URČITÝ INTEGRÁL

$F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$ $\quad (F(x) = \int f(x)\,dx)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \leftarrow \text{analytické řešení (Newton-Leibnitzova metoda)}$$

některé úlohy analyticky řešit nelze

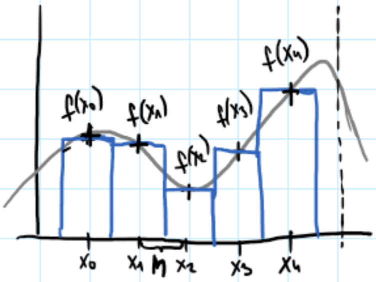
napiř. $\int_0^1 e^{-x^2}$

nebo pokud funkci nemáme zadanou předpisem, ale známe jen některé body

určitý integrál je obsah plochy pod křivkou

Newton-Cotesovy (NC) vzorce

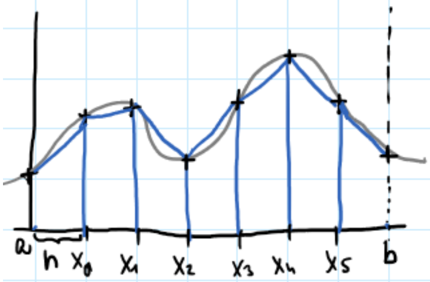
Obdélníkové pravidlo



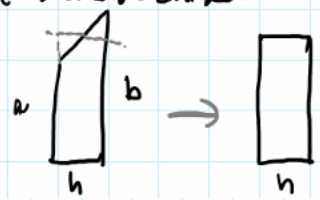
odhad integrálu: $h\cdot f(x_0) + h\cdot f(x_1) + h\cdot f(x_2) + h\cdot f(x_3) + h\cdot f(x_4) =$
$= h\cdot [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)]$

$$h\cdot \sum_{i=0}^{n} f(x_i)$$

Lichoběžníkové pravidlo



obsah lichoběžníka:



$\frac{a+b}{2} \rightarrow h\cdot \frac{a+b}{2}$

odhad integrálu: $h\cdot \frac{f(a)+f(x_0)}{2} + h\cdot \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \dots + h\cdot \frac{f(x_4)+f(x_5)}{2} + h\cdot \frac{f(x_5)+f(b)}{2} =$

$$= h\cdot \left[\frac{f(a)}{2} + f(x_0) + \dots + f(x_5) + \frac{f(b)}{2}\right]$$

$$h\cdot \left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$ pokud místo a, b bude už x_0 a x_n

Obecně pravidla dělíme:

otevřené (nevyužíváme krajní body) × uzavřené (využíváme krajní body)
← obdélníkové   lichoběžníkové

jednoduché (jen jeden úsek (obdélník / lichoběžník)) × složené (více úseků (více obdélníčků / lichoběžníčků))

řád pravidla: stupeň polynomu, pro který je pravidlo přesné
řád obdélníkového pravidla: 0 (přesné pro konstantní přímku)
řád lichoběžníkového pravidla: 1 (přesné pro jakoukoli přímku)

Simpsonovo pravidlo
3-bodové uzavřené pravidlo řádu 2 (přesné pro parabolu)

každý NC vzorec se dá zapsat ve tvaru $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$, body jsou od sebe stejně vzdálené

$$\rightarrow \int_{-h}^{h} f(x)\,dx = a\cdot f(-h) + b\cdot f(0) + c\cdot f(h)$$

chceme aby toto pravidlo bylo přesné až pro parabolu, tzn. pro funkce 1, x a x^2 a jejich lineární kombinace

$f(x)=1$: $\int_{-h}^{h} 1\,dx = [x]_{-h}^{h} = h-(-h) = 2h$ (analyticky)
$a\cdot f(-h) + b\cdot f(0) + c\cdot f(h) = a\cdot 1 + b\cdot 1 + c\cdot 1 = a+b+c$
$\rightarrow a+b+c = 2h$

$f(x)=x$: $\int_{-h}^{h} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-h}^{h} = \frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{2} = 0$ (analyticky)
$a\cdot f(-h) + b\cdot f(0) + c\cdot f(h) = a\cdot(-h) + b\cdot 0 + c\cdot h = -ah + ch$
$\rightarrow -ah + ch = 0$

$f(x)=x^2$: $\int_{-h}^{h} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-h}^{h} = \frac{h^3}{3} - \frac{-h^3}{3} = \frac{2h^3}{3}$
$a\cdot f(-h) + b\cdot f(0) + c\cdot f(h) = a\cdot h^2 + b\cdot 0 + c\cdot h^2 = ah^2 + ch^2$
$\rightarrow ah^2 + ch^2 = \frac{2h^3}{3}$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} 2h &= a+b+c \\ 0 &= -ah+ch \\ \frac{2h^3}{3} &= ah^2+ch^2 \end{aligned}\right\} \text{ řešení: } a=c=\frac{h}{3}, \quad b=\frac{4h}{3}$$

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = \frac{h}{3} f(-h) + \frac{4h}{3} f(0) + \frac{h}{3} f(h) = \frac{h}{3}\left[f(-h) + 4\cdot f(0) + f(h)\right]$$

$$\rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$ — jednoduché Simpsonovo pravidlo

složené Simpsonovo pravidlo:

$$\frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

chyba Simpsonova pravidla:

$$E = -\frac{h^5}{90}\cdot f^{(4)}(\theta)$$

Gaussova kvadratura

kvadratura = numerický integrál

vše ve tvaru $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$

Odvození dvoubodového pravidla řádu 3

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx a\cdot f(x_1) + b\cdot f(x_2)$$ zatím jen pro konkrétní interval $\langle -1, 1\rangle$

přesné pro $f(x)=1$:

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = [x]_{-1}^{1} = 1-(-1) = 2 \qquad \rightarrow a\cdot 1 + b\cdot 1 = a+b = 2$$

přesné pro $f(x)=x$:

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \qquad \rightarrow ax_1 + bx_2 = 0$$

přesné pro $f(x)=x^2$

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{2}{3} \qquad \rightarrow ax_1^2 + bx_2^2 = \frac{2}{3}$$

přesné pro $f(x) = x^3$

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \qquad \rightarrow a x_1^3 + b x_2^3 = 0$$

pro jednoduchost si určíme, že $a = b$

z první rovnice vidíme:

$$a + b = 2, \; a = b \rightarrow a = b = 1$$

→ dosadíme do dalších rovnic:

$$x_1 + x_2 = 0 \longrightarrow x_1 = -x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$x_1^3 + x_2^3 = 0$$

$$(-x_2)^2 + x_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$2x_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$x_2^2 = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \longrightarrow x_1 = -\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

→ takže například $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

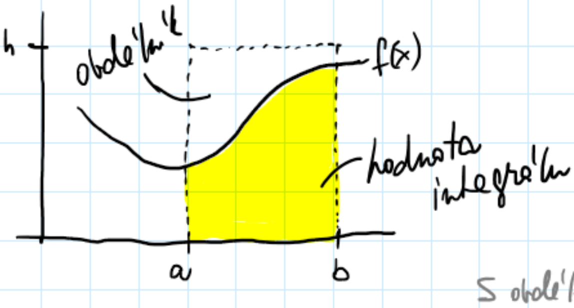
$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

dá se zobecnit na jakýkoli interval

Monte-Carlo metody

neefektivní pro jednorozměrné integrály (efektivní pro vícerozměrné integrály - sice nevíme, co to je, ale to nevadí)

Geometrická metoda



náhodně vybíráme body z obdélníku

p: pravděpodobnost, že se trefíme pod křivku

$$p = \frac{\text{počet bodů pod křivkou}}{\text{počet bodů celkem}}$$

$p \cdot$ obsah obdélníka $\approx$ obsah plochy pod křivkou

$$\to \int_a^b f(x)\,dx \doteq p \cdot \overbrace{(b-a)\cdot h}^{S \text{ obdélníka}}$$

Metoda střední hodnoty

náhodně generujeme x na intervalu (a, b)

když máme dostatek bodů, spočteme f(x) (jejich funkční hodnotu)

určíme z nich průměr $\overline{f(x)}$

$$\overline{f(x)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{n}, \quad n = \text{počet bodů}$$

$\overline{f(x)}$ je odhad výšky obdélníka, který má stejný obsah jako plocha pod křivkou

$$\to \int_a^b f(x)\,dx \doteq \overline{f(x)} \cdot (b-a)$$