OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

dobré vědět: $y' = \frac{dy}{dx}$ – derivace

$\frac{\delta (f(x,y))}{\delta x}$ – parciální derivace podle x

$f(x,y) = y'$, $F(x,y,y') = 0$ ← obyčejná dif. rovnice 1. řádu
$F(x,y,y',y'') = 0$ ← obyčejná dif. rovnice 2. řádu

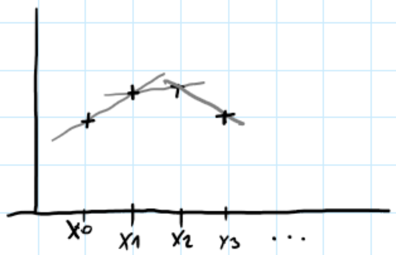
řešením dif. rovnice je množina funkcí y (jedna funkce s různým posuny: $+C$)
my budeme řešit rovnice s počáteční podmínkou – budeme vědět, že funkce prochází bodem $[x_0, y_0]$ → výsledkem bude jen jedna funkce (ve skutečnosti to nebude ani funkce, ale množina bodů)

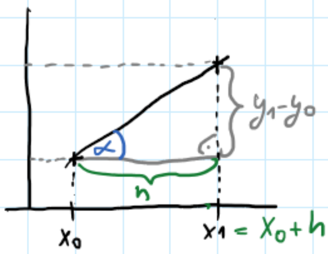
Eulerova metoda prvního řádu

VSTUP: $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ (počáteční podmínka, $[x_0, y_0]$)

VÝSTUP: množina bodů charakterizující funkci $y(x)$

ALGORITMUS: známe jeden bod a obecný předpis derivace → dokážeme v tomto bodě zjistit derivaci (tečnu)
předpokládáme, že funkční hodnota dalšího bodu leží na tečně → dopočítáme y-ovou souřadnici → máme další bod
v tomto bodě vypočteme podle obecného předpisu derivaci (tečnu), předpokládáme, že další bod leží na tečně...





$\operatorname{tg} \alpha = y' = f(x,y)$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 - y_0}{h}$

$f(x_0, y_0) = \frac{y_1 - y_0}{h}$

$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$

→ $x_{i+1} = x_i + h$
$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$

vsuvka: Eulerův rozvoj:

$$\boxed{f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x)} + h^2 \frac{f''(x)}{2!} + h^3 \frac{f'''(x)}{3!} + \dots$$

toto je náš vzorec

Rozšíření Eulerovy metody

můžeme řešit soustavu dif. rovnic 1. řádu

1. kmitání

$a = \dot{v} = \ddot{s} \quad (v = \dot{s})$ · je značení derivace

zrychlení / rychlost / dráha

$F = m \cdot a$, vratná síla: $F = -k \cdot s$

$\rightarrow a = \dot{v} = \frac{F}{m} = -\frac{ks}{m}, \quad \dot{s} = v$

$\rightarrow \dot{v} = -\frac{ks}{m}, \quad \dot{s} = v$

soustava 2 dif. rovnic 1. řádu

k a m pro jednoduchost nastavíme jako 1

$\rightarrow a = \dot{v} = -s, \quad \dot{s} = v$

$\rightarrow s_{i+1} = s_i + dt \cdot \dot{s}_i = s_i + dt \cdot v_i$

$v_{i+1} = v_i + dt \cdot \dot{v}_i = v_i + dt \cdot (-s_i) = v_i - dt \cdot s_i$

2. SIR - model šíření nemoci

$S' = \frac{\beta \cdot I \cdot S}{N}$

$I' = \frac{\beta \cdot I \cdot S}{N} - \gamma \cdot I$

$R' = \gamma \cdot I$

S: počet lidí, kteří mohou onemocnět
I: počet lidí, kteří jsou nemocní
R: počet lidí, kteří se vyléčili
N: počet lidí celkem
β, γ: konstanty, volíme

RK2

jak Eulerovu metodu zpřesnit?

bylo by lepší spočítat derivaci ve středním bodě (ne v x_0 a v x_1, ale uprostřed)

1. derivace v $\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

1. derivace v $\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

odhadneme $y_{i+\frac{1}{2}}$: $y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i)$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(\overbrace{x_i + \tfrac{h}{2}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}, y_i + \tfrac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i))$$

2. průměr 2 derivací v x_0 a v x_1

odhadneme y_{i+1} : $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot [f(x_i, y_i) + f(\overbrace{x_i + h}^{x_{i+1}}, y_i + h \cdot f(x_i, y_i)]$$

nebo nebudeme y_{i+1} odhadovat :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_{i+1})]$$

máme neznámou na obou stranách, rovnice je ve tvaru $y_{i+1} = g(y_{i+1})$ → můžeme použít metodu jednoduché iterace
→ ještě přesnější výsledek

Metody založené na numerickém integraci

$y' = f(x, y)$

$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)$

$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)$

po použití lichoběžníkova pravidla:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

(druhá varianta RK2)