VLASTNÍ ČÍSLA MATIC

pokud $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$, potom $\vec{x} \neq \vec{0}$ je vlastní vektor matice a λ je vlastní číslo matice

$$A \cdot \vec{x} - \lambda \cdot \vec{x} = 0$$
$$A \cdot \vec{x} - \lambda \cdot I \cdot \vec{x} = 0 \quad \text{(I je jednotková matice)}$$
$$(A - \lambda \cdot I) \cdot \vec{x} = 0$$

nechceme, aby $\vec{x} \neq 0$

$\rightarrow |A - \lambda \cdot I| = 0 \leftarrow$ charakteristická rovnice

↑ charakteristický polynom

Př.:
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\cdot(-5-\lambda) - 6\cdot(-3) = -20 - 4\lambda + 5\lambda + \lambda^2 + 18 =$$
$$= \lambda^2 + \lambda - 2$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$
$$D = b^2 - 4 \cdot a c = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \left\langle \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{array} \right.$$

vlastní vektory:

$$\lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} \overset{3}{4-1} & -3 \\ 6 & \underset{-6}{-5-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} 3x - 3y = 0 \\ 6x - 6y = 0 \end{array}\right\} x - y = 0 \rightarrow x = y$$

$\rightarrow$ např. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_2 = -2: \begin{pmatrix} \overset{6}{4-(-2)} & -3 \\ 6 & \underset{-3}{-5-(-2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} 6x - 3y = 0 \\ 6x - 3y = 0 \end{array}\right\} 2x - y = 0 \rightarrow y = 2x$$

$\rightarrow$ např. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

dominantní vlastní číslo

největší $|\lambda|$

pro minulý příklad je to -2

Mocninná metoda (Power method)

iterační metoda

k matici A hledáme dominantní vlastní číslo

zvolíme si libovolný vektor $\vec{x}$

vynásobíme ho A: $\vec{x} \leftarrow A \cdot \vec{x}$

najdeme největší (v absolutní hodnotě) složku vektoru $\vec{x}$: e

např.: $\vec{x}\ (2, -5, 8, 1, 0, -12) \longrightarrow e = 12$

každou složku vektoru $\vec{x}$ vydělíme e

opakujeme, dokud výsledek není dost přesný

$\rightarrow \vec{x}$ je vlastní vektor příslušný dominantnímu vlastnímu číslu

$\rightarrow$ dominantní vlastní číslo:

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \longrightarrow \lambda \text{ je dominantní vlastní číslo}$$

tato metoda (jako každá iterační metoda) nefunguje vždy

pokud má matice závislé řádky

pokud zvolíme jako počáteční již vlastní vektor

pokud dominantní číslo „není dost dominantní"

např. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \underline{\lambda_3 = 30}, \lambda_4 = 2$ (bude fungovat)

$\underline{\lambda_1 = -2}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = 1{,}5$ (nejspíš nebude fungovat)