x), z(x), u(x)),$$

$$z'(x) = \varphi(x, y(x), z(x), u(x)),$$

$$u'(x) = g(x, y(x), z(x), u(x)),$$

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0, \quad u(x_0) = u_0.$$

Nechť $y_i = y_0 + ih$, $z_i = z_0 + ih$, $u_i = u_0 + ih$, $h = (b - a)/n$ je krok. Potom R-K. metoda čtvrtého řádu je popsána vztahy

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4),$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4),$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i, z_i, u_i), \quad l_1 = h\varphi(x_i, y_i, z_i, u_i),$$

$$m_1 = hg(x_i, y_i, z_i, u_i),$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}, u_i + \frac{m_1}{2}), \quad l_2 = h\varphi(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}, u_i + \frac{m_1}{2}),$$

$$m_2 = hg(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}, u_i + \frac{m_1}{2}),$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}, u_i + \frac{m_2}{2}), \quad l_3 = h\varphi(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}, u_i + \frac{m_2}{2}),$$

$$m_3 = hg(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}, u_i + \frac{m_2}{2}),$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3, u_i + m_3), \quad l_4 = h\varphi(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3, u_i + m_3),$$

$$m_4 = hg(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3, u_i + m_3).$$

Pro rozsáhlejší soustavy je postup analogický.

Příklad 9.14 Řešme stejnou úlohu jako u Eulerovy metody.

$$u' = v,$$

$$v' = 1 + e^u,$$

$$u(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad a = 0, \quad b = 0.4, \quad h = 0.1.$$

Potom dostaneme

n	x	u	v	k	l
0	0	0	0	$k_1 = 0$	$l_1 = 0.2$
	0.05	0	0.1	$k_2 = 0.01$	$l_2 = 0.2$
	0.05	0.005	0.1	$k_3 = 0.01$	$l_3 = 0.2005013$
	0.1	0.01	0.2005013	$k_4 = 0.0200501$	$l_3 = 0.2003346$
				$\Delta u = 0.0100084$	$\Delta v = 0.2003346$
1	0.1	0.0100084	0.2003346		
2	0.2	0.040135	0.402705		
3	0.3	0.090689	0.609292		
4	0.4	0.162216	0.822595		

V tabulce je rozepsán pouze první krok. U dalších kroků jsou uvedeny pouze výsledky.

Pokud máme soustavu diferenciálních rovnic, která obsahuje i rovnice vyšších řádů, tak si každou takovou rovnici převedeme na soustavu rovnic prvního řádu stejným postupem, který byl uveden v předchozí části.

Příklad 9.15 Mějme danu soustavu

$$y'' = f(x, y(x), y'(x), z(x)),$$

$$z' = g(x, y(x), y'(x), z(x))$$

a počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $z(x_0) = z_0$. Transformací $y(x) = u(x)$, $y'(x) = v(x)$ dostaneme úlohu

$$u' = v(x),$$

$$v' = f(x, u(x), v(x), z(x)),$$

$$z' = g(x, u(x), v(x), z(x)),$$

$$u(x_0) = y_0, v(x_0) = y_1, z(x_0) = z_0.$$

Tím máme soustavu tří diferenciálních rovnic prvního řádu. O té už víme, jak ji řešit.

I u těchto úloh hraje důležitou roli stabilita výpočtu. Například mějme soustavu

$$y_1' = y_2,$$

$$y_2' = -1001y_2 - 1000y_1.$$

s počátečními podmínkami

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1.$$

Přesné řešení této úlohy je

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = -e^{-x}$$

a obecné řešení soustavy je

$$y_i(x) = A_i e^{-x} + B_i e^{-1000x},$$

$i = 1, 2$, $A, B \in \mathbb{R}$. Všimněte si, že přesné řešení neobsahuje členy $B_i e^{-1000x}$. Vlastní čísla matice soustavy jsou $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1000$. Odtud plyne nestabilita výpočtu.

V tomto případě pro krok $h \geq 0.003$ při klasické Rungeho-Kuttově metodě čtvrtého řádu vůbec nedostaneme použitelné výsledky.

Opět je nutné hlídat podmínky existence a jednoznačnosti řešení.

9.6 Příklady na procvičení

Metodami Rungeho – Kutyty najděte na intervalu $\langle a, b \rangle$ s krokem h řešení následujících soustav diferenciálních rovnic. Funkce u, v, w, y, z jsou funkcemi proměnné x . Zadání jsou stejná jako v předcházející kapitole, číslování si odpovídá.

Příklad 9.16 $y' = y + 4z$, $z' = y + z$, když $y(0) = 1$, $z(0) = 2$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s krokem $h = 0,125$.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu, avšak za předpokladu, že $z(0) = 1$.

Příklad 9.17 $y' = -7y + z$, $z' = -2y - 5z$, když $y(1) = 0$, $z(1) = 1$, $a = 1$, $b = 2$ a krok $h = 0,25$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $\langle 1; 1,5 \rangle$ s krokem $h = 0,1$.

Příklad 9.18 $y' = 4y - z$, $z' = y + 2z$, když $y(0) = 0$, $z(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $\langle 0; 0,5 \rangle$ s krokem $h = 0,1$.

Příklad 9.19 $y' = z$, $z' = -y + \frac{1}{\cos x}$, když $y(0) = 1$, $z(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $\langle 0; 0,5 \rangle$ s krokem $h = 0,1$.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $\langle 0; 0,5 \rangle$ s krokem $h = 0,05$.

Příklad 9.20 $u' = 2u + 4v + \cos x$, $v' = -u - 2v + \sin x$, když $u(0) = 0$, $v(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $\langle 0; 0,5 \rangle$ s krokem $h = 0,1$.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $\langle 0; 0,5 \rangle$ s krokem $h = 0,05$.

Příklad 9.21 $u' = -2u + v - 2w$, $v' = u - 2v + 2w$, $w' = 3u - 3v + 5w$, když $u(0) = 0$, $v(0) = 1$, $w(0) = 2$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Příklad 9.22 $u' = u + w + x$, $v' = u + v - w$, $w' = v + w$, když $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = 1$, $a = 0$, $b = 0,5$ a krok $h = 0,25$

Příklad 9.23 $u' = v + \sin x$, $v' = u + e^x$, $w' = w + \cos x$, když $u(0) = 1$, $v(0) = 0$, $w(0) = 1$, $a = 0$, $b = 0,5$ a krok $h = 0,1$

Příklad 9.24 $u' = u + 2v + w$, $v' = u + w$, $w' = u + w$, když $u(0) = 1$, $v(0) = 2$, $w(0) = 0$, $a = 0$, $b = 0,5$ a krok $h = 0,1$

Příklad 9.25 $u' = -v$, $v' = -u$, $w' = u + v + w$, když $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = 1$, $a = 0$, $b = 0,5$ a krok $h = 0,1$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na téže intervalu, avšak s počátečními podmínkami $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = 0$, $a = 0$, $b = 0,5$ a krokem $h = 0,1$.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na téže intervalu, avšak s počátečními podmínkami $u(0) = 0,01$, $v(0) = 0,02$, $w(0) = 0,03$; opět s krokem $h = 0,1$.

9.7 Metoda Taylorovy řady

Mějme soustavu diferenciálních rovnic (ve vektorovém tvaru)

$$\frac{d\mathbb{Y}}{dx} = \mathbb{F}(x, \mathbb{Y}^T),$$

kde

$$\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \mathbb{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad f_i = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Rozvinutím do Taylorovy řady v okolí bodu x_0 dostaneme

$$\mathbb{Y}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{Y}^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

což znamená, že každá složka \mathbb{Y} se rozkládá do Taylorovy řady a kde

$$\mathbb{Y}^{(2)} = \frac{\partial^2 \mathbb{Y}}{\partial x^2} = \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{Y}} \cdot \frac{\partial \mathbb{Y}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{Y}} \cdot \mathbb{F}$$

a

$$\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{Y}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

Pro derivace vyšších řádů postupujeme analogicky. Postup si opět ukážeme na příkladě:

Příklad 9.26 *Určit řešení soustavy rovnic*

$$\frac{dx}{dt} = x \cos t - y \sin t, \quad (9.4)$$

$$\frac{dy}{dt} = x \sin t + y \cos t, \quad (9.5)$$

s počátečními podmínkami

$$y(0) = 0, \quad x(0) = 1.$$

Řešení: Rozvoj do Taylorovy řady v okolí bodu $t = 0$ má tvar

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + \frac{x''(0)}{2!}t^2 + \frac{x'''(0)}{3!}t^3 + \dots \quad (9.6)$$

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + \frac{y''(0)}{2!}t^2 + \frac{y'''(0)}{3!}t^3 + \dots \quad (9.7)$$

Pro jejich použití si musíme umět vyjádřit hodnoty derivací. Z počátečních podmínek pro $t = 0$ dostaneme

$$x'(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Derivujeme (9.4),(9.5) a dostaneme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x \sin t - y \cos t + \frac{dx}{dt} \cos t - \frac{dy}{dt} \sin t, \quad (9.8)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = x \cos t - y \sin t + \frac{dx}{dt} \sin t + \frac{dy}{dt} \cos t. \quad (9.9)$$

Odtud po dosazení dostaneme

$$x''(0) = 1, \quad y''(0) = 1.$$

Derivujeme (9.8),(9.9) a dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d^3x}{dt^3} &= -x \cos t + y \sin t + 2 \left(-\frac{dx}{dt} \sin t - \frac{dy}{dt} \cos t \right) + \frac{d^2x}{dt^2} \cos t - \frac{d^2y}{dt^2} \sin t, \\ \frac{d^3y}{dt^3} &= -x \sin t - y \cos t + 2 \left(\frac{dx}{dt} \cos t - \frac{dy}{dt} \sin t \right) + \frac{d^2x}{dt^2} \sin t + \frac{d^2y}{dt^2} \cos t. \end{aligned}$$

Odtud po dosazení dostaneme

$$x'''(0) = 0, \quad y'''(0) = 3.$$

A můžeme pokračovat dále. Pokud nám dostačují získané hodnoty, potom jejich dosazením do (9.6) a (9.7) dostaneme aproximaci řešení v okolí bodu $t = 0$:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \dots \\ y(t) &= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \dots \end{aligned}$$

9.8 Zaokrouhlovací chyby

Při řešení každé numerické úlohy se vyskytují zaokrouhlovací chyby. Ukážeme si, že jejich vliv nemůžeme zanedbat. Pro jednoduchost si vezmeme Eulerovu metodu pro řešení rovnice (soustavy rovnic)

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Numerickým postupem s krokem $h = \frac{b-a}{n}$ získáme aproximace přesného řešení $y = y(x)$, které budeme označovat jako \tilde{y}_i . Předpokládejme, že

$$\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + h \cdot f(x_i, \tilde{y}_i) + \varepsilon_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

a $|\varepsilon_i| < \varepsilon$, kde ε je zadaná přesnost. Potom pro chybu r_i na $i+1$ -tém kroku $r_i = y_i - \tilde{y}_i$ platí

$$r_{i+1} = r_1 + h(f(x_i, y_i) - f(x_i, \tilde{y}_i)) - \varepsilon_i.$$

Odtud s využitím Lipschitzovy podmínky (s konstantou L) dostaneme

$$|r_{i+1}| \leq |r_i| + h \cdot L |y_i - \tilde{y}_i| + |\varepsilon_i| \leq (1 + hL)|r_i| + \varepsilon.$$

Protože $r_0 = 0$, dostáváme

$$\begin{aligned} |r_1| &\leq \varepsilon, \\ |r_2| &\leq (1 + hL)\varepsilon + \varepsilon, \\ &\dots \\ |r_i| &\leq \varepsilon (1 + (1 + hL) + (1 + hL)^2 + \dots + (1 + hL)^{i-1}) = \varepsilon \frac{(1 + hL)^i - 1}{hL} \leq \\ &\leq \varepsilon \frac{e^{ihL} - 1}{hL} \leq K \cdot \varepsilon \cdot h^{-1}, \end{aligned}$$

kde $K = \frac{e^{(b-a)L} - 1}{L}$. Pro celkovou chybu potom máme

$$\max_i |y_i - \tilde{y}_i| \leq K_1 h + \varepsilon K h^{-1},$$

kde h je dostatečně malý krok a K_1, K jsou konstanty na h nezávislé.

Protože předpokládáme, že konstanta ε je malá (jde přece o velikost přípustné chyby), tak se nám vliv zaokrouhlovacích chyb projeví až po provedení velkého počtu kroků, neboli pro dostatečně malé h . Potom může dokonce dojít k převážení účinků zaokrouhlovacích chyb a vypočtené hodnoty \tilde{y}_i tak mohou být zcela bezcenné, i přes vynaloženou výpočetní snahu.

9.9 Další problémy, které mohou nastat

Vhodnost počátečních podmínek

Mějme diferenciální rovnici

$$y' = \frac{2y}{x}$$

a počáteční podmínku $y(0) = 0$.

Řešením naší rovnice bude funkce $y(x) = x^2$, protože potom

$$y' = 2x,$$

a současně

$$\frac{2y}{x} = \frac{2x^2}{x} = 2x.$$

Pokud použijeme pro řešení Eulerovu metodu s krokem h , potom dostaneme

$$\begin{aligned} y_0 &= 0, \\ y_1 &= y_0 + hf(x, y) = y_0 + \frac{2y_0}{x_0}. \end{aligned}$$

A dostali jsme neurčitý výraz " $\frac{0}{0}$ ", neboli metoda bude havarovat.

Jiný příklad.

Hledáme řešení rovnice

$$\begin{aligned} y' &= xy, \\ \frac{dy}{y} &= x dx, \\ \ln y &= \frac{x^2}{2} + \ln K, \end{aligned}$$

kde K je konstanta, potom

$$y = K \cdot e^{\frac{x^2}{2}}.$$

O správnosti výpočtu se můžeme přesvědčit zkouškou:

$$y' = K \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{2x}{2} = x \cdot K e^{\frac{x^2}{2}} = xy.$$

Pokud budeme mít počáteční podmínku ve tvaru $y(0) = 0$, potom z ní dostáváme, že $K = 0$. Proto jediným řešením, které vyhovuje této počáteční podmínce je nulová funkce $y(x) \equiv 0$.

V obecném případě: Mějme rovnici $y' = f(x, y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = 0$ takovou, že $f(x, 0) = 0$.

Potom nám použití Eulerovy metody dává

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) = 0 + hf(x_0, 0) = 0, \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) = 0 + hf(x_1, 0) = 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Pokud přejdeme k Rungeho-Kuttově metodě, dostaneme

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2Kk_3 + k_4), \\ k_1 &= h \cdot f(x_0, y_0) = 0, \\ k_2 &= h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, 0\right) = 0, \\ k_3 &= h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, 0\right) = 0, \\ k_4 &= h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3) = h \cdot f(x_0 + h, 0) = 0, \\ y_1 &= 0. \end{aligned}$$

A stejné výsledky budeme dostávat i ve všech dalších krocích.

Pokud přejdeme k více krokové metodě, budeme opět dostávat stejné výsledky. A to přesto, že se nemusí jednat o rovnici, která má pouze nulové řešení. Ve většině případů pomůže, když místo $y_0 = 0$ vezmeme nějaké dostatečně malé číslo ($\varepsilon = 10^{-6}$).

Pokud se při řešení diferenciální rovnice objeví opakovaně stejná hodnota y_i , potom je vhodné si znovu prověřit podmínky existence a jednoznačnosti řešení.

9.10 Řízení délky kroku

Zatím jsme vždy předpokládali, že délka kroku h je u dané metody konstantní. Ale ani z odvození metody ani z jejího tvaru nevyplývá nutnost tohoto požadavku. V každém kroku můžeme měnit délku kroku h . Dále si uvedeme jak.

V ideálním případě budeme mít, že numerický výsledek y_i se bude lišit od skutečného řešení $y(x_i)$ nejvýše o povolenou toleranci, tj. o požadovanou přesnost $\varepsilon > 0$, neboli bude platit

$$\|e_i\| = \|y_i - y(x_i)\| \leq \varepsilon.$$

Realita je ale jiná. Současné programy pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic dokážou zajistit pouze to, že pro dostatečně malé $\varepsilon > 0$ bude globální chyba $\|e_i\|$ dosti malá. Jednotlivé metody tohoto cíle dosahují tím, že délku kroku h vybírají tak, aby velikost lokální chyby $\|l_i\|$ nabývala stále zhruba stejné hodnoty ε . Velikost globální chyby $\|e_i\|$ dokážeme pouze odhadnout. Řídit ji zatím neumíme.

Dále je nutné mít na paměti, že sledování velikosti globální chyby je *velmi nákladné*, proto většina programů ani sledování globální chyby neobsahuje.

9.11 Shrnutí

Seznámili jsme se s numerickými metodami řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu.

Zabývali jsme se Eulerovou metodou a Rungeho-Kuttovou metou pro soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu. Jde o analogický postup, jako v případě jedné diferenciální rovnice. Pouze je třeba změnit zápis na vektorový a pak budeme mít i stejné vzorce jako dříve.

Dále jsme si ukázali možnosti použití Taylorovy řady.

Opět získáme jako řešení diskrétní funkci, která při splnění konvergenčních podmínek nám v limitě konverguje k přesnému řešení.

Všechna řešení se týkala explicitních soustav. Existují sice i numerické metody pro řešení implicitních rovnic $F(x, y, y') = 0$ a jejich soustav a také poloimplicitních rovnic $y' = \varphi(x, y, y')$ a jejich soustav. Tato problematika ale přesahuje možnosti našeho kurzu.

10 Řešení okrajových úloh pro obyčejné dif. rovnice.

10.1 Úvod

V této kapitole se budeme zabývat diferenciálními rovnicemi řádu aspoň dvě. Pouze pro takové rovnice má smysl hledat řešení okrajové úlohy. Nejdříve si zavedeme pojem okrajové úlohy a jejího řešení. Ukážeme si rozdíl mezi okrajovou a počáteční úlohou.

Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře s numerickými metodami řešení okrajových úloh pro diferenciální rovnice druhého řádu.

Okrajovou úlohu můžeme převést na počáteční a hledat řešení počáteční úlohy některou z dříve probraných metod - to je princip metody střelby.

Jinou možností je diskretizace proměnných a převedení okrajové úlohy na řešení soustavy lineárních algebraických rovnic - to je princip metody konečných diferencí.

10.2 Základní pojmy

Definice 10.1 Okrajová úloha pro diferenciální rovnici druhého řádu je tvořena rovnicí

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (10.1)$$

a okrajovými podmínkami

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = A, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = B, \quad (10.2)$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0, A, B$ jsou konstanty.

Řešení hledáme na intervalu $I = [a, b], a < b$, jako spojitou a dvakrát spojitě diferencovatelnou funkci, která splňuje (10.1), (10.2).

Budeme se tedy zabývat pouze tzv. “klasickým řešením”.

Nebudeme studovat obecný tvar (10.1), ale budeme se zabývat pouze rovnicemi v jednodušším tvaru $y'' = f(x, y, y')$.

Základní rozdíl mezi počáteční (Cauchyovou) a okrajovou úlohou je v tom, že zatímco řešení počáteční úlohy existuje a je dokonce i jednoznačně určitelné pro velmi širokou třídu rovnic, u okrajové úlohy se může stát, že i pro jednoduchou lineární rovnici řešení neexistuje a nebo je jich nekonečně mnoho. U rovnic vyšších řádů se přirozeně taková situace může vyskytovat s mnohem větší pravděpodobností.

Příklad 10.1 Mějme rovnici

$$y'' + y = 0.$$

Její obecné řešení má tvar

$$\tilde{y}(x) = A \sin x + B \cos x$$

kde $A, B \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty.

Zvolme si okrajové podmínky

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1.$$

Potom z první podmínky dostaneme

$$\tilde{y}(0) = A \sin 0 + B \cos 0 = 0,$$

$$B \cdot 1 = 0, \Rightarrow B = 0.$$

Druhá podmínka nám dává

$$\tilde{y}(\pi) = 1.$$

A současně

$$\tilde{y}(\pi) = A \sin(\pi) = A \cdot 0 = 0.$$

Dostali jsme spor. Neboli neexistuje žádné řešení naší rovnice, které vyhovuje zvoleným počátečním podmínkám.

Naopak pro volbu počátečních podmínek

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

existuje nekonečně mnoho řešení $\tilde{y}_1(x) = K \sin x$, $K \in \mathbb{R}$.

A okrajovým podmínkám

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

vyhovuje pouze jediné řešení $\tilde{y}_2(x) = \sin x$.

Z příkladu je zřejmé, že možností, kdy existuje právě jedno řešení či nekonečně mnoho řešení či neexistuje řešení, lze najít také nekonečně mnoho.

10.3 Metoda střelby

Někdy se označuje jako balistická metoda.

Základem metody střelby je převedení okrajové úlohy na počáteční úlohu. Mějme danu okrajovou úlohu v nejjednodušším možném tvaru

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = A, y(b) = B.$$

Jde o nejjednodušší tvar okrajových podmínek (10.2).

Volíme si libovolně $y'(a) = k_0$ a řešíme počáteční úlohu

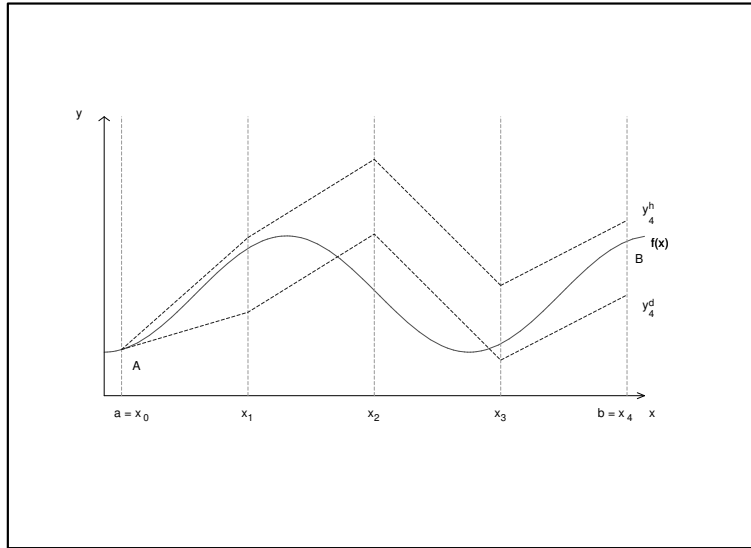
$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = A, y'(a) = k_0$$

na intervalu $[a, b]$ s krokem $h = \frac{b-a}{n}$. Substitucí $y = u$, $y' = v$ získáme úlohu

$$u' = v(x),$$

$$v' = f(x, u(x), v(x)),$$

$$u(a) = A, v(a) = k_0.$$



Obrázek 10.1: Geometrický smysl metody střelby

Jde o soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu, kterou už umíme řešit. Výsledně tak získáme diskretní funkci $(x_i, y_i^0), i = 0, 1, \dots, n$. Jestliže $y_n^0 = y^0(b) = B$, zastavujeme výpočet. V opačném případě si volíme novou hodnotu $y'(a) = k_1$ a znovu provádíme výpočet. Výpočet a tedy i volbu $y'(a) = k_i$ opakujeme tak dlouho, až se hodnota y_n^i přiblíží k B s požadovanou přesností. Viz obr.

Pro vlastní výpočet používáme některou z numerických metod pro řešení počátečních úloh. Často se používá zejména Rungeho-Kuttova metoda. Pro větší interval I je vhodné použít Rungeho-Kuttovu metodu na počáteční přiblížení a pak použít přesnější metody typu prediktor-korektor.

Jakmile dosáhneme stavu, že pro volbu počátečních podmínek k_i, k_j platí $y_n^i < B < y_n^j$, potom můžeme použít pro další výběr hodnot k_r vhodnou numerickou metodu, např. bisekci.

Výstupem metody střelby je diskretní funkce $\{y_i \approx y(x_i)\}, i = 0, 1, \dots, n$.

Kontrola přesnosti se provádí metodou polovičního kroku.

Touto metodou lze řešit lineární i nelineární diferenciální rovnice a taktéž soustavy rovnic.

10.4 Metoda konečných diferencí

Mějme danu úlohu

$$-y'' + \sigma(x)y = f(x), \quad (10.3)$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \quad (10.4)$$

kde $a < b, \alpha, \beta$ jsou konstanty. Hledáme spojitou, dvakrát spojitě diferencovatelnou funkci $y(x)$, která splňuje (10.3), (10.4).

Věta 10.1 *Nechť $\sigma(x), f(x)$ jsou spojitě na $[a, b]$, $\sigma(x) \geq 0$. Potom existuje právě jedno řešení úlohy (10.3), (10.4).*

Bez důkazu. Jde o důsledek věty 8.2.

Rovnici (10.3) můžeme řešit přímo analyticky, jestliže $\sigma(x)$ je konstanta. Předpokládejme, že platí $\sigma(x) \equiv 0$, potom dvojí integrací dostaneme řešení:

$$-y'' = f(x) \quad \Rightarrow \quad y'' = -f(x),$$

$$y' = \int -f(x)dx + C \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int \left(\int -f(x)dx \right) + Cx + D.$$

Parametry C, D si určíme tak, aby byly splněny okrajové podmínky (10.4).

Nechť nyní je $\sigma(x) \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ potom charakteristická rovnice má tvar

$$-\lambda^2 + \sigma = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\sigma}$$

a obecné řešení rovnice (10.3) je tvaru

$$y(x) = Ae^{\sqrt{\sigma}x} + Be^{-\sqrt{\sigma}x},$$

$A, B \in \mathbb{R}$. Parametry A, B si dále určíme tak, aby byly splněny okrajové podmínky (10.4). Ověříme si dále správnost našeho výpočtu:

$$y'(x) = Ae^{\sqrt{\sigma}x}\sqrt{\sigma} + Be^{-\sqrt{\sigma}x}(-\sqrt{\sigma}),$$

$$y''(x) = Ae^{\sqrt{\sigma}x}\sigma + Be^{-\sqrt{\sigma}x}\sqrt{\sigma} = \sigma \left(Ae^{\sqrt{\sigma}x} + Be^{-\sqrt{\sigma}x} \right) = \sigma y.$$

Pro $\sigma < 0$ dostaneme analogicky řešení

$$y(x) = Ae^{j\sqrt{\sigma}x} + Be^{-j\sqrt{\sigma}x},$$

$j = \sqrt{-1}$, $A, B \in \mathbb{R}$. Parametry A, B si opět určíme tak, aby byly splněny okrajové podmínky (10.4).

Budeme nyní hledat numerické řešení rovnice (10.3) metodou konečných diferencí. Vytvoříme si síť:

$$x_0 = a, x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, n+1, h = \frac{b-a}{n+1}.$$

Body x_0, x_{n+1} jsou hraniční, zbývající body jsou vnitřní. Hodnoty funkce v hraničních bodech známe – jsou to hodnoty $y_0 = \alpha$, $y_{n+1} = \beta$. Zbývající hodnoty musíme dopočítat. **Pozor:** Zde máme jiné dělení intervalu (a, b) , než bylo používáno dříve. To proto, aby jste předchozí tvar nepokládali za jedinný možný.

Druhou derivaci funkce $y(x)$ nahradíme diferencí

$$-\frac{d^2y(x_i)}{dx^2} = -\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi),$$

kde $y_i = y(x_i)$, $\xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$. Je-li h dostatečně malé a $\max_{x \in I} |y^{(4)}(x)| < K < \infty$, můžeme zbytkový člen zanedbat. Protože jsme předpokládali jen spojitost funkce $y(x)$

včetně první a druhé derivace, plyne odtud i další požadavek na ohraničenost čtvrté derivace. Ale funkci y my předem neznáme. Proto se tento požadavek předpokládá za splněný. Označme $\sigma(x_i) = \sigma_i$, $f(x_i) = f_i$. Pak dosazením do rovnice (10.3) dostaneme, při zanedbání zbytkového členu,

$$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \sigma_i y_i = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

a po úpravě

$$-y_{i-1} + (2 + h^2\sigma_i)y_i - y_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dosazením hodnot $y_0 = \alpha$, $y_{n+1} = \beta$ dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} (2 + h^2\sigma_1)y_1 & & -y_2 & & & & = h^2 f_1 + \alpha \\ -y_1 & + (2 + h^2\sigma_2)y_2 & & & -y_3 & & = h^2 f_2 \\ & & -y_2 & + (2 + h^2\sigma_3)y_3 & & -y_4 & = h^2 f_3 \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ & & -y_{n-2} & + (2 + h^2\sigma_{n-1})y_{n-1} & & -y_n & = h^2 f_{n-1} \\ & & & & -y_{n-1} & + (2 + h^2\sigma_n)y_n & = h^2 f_n + \beta \end{array}$$

To je soustava lineárních algebraických rovnic s třídiagonální maticí, která je pro $\sigma > 0$ diagonálně dominantní a tedy regulární a navíc je i symetrická a pozitivně definitní. Existuje tedy jediné řešení této soustavy a iterační metody (Jacobiho i Gauss-Seidelova) konvergují k tomuto řešení.

Pro $\sigma \geq 0$ jde o symetrickou matici, která má minimálně první a poslední rovnici diagonálně ostře dominantní, u zbývajících platí neostrá diagonální dominantnost. I pro takovéto soustavy bude Gauss-Seidelova metoda konvergovat.

V případě $\sigma(x) \equiv 0$ máme rovnici $-y'' = f(x)$ a dvojí integrací dostaneme hledané řešení přímo a podstatně rychleji.

Pro odhad přesnosti platí:

Věta 10.2 *Nechť $\tilde{y}(x)$ je přesné řešení úlohy (10.3), (10.4) na intervalu $[a, b]$, kde $\sigma(x) \geq 0$. Nechť y_1, y_2, \dots, y_n jsou diskrétní aproximace řešení získané metodou konečných diferencí. Potom*

$$|\tilde{y}(x_i) - y_i| \leq \frac{M_4 h^2}{24} (x_i - a)(b - x_i),$$

kde $x_i = a + ih = a + i \frac{b-a}{n+1}$, $0 \leq i \leq n+1$, $M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$. Dále platí

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\tilde{y}(x_i) - y_i| \leq \frac{M_4 (b-a)^2}{96} h^2.$$

Bez důkazu.

Pozor: Zde zase máme celkem $n+2$ bodů, přičemž n_0 a n_{n+1} jsou okrajové podmínky. Z věty 10.2 plyne, že při splnění předpokladů věty 10.1, pro dostatečně malý krok h , lze dosáhnout libovolné předepsané přesnosti. Neboli pro $h \rightarrow 0$ diskrétní aproximace konvergují k přesnému řešení.

Poznámka 10.1 Rovnici $y'' - \sigma(x)y = f(x)$, $\sigma \geq 0$ si substitucí $z = -y$ upravíme na tvar požadovaný větou 10.1 (a nebo vynásobením rovnice číslem (-1) obdržíme požadovaně tvar).

Neboli — pokud $\sigma(x)$ nemění znaménko na intervalu I a znaménka u y'' a $\sigma(x)$ jsou opačná, je úloha (10.3), (10.4) jednoznačně řešitelná metodou konečných diferencí.

Příklad 10.2 Řešte metodou konečných diferencí s přesností ε okrajovou úlohu

$$-y'' + (1 + x^2)y = -1,$$

$$y(-1) = y(1) = 0.$$

Řešení: Máme $a = -1$, $b = 1$. Zvolme krok $h = \frac{1}{2}$. Sestavíme si soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \left(2 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4}\right)\right) y_1 - y_2 &= -\frac{1}{4} \\ -y_1 + \left(2 + \frac{1}{4}\right) y_2 - y_3 &= -\frac{1}{4} \\ -y_2 + \left(2 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4}\right)\right) y_3 &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

A po úpravě

$$\begin{aligned} 37y_1 - 16y_2 &= -4 \\ -4y_1 + 9y_2 - 4y_3 &= -1 \\ -16y_2 + 37y_3 &= -4 \end{aligned}$$

Její řešení jsou hledané hodnoty:

$$y_1 = -0.25365, \quad y_2 = -0.33658, \quad y_3 = -0.25365.$$

Máme první přiblížení. Zmenšíme krok na polovinu a opakujeme výpočet. Jestliže je $\forall i \quad |y_{i,h} - y_{2i,\frac{h}{2}}| < \varepsilon$, pak zastavujeme výpočet. Neplatí-li tato podmínka, zmenšíme opět krok na polovinu a opakujeme postup. Pokud použijeme Eukleidovskou normu, bude mít

podmínka tvar $\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(y_{i,h} - y_{2i,\frac{h}{2}}\right)^2} < \varepsilon$. □

V obecnějším případě budeme mít složitější tvar.

Definice 10.2 Okrajová úloha pro obyčejnou lineární diferenciální rovnici 2.řádu je: Určit takové řešení $y(x)$ rovnice

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = f_3(x), \quad (10.5)$$

které na intervalu $I = [a, b]$ splňuje okrajové podmínky

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2, \quad |\alpha_i| + |\beta_i| > 0, \quad i = 1, 2. \quad (10.6)$$

Řešení hledáme jako spojitou funkci, která je na intervalu $[a, b]$ spojitě dvakrát diferencovatelná.

Podmínky (10.6) se většinou označují jako *Sturmovy* podmínky. Jejich speciálním případem jsou *Dirichletovy*²⁵ podmínky

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

a nebo *Neumannovy*²⁶ podmínky

$$y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta.$$

Věta 10.3 *Nechť je dána rovnice (10.5) a nechť $f_1 \in C(I)$. Potom lze tuto rovnici převést na samoadjungovaný tvar*

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x) \quad (10.7)$$

kde

$$p(x) = e^{\int f_1(x)dx}, \quad q(x) = -f_2(x)p(x), \quad f(x) = -f_3(x)p(x).$$

Důkaz: Podle předpokladu je $f_1 \in C(I)$, potom tedy existuje $(\int f_1(x)dx)$ pro $\forall x \in I$. Označme $p(x) = \exp(\int f_1(x)dx)$. Rovnici (10.5) vynásobíme $(-p(x))$. Dostaneme

$$-y''p(x) - f_1(x)p(x)y' - f_2(x)p(x)y = -f_3(x)p(x). \quad (10.8)$$

Dále je

$$y''p(x) + f_1(x)p(x)y' = (p(x)y')',$$

neboť

$$\begin{aligned} (p(x)y')' &= p'(x)y' + p(x)y'', \\ p'(x) &= \left(e^{\int f_1(x)dx}\right)' = \left(e^{\int f_1(x)dx}\right) f_1(x) = p(x)f_1(x). \end{aligned}$$

Dosazením tohoto výsledku do (10.8) a použitím označení p, q, f definovaných ve větě 10.3 dostaneme rovnici (10.7). \square

Věta 10.4 *Nechť máme lineární diferenciální rovnici v samoadjungovaném tvaru (10.7). Nechť dále platí*

$$\begin{aligned} q, f &\in C(I), \quad p \in C^1(I), \\ p(x) &> 0, \quad q(x) \geq 0 \quad \forall x \in I. \end{aligned}$$

Potom existuje právě jedno řešení $u(x)$ diferenciální rovnice (10.7), které splňuje okrajové podmínky $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$, kde α, β jsou libovolná reálná čísla.

²⁵**P.G.L. Dirichlet** (1805 – 1859) německý matematik. Pracoval v teorii čísel, matematické analýze, matematické fyzice. Ve všech těchto oborech dosáhl významných výsledků.

²⁶**K.G. Neumann** (1832 – 1925) německý matematik. Věnoval se hlavně teorii logaritmického potenciálu, diferenciálním rovnicím, matematické fyzice.

Bez důkazu.

Na základě této věty platí i postup řešení, který jsme si předvedli jako první, neboť rovnice (10.3) je speciálním případem rovnice (10.5) a tedy i speciálním případem rovnice (10.7).²⁷

Numerické řešení opět budeme hledat metodou konečných diferencí. Předpokládáme přitom, že jsou splněny předpoklady věty 10.4, které nám zajišťují existenci a jednoznačnost řešení. Označme

$$p_{i \pm \frac{1}{2}} = p \left(x_i \pm \frac{h}{2} \right),$$

$$q_i = q(x_i), \quad f_i = f(x_i), \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Výraz $(p(x)y')'$ nahradíme výrazem

$$(p(x)y')' \approx \frac{1}{h} \left(p_{i+\frac{1}{2}} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - p_{i-\frac{1}{2}} \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right).$$

Po dosazení do (10.7) dostaneme

$$-\frac{1}{h^2} \left(p_{i+\frac{1}{2}}(y_{i+1} - y_i) - p_{i-\frac{1}{2}}(y_i - y_{i-1}) \right) + q_i y_i = f_i$$

a po úpravě máme soustavu lineárních algebraických rovnic

$$-p_{i-\frac{1}{2}} y_{i-1} + (p_{i-\frac{1}{2}} + p_{i+\frac{1}{2}} + h^2 q_i) y_i - p_{i+\frac{1}{2}} y_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Je to soustava lineárních algebraických rovnic s třídiagonální symetrickou maticí koeficientů. Dá se ukázat, že tato matice je regulární: Podle podmínek věty 10.4 je $p > 0$, $q \geq 0$. Matice je diagonálně dominantní pro $q > 0$ a proto podle věty 5.15 je regulární a existuje

²⁷Mějme rovnici

$$(-py')' + qy = f$$

a okrajové podmínky

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_n) = y_n.$$

V případě, že p je konstanta, máme rovnici

$$-py'' + qy = f.$$

Vydělením celé rovnice p dostaneme stejný tvar jako má rovnice (10.3). Jestliže budeme počítat přímo a nahradíme derivaci diferencí, potom dostaneme, při stejné označení jako dříve,

$$-p \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + q_i y_i = f_i$$

a po úpravě

$$-py_{i+1} + (2p + h^2 q_i) y_i - py_{i-1} = h^2 f_i.$$

Máme soustavu s reálnou symetrickou maticí. Jestliže je $p > 0$ a $q \geq 0$, potom jde o matici diagonálně dominantní a proto je soustava s ní jednoznačně řešitelná.

jediné řešení této soustavy. Bude k němu konvergovat Jacobiho iterační metoda i Gauss-Seidelova iterační metoda.

Pro $q \geq 0$ jde o symetrickou matici, která má minimálně první a poslední rovnici diagonálně ostře dominantní, u zbývajících platí neostrá diagonální dominantnost. I pro takovéto soustavy bude Gauss-Seidelova metoda konvergovat.

V případě $q \equiv 0$ máme rovnici $-(p(x)y')' = f(x)$ a dvojitou integrací dostaneme hledané řešení.

$$\begin{aligned} -(p(x)y')' &= f(x), \\ -p(x)y' &= \int f(x)dx + K, \end{aligned}$$

protože $p(x) > 0$ pro všechna x z I ,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{p(x)} \int f(x)dx + K, \\ y &= \int \left(\frac{1}{p(x)} \int f(x)dx + K \right) dx + C. \end{aligned}$$

Příklad 10.3 Metodou konečných diferencí s krokem $h = 0.25$ řešte na intervalu $I = [1; 2]$ úlohu

$$\begin{aligned} y'' - \frac{2}{x}y' - \frac{4}{x^2}y &= \frac{6}{x}, \\ y(1) &= 0, \quad y(2) = -1.5. \end{aligned}$$

Řešení: Funkce $f_1(x) = -2/x$ je na I spojitá. Proto podle věty 10.3 si rovnici převedeme na samoadjungovaný tvar, kde

$$p(x) = \exp \left(\int -\frac{2}{x} dx \right) = \exp \left(-2 \int \frac{dx}{x} \right) = \exp(-2 \ln x) = \exp(\ln x^{-2}) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

Dostáváme

$$-\left(\frac{y'}{x^2}\right)' + \frac{4}{x^4}y = -\frac{6}{x^3}. \quad (10.9)$$

Funkce $p = x^{-2}$, $p' = -2x^{-3}$, $q = 4x^{-4}$, $f = -6x^{-3}$ jsou spojitě na I , $p > 0$, $q > 0$, jsou tedy splněny všechny podmínky věty 10.4 a řešení této úlohy existuje a je právě jedno.

Po dosazení do (10.9) dostaneme soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\begin{array}{rrr} 1.4214y_1 & -0.5289y_2 & = -0.192 \\ -0.5289y_1 & +0.987y_2 & -0.37869y_3 = -0.11111 \\ & -0.37869y_2 & +0.68979y_3 = -0.496 \end{array}$$

Její řešení je $y_1 = -0.441$, $y_2 = -0.82349$, $y_3 = -1.1712$.

Tento numerický výsledek si můžete srovnat s analytickým řešením

$$y^*(x) = \frac{1}{x} - x,$$

potom je

$$y_1^* = -0.45, y_2^* = -0.83\bar{3}, y_3^* = -1.178.$$

Dosáhli jsme přesnosti 10^{-1} . Provedeme zmenšení kroku a výpočet opakujeme do té doby, než dosáhneme požadované přesnosti. T.j. pokud se hodnoty v uzlových bodech neustálí.

□

Mejme obecný případ *okražové úlohy* pro obyčejnou lineární diferenciální rovnici 2.řádu:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad (10.10)$$

kde $x \in [a, b]$, a_0, a_1, a_2, f jsou spojité funkce na $[a, b]$ a $a_0(x) \neq 0$ pro všechna x z intervalu $[a, b]$. Hledáme takové řešení rovnice (10.10), které na intervalu $I = [a, b]$ splňuje okrajové podmínky

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = d_0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = d_1, \quad (10.11)$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ jsou daná reálná čísla, $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$. Řešení hledáme jako spojitou funkci, která je na intervalu $[a, b]$ spojitě dvakrát diferencovatelná.

Postupujeme analogicky jako v předchozích případech. Označme $a_i(x_j) = a_{ij}, y(x_j) = y_j, h = \frac{b-a}{n}$. Derivace nahradíme diferencemi

$$y''(x_j) \approx \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2},$$

$$y'(x_j) \approx \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h}.$$

Dosazením do rovnice (10.10) dostaneme soustavu rovnic

$$\frac{a_{0j}}{h^2} (y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}) + \frac{a_{1j}}{2h} (y_{j+1} - y_{j-1}) + a_{2j}y_j = f_j$$

a po úpravě

$$y_{j-1} \left(\frac{a_{0j}}{h^2} - \frac{a_{1j}}{2h} \right) + y_j \left(-2\frac{a_{0j}}{h^2} + a_{2j} \right) + y_{j+1} \left(\frac{a_{0j}}{h^2} + \frac{a_{1j}}{2h} \right) = f_j. \quad (10.12)$$

Pokud odstraníme zlomky, dostaneme

$$y_{j-1} (2a_{0j} - ha_{1j}) + y_j (-4a_{0j} + 2h^2a_{2j}) + y_{j+1} (2a_{0j} + ha_{1j}) = 2h^2f_j. \quad (10.13)$$

V okrajových podmínkách (10.11) nahradíme derivaci v krajních bodech intervalu diferencí

$$y'(x_0) \approx \frac{1}{2h} (-3y_0 + 4y_1 - y_2),$$

$$y'(x_n) \approx \frac{1}{2h} (3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}).$$

Dosazením do počátečních podmínek dostaneme

$$\alpha_1 y_0 + \frac{\alpha_2}{2h} (-3y_0 + 4y_1 - y_2) = d_0, \quad (10.14)$$

$$\beta_1 y_n + \frac{\beta_2}{2h} (3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}) = d_1. \quad (10.15)$$

Rovnice (10.12), (10.14), (10.15) a nebo (10.13), (10.14), (10.15) nám tvoří soustavu $n+1$ rovnic o $n+1$ neznámých y_0, y_1, \dots, y_n . Jejím vyřešením získáme diskrétní aproximaci úlohy (10.10), (10.11).

Věta 10.5 *Nechť a_0, a_1, a_2, f jsou spojité funkce na intervalu $[a, b]$ takové, že platí $a_0(x) \geq c > 0, a_2(x) \leq 0$ na $[a, b]$ a dále $|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0, |\beta_1| + |\beta_2| > 0$. Potom má úloha (10.10), (10.11) právě jedno řešení a diskrétní aproximace získaná pomocí rovnic (10.12), (10.14), (10.15), respektive (10.13), (10.14), (10.15) konverguje k tomuto řešení.*

Příklad 10.4 *Metodou konečných diferencí řešte úlohu*

$$\begin{aligned} y'' - y &= x, \\ y(0) &= 1, \\ 2y(1) + 3y'(1) &= -1. \end{aligned}$$

Řešení: Volme $n = 4$, potom $h = 0.25$ a máme uzlové body $x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75, x_4 = 1$. Máme $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -1, f = x$, jsou tedy splněny požadavky věty 10.5 a po dosazení do (10.12) dostaneme soustavu

$$\begin{array}{cccccccl} -y_0 & +2.0625y_1 & & -y_2 & & & = & -0.015625 \\ & -y_1 & +2.0625y_2 & & -y_3 & & = & -0.031250 \\ & & -y_2 & +2.0625y_3 & -y_4 & & = & -0.046875 \end{array}$$

Z první okrajové podmínky vyplývá, že

$$y_0 = 1$$

a z druhé okrajové podmínky vyplývá, po dosazení do (10.15), rovnice

$$2y_4 + 6(3y_4 - 4y_3 + y_2) = -1.$$

Po úpravě dostaneme soustavu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2.065 & -1 & 0 & 0 & 0.984375 \\ -1 & 2.0625 & -1 & 0 & -0.031250 \\ 0 & -1 & 2.0625 & -1 & -0.046875 \\ 0 & 0 & -11.6250 & 14 & -1.281250 \end{array} \right),$$

s třídiagonální maticí koeficientů, která je diagonálně dominantní. Jejím řešením je

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ y_1 &= 0.0688479 \\ y_2 &= 0.435612 \\ y_3 &= 0.241121 \\ y_4 &= 0.108782 \end{aligned}$$

Pokud porovnáme tuto aproximaci s analytickým řešením

$$y = \frac{4e+1}{5e^2+1}e^x + \frac{5e^2-4e}{5e^2+1}e^{-x} - x, \quad x \in [0, 1]$$

zjistíme, že chyba je $|\varepsilon| \leq 0.00546$. Vzhledem k velikosti kroku jde o velmi dobrou aproximaci. \square

Příklad 10.5 Řešte rovnici

$$-((1+x)y')' + (2-x)y = x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 8x + 1$$

s okrajovými podmínkami

$$y'(0) = 2y(0) + 1,$$

$$y(1) = 0.$$

Řešení: Naše úloha má i analytické řešení $\tilde{y} = x - x^3$, které můžeme použít pro porovnání s numerickým řešením.

Numerické řešení budeme hledat pomocí metody konečných diferencí. Volme $n = 2^k$, $k = 1, 2, \dots$, potom pro $k = 1$ máme $n = 2$ a dostaneme soustavu

$$\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 13.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ 4.8125 \end{pmatrix}.$$

Hodnotu $y_2 = y(1)$ známe. Řešením naší soustavy je

$$y_0 = -0,088068,$$

$$y_1 = 0,323864.$$

Pro $k = 2$ máme $n = 4$ a dostaneme soustavu

$$\begin{pmatrix} 27 & -18 & 0 & 0 \\ -18 & 41.75 & -22 & 0 \\ 0 & -22 & 49.5 & -26 \\ 0 & 0 & -26 & 57,25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.5 \\ 1.472656 \\ 4.8125 \\ 8.972656 \end{pmatrix}.$$

Řešením naší soustavy je

$$y_0 = -0,022, \quad y_1 = 0,216453, \quad y_2 = 0.362128, \quad y_3 = 0.321188.$$

A můžeme stejným způsobem pokračovat dále. \square

V aplikacích se objevují i obecnější rovnice, např.

$$-(p(x)y'(x))' + r(x)y'(x) + g(x)y(x) = f(x). \quad (10.16)$$

Tato rovnice popisuje mezi jiným i transport chemické příměsi v kapalině a proto se někdy označuje jako *difuzní rovnice*.

Člen ry' , který je zda navíc, ve srovnání s předchozím typem rovnic, aproximujeme výrazem

$$r(x_i)y'(x_i) = r_i \frac{y_i + 1 - y_{i-1}}{2h} + O(h^2).$$

Podosazení do (10.16) rovnice dostaneme soustavu

$$-\left(p_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}hr_i\right)y_{i-1} + \left(p_{i-\frac{1}{2}} + p_{i+\frac{1}{2}} + h^2g_i\right)y_i - \left(p_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}hr_i\right)y_{i+1} = h^2f_i.$$

Podmínky řešitelnosti rovnice (10.16) se opět svádí k podmínce řešitelnosti soustavy lineárních algebraických rovnic.

Způsob provedení diskretizace přímo ovlivňuje řešení. Ukážeme si to na příkladu.

Příklad 10.6 Pro $x \in \langle 0, l \rangle$ řešme rovnici

$$-pu'' + ru' = 0,$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0) = \alpha, \quad u(l) = \beta,$$

kde $p > 0, r \neq 0, \alpha \neq \beta$ jsou konstanty.

Naše úloha má přesné řešení

$$u(x) = \alpha + (\beta - \alpha) \frac{1 - e^{\frac{rx}{p}}}{1 - e^{\frac{r}{p}}}.$$

Jde to monotonní funkci, která je pro $\alpha < \beta$ rostoucí a pro $\beta < \alpha$ klesající.

Při hledání numerického řešení nahradíme derivace centrálními diferencemi a dostaneme

$$-p \frac{u_{i+1} - 2u_i - u_{i-1}}{h^2} + r \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 0.$$

Označme $\lambda = \frac{rh}{p}$, potom po úpravě dostaneme

$$-\left(1 + \frac{1}{2}\lambda\right)u_{i-1} + 2u_i - \left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right)u_{i+1} = 0.$$

Pro $\lambda = 2$ dostaneme řešení

$$u_i = u_{i-1},$$

neboli

$$u_i = \alpha \quad \text{pro } i < n,$$

$$u_n = \beta.$$

Pro $\lambda \neq 2$ dostaneme řešení

$$u_i = A + B \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\lambda}{1 - \frac{1}{2}\lambda} \right)^i,$$

kde konstanty A, B určíme z okrajových podmínek.

Pokud použijeme pro náhradu první derivace diferenci vzad, neboli

$$u' = \frac{u_i - u_{i-1}}{h},$$

potom dostaneme pro $r > 0$ (a tedy i $\lambda > 0$, protože podle předpokladů je $p > 0$ a h je velikost kroku, která je také kladná)

$$-p \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + r \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = 0$$

a po úpravě dostaneme

$$-(1 + \lambda)u_{i-1} + (2 + \lambda)u_i - u_{i+1} = 0.$$

Tato diferenční rovnice má řešení

$$u_i = C + D(1 + \lambda)^i,$$

které je ryze monotonní. Konstanty C, D určíme z okrajových podmínek.

V případě, že máme $r < 0$ postupujeme obdobně. První derivaci nahradíme diferencí vpřed, tj.

$$u' = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

a dostaneme

$$-p \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + r \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = 0.$$

V tomto případě je $\lambda < 0$, (protože podle předpokladů je $p > 0$ a h je velikost kroku, která je také kladná). Po úpravě potom dostaneme

$$-u_{i-1} + (2 - \lambda)u_i - (1 - \lambda)u_{i+1} = 0.$$

Tato diferenční rovnice má řešení

$$u_i = E + F(1 - \lambda)^i,$$

které je opě ryze monotonní. Konstanty E, F určíme z okrajových podmínek.

Poznámka 10.2 *První postup je použitelný jen pro krok, jehož délka splňuje podmínku*
 $|\lambda| < 2 \Rightarrow h < \frac{2p}{|r|}.$

10.5 Metoda konečných objemů

Jinou metodou pro řešení okrajových úloh je metoda konečných objemů.

Hledáme řešení rovnice

$$(-pu')' + qu = f, \tag{10.17}$$

kde $p > 0, q \neq 0$, na intervalu $\langle 0, l \rangle$ s krokem h . Opět budeme hledat řešení v jednotlivých uzlových bodech, kde máme $x_i = x_0 + ih = ih$, protože $x_0 = 0$ a jako obvykle $h = \frac{l}{n}$.

Ke každému i -tému kroku přiřadíme konečný objem B_i takto

a) Pro vnitřní uzly $B_i = \langle x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.

b) Pro hraniční uzly $B_0 = \langle 0, x_{\frac{1}{2}} \rangle$, $B_n = \langle x_{n-\frac{1}{2}}, x_n \rangle$. Potom

$$\langle 0, l \rangle = \bigcup_{i=0}^n B_i.$$

Vezmeme si naši rovnici (10.17) a budeme ji integrovat přes B_i .

$$\int_{B_i} [(-pu')' + qu] dx = \int_{B_i} f dx.$$

Předpokládejme nejdříve, že B_i přísluší vnitřnímu uzlu. Potom dostaneme

$$-pu' \Big|_{x=x_{i-\frac{1}{2}}}^{x=x_{i+\frac{1}{2}}} + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} qu dx = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f dx,$$

$$-pu'(x_i + \frac{1}{2}) - u'(x_i - \frac{1}{2}) + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} qu dx = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f dx.$$

Derivace nahradíme diferencemi

$$u'(x_i - \frac{1}{2}) = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + O(H^2),$$

$$u'(x_i + \frac{1}{2}) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + O(H^2),$$

hodnoty obou integrálů odhadneme pomocí obdelníkového pravidla, přitom budeme vždy vycházet ze středu intervalu. Neboli

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} qu dx = h q_i u_i + O(h^3),$$

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f dx = h f_i + O(h^3).$$

Dosadíme a po zanedbání chybových funkcí dostaneme po úpravě rovnici

$$-\frac{p_{i-\frac{1}{2}}}{h} u_{i-1} + \left(\frac{p_{i-\frac{1}{2}}}{h} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}}}{h} + h q_i \right) u_i - \frac{p_{i-\frac{1}{2}}}{h} u_{i+1} = h f_i.$$

Nechť máme zadané Newtonovy okrajové podmínky v bodech $x = 0$ a $x = l$. Potom pro B_0 máme

$$-pu' \Big|_{x=x_0}^{x=x_{\frac{1}{2}}} + \int_{x_0}^{x_{\frac{1}{2}}} qu dx = \int_{x_0}^{x_{\frac{1}{2}}} f dx.$$

Derivaci v bodě $x_{\frac{1}{2}}$ nahradíme diferencí

$$u'(x_{\frac{1}{2}}) = \frac{u_1 - u_0}{h} + O(h^2)$$

dosadíme za výraz $p(x_0)u'(x_0) \equiv p(0)u(0)$ podle okrajové podmínky a integrály počítáme podle obdelníkového pravidla přičemž budeme vycházet z levého konce intervalu, tj.

$$\int_{x_0}^{x_{\frac{1}{2}}} q u dx = \frac{1}{2} h q_0 u_0 + O(h^2),$$

$$\int_{x_0}^{x_{\frac{1}{2}}} f dx = \frac{1}{2} h f_0 + O(h^2).$$

Analogicky pro bod B_n , kde použijeme obdelníkové pravidlo a vycházíme z pravého konce intervalu.

Nakonec dostáváme soustavu lineárních algebraických rovnic, která je (vzhledem k podmínkám) jednoznačně řešitelná.

Můžeme použít i jiný postup, jehož základem je integrace podle lichoběžníkového pravidla. Vezmeme si opět naši rovnici (10.17) a budeme ji integrovat na intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ a dostaneme

$$\begin{aligned} -p u' \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q u dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f dx, \\ -p_{i+1} u'_{i+1} + p_i u'_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q u dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f dx. \end{aligned}$$

Derivace nahradíme diferencemi, tj.

$$u'_{i+1} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + O(h^2),$$

$$u'_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + O(h^2)$$

a integrály určíme podle lichoběžníkového pravidla

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} q u dx = \frac{q_{i+1} u_{i+1} + q_i u_i}{2} \cdot h + O(h^2),$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f dx = \frac{f_{i+1} + f_i}{2} \cdot h + O(h^2).$$

Po dosazení dostaneme

$$-p_{i+1} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right) + p_i \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) + \frac{q_{i+1} u_{i+1} + q_i u_i}{2} \cdot h = \frac{h}{2} (f_{i+1} + f_i).$$

Po úpravě dostáváme

$$\left(-\frac{p_{i+1}}{h} + \frac{h q_{i+1}}{2} \right) u_{i+1} + \left(\frac{p_{i+1}}{h} + \frac{p_i}{h} + \frac{h q_i}{2} \right) u_i + \left(-\frac{p_i}{h} \right) u_{i-1} = \frac{h}{2} (f_{i+1} + f_i).$$

Opět máme soustavu lineárních algebraických rovnic. Protože požaduje jednoznačnou řešitelnost, dostáváme podmínku $|q_i| \geq |q_{i+1}| \quad \forall i$. Pouze v tomto případě můžeme garantovat řešitelnost.

10.6 Příklady na procvičení

Metodou konečných diferencí s krokem h řešte následující okrajové úlohy:

Příklad 10.7 $y'' + \frac{1}{x}y' - x^4y = x$, $y(1) = 1$, $y(2) = 3$, $h = 0,25$

Úprava zadání: Řešte tutéž rovnici, avšak za podmínek $y(1) = 1$, $y(1,5) = 2$ a s krokem $h = 0,1$.

Úprava zadání: Řešte tutéž rovnici, avšak za podmínek $y(1) = 1$, $y(2) = 3$ a s krokem $h = 0,125$.

Příklad 10.8 $y'' + 2xy' - x^3y = x^2$, $y(0) = 1$; $y(1) = 2$, $h = 0,25$

Úprava zadání: Řešte tutéž rovnici, avšak za podmínek $y(0) = 1$; $y(1) = 3$ a s krokem $h = 0,25$.

Příklad 10.9 $y'' + \frac{1}{x}y' - e^xy = x^2$, $y(-1) = 1$; $y(1) = 2$, $h = 0,25$

Příklad 10.10 $xy'' - y = x^2 + 1$, $y(1) = 1$, $y(2) + 2y'(2) = 2$, $h = 0,25$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu, ovšem za počátečních podmínek $y(0) = 1$; $y(1) + 2y'(1) = 2$. Krok ponechte $h = 0,25$.

Příklad 10.11 $xy'' + y = x^2 + x - 1$, $y(1) = 1$, $y(2) + 2y'(2) = 2$, $h = 0,25$

Příklad 10.12 $e^xy'' + xy' - x^2y = x + e^x$, $y(0) + y'(0) = 1$, $2y(1) + 3y'(1) = 4$, $h = 0,25$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu, ovšem za počátečních podmínek $y(0) + y'(0) = 1$; $2y(0,5) + 3y'(0,5) = 4$. Krok ponechte na $h = 0,25$.

Příklad 10.13 $-y'' + \frac{1}{x}y = e^x + 1$, $y(-1) = 0$, $y(1) = 1$, $h = 0,5$

Příklad 10.14 $-y'' + e^{-x}y = \frac{x}{x^2-1}$, $y(0) = 1$, $y(2) = 2$, $h = 0,5$

Příklad 10.15 $-y'' + e^{-x}y = x$, $y(0) = 1$, $y(2) = 2$, $h = 0,5$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu, ale s krokem $h = 0,25$

10.7 Shrnutí

Zabývali jsme se hledáním řešení okrajových úloh pro diferenciální rovnice řádu aspoň dvě. Vysvětlili jsme si, že pouze pro ně má smysl hledat řešení okrajové úlohy.

Ukázali jsme si dva z možných přístupů.

Okrajovou úlohu lze převést na počáteční a hledat řešení počáteční úlohy některou z dříve probíraných metod - to je princip metody střílby.

Nebo lze na základě diskretizace proměnných převést okrajovou úlohu na řešení soustavy lineárních algebraických rovnic - to je princip metody konečných diferencí. Formulace úlohy a použití hraničních bodů nám zaručuje jednoznačnou řešitelnost soustavy. Najденé diskrétní řešení v limitě konverguje k přesnému řešení.

11 Metoda konečných prvků.

11.1 Úvod

Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře s další numerickou metodou pro nalezení řešení okrajové úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici.

Metoda konečných prvků je v současnosti velmi často používána při řešení celé řady nejrůznějších úloh v řadě aplikačních oblastí.

Na rozvoji metody konečných prvků se podílela celá řada vynikajících matematiků. Pro nás je důležité, že jako první dokázal konvergenci metody konečných prvků v roce 1968 prof. RNDr. Miloš Zlámal, DrSc. pracovník VUT v Brně.

Metoda konečných prvků se používá takřka výhradně pro řešení úloh z parciálními diferenciálními rovnicemi. Při použití na řešení okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice dává, při splnění podmínek konvergence, stejný výsledek jako metoda konečných diferencí. My se jí ale budeme přesto zabývat, protože v jednodimenzionálním případě je základní princip metody snáze pochopitelný.

11.2 Základní pojmy

Vznikla při řešení okrajových úloh rovinné pružnosti. Její princip je, že se rovinná oblast rozdělí na vhodné části, nazývané konečné prvky – obvykle to bývají nepřekrývající se trojúhelníky, a celá oblast se pak chápe jako konečný systém prvků, které na sebe vzájemně působí. V této podobě se metoda konečných prvků objevila v inženýrské praxi. Brzy se ukázalo, že jde o variantu Rietzovy metody, ale název jí už zůstal původní.

Např. celková energie soustavy, která je popsána parciální diferenciální okrajovou úlohou eliptického typu, je dána integrálem, který se proto nazývá energetický. Řešení úlohy pak má tu vlastnost, že tomuto integrálu dává nejmenší hodnotu. Vidíme tedy, že původní okrajová úloha je ekvivalentní s určením takové funkce, která by minimalizovala zmíněný funkcional. Jde o variační formulaci úlohy.

V případě funkcí jedné proměnné se jedná o nalezení funkce y splňující určité okrajové podmínky a pro níž je funkcional

$$F(y) = \int_a^b g(x, y, y') dx \quad (11.1)$$

minimální. K přibližnému řešení se užívá Rietzova metoda. Řešení hledáme ve tvaru

$$v(x) = \varphi(x) + \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot b_j(x),$$

kde φ splňuje okrajové podmínky, $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \beta$ a kde b_j jsou lineárně nezávislé (bázové) funkce splňující homogenní okrajové podmínky (t.j. jsou nulové na dané hranici). Protože φ splňuje okrajové podmínky a funkce b_j jsou na hranicích nulové, tak i funkce v splňuje okrajové podmínky. Po dosazení do funkcionalu (11.1) dostaneme

$$F(v) = \Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

tedy funkci n proměnných a hledáme nyní její minimum metodami matematické analýzy.

Je jasné, že obecně neplatí $v(x) = y(x)$, protože $v(x)$ má speciální tvar určený jejími báзовými funkcemi. Můžeme tedy pouze očekávat $v(x) \approx y(x)$. Přesnost je přitom přímo závislá na volbě báзовých funkcí a na jejich počtu. Metodu konečných prvků dostaneme speciální volbou báзовých funkcí.

Mějme úlohu na intervalu $[a, b]$, $a < b$,

$$-y'' + \sigma(x)y = f(x), \quad \sigma(x) \geq 0, \quad (11.2)$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \quad (11.3)$$

Existenci a jednoznačnost řešení jsme si ukázali už dříve.

Nejdříve převedeme tuto okrajovou úlohu na variační úlohu:

Nechť $w(x)$ je libovolná funkce, která má po částech spojitou první derivaci a splňuje okrajové podmínky, t.j. $w(a) = \alpha$, $w(b) = \beta$. Sestrojíme si funkcional

$$F(w) \equiv \frac{1}{2} \int_a^b ([w'(x)]^2 + \sigma(x)w^2(x) - 2w(x)f(x)) dx \quad (11.4)$$

a ukážeme, že funkce, která jej minimalizuje, je řešením naší úlohy (11.2), (11.3).

Nechť $w(x) = y(x) + \varepsilon(x)$, kde $y(x)$ je řešením okrajové úlohy (11.2) a $\forall x \in I : \varepsilon(x) \geq 0$. Potom po dosazení máme po úpravě

$$F(w) = F(y) + \int_a^b (\varepsilon'y' + \varepsilon\sigma y - \varepsilon f) dx + \frac{1}{2} \int_a^b ([\varepsilon']^2 + \sigma\varepsilon^2) dx. \quad (11.5)$$

První člen prvního integrálu integrujeme “per partes”

$$\begin{aligned} \int_a^b \varepsilon'y' dx &= \left| \begin{array}{cc} u = y' & u' = y'' \\ v' = \varepsilon' & v = \varepsilon \end{array} \right| = \varepsilon y' \Big|_a^b - \int_a^b \varepsilon y'' dx = \\ &= \varepsilon(b)y'(b) - \varepsilon(a)y'(a) - \int_a^b \varepsilon y'' dx. \end{aligned}$$

Takže celý první integrál z (11.5) si přepíšeme na tvar

$$\varepsilon(b)y'(b) - \varepsilon(a)y'(a) + \int_a^b \varepsilon(-y'' + \sigma y - f) dx$$

a celý tento výraz je roven nule, neboť y je řešením úlohy (11.2), (11.3) a $\varepsilon(a) = \varepsilon(b) = 0$, protože $\varepsilon = w - y$ a funkce w a y splňují tytéž okrajové podmínky. Takže z (11.5) máme

$$F(w) = F(y) + \frac{1}{2} \int_a^b ([\varepsilon'(x)]^2 + \sigma\varepsilon^2) dx \geq F(y),$$

protože pod integrálem je nezáporná funkce. Takže y skutečně minimalizuje funkcional F v množině dostatečně hladkých funkcí $w(x)$ splňujících tytéž okrajové podmínky.

Omezíme se při hledání minima v funkce F na množinu spojitých, po částech lineárních funkcí a na případ ekvidistantních uzlů

$$x_j = x_0 + jh, \quad h = \frac{b-a}{n+1}, \quad v_0 = \alpha, \quad v_{n+1} = \beta, \quad v_j = v(x_j).$$

Protože lomená čára je jednoznačně určena svými vrcholy, budeme hledat funkci v ve tvaru

$$v(x) = \sum_{j=0}^n v_j \cdot b_j(x),$$

kde v_j jsou konstanty a báze funkce $b_j(x)$ jsou dány předpisem

$$b_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{j-1}), & x \in [x_{j-1}, x_j], \\ -\frac{1}{h}(x - x_{j+1}), & x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Z této definice plyne, že $b_j(x_j) = 1$, $b_j(x_k) = 0 \forall k \neq j$. Zvláště je důležité, že funkce b_j má velmi malý nosič – je nenulová jen na intervalu (x_{j-1}, x_{j+1}) .

V případě $b_0(x)$, $b_{n+1}(x)$ bereme do úvahy pouze tu část, která leží uvnitř intervalu $[a, b]$. Protože derivace $v'(x)$ je po částech konstantní $v'(x) = \frac{1}{h}(v_{j+1} - v_j)$, $x \in [x_j, x_{j+1}]$, tak

$$\begin{aligned} \int_a^b (v'(x))^2 dx &= \sum_{j=0}^n \int_{x_j}^{x_{j+1}} (v'(x))^2 dx = \frac{1}{h^2} \sum_{j=0}^n \underbrace{(x_{j+1} - x_j)}_{=h} (v_{j+1} - v_j)^2 = \\ &= \frac{1}{h} \sum_{j=0}^n (v_{j+1} - v_j)^2. \end{aligned}$$

Dosazením $v(x)$ a $v'(x)$ do rovnice (11.4) dostaneme

$$F(v) = \frac{1}{2h} \sum_{j=0}^n (v_{j+1} - v_j)^2 + \frac{1}{2} \int_a^b \sigma(x) v^2(x) dx - \int_a^b v(x) f(x) dx.$$

F je nyní kvadratickou funkcí parametrů v_1, v_2, \dots, v_n . Hledáme nyní minimum této funkce

$$\frac{\partial F}{\partial v_i} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Toto je soustava lineárních rovnic.

Přitom se v_j objevuje pouze ve sčítancích s indexem $j-1, j$. Takže máme

$$\frac{\partial v}{\partial v_j} = b_j(x),$$

a tedy

$$\frac{\partial(v^2)}{\partial v_j} = 2v \frac{\partial v}{\partial v_j} = 2v \cdot b_j(x).$$

Odtud ovšem plyne, že se stačí omezit na interval $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, protože mimo něj je funkce b_j nulová.

Dostáváme tedy soustavu pro $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\frac{1}{h}(2v_i - v_{i-1} - v_{i+1}) + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \sigma(x)v(x)b_i(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)b_i(x)dx.$$

Toto je opět soustava s třídiagonální maticí.

Když si ještě uvědomíme, že

$$v(x)b_i(x) = \left(\sum_{j=0}^n v_j b_j(x)\right)b_i(x) = v_i b_i^2(x) + v_{i-1} b_{i-1}(x)b_i(x) + v_{i+1} b_{i+1}(x)b_i(x).$$

A protože báze funkce známe, tak známe i tyto koeficienty.

V případě, že $\sigma(x) \equiv 0$ dostaneme tentýž výsledek jako metodou konečných diferencí.

11.3 Shrnutí

Seznámili jsme se s další numerickou metodou pro nalezení řešení okrajové úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici - s metodou konečných prvků, která je v současnosti velmi často používána při řešení celé řady nejrůznějších úloh v řadě aplakačních oblastí.

Na rozvoji metody konečných prvků se podílela celá řada vynikajících matematiků. Pro nás je důležité, že první dokázal konvergenci metody v roce 1968 profesor Miloš Zlámal, pracovník VUT Brno. Na dalším rozvoji metody se podíleli například prof. A. Ženíšek z FSI VUT, prof F. Melkes z FEKT VUT, prof. M. Krížek z MU AV ČR a mnoha dalších.

Ačkoliv se metoda konečných prvků používá především pro řešení úloh z parciálními diferenciálními rovnicemi, zabývali jsme se jí, protože v jednodimenzionálním případě je základní princip metody snáze pochopitelný.

12 Parciální diferenciální rovnice

12.1 Úvod

V předchozích kapitolách jsme se zabývali obyčejnými diferenciálními rovnicemi. Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře se základy teorie parciálních diferenciálních rovnic. Stanovíme si co budeme rozumět řešením parciální diferenciální rovnice a jaké úlohy budeme řešit.

Potom se zaměříme na parciální diferenciální rovnice prvního řádu. Zformulejeme si požadavky na počáteční úlohu pro parciální diferenciální rovnici prvního řádu.

Ukážeme si způsoby řešení nejjednodušších parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu.

Dále se seznámíme čtenáře s numerickými metodami řešení parciálních diferenciálních rovnic.

12.2 Základní pojmy

Definice 12.1 *Parciální diferenciální rovnici rozumíme rovnici, která obsahuje neznámou funkci více proměnných a její parciální derivace.*

Řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje, se nazývá řádem dané rovnice.

Řešením parciální diferenciální rovnice rozumíme každou funkci, která je definovaná v zadané oblasti, včetně svých parciálních derivací, až do řádu rovnice včetně, a vyhovuje dané rovnici v zadané oblasti.

Obecný tvar parciální diferenciální rovnice je

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}, \dots\right) = 0. \quad (12.1)$$

Příklad 12.1 *Hledejme funkci u , která vyhovuje rovnici*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (12.2)$$

Máme tedy parciální diferenciální rovnici prvního řádu. Jejím řešením je funkce

$$u(x, y) = x - y + \pi,$$

protože

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1,$$

v každém bodě roviny Oxy . Číslo π můžeme nahradit jiným libovolným reálným číslem.

Řešením bude i funkce

$$u(x, y) = \alpha x - \alpha y + \beta,$$

pro libovolná $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, protože

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\alpha,$$

v každém bodě roviny Oxy .

Obdobně se můžeme přesvědčit, že řešením bude i funkce

$$u(x, y, z) = x - y + z,$$

protože

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Lehce si ověříme, že řešením bude i každá funkce

$$u(x, y, z) = x - y + f(z),$$

kde f je libovolná funkce proměnné z .

Z uvedeného příkladu plyne jeden podstatný rozdíl mezi parciálními rovnicemi a obyčejnými diferenciálními rovnicemi. Ze zápisu obyčejné diferenciální rovnice $y' = x + y$ poznáme okamžitě, že hledaná funkce y závisí pouze na x . Ze zápisu parciální rovnice (12.2) nepoznáme na kolika proměnných závisí řešení. Víme, že hledaná funkce u závisí na proměnných x, y , ale nevíme, zda se jedná o funkci dvou, tří či více proměnných.

Přijmeme proto hned na místě úmluvu, že řešení dané parciální rovnice budeme hledat pouze mezi funkcemi těch proměnných, které se přímo v rovnici vyskytují. Bude-li hledaná neznámá funkce záviset i na proměnných, které se v rovnici nevyskytují, bude to při zápisu rovnice výslovně zdůrazněno.

Příklad 12.2 Hledáme funkci dvou proměnných $u(x, y)$, která vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (12.3)$$

Máme parciální diferenciální rovnici druhého řádu. Jejím řešením je funkce

$$u(x, y) = x^2 - y^2,$$

protože

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2,$$

v každém bodě roviny Oxy .

Obdobně se můžeme přesvědčit, že řešením budou i funkce

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + ax + by, \quad a, b \in R,$$

a nebo

$$u(x, y) = e^x \sin y.$$

Odtud nám plyne, že určení řešení parciální diferenciální rovnice bude obtížnější, než u obyčejných diferenciálních rovnic.

Podobně jako u obyčejných diferenciálních rovnic máme i u parciálních rovnic dva základní problémy

1. Najít obecné řešení dané parciální rovnice = najít všechna řešení.
2. Najít takové řešení dané parciální rovnice, které vyhovuje některým doplňujícím podmínkám (které obvykle plynou z daného technického problému, který řešíme a nebo jsou součástí zadání matematického úkolu, jako další *trápení lidu studentského*).

Ukážeme si později, že najít obecné řešení parciální rovnice je mnohem těžší než u obyčejných diferenciálních rovnic. Proto se u parciálních rovnic studují častěji problémy s dodatečnými podmínkami.

12.3 Parciální diferenciální rovnice prvního řádu

Definice 12.2 *Rovnici*

$$f\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \quad (12.4)$$

nazýváme parciální diferenciální rovnici prvního řádu, kde funkce $f(x, y, u, p, q)$ je definovaná na otevřené množině D proměnných x, y, u, p, q .

Definice 12.3 Řešením rovnice (12.4) v oblasti G proměnných x, y nazveme každou takovou funkci u , definovanou a spojitou v G , pro kterou platí:

1. Funkce u má v oblasti G spojitě parciální derivace prvního řádu.
2. Pro každé $(x, y) \in G$ platí, že $\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \in D$.
3. Funkce $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ splňují rovnici (12.4).

Příklad 12.3 *Rovnice*

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0$$

má řešením funkci

$$u = \frac{1}{x^2 + y^2},$$

která je definována v oblasti $G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \neq 0\}$ (neboli funkce u je definována pro všechny body roviny Oxy kromě počátku, t.j. bodu $(0, 0)$).

Příklad 12.4 *Rovnice*

$$u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \ln(xy) = \frac{x^2 + y}{x^2 y} \ln(xy)$$

má jedním z řešení funkci $u = \ln(xy)$, která je definována v oblasti $G = \{(x, y) : xy > 0\}$, neboli u je definována pro všechny vnitřní body prvního a třetího kvadrantu roviny Oxy .

Poznámka 12.1 Pro určení řádu rovnice je rozhodující, jakého řádu jsou parciální derivace, které se v ní vyskytují, ne mocniny těchto derivací.

12.4 Formulace počáteční úlohy.

U obyčejných diferenciálních rovnic jsme vždy hledali obecné řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$. U parciálních diferenciálních rovnic bude situace složitější.

Definice 12.4 *Cauchyovou úlohou pro rovnici (12.4) rozumíme dvojici: rovnici*

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \quad (12.5)$$

a počáteční křivku Θ zadanou parametricky

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad t \in (a, b). \quad (12.6)$$

Funkci $z = h(x, y)$, která má spojité parciální derivace v G , nazveme řešením Cauchyovy úlohy (12.5), (12.6), jestliže funkce h splňuje v G rovnici (12.5) a pro všechna $t \in (a, b)$ křivka $(x = \varphi(t), y = \psi(t))$ leží v G a navíc platí $\chi(t) = h(\varphi(t), \psi(t))$.

O křivce Θ budeme všude dále předpokládat, že je hladká a jednoduchá.

12.5 Nejjednodušší příklady parciálních rovnic prvního řádu

12.5.1 Rovnice typu $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 0$.

Řešením rovnice

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (12.7)$$

je buď libovolná konstanta a nebo libovolná funkce závisající pouze na proměnné y , která bude mít spojité parciální derivace,

$$z(x, y) = h(y). \quad (12.8)$$

Podívejme se, jaký je geometrický význam rovnice (12.7).

V prostoru $Oxyz$ jde o rovnici válcové plochy, jejíž přímky jsou kolmé na rovinu Oyz a jsou tedy rovnoběžné s x -ovou souřadnicovou osou.

Potom lze lehce řešit Cauchyovu úlohu pro rovnici (12.7). Máme-li danou křivku Θ , potom každým bodem křivky vedeme přímku rovnoběžnou s osou x . Dostaneme tak válcovou plochu, která je zřejmě řešením rovnice (12.7) a prochází křivkou Θ .

Křivka Θ přitom může být i prostorová, t.j. nepožadujeme, aby byla závislá pouze na proměnné y .

Vraťme se nyní zpět k analytickému řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici (12.7).

Nechť je křivka Θ zadána parametricky

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad a < t < b.$$

Předpokládejme, že pro funkce $\psi(t), \chi(t)$ platí, že mají spojité derivace v intervalu (a, b) a že funkce $\psi(t)$ je ryze monotónní, potom pro ni existuje funkce inverzní $\psi^{-1}(t)$ taková, že $\psi(\psi^{-1}(y)) = y$.

Předpokládejme, že existuje řešení $z = H(y)$ Cauchyovy úlohy pro rovnici (12.7) a že známe křivku Θ . Potom dosazením zjistíme, že platí

$$\chi(t) = H(\psi(t)). \quad (12.9)$$

Dosadíme do této rovnice $t = \psi^{-1}(y)$, dostaneme

$$\chi(\psi^{-1}(y)) = H(y), \quad (12.10)$$

a protože $H(y) = z$, máme

$$\chi(\psi^{-1}(y)) = z.$$

Tím máme dokázanou jednoznačnost Cauchyovy úlohy.

Z druhé strany, definujeme funkci H pomocí rovnosti (12.10). Potom ale platí

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0,$$

neboli funkce (12.10) je řešením rovnice (12.7) a současně platí (12.9), což znamená, že řešení prochází křivkou Θ .

Příklad 12.5 Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

které prochází křivkou

$$x = t, \quad y = t^3, \quad z = t^2, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Řešení: Podle (12.10) platí, že jediným řešením této úlohy je

$$z = \chi(\psi^{-1}(y)).$$

V našem případě máme

$$\chi(t) = t^2, \quad \psi^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}.$$

Řešením je proto

$$z = \sqrt[3]{y^2}.$$

□

Příklad 12.6 Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

které prochází křivkou

$$x = 0, \quad z = y^2, \quad y \in (-1, 1).$$

Řešení: Křivka Θ je v našem případě parabola, která leží v rovině Oyz . Podle předchozího platí, že řešením je válcová plocha, která prochází křivkou Θ a je rovnoběžná s x -ovou osou, takže

$$z = y^2$$

je řešením. □

Poznámka 12.2

1. Zcela analogicky jako rovnice $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ se řeší rovnice

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 0.$$

2. Předpoklad existence inverzní funkce ψ^{-1} je nezbytný pro existenci a jednoznačnost řešení. Pokud není splněn, Cauchyova úloha nemusí být řešitelná a nebo může mít nekonečně mnoho řešení.
3. Postup použitý při hledání řešení rovnice (12.7) můžeme zobecnit i pro parciální diferenciální rovnici více než dvou proměnných

$$\frac{\partial z(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} = 0 \quad i = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Řešením této rovnice bude funkce $z = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, která nezávisí na x_i .

12.5.2 Rovnice typu $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = f(x, y)$.

Řešení rovnice

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = f(x, y), \tag{12.11}$$

za předpokladu, že $f(x, y)$ je spojitá funkce v oblasti G , je dáno vztahem

$$z = \int f(x, y) dx + H(y). \tag{12.12}$$

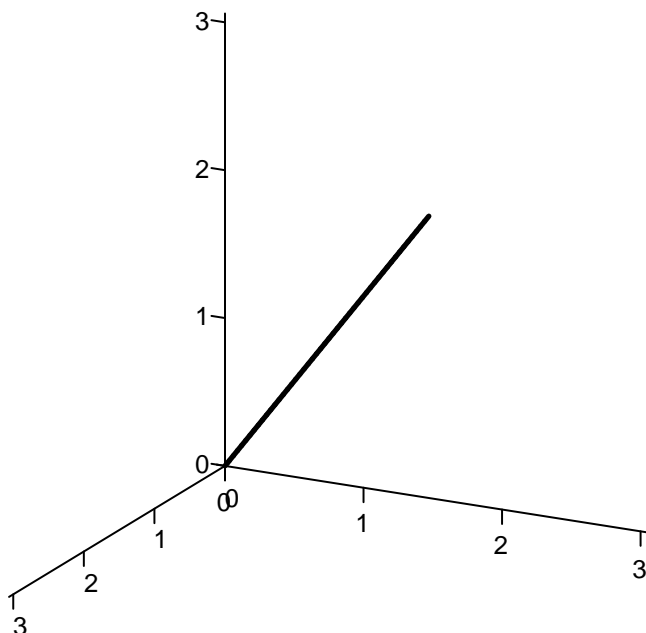
Důkaz existence a jednoznačnosti řešení se provádí stejně jako v předchozím případě.

Příklad 12.7 Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^2 + xy - y^2,$$

které prochází křivkou

$$x = t, \quad y = t, \quad z = t, \quad t > 0.$$



Obrázek 12.1: Počáteční křivka z příkladu 12.7

Řešení: Křivka Θ je v našem případě osou prvního oktantu. Viz obrázek 12.1.

Řešení získáme integrací podle proměnné x :

$$z = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2y}{2} - xy^2 + H(y).$$

Řešení musí procházet počáteční křivkou Θ . Dosazením za x, y, z parametrické vyjádření křivky Θ , dostaneme, že musí platit

$$t = \frac{t^3}{3} + \frac{t^3}{2} - t^3 + H(t).$$

Odtud dostáváme

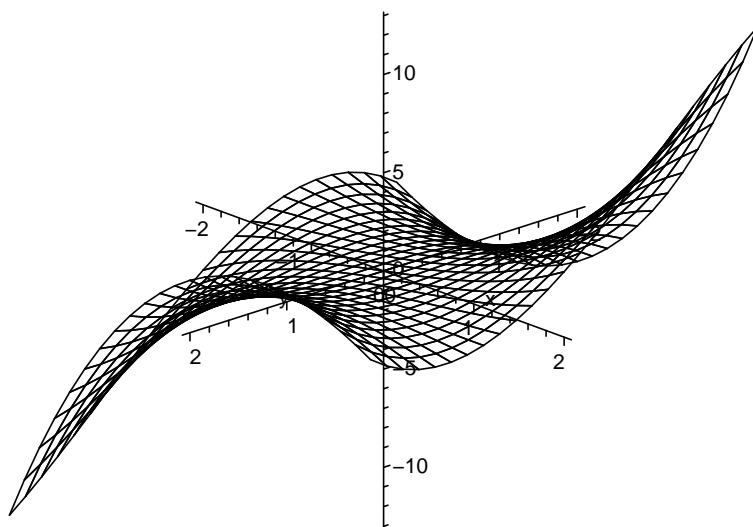
$$H(t) = t + \frac{t^3}{6}.$$

Řešením naší úlohy je funkce

$$z = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2y}{2} - xy^2 + y + \frac{y^3}{6}.$$

Povšimněte si, že řešením je plocha. Viz obrázek 12.2.

□



Obrázek 12.2: Zobrazení řešení příkladu 12.7

Hledejme nyní řešení rovnice (12.11), které vyhovuje podmínce

$$z(0, y) = \omega(y). \quad (12.13)$$

Neboli řešení $z = z(x, y)$ má procházet křivkou

$$x = 0, \quad z = \omega(y),$$

která leží v rovině Oyz . Podle vzorce (12.12) má řešení tvar

$$z(x, y) = \int_0^x f(\xi, y) d\xi + H(y). \quad (12.14)$$

Dosadíme do této rovnice podle podmínky (12.13) hodnotu $x = 0$, dostaneme

$$\omega(y) = H(y).$$

Hledané řešení má proto tvar

$$z(x, y) = \int_0^x f(\xi, y) d\xi + \omega(y).$$

Příklad 12.8 Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 3x^2 + y \sin x,$$

které prochází křivkou $z(0, y) = y^3$.

Řešení: Podle předchozího můžeme hned psát

$$z(x, y) = \int_0^x (3\xi^2 + y \sin \xi) d\xi + y^3.$$

Po integraci dostaneme řešení ve tvaru

$$z(x, y) = x^3 + y^3 + y(1 - \cos x).$$

□

Poznámka 12.3

1. Analogicky jako rovnice $\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y)$ se řeší i rovnice $\frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y)$.
2. Obdobně jako u rovnice $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ i u rovnice $\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y)$ se může stát, že rovnice nemá řešení a nebo je řešení nekonečně mnoho.

12.5.3 Rovnice typu $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = f_1(x) \cdot f_2(z)$.

Mějme rovnici

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = f_1(x) \cdot f_2(z), \quad (12.15)$$

kde funkce f_1 je spojitá na intervalu (a, b) a f_2 je spojitá a nenulová na intervalu (c, d) .

Řešení parciální rovnice (12.15) je analogické řešení obyčejné diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} &= f_1(x) \cdot f_2(z), \\ \int \frac{1}{f_2(z)} dz &= \int f_1(x) dx + H(y). \end{aligned}$$

Označme $F_1(x) = \int f_1(x) dx$, $F_2(z) = \int \frac{1}{f_2(z)} dz$, potom můžeme předchozí rovnici přepsat na tvar

$$F_2(z) = F_1(x) + H(y).$$

Pokud je funkce F_2 ryze monotonní, potom můžeme z rovnice vypočítat funkci z a dostaneme

$$z(x, y) = F_2^{-1}[F_1(x) + H(y)]. \quad (12.16)$$

Přitom musíme požadovat, aby funkce $F_1(x) + H(y)$ ležela v definičním oboru funkce F_2^{-1} . Pouze tehdy má řešení smysl.

Příklad 12.9 Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = x \cdot e^z \quad (12.17)$$

Řešení: Rovnici si upravíme podle předchozího.

$$F_1(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2},$$

$$F_2(z) = \int e^{-z} dz = -e^{-z}$$

Po dosazení máme

$$-e^{-z} = \frac{x^2}{2} + H(y).$$

Protože na pravé straně máme ryze monotonní funkci, můžeme rovnici rozřešit vzhledem k z a dostaneme

$$z = -\ln\left(-\frac{x^2}{2} - H(y)\right), \quad (12.18)$$

což je řešení rovnice (12.17). Výraz bude mít smysl pouze pro

$$\left(-\frac{x^2}{2} - H(y)\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x^2}{2} + H(y)\right) < 0.$$

□

Pokud v rovnici (12.15) neplatí podmínka $f_2(z) \neq 0$, potom mohou existovat i řešení, která nezískáme pomocí vztahu (12.16).

Příklad 12.10 Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z. \quad (12.19)$$

Řešení: Rovnici (12.19) si upravíme podle předchozího postupu (viz 12.16).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z,$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int dx,$$

$$\ln z = x + H(y),$$

$$z = e^{x+H(y)},$$

$$z = K(y)e^x,$$

kde $K(y) = e^{H(y)}$.

Rovnice (12.19) má ale ještě řešení $z = 0$, které nezískáme žádnou volbou funkce $H(y)$, respektive $K(y)$. □

Právě uvedený postup můžeme použít i pro ty rovnice, které obsahují pouze jednu parciální derivaci, tedy pro rovnice tvaru

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = \varphi(x, y, z)$$

a nebo

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = \psi(x, y, z).$$

Vztah (12.16) můžeme použít i pro řešení Cauchyovy úlohy pro odpovídající typy rovnic. Protože obecný postup by byl příliš nepřehledný, ukážeme si použití na příkladech.

12.6 Řešené příklady

Příklad 12.11 *Určete řešení Cauchyovy úlohy*

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = z(x, y),$$

$$z(0, y) = y^2.$$

Řešení: Máme stejnou rovnici jako v předchozím příkladu (12.10). Řešení proto bude mít tvar

$$z(x, y) = K(y)e^x.$$

Dosadíme do něj $x = 0$ a dostaneme

$$z(0, y) = y^2 = K(y).$$

Řešením Cauchyovy úlohy je proto funkce

$$z(x, y) = y^2 e^x.$$

□

Příklad 12.12 *Určete řešení Cauchyovy úlohy*

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = ax + by + c \cdot z(x, y) + d,$$

$$z(0, y) = y^3 + 2y,$$

kde a, b, c, d jsou konstanty, přičemž $c \neq 0$.

Řešení: Prohlásíme y za konstantu a řešíme parciální rovnici jako obyčejnou diferenciální rovnici.

$$\frac{dz}{dx} - c \cdot z = ax + by + d.$$

Použijeme metodu variace konstanty. Nejdříve řešíme homogenní rovnici (o pravé straně předpokládáme že je rovna nule).

$$\frac{dz}{dx} - c \cdot z = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} = c \cdot z,$$

$$\frac{dz}{z} = c \, dx.$$

$$\ln z = cx + K,$$

$$z = L e^{cx},$$

kde $L = e^K$. Nyní předpokládáme, že $L = L(x)$. Potom

$$\begin{aligned} z' &= L'e^{cx} + Lce^{cx}, \\ L'e^{cx} + Lce^{cx} &= ax + by + cLe^{cx} + d, \\ L'e^{cx} &= ax + by + d, \\ L' &= (ax + by + d)e^{-cx}. \end{aligned}$$

Integrací *per partes* dostaneme

$$\left| \begin{array}{ll} u = ax + by + d & u' = a \\ v' = e^{-cx} & v = e^{-cx} \cdot \left(\frac{-1}{c} \right) \end{array} \right|$$

$$L = (ax + by + d)e^{-cx} \cdot \left(\frac{-1}{c} \right) + \frac{a}{c} \int e^{-cx} dx,$$

$$L = (ax + by + d)e^{-cx} \cdot \left(\frac{-1}{c} \right) - \frac{a}{c^2} e^{-cx} + M.$$

Po dosazení dostaneme řešení ve tvaru

$$z = -\frac{1}{c}(ax + by + d) - \frac{a}{c^2} + Me^{cx}.$$

Tím jsme získali řešení diferenciální rovnice. Pro řešení parciální rovnice je nutné místo konstanty M brát funkci $H(y)$.

$$z = -\frac{1}{c}(ax + by + d) - \frac{a}{c^2} + H(y)e^{cx}.$$

Nyní najdeme řešení, které vyhovuje naší počáteční podmínce. Dosazením do předchozí rovnice hodnoty $x = 0$ dostaneme

$$y^3 + 2y = -\frac{b}{c}y - \frac{d}{c} - \frac{a}{c^2} + H(y),$$

a odtud plyne

$$H(y) = y^3 + 2y + \frac{b}{c}y + \frac{d}{c} + \frac{a}{c^2}.$$

Řešením Cauchyovy úlohy je tedy funkce

$$z = -\frac{1}{c}(ax + by + d) - \frac{a}{c^2} + \left(y^3 + \left(2 + \frac{b}{c} \right) y + \frac{d}{c} + \frac{a}{c^2} \right) e^{cx}.$$

□

12.7 Cvičení

Příklad 12.13 Najděte funkci $z = z(x, y)$, vyhovující diferenciální rovnici

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 1.$$

Řešení: Řešením úlohy je funkce

$$z(x, y) = x + \varphi(y),$$

kde $\varphi(y)$ je libovolná funkce.

Příklad 12.14 Najděte funkci $z = z(x, y)$, vyhovující diferenciální rovnici

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = x + y.$$

Řešení: Řešením úlohy je funkce

$$z(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y),$$

kde $\varphi(y)$ je libovolná funkce.

12.7.1 Lineární homogenní parciální rovnice prvního řádu

Definice 12.5 Lineární parciální diferenciální rovnici nazveme výraz

$$a(x, y) \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = c(x, y) \cdot z(x, y) + d(x, y), \quad (12.20)$$

kde a, b, c, d jsou funkce proměnných x, y definované na otevřené množině G .

Jestliže $c(x, y) \equiv 0, d(x, y) \equiv 0$, potom se rovnice (12.20) nazývá homogenní.

Pokud je $a \equiv 0$ a nebo $b \equiv 0$ můžeme použít pro řešení dříve uvedené metody. Pokud jsou obě funkce nenulové, musíme hledat řešení jinými metodami, které se probírají například v předmětu MDRE.

12.8 Shrnutí

Uvedli jsme si základní pojmy z teorie parciálních diferenciálních rovnic, co je řešení a jaké okrajové podmínky se používají.

Ukázali jsme si nejjednodušší metody pro řešení parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu.

13 Parciální diferenciální rovnice druhého řádu

13.1 Úvod

Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře se základy teorie parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Stanovíme si co budeme rozumět řešením parciální diferenciální rovnice a jaké úlohy budeme řešit.

Dále se seznámíme čtenáře s numerickými metodami řešení parciálních diferenciálních rovnic.

Připomeneme si klasifikaci lineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu a jejich rozdělení na rovnice eliptické, parabolické a hyperbolické, dále větu o transformaci, která nám zajišťuje, že každou lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu můžeme lokální transformací převést na kanonický tvar.

Pro hledání řešení budeme používat metodu konečných diferencí. Opět jde o diskretizaci proměnných, přitom krok nemusí být na stejný na obou souřadnicových osách.

Ukážeme si použití metody konečných diferencí pro různé typy rovnic.

13.2 Klasifikace rovnic na hyperbolické, parabolické a eliptické

Definice 13.1 *Parciální diferenciální rovnici druhého řádu dvou proměnných rozumíme rovnici*

$$F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Definice 13.2 *Parciální diferenciální rovnici druhého řádu tří proměnných rozumíme rovnici*

$$\Phi\left(x, y, z, u(x, y, z), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0.$$

Příklad 13.1 *Parciální diferenciální rovnice druhého řádu se často používají při popisu fyzikálních a technických dějů a procesů. Následují některé parciální rovnice, které se používají v elektrotechnice a příbuzných oborech.*

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Laplaceova rovnice (elektrostatické pole),}$$

$$\Delta u = f \quad \text{Poissonova rovnice (elektrostatické pole s volnými náboji),}$$

$$\Delta u = a^2 u \quad \text{Helmholtzova rovnice (stacionární vlnová rovnice),}$$

$$\Delta u = a \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{difusní rovnice ,}$$

$$\Delta u = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{vlnová rovnice (šíření elektromagnetických vln),}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -J, \quad v = v(|\text{grad } u|) \quad \text{rovinné stacionární magnetické pole,}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{rovnice pro kmity struny,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{rovnice vedení tepla.}$$

Definice 13.3 Kvazilineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu dvou proměnných rozumíme rovnici

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K = 0, \quad (13.1)$$

kde funkce A, B, C, K jsou funkcemi $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$.

Definice 13.4 Lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu dvou proměnných rozumíme rovnici

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + e(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + g(x, y)u = f(x, y). \quad (13.2)$$

Funkce a, b, c, d, e, g, f jsou spojité v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, přičemž aspoň jedna z funkcí a, b, c je nenulová v každém bodě $(x, y) \in \Omega$.

Řešením rovnice (13.1) v oblasti Ω rozumíme každou funkci $u(x, y) \in C^2(\Omega)$, která v Ω identicky splňuje (13.1).

Označme $D = b^2(x, y) - 4a(x, y)c(x, y)$, potom jestliže
 $D < 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$ pak se jedná o eliptický typ,
 $D = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$ pak se jedná o parabolický typ,
 $D > 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$ pak se jedná o hyperbolický typ.
 Ve zbývajících případech mluvíme o smíšeném typu.

Příklad 13.2 Rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

je eliptického typu,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

je hyperbolického typu,

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

je parabolického typu.

Určení typu někdy záleží na oblasti, ve které je funkce definovaná.

Příklad 13.3 Rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

má $D = -4y$ a proto je eliptického typu pro všechny body horní poloroviny, tj. $y > 0$, je hyperbolického typu v dolní polorovině, tj. $y < 0$ a je parabolického typu v bodech osy x , t.j. $y = 0$.

Příklad 13.4 *Mějme rovnici kvazistacionárního elektromagnetického pole*

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \gamma(x, y) - J, \quad v = v(|\operatorname{grad} u|).$$

Tato rovnice je v elektricky vodivých podoblastech parabolického typu, protože v těchto podoblastech je elektrická vodivost $\gamma(x, y)$ kladná, zatímco v nevodivých podoblastech je elektrická vodivost nulová a proto se v nich jedná o eliptický typ.

13.3 Transformace proměnných.

Věta 13.1 *Každou lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu dvou proměnných, eliptickou, nebo hyperbolickou, nebo parabolickou, lze vhodnou lokální transformací souřadnic převést v okolí každého bodu $(x_0, y_0) \in \Omega$ na kanonický tvar. Tj. u rovnice eliptického typu na tvar*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c_1(x, y) u = f_1(x, y),$$

u rovnice hyperbolického typu na tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c_2(x, y) u = f_2(x, y)$$

a u rovnice parabolického typu na tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_3(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b_3(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c_3(x, y) u = f_3(x, y), \quad a_3(x, y) \neq 0.$$

Mějme nyní lineární rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Gu = F, \quad (13.3)$$

kde $|A| + |B| + |C| \neq 0$. Dané rovnici přiřadíme charakteristickou rovnici

$$A(dy)^2 - Bdx dy + C(dx)^2 = 0. \quad (13.4)$$

Řešením charakteristické rovnice bude každá dvojice funkcí

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in (\alpha, \beta), \quad (13.5)$$

která vyhovuje dané rovnici. Přitom za dx dosadíme výraz $\frac{dx}{dt}$ a za dy dosadíme výraz $\frac{dy}{dt}$ a nakonec celou rovnici vydělíme výrazem $(dt)^2$.

Definice 13.5 *Jestliže jsou funkce $x(t) = \varphi(t)$, $y(t) = \psi(t)$ řešením rovnice (13.4) a jestliže jsou rovnice (13.5) parametrickými rovnicemi hladké křivky, potom tuto křivku nazveme charakteristikou.*

Příklad 13.5 Najděte charakteristiky rovnice

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Řešení: Naší rovnici přiřadíme charakteristickou rovnici:

$$(dy)^2 - (dx)^2 = 0,$$

neboli

$$(dy)^2 = (dx)^2 \implies \frac{(dy)^2}{(dx)^2} = 1,$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm 1.$$

Charakteristikami naší rovnice jsou potom přímky $y = x + P$ a $y = -x + P$, kde $P \in \mathbb{R}$. Máme tak dvě třídy přímek a každým bodem roviny Oxy prochází právě jedna přímka z každé třídy. \square

Příklad 13.6 Najděte charakteristiky pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Řešení: Rovnici přiřadíme charakteristickou rovnici:

$$(dy)^2 = 0,$$

neboli

$$(dy) = 0, \implies y = P, \quad P \in \mathbb{R}.$$

Rovnice vedení tepla má charakteristiky množinu přímek $y = \text{konst.}$ \square

Příklad 13.7 Najděte charakteristiky Laplaceovy rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Řešení: Laplaceově rovnici přiřadíme charakteristickou rovnici:

$$(dy)^2 + (dx)^2 = 0.$$

Součet dvou nezáporných hodnot je roven nule tehdy a jen tehdy, pokud obě hodnoty jsou současně nulové, takže máme

$$(dy) = 0, \implies y = P, \quad (dx) = 0, \implies x = R, \quad P, R \in \mathbb{R}.$$

Vztahy $x = R, y = P$, ale nepopisují žádnou křivku, proto Laplaceova rovnice nemá žádnou charakteristiku. \square

Z výše uvedených příkladů plyne, že každým bodem (x, y) může procházet právě jedna charakteristika, nebo charakteristik může být více a nebo nemusí existovat žádná.

Ukážeme si použití charakteristik při převodu lineární rovnice (13.3) na kanonický tvar. Nechť máme rovnici hyperbolického typu, tj. $B^2 - 4AC > 0$. Bez omezení obecnosti můžeme předpokládat, že $A \neq 0$. Charakteristickou rovnici

$$A(dy)^2 - Bdx dy + C(dx)^2 = 0.$$

si upravíme na tvar

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - B \frac{dy}{dx} + C = 0.$$

Označme $\lambda = \frac{dy}{dx}$. Potom hledáme řešení rovnice

$$A\lambda^2 - B\lambda + C = 0.$$

Vzhledem k podmínce pro rovnici hyperbolického typu $B^2 - 4AC > 0$, máme, že naše kvadratická rovnice bude mít řešením dvě různá reálná čísla. Označme je $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Potom

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1,$$

$$dy = \lambda_1 dx,$$

$$y = \lambda_1 x + \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

A analogicky

$$y = \lambda_2 x + \eta, \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

Tím jsme dostali, že charakteristikami jsou dvě třídy přímek

$$y = \lambda_1 x + \xi, \quad y = \lambda_2 x + \eta.$$

Každým bodem prochází právě jedna přímka z každé třídy. Jinak řečeno, známe-li bod (x, y) , potom známe i čísla ξ, η a naopak známe-li čísla ξ, η , známe i souřadnice průsečíku charakteristik

$$x = \frac{\xi - \eta}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad y = \frac{\lambda_2 \xi - \lambda_1 \eta}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

a naopak

$$\xi = y - \lambda_1 x, \quad \eta = y - \lambda_2 x.$$

Můžeme tak každou funkci proměnných x, y považovat za funkci proměnných ξ, η . Přitom platí

$$u(x, y) = u \left(\frac{\xi - \eta}{\lambda_2 - \lambda_1}, \frac{\lambda_2 \xi - \lambda_1 \eta}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) = U(\xi, \eta).$$

A naopak

$$U(\xi, \eta) = U(y - \lambda_1 x, y - \lambda_2 x) = u(x, y).$$

Budeme hledat rovnici, kterou splňuje funkce U , jestliže funkce u je řešením rovnice (13.3). Určíme si derivace

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\lambda_1 \frac{\partial U}{\partial \xi} - \lambda_2 \frac{\partial U}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \lambda_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -\lambda_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - \lambda_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}.\end{aligned}$$

Dosadíme tyto hodnoty do rovnice (13.3) a dostaneme

$$\begin{aligned}A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Gu - F &= 0, \\ A \left(\lambda_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right) + B \left(-\lambda_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - \lambda_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right) + \\ C \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right) + \dots &= 0,\end{aligned}$$

pro přehlednost zde uvádíme pouze parciální derivace druhého řádu, které jsou pro nás rozhodující, totéž i dále,

$$(A\lambda_1^2 - B\lambda_1 + C) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + (2A\lambda_1 \lambda_2 - B(\lambda_1 + \lambda_2) + 2C) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + (A\lambda_2^2 - B\lambda_2 + C) \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \dots = 0.$$

Čísla λ_1, λ_2 jsme získali jako kořeny kvadratické rovnice. Proto platí

$$A\lambda_i^2 - B\lambda_i + C = 0, \quad i = 1, 2,$$

proto jsou koeficienty u druhých derivací podle ξ, η nulové.

Navíc u kvadratické rovnice platí, podle Vietových vzorců, že součin jejich dvou kořenů je roven absolutnímu členu, dělenému koeficientem u nejvyšší mocniny a jejich součet, záporně vzatý, je roven koeficientu u první mocniny, dělenému koeficientem u nejvyšší mocniny, takže

$$2A\lambda_1 \lambda_2 - B(\lambda_1 + \lambda_2) + 2C = 2A \frac{C}{A} - B \frac{B}{A} + 2C = \frac{1}{A}(4AC - B^2) \neq 0.$$

Proto bude koeficient u smíšené derivace nenulový a můžeme jím dělit celou rovnici. Takže jsme dostali

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \dots = 0.$$

Máme nyní naši rovnici v kanonickém tvaru, který se používá pro určení řešení. Skutečně, jestliže nyní provedeme substituci

$$\xi = r + s, \quad \eta = r - s,$$

zpočítáme si příslušné parciální derivace, $U(\xi, \eta) = V(r, s)$,

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial V}{\partial s} \cdot \frac{21}{2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial s} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 V}{\partial s \partial r} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}.$$

Dosazením dostaneme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \dots = 0.$$

Tím jsme opět získali kanonický tvar pro rovnici hyperbolického typu.

Mějme nyní rovnici (13.3) jako rovnici parabolického typu, tj. platí $4AC - B^2 = 0$. Opět budeme předpokládat, že platí $A \neq 0$. V opačném případě provedeme přeznačení proměnných. Charakteristická rovnice

$$A\lambda^2 - B\lambda + C = 0$$

má potom jeden dvojnásobný kořen $\lambda = \frac{B}{2A}$. Budeme dále předpokládat, že $B \neq 0$. Protože pokud je $B = 0$, potom z charakteristické rovnice plyne, že i $C = 0$, o A jsme už dříve předpokládali, že je nenulové. Rovnice (13.3) by pak byla tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots = 0,$$

a tedy už je přímo v kanonickém tvaru. Opět jsme uvedli pouze parciální derivace druhého řádu.

Jestliže je $B \neq 0$, potom je také $\lambda \neq 0$. Obdobně jako v předchozím případě položíme

$$\xi = y - \lambda x.$$

Protože máme pouze jeden kořen charakteristické rovnice, položíme dále $\eta = x$. Máme tedy $U(\xi, \eta) = u(\eta, \xi + \lambda x)$. Spočítáme si parciální derivace.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2\lambda \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\lambda \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}.$$

Dosadíme tyto hodnoty do naší rovnice (13.3) a dostaneme

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Gu - F = 0,$$

$$A \left(\lambda^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2\lambda \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right) + B \left(-\lambda \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \right) + C \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right) + \dots = 0,$$

(pro přehlednost opět uvádíme pouze parciální derivace druhého řádu, které jsou rozhodující). Po úpravě dostaneme

$$(A\lambda^2 - B\lambda + C) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + (-2\lambda A + B) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + A \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \dots = 0.$$

Z charakteristické rovnice nám plyne $A\lambda^2 - B\lambda + C = 0$ a z jejího řešení $\lambda = \frac{B}{2A}$ plyne platnost rovnice $B - 2A\lambda = 0 \Rightarrow -2A\lambda + B = 0$. První dva koeficienty v předešlé rovnici jsou proto nulové. Protože navíc jsme předpokládali, že $A \neq 0$, můžeme rovnici vydělit koeficientem A a dostali jsme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \dots = 0.$$

Tím jsme získali kanonický tvar pro rovnici parabolického typu.

Postup si opět ukážeme na příkladu.

Příklad 13.8 *Převeďte na kanonický tvar rovnici*

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

a najděte její řešení.

Řešení: Máme $A = 4, B = 4, C = 1$. Takže platí

$$B^2 - 4AC = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0.$$

Rovnice je parabolického typu. Rovnici přiřadíme její charakteristickou rovnici:

$$4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

a určíme si její kořeny. Dostaneme

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}.$$

Podle předchozího volíme

$$\xi = y - \frac{1}{2}x, \quad \eta = x.$$

Uřídíme si parciální derivace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}.$$

Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \\ 4 \left(\frac{1}{4} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right) + 4 \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 4 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 4 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 4 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} &= 0, \\ 4 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} &= 0. \end{aligned}$$

Budeme nyní hledat řešení této rovnice. Protože druhé derivace U podle η je nulová, potom integrací dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \eta} &= \int \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} d\eta = f(\xi), \\ U &= \int f(\xi) d\eta = \eta f(\xi) + g(\xi), \end{aligned}$$

kde f, g jsou funkce se spojitými parciálními derivacemi. Dosazením za ξ, η dostaneme řešení naší rovnice ve tvaru

$$u = x f\left(y - \frac{1}{2}x\right) + g\left(y - \frac{1}{2}x\right).$$

□

Mějme nyní rovnici (13.3) eliptického typu, tj. platí $B^2 - 4AC < 0$. Přímo z této podmínky nám vyplývá, že $A \neq 0, C \neq 0$. Charakteristická rovnice

$$A\lambda^2 - B\lambda + C = 0$$

má dva komplexní kořeny $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \beta \neq 0$.

Položíme

$$\xi = y - \alpha x, \quad \eta = -\beta x.$$

Spočítáme si parciální derivace pro funkci $u(x, y) = U(\xi, \eta) = u\left(\frac{\eta}{-\beta}, \xi - \frac{\alpha}{\beta}\eta\right)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\alpha \frac{\partial U}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial U}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \beta^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}.\end{aligned}$$

Dosadíme tyto hodnoty do naší rovnice (13.3) a dostaneme

$$\begin{aligned}A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Gu - F &= 0, \\ A \left(\alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \beta^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right) + B \left(\alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \beta^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right) + C \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right) + \dots &= 0,\end{aligned}$$

(pro přehlednost opět uvádíme pouze parciální derivace druhého řádu, které jsou rozhodující). Po úpravě dostaneme

$$(\alpha^2 A - \alpha B + C) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \beta(2\alpha A - B) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + A\beta^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \dots = 0.$$

$\alpha + i\beta$ je kořen charakteristické rovnice a proto platí

$$\alpha = \frac{B}{2A}, \quad \beta^2 = \frac{4AC - B^2}{4A^2}.$$

Potom ale

$$2\alpha A - B = 0$$

a

$$\begin{aligned}\alpha^2 A - \alpha B + C &= \frac{B^2}{4A^2} A - \frac{B}{2A} B + C = \frac{B^2}{4A} - \frac{B^2}{2A} + C = \\ &= \frac{-B^2 + 4AC}{4A} = A\beta^2.\end{aligned}$$

Neboli koeficient u míšené derivace je nulový a koeficienty u zbývajících se sobě rovnají. Tím jsme získali rovnici

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \dots = 0,$$

která je kanonickým tvarem pro rovnici eliptického typu. Pokud jsou koeficienty rovnice (13.3) funkcemi, potom postupujeme analogicky. Musíme pouze rozlišit oblasti ve kterých je rovnice stejného typu.

Definice 13.6 Okrajová úloha pro lineární parciální diferenciální rovnici 2.řádu je: Najít řešení $u = u(x, y)$ rovnice (13.1) v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, jestliže známe hodnoty řešení na hranici $\Gamma(\Omega)$.

$$u(x, y)|_{(x, y) \in \Gamma} = \varphi(x, y).$$

13.4 Řešené příklady

Příklad 13.9 Najděte kanonický tvar rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 15 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

a její řešení.

Řešení: Máme $A = 1, B = 8, C = 15$. Takže platí

$$B^2 - 4AC = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4 > 0.$$

Rovnice je hyperbolického typu. Rovnici přiřadíme charakteristickou rovnici:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$$

a určíme si její kořeny. Dostaneme

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 5.$$

Podle předchozího volíme

$$\xi = y - 3x, \quad \eta = y - 5x.$$

Určíme si parciální derivace

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 9 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 30 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 25 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -3 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 8 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - 5 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Po dosazení dostaneme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Budeme nyní hledat řešení této rovnice. Zvolme

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = v.$$

Potom

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0,$$

a proto je $v = f(\eta)$, kde f je libovolná funkce. Takže máme

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = f(\eta),$$

$$U = \int f(\eta) d\eta = F(\eta) + G(\xi),$$

kde F, G jsou funkce se spojitými parciálními derivacemi. Dosazením za ξ, η dostaneme řešení naší rovnice ve tvaru

$$u = F(y - 5x) + G(y - 3x).$$

□

Příklad 13.10 *Převeďte na kanonický tvar rovnici*

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 13 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Řešení: Máme $A = 4, B = 12, C = 13$. Takže platí

$$B^2 - 4AC = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 13 = 144 - 208 = -64.$$

Rovnice je eliptického typu. Rovnici přiřadíme její charakteristickou rovnici:

$$4\lambda^2 - 12\lambda + 13 = 0$$

a určíme si její kořeny. Dostaneme

$$\lambda_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 4 \cdot 13}}{8} = \frac{12 \pm \sqrt{-64}}{8} = \frac{3}{2} \pm i.$$

Máme $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = 1$. Podle předchozího volíme

$$\xi = y - \frac{3}{2}x, \quad \eta = -x.$$

Určíme si parciální derivace

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{9}{4} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 3 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -\frac{3}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}. \end{aligned}$$

Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 13 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \\ 4 \left(\frac{9}{4} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 3 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right) + 12 \left(-\frac{3}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \right) + 13 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right) &= 0, \\ 9 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 12 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 4 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - 18 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 12 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 13 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right) &= 0, \\ 4 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 4 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} &= 0, \end{aligned}$$

□

13.5 Cvičení

Příklad 13.11 Najděte kanonický tvar rovnice

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Řešení: Kanonickým tvarem dané rovnice je rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Příklad 13.12 Najděte kanonický tvar rovnice

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Řešení: Kanonickým tvarem dané rovnice je rovnice

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 \xi} + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 \eta} = 0.$$

13.6 Metoda konečných diferencí pro PDR

Nyní se budeme věnovat některým numerickým metodám pro určení řešení parciálních diferenciálních rovnic.

Definice 13.7 Okrajová úloha pro lineární parciální diferenciální rovnici 2.řádu je: Najít řešení $u = u(x, y)$ rovnice (13.2) v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, jestliže známe hodnoty řešení na hranici $\Gamma(\Omega)$.

$$u(x, y)|_{(x,y) \in \Gamma} = \varphi(x, y).$$

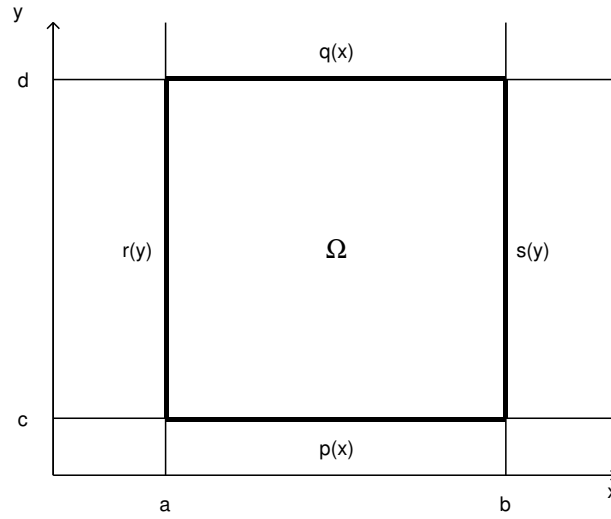
Vezměme si nejjednodušší případ: Mějme parciální lineární diferenciální rovnici eliptického typu

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sigma(x, y)u = f(x, y), \quad (13.6)$$

kde $u = u(x, y)$, $\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, $\sigma(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in \Omega$, σ, f jsou spojitě na Ω .

Necheť je splněna tzv. Dirichletova okrajová podmínka na hranicích oblasti Ω :

$$\begin{aligned} u(x, c) &= p(x), & u(x, d) &= q(x), & a &\leq x \leq b, \\ u(a, y) &= r(y), & u(b, y) &= s(y), & c &\leq y \leq d, \\ p(a) &= r(c), & p(b) &= s(c), & q(a) &= r(d), & q(b) &= s(d). \end{aligned}$$



Obrázek 13.1: Hranice oblasti

Poslední řádek nám zaručuje spojitost okrajových podmínek v “rozích” oblasti Ω . Viz obrázek.

Opět si vytvoříme síť na oblasti Ω (nejčastěji se používají čtvercové a nebo obdelníkové sítě).

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, n+1, \quad h = \frac{b-a}{n+1},$$

$$y_j = c + jk, \quad j = 0, 1, \dots, m, m+1, \quad k = \frac{d-c}{m+1}.$$

Uzly jsou pak body (x_i, y_j) . Označme $u_{ij} = u(x_i, y_j)$. Za předpokladu, že platí

$$\left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right| \leq M_4, \quad \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \leq M_4, \quad M_4 \in \mathbb{R}, \quad M_4 < \infty,$$

t.j. $u(x, y)$ je spojitá a má ohrazené parciální derivace do čtvrtého řádu včetně. Pak si můžeme vyjádřit derivace pomocí diferencí a dostaneme

$$-\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} = -\left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\xi_i, y_j) \right),$$

$$-\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} = -\left(\frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{k^2} - \frac{k^2}{12} u^{(4)}(x_i, \eta_j) \right),$$

kde $x_{i-1} < \xi_i < x_{i+1}$, $y_{j-1} < \eta_j < y_{j+1}$. Jestliže předpokládáme spojitost $u(x, y)$, pak pro dostatečně malé h, k můžeme zanedbat chybové funkce. Potom dosazením do (13.6) dostáváme pro $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$:

$$\frac{2u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{2u_{ij} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{k^2} + \sigma_{ij} u_{ij} = f_{ij}.$$

Vynásobením této rovnice koeficientem hk dostaneme

$$\left(2\left(\frac{h}{k} + \frac{k}{h}\right) + hk\sigma_{ij}\right)u_{ij} - \frac{k}{h}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - \frac{h}{k}(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = hkf_{ij}.$$

Dosadíme podle počátečních podmínek

$$u_{i,0} = p_i, \quad u_{i,m+1} = q_i, \quad u_{0,j} = r_j, \quad u_{n+1,j} = s_j,$$

kde $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $r_j = r(y_j)$, $s_j = s(y_j)$, dostaneme tak soustavu lineárních algebraických rovnic a po jejím vyřešení získáme hodnoty u_{ij} . V případě pravidelné čtvercové sítě, t.j. $h = k$, se tato soustava dále zjednoduší na tvar

$$(4 + h^2\sigma_{ij})u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = h^2f_{ij}. \quad (13.7)$$

Všimněte si, že matice soustavy je v obou případech pro $\sigma_{ij} \neq 0$ diagonálně dominantní a proto můžeme použít i iterační metody řešení. V případě $\sigma_{ij} \equiv 0$ jde o soustavu, kde je diagonální dominantnost neostrá, ale je ostrá pro všechny rovnice, v nichž je alespoň jeden hraniční bod. Pro takovéto matice nám bude opět konvergovat Gauss-Seidelova metoda, ale obecně dosti pomalu. Při větším počtu rovnic se vyplatí používat relaxační nebo superrelaxační metodu, nebo metodu sdružených gradientů, které nám podstatně zlepšují konvergenci a hlavně rychlost výpočtu. Zvláště v tomto případě, kdy matice koeficientů soustavy je řídká – t.j. obsahuje velké množství nulových prvků, a my máme v každé rovnici je nejvýše pět nenulových koeficientů. Pro takovéto případy kje zvlášť vhodná metoda sdružených gradientů.

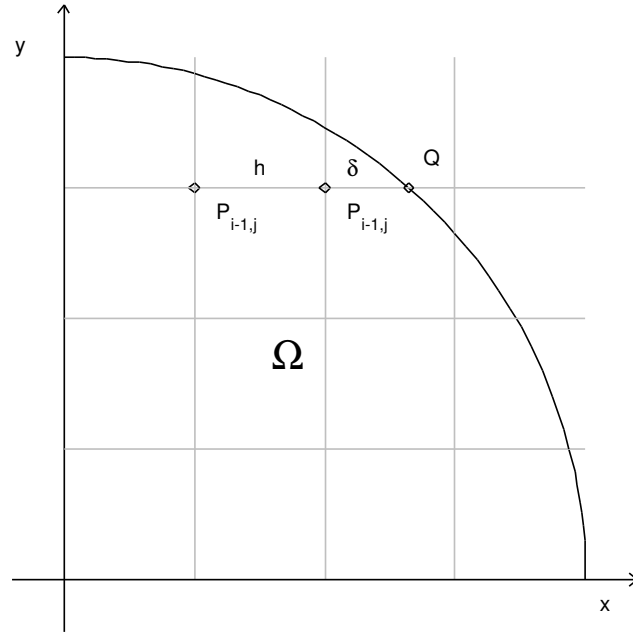
Analogicky postup můžeme použít pro numerické řešení všech lineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Postup řešení je vždy stejný: derivace nahradíme diferencemi a hledáme řešení soustavy lineárních algebraických rovnic.

Pro další parciální derivace se používají aproximace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}, & \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} &= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}, \\ \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} &= \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}, & \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} &= \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k}, \\ \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, & \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} &= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}, \\ \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x \partial y} &= \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{2h2k}. \end{aligned}$$

Problémy při řešení mohou vznikat, pokud oblast Ω není obdelníková.

Definice 13.8 Bod $P_{ij} = (x_i, y_j)$ síť na oblasti Ω nazveme *vnitřním*, jestliže všechny body úseček spojujících jej se sousedními body $P_{i\pm 1,j}$, $P_{i,j\pm 1}$ leží v Ω a nazveme jej *hraničním* v opačném případě.



Obrázek 13.2: Problém u metody konečných diferencí

Pro určení hodnoty funkce u v hraničních bodech se nejčastěji používá lineární interpolace či extrapolace.

Nechť hraniční bod Q leží na spojnici uzlů P_{ij} , $P_{i+1,j}$, ve vzdálenosti δ od bodu P_{ij} . Nechť se hodnoty funkce u mění lineárně podél této spojnice. Potom

$$\frac{u(Q) - u(P_{ij})}{\delta} = \frac{u(P_{ij}) - u(P_{i-1,j})}{h}.$$

Protože podle definice 13.7 můžeme psát $u(Q) = \varphi(Q)$ a dále $u(P_{ij}) = u_{ij}$, tak po úpravě dostaneme

$$\varphi(Q) = \left(1 + \frac{\delta}{h}\right) u_{ij} - \frac{\delta}{h} u_{i-1,j}$$

a nebo

$$u_{ij} = \frac{h\varphi(Q) + \delta u_{i-1,j}}{h + \delta} = \frac{h}{h + \delta} \varphi(Q) + \frac{\delta}{h + \delta} u_{i-1,j},$$

protože známe hodnotu v bodě Q a potřebujeme dopočítat hodnotu v bodě P_{ij} .

Příklad 13.13 *Metodou konečných diferencí řešete okrajovou úlohu*

$$u_{xx} + u_{yy} = 8x$$

$$u(x, 0) = x^3, \quad u(0, y) = 0, \quad u(x, y)|_{x^2+y^2=10} = 10x(y+1),$$

kde oblast Ω je vnitřní část čtverťkruhu

$$x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 10.$$

Řešení: Rovnici si upravíme na stejný tvar jako (13.6)

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -8x.$$

Zvolme čtvercovou síť s krokem $h = 1$. Potom máme hraniční body
 $u(0, 0) = 0, u(1, 0) = 1, u(2, 0) = 8, u(3, 0) = 27,$
 $u(0, 1) = u(0, 2) = u(0, 3) = 0,$
 $u(1, 3) = 40, u(3, 1) = 60.$ Ještě potřebujeme znát hodnotu v bodě $P_{2,2}$. Protože
 $Q = (2.449; 2), \varphi(Q) = 73.485, \delta = 0.449,$ tak lineární interpolací dostaneme

$$u_{2,2} = \frac{1 \cdot 73.485 + 0.449 \cdot u_{1,2}}{1 + 0.449} = 50.697 + 0.310u_{1,2}.$$

Nyní pro 3 vnitřní uzly sestavíme síťové rovnice podle (13.7), přitom hraniční uzly jsou podtrženy.

$$\begin{aligned} 4u_{1,1} - \underline{u_{0,1}} - u_{2,1} - \underline{u_{1,0}} - u_{1,2} &= -8, \\ 4u_{1,2} - u_{1,1} - \underline{u_{1,3}} - \underline{u_{0,2}} - \underline{u_{2,2}} &= -8, \\ 4u_{2,1} - u_{1,1} - \underline{u_{3,1}} - \underline{u_{2,0}} - \underline{u_{2,2}} &= -16 \end{aligned}$$

a pak přidáním odvozeného vztahu pro $u_{2,2}$ dostaneme soustavu 4 rovnic o čtyřech neznámých. Po úpravě

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= \frac{1}{4}(0 + u_{2,1} + 1 + u_{1,2}) - \frac{1}{4}8, \\ u_{2,1} &= \frac{1}{4}(u_{1,1} + u_{2,2} + 60 + 8) - \frac{1}{4}16, \\ u_{1,2} &= \frac{1}{4}(0 + 40 + u_{1,1} + u_{2,2}) - \frac{1}{4}8, \\ u_{2,2} &= 50.697 + 0.310u_{1,2}. \end{aligned}$$

Jejím řešením je pak

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= 12.384, \\ u_{2,1} &= 30.768, \\ u_{1,2} &= 25.768, \\ u_{2,2} &= 58.688. \end{aligned}$$

Další postup je pak obvyklý, t.j. zmenšíme krok a opakujeme výpočet až se nám odchylky v uzlových bodech ustálí.

Nechť tedy je $h = \frac{1}{2}$. Potom dostaneme síťové rovnice pro 19 vnitřních bodů a ještě musíme dopočítat hodnoty 5 hraničních uzlů lineární interpolací. Dostaneme tedy soustavu 24 rovnic o 24 neznámých. Přitom každá rovnice obsahuje nejvýše 5 nenulových hodnot

proměnných.

Pro hraniční uzly máme

$$u_{6,1} = 37.651 + 0.196u_{5,1},$$

$$u_{5,3} = 44.388 + 0.223u_{4,3},$$

$$u_{4,4} = 38.717 + 0.473u_{3,4},$$

$$u_{3,5} = 36.196 + 0.446u_{2,5},$$

a pro poslední hodnotu bereme buď

$$u_{1,6} = \frac{1}{2}(u_{0,6} + u_{2,6}) = 20,$$

nebo si tuto hodnotu vypočítáme, přitom bereme sousední uzly po vertikále (doposud jsme je brali po horizontále), pak dostaneme rovnici

$$u_{1,6} = 16.567 + 0.196u_{1,5}.$$

Pro vnitřní uzly pak budeme mít soustavu

$$-4u_{11} + u_{01} + u_{10} + u_{21} + u_{12} = 1,$$

$$-4u_{12} + u_{02} + u_{11} + u_{22} + u_{13} = 1,$$

$$-4u_{13} + u_{03} + u_{12} + u_{23} + u_{14} = 1,$$

$$-4u_{14} + u_{04} + u_{13} + u_{24} + u_{15} = 1,$$

$$-4u_{15} + u_{05} + u_{14} + u_{25} + u_{16} = 1,$$

$$-4u_{21} + u_{11} + u_{20} + u_{31} + u_{22} = 2,$$

$$-4u_{22} + u_{12} + u_{21} + u_{32} + u_{23} = 2,$$

$$-4u_{23} + u_{13} + u_{22} + u_{33} + u_{24} = 2,$$

$$-4u_{24} + u_{14} + u_{23} + u_{34} + u_{25} = 2,$$

$$-4u_{25} + u_{15} + u_{24} + u_{35} + u_{26} = 2,$$

$$-4u_{31} + u_{21} + u_{30} + u_{41} + u_{32} = 3,$$

$$-4u_{32} + u_{22} + u_{31} + u_{42} + u_{33} = 3,$$

$$-4u_{33} + u_{23} + u_{32} + u_{43} + u_{34} = 3,$$

$$-4u_{34} + u_{24} + u_{33} + u_{44} + u_{35} = 3,$$

$$-4u_{41} + u_{31} + u_{40} + u_{51} + u_{42} = 4,$$

$$-4u_{42} + u_{32} + u_{41} + u_{52} + u_{43} = 4,$$

$$-4u_{43} + u_{33} + u_{42} + u_{53} + u_{44} = 4,$$

$$-4u_{51} + u_{41} + u_{50} + u_{61} + u_{52} = 5,$$

$$-4u_{52} + u_{42} + u_{51} + u_{62} + u_{53} = 5.$$

Tím máme celou soustavu hotovou a zbývá jí “jen” vyřešit.

Pro rovnice jiných typů je postup analogický. Vždy požadujeme, aby výsledná soustava lineárních algebraických rovnic byla jednoznačně řešitelná. Z této podmínky plynou i požadavky na tvar rovnice, které nám potom zaručí jednoznačnost a konvergenci řešení.

Postup si ukážeme na rovnici parabolického typu, půjde o zobecnění rovnice vedení tepla, kdy přidáme ještě další člen,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (13.8)$$

počáteční podmínka

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (13.9)$$

a okrajové podmínky

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad (13.10)$$

$$u(l, t) = \mu_2(t), \quad (13.11)$$

kde f, φ, μ_1, μ_2 jsou zadané spojitě funkce, $x \in \langle 0, l \rangle$, $t \in \langle 0, T \rangle$.

Rozdělíme si interval $\langle 0, l \rangle$ na n dílů délky $\Delta x = \frac{l}{n}$. Na ose t si zvolíme velikost kroku Δt tak, aby platilo $\Delta t = \varrho \Delta x^2$. Důvod bude zřejmý z dalšího výkladu. Derivace v rovnici (13.8) nahradíme diferencemi a dostaneme

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta t} = \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{\Delta x^2} + f(x_i t_k).$$

Nyní vynásobíme celou rovnici výrazem $\Delta t = \varrho \Delta x^2$ a dostaneme po úpravě

$$u_{i,k+1} = (1 - 2\varrho)u_{i,k} + \varrho(u_{i-1,k} + u_{i+1,k}) + \Delta t f(x_i, t_k). \quad (13.12)$$

Dosazením do počátečních a okrajových podmínek dostaneme

$$u_{i,0} = \varphi(x_i), u_{0,k} = \mu_1(t_k), u_{l,k} = \mu_2(t_k). \quad (13.13)$$

Tím jsme získali soustavu lineárních algebraických rovnic. Pro její řešitelnost je třeba volit $\varrho \leq \frac{1}{2}$. V opačném případě nastává numerická nestabilita a výpočet se bude výrazně lišit od skutečnosti.

13.7 Shrnutí

Seznámili jsme se s numerickými metodami pro řešení parciálních diferenciálních rovnic.

Připomenuli jsme si základní pojmy z teorie parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu, co je řešení a jaké okrajové podmínky se používají.

Byla provedena klasifikace lineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu.

Uvedli jsme si větu o transformaci, která nám zajišťuje, že každou lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu lze lokální transformací převést na kanonický tvar.

Řešení jsme hledali metodou konečných diferencí. Opět jde o diskretizaci proměnných, kdy krok nemusí být na stejný na obou souřadnicových osách. Hledání řešení okrajové úlohy pro lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu jsme opět převedli na problém nalezení řešení soustavy lineárních algebraických rovnic. Při splnění konvergenčních podmínek nám konstrukce soustavy zaručuje její jednoznačnou řešitelnost. Diskrétní řešení pak v limitě přechází v přesné řešení naší úlohy.

14 Metoda konečných prvků pro parciální dif. rovnice

14.1 Úvod

V kapitole 11 jsme si ukázali princip metody konečných prvků.

Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře použitím metody konečných prvků pro parciální diferenciální rovnice druhého řádu.

Budeme se zabývat problematikou triangulace oblasti - rozdělení souvislé oblasti na útvary vhodné pro použití metody konečných prvků. Pak si ukážeme konstrukci báзовých funkcí a jejich upravy. Opět svedeme naši úlohu najít řešení parciální diferenciální rovnice na úlohu najít řešení soustavy lineárních algebraických rovnic. Konstrukce úlohy nám opět zaručuje jednoznačnou řešitelnost.

14.2 Základní pojmy

Její základ je stejný jako v části 11.

Hledáme řešení okrajové úlohy pro eliptickou rovnici metodou konečných prvků.

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

kde $(x, y) \in \Omega$. Jde o tzv. Poissonovu rovnici. Mějme homogenní okrajové podmínky, t.j. $u(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma(\Omega)$. Užitím Greenovy věty se dá dokázat, že funkcionál

$$F(w) = \frac{1}{2} \int \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - 2wf \right] dx dy$$

je minimální, když w je řešením naší úlohy.

Protože $\text{grad } w = (w'_x, w'_y)$ a my můžeme psát

$$F(w) = \frac{1}{2} \int \int_{\Omega} [(\text{grad } w)^2 - 2wf] dx dy.$$

Přitom opět předpokládáme, že $w = w(x, y)$ probíhá všechny funkce splňující danou okrajovou podmínku a mající derivace integrovatelné v kvadrátě.

Předpokládáme dále, že hranice Γ je tvořena uzavřeným polygonem složeným s konečného počtu částí.

Provedeme triangulaci oblasti Ω – rozdělíme ji trojúhelníky, které mají nejvýše jeden společný vrchol a nebo jednu společnou hranu a tvoří pokrytí Ω . Vrcholy si očíslováme P_j , $j \in \mathcal{J}$.

Při hledání minima se opět omezíme na množinu funkcí spojitých na Ω , rovných nule na Γ a lineárních na každém trojúhelníku. (V obecném případě můžeme použít i jinou množinu funkcí než lineárních, například polynomy stupně k , $k > 1, \dots$. Budeme pouze požadovat spojitost na oblasti Ω a rovnost nule na Γ . Na každém z trojúhelníků pak budeme pracovat s funkcí z vybrané množiny.)

Analogicky jako v předchozím případě můžeme hledanou funkci vyjádřit ve tvaru

$$v(P) = \sum_{j \in \mathcal{J}} v_j \cdot p_j(P),$$

kde bázové funkce $p_j(P)$ mají tvar pláště pyramidy o výšce jedna a s podstavou složenou ze všech trojúhelníků obsahujících vrchol P . Platí

$$\text{grad } v = \sum_{j \in \mathcal{J}} v_j \cdot \text{grad } p_j$$

a my máme

$$F(v) = \frac{1}{2} \int \int_{\Omega} \left[\left(\sum_{j \in \mathcal{J}} v_j \cdot \text{grad } p_j \right)^2 - 2f \sum_{j \in \mathcal{J}} v_j \cdot p_j \right] dx dy$$

a opět tady máme kvadratickou funkci parametrů v_j . a hledáme její minimum. Soustavu

$$\frac{\partial F}{\partial v_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

si přepíšeme na tvar

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} v_j \int \int_{\Omega} (\text{grad } p_j \cdot \text{grad } p_i) dx dy = \int \int_{\Omega} (f p_i) dx dy, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

a opět máme soustavu lineárních algebraických rovnic. A zase zde bude hrát důležitou roli, že funkce p_i mají malý nosič. Toto je základní varianta metody pro nejjednodušší typ okrajové úlohy..

Metodu konečných prvků charakterizují tři základní vlastnosti:

1. Diskretizace oblasti Ω , kdy se Ω vyjádří jako sjednocení konečného počtu zvolených podmnožin – podoblastí. Tyto podmnožiny se nazývají *konečné prvky*. Obvykle to jsou trojúhelníky. Jen vyjíměčně se používají čtyřúhelníky či jiné útvary. V případě, že konečné prvky jsou trojúhelníky, pak se místo o diskretizace mluví o *triangulaci* oblasti Ω .
2. Volba prostoru funkcí, které jsou na každém prvku polynomem zvoleného stupně. Tento prostor budeme značit \mathcal{V} .
3. Existence takové báze prostoru \mathcal{V} , že bázové funkce mají malý nosič – t.j. jsou nenulové pouze na několika sousedních prvcích.

Řešením dané okrajové úlohy pak rozumíme funkci z \mathcal{V} , která je určena jako lineární kombinace zvolených bázových funkcí.

Ukážeme si nyní použití stejné metody pro obecnější typ rovnice.

Budeme se zabývat metodou konečných prvků pro okrajovou úlohu pro eliptickou rovnici druhého řádu dvou proměnných na oblasti $\Omega \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y)u = f(x, y), \quad (14.1)$$

s okrajovou podmínkou

$$u(x, y)|_{(x, y) \in \Gamma(\Omega)} = \varphi(x, y). \quad (14.2)$$

Nebudeme se zabývat obecnou diskretizací, ale omezíme se na rozklad oblasti $\Omega \in \mathbb{R}^2$ na systém disjunktních trojúhelníků.

Triangulace:

Oblast Ω aproximujeme sjednocením konečného počtu disjunktních trojúhelníků. Hranice $\Gamma(\Omega)$ je potom aproximována polygonem – lomenou čarou.

Množinu trojúhelníků $\tau = \{T_1, T_2, \dots, T_k\}$ budeme nazývat *přípustnou triangulací*, jestliže platí:

1. $\Omega \cap \left(\bigcup_{i=1}^k T_i \right) \subset \Omega$.
2. Jsou-li T_a, T_b dva různé trojúhelníky triangulace τ , pak jejich vnitřky mají prázdný průnik.
3. $\forall i = 1, 2, \dots, k$ je každá strana T_i buď částí hranice Γ a nebo stranou jiného trojúhelníka z τ .

Trojúhelníky, které mají společnou stranu se nazývají sousední. Bez omezení obecnosti budeme dále předpokládat, že nejvýše jedna strana trojúhelníka T_i je částí hranice Γ – tento předpoklad dodáváme pro jednodušší konstrukci algoritmu řešení. Při dostatečně jemném dělení oblasti Ω je tato podmínka splněna automaticky.

Konstrukce vhodné přípustné triangulace oblasti Ω není vůbec snadnou záležitostí. Je přitom třeba dodržovat tyto zásady:

1. Nepoužívat trojúhelníky s velmi malými a nebo velmi velkými vnitřními úhly.
2. V těch částech oblasti Ω , kde se očekávají velké změny v chování hledaného řešení dané úlohy, je nutno volit jemnější triangulaci.

Kromě vrcholů trojúhelníků T_i , $i = 1, \dots, k$, se tak, někdy používají při konstrukci řešení další body trojúhelníku T_i , jako jsou středy stran, těžiště. Všem takovým bodům se souhrně říká uzly triangulace. Ty uzly, které leží na hranici se nazývají hraniční, zbývající jsou vnitřní. Strana trojúhelníka, která patří hranici $\Gamma(\Omega)$ se nazývá hraniční.

V uzlech triangulace zadáváme hodnoty koeficientů rovnice či okrajových podmínek a hodnoty pravých stran rovnice 14.1. Současně v nich hledáme hodnoty přibližného řešení. Všem těmto hodnotám říkáme uzlové parametry.

K dosažení vyšší přesnosti je třeba provést jemnější triangulaci, t.j. zvolit menší trojúhelníky. Samozřejmě toto má smysl pouze tehdy, když je řešení naší okrajové úlohy

dostatečně hladké.

Bázové funkce

My budeme za uzly triangulace volit pouze vrcholy trojúhelníků. Vrcholy trojúhelníka T_s označme M_1^s, M_2^s, M_3^s . Číslování provádíme vždy v *kladném smyslu*, tj. proti směru pohybu hodinových ručiček, a začínáme vždy zprava, respektive vpravo dole, pokud máme vpravo dva vrcholy. Každý uzel má tedy lokální index, vázaný na příslušný trojúhelník, a současně i globální index, vázaný na místo daného vrcholu v pořadí všech vrcholů. Hovoříme pak o lokálním a globálním číslování.

Jedna z možností globálního číslování je $M_i^s \equiv M_{si}$, $i = 1, 2, 3$; $s = 1, 2, \dots, N$, kde N je počet všech uzlů příslušné triangulace.

Nechť M_n je uzel triangulace s globálním indexem n . Definujeme si po částech lineární bázové funkce $v_n = v_n(x, y)$ následovně:

1. Na každém trojúhelníku T_s s vrcholem M_n je v_n lineárním polynomem tvaru

$$N^s(x, y) = a^s + b^s x + c^s y, \quad a^s, b^s, c^s \in \mathbb{R}.$$

2. Funkce v_n splňují vrcholové podmínky

$$v_n(M_n) = 1, \quad v_n(M_m) = 0 \quad \forall m \neq n.$$

3. v_n je nenulová pouze na těch trojúhelnících, jejichž společným vrcholem je uzel M_n . Tyto trojúhelníky tvoří *nosič* funkce v_n . Všude jinde je funkce v_n identicky rovna nule.

Takto definované bázové funkce v_1, v_2, \dots, v_N jsou spojité na $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma(\Omega)$ a jsou lineárně nezávislé. Lineární prostor všech lineárních kombinací bázových funkcí označíme \mathcal{V}_∞ . Funkcím z \mathcal{V}_∞ říkáme lineární *splajny*. Libovolnou funkci z \mathcal{V}_∞ budeme označovat $v = v(x, y)$. Tato funkce je vždy spojitá a lze ji vyjádřit ve tvaru lineární kombinace bázových funkcí

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^N \alpha_n v_n(x, y), \quad \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Konstrukce bázové funkce

Souřadnice vrcholů trojúhelníka T_s označme $M_1^s = (x_1^s, y_1^s)$, $M_2^s = (x_2^s, y_2^s)$, $M_3^s = (x_3^s, y_3^s)$. Restrikce 3 bázových funkcí příslušných těmto vrcholům na T_s označíme

$$N_1^s = a_1^s + b_1^s x + c_1^s y,$$

$$N_2^s = a_2^s + b_2^s x + c_2^s y,$$

$$N_3^s = a_3^s + b_3^s x + c_3^s y.$$

Tyto funkce jsou jednoznačně určeny vrcholovými podmínkami:

$$N_1^s : \quad N_1^s(M_1^s) = 1, \quad N_1^s(M_2^s) = 0, \quad N_1^s(M_3^s) = 0,$$

$$\begin{aligned} N_2^s : \quad & N_2^s(M_1^s) = 0, \quad N_2^s(M_2^s) = 1, \quad N_2^s(M_3^s) = 0, \\ N_3^s : \quad & N_3^s(M_1^s) = 0, \quad N_3^s(M_2^s) = 0, \quad N_3^s(M_3^s) = 1. \end{aligned}$$

Koeficienty lineárních funkcí jsou pak určeny vztahy

$$\begin{aligned} a_1^s &= \frac{1}{D^s}(x_2^s y_3^s - x_3^s y_2^s), \quad b_1^s = \frac{1}{D^s}(y_2^s - y_3^s), \quad c_1^s = \frac{1}{D^s}(x_3^s - x_2^s), \\ a_2^s &= \frac{1}{D^s}(x_3^s y_1^s - x_1^s y_3^s), \quad b_2^s = \frac{1}{D^s}(y_3^s - y_1^s), \quad c_2^s = \frac{1}{D^s}(x_1^s - x_3^s), \\ a_3^s &= \frac{1}{D^s}(x_1^s y_2^s - x_2^s y_1^s), \quad b_3^s = \frac{1}{D^s}(y_1^s - y_2^s), \quad c_3^s = \frac{1}{D^s}(x_2^s - x_1^s), \end{aligned}$$

kde

$$D^s = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1^s & y_1^s \\ 1 & x_2^s & y_2^s \\ 1 & x_3^s & y_3^s \end{pmatrix}.$$

D^s je dvojnásobek obsahu trojúhelníka T_s .

Diskretizace úlohy

Na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ máme okrajovou úlohu

$$-\operatorname{div}(p(x, y)\operatorname{grad} u) + q(x, y)u = f(x, y),$$

$$\sigma u + p \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = g.$$

Zvolíme si triangulaci oblasti Ω a sestrojíme prostor $\mathcal{V}_{\infty}^{\ell}$ funkcí spojitých na $\bar{\Omega}$ a lineárních na každém trojúhelníku T_s zvolené triangulace. To znamená, že sestrojíme systém báзовých funkcí v_1, v_2, \dots, v_N . Přibližné řešení úlohy v prostoru $\mathcal{V}_{\infty}^{\ell}$ je taková po částech lineární funkce $u_n \in \mathcal{V}_{\infty}^{\ell}$, pro kterou platí

$$a(u_h, v_h) = F(v_h)$$

pro každou funkci $v_h \in \mathcal{V}_{\infty}^{\ell}$. Funkce u_h lze vyjádřit jako lineární kombinace po částech lineárních báзовých funkcí

$$u_h = \sum_{n=1}^N U_n v_n,$$

kde $U_n = u_h(M_n) \approx u(M_n)$ jsou hledané parametry, které dostaneme řešením soustavy lineárních algebraických rovnic

$$A_h U_h = F_h,$$

kde $U_h = (U_1, U_2, \dots, U_N)^T$, $F_h = (F_1, F_2, \dots, F_N)^T$.

$$F_n = F(v_n) = \int \int_{\Omega} f(x, y) v_n(x, y) dx dy + \int_{\partial\Omega} g(x, y) v_n(x, y) ds, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

a A_h je symetrická pozitivně definitní matice s prvky

$$a_{nk} = a(v_n, v_k) = \int \int_{\Omega} [p(x, y) \operatorname{grad} v_n(x, y) \cdot \operatorname{grad} v_k(x, y) + q(x, y) v_n(x, y) v_k(x, y)] dx dy + \\ + \int_{\delta\Omega} \sigma(x, y) v_n(x, y) v_k(x, y) ds, \quad n, k = 1, 2, \dots, N.$$

Je-li S počet trojúhelníků zvolené triangulace, potom je

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{s=1}^S T_s$$

a pro hranice oblasti platí

$$\delta\Omega = \bigcup_{r=1}^R L_r,$$

neboli hranici aproximujeme sjednocením hraničních stran L_r hraničních trojúhelníků triangulace. Přitom přirozeně platí, že $S \geq R$.

Potom vzorce pro výpočet prvků matice A_h a prvků vektoru F_h můžeme psát ve tvaru

$$a_{nk} = \sum_{s=1}^S \int \int_{T_s} [p(x, y) \operatorname{grad} v_n(x, y) \cdot \operatorname{grad} v_k(x, y) + q(x, y) v_n(x, y) v_k(x, y)] dx dy + \\ + \sum_{r=1}^R \int_{L_r} \sigma(x, y) v_n(x, y) v_k(x, y) ds, \quad n, k = 1, 2, \dots, N, \\ F_n = \sum_{s=1}^S \int_{T_s} f(x, y) v_n(x, y) dx dy + \sum_{r=1}^R \int_{L_s} g(x, y) v_n(x, y) ds.$$

Tím máme určeny koeficienty matice a můžeme hledat řešení celé soustavy.

Doporučuji vyhýbat se při triangulaci oblasti Ω obecným trojúhelníkům. Při použití tupouhlých trojúhelníků totiž hrozí (při limitním přechodu) ztráta linearity a s tím spojené havarování výpočtu. Tomuto nebezpečí se můžete vyhnout, pokud budete používat pouze ostroúhlé trojúhelníky, například při použití pravidelné sítě. (Nejjednodušší variantou potom je používat při triangulaci pravidelné šestiúhelníky.) Přitom na různých částech oblasti Ω může být velikost trojúhelníků různá. Podstatné zde je, že stále pracujeme s ostroúhlými trojúhelníky.

Pro řešení je vždy vhodné použít matematický software. Při řešení aplikačních úloh budete dostávat soustavy lineárních algebraických hodnot vysokých řádů. Použití MATLABu je popsáno například v práci [26], str 877.

14.3 Shrnutí

Seznámili jsme se s další numerickou metodou pro nalezení řešení okrajové úlohy pro parciální diferenciální rovnici - s metodou konečných prvků, která je v současnosti velmi často používána při řešení celé řady nejrůznějších úloh v řadě technických oblastí.

Ukázali jsme si možnosti triangulace oblasti oblasti a konstrukci bázových funkcí. Znovu jsme svedli úlohu najít řešení parciální diferenciální rovnice na problém nalezení řešení soustavy lineárních algebraických rovnic.

15 Výsledky

15.1 Metoda sečen

4.4 Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a $f''(x)$ na daném intervalu nemění znaménko. Metodou sečen na intervalu $\langle a, b \rangle$ proto kořen nalezneme. Dále je $\text{sign } f(a) \neq \text{sign } f''(x)$, proto $x_1 = a = 0$. aproximace: $x_1 = 0$, $x_2 = 0,5702$, $x_3 = 0,7501$, $x_4 = 0,7866$, $x_5 = 0,7932$

4.5 Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a $f''(x)$ na daném intervalu nemění znaménko. Metodou sečen na intervalu $\langle a, b \rangle$ proto kořen nalezneme. Dále je $\text{sign } f(a) \neq \text{sign } f''(x)$, proto $x_1 = a = 0,1$. aproximace: $x_1 = 0,1$, $x_2 = 0,1797$, $x_3 = 0,2851$, $x_4 = 0,3920$, $x_5 = 0,4745$, $x_6 = 0,5258$, $x_7 = 0,5536$, $x_8 = 0,5675$, $x_9 = 0,5742$

Úprava zadání 1: Všechny podmínky jsou splněny; aproximace: $x_1 = 0,5$, $x_2 = 0,5292$, $x_3 = 0,5484$, $x_4 = 0,5606$, $x_5 = 0,5682$

Úprava zadání 2: Všechny podmínky jsou splněny; aproximace: $x_1 = 0,5$, $x_2 = 0,5442$, $x_3 = 0,5647$, $x_4 = 0,5736$

Odpověď: Nelze, protože bod $x = 0$ je jedním z kořenů zadané rovnice.

4.6 Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a $f''(x)$ na daném intervalu nemění znaménko. Metodou sečen na intervalu $\langle a, b \rangle$ proto kořen nalezneme. Dále je $\text{sign } f(a) \neq \text{sign } f''(x)$, proto $x_1 = a = 0,2$. aproximace: $x_1 = 0,2$, $x_2 = 0,2640$, $x_3 = 0,3258$, $x_4 = 0,3784$, $x_5 = 0,4185$, $x_6 = 0,4465$, $x_7 = 0,4650$, $x_8 = 0,4767$, $x_9 = 0,4840$

Odpověď: Není možné volit žádný z těchto intervalů. Jeden z kořenů rovnice je také $x = 0$, což vylučuje druhý z nich. První zase nesplňuje podmínku rozdílnosti znamének krajních bodů, tj. $f(a)f(b) < 0$.

4.7 Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a $f''(x)$ na daném intervalu nemění znaménko. Metodou sečen na intervalu $\langle a, b \rangle$ proto kořen nalezneme. Dále je $\text{sign } f(a) \neq \text{sign } f''(x)$, proto $x_1 = a = 0,5$. aproximace: $x_1 = 0,5$, $x_2 = 0,7687$, $x_3 = 0,8468$, $x_4 = 0,8615$, $x_5 = 0,8639$

4.8 Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a $f''(x)$ na daném intervalu nemění znaménko. Metodou sečen na intervalu $\langle a, b \rangle$ proto kořen nalezneme. Dále je $\text{sign } f(a) \neq \text{sign } f''(x)$, proto $x_1 = a = 0$. aproximace: $x_1 = 0$, $x_2 = 0,2186$, $x_3 = 0,3077$, $x_4 = 0,3402$, $x_5 = 0,3515$, $x_6 = 0,3553$

Úprava zadání: Všechny podmínky jsou splněny; aproximace: $x_1 = 0$, $x_2 = 0,3163$, $x_3 = 0,3533$, $x_4 = 0,3569$

4.9 Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a $f''(x)$ na daném intervalu nemění znaménko. Metodou sečen na intervalu $\langle a, b \rangle$ proto kořen nalezneme. Dále je $\text{sign } f(a) \neq \text{sign } f''(x)$, proto $x_1 = a = 0$. aproximace: $x_1 = 0$, $x_2 = 0,4641$, $x_3 = 0,7810$, $x_4 = 0,8721$, $x_5 = 0,8908$, $x_6 = 0,8944$

Úprava zadání: Všechny podmínky jsou splněny; aproximace: $x_1 = 0,5$, $x_2 = 0,5763$, $x_3 = 0,6427$, $x_4 = 0,6986$, $x_5 = 0,7444$, $x_6 = 0,7808$, $x_7 = 0,8093$, $x_8 = 0,8093$, $x_9 = 0,8312$, $x_{10} = 0,8477$, $x_{11} = 0,8602$, $x_{12} = 0,8694$

Odpověď: Výpočet u metody sečen je ošidné zastavovat v situaci, kdy se následující dvě aproximace liší o méně než přesnost. Pokud bychom počítali dále, zjistili bychom, že např.

$x_{17} = 0,8912$. Hodnoty x_{25} a x_{26} se shodují již na 4 desetinná místa a je $x_{25} \doteq 0,8949$.

4.10 Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a $f''(x)$ na daném intervalu nemění znaménko. Metodou sečen na intervalu $\langle a, b \rangle$ proto kořen nalezneme. Dále je $\text{sign } f(a) \neq \text{sign } f''(x)$, proto $x_1 = a = 0$. aproximace: $x_1 = 0$, $x_2 = 0,6180$, $x_3 = 0,7701$, $x_4 = 0,7929$, $x_5 = 0,7959$

4.11 Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a $f''(x)$ na daném intervalu nemění znaménko. Metodou sečen na intervalu $\langle a, b \rangle$ proto kořen nalezneme. Dále je $\text{sign } f(a) = \text{sign } f''(x)$, proto $x_1 = b = -0,5$. aproximace: $x_1 = -0,5$, $x_2 = -1,3070$, $x_3 = -1,4409$, $x_4 = -1,4435$

Úprava zadání: Na tomto intervalu kořen hledat nelze, protože na něm není splněna podmínka o neměnnosti znaménka druhé derivace. Sami si ověřte!

4.12 Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a $f''(x)$ na daném intervalu nemění znaménko. Metodou sečen na intervalu $\langle a, b \rangle$ proto kořen nalezneme. Dále je $\text{sign } f(a) \neq \text{sign } f''(x)$, proto $x_1 = a = -0,5$. aproximace: $x_1 = 0,2$, $x_2 = 1,0831$, $x_3 = 1,1427$, $x_4 = 1,1450$

4.13 Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a $f''(x)$ na daném intervalu nemění znaménko. Metodou sečen na intervalu $\langle a, b \rangle$ proto kořen nalezneme. Dále je $\text{sign } f(a) \neq \text{sign } f''(x)$, proto $x_1 = a = 0,5$. aproximace: $x_1 = 0,5$, $x_2 = 0,8167$, $x_3 = 0,9827$, $x_4 = 1,0523$, $x_5 = 1,0784$, $x_6 = 1,0876$

Úprava zadání: Všechny podmínky jsou splněny; aproximace: $x_0 = 0$, $x_1 = 0,2384$, $x_2 = 0,4507$, $x_3 = 0,6342$, $x_4 = 0,7819$, $x_5 = 0,8914$, $x_6 = 0,9668$, $x_7 = 1,0158$, $x_8 = 1,0465$, $x_9 = 1,0652$, $x_{10} = 1,0764$, $x_{11} = 1,0831$

4.14 Sice platí, že $f(a)f(b) < 0$, avšak funkce není na daném intervalu spojitá a metodu sečen tedy nemůžeme při takto formulované úloze použít.

15.2 Modifikovaná Newtonova metoda

4.17 Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$; aproximace: $x_1 = 1$, $x_2 = 0,8270$, $x_3 = 0,8038$, $x_4 = 0,7974$

Úprava zadání: Podmínka konvergence zde splněna není. Pokud si tento fakt neověříme, zjistíme, že teprve hodnoty $x_{76} = 0,7996$ a $x_{77} = 0,7898$ se liší o méně než o požadovanou přesnost. I to je však jen náhoda – ke kořenu bychom vůbec nemuseli dojít.

4.18 Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$; aproximace: $x_1 = 1$, $x_2 = 0,7012$, $x_3 = 0,6402$, $x_4 = 0,5982$, $x_5 = 0,5904$

Odpověď: Výpočet zastavujeme v situaci, kdy se následující dvě aproximace liší o méně než přesnost. To však nezaručuje, že kořen skutečně s danou přesností získáme. Pokud bychom pokračovali ve výpočtu dále, dostali bychom, že $x_6 = 0,5860$, $x_7 = 0,5835$, $x_8 = 0,5820$, $x_9 = 0,5812$. Nyní je vidět, že rozdíl již není tak výrazný.

4.19 Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$; aproximace: $x_1 = 1$, $x_2 = 0,6666$, $x_3 = 0,5915$, $x_4 = 0,5541$, $x_5 = 0,5326$, $x_6 = 0,5195$, $x_7 = 0,5111$

Úprava zadání 1: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$; aproximace: $x_0 = 0,5$, $x_1 = 0,4950$

Úprava zadání 2: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$; aproximace: $x_0 = 1,5$, $x_1 = 0,9046$, $x_2 = 0,7599$, $x_3 = 0,6815$, $x_4 = 0,6320$, $x_5 = 0,5984$, $x_6 = 0,5743$,

$x_7 = 0,5566$, $x_8 = 0,5433$, $x_9 = 0,5331$, $x_{10} = 0,5252$

Odpověď: Volby $x_0 = 0,4$ a $x_0 = 0,2$ nesplňují nutnou podmínku konvergence; bod $x_0 = -0,2$ za počáteční aproximaci zvolit sice můžeme, avšak aproximace budou konvergovat k bodu $x = 0$, který je druhým kořenem dané rovnice.

4.20 Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$; aproximace: $x_1 = 1$, $x_2 = 0,8841$, $x_3 = 0,8697$, $x_4 = 0,8659$

Úprava zadání 1: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$; aproximace: $x_0 = 1,5$, $x_1 = 1,0826$, $x_2 = 0,9873$, $x_3 = 0,9395$, $x_4 = 0,9120$, $x_5 = 0,8952$, $x_6 = 0,8846$, $x_7 = 0,8778$

Úprava zadání 2: $x_8 = 0,8733$, $x_9 = 0,8703$, $x_{10} = 0,8684$, $x_{11} = 0,8671$

4.21 Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$; aproximace: $x_1 = 1,5$, $x_2 = 0,6707$, $x_3 = 0,5212$, $x_4 = 0,4505$, $x_5 = 0,4122$, $x_6 = 0,3903$, $x_7 = 0,3773$, $x_8 = 0,3695$

Úprava zadání 1: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$; aproximace: $x_0 = 1$, $x_1 = 0,5241$, $x_2 = 0,4322$, $x_3 = 0,3935$, $x_4 = 0,3753$, $x_5 = 0,3664$

Úprava zadání 2: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$; aproximace: $x_0 = 0,5$, $x_1 = 0,3702$, $x_2 = 0,3595$, $x_3 = 0,3577$

4.22 Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$; aproximace: $x_1 = 1$, $x_2 = 0,9132$, $x_3 = 0,9006$, $x_4 = 0,8969$

Úprava zadání 1: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$; aproximace: $x_0 = 1,5$, $x_1 = 1,2577$, $x_2 = 1,1749$, $x_3 = 1,1215$, $x_4 = 1,0828$, $x_5 = 1,0532$, $x_6 = 1,0297$, $x_7 = 1,0106$, $x_8 = 0,9948$, $x_9 = 0,9816$, $x_{10} = 0,9705$, $x_{11} = 0,9610$

Úprava zadání 2: Tato volba počáteční aproximace sice splňuje nutnou podmínku konvergence, avšak je pro danou funkci zcela nevhodná. I když k tomu, aby se následující dvě aproximace lišily o méně než ϵ , musíme určit 22 aproximací, vůbec si nepomůžeme, protože $x_{21} = 1,2487$ a $x_{22} = 1,2387$.

4.23 Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$; aproximace: $x_1 = 1$, $x_2 = 0,8213$, $x_3 = 0,8021$, $x_4 = 0,7978$

Úprava zadání: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$; aproximace: $x_0 = 1,5$, $x_1 = 1,0024$, $x_2 = 0,8961$, $x_3 = 0,8483$, $x_4 = 0,8243$, $x_5 = 0,8116$, $x_6 = 0,8048$

4.24 Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$; aproximace: $x_1 = -1,5$, $x_2 = -1,4440$, $x_3 = -1,4436$

Úprava zadání: Takto počáteční aproximaci zvolit nemůžeme, protože $f(-1)f''(-1) = -1,6091 < 0$.

4.25 Takto nelze počáteční aproximaci volit, protože $f'(0) = 0$.

Úprava zadání: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$; aproximace: $x_0 = 1$, $x_1 = 1,1621$, $x_2 = 1,1407$, $x_3 = 1,1461$.

4.26 Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$; aproximace: $x_1 = 1,5$, $x_2 = 1,2087$, $x_3 = 1,1471$, $x_4 = 1,1201$, $x_5 = 1,1068$, $x_6 = 1,1001$

Úprava zadání: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$; aproximace: $x_1 = 2$, $x_2 = 1,4865$, $x_3 = 1,3468$, $x_4 = 1,2684$, $x_5 = 1,2185$, $x_6 = 1,1846$, $x_7 = 1,1607$, $x_8 = 1,1435$, $x_9 = 1,1308$, $x_{10} = 1,1215$

4.27 Funkce $f(x)$ není v bodě x_0 definována, proto jej nemůžeme volit za počáteční aproximaci.

Úprava zadání 1: Ani toto zadání není korektní, protože funkce $f(x)$ není spojitá. Hledaný

kořen leží na intervalu $< 0; 1 >$ a v bodě $x = 1$ funkce není definována.

Úprava zadání 2: Za počáteční aproximaci lze volit body z intervalu $(0; 1)$ – pochopitelně ty, pro které je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Bod $x = 0$ nelze volit proto, že $f(0) = 0$. Např. při volbě $x_0 = 0,9$ máme aproximace $x_0 = 0,9$, $x_1 = 0,8423$, $x_2 = 0,8208$; $x_3 = 0,8066$, $x_4 = 0,7964$, $x_5 = 0,7887$.

15.3 Kombinovaná metoda sečen a tečen

4.28 Funkce $f(x)$ je na intervalu $< a, b >$ spojitá, pro $\forall x \in < a, b >$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a druhá derivace na daném intervalu nemění znaménko. Kombinovanou metodu tečen a sečen proto můžeme použít.

Podmínka $f(a_0)f''(a_0) > 0$ je splněna pro $x = b$, proto označíme $a_0 = 1$, $b_0 = 0$. Další aproximace jsou:

$$a_0 = 1, a_1 = 0,8270, a_2 = 0,7956, b_0 = 0, b_1 = 0,7511, b_2 = 0,7946$$

4.29 Funkce $f(x)$ je na intervalu $< a, b >$ spojitá, pro $\forall x \in < a, b >$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a druhá derivace na daném intervalu nemění znaménko. Kombinovanou metodu tečen a sečen proto můžeme použít.

Podmínka $f(a_0)f''(a_0) > 0$ je splněna pro $x = b$, proto označíme $a_0 = 1,1$, $b_0 = 0,1$. Další aproximace jsou:

$$a_0 = 1,1, a_1 = 0,7425, a_2 = 0,6086, a_3 = 0,5813, b_0 = 0,1, b_1 = 0,2854, b_2 = 0,5537, a_4 = 0,5800$$

4.30 Funkce $f(x)$ je na intervalu $< a, b >$ spojitá, pro $\forall x \in < a, b >$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a druhá derivace na daném intervalu nemění znaménko. Kombinovanou metodu tečen a sečen proto můžeme použít.

Podmínka $f(a_0)f''(a_0) > 0$ je splněna pro $x = b$, proto označíme $a_0 = 1,2$, $b_0 = 0,2$. Další aproximace jsou:

$$a_0 = 1,2, a_1 = 0,7595, a_2 = 0,5640, a_3 = 0,5025, b_0 = 0,2, b_1 = 0,3259, b_2 = 0,4650, a_4 = 0,4944$$

4.31 Funkce $f(x)$ je na intervalu $< a, b >$ spojitá, pro $\forall x \in < a, b >$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a druhá derivace na daném intervalu nemění znaménko. Kombinovanou metodu tečen a sečen proto můžeme použít.

Podmínka $f(a_0)f''(a_0) > 0$ je splněna pro $x = b$, proto označíme $a_0 = 1$, $b_0 = 0,5$. Další aproximace jsou:

$$a_0 = 1, a_1 = 0,8841, a_2 = 0,8650, b_0 = 0,5, b_1 = 0,8470, b_2 = 0,8644$$

4.32 Funkce $f(x)$ je na intervalu $< a, b >$ spojitá, pro $\forall x \in < a, b >$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a druhá derivace na daném intervalu nemění znaménko. Kombinovanou metodu tečen a sečen proto můžeme použít.

Podmínka $f(a_0)f''(a_0) > 0$ je splněna pro $x = b$, proto označíme $a_0 = 1$, $b_0 = 0$. Další aproximace jsou:

$$a_0 = 1, a_1 = 0,5241, a_2 = 0,3745, a_3 = 0,3575, b_0 = 0, b_1 = 0,3100, b_2 = 0,3567, a_4 = 0,3573$$

4.33 Funkce $f(x)$ je na intervalu $< a, b >$ spojitá, pro $\forall x \in < a, b >$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a druhá derivace na daném intervalu nemění znaménko. Kombinovanou metodu tečen a sečen proto můžeme použít.

Podmínka $f(a_0)f''(a_0) > 0$ je splněna pro $x = b$, proto označíme $a_0 = 1$, $b_0 = 0$. Další aproximace jsou:

$$a_0 = 1, a_1 = 0,9132, a_2 = 0,8958, b_0 = 0, b_1 = 0,7820, b_2 = 0,8950$$

4.34 Funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá, pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a druhá derivace na daném intervalu nemění znaménko. Kombinovanou metodu tečen a sečen proto můžeme použít.

Podmínka $f(a_0)f''(a_0) > 0$ je splněna pro $x = b$, proto označíme $a_0 = 1$, $b_0 = 0$. Další aproximace jsou:

$$a_0 = 1, a_1 = 0,8213, a_2 = 0,7969, b_0 = 0, b_1 = 0,7700, b_2 = 0,7964$$

4.35 Funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá, pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a druhá derivace na daném intervalu nemění znaménko. Kombinovanou metodu tečen a sečen proto můžeme použít.

Podmínka $f(a_0)f''(a_0) > 0$ je splněna pro $x = a$, proto označíme $a_0 = -1,5$, $b_0 = -0,5$. Další aproximace jsou:

$$a_0 = -1,5, a_1 = -1,4440, b_0 = -0,5, b_1 = -1,4422$$

4.36 Funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá, pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a druhá derivace na daném intervalu nemění znaménko. Kombinovanou metodu tečen a sečen proto můžeme použít.

Podmínka $f(a_0)f''(a_0) > 0$ je splněna pro $x = b$, proto označíme $a_0 = 1,2$, $b_0 = 0,2$. Další aproximace jsou:

$$a_0 = 1,2, a_1 = 1,1471, b_0 = 0,2, b_1 = 1,1427$$

4.37 Funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá, pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a druhá derivace na daném intervalu nemění znaménko. Kombinovanou metodu tečen a sečen proto můžeme použít.

Podmínka $f(a_0)f''(a_0) > 0$ je splněna pro $x = b$, proto označíme $a_0 = 1,5$, $b_0 = 0,5$. Další aproximace jsou:

$$a_0 = 1,5, a_1 = 1,2087, a_2 = 1,1055, a_3 = 1,0928, b_0 = 0,5, b_1 = 0,9867, b_2 = 1,0910, a_4 = 1,0926$$

15.4 Algebraické rovnice

4.42 Odhad velikosti kořenů: $\frac{1}{2} \leq |x_k| \leq 37$

Odhad počtu kladných kořenů podle Descartovy věty: 3 nebo 1

Odhad počtu záporných kořenů podle Descartovy věty: 1

Sturmova posloupnost: $M(x) = x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 36x - 36$, $M_1(x) = 4x^3 - 24x^2 + 14x + 36$, $M_2(x) = 8,5x^2 - 34x + 18$, $M_3(x) = 26,4706x - 52,9412$, $M_4(x) = 16$

$N(-\infty) = 4$, $N(-10) = 4$, $N(10) = 0$, $N(\infty) = 0$, proto na intervalu $(-\infty, -10)$ neleží žádný kořen, na intervalu $\langle -10, 10 \rangle$ leží 4 kořeny a na intervalu $(10, \infty)$ neleží žádný kořen

Posloupnost polynomů pro metodu Graeff-Lobačevského: $P^0(x) = x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 36x - 36$, $P^1(x) = x^4 - 50x^3 + 553x^2 - 1800x + 1296$, $P^2(x) = x^4 - 1394x^3 + 128401x^2 - 1806624x + 1679616$.

Absolutní hodnoty kořenů jsou: $|x_1| = 6,1103$, $|x_2| = 3,0980$, $|x_3| = 1,9368$, $|x_4| = 0,9818$

Kořeny ve skutečnosti jsou: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 6$

4.43 Odhad velikosti kořenů: $\frac{132}{199} \doteq 0,66 \leq |x_k| \leq 265$

Odhad počtu kladných kořenů podle Descartovy věty: 2 nebo 0

Odhad počtu záporných kořenů podle Descartovy věty: 3 nebo 1

Sturmova posloupnost: $M(x) = x^5 + 11x^4 - 15x^3 - 155x^2 + 134x + 264$, $M_1(x) = 5x^4 + 44x^3 - 45x^2 - 310x + 134$, $M_2(x) = 25,36x^3 - 73,2x^2 - 243,6x - 205,04$, $M_3(x) = 82,3172x^2 - 14,4449x - 373,0610$, $M_4(x) = 115,0428x - 146,8697$, $M_5(x) = 257,3379$
 $N(-\infty) = 5$, $N(-10) = 4$, $N(10) = 0$, $N(\infty) = 0$, proto na intervalu $(-\infty, -10)$ leží 1 kořen, na intervalu $\langle -10, 10 \rangle$ leží 4 kořeny a na intervalu $(10, \infty)$ neleží žádný kořen

Posloupnost polynomů pro metodu Graeff-Lobačevského: $P^0(x) = x^5 + 11x^4 - 15x^3 - 155x^2 + 134x + 264$, $P^1(x) = x^5 - 151x^4 + 3903x^3 - 33853x^2 + 99796x - 69696$, $P^2(x) = x^5 - 14995x^4 + 5209395x^3 - 388066225x^2 + 5,2404 \cdot 10^9x - 4,8575 \cdot 10^9$.

Absolutní hodnoty kořenů jsou: $|x_1| = 11,0659$, $|x_2| = 4,3173$, $|x_3| = 2,9379$, $|x_4| = 1,9170$, $|x_5| = 0,9812$

Kořeny ve skutečnosti jsou: $x_1 = -11$, $x_2 = -4$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$, $x_5 = 3$

4.44 Odhad velikosti kořenů: $\frac{4}{9} \leq |x_k| \leq 16$

Odhad počtu kladných kořenů podle Descartovy věty: 3 nebo 1

Odhad počtu záporných kořenů podle Descartovy věty: 2 nebo 0

Sturmova posloupnost: $M(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$, $M_1(x) = 5x^4 - 12x^3 - 15x^2 + 30x + 4$, $M_2(x) = 3,44x^3 - 7,2x^2 - 6,8x + 11,52$, $M_3(x) = 8,3288x^2 - 10,2217x - 9,1401$, $M_4(x) = 6,6800x - 8,2517$, $M_5(x) = 9,0575$

$N(-\infty) = 5$, $N(-10) = 5$, $N(10) = 0$, $N(\infty) = 0$, proto na intervalu $(-\infty, -10)$ neleží žádný kořen, na intervalu $\langle -10, 10 \rangle$ leží 5 kořenů a na intervalu $(10, \infty)$ neleží žádný kořen

Posloupnost polynomů pro metodu Graeff-Lobačevského: $P^0(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$, $P^1(x) = x^5 - 19x^4 + 123x^3 - 337x^2 + 376x - 144$, $P^2(x) = x^5 - 115x^4 + 3075x^3 - 26545x^2 + 44320x - 20736$.

Absolutní hodnoty kořenů jsou: $|x_1| = 3,2747$, $|x_2| = 2,2740$, $|x_3| = 1,7141$, $|x_4| = 1,1367$, $|x_5| = 0,8270$

Kořeny ve skutečnosti jsou: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $x_5 = 3$

4.45 Odhad velikosti kořenů: $\frac{3}{8} \leq |x_k| \leq 21$

Odhad počtu kladných kořenů podle Descartovy věty: 3 nebo 1

Odhad počtu záporných kořenů podle Descartovy věty: 0

Sturmova posloupnost: $M(x) = x^3 - 9x^2 + 20x - 12$, $M_1(x) = 3x^2 - 18x + 20$, $M_2(x) = \frac{14}{3}x - 8$, $M_3(x) = 2,0408$

$N(-\infty) = 3$, $N(-10) = 3$, $N(10) = 0$, $N(\infty) = 0$, proto na intervalu $(-\infty, -10)$ neleží žádný kořen, na intervalu $\langle -10, 10 \rangle$ leží 3 kořeny a na intervalu $(10, \infty)$ neleží žádný kořen

Posloupnost polynomů pro metodu Graeff-Lobačevského: $P^0(x) = x^3 - 9x^2 + 20x - 12$, $P^1(x) = x^3 - 41x^2 + 184x - 144$, $P^2(x) = x^3 - 1313x^2 + 22048x - 20736$.

Absolutní hodnoty kořenů jsou: $|x_1| = 6,0196$, $|x_2| = 2,0243$, $|x_3| = 0,9848$

Kořeny ve skutečnosti jsou: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$

4.46 Odhad velikosti kořenů: $\frac{1}{49} \doteq 0,02 \leq |x_k| \leq 4$

Odhad počtu kladných kořenů podle Descartovy věty: 2 nebo 0

Odhad počtu záporných kořenů podle Descartovy věty: 2

Sturmova posloupnost: $M(x) = 80x^4 - 164x^3 - 240x^2 + 13x + 5$, $M_1(x) = 320x^3 - 492x^2 - 480x + 13$, $M_2(x) = 183,0375x^2 + 51,75x - 6,6656$, $M_3(x) = 303,6646x + 8,2118$, $M_4(x) = 7,9312$

$N(-\infty) = 4$, $N(-10) = 4$, $N(10) = 0$, $N(\infty) = 0$, proto na intervalu $(-\infty, -10)$ neleží žádný kořen, na intervalu $\langle -10, 10 \rangle$ leží 4 kořeny a na intervalu $(10, \infty)$ neleží žádný kořen
Posloupnost polynomů pro metodu Graeff-Lobačevského: $P^0(x) = 80x^4 - 164x^3 - 240x^2 + 13x + 5$, $P^1(x) = 6400x^4 - 65296x^3 - 62664x^2 - 2569x + 25$, $P^2(x) = 40960000x^4 - 3,4615 \cdot 10^9x^3 + 3,5916 \cdot 10^9x^2 - 3546561x + 625$.

Absolutní hodnoty kořenů jsou: $|x_1| = 3,0320$, $|x_2| = 1,0093$, $|x_3| = 0,1763$, $|x_4| = 0,1159$
Kořeny ve skutečnosti jsou: $x_1 = -0,2$, $x_2 = -0,5$, $x_3 = 0,25$, $x_4 = 2,5$

4.47 Odhad velikosti kořenů: $\frac{36}{425} \doteq 0,09 \leq |x_k| \leq \frac{409}{20} = 20,45$

Odhad počtu kladných kořenů podle Descartovy věty: 2 nebo 0

Odhad počtu záporných kořenů podle Descartovy věty: 2

Sturmova posloupnost: $M(x) = 20x^4 - 48x^3 - 389x^2 - 288x + 36$, $M_1(x) = 80x^3 - 144x^2 - 778x - 288$, $M_2(x) = 216, 1x^2 + 332,7x + 7,2$, $M_3(x) = 369,3472x + 279,0986$, $M_4(x) = 120,8102$

$N(-\infty) = 4$, $N(-10) = 4$, $N(10) = 0$, $N(\infty) = 0$, proto na intervalu $(-\infty, -10)$ neleží žádný kořen, na intervalu $\langle -10, 10 \rangle$ leží 4 kořeny a na intervalu $(10, \infty)$ neleží žádný kořen
Posloupnost polynomů pro metodu Graeff-Lobačevského: $P^0(x) = 20x^4 - 48x^3 - 389x^2 - 288x + 36$, $P^1(x) = 400x^4 - 17864x^3 + 125113x^2 - 110952x + 1296$, $P^2(x) = 160000x^4 - 219032096x^3 + 1,1690 \cdot 10^{10}x^2 - 1,1986 \cdot 10^{10}x + 1679616$.

Absolutní hodnoty kořenů jsou: $|x_1| = 6,0827$, $|x_2| = 2,7029$, $|x_3| = 1,0063$, $|x_4| = 0,1088$
Kořeny ve skutečnosti jsou: $x_1 = -2,5$, $x_2 = -1,5$, $x_3 = 0,4$, $x_4 = 6$

4.48 Odhad velikosti kořenů: $\frac{24}{169} \doteq 0,14 \leq |x_k| \leq 146$

Odhad počtu kladných kořenů podle Descartovy věty: 0

Odhad počtu záporných kořenů podle Descartovy věty: 4 nebo 2 nebo 0

Sturmova posloupnost: $M(x) = 2x^4 + 70x^3 + 290x^2 + 160x + 48$, $M_1(x) = 8x^3 + 210x^2 + 580x + 160$, $M_2(x) = 314,4x^2 + 1148,7x + 302$, $M_3(x) = 88,2x + 13,7$, $M_4(x) = 131,8$

$N(-\infty) = 4$, $N(-10) = 3$, $N(10) = 0$, $N(\infty) = 0$, proto na intervalu $(-\infty, -10)$ leží 1 kořen, na intervalu $\langle -10, 10 \rangle$ leží 3 kořeny a na intervalu $(10, \infty)$ neleží žádný kořen

Posloupnost polynomů pro metodu Graeff-Lobačevského: $P^0(x) = 2x^4 + 70x^3 + 290x^2 + 160x + 48$, $P^1(x) = 4x^4 - 3740x^3 + 61892x^2 + 2240x + 2304$, $P^2(x) = 16x^4 - 13492464x^3 + 3,8474 \cdot 10^9x^2 + 280180736x + 5308416$.

Absolutní hodnoty kořenů jsou: $|x_1| = 30,3035$, $|x_2| = 4,1093$, $|x_3| = 2,2040$, $|x_4| = 1,5740$

Kořeny ve skutečnosti jsou: $x_1 = -12$, $x_2 = -4$, $x_3 = -1$, $x_4 = -0,5$

4.49 Odhad velikosti kořenů: $\frac{180}{197} \doteq 0,91 \leq |x_k| \leq 3241$

Odhad počtu kladných kořenů podle Descartovy věty: 1

Odhad počtu záporných kořenů podle Descartovy věty: 2 nebo 0

Sturmova posloupnost: $M(x) = x^3 + 9x^2 - 306x - 3240$, $M_1(x) = 3x^2 - 18x - 306$, $M_2(x) = 222x + 2934$, $M_3(x) = 199,86$

$N(-\infty) = 3$, $N(-10) = 1$, $N(10) = 1$, $N(\infty) = 0$, proto na intervalu $(-\infty, -10)$ leží 2 kořeny, na intervalu $\langle -10, 10 \rangle$ neleží žádný kořen a na intervalu $(10, \infty)$ leží 1 kořen

Posloupnost polynomů pro metodu Graeff-Lobačevského: $P^0(x) = x^3 + 9x^2 - 306x - 3240$, $P^1(x) = x^3 - 693x^2 + 151956x - 10497600$, $P^2(x) = x^3 - 176337x^2 + 8,5410 \cdot 10^9x - 1,102 \cdot 10^{14}$.

Absolutní hodnoty kořenů jsou: $|x_1| = 20,4921$, $|x_2| = 14,8351$, $|x_3| = 10,6578$

Kořeny ve skutečnosti jsou: $x_1 = -15$, $x_2 = -12$, $x_3 = 18$

4.50 Odhad velikosti kořenů: $\frac{21}{277} \doteq 0,08 \leq |x_k| \leq \frac{7}{4}$

Odhad počtu kladných kořenů podle Descartovy věty: 2 nebo 0

Odhad počtu záporných kořenů podle Descartovy věty: 2 nebo 0

Sturmova posloupnost: $M(x) = 256x^4 - 96x^3 - 192x^2 + 46x + 21$, $M_1(x) = 1024x^3 - 288x^2 - 384x + 46$, $M_2(x) = 102,75x^2 - 25,5x - 22,078$, $M_3(x) = 172,376x - 38,722$, $M_4(x) = 22,621$

$N(-\infty) = 4$, $N(-10) = 4$, $N(10) = 0$, $N(\infty) = 0$, proto na intervalu $(-\infty, -10)$ neleží žádný kořen, na intervalu $\langle -10, 10 \rangle$ leží 4 kořeny a na intervalu $(10, \infty)$ neleží žádný kořen

Posloupnost polynomů pro metodu Graeff-Lobačevského: $P^0(x) = 256x^4 - 96x^3 - 192x^2 + 46x + 21$, $P^1(x) = 65536x^4 - 107520x^3 + 56448x^2 - 10180x + 441$, $P^2(x) = 4,2950 \cdot 10^9 x^4 - 4,1618 \cdot 10^9 x^3 - 1,0551 \cdot 10^9 x^2 - 53845264x + 194481$.

Absolutní hodnoty kořenů jsou: $|x_1| = 0,9922$, $|x_2| = 0,7096$, $|x_3| = 0,4753$, $|x_4| = 0,2452$

Kořeny ve skutečnosti jsou: $x_1 = -0,75$, $x_2 = -0,25$, $x_3 = 0,5$, $x_4 = 0,8$

4.51 Odhad velikosti kořenů: $\frac{48}{187} \doteq 0,26 \leq |x_k| \leq 140$

Odhad počtu kladných kořenů podle Descartovy věty: 5 nebo 3 nebo 1

Odhad počtu záporných kořenů podle Descartovy věty: 0

Sturmova posloupnost: $M(x) = x^5 - 13x^4 + 63x^3 - 139x^2 + 136x - 48$, $M_1(x) = 5x^4 - 52x^3 + 189x^2 - 278x + 136$, $M_2(x) = 1,84x^3 - 14,88x^2 + 35,76x - 22,72$, $M_3(x) = 1,7013x^2 - 8,5066x + 6,8053$, $M_4(x) = 0$ – všechny hodnoty jsou zaokrouhleny, avšak $M_4(x)$ musí být při přesném dělení nulový polynom.

To ale znamená, že polynom nemá jen prosté kořeny, a proto nemůžeme odhad pomocí Sturmovy posloupnosti použít.

Posloupnost polynomů pro metodu Graeff-Lobačevského: $P^0(x) = x^5 - 13x^4 + 63x^3 - 139x^2 + 136x - 48$, $P^1(x) = x^5 - 43x^4 + 627x^3 - 3443x^2 + 5152x - 2304$, $P^2(x) = x^5 - 595x^4 + 108195x^3 - 5523025x^2 + 10723840x - 5308416$.

Absolutní hodnoty kořenů jsou: $|x_1| = 4,9389$, $|x_2| = 3,6722$, $|x_3| = 2,6730$, $|x_4| = 1,1804$, $|x_5| = 0,8388$ – všimněte si, že jsme získali pět různých kořenů, přitom ve skutečnosti jsou některé kořeny násobné!

Kořeny ve skutečnosti jsou: $x_{1,2} = 1$, $x_3 = 3$, $x_{4,5} = 4$

15.5 Vícekrokové metody řešení počátečních úloh

7.26 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
<i>Runge-Kutta</i>	1	0,8213	0,6897	0,6112	0,5907	0,6321
<i>Adams 3. řádu</i>	1	0,8213	0,6897	0,6116	0,5913	0,6329
<i>Adams 4. řádu</i>	1	0,8213	0,6897	0,6112	0,5906	0,6320
<i>Adams 5. řádu</i>	1	0,8213	0,6897	0,6112	0,5907	0,6321
<i>prediktor – korektor</i>	1	0,8213	0,6897	0,6112	0,5907	0,6322

7.27 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
<i>Runge–Kutta</i>	0	0,0033	0,0334	0,1476	0,4731	1,2926
<i>Adams 3. řádu</i>	0	0,0033	0,0334	0,1319	0,3981	1,0418
<i>Adams 4. řádu</i>	0	0,0033	0,0334	0,1476	0,4553	1,2025
<i>Adams 5. řádu</i>	0	0,0033	0,0334	0,1476	0,4731	1,2726
<i>prediktor – korektor</i>	0	0,0033	0,0334	0,1476	0,4709	1,2592

7.28 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
<i>Runge–Kutta</i>	1	1,4657	2,0885	2,9154	4,0059	5,4365
<i>Adams 3. řádu</i>	1	1,4657	2,0885	2,9111	3,9947	5,4153
<i>Adams 4. řádu</i>	1	1,4657	2,0885	2,9154	4,0049	5,4336
<i>Adams 5. řádu</i>	1	1,4657	2,0885	2,9154	4,0059	5,4362
<i>prediktor – korektor</i>	1	1,4657	2,0885	2,9154	4,0059	5,4363

7.29 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
<i>Runge–Kutta</i>	1	1,1697	1,3940	1,6794	2,0356	2,4759
<i>Adams 3. řádu</i>	1	1,1697	1,3940	1,6781	2,0340	2,4734
<i>Adams 4. řádu</i>	1	1,1697	1,3940	1,6794	2,0356	2,4757
<i>Adams 5. řádu</i>	1	1,1697	1,3940	1,6794	2,0356	2,4757
<i>prediktor – korektor</i>	1	1,1697	1,3940	1,6794	2,0356	2,4758

7.30 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
<i>Runge–Kutta</i>	0	0,3192	1,0622	2,7506	6,5439	15,0193
<i>Adams 3. řádu</i>	0	0,3192	1,0622	2,6073	5,8624	12,7381
<i>Adams 4. řádu</i>	0	0,3192	1,0622	2,7506	6,3820	14,2008
<i>Adams 5. řádu</i>	0	0,3192	1,0622	2,7506	6,5439	14,8375
<i>prediktor – korektor</i>	0	0,3192	1,0622	2,7506	6,5248	14,7177

7.31 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
<i>Runge–Kutta</i>	1	1,4456	2,0084	2,7379	3,7061	5,0257
<i>Adams 3. řádu</i>	1	1,4456	2,0084	2,7318	3,6871	4,9819
<i>Adams 4. řádu</i>	1	1,4456	2,0084	2,7379	3,7018	5,0115
<i>Adams 5. řádu</i>	1	1,4456	2,0084	2,7379	3,7061	5,0222
<i>prediktor – korektor</i>	1	1,4456	2,0084	2,7379	3,7063	5,0252

7.32 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
<i>Runge–Kutta</i>	1	1,0026	1,0204	1,0701	1,1754	1,3759
<i>Adams 3. řádu</i>	1	1,0026	1,0204	1,0689	1,1709	1,3646
<i>Adams 4. řádu</i>	1	1,0026	1,0204	1,0701	1,1731	1,3704
<i>Adams 5. řádu</i>	1	1,0026	1,0204	1,0701	1,1754	1,3741
<i>prediktor – korektor</i>	1	1,0026	1,0204	1,0701	1,1758	1,3776

7.33 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
<i>Runge–Kutta</i>	1	0,4521	0,2089	0,1137	0,1024	0,1524
<i>Adams 3. řádu</i>	1	0,4521	0,2089	0,0599	0,1066	0,0814
<i>Adams 4. řádu</i>	1	0,4521	0,2089	0,1137	0,1285	0,1422
<i>Adams 5. řádu</i>	1	0,4521	0,2089	0,1137	0,1024	0,1382
<i>prediktor – korektor</i>	1	0,4521	0,2089	0,1137	0,0929	0,1285

7.34 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
<i>Runge–Kutta</i>	2	2,4535	3,0295	3,7553	4,6638	5,7956
<i>Adams 3. řádu</i>	2	2,4535	3,0295	3,7533	4,6586	5,7860
<i>Adams 4. řádu</i>	2	2,4535	3,0295	3,7553	4,6634	5,7945
<i>Adams 5. řádu</i>	2	2,4535	3,0295	3,7553	4,6638	5,7956
<i>prediktor – korektor</i>	2	2,4535	3,0295	3,7553	4,6638	5,7956

7.35 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
<i>Runge–Kutta</i>	2	2,4449	2,9928	3,6664	4,4936	5,5083
<i>Adams 3. řádu</i>	2	2,4449	2,9928	3,6647	4,4892	5,5002
<i>Adams 4. řádu</i>	2	2,4449	2,9928	3,6664	4,4933	5,5074
<i>Adams 5. řádu</i>	2	2,4449	2,9928	3,6646	4,4936	5,5083
<i>prediktor – korektor</i>	2	2,4449	2,9928	3,6664	4,4936	5,5083

15.6 Eulerova metoda pro soustavy

9.2 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	z
0	0	1	2
1	0,25	3,25	2,75
2	0,5	6,8125	4,25
3	0,75	12,7656	7,0156
4	1	22,9727	11,9609

Úprava zadání 1:

i	x	y	z
0	0	1	2
1	0,125	2,1250	2,375
2	0,25	3,5781	2,9375
3	0,375	5,4941	3,7520
4	0,5	8,0569	4,9077
5	0,625	11,5179	6,5283
6	0,75	16,2217	8,7841
7	0,875	22,6415	11,9098
8	1	31,4265	16,2287

Úprava zadání 2:

i	x	y	z
0	0	1	1
1	0,25	2,25	1,5
2	0,5	4,3125	2,4375
3	0,75	7,8281	4,1250
4	1	13,9102	7,1133

9.3 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	z
0	1	0	1
1	1,25	0,25	-0,25
2	1,5	-0,25	-0,0625
3	1,75	0,1719	0,1406
4	2	-0,0938	-0,1211

Úprava zadání:

i	x	y	z
0	1	0	1
1	1,1	0,1	0,5
2	1,2	0,08	0,23
3	1,3	0,047	0,099
4	1,4	0,024	0,0401
5	1,5	0,0112	0,0153

9.4 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	z
0	0	0	1
1	0,25	-0,25	1,5
2	0,5	-0,875	2,1875
3	0,75	-2,2969	3,0625
4	1	-5,3594	4,0195

Úprava zadání:

i	x	y	z
0	0	0	1
1	0,1	-0,1	1,2
2	0,2	-0,26	1,43
3	0,3	-0,507	1,69
4	0,4	-0,8788	1,9773
5	0,5	-1,4281	2,2849

9.5 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	z
0	0	1	1
1	0,25	1,25	1
2	0,5	1,5	0,9375
3	0,75	1,7344	0,8125
4	1	1,9375	0,6289

Úprava zadání 1:

i	x	y	z
0	0	1	1
1	0,1	1,1	1
2	0,2	1,2	0,99
3	0,3	1,299	0,97
4	0,4	1,396	0,9401
5	0,5	1,49	0,9005

Úprava zadání 2:

i	x	y	z
0	0	1	1
1	0,05	1,05	1
2	0,1	1,1	0,9975
3	0,15	1,1499	0,9925
4	0,2	1,1995	0,9850
5	0,25	1,2488	0,9750
6	0,3	1,2975	0,9626
7	0,35	1,3456	0,9477
8	0,4	1,3930	0,9304
9	0,45	1,4395	0,9108
10	0,5	1,4851	0,8888

Úprava zadání 3:

Takto formulovanou úlohu nelze touto metodou řešit, protože funkce $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ není na intervalu $< 1; 2 >$ spojitá.

9.6 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	v
0	0	0	1
1	0,25	1,25	0,5
2	0,5	2,625	-0,0625
3	0,75	4,125	-0,6875
4	1	5,75	-1,3750

Úprava zadání 1:

i	x	y	z
0	0	0	1
1	0,1	0,5	0,8
2	0,2	1,0200	0,5900
3	0,3	1,5600	0,3700
4	0,4	2,1200	0,1400
5	0,5	2,7000	-0,1000

Úprava zadání 2:

i	x	y	z
0	0	0	1
1	0,05	0,25	0,9000
2	0,1	0,5050	0,7975
3	0,15	0,7650	0,6925
4	0,2	1,0300	0,5850
5	0,25	1,3000	0,4750
6	0,3	1,5750	0,3625
7	0,35	1,8550	0,2475
8	0,4	2,1400	0,1300
9	0,45	2,4300	0,0100
10	0,5	2,7250	-0,1125

Úprava zadání 3:

i	x	y	z
0	0	1	1
1	0,1	1,7000	0,7000
2	0,2	2,4200	0,3900
3	0,3	3,1600	0,0700
4	0,4	3,9200	-0,2600
5	0,5	4,7000	-0,6000

9.7 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	v	w
0	0	0	1	2
1	0,25	-0,75	1,5	3,75
2	0,5	-1,875	2,4375	6,75
3	0,75	-3,7031	4,1250	11,9531
4	1	-6,7969	7,1133	21,0234

9.8 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	v	w
0	0	0	0	1
1	0,25	0,25	-0,25	1,25
2	0,5	0,5	-0,5625	1,5
3	0,75	0,7344	-0,9531	1,7344
4	1	0,9297	-1,4414	1,9297

9.9 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	v	w
0	0	1	0	1
1	0,1	1	0,2	1,2
2	0,2	1,0200	0,4000	1,4200
3	0,3	1,0600	0,6020	1,6620
4	0,4	1,1202	0,8080	1,9282
5	0,5	1,2010	1,0200	2,2210

9.10 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	v	w
0	0	1	2	0
1	0,1	1,5	2,1	0,1
2	0,2	2,08	2,26	0,26
3	0,3	2,766	2,4940	0,4940
4	0,4	3,5908	2,8200	0,8200
5	0,5	4,5959	3,2611	1,2611

9.11 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	v	w
0	0	0	0	1
1	0,1	0	0	0,9
2	0,2	0	0	0,81
3	0,3	0	0	0,729
4	0,4	0	0	0,6561
5	0,5	0	0	0,5905

Úprava zadání 1:

i	x	u	v	w
0	0	0	0	0
1	0,1	0	0	0
2	0,2	0	0	0
3	0,3	0	0	0
4	0,4	0	0	0
5	0,5	0	0	0

Úprava zadání 2:

i	x	u	v	w
0	0	0,01	0,02	0,03
1	0,1	0,008	0,0190	0,0300
2	0,2	0,0061	0,0182	0,0297
3	0,3	0,0043	0,0176	0,0292
4	0,4	0,0025	0,0172	0,0284
5	0,5	0,0008	0,0169	0,0276

15.7 Metody Rungeho–Kuttovy pro soustavy

9.16 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	k	z	l
0	0	1		2	
1	0,25	4,1187	$k_1 = 2,25$ $k_2 = 2,9063$ $k_3 = 3,1758$ $k_4 = 4,2979$ $\Delta y = 3,1187$	3,2275	$l_1 = 0,75$ $l_2 = 1,1250$ $l_3 = 1,2593$ $l_4 = 1,8574$ $\Delta z = 1,2275$
2	0,5	10,2706	$k_1 = 4,2572$ $k_2 = 5,7076$ $k_3 = 6,2698$ $k_4 = 8,6994$ $\Delta y = 6,1519$	6,0451	$l_1 = 1,8365$ $l_2 = 2,5983$ $l_3 = 2,8748$ $l_4 = 4,1227$ $\Delta z = 2,8176$
3	0,75	22,9351	$k_1 = 8,6127$ $k_2 = 11,7288$ $k_3 = 12,9115$ $k_4 = 18,0938$ $\Delta y = 12,6645$	12,1761	$l_1 = 4,0789$ $l_2 = 5,6654$ $l_3 = 6,2532$ $l_4 = 8,8701$ $\Delta z = 6,1310$
4	1	49,4485	$k_1 = 17,9099$ $k_2 = 24,5375$ $k_3 = 27,0340$ $k_4 = 38,0276$ $\Delta y = 26,5134$	25,2761	$l_1 = 8,7778$ $l_2 = 12,1138$ $l_3 = 13,3592$ $l_4 = 18,8761$ $\Delta z = 13,1000$

Úprava zadání 1:

i	x	y	k	z	l
0	0	1		2	
1	0,125	2,3136	$k_1 = 1,1250$ $k_2 = 1,2891$ $k_3 = 1,3228$ $k_4 = 1,5328$ $\Delta y = 1,3136$	2,4805	$l_1 = 0,3750$ $l_2 = 0,4688$ $l_3 = 0,4849$ $l_4 = 0,6010$ $\Delta z = 0,4805$
2	0,25	4,1238	$k_1 = 1,5295$ $k_2 = 1,7749$ $k_3 = 1,8235$ $k_4 = 2,1354$ $\Delta y = 1,8103$	3,2301	$l_1 = 0,5993$ $l_2 = 0,7323$ $l_3 = 0,7560$ $l_4 = 0,9217$ $\Delta z = 0,7496$
3	0,375	6,6686	$k_1 = 2,1305$ $k_2 = 2,4935$ $k_3 = 2,5638$ $k_4 = 3,0232$ $\Delta y = 2,5447$	4,3652	$l_1 = 0,9192$ $l_2 = 1,1099$ $l_3 = 1,1445$ $l_4 = 1,3828$ $\Delta z = 1,1351$
4	0,5	10,2924	$k_1 = 3,0162$ $k_2 = 3,5495$ $k_3 = 3,6515$ $k_4 = 4,3248$ $\Delta y = 3,6238$	6,0560	$l_1 = 1,3792$ $l_2 = 1,6539$ $l_3 = 1,7044$ $l_4 = 2,0487$ $\Delta z = 1,6908$
5	0,625	15,4955	$k_1 = 4,3145$ $k_2 = 5,0951$ $k_3 = 5,2432$ $k_4 = 6,2272$ $\Delta y = 5,2031$	8,5506	$l_1 = 2,0435$ $l_2 = 2,4409$ $l_3 = 2,5146$ $l_4 = 3,0133$ $\Delta z = 2,4946$
6	0,75	23,0043	$k_1 = 6,2122$ $k_2 = 7,3520$ $k_3 = 7,5672$ $k_4 = 9,0027$ $\Delta y = 7,5089$	12,2107	$l_1 = 3,0058$ $l_2 = 3,5819$ $l_3 = 3,6891$ $l_4 = 4,4128$ $\Delta z = 3,6601$
7	0,875	33,8752	$k_1 = 8,9809$ $k_2 = 10,6427$ $k_3 = 10,9556$ $k_4 = 13,0476$ $\Delta y = 10,8709$	17,5629	$l_1 = 4,4019$ $l_2 = 5,2383$ $l_3 = 5,3944$ $l_4 = 6,4456$ $\Delta z = 5,3522$
8	1	49,6438	$k_1 = 13,0158$ $k_2 = 15,4368$ $k_3 = 15,8919$ $k_4 = 18,9385$ $\Delta y = 15,7686$	25,3737	$l_1 = 6,4298$ $l_2 = 7,6451$ $l_3 = 7,8724$ $l_4 = 9,4003$ $\Delta z = 7,8108$

Úprava zadání 2:

i	x	y	k	z	l
0	0	1		1	
1	0,25	2,7827	$k_1 = 1,25$ $k_2 = 1,6563$ $k_3 = 1,8164$ $k_4 = 2,5010$ $\Delta y = 1,7827$	1,7808	$l_1 = 0,5$ $l_2 = 0,7188$ $l_3 = 0,7969$ $l_4 = 1,1533$ $\Delta z = 0,7808$
2	0,5	6,4050	$k_1 = 2,4764$ $k_2 = 3,3564$ $k_3 = 3,6925$ $k_4 = 5,1591$ $\Delta y = 3,6222$	3,5057	$l_1 = 1,1409$ $l_2 = 1,5930$ $l_3 = 1,7596$ $l_4 = 2,5039$ $\Delta z = 1,7250$
3	0,75	13,9500	$k_1 = 5,1070$ $k_2 = 6,9842$ $k_3 = 7,6929$ $k_4 = 10,8091$ $\Delta y = 7,5451$	7,2112	$l_1 = 2,4777$ $l_2 = 3,4258$ $l_3 = 3,7789$ $l_4 = 5,3456$ $\Delta z = 3,7054$
4	1	29,8163	$k_1 = 10,6987$ $k_2 = 14,6812$ $k_3 = 16,1783$ $k_4 = 22,7798$ $\Delta y = 15,8662$	15,0921	$l_1 = 5,2903$ $l_2 = 7,2889$ $l_3 = 8,0366$ $l_4 = 11,3440$ $\Delta z = 7,8809$

9.17 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	k	z	l
0	1	0		1	
1	1,25	0,0169	$k_1 = 0,25$ $k_2 = -0,1250$ $k_3 = 0,2930$ $k_4 = -0,4844$ $\Delta y = 0,0169$	0,2710	$l_1 = -1,25$ $l_2 = -0,5313$ $l_3 = -0,8867$ $l_4 = -0,2881$ $\Delta z = -0,7290$
2	1,5	0,0086	$k_1 = 0,0381$ $k_2 = -0,0386$ $k_3 = 0,0545$ $k_4 = -0,1197$ $\Delta y = -0,0083$	0,0729	$l_1 = -0,3472$ $l_2 = -0,1397$ $l_3 = -0,2502$ $l_4 = -0,0617$ $\Delta z = -0,1981$
3	1,75	0,0033	$k_1 = 0,0032$ $k_2 = -0,0115$ $k_3 = 0,0087$ $k_4 = -0,0294$ $\Delta y = -0,0053$	0,0195	$l_1 = -0,0954$ $l_2 = -0,0366$ $l_3 = -0,0697$ $l_4 = -0,0127$ $\Delta z = -0,0534$
4	2	0,0011	$k_1 = -0,0009$ $k_2 = -0,0034$ $k_3 = 0,0009$ $k_4 = -0,0072$ $\Delta y = -0,0022$	0,0052	$l_1 = -0,0260$ $l_2 = -0,0095$ $l_3 = -0,0192$ $l_4 = -0,0024$ $\Delta z = -0,0143$

Úprava zadání 1:

i	x	y	k	z	l
0	1	0		1	
1	1,1	0,0543	$k_1 = 0,1000$ $k_2 = 0,0400$ $k_3 = 0,0668$ $k_4 = 0,0125$ $\Delta y = 0,0543$	0,6008	$l_1 = -0,5000$ $l_2 = -0,3850$ $l_3 = -0,4078$ $l_4 = -0,3095$ $\Delta z = -0,3992$
2	1,2	0,0594	$k_1 = 0,0221$ $k_2 = -0,0012$ $k_3 = 0,0107$ $k_4 = -0,0107$ $\Delta y = 0,0051$	0,3551	$l_1 = -0,3113$ $l_2 = -0,2357$ $l_3 = -0,2522$ $l_4 = -0,1873$ $\Delta z = -0,2457$
3	1,3	0,0485	$k_1 = -0,0061$ $k_2 = -0,0134$ $k_3 = -0,0084$ $k_4 = -0,0154$ $\Delta y = -0,0109$	0,2069	$l_1 = -0,1894$ $l_2 = -0,1415$ $l_3 = -0,1527$ $l_4 = -0,1114$ $\Delta z = -0,1482$
4	1,4	0,0351	$k_1 = -0,0133$ $k_2 = -0,0143$ $k_3 = -0,0125$ $k_4 = -0,0136$ $\Delta y = -0,0134$	0,1190	$l_1 = -0,1132$ $l_2 = -0,0835$ $l_3 = -0,0908$ $l_4 = -0,0652$ $\Delta z = -0,0879$
5	1,5	0,0238	$k_1 = -0,0127$ $k_2 = -0,0116$ $k_3 = -0,0111$ $k_4 = -0,0103$ $\Delta y = -0,0114$	0,0677	$l_1 = -0,0665$ $l_2 = -0,0486$ $l_3 = -0,0532$ $l_4 = -0,0377$ $\Delta z = -0,0513$

9.18 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	k	z	l
0	0	0		1	
1	0,25	-0,5254	$k_1 = -0,25$ $k_2 = -0,4375$ $k_3 = -0,5430$ $k_4 = -0,9414$ $\Delta y = -0,5254$	1,5894	$l_1 = 0,5$ $l_2 = 0,5938$ $l_3 = 0,5938$ $l_4 = 0,6611$ $\Delta z = 0,5894$
2	0,5	-2,2221	$k_1 = -0,9227$ $k_2 = -1,4670$ $k_3 = -1,7455$ $k_4 = -2,8328$ $\Delta y = -1,6967$	2,2500	$l_1 = 0,6633$ $l_2 = 0,7138$ $l_3 = 0,6584$ $l_4 = 0,5562$ $\Delta z = 0,6607$
3	0,75	-7,0489	$k_1 = -2,7846$ $k_2 = -4,2481$ $k_3 = -4,9542$ $k_4 = -7,7712$ $\Delta y = -7,0489$	2,4086	$l_1 = 0,5695$ $l_2 = 0,3638$ $l_3 = 0,1294$ $l_4 = -0,6044$ $\Delta z = 0,1586$
4	1	-19,8755	$k_1 = -7,6510$ $k_2 = -11,4068$ $k_3 = -13,1477$ $k_4 = -20,1994$ $\Delta y = -12,8266$	0,1247	$l_1 = -0,5579$ $l_2 = -1,6538$ $l_3 = -2,3972$ $l_4 = -5,0435$ $\Delta z = -2,2839$

Úprava zadání:

i	x	y	k	z	l
0	0	0		1	
1	0,1	-0,1349	$k_1 = -0,1$ $k_2 = -0,1300$ $k_3 = -0,1368$ $k_4 = -0,1762$ $\Delta y = -0,1349$	1,2149	$l_1 = 0,2$ $l_2 = 0,2150$ $l_3 = 0,2150$ $l_4 = 0,2293$ $\Delta z = 0,2149$
2	0,2	-0,3643	$k_1 = -0,1755$ $k_2 = -0,2220$ $k_3 = -0,2321$ $k_4 = -0,2926$ $\Delta y = -0,2294$	1,4577	$l_1 = 0,2295$ $l_2 = 0,2437$ $l_3 = 0,2427$ $l_4 = 0,2548$ $\Delta z = 0,2429$
3	0,3	-0,7377	$k_1 = -0,2915$ $k_2 = -0,3626$ $k_3 = -0,3773$ $k_4 = -0,4688$ $\Delta y = -0,3733$	1,7218	$l_1 = 0,2551$ $l_2 = 0,2661$ $l_3 = 0,2636$ $l_4 = 0,2701$ $\Delta z = 0,2641$
4	0,4	-1,3276	$k_1 = -0,4672$ $k_2 = -0,5742$ $k_3 = -0,5958$ $k_4 = -0,7325$ $\Delta y = -0,5900$	1,9923	$l_1 = 0,2706$ $l_2 = 0,2743$ $l_3 = 0,2693$ $l_4 = 0,2649$ $\Delta z = 0,2705$
5	0,5	-2,2401	$k_1 = -0,7303$ $k_2 = -0,8896$ $k_3 = -0,9210$ $k_4 = -1,1234$ $\Delta y = -0,9125$	2,2412	$l_1 = 0,2657$ $l_2 = 0,2557$ $l_3 = 0,2468$ $l_4 = 0,2230$ $\Delta z = 0,2490$

9.19 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	k	z	l
0	0	1		1	
1	0,25	1,2476	$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,25$ $k_3 = 0,2463$ $k_4 = 0,2427$ $\Delta y = 0,2476$	0,9716	$l_1 = 0$ $l_2 = -0,0293$ $l_3 = -0,0293$ $l_4 = -0,0536$ $\Delta z = -0,0284$
2	0,5	1,4821	$k_1 = 0,2429$ $k_2 = 0,2362$ $k_3 = 0,2337$ $k_4 = 0,2247$ $\Delta y = 0,2345$	0,8996	$l_1 = -0,0539$ $l_2 = -0,0736$ $l_3 = -0,0727$ $l_4 = -0,0854$ $\Delta z = -0,0720$
3	0,75	1,6960	$k_1 = 0,2249$ $k_2 = 0,2142$ $k_3 = 0,2136$ $k_4 = 0,2026$ $\Delta y = 0,2138$	0,8118	$l_1 = -0,0857$ $l_2 = -0,0904$ $l_3 = -0,0890$ $l_4 = -0,0822$ $\Delta z = -0,0878$
4	0	1,8906	$k_1 = 0,2029$ $k_2 = 0,1927$ $k_3 = 0,1955$ $k_4 = 0,1884$ $\Delta y = 0,1946$	0,7572	$l_1 = -0,0823$ $l_2 = -0,0593$ $l_3 = -0,0581$ $l_4 = -0,0102$ $\Delta z = -0,0545$

Úprava zadání 1:

i	x	y	k	z	l
0	0	1		1	
1	0,1	1,0998	$k_1 = 0,1$ $k_2 = 0,1000$ $k_3 = 0,0998$ $k_4 = 0,0995$ $\Delta y = 0,0998$	0,9952	$l_1 = 0$ $l_2 = -0,0049$ $l_3 = -0,0049$ $l_4 = -0,0095$ $\Delta z = -0,0048$
2	0,2	1,1987	$k_1 = 0,0995$ $k_2 = 0,0990$ $k_3 = 0,0988$ $k_4 = 0,0981$ $\Delta y = 0,0989$	0,9814	$l_1 = -0,0095$ $l_2 = -0,0138$ $l_3 = -0,0138$ $l_4 = -0,0178$ $\Delta z = -0,0138$
3	0,3	1,2959	$k_1 = 0,0981$ $k_2 = 0,0972$ $k_3 = 0,0971$ $k_4 = 0,0960$ $\Delta y = 0,0971$	0,9599	$l_1 = -0,0178$ $l_2 = -0,0216$ $l_3 = -0,0215$ $l_4 = -0,0249$ $\Delta z = -0,0215$
4	0,4	1,3905	$k_1 = 0,0960$ $k_2 = 0,0947$ $k_3 = 0,0946$ $k_4 = 0,0932$ $\Delta y = 0,0946$	0,9321	$l_1 = -0,0249$ $l_2 = -0,0279$ $l_3 = -0,0279$ $l_4 = -0,0305$ $\Delta z = -0,0278$
5	0,5	1,4821	$k_1 = 0,0932$ $k_2 = 0,0917$ $k_3 = 0,0916$ $k_4 = 0,0900$ $\Delta y = 0,0916$	0,8996	$l_1 = -0,0305$ $l_2 = -0,0327$ $l_3 = -0,0326$ $l_4 = -0,0343$ $\Delta z = -0,0325$

Úprava zadání 2:

Všechny hodnoty y_i a z_i (pro odpovídající x_i) jsou po zaokrouhlení na 4 desetinná místa stejné jako v předcházejícím případě.

9.20 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	k	v	l
0	0	0		1	
1	0,25	1,3200	$k_1 = 1,25$ $k_2 = 1,3105$ $k_3 = 1,3256$ $k_4 = 1,3974$ $\Delta u = 1,3200$	0,4948	$l_1 = -0,5$ $l_2 = -0,5001$ $l_3 = -0,5076$ $l_4 = -0,5157$ $\Delta v = -0,5052$
2	0,5	2,8066	$k_1 = 1,3970$ $k_2 = 1,4789$ $k_3 = 1,4914$ $k_4 = 1,5821$ $\Delta u = 1,4866$	-0,0412	$l_1 = -0,5155$ $l_2 = -0,5316$ $l_3 = -0,5378$ $l_4 = -0,5615$ $\Delta v = -0,5360$
3	0,75	4,4917	$k_1 = 1,5815$ $k_2 = 1,6796$ $k_3 = 1,6887$ $k_4 = 1,7927$ $\Delta u = 1,6852$	-0,6367	$l_1 = -0,5612$ $l_2 = -0,5922$ $l_3 = -0,5967$ $l_4 = -0,6345$ $\Delta v = -0,5956$
4	1	6,3950	$k_1 = 1,7921$ $k_2 = 1,9003$ $k_3 = 1,9054$ $k_4 = 2,0162$ $\Delta u = 1,9033$	-1,3171	$l_1 = -0,6342$ $l_2 = -0,6781$ $l_3 = -0,6807$ $l_4 = -0,7302$ $\Delta v = -0,6803$

Úprava zadání 1:

i	x	u	k	v	l
0	0	0		1	
1	0,1	0,5105	$k_1 = 0,5000$ $k_2 = 0,5099$ $k_3 = 0,5109$ $k_4 = 0,5215$ $\Delta u = 0,5105$	0,7997	$l_1 = -0,2000$ $l_2 = -0,2000$ $l_3 = -0,2005$ $l_4 = -0,2010$ $\Delta v = -0,2003$
2	0,2	1,0439	$k_1 = 0,5215$ $k_2 = 0,5328$ $k_3 = 0,5337$ $k_4 = 0,5457$ $\Delta u = 0,5334$	0,5973	$l_1 = -0,2010$ $l_2 = -0,2020$ $l_3 = -0,2025$ $l_4 = -0,2040$ $\Delta v = -0,2023$
3	0,3	1,6028	$k_1 = 0,5457$ $k_2 = 0,5584$ $k_3 = 0,5592$ $k_4 = 0,5725$ $\Delta u = 0,5589$	0,3910	$l_1 = -0,2040$ $l_2 = -0,2060$ $l_3 = -0,2064$ $l_4 = -0,2089$ $\Delta v = -0,2063$
4	0,4	2,1896	$k_1 = 0,5725$ $k_2 = 0,5864$ $k_3 = 0,5872$ $k_4 = 0,6016$ $\Delta u = 0,5869$	0,1788	$l_1 = -0,2089$ $l_2 = -0,2119$ $l_3 = -0,2123$ $l_4 = -0,2158$ $\Delta v = -0,2122$
5	0,5	2,8066	$k_1 = 0,6016$ $k_2 = 0,6165$ $k_3 = 0,6172$ $k_4 = 0,6326$ $\Delta u = 0,6169$	-0,0411	$l_1 = -0,2158$ $l_2 = -0,2197$ $l_3 = -0,2201$ $l_4 = -0,2245$ $\Delta v = -0,2200$

Úprava zadání 2:

Všechny hodnoty u_i a v_i (pro odpovídající x_i) jsou po zaokrouhlení na 4 desetinná místa stejné jako v předcházejícím případě.

9.21 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	k	v	l	w	m
0	0	0		1		2	
1	0,25	-1,0020	$k_1 = -0,75$ $k_2 = -0,9375$ $k_3 = -1,0195$ $k_4 = -1,3477$ $\Delta u = -1,0020$	1,7808	$l_1 = 0,5$ $l_2 = 0,7188$ $l_3 = 0,7969$ $l_4 = 1,1533$ $\Delta v = 0,7808$	4,5635	$m_1 = 1,75$ $m_2 = 2,3750$ $m_3 = 2,6133$ $m_4 = 3,6543$ $\Delta w = 2,5635$
2	0,5	-2,8992	$k_1 = -1,3356$ $k_2 = -1,7634$ $k_3 = -1,9330$ $k_4 = -2,6552$ $\Delta u = -1,8973$	3,5057	$l_1 = 1,1409$ $l_2 = 1,5930$ $l_3 = 1,7596$ $l_4 = 2,5039$ $\Delta v = 1,7250$	9,9107	$m_1 = 3,6173$ $m_2 = 4,9495$ $m_3 = 5,4521$ $m_4 = 7,6630$ $\Delta w = 5,3472$
3	0,75	-6,7388	$k_1 = -2,6293$ $k_2 = -3,5584$ $k_3 = -3,9140$ $k_4 = -5,4635$ $\Delta u = -3,8396$	7,2112	$l_1 = 2,4777$ $l_2 = 3,4258$ $l_3 = 3,7789$ $l_4 = 5,3456$ $\Delta v = 3,7054$	21,1612	$m_1 = 7,5847$ $m_2 = 10,4100$ $m_3 = 11,4718$ $m_4 = 16,1548$ $\Delta w = 11,2505$
4	1	-14,7242	$k_1 = -5,4084$ $k_2 = -7,3923$ $k_3 = -8,1417$ $k_4 = -11,4358$ $\Delta u = -7,9854$	15,0921	$l_1 = 5,2903$ $l_2 = 7,2889$ $l_3 = 8,0366$ $l_4 = 11,3440$ $\Delta v = 7,8809$	44,9083	$m_1 = 15,9890$ $m_2 = 21,9701$ $m_3 = 24,2149$ $m_4 = 34,1238$ $\Delta w = 23,7471$

9.22 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	k	v	l	w	m
0	0	0		1		2	
1	0,25	0,3519	$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,3438$ $k_3 = 0,3555$ $k_4 = 0,4629$ $\Delta u = 0,3519$	-0,2751	$l_1 = -0,25$ $l_2 = -0,2813$ $l_3 = -0,2734$ $l_4 = -0,2910$ $\Delta v = -0,2751$	1,2476	$m_1 = 0,25$ $m_2 = 0,2500$ $m_3 = 0,2461$ $m_4 = 0,2432$ $\Delta w = 0,2476$
2	0,5	0,9436	$k_1 = 0,4624$ $k_2 = 0,5818$ $k_3 = 0,5960$ $k_4 = 0,7326$ $\Delta u = 0,5917$	-0,5659	$l_1 = -0,2927$ $l_2 = -0,3019$ $l_3 = -0,2873$ $l_4 = -0,2743$ $\Delta v = -0,2909$	1,4837	$m_1 = 0,2431$ $m_2 = 0,2369$ $m_3 = 0,2350$ $m_4 = 0,2300$ $\Delta w = 0,2362$
3	0,75	1,8399	$k_1 = 0,7318$ $k_2 = 0,8833$ $k_3 = 0,9014$ $k_4 = 1,0763$ $\Delta u = 0,8963$	-0,7972	$l_1 = -0,2765$ $l_2 = -0,2483$ $l_3 = -0,2251$ $l_4 = -0,1640$ $\Delta v = -0,2312$	1,7102	$m_1 = 0,2294$ $m_2 = 0,2236$ $m_3 = 0,2264$ $m_4 = 0,2298$ $\Delta w = 0,2265$
4	1	3,1274	$k_1 = 1,0750$ $k_2 = 1,2692$ $k_3 = 1,2944$ $k_4 = 1,5230$ $\Delta u = 1,2875$	-0,8544	$l_1 = -0,1669$ $l_2 = -0,0819$ $l_3 = -0,0480$ $l_4 = 0,0829$ $\Delta v = -0,0573$	1,9558	$m_1 = 0,2283$ $m_2 = 0,2359$ $m_3 = 0,2475$ $m_4 = 0,2782$ $\Delta w = 0,2456$

9.23 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	k	v	l	w	m
0	0	1		0		1	
1	0,1	1,0152	$k_1 = 0$ $k_2 = 0,0150$ $k_3 = 0,0153$ $k_4 = 0,0306$ $\Delta u = 0,0152$	0,2057	$l_1 = 0,2$ $l_2 = 0,2051$ $l_3 = 0,2059$ $l_4 = 0,2120$ $\Delta v = 0,2057$	1,2102	$m_1 = 0,2$ $m_2 = 0,2099$ $m_3 = 0,2104$ $m_4 = 0,2205$ $\Delta w = 0,2102$
2	0,2	1,0615	$k_1 = 0,0306$ $k_2 = 0,0461$ $k_3 = 0,0465$ $k_4 = 0,0624$ $\Delta u = 0,0464$	0,4255	$l_1 = 0,2120$ $l_2 = 0,2192$ $l_3 = 0,2200$ $l_4 = 0,2283$ $\Delta v = 0,2198$	1,4414	$m_1 = 0,2205$ $m_2 = 0,2309$ $m_3 = 0,2314$ $m_4 = 0,2422$ $\Delta w = 0,2312$
3	0,3	1,1406	$k_1 = 0,0624$ $k_2 = 0,0787$ $k_3 = 0,0792$ $k_4 = 0,0959$ $\Delta u = 0,0790$	0,6638	$l_1 = 0,2283$ $l_2 = 0,2377$ $l_3 = 0,2385$ $l_4 = 0,2491$ $\Delta v = 0,2383$	1,6949	$m_1 = 0,2421$ $m_2 = 0,2531$ $m_3 = 0,2537$ $m_4 = 0,2650$ $\Delta w = 0,2535$
4	0,4	1,2541	$k_1 = 0,0959$ $k_2 = 0,1131$ $k_3 = 0,1137$ $k_4 = 0,1315$ $\Delta u = 0,1135$	0,9252	$l_1 = 0,2490$ $l_2 = 0,2608$ $l_3 = 0,2616$ $l_4 = 0,2746$ $\Delta v = 0,2614$	1,9719	$m_1 = 0,2650$ $m_2 = 0,2767$ $m_3 = 0,2773$ $m_4 = 0,2893$ $\Delta w = 0,2770$
5	0,5	1,4043	$k_1 = 0,1315$ $k_2 = 0,1497$ $k_3 = 0,1505$ $k_4 = 0,1694$ $\Delta u = 0,1502$	1,2147	$l_1 = 0,2746$ $l_2 = 0,2888$ $l_3 = 0,2897$ $l_4 = 0,3053$ $\Delta v = 0,2895$	2,2740	$m_1 = 0,2893$ $m_2 = 0,3017$ $m_3 = 0,3023$ $m_4 = 0,3152$ $\Delta w = 0,3021$

9.24 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	k	v	l	w	m
0	0	1		0		1	
1	0,1	1,5446	$k_1 = 0,5$ $k_2 = 0,5400$ $k_3 = 0,5465$ $k_4 = 0,5947$ $\Delta u = 0,5446$	2,1325	$l_1 = 0,1$ $l_2 = 0,1300$ $l_3 = 0,1335$ $l_4 = 0,1680$ $\Delta v = 0,1325$	0,1325	$m_1 = 0,1$ $m_2 = 0,1300$ $m_3 = 0,1335$ $m_4 = 0,1680$ $\Delta w = 0,1325$
2	0,2	2,1997	$k_1 = 0,5942$ $k_2 = 0,6491$ $k_3 = 0,6575$ $k_4 = 0,7231$ $\Delta u = 0,6551$	2,3416	$l_1 = 0,1677$ $l_2 = 0,2058$ $l_3 = 0,2105$ $l_4 = 0,2545$ $\Delta v = 0,2091$	0,3416	$m_1 = 0,1677$ $m_2 = 0,2058$ $m_3 = 0,2105$ $m_4 = 0,2545$ $\Delta w = 0,2091$
3	0,3	3,0043	$k_1 = 0,7225$ $k_2 = 0,7967$ $k_3 = 0,8077$ $k_4 = 0,8960$ $\Delta u = 0,8046$	2,6490	$l_1 = 0,2541$ $l_2 = 0,3030$ $l_3 = 0,3091$ $l_4 = 0,3658$ $\Delta v = 0,3074$	0,6490	$m_1 = 0,2541$ $m_2 = 0,3030$ $m_3 = 0,3091$ $m_4 = 0,3658$ $\Delta w = 0,3074$
4	0,4	4,0092	$k_1 = 0,8951$ $k_2 = 0,9947$ $k_3 = 1,0091$ $k_4 = 1,1270$ $\Delta u = 1,0049$	3,0831	$l_1 = 0,3653$ $l_2 = 0,4283$ $l_3 = 0,4365$ $l_4 = 0,5099$ $\Delta v = 0,4341$	1,0831	$m_1 = 0,3653$ $m_2 = 0,4283$ $m_3 = 0,4365$ $m_4 = 0,5099$ $\Delta w = 0,4341$
5	0,5	5,2812	$k_1 = 1,1259$ $k_2 = 1,2585$ $k_3 = 1,2774$ $k_4 = 1,4341$ $\Delta u = 1,2720$	3,6817	$l_1 = 0,5092$ $l_2 = 0,5910$ $l_3 = 0,6017$ $l_4 = 0,6971$ $\Delta v = 0,5986$	1,6817	$m_1 = 0,5092$ $m_2 = 0,5910$ $m_3 = 0,6017$ $m_4 = 0,6917$ $\Delta w = 0,5986$

9.25 Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	k	v	l	w	m
0	0	0		0		0	
1	0,1	0	$k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$ $k_4 = 0$ $\Delta u = 0$	0	$l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = 0$ $\Delta v = 0$	1,1052	$m_1 = 0,1$ $m_2 = 0,1050$ $m_3 = 0,1053$ $m_4 = 0,1105$ $\Delta w = 0,1052$
2	0,2	0	$k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$ $k_4 = 0$ $\Delta u = 0$	0	$l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = 0$ $\Delta v = 0$	1,2214	$m_1 = 0,1105$ $m_2 = 0,1160$ $m_3 = 0,1163$ $m_4 = 0,1221$ $\Delta w = 0,1162$
3	0,3	0	$k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$ $k_4 = 0$ $\Delta u = 0$	0	$l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = 0$ $\Delta v = 0$	1,3499	$m_1 = 0,1221$ $m_2 = 0,1282$ $m_3 = 0,1286$ $m_4 = 0,1350$ $\Delta w = 0,1285$
4	0,4	0	$k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$ $k_4 = 0$ $\Delta u = 0$	0	$l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = 0$ $\Delta v = 0$	1,4918	$m_1 = 0,1350$ $m_2 = 0,1417$ $m_3 = 0,1421$ $m_4 = 0,1492$ $\Delta w = 0,1420$
5	0,5	0	$k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$ $k_4 = 0$ $\Delta u = 0$	0	$l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = 0$ $\Delta v = 0$	1,6487	$m_1 = 0,1492$ $m_2 = 0,1566$ $m_3 = 0,1570$ $m_4 = 0,1649$ $\Delta w = 0,1569$

Úprava zadání 1:

i	x	u	k	v	l	w	m
0	0	0		0		0	
1	0,1	0	$k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$ $k_4 = 0$ $\Delta u = 0$	0	$l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = 0$ $\Delta v = 0$	0	$m_1 = 0$ $m_2 = 0$ $m_3 = 0$ $m_4 = 0$ $\Delta w = 0$
2	0,2	0	$k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$ $k_4 = 0$ $\Delta u = 0$	0	$l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = 0$ $\Delta v = 0$	0	$m_1 = 0$ $m_2 = 0$ $m_3 = 0$ $m_4 = 0$ $\Delta w = 0$
3	0,3	0	$k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$ $k_4 = 0$ $\Delta u = 0$	0	$l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = 0$ $\Delta v = 0$	0	$m_1 = 0$ $m_2 = 0$ $m_3 = 0$ $m_4 = 0$ $\Delta w = 0$
4	0,4	0	$k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$ $k_4 = 0$ $\Delta u = 0$	0	$l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = 0$ $\Delta v = 0$	0	$m_1 = 0$ $m_2 = 0$ $m_3 = 0$ $m_4 = 0$ $\Delta w = 0$
5	0,5	0	$k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$ $k_4 = 0$ $\Delta u = 0$	0	$l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = 0$ $\Delta v = 0$	0	$m_1 = 0$ $m_2 = 0$ $m_3 = 0$ $m_4 = 0$ $\Delta w = 0$

Úprava zadání 2:

Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce (příklad uvádíme pouze pro srovnání výsledků s Eulerovou metodou, hodnoty k , l a m jsou pro stanovený počet desetinných míst příliš nízké):

i	x	u	v	w
0	0	0,01	0,02	0,03
1	0,1	0,0080	0,0191	0,0362
2	0,2	0,0062	0,0184	0,0427
3	0,3	0,0044	0,0179	0,0496
4	0,4	0,0026	0,0175	0,0571
5	0,5	0,0009	0,0173	0,0651

15.8 Metoda konečných diferencí

10.7 Samoadjungovaný tvar: $-(xy')' + x^5y = -x^2$. Funkce $p = x$, $p' = 1$, $q = x^5$, $f = -x^2$ jsou na intervalu $< 1, 2 >$ spojité, $p > 0$, $q \geq 0$. Řešení úlohy tedy existuje a je právě jedno. Hledaná soustava rovnic je:

$$\begin{array}{rclcl} 2,6907y_1 & -1,3750y_2 & & = & 1,0273 \\ -1,3750y_1 & 3,4746y_2 & -1,6250y_3 & = & -0,1406 \\ & -1,6250y_2 & 4,5258y_3 & = & 5,4336 \end{array}$$

Řešení:

i	0	1	2	3	4
x_i	1	1,25	1,5	1,75	2
y_i	1	0,9271	1,0671	1,5837	3

Úprava zadání 1: Samoadjungovaný tvar zůstává stejný: $-(xy')' + x^5y = -x^2$. Funkce $p = x$, $p' = 1$, $q = x^5$, $f = -x^2$ jsou na intervalu $< 1; 1,5 >$ spojité, $p > 0$, $q \geq 0$. Řešení úlohy tedy existuje a je právě jedno. Hledaná soustava rovnic je:

$$\begin{array}{rclcl} 2,2161y_1 & -1,1500y_2 & & = & 1,0379 \\ -1,1500y_1 & 2,4249y_2 & -1,2500y_3 & = & -0,0144 \\ & -1,2500y_2 & 2,6371y_3 & -1,3500y_4 & = -0,0169 \\ & & -1,3500y_3 & 2,8538y_4 & = 2,8804 \end{array}$$

Řešení:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y_i	1	1,1458	1,3055	1,4899	1,7141	2

Úprava zadání 2: Samoadjungovaný tvar zůstává stejný: $-(xy')' + x^5y = -x^2$. Funkce $p = x$, $p' = 1$, $q = x^5$, $f = -x^2$ jsou na intervalu $< 1; 2 >$ spojité, $p > 0$, $q \geq 0$. Řešení úlohy tedy existuje a je právě jedno. Hledaná soustava rovnic je:

$$\begin{array}{rclcl} 2,2782y_1 & -1,1875y_2 & & = & 1,0427 \\ -1,1875y_1 & +2,5477y_2 & -1,3125y_3 & = & -0,0244 \\ -1,3125y_2 & +2,8268y_3 & -1,4375y_4 & = & -0,0295 \\ -1,4375y_3 & +3,1187y_4 & -1,5625y_5 & = & -0,0352 \\ -1,5625y_4 & +3,4270y_5 & -1,6875y_6 & = & -0,0413 \\ -1,6875y_5 & +3,7565y_6 & -1,8125y_7 & = & -0,0479 \\ & -1,8125y_6 & +4,1121y_7 & = & 5,7576 \end{array}$$

Řešení:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1	1,125	1,25	1,375	1,5	1,6250	1,75	1,875	2
y_i	1	0,9263	0,8990	0,9255	1,0198	1,2064	1,5302	2,0746	3

10.8 Samoadjungovaný tvar: $-(e^{x^2}y')' + x^3e^{x^2}y = -x^2e^{x^2}$. Funkce $p = e^{x^2}$, $p' = 2xe^{x^2}$, $q = x^3e^{x^2}$, $f = -x^2e^{x^2}$ jsou na intervalu $< 0, 1 >$ spojité, $p > 0$, $q \geq 0$. Řešení úlohy tedy existuje a je právě jedno. Hledaná soustava rovnic je:

$$\begin{array}{rcl} 2,1678y_1 & -1,1510y_2 & = 1,0116 \\ -1,1510y_1 & +2,6389y_2 & -1,4779y_3 = -0,0201 \\ & -1,4779y_2 & +3,6745y_3 = 4,2390 \end{array}$$

Řešení:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,25	0,5	0,75	1
y_i	1	1,2897	1,5502	1,7771	2

Úprava zadání: Samoadjungovaný tvar zůstává stejný: $-(e^{x^2}y')' + x^3e^{x^2}y = -x^2e^{x^2}$. Funkce $p = e^{x^2}$, $p' = 2xe^{x^2}$, $q = x^3e^{x^2}$, $f = -x^2e^{x^2}$ jsou na intervalu $< 0, 1 >$ spojité, $p > 0$, $q \geq 0$. Řešení úlohy tedy existuje a je právě jedno. Hledaná soustava rovnic je:

$$\begin{array}{rcl} 2,1678y_1 & -1,1510y_2 & = 1,0116 \\ -1,1510y_1 & +2,6389y_2 & -1,4779y_3 = -0,0201 \\ & -1,4779y_2 & +3,6745y_3 = 6,3893 \end{array}$$

Řešení:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,25	0,5	0,75	1
y_i	1	1,6101	2,1535	2,6050	3

10.9 Rovnici nemůžeme převést na samoadjungovaný tvar, protože funkce $f_1(x) = \frac{1}{x}$ není na intervalu $< -1; 1 >$ spojitá.

10.10 Funkce $a_0 = x$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $f = x^2 + 1$ jsou spojité na intervalu $< 0, 1 >$ a funkce $a_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in < 1, 2 >$. Dále jsou splněny podmínky $a_0(x) \geq c > 0$, $a_2(x) \leq 0$ pro všechna $x \in < a, b >$. Podobně je $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0$ $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $|\alpha_2| + |\beta_2| > 0$. Úloha má tedy právě jedno řešení a diskrétní aproximace získaná pomocí rovnic uvedených v textu konverguje k tomuto řešení. Z první počáteční podmínky vyplývá, že $y_0 = 1$. Ze druhé počáteční podmínky máme $4y_2 - 16y_3 + 14y_4 = 2$ a celkem tedy hledáme řešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rcl} y_0 & & = 1 \\ 20y_0 & -41y_1 & +20y_2 = 2,5625 \\ & 24y_1 & -49y_2 +24y_3 = 3,25 \\ & & 28y_2 +57y_3 +28y_4 = 4,0625 \\ & & 4y_2 & -16y_3 +14y_4 = 2 \end{array}$$

Řešením této soustavy získáme:

i	0	1	2	3	4
x_i	1	1,25	1,5	1,75	2
y_i	1	0,0,6113	0,3812	0,3025	0,3796

Úprava zadání: Vzhledem k tomu, že v bodě $x = 0$ není splněna podmínka, že $a_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in < 0, 1 >$, není zadána počáteční úloha metodou popsanou v textu řešitelná.

10.11 Vzhledem k tomu, že funkce $a_2(x) = 1 \not\leq 0$ pro $x \in < 1, 2 >$, nelze při řešení zadané počáteční úlohy použít metodu popsanou v učebním textu.

10.12 Jsou splněny všechny podmínky konvergence a existence jednoznačného řešení. Z první počáteční podmínky vyplývá, že $-5y_0 + 8y_1 - 2y_2 = 1$. Ze druhé počáteční podmínky máme $6y_2 - 24y_3 + 20y_4 = 4$ a celkem tedy hledáme řešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rclclcl}
 -5y_0 & +8y_1 & -2y_2 & & & = & 1 \\
 20,0444y_0 & -41,1513y_1 & +21,0444y_2 & & & = & 1,5340 \\
 & 25,3795y_1 & -53,0091y_2 & +27,3795y_3 & & = & 2,1487 \\
 & & 32,3720y_2 & -68,3065y_3 & +35,3720y_4 & = & 2,8670 \\
 & & 6y_2 & -24y_3 & +20y_4 & = & 4
 \end{array}$$

Řešením této soustavy získáme:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,25	0,5	0,75	1
y_i	2,7045	2,3273	2,0477	1,8858	1,8486

Úprava zadání: Jsou splněny všechny podmínky konvergence a existence jednoznačného řešení. Z první počáteční podmínky vyplývá, že $-14y_0 + 20y_1 - 5y_2 = 1$. Ze druhé počáteční podmínky máme $15y_2 - 60y_3 + 47y_4 = 4$ a celkem tedy hledáme řešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rcl}
 -14y_0 + 20y_1 - 5y_2 & = & 1 \\
 110,0171y_0 - 221,0442y_1 + 111,0171y_2 & = & 1,2052 \\
 121,1403y_1 - 244,3206y_2 + 123,1403y_3 & = & 1,4214 \\
 133,4859y_2 - 270,0618y_3 + 136,4859y_4 & = & 1,6499 \\
 147,1825y_3 - 298,5249y_4 + 151,1825y_5 & = & 1,8918 \\
 6y_2 - 24y_3 + 20y_4 & = & 4
 \end{array}$$

Řešením této soustavy získáme:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1,0342	1,0362	1,0492	1,0739	1,1108	1,1604

10.13 Metodu konečných diferencí v tomto případě nelze použít, protože funkce $\sigma(x) = \frac{1}{x}$ není na intervalu $< -1, 1 >$ spojitá (navíc na tomto intervalu neplatí $\sigma(x) \geq 0$), a nevíme tedy, zda existuje právě jedno řešení dané úlohy.

10.14 Metodu konečných diferencí v tomto případě nelze použít, protože funkce $f(x) =$

$\frac{x}{x^2-1}$ není na intervalu $< 0, 2 >$ spojitá, a nevíme tedy, zda existuje právě jedno řešení dané úlohy.

10.15 Po dosazení do příslušných vztahů získáme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2,1516y_1 - y_2 &= 1,1250 \\ -y_1 + 2,0920y_2 - y_3 &= 0,2500 \\ -y_2 + 2,0558y_3 &= 2,3750 \end{aligned}$$

Jejím řešením jsou $y_1 = 1,3084$, $y_2 = 1,6902$, $y_3 = 1,9774$. Spolu s okrajovými podmínkami máme:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,5	1	1,5	2
y_i	1	1,3084	1,6902	1,9774	2

Úprava zadání: Po dosazení do příslušných vztahů získáme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2,0487y_1 - y_2 &= 1,0156 \\ -y_1 + 2,0379y_2 - y_3 &= 0,0313 \\ -y_2 + 2,0295y_3 - y_4 &= 0,0469 \\ -y_3 + 2,0230y_4 - y_5 &= 0,0625 \\ -y_4 + 2,0179y_5 - y_6 &= 0,0781 \\ -y_5 + 2,0139y_6 - y_7 &= 0,0938 \\ -y_6 + 2,0109y_7 &= 2,1094 \end{aligned}$$

Její řešení je spolu s okrajovými podmínkami uvedeno v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
y_i	1	1,1343	1,3082	1,5005	1,6902	1,8562	1,9773	2,0323	2

?? DOPLNIT

16 Dodatky

16.1 Ukázky zadání

Písemná práce z MMNM – 24. května 2006

1. Pomocí modifikované Newtonovy metody najděte kladný kořen rovnice $e^{\frac{x}{2}} \cos x - 1 = 0$ s přesností 0,01.

Řešení: Interval $(0, \frac{\pi}{2})$. $x_1 = 1, x_2 = 0.8841, x_3 = 0.8697, x_4 = 0.8659$.

2. Napište Banachovu větu o pevném bodu. Vysvětlete její význam a využití.
3. Vysvětlete pojem *stabilita úlohy*.
4. Metodou Rungeho–Kutty na intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s krokem 0,25 určete hodnotu $u(0.5)$, je-li dáno $u' = -2u + v - 2w$, $v' = u - 2v + 2w$, $w' = 3u - 3v + 5w$ za podmínek $u(0) = 0$, $v(0) = 1$, $w(0) = 2$.

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	k	v	l	w	m
0	0	0		0		0	
1	0,25	-1,0020	$k_1 = -0,75$ $k_2 = -0,9375$ $k_3 = -1,0195$ $k_4 = -1,3477$ $\Delta u = -1,0020$	1,7808	$l_1 = 0,5$ $l_2 = 0,7188$ $l_3 = 0,7969$ $l_4 = 0,1,1533$ $\Delta v = 0,,7808$	4,5635	$m_1 = 1,75$ $m_2 = 2,3750$ $m_3 = 2,6133$ $m_4 = 3,6543$ $\Delta w = 2,5635$
2	0,5	-2,8992	$k_1 = -1,3356$ $k_2 = -1,7634$ $k_3 = -1,9330$ $k_4 = -26552$ $\Delta u = -1,8973$				

5. Metodou konečných diferencí řešte okrajovou úlohu $u_{xx} + u_{yy} - 8x = 0$ za podmínek $u(x, 0) = x^3$, $u(0, y) = 0$, $u(x, y)|_{x^2+y^2=10} = 10x(y+1)$, kde oblast Ω je vnitřní část čtverťkruhu $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 10$. Počáteční krok volte roven 1.

Řešení: Rovnici si upravíme

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -8x.$$

Zvolme čtvercovou síť

s krokem $h = 1$. Potom máme hraniční body

$$u(0, 0) = 0, u(1, 0) = 1, u(2, 0) = 8, u(3, 0) = 27,$$

$$u(0, 1) = u(0, 2) = u(0, 3) = 0,$$

$u(1, 3) = 40, u(3, 1) = 60$. Ještě potřebujeme znát hodnotu v bodě $P_{2,2}$. Protože $Q = (2.449; 2)$, $\varphi(Q) = 73.485$, $\delta = 0.449$, tak lineární interpolací dostaneme

$$u_{2,2} = \frac{1 \cdot 73.485 + 0.449 \cdot u_{1,2}}{1 + 0.449} = 50.697 + 0.310u_{1,2}.$$

Nyní pro 3 vnitřní uzly sestavíme síťové rovnice podle (13.7), přitom hraniční uzly jsou podtrženy.

$$4u_{1,1} - \underline{u_{0,1}} - u_{2,1} - \underline{u_{1,0}} - u_{1,2} = -8,$$

$$4u_{1,2} - u_{1,1} - \underline{u_{1,3}} - \underline{u_{0,2}} - \underline{u_{2,2}} = -8,$$

$$4u_{2,1} - u_{1,1} - \underline{u_{3,1}} - \underline{u_{2,0}} - \underline{u_{2,2}} = -16$$

a pak přidáním odvozeného vztahu pro $u_{2,2}$ dostaneme soustavu 4 rovnic o čtyřech neznámých. Po úpravě

$$u_{1,1} = \frac{1}{4}(0 + u_{2,1} + 1 + u_{1,2}) - \frac{1}{4}8,$$

$$u_{2,1} = \frac{1}{4}(u_{1,1} + u_{2,2} + 60 + 8) - \frac{1}{4}16,$$

$$u_{1,2} = \frac{1}{4}(0 + 40 + u_{1,1} + u_{2,2}) - \frac{1}{4}8,$$

$$u_{2,2} = 50.697 + 0.310u_{1,2}.$$

Jejím řešením je pak

$$u_{1,1} = 12.384,$$

$$u_{2,1} = 30.768,$$

$$u_{1,2} = 25.768,$$

$$u_{2,2} = 58.688.$$

Další postup je pak obvyklý, t.j. zmenšíme krok a opakujeme výpočet až se nám odchylky v uzlových bodech ustálí.

6. Libovolným způsobem odhadněte polohu kořenů rovnice:

$$256x^4 - 96x^3 - 192x^2 + 46x + 21 = 0$$

Poté je Graeff–Lobačevského metodou najděte. Pracujte s $P^2(x)$.

Řešení: Nejméně pracný odhad je $\frac{21}{277} \doteq 0,08 \leq |x_k| \leq \frac{7}{4}$.

Posloupnost polynomů pro metodu Graeff–Lobačevského: $P^0(x) = 256x^4 - 96x^3 - 192x^2 + 46x + 21$, $P^1(x) = 65536x^4 - 107520x^3 + 56448x^2 - 10180x + 441$, $P^2(x) = 4,2950 \cdot 10^9 x^4 - 4,1618 \cdot 10^9 x^3 - 1,0551 \cdot 10^9 x^2 - 53845264x + 194481$.

Absolutní hodnoty kořenů jsou: $|x_1| = 0,9922$, $|x_2| = 0,7096$, $|x_3| = 0,4753$, $|x_4| = 0,2452$

7. Řešte okrajovou úlohu $y'' + 2xy' - x^3y = x^2$, $y(0) = 1$, $y(1) = 2$ s krokem $h = 0,25$.
Doporučení: Upravte na samoadjungovaný tvar a poté použijte konečné difference.

Řešení: Samoadjungovaný tvar: $-(e^{x^2}y')' + x^3e^{x^2}y = -x^2e^{x^2}$.

Funkce $p = e^{x^2}$, $p' = 2xe^{x^2}$, $q = x^3e^{x^2}$, $f = -x^2e^{x^2}$ jsou na intervalu $< 0, 1 >$ spojité, $p > 0$, $q \geq 0$. Řešení úlohy tedy existuje a je právě jedno.

Hledaná soustava rovnic je:

$$\begin{array}{rclcl} 2,1678y_1 & -1,1510y_2 & & = & 1,0116 \\ -1,1510y_1 & +2,6389y_2 & -1,4779y_3 & = & -0,0201 \\ & -1,4779y_2 & +3,6745y_3 & = & 4,2390 \end{array}$$

Řešení:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,25	0,5	0,75	1
y_i	1	1,2897	1,5502	1,7771	2

Písemná práce z MMNM – 20. června 2006

1. Upravte na tvar zaručující konvergenci prosté iterační metody, úpravy zdůvodněte

$$e^x - x - 3 = 0.$$

Řešení: Na intervalu $(-4; -1)$ máme iterační vztah $x = e^x - 2$.

Na intervalu $(0; 2)$ máme iterační vztah $x = \ln(x + 2)$.

2. Metodou konečných diferencí s krokem $h = 1$ řešte okrajovou úlohu

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - xyu(x, y) = x + y,$$

$$0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 4, \quad y \leq 4 - \frac{4}{3}x,$$

$$u(0, y) = y, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, y)|_{y+\frac{4}{3}x=4} = y(1+x).$$

Sestavte soustavu síťových rovnic. Zdůvodněte řešitelnost soustavy. Soustavu pak už řešit nemusíte.

Řešení: Máme parciální lineární diferenciální rovnici eliptického typu

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sigma(x, y)u = f(x, y),$$

kde $\sigma(x, y) \geq 0$, σ, f jsou spojitě na zadané oblasti.

Vytvoříme si síť

$$x_i = 0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad h = 1,$$

$$y_j = 0 + jh, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Uzly jsou pak body (x_i, y_j) . Dosadíme do soustavy

$$(4 + h^2 \sigma_{ij}) u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = h^2 f_{ij}.$$

Matice soustavy je diagonálně dominantní a proto můžeme použít i iterační metody řešení. Je třeba ještě dopočítat hraniční uzly podle vztahu

$$u_{ij} = \frac{h\varphi(Q) + \delta u_{i-1,j}}{h + \delta}.$$

$$u_{1,2} = 4$$

$$u_{2,1} = 2.6 + 0.2u_{1,1}.$$

$$(4 + 1) u_{1,1} - u_{0,1} - u_{1,0} - u_{1,2} - u_{2,1} = -2.$$

Po vyřešení dostaneme

x	y	$u(x, y)$
0	0	0
0	1	0
0	2	0
1	0	1
1	1	1.2
1	2	3
2	0	2
2	1	4
2	2	3

3. Vysvětlete princip a použití Richardsonovy extrapolace.
4. Popište algoritmus Schurovy metody pro určení kořene polynomu, např. pro $4y^3 - 8y^2 + 9y - 18 = 0$.
5. Pomocí metody Taylorovy řady najděte řešení úlohy

$$y'' + xy + y = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Řešení: Rovnici si upravíme na tvar

$$y'' = -xy' - y. \quad (16.1)$$

Dosazením počátečních podmínek dostaneme

$$y''(0) = -0 \cdot 1 - 0 = 0.$$

Dále derivací (16.1) postupně dostáváme

$$y''' = -xy'' - 2y',$$

$$y^{(IV)} = -xy''' - 3y'',$$

$$y^{(V)} = -xy^{(IV)} - 4y''', \dots$$

Postupným dosazováním už známých počátečních podmínek dostáváme

$$y'''(0) = -0 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2,$$

$$y^{(IV)}(0) = 0, \quad y^{(V)}(0) = 8, \dots$$

Dosazením vypočítaných hodnot do Taylorovy řady

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

dostaneme

$$y(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \dots,$$

což je námi hledané řešení rovnice v okolí bodu 0.

6. Ověřte, že řešení úlohy

$$\begin{aligned} -y'' + \sigma(x)y &= f(x), \\ y(a) &= \alpha, \quad y(b) = \beta, \end{aligned}$$

pro $\sigma(x) \geq 0$, minimalizuje na intervalu $[a, b]$, $a < b$, funkcional

$$F(w) \equiv \frac{1}{2} \int_a^b ([w'(x)]^2 + \sigma(x)w^2(x) - 2w(x)f(x)) dx.$$

Řešení: Necht' $w(x) = y(x) + \varepsilon(x)$, kde $y(x)$ je řešením naší okrajové úlohy. Potom po dosazení máme po úpravě

$$F(w) = F(y) + \int_a^b (\varepsilon' y' + \varepsilon \sigma y - \varepsilon f) dx + \frac{1}{2} \int_a^b ([\varepsilon']^2 + \sigma \varepsilon^2) dx. \quad (16.2)$$

První člen prvního integrálu integrujeme “per partes”

$$\begin{aligned} \int_a^b \varepsilon' y' dx &= \left| \begin{matrix} u = y' & u' = y'' \\ v' = \varepsilon' & v = \varepsilon \end{matrix} \right| = \varepsilon y'|_a^b - \int_a^b \varepsilon y'' dx = \\ &= \varepsilon(b)y'(b) - \varepsilon(a)y'(a) - \int_a^b \varepsilon y'' dx. \end{aligned}$$

Takže celý první integrál z (16.2) si přepíšeme na tvar

$$\varepsilon(b)y'(b) - \varepsilon(a)y'(a) + \int_a^b \varepsilon(-y'' + \sigma y - f) dx$$

a celý tento výraz je roven nule, neboť y je řešením naší úlohy a $\varepsilon(a) = \varepsilon(b) = 0$, protože $\varepsilon = w - y$ a funkce w a y splňují tytéž okrajové podmínky. Takže z (16.2) máme

$$F(w) = F(y) + \frac{1}{2} \int_a^b ([\varepsilon'(x)]^2 + \sigma \varepsilon^2) dx \geq F(y).$$

Takže y skutečně minimalizuje funkcional F v množině dostatečně hladkých funkcí $w(x)$ splňujících tytéž okrajové podmínky.

7. Navrhněte postup pro řešení parciální diferenciální rovnice parabolického typu. Stanovte podmínky, které Vám budou zaručovat konvergenci.

Písemná práce z MMNM – 6. 5. 2009 (A)

Hodnocení: 60 bodů (za každý příklad 10 bodů)

Povolené pomůcky: kalkulačka, 1 list formátu A4 popsaný vlastními poznámkami

Řešení vypracujte tak, aby bylo v každou chvíli zřejmé, jaký je smysl uváděných hodnot, co a kam dosazujete, co s čím sčítáte, odečítáte apod. Logické skoky musejí být vysvětleny. Pokud v řešení používáte graf funkce, který jste získali z kalkulačky, přepište jej na papír a ukažte, jak byste jej získali bez použití kalkulačky. Pokud budete používat kalkulačku, přizpůsobte tomu prosím své řešení. Hodnoceno bude pouze to, co je uvedeno na odevzdaných listech.

1. Definujte maticovou a vektorovou normu. Za jakých podmínek bude maticová norma souhlasná s vektorovou normou.
2. Dokažte, že každá algebraická rovnice lichého řádu má aspoň jeden reálný kořen.
3. Je dána parciální diferenciální rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

v oblasti $\Omega = \{(x, y) : x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 0, 1 \rangle, y < x\}$ s okrajovou podmínkou

$$u(x, y) = \begin{cases} -x^4 & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle, y = 0 \\ -y^4 + 6y^2 - 1 & \text{pro } y \in \langle 0, 1 \rangle, x = 1 \\ 4x^4 & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle, y = x \end{cases}$$

Ověřte podmínky existence a jednoznačnosti řešení. Rovnici řešte metodou konečných diferencí s krokem $h = 0,2$. Ověřte podmínky konvergence a sestavte soustavu síťových rovnic. Samotnou soustavu již řešit nemusíte.

4. Libovolnou metodou určete řešení soustavy s přesností $\varepsilon = 0.001$ (pokud řešení existuje)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x + 3 &= 0, \\ x^2 + y^2 - 4y - 5 &= 0. \end{aligned}$$

5. Metodou konečných diferencí řešte následující okrajovou úlohu:

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1.$$

Úlohu řešte s krokem $h = \pi/6$.

6. Je dána počáteční úloha:

$$y' = x^2 - 2y^2, \quad y(-1) = 1.$$

Metodou prediktor-korektor čtvrtého řádu s krokem $h = 0,2$ určete $y(0)$.

Písemná práce z MMNM – 6. 5. 2009 (B)

Hodnocení: 60 bodů (za každý příklad 10 bodů)

Povolené pomůcky: kalkulačka, 1 list formátu A4 popsaný vlastními poznámkami

Řešení vypracujte tak, aby bylo v každou chvíli zřejmé, jaký je smysl uváděných hodnot, co a kam dosazujete, co s čím sčítáte, odečítáte apod. Logické skoky musejí být vysvětleny. Pokud v řešení používáte graf funkce, který jste získali z kalkulačky, přepište jej na papír a ukažte, jak byste jej získali bez použití kalkulačky. Pokud budete používat kalkulačku, přizpůsobte tomu prosím své řešení. Hodnoceno bude pouze to, co je uvedeno na odevzdaných listech.

1. Definujte normu. Jaký je vztah mezi normou a metrikou?
2. Dokažte, že každý polynom lichého řádu s reálnými koeficienty má aspoň jeden reálný kořen.
3. Je dána parciální diferenciální rovnice

$$-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

v oblasti $\Omega = \{(x, y) : x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 0, 1 \rangle, y < x\}$ s okrajovou podmínkou

$$z(x, y) = \begin{cases} -x^4 & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle, y = 0 \\ -y^4 + 6y^2 - 1 & \text{pro } y \in \langle 0, 1 \rangle, x = 1 \\ 4x^4 & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle, y = x \end{cases}$$

Ověřte podmínky existence a jednoznačnosti řešení. Rovnici řešte metodou konečných diferencí s krokem $h = 0,2$. Ověřte podmínky konvergence a sestavte soustavu síťových rovnic. Samotnou soustavu již řešit nemusíte.

4. Libovolnou metodou určete řešení soustavy s přesností $\varepsilon = 0.001$ (pokud řešení existuje)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x - 3 &= 0, \\ x^2 + y^2 + 4y + 5 &= 0. \end{aligned}$$

5. Je dána počáteční úloha:

$$y' = x^2 - 2y^2, \quad y(-1) = 1.$$

Metodou prediktor-korektor čtvrtého řádu s krokem $h = 0,2$ určete $y(0)$.

6. Metodou konečných diferencí řešte následující okrajovou úlohu:

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1.$$

Úlohu řešte s krokem $h = \pi/6$.

Index

úloha

Cauchyova, 122

okrajová, 169

číslo

vlastní, 72

řád

metody, 57

Banach S., 17

bod

pevný, 18

Cauchy L.A., 15

grupa, 16

kořen

rovnice, 43

kontrakce, 18

limita

posloupnosti, 15

matice

pozitivně definitní, 31

rozšířená, 21

diagonálně dominantní, 34

dolní trojúhelníková, 29

horní trojúhelníková, 29

pásová, 31

symetrická, 31

metoda

Adamsova, 140

bisekce, 44

Euleroва, 132

Gauss- Seidelova, 35

Graeffova – Lobačevského, 64

grafická, 44

iterační nelineární, 115

Jacobiho, 34

kombinovaná, 56

konečných diferencí, 171

konečných diferencí pro PDR, 215

konečných objemů, 182

konečných prvků, 186

konečných prvků pro PDR, 223

Laguerrova, 63

největšího spádu, 40

Newtonova, 49

Newtonova modifikovaná, 52

Newtonova nelineární, 118

Newtonova pro komplexní kořeny, 55

prediktor–korektor, 144

prediktor–modifikátor–korektor, 144

prosté iterace, 46

Ralstonova, 138

regula falsi, 47

relaxační, 38

Rungeho – Kuttova, 136

Rungeho-Kuttova pro soustavy DR, 159

Schurova, 68

sdružených gradientů, 40

sečen, 47

střelby, 170

superrelaxační, 39

Taylorovy řady pro soustavy DR, 163

tečen, 49

Euleroва pro soustavy dif. rovnic, 157

Faddějevova-Leverrierova, 74

Gaussova eliminační, 28

Jordanova eliminační, 28

Krylovova, 74

LU-rozkladu, 29

mocninná, 79

Rayleighova podílu, 82

metrika, 15

Eukleidovská, 15

krychlová, 15

oktaetická, 15

norma

maticová, 18

souhlasná, 18

vektorová, 17

- operace
 - binární, 16
- podmínka
 - Lipschitzova, 45
- podmínky
 - Dirichletovy, 175
 - Neumannovy, 175
 - Sturmovy, 175
- posloupnost
 - cauchyovská, 15
 - konvergentní, 15
 - Sturmova, 60
- pravidlo
 - tříosminové, 137
- prostor
 - úplný, 16
 - Banachův, 17
 - metrický, 15
 - normovaný, 17
 - vektorový, 16
- rovnice
 - algebraická, 59
 - Bernoulliho, 127
 - exaktní, 129
 - lineární, 125
- samoadjungovaný tvar, 175
- soustava
 - homogenní, 21
 - nehomogenní, 21
- soustavy
 - ekvivalentní, 27
- stabilita, 138
- věta
 - Banachova, 19
 - Cauchyova o poloze kořenů, 60
 - Cayley-Hamiltonova, 72
 - Descartesova, 60
 - Frobeniova, 23
 - o poloze kořenů, 59
 - Picardova, 122
 - Sturmova, 61
 - Geršgorinova, 76
 - Geršgorinova zobecněná, 77
- vektor
 - vlastní, 72
- vzorce
 - Cramerovy, 22

Reference

- [1] L.Bican: *Lineární algebra*, SNTL 1979, rozšířené vydání 2001
- [2] G.Birkhoff, T.C.Bartee: *Aplikovaná algebra*, Alfa, Bratislava 1981
- [3] G.Birkhoff, S.MacLane: *Algebra*, Alfa, Bratislava 1973
- [4] R.Černá, M.Machlický, J.Vogel, Č.Zlatník: *Základy numerické matematiky a programování*. SNTL 1987
- [5] Biswa Nath Datta: *Numerical linear algebra and applications*. Brooks and Cole Publishing Company, California, 1995.
- [6] M.Demlová, J.Nagy: *Algebra*, MVŠT —III, SNTL 1982
- [7] J.Diblík, A.Haluzíková, J.Baštinec: *Numerické metody a matematická statistika*. VUT Brno, 1987 (skriptum)
- [8] J.Diblík, J.Baštinec: *Matematika IV*. Nakladatelství VUT v Brně, 1991 (skriptum)
- [9] F.Fabian, Z.Kluiber: *Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění*, Prospektrum, Praha, 1998
- [10] D.K. Faddejev, V.N. Faddejevova: *Computation Methods of Linear Algebra*. Moskva : Fizmatgiz, 1963.
- [11] [3] M. Fiedler: *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice*. Praha : SNTL, 1981.
- [12] L.E.Garner: *Calculus and analytic geometry*, London, 1988
- [13] A.Granas, J. Dugundji: *Fixed Point Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2003, ISBN 0-387-00173-5.
- [14] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner: *Geometric Numerical Integration, Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations, second edition*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2006, ISBN 3-540-30663-3.
- [15] E. Hairer, S.P. Norsett, G. Wanner: *Solving Ordinary Differential Equations I, Non-stiff Problems, Second Revised Edition*. Springer, Berlin Heidelberg, New York, 2000, ISBN 3-540-56670-8.
- [16] E. Hairer, S.P. Nørsett, G. Wanner: *Solving Ordinary Differential Equations II, Stiff and Differential-Algebraic Problems, Second Revised Edition*. Springer, Berlin Heidelberg, New York, 2002, ISBN 3-540-60452-9.
- [17] A.Haluzíková: *Numerické metody*. Redakce VN MON VUT Brno, 1989 (skriptum)
- [18] V.Havel, J.Holenda: *Lineární algebra*, SNTL 1984

-
- [19] N.J. Higham: *Accuracy and stability of numerical algorithms*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [20] R.A. Horn, Ch.R. Johnson: *Matrix Analysis*. Cambridge : Cambridge University Press, 1986. (ruský překlad, Moskva : Mir, 1989)
- [21] I. Horová: *Numerické metody*. Brno :Masarykova univerzita, 1999.
- [22] Z.Horský: *Množiny a matematické struktury*, MVŠT — I, SNTL 1980
- [23] Z.Horský: *Vektorové prostory*, MVŠT — II, SNTL 1980
- [24] Z. Horský: *Diferenciální počet*, MVŠT - V., Praha 1982
- [25] B.Hrůza, H.Mrhačová: *Cvičení z algebry a geometrie*, VUT,1990
- [26] S.C.Chapra, R.P.Canale: *Numerical methods for Engineers, fifth edition*. McGraw-Hill, New York, 2006, ISBN 007-124429-8.
- [27] V. Jarník: *Diferenciální počet I, II.*, Nakladatelství ČSAV, Praha 1963
- [28] V. Jarník: *Integrální počet I, II.*, Nakladatelství ČSAV, Praha 1963
- [29] P.Kaprálík, J.Tvarožek: *Zbierka riešených príkladov a úloh z lineárnej algebry a analytickej geometrie*, Alfa, Bratislava, 1987
- [30] Kolektiv: *OBOROVÉ ENCYKLOPEDIÉ: Aplikovaná matematika A až Ž*. Praha :SNTL, 1978.
- [31] P.E. Kloeden, E. Platen: *Numerical solution of stochastic differential equations*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2008, ISBN 978-3-540-54062-5.
- [32] J.Kuben: *Diferenciální rovnice*. VA Brno 2000.
- [33] R.J. Leveque: *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University press, 2006,ISBN 0-521-00924-3
- [34] J.D.Logan:*Applied partial differential equations*, Springer, Berlin Heidelberg, New York, 2004, ISBN 0-387-20953-0.
- [35] G.I.Marčuk *Metody numerické matematiky*. Academia Praha 1987
- [36] S.Míka: *Numerické metody algebry*, MVŠT — IV, SNTL 1982
- [37] J.Nagy, E.Nováková, M.Vacek *Integrální počet*, MVŠT — VI, SNTL Praha 1984
- [38] J.Nagy, E.Nováková, M.Vacek: *Vektorová analýza*, MVŠT - VIII., Praha 1984
- [39] M.Nekvinda, J.Šrubař, J.Vild *Úvod do numerické matematiky*. SNTL 1976
- [40] P.Pták: *Diferenciální rovnice, Laplaceova transformace*. ČVUT Praha 1999

-
- [41] P. Přikryl *Numerické metody matematické analýzy*. MVŠT — XXIV, SNTL 1985
 - [42] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri: *Numerical mathematics (Text in Applied Mathematics)*, Springer, Berlin Heidelberg, New York, 2006.
 - [43] A. Quarteroni, F. Saleri: *Scientific Computing with MATLAB and Octave*, Second Edition, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2006. ISBN 3-540-32612-X.
 - [44] A. Quarteroni, A. Valli: *Numerical approximation of partial differential equations* Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2008, ISBN 978-3-540-85267-4.
 - [45] A. Ralston: *A First Course in Numerical Analysis*. N. Y. : Mc Graw-Hill Book Company, 1965 (český překlad Praha : Academia, 1973)
 - [46] Karel Rektorys a kol.: *Přehled užití matematiky*. SNTL Praha
 - [47] Z. Riečanová a kol. *Numerické metody a matematická štatistika*. Alfa Bratislava 1987
 - [48] T. Šalát: *Metrické priestory*, Alfa, Bratislava 1981
 - [49] F. Šik: *Lineární algebra zaměřená na numerickou analýzu*. Brno : Masarykova univerzita, 1998.
 - [50] M. Šikulová, Z. Karpíšek *Matematika IV – Pravděpodobnost a matematická statistika*. VUT Brno, 1987 (skriptum)
 - [51] E. Vitásek: *Numerické metody*. Praha: SNTL, 1987
 - [52] J.H. Wilkinson: *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford : Clarendon Press, 1965. (ruský překlad Moskva : Nauka, 1970)