APROXIMACE METODOU NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

VSTUP: množina bodů $[x_i, y_i]$, předpis funkce $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x)$

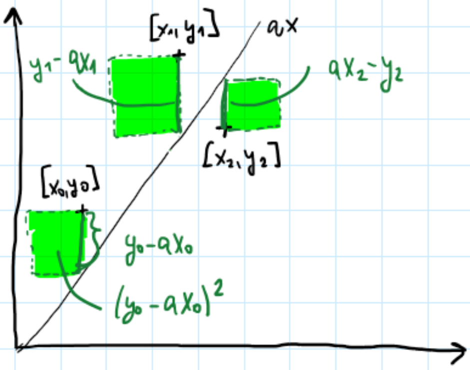
$(a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_n \varphi_n(x))$

VÝSTUP: neznáme koeficienty a_i

Konkrétně pro $\varphi(x) = ax$

budeme hledat přímku procházející počátkem takovou, že její odchylka od bodů je minimální

součet odchylek: $\sum_{i=0}^{n} |y_i - ax_i|$



jak se hledá minimum funkce?

funkci zderivujeme a položíme rovnou nule

ale absolutní hodnota se špatně derivuje

→ upravíme na $\sum_{i=0}^{n} (y_i - ax_i)^2$

derivace: $\dfrac{d \sum (y_i - ax_i)^2}{da} = \sum \dfrac{d (y_i - ax_i)^2}{da} = \sum 2 \cdot (y_i - ax_i) \cdot (-x_i) =$

$= 2 \cdot \sum (-x_i y_i + a \cdot x_i^2)$

položíme rovno nule: $2 \cdot \sum (-x_i y_i + a x_i^2) = 0$

$- \sum x_i y_i + a \sum x_i^2 = 0$

$a = \dfrac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$

Obecně pro $\varphi(x) = \sum a_i \varphi_i(x)$

speciální případ: $\varphi_i(x) = x^i$

→ polynom $\varphi(x) = \sum a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

chceme minimalizovat funkci $\sum_{j=0}^{n} \left(y_j - \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x_j) \right)^2$

tzn. zderivujeme podle každého a_i a derivace položíme rovny nule dostaneme rovnice:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \sum_{j=0}^{n} \varphi_i(x_j)\cdot\varphi_0(x_j) = \sum_{j=0}^{n} y_j \cdot \varphi_0(x_j)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n} \varphi_i(x_j)\cdot\varphi_1(x_j) = \sum_{j=0}^{n} y_j \cdot \varphi_1(x_j)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n} \varphi_i(x_j)\cdot\varphi_n(x_j) = \sum_{j=0}^{n} y_j \cdot \varphi_n(x_j)$$

maticově můžeme soustavu zapsat pomocí součinu dvou matic

Př.: známe 4 body, chceme použít $\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x)$

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_0(x_1) & \varphi_0(x_2) & \varphi_0(x_3) \\ \varphi_1(x_0) & \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \varphi_1(x_3) \\ \varphi_2(x_0) & \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \varphi_2(x_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \varphi_3(x_1) \\ \varphi_0(x_2) & \varphi_1(x_2) & \varphi_3(x_2) \\ \varphi_0(x_3) & \varphi_1(x_3) & \varphi_2(x_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0\varphi_0(x_0) + y_1\varphi_0(x_1) + y_2\varphi_0(x_2) + y_3\varphi_0(x_3) \\ y_0\varphi_1(x_0) + y_1\varphi_1(x_1) + y_2\varphi_1(x_2) + y_3\varphi_1(x_3) \\ y_0\varphi_2(x_0) + y_1\varphi_2(x_1) + y_2\varphi_2(x_2) + y_3\varphi_2(x_3) \end{pmatrix}$$

Př.: známe 5 bodů, chceme použít funkci $\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ $\left(\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_1(x) = x,\ \varphi_2(x) = x^2\right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ y_0x_0 + y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 + y_4x_4 \\ y_0x_0^2 + y_1x_1^2 + y_2x_2^2 + y_3x_3^2 + y_4x_4^2 \end{pmatrix}$$