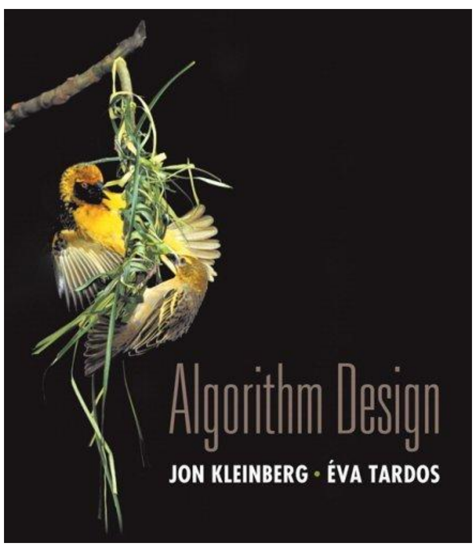
SCC – 218

Alg. Avanc. e Aplicações

O Casamento Estável



João Batista

ICMC-USP

Um Primeiro Problema: Casamento Estável

- Em 1962, David Gale e Lloyd Shapney, economistas matemáticos, se propuseram a resolver o seguinte problema:

- Será possível construir um sistema (admissão em uma Universidade, processo de recrutamento de empregados por empresas) de forma que este seja auto-regulável (self-enforcing)?

- Entrada: a lista de preferências entre candidatos e empregadores (universitários e universidades, por exemplo)

- Um candidato tem uma ordem de preferência por companhias.
- As companhias, as receber as inscrições, formam uma ordem de chamada para os candidatos.

- O que pode dar errado com este sistema???

Um Primeiro Problema: Casamento Estável

- Suponha que alunos possam trocar de ofertas quando bem entenderem.

- Imagine que as empresas possam dispensar alguém previamente acordado, e contratar outros que dispensaram a oferta de estágio por ter escolhido outra empresa?

- Da maneira como formulada, a relação pode terminar de forma caótica.

- Existe estabilidade neste processo?
- Se não existe, não é possível dizer que o processo é auto-ajustável. Por que?
  - Porque as pessoas agem em interesse próprio e o sistema acaba entrando em colapso !

Casamento de Candidatos com Empresas

Objetivo. Dado um conjunto de preferências entre candidatos e empresas, desenvolva um processo de admissão auto-regulável. (self-enforcing)

Par instável: candidato x e empresa y são instáveis se:
- x prefere y à empresa a qual foi atribuído.
- y prefere x a um dos seus candidatos admitidos.
- Do ponto de vista econômico, relações instáveis trazem muitos problemas, inviabilizando qq planejamento decente.

Atribuição estável: Atribuição sem pares instáveis.
- Condição natural e desejável.
- Interesses pessoais impedirão qualquer acordo candidato/empresa de ser feito.

Um Primeiro Problema: Casamento Estável

- Qual seria uma solução ideal para este problema?
  - Exigir altruísmo tanto de empresa quanto de empregados e esperar que estes mantenham suas escolhas, mesmo que prefiram a outros?

- Não

  - O ideal é a situação em que o interesse próprio (tanto de empresa quanto de empregado) previna que ofertas de empregos sejam desfeitas e redirecionadas
  - Exemplo: se alguém que trabalha para X, liga para a firma Y, se oferecendo para abandonar X e ir para Y, Y deveria dizer: sinto muito… com base nas escolhas prévias que fizemos, nós não temos preferência em lhe contratar. Obrigado !
  - O mesmo valeria para empresas indo atrás de candidatos já empregados por outras empresas, mas não obtendo sucesso (os empregados já estão contentes onde estão!)

Problema do Casamento Estável

Objetivo. Dado n homens (H) e n mulheres (M), encontre um casamento "adequado".

- Cada homem faz uma lista de preferências de mulheres.
- Cada mulher faz uma lista de preferências de homens.

favorito ↓ ... menos favorito ↓

	1°	2°	3°
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Lista de preferência dos homens

favorito ↓ ... menos favorito ↓

	1°	2°	3°
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Lista de preferência das mulheres

Casamento S: conjunto de pares ordenados (H X M) em que cada membro de H e M aparece em <u>no máximo</u> um par em S. Atenção: <u>no máximo</u> significa que alguém pode ficar ser par !!!

Problema do Casamento Estável

Casamento perfeito (S'): não há poligamia e "solteirice".
- Cada homem casa exatamente com uma mulher.
- Cada mulher casa exatamente com um homem.
- Cada membro H e M aparece em <u>exatamente</u> um par em S'.

Estabilidade: não há incentivo para que um par prejudique outros casamentos.
- No casamento S, um par não casado m-w é instável se o homem m e a mulher w preferir um ao outro ao invés de seus atuais pares.
- Pares instáveis m-w poderiam se separar de seus atuais pares.

Casamento estável: casamento perfeito sem pares instáveis.

Problema do Casamento Estável. Dado um lista de preferências de n homens e n mulheres, encontre um casamento estável, *se ele existir*.

Problema do Casamento Estável

P. A atribuição X-C, Y-B, Z-A é estável?

	1º (favorito)	2º	3º (menos favorito)
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Lista de preferência dos homens

	1º (favorito)	2º	3º (menos favorito)
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Lista de preferência das mulheres

Problema do Casamento Estável

P. A atribuição X-C, Y-B, Z-A é estável?
R. Não. Bertha e Xavier irão se unir.

favorito ↓ … menos favorito ↓

	1º	2º	3º
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Lista de preferência dos homens

favorito ↓ … menos favorito ↓

	1º	2º	3º
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Lista de preferência das mulheres

Problema do Casamento Estável

Q. A atribuição X-A, Y-B, Z-C é estável?
R. Sim.

favorito ↓ ... menos favorito ↓

	1°	2°	3°
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Lista de preferência dos homens

favorito ↓ ... menos favorito ↓

	1°	2°	3°
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Lista de preferência das mulheres

Problema do Companheiro de Quarto Estável

Q. Sempre existirão casamentos estáveis?
R. Não é óbvio a priori.

Mas a resposta é sim. É possível mostrar que para cada conjunto de preferências entre mulheres e homens existirá um casamento estável. E também existe um algoritmos eficiente que faz isso.

Infos importantes:

a) todos estão solteiros no início

b) Em 1962 a sociedade era ainda mais machista e o algoritmo foi projetado de forma que os homens tomavam inicialmente a iniciativa de escolher as mulheres em sua lista de preferência. Chamaremos esta atitude de: pedir em casamento (*propose* (m,w))

c) Inicialmente, é arriscado para w rejeitar o pedido de m. Então dizemos que ao fazer a proposta, teremos um par intermediário (m,w) em noivado (*engagement*)

d) No entanto, futuramente, se m' pedir a mão de w (e w preferir m'), o par (m,w) será desfeito.

Algoritmo de Proposta-e-Rejeição

Algoritmo de Proposta-e-Rejeição. [Gale-Shapley 1962] Método intuitivo que garante encontrar um casamento estável.

```
Initialize each person (m ϵ M , h ϵ H) to be free.
while (there is a man who is free and hasn't proposed to every woman) {
    Choose such a man m
    w = 1° woman on m's list to whom m has not yet proposed
    if (w is free)
         m and w become engaged
    else // w is curently engaged to m’
        if (w prefers m to her fiancé m')
           m and w become engaged;
           m' becomes free
        else w rejects m  // m remains free!
}
Return the set S of engaged pairs (stable matching) !
```

Prova de Corretude: Limite (complexidade)

Observação 1. Homens propões às mulheres em ordem decrescente de preferências.
Observação 2. Uma vez que uma mulher se compromete, ela não se torna solteira novamente, ela somente "troca para melhor".
Observação 3. O homem, por sua vez pode voltar a ficar solteiro. E sua situação apenas "piora" com as trocas.

Afirmação. O algoritmo termina depois de no máximo n^2 iterações do laço (while).
Prova. Cada iteração do laço um homem propõe casamento a uma mulher. Existem somente n^2 possibilidades de pares de m e w !!!

	1º	2º	3º	4º	5º
Victor	A	B	C	D	E
Wyatt	B	C	D	A	E
Xavier	C	D	A	B	E
Yancey	D	A	B	C	E
Zeus	A	B	C	D	E

	1º	2º	3º	4º	5º
Amy	W	X	Y	Z	V
Bertha	X	Y	Z	V	W
Clare	Y	Z	V	W	X
Diane	Z	V	W	X	Y
Erika	V	W	X	Y	Z

Prova de Corretude: casamento perfeito (não necessariamente estável)

Afirmação. Todos os homens e mulheres casam.

Se um homem está solteiro em algum momento da execução, é porque existe uma mulher a quem ele ainda nao pediu em casamento.

Prova. (por contradição)

- Suponha que Zeus está solteiro, mas já propôs a todas as mulheres.
- Neste ponto cada uma das n mulheres está comprometida, por conta da observação 2 (uma vez comprometida, uma mulher não fica solteira novamente; apenas troca de marido) !!
- Como um conjunto de pares comprometidos representa um casamento, temos que ter **n** homens comprometidos neste ponto!
- Mas Zeus ainda está solteiro, o que é uma contradição !! ▪

Prova de Corretude: Estabilidade

Afirmação. Não há pares instáveis em S
Prova. (por contradição)

- Assuma que há instabilidade em S. Por exemplo (m,w) e (m’, w’) para a propriedade
  - m prefere w’ à w ……. w’ prefere m à m’
- Na execução que produziu S, o último pedido de casamento de m foi para w. Perguntamos:
  - Será que m pediu a mão de w’ em primeiro lugar na execução de S???
    - Se não, então ele prefere w, o que é uma contradição!
    - Se sim, então então ele foi rejeitado por w’, para ficar com um m’’. Mas m’ é o parceiro final de w’. Então ou m’’ = m’ ou (obs 2) w’ prefere seu parceiro final m’ à m’’. Contradição !!
- Portanto, S é estável!! ▪

Resumo

Problema do Casamento Estável. Dado n homens e n mulheres, e suas preferências, encontre um casamento estável se existir um.

Algoritmo Gale-Shapley. Garantias para encontrar um casamento estável para qualquer instância problema.

Q. Se existirem múltiplos casamentos estáveis, qual deles o algoritmo GS encontrará?

Q. Como implementar eficientemente o algoritmo GS?

Entendendo a Solução

Q. Para uma dada instância do problema, pode haver vários casamentos estáveis. Todas as execuções do algoritmo GS produziram o mesmo casamento estável? Caso afirmativo, qual deles?

Seja a seguinte lista de preferências:

- m prefere w à w'
- m' prefere w' a w
- w prefere m' a m
- w' prefere m a m'

- Qual resultado teremos ao executarmos o alg. GS ?
- Haveria outra solução possível e estável ??

Entendendo a Solução

Atribuição ótima para homens. Cada homem casa com sua melhor parceira válida.

Afirmação. Todas as execuções de GS produzirão a atribuição ótima para homens, a qual é um casamento estável!

- O algoritmo GS é altamente injusto para com as mulheres, pois são os homens que fazem o pedido!
- Se fosse o contrário, seria injusto para com os homens.

Resumo do Casamento Estável

Problema do Casamento Estável. Dado um conjunto de preferências de n homens e n mulheres, encontre um casamento e estável.

nenhum homem ou mulher prefere estar com outro par fora o que foi atribuído.

Algoritmo Gale-Shapley. Encontre um casamento estável em tempo $O(n^2)$.

Ótimo para Homens. Na versão do algoritmo GS onde os homens propõe casamento, cada homem casa com sua melhor parceira válida.

w é um parceiro válido de m se existir algum casamento estável onde m e w são pares.

Q. O caso ótimo para os homens vem às custas da escolha das mulheres?

Implementação Eficiente

Implementação Eficiente. Nós descrevemos uma implementação $O(n^2)$.

Representando homens e mulheres.

- Assuma que os homens são rotulados 1, …, n.
- Assuma que as mulheres são rotuladas 1', …, n'.

Casamentos.

- Mantenha uma lista de homens livres, e.g., em uma fila.
- Mantenha dois vetores wife[m], e husband[w].
  - atribua a entrada 0 se não há casamento
  - se m casar com w então wife[m]=w e husband[w]=m

Homens propondo.

- Para cada homem, mantenha uma lista de mulheres, ordenadas por preferência.
- Mantenha um vetor count[m] que conta o número de propostas feitas pelo homem m.

Implementação Eficiente

Mulheres rejeição/aceitação.

- Uma mulher w prefere um homem m ao homem m'?
- Para cada mulher, crie uma lista inversa da lista de preferência dos homens.
- Tempo de acesso constante para cada consulta depois de um pré-processamento O(n).

Amy	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
Pref	8	3	7	1	4	5	6	2

Amy	1	2	3	4	5	6	7	8
Inverse	4º	8º	2º	5º	6º	7º	3º	1º

```
for i = 1 to n
  inverse[pref[i]] = i
```

Amy prefere o homem 3 ao 6
desde que inverse[3] < inverse[6]

2 7