ŘEŠENÍ SOUSTAVY ROVNIC

soustavu můžeme zapsat maticově: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

matice soustavy: A

rozšířená matice soustavy $(A|b)$

soustava má řešení, pokud $h(A) = h(A|b)$

pokud $h(A) = n$: právě jedno řešení

pokud $h(A) < n$: nekonečně mnoho řešení

soustava nemá řešení, pokud $h(A) \neq h(A|b)$

h - hodnost matice (počet nenulových řádků)

n - počet řádků (sloupců) matice

Gaussova eliminační metoda

PŘÍMÝ CHOD

převádíme rozšířenou matici soustavy na horní trojúhelníkový tvar (nulujeme prvky pod hlavní diagonálou)

pseudo kód:

```
for (k in 1:(n-1))          - n-1 protože pod posledním prvkem už nic nulovat nechci
  for (i in (k+1):n)        - všechny řádky pod k-tým řádkem
    c = - a_ik / a_kk
    for (j in (k+1)(n+1))   - pracujeme s rozšířenou maticí -> k+1 řádků
                            - pozice a_ik nás nezajímá, tam bude 0, tu nemusíme přepočítávat
      a_ij = a_ij + c · a_kj
```

Př.:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & -7 & 8 & 1 \\ 9 & -10 & 11 & 12 & 1 \\ -13 & 14 & 15 & 16 & 1 \end{array}\right)$$

$c = -\frac{a_{21}}{a_{11}}$ (-5)

$a_{22} = a_{22} + c \cdot a_{12}$ $(6 + (-5) \cdot 2 = -4)$

$a_{23} = a_{23} + c \cdot a_{13}$ $(-7 + (-5) \cdot 3 = -22)$

$a_{24} = a_{24} + c \cdot a_{14}$ $(8 + (-5) \cdot 4 = -12)$

$a_{25} = a_{25} + c \cdot a_{15}$ $(1 + (-5) \cdot 1 = -4)$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -22 & -12 & -4 \\ 9 & -10 & 11 & 12 & 1 \\ -13 & 14 & 15 & 16 & 1 \end{array}\right)$$

$c = -\frac{a_{31}}{a_{11}}$ (-9)

→ vynulujeme pozici a_{31} a obdobně a_{41}

→ poté $c = -\frac{a_{32}}{a_{22}}$, $c = -\frac{a_{42}}{a_{22}}$ (vynulujeme pozice a_{32} a a_{42} ...

ZPĚTNÝ CHOD

máme matici v tomto tvaru:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

$$a_{44} x_4 = b_4 \longrightarrow x_4 = \frac{b_4}{a_{44}}$$

$$a_{33} x_3 + a_{34} x_4 = b_3 \longrightarrow x_3 = \frac{b_3 - a_{34} x_4}{a_{33}}$$

$$a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 = b_2 \longrightarrow x_2 = \frac{b_2 - a_{23} x_3 - a_{24} x_4}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

pseudokód:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

for (i in (n-1):1)

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}} \qquad \left(x_i = \frac{b_i - a_{ii+1} x_{i+1} - a_{ii+2} x_{i+2} - \ldots - a_{in} x_n}{a_{ii}} \right)$$

Řešení 3-diagonální matice

začínáme s touto maticí:

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_5 & a_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix}$$

PŘÍMÝ CHOD

chceme vynulovat b, c nechat, a přepočítat na u a d přepočítat na y

pseudokód:

$$u_1 = a_1, \; y_1 = d_1$$

$$u_2 = c_1 \cdot \frac{b_2}{u_1} \; ; \; y_2 = d_2 - y_1 \cdot \frac{b_2}{u_1}$$

$$\vdots$$

$$u_{i+1} = a_{i+1} - c_i \frac{b_{i+1}}{u_i} \; ; \; y_{i+1} = d_{i+1} - y_i \cdot \frac{b_{i+1}}{u_i} \quad , i = 1, \ldots, n-1$$

$\frac{b_{i+1}}{u_i}$ je koeficient, který jsme počítali jako c v Gassovy metody

ZPĚTNÝ CHOD

ZPĚTNÝ CHOD

dostali jsme matici

$$\begin{pmatrix} u_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_4 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$$

chceme získat x

$$u_5 x_5 = y_5 \longrightarrow x_5 = \frac{y_5}{u_5}$$

$$u_4 x_4 + c_4 x_5 = y_4 \longrightarrow x_4 = \frac{y_4 - c_4 x_5}{u_4}$$

$$\vdots$$

pseudokód:

$$x_n = \frac{y_n}{u_n}$$

$$x_i = \frac{y_i - c_i x_{i+1}}{u_i} \quad , i = n-1, \dots, 1$$

jedná se o Gaussovu metodu, která respektuje, že matice je plná nul a zbytečně nepočítá všechno, ale jen to, co je nutné

LU dekompozice

Př.:

je dobré vědět, že funguje toto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 1 & 0 \\ 0 & e & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & d & 1 & 0 \\ c & e & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & d & 1 & 0 \\ c & e & f & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 8 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 8 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{1} & 1 & 0 \\ \frac{-3}{1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -10 & 16 \\ 0 & 10 & -6 \end{pmatrix}}_{\text{použita Gaussova metoda, abychom vynulovali pod jedničkou}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{10}{-10} & 1 \end{pmatrix} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -10 & 16 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}}^{\text{Gaussova metoda}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -10 & 16 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = L \cdot U$$

L: lower triangular matrix
(pod hlavní diagonálou jsou koeficienty, které počítám při Gaussově eliminaci (c-čka), na hlavní diagonále jsou 1, nad ní 0)

U: upper triangular matrix
(matice, která vznikne po Gaussově eliminaci)

soustava rovnic:

$$A\cdot\vec{x} = \vec{b}, \quad L\cdot U = A$$
$$(L\cdot U)\cdot\vec{x} = \vec{b}$$
$$L\cdot(U\vec{x}) = \vec{b}, \quad U\cdot\vec{x} = \vec{y}$$
$$L\cdot\vec{y} = \vec{b}$$

→ při zpětném chodu nejdříve vypočítáme z $L\cdot\vec{y} = \vec{b}$ $\vec{y}$ a poté z $U\cdot\vec{x} = \vec{y}$ $\vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \downarrow \begin{array}{l} y_1 = b_1 \\ l_{21}y_1 + y_2 = b_2 \rightarrow y_2 = b_2 - l_{21}y_1 \\ l_{31}y_1 + l_{32}y_2 + y_3 = b_3 \rightarrow y_3 = b_3 - l_{31}y_1 - l_{32}y_2 \end{array}$$

$$\rightarrow y_1 = b_1, \quad y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, y_j$$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \uparrow \begin{array}{l} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 = y_1 \rightarrow x_1 = (y_1 - u_{12}x_2 + u_{13}x_3)/u_{11} \\ u_{22}x_2 + u_{23}x_2 = y_2 \rightarrow x_2 = (y_2 - u_{23}x_2)/u_{22} \\ u_{33}x_3 = y_3 \rightarrow x_3 = y_3 / u_{33} \end{array}$$

$$\rightarrow x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}, \quad x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}\, x_j}{u_{ii}}$$

LU rozklad se hodí, pokud máme stále stejnou matici koeficientů a mění se jen pravá strana ($\vec{b}$) – udělá se jednou LU rozklad a poté se jen dopočítává $\vec{y}$ a z něj $\vec{x}$ s jinými koeficienty $\vec{b}$
→ rychlejší než stále dokola dělat Gaussovu eliminaci

Iterační metody

soustava n rovnic o n neznámých:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$

→ i-tá rovnice: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i$

vyjádření x_i z i-té rovnice

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}, \; j \neq i$$

tzn. $x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j}{a_{ii}}$

Jakobiho metoda

zvolíme si počáteční odhad řešení → $x^{(0)} = (0, 0, 0, \dots, 0)$

(tzn. $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$, ..., $x_n^{(0)} = 0$)

pomocí $x^{(0)}$ spočítáme $x^{(1)}$, pomocí $x^{(1)}$ získáme $x^{(2)}$, co jsou stále přesnější výsledky

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

Gauss-Seidelova metoda

stejná jako Jakobiho, jen využijeme toho, že když počítáme $x_i^{(k+1)}$, máme už lepší odhad pro $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

o něco přesnější než Jakobiho metoda