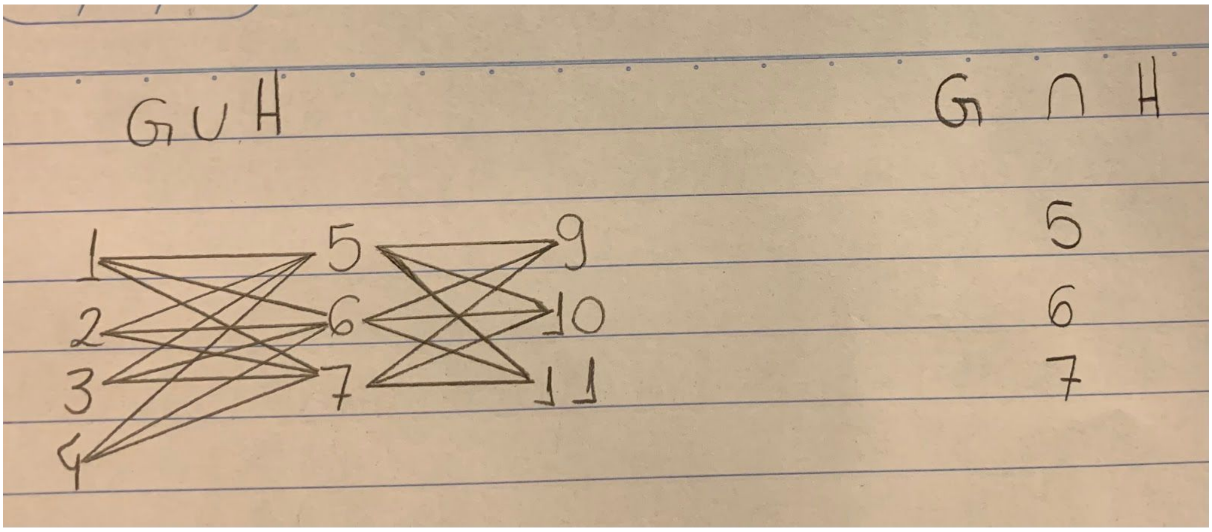
Tarefa 2

Laís Saloum Deghaide, 11821BCC001

1.55) Vamos tentar provar o contrário. Suponhamos que temos um grafo conexo e com todos os vértices com grau ≥ 2, sendo assim, conseguimos notar que o número de arestas sempre será maior do que o número de vértices, e teremos $m(G) > n(G)$. Agora, vamos visualizar um grafo que possui apenas um vértice de grau = 1. Isso significa que esse vértice será a extremidade do grafo. Neste caso, o número de arestas será, no mínimo igual ao número de vértices e teremos $m(G) = n(G)$. Sendo assim, se reduzirmos ainda mais o grau de cada vértice, obtendo mais de um vértice com grau 1 ou com grau 0, teremos que $m(G) < n(G)$.

1.75)



1.92) Não, não é verdade em nenhum dos casos. No primeiro caso, $\delta(G-v) \neq \delta(G)-1$, pois $\delta(G-v)$ equivale ao grau mínimo do vértice obtido pela retirada de um vértice, já $\delta(G)-1$, equivale ao grau mínimo do vértice reduzido em uma unidade. O segundo caso funciona da mesma forma, e portanto $\Delta(G-v) \neq \Delta(G)-1$.

1.127) Seja P o maior caminho possível em G com o vértice v sendo o último vértice visitado neste caminho. Temos que v tem, pelo menos, 3 vizinhos, dado que $\delta(G) \geq 3$. Sejam s, t, u três desses vizinhos de v. Considerando três sub-caminhos: v, y e a aresta vy; a aresta vx seguida pelo sub-caminho x, y em P, e a aresta vz seguida pelo sub-caminho z,y em P. Esses caminhos compartilham apenas os pontos de extremidade, sendo assim, a união de qualquer dois caminhos será um ciclo. Pelo princípio da casa dos pombos, dois desses caminhos têm comprimentos de mesma paridade, ímpar ou par, e a união desses dois caminhos forma um ciclo uniforme sempre de comprimento par.

1.137) De acordo com a definição, um passeio é fechado se tem pelo menos dois arcos e seu primeiro vértice coincide com o último. E um ciclo corresponde a exatamente um passeio fechado. Então é verdade que G contém um circuito.

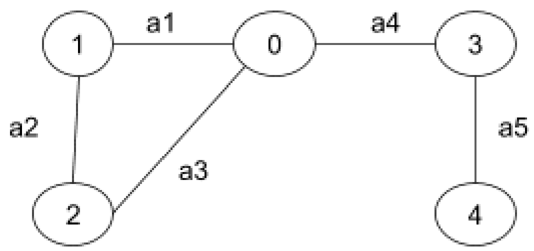
1.142) Pela definição, temos que um caminho é uma sequência finita ou infinita de vértices conectados por uma aresta. Sendo assim, para se ter um caminho, é necessário que haja conexão entre cada vértice que está no caminho, por meio de uma aresta, e portanto todo caminho é um grafo conexo. O circuito, para ser ciclo, também deve ter todos os seus vértices conectados, além de o vértice que inicia o trajéto ser também o ponto final, sendo assim todo circuito também é sempre um grafo conexo.

1.144) A união de dois grafos G e H disjuntos, mas ambos conexos, gerará um grafo conexo contendo os vértices e arestas que cada um possuia sozinho mais as arestas ligando cada vértice de G com vértices de H, sendo assim formará um grafo conexo.

1.156) $P - e$ será conexo se e não for uma ponte, ou seja, se e não provocar um aumento no número de componentes conexas em G. E $P - v$ será conexo se o v removido não desconecta G.

1.163) Vamos considerar o pior caso, no qual temos mais vértices do que arestas. Sendo $|U| = k$, $|W| = k$, $\delta(G) = \frac{(k+1)}{2}$, k ímpar, e como cada vértice é incidente a pelo menos $\frac{(k+1)}{2}$ arestas d(v), temos: $\sum_{v \varepsilon V} d(v) = 2|E| \rightarrow 2k\frac{(k+1)}{2} = 2|E|$, portanto $|E| = \frac{k^2+k}{2}$.
É necessário que a cada 2 vértices, u de U e w de W, tenhamos pelo menos 2 arestas incidentes, uma conectando u a w e a outra conectando u ou w a outro vértice para realizar o conexão do grafo bipartido, portanto, para ser conexo G precisa de, no mínimo, 2k - 1 arestas. Temos então: $|E| = \frac{k^2+k}{2} \geq 2k - 1$.
Se formos testando k, para 1,2,3,...., vemos que quando K = 3, nossa condição de quantidade de arestas totais não é satisfeita: $\frac{3^2+3}{2} \geq 2 \cdot 3 - 1 \rightarrow 6 > 5$.
Logo, encontramos a quantidade de arestas totais que G deve possuir para ser conexo. Como o enunciado, considera $\delta(G)$, temos que $d(v) = \delta(G) > \frac{k}{2}$ se G for conexo.

1.195) Adotando o seguinte grafo com ponte como referencial de análise:



Temos:
Matriz de adjacências

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	0	0	0	1

4	0	0	0	1	0

Matriz de incidências

	a1	**a2**	**a3**	**a4**	**a5**
0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0
2	0	1	1	0	0
3	0	0	0	1	1
4	0	0	0		1

1.199) Devemos provar que uma aresta é ponte de G se não está em um ciclo 1). E devemos provar que uma aresta uma aresta está em um ciclo, então não é ponte 2).
Vamos tentar provar 1), por contraposição, dizendo que se a aresta pertence a um ciclo C do grafo G e é ponte. Tendo e como a aresta do grafo G, pertencente a C e que liga dois vértices u e v. Sabemos que existe um outro caminho, P', de u até v que não passa por e (já que é um ciclo). Agora devemos provar que o caminho $C-e$ é conexo e, portanto, e não é ponte. Vamos pegar dois vértices quaisquer, x e y, de $C-e$, tal que exista um caminho x-y, chamado P. Substituindo a aresta e em P pelo caminho P' produzirá uma trilha x-y que não contém e, e se existe uma trilha, existe também um caminho. Portanto, podemos concluir que $C-e$ é conexo e e não pode ser uma ponte. Por essa contraposição, também concluimos 2. Sendo assim, ou a aresta pertence a um circuito do grafo ou é uma ponte.

1.202) Temos que em um grafo G bipartido r-regular, possui arestas de todos os vértices para todos os vértices e portanto ele é conexo. Como temos r>1, se retirarmos uma aresta, o grafo ainda assim continua conexo. Podemos retirar um total de r arestas para "liberar" um vértice. Se retirarmos as r arestas de um vértice, obtemos um vértice desconexo e todo o resto conexo, sendo assim, esse vértice não é uma ponte. Podemos continuar retirando as arestas de outros vértices e sempre vamos obter o vértice desconexo, mas todo o resto do grafo conexo, sem provocar um aumento no número das componentes conexas. Portanto, concluimos que G não possui pontes.

1.219) Como foi provado no exercício 1.199, temos que toda aresta, que conecta dois pares de vértice e pertence a um ciclo, ela não pode ser ponte, e portanto o grafo não possui articulações. Como neste exercício nos foi dado que todo par de vértice está em um ciclo, então não existe aresta ponte e consequentemente, nenhum par de vértice causa articulação.
Pela própria definição de biconexão, temos que um grafo G é biconexo ou 2-conexo se ele é conexo e não possui ponte. Então sabemos que não existe aresta ou par de vértices em G que é ponte, portanto todo par de vértices de G pertence a algum circuito.

16.13) Foi convencionado que $k(Kn) = n - 1$ para todo n ≥ 2 e $k(K1) = 1$, para G completo. Agora se tirarmos uma aresta de G, temos $G - e$, e portanto ficamos com uma aresta a menos e assim, para todo n ≥ 3 $k(G - e) = n - 2$ e para n = 2 será $k(G - e) = 0$.

18.14) Um ciclo euleriano é: a-h-b-c-d-e-c-g-e-f-g-b-a.

18.21) Sim, é verdade.