

Cartographie des mathématiques pour l'agrégation

Gautier Laisné

Table des matières

I	La Vue d'ensemble	6
1	L'Algébrisation des Notions Topologiques - La Structure sous la Forme	7
1.1	Pourquoi Algébriser la Topologie ?	7
1.2	Analyse de vos Intuitions : Un Dictionnaire Topologie \leftrightarrow Algèbre	7
1.3	Autres Exemples Tirés de nos Cartographies	8
II	Théorie des nombres	9
2	Arithmétique : La Structure Cachée des Nombres Entiers	10
2.1	Division Euclidienne et PGCD : L'Algorithme Fondateur	10
2.2	Nombres Premiers et Factorisation Unique	10
2.3	Arithmétique Modulaire : Les Mondes Finis de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	11
2.4	Résidus Quadratiques et la Loi de Réciprocité	11
2.5	Introduction aux Équations Diophantiennes	12
III	Théorie des groupes	13
3	Théorie des Groupes : À la Recherche des Atomes de Symétrie	14
3.1	L'Alphabet de la Symétrie	14
3.2	Structure Interne : Quotients et Morphismes	14
3.3	Les Actions de Groupes : La Géométrie en Mouvement	15
3.4	Le Programme de Classification : Les Atomes de Symétrie	15
3.5	Reconstruire des Groupes : Le Produit Semi-direct	16
4	Théorie de Galois : La Symétrie Cachée des Nombres	17
4.1	Le Langage des Corps et des Extensions	17
4.2	Construire des Extensions : Le Monde des Racines	17
4.3	Les "Bonnes" Extensions : Le Cadre de la Théorie de Galois	18
4.4	Le Théorème Fondamental : Le Dictionnaire Algèbre-Groupe	18
4.5	Applications : La Puissance du Dictionnaire	18
5	Théorie des Représentations : Rendre les Groupes Visibles	20
5.1	Le Langage des Représentations	20
5.2	Le Lemme de Schur et ses Conséquences	20
5.3	Les Caractères : L'ADN des Représentations	21
5.4	La Table des Caractères : Carte d'Identité du Groupe	21

IV	Géométrie	22
6	Algèbre Bilinéaire : La Géométrie Cachée des Espaces Vectoriels	23
6.1	Formes Bilinéaires et Dualité	23
6.2	Formes Quadratiques : L'Étude des "Longueurs au Carré"	23
6.3	La Loi d'Inertie de Sylvester : Classifier les Géométries	24
7	Géométrie Euclidienne : La Structure de notre Intuition	25
7.1	Le Produit Scalaire : La Mesure des Longueurs et des Angles	25
7.2	Orthogonalité et Bases Orthonormées	25
7.3	Les Transformations Euclidiennes : Isométries et Similitudes	26
7.4	Endomorphismes d'un Espace Euclidien et Théorème Spectral	26
8	Géométrie Différentielle : Le Calcul Infinitésimal sur les Espaces Courbes	27
8.1	Étude Locale des Courbes	27
8.2	Étude Locale des Surfaces	27
9	Surfaces et Variétés : De la Géométrie Locale au Global	29
9.1	La Notion de Variété : L'Abstraction d'une "Surface"	29
9.2	L'Espace Tangent et les Géodésiques	29
9.3	Le Théorème de Gauss-Bonnet : Le Pont entre Géométrie et Topologie	30
V	Algèbre	31
10	Algèbre linéaire : Espaces Vectoriels - Le Langage Universel de la Linéarité	32
10.1	Axiomes et Concepts Fondamentaux	32
10.2	Le Concept Central : la Dimension	32
10.3	Les Applications Linéaires : Morphismes et Invariants	33
10.4	Construire et Déconstruire les Espaces	33
11	Algèbre linéaire : La Dualité - L'Espace Vu par son Miroir	34
11.1	Le Dual : Un Changement de Perspective	34
11.2	Le Bidual et la Réflexivité	34
11.3	Orthogonalité et Structure des Sous-Espaces	34
11.4	L'Application Transposée	35
12	Algèbre linéaire : Diagonalisation et Trigonalisation - La Quête de la Simplicité	36
12.1	Éléments Propres : Les Directions Privilégiées	36
12.2	La Diagonalisation : Le Cas Idéal	36
12.3	La Trigonalisation : Un Compromis Nécessaire	37
12.4	Polynômes d'Endomorphismes : L'Outil Algébrique	37
13	Algèbre linéaire : Décompositions Fines - L'Anatomie d'un Endomorphisme	38
13.1	Le Lemme des Noyaux : Le Scalpel du Chirurgien	38
13.2	La Décomposition de Dunford : Séparer le Simple du Complicé	38
13.3	La Décomposition de Jordan : La Forme Canonique Ultime	39
13.4	Autres Décompositions Fondamentales	39
14	Algèbre Générale : L'Architecture des Structures	40
14.1	Le Zoo des Structures Algébriques	40
14.2	Le Triptyque Universel : Sous-structures, Morphismes, Quotients	40
14.3	L'Action : Quand les Structures Agissent sur le Monde	41

14.4	Vers l'Algèbre Universelle et les Catégories	41
15	Anneaux et Polynômes : L'Héritage de l'Arithmétique	43
15.1	Le Bestiaire des Anneaux : Une Hiérarchie de "Gentillesse"	43
15.2	L'Arithmétique dans les Anneaux Factoriels	43
15.3	Les Anneaux de Polynômes : L'Objet Central	44
15.4	Polynômes Symétriques, Résultant et Discriminant	44
16	Fiche de Synthèse : La Philosophie des Modules (hors programme) : Le Grand Unificateur de l'Algèbre	46
16.1	Qu'est-ce qu'un Module, Conceptuellement ?	46
16.2	Le Dictionnaire : Trois Exemples Fondamentaux pour l'Agrégation	46
16.3	Le Théorème de Structure : Le "Marteau" Unificateur	47
16.4	Conclusion : Comment Utiliser cette Fiche à l'Agrégation ?	47
VI	Intégration	48
17	Intégration de Riemann : La Gloire et les Limites d'une Idée Intuitive	49
17.1	La Construction de l'Intégrale : L'Idée Géométrique	49
17.2	Le Champ d'Application : Quelles Fonctions sont Intégrables ?	49
17.3	Les Théorèmes Fondamentaux : Le Pont entre Intégrale et Dérivée	50
17.4	Extensions et Limites de la Théorie	50
18	Fourier et Espaces L^p : Décomposer les Fonctions en Atomes	51
18.1	Espaces de Banach L^p : Mesurer la "Taille" des Fonctions	51
18.2	L'Espace de Hilbert L^2 : La Géométrie de l'Analyse	51
18.3	Séries de Fourier : La Décomposition Harmonique sur le Cercle	52
18.4	La Transformation de Fourier : L'Analyse sur la Droite Réelle	52
18.5	Distributions : La Théorie des Fonctions Généralisées	53
19	Théorie de la Mesure : Refonder l'Intégrale sur des Bases Solides	54
19.1	Mesurer les Ensembles : Tribus et Mesures	54
19.2	L'Intégrale de Lebesgue : Une Révolution Conceptuelle	54
19.3	Les Théorèmes de Convergence : La Puissance Retrouvée	55
19.4	Le Lien avec l'Analyse Fonctionnelle et Fubini	55
VII	Analyse	57
20	Séries : L'Art de Dompter l'Infini	58
20.1	Séries Numériques : Le Sens d'une Somme Infinie	58
20.2	Séries de Fonctions : Construire de Nouveaux Objets	58
20.3	Séries Entières : Le Pont entre Algèbre et Analyse	59
20.4	Séries de Fourier : La Décomposition Harmonique	59
21	Analyse Fonctionnelle : Une Perspective Géométrique	61
21.1	Préambule : Fondamentaux de Topologie et des Espaces Métriques	61
21.1.1	Topologie Générale : Le Langage de la Proximité	61
21.1.2	Espaces Métriques : La Notion de Distance	61
21.1.3	Espaces Vectoriels Normés : La Synthèse	62
21.2	Espaces de Banach : La Scène de l'Analyse	62
21.3	Les Piliers : La Puissance de la Complétude	63
21.4	Dualité et Topologies Faibles : La Quête de la Compacité	63

21.5	Espaces de Hilbert : La Géométrie Triomphante	63
22	Analyse Complexe : La Rigidité Miraculeuse du Plan Complexe	65
22.1	Le Monde Holomorphe : Une Condition Extraordinaire	65
22.2	L'Intégration Complexe et la Formule de Cauchy	65
22.3	Les Conséquences de la Rigidité Holomorphe	66
22.4	Analyse des Singularités et Théorème des Résidus	66
23	Analyse Convexe : La Géométrie de l'Optimisation	68
23.1	Le Langage de la Convexité	68
23.2	Théorèmes de Séparation et Points Extrémaux	68
23.3	Autres Théorèmes Géométriques Fondamentaux	69
24	Équations Différentielles : L'Art de Prédire le Futur	70
24.1	Existence et Unicité : Le Socle Déterministe	70
24.2	Équations Différentielles Linéaires : Un Monde Structuré	70
24.3	Étude Qualitative : Dessiner le Futur sans Calculer	71
24.4	Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles (EDP)	71
25	Équations aux Dérivées Partielles - Modéliser les Phénomènes Continus	73
25.1	Le Langage des EDP : Classification et Problèmes Bien Posés	73
25.2	Type Elliptique : L'Équation de Laplace $\Delta u = 0$	73
25.3	Type Parabolique : L'Équation de la Chaleur $u_t - \Delta u = 0$	74
25.4	Type Hyperbolique : L'Équation des Ondes $u_{tt} - \Delta u = 0$	74
25.5	Approches Hilbertsiennes : La Formulation Variationnelle	75
26	Calcul Différentiel en Dimension Infinie : Généraliser la Dérivée dans les Es-	
	paces de Banach	76
26.1	La Notion de Différentiabilité	76
26.2	Les Grands Théorèmes du Calcul Différentiel	76
26.3	Différentielles d'Ordre Supérieur et Formule de Taylor	77
26.4	Application à l'Optimisation sans Contraintes	77
VIII	Topologie	78
27	Topologie : La Dialectique du Local et du Global	79
27.1	Espaces Métriques : La Structure Locale	79
27.2	Complétude : La Propriété Analytique par Excellence	79
27.3	Compacité : La Propriété Globale et Géométrie	79
27.4	Autres Propriétés Topologiques Fondamentales	80
IX	Probabilités	81
28	Combinatoire et Graphes : L'Art de Dénombrer et de Connecter	82
28.1	Principes Fondamentaux du Dénombrement	82
28.2	Le Langage des Graphes	82
28.3	Théorèmes Fondamentaux de la Théorie des Graphes	83
29	Espaces Probabilisés : La Mesure de l'Incertitude	84
29.1	Les Axiomes de Kolmogorov : Le Cadre de la Théorie	84
29.2	Variables Aléatoires : Les Fonctions de l'Aléatoire	84
29.3	Espérance et Moments : L'Intégrale sur l'Univers	85

29.4 Les Théorèmes Limites : L'Émergence de l'Ordre	85
30 Statistiques et Méthodes : L'Art de l'Inférence face à l'Incertitude	86
30.1 Le Cadre de la Statistique Inférentielle	86
30.2 Estimation Ponctuelle : Deviner le Bon Paramètre	86
30.3 Estimation par Intervalle de Confiance	87
30.4 Tests d'Hypothèses : La Prise de Décision	87
X Méthodes numériques	88
31 Équations Différentielles Numériques : Approximer le Continu par le Discret	89
31.1 Principes Fondamentaux de la Discrétisation	89
31.2 Les Méthodes à un Pas : Le Futur ne dépend que du Présent	89
31.3 Les Méthodes Multipas : La Mémoire du Passé	90
32 Résolution Numérique : L'Art de l'Approximation Efficace	91
32.1 Résolution d'Équations Non Linéaires $f(x) = 0$	91
32.2 Interpolation et Approximation Polynomiale	91
32.3 Intégration Numérique (Quadrature)	92
32.4 Algèbre Linéaire Numérique	92
33 Option Calcul Scientifique : La Boîte à Outils du Modélisateur	93
33.1 La Philosophie de l'Épreuve de Modélisation	93
33.2 La Boîte à Outils Algorithmique par Type de Problème	93
33.2.1 Si le modèle est une Équation Différentielle Ordinaire (EDO)	93
33.2.2 Si le modèle est un Système Linéaire $Ax = b$	94
33.2.3 Si le modèle est un Problème aux Valeurs Propres $Ax = \lambda x$	94
33.3 Thèmes Transversaux et Algorithmes Essentiels	94
33.3.1 Optimisation Numérique : Trouver le Minimum	94
33.3.2 Équations aux Dérivées Partielles (EDP) : Le Strict Minimum	95
33.3.3 La Transformée de Fourier Rapide (FFT)	95

Première partie

La Vue d'ensemble

Chapitre 1

L'Algébrisation des Notions Topologiques - La Structure sous la Forme

1.1 Pourquoi Algébriser la Topologie ?

Objectif. Comprendre la motivation profonde derrière la traduction de concepts topologiques (forme, continuité, proximité) en concepts algébriques (groupes, anneaux, modules). L'idée est de remplacer des objets "mous" et difficiles à classer par des structures algébriques "rigides" qui servent d'invariants.

Remarque (Les Gains de l'Algébrisation). Traduire un problème de topologie en algèbre offre trois avantages majeurs :

1. **La Classification par des Invariants :** La topologie est l'étude des formes "à déformation près". Il est très difficile de prouver que deux espaces ne sont PAS homéomorphes. L'algèbre nous fournit des "invariants" : on associe à chaque espace un objet algébrique (un groupe, un anneau...). Si les objets algébriques associés sont différents, alors les espaces de départ ne peuvent pas être équivalents. C'est le principe de la topologie algébrique.
2. **La Puissance du Calcul :** Les structures algébriques, en particulier celles qui se ramènent à l'algèbre linéaire, sont justifiables du calcul. On peut calculer des dimensions, des rangs, des noyaux... Comme vous l'avez mentionné, cela ouvre la voie au calcul formel et à l'implémentation sur ordinateur, transformant un problème de forme en un problème de matrices ou de polynômes.
3. **La Généralisation :** Les définitions algébriques sont souvent indépendantes du

corps de base. On peut ainsi exporter des intuitions géométriques (développées sur \mathbb{R} ou \mathbb{C}) à des contextes purement arithmétiques, comme les corps finis, ce qui est le fondement de la géométrie arithmétique.

1.2 Analyse de vos Intuitions : Un Dictionnaire Topologie \leftrightarrow Algèbre

Objectif. Analyser et raffiner les intuitions que vous avez proposées. Certaines sont des analogies profondes, d'autres sont des exemples de la grande synthèse entre l'algèbre et l'analyse.

Proposition 1.2.1 (Anneaux Noethériens \leftrightarrow Compacité Topologique). **Votre intuition est ici extraordinairement profonde et correcte.** C'est le point de départ de la géométrie algébrique.

- Dans la **topologie de Zariski** sur \mathbb{C}^n , les ensembles fermés sont définis comme les lieux d'annulation de familles de polynômes (i.e., les zéros d'idéaux de l'anneau $A = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$).
- Le **théorème de la base de Hilbert** (un résultat purement algébrique) nous dit que cet anneau A est **noethérien**, ce qui signifie que tout idéal est de type fini.
- **Traduction :** Tout ensemble fermé de la topologie de Zariski est le lieu d'annulation d'un nombre *fini* de polynômes.
- **La propriété topologique :** Cela implique que toute suite décroissante de fermés est stationnaire. C'est une propriété très forte, une forme de **compacité**. La

condition algébrique (noethérianité) sur l'anneau des fonctions induit une propriété topologique puissante sur l'espace.

Proposition 1.2.2 (Modules Projectifs \leftrightarrow Fibrés Vectoriels). **Ici aussi, votre intuition est celle d'un chercheur.** C'est le contenu du **théorème de Serre-Swan**.

- Un **fibré vectoriel** sur un espace topologique compact X est, intuitivement, une famille continue d'espaces vectoriels paramétrée par les points de X .
- Soit $A = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ l'anneau des fonctions continues sur X . L'ensemble des sections globales d'un fibré vectoriel $E \rightarrow X$ forme un **A -module**.
- **Le théorème** : L'association qui à un fibré vectoriel associe son module de sections est une équivalence de catégories entre la catégorie des fibrés vectoriels sur X et celle des **modules projectifs** de type fini sur A .

C'est le dictionnaire parfait : un objet de topologie/géométrie est entièrement encodé dans un objet purement algébrique.

Proposition 1.2.3 (Analyse Complexe \leftrightarrow Rigidité Algébrique). **Votre analogie est excellente.** L'holomorphie est une forme de rigidité.

- La condition de \mathbb{C} -différentiabilité se traduit par les **équations de Cauchy-Riemann**. Ce sont des conditions **algébriques** (un système d'EDP linéaires) sur les parties réelle et imaginaire.
- Cette contrainte algébrique locale a des conséquences topologiques et globales spectaculaires : principe du maximum, prolongement analytique, etc. Une fonction holomorphe est "rigide" : la connaissance de ses valeurs sur un tout petit ouvert détermine la fonction partout.

Proposition 1.2.4 (Espaces de Banach : Synthèse Algèbre-Topologie). Ici, il s'agit moins d'une "algébrisation de la topologie" que d'une **synthèse** des deux. Un espace de Banach est un objet qui vit à l'intersection de deux mondes : il a une structure **algébrique** (espace vectoriel) et une structure **topologique** (espace métrique complet via la norme). Le génie de la théorie est de n'étudier que les objets (les applications linéaires continues) qui respectent *simultanément* les deux structures.

Proposition 1.2.5 (Théorie de Galois vs. Construction des Réels). **Ici, il faut être très précis.** Votre intuition touche à l'idée de "compléter \mathbb{Q} ", mais il existe deux notions de complétion radicalement différentes.

- La **construction des réels** \mathbb{R} est une complétion **topologique/métrique**. On "bouche les trous" de \mathbb{Q} par rapport à la distance usuelle. C'est un processus analytique.
- La **clôture algébrique** $\bar{\mathbb{Q}}$ (le corps des nombres algébriques) est une complétion **algébrique**. On "bouche les trous" en ajoutant toutes les racines de tous les polynômes à coefficients dans \mathbb{Q} . C'est le terrain de jeu de la théorie de Galois.

Ces deux objets sont très différents ($\bar{\mathbb{Q}}$ est dénombrable, \mathbb{R} ne l'est pas). La théorie de Galois n'est donc pas une algébrisation de la complétude métrique, mais une théorie de la complétude algébrique.

1.3 Autres Exemples Tirés de nos Cartographies

Remarque (La Pensée Algébrique est Partout). Ce mode de pensée irrigue toutes les mathématiques que nous avons survolées.

- **Topologie Algébrique** : L'exemple le plus flagrant. Au lieu d'étudier un espace topologique X directement, on lui associe des groupes : le groupe fondamental $\pi_1(X)$, les groupes d'homologie $H_n(X)$, etc. Ces groupes sont des invariants algébriques qui "comptent les trous" de l'espace.
- **Cohomologie (votre domaine)** : La cohomologie de De Rham est un dictionnaire spectaculaire entre l'analyse (les formes différentielles sur une variété) et la topologie (les invariants cohomologiques, qui sont des espaces vectoriels). Le fait que $d^2 = 0$ est une traduction d'une propriété topologique du bord ("le bord d'un bord est vide").
- **Dualité en Algèbre Linéaire** : L'étude d'un sous-espace F (objet géométrique) peut se faire via son orthogonal F° (un sous-espace de formes linéaires, c'est-à-dire un système d'équations, un objet algébrique).

Deuxième partie

Théorie des nombres

Chapitre 2

Arithmétique : La Structure Cachée des Nombres Entiers

2.1 Division Euclidienne et PGCD : L'Algorithme Fondateur

Objectif. Établir le socle de toute l'arithmétique. La division euclidienne est une propriété d'apparence modeste, mais elle est le moteur de tout le reste. D'elle découlent les notions de PGCD, les relations de Bézout et de Gauss, qui sont les outils de base pour explorer la structure multiplicative de \mathbb{Z} .

Théorème 2.1.1 (Division Euclidienne dans \mathbb{Z}). Pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ (quotient, reste) tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$.

Remarque (Le Point de Départ de la Théorie des Anneaux). Cette propriété fait de l'anneau \mathbb{Z} un **anneau euclidien**. C'est la propriété la plus forte dans la hiérarchie des anneaux (Euclidien \implies Principal \implies Factoriel), ce qui explique pourquoi l'arithmétique dans \mathbb{Z} est si "bien comportée".

Définition 2.1.1 (PGCD et Algorithme d'Euclide). Le Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) de a et b est le plus grand entier positif qui divise à la fois a et b . L'**algorithme d'Euclide** est une procédure itérative qui calcule le PGCD de deux nombres en utilisant des divisions euclidiennes successives. C'est l'un des plus anciens algorithmes non triviaux de l'histoire.

Théorème 2.1.2 (Théorème de Bézout). Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. L'ensemble des combinaisons linéaires $\{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ est exactement l'ensemble des multiples de leur PGCD, $\text{pgcd}(a, b)\mathbb{Z}$. En particulier, a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.

Application (Inverse modulaire). L'identité de Bézout est constructive (grâce à l'algorithme d'Euclide étendu). Elle permet de calculer l'inverse d'un élément dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. L'inverse de a modulo n existe si $\text{pgcd}(a, n) = 1$, et l'algorithme nous donne u, v tels que $au + nv = 1$, ce qui signifie $au \equiv 1 \pmod{n}$. L'inverse de a est u .

Théorème 2.1.3 (Lemme de Gauss). Si un entier a divise le produit bc et que a est premier avec b , alors a divise c .

2.2 Nombres Premiers et Factorisation Unique

Objectif. Introduire les "atomes" de l'arithmétique : les nombres premiers. Le résultat central de cette section, le Théorème Fondamental de l'Arithmétique, est la pierre angulaire de la théorie des nombres, affirmant que tout entier se décompose de manière unique en un "assemblage" de ces atomes.

Définition 2.2.1 (Nombre Premier). Un entier $p > 1$ est **premier** s'il n'admet que deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Lemme 2.2.1 (Lemme d'Euclide). Un entier $p > 1$ est premier si et seulement si pour tous entiers a, b , on a : $p|ab \implies p|a$ ou $p|b$.

Remarque (La Vraie Définition de la Primauté). Cette propriété est conceptuellement plus forte que la définition par les diviseurs. C'est elle qui garantit l'unicité de la décomposition. Dans les anneaux plus généraux, c'est cette propriété qui définit un "élément premier".

Théorème 2.2.2 (Théorème Fondamental de l'Arithmétique). Tout entier $n \geq 2$ se décompose de manière unique (à l'ordre près des facteurs) en un produit de nombres premiers.

Théorème 2.2.3 (Théorème d'Euclide sur l'infinité des nombres premiers). Il existe une infinité de nombres premiers. La preuve classique par l'absurde (considérer $P + 1$ où P est le produit des premiers) est un modèle d'élégance mathématique.

Théorème 2.2.4 (Théorème des Nombres Premiers (admis)). Soit $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x . Alors, on a l'équivalent asymptotique :

$$\pi(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)}$$

Remarque (Le Pont entre Arithmétique et Analyse). Ce théorème est un résultat profond qui illustre que pour comprendre la distribution (très irrégulière) des nombres premiers, des outils d'analyse (en l'occurrence, l'analyse complexe et la fonction ζ de Riemann) sont nécessaires.

2.3 Arithmétique Modulaire : Les Mondes Finis de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Objectif. Étudier la structure de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. C'est le monde de l'"arithmétique de l'horloge", où l'on s'intéresse aux restes de la division. Ces structures finies sont d'une richesse incroyable et sont au cœur de la cryptographie moderne.

Définition 2.3.1 (Anneau des entiers modulo n). La relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} . L'ensemble des classes d'équivalence, noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, est muni d'une structure d'anneau commutatif unitaire.

Proposition 2.3.1 (Groupe des inversibles). Un élément $\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible si et seulement si $\text{pgcd}(k, n) = 1$. L'ensemble des inversibles, noté $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, forme un groupe multiplicatif d'ordre $\varphi(n)$, où φ est l'indicateur d'Euler.

Corollaire 2.3.0.1. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est un nombre premier. Ce corps est noté \mathbb{F}_n .

Théorème 2.3.1 (Théorème d'Euler). Soit $n \geq 2$. Pour tout entier a premier avec n , on a $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. En particulier (Petit Théorème de Fermat), si p est premier et $p \nmid a$, alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Théorème 2.3.2 (Théorème des Restes Chinois). Si m et n sont premiers entre eux, alors l'application naturelle de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un isomorphisme d'anneaux.

Application (Cryptosystème RSA). Le système RSA est basé sur ces résultats. On choisit deux grands nombres premiers p, q et on pose $n = pq$. $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ est facile à calculer si on connaît p, q , mais très difficile sinon. On choisit un exposant de chiffrement e premier avec $\varphi(n)$ et on calcule son inverse d modulo $\varphi(n)$ (grâce à Bézout). Le message M est chiffré par $C = M^e \pmod{n}$. Le déchiffrement se fait par $C^d = (M^e)^d = M^{ed} = M^{1+k\varphi(n)} \equiv M \pmod{n}$ par le théorème d'Euler.

2.4 Résidus Quadratiques et la Loi de Réciprocité

Objectif. Aborder un des plus beaux résultats de la théorie des nombres, qualifié par Gauss de "Théorème d'Or". La loi de réciprocité quadratique révèle une symétrie cachée et profonde entre les nombres premiers.

Définition 2.4.1 (Résidu Quadratique et Symbole de Legendre). Soit p un premier impair. Un entier a est un **résidu quadratique** modulo p s'il est un carré non nul modulo p . Le **symbole de Legendre** $\left(\frac{a}{p}\right)$ vaut 1 si a est un résidu quadratique, -1 sinon, et 0 si $p|a$.

Théorème 2.4.1 (Loi de Réciprocité Quadratique de Gauss). Soient p et q deux nombres premiers impairs distincts. Alors :

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}$$

Lois complémentaires : $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}$ et $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8}$.

Remarque (Un Dialogue entre les Nombres Premiers). Cette loi est stupéfiante. Elle affirme que la question "est-ce que p est un carré modulo q ?" est directement liée à la question "est-ce que q est un carré modulo p ?". Cette symétrie n'a aucune raison apparente d'exister. La chercher à la démontrer a conduit au développement de pans entiers de l'algèbre et de la théorie des nombres.

Application (Calcul efficace du symbole de Legendre). La loi de réciprocité, utilisée conjointement avec la multiplicativité du symbole et les lois complémentaires, permet de calculer $\left(\frac{a}{p}\right)$ de manière très efficace, sans avoir à lister tous les carrés modulo p , en utilisant un algorithme similaire à l'algorithme d'Euclide.

2.5 Introduction aux Équations Diophantiennes

Objectif. Donner un aperçu du domaine qui cherche les solutions entières ou rationnelles d'équations polynomiales. C'est un domaine d'une richesse et d'une difficulté extrêmes, qui connecte l'arithmétique à la géométrie algébrique.

Proposition 2.5.1 (Équations linéaires $ax + by = c$). Cette équation admet des solutions entières (x, y) si et seulement si $\text{pgcd}(a, b)$ divise c . L'algorithme d'Euclide étendu permet de trouver une solution particulière.

Théorème 2.5.1 (Triplets Pythagoriciens). Les solutions entières primitives de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ sont entièrement paramétrées par la formule $(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$ où u, v sont des entiers premiers entre eux de parité contraire.

Théorème 2.5.2 (Théorème des deux carrés de Fermat). Un nombre premier impair p peut s'écrire comme une somme de deux carrés, $p = a^2 + b^2$, si et seulement si $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Remarque (Le Pont vers l'Arithmétique des Anneaux). Ce théorème se démontre élégamment en étudiant l'arithmétique de l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$. Un premier p est une somme de deux carrés si et seulement s'il n'est plus "premier" dans $\mathbb{Z}[i]$ (il se factorise en $(a + ib)(a - ib)$). C'est l'un des premiers exemples où l'étude d'un anneau plus grand que \mathbb{Z} permet de résoudre un problème sur \mathbb{Z} .

Théorème 2.5.3 (Grand Théorème de Fermat (Wiles, 1994)). Pour tout entier $n \geq 3$, l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution en entiers non nuls.

Remarque (Un Sommet des Mathématiques). La preuve de ce théorème, longue de plus de 100 pages, est un monument des mathématiques du XXe siècle. Elle repose sur des outils extrêmement sophistiqués (courbes elliptiques, formes modulaires), montrant que des questions d'arithmétique élémentaire peuvent être d'une profondeur insondable.

Troisième partie

Théorie des groupes

Chapitre 3

Théorie des Groupes : À la Recherche des Atomes de Symétrie

3.1 L'Alphabet de la Symétrie

Objectif. Introduire le groupe comme la structure algébrique qui capture l'essence de la notion de **symétrie**. L'idée fondatrice est qu'un groupe n'est pas un objet abstrait, mais l'ensemble des transformations qui laissent un objet (géométrique, combinatoire, etc.) invariant. Nous allons définir le vocabulaire de base et étudier les groupes les plus fondamentaux.

Définition 3.1.1 (Groupe). Un groupe (G, \cdot) est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, possédant un élément neutre et où tout élément admet un inverse.

Définition 3.1.2 (Sous-groupe et Théorème de Lagrange). Un sous-ensemble non vide $H \subset G$ est un sous-groupe s'il est stable par la loi et par passage à l'inverse. **Théorème de Lagrange :** Si G est un groupe fini, l'ordre de tout sous-groupe de G divise l'ordre de G .

Remarque (Une contrainte puissante mais limitée). Le théorème de Lagrange est la première contrainte forte sur la structure d'un groupe fini. Il limite drastiquement les ordres possibles des sous-groupes. Attention, la réciproque est fautive en général (le groupe alterné A_4 d'ordre 12 n'a pas de sous-groupe d'ordre 6). Une grande partie de la théorie (Sylow) visera à établir des réciproques partielles.

Définition 3.1.3 (Groupe cyclique). Un groupe est cyclique s'il est engendré par un seul de ses éléments.

Théorème 3.1.1 (Classification des groupes cycliques). Un groupe cyclique infini est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$. Un groupe cyclique fini d'ordre n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Application (Cryptographie à clé publique). Des protocoles comme l'échange de clés Diffie-

Hellman ou le chiffrement ElGamal reposent sur la difficulté du problème du logarithme discret dans les grands groupes cycliques (typiquement, le groupe multiplicatif d'un corps fini). La structure simple des groupes cycliques permet des calculs efficaces, tandis que leur "durété" cryptographique assure la sécurité.

3.2 Structure Interne : Quotients et Morphismes

Objectif. Comprendre comment les groupes sont organisés de l'intérieur. Le concept de "quotient" est central : il s'agit d'une technique pour simplifier l'étude d'un groupe en "ignorant" une partie de sa structure (un sous-groupe distingué). Les théorèmes d'isomorphismes sont les règles de calcul de ce "calcul des quotients".

Définition 3.2.1 (Sous-groupe distingué et Groupe Quotient). Un sous-groupe H de G est **distingué** (ou normal), noté $H \triangleleft G$, s'il est stable par conjugaison ($gHg^{-1} = H$). Si $H \triangleleft G$, on peut munir l'ensemble des classes G/H d'une structure de **groupe quotient**.

Théorème 3.2.1 (Premier Théorème d'Isomorphisme). Pour tout morphisme de groupes $f : G \rightarrow G'$, on a l'isomorphisme canonique :

$$G/\ker(f) \cong \text{Im}(f)$$

Remarque (La Factorisation Universelle). Ce théorème est le plus important de la théorie "de base". Il dit que tout morphisme se décompose canoniquement en une surjection (passage au quotient), un isomorphisme, et une injection. Il nous permet d'identifier toutes les images possibles d'un groupe : ce sont, à isomorphisme près, ses quotients.

Définition 3.2.2 (Groupe dérivé et Commutateurs). Le commutateur de x, y est $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Le groupe dérivé $D(G)$ est le sous-groupe engendré par tous les commutateurs.

Proposition 3.2.1. $D(G)$ est le plus petit sous-groupe distingué de G tel que le quotient $G/D(G)$ soit abélien. Ce quotient s'appelle l'abélianisé de G .

Remarque (Mesurer le défaut de commutativité). Le groupe dérivé est un "indicateur" de non-commutativité. Plus $D(G)$ est petit, plus G "ressemble" à un groupe abélien. Un groupe est abélien si et seulement si son groupe dérivé est trivial.

3.3 Les Actions de Groupes : La Géométrie en Mouvement

Objectif. Faire vivre la théorie. L'étude des groupes abstraits prend tout son sens lorsqu'on les fait "agir" sur des ensembles. Cette notion est le pont entre l'algèbre et de nombreux autres domaines. C'est l'outil le plus puissant pour prouver des théorèmes de structure.

Définition 3.3.1 (Action de groupe et ses composantes). Une action de G sur X est un morphisme $G \rightarrow \mathfrak{S}(X)$. L'**orbite** d'un élément $x \in X$ est l'ensemble des points atteignables depuis x . Le **stabilisateur** de x est le sous-groupe des éléments qui fixent x .

Théorème 3.3.1 (Relation Orbite-Stabilisateur). Pour toute action d'un groupe fini G sur un ensemble X , on a $|G| = |\mathcal{O}(x)| \times |\text{Stab}(x)|$.

Théorème 3.3.2 (Équation aux classes). Si G agit sur lui-même par conjugaison, on a $|G| = |Z(G)| + \sum_i [G : C(x_i)]$, où $Z(G)$ est le centre et $C(x_i)$ le centralisateur des représentants d'orbites non triviales.

Application (Structure des p -groupes). Une conséquence immédiate de l'équation aux classes est que tout groupe dont l'ordre est la puissance d'un nombre premier p (un p -groupe) a un centre non trivial. C'est un résultat très fort qui n'est pas du tout évident a priori.

3.4 Le Programme de Classification : Les Atomes de Symétrie

Objectif. Mettre en œuvre notre machinerie pour décomposer les groupes finis en "briques élémentaires". Les théorèmes de Sylow sont l'outil principal de ce programme, et les groupes simples en sont les "atomes" indivisibles.

Théorème 3.4.1 (Théorèmes de Sylow). Soit G un groupe d'ordre $n = p^k m$ avec p premier et $p \nmid m$.

1. **(Existence)** Il existe au moins un p -Sylow (sous-groupe d'ordre p^k).
2. **(Inclusion et Conjugaison)** Les p -Sylow sont tous conjugués entre eux.
3. **(Nombre)** Le nombre n_p de p -Sylow divise m et $n_p \equiv 1 \pmod{p}$.

Application (Analyse de la structure des groupes d'ordre donné). Les théorèmes de Sylow permettent une analyse fine des groupes de petit ordre. Par exemple, on peut montrer que tout groupe d'ordre 15 est cyclique. Les conditions sur n_3 et n_5 forcent $n_3 = 1$ et $n_5 = 1$. Le groupe est alors produit direct de ses Sylow, qui sont cycliques d'ordres premiers entre eux.

Définition 3.4.1 (Groupe simple). Un groupe est **simple** s'il n'admet aucun sous-groupe distingué propre non trivial.

Remarque (Les atomes de la théorie des groupes). Les groupes simples sont aux groupes finis ce que les nombres premiers sont aux entiers. Le théorème de Jordan-Hölder nous dit que tout groupe fini peut être décomposé en une "suite de composition" dont les "facteurs" (les quotients successifs) sont des groupes simples. Comprendre les groupes simples, c'est donc comprendre les briques de base de tous les groupes.

Théorème 3.4.2 (Simplicité des groupes alternés). Le groupe alterné \mathcal{A}_n (le groupe des permutations de signature 1) est simple pour tout $n \geq 5$.

Corollaire 3.4.2.1 (Non-résolubilité de \mathfrak{S}_n pour $n \geq 5$). Puisque \mathcal{A}_n est simple et non-abélien, la suite des groupes dérivés de \mathfrak{S}_n stationne à \mathcal{A}_n et n'atteint jamais le groupe trivial. \mathfrak{S}_n n'est donc pas résoluble pour $n \geq 5$. C'est le point clé de la preuve de l'insolubilité de la quintique par radicaux.

3.5 Reconstruire des Groupes : Le Produit Semi-direct

Objectif. Maintenant que nous savons décomposer des groupes, nous nous posons le problème inverse : comment construire des groupes complexes à partir de briques plus simples ? Le produit direct est trop restrictif (il ne produit que des structures "commutatives"). Le produit semi-direct est l'outil de construction non-abélien par excellence.

Définition 3.5.1 (Produit semi-direct). Soient N et H deux groupes et $\phi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ un morphisme. Le produit semi-direct $N \rtimes_{\phi} H$ est le groupe construit sur l'ensemble $N \times H$ avec la loi :

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1 \phi(h_1)(n_2), h_1 h_2)$$

Remarque (Une construction "tordue"). Le morphisme ϕ "tord" la loi de composition. Il décrit la manière dont H agit sur N par automorphismes. Si ϕ est le morphisme trivial (tout est envoyé sur l'identité), on retrouve le produit direct.

Exemple (Le groupe diédral). Le groupe des isométries du polygone à n côtés, D_n , est le prototype du produit semi-direct. Il peut être construit comme $D_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est le groupe des rotations et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est engendré par une réflexion. L'action non triviale de la réflexion sur les rotations (en inversant leur sens) est ce qui rend le groupe non-abélien.

Chapitre 4

Théorie de Galois : La Symétrie Cachée des Nombres

4.1 Le Langage des Corps et des Extensions

Objectif. Construire le vocabulaire de base. L'idée révolutionnaire est de considérer les corps non pas comme des objets isolés, mais dans leurs relations les uns avec les autres. En voyant une extension de corps L/K comme un K -espace vectoriel, on importe la puissance de l'algèbre linéaire (dimension, bases) pour "mesurer" la complexité des extensions.

Définition 4.1.1 (Extension et son Degré). Une **extension de corps** est un couple de corps (K, L) tel que K est un sous-corps de L . Le **degré** de l'extension, noté $[L : K]$, est la dimension de L en tant que K -espace vectoriel.

Définition 4.1.2 (Élément Algébrique et Transcendant). Un élément $\alpha \in L$ est **algébrique** sur K s'il est racine d'un polynôme non nul de $K[X]$. Sinon, il est **transcendant**. Une extension est algébrique si tous ses éléments le sont.

Proposition 4.1.1 (Polynôme Minimal). Si α est algébrique sur K , il existe un unique polynôme unitaire et irréductible de $K[X]$, noté π_α , qui annule α . C'est le **polynôme minimal** de α sur K . De plus, $[K(\alpha) : K] = \deg(\pi_\alpha)$.

Théorème 4.1.1 (Tour de Multiplicativité des Degrés). Pour une tour d'extensions $K \subset L \subset M$, on a : $[M : K] = [M : L] \times [L : K]$.

Application (Impossibilité de constructions géométriques). Cette formule simple est déjà d'une grande puissance. Un nombre est constructible à la règle et au compas s'il appartient à une extension de \mathbb{Q} de degré 2^k . Comme $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$, qui n'est pas une puissance de 2, la duplication du cube est impossible.

4.2 Construire des Extensions : Le Monde des Racines

Objectif. Comprendre comment sont "fabriquées" les extensions. Le plus souvent, on part d'un corps de base et on lui "adjoit" des racines de polynômes pour créer un monde plus vaste. Il faut distinguer le fait d'ajouter une seule racine (corps de rupture) de celui de les ajouter toutes (corps de décomposition).

Définition 4.2.1 (Corps de Rupture vs. Corps de Décomposition). Soit P un polynôme irréductible sur K . Un **corps de rupture** de P est une extension L/K minimale contenant *au moins une* racine de P . (e.g., $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ pour $X^3 - 2$). Un **corps de décomposition** de P est une extension L/K minimale contenant *toutes* les racines de P . (e.g., $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$ pour $X^3 - 2$).

Théorème 4.2.1 (Théorème de l'Élément Primitif). Toute extension finie et séparable (voir section suivante) est monogène. C'est-à-dire que si L/K est une telle extension, il existe un élément $\alpha \in L$ (l'élément primitif) tel que $L = K(\alpha)$.

Remarque (Simplification conceptuelle). Ce théorème est très important car il nous dit que même les extensions les plus compliquées (construites en ajoutant de nombreux éléments) peuvent être vues comme une extension "simple", engendrée par un seul élément. Cela simplifie de nombreuses preuves.

4.3 Les "Bonnes" Extensions : Le Cadre de la Théorie de Galois

Objectif. Isoler les propriétés "idéales" pour une extension. Pour que la correspondance de Galois fonctionne, il faut que l'extension soit "juste assez grande" pour contenir toutes les racines de ses polynômes (normalité) et que ces racines soient bien "distinctes" (séparabilité). Une extension de Galois est une extension qui possède ces deux propriétés.

Définition 4.3.1 (Extension Normale). Une extension finie L/K est **normale** si elle est le corps de décomposition d'un polynôme de $K[X]$. De manière équivalente, tout polynôme irréductible de $K[X]$ qui a une racine dans L est complètement scindé dans L .

Définition 4.3.2 (Extension Séparable). Un polynôme irréductible est **séparable** si ses racines sont toutes distinctes. Une extension algébrique L/K est **séparable** si le polynôme minimal de tout élément de L est séparable.

Remarque (Une technicité cruciale en caractéristique p). En caractéristique nulle, tout polynôme irréductible est séparable. La notion de séparabilité peut donc sembler superflue. Elle devient essentielle en caractéristique $p > 0$, où des polynômes comme $X^p - a$ peuvent être irréductibles mais avoir des racines multiples.

Définition 4.3.3 (Extension de Galois et Groupe de Galois). Une extension finie L/K est une **extension de Galois** si elle est normale et séparable. Le **groupe de Galois** de l'extension, noté $\text{Gal}(L/K)$, est le groupe des K -automorphismes de L . Si l'extension est galoisienne, $|\text{Gal}(L/K)| = [L : K]$.

4.4 Le Théorème Fondamental : Le Dictionnaire Algèbre-Groupe

Objectif. Dévoiler le résultat central de la théorie : une "dualité" ou "dictionnaire" qui traduit parfaitement la structure des sous-extensions d'une extension de Galois en la structure des sous-groupes de son groupe de Galois. C'est l'un des plus beaux théorèmes des mathématiques.

Théorème 4.4.1 (Théorème Fondamental de

la Théorie de Galois). Soit L/K une extension de Galois finie. Il existe une bijection renversant l'inclusion entre l'ensemble des sous-groupes de $\text{Gal}(L/K)$ et l'ensemble des corps intermédiaires $K \subset F \subset L$. Un sous-groupe H correspond au corps des points fixes $L^H = \{x \in L \mid \forall \sigma \in H, \sigma(x) = x\}$. Une sous-extension F correspond au sous-groupe $\text{Gal}(L/F)$. De plus, une sous-extension F/K est elle-même galoisienne si et seulement si son groupe correspondant $\text{Gal}(L/F)$ est distingué dans $\text{Gal}(L/K)$. Dans ce cas, $\text{Gal}(F/K) \cong \text{Gal}(L/K)/\text{Gal}(L/F)$.

Exemple (La Géométrie de $X^4 - 2$). Soit $P(X) = X^4 - 2$ sur \mathbb{Q} . Le corps de décomposition est $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$. C'est une extension de degré 8. Le groupe de Galois $G = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ est isomorphe au groupe diédral D_4 , le groupe des isométries du carré. Le treillis des 10 sous-groupes de D_4 est en bijection inversée avec le treillis des 10 sous-corps de L . Par exemple :

- Le sous-groupe des rotations $\langle r \rangle \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ correspond au sous-corps $\mathbb{Q}(i)$.
- Le sous-groupe engendré par une réflexion $\langle s \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ correspond au sous-corps $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.
- Le centre du groupe $Z(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ correspond au sous-corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$.

4.5 Applications : La Puissance du Dictionnaire

Objectif. Utiliser le dictionnaire pour résoudre des problèmes classiques. La stratégie est toujours la même : traduire un problème (algébrique, géométrique) en un problème sur le groupe de Galois, le résoudre dans le monde (plus simple) des groupes finis, puis retraduire la solution.

Théorème 4.5.1 (Théorie de Galois des corps finis). L'extension $\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p$ est galoisienne. Son groupe de Galois est cyclique d'ordre n , engendré par l'automorphisme de Frobenius $\sigma : x \mapsto x^p$.

Corollaire 4.5.1.1. Par la correspondance de Galois, les sous-extensions de \mathbb{F}_{p^n} correspondent aux sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pour chaque diviseur d de n , il y a un unique sous-groupe d'ordre d , et donc un unique sous-corps de degré d sur \mathbb{F}_p : le corps \mathbb{F}_{p^d} .

Théorème 4.5.2 (Critère de Galois pour la résolubilité par radicaux). Un polynôme est réso-

luble par radicaux si et seulement si son groupe de Galois est un groupe résoluble (i.e. peut être décomposé en une suite de quotients abéliens).

Application (Impossibilité de la résolution de la quintique). Le groupe de Galois du polynôme "général" de degré n est \mathfrak{S}_n . Pour $n \geq 5$, le groupe \mathfrak{S}_n n'est pas résoluble car \mathcal{A}_n est simple et non-abélien. Il n'existe donc pas de formule générale par radicaux pour les équations de degré 5 ou plus.

Remarque (Le Problème Inverse de Galois). Nous savons associer un groupe de Galois à une extension. Le problème inverse est-il possible? "Tout groupe fini peut-il être réalisé comme le groupe de Galois d'une extension de \mathbb{Q} ?" C'est une question ouverte et l'un des problèmes les plus profonds de l'arithmétique moderne.

Chapitre 5

Théorie des Représentations : Rendre les Groupes Visibles

5.1 Le Langage des Représentations

Objectif. La théorie des groupes est très abstraite. L'idée fondamentale de la théorie des représentations est de rendre les groupes **concrets** en les faisant agir **linéairement** sur des espaces vectoriels. On remplace les permutations abstraites par des objets que l'on maîtrise parfaitement : les matrices. Cela permet d'importer toute la puissance de l'algèbre linéaire pour étudier les groupes.

Définition 5.1.1 (Représentation). Soit G un groupe fini et V un \mathbb{C} -espace vectoriel. Une **représentation** de G sur V est un morphisme de groupes $\rho : G \rightarrow GL(V)$. La dimension de V est le **degré** (ou la dimension) de la représentation.

Définition 5.1.2 (Sous-représentation et Irréductibilité). Une **sous-représentation** est un sous-espace vectoriel $W \subset V$ qui est stable par l'action de tous les $\rho(g)$. Une représentation est **irréductible** (une "irrep") si ses seules sous-représentations sont $\{0\}$ et V .

Remarque (Les atomes des représentations). Les représentations irréductibles sont les briques de base, les "atomes" de la théorie. Tout comme les groupes simples en théorie des groupes, ce sont les objets fondamentaux que l'on cherche à classifier.

Théorème 5.1.1 (Théorème de Maschke). Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation d'un groupe fini G sur un \mathbb{C} -ev V . Si W est une sous-représentation de V , alors il existe une sous-représentation supplémentaire W' telle que $V = W \oplus W'$.

Corollaire 5.1.1.1 (Décomposabilité totale). Toute représentation d'un groupe fini (sur un corps de caractéristique ne divisant pas $|G|$) est

une somme directe de représentations irréductibles.

5.2 Le Lemme de Schur et ses Conséquences

Objectif. Présenter le lemme de Schur, un résultat d'une simplicité et d'une puissance déconcertantes. Il impose des contraintes extrêmement fortes sur les applications qui "respectent" les représentations irréductibles, et il est la clé de voûte de toute la théorie des caractères.

Lemme 5.2.1 (Lemme de Schur). Soient (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) deux représentations irréductibles d'un groupe G . Soit $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ une application linéaire qui entrelace les représentations (i.e. $\phi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \phi$ pour tout g).

1. Si V_1 et V_2 ne sont pas isomorphes, alors $\phi = 0$.
2. Si $V_1 = V_2$ et que le corps de base est \mathbb{C} , alors ϕ est une homothétie (i.e. $\phi = \lambda \text{Id}$ pour un $\lambda \in \mathbb{C}$).

Application (Représentations irréductibles des groupes abéliens). Soit G un groupe abélien. Pour tout $g \in G$, l'application $\rho(g)$ commute avec toutes les autres applications $\rho(h)$. D'après le lemme de Schur, si ρ est irréductible, chaque $\rho(g)$ doit être une homothétie. Une représentation dont toutes les images sont des homothéties ne peut être irréductible que si sa dimension est 1. **Conclusion :** Toutes les représentations irréductibles d'un groupe abélien fini sur \mathbb{C} sont de dimension 1.

5.3 Les Caractères : L'ADN des Représentations

Objectif. Introduire l'outil de calcul principal de la théorie : le caractère. L'idée est de remplacer une représentation (un morphisme à valeurs dans un groupe de matrices potentiellement très grandes) par une simple fonction (de G dans \mathbb{C}), la trace. Miraculeusement, cette information "compressée" suffit à caractériser la représentation à isomorphisme près.

Définition 5.3.1 (Caractère). Le **caractère** d'une représentation $\rho : G \rightarrow GL(V)$ est la fonction $\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\chi_\rho(g) = \text{Tr}(\rho(g))$.

Proposition 5.3.1 (Propriétés des caractères).

- $\chi_\rho(e) = \dim(V)$.
- χ_ρ est une **fonction centrale** (constante sur les classes de conjugaison).
- Deux représentations isomorphes ont le même caractère. (La réciproque est vraie!)
- $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$ et $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \cdot \chi_{\rho_2}$.

Théorème 5.3.1 (Relations d'Orthogonalité des Caractères). Soit $\mathcal{C}(G)$ l'espace des fonctions centrales sur G , muni du produit scalaire hermitien $\langle f, h \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \overline{h(g)}$. Alors la famille des caractères des représentations irréductibles de G forme une **base orthonormale** de $\mathcal{C}(G)$.

Remarque (L'Analogie avec les Séries de Fourier). Ce théorème est la pierre angulaire de la théorie. Il nous dit que pour comprendre une représentation quelconque, il suffit de "projeter" son caractère sur la base des caractères irréductibles. Le coefficient obtenu (la multiplicité de l'irrep) est simplement le produit scalaire $\langle \chi_\rho, \chi_{\text{irrep}} \rangle$. C'est une véritable "analyse de Fourier" sur le groupe.

5.4 La Table des Caractères : Carte d'Identité du Groupe

Objectif. Organiser toute l'information sur les représentations irréductibles d'un groupe dans un tableau unique, la table des caractères. Ce tableau est une "carte d'identité" très riche qui encode une grande partie de la structure du groupe.

Proposition 5.4.1 (Propriétés structurelles). 1.

Le nombre de représentations irréduc-

tibles est égal au nombre de classes de conjugaison du groupe.

2. La somme des carrés des dimensions des représentations irréductibles est égale à l'ordre du groupe : $\sum_{i=1}^k (\dim V_i)^2 = |G|$.

Exemple (Table des caractères de \mathfrak{S}_3). Le groupe \mathfrak{S}_3 a 3 classes de conjugaison. Il a donc 3 irreps. Comme $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = |G|$, leurs dimensions sont 1, 1, 2. La table est :

	Id	(12)	(123)
χ_1 (triviale)	1	1	1
χ_2 (signature)	1	-1	1
χ_3 (standard)	2	0	-1

On peut vérifier l'orthogonalité des lignes sur cette table.

Application (Théorème $p^a q^b$ de Burnside). Un des triomphes de la théorie des caractères.

Théorème : Tout groupe d'ordre $p^a q^b$, où p et q sont des nombres premiers, est résoluble. La preuve originale, bien que complexe, repose entièrement sur des arguments d'arithmétique sur les valeurs des caractères et sur la structure de l'algèbre du groupe. Il n'existe pas de preuve connue qui n'utilise pas, d'une manière ou d'une autre, la théorie des représentations. Cela montre la puissance de la méthode : elle permet de prouver des résultats de théorie des groupes pure qui étaient inaccessibles autrement.

Quatrième partie

Géométrie

Chapitre 6

Algèbre Bilinéaire : La Géométrie Cachée des Espaces Vectoriels

6.1 Formes Bilinéaires et Dualité

Objectif. Enrichir la structure d'un espace vectoriel en introduisant une nouvelle opération : une manière de "multiplier" deux vecteurs pour obtenir un scalaire. Cette opération, la forme bilinéaire, est le concept le plus fondamental de la géométrie algébrique. On explore le lien intime entre cette nouvelle structure et la dualité.

Définition 6.1.1 (Forme bilinéaire). Soit E un K -espace vectoriel. Une application $\phi : E \times E \rightarrow K$ est une **forme bilinéaire** si elle est linéaire par rapport à chaque variable. Elle est **symétrique** si $\phi(x, y) = \phi(y, x)$ et **antisymétrique** si $\phi(x, y) = -\phi(y, x)$.

Définition 6.1.2 (Matrice d'une forme bilinéaire). Dans une base $\mathcal{B} = (e_i)$ de E , la matrice de ϕ est $M = (\phi(e_i, e_j))_{i,j}$. La formule de changement de base est $M' = P^T M P$, où P est la matrice de passage. On dit que les matrices M et M' sont **congruentes**.

Définition 6.1.3 (Forme non-dégénérée et Rang). Le **noyau** d'une forme bilinéaire ϕ est $N = \{x \in E \mid \forall y \in E, \phi(x, y) = 0\}$. ϕ est **non-dégénérée** si son noyau est réduit à $\{0\}$. Le **rang** de ϕ est le rang de sa matrice dans n'importe quelle base.

Proposition 6.1.1 (Lien avec la dualité). Une forme bilinéaire ϕ induit deux morphismes canoniques de E dans son dual E^* , donnés par $\phi_g : x \mapsto \phi(x, \cdot)$ et $\phi_d : y \mapsto \phi(\cdot, y)$. ϕ est non-dégénérée si et seulement si ces morphismes sont des isomorphismes.

Remarque (La Géométrie vient de l'Identification à l'Espace Dual). C'est une idée très profonde. Une forme bilinéaire non-dégénérée

permet d'identifier l'espace E (points) avec son dual E^* (formes linéaires / "hyperplans"). C'est cette identification qui est à l'origine de toute la géométrie de l'espace.

6.2 Formes Quadratiques : L'Étude des "Longueurs au Carré"

Objectif. Se concentrer sur le cas des formes bilinéaires symétriques, qui sont plus riches. Toute forme bilinéaire symétrique ϕ définit une "fonction longueur au carré", la forme quadratique $q(x) = \phi(x, x)$, qui capture l'essentiel de la géométrie. On cherche à simplifier ces formes quadratiques en trouvant une "bonne" base.

Définition 6.2.1 (Forme quadratique). Une application $q : E \rightarrow K$ est une **forme quadratique** s'il existe une forme bilinéaire ϕ telle que $q(x) = \phi(x, x)$. Si la caractéristique du corps est différente de 2, il existe une unique forme bilinéaire symétrique (la forme polaire) associée à q , donnée par la formule de polarisation :

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$$

Définition 6.2.2 (Orthogonalité). Deux vecteurs x, y sont **orthogonaux** pour ϕ si $\phi(x, y) = 0$. L'orthogonal d'une partie $A \subset E$ est $A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \phi(x, a) = 0\}$. Une base est orthogonale si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Théorème 6.2.1 (Réduction de Gauss). Toute forme quadratique sur un espace de dimension finie (en car. $\neq 2$) est "diagonalisable". C'est-à-dire qu'il existe une base orthogonale (e_i) dans laquelle la forme quadratique s'écrit comme une

somme de carrés :

$$q(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \quad (\text{avec } \lambda_i = q(e_i))$$

L'algorithme de décomposition de Gauss est une procédure effective pour trouver une telle base.

6.3 La Loi d'Inertie de Sylvester : Classifier les Géométries

Objectif. Aller au-delà de la "diagonalisation" et classifier les formes quadratiques sur les corps \mathbb{R} et \mathbb{C} . Le résultat central est la loi d'inertie de Sylvester, qui affirme qu'une forme quadratique réelle est entièrement caractérisée par un couple d'entiers : sa signature.

Théorème 6.3.1 (Classification sur \mathbb{C}). Deux formes quadratiques sur un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes (i.e. peuvent être représentées par la même matrice dans des bases bien choisies) si et seulement si elles ont le même rang. Toute forme quadratique de rang r peut s'écrire $x_1^2 + \dots + x_r^2$ dans une certaine base.

Théorème 6.3.2 (Loi d'Inertie de Sylvester). Soit q une forme quadratique sur un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Il existe une base orthogonale dans laquelle $q(x)$ s'écrit :

$$q(x) = \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} x_i^2$$

Le couple d'entiers (s, t) ne dépend pas de la base choisie. C'est la **signature** de la forme quadratique. Le rang est $r = s + t$.

Remarque (Une Classification des Géométries). La signature est l'invariant fondamental qui classifie toutes les géométries "bilinéaires" sur un espace vectoriel réel.

- Signature $(n, 0)$: Géométrie **Euclidienne**. La "longueur au carré" est toujours positive.
- Signature $(n - 1, 1)$: Géométrie **Lorentzienne** ou de **Minkowski**. C'est le cadre de la relativité restreinte, où le temps a un signe opposé aux dimensions d'espace.
- Signature (p, q) quelconque : Géométrie **pseudo-riemannienne**.

Définition 6.3.1 (Forme définie et Cône isotrope). Une forme quadratique q est :

- **Définie positive** si $q(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. (Signature $(n, 0)$)
- **Définie négative** si $q(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$. (Signature $(0, n)$)

Le **cône isotrope** est l'ensemble des vecteurs non nuls x tels que $q(x) = 0$. Pour une forme définie, il est vide. Pour la métrique de Minkowski, c'est le "cône de lumière".

Chapitre 7

Géométrie Euclidienne : La Structure de notre Intuition

7.1 Le Produit Scalaire : La Mesure des Longueurs et des Angles

Objectif. Se spécialiser au cas le plus important et le plus intuitif de l'algèbre bilinéaire : les espaces euclidiens, où la forme bilinéaire est symétrique et définie positive. Cette positivité est la clé qui permet de définir des notions familières de longueur, distance et angle, jetant un pont entre l'algèbre abstraite et la géométrie de notre perception.

Définition 7.1.1 (Produit Scalaire et Espace Euclidien). Un **produit scalaire** sur un \mathbb{R} -espace vectoriel E est une forme bilinéaire symétrique définie positive, notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est un **espace euclidien**.

Définition 7.1.2 (Norme et Distance Euclidiennes). La norme euclidienne associée est $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. La distance est $d(x, y) = \|x - y\|$.

Théorème 7.1.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Pour tout $x, y \in E$, on a $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, avec égalité si et seulement si les vecteurs sont colinéaires.

Remarque (La Notion d'Angle). Cette inégalité est fondamentale car elle garantit que la quantité $\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$ est toujours dans $[-1, 1]$, ce qui permet de *définir* l'angle θ entre deux vecteurs non nuls par $\cos(\theta) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$.

7.2 Orthogonalité et Bases Orthonormées

Objectif. Exploiter la notion d'orthogonalité pour construire les "meilleures" bases possibles

pour un espace euclidien : les bases orthonormées. Dans une telle base, tous les calculs (projections, coordonnées, distances) deviennent extraordinairement simples.

Définition 7.2.1 (Base Orthonormée). Une base (e_i) est **orthonormée** si $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker).

Proposition 7.2.1 (Calculs dans une base orthonormée). Si $\mathcal{B} = (e_i)$ est une base orthonormée, les coordonnées d'un vecteur x sont simplement $x_i = \langle x, e_i \rangle$. Le produit scalaire et la norme se calculent comme à l'accoutumée :

$$\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_i x_i^2$$

Remarque (La Simplification Ultime). Une base orthonormée est le "système de coordonnées cartésiennes" idéal. Elle transforme la géométrie euclidienne abstraite en l'algèbre vectorielle simple de \mathbb{R}^n avec son produit scalaire usuel.

Théorème 7.2.1 (Procédé d'Orthonormalisation de Gram-Schmidt). A partir de n'importe quelle base d'un espace euclidien, on peut construire une base orthonormée.

Corollaire 7.2.1.1. Tout espace euclidien admet une base orthonormée.

Théorème 7.2.2 (Projection Orthogonale). Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E . Alors $E = F \oplus F^\perp$. Tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique en $x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$, où $p_F(x)$ est la projection orthogonale de x sur F . De plus, $p_F(x)$ est le point de F le plus proche de x .

7.3 Les Transformations Euclidiennes : Isométries et Similitudes

Objectif. Étudier les transformations qui préservent la structure euclidienne. Ce sont les "symétries" de l'espace euclidien. On se concentrera sur les isométries (qui préservent les distances) et on montrera qu'elles forment un groupe fondamental, le groupe orthogonal.

Définition 7.3.1 (Isométrie (Endomorphisme Orthogonal)). Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une **isométrie** (ou est orthogonal) s'il préserve le produit scalaire : $\forall x, y, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. Cela équivaut à préserver la norme.

Définition 7.3.2 (Groupe Orthogonal $O(E)$). L'ensemble des isométries de E forme un groupe pour la composition, appelé **groupe orthogonal** et noté $O(E)$. La matrice d'une isométrie dans une base orthonormée est une matrice orthogonale ($M^T M = I_n$).

Théorème 7.3.1 (Classification des isométries en dimension 2). Toute isométrie du plan euclidien est soit une **rotation** (si $\det = 1$), soit une **réflexion** (si $\det = -1$).

Théorème 7.3.2 (Théorème de Rotation d'Euler). Toute isométrie directe (de déterminant 1) de l'espace euclidien de dimension 3 est une **rotation** autour d'un axe.

Dans une base orthonormée, la matrice de u^* est la transposée de la matrice de u .

Définition 7.4.1 (Endomorphisme auto-adjoint (ou symétrique)). Un endomorphisme u est **auto-adjoint** (ou symétrique) si $u = u^*$.

Théorème 7.4.1 (Théorème Spectral). Un endomorphisme d'un espace euclidien est auto-adjoint si et seulement s'il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u .

Remarque (Le Triomphe de la Géométrie). C'est la version "euclidienne" de la réduction. Alors que la simple diagonalisation ne garantit rien sur la géométrie de la base de vecteurs propres, le théorème spectral garantit que pour les endomorphismes symétriques, on peut trouver une base qui est "parfaite" à la fois pour l'algèbre (elle diagonalise) et pour la géométrie (elle est orthonormée).

Application (Décomposition en valeurs singulières (SVD)). Même si un endomorphisme u n'est pas symétrique, l'endomorphisme u^*u l'est. En appliquant le théorème spectral à u^*u , on peut démontrer la décomposition en valeurs singulières : tout endomorphisme u peut s'écrire $u = O_1 D O_2$, où O_1, O_2 sont des isométries et D est "diagonale". C'est un outil fondamental en analyse de données (ACP), en traitement d'images, etc.

7.4 Endomorphismes d'un Espace Euclidien et Théorème Spectral

Objectif. Utiliser la structure euclidienne pour étudier les endomorphismes. L'existence d'un produit scalaire permet de définir l'adjoint d'un endomorphisme, ce qui mène à la classe très importante des endomorphismes auto-adjoints (ou symétriques). Le théorème spectral est le résultat culminant, montrant que ces endomorphismes sont précisément ceux que l'on peut diagonaliser dans une "bonne" base géométrique (orthonormée).

Proposition 7.4.1 (Adjoint d'un endomorphisme). Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme u^* , appelé l'**adjoint** de u , tel que :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

Chapitre 8

Géométrie Différentielle : Le Calcul Infinitésimal sur les Espaces Courbes

8.1 Étude Locale des Courbes

Objectif. Appliquer les outils du calcul différentiel pour comprendre la géométrie d'une courbe au voisinage d'un point. L'idée est de trouver le "meilleur" repère local possible (le repère de Frénet) pour décrire comment la courbe se tord et se courbe dans l'espace.

Définition 8.1.1 (Arc Paramétré). Un arc paramétré de classe \mathcal{C}^k est une application $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^k . Un point est régulier si $\gamma'(t) \neq 0$.

Définition 8.1.2 (Abscisse Curviligne). L'abscisse curviligne $s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du$ mesure la longueur de la courbe depuis un point de départ. Un paramétrage par l'abscisse curviligne est un paramétrage "naturel" où la vitesse est toujours de norme 1.

Théorème 8.1.1 (Repère de Frénet et Courbures). Pour une courbe de \mathbb{R}^3 birégulière et paramétrée par l'abscisse curviligne $\gamma(s)$, il existe un unique repère orthonormé direct mobile (T, N, B) (Tangente, Normale, Binormale) le long de la courbe tel que :

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

- $\kappa(s)$ est la **courbure**. Elle mesure la façon dont la courbe "tourne" dans son plan osculateur.
- $\tau(s)$ est la **torsion**. Elle mesure la façon dont la courbe "sort" de son plan osculateur, son "gauchissement".

Remarque (La Géométrie Locale Complètement Décrite). Ce résultat est fondamental : les deux fonctions $\kappa(s)$ et $\tau(s)$ déterminent entièrement la géométrie locale de la courbe. Deux

courbes ayant les mêmes fonctions courbure et torsion sont identiques à une isométrie près.

Exemple. — Un cercle de rayon R a une courbure constante $1/R$ et une torsion nulle.

- Une hélice circulaire a une courbure et une torsion constantes.

8.2 Étude Locale des Surfaces

Objectif. Généraliser l'étude locale des courbes aux surfaces. On cherche à définir des quantités (les formes fondamentales) qui encodent toute la géométrie locale d'une surface (longueurs, angles, et surtout, courbure).

Définition 8.2.1 (Nappe Paramétrée et Plan Tangent). Une nappe paramétrée est une application $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ (où $U \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert). Un point est régulier si les vecteurs $\frac{\partial \sigma}{\partial u}$ et $\frac{\partial \sigma}{\partial v}$ sont linéairement indépendants. En un point régulier, ils engendrent le **plan tangent** $T_p S$.

Définition 8.2.2 (Première Forme Fondamentale). La première forme fondamentale, notée I_p , est la forme quadratique sur le plan tangent $T_p S$ qui mesure la "longueur au carré" des vecteurs tangents. C'est la restriction du produit scalaire de \mathbb{R}^3 au plan tangent. Sa matrice dans la base (σ_u, σ_v) est :

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle & \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle \\ \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle & \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle \end{pmatrix}$$

Remarque (La Métrique Intrinsèque). La première forme fondamentale est **intrinsèque** : elle peut être calculée par un "habitant" de la surface sans avoir à connaître l'espace ambiant \mathbb{R}^3 . Elle lui permet de mesurer des longueurs de courbes tracées sur la surface et des angles entre vecteurs tangents.

Définition 8.2.3 (Seconde Forme Fondamentale). La seconde forme fondamentale, notée II_p , est une forme quadratique sur $T_p S$ qui mesure comment la surface "s'écarte" de son plan tangent. Elle dépend du choix d'un vecteur normal unitaire n .

$$II_p(v) = -\langle dn_p(v), v \rangle$$

Sa matrice est $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ avec $L = \langle \sigma_{uu}, n \rangle$, etc.

Définition 8.2.4 (Application de Weingarten et Courbures). L'endomorphisme auto-adjoint (symétrique) $W_p = -dn_p$ du plan tangent est l'**endomorphisme de Weingarten** (ou de forme).

- Ses valeurs propres k_1, k_2 sont les **courbures principales**.
- La **courbure de Gauss** est $K = \det(W_p) = k_1 k_2$.
- La **courbure moyenne** est $H = \frac{1}{2} \text{Tr}(W_p) = \frac{k_1 + k_2}{2}$.

Théorème 8.2.1 (Theorema Egregium de Gauss). La courbure de Gauss K ne dépend **que** de la première forme fondamentale et de ses dérivées.

Remarque (Le "Théorème Remarquable"). C'est l'un des résultats les plus profonds de la géométrie. Il affirme qu'une quantité (la courbure de Gauss) qui semble dépendre de la manière dont la surface est plongée dans \mathbb{R}^3 (via la seconde forme fondamentale) est en fait une propriété **intrinsèque** de la surface.

Application (Cartographie). Un habitant d'une sphère (courbure constante positive) peut, par des mesures de triangles sur sa surface (la somme des angles sera $> 180^\circ$), savoir qu'il vit sur une surface courbe. Le Theorema Egregium implique qu'il est impossible de dessiner une carte plane d'une portion de la Terre sans déformer les distances. Toute projection cartographique est une distorsion.

Chapitre 9

Surfaces et Variétés : De la Géométrie Locale au Global

9.1 La Notion de Variété : L'Abstraction d'une "Surface"

Objectif. Généraliser la notion de surface. Une variété est un espace topologique qui "ressemble localement" à \mathbb{R}^n , mais dont la structure globale peut être très compliquée (tore, sphère...). C'est le cadre naturel pour faire de la géométrie et de l'analyse sur des espaces courbes, sans forcément les voir comme des objets plongés dans un \mathbb{R}^N plus grand.

Définition 9.1.1 (Sous-variété de \mathbb{R}^N). Une partie $M \subset \mathbb{R}^N$ est une **sous-variété** de dimension n si, pour tout point $p \in M$, il existe un voisinage U de p dans \mathbb{R}^N et une submersion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{N-n}$ telle que $M \cap U = f^{-1}(0)$. (Autres définitions équivalentes : redressement par un difféomorphisme, graphe local).

Exemple. La sphère $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ est une sous-variété de dimension 2 de \mathbb{R}^3 . Le groupe orthogonal $O(n)$ est une sous-variété de l'espace des matrices $M_n(\mathbb{R})$.

Définition 9.1.2 (Variété Différentielle Abstraite). Une **variété différentielle** de dimension n est un espace topologique séparé à base dénombrable M muni d'un **atlas**, c'est-à-dire une collection de cartes (U_i, ϕ_i) où les U_i recouvrent M , $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme sur un ouvert, et les applications de changement de cartes $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ sont des difféomorphismes.

Remarque (La Terre est une variété). La Terre est une sphère. On ne peut pas la représenter avec une seule carte plane sans singularités (aux pôles). Un atlas est une collection de cartes qui se chevauchent et décrivent la totalité du globe. Les changements de cartes

assurent que les notions de "dérivabilité" sont compatibles entre les différentes cartes.

9.2 L'Espace Tangent et les Géodésiques

Objectif. Définir l'analogue d'un "vecteur vitesse" ou d'un "plan tangent" pour une variété abstraite. L'espace tangent en un point est l'espace vectoriel qui constitue la meilleure approximation linéaire de la variété au voisinage de ce point.

Définition 9.2.1 (Espace Tangent $T_p M$). L'espace tangent en un point $p \in M$ peut être défini de plusieurs manières équivalentes : par les classes d'équivalence de courbes paramétrées passant par p , ou de manière plus abstraite comme l'espace des dérivations au point p . C'est un espace vectoriel de même dimension que la variété.

Définition 9.2.2 (Géodésique). Une **géodésique** est une courbe tracée sur une variété qui généralise la notion de "ligne droite". C'est une courbe qui minimise localement la distance entre les points. De manière équivalente, c'est une courbe dont le vecteur vitesse reste parallèle à lui-même (accélération nulle dans la variété).

Exemple. — Les géodésiques du plan euclidien sont les droites.

— Les géodésiques de la sphère sont les grands cercles.

— Les géodésiques d'un cylindre sont les hélices.

9.3 Le Théorème de Gauss-Bonnet : Le Pont entre Géométrie et Topologie

Objectif. Présenter l'un des plus beaux et des plus importants théorèmes de la géométrie, qui relie une quantité purement **géométrique** (la courbure, qui est locale) à une quantité purement **topologique** (la caractéristique d'Euler, qui est globale et invariante par déformation).

Définition 9.3.1 (Caractéristique d'Euler-Poincaré). Pour une surface polyédrique, la caractéristique d'Euler est $\chi = S - A + F$ (Sommets - Arêtes + Faces). Pour une surface différentielle compacte, elle peut être définie par une triangulation. C'est un invariant topologique.

- Pour une sphère, $\chi = 2$.
- Pour un tore, $\chi = 0$.
- Pour un tore à g trous, $\chi = 2 - 2g$.

Remarque (Un Invariant Topologique). La caractéristique d'Euler ne change pas si on déforme la surface continûment. Un cube et une sphère ont tous deux $\chi = 2$. C'est une mesure du nombre de "trous" de la surface.

Théorème 9.3.1 (Formule de Gauss-Bonnet pour un triangle géodésique). Soit T un triangle dont les côtés sont des géodésiques sur une surface S , et dont les angles aux sommets sont $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Alors :

$$\iint_T K dA + (\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + (\pi - \alpha_3) = 2\pi$$

Où K est la courbure de Gauss. Ceci peut se réécrire : $\sum \alpha_i - \pi = \iint_T K dA$. La somme des angles d'un triangle n'est plus π ! L'excès angulaire est exactement l'intégrale de la courbure.

Théorème 9.3.2 (Théorème de Gauss-Bonnet Global). Soit S une surface compacte, orientable, sans bord. Alors :

$$\iint_S K dA = 2\pi\chi(S)$$

Remarque (La Connexion Ultime). Ce théorème est un résultat d'une profondeur immense.

- Le membre de gauche est de nature **géométrique/analytique**. Il dépend de la métrique de la surface et se calcule par une intégrale.
- Le membre de droite est de nature **topologique/combinatoire**. C'est un entier qui ne dépend que de la forme globale de la surface.

Le théorème affirme que peu importe comment on "cabosse" ou déforme une sphère, si on intègre sa courbure de Gauss sur toute sa surface, on trouvera *toujours* 4π (car $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$). Pour un tore, on trouvera toujours 0. C'est le point de départ de vastes généralisations au XXe siècle (théorie de l'indice, etc.).

Cinquième partie

Algèbre

Chapitre 10

Algèbre linéaire : Espaces Vectoriels - Le Langage Universel de la Linéarité

10.1 Axiomes et Concepts Fondamentaux

Objectif. Introduire la structure d'espace vectoriel non pas comme une simple liste d'axiomes, mais comme le cadre minimaliste et universel pour parler de **linéarité**. C'est l'art de remplacer des problèmes complexes (géométriques, analytiques) par leur "meilleure approximation linéaire", un monde où tout est régi par des additions et des multiplications par des scalaires.

Définition 10.1.1 (Espace Vectoriel). Un K -espace vectoriel est un groupe abélien $(E, +)$ muni d'une loi externe $K \times E \rightarrow E$ (où K est un corps) vérifiant des axiomes de compatibilité. Ses éléments sont des **vecteurs**, ceux de K des **scalaires**.

Exemple (L'Ubiquité de la Structure). —

Géométrique : $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ sont les prototypes.

— **Algébrique** : Les polynômes $K[X]$, les matrices $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

— **Analytique** : L'espace des fonctions continues $\mathcal{C}([a, b])$, l'espace des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des solutions d'une EDO linéaire homogène.

Définition 10.1.2 (Sous-espace vectoriel). Une partie non vide $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) si elle est stable par combinaison linéaire. C'est un espace vectoriel à part entière.

10.2 Le Concept Central : la Dimension

Objectif. Isoler l'invariant le plus fondamental d'un espace vectoriel : sa **dimension**. C'est un "miracle" de l'algèbre linéaire que cette quantité soit bien définie. La dimension est le nombre de "degrés de liberté" de l'espace, et elle le caractérise entièrement à isomorphisme près.

Définition 10.2.1 (Combinaison Linéaire, Familles Libres et

Une famille $(v_i)_{i \in I}$ est **génératrice** si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des v_i .

— Une famille $(v_i)_{i \in I}$ est **libre** si la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison triviale.

— Une **base** est une famille à la fois libre et génératrice.

Théorème 10.2.1 (Théorème de la base incomplète). Toute famille libre peut être complétée en une base par des vecteurs d'une famille génératrice.

Corollaire 10.2.1.1 (Existence d'une base). Tout espace vectoriel admet une base.

Remarque (Le Rôle de l'Axiome du Choix). En dimension infinie, ce résultat est non-trivial et repose sur l'Axiome du Choix (via le lemme de Zorn). Pour les espaces que l'on rencontre à l'agrégation, on peut souvent construire des bases explicitement.

Théorème 10.2.2 (Le Théorème de la Dimension). Toutes les bases d'un même espace vectoriel ont le même cardinal. Ce cardinal est appelé la **dimension** de l'espace.

Proposition 10.2.1 (Caractérisation des isomorphismes). Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement

s'ils ont la même dimension. Un isomorphisme est simplement un "changement de nom" des vecteurs de base.

10.3 Les Applications Linéaires : Morphismes et Invariants

Objectif. Étudier les applications qui préservent la structure d'espace vectoriel. Le théorème du rang est le résultat central, une sorte de "loi de conservation de la dimension" qui relie la dimension de ce qui est "écrasé" (le noyau) à la dimension de ce qui est "atteint" (l'image).

Définition 10.3.1 (Application linéaire, Noyau, Image, Rang). Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Le **noyau** $\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$ est un s.e.v. de E . L'**image** $\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\}$ est un s.e.v. de F . Le **rang** de f est $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.

Théorème 10.3.1 (Théorème du Rang). Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie. Alors :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$$

Application (Systèmes linéaires). Pour un système linéaire $Ax = b$ (avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$), le théorème du rang appliqué à l'application linéaire $X \mapsto AX$ nous dit que l'ensemble des solutions de l'équation homogène $Ax = 0$ est un s.e.v. de dimension $p - \text{rg}(A)$. L'ensemble des seconds membres b pour lesquels il existe une solution est un s.e.v. de dimension $\text{rg}(A)$.

10.4 Construire et Déconstruire les Espaces

Objectif. Introduire les deux opérations fondamentales pour manipuler les espaces : la somme directe (pour "coller" des espaces) et le passage au quotient (pour "simplifier" un espace).

Définition 10.4.1 (Somme Directe). Deux s.e.v. F, G sont en somme directe si $F \cap G = \{0\}$. Leur somme $F + G$ est alors notée $F \oplus G$. Tout vecteur de $F \oplus G$ se décompose de manière unique en une somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .

Définition 10.4.2 (Espace Vectoriel Quotient). Soit F un s.e.v. de E . L'espace quotient E/F est l'ensemble des classes d'équivalence

pour la relation $x \sim y \iff x - y \in F$. C'est un espace vectoriel dont les "vecteurs" sont des sous-espaces affines de E , parallèles à F .

Proposition 10.4.1 (Dimension du quotient). Si E est de dimension finie, $\dim(E/F) = \dim(E) - \dim(F) = \text{codim}(F)$.

Remarque (La Philosophie du Quotient). Passer au quotient, c'est décider de "ne plus voir" les éléments de F . On regarde E "à travers des lunettes qui rendent F invisible". C'est un outil d'une puissance immense pour simplifier des problèmes en éliminant les degrés de liberté non pertinents. Les théorèmes d'isomorphisme nous disent comment les morphismes se comportent à travers ce processus de simplification.

Chapitre 11

Algèbre linéaire : La Dualité - L'Espace Vu par son Miroir

11.1 Le Dual : Un Changement de Perspective

Objectif. Introduire le concept de dualité, qui est un des changements de perspective les plus féconds en mathématiques. Au lieu d'étudier les "points" d'un espace (les vecteurs), on étudie les "fonctions" qui agissent sur cet espace (les formes linéaires). Cet espace de fonctions, le dual, se révèle être un "miroir" parfait de l'espace original, encodant toute sa structure.

Définition 11.1.1 (Forme Linéaire et Espace Dual). Une **forme linéaire** sur un K -espace vectoriel E est une application linéaire $\varphi : E \rightarrow K$. L'ensemble des formes linéaires sur E , noté $\mathcal{L}(E, K)$, est un K -espace vectoriel appelé **l'espace dual** de E , et noté E^* .

Définition 11.1.2 (Base Duale). Soit E un espace de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. La **base duale** de \mathcal{B} est l'unique base $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ de E^* vérifiant $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker).

Corollaire 11.1.0.1. Si E est de dimension finie, alors $\dim(E^*) = \dim(E)$. Les deux espaces sont donc isomorphes.

Remarque (Un Isomorphisme non-canonique). Cet isomorphisme entre E et E^* est **non-canonique** : il dépend crucialement du choix d'une base de départ. Il n'y a pas de manière "naturelle" d'associer un vecteur à une forme linéaire. Cette distinction est fondamentale et sera résolue par l'introduction du bidual.

11.2 Le Bidual et la Réflexivité

Objectif. Découvrir la relation "naturelle" qui existe entre un espace et son dual, non pas di-

rectement, mais via le dual du dual (le bidual). En dimension finie, cette relation est un isomorphisme canonique, ce qui nous permet d'identifier E et E^{**} et de considérer le dual comme un véritable miroir.

Définition 11.2.1 (Bidual et Injection Canonique). Le **bidual** de E est $E^{**} = (E^*)^*$. L'**injection canonique** est l'application $J : E \rightarrow E^{**}$ définie par $J(x)(\varphi) = \varphi(x)$ pour $x \in E, \varphi \in E^*$.

Théorème 11.2.1 (Isomorphisme Canonique en Dimension Finie). Si E est de dimension finie, l'injection canonique $J : E \rightarrow E^{**}$ est un isomorphisme.

Remarque (Le Triomphe de la Canonicité). Ce théorème est très puissant. Il nous dit qu'il existe une manière "donnée par Dieu" d'identifier les vecteurs de E avec les formes linéaires sur E^* , sans faire aucun choix arbitraire de base. C'est pourquoi on écrit souvent, par abus de langage, $E = E^{**}$ en dimension finie. Un espace qui s'identifie à son bidual est dit **réflexif**.

11.3 Orthogonalité et Structure des Sous-Espaces

Objectif. Utiliser la dualité pour décrire les sous-espaces vectoriels. L'orthogonalité (au sens de la dualité) fournit une description "extrinsèque" d'un sous-espace (par les équations qui l'annulent), qui est le miroir parfait de sa description "intrinsèque" (par ses vecteurs générateurs).

Définition 11.3.1 (Orthogonal d'une partie). Soit $A \subset E$. L'orthogonal de A (ou l'annulateur de A) est le sous-espace de E^* défini par :

$$A^\circ = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$$

De même, pour $B \subset E^*$, on définit $B^\perp \subset E$.

Théorème 11.3.1 (Propriétés de l'Orthogonalité en Dimension Finie). Soit F un sous-espace vectoriel de E .

1. $\dim(F) + \dim(F^\circ) = \dim(E)$.
2. Via l'isomorphisme canonique, on a $(F^\circ)^\perp = F$.
3. $(F+G)^\circ = F^\circ \cap G^\circ$ et $(F \cap G)^\circ = F^\circ + G^\circ$.

Application (De la Représentation Paramétrique à la Représentation Cartésienne). La dualité formalise le passage entre ces deux descriptions.

- Un sous-espace F est donné par une base (f_1, \dots, f_k) (**paramétrique**).
- Son orthogonal F° est l'espace des formes linéaires qui s'annulent sur les f_i . Une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-k})$ de F° fournit un système d'**équations cartésiennes** de F , car $x \in F \iff \varphi_j(x) = 0$ pour tout j .

11.4 L'Application Transposée

Objectif. Montrer que toute l'information sur une application linéaire u est encodée dans une application "miroir" qui agit sur les espaces duaux : la transposée.

Définition 11.4.1 (Application Transposée). Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Sa **transposée** est l'application $u^t \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ définie par :

$$u^t(\psi) = \psi \circ u \quad \text{pour } \psi \in F^*$$

Proposition 11.4.1 (Propriétés Fondamentales). —

Dans des bases duales, la matrice de u^t est la transposée de la matrice de u .

- $\text{rg}(u^t) = \text{rg}(u)$.

Théorème 11.4.1 (Relations d'Orthogonalité). L'application transposée se comporte parfaitement vis-à-vis de l'orthogonalité :

- $\ker(u^t) = (\text{Im}(u))^\circ$
- $\text{Im}(u^t) = (\ker(u))^\circ$

Remarque (Une Symétrie Parfaite). Ces relations sont d'une grande beauté. Le noyau de la transposée (ce qui est "tué" par u^t) est exactement l'ensemble des équations de l'image de u . Réciproquement, l'image de la transposée est l'ensemble des équations du noyau de u . C'est le point culminant de la théorie de la dualité, montrant comment chaque propriété d'un objet se reflète dans son "miroir" dual.

Chapitre 12

Algèbre linéaire : Diagonalisation et Trigonalisation - La Quête de la Simplicité

12.1 Éléments Propres : Les Directions Privilégiées

Objectif. Comprendre un endomorphisme u revient à comprendre son action géométrique. L'idée de la réduction est de trouver une base dans laquelle cette action est la plus simple possible. La première étape est de chercher les "directions privilégiées" de l'espace, celles où l'action de u se résume à une simple dilatation : les vecteurs propres.

Définition 12.1.1 (Vecteur Propre, Valeur Propre, Spectre). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un vecteur non nul $x \in E$ est un **vecteur propre** de u s'il existe un scalaire $\lambda \in K$ tel que $u(x) = \lambda x$. λ est la **valeur propre** associée. L'ensemble des valeurs propres est le **spectre** de u , noté $\text{Sp}(u)$. Le **sous-espace propre** associé à λ est $E_\lambda = \ker(u - \lambda \text{Id}_E)$.

Proposition 12.1.1. Les sous-espaces propres sont en somme directe.

Définition 12.1.2 (Polynôme Caractéristique). Si E est de dimension finie, les valeurs propres de u sont exactement les racines de son **polynôme caractéristique** $P_{car,u}(X) = \det(X\text{Id}_E - u)$.

Remarque (La Nécessité d'un Corps Algébriquement Clos). L'existence de valeurs propres dépend de la capacité du polynôme caractéristique à être scindé. Sur \mathbb{R} , une rotation plane n'a pas de valeurs propres réelles. Sur \mathbb{C} , elle en a toujours deux. Travailler sur \mathbb{C} garantit l'existence de vecteurs propres, ce qui est une simplification considérable.

12.2 La Diagonalisation : Le Cas Idéal

Objectif. Étudier le cas "parfait" où les directions propres sont assez nombreuses pour engendrer tout l'espace. Dans ce cas, l'endomorphisme est dit diagonalisable, et son action est d'une simplicité cristalline.

Définition 12.2.1 (Endomorphisme Diagonalisable). Un endomorphisme u est **diagonalisable** s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u . Dans une telle base, la matrice de u est diagonale.

Théorème 12.2.1 (Critères de Diagonalisabilité). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est diagonalisable.
2. $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda$.
3. $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_\lambda) = \dim(E)$.
4. Le polynôme caractéristique est scindé et la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre associé.
5. Le polynôme minimal de u est scindé à racines simples.

Remarque (Le Rôle du Polynôme Minimal). Le critère par le polynôme minimal est le plus puissant et le plus élégant. Il capture l'essence de la diagonalisabilité, qui est une propriété purement algébrique. Il ne dépend que de l'algèbre $K[u]$ et non d'un calcul de dimensions de sous-espaces.

Application (Puissances d'une Matrice et Systèmes Dynamiques). Si $A = PDP^{-1}$ est diagonalisable, alors $A^k = PD^kP^{-1}$. Le calcul de D^k

est trivial. Ceci permet de :

- Résoudre des suites récurrentes linéaires $U_{n+1} = AU_n$.
- Résoudre des systèmes différentiels linéaires $Y' = AY$, dont la solution est $Y(t) = e^{tA}Y_0$, où $e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$ est facile à calculer.

12.3 La Trigonalisation : Un Compromis Nécessaire

Objectif. Que faire si un endomorphisme n'est pas diagonalisable ? On cherche un compromis : une base dans laquelle la matrice n'est pas diagonale, mais au moins triangulaire supérieure. Cela signifie renoncer aux directions propres pour chercher des "sous-espaces stables".

Définition 12.3.1 (Sous-espace Stable). Un sous-espace F est stable par u si $u(F) \subset F$.

Proposition 12.3.1. Un endomorphisme u est **trigonalisable** (ou triangularisable) s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure. Cela équivaut à l'existence d'un drapeau de sous-espaces stables $\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n = E$ avec $\dim(F_i) = i$.

Théorème 12.3.1 (Critère de Trigonalisabilité). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est trigonalisable.
2. Le polynôme caractéristique de u est scindé sur K .
3. Le polynôme minimal de u est scindé sur K .

Corollaire 12.3.1.1. Sur un corps algébriquement clos comme \mathbb{C} , tout endomorphisme est trigonalisable.

Application (Calcul du Polynôme Caractéristique). Si A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. La trigonalisation est donc un pas majeur vers la compréhension du spectre d'un endomorphisme.

12.4 Polynômes d'Endomorphismes : L'Outil Algébrique

Objectif. Développer l'outil algébrique qui permet de comprendre la structure fine d'un

endomorphisme, au-delà de son polynôme caractéristique : le polynôme minimal.

Définition 12.4.1 (Polynôme Minimal). L'ensemble $\{P \in K[X] \mid P(u) = 0\}$ est un idéal de $K[X]$. Comme $K[X]$ est principal, cet idéal est engendré par un unique polynôme unitaire, le **polynôme minimal** de u , noté π_u .

Théorème 12.4.1 (Théorème de Cayley–Hamilton). Tout endomorphisme annule son propre polynôme caractéristique : $P_{car,u}(u) = 0$.

Corollaire 12.4.1.1. Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique. De plus, ils ont les mêmes racines.

Remarque (L'Information Contenue dans le Polynôme Minimal). Le polynôme minimal est beaucoup plus informatif que le polynôme caractéristique. Par exemple, si $P_{car,u}(X) = (X - \lambda)^n$, on ne sait pas si u est diagonalisable. Mais si $\pi_u(X) = X - \lambda$, alors u est une homothétie. Si $\pi_u(X) = (X - \lambda)^k$ avec $k > 1$, u n'est pas diagonalisable. C'est la multiplicité des racines dans le polynôme minimal qui décide de la diagonalisabilité.

Chapitre 13

Algèbre linéaire : Décompositions Fines - L'Anatomie d'un Endomorphisme

13.1 Le Lemme des Noyaux : Le Scalpel du Chirurgien

Objectif. Introduire l'outil algébrique le plus puissant pour "découper" un espace vectoriel en sous-espaces stables. Le lemme des noyaux nous permet de traduire une factorisation du polynôme minimal en une décomposition de l'espace en somme directe, réduisant ainsi l'étude globale d'un endomorphisme à l'étude de ses "morceaux" plus simples sur des sous-espaces plus petits.

Théorème 13.1.1 (Lemme des Noyaux). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit P un polynôme annulateur de u . Si $P = P_1 P_2 \cdots P_k$ est une factorisation de P en polynômes deux à deux premiers entre eux, alors l'espace E se décompose en une somme directe de sous-espaces stables :

$$E = \bigoplus_{i=1}^k \ker(P_i(u))$$

Remarque (La Puissance de l'Arithmétique des Polynômes). Ce théorème est un pont direct entre l'arithmétique de l'anneau $K[X]$ (la factorisation en facteurs premiers) et la géométrie de l'espace vectoriel (la décomposition en somme directe). C'est le principe du "diviser pour régner" appliqué à l'algèbre linéaire.

Définition 13.1.1 (Sous-espaces Caractéristiques). En appliquant le lemme des noyaux à la factorisation du polynôme caractéristique (ou minimal) en facteurs irréductibles, $P_{car,u}(X) = \prod P_i(X)^{m_i}$, on obtient la décomposition de l'espace en somme directe de ses **sous-espaces caractéristiques** $N_i = \ker(P_i(u)^{m_i})$.

13.2 La Décomposition de Dunford : Séparer le Simple du Compliqué

Objectif. Montrer que tout endomorphisme (dont le polynôme minimal est scindé) peut être "séparé" de manière unique en deux parties aux comportements très différents et qui commutent : une partie "simple" (diagonalisable) et une partie "complexe mais contrôlée" (nilpotente). C'est la décomposition la plus conceptuelle et la plus élégante.

Définition 13.2.1 (Endomorphisme Nilpotent). Un endomorphisme n est **nilpotent** s'il existe un entier k tel que $n^k = 0$.

Théorème 13.2.1 (Décomposition de Dunford (ou de Chevalley-Jordan)). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme minimal (ou caractéristique) soit scindé sur K . Alors il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de E tel que :

1. $u = d + n$.
2. d est diagonalisable.
3. n est nilpotent.
4. d et n commutent : $dn = nd$.

De plus, d et n sont des polynômes en u .

Remarque (La Commutativité est la Clé). La condition de commutation est absolument cruciale. Elle implique que d et n laissent stables les sous-espaces propres l'un de l'autre. Le fait que d et n soient des polynômes en u garantit leur unicité et montre à quel point cette décomposition est "intrinsèque" à u .

Application (Calcul de l'Exponentielle de Matrice). C'est l'application la plus importante. Pour résoudre $Y' = AY$, on a besoin de e^{tA} . Si $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de

A , alors comme D et N commutent :

$$e^{tA} = e^{t(D+N)} = e^{tD}e^{tN}$$

Le calcul de e^{tD} est facile (c'est la diagonale des exponentielles des valeurs propres). Le calcul de e^{tN} est aussi facile, car c'est une somme **finie** (la série de l'exponentielle s'arrête car N est nilpotente).

13.3 La Décomposition de Jordan : La Forme Canonique Ultime

Objectif. Aller au-delà de la simple trigonalisation pour trouver LA forme matricielle la plus simple possible pour un endomorphisme trigonalisable. La réduction de Jordan est une "anatomie" complète de l'endomorphisme, révélant sa structure nilpotente sur chaque sous-espace caractéristique.

Définition 13.3.1 (Bloc de Jordan). Un bloc de Jordan de taille k associé à la valeur propre λ est une matrice de la forme :

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Théorème 13.3.1 (Théorème de Réduction de Jordan). Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. Alors il existe une base de E , appelée base de Jordan, dans laquelle la matrice de u est une matrice diagonale par blocs, où chaque bloc est un bloc de Jordan. Cette décomposition est unique à l'ordre des blocs près.

Remarque (L'Anatomie de la Partie Nilpotente). La décomposition de Jordan est le résultat de l'analyse fine de la partie nilpotente de la décomposition de Dunford sur chaque sous-espace caractéristique. Le nombre et la taille des blocs de Jordan associés à une valeur propre λ sont déterminés par les dimensions des noyaux des puissances successives de $(u - \lambda \text{Id})$.

13.4 Autres Décompositions Fondamentales

Objectif. Mentionner d'autres décompositions qui sont essentielles en analyse numérique et en

géométrie, et qui reposent sur des idées différentes (orthogonalité, positivité).

Théorème 13.4.1 (Décomposition Polaire). Toute matrice inversible $M \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $M = OS$, où O est une matrice orthogonale et S est une matrice symétrique définie positive.

Remarque (L'Analogie avec les Nombres Complexes). C'est l'analogue direct de la décomposition polaire d'un nombre complexe $z = e^{i\theta}\rho$. La matrice orthogonale joue le rôle de la rotation ($e^{i\theta}$) et la matrice symétrique définie positive joue le rôle du facteur d'échelle positif (ρ).

Théorème 13.4.2 (Décomposition en Valeurs Singulières (SVD)). Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, il existe deux matrices orthogonales $U \in O(n)$ et $V \in O(p)$ et une matrice "diagonale" Σ (de même taille que M) à coefficients positifs ou nuls, telle que :

$$M = U\Sigma V^T$$

Les coefficients diagonaux de Σ sont les **valeurs singulières** de M .

Application (L'Outil à Tout Faire de l'Algèbre Linéaire Numérique). La SVD est l'une des décompositions les plus importantes en pratique. Elle est stable numériquement et a des applications innombrables :

- Calcul du rang et d'une base du noyau/image d'une matrice.
- Approximation de matrices par des matrices de rang inférieur (compression d'images).
- Résolution de systèmes linéaires par les moindres carrés (pseudo-inverse).
- Analyse en Composantes Principales (ACP) en statistiques.

Chapitre 14

Algèbre Générale : L'Architecture des Structures

14.1 Le Zoo des Structures Algébriques

Objectif. Poser les fondations. L'algèbre est l'étude des ensembles munis de lois. Nous allons cartographier le "zoo" des structures algébriques, en partant des plus générales (pauvres en axiomes) vers les plus riches et contraignantes. L'idée est de comprendre que chaque axiome ajouté n'est pas une complication, mais une source de nouveaux théorèmes puissants.

Définition 14.1.1 (Le chemin vers les groupes). —

- Magma** $(E, *)$: Un simple ensemble avec une loi de composition interne. (Ex : $(\mathbb{Z}, -)$)
- **Demi-groupe (Semigroup)** : Un magma où la loi est associative. (Ex : $(\mathbb{N}^*, +)$)
- **Monoïde** : Un demi-groupe avec un élément neutre. (Ex : $(\mathbb{N}, +)$, l'ensemble des mots sur un alphabet avec la concaténation)
- **Groupe** : Un monoïde où tout élément est inversible. (Ex : $(\mathbb{Z}, +)$, (\mathbb{Q}^*, \cdot))

Définition 14.1.2 (Les structures à deux lois).

- Anneau (Ring)** $(A, +, \cdot)$: $(A, +)$ est un groupe abélien, (A, \cdot) est un monoïde, et la multiplication est distributive sur l'addition. (Ex : \mathbb{Z} , $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, les matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)
- **Corps (Field)** $(K, +, \cdot)$: Un anneau commutatif où tout élément non nul est inversible pour la multiplication. (Ex : $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p$)

Remarque (La Richesse vient des Contraintes). Un corps est une structure très "rigide" : presque tout est fixé. C'est pourquoi on a une théorie très puissante

(l'algèbre linéaire) sur les corps. Les anneaux sont beaucoup plus variés et "sauvages". Par exemple, dans un anneau général, $ab = 0$ n'implique pas $a = 0$ ou $b = 0$ (diviseurs de zéro). La hiérarchie des structures est une échelle de "rigidité" croissante.

14.2 Le Triptyque Universel : Sous-structures, Morphismes, Quotients

Objectif. Dégager les trois concepts transversaux qui forment la grammaire de toute l'algèbre. Quelle que soit la structure, on cherche toujours à comprendre ses parties (sous-structures), les applications qui la préservent (morphismes), et la manière de la simplifier (quotients).

Définition 14.2.1 (Sous-structures). Une sous-structure est une partie d'une structure qui est elle-même une structure du même type avec les lois induites.

- **Sous-groupe** : Stable par la loi et l'inverse.
- **Sous-anneau** : Stable par $+$ et \cdot , contient le neutre multiplicatif.
- **Idéal** : Le concept clé pour les anneaux. Un sous-groupe additif I de A tel que pour tout $a \in A$ et $x \in I$, $ax \in I$ et $xa \in I$.

Remarque (Pourquoi les idéaux?). Un sous-anneau n'est pas la "bonne" notion pour construire un quotient d'anneau. L'idéal est exactement la structure qui se comporte comme le noyau d'un morphisme d'anneau. Il est "absorbant", ce qui permet de définir une multiplication cohérente sur les classes d'équivalence.

Définition 14.2.2 (Morphismes). Un morphisme est une application entre deux structures de même type qui "respecte" les lois. Le **noyau** est l'ensemble des éléments envoyés sur l'élément neutre. L'**image** est l'ensemble des éléments atteints.

Théorème 14.2.1 (Le Premier Théorème d'Isomorphisme (Forme Générale)). Pour tout morphisme $\phi : A \rightarrow B$, l'image $\text{Im}(\phi)$ est isomorphe à l'ensemble de départ A "quotienté par ce qui est rendu trivial", c'est-à-dire le noyau $\ker(\phi)$.

- Pour les groupes : $G/\ker(\phi) \cong \text{Im}(\phi)$.
- Pour les anneaux : $A/\ker(\phi) \cong \text{Im}(\phi)$.

14.3 L'Action : Quand les Structures Agissent sur le Monde

Objectif. Montrer que l'algèbre devient véritablement puissante quand on l'utilise pour décrire les transformations d'autres objets. L'étude des actions de groupes est fondamentale, mais on peut généraliser cette idée aux anneaux via la notion de module, unifiant ainsi l'algèbre linéaire et la théorie des groupes abéliens.

Définition 14.3.1 (Module sur un anneau). Soit A un anneau. Un **A -module** est la généralisation d'un espace vectoriel où les scalaires sont pris dans l'anneau A au lieu d'un corps. C'est un groupe abélien $(M, +)$ muni d'une "multiplication par les scalaires" de A qui est distributive et associative.

Exemple. — Si A est un corps K , un A -module est un K -espace vectoriel.

- Tout groupe abélien est un \mathbb{Z} -module.
- Soit u un endomorphisme d'un K -espace vectoriel V . Alors V peut être muni d'une structure de $K[X]$ -module où le polynôme X agit comme l'endomorphisme u .

Théorème 14.3.1 (Théorème de Structure des Modules de Type Fini sur un Anneau Principal). Soit A un anneau principal et M un A -module de type fini. Alors M se décompose de manière unique en une somme directe :

$$M \cong A^r \oplus A/(a_1) \oplus A/(a_2) \oplus \cdots \oplus A/(a_k)$$

où r est le rang de M et les (a_i) sont les facteurs invariants de M ($a_1|a_2|\dots|a_k$).

Remarque (Un Théorème "Monstre" Unificateur). Ce théorème abstrait est l'un des plus puissants de l'algèbre. Il unifie des pans entiers des mathématiques. Ses deux applications principales sont des résultats majeurs que l'on démontre habituellement par des voies très différentes.

Application (Classification des groupes abéliens de type fini). Un groupe abélien est un \mathbb{Z} -module. \mathbb{Z} est un anneau principal. Le théorème s'applique directement et nous dit que tout groupe abélien de type fini est isomorphe à un produit de la forme $\mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$. C'est la classification complète de ces groupes.

Application (Réduction des endomorphismes). Soit $u \in \mathcal{L}(V)$ où V est un K -e.v. de dimension finie. On munit V de sa structure de $K[X]$ -module. $K[X]$ est un anneau principal. Le théorème s'applique et la décomposition en facteurs invariants correspond à la **décomposition de Frobenius** (avec les polynômes compagnons). La décomposition en facteurs primaires (utilisant le lemme des restes chinois) correspond à la **décomposition de Jordan**. Ce théorème contient donc toute la théorie de la réduction.

14.4 Vers l'Algèbre Universelle et les Catégories

Objectif. Conclure en ouvrant la porte à une vision plus moderne et abstraite, celle qui définit les objets non par leur contenu, mais par leurs relations avec les autres objets, via les "propriétés universelles". C'est l'essence de la théorie des catégories.

Définition 14.4.1 (Propriété Universelle). Une propriété universelle caractérise un objet U par l'existence et l'unicité d'un morphisme vers (ou depuis) tout autre objet X de la même catégorie.

Exemple (Propriété universelle du groupe quotient). Soit $H \triangleleft G$. Le groupe quotient G/H et la surjection canonique $\pi : G \rightarrow G/H$ sont caractérisés par la propriété universelle suivante : pour tout morphisme de groupes $\phi : G \rightarrow K$ tel que $H \subset \ker(\phi)$, il existe un **unique** morphisme $\tilde{\phi} : G/H \rightarrow K$ tel que $\phi = \tilde{\phi} \circ \pi$. Cela signifie que G/H est la manière la plus "économique" et "universelle" de rendre H trivial.

Remarque (La Pensée Catégorique). Cette approche est au cœur de l'algèbre moderne (et de la géométrie algébrique, topologie algébrique...). On ne construit plus les objets "à la main", on les définit par la propriété qu'ils doivent vérifier. Le produit tensoriel, le groupe libre, la localisation d'anneaux... tous sont définis par des propriétés universelles. C'est un changement de perspective très puissant qui unifie l'ensemble de l'algèbre.

Chapitre 15

Anneaux et Polynômes : L'Héritage de l'Arithmétique

15.1 Le Bestiaire des Anneaux : Une Hiérarchie de "Gentillesse"

Objectif. Construire une hiérarchie des anneaux commutatifs unitaires. L'idée est de partir de la structure la plus générale et d'ajouter progressivement des axiomes qui nous rapprochent des propriétés familières de l'arithmétique des entiers \mathbb{Z} . Chaque nouvel axiome définit une classe d'anneaux plus "gentille", où des théorèmes plus puissants s'appliquent.

Définition 15.1.1 (Anneau intègre (Integral Domain)). Un anneau commutatif unitaire A est **intègre** si $ab = 0 \implies a = 0$ ou $b = 0$. C'est le cadre minimal pour faire de l'arithmétique, car on peut "simplifier" ($ab = ac \implies b = c$ si $a \neq 0$).

Définition 15.1.2 (Anneau factoriel (Unique Factorization Domain - UFD)). Un anneau intègre A est **factoriel** si tout élément non nul et non inversible se décompose de manière **unique** (à l'ordre et aux inversibles près) en un produit d'éléments irréductibles. C'est le cadre où la "décomposition en facteurs premiers" a un sens.

Définition 15.1.3 (Anneau principal (Principal Ideal Domain - PID)). Un anneau intègre A est **principal** si tout idéal de A est principal, c'est-à-dire engendré par un seul élément.

Définition 15.1.4 (Anneau euclidien (Euclidean Domain)). Un anneau intègre A est **euclidien** s'il existe une fonction $v : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ (un "stathme") telle que pour tous $a, b \in A$ avec $b \neq 0$, il existe $q, r \in A$ avec $a = bq + r$ et ($r = 0$ ou $v(r) < v(b)$). C'est le cadre où l'algorithme d'Euclide et la division euclidienne

fonctionnent.

Théorème 15.1.1 (La Hiérarchie des Anneaux). On a la chaîne d'implications strictes :

$\text{Corps} \implies \text{Anneau Euclidien} \implies \text{Anneau Principal} \implies \text{Anneau Factoriel}$

Exemple (Exemples et Contre-exemples Fondamentaux). —

\mathbb{Z} et $K[X]$ (où K est un corps) sont euclidiens. L'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$ l'est aussi.

— L'anneau $\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}]$ est un exemple célèbre d'anneau principal qui n'est pas euclidien.

— L'anneau des polynômes à plusieurs indéterminées $K[X, Y]$ ou l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ sont factoriels mais **non principaux**. Par exemple, l'idéal $(2, X)$ de $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas engendré par un seul polynôme.

— L'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est **pas factoriel**. On y a deux décompositions distinctes de 6 en irréductibles : $6 = 2 \cdot 3 = (1+i\sqrt{5})(1-i\sqrt{5})$. L'unicité de la factorisation est perdue.

15.2 L'Arithmétique dans les Anneaux Factoriels

Objectif. Généraliser les notions de divisibilité et de "nombres premiers" au cadre des anneaux factoriels. On clarifiera la distinction subtile mais cruciale entre un élément "irréductible" et un élément "premier".

Proposition 15.2.1 (Éléments Irréductibles vs. Premiers). Soit a un élément non nul et non inversible d'un anneau intègre A .

- a est **irréductible** s'il ne peut pas s'écrire comme un produit de deux non-inversibles. (On ne peut pas le "casser" davantage).
- a est **premier** si $a|bc \implies a|b$ ou $a|c$. (C'est le lemme d'Euclide).

Proposition 15.2.2. Dans un anneau intègre, tout élément premier est irréductible. La réciproque est vraie si et seulement si l'anneau est factoriel.

Remarque (La Clé de la Factorialité). Cette équivalence est le cœur de la factorialité. Dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$, l'élément 2 est irréductible, mais il n'est pas premier car $2|(1+i\sqrt{5})(1-i\sqrt{5}) = 6$, mais 2 ne divise aucun des deux facteurs. C'est cette défaillance du lemme d'Euclide qui cause la non-unicité de la décomposition.

15.3 Les Anneaux de Polynômes : L'Objet Central

Objectif. Étudier les propriétés arithmétiques du ring $A[X]$ en fonction de celles de A . Le résultat principal est un théorème de transfert de la factorialité, qui est un des piliers de l'algèbre commutative. On développera ensuite une boîte à outils pour tester l'irréductibilité, la "primauté" des polynômes.

Lemme 15.3.1 (Lemme de Gauss). Soit A un anneau factoriel de corps des fractions K . Un polynôme $P \in A[X]$ non constant est irréductible dans $A[X]$ si et seulement s'il est primitif et irréductible dans $K[X]$.

Théorème 15.3.2 (Théorème Fondamental). Si A est un anneau factoriel, alors l'anneau des polynômes $A[X]$ est aussi un anneau factoriel.

Corollaire 15.3.2.1. Par récurrence, les anneaux $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ et $K[X_1, \dots, X_n]$ (où K est un corps) sont factoriels.

Théorème 15.3.3 (Critères d'Irréductibilité sur $\mathbb{Q}[X]$. (ou sur le corps des fractions d'un UFD))

- **Contenu** : Un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$ ssi il l'est sur $\mathbb{Z}[X]$.
- **Eisenstein** : Soit $P(X) = a_n X^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$. S'il existe un nombre premier p tel que $p \nmid a_n$, $p|a_i$ pour $i < n$, et $p^2 \nmid a_0$, alors P est irréductible sur \mathbb{Q} .
- **Réduction modulo p** : Si la réduction \bar{P} de P modulo p est irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$ (et $\deg(\bar{P}) = \deg(P)$), alors P est irréductible sur \mathbb{Q} .

Application (Irréductibilité du polynôme cyclotomique Φ_p). Le p -ième polynôme cyclotomique est $\Phi_p(X) = \frac{X^p-1}{X-1} = X^{p-1} + \dots + 1$. Il est irréductible sur \mathbb{Q} . *Preuve* : On considère $\Phi_p(X+1) = \frac{(X+1)^p-1}{X} = \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} X^{k-1}$.

Tous les coefficients binomiaux sont divisibles par p , sauf le coefficient dominant. Le coefficient constant est $\binom{p}{1} = p$, qui n'est pas divisible par p^2 . Par le critère d'Eisenstein (translaté), $\Phi_p(X+1)$ est irréductible, donc $\Phi_p(X)$ l'est aussi.

15.4 Polynômes Symétriques, Résultant et Discriminant

Objectif. Développer des outils avancés pour étudier les relations entre les racines d'un polynôme sans avoir à les calculer. Les polynômes symétriques fournissent le langage, et le résultant/discriminant sont des outils de calcul effectifs.

Définition 15.4.1 (Polynômes Symétriques Élémentaires). Les polynômes symétriques élémentaires en n variables X_1, \dots, X_n sont : $\sigma_1 = \sum X_i$, $\sigma_2 = \sum_{i < j} X_i X_j$, ..., $\sigma_n = X_1 \cdots X_n$.

Théorème 15.4.1 (Théorème Fondamental des Polynômes Symétriques). Tout polynôme symétrique à coefficients dans un anneau A peut s'écrire de manière unique comme un polynôme en les polynômes symétriques élémentaires à coefficients dans A .

Remarque (Le lien universel entre coefficients et racines). Si $P(X) = \prod (X - x_i) = X^n - c_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^n c_n$, alors les coefficients c_k sont précisément les polynômes symétriques élémentaires évalués aux racines x_i : $c_k = \sigma_k(x_1, \dots, x_n)$. Le théorème précédent implique que toute expression symétrique des racines peut être réécrite en fonction des coefficients du polynôme, sans connaître les racines elles-mêmes.

Définition 15.4.2 (Résultant et Discriminant). Soient P, Q deux polynômes. Le **résultant** $\text{Res}(P, Q)$ est le déterminant de leur matrice de Sylvester. Il est nul si et seulement si P et Q ont une racine commune. Le **discriminant** de P est (à un facteur près) $\text{Res}(P, P')$. Il est nul si et seulement si P a une racine multiple. Pour $P(X) = a_n \prod (X - x_i)$, on a $\Delta = a_n^{2n-2} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2$.

Application (Calcul explicite en théorie de Galois). Le discriminant est un outil essentiel. Par exemple, le groupe de Galois d'un polynôme irréductible de degré 3 sur \mathbb{Q} est soit \mathfrak{S}_3 , soit le sous-groupe cyclique \mathcal{A}_3 . Lequel des deux ? On calcule le discriminant Δ . Si $\sqrt{\Delta}$ est

dans \mathbb{Q} , le groupe est \mathcal{A}_3 . Sinon, c'est \mathfrak{S}_3 .

Chapitre 16

Fiche de Synthèse : La Philosophie des Modules (hors programme) : Le Grand Unificateur de l'Algèbre

16.1 Qu'est-ce qu'un Module, Conceptuellement ?

Objectif. Comprendre le module comme l'ultime généralisation de la notion d'espace vectoriel. En remplaçant le corps des scalaires par un simple anneau, on perd des propriétés fortes (comme l'existence systématique d'une base), mais on gagne un pouvoir d'unification conceptuel immense.

Définition 16.1.1 (Module sur un anneau). Soit A un anneau. Un **A -module** (à gauche) est un groupe abélien $(M, +)$ muni d'une loi externe $A \times M \rightarrow M$ qui vérifie des axiomes de compatibilité (distributivité, associativité mixte, $1_A \cdot x = x$).

Remarque (L'Analogie Fondamentale). La relation entre ces structures est une simple substitution :

Action d'un **corps** K sur un groupe abélien
Action d'un **anneau** A sur un groupe abélien

La théorie des modules contient donc l'algèbre linéaire comme un cas particulier. Mais elle contient bien plus...

16.2 Le Dictionnaire : Trois Exemples Fondamentaux pour l'Agrégation

Objectif. Établir le "dictionnaire" qui traduit des concepts familiers en langage des modules. C'est la clé pour comprendre la puissance de

cette théorie.

Exemple (Les Groupes Abéliens sont des \mathbb{Z} -modules). Un groupe abélien $(G, +)$ est **canoniquement** un \mathbb{Z} -module.

- **L'action** : Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $g \in G$, l'action $n \cdot g$ est simplement g additionné à lui-même n fois (ou $-g$, $|n|$ fois si $n < 0$).
- **Le dictionnaire** :
 - un sous-groupe de $G \iff$ un sous- \mathbb{Z} -module de G .
 - un morphisme de groupes \iff un morphisme de \mathbb{Z} -modules.
 - un élément de torsion de $G \iff$ un élément de torsion du \mathbb{Z} -module G .

Exemple. Un Endomorphisme induit une structure de $K[X]$ -module. C'est l'idée la plus profonde et la plus utile. Soit V un K -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(V)$ un endomorphisme. On peut alors voir V comme un $K[X]$ -module.

\implies **K -Espace Vectoriel**
 \implies **L'action** : Pour un polynôme $P(X) = \sum a_k X^k \in K[X]$ et un vecteur $v \in V$, l'action est définie par $P(X) \cdot v = P(u)(v) = \sum a_k u^k(v)$. L'action de la variable X est simplement l'application de l'endomorphisme u .

- **Le dictionnaire** :
 - un sous-espace de V **stable par u** \iff un sous- $K[X]$ -module de V .
 - un morphisme d'espaces vectoriels qui commute avec $u \iff$ un morphisme de $K[X]$ -modules.
 - le polynôme minimal de $u \iff$ l'annulateur du $K[X]$ -module V .

16.3 Le Théorème de Structure : Le "Marteau" Unificateur

Objectif. Présenter le "théorème monstre" qui, appliqué à nos deux exemples principaux, va résoudre d'un seul coup deux problèmes de classification majeurs en algèbre.

Théorème 16.3.1 (Théorème de Structure des Modules de Type Fini sur un Anneau Principal). Soit A un anneau **principal** et M un A -module de type fini. Alors M est isomorphe à une somme directe unique de la forme :

$$M \cong A^r \oplus \frac{A}{(a_1)} \oplus \frac{A}{(a_2)} \oplus \cdots \oplus \frac{A}{(a_k)}$$

où $r \geq 0$ est le rang du module, et les $a_i \in A$ sont des éléments non-inversibles (uniques à association près) appelés **facteurs invariants**, vérifiant $a_1 | a_2 | \dots | a_k$.

Application (Le Marteau en Action : Deux Théorèmes pour le prix d'Un). Ce théorème unique a deux corollaires spectaculaires, qui sont des chapitres entiers du programme de l'agrégation.

Cas 1 : L'anneau est \mathbb{Z} (principal).

- **Traduction** : Un \mathbb{Z} -module de type fini est un groupe abélien de type fini.
- **Résultat** : Le théorème de structure donne la **classification des groupes abéliens de type fini**. Tout groupe abélien de type fini est isomorphe à un produit $\mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$ avec $n_1 | \dots | n_k$.

Cas 2 : L'anneau est $K[X]$ (principal).

- **Traduction** : Un $K[X]$ -module de type fini et de torsion est un K -espace vectoriel de dimension finie muni d'un endomorphisme u .
- **Résultat** : Le théorème de structure donne les **théorèmes de réduction des endomorphismes**.
 - La décomposition en facteurs invariants correspond à la **décomposition de Frobenius**, où les $A/(a_i)$ sont des sous-espaces cycliques dont les matrices sont des **blocs compagnons** des polynômes invariants.

- En utilisant le lemme des restes chinois pour décomposer les $A/(a_i)$, on obtient la **décomposition de Jordan**, où les blocs correspondent aux diviseurs élémentaires (les facteurs primaires des polynômes invariants).

16.4 Conclusion : Comment Utiliser cette Fiche à l'Agrégation ?

Objectif. Transformer cette connaissance "méta" en un avantage stratégique concret pour les épreuves.

Remarque (Une Carte, pas un Territoire à Exposer). Cette fiche est votre carte mentale personnelle. Elle vous assure de ne jamais vous perdre, car vous voyez le paysage global de l'algèbre.

- **À NE PAS FAIRE** : Commencer une leçon sur la réduction en disant "Soit V un $K[X]$ -module". C'est une erreur pédagogique à l'oral, sauf si la leçon porte spécifiquement sur les anneaux principaux.
- **À FAIRE** : Utiliser cette vision pour structurer votre pensée. Une fois une leçon sur la réduction parfaitement maîtrisée avec les outils de l'algèbre linéaire, vous pouvez conclure par une **remarque d'ouverture** :

"Il est remarquable que cette théorie de la réduction puisse être vue comme un cas particulier d'un théorème de structure beaucoup plus général sur les modules sur un anneau principal, qui unifie également la classification des groupes abéliens."

Une telle phrase, placée judicieusement, signale au jury une profondeur de compréhension et une hauteur de vue exceptionnelles. C'est l'arme secrète d'un candidat qui ne se contente pas de connaître, mais qui **comprend**.

Sixième partie

Intégration

Chapitre 17

Intégration de Riemann : La Gloire et les Limites d'une Idée Intuitive

17.1 La Construction de l'Intégrale : L'Idée Géométrique

Objectif. Construire rigoureusement l'intégrale à partir de l'idée la plus intuitive qui soit : approcher l'aire sous une courbe par des rectangles. On va formaliser cette idée d'approximation par le bas et par le haut (sommes de Darboux) pour "piéger" la valeur de l'intégrale.

Définition 17.1.1 (Subdivisions et Sommes de Darboux). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$. On pose $m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f$ et $M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f$.

- La **somme de Darboux inférieure** est $s(f, \sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$.
- La **somme de Darboux supérieure** est $S(f, \sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$.

Remarque (L'Encadrement). L'idée de Darboux est de créer un encadrement de l'aire "vraie" qui est indépendant de tout choix de points intermédiaires (contrairement aux sommes de Riemann). Pour toute subdivision, on a $s(f, \sigma) \leq \text{Aire} \leq S(f, \sigma)$. Raffiner une subdivision resserre cet encadrement.

Définition 17.1.2 (Intégrabilité au sens de Riemann). Une fonction bornée f est **Riemann-intégrable** sur $[a, b]$ si son intégrale inférieure et son intégrale supérieure coïncident :

$$\sup_{\sigma} s(f, \sigma) = \inf_{\sigma} S(f, \sigma)$$

Cette valeur commune est alors notée $\int_a^b f(x)dx$. Un critère équivalent est que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une subdivision σ telle que $S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \epsilon$.

17.2 Le Champ d'Application : Quelles Fonctions sont Intégrables ?

Objectif. Identifier les classes de fonctions pour lesquelles cette construction fonctionne. On verra que l'intégrale de Riemann est très robuste pour les fonctions "régulières", mais qu'elle est très sensible aux discontinuités "abondantes".

Théorème 17.2.1 (Classes de fonctions intégrables). —

Toute fonction **continue** sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable.

— Toute fonction **monotone** sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable.

— Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable.

Théorème 17.2.2 (Critère de Lebesgue pour l'intégrabilité de Riemann). Une fonction bornée $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si et seulement si l'ensemble de ses points de discontinuité est de **mesure de Lebesgue nulle**.

Remarque (La Puissance et la Limite de l'Intégrale de Riemann). Ce théorème est extraordinaire. Il nous dit que l'intégrale de Riemann est "aveugle" aux pathologies qui se produisent sur des ensembles "petits" (de mesure nulle). On peut avoir une infinité de discontinuités, tant qu'elles sont négligeables. Cependant, ce théorème montre aussi la limite de la théorie : pour la comprendre pleinement, on a besoin du langage de la "mesure de Lebesgue", qui est l'objet de la théorie suivante. L'intégrale de Riemann n'est pas auto-contenue.

Exemple (Des cas fascinants). — La **fonction de Thomae** (ou "popcorn") est continue sur tous les rationnels et continue sur tous les irrationnels de $[0, 1]$. L'en-

semble de ses discontinuités, $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, est dénombrable et donc de mesure nulle. Elle est donc Riemann-intégrable (et son intégrale vaut 0).

- La **fonction de Dirichlet**, $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$, est discontinue en tout point de $[0, 1]$. L'ensemble de ses discontinuités est $[0, 1]$, qui n'est pas de mesure nulle. Elle n'est donc **pas** Riemann-intégrable.

17.3 Les Théorèmes Fondamentaux : Le Pont entre Intégrale et Dérivée

Objectif. Révéler la connexion miraculeuse entre deux concepts a priori distincts : l'intégrale (une notion "globale" d'aire) et la dérivée (une notion "locale" de pente). Ce lien est le cœur du calcul différentiel et intégral.

Théorème 17.3.1 (Premier Théorème Fondamental de l'Analyse). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction "aire" $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et vérifie $F'(x) = f(x)$. L'intégration est donc un processus qui "régularise" les fonctions.

Théorème 17.3.2 (Second Théorème Fondamental de l'Analyse). Soit $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Alors :

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a)$$

Remarque (La Dualité Intégration/Dérivation). Ces deux théorèmes montrent que la dérivation et l'intégration (à une constante près) sont des opérations inverses l'une de l'autre. C'est ce qui rend le calcul d'intégrales possible : au lieu de calculer des limites de sommes de Riemann, il suffit de trouver une primitive.

Application (Formules de calcul). Les deux grandes techniques de calcul d'intégrales, l'**intégration par parties** et le **changement de variables**, sont des corollaires directs de ce lien et des formules de dérivation d'un produit et d'une composée.

17.4 Extensions et Limites de la Théorie

Objectif. Étendre la notion d'intégrale aux domaines non compacts (intervalles infinis) et

aux fonctions non bornées. Puis, identifier les faiblesses structurelles profondes de la théorie de Riemann qui motivent la construction d'une nouvelle théorie (celle de Lebesgue).

Définition 17.4.1 (Intégrales Impropres (ou Généralisées)). On étend la notion d'intégrale en passant à la limite :

- Sur un intervalle non borné : $\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{X \rightarrow \infty} \int_a^X f(t)dt$.

- Pour une fonction non bornée en a : $\int_a^b f(t)dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(t)dt$.

Exemple (La fonction Gamma d'Euler). La fonction $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ est définie par une intégrale impropre aux deux bornes. Elle généralise la factorielle aux nombres complexes.

Remarque (Les Faiblesses Structurelles de l'Intégrale de Riemann). Malgré son succès, la théorie de Riemann souffre de deux défauts majeurs qui la rendent inadaptée à l'analyse moderne.

1. **Le problème de la complétude** : L'espace des fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$, muni de la norme L^1 ou L^2 , n'est **pas un espace de Banach**. Il y a des suites de Cauchy de fonctions Riemann-intégrables qui convergent vers des fonctions non-Riemann-intégrables. C'est un cadre trop "troué" pour l'analyse fonctionnelle.
2. **Le problème de l'interversion des limites** : Les théorèmes permettant d'intervertir les limites et l'intégrale sont très faibles. La convergence simple ne suffit pas, et même la convergence dominée requiert des hypothèses très fortes (comme la convergence uniforme) qui sont souvent fausses en pratique.

Ces défauts ne sont pas des problèmes techniques que l'on peut "réparer". Ils sont inhérents à la construction même de l'intégrale, basée sur le découpage du domaine de définition. Pour les surmonter, il faudra changer de philosophie : c'est l'objet de la théorie de la mesure et de l'intégration de Lebesgue.

Chapitre 18

Fourier et Espaces L^p : Décomposer les Fonctions en Atomes

18.1 Espaces de Banach L^p : Mesurer la "Taille" des Fonctions

Objectif. Construire les espaces fonctionnels fondamentaux de l'analyse moderne. L'idée est de généraliser la notion de norme vectorielle à des espaces de fonctions, en "sommant" (via une intégrale) la taille locale de la fonction. Chaque valeur de p définit une manière différente de mesurer cette taille globale, donnant naissance à une famille d'espaces aux propriétés riches et variées.

Définition 18.1.1 (Norme et Espace L^p). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, \infty[$. La **norme** L^p d'une fonction mesurable $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est :

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

L'espace $L^p(\Omega)$ est l'ensemble des (classes d'équivalence p.p. de) fonctions mesurables pour lesquelles cette norme est finie. Pour $p = \infty$, $\|f\|_{\infty} = \inf\{M \geq 0 \mid |f(x)| \leq M \text{ p.p.}\}$ (le "sup essentiel").

Théorème 18.1.1 (Inégalités fondamentales).

Inégalité de Hölder : Pour $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et pour $f \in L^p, g \in L^q$, on a $fg \in L^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

— **Inégalité de Minkowski :** L'application $\|\cdot\|_p$ est une norme (vérifie l'inégalité triangulaire).

Théorème 18.1.2 (Théorème de Riesz-Fischer). Pour tout $p \in [1, \infty]$, l'espace $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

Remarque (La puissance de l'intégrale de Lebesgue). Ce théorème est l'une des raisons d'être de l'intégrale de Lebesgue. L'espace des

fonctions Riemann-intégrables n'est pas complet. La complétude des espaces L^p est ce qui en fait le cadre parfait pour l'analyse fonctionnelle, garantissant la convergence des processus d'approximation.

Théorème 18.1.3 (Dualité des espaces L^p). Pour $p \in [1, \infty[$, le dual topologique de $L^p(\Omega)$ s'identifie isométriquement à $L^q(\Omega)$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En particulier, les espaces L^p pour $p \in]1, \infty[$ sont réflexifs. Les espaces L^1 et L^{∞} ne le sont pas en général.

18.2 L'Espace de Hilbert L^2 : La Géométrie de l'Analyse

Objectif. Se concentrer sur le cas unique $p = 2$, où la norme dérive d'un produit scalaire. Cela dote l'espace L^2 d'une structure euclidienne de dimension infinie, où l'intuition géométrique (orthogonalité, projection, Pythagore) devient un outil d'analyse extraordinairement puissant.

Définition 18.2.1 (Structure Hilbertienne de L^2). L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire hermitien :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$$

Deux fonctions sont "orthogonales" si leur produit scalaire est nul.

Théorème 18.2.1 (Projection sur un Convexe Fermé). C'est le théorème central de la géométrie hilbertienne, qui garantit l'existence et l'unicité de la meilleure approximation d'un élément par un point d'un convexe fermé.

Application (Moindres carrés et approximation). Chercher la meilleure approximation

d'une fonction f dans un sous-espace F (par exemple, un espace de polynômes) au sens de l'énergie (norme L^2) revient à calculer la projection orthogonale de f sur F . C'est le fondement de l'approximation polynomiale, des ondelettes, etc.

18.3 Séries de Fourier : La Décomposition Harmonique sur le Cercle

Objectif. Appliquer la théorie des espaces de Hilbert au cas canonique de $L^2([0, 2\pi])$. On montre que les fonctions trigonométriques $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forment une "base" de cet espace, permettant de décomposer n'importe quelle fonction périodique en une somme de ses "harmoniques".

Théorème 18.3.1 (Base hilbertienne trigonométrique). La famille de fonctions $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$ forme une base orthonormale (base hilbertienne) de l'espace de Hilbert $L^2([0, 2\pi])$.

Corollaire 18.3.1.1 (Décomposition et Identité de Parseval). Toute fonction $f \in L^2([0, 2\pi])$ se décompose de manière unique $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{int}$, où la convergence a lieu au sens de la norme L^2 . De plus, on a l'identité de Parseval (Pythagore en dimension infinie) :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2$$

Remarque (Les différents modes de convergence). La convergence de la série de Fourier est une question subtile.

- **Convergence L^2** : Toujours vraie pour une fonction de carré intégrable.
- **Convergence ponctuelle** : Garantie si la fonction est \mathcal{C}^1 par morceaux (Théorème de Dirichlet).
- **Convergence uniforme** : Garantie si la fonction est continue et \mathcal{C}^1 par morceaux.

Il existe des fonctions continues dont la série de Fourier diverge en certains points (un résultat profond d'analyse fonctionnelle utilisant Banach-Steinhaus).

18.4 La Transformation de Fourier : L'Analyse sur la Droite Réelle

Objectif. Étendre l'analyse harmonique aux fonctions non périodiques définies sur \mathbb{R} . La somme discrète (série de Fourier) devient une somme continue (intégrale de Fourier), ce qui permet d'analyser le "contenu fréquentiel" de n'importe quel signal de durée finie.

Définition 18.4.1 (Transformée de Fourier). Pour une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier \hat{f} (ou $\mathcal{F}(f)$) est la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi x \xi} dx$$

Théorème 18.4.1 (Propriétés fondamentales). —

Lemme de Riemann-Lebesgue : Si $f \in L^1$, alors \hat{f} est une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini.

- **Théorème de convolution** : $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$. La transformée de Fourier transforme la convolution (opération d'analyse) en un simple produit (opération algébrique).

- **Formule d'inversion de Fourier** : Sous de bonnes conditions, on peut retrouver f à partir de \hat{f} par $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi$.

Théorème 18.4.2 (Théorème de Plancherel). La transformation de Fourier, initialement définie sur $L^1 \cap L^2$, se prolonge de manière unique en un isomorphisme d'espaces de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même. En particulier, elle préserve le produit scalaire et la norme (Identité de Plancherel) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Application (Principe d'incertitude de Heisenberg). Ce principe fondamental de la mécanique quantique et du traitement du signal est une conséquence directe des propriétés de la transformée de Fourier. Il stipule qu'une fonction et sa transformée de Fourier ne peuvent pas être simultanément très localisées. Plus un signal est concentré dans le temps, plus son spectre de fréquences est étalé, et vice-versa.

18.5 Distributions : La Théorie des Fonctions Généralisées

Objectif. Créer un cadre théorique rigoureux pour manipuler des "fonctions" pathologiques comme le "pic de Dirac" δ_0 , qui sont infinies en un point et nulles ailleurs, mais dont l'intégrale vaut 1. L'idée de Laurent Schwartz est de définir ces objets non pas par leurs valeurs, mais par la manière dont ils agissent sur des fonctions très régulières.

Définition 18.5.1 (Distribution). Une **distribution** sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions test $\mathcal{D}(\Omega)$ (fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact).

Exemple (Distributions usuelles). —

Distributions régulières : Toute fonction localement intégrable f définit une distribution T_f par $\langle T_f, \phi \rangle = \int f(x)\phi(x)dx$.

— **Distribution de Dirac :** $\langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a)$.
Ce n'est pas une distribution régulière.

— **Distribution "valeur principale" :** Permet de donner un sens à l'intégrale de $1/x$.

Définition 18.5.2 (Dérivée d'une distribution). On définit la dérivée T' d'une distribution T par la formule (inspirée de l'intégration par parties) :

$$\langle T', \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle$$

Remarque (La Révolution des Distributions). Cette définition est extraordinaire : toute distribution est infiniment dérivable. Les problèmes de régularité disparaissent. Par exemple, la fonction de Heaviside H (non dérivable en 0) a pour dérivée au sens des distributions la distribution de Dirac δ_0 .

Proposition 18.5.1 (Transformée de Fourier des distributions). La transformée de Fourier s'étend aux distributions tempérées (duales de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).

Exemple. — $\mathcal{F}(1) = \delta_0$.

— $\mathcal{F}(\delta_0) = 1$.

— $\mathcal{F}(e^{2i\pi ax}) = \delta_a$.

Le peigne de Dirac $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$ a pour transformée de Fourier lui-même, c'est la base de la formule sommatoire de Poisson.

Chapitre 19

Théorie de la Mesure : Refonder l'Intégrale sur des Bases Solides

19.1 Mesurer les Ensembles : Tribus et Mesures

Objectif. Construire une théorie rigoureuse de la "taille" (longueur, aire, volume, probabilité...) des ensembles. Confrontés à des ensembles très "exotiques", nous devons abandonner l'idée de pouvoir tout mesurer. L'objectif est de définir une classe d'ensembles "mesurables" (une tribu) suffisamment grande pour tous les besoins de l'analyse, et sur laquelle on peut définir une fonction "mesure" cohérente.

Définition 19.1.1 (Tribu ou σ -algèbre). Une **tribu** (ou σ -algèbre) sur un ensemble X est une collection \mathcal{A} de parties de X telle que :

1. $X \in \mathcal{A}$.
2. \mathcal{A} est stable par passage au complémentaire.
3. \mathcal{A} est stable par union **dénombrable**.

Le couple (X, \mathcal{A}) est un **espace mesurable**.

Remarque (La Stabilité Dénombrable). L'hypothèse de stabilité par union *dénombrable* (et non quelconque comme en topologie) est le cœur de la théorie. C'est le bon équilibre : assez forte pour permettre les passages à la limite, mais assez restrictive pour éviter les paradoxes de type Banach-Tarski qui émergent si on essaie de tout mesurer.

Définition 19.1.2 (Mesure). Une **mesure** sur un espace mesurable (X, \mathcal{A}) est une fonction $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et qui est **σ -additive** : pour toute suite (A_n) d'ensembles de \mathcal{A} deux à deux disjoints, $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Théorème 19.1.1 (Construction de la mesure de Lebesgue (via Carathéodory)). Il existe une unique mesure λ sur la tribu borélienne de \mathbb{R} (la

plus petite tribu contenant tous les ouverts) qui coïncide avec la longueur sur les intervalles. On peut ensuite compléter cette tribu pour obtenir la **tribu de Lebesgue**, qui contient tous les ensembles "utiles" à l'analyse, et bien plus.

Exemple (Ensembles de mesure nulle). —

Tout ensemble dénombrable (comme \mathbb{Q}) est de mesure de Lebesgue nulle.

— L'**ensemble de Cantor** est un exemple de compact non dénombrable, totalement discontinu, et de mesure de Lebesgue nulle. C'est un objet fractal qui montre que la notion de "taille" est subtile.

19.2 L'Intégrale de Lebesgue : Une Révolution Conceptuelle

Objectif. Construire une nouvelle intégrale, basée sur une philosophie radicalement différente de celle de Riemann. Au lieu de découper le domaine de définition (l'axe des abscisses), Lebesgue a l'idée de découper le domaine d'arrivée (l'axe des ordonnées).

Définition 19.2.1 (Fonction mesurable). Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ est mesurable si l'image réciproque de tout ensemble mesurable de Y est un ensemble mesurable de X . C'est l'analogue de la continuité pour les espaces mesurables.

Proposition 19.2.1 (Construction de l'intégrale de Lebesgue). L'intégrale est construite en trois étapes :

1. **Pour les fonctions étagées positives** ($f = \sum a_i \mathbf{1}_{A_i}$) : $\int f d\mu = \sum a_i \mu(A_i)$.
2. **Pour les fonctions mesurables positives** $f \geq 0$: $\int f d\mu = \sup \{ \int s d\mu \mid$

s étagée, $0 \leq s \leq f$ }.

3. **Pour une fonction mesurable quelconque** f : On la décompose en $f = f^+ - f^-$. Si $\int |f| d\mu < \infty$, on dit que f est intégrable et on pose $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$.

Remarque (La Philosophie de Lebesgue vs. Riemann). Imaginez que vous devez payer une grande somme avec des pièces et des billets.

- **Riemann** : Il prend les pièces et billets dans l'ordre où ils sortent de votre portefeuille (découpage du domaine) et les additionne au fur et à mesure.
- **Lebesgue** : Il commence par trier toutes les pièces et tous les billets par valeur (découpage du codomaine). Il compte combien il a de pièces de 1€, de 2€, de billets de 5€, etc., puis il fait une seule grande somme : (nb de pièces de 1€)x1€ + (nb de billets de 5€)x5€...

L'approche de Lebesgue est plus sophistiquée, mais bien plus efficace pour des ensembles de valeurs "compliqués". [Image comparing Riemann and Lebesgue integration methods]

19.3 Les Théorèmes de Convergence : La Puissance Retrouvée

Objectif. Montrer le gain spectaculaire de cette nouvelle construction. Les problèmes d'interversion de limites et d'intégrales, qui étaient un cauchemar avec l'intégrale de Riemann, sont résolus par des théorèmes d'une élégance et d'une puissance remarquables.

Théorème 19.3.1 (Théorème de Convergence Monotone (Beppo-Levi)). Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors :

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

L'interversion est toujours possible, même si la limite est infinie.

Lemme 19.3.2 (Lemme de Fatou). Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives. Alors :

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

Théorème 19.3.3 (Théorème de Convergence Dominée de Lebesgue). Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge presque partout vers une fonction f . S'il existe une fonction **intégrable** g (la "dominatrice") telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout n et presque tout x , alors f est intégrable et :

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

Remarque (La Clé de l'Analyse Moderne). Le théorème de convergence dominée est le "couteau suisse" de l'analyste. L'hypothèse de domination est souvent facile à vérifier et permet de justifier rigoureusement des passages à la limite qui seraient impossibles autrement. C'est l'un des théorèmes les plus utiles de toutes les mathématiques.

19.4 Le Lien avec l'Analyse Fonctionnelle et Fubini

Objectif. Connecter la théorie de la mesure à ses deux grandes applications : la construction des espaces fonctionnels modernes (L^p) et le calcul d'intégrales multiples (Fubini).

Théorème 19.4.1 (Théorème de Riesz-Fischer). Les espaces de fonctions $L^p(\Omega, \mu)$ sont des espaces de Banach pour tout $p \in [1, \infty]$.

Remarque (La Résolution du Problème de Complétude). C'est le résultat qui justifie a posteriori toute la construction. En changeant de théorie de l'intégration, on a non seulement gagné en généralité et en puissance, mais on a aussi "réparé" la structure des espaces de fonctions, les rendant complets et donc aptes à l'usage des outils de l'analyse fonctionnelle.

Théorème 19.4.2 (Théorèmes de Fubini). Soient (X, \mathcal{A}, μ) et (Y, \mathcal{B}, ν) deux espaces mesurés σ -finis.

- **(Fubini-Tonelli)** Si $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ est mesurable positive, alors les intégrales itérées et l'intégrale double sont égales (éventuellement infinies). On peut toujours intervertir l'ordre d'intégration.
- **(Fubini-Lebesgue)** Si $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ est **intégrable** pour la mesure produit, alors les intégrales itérées existent et sont égales à l'intégrale double.

Application (Calcul de l'intégrale de Gauss). On veut calculer $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$. On calcule

I^2 :

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

La fonction $e^{-(x^2+y^2)}$ est positive, donc on peut appliquer Fubini-Tonelli et passer en coordonnées polaires :

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = \pi$$

D'où $I = \sqrt{\pi}$. Le passage en polaires est rigoureusement justifié par Fubini.

Septième partie

Analyse

Chapitre 20

Séries : L'Art de Dompter l'Infini

20.1 Séries Numériques : Le Sens d'une Somme Infinie

Objectif. Donner un sens mathématique rigoureux à l'idée intuitive de "somme infinie". On développe une boîte à outils de critères de convergence pour déterminer si une telle somme est un nombre bien défini ou n'a pas de sens. La distinction entre convergence simple et convergence absolue est la première subtilité fondamentale.

Définition 20.1.1 (Convergence et Nature d'une série). Une série $\sum u_n$ converge si la suite de ses sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ converge. Elle converge **absolument** si la série $\sum |u_n|$ converge.

Proposition 20.1.1 (Convergence absolue \implies Convergence). La réciproque est fautive, ce qui donne lieu aux séries semi-convergentes.

Exemple (La série harmonique alternée). La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ converge (vers $\ln(2)$), mais ne converge pas absolument (la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge).

Théorème 20.1.1 (Critères de convergence pour les séries à termes positifs).

Comparaison : Comparaison à une série de référence (Riemann, géométrique).

- **Règle de d'Alembert** : Basée sur la limite du rapport $|u_{n+1}/u_n|$.
- **Règle de Cauchy** : Basée sur la limite de $\sqrt[n]{|u_n|}$.
- **Comparaison série-intégrale** : Permet d'étudier les séries de Riemann $\sum 1/n^\alpha$.

Application (Constante d'Euler-Mascheroni). En étudiant la différence entre la série harmonique et l'intégrale de $1/t$, on montre l'existence de la constante d'Euler-Mascheroni $\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln(N) \right)$.

20.2 Séries de Fonctions : Construire de Nouveaux Objets

Objectif. Passer de la somme de nombres à la somme de fonctions. La question centrale devient : si une suite de fonctions f_n possède une certaine propriété (continuité, dérivabilité, intégrabilité), la fonction somme $F = \sum f_n$ hérite-t-elle de cette propriété ? Cela dépend crucialement du **mode de convergence**.

Définition 20.2.1 (Modes de convergence). Soit une suite de fonctions (f_n) sur un ensemble X .

- **Convergence simple** : Pour chaque $x \in X$, la suite numérique $(f_n(x))$ converge.
- **Convergence uniforme** : $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$. C'est une convergence globale.
- **Convergence normale (pour les séries)** : La série numérique $\sum \sup_X |f_n(x)|$ converge. C'est un critère pratique qui implique la convergence uniforme.

Remarque (La force de la convergence uniforme). La convergence simple est une notion faible et souvent pathologique. La convergence uniforme est la "bonne" notion qui permet de transférer les propriétés des termes de la série à la fonction somme. Elle assure que les graphes des fonctions S_N se rapprochent "globalement" du graphe de S .

Théorème 20.2.1 (Théorèmes de transfert). Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge **uniformément** vers S :

- Si les f_n sont continues, alors S est continue.
- On peut intervertir série et intégrale : $\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.
- Si de plus les f_n sont \mathcal{C}^1 et que la série des

dérivées $\sum f'_n$ converge uniformément, on peut dériver terme à terme : $S' = \sum f'_n$.

Exemple (Construction de fonctions pathologiques). On peut utiliser des séries de fonctions pour construire des objets contre-intuitifs. L'exemple le plus célèbre est la **fonction de Weierstrass**, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$, qui est continue sur \mathbb{R} mais dérivable en aucun point.

20.3 Séries Entières : Le Pont entre Algèbre et Analyse

Objectif. Étudier les "polynômes de degré infini". Les séries entières sont des objets remarquables qui jouissent d'une régularité exceptionnelle à l'intérieur de leur disque de convergence. Elles sont le pont entre les fonctions analytiques et l'algèbre des polynômes.

Définition 20.3.1 (Série entière et Rayon de convergence). Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$. Il existe un $R \in [0, \infty]$, le **rayon de convergence**, tel que la série converge absolument pour $|z| < R$ et diverge pour $|z| > R$.

Théorème 20.3.1 (Régularité de la somme). La somme d'une série entière est une fonction **continue** et même **infiniment dérivable** (ou holomorphe) à l'intérieur de son disque de convergence. On peut dériver et intégrer terme à terme.

Remarque (La rigidité analytique). Ce théorème est spectaculaire. Une série entière se comporte comme un polynôme : on peut la manipuler terme à terme. La connaissance des coefficients $\{a_n\}$ (une information "algébrique") détermine entièrement la fonction somme et toutes ses dérivées (une information "analytique").

Exemple (Développements en série entière usuels).

- $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$. ($R = \infty$)
- $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ pour $|z| < 1$. ($R = 1$)
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ pour $|x| < 1$. ($R = 1$)

Application (Résolution d'équations différentielles). On peut chercher des solutions d'EDO sous forme de séries entières. Par exemple, pour l'équation d'Airy $y'' - xy = 0$, on suppose $y(x) = \sum a_n x^n$. On injecte dans l'équation, et on trouve une relation de récurrence sur les coefficients a_n , ce qui permet de définir les fonc-

tions d'Airy.

20.4 Séries de Fourier : La Décomposition Harmonique

Objectif. Changer de point de vue : au lieu de "construire" une fonction, on cherche à la "décomposer" en une somme de fonctions de base simples et oscillantes (les sinus et cosinus). C'est le passage de la base polynomiale $\{x^n\}$ (pour les séries entières) à la base trigonométrique $\{e^{inx}\}$.

Définition 20.4.1 (Coefficients et Série de Fourier). Pour une fonction f 2π -périodique et intégrable, ses coefficients de Fourier sont $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$. Sa série de Fourier est $S(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{inx}$.

Théorème 20.4.1 (Théorème de Convergence de Dirichlet). Si f est 2π -périodique et \mathcal{C}^1 par morceaux, alors sa série de Fourier converge en tout point x vers $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.

Théorème 20.4.2 (Identité de Parseval). Si f est de carré intégrable, alors sa série de Fourier converge vers f au sens de la norme L^2 , et on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2$$

Remarque (La vision Hilbertienne). Ce théorème est la traduction du théorème de Pythagore dans l'espace de Hilbert $L^2([0, 2\pi])$. Il signifie que la famille des $\{e^{inx}\}$ (normalisée) forme une base orthonormale de cet espace. L'énergie totale du signal (L^2 norm) est la somme des énergies de ses composantes harmoniques.

Exemple (Décomposition de signaux simples). —

Une fonction "créneau" (égale à 1 sur $[0, \pi]$ et -1 sur $[\pi, 2\pi]$) se décompose en une somme infinie de sinus d'harmoniques impaires.

— Une fonction "dents de scie" se décompose en une somme de sinus.

Application (Résolution de l'équation de la chaleur). La méthode de séparation des variables pour l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sur un segment mène naturellement à une décomposition de la solution en série de Fourier. Les conditions aux limites sélectionnent la base (sinus ou cosinus), et l'équation différen-

tielle transforme les coefficients de Fourier de la condition initiale $u(0, x)$ en $c_n(t) = c_n(0)e^{-n^2 t}$.

Application (Calcul de sommes de séries numériques). En appliquant la formule de Parseval à la série de Fourier de fonctions simples, on peut calculer des sommes célèbres. Par exemple, avec la fonction $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi]$, Parseval donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

C'est le problème de Bâle, résolu par Euler.

Chapitre 21

Analyse Fonctionnelle : Une Perspective Géométrique

21.1 Préambule : Fondamentaux de Topologie et des Espaces Métriques

Objectif. Établir le langage commun et les concepts fondamentaux sur lesquels repose toute l'analyse fonctionnelle. L'idée est de partir du cadre le plus général (la topologie) pour arriver progressivement à la structure riche et concrète des espaces vectoriels normés. Ce préambule sert de fondation et de référence pour toutes les notions ultérieures.

21.1.1 Topologie Générale : Le Langage de la Proximité

Définition 21.1.1 (Espace topologique). Un espace topologique est un couple (X, \mathcal{T}) où X est un ensemble et \mathcal{T} est une collection de parties de X (appelées **ouverts**) telle que :

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$.
2. Toute union (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.
3. Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Une partie $F \subset X$ est dite **fermée** si son complémentaire $X \setminus F$ est un ouvert.

Définition 21.1.2 (Continuité). Une application $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ entre deux espaces topologiques est **continue** si l'image réciproque de tout ouvert de Y est un ouvert de X .

Définition 21.1.3 (Compacité). Une partie K d'un espace topologique X est **compacte** si de tout recouvrement de K par une famille d'ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Remarque (La Propriété Fondamentale). La compacité est la notion la plus importante de ce préambule. C'est l'analogue topologique de la "dimension finie". Elle garantit l'existence de limites pour les suites (ou suites généralisées) et de points extrémaux pour les fonctions continues.

- L'image d'un compact par une application continue est compacte.
- Dans un espace séparé (Hausdorff), un compact est toujours fermé.
- Un fermé dans un compact est compact.

Définition 21.1.4 (Connexité). Un espace topologique X est **connexe** s'il n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints. Intuitivement, un espace "d'un seul tenant".

21.1.2 Espaces Métriques : La Notion de Distance

Objectif. Spécialiser le cadre topologique en introduisant une fonction "distance". Cela permet de quantifier la proximité et de définir des notions plus concrètes comme les suites de Cauchy et la complétude, qui sont la clé de voûte de l'analyse.

Définition 21.1.5 (Espace métrique). Un espace métrique est un couple (X, d) où X est un ensemble et $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une distance, vérifiant la séparation, la symétrie et l'inégalité triangulaire.

Remarque (Topologie Induite). Toute distance d induit une topologie sur X dont les ouverts sont les réunions de boules ouvertes $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$. C'est le cadre naturel de l'analyse "classique".

Définition 21.1.6 (Suite de Cauchy). Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans un espace métrique (X, d)

est une **suite de Cauchy** si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq N$, on a $d(x_p, x_q) < \epsilon$.

Remarque (L'Idée d'une "Convergence Intrinsèque"). Une suite de Cauchy est une suite dont les termes se rapprochent indéfiniment les uns des autres. C'est une suite qui "veut converger", sans préjuger de l'existence d'une limite dans l'espace. La notion est intrinsèque à la suite, contrairement à la convergence qui dépend de l'espace ambiant.

Définition 21.1.7 (Espace complet). Un espace métrique (X, d) est **complet** si toute suite de Cauchy de X converge vers un élément de X .

Remarque (La Propriété Clé de l'Analyse). La complétude est la propriété qui nous autorise à passer à la limite. C'est la garantie que l'espace n'a pas de "trous". \mathbb{Q} n'est pas complet, mais \mathbb{R} l'est. Cette propriété est le pont conceptuel entre les espaces métriques généraux et les espaces de Banach.

Théorème 21.1.1 (Caractérisation des compacts dans un métrique). Une partie d'un espace métrique est compacte si et seulement si elle est précompacte (ou totalement bornée) et complète. Dans \mathbb{R}^n , cela équivaut à "fermé et borné" (Théorème de Borel-Lebesgue).

21.1.3 Espaces Vectoriels Normés : La Synthèse

Objectif. Combiner la structure algébrique d'un espace vectoriel avec la structure topologique d'un espace métrique, en s'assurant que les deux sont compatibles. C'est le point de départ effectif de l'analyse fonctionnelle.

Définition 21.1.8 (Espace vectoriel normé). Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel E muni d'une norme $\|\cdot\|$, qui induit une distance $d(x, y) = \|x - y\|$. Cette distance est compatible avec la structure vectorielle (i.e., l'addition et la multiplication par un scalaire sont continues).

Remarque (Le Lien Final). Un **espace de Banach** est un espace vectoriel normé qui est **complet** en tant qu'espace métrique. Un **espace de Hilbert** est un espace de Banach dont la norme dérive d'un **produit scalaire**. Ce préambule a donc posé toutes les briques logiques pour comprendre ces définitions fondamentales.

21.2 Espaces de Banach : La Scène de l'Analyse

Objectif. Poser le décor. L'analyse a besoin de limites pour exister. Le cadre minimal pour cela est un espace vectoriel normé qui soit **complet** : un espace de Banach. Nous verrons immédiatement que ce gain analytique (la complétude) se paie par une perte géométrique majeure : la compacité des ensembles bornés, qui est la propriété fondamentale des espaces de dimension finie. Toute la suite de ce cours peut être vue comme une quête pour retrouver cette compacité perdue.

Définition 21.2.1 (Espace de Banach). Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach s'il est complet pour la métrique induite par la norme, c'est-à-dire si toute suite de Cauchy y est convergente.

Théorème 21.2.1 (Lemme de Riesz). Soit E un e.v.n. et F un sous-espace vectoriel fermé strict de E . Alors pour tout $\epsilon \in]0, 1[$, il existe $x_\epsilon \in E$ tel que $\|x_\epsilon\| = 1$ et $d(x_\epsilon, F) \geq 1 - \epsilon$.

Remarque (La Compacité, Analogie de la "Dimension Finie"). Ce lemme, d'apparence technique, est le théorème des "mauvaises nouvelles". Il est l'outil qui prouve que la boule unité fermée d'un e.v.n. de dimension infinie n'est **jamais** compacte. Pourquoi est-ce si grave ? Parce que la compacité est la propriété qui garantit qu'on peut extraire des sous-suites convergentes de toute suite bornée. C'est le moteur de tous les théorèmes d'existence en dimension finie. En analyse fonctionnelle, la compacité devient donc une propriété rare et précieuse. La traquer, c'est essayer de se ramener, par un moyen détourné, à une situation aussi "confortable" et "rigide" que la dimension finie.

Définition 21.2.2 (Norme subordonnée). Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n. La norme subordonnée d'une application linéaire continue $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est :

$$\|u\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{\|x\|_E=1} \|u(x)\|_F$$

Muni de cette norme, si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ l'est aussi.

21.3 Les Piliers : La Puissance de la Complétude

Objectif. Démontrer que si l'on paie le prix de la non-compacité, l'hypothèse de complétude (via le lemme de Baire) nous offre en retour des outils d'une puissance extraordinaire. Ces théorèmes sont les "machines" de l'analyse fonctionnelle, permettant de construire des objets, de prouver des convergences et de simplifier des problèmes.

Théorème 21.3.1 (Hahn-Banach, forme analytique et géométrique). **Analytique :** Toute forme linéaire continue sur un s.e.v. peut être prolongée à l'espace entier en préservant sa norme. **Géométrique :** Deux convexes disjoints, dont l'un est ouvert, peuvent être séparés par un hyperplan affine fermé.

Application (Le dual "voit" toute la géométrie). La conséquence la plus importante de Hahn-Banach est que le dual E^* est "riche" : il contient suffisamment de formes linéaires pour distinguer tous les points de E . Géométriquement, cela signifie que tout ensemble convexe fermé peut être vu comme une intersection d'demi-espaces. Le dual encode donc toute la structure convexe de l'espace.

Théorème 21.3.2 (Banach-Steinhaus et le principe de la borne uniforme). Une famille d'opérateurs linéaires continus entre un Banach et un e.v.n. qui est simplement bornée est uniformément bornée.

Théorème 21.3.3 (Théorème de l'application ouverte et de l'isomorphisme de Banach). Toute application linéaire continue surjective entre deux espaces de Banach est ouverte. En conséquence, toute application linéaire continue bijective entre deux Banach est un homéomorphisme.

Théorème 21.3.4 (Théorème du graphe fermé). Une application linéaire entre deux espaces de Banach est continue si et seulement si son graphe est fermé.

21.4 Dualité et Topologies Faibles : La Quête de la Compacité

Objectif. Ici, nous abordons frontalement le problème de la non-compacité. L'idée est un compromis fondamental : si l'on ne peut pas

avoir la compacité pour la topologie "forte" (celle de la norme), peut-on l'obtenir en affaiblissant la notion de convergence ? C'est le rôle des topologies faibles, qui sont le cadre naturel pour de nombreux problèmes variationnels.

Définition 21.4.1 (Dual, Bidual et Réflexivité). Le dual topologique de E est $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Un espace de Banach E est dit réflexif si l'injection canonique $J : E \rightarrow E^{**}$ est un isomorphisme.

Définition 21.4.2 (Topologies Faible et Faible-*). La topologie faible $\sigma(E, E^*)$ sur E est la topologie initiale associée à la famille des formes linéaires de E^* . La topologie faible-* $\sigma(E^*, E)$ sur E^* est la topologie initiale associée à la famille des évaluations $\{J(x) \mid x \in E\}$.

Théorème 21.4.1 (Théorème de Banach-Alaoglu). La boule unité fermée du dual E^* d'un e.v.n. E est compacte pour la topologie faible-*.

Remarque (La Compacité Retrouvée). C'est le résultat central qui répond à notre quête. Il nous offre la compacité sur un plateau, mais à un prix : celui de la topologie. On sacrifie la convergence forte (en norme) pour une convergence plus subtile, mais on regagne l'outil essentiel d'extraction de sous-suites. Pour un espace réflexif (comme un Hilbert), la boule unité est elle-même faiblement compacte. C'est ce qui rend ces espaces si "confortables".

21.5 Espaces de Hilbert : La Géométrie Triomphante

Objectif. Étudier le cadre "parfait" où l'analyse et la géométrie fusionnent. La présence d'un produit scalaire induit une notion d'orthogonalité qui rigidifie l'espace et simplifie drastiquement la théorie. Les projections deviennent des outils d'approximation, le dual s'identifie à l'espace lui-même, et les opérateurs les plus importants deviennent "diagonalisables".

Théorème 21.5.1 (Théorème de projection sur un convexe fermé). Dans un Hilbert, tout convexe fermé non vide est un "ensemble de meilleure approximation" : pour tout point de l'espace, il existe un unique point du convexe qui minimise la distance.

Application (Optimisation Convexe et Machine Learning). Ce théorème est le fondement de nombreux algorithmes. Par exemple, les "Support Vector Machines" (SVM) en clas-

sification consistent à trouver l'hyperplan qui sépare au mieux deux ensembles de points. Ce problème se ramène à la projection d'un point sur un convexe fermé.

Théorème 21.5.2 (Théorème de représentation de Riesz). Tout espace de Hilbert s'identifie canoniquement (via une isométrie antilinéaire) à son dual. C'est l'archétype d'un espace réflexif.

Théorème 21.5.3 (Alternative de Fredholm). Soit T un opérateur compact sur un Hilbert H . Alors l'équation $(I - T)x = y$ se comporte exactement comme un système linéaire en dimension finie : elle a une solution unique pour tout y si et seulement si l'équation homogène $(I - T)x = 0$ n'a que la solution triviale.

Théorème 21.5.4 (Théorème Spectral pour les opérateurs compacts auto-adjoints). Soit T un opérateur compact auto-adjoint sur un Hilbert H . Alors il existe une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T .

Remarque (La "Diagonalisation" en Dimension Infinie). C'est l'aboutissement de notre quête. Dans la "bonne" base, un opérateur complexe se comporte comme une simple multiplication par des scalaires. Cela permet de définir des fonctions d'opérateurs (comme e^T) et de résoudre des équations d'évolution (comme l'équation de la chaleur ou de Schrödinger) par décomposition sur cette base. L'opérateur différentiel (non borné) est "dompté" par un opérateur intégral inverse (compact), dont on peut appliquer le théorème spectral. C'est le triomphe de l'analyse fonctionnelle.

Chapitre 22

Analyse Complexe : La Rigidité Miraculeuse du Plan Complexe

22.1 Le Monde Holomorphe : Une Condition Extraordi- naire

Objectif. Introduire la notion de dérivabilité complexe (holomorphie) et montrer qu'elle est infiniment plus contraignante que la dérivabilité réelle. C'est une condition locale d'une rigidité géométrique spectaculaire : elle force une fonction à être localement une similitude. Cette rigidité est la source de tous les "miracles" de l'analyse complexe.

Définition 22.1.1 (Dérivabilité Complexe (Holomorphie)). Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ (où U est un ouvert de \mathbb{C}) est **holomorphe** en $z_0 \in U$ si la limite du taux d'accroissement $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe quand $z \rightarrow z_0$.

Théorème 22.1.1 (Équations de Cauchy-Riemann). Soit $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$. La fonction f est holomorphe sur U si et seulement si ses parties réelle P et imaginaire Q sont de classe \mathcal{C}^1 et vérifient les équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Remarque (La Contrainte Géométrique). Ces équations ne sont pas anodines. Elles impliquent que le Jacobien de f (vue comme une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2) est la matrice d'une similitude directe. Cela signifie qu'une fonction holomorphe préserve les angles en tout point où sa dérivée n'est pas nulle. C'est une transformation conforme.

Exemple (Fonctions holomorphes et non-holomorphes). —

$f(z) = z^n$ est holomorphe sur \mathbb{C} (entière).

— $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ est entière.

— $f(z) = 1/z$ est holomorphe sur \mathbb{C}^* .

— $f(z) = \bar{z} = x - iy$ n'est holomorphe en aucun point. Elle est \mathbb{R} -différentiable mais pas \mathbb{C} -différentiable.

— $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ n'est holomorphe qu'en $z = 0$.

22.2 L'Intégration Complexe et la Formule de Cauchy

Objectif. Développer l'outil principal de la théorie : l'intégration le long de chemins. Le théorème de Cauchy va révéler un premier miracle : l'intégrale d'une fonction holomorphe sur un lacet ne dépend que de la "topologie" du lacet. La formule de Cauchy en sera la conséquence spectaculaire, reliant les valeurs à l'intérieur d'un domaine à celles sur sa frontière.

Définition 22.2.1 (Intégrale le long d'un chemin). Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ un chemin \mathcal{C}^1 et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On définit $\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$.

Théorème 22.2.1 (Théorème intégral de Cauchy). Soit U un ouvert étoilé de \mathbb{C} et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors, pour tout lacet (chemin fermé) γ dans U , on a :

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Théorème 22.2.2 (Formule intégrale de Cauchy). Sous les mêmes hypothèses, pour tout $z_0 \in U$ et pour tout lacet γ simple entourant z_0 , on a :

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Remarque (Le Principe "Local-Global"). Cette formule est le cœur de la théorie. Elle est extraordinaire : la valeur d'une fonction holomorphe en un point est entièrement déterminée par ses valeurs sur un lacet qui l'entoure, aussi loin soit-il. L'information locale (en z_0) est encodée par une information globale (sur γ). C'est la première manifestation de la rigidité holomorphe.

22.3 Les Conséquences de la Rigidité Holomorphe

Objectif. Explorer les conséquences incroyables de la formule de Cauchy. On va voir qu'être une seule fois dérivable au sens complexe implique d'être infiniment dérivable, développable en série entière, et d'obéir à des principes très forts comme celui du maximum ou de Liouville.

Corollaire 22.3.0.1 (Développabilité en série entière). Toute fonction holomorphe sur un disque ouvert est développable en série entière sur ce disque. Une fonction holomorphe est donc analytique.

Théorème 22.3.1 (Inégalités de Cauchy et Théorème de Liouville). La formule de Cauchy permet de majorer les dérivées successives. Une conséquence est le **théorème de Liouville** : toute fonction entière (holomorphe sur \mathbb{C}) et bornée est constante.

Application (Théorème Fondamental de l'Algèbre (d'Alembert-Gauss)). Soit P un polynôme non constant. Si P n'a pas de racine dans \mathbb{C} , alors $1/P$ est une fonction entière. Comme $|P(z)| \rightarrow \infty$ quand $|z| \rightarrow \infty$, $1/P$ est bornée. D'après Liouville, $1/P$ est constante, donc P est constant, ce qui est une contradiction.

Théorème 22.3.2 (Principe du Maximum). Le module d'une fonction holomorphe non constante sur un domaine ne peut pas atteindre son maximum à l'intérieur de ce domaine. Le maximum est nécessairement sur la frontière.

Théorème 22.3.3 (Principe des zéros isolés). Les zéros d'une fonction holomorphe non nulle sont isolés.

Corollaire 22.3.3.1 (Principe du prolongement analytique). Si deux fonctions holomorphes sur un domaine coïncident sur un ensemble de points ayant un point d'accumulation dans ce domaine, alors elles sont égales sur tout

le domaine.

22.4 Analyse des Singularités et Théorème des Résidus

Objectif. Classifier les points où une fonction cesse d'être holomorphe et utiliser cette classification pour développer un outil de calcul d'intégrales d'une puissance phénoménale : le théorème des résidus.

Théorème 22.4.1 (Séries de Laurent). Toute fonction holomorphe sur une couronne $C(z_0, r, R)$ admet un unique développement en série de Laurent : $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.

Définition 22.4.1 (Classification des singularités isolées). Soit z_0 une singularité isolée de f .

- **Singularité apparente (effaçable)** : La partie principale de la série de Laurent est nulle. f est prolongeable par continuité.
- **Pôle d'ordre k** : La partie principale est finie et le premier coefficient non nul est a_{-k} . $|f(z)| \rightarrow \infty$ quand $z \rightarrow z_0$.
- **Singularité essentielle** : La partie principale a une infinité de termes non nuls. Le comportement de f au voisinage de z_0 est "chaotique".

Exemple (Types de singularités). —

$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ a une singularité apparente en 0.

— $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^3}$ a un pôle d'ordre 3 en 1.

— $f(z) = e^{1/z}$ a une singularité essentielle en 0. D'après le théorème de Casorati-Weierstrass, l'image de toute boule épointée de centre 0 est dense dans \mathbb{C} .

Définition 22.4.2 (Résidu). Le **résidu** de f en une singularité isolée z_0 , noté $\text{Res}(f, z_0)$, est le coefficient a_{-1} de son développement en série de Laurent.

Théorème 22.4.2 (Théorème des Résidus). Soit f une fonction holomorphe sur un domaine U sauf en un nombre fini de singularités isolées z_k . Pour tout lacet simple γ dans U n'entourant que ces singularités, on a :

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_k \text{Res}(f, z_k)$$

Application (Calcul d'intégrales réelles). C'est l'application la plus célèbre.

- **Fractions rationnelles** : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$. On intègre sur un demi-cercle dans le demi-plan supérieur et on fait tendre le rayon vers l'infini.
- **Intégrales trigonométriques** : $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$. On pose $z = e^{i\theta}$, l'intégrale devient une intégrale sur le cercle unité dans le plan complexe.
- **Transformées de Fourier** : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$. On utilise le lemme de Jordan.
- **Sommation de séries** : On peut montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ en intégrant la fonction $f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}$ sur un grand carré.

Chapitre 23

Analyse Convexe : La Géométrie de l'Optimisation

23.1 Le Langage de la Convexité

Objectif. Introduire les objets fondamentaux de l'analyse convexe. La convexité est une propriété géométrique extraordinairement puissante qui garantit que les minima locaux sont des minima globaux, et qui assure l'existence et l'unicité de solutions à de nombreux problèmes d'approximation.

Définition 23.1.1 (Ensemble Convexe). Une partie C d'un espace vectoriel E est **convexe** si pour tous $x, y \in C$, le segment $[x, y] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0, 1]\}$ est inclus dans C .

Définition 23.1.2 (Enveloppe Convexe). L'enveloppe convexe d'une partie A , notée $\text{conv}(A)$, est le plus petit ensemble convexe contenant A .

Théorème 23.1.1 (Théorème de Carathéodory). Dans un espace de dimension n , tout point de l'enveloppe convexe d'un ensemble A peut s'écrire comme une combinaison convexe de au plus $n + 1$ points de A .

Définition 23.1.3 (Fonction Convexe). Soit C un convexe. Une fonction $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ est **convexe** si pour tous $x, y \in C$ et $t \in [0, 1]$:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Géométriquement, la corde est au-dessus de la courbe. L'épigraphe de f est un ensemble convexe.

Proposition 23.1.1 (Caractérisation différentielle). Si f est de classe \mathcal{C}^1 , f est convexe si et seulement si $\forall x, y, f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$ (la courbe est au-dessus de ses tangentes). Si f est de classe \mathcal{C}^2 , f est convexe si et seulement si sa matrice Hessienne est semi-définie positive en tout point.

23.2 Théorèmes de Séparation et Points Extrémaux

Objectif. Montrer comment les ensembles convexes peuvent être étudiés "de l'extérieur" (par les hyperplans qui les séparent) et "de l'intérieur" (par leurs briques de base, les points extrémaux).

Théorème 23.2.1 (Théorèmes de Séparation de Hahn-Banach). C'est la version géométrique du théorème de Hahn-Banach.

- **Première forme** : Deux convexes non vides et disjoints, dont l'un est ouvert, peuvent être séparés par un hyperplan affine.
- **Seconde forme** : Deux convexes compacts non vides et disjoints peuvent être séparés **strictement**.

Remarque (La Dualité Géométrique). Ces théorèmes sont fondamentaux. Ils impliquent qu'un ensemble convexe fermé est l'intersection de tous les demi-espaces fermés qui le contiennent. Cela permet de ramener l'étude d'un objet convexe complexe à l'étude d'objets beaucoup plus simples, les demi-espaces.

Définition 23.2.1 (Point extrémal). Un point x d'un convexe C est **extrémal** s'il n'est le milieu d'aucun segment non trivial inclus dans C . Ce sont les "coins" ou les "sommets" du convexe.

Théorème 23.2.2 (Théorème de Krein-Milman). Tout convexe compact d'un espace localement convexe (en particulier, un Banach) est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.

Remarque (La Reconstruction par les Atomes). Ce théorème est magnifique. Il dit qu'un objet convexe compact, potentiellement

très complexe, est entièrement déterminé par ses "atomes", les points extrémaux.

Exemple. — Les points extrémaux d'un polygone sont ses sommets.

— Les points extrémaux d'un disque sont les points de son cercle frontière.

— La boule unité de l'espace $L^1([0, 1])$ n'a aucun point extrémal.

23.3 Autres Théorèmes Géométriques Fondamentaux

Objectif. Présenter quelques autres résultats classiques de la géométrie convexe en dimension finie.

Théorème 23.3.1 (Théorème de Helly). Soit une famille finie d'au moins $n + 1$ ensembles convexes dans \mathbb{R}^n . Si toute sous-famille de $n + 1$ de ces convexes a une intersection non vide, alors l'intersection de tous les convexes de la famille est non vide.

Théorème 23.3.2 (Théorème du Point Fixe de Brouwer). Toute application continue d'une boule fermée de \mathbb{R}^n dans elle-même admet au moins un point fixe.

Remarque (Un Résultat Non Constructif). Ce théorème garantit l'existence d'un point fixe, mais ne donne aucune méthode pour le trouver. Sa preuve repose sur des arguments de topologie algébrique (homologie) et n'est pas au programme de l'agrégation, mais le résultat doit être connu.

Application (Équilibre de Nash en théorie des jeux). Le théorème de Brouwer peut être utilisé pour prouver l'existence d'un équilibre de Nash dans un jeu à n joueurs. L'ensemble des stratégies mixtes est un convexe compact, et on construit une fonction continue sur cet ensemble dont les points fixes correspondent aux équilibres.

Chapitre 24

Équations Différentielles : L'Art de Prédire le Futur

24.1 Existence et Unicité : Le Socle Déterministe

Objectif. Établir le dogme fondamental de la physique classique : le déterminisme. Étant donné un état initial, l'évolution future du système est unique et entièrement déterminée. Le théorème de Cauchy-Lipschitz est la traduction mathématique de ce principe. On explorera la portée et les limites de ce résultat.

Définition 24.1.1 (Problème de Cauchy). Un problème de Cauchy est la donnée d'une équation différentielle $y' = f(t, y)$ et d'une condition initiale $y(t_0) = y_0$, où f est une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times E$ à valeurs dans un espace de Banach E .

Théorème 24.1.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz). Si f est continue et **localement lipschitzienne** par rapport à sa deuxième variable, alors pour toute condition initiale $(t_0, y_0) \in U$, il existe une solution **locale unique** au problème de Cauchy.

Lemme 24.1.2 (Lemme de Grönwall). C'est le lemme technique clé pour prouver l'unicité et étudier la dépendance des solutions par rapport aux conditions initiales. Il permet de contrôler une fonction qui vérifie une certaine inégalité différentielle.

Théorème 24.1.3 (Théorème d'existence de Peano-Arzelà). Si f est seulement **continue** (et E de dimension finie), alors il existe au moins une solution locale au problème de Cauchy. L'unicité n'est plus garantie.

Exemple (La nécessité de la condition de Lipschitz). Considérons le problème de Cauchy $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ avec $y(0) = 0$.

— La fonction $y_1(t) = 0$ est une solution évidente.

— La fonction $y_2(t) = t^3$ est aussi une solution.

Il n'y a pas unicité. La fonction $y \mapsto \sqrt[3]{y^2}$ n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0.

Théorème 24.1.4 (Théorème de sortie des compacts). Toute solution maximale (J, y) d'un problème de Cauchy est définie sur un intervalle ouvert $J =]t_{\min}, t_{\max}[$. Si $t_{\max} < \infty$, alors la solution "explose" en temps fini : pour tout compact $K \subset U$, il existe un temps $t_K < t_{\max}$ tel que pour $t > t_K$, $(t, y(t)) \notin K$.

24.2 Équations Différentielles Linéaires : Un Monde Structuré

Objectif. Montrer que lorsque les équations sont linéaires, la théorie devient globale et la structure des solutions est entièrement gouvernée par l'algèbre linéaire. C'est l'illustration la plus parfaite de l'interaction entre l'analyse et l'algèbre.

Proposition 24.2.1 (Structure de l'ensemble des solutions). Pour une équation linéaire homogène $y' = A(t)y$, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension n (si $E = \mathbb{R}^n$). Pour l'équation avec second membre $y' = A(t)y + b(t)$, l'ensemble des solutions est un espace affine de la forme $y_p + \ker(L)$, où y_p est une solution particulière.

Définition 24.2.1 (Wronskien). Le wronskien d'une famille de n solutions (y_1, \dots, y_n) est le déterminant $W(t) = \det(y_1(t), \dots, y_n(t))$. Les solutions forment une base si et seulement si leur wronskien est non nul en un point (et donc en tout point).

Théorème 24.2.1 (Systèmes Linéaires à Coef-

ficients Constants). Pour le système $Y' = AY$ où A est une matrice constante, la solution unique au problème de Cauchy $Y(t_0) = Y_0$ est donnée par :

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A}Y_0$$

où $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$ est l'exponentielle de matrice.

Remarque (La Réduction des Endomorphismes en action). Le comportement qualitatif de toutes les solutions est entièrement dicté par le spectre de la matrice A . Le calcul de e^{tA} se fait via la réduction de A (diagonalisation, décomposition de Dunford).

- Les valeurs propres à partie réelle négative induisent une convergence vers 0.
- Les valeurs propres à partie réelle positive induisent une divergence.
- Les parties imaginaires des valeurs propres induisent des oscillations.

Exemple (Portraits de phase en dimension 2 pour $Y' = AY$).

- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$: **Nœud stable**. Toutes les trajectoires convergent vers l'origine.
- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: **Col** ou **Selle**. Point d'équilibre instable.
- $\lambda = a \pm ib$ avec $a < 0$: **Foyer stable**. Les trajectoires spiralent en convergeant vers l'origine.
- $\lambda = \pm ib$: **Centre**. Les trajectoires sont des ellipses fermées.

24.3 Étude Qualitative : Dessiner le Futur sans Calculer

Objectif. Changer de philosophie. Pour les systèmes non-linéaires, trouver des solutions explicites est souvent impossible. L'idée est alors d'étudier directement le comportement global des solutions (stabilité, périodicité, comportement asymptotique) à partir du champ de vecteurs. C'est la naissance de la théorie des systèmes dynamiques.

Définition 24.3.1 (Système autonome et points d'équilibre). Un système est autonome si $y' = f(y)$ (le champ de vecteurs ne dépend pas du temps). Un point y_0 est un point d'équilibre (ou critique) si $f(y_0) = 0$.

Théorème 24.3.1 (Stabilité par Linéarisation). Soit y_0 un point d'équilibre d'un système $y' = f(y)$. On note $A = J_f(y_0)$ la matrice jacobienne de f en y_0 .

- Si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative, alors y_0 est asymptotiquement stable.
- Si au moins une valeur propre de A a une partie réelle strictement positive, alors y_0 est instable.

Exemple (Le pendule simple). L'équation du pendule est $\theta'' + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$. On la transforme en un système du premier ordre.

- L'équilibre ($\theta = 0, \omega = 0$) (position basse) est un centre pour le système linéarisé (stable).
- L'équilibre ($\theta = \pi, \omega = 0$) (position haute) est un col pour le système linéarisé (instable).

Le portrait de phase montre des orbites périodiques autour de l'équilibre stable.

Exemple (Le modèle prédateur-proie de Lotka-Volterra). Un système de deux équations non-linéaires modélisant l'évolution de populations de proies (x) et de prédateurs (y). Les solutions sont des cycles périodiques fermés autour d'un point d'équilibre, illustrant une cohabitation oscillatoire.

24.4 Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles (EDP)

Objectif. Ouvrir une fenêtre sur le monde des EDP en étudiant les trois équations linéaires prototypiques du second ordre. Chacune modélise une classe de phénomènes physiques fondamentalement différente et possède un comportement mathématique distinct.

Définition 24.4.1 (Les trois EDP canoniques).

- **Équation de la chaleur (Parabolique)** : $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$. Modélise les phénomènes de diffusion.
- **Équation des ondes (Hyperbolique)** : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$. Modélise les phénomènes de propagation.
- **Équation de Laplace (Elliptique)** : $\Delta u = 0$. Modélise les états d'équilibre.

Proposition 24.4.1 (Propriétés qualitatives).

- **Chaleur** : Effet **régularisant infini**. Même avec une donnée initiale discontinue, la solution est C^∞ pour tout $t > 0$. L'information se propage à une vitesse infinie.

- **Ondes** : L'information se propage à **vi-tesse finie**. Les singularités de la donnée initiale se propagent le long des caractéristiques.
- **Laplace** : Les solutions (fonctions harmoniques) sont analytiques et vérifient le **principe du maximum** (le max est atteint sur le bord du domaine).

Application (Solution de l'équation de la chaleur par séries de Fourier). Pour l'équation de la chaleur sur $[0, \pi]$ avec conditions aux limites nulles et donnée initiale $u(0, x) = f(x)$, on cherche une solution par séparation des variables de la forme $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx)$. On obtient une EDO pour chaque coefficient b_n , ce qui donne la solution :

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

où les c_n sont les coefficients de Fourier de f . On voit l'effet régularisant : les hautes fréquences (grands n) sont exponentiellement atténuées très rapidement.

Chapitre 25

Équations aux Dérivées Partielles - Modéliser les Phénomènes Continus

25.1 Le Langage des EDP : Classification et Problèmes Bien Posés

Objectif. Introduire le vocabulaire des EDP et, surtout, la grande "trichotomie" qui gouverne toute la théorie : la classification en types **elliptique**, **parabolique** et **hyperbolique**. Cette classification n'est pas une simple convention technique ; elle reflète des comportements physiques et des structures mathématiques fondamentalement différents.

Définition 25.1.1 (EDP Linéaire d'Ordre 2). Une EDP linéaire d'ordre 2 pour une fonction $u(x_1, \dots, x_n)$ est de la forme :

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + (\text{termes d'ordre inférieur}) = f(x) \text{ bord, second membre}.$$

Proposition 25.1.1 (Classification). On s'intéresse à la forme quadratique associée à la partie d'ordre 2, $Q(v) = \sum a_{ij} v_i v_j$. En un point x , l'opérateur est dit :

- **Elliptique** si la forme quadratique Q est définie (positive ou négative). C'est le cas du **Laplacien** $\Delta u = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.
- **Parabolique** si Q est dégénérée et non nulle. C'est le cas de l'opérateur de la chaleur $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$.
- **Hyperbolique** si Q est non-dégénérée mais non-définie (signature de type $(n-1, 1)$). C'est le cas du **D'Alembertien** $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$.

Remarque (La Physique derrière la Classification). Cette classification correspond à trois classes de phénomènes physiques :

- **Elliptique** : Phénomènes d'équilibre,

états stationnaires (membranes élastiques, potentiels électrostatiques).

- **Parabolique** : Phénomènes de diffusion, irréversibles (diffusion de la chaleur, des gaz).

- **Hyperbolique** : Phénomènes de propagation, réversibles (ondes sonores, lumineuses, cordes vibrantes).

Définition 25.1.2 (Problème bien posé (au sens de Hadamard)). Un problème d'EDP est bien posé s'il satisfait trois conditions :

1. **Existence** : Il admet au moins une solution.
2. **Unicité** : Il admet au plus une solution.
3. **Stabilité** : La solution dépend continûment des données (conditions initiales, au bord, second membre).

25.2 Type Elliptique : L'Équation de Laplace $\Delta u = 0$

Objectif. Étudier l'équation prototypique des états d'équilibre. Les solutions, appelées fonctions harmoniques, sont d'une régularité exceptionnelle et obéissent à un principe de "moyennage" qui interdit les extrema locaux.

Théorème 25.2.1 (Propriété de la Moyenne). Une fonction u est harmonique sur un ouvert Ω si et seulement si, pour toute boule $B(x, r) \subset \Omega$, la valeur $u(x)$ est la moyenne de u sur la sphère $\partial B(x, r)$ (ou sur la boule $B(x, r)$).

Théorème 25.2.2 (Principe du Maximum). Soit u une fonction harmonique sur un domaine borné et connexe Ω , continue sur $\bar{\Omega}$. Alors le maximum et le minimum de u sont atteints sur la frontière $\partial\Omega$.

Corollaire 25.2.2.1 (Unicité et Stabilité). Le

principe du maximum implique l'unicité et la stabilité pour le problème de Dirichlet ($\Delta u = f$ dans Ω , $u = g$ sur $\partial\Omega$).

Théorème 25.2.3 (Régularité des Solutions). Les solutions de l'équation de Laplace sont infiniment différentiables (et même analytiques) à l'intérieur de leur domaine de définition, quelle que soit la régularité des données au bord. C'est un effet **régularisant**.

25.3 Type Parabolique : L'Équation de la Chaleur $u_t - \Delta u = 0$

Objectif. Étudier l'équation de la diffusion. On verra que son comportement est radicalement différent de celui des ondes : elle lisse instantanément les données initiales et propage l'information à une vitesse infinie.

Proposition 25.3.1 (Solution par Séries de Fourier (sur un domaine borné)). Sur le segment $[0, L]$ avec conditions de Dirichlet nulles, la solution de l'équation de la chaleur avec donnée initiale $u(0, x) = f(x)$ s'écrit :

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi/L)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

où les c_n sont les coefficients de Fourier de f .

Remarque (L'Effet Régularisant Infini). La présence du terme $e^{-n^2 t}$ dans la solution est cruciale.

- Il montre que les hautes fréquences (grands n) sont amorties de manière exponentielle et quasi-instantanée.
- Cela implique que même si la donnée initiale f est très peu régulière (par exemple, discontinue), la solution $u(t, \cdot)$ devient de classe C^∞ pour tout $t > 0$. C'est un effet de **lissage instantané**.
- L'information se propage à **vitesse infinie** : une perturbation locale en x_0 à l'instant $t = 0$ a un effet (infime mais non nul) en tout point x du domaine pour tout $t > 0$.

Théorème 25.3.1 (Noyau de la Chaleur sur \mathbb{R}^n). La solution du problème de Cauchy sur \mathbb{R}^n avec donnée initiale f est donnée par la convolution avec le noyau de la chaleur (ou solution

fondamentale) :

$$u(t, x) = (f * G_t)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x-y\|^2/4t} f(y) dy$$

25.4 Type Hyperbolique : L'Équation des Ondes $u_{tt} - \Delta u = 0$

Objectif. Étudier l'équation de la propagation. On montrera que son comportement est à l'opposé de celui de la chaleur : l'information se propage à vitesse finie et les singularités sont conservées, non lissées.

Théorème 25.4.1 (Formule de d'Alembert en dimension 1). La solution du problème de Cauchy sur \mathbb{R} avec $u(0, x) = f(x)$ et $u_t(0, x) = g(x)$ est donnée par :

$$u(t, x) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

Remarque (Propagation à Vitesse Finie). La formule de d'Alembert est extraordinairement parlante.

- Elle montre que la solution est une superposition de deux ondes se propageant en sens opposés à la vitesse c .
- La valeur de la solution en (t, x) ne dépend des données initiales que sur l'intervalle $[x-ct, x+ct]$. C'est le **domaine de dépendance**. Une perturbation en un point y_0 à l'instant $t = 0$ n'affecte le point x qu'au temps $t = |x - y_0|/c$.
- Les singularités (par exemple, un coin dans la donnée initiale f) ne sont pas lissées : elles se propagent le long des droites caractéristiques $x \pm ct = \text{constante}$.

Proposition 25.4.1 (Conservation de l'Énergie). Pour l'équation des ondes, l'énergie totale (cinétique + potentielle) est une quantité conservée au cours du temps :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2 + \|\nabla u\|^2) dx = \text{constante}$$

Ceci traduit le caractère réversible du phénomène.

25.5 Approches Hilbert-siennes : La Formulation Variationnelle

Objectif. Connecter l'étude des EDP à l'analyse fonctionnelle. L'idée est de reformuler un problème d'EDP (trouver une fonction qui satisfait une équation en tout point) en un problème dans un espace de Hilbert (trouver un "vecteur" qui satisfait une relation intégrale). Cette approche est plus faible, mais immensément puissante et est à la base des méthodes numériques modernes.

Définition 25.5.1 (Espaces de Sobolev). L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont les dérivées (au sens des distributions) sont aussi dans $L^2(\Omega)$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est le sous-espace de $H^1(\Omega)$ des fonctions qui s'annulent (au sens des traces) sur le bord $\partial\Omega$. Ce sont des espaces de Hilbert.

Proposition 25.5.1 (Formulation Faible (ou Variationnelle)). Considérons le problème de Dirichlet $-\Delta u = f$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$. En multipliant par une fonction test "régulière" v et en intégrant par parties (formule de Green), on arrive à la formulation faible : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

Théorème 25.5.1 (Théorème de Lax-Milgram). Soit H un espace de Hilbert, $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur H , et L une forme linéaire continue sur H . Alors le problème variationnel "trouver $u \in H$ tel que $a(u, v) = L(v)$ pour tout $v \in H$ " admet une solution unique.

Application (Existence de Solutions Faibles). La formulation faible du problème de Dirichlet correspond exactement au cadre du théorème de Lax-Milgram, en posant $H = H_0^1(\Omega)$, $a(u, v) = \int \nabla u \cdot \nabla v$ et $L(v) = \int f v$. Ce théorème garantit donc l'existence et l'unicité d'une "solution faible". Montrer que cette solution faible est en fait une solution "forte" (régulière) est un problème plus difficile (la "régularité elliptique"). Cette méthode est la base théorique de la **méthode des éléments finis**.

Chapitre 26

Calcul Différentiel en Dimension Infinie : Généraliser la Dérivée dans les Espaces de Banach

26.1 La Notion de Différentiabilité

Objectif. Étendre la notion de dérivée aux fonctions entre espaces de Banach. L'idée clé de la différentiabilité en un point est l'existence d'une "meilleure approximation linéaire locale". En dimension finie, cette approximation est la matrice Jacobienne. En dimension infinie, l'objet qui joue ce rôle est une application linéaire continue, la différentielle de Fréchet.

Définition 26.1.1 (Différentielle de Gâteaux (Dérivée Directionnelle)). Soient E, F des e.v.n. et $f : U \subset E \rightarrow F$. La **dérivée de Gâteaux** de f en $a \in U$ dans la direction $h \in E$ est la limite (si elle existe) :

$$D_h f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$

C'est l'analogue de la dérivée directionnelle.

Définition 26.1.2 (Différentielle de Fréchet). f est **Fréchet-différentiable** en $a \in U$ s'il existe une application **linéaire continue** $L \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|) \quad \text{quand } h \rightarrow 0$$

L'application L est unique, on la note $df(a)$ et on l'appelle la différentielle de f en a .

Remarque (Fréchet \implies Gâteaux \implies Continuité). La Fréchet-différentiabilité est une notion très forte. Elle implique la Gâteaux-différentiabilité dans toutes les directions (et $D_h f(a) = df(a)(h)$) et la continuité en ce point. La réciproque est fautive en général. La Fréchet-différentiabilité est la "bonne" généralisation de

la dérivée qui conserve les grands théorèmes du calcul différentiel.

26.2 Les Grands Théorèmes du Calcul Différentiel

Objectif. Montrer que la structure des espaces de Banach est suffisamment riche pour que les théorèmes fondamentaux du calcul différentiel (règle de la chaîne, inégalité des accroissements finis, inversion locale) se généralisent.

Théorème 26.2.1 (Règle de la chaîne). Si $f : E \rightarrow F$ est différentiable en a et $g : F \rightarrow G$ est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et :

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

C'est la composition des applications linéaires.

Théorème 26.2.2 (Inégalité des Accroissements Finis). Si f est différentiable sur un segment $[a, b] \subset E$ et que $\|df(x)\| \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$, alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|$$

Remarque (L'Absence d'Égalité). Attention, il n'y a pas d'égalité des accroissements finis en général (sauf pour les fonctions à valeurs dans \mathbb{R}). On ne peut pas écrire $f(b) - f(a) = df(c)(b - a)$. C'est une différence majeure avec le cas de la dimension 1.

Théorème 26.2.3 (Théorème d'Inversion Locale). Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ une application de classe \mathcal{C}^1 entre deux espaces de Banach. Si en un point $a \in U$, la différentielle $df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$

est un **isomorphisme** (invertible), alors f est un **difféomorphisme local** au voisinage de a .
Remarque (La Condition d'Inversibilité). Ce théorème est une généralisation directe du cas de la dimension finie où la condition est que le Jacobien (le déterminant de la différentielle) soit non nul. Il est au cœur de la théorie des variétés différentielles.

Théorème 26.2.4 (Théorème des Fonctions Implicites). C'est une conséquence de l'inversion locale. Il donne des conditions suffisantes pour qu'un ensemble de niveau $f(x, y) = c$ puisse être vu localement comme le graphe d'une fonction. C'est l'outil fondamental pour définir les sous-variétés.

26.3 Différentielles d'Ordre Supérieur et Formule de Taylor

Objectif. Définir les dérivées secondes, troisièmes, etc. La différentielle seconde en un point n'est plus une application linéaire, mais une application bilinéaire symétrique.

Définition 26.3.1 (Différentielle Seconde). Si f est différentiable sur U , on a une application $df : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$. Si cette application est elle-même différentiable en a , sa différentielle $d(df)(a)$ est un élément de $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$. Par l'isomorphisme canonique, on peut identifier cet objet à une application **bilinéaire continue** $d^2f(a) : E \times E \rightarrow F$.

Théorème 26.3.1 (Lemme de Schwarz). Si f est deux fois différentiable en a , alors sa différentielle seconde $d^2f(a)$ est une application bilinéaire **symétrique**. C'est la généralisation de l'égalité des dérivées partielles croisées.

Théorème 26.3.2 (Formule de Taylor-Young). Si f est de classe \mathcal{C}^2 , on a le développement limité d'ordre 2 :

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \frac{1}{2}d^2f(a)(h, h) + o(\|h\|^2)$$

26.4 Application à l'Optimisation sans Contraintes

Objectif. Utiliser le calcul différentiel pour trouver les extrema d'une fonctionnelle $J : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposition 26.4.1 (Condition nécessaire du premier ordre). Si J admet un extremum local

en a et est différentiable en a , alors $dJ(a) = 0$. C'est la généralisation de "la dérivée s'annule". Le point a est un **point critique**.

Proposition 26.4.2 (Condition nécessaire du second ordre). Si J est deux fois différentiable et admet un minimum local en a , alors la forme bilinéaire $d^2J(a)$ est **positive** (i.e. $d^2J(a)(h, h) \geq 0$ pour tout h).

Proposition 26.4.3 (Condition suffisante du second ordre). Si a est un point critique de J et si la forme bilinéaire $d^2J(a)$ est **définie positive** et **coercive** (i.e., il existe $\alpha > 0$ tel que $d^2J(a)(h, h) \geq \alpha\|h\|^2$), alors a est un minimum local strict de J .

Application (Calcul des Variations). C'est le domaine qui cherche à optimiser des fonctionnelles définies par des intégrales, comme la longueur d'un chemin ou l'énergie d'un système. Par exemple, pour trouver la géodésique entre deux points, on minimise la fonctionnelle "longueur". La condition du premier ordre $dJ(a) = 0$ se traduit alors par une équation différentielle : **l'équation d'Euler-Lagrange**.

Huitième partie

Topologie

Chapitre 27

Topologie : La Dialectique du Local et du Global

27.1 Espaces Métriques : La Structure Locale

Objectif. Les espaces métriques sont notre point de départ car ils formalisent la notion de **distance**, qui est une notion **locale**. Ils nous permettent de parler de "boules", de "proximité infinitésimale", et donc de convergence. C'est le cadre nécessaire pour faire de l'analyse "à la Newton/Leibniz", basée sur des arguments locaux.

Définition 27.1.1 (Espace métrique). Un espace métrique (X, d) est un ensemble muni d'une distance. Il induit une topologie où les ouverts sont les réunions de boules ouvertes.

Définition 27.1.2 (Continuité de Cauchy vs. Topologique). Dans un espace métrique, la continuité en un point x_0 s'exprime par le critère " $\epsilon - \delta$ ". C'est une vision très locale. La définition topologique (l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert) est une formulation globale qui se révélera plus puissante.

27.2 Complétude : La Propriété Analytique par Excellence

Objectif. Isoler LA propriété qui permet de faire de l'Analyse. La complétude est la garantie que les processus d'approximation convergent. C'est une propriété non-topologique (elle dépend de la métrique, pas seulement des ouverts) et fondamentalement locale.

Définition 27.2.1 (Suite de Cauchy et Espace Complet). Une suite (x_n) est de Cauchy si ses termes se rapprochent les uns des autres. Un espace est complet si de telles suites convergent

toujours.

Théorème 27.2.1 (Théorème du point fixe de Banach-Picard). Dans un espace métrique **complet**, une application **strictement contractante** admet un unique point fixe.

Remarque (La Puissance de la Complétude). La preuve de ce théorème est constructive : on choisit un point et on itère. La condition de contraction assure que la suite des itérées est de Cauchy. La complétude assure que cette suite converge, et la limite est le point fixe. Sans complétude, la suite "voudrait" converger, mais la limite pourrait être un "trou" dans l'espace. La complétude bouche ces trous.

Théorème 27.2.2 (Théorème de Baire). Dans un espace métrique complet, une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. De manière équivalente, un espace complet n'est pas une union dénombrable de fermés d'intérieur vide.

Remarque (Un outil "négatif" d'existence). Le théorème de Baire est un outil d'une puissance phénoménale. Il ne construit rien, mais il nous dit qu'un espace complet est "gros" et ne peut pas être "trop petit" (une union dénombrable de "parties maigres"). On l'utilise pour prouver des résultats d'existence en montrant que l'ensemble des objets "pathologiques" est maigre, donc son complémentaire (les objets "gentils") est non vide. C'est la base des grands théorèmes de l'analyse fonctionnelle.

27.3 Compacité : La Propriété Globale et Géométrique

Objectif. Introduire la notion de compacité, qui est d'une nature très différente de la complétude. La compacité n'est pas une propriété

locale mais **globale**. Elle concerne la "taille" et la "forme" de l'espace tout entier. C'est l'analogue topologique de la "finitude".

Définition 27.3.1 (Compacité de Borel-Lebesgue). Un espace topologique K est compact si de tout recouvrement par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Définition 27.3.2 (Compacité séquentielle). Un espace métrique K est séquentiellement compact si de toute suite de K , on peut extraire une sous-suite convergente. Pour les espaces métriques, les deux notions coïncident.

Théorème 27.3.1 (Caractérisation dans \mathbb{R}^n (Borel-Lebesgue)). Une partie de \mathbb{R}^n est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Remarque (La Fin de l'Intuition). Attention, ce théorème est un "piège" de la dimension finie. En dimension infinie, une partie fermée et bornée n'est (presque) jamais compacte (cf. Lemme de Riesz). C'est pourquoi la définition de Borel-Lebesgue, plus abstraite, est la bonne.

Théorème 27.3.2 (Propriétés fondamentales). L'image d'un compact par une application continue est compacte. En particulier, une fonction continue sur un compact à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes.

Application (Existence de minima/maxima). C'est l'application la plus importante de la compacité. En optimisation, en calcul des variations, en analyse, on veut souvent minimiser une "énergie" ou un "coût" (une fonctionnelle continue). Si l'espace des configurations possibles est compact, l'existence d'un minimum est garantie.

Remarque (Complétude vs. Compacité : La Grande Dialectique). Votre question est au cœur du sujet. Lequel est le plus important ?

- La **Complétude** est une propriété **analytique et locale**. Elle est indispensable pour les processus **itératifs** et les constructions de limites (point fixe, complétion d'un espace, etc). Elle nous permet de travailler "au voisinage" d'un point.
- La **Compacité** est une propriété **géométrique et globale**. Elle est indispensable pour les théorèmes d'existence globaux. Elle nous permet de passer du local au global, et de garantir qu'une recherche sur un ensemble infini peut se ramener à un cas fini.

complémentaires. L'analyse fonctionnelle est l'art de les utiliser conjointement. Souvent, on travaille dans un espace complet (Banach), et on cherche des sous-ensembles compacts (via Arzelà-Ascoli, Banach-Alaoglu...) pour y prouver des résultats d'existence.

27.4 Autres Propriétés Topologiques Fondamentales

Objectif. Compléter notre vocabulaire avec deux autres notions structurales : la connexité (l'espace est "d'un seul tenant") et la séparation (les points sont "discernables").

Définition 27.4.1 (Connexité). Un espace est connexe s'il n'est pas union disjointe de deux ouverts non vides. Il est connexe par arcs si tout couple de points peut être relié par un chemin continu.

Proposition 27.4.1 (Connexité par arcs \Rightarrow Connexité). La réciproque est fausse. L'exemple classique est la courbe sinus du topologue, $F = \{(x, \sin(1/x)) \mid x \in]0, 1]\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$.

Théorème 27.4.1 (Théorème des valeurs intermédiaires). L'image d'un connexe par une application continue est connexe. Le TVI n'est qu'un corollaire de ce fait topologique fondamental, car les connexes de \mathbb{R} sont les intervalles.

Définition 27.4.2 (Axiomes de séparation (Hausdorff)). Un espace est séparé (ou de Hausdorff, noté T_2) si deux points distincts admettent des voisinages ouverts disjoints.

Remarque (Une condition de "bonne santé"). La séparation est une hypothèse technique minimale pour faire de l'analyse "sérieuse". Dans un espace séparé, une suite convergente a une limite unique. La quasi-totalité des espaces que l'on rencontre (espaces métriques, topologies faibles sur les duaux...) sont séparés.

Ce ne sont pas des notions concurrentes, mais

Neuvième partie

Probabilités

Chapitre 28

Combinatoire et Graphes : L'Art de Dénombrer et de Connecter

28.1 Principes Fondamentaux du Dénombrement

Objectif. Établir les principes de base du comptage et introduire l'outil le plus puissant de la combinatoire énumérative : les séries génératrices, qui encodent une suite infinie de nombres dans un objet analytique (une série formelle ou une fonction).

Définition 28.1.1 (Coefficients Binomiaux et Formule du Binôme). $\binom{n}{k}$ est le nombre de façons de choisir k objets parmi n . Formule du binôme : $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

Proposition 28.1.1 (Formule du Crible de Poincaré (Principe d'Inclusion-Exclusion)). Pour des ensembles finis A_1, \dots, A_n :

$$|\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots$$

Application (Nombre de dérangements). La formule du crible permet de calculer le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments qui n'ont aucun point fixe.

Définition 28.1.2 (Séries Génératrices). La série génératrice (ordinaire) d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la série formelle $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Remarque (Un Dictionnaire Combinatoire-Analyse). Les séries génératrices sont un "dictionnaire" qui traduit des opérations combinatoires sur les suites en opérations algébriques sur les séries.

- Somme de suites \leftrightarrow Somme des séries.
- Produit de convolution \leftrightarrow Produit des séries.
- Décalage de suite \leftrightarrow Multiplication/Division par x .

Exemple (Nombres de Fibonacci). La suite de Fibonacci est définie par $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Cette relation de récurrence se traduit par une équation sur la série génératrice $F(x)$, ce qui permet de trouver sa fraction rationnelle : $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$. En décomposant cette fraction en éléments simples, on retrouve la formule de Binet pour F_n .

Exemple (Nombres de Catalan). Les nombres de Catalan C_n comptent de très nombreux objets (chemins de Dyck, triangulations de polygones...). Leur série génératrice vérifie une équation quadratique, ce qui permet de trouver une formule explicite pour C_n .

28.2 Le Langage des Graphes

Objectif. Introduire le vocabulaire de base de la théorie des graphes, qui est le langage mathématique pour modéliser des relations entre des objets.

Définition 28.2.1 (Graphe). Un graphe (simple) $G = (V, E)$ est la donnée d'un ensemble de sommets V et d'un ensemble d'arêtes $E \subset \mathcal{P}_2(V)$ (paires de sommets). On définit le degré d'un sommet, la notion de chemin, de cycle, de connexité.

Proposition 28.2.1 (Lemme des poignées de main). La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes. En particulier, le nombre de sommets de degré impair est pair.

Définition 28.2.2 (Types de Graphes). —

Graphe complet K_n : Tous les sommets sont reliés.

— **Graphe biparti** : L'ensemble des sommets peut être partitionné en deux ensembles X, Y tels que toute arête relie un sommet de X à un sommet de Y .

— **Arbre** : Graphe connexe et sans cycle.

Théorème 28.2.1 (Caractérisation des arbres). Un graphe à n sommets est un arbre si et seulement s'il est connexe et a $n - 1$ arêtes.

angle (K_3) est $\lfloor n^2/4 \rfloor$. Ce maximum est atteint par le graphe biparti complet équilibré.

Remarque (Théorie Extrémale). Ce résultat est le point de départ de la théorie des graphes extrémale, qui cherche à déterminer le nombre maximal d'arêtes qu'un graphe peut avoir sans contenir un certain sous-graphe interdit.

28.3 Théorèmes Fondamentaux de la Théorie des Graphes

Objectif. Présenter quelques résultats classiques et puissants qui illustrent les différents types de questions que l'on se pose en théorie des graphes.

Théorème 28.3.1 (Cycles Eulériens et Hamiltoniens). —

(**Euler**) Un graphe connexe admet un cycle eulérien (qui passe par chaque arête exactement une fois) si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

— (**Hamiltonien**) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un cycle hamiltonien (qui passe par chaque sommet exactement une fois) est un problème NP-complet. C'est le problème du voyageur de commerce.

Théorème 28.3.2 (Théorème de Hall sur les Mariages). Dans un graphe biparti $G = (X \cup Y, E)$, il existe un couplage parfait (qui couvre tous les sommets de X) si et seulement si pour tout sous-ensemble $A \subset X$, le nombre de ses voisins $|N(A)|$ est au moins égal à $|A|$.

Remarque (La Condition du Voisinage). Ce théorème est le prototype des résultats de "combinatoire extrémale". Il donne une condition locale (sur les sous-ensembles) qui garantit une propriété globale (l'existence d'un couplage).

Définition 28.3.1 (Coloration de Graphe). Une k -coloration d'un graphe est une attribution d'une couleur (parmi k) à chaque sommet de sorte que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes. Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le plus petit k pour lequel une telle coloration existe.

Théorème 28.3.3 (Théorème des Quatre Couleurs (admis)). Tout graphe planaire (qui peut être dessiné sur un plan sans que les arêtes ne se croisent) a un nombre chromatique inférieur ou égal à 4.

Théorème 28.3.4 (Théorème de Turan (cas simple)). Le nombre maximal d'arêtes dans un graphe à n sommets qui ne contient aucun tri-

Chapitre 29

Espaces Probabilisés : La Mesure de l'Incertitude

29.1 Les Axiomes de Kolmogorov : Le Cadre de la Théorie

Objectif. Établir le socle axiomatique de la théorie des probabilités moderne. L'idée géniale de Kolmogorov est de réaliser que le langage de la théorie de la mesure est l'outil parfait pour modéliser l'incertitude. On va donc "traduire" le vocabulaire de l'aléatoire dans celui, rigoureux et puissant, de la mesure.

Définition 29.1.1 (Espace probabilisé). Un espace probabilisé est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où :

- Ω est un ensemble, l'univers des possibles (ou "issues").
- \mathcal{F} est une tribu (ou σ -algèbre) sur Ω . Ses éléments sont les **événements**.
- \mathbb{P} est une **mesure de probabilité** sur (X, \mathcal{F}) , c'est-à-dire une mesure telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Remarque (La Probabilité est une Théorie de la Mesure). C'est le point de vue fondamental qui unifie tout. Un espace probabilisé N'EST RIEN D'AUTRE qu'un espace mesuré de masse totale 1. Cette vision fait disparaître le "mystère" des probabilités : tous les théorèmes de la théorie de la mesure (convergence, Fubini...) s'appliqueront.

Définition 29.1.2 (Probabilité conditionnelle et Indépendance). Soit A, B deux événements avec $\mathbb{P}(B) > 0$. La **probabilité conditionnelle** de A sachant B est $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. Deux événements A et B sont **indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Théorème 29.1.1 (Formule des probabilités totales et Formule de Bayes). **FPT** : Si (B_i) est une partition de Ω , alors

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i). \text{ Bayes : } \mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_j \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}.$$

Remarque (Inférence et Apprentissage). La formule de Bayes est le moteur de l'inférence statistique bayésienne. Elle nous dit comment mettre à jour nos croyances (la probabilité d'une cause B_i) à la lumière de nouvelles données (l'observation d'un effet A).

29.2 Variables Aléatoires : Les Fonctions de l'Aléatoire

Objectif. Démystifier le concept de "variable aléatoire". Ce n'est pas une "variable" au sens usuel, mais une **fonction** qui associe une valeur numérique (ou vectorielle) à chaque issue de l'univers. C'est l'objet mathématique qui nous permet de passer de la description des événements à la quantification des résultats.

Définition 29.2.1 (Variable Aléatoire). Une variable aléatoire (v.a.) réelle est une fonction **mesurable** $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Définition 29.2.2 (Loi d'une Variable Aléatoire). La **loi** de la v.a. X est la mesure de probabilité P_X sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par $P_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$. C'est la **mesure image** de \mathbb{P} par X .

Remarque (Séparer l'Aléatoire de l'Objet). Cette définition est cruciale. Elle sépare l'espace abstrait de départ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de l'espace d'arrivée concret (\mathbb{R}) où l'on fait nos calculs. Toute l'information "aléatoire" de X est contenue dans sa loi P_X .

Définition 29.2.3 (Fonction de Répartition). La fonction de répartition de X est $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = P_X([-\infty, x])$. Elle caractérise la loi P_X .

- Si F_X est une fonction en escalier, la loi est **discrète**.
- Si F_X est absolument continue, i.e. $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$, la loi est à **densité** f_X .

29.3 Espérance et Moments : L'Intégrale sur l'Univers

Objectif. Définir la "valeur moyenne" d'une variable aléatoire, l'espérance, comme une intégrale de Lebesgue. C'est l'application directe de la théorie de la mesure, qui donne un sens rigoureux à cette notion.

Définition 29.3.1 (Espérance). L'espérance d'une variable aléatoire X est son intégrale par rapport à la mesure de probabilité \mathbb{P} :

$$E[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

L'espérance existe si X est intégrable au sens de Lebesgue.

Théorème 29.3.1 (Théorème de Transfert). Le calcul de l'espérance peut être "transféré" de l'espace abstrait Ω à l'espace d'arrivée \mathbb{R} :

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x)$$

Ce qui devient $\sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)$ dans le cas discret et $\int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$ dans le cas à densité.

Définition 29.3.2 (Variance, Covariance et Moments). **Variance** : $V(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$. C'est une mesure de la dispersion de la loi. **Covariance** : $\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$. Mesure le lien linéaire entre X et Y . **Moments** : Le moment d'ordre k est $m_k = E[X^k]$.

Proposition 29.3.1 (Inégalités de Concentration).

Markov : Pour $X \geq 0$, $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$.

- **Bienaymé-Tchebychev** : $\mathbb{P}(|X - E[X]| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$.

29.4 Les Théorèmes Limites : L'Émergence de l'Ordre

Objectif. Présenter les deux résultats les plus importants et les plus profonds de la théorie. Ils décrivent comment la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) cesse d'être

aléatoire pour faire émerger un comportement déterministe (Loi des Grands Nombres) et une forme universelle (Théorème Central Limite).

Définition 29.4.1 (Modes de Convergence des v.a.). Soit (X_n) une suite de v.a.

- **Presque sûre (p.s.)** : $X_n \rightarrow X$ si $\mathbb{P}(\{\omega \mid X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1$.
- **En probabilité (P)** : $X_n \rightarrow X$ si $\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \rightarrow 0$.
- **En loi (L)** : $X_n \rightarrow X$ si $F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$ en tout point de continuité de F_X .

Théorème 29.4.1 (Loi des Grands Nombres). Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. d'espérance μ . Soit $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ la moyenne empirique.

- **Loi Faible** : Si la variance est finie, $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$.
- **Loi Forte (Kolmogorov)** : Si l'espérance est finie, $\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} \mu$.

Remarque (La Stabilité des Moyennes). Ce théorème est le fondement de l'assurance, des casinos, et de la méthode de Monte-Carlo. Il garantit que sur le long terme, les moyennes des résultats observés convergent vers la moyenne théorique. L'aléa se "moyenne" et disparaît à la limite.

Théorème 29.4.2 (Théorème Central Limite (Lindeberg-Lévy)). Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. d'espérance μ et de variance finie σ^2 . Alors la moyenne empirique normalisée converge en loi vers une loi normale centrée réduite :

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, 1)$$

Remarque (L'Universalité de la Courbe de Gauss). C'est un résultat miraculeux. Il dit que, quelles que soient les particularités de la loi de départ des X_n (loi de Bernoulli, loi uniforme, etc.), la somme d'un grand nombre de ces variables aura toujours une distribution qui ressemble à une courbe de Gauss. La loi normale est un "attracteur" dans le monde des lois de probabilité. C'est pourquoi on la retrouve partout en nature et en sciences.

Chapitre 30

Statistiques et Méthodes : L'Art de l'Inférence face à l'Incertitude

30.1 Le Cadre de la Statistique Inférentielle

Objectif. Poser le problème fondamental de la statistique, qui est le "problème inverse" des probabilités. En probabilités, on connaît le modèle et on déduit le comportement des données. En statistiques, on observe les données et on cherche à en **inférer** le modèle sous-jacent. C'est l'art de remonter de l'échantillon à la population.

Définition 30.1.1 (Modèle Statistique et Échantillon). Un **modèle statistique** est un triplet $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \{P_\theta\}_{\theta \in \Theta})$ où :

- $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ est un espace mesurable (l'espace des observations).
- $\{P_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ est une famille de lois de probabilité sur cet espace, indexée par un paramètre θ inconnu appartenant à l'espace des paramètres Θ .

Un **échantillon** de taille n est une suite (X_1, \dots, X_n) de variables aléatoires i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées) selon une loi P_θ .

Remarque (Les Deux Grandes Tâches de la Statistique). Face à un échantillon, le statisticien se pose principalement deux questions :

1. **Estimation** : Quelle est la "meilleure" valeur possible pour le paramètre inconnu θ ? (e.g., estimer la proportion de votants pour un candidat).
2. **Test d'hypothèses** : Les données sont-elles compatibles avec une certaine affirmation sur θ ? (e.g., ce nouveau médicament est-il plus efficace que le placebo ?).

30.2 Estimation Ponctuelle : Deviner le Bon Paramètre

Objectif. Construire des "estimateurs", c'est-à-dire des fonctions de l'échantillon qui nous donnent une valeur approchée du paramètre inconnu. On développera des critères pour juger de la "qualité" d'un estimateur.

Définition 30.2.1 (Estimateur et ses Qualités). Un **estimateur** de θ est une statistique $\hat{\theta}_n = T(X_1, \dots, X_n)$.

- Le **biais** est $b(\hat{\theta}_n) = E[\hat{\theta}_n] - \theta$. Un estimateur est **sans biais** si son biais est nul.
- L'**erreur quadratique moyenne** est $MSE(\hat{\theta}_n) = E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = V(\hat{\theta}_n) + b(\hat{\theta}_n)^2$.
- Un estimateur est **convergent** si $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta$ (en probabilité ou presque sûrement).

Définition 30.2.2 (Méthode du Maximum de Vraisemblance). La fonction de **vraisemblance** est la densité de l'échantillon, vue comme une fonction du paramètre θ : $\mathcal{L}(\theta; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i)$. L'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) est la valeur $\hat{\theta}_{MV}$ qui maximise cette fonction. C'est la valeur du paramètre qui rend les observations observées "les plus probables".

Théorème 30.2.1 (Borne de Cramér-Rao). Sous des conditions de régularité, la variance de tout estimateur sans biais $\hat{\theta}_n$ est minorée par l'inverse de l'information de Fisher : $V(\hat{\theta}_n) \geq \frac{1}{I(\theta)}$. Un estimateur qui atteint cette borne est dit **efficace**.

Exemple (Estimation pour une loi de Bernoulli). On observe n lancers d'une pièce (0 ou 1) de paramètre inconnu p . La moyenne empirique \bar{X}_n est un estimateur de p . Il est sans biais, convergent (par la LGN), et c'est aussi l'estimateur du maximum de vraisemblance.

30.3 Estimation par Intervalle de Confiance

Objectif. Reconnaître l'incertitude. Une estimation ponctuelle est presque sûrement fausse. Un intervalle de confiance fournit une plage de valeurs plausibles pour le paramètre, associée à un niveau de confiance.

Définition 30.3.1 (Intervalle de Confiance). Un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance $1 - \alpha$ est un intervalle aléatoire $[A_n, B_n]$ (où A_n et B_n sont des statistiques) tel que :

$$\mathbb{P}_\theta(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha$$

Remarque (L'Interprétation Fréquentiste). Attention à l'interprétation ! Ce n'est pas le paramètre θ qui est aléatoire, mais l'intervalle. Un niveau de confiance de 95% signifie que si l'on répétait l'expérience un très grand nombre de fois, 95% des intervalles ainsi construits contiendraient la vraie valeur (inconnue) du paramètre.

Application (Intervalle de confiance pour une moyenne). Si l'on a un échantillon d'une loi normale de moyenne μ inconnue et de variance σ^2 connue, un intervalle de confiance pour μ au niveau $1 - \alpha$ est :

$$\left[\bar{X}_n - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

où $z_{\alpha/2}$ est le quantile de la loi normale centrée réduite. Si σ^2 est inconnue, on l'estime par la variance empirique et on utilise les quantiles de la loi de Student.

30.4 Tests d'Hypothèses : La Prise de Décision

Objectif. Formaliser la démarche scientifique de prise de décision face à des données. On pose une hypothèse par défaut (H_0) et on ne la rejette que si les données observées sont "extrêmement improbables" sous cette hypothèse.

Définition 30.4.1 (Formalisme de Neyman-Pearson). Un test oppose une **hypothèse nulle** $H_0 : \theta \in \Theta_0$ à une **hypothèse alternative** $H_1 : \theta \in \Theta_1$.

- **Erreur de type I** : Rejeter H_0 alors qu'elle est vraie. Sa probabilité est notée α (le "risque").

- **Erreur de type II** : Ne pas rejeter H_0 alors qu'elle est fausse. Sa probabilité est notée β .

La **puissance** du test est $1 - \beta$.

Lemme 30.4.1 (Neyman-Pearson). Pour tester $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta = \theta_1$, le test le plus puissant (qui maximise $1 - \beta$ pour un α donné) est le test du rapport de vraisemblance.

Définition 30.4.2 (p-valeur). La **p-valeur** est la probabilité, sous l'hypothèse H_0 , d'observer une valeur de la statistique de test au moins aussi "extrême" que celle qui a été effectivement observée. On rejette H_0 si la p-valeur est inférieure au risque α que l'on s'est fixé.

Application (Tests statistiques classiques).

- **Test de Student** : Teste l'égalité d'une moyenne à une valeur de référence. (Ex : "Le poids moyen des baguettes dans cette boulangerie est-il bien de 250g?").
- **Test du χ^2 d'adéquation** : Teste si un échantillon suit une loi de probabilité donnée. (Ex : "Ce dé est-il équilibré?").
- **Test du χ^2 d'indépendance** : Teste l'indépendance de deux variables qualitatives. (Ex : "La couleur des yeux et la couleur des cheveux sont-elles des variables indépendantes?").

Dixième partie

Méthodes numériques

Chapitre 31

Équations Différentielles Numériques : Approximer le Continu par le Discret

31.1 Principes Fondamentaux de la Discrétisation

Objectif. Poser les bases de la résolution numérique des EDO. L'idée est de remplacer le problème continu $y' = f(t, y)$ par un schéma de récurrence discret $y_{n+1} = \Phi(h, t_n, y_n)$ qui approche la solution à des instants $t_n = t_0 + nh$. Le défi est de s'assurer que notre approximation discrète reste "fidèle" à la véritable solution continue. Trois notions clés gouvernent cette fidélité : la consistance, la stabilité et la convergence.

Définition 31.1.1 (Erreur, Ordre et Consistance). Soit $y(t)$ la solution exacte. L'erreur de consistance locale est $\epsilon_n(h) = y(t_{n+1}) - \Phi(h, t_n, y(t_n))$. C'est l'erreur que le schéma commet en une seule étape si on part de la solution exacte.

- Un schéma est **consistant** si $\epsilon_n(h) = o(h)$.
- Un schéma est d'**ordre** p si $\epsilon_n(h) = \mathcal{O}(h^{p+1})$.

Définition 31.1.2 (Stabilité). Un schéma est **stable** si de petites perturbations (erreurs d'arrondi, erreurs sur la condition initiale) ne sont pas amplifiées de manière explosive au fil des itérations. C'est une notion de robustesse et de bon conditionnement du schéma numérique.

Définition 31.1.3 (Convergence). Un schéma est **convergent** si l'erreur globale (la différence entre la solution numérique et la solution exacte en un temps donné) tend vers zéro lorsque le pas h tend vers zéro.

Théorème 31.1.1 (Théorème d'Équivalence de Lax-Richtmyer). Pour un schéma numérique consistant qui résout un problème bien posé :

$$\text{Stabilité} \iff \text{Convergence}$$

Remarque (Le Théorème Fondamental). Ce théorème est la pierre angulaire de l'analyse numérique des EDO. Il nous dit que pour garantir la convergence (le but ultime), il "suffit" de vérifier deux choses : la consistance (le schéma approxime bien l'équation localement, ce qui se fait par des développements de Taylor) et la stabilité (le schéma ne fait pas exploser les erreurs).

31.2 Les Méthodes à un Pas : Le Futur ne dépend que du Présent

Objectif. Étudier la famille la plus simple de schémas, où le calcul de y_{n+1} ne dépend que de l'information en t_n . On explorera le compromis entre simplicité (Euler explicite), stabilité (Euler implicite) et précision (Runge-Kutta).

Définition 31.2.1 (Schéma d'Euler Explicite). Basé sur l'approximation de Taylor à l'ordre 1 : $y(t+h) \approx y(t) + hy'(t)$. Le schéma est : $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$. Il est d'ordre 1.

Définition 31.2.2 (Schéma d'Euler Implicite). Basé sur une approximation "à l'arrivée" : $y(t+h) \approx y(t) + hy'(t+h)$. Le schéma est : $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$. Il est d'ordre 1. Il nécessite de résoudre une équation (souvent non-linéaire) à chaque étape pour trouver y_{n+1} .

Remarque (Le Coût de la Stabilité). L'Euler implicite est plus coûteux, mais il est beaucoup plus stable. Il est **A-stable**, ce qui le rend indispensable pour les problèmes dits "raides".

Définition 31.2.3 (Problèmes Raides (Stiff Problems)). Un système différentiel est raide s'il combine des dynamiques à des échelles de temps très différentes (certaines composantes

évoluent très vite, d'autres très lentement).

Application (Chimie et Biologie). La cinétique chimique et les réseaux de régulation biologique sont des sources majeures de problèmes raides. Les schémas explicites, contraints par la dynamique la plus rapide, nécessiteraient un pas h ridiculement petit pour rester stables, même si l'on s'intéresse à l'évolution lente. Les schémas implicites sont alors la seule solution viable.

Définition 31.2.4 (Méthodes de Runge-Kutta). L'idée est d'améliorer l'ordre de la méthode en évaluant f en des points intermédiaires de l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ pour obtenir une meilleure estimation de la "pente moyenne". Le schéma de Runge-Kutta classique d'ordre 4 (RK4) est le plus célèbre :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

où les k_i sont des évaluations successives de f .

31.3 Les Méthodes Multipas : La Mémoire du Passé

Objectif. Construire des schémas d'ordre plus élevé en utilisant non seulement le point précédent y_n , mais aussi plusieurs points du passé $(y_{n-1}, y_{n-2}, \dots)$.

Définition 31.3.1 (Schémas d'Adams-Bashforth (explicites)). L'idée est d'approcher $y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt$ en remplaçant la fonction f par le polynôme qui interpole les valeurs $f_k = f(t_k, y_k)$ aux points précédents t_n, t_{n-1}, \dots .

Définition 31.3.2 (Schémas d'Adams-Moulton (implicites)). Même idée, mais le polynôme d'interpolation utilise aussi le point (inconnu) t_{n+1} . Ces méthodes sont plus stables et plus précises à nombre de pas égal.

Définition 31.3.3 (Méthodes Prédicteur-Correcteur). On combine les deux approches pour obtenir le meilleur des deux mondes :

1. **Prédiction** : On calcule une première estimation \tilde{y}_{n+1} avec une méthode explicite (e.g. Adams-Bashforth).
2. **Correction** : On utilise cette estimation pour évaluer le terme implicite $f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})$ et on réinjecte dans une méthode implicite (e.g. Adams-Moulton) pour obtenir une valeur y_{n+1} plus précise.

Théorème 31.3.1 (Barrières de Dahlquist). Ces deux résultats théoriques fondamentaux limitent l'optimisme dans la conception de schémas multipas.

- **Première barrière** : Un schéma multipas linéaire stable est d'ordre au plus $k + 2$ (si k est pair) ou $k + 1$ (si k est impair), où k est le nombre de pas.
- **Seconde barrière** : Il n'existe pas de schéma multipas linéaire A-stable d'ordre supérieur à 2.

Chapitre 32

Résolution Numérique : L'Art de l'Approximation Efficace

32.1 Résolution d'Équations Non Linéaires $f(x) = 0$

Objectif. Développer des algorithmes itératifs pour trouver les racines d'une fonction, c'est-à-dire les zéros de $f(x) = 0$. La philosophie est de partir d'une estimation et de la raffiner à chaque étape. La qualité d'une méthode se juge à sa vitesse de convergence et à la robustesse de cette convergence.

Définition 32.1.1 (Ordre de convergence). Soit (x_n) une suite qui converge vers x^* . La convergence est d'ordre p s'il existe $C > 0$ tel que $|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^p$.

- $p = 1$: Convergence **linéaire** (l'erreur est réduite d'un facteur constant à chaque étape).
- $p = 2$: Convergence **quadratique** (le nombre de chiffres significatifs double à chaque étape).

Proposition 32.1.1 (Méthode de la bisection (dichotomie)). Si f est continue sur $[a, b]$ avec $f(a)f(b) < 0$, l'algorithme consiste à couper l'intervalle en deux à chaque étape et à conserver la moitié où le changement de signe persiste. La convergence est **lente** (linéaire, avec un facteur $1/2$) mais **toujours garantie**.

Théorème 32.1.1 (Méthode de Newton). Partant d'une estimation x_n , on approxime f par sa tangente en x_n . La nouvelle estimation x_{n+1} est le zéro de cette tangente :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Si f est \mathcal{C}^2 et que $f'(x^*) \neq 0$, la convergence est (localement) **quadratique**.

Remarque (La Ferrari des algorithmes). La méthode de Newton est extraordinairement ra-

pide lorsqu'elle converge. Cependant, elle a des défauts : elle nécessite le calcul de la dérivée, et sa convergence n'est que locale. Un mauvais point de départ peut mener à une divergence ou à un comportement chaotique.

Application (Calcul de \sqrt{a}). Pour trouver la racine de $f(x) = x^2 - a = 0$, la méthode de Newton donne l'itération $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$. C'est l'algorithme de Héron, utilisé par les Babyloniens.

32.2 Interpolation et Approximation Polynomiale

Objectif. Étant donné un ensemble de points (des données), construire une fonction (souvent un polynôme) qui passe par ces points (interpolation) ou qui les "approche au mieux" (approximation).

Théorème 32.2.1 (Interpolation de Lagrange). Étant donnés $n+1$ points (x_i, y_i) avec des abscisses distinctes, il existe un **unique** polynôme P de degré au plus n tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i . Les polynômes de base de Lagrange $L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$ fournissent une construction explicite : $P(X) = \sum y_i L_i(X)$.

Remarque (Phénomène de Runge). L'interpolation polynomiale de haut degré peut être un désastre. Si on interpole la fonction $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ sur $[-1, 1]$ avec des points équidistants, les polynômes d'interpolation oscillent de manière sauvage près des bords lorsque le degré augmente. Cela montre que "plus de points" ne signifie pas toujours "meilleure approximation globale".

Proposition 32.2.1 (Nœuds de Tchebychev). Pour minimiser l'erreur d'interpolation sur un

intervalle, il faut choisir des nœuds non pas équidistants, mais resserrés sur les bords. Les racines des polynômes de Tchebychev sont un choix quasi-optimal.

Application (Approximation par les Moindres Carrés). Quand les données (x_i, y_i) sont bruitées, on ne cherche plus un polynôme qui passe exactement par les points, mais un polynôme de bas degré P qui minimise la somme des carrés des erreurs $\sum_i (y_i - P(x_i))^2$. Ce problème d'optimisation se ramène à la résolution d'un système linéaire (les équations normales), ce qui est un problème de projection orthogonale.

32.3 Intégration Numérique (Quadrature)

Objectif. Calculer une valeur approchée de l'intégrale définie $I = \int_a^b f(x)dx$, souvent parce que l'on ne connaît pas de primitive de f .

Définition 32.3.1 (Formules de Newton-Cotes). L'idée est d'approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\int_a^b P(x)dx$, où P est un polynôme d'interpolation de f en des points équidistants.

- **Méthode des rectangles** (degré 0).
- **Méthode des trapèzes** (degré 1).
- **Méthode de Simpson** (degré 2), qui est d'ordre 3, étonnamment élevé.

Théorème 32.3.1 (Formules de Quadrature de Gauss-Legendre). Pour calculer $\int_{-1}^1 f(x)dx$, il est possible de faire beaucoup mieux que Newton-Cotes. Une formule de quadrature de Gauss à n points est de la forme $\sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$. En choisissant **judicieusement** les poids w_i et les nœuds x_i (qui sont les racines du n -ième polynôme de Legendre), on peut obtenir une méthode d'ordre $2n - 1$, ce qui est extraordinairement efficace.

32.4 Algèbre Linéaire Numérique

Objectif. Développer des algorithmes efficaces et numériquement stables pour résoudre les deux problèmes centraux de l'algèbre linéaire : la résolution de systèmes linéaires $Ax = b$ et le calcul de valeurs propres.

Définition 32.4.1 (Conditionnement). Le **conditionnement** d'une matrice inversible A

est $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$. Il mesure la sensibilité de la solution x aux perturbations des données A et b . Si $\text{cond}(A)$ est grand, le problème est **mal conditionné** et difficile à résoudre numériquement.

Proposition 32.4.1 (Méthodes Directes pour $Ax = b$). —

Élimination de Gauss et Décomposition LU : C'est l'algorithme de base, qui consiste à transformer A en une matrice triangulaire supérieure U par des opérations élémentaires sur les lignes, ce qui revient à factoriser $A = LU$. La **stratégie du pivot partiel** est essentielle pour garantir la stabilité numérique.

- **Décomposition de Cholesky** : Si A est symétrique définie positive, on peut la factoriser sous la forme $A = BB^T$, où B est triangulaire inférieure. C'est deux fois plus rapide que LU.

Théorème 32.4.1 (Méthodes Itératives pour $Ax = b$). Pour les systèmes très grands et creux (issus des EDP), les méthodes directes sont trop coûteuses. On utilise des méthodes itératives qui construisent une suite x_k convergant vers la solution. L'idée est de décomposer $A = M - N$ et d'itérer $Mx_{k+1} = Nx_k + b$.

- **Méthode de Jacobi** : M est la diagonale de A .
- **Méthode de Gauss-Seidel** : M est la partie triangulaire inférieure de A .

Théorème 32.4.2 (Convergence des méthodes itératives). La suite (x_k) converge vers la solution de $Ax = b$ pour tout x_0 si et seulement si le rayon spectral de la matrice d'itération $J = M^{-1}N$ est strictement inférieur à 1.

Application (Calcul de valeurs propres : Méthode de la puissance). Pour trouver la valeur propre de plus grand module d'une matrice A , on peut utiliser l'algorithme simple de la **méthode de la puissance** : on part d'un vecteur x_0 et on calcule la suite $x_{k+1} = \frac{Ax_k}{\|Ax_k\|}$. Sous de bonnes conditions, cette suite converge vers le vecteur propre associé à la valeur propre dominante.

Chapitre 33

Option Calcul Scientifique : La Boîte à Outils du Modélisateur

33.1 La Philosophie de l'Épreuve de Modélisation

Objectif. Comprendre que cet oral n'est pas un test de connaissances brutes, mais une évaluation de la **maturité scientifique**. Le jury veut voir votre capacité à :

1. **Analyser et Synthétiser** : Lire un texte scientifique, en extraire le modèle mathématique principal et les questions pertinentes.
2. **Proposer et Critiquer** : Suggérer des méthodes numériques adaptées au modèle, et surtout, être capable de discuter leurs avantages, leurs inconvénients, et leur coût.
3. **Implémenter et Simuler** : Écrire un code (simple) qui met en œuvre l'algorithme choisi et interpréter les résultats obtenus.

Cette fiche est un guide pour les deux premières étapes, qui sont les plus importantes.

Remarque (La Question Clé). Face à un texte, la première question à se poser est toujours : **Quel est le modèle mathématique sous-jacent** ? Est-ce une EDO ? Un système linéaire ? Un problème d'optimisation ? Un problème aux valeurs propres ? L'identification correcte du modèle dicte toute la suite de l'analyse.

33.2 La Boîte à Outils Algorithmique par Type de Problème

Objectif. Organiser sa pensée non pas par méthode, mais par **type de problème**. C'est la clé pour proposer rapidement une solution pertinente le jour de l'épreuve.

33.2.1 Si le modèle est une Équation Différentielle Ordinaire (EDO)

Proposition 33.2.1 (Checklist pour EDO $y' = f(t, y)$). 1.

Théorie : Le problème de Cauchy est-il bien posé ? (théorème de Cauchy-Lipschitz, f est-elle lipschitzienne ?)

2. **Stabilité** : Le système est-il **raide (stiff)** ? Y a-t-il des échelles de temps très différentes ?

— **Si NON (non-raide)** : Un schéma **explicite** est généralement préférable (moins coûteux). RK4 est le cheval de bataille par défaut : simple à coder, d'ordre élevé, stable pour des pas raisonnables.

— **Si OUI (raide)** : Un schéma **implicite** est **obligatoire**. Le plus simple est l'Euler implicite. Il est A-stable et robuste, mais d'ordre 1 et nécessite de résoudre une équation à chaque pas (par ex. avec la méthode de Newton).

3. **Conservation** : Le système physique a-t-il des invariants (énergie, moment...) ? Si oui, il peut être judicieux de choisir un **schéma symplectique** (comme Euler-Cromer ou Verlet pour la mécanique) qui

préserve ces quantités au lieu d'un schéma qui les dissipe.

33.2.2 Si le modèle est un Système Linéaire $Ax = b$

Proposition 33.2.2 (Checklist pour $Ax = b$). 1. **Analyse de la Matrice A** : C'est l'étape la plus importante.

- **Taille** : Petite ($n < 1000$) ou Grande ($n > 10^4$) ?
- **Structure** : Pleine, Creuse (beaucoup de zéros), Symétrique, Définie Positive ?
- **Conditionnement** : $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$. Est-il grand ? (si oui, le problème est sensible aux erreurs).

2. Choix de la Méthode :

- **Si A est petite et pleine** : Une **méthode directe** est la meilleure solution. La décomposition LU avec pivot partiel est la méthode universelle. Si A est symétrique définie positive, la décomposition de Cholesky est deux fois plus rapide.
- **Si A est grande et creuse** : Une **méthode itérative** est indispensable.
 - Jacobi ou Gauss-Seidel sont des méthodes de base. Elles convergent si A est à diagonale strictement dominante.
 - Pour les problèmes plus difficiles, la méthode du **gradient conjugué** (si A est SDP) est la référence absolue. Elle est optimale au sens d'un certain critère.

33.2.3 Si le modèle est un Problème aux Valeurs Propres $Ax = \lambda x$

Proposition 33.2.3 (Checklist pour $Ax = \lambda x$). **objectif** : Cherche-t-on toutes les valeurs propres ou seulement quelques-unes ?

- **Pour quelques v.p. (souvent la plus grande/petite)** : Des **méthodes itératives** sont efficaces. La **méthode de la puissance** (pour la v.p. de plus grand module) et la méthode de la puissance inverse (pour

la v.p. la plus proche d'un scalaire donné) sont les plus simples.

- **Pour toutes les v.p.** : Des méthodes plus complexes sont nécessaires. L'algorithme **QR** est la méthode de référence. Il consiste à construire une suite de matrices orthogonalement semblables qui converge vers une forme triangulaire (ou quasi-triangulaire), révélant les valeurs propres sur la diagonale.

33.3 Thèmes Transversaux et Algorithmes Essentiels

Objectif. Ajouter à notre boîte à outils des méthodes plus avancées qui apparaissent fréquemment dans les textes de modélisation.

33.3.1 Optimisation Numérique : Trouver le Minimum

Remarque (Le Lien avec la Résolution d'Équations). Trouver le minimum d'une fonction $F(x)$ revient à trouver un zéro de son gradient $\nabla F(x) = 0$. Les méthodes d'optimisation sont donc des "méthodes de Newton" pour le gradient.

Définition 33.3.1 (Méthodes de Descente). L'idée est de construire une suite $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, où d_k est une direction de descente et α_k est le pas.

- **Méthode du Gradient** : On choisit la direction de plus grande pente, $d_k = -\nabla F(x_k)$. Simple, mais peut être très lente (zigzags).
- **Méthode de Newton** : On minimise le modèle quadratique de F en x_k . La direction est $d_k = -[H_F(x_k)]^{-1} \nabla F(x_k)$, où H_F est la matrice Hessienne. Convergence quadratique, mais très coûteuse.
- **Méthode du Gradient Conjugué** : Pour les problèmes quadratiques, c'est une méthode "intermédiaire" qui converge en au plus n itérations. C'est une méthode de choix pour les grands systèmes linéaires SDP.

33.3.2 Équations aux Dérivées Partielles (EDP) : Le Strict Minimum

Remarque (La Philosophie de la Discrétisation). L'idée est de remplacer un problème en dimension infinie (trouver une fonction) par un très grand système algébrique en dimension finie (trouver les valeurs de la fonction sur une grille).

Définition 33.3.2 (Méthode des Différences Finies). On remplace les dérivées par des approximations par quotients différentiels sur une grille.

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

L'EDP devient un grand système linéaire (ou non-linéaire) dont les inconnues sont les valeurs de la fonction aux nœuds de la grille. La matrice de ce système est souvent très grande, creuse et structurée (bande, tridiagonale...).

Définition 33.3.3 (Méthode des Éléments Finis). Approche plus sophistiquée. On cherche une solution approchée comme une combinaison linéaire de "fonctions de base" simples (souvent des polynômes par morceaux). La méthode consiste à projeter l'EDP sur le sous-espace engendré par ces fonctions de base, via une formulation variationnelle. C'est la méthode de choix pour les géométries complexes.

33.3.3 La Transformée de Fourier Rapide (FFT)

Théorème 33.3.1 (Algorithme de Cooley–Tukey). La Transformée de Fourier Discrète (TFD) d'un signal de taille N peut être calculée en $\mathcal{O}(N \log N)$ opérations au lieu de $\mathcal{O}(N^2)$ pour un calcul naïf.

Remarque (L'Algorithme le plus Important du XXe Siècle). La FFT est partout : traitement du son et de l'image (JPEG, MP3), télécommunications (WiFi, 4G), résolution d'EDP (méthodes spectrales), multiplication rapide de grands polynômes... Sa basse complexité a rendu possibles des applications qui étaient inimaginables auparavant. Il faut connaître son existence et son coût.