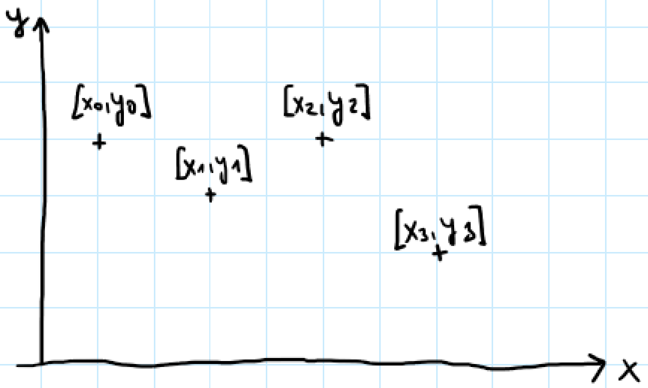
INTERPOLACE POLYNOMEM

Vandermondova matice

polynom n-tého stupně: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$; $a_n \neq 0$

má $n-1$ lokálních extrémů

je jednoznačně určen $n+1$ body



4 body → polynom stupně 3:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = y$$

dosadíme body:

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 = y_0$$
$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 = y_1$$
$$a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 = y_2$$
$$a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 = y_3$$

→ matice:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & y_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & y_3 \end{array}\right)$$
← Vandermondova matice

Newtonův interpolační polynom

$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)\cdot(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1}) = y_n$$

máme body $x_0, x_1, \dots, x_n$

rovnice:
$$p(x_0) = a_0 = y_0$$
$$p(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1$$
$$p(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2$$
$$\vdots$$
$$p(x_n) = a_0 + a_1(x_n - x_0) + \dots + a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdot\ldots\cdot(x_n - x_{n-1}) = y_n$$

k rychlejším výpočtům se využívají diference:

diference 1. řádu: $f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$

diference 2. řádu: $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \dfrac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$

$\vdots$

výhoda – snadno se přidává další bod (jen se dopočítá další diference)
stále ovšem platí, že pokud změníme pozici jednoho bodu, většina křivky se musí přepočítat (od tohoto bodu dále)

Př.: $[\overset{x_0}{-2}, \underset{a_0}{\overset{y_0}{-39}}], [\overset{x_1}{0}, \overset{y_1}{3}], [\overset{x_2}{1}, \overset{y_2}{6}], [\overset{x_3}{3}, \overset{y_3}{36}]$

dif. 1. řádu	dif. 2. řádu	dif. 3. řádu
$\dfrac{3-(-39)}{0-(-2)} = \boxed{21} = a_1$	$\times$	$\times$
$\dfrac{6-3}{1-0} = 3$	$\dfrac{3-21}{1-(-2)} = \boxed{-6} = a_2$	$\times$
$\dfrac{36-6}{3-1} = 15$	$\dfrac{15-3}{3-0} = 4$	$\dfrac{4-(-6)}{3-(-2)} = \boxed{2} = a_3$

$$\rightarrow P_3(x) = -39 + 21\,(x-\overset{x_0}{(-2)}) - 6\cdot(x-\overset{x_0}{(-2)})(x-\overset{x_1}{0}) + 2\cdot(x-\overset{x_0}{(-2)})(x-\overset{x_1}{0})(x-\overset{x_2}{1}) =$$

$$= -39 + 21\,(x+2) - 6\,(x+2)\cdot x + 2\,(x+2)\,x\,(x-1)$$

Lagrangeův interpolační polynom

vezmeme fci $f(x) = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$ – polynom 3. stupně

$$f(x_0) = y_0 \cdot \frac{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = y_0 \cdot 1 = y_0$$

$$f(x_1) = y_0 \cdot \frac{(x_1-x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}{-\text{''}-} = y_0 \cdot 0 = 0$$

$$f(x_2) = 0, \quad f(x_3) = 0$$

– tento polynom má: $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$

dokázali bychom napsat polynom s těmito vlastnostmi: $f(x_1) = y_1$, $f(x_0) = f(x_2) = f(x_3) = 0$

nebo takový: $f(x_2) = y_2$, $f(x_0) = f(x_1) = f(x_3) = 0$, ...

→ pokud chceme dostat polynom s vlastnostmi: $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $f(x_3) = y_3$, $f(x_4) = y_4$, stačí polynomy výše sečíst:

$$\to L_3(x) = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$\to L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

(obecný zápis pro polynom stupně n)

tento člen bude vždy buď 1 nebo 0