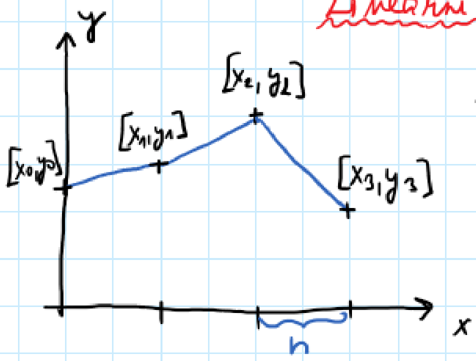
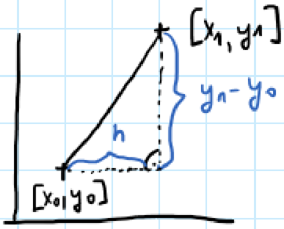
INTERPOLACE PO ČÁSTECH

Lineární interpolace



zadané body propojíme úsečkami (po částech přímkami – po částech lineární funkcí)



$y = kx + q$

k: směrnice přímky

$k = \frac{y_1-y_0}{h}$

$$y = \frac{y_1-y_0}{h}x + q$$

dosadíme bod $[x_0,y_0]$:

$$y_0 = \frac{y_1-y_0}{h}x_0 + q$$

$$q = y_0 - \frac{y_1-y_0}{h}x_0$$

$$\rightarrow y = \frac{y_1-y_0}{h}x + y_0 - \frac{y_1-y_0}{h}x_0 = y_0 + \frac{y_1-y_0}{h}(x-x_0)$$

→ část x_i — x_{i+1}: $y = y_i + \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i)$

Kubická interpolace (spliny)

vezmeme vždy 4 po sobě jdoucí body a proložíme je kubikou (polynomem stupně 3)

Hermitův spline

zadáno: $[x_0,y_0]$, $[x_1,y_1]$, y_0', y_1' (dva body a derivace v nich)

$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3$

budeme potřebovat derivaci $p(x)$:

$$p'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2$$

dosadíme bod $[x_0,y_0]$: (do $p(x)$)

$$y_0 = a_0 + a_1(x_0-x_0) + a_2(x_0-x_0)^2 + a_3(x_0-x_0)^3 = a_0$$

dosadíme x_0 a y_0': (do $p'(x)$)

$$y_0' = a_1 + 2a_2(x_0-x_0) + 3a_3(x_0-x_0)^2 = a_1$$

$$\rightarrow p(x) = y_0 + y_0'(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3$$

$$p'(x) = y_0' + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2$$

dosadíme x_1, y_1 a x_1, y_1':

$$y_1 = y_0 + y_0'(x_1 - x_0) + a_2 (x_1 - x_0)^2 + a_3 (x_1 - x_0)^3$$
$$y_1' = y_0' + 2a_2 (x_1 - x_0) + 3a_3 (x_1 - x_0)^2$$

$h = x_1 - x_0$

$$y_1 = y_0 + y_0' \cdot h + a_2 h^2 + a_3 h^3$$
$$y_1' = y_0' + 2a_2 h + 3a_3 h^2$$

$\frac{y_1 - y_0}{h} = \delta$

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = y_0' + a_2 h + a_3 h^2$$
$$y_1' = y_0' + 2a_2 h + 3a_3 h^2$$

I. $\delta = y_0' + a_2 h + a_3 h^2$

II. $y_1' = y_0' + 2a_2 h + 3a_3 h^2$

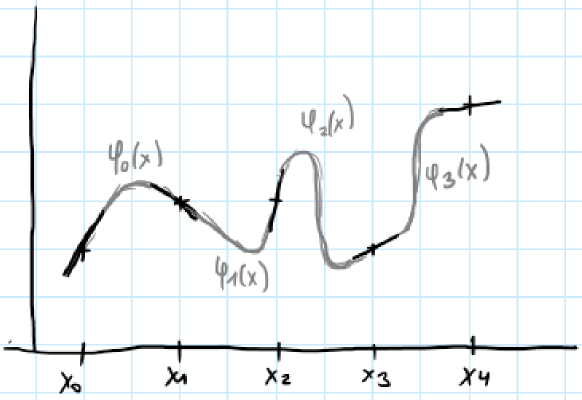
II − 2·I: $y_1' - 2\delta = -y_0' + a_3 h^2 \longrightarrow a_3 = \frac{y_1' + y_0' - 2\delta}{h^2}$

II − 3·I: $y_1' - 3\delta = -2y_0' - a_2 h \longrightarrow a_2 = \frac{3\delta - y_1' - 2y_0'}{h}$

$$\varphi_i(x) = y_i + y_i'(x - x_i) + \frac{3\delta_i - y_{i+1}' - 2y_i'}{h_i}(x - x_i)^2 + \frac{y_{i+1}' + y_i' - 2\delta_i}{h_i^2}(x - x_i)^3$$

$\varphi_i(x)$ je na intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$

použité substituce: $h_i = x_{i+1} - x_i$, $\delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$



Úplný spline

místo y_i' budeme pro jednodušší zápis psát d_i

$$\varphi_i(x) = y_i + d_i(x-x_i) + \frac{3\delta_i - d_{i+1} - d_i}{h_i}(x-x_i)^2 + \frac{-2\delta_i + d_{i+1} + d_i}{h_i^2}(x-x_i)^3$$

ale máme-li body x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, známe derivace jen v krajních bodech (tzn. v $[x_0, y_0]$ a v $[x_4, y_4]$)

→ informace, které máme nestačí, musíme přidat další podmínku:

$\varphi_i''(x_{i+1}) = \varphi_{i+1}''(x_{i+1})$ (spojitost (rovnost) druhých derivací ve vnitřních bodech)

z tohoto si můžeme dopočítat d_1, d_2, d_3 (jsou-li d_0 a d_4 derivace v krajních bodech)

Přirozený spline

polynom pro $\varphi_i(x)$ vypadá stále stejně, ale tentokrát neznáme ani derivace v krajních bodech

→ potřebujeme další podmínku:

$\varphi_0''(x_0) = 0$, $\varphi_n''(x_n) = 0$ (druhé derivace v prvním a posledním bodě jsou rovny nule)

z tohoto můžeme zjistit derivaci v krajních bodech: d_0 a d_n (konkrétně např. d_0 a d_4, pokud jsou $[x_0, y_0]$ a $[x_4, y_4]$ krajní body) máme body $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $[x_3, y_3]$, $[x_4, y_4]$, $[x_5, y_5]$

Úplný spline – matice

$$
\begin{array}{cccc}
d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
2(h_1+h_0) & h_0 & 0 & 0 & 3(\delta_0 h_1 + \delta_1 h_0) - d_0 h_1 \\
h_2 & 2(h_2+h_1) & h_1 & 0 & 3(\delta_1 h_2 + \delta_2 h_1) \\
0 & h_3 & 2(h_3+h_2) & h_2 & 3(\delta_2 h_3 + \delta_3 h_2) \\
0 & 0 & h_4 & 2(h_4+h_3) & 3(\delta_3 h_4 + \delta_4 h_3) - d_5 h_4
\end{array}\right)
$$

Přirozený spline – matice

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
-2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\delta_0 \\
h_1 & 2(h_1+h_0) & h_0 & 0 & 0 & 0 & 3(\delta_0 h_1 + \delta_1 h_0) \\
0 & h_2 & 2(h_2+h_1) & h_1 & 0 & 0 & 3(\delta_1 h_2 + \delta_2 h_1) \\
0 & 0 & h_3 & 2(h_3+h_2) & h_2 & 0 & 3(\delta_2 h_3 + \delta_3 h_2) \\
0 & 0 & 0 & h_4 & 2(h_4+h_3) & h_3 & 3(\delta_3 h_4 + \delta_4 h_3) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\delta_4
\end{array}\right)
$$

tyto matice není třeba znát, ale mohly by pomoci při zápočtu