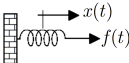
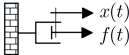
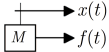


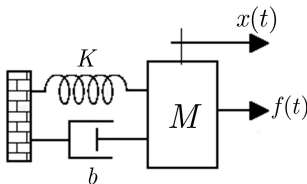
Modelagem de Sistemas Mecânicos

A tabela seguinte apresenta algumas relações envolvendo componentes mecânicos:

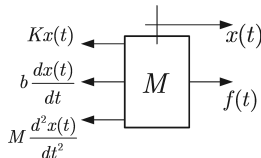
Componente	Força-Velocidade	Força-Deslocamento	Impedância
<p>Mola</p> 	$f(t) = K \int_0^t v(\tau) d\tau$	$f(t) = Kx(t)$	$\frac{F(s)}{X(s)} = K$
<p>Amortecedor Viscoso</p> 	$f(t) = bv(t)$	$f(t) = b \frac{dx(t)}{dt}$	$\frac{F(s)}{X(s)} = bs$
<p>Massa</p> 	$f(t) = M \frac{dv(t)}{dt}$	$f(t) = M \frac{d^2x(t)}{dt^2}$	$\frac{F(s)}{X(s)} = Ms^2$
<p>$f(t)$: força em Newtons (N), $x(t)$: deslocamento em metros (m), $v(t)$: velocidade (m/s), K: constante da mola (N/m), b: coeficiente de atrito viscoso (Ns/m), M: massa (Kg)</p>			

Exemplo

Obtenha a função de transferência, $X(s)/F(s)$, para o sistema abaixo.



Considerando que a massa está sendo deslocada para a direita, somente a força aplicada aponta para a direita; todas as outras forças impedem o movimento e agem contra ele. O diagrama do corpo livre deste sistema é dado por:



Exemplo (continuação)

Logo,

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t)$$

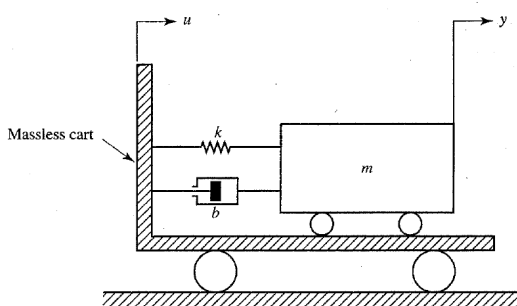
Aplicando a transformada de Laplace, com condições iniciais nulas, tem-se:

$$Ms^2 X(s) + bsX(s) + KX(s) = F(s)$$

Portanto,

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + K}$$

Sistemas Massa-Mola-Amortecedor



- $u(t)$: entrada - deslocamento do carro ($\dot{u}(t)$ constante)
- $y(t)$: saída - deslocamento da massa m

Continuação

$$ma = \sum F$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -b \left(\frac{dy}{dt} - \frac{du}{dt} \right) - k(y - u)$$

Ou, equivalentemente:

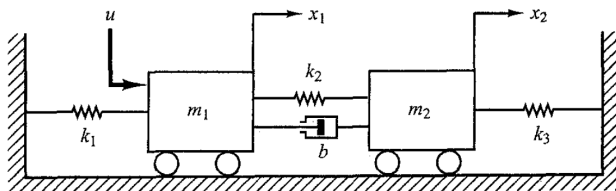
$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = b \frac{du}{dt} + ku$$

Aplicando-se Laplace:

$$(ms^2 + bs + k) Y(s) = (bs + k) U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

Sistemas Massa-Mola-Amortecedor Acoplados



$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + u$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_3 x_2 - k_2 (x_2 - x_1) - b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

Continuação

$$m_1 \ddot{x}_1 + b \dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 = k_2 x_2 + b \dot{x}_2 + u$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + b \dot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 = k_2 x_1 + b \dot{x}_1$$

Aplicando-se Laplace:

$$(m_1 s^2 + bs + (k_1 + k_2)) X_1(s) = (k_2 + bs) X_2(s) + U(s)$$

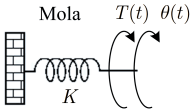
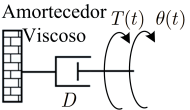
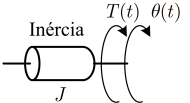
$$(m_2 s^2 + bs + (k_2 + k_3)) X_2(s) = (k_2 + bs) X_1(s)$$

Resolvendo-se:

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3}{(m_1 s^2 + bs + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3) - (bs + k_2)^2}$$

Modelagem de Sistemas Mecânicos Rotativos

Função de Transferência de Circuitos Mecânicos Rotativos

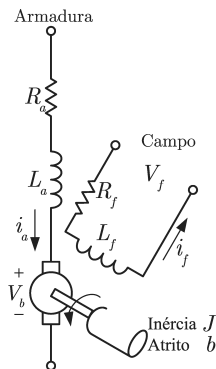
Componente	Força-Velocidade angular	Força-Deslocamento angular	Impedância
<p>Mola</p> 	$T(t) = K \int_0^t \omega(\tau) d\tau$	$T(t) = K\theta(t)$	$\frac{T(s)}{\theta(s)} = K$
<p>Amortecedor</p> <p>Viscoso</p> 	$T(t) = D\omega(t)$	$T(t) = D \frac{d\theta(t)}{dt}$	$\frac{T(s)}{\theta(s)} = Ds$
<p>Inércia</p> 	$T(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$	$T(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	$\frac{T(s)}{\theta(s)} = Js^2$

$T(t)$: torque (Nm), $\theta(t)$: deslocamento angular (rad), $\omega(t)$: velocidade angular (rad/s),

K : constante da mola (Nm/rad), D : coeficiente de atrito viscoso (Nms/rad), J : momento de inércia (Kgm^2)

Exemplo (Modelagem de Servomotor de Corrente Contínua)

Os servomotores DC têm diversas características interessantes como controlabilidade, portabilidade, baixos custos de aquisição e manutenção e adaptabilidade a vários tipos de sistemas de controle. Considera-se a modelagem do servomotor controlado por armadura (campo constante).



R_a : resistência da armadura
 L_a : indutância da armadura
 R_f : resistência de campo
 L_f : indutância de campo
 J : momento inércia
 b : coeficiente de atrito viscoso
 V_b : força controeletromotriz

Exemplo (Continuação)

Assumindo corrente de campo (i_f) constante, o torque do motor é proporcional à corrente de armadura:

$$T_m(s) = K_m I_a(s)$$

O torque do motor é igual à soma do torque da carga ($J s^2 \theta(s) + b s \theta(s)$) e o torque de distúrbio, $T_d(s)$. Considerando $T_d(s) = 0$, tem-se:

$$T_m(s) = K_m I_a(s) = J s^2 \theta(s) + b s \theta(s)$$

A corrente de armadura se relaciona com a tensão de armadura como:

$$V_a(s) = (R_a + L_a s) I_a(s) + V_b(s),$$

onde $V_b(s)$ é a TL da força controeletromotriz gerada, que é proporcional à velocidade do motor, ou seja,

$$V_b(s) = K_b \omega(s)$$

Exemplo (Continuação)

Assim, a corrente da armadura pode então ser escrita como:

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - K_b\omega(s)}{R_a + L_a s}$$

Então, tem-se:

$$\frac{K_m V_a(s) - K_m K_b \omega(s)}{R_a + L_a s} = s(Js + b)\theta(s),$$

que pode ser escrita como (note que $\omega(s) = s\theta(s)$)

$$K_m V_a(s) = s[(Js + b)(R_a + L_a s) + K_m K_b]\theta(s).$$

Assim, a função de transferência $\theta(s)/V_a(s)$ é dada por:

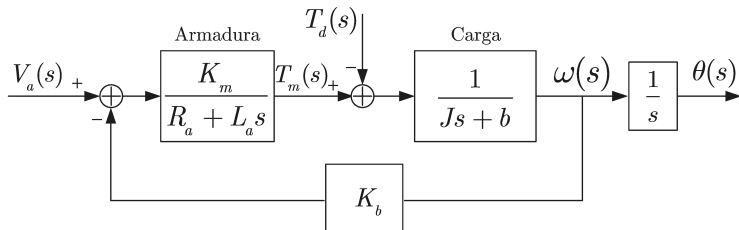
$$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[(Js + b)(R_a + L_a s) + K_m K_b]}$$

Exemplo (Continuação)

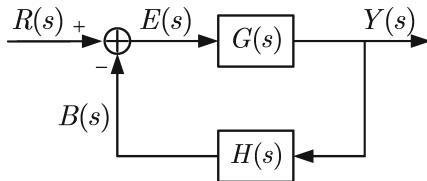
Como $\omega(s) = s\theta(s)$, a função de transferência $\omega(s)/V_a(s)$ é dada por:

$$\frac{\omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{(Js + b)(R_a + L_a s) + K_m K_b}$$

O diagrama de blocos do modelo motor controlado por armadura é dado por:



Função de Transferência – Relação Entrada-Saída



Desejamos obter a expressão

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

Para obter essa expressão, devemos realizar uma análise de algebra de blocos. Perceba que a relação entre o sinal de realimentação $B(s)$ e o sinal de erro atuante $E(s)$ é

$$\text{FT de malha aberta} = \frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$

A relação entre o sinal de saída $Y(s)$ e o sinal de erro atuante é chamada de função de transferência do ramo direto,

$$\text{FT de ramo direto} = \frac{Y(s)}{E(s)} = G(s)$$

A expressão que relaciona a saída $Y(s)$ e a entrada $R(s)$ é obtida como:

$$Y(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - Y(s)H(s)$$

Realizando-se a substituição, tem-se:

$$Y(s) = G(s) [R(s) - Y(s)H(s)]$$

$$Y(s) [1 + G(s)H(s)] = G(s)R(s)$$

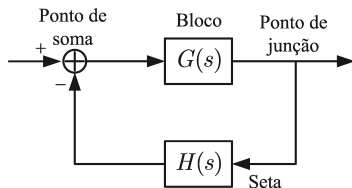
Portanto, a função de transferência de malha fechada é dada por:

$$\boxed{\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}}$$

Diagrama de Blocos

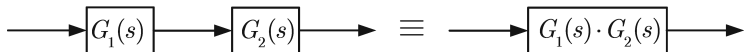
Os elementos de um diagrama de blocos são listados a seguir:

- Seta: representação do sentido do fluxo de sinal.
- Bloco: operação matemática sobre o sinal de entrada que produz a saída. Normalmente uma função de transferência.
- Ponto de soma: círculo com o símbolo “+” que indica uma operação de soma. O sinal do lado externo determina se é realizada soma ou subtração.
- Ponto de junção: ponto a partir do qual o sinal proveniente de um bloco vai para outros blocos ou pontos de soma.

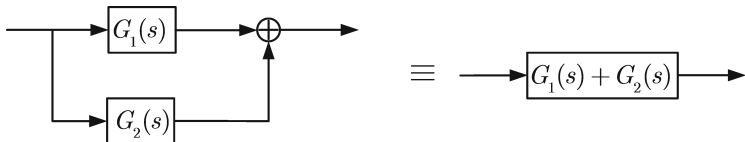


Propriedades dos Diagramas de Blocos

Associação em Cascata (Série):



Associação em Paralelo:



Realimentação Negativa:

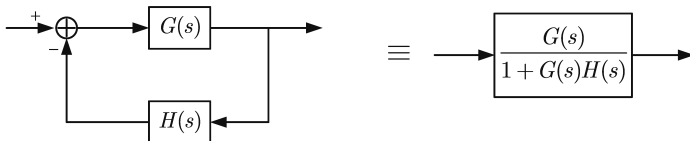


	Diagrama de blocos originais	Diagrama de blocos equivalentes
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		




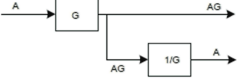

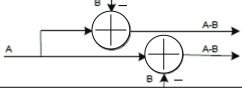
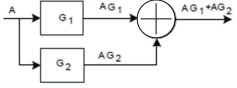
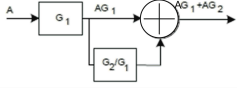
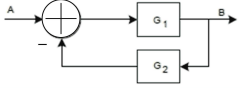
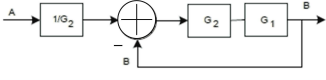
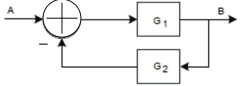
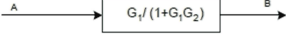
	Diagrama de blocos originais	Diagrama de blocos equivalentes
8		
9		
10		
11		
12		
13		

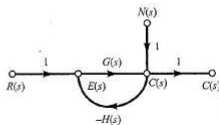
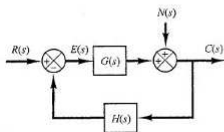
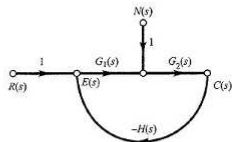
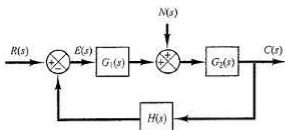
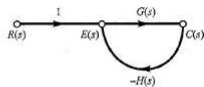
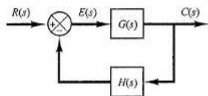
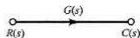
Gráfico de Fluxo de Sinais

Consiste em uma rede na qual os nós são conectados por ramos direcionados. Os nós correspondem às variáveis do sistema e um ramo relaciona as variáveis de entrada e saída pela multiplicação por um ganho.

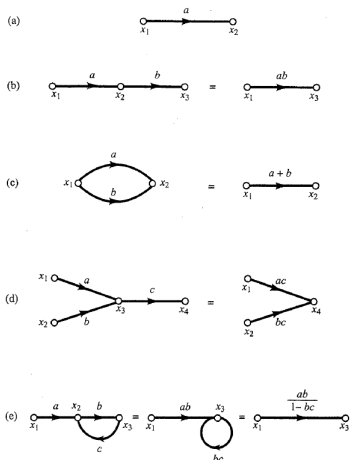
Definições Básicas

- **Nó** - ponto que representa uma variável.
- **Transmitância** - Ganho entre dois nós.
- **Ramo** - Segmento direcionado que conecta dois nós aplicando um ganho à variável de entrada.
- **Nó de entrada** - Nó que tem somente ramos de saída.
- **Nó de saída** - Nó que tem somente ramos que chegam.
- **Nó misto** - Nó que possui ambos tipos de ramos.
- **Caminho** - Percurso através dos ramos.
- **Malha** - Caminho fechado.
- **Malhas que não se tocam** - aquelas que não possuem nós em comum.
- **Caminho de avanço** - Caminho que inicia em um nó de entrada e termina em um de saída sem passar por nenhum nó mais do que uma vez.

Exemplo



Propriedades dos Gráficos de Fluxo de Sinais

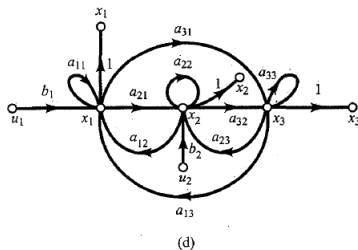
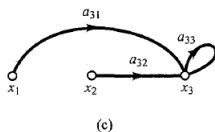
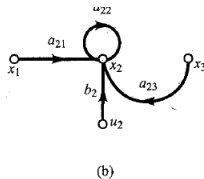
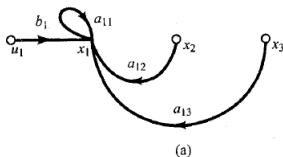


Representação de Sistemas Lineares

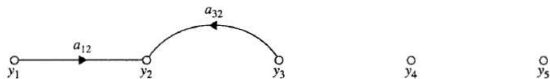
$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1u_1$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2u_2$$

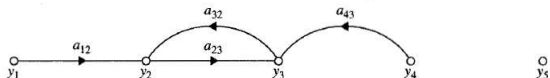
$$x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$



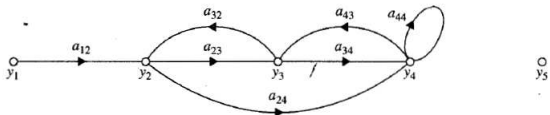
Representação de Sistemas Lineares



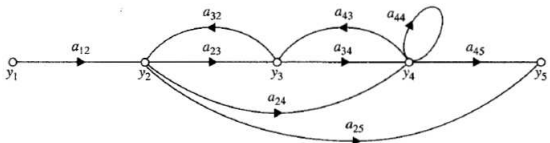
$$(a) y_2 = a_{12}y_1 + a_{32}y_3$$



$$(b) y_2 = a_{12}y_1 + a_{32}y_3 \quad y_3 = a_{23}y_2 + a_{43}y_4$$



$$(c) y_2 = a_{12}y_1 + a_{32}y_3 \quad y_3 = a_{23}y_2 + a_{43}y_4 \quad y_4 = a_{24}y_2 + a_{34}y_3 + a_{44}y_4$$



Fórmula de Ganho de Mason

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k$$

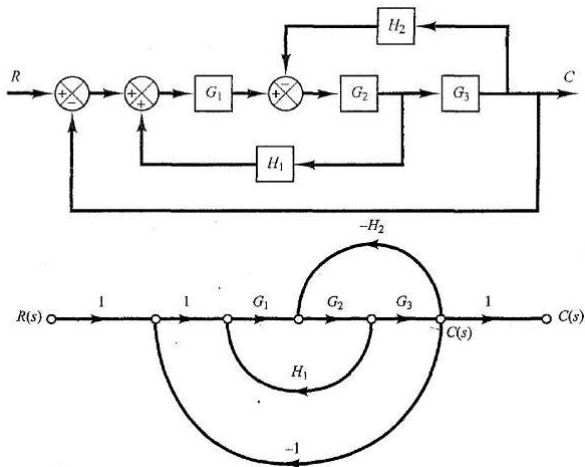
P_k : ganho do caminho direto de ordem k

Δ : determinante do gráfico $\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f$
 (1 - soma dos ganhos das malhas + soma dos produtos dos ganhos das combinações de duas malhas que não se tocam - mesma coisa para combinações de três malhas + ...)

Δ_k : cofator do k -ésimo caminho direto do gráfico de onde foram removidas todas as malhas que tocam esse caminho.

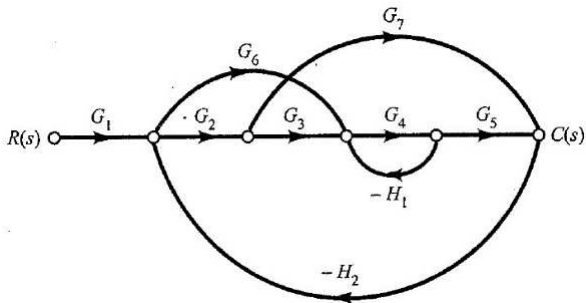
Exemplo

Obtenha a função de transferência de malha fechada $C(s)/R(s)$ usando a fórmula de ganho de Mason.



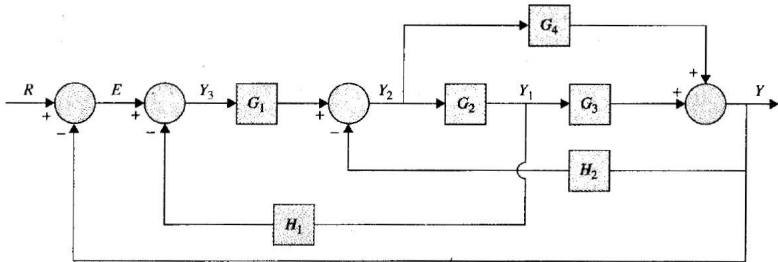
Exemplo

Obtenha a função de transferência de malha fechada $C(s)/R(s)$ usando a fórmula de ganho de Mason.



Homework

Obtenha a função de transferência de malha fechada $C(s)/R(s)$ usando a fórmula de ganho de Mason.



Dica de atividades

Dica

1. Fazer os Exercícios apresentados no Cap. 9 do livro “Sistemas de Controle Modernos” - Richard C. Dorf, Robert H. Bishop.
2. Fazer os Exercícios apresentados no livro K. OGATA, “Engenharia de Controle Moderno”.

Modelagem de Sistemas

Função de Transferência

Caracterização da relação entre uma entrada e uma saída (SISO) de um dado sistema linear e invariante no tempo (LIT).

Definida como a relação entre as transformadas de Laplace da saída e da entrada, admitindo-se todas as condições iniciais nulas.

Considere o sistema LIT dado pela equação abaixo, sendo y a saída e x a entrada:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x, \quad (n > m),$$

A função de transferência desse sistema é dada por:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\mathcal{L}[\text{saída}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]} \Big|_{\text{condições iniciais nulas}} \\ &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \end{aligned}$$

Aplicando o teorema da convolução, pode-se verificar que:

$$Y(s) = G(s)X(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

ou seja, a função de transferência de um sistema LIT é dada pela transformada de Laplace da resposta impulsiva $g(t)$ desse sistema. A resposta impulsiva ou, alternativamente, a função de transferência $G(s)$ de um sistema LIT caracteriza completamente esse sistema.

Variável complexa: revisão

$$s = \sigma + j\omega$$

Dizemos que s é uma variável complexa quando $\omega \neq 0$. Dizemos que s é uma variável de Laplace ou que estamos trabalhando com s no domínio de Laplace.

- σ é o valor da parte real;
- ω é o valor da parte imaginária. Costumamos chamar ω de “frequencia”.

Suponha que tenhamos

$$G(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Vamos fazer $s = j\omega$ e substituir em $G(s)$ acima. Aqui entendemos que ω pode assumir qualquer valor maior ou igual a zero. Como fazemos para determinar o módulo $|G(j\omega)|$?

Variável complexa: revisão

Temos

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{j\omega + 1} = \frac{1}{j\omega + 1} \left(\frac{1 - j\omega}{1 - j\omega} \right) \\ &= \frac{1}{\omega^2 + 1} - \left(\frac{\omega}{\omega^2 + 1} \right) j. \end{aligned}$$

Note acima que a parte real é $\frac{1}{\omega^2+1}$ e a parte imaginária é $\frac{\omega}{\omega^2+1}$. O módulo é o tamanho do vetor construído através da parte real e imaginária, ou seja

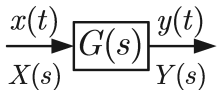
$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega^2 + 1}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

Análise da Resposta em Frequência

- Resposta em Frequência: resposta em regime permanente de um sistema a uma entrada senoidal.
- Os métodos de resposta em frequência foram desenvolvidos no período entre 1930 e 1940 por Nyquist, Bode, Nichols, entre outros.
- Testes de resposta em frequência são, em geral, simples e podem ser realizados com exatidão com a utilização de geradores senoidais com frequência variável.
- Muito importante: aplique uma entrada senoidal no processo linear. Então observamos uma saída senoidal, com amplitude distinta. A fase também pode ser distinta ou igual (depende do caso estudado).
- Propriedade: todo sistema linear mostra uma onda senoidal na saída quando é excitado com entrada senoidal. Mas a saída terá amplitude distinta daquela senoide usada na entrada.

Análise da Resposta em Frequência

- Considere o sistema LIT estável abaixo.



- Note que $G(s)$ é **sistema linear**. Então se aplicamos senoide na entrada $x(t)$, obrigatoriamente vamos observar uma senoide na saída $y(t)$. Mas lembre que a amplitude em $y(t)$ será diferente daquela em $x(t)$. Pode haver ou não diferença de fase entre $x(t)$ e $y(t)$.
- Depois que as **condições de regime permanente forem alcançadas**, obtém-se a resposta em frequência fazendo-se $s = j\omega$ em $G(s)$, ou seja:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)} = Me^{j\phi(\omega)}, \phi(\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}}{\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}} \right]$$

Então aplicando-se uma entrada

$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

obtém-se a saída estacionária (após passado muito tempo)

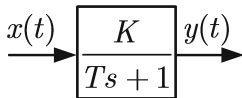
$$y_{ss}(t) = A|G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

no qual

$$\phi(\omega) = \arctan \left[\frac{\text{Im } G(j\omega)}{\text{Re } G(j\omega)} \right]$$

Portanto, a resposta de um sistema LIT estável à uma entrada senoidal com frequência ω é também um sinal senoidal com a mesma frequência, mas com amplitude ponderada pelo módulo da função de transferência (em ω) e com desvio de fase igual ao ângulo da função de transferência (em ω).

Considere uma entrada $x(t) = A \sin(\omega t)$ no sistema abaixo.



A função de transferência pode ser escrita como

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + jT\omega} = \frac{K(1 - jT\omega)}{(1 + jT\omega)(1 - jT\omega)} = \frac{K}{T^2\omega^2 + 1} - \frac{j\omega T}{T^2\omega^2 + 1}$$

Note que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} G(j\omega) &= \frac{K}{T^2\omega^2 + 1} \\ \operatorname{Im} G(j\omega) &= -\frac{\omega T}{T^2\omega^2 + 1} \end{aligned}$$

Exemplo

Determine módulo e fase de

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

avaliado para entrada $x(t) = 2 \sin(\omega t)$.

Solução: O módulo é

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \sqrt{\operatorname{Re} G(j\omega)^2 + \operatorname{Im} G(j\omega)^2} = \sqrt{\frac{1^2}{(\omega^2 + 1)^2} + \frac{\omega^2}{(\omega^2 + 1)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \end{aligned}$$

A fase é

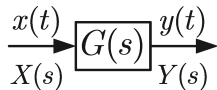
$$\phi(\omega) = \arctan \left[\frac{\operatorname{Im} G(j\omega)}{\operatorname{Re} G(j\omega)} \right] = -\arctan(\omega).$$

Homework

Escolha vários valores de $0 \leq \omega < \infty$ e calcule o módulo e fase usando o resultado acima. Trace o gráfico polar.

Exercício

Considere a relação de entrada-saída do bloco abaixo.



Considere a função de transferencia

$$G(s) = \frac{s}{s + 5}$$

Aplica-se entrada senoidal $x(t) = 2 \sin(4t)$. A saída é

$$y(t) = B \sin(4t + \phi).$$

Determine o valor de B e ϕ (o valor de ϕ deve estar em radianos).

Solução

Substitua $s = j\omega$ em $G(s)$ e multiplique pelo complexo conjugado o numerador-denominador ($s = j\omega - 5$) para obter

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{j\omega}{j\omega + 5} = \frac{j\omega}{j\omega + 5} \frac{(5 - j\omega)}{(5 - j\omega)} \\ &= \frac{\omega^2}{\omega^2 + 25} + \frac{5j\omega}{\omega^2 + 25} \end{aligned}$$

Note que:

$$\operatorname{Re} G(j\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2 + 25} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} G(j\omega) = \frac{5\omega}{\omega^2 + 25}$$

Solução

O módulo é

$$\begin{aligned}
 |G(j\omega)| &= \sqrt{\operatorname{Re} G(j\omega)^2 + \operatorname{Im} G(j\omega)^2} = \sqrt{\frac{\omega^4}{(\omega^2 + 25)^2} + \frac{5^2\omega^2}{(\omega^2 + 25)^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{\omega^2(\omega^2 + 25)}{(\omega^2 + 25)^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 25}}
 \end{aligned}$$

A fase é

$$\phi(\omega) = \arctan \left[\frac{\operatorname{Im} G(j\omega)}{\operatorname{Re} G(j\omega)} \right] = \arctan \left[\frac{\frac{5\omega}{\omega^2 + 25}}{\frac{\omega^2}{\omega^2 + 25}} \right] = \arctan \left[\frac{5}{\omega} \right]$$

Solução

O exercício indica que $x(t) = 2 \sin(\omega t)$. Por isso $A = 2$ e $\omega = 4$ rad/s. Logo,

$$|G(4j)| = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 25}} = 0.6247 \quad \phi(4) = \arctan \left[\frac{5}{4} \right] = 0.896$$

Resposta: $B = A \times 0.6247 = 1.2494$; $\phi = 0.896$.

- Quando $\phi(\omega) > 0$ dizemos que o sistema realiza **avanço de fase**.
- Quando $\phi(\omega) < 0$ dizemos que o sistema realiza **atraso de fase**.

Exemplo

$$G(s) = \frac{s + 1/T_1}{s + 1/T_2}$$

Encontre a resposta em frequência para o sinal de entrada $x(t) = \sin(\omega t)$ e determine se tal rede é de avanço ou atraso de fase.

Solução: Note que

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + 1/T_1}{j\omega + 1/T_2} = \frac{T_2}{T_1} \frac{1 + T_1 j\omega}{1 + T_2 j\omega}$$

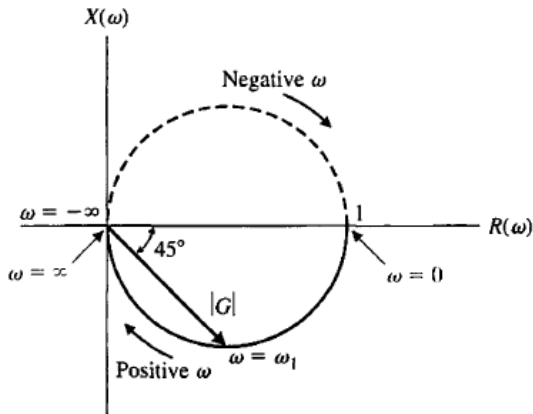
Disto tem-se

$$|G(j\omega)| = \frac{T_2}{T_1} \frac{\sqrt{1 + T_1^2 \omega^2}}{\sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}}, \quad \phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \arctan(T_1 \omega) - \arctan(T_2 \omega)$$

Logo, se $T_1 > T_2$ então $\phi(\omega) > 0$ [é **avanço**]; caso contrário quando ocorre $T_1 < T_2$ é **atraso**.

Gráfico Polar

O gráfico polar é obtido fazendo-se a frequência ω variar desde 0 a ∞ . Para obter o gráfico, fixe um valor ω qualquer e desenhe uma seta partindo da origem com tamanho $|G(j\omega)|$ e ângulo de abertura em relação a origem no valor $\phi(\omega)$ (veja a figura representando $\phi(\omega_1) = 45^\circ$).



- **Fatores integrativo e derivativo** $(j\omega)^{\mp 1}$:

Para o termo $(j\omega)^{-1}$, tem-se:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ$$

Portanto, o digrama polar de $(j\omega)^{-1}$ é o imaginário negativo. Similarmente, o digrama polar de $(j\omega)$ é o imaginário positivo.

- **Fatores de primeira ordem** $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$:

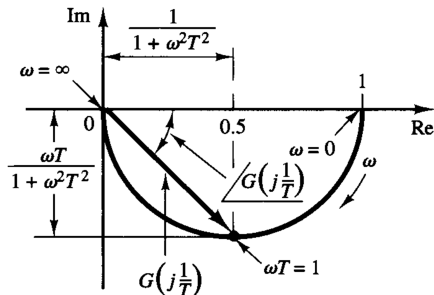
Para o termo $(1 + j\omega T)^{-1}$, tem-se:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \angle -\tan^{-1}(\omega T)$$

Note que:

$$G(j0) = 1 \angle 0^\circ; \quad G(j1/T) = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ; \quad G(j\infty) \rightarrow 0 \angle -90^\circ$$

- O diagrama polar de $(1 + j\omega T)^{-1}$ descreve uma semicircunferência semelhante a essa da figura abaixo.



- O diagrama polar de $(1 + j\omega T)$ é a semicircunferência acima refletida sobre o eixo horizontal.

- **Fator quadrático:** $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$:

Para o termo

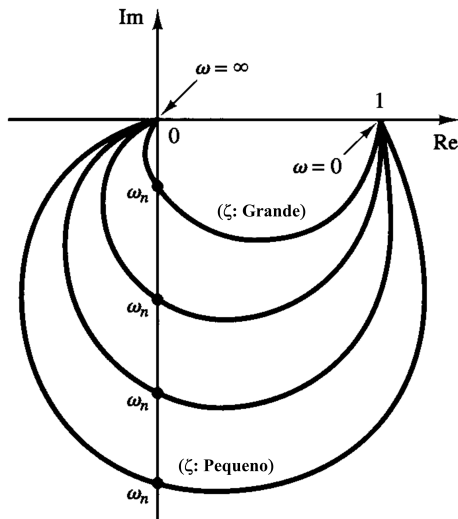
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2},$$

com $\zeta > 0$, as porções relativas às baixas e às altas frequências são, respectivamente, dadas por:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 \angle 0^\circ; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 \angle -180^\circ$$

O diagrama polar para essa função de transferência se inicia em $1 \angle 0^\circ$ e termina em $0 \angle -180^\circ$. A forma exata depende de ζ , mas a forma geral é a mesma para o caso subamortecido como para o caso superamortecido.

Para o caso subamortecido, a frequência na qual o lugar geométrico de $G(j\omega)$ cruza o eixo imaginário é a frequência natural não amortecida.

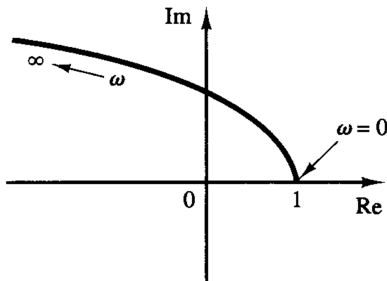


- **Fator quadrático:** $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]$:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= 1 + 2\zeta \left(j\frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + j \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Pode-se observar que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 \angle 0^\circ; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \infty \angle 180^\circ.$$



Desenhando o Gráfico Polar

Considere uma função de transferência $G(s)$ qualquer e suponha que desejamos obter o seu Gráfico Polar. Os passos a seguir auxiliam nessa tarefa.

Passo 1: Reescreva $G(s)$ na forma

$$G(j\omega) = \frac{K_m (1 + j\omega T_a)(1 + j\omega T_b) \cdots (1 + j\omega T_w)}{(j\omega)^m (1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) \cdots (1 + j\omega T_u)}$$

Determine o valor m . Note que m é o número inteiro do fator $(j\omega)^m$. Dizemos que o sistema é Tipo 1 se $m = 1$; é Tipo 2 se $m = 2$; ... é Tipo p se $m = p$.

Passo 2: Determine módulo e fase de $G(j\omega)$ quando

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega)$$

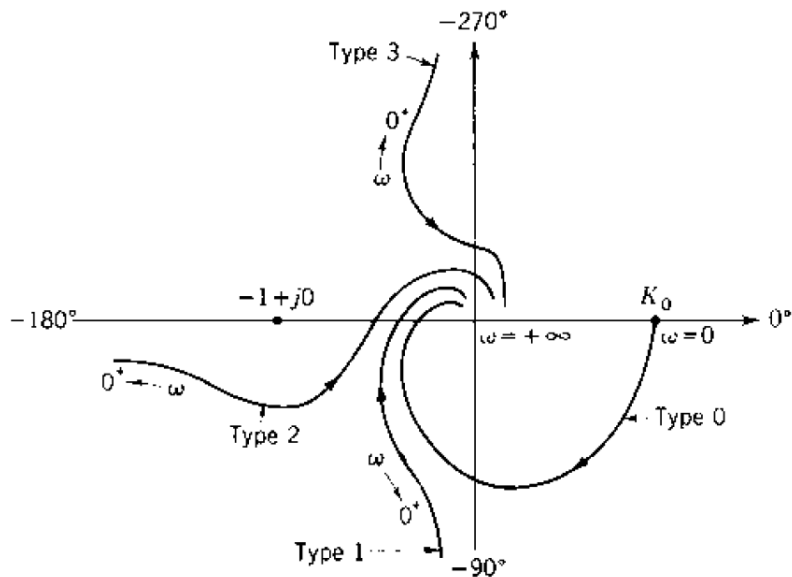
Desenhando o Gráfico Polar

Passo 3: Determine ω_1 e ω_2 tal que

$$\operatorname{Re}[G(j\omega_1)] = 0 \quad \operatorname{Im}[G(j\omega_2)] = 0$$

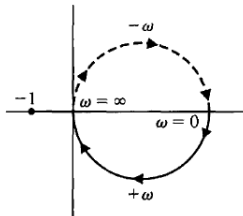
Passo 4: Calcule o módulo e fase de $G(j\omega)$ para alguns valores de ω entre 0 e ∞ .

Passo 5: Compare os dados obtidos nos passos anteriores com a forma-padrão dos Gráficos (veja a próxima página).

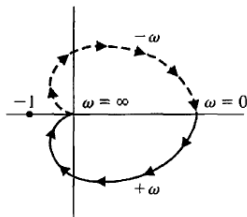


Exemplos: Gráfico Polar

$$\frac{K}{s\tau_1 + 1}$$

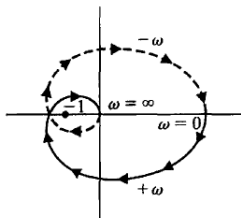


$$\frac{K}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$$

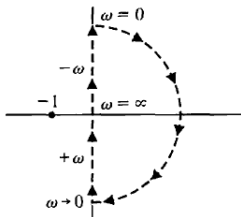


Exemplos: Gráfico Polar

$$\frac{K}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)(s\tau_3 + 1)}$$

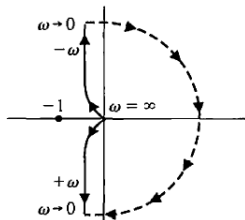


$$\frac{K}{s}$$

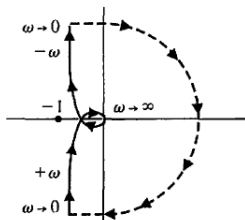


Exemplos: Gráfico Polar

$$\frac{K}{s(s\tau_1 + 1)}$$

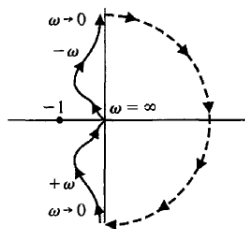


$$\frac{K}{s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$$

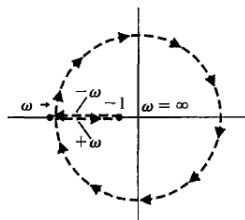


Exemplos: Gráfico Polar

$$\frac{K(s\tau_u + 1)}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$$

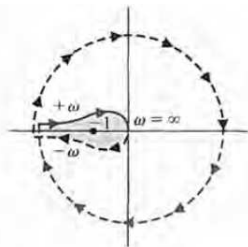


$$\frac{K}{s^2}$$



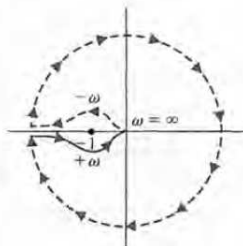
Exemplos: Gráfico Polar

$$\frac{K}{s^2(s\tau_1 + 1)}$$



$$\frac{K(s\tau_a + 1)}{s^2(s\tau_1 + 1)}$$

$$\tau_a > \tau_1$$



Homework

Desenhe o Gráfico Polar de cada função de transferência a seguir:

$$(a) G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+2s)}$$

$$(b) G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+2s)(1+3s)}$$

$$(c) G(s) = \frac{1}{s(1+s)}$$

$$(d) G(s) = \frac{1}{s(1+s)(1+2s)(1+3s)}$$

$$(e) G(s) = \frac{1}{s^2(1+s)}$$

$$(f) G(s) = \frac{1}{s^2(1+s)(1+2s)}$$

$$(g) G(s) = \frac{1+4s}{(1+s)(1+2s)}$$