Tarefa 6

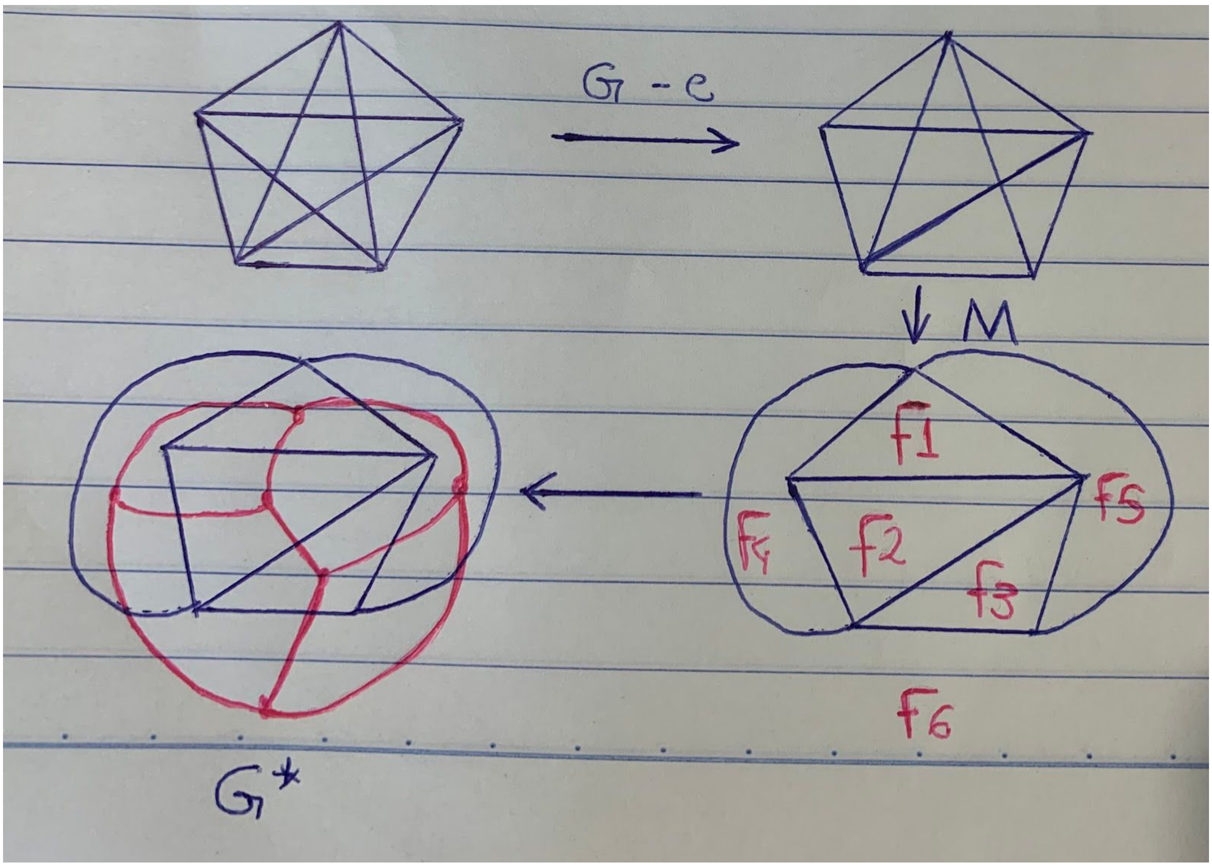
Laís Saloum Deghaide, 11821BCC001

1.244) Sabemos que o grafo K_3 é um circuito. Portanto, qualquer grafo que for isomorfo a K_3 também deverá ser um circuito. Então se G tiver um menor isomorfo a K_3 significa que G contém um circuito.

1.257) Se G é planar e e é uma ponte dele, $G - e$ retornará duas componentes conexas e planares, já que a retirada de uma aresta não altera a planaridade de um grafo. Portanto se G é conexo, então $G - e$ também deverá ser. Também temos que, se pegarmos dois grafos G e H que são disjuntos e adicionarmos uma aresta que os liga, tornando a união deles planar, então G e H, separadamente, também devem ser planares, já que a adição de uma ponte não alterou a planaridade. Logo, temos que G é planar se, e somente se, $G - e$ for planar.
De maneira similar, temos que a remoção de uma articulação em G não torna um grafo planar em não planar, portanto $G - v$ é planar. E pegando dois grafos G e H cuja a interseção entre eles é v, para que a união de G e H seja planar, tanto G quanto H devem ser planares. Portando G será planar se, e somente se $G - v$ for planar.

1.259) Para que tenhamos certeza de que um grafo possui somente uma face, ele precisa ser disjunto e acíclico, sendo assim conseguimos garantir com certeza que o grafo possui apenas uma face. Mas sabemos que um grafo disjunto e acíclico é a definição de floresta. Portanto, um mapa planar tem uma e só uma face se e somente se for uma floresta.

1.264) G* é planar.



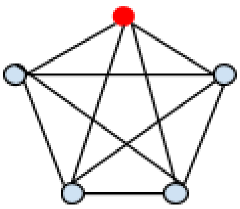
1.272) Pelo teorema de planaridade de Euler, temos que: n + f = 2 + m. Sabemos que, se o grafo for simples, então cada face terá três arestas. Mas 3f contaria cada aresta duas vezes, então temos que $3f \le 2m$ e $2 + m = n + f \le 2m / 3$, portanto, $3m + 6 \le 3n + 2m \rightarrow m \le 3n - 6$. Em um grafo bipartido, cada face deve ter pelo menos 4 lados, logo: $m - n + 2 = f \le m/2$, de modo que, m(G) ≤ 2n(G) − 4.

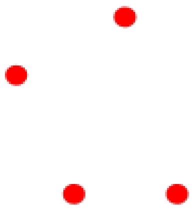
1.273) Da mesma forma que ocorre para grafos bipartidos completos, ocorre também para grafo {U,W}-bipartido, apenas com a diferença agora das arestas. Provando por Euler temos que: $n + f = 2 + |U| + |W|$. $3f \le 2|U| + 2|W|$ e $2 + |U| + |W| = n + f \le (2|U| + 2|W|) / 3$, portanto, $3(|U| + |W|) + 6 \le 3n + 2(|U| + |W)$. Em um grafo bipartido, cada face deve ter pelo menos 4 lados, logo: $(|U| + |W|) - n + 2 = f \le (|U| + |W|) / 2$, de modo que, $m(G) \le 2(|U| + |W|) - 4 \rightarrow m(G) \le 2|U| + 2|W| - 4$.

1.276) Pelo teorema de Kuratowski, um grafo só será planar se e somente se, não contém um subgrafo homeomorfo a K_5 e $K_{3,3}$. Sabemos que $K_{3,3}$ é um grafo bipartido completo com $\delta(G) = 3$, e por consequência grafos bipartidos maiores que $K_{3,3}$, terão um subgrafo homeomorfo a ele, sendo assim não planares. Portanto, se um grafo é bipartido planar, deve possuir $\delta(G) \le 3$.

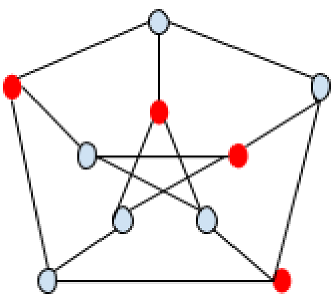
1.279) Temos pela fórmula de Euler que um grafo simples planar G com m arestas e $n \ge 3$ vértices deve satisfazer: $m \le 3n - 6$. Para um grafo G com m arestas e n vértices, o seu complemento terá $n(n-1)/2 - m$ arestas. Sendo assim, se o complemento de G também for planar temos que: $m \le 3n - 6$ e como vimos antes $m \le 3n - 6$, então $n(n-1)/2 \le 6n - 12$ que implica em $n \le 10$ e portanto, G e seu complemento não podem ser ambos planares.

5.2) Conjunto estável de K_5 e conjunto estável do seu complemento.



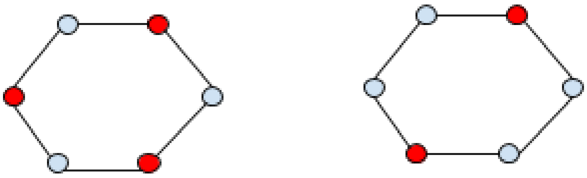


5.11)



5.17) Como os grafos G e H são disjuntos, todos os valores de $\alpha(G)$ são diferentes de $\alpha(G)$. Temos que a união desses dois grafos será um grafo disjunto e portanto todos os vértices pertencentes ao conjunto independente de G e todos os pertences ao de H também serão os vértices que formam o conjunto independente do grafo $G \cup H$, portanto $\alpha(G \cup H) = \alpha(G) + \alpha(H)$.

5.22) Não, não é verdade. Este algoritmo nem sempre retorna um conjunto estável máximo para qualquer grafo G. Pensando no exemplo a seguir:

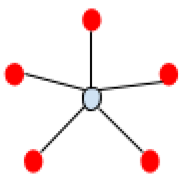


Um é máximo enquanto o outro não, mas ambos possuem o mesmo grau dos vértices. Igualmente pode ocorrer com os grafos bipartidos e também com as árvores.

6.7) A partir do Teorema de König, sabemos que a quantidade de vértice de uma clique máxima em um grafo bipartido é igual a quantidade de vértices presentes na cobertura mínima do grafo.

6.23) O número do clique ω(*G*) de um grafo *G* é o número de vértices de um clique máximo em G*,* sabemos que um clique é um subgrafo induzido completo de G. Se G é planar, então não pode haver sobreposição de arestas, e o grafo máximo planar e completo, para atender as condições do clique é o K_4, portanto ω(*G*) deve ser menor ou igual a 4 para satisfazer a condição de planaridade e clique.

7.8) Não, não é verdade. Tome como exemplo o contra-exemplo a seguir (onde os vértices em vermelho fazem parte da cobertura):



É minimal, mas não é mínima