Tarefa 5

Laís Saloum Deghaide, 11821BCC001

7.1) Considerando que a galeria de arte possui uma estrutura poligonal, onde n é o número de vértices, que representam as conexões entre as praças. De acordo com o Teorema de Chvátal, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda. Sendo assim temos $g(n) \geq \lfloor n/3 \rfloor$, isso significa que precisamos de um guarda para cada 3 vértices.

9.1) Para ser emparelhamento, os vértices de um grafo G devem ser incidentes a apenas um aresta do conjunto M. Sendo H o grafo (v_G, M), temos que todas as arestas de H fazem parte do emparelhamento, considerando M um emparelhamento em G. Sendo assim, os vértices de H devem ter, no máximo, grau máximo igual a um, já que só podem incidir em apenas uma aresta de M. Portanto, M será emparelhamento se e somente se $d_H(v) \leq 1$.

9.2) Para um grafo 3-completo teremos 1 aresta no emparelhamento máximo, para 4-completo teremos 2 e para 5 completo teremos 3. Generalizando isso, temos que para um grafo n-completo, teremos n - 2 arestas no emparelhamento máximo.

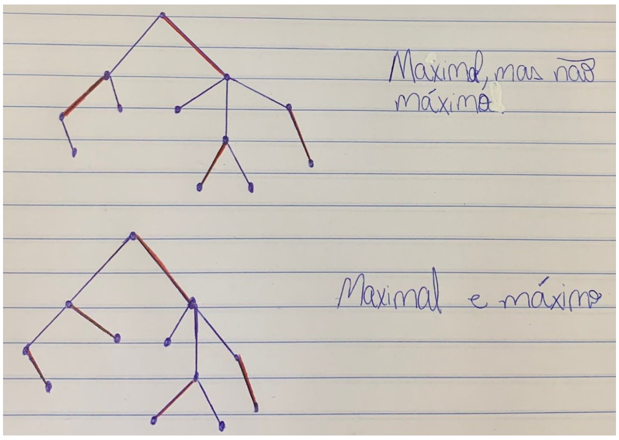
9.3) Sendo $K_{m.n}$ um grafo bipartido completo com $m \leq n$, temos que a quantidade de arestas presentes no emparelhamento máximo desse grafo será igual a m.

9.4) Se o caminho for par, o emparelhamento máximo será metade das quantidade de arestas que o caminho possui. Se o caminho for ímpar, terá a metade (parte inteira) da quantidade de arestas + 1. Já em um circuito de tamanho par ou ímpar terá emparelhamento máximo igual a metade (parte inteira) da quantidade de arestas que possui.

9.5) Um emparelhamento perfeito, todos os vértices do grafo devem ser saturados. Sabemos que cada aresta do emparelhamento liga os vértices de dois em dois. Então, se tivermos um valor ímpar de vértice, sabemos que consequentemente um vértice não conseguirá se conectar a nenhum outro, pois todas as arestas do emparelhamento já foram sinalizadas e portanto não forma um emparelhamento perfeito. Logo, temos que $n(G)$ sempre será par em um emparelhamento perfeito.

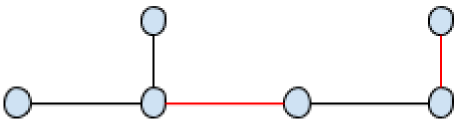
9.8) Não, não é verdade.

9.14) Não, não é verdade.



9.17) Vamos supor que M, M' são emparelhamentos perfeitos em uma árvore T = (V, E) e vamos considerar que o grafo em V com o conjunto de arestas $M \cup M'$ cobrem todos os vértices, cada compomente desse novo grafo é uma aresta única, comum a M e M' ou um ciclo. Como T é uma árvore, não pode haver ciclo, então, concluímos que M = M'.

9.18) Todo emparelhamento em grafos que possuem pontes, teremos que ou elas sempre serão usadas no emparelhamento ou nunca serão usadas no emparelhamento. Como exibido no exemplo:



9.19) Seja F uma floresta com no máximo k vértices. Temos que para k = 1, não existe emparelhamento perfeito, para k = 2, existe exatamente um emparelhamento perfeito se os vértices estiverem conectados, ou nenhum emparelhmaneto perfeito se estiverem desconectados. Considerando uma floresta com k+1 vértices. Existe algum vértice folha l, tal que em qualquer emparelhamento perfeito, deve ser conectado ao seu vértice pai (pois esse é o único incidente de aresta com l).
Excluindo l, seu pai e todas as bordas incidentes a esses vértices na floresta, ficamos com outra floresta em que cada árvore tem vértices $\leq k-1$ vértices. Sabemos por indução, que cada uma dessas árvores tem no máximo um emparelhamento perfeito, logo, a floresta original tem no máximo uma combinação perfeita.

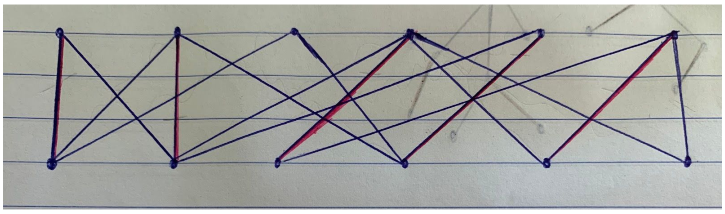
9.22) Supondo que P é um caminho de aumento para um emparelhamento M. Se denotarmos por Ep o conjunto das arestas de P, então temos que $M \oplus Ep$ é um emparelhamento maior que M, pois se existe um caminho de aumento para M, então M não é um emparelhamento máximo e portanto $|M \oplus Ep| > |M|$.

9.26) $M \oplus A$ pode não ser um emparelhamento, dependendo do passeio escolhido, já que esse novo grafo seria o passeio na qual as arestas emparelhadas não pertencem ao grafo, e portanto os vértices podem estar deconexos.

9.33) Temos que M é um emparelhamento e K uma cobertura. Sabemos que o emparelhamento M satura um vértice v se alguma aresta de M é incidente em v. Como temos que $|M| = |K|$, M um emparelhamento máximo e K uma cobertura mínima, então M satura K e somente uma ponta de M incide em K.

9.36) Como foi provado em **9.5**, um grafo G possui emparelhamento perfeito apenas se possuir $n(G)$ sendo par. Se retirarmos um vértice do grafo G, G permanece conexo e então termos que a única componente conexa vai possuir um númeiro ímpar de vértices.

10.9)
Emparelhamento máximo:



Cobertura mínima: