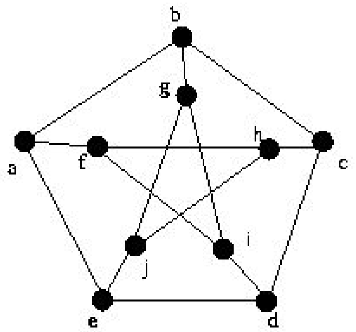
Tarefa 3

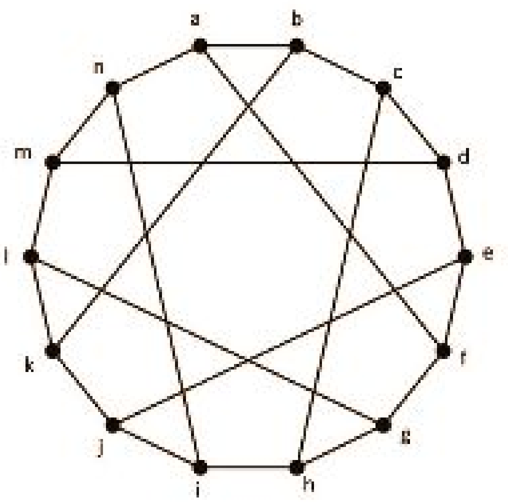
Laís Saloum Deghaide, 11821BCC001

1.119)



O circuito de comprimento mínimo tem tamanho igual a 5 e pode ser o a-b-c-d-e-a.
O circuito de comprimento máximo tem tamanho igual a 10 e pode ser e-j-h-f-i-d-c-b-a-e.
O caminho de comprimento máximo tem tamanho igual a 9 e pode ser e-j-h-f-i-d-c-b-a.

1.122)



Um possível circuito de comprimento mínimo é: a-f-g-h-c-b-a, e possui tamanho 6.

1.125) Vamos começar analisando para k = 0. Temos que para k = 0 sempre existirá um vértice v pertencente ao grafo G que formará um caminho (de um único termo) de comprimento 0. Vamos agora assumir que $k \geq 1$. Seja n o comprimento máximo possíve de um caminho em G e $v_1, v_2, v_3, ..., v_{n+1}$ é um caminho de comprimento n, devemos mostrar que $n \geq k$. Se não, $n < k$.
Denotando $U = N(v_{n+1}) \setminus \{v_i | \ 1 \leq i \leq n\}$, temos que $|U| \geq \delta(G) - n \geq k - n \geq 1$, ou seja, $U \neq \emptyset$. Escolhendo um $u \,\varepsilon\, U$, então a sequência $v_1, v_2, v_3, ..., v_{n+1}, u$ forma uma caminho de comprimento $n + 1$, sendo assim, chegamos em uma contradição com a suposição de que n é o comprimento máximo de um caminho em G. Portanto, G possui um caminho de pelo menos k.

1.128) Seja $v_{1,}v_{2,}v_3,...,v_n$ um caminho de comprimento máximo em G. Então qualquer vizinho de v_1 deve estar no caminho. Como v_1 tem, pelo menos, $\delta(G)$ vizinhos, o conjunto $\{v_2, v_3, ..., v_k\}$ deve ter pelo menos $\delta(G)$. Agora, para acharmos um ciclo de comprimento de pelo menos $\delta(G)+1,$ o vizinho de s v_1 que está mais longe ao longo do caminho deve ser s $v_i,\ i\ \geq \delta(G)+1.$ Então, $v_1, ..., v_n, v_1$ é um ciclo de pelo menos $\delta(G)+1.$

1.143) A união de dois caminhos P e Q disjuntos, gerará um grafo conexo contendo os vértices e arestas que cada um possuia sozinho mais as arestas ligando cada vértice de P com vértices de Q, sendo assim formará um grafo conexo.

1.167) Vamos supor que temos um grafo não conexo. Então ele tem um componente com k vértices nele, para k entre 1 e n - 1, sendo n o número de componentes totais no grafo. Os n - k vértices restantes estáo em ou mais componentes. O número máximo de arestas que esse grafo pode ter é C(k, 2) + C(n-k, 2), que pode ser simplificado como $k^2 - nk + (n^2 - n)/2.$ Essa é a função quadrática de k e é minimizada quando $k = n/2$ e maximizada quando k é a ponta do grafo, ou seja: $k = 1$ e $k = n-1.$ Nos casos intermediários, seu valor é $((n-1)*(n-2))/2.$ Portanto, o maior número de arestas que um grafo desconexo pode ter é $((n-1)*(n-2))/2,$ então todo grafo com mais arestas que isso deve ser conexo.

1.174) Seja P um caminho e v e u os vértices das extremidades. Temos que todos os vértices, excetuando v e u, são vértices de articulação. Além disso, temos duas componentes conexas, ao retirarmos pela primeira vez um vértice que é articulação. Após isso, se retirarmos outro vértice de articulação, formamos três componentes conexas e assim por diante, repetindo o mesmo processo com os S vértices. Sendo assim, o primeiro vértice retirado gera duas componentes conexas enquanto os próximos geram mais uma, assim $c(P - S) = |S| + 1.$

1.175) Sendo O um circuito, pela definição, temos que não tem repetição de arestas e vértices, a não ser o vértice inicial que também é também o final. Será necessário retirar dois vértices para termos dois caminhos diferentes. Depois de retirar os dois primeiros vértices, todos os outros vértices que forem retirados aumentarão em um a quantidade de componentes conexas. Portanto, se S vértices forem retirados, teremos no máximo S compomentes conexas, sendo assim $c(O - S) \leq |S|.$

1.188) Sim, é verdade.

1.204)
Para achar todas as pontes em um grafo utilizaremos busca em profundidade para visitar cada vértice.
Cont será uma lista de adjacências que guardará as pontes encontradas.
Para cada vértice visitado atribuiremos dois valores: desc e menor.
O desc indicará quando o vértice foi visitado.
O menor indicará se existe um vértice (baseado na análise do desc) vértice anterior a ele que pode ser visitado em uma subárvore enraizada pelo vértice em analise.

Se o valor do menor puder ser alterado para novo caminho possivel para chegar no vértice em análise, então ele não é ponte.
Se não, a aresta que liga o vértice em análise ao seu antecessor é ponte, e a lista cont deve receber os vértices que formam essa ponte.
fim busca_profundidade
fim pseudocódigo

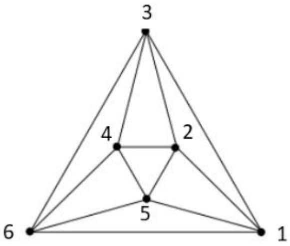
1.215) Sabemos que para ser circuito, todos os vértices pertencentes a ele devem estar conectados uns aos outros. Portanto, seja G um grafo conexo com $k > 2$, grau mínimo d e com pelo menos $2 * d$ vértices. Seja v um conjunto de k vértices de G. Então G tem um ciclo onde cada vértice deve estar conectado a dois outros vértices pertencentes ao ciclo para que o ciclo exista, sendo assim, todo ciclo é um grafo biconexo, onde cada k pertence ao circuito.

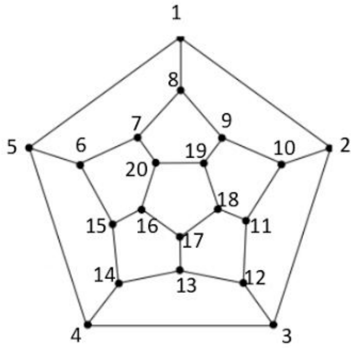
14.6)
Entrada: Grafo G(V,A), vértice inicial v
Crie fila vazia F
marque v como visitado
coloque v no final de F
enquanto F $\neq \oslash$ faça
    $u \leftarrow$ remove primeiro elemento de F
    para cada vértice w adjacente a u faça
        se w não foi visitado então
            marque w como visitado e guarde a distância w$\rightarrow$dist == $v \rightarrow$dist + 1
            coloque w no fim de F
        fim
    fim
fim

Já o calculo do caminho mínimo entre dois vértices pode ser dado pelo algoritmo de Dijkstra.

16.19) O grafo de Peterson tem conectividade 3, pois é necessário retirar três vértices ou arestas, no mínimo, para que ele deixe de ser conexo.

17.3)





Circuito máximo da figura a esquerdapode ser: 1-2-3-4-5-6-1.
Circuito máximo da figura a direita: pode ser:
1-2-3-4-5-6-15-14-13-12-11-10-9-19-18-17-16-29-7-8-1.

17.14) Sendo G um grafo hamiltoniano, temos por definição que ele possui um ciclo hamiltoniano e um ciclo hamiltoniano é um grafo conexo que contém todos os vértices do grafo. Além disso, sabemos que todo e qualquer ciclo não possui pontes, e portanto G não deve possuir pontes. Como consequência disso, G também não deve possuir articulações já que a retirada de 1 ou mais vértices não ocasionam um número maior de componentes conexas.

17.24) Sendo $n(G)$ a quantidade de vértices n do grafo e v e u dois vértices, adjacentes ou não, temos que $d(v)+d(u) \geq (n-2)+(n-2) \rightarrow d(v)+d(u) \geq 2 \cdot n - 4$. Como foi dado no enunciado que $n \geq 4$, temos então que $d(v)+d(u) \geq n$, e pelo Teorema de Ore, isso satisfaz as condições necessárias para G ser um grafo hamiltoniano e consequentemente possuir um ciclo hamiltoniano.