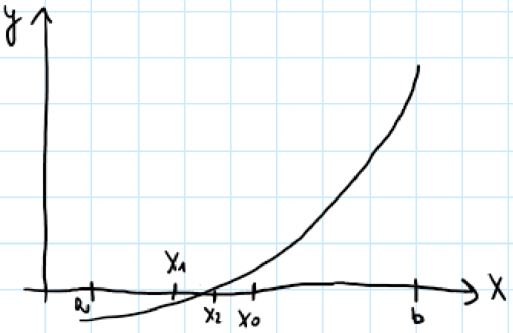
ŘEŠENÍ $F(X)=0$ (NELINEÁRNÍ ROVNICE)

VSTUP: funkce $f(x)$
VÝSTUP: kořen $f(x)$ (jedno řešení rovnice $f(x)=0$)
– hledáme, kde funkce $f(x)$ protíná osu x

Metoda půlení intervalu



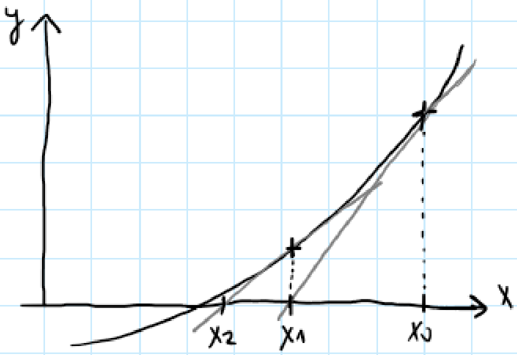
máme daný interval, na kterém řešení hledáme (a,b)
aby řešení existovalo, musí zde být funkce spojitá a musí zde měnit znaménko (musí $f(a)\cdot f(b) < 0$)

spočítáme střed: $x_0 = \frac{a+b}{2}$
zjistíme na kterém ze dvou intervalů se mění znaménko funkce ($f(a)\cdot f(x_0) < 0$)

→ máme nový interval (a, x_0)
spočteme střed: $x_1 = \frac{a+x_0}{2}$, zjistíme kde funkce mění znaménko ($f(x_1)\cdot f(x_0) < 0$)
→ $x_2 = \frac{x_1+x_0}{2}$, ...

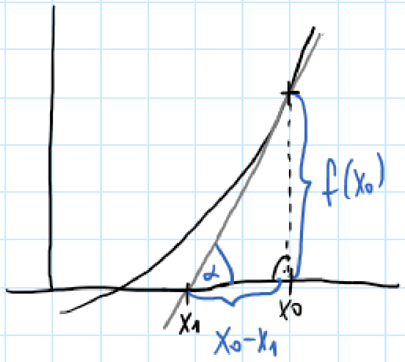
iterace končí, když máme dostatečně přesný výsledek

Newtonova metoda tečen



zvolíme si na funkci bod $[x_0,y_0]$ a sestrojíme v něm tečnu
tam, kde tečna protne osu x, dostáváme x_1
vypočteme $f(x_1) = y_1$ a v bodě $[x_1,y_1]$ sestrojíme tečnu
opakujeme dokud nemáme dost přesný výsledek

tato metoda nemusí fungovat vždy, záleží na volbě počátečního bodu, můžeme se od řešení vzdalovat
– pokud funguje, funguje tato metoda velmi efektivně



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{f(x_0)}{x_0-x_1} = f'(x_0)$$
$$\rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x)}$$

$$\rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

využívá se Taylorův rozvoj:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$

Newtonova využívá lineární část Taylorova polynomu

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$
$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1-x_0)$$
$$0 = f(x_0) + f'(x_0)\cdot x_1 - f'(x_0)\cdot x_0$$
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Hayllezova metoda

využívá i kvadratickou část Taylorova polynomu

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2$$

po úpravě dostaneme: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}\cdot\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$

Hornerovo schéma

Př.: $p(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 3$

Hornerovo schéma: $((x+4)\cdot x + 2)\cdot x + 3$

$$p(2) = 2^3 + 4\cdot 2^2 + 2\cdot 2 + 3 = 8 + 16 + 4 + 3 = 31$$

$$(x^3+4x^2+2x+3) : (x-2) = 1x^2 + 6x + 14$$
$$-(x^3 - 2x^2)$$
$$6x^2 + 2x + 3$$
$$-(6x^2 - 12x)$$
$$14x + 3$$
$$-(14 - 28)$$
$$31 \longrightarrow p(2) = 31$$

pomocí Hornerova schématu

	1^{a_3}	4^{a_2}	2^{a_1}	3^{a_0}
2	0	2	12	28
	1_{b_3}	6_{b_2}	14_{b_1}	31_{b_0}

$\rightarrow p(2) = 31$

b_3, b_2, b_1 jsou koeficienty polynomu $(x^3+4x^2+2x+3):(x-2)$

	1	6	14
2	0	2	16
	1	8	30

$\rightarrow p'(2) = 30$

ověření: $p(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 3$

$p'(x) = 3x^2 + 8x + 2$

$p'(2) = 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 2 = 12 + 16 + 2 = 30$

$p_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ počáteční polynom

x_0 bod, ve kterém chceme hledat funkční hodnotu a hodnotu derivace

$b_n = a_n$

$b_i = b_{i+1} \cdot x_0 + a_i \quad (i = 0, \ldots, n-1)$

$q_{n-1}(x, x_0) = b_n x^{n-1} + \ldots + b_2 x + b_1$ koeficienty b závisí na x_0

platí: $p_n(x) : (x - x_0) = q_{n-1}(x, x_0)$, zbytek b_0

$p_n(x) = q_{n-1}(x, x_0) \cdot (x - x_0)$

$p_n'(x) = q_{n-1}'(x, x_0) \cdot (x - x_0) + q_{n-1}(x, x_0)$

$p_n(x_0) = q_{n-1}'(x_0, x_0) \cdot (x_0 - x_0) + q_{n-1}(x_0, x_0) = q_{n-1}(x_0, x_0)$

toto je jen odvození toho, co jsme ověřovali – že když použiji Hornerovo podruhé, dostanu hodnotu derivace

k Newtonově metodě: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ potřebujeme funkční hodnotu a hodnotu derivace – to už umíme efektivně spočítat

Metoda jednoduché iterace

úlohu $f(x) = 0$ převedeme na $x^{(i+1)} = g(x^{(i)})$ tak, aby $|g'(x)| < 1$ (aby nám to konvergovalo)

Př.: úloha $x^2 - \alpha = 0$

$\rightarrow x = \frac{\alpha}{x}$ (ale toto konvergovat nebude)

$\rightarrow 2x = x + \frac{\alpha}{x}$

$x^{(i+1)} = \frac{x^{(i)} + \frac{\alpha}{x^{(i)}}}{2}$ (toto už konverguje)

např.: $\sqrt{3}$: $x^2 - 3 = 0$

$\rightarrow x^{(i+1)} = \frac{x^{(i)} + \frac{3}{x^{(i)}}}{2}$

počáteční $x^{(0)}$ volíme libovolně