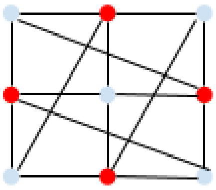
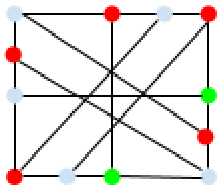
Tarefa 7

Laís Saloum Deghaide, 11821BCC001

4.11) Apenas o da esqueda é bicolorível. Para colorir o da direita, é necessário, no mínimo, três cores.





4.22) Um conjunto de corte é definido como um subconjunto desconector entre dois vértices. Sendo D um corte de um grafo G, ele possui arestas que desconectam G. Sendo O um circuito de G, temos que todas as arestas pertencentes a O não se repetem e apenas os vértices das extremidades se repetem. Se nenhuma aresta do corte estiver também no circuito, então a interseção será igual a zero, e portanto é par. Mas se $|D \cap E_0| \neq 0$, então, para que um corte torne o circuito desconexo é necessário remover duas arestas do circuito. Portanto a interseção das arestas do conjunto de corte com as arestas do circuito será um número par.

7.9) Sendo $\{U, W\}$ uma bicoloração de um grafo G, podemos considerar G sendo um grafo bipartido, já que todo grafo bipartido é 2-crómatico. Sendo $N(X)$ do grafo simples $G(V, A)$ o conjunto de vértices de V que não estão em X, mas possuem vizinhos em X, tendo $N(X) \subseteq Y$, então o conjunto de vértices X possui todos os vértices adjacentes a Y. Sendo assim, o conjunto X_0 terá os vértices adjacentes a Y_0, já que G é bicolorível. Portanto, $(Y \cup X_0)$ será uma cobertura, já que Y cobre todos os vértices do subconjunto X de U e X_0 cobre todos os vértices de W.

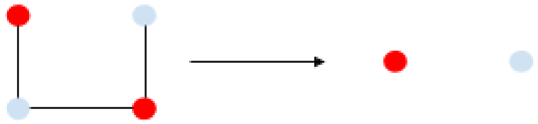
8.4) Em um caminho, os vértices pertencentes a ele estarão sempre conectados a outros dois, excetuando as extremidades, portanto são necessárias, no mínimo, duas cores para colorir os vértices de um caminho, na qual as cores vão se alternando.

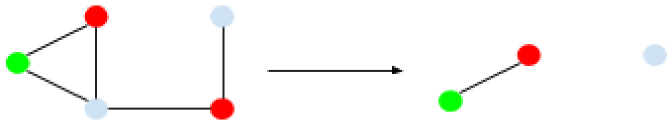
Já em um circuito, depende da quantidade de vértices que possui. Se possuir um número par de vértices, então são necessárias apenas duas cores que vão se alternando, porém, se tiver um número ímpar, teremos problema para colorir o último vértice e precisaremos de mais uma cor. Portanto, se o circuito for impar, serão necessárias três cores.

Por fim, para grade, só serão necessárias duas cores, já que é possível ir alternando-as sem haver conflito de cores.

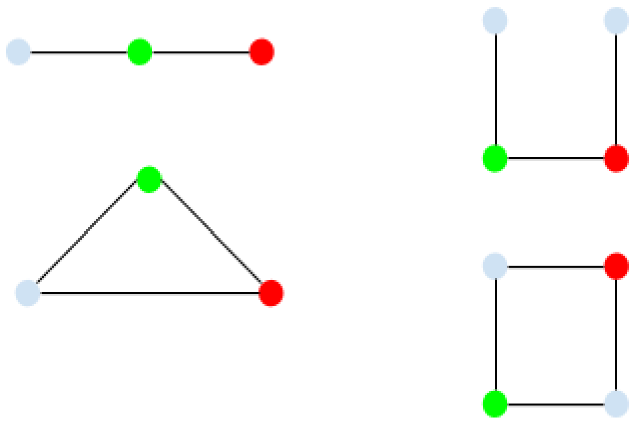
8.15) Podemos representar essa linha de fábrica como um caminho que contém n vértices. Sendo que em cada máquina, ou vértice, um operador gaste um certo intervalo I, $(I_1, ...I_n)$. Já que o mesmo operador não pode cuidar de dois intervalos consecutivos, serão necessários dois operadores, no mínimo, para trabalharem em máquinas intercaladas e não acontecer de um mesmo operador trabalhar em máquinas consecutivas.

8.21) Sendo e uma ponte, os vértices que formam a ponte são adjacentes e portanto precisam ser de cores distintas para não haver conflito, sendo assim essas duas cores podem ser usadas em outros vértices do grafo e portanto $\chi(G)$ será no mínimo igual a dois, e se tirarmos a ponte de G, $\chi(G-e)$ também será no mínimo igual a dois, já que a retirada da ponte não altera a quantidade de cores usadas, pois a ponte apenas intercala duas das cores já usadas. Tome como exemplo as figuras abaixo:





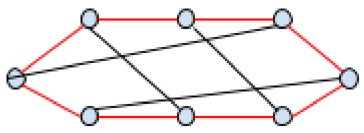
8.53) Para que o grafo admita uma 3-coloração, seja esse o número cromático ou não do grafo, é necessário que o grafo tenha no máximo n arestas. Veja os exemplos:



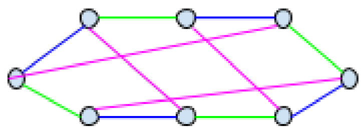
12.2) Vamos representar o processo industrial da questão como um grafo bipartido $G\{U, W\}$, na qual U são as máquinas e W são os operários, e as arestas são as tarefas, sendo que apenas alguns funcionários podem operar certas máquinas. Cada aresta terá uma cor, representando os dias necessários para completar o processo. Sendo assim, o número de dias necessários para completar o processo deverá ser o maior grau presente no grafo, sendo $\Delta(G)$.

12.3) Devemos encontrar o índice cromático do grafo $\{U, W\}-$bipartido, sendo esse índice definido pelo maior grau presente no grafo, pois temos que cada aresta (que representa o período da aula) é representado por uma cor e cores iguais devem ser de vértices diferentes, pois não é possível um professor dar duas aulas em um mesmo período. Com isso, a quantidade de períodos necessários e suficientes para cumprir o programa de aulas é $\Delta(G)$.

12.9) Seja G um grafo cúbico e hamiltoniano e n o número de vértices de G. Todo grafo cúbico possui uma quantidade par de vértices, logo $n \equiv 0$ (mod 2). Como G é hamiltoniano, então existe um circuito hamiltoniano, ou seja, um ciclo de tamanho n, tal que $V_C = V_G$. Como o tamanho do ciclo é par, é possível colorir suas arestas com duas cores, alternando-as. Com essa coloração do circuito, todo vértice possui duas arestas coloridas com o mesmo par de cores, logo é possível colorir as arestas remanescentes com uma terceira cor. Tome como exemplo o desenho abaixo:



(ciclo hamiltoniano feito em vermelho)



15.5) Sendo f um fluxo num grafo G cujo vértice inicial é a e vértice final b possui cardinalidade k. Temos por definição, que f será uma coleção de caminhos sem arestas em comum em um grafo, portanto, se f tem cardinalidade k, então existem, pelo menos, k arestas que ligam a a b. Logo, todo conjunto de arestas que separa a de b tem pelo menos k arestas.