

101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples d'applications.

Dans cette leçon, G désigne un groupe de neutre 1, et X désigne un ensemble.

I. Action d'un groupe sur un ensemble

A. Définitions et premiers exemples

Définition 1 ([R] 19, [U] 27). Une action de G sur X est une application $G \times X \rightarrow X$ définie par $(g, x) \mapsto g \cdot x$ vérifiant

1. $\forall (g, g') \in G^2, \forall x \in X, g' \cdot (g \cdot x) = (g'g) \cdot x$
2. $\forall x \in X, 1 \cdot x = x$

Pour signifier que G agit sur X , on note $G \curvearrowright X$.

Exemple 2 ([R] 19, [U] 28). — $\mathfrak{S}(X) \curvearrowright X$ par $\sigma \cdot x = \sigma(x)$
— Si E est un espace vectoriel, alors $GL(E) \curvearrowright E$ par $\varphi \cdot x = \varphi(x)$
— $(g, x) \mapsto x$ est une action de G sur X , appelée action triviale.

Proposition 3 ([R] 19, [U] 28). La donnée d'une action $(g, x) \mapsto g \cdot x$ de G sur X équivaut à la donnée d'un morphisme $\varphi : G \rightarrow \mathfrak{S}(X)$, $g \mapsto [x \mapsto g \cdot x]$, appelé morphisme associé à l'action de G sur X .

Définition 4 ([R] 19/21, [U] 29). Soit $x \in X$. Alors :

- L'orbite de x est l'ensemble $\text{Orb}(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ (aussi noté $G \cdot x$);
- Le stabilisateur de x est l'ensemble $\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$.

Proposition 5 ([U] 34/37). 1. $G \curvearrowright G$ par $g \cdot h = ghg^{-1}$ (on l'appelle action par conjugaison). Le stabilisateur de $h \in G$ est appelé centralisateur de h , et est noté $C(h)$.

2. G agit sur l'ensemble de ses sous-groupes par $g \cdot H = gHg^{-1}$ (action par conjugaison). Le stabilisateur de $H \leq G$ est appelé normalisateur de H , et est noté $N(H)$.

Définition 6 ([R] 20, [U] 29/31). On dit que l'action de G sur X est transitive si elle n'a qu'une seule orbite, i.e. si $\forall (x, y) \in X^2, \exists g \in G : g \cdot x = y$.

On dit que l'action de G sur X est fidèle si φ est injective.

Exemple 7 ([U] 31). — $\mathfrak{S}_n \curvearrowright [1, n]$ transitivement par $\sigma \cdot i = \sigma(i)$

- $G \curvearrowright G$ fidèlement par $g \cdot h = gh$ (on l'appelle action par translation à gauche)
- Soit H un sous-groupe de G . L'action de G sur G/H définie par $g \cdot xH = gxH$, appelée action par translation à gauche, est transitive.

Proposition 8 ([R] 21). Pour tout $x \in X$, $\text{Stab}(x)$ est un sous-groupe de G .

Proposition 9 ([U] 30). $x \mathcal{R} y \iff \exists g \in G : y = g \cdot x$ définit une relation d'équivalence sur X dont les classes sont les orbites de l'action de G sur X .

Corollaire 10 ([U] 30). Les orbites partitionnent X .

Exemple 11 ([U] 41). Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Le groupe $\langle \sigma \rangle$ agit sur $[1, n]$ par $\sigma^k \cdot i = \sigma^k(i)$. Les orbites non ponctuelles sont les supports des cycles dans la décomposition en produit de cycles à supports disjoints de σ .

B. Cas d'un groupe et d'un ensemble finis

Dans ce paragraphe, on suppose G et X finis. On pose $n = \text{Card}(G)$.

Théorème 12 (de Cayley - [R] 21, [U] 31). G s'identifie à un sous-groupe de \mathfrak{S}_n .

Proposition 13 ([R] ?, [U] ?). $\forall (x, y) \in X^2, y \in \text{Orb}(x) \implies \exists g \in G : \text{Stab}(y) = g \text{Stab}(x) g^{-1}$.

Théorème 14 (Relation orbite-stabilisateur - [R] 21). Pour tout $x \in X$, $G/\text{Stab}(x)$ et $\text{Orb}(x)$ sont équipotents (cela reste vrai si G est infini). Par conséquent,

$$\text{Card}(G) = \text{Card}(\text{Stab}(x)) \text{Card}(\text{Orb}(x))$$

Théorème 15 (Équation aux classes - [R] 21). Soit $\{x_1, \dots, x_r\}$ un système de représentants pour les orbites. Alors,

$$\text{Card } X = \sum_{i=1}^r \text{Card}(\text{Orb}(x_i)) = \sum_{i=1}^r \frac{\text{Card } G}{\text{Card}(\text{Stab}(x_i))}$$

Exemple 16 ([R] 22). Si $\text{Card } G$ est une puissance d'un nombre premier, alors son centre $Z(G) := \{g \in G \mid \forall h \in G, ghg^{-1} = h\}$ n'est pas réduit à $\{1\}$.

Corollaire ([R] 23) : tout groupe d'ordre p^2 avec p premier est abélien.

Théorème 17 (Formule de Burnside - [R] 35). L'action de G sur X possède $\frac{1}{\text{Card } G} \sum_{g \in G} \text{Card}(\text{Fix}(g))$ orbites, où $\text{Fix}(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$.

Exemple 18 ([C] 132). En moyenne, une permutation de $[1, n]$ tirée aléatoirement a 1 point fixe.

Exemple 19 ([C] 132). Si G n'est pas abélien, alors la probabilité de tirer simultanément deux éléments qui commutent vaut $\frac{k}{n}$, avec k le nombre de classes de conjugaison de G .

Théorème 20 (de Cauchy - [R] 23). Soit p un nombre premier. Si $p \mid \text{Card } G$, alors G admet un élément d'ordre p .

II. Applications

A. En géométrie : les isométries des polytopes

Théorème 21 ([R] 94). L'ensemble des isométries du plan conservant un triangle équilatéral est un groupe isomorphe à \mathfrak{S}_3 .

Proposition 22 ([R] 82). Soit \mathcal{C} un cube. L'ensemble des isométries de l'espace conservant \mathcal{C} est un groupe, noté $\text{Is}(\mathcal{C})$. On note $\text{Is}^+(\mathcal{C})$ le sous-groupe de \mathcal{C} formé de rotations.

Théorème 23 ([R] 85). $\text{Is}^+(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4$ et $\text{Is}(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Théorème 24 ([R] 95). En notant \mathcal{T} le tétraèdre régulier, on a $\text{Is}^+(\mathcal{T}) \cong \mathcal{A}_4$ et $\text{Is}(\mathcal{T}) \cong \mathfrak{S}_4$.

B. Du côté des matrices

Dans ce paragraphe, K désigne un corps. On fixe $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Proposition 25 ([R] 184/185/199/195/206). *Les applications suivantes sont des actions :*

1. Translation à gauche : $GL_n(K) \times \mathcal{M}_{n,m}(K) \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(K), (P, A) \mapsto PA$
2. Translation à droite : $GL_n(K) \times \mathcal{M}_{n,m}(K) \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(K), (P, A) \mapsto AP^{-1}$
3. Similitude (ou conjugaison) : $GL_n(K) \times \mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathcal{M}_n(K), (P, A) \mapsto PAP^{-1}$
4. Équivalence (ou action de Steiniz) : $(GL_n(K) \times GL_m(K)) \times \mathcal{M}_{n,m}(K) \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(K), ((P, Q), A) \mapsto PAQ^{-1}$
5. Congruence : $GL_n(K) \times \mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathcal{M}_n(K), (P, A) \mapsto {}^tPAP$

Proposition 26 ([R] 184/185/?/195/207). *Dans l'ordre de la proposition précédente, les orbites sont caractérisées par :*

1. le noyau de A
2. l'image de A
3. les polynômes minimal et caractéristique de A
4. Ça dépend de K ...

Exemple 27. $\text{Diag}(1, 2, 2)$ et $\text{Diag}(1, 1, 2)$ ont même polynôme minimal mais ne sont pas semblables : il faut donc bien les deux informations !

C. Théorèmes de Sylow

Dans ce paragraphe, on se donne p premier, et on note $\text{Card } G = p^\alpha m, m \wedge p = 1$.

Définition 28 ([U] 85). *Un p -Sylow de G est un sous-groupe de G de cardinal p^α .*

$\text{Syl}_p(G)$ désigne l'ensemble des p -Sylow de G , et $n_p := \text{Card}(\text{Syl}_p(G))$.

Théorème 29 (de Sylow - [U] 87). *Soit G un groupe d'ordre $p^\alpha m, m \wedge p = 1$. Alors,*

1. $\text{Syl}_p(G) \neq \emptyset$
2. G agit transitivement sur $\text{Syl}_p(G)$ par conjugaison
3. $n_p \equiv 1 [p]$

Définition 30. *On dit que G est simple si les seuls sous-groupes de G distingués (i.e. fixe par l'action par conjugaison de G) sont $\{1\}$ et G .*

Théorème 31 ([S] 277). *Si G est simple et d'ordre 60, alors $G \cong A_5$.*

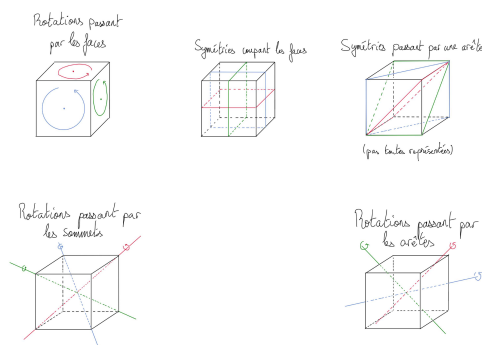
Développements

- Développement 1 : Théorème 23
- Développement 2 : Théorème 31

Références

- U *Théorie des groupes*, Félix Ulmer
- R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
- S *Algèbre pour la licence 3*, Szpirglas
- C *Carnets de voyage en Algèbre*, Caldero

FIGURE : Isométries du cube



105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

I. Permutations d'un ensemble fini

A. Introduction

Définition 1 ([R] 37). Soit E un ensemble. On note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des bijections de E dans E . On l'appelle groupe symétrique de E . On notera plus simplement $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}([1, n])$. On appelle permutation de E un élément de $\mathfrak{S}(E)$.

Proposition 2. $\mathfrak{S}(E)$ est un groupe pour la composition, de neutre l'identité de E .

Proposition 3 ([R] 39). Si E et F sont deux ensembles équipotents, alors $\mathfrak{S}(E)$ et $\mathfrak{S}(F)$ sont isomorphes (en tant que groupes).

Proposition 4 ([R] 39). Pour $n \geq 3$, \mathfrak{S}_3 n'est pas commutatif.

Dans toute la suite, on étudiera \mathfrak{S}_n pour $n \geq 3$.

Proposition 5 ([R] 40). $\#\mathfrak{S}_n = n!$

Notation ([U] 41). Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On représentera σ par la matrice $2 \times n$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

B. Action naturelle de \mathfrak{S}_n sur $[1, n]$, conséquences

Proposition 6 ([U] 41). \mathfrak{S}_n agit naturellement sur $[1, n]$ par $\sigma \cdot i = \sigma(i)$. Le morphisme associé est l'identité de \mathfrak{S}_n .

Définition 7 ([U] 42). On note $\text{Fix}(\sigma)$ l'ensemble des points fixes de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Son complémentaire dans $[1, n]$ est appelé support de σ , et est noté $\text{Supp}(\sigma)$.

Proposition 8 ([U] 43). Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Le sous-groupe $\langle \sigma \rangle$ agit sur $[1, n]$ par restriction de l'action de \mathfrak{S}_n . Les orbites de cette action sont appelées σ -orbites. La réunion des σ -orbites ponctuelles est $\text{Fix}(\sigma)$. Les σ -orbites non ponctuelles partitionnent $\text{Supp}(\sigma)$.

Exemple 9. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. On a $\text{Supp}(\sigma) = \{1, 2\} \sqcup \{4, 5\} = \langle \sigma \rangle \cdot \{1\} \sqcup \langle \sigma \rangle \cdot \{4\}$.

Définition 10 ([U] 43). Un k -cycle ($2 \leq k \leq n$) est une permutation n'ayant qu'une seule σ -orbite non ponctuelle $\{i_1, \dots, i_k\}$. On la note $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ pour signifier que $\forall j \notin \{i_1, \dots, i_k\}, \sigma(j) = j$ et $\sigma(i_j) = i_{j+1}$ en regardant les indices modulo k .

Un 2-cycle est appelé transposition.

Proposition 11 ([U] 43). $(i_1, i_2, \dots, i_k) = (i_2, i_3, \dots, i_k, i_1) = \dots = (i_k, i_1, i_2, \dots, i_{k-1})$

Proposition 12. Un k -cycle est d'ordre k .

C. Décomposition d'une permutation, conséquences

Proposition 13 ([U] 42). Deux permutations à supports disjoints commutent.

Théorème 14 ([U] 43). Toute permutation se décompose de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme produit de cycles à supports disjoints.

Algorithme 15 ([U] 43). Pour trouver une telle décomposition, il suffit de trouver les r -orbites.

1. On calcule $\sigma(1), \sigma^2(1), \dots$ jusqu'à trouver $\sigma^{k_1}(1) = 1$ (NB : $k_1 \leq n$);
2. On pose $i_2 = \min([1, n] \setminus \langle \sigma \rangle \cdot \{1\})$, et de même on calcule $\sigma(i_2), \sigma^2(i_2), \dots$ jusqu'à trouver $\sigma^{k_2}(i_2) = i_2$;
3. On itère jusqu'à épuiser $[1, n]$.

On a alors $\sigma = (1, \sigma(1), \dots, \sigma^{k_1-1}(1)) \circ (i_2, \sigma(i_2), \dots, \sigma^{k_2-1}(i_2)) \circ \dots \circ (i_j, \sigma(i_j), \dots, \sigma^{k_j-1}(i_j))$

Exemple 16. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (1, 3, 4)(5, 6)$

Proposition 17 ([R] 44). $(i_1, \dots, i_k) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \dots (i_{k-1}, i_k)$

Corollaire 18 ([R] 44). Les transpositions engendrent \mathfrak{S}_n .

Proposition 19 ([R] 45). $\mathfrak{S}_n = \langle (i, i+1), 1 \leq i \leq n \rangle = \langle (1, i), 2 \leq i \leq n \rangle = \langle (1, 2), (1, 2, \dots, n) \rangle$

Définition 20 ([U] 45). On appelle type de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ la liste croissante des cardinaux des σ -orbites.

Exemple 21. Le type de $(1, 2, 5)(3, 4)(7, 8) \in \mathfrak{S}_8$ est la liste $[1, 2, 2, 3]$.

Proposition 22 ([U] 46). Deux permutations sont conjuguées dans \mathfrak{S}_n si, et seulement si, elles ont le même type. Cela décrit donc les classes de conjugaison de \mathfrak{S}_n .

Proposition 23 ([U] 45). Si σ est du type $[l_1, \dots, l_k]$, alors $\text{ord}(\sigma) = l_1 \vee \dots \vee l_k$.

D. Signature d'une permutation, groupe alterné

Proposition 24 ([R] 47). Il existe un unique morphisme $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$ qui envoie les transpositions sur -1 . On appelle signature de σ la quantité $\varepsilon(\sigma)$.

Corollaire 25. La signature d'un k -cycle est $(-1)^{k+1}$.

Proposition 26 ([R] 48). $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

En particulier, la signature mesure le nombre d'inversions.

Définition 27 ([R] 48). On appelle n -ième groupe alterné le sous-groupe $\mathcal{A}_n = \text{Ker}(\varepsilon)$. C'est l'ensemble des permutations dîtes paires.

Exemple 28. $\mathcal{A}_3 = \{\text{id}, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$.

Proposition 29. $\#\mathcal{A}_n = \frac{n!}{2}$

Théorème 30 ([R] 49). Pour $n \geq 3$, les 3-cycles engendrent \mathcal{A}_n , et y sont conjugués.

Théorème 31 ([R] 50). Pour $n \geq 5$, \mathcal{A}_n n'admet pas de sous-groupe distingué non trivial.

II. Quelques applications du groupe symétrique

A. En géométrie : les isométries des polytopes

Théorème 32 ([R] 94). *L'ensemble des isométries du plan conservant un triangle équilatéral est un groupe isomorphe à \mathfrak{S}_3 .*

Proposition 33 ([R] 82). *Soit \mathcal{C} un cube. L'ensemble des isométries de l'espace conservant \mathcal{C} est un groupe, noté $\text{Is}(\mathcal{C})$. On note $\text{Is}^+(\mathcal{C})$ le sous-groupe de $\text{Is}(\mathcal{C})$ formé des rotations.*

Théorème 34 ([R] 85). $\text{Is}^+(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4$ et $\text{Is}(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Théorème 35 ([R] 95). *En notant \mathcal{T} le tétraèdre régulier, on a : $\text{Is}(\mathcal{T}) \cong \mathfrak{S}_4$ et $\text{Is}^+(\mathcal{T}) \cong \mathcal{A}_4$.*

Chez les (actions de) groupes

Théorème 36 (de Cayley - [R] 53). *Tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de \mathfrak{S}_n .*

Proposition 37. *Comme pour tout corps (commutatif) K , $\mathfrak{S}_n \curvearrowright GL_n(K)$, tout groupe de garde n est isomorphe à un sous-groupe de $GL_n(K)$.*

Exemple 38. Soit $D_{2 \times 4}$ le groupe des isométries du carré. Comme $\#D_{2 \times 4} = 8$, $D_{2 \times 4}$ est isomorphe à un sous-groupe de \mathfrak{S}_8 . Noton φ un tel isomorphisme. Comme $D_{2 \times 4} = \langle r, s \rangle$ où $\text{ord}(r) = 4$, $\text{ord}(s) = 2$ et $\text{ord}(rs) = 2$, on a $\varepsilon \circ \varphi(s) = \varepsilon \circ \varphi(rs) = -1$, donc $\varepsilon \circ \varphi(r) = 1$.

C. Polynômes symétriques

Définition 39 ([R] 55). *Un polynôme symétrique est un polynôme $P \in K[X_1, \dots, X_n]$ tel que $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = P(X_1, \dots, X_n)$.*

Définition 40 ([R] 55). *Les polynômes symétriques élémentaires sont les*

$$\Sigma_{k,n} = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} X_{i_1} \dots X_{i_k} \in K[X_1, \dots, X_n]$$

Théorème 41 (ADMIS - [R] 55). *Pour tout polynôme symétrique $P \in K[X_1, \dots, X_n]$, il existe un unique polynôme $Q \in K[\Sigma_{1,n}, \dots, \Sigma_{n,n}]$ tel que $P(X_1, \dots, X_n) = Q(\Sigma_{1,n}, \dots, \Sigma_{n,n})$.*

D. En algèbre (multi-)linéaire

Dans ce paragraphe, E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E .

Définition 42 ([R] 545). *Une forme k -linéaire sur E est une application $\varphi : E^k \rightarrow \mathbb{K}$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, pour tout $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_k)$ est linéaire.*

On note $\bigotimes^k E^*$ l'ensemble des formes k -linéaires sur E .

Proposition 43 ([R] 546). $(e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*)_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$ est une base de $\bigotimes^k E^*$, où pour $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*(x_1, \dots, x_k) = e_{i_1}^*(x_1) \dots e_{i_k}^*(x_k)$.

Définition 44 ([R] 546). *Une forme k -linéaire alternée est une forme k -linéaire $\varphi \in \bigotimes^k E^*$ telle que $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$, $\forall (x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1, \dots, x_k)$.*

On note $\bigwedge^k E^*$ l'espace des formes k -linéaires alternées sur E .

Proposition 45. $(e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*)_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$ est une base de $\bigwedge^k E^*$, où pour $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) e_{i_1}^*(x_{\sigma(1)}) \dots e_{i_k}^*(x_{\sigma(k)})$.

Corollaire 46. On a $\dim \left(\bigwedge^k E^* \right) = \binom{n}{k}$.

Définition 47. On appelle déterminant dans la base \mathcal{B} l'unique forme n -linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}}$ sur E vérifiant $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$. (La famille $(\det_{\mathcal{B}})$ est une base de $\bigwedge^n E^*$.)

Proposition 48 ([R] 547). $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) e_1^*(x_{\sigma(1)}) \dots e_n^*(x_{\sigma(n)})$.

E. Résultats en probabilités

Définition 49 ([R] 51). On appelle dérangement une permutation sans point fixes.

Proposition 50. Notons d_n le nombre de dérangements de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. En particulier, la probabilité de choisir un dérangement en tirant au hasard une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tend vers $\frac{1}{e}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Proposition 51 ([C]). Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de points fixes d'une permutation aléatoirement choisie dans \mathfrak{S}_n . Alors $\mathbb{E}[X] = \mathbb{V}[X] = 1$.

F. Groupes simples d'ordre 60

Dans ce paragraphe, on se donne p premier, et on note $\#G = p^\alpha m$, $m \wedge p = 1$.

Définition 52 ([U] 85). *Un p -Sylow de G est un sous-groupe de G de cardinal p^α .*

Notation. $\text{Syl}_p(G)$ désigne l'ensemble des p -Sylow de G , et $n_p = \# \text{Syl}_p(G)$.

Théorème 53 (de Sylow - [U] 87). *Soit G un groupe d'ordre $p^\alpha m$, p premier et $m \wedge p = 1$.*

1. $\text{Syl}_p(G) \neq \emptyset$
2. G agit transitivement sur $\text{Syl}_p(G)$ par conjugaison
3. $n_p \equiv 1 [p]$ (donc $n_p \mid m$).

Définition 54. On dit que G est simple si les seuls sous-groupes de G distingués (i.e. fixe par l'action par conjugaison de G) sont $\{1\}$ et G .

Théorème 55 ([S] - 277). *Si G est simple et d'ordre 60, alors $G \cong \mathcal{A}_5$.*

Développements

- Développement 1 : Théorème 34
- Développement 2 : Théorème 55

Références

- R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
- U *Théorie des groupes*, Félix Ulmer
- S *Algèbre pour la licence 3*, Szpirglas
- C *Carnets de voyage en Algèbre*, Caldero

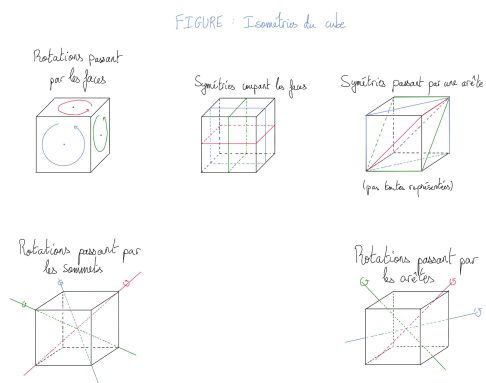


FIGURE 1.1 – Isométries du cube

106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications

Dans cette leçon, K est un corps commutatif, et E est un K -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

I. Endomorphismes inversibles d'un espace vectoriel

A. Introduction au groupe linéaire

Théorème 1 ([Rb] 139). — L'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E est un anneau pour $+$ et \circ , dont le groupe des inversibles est noté $GL(E)$, et est appelé groupe linéaire de E .

— Similairement, l'ensemble $\mathcal{M}_n(K)$ des matrices carrées de taille $n \times n$ est un anneau pour $+$ et \times , dont le groupe des inversibles est noté $GL_n(K)$, appelé groupe linéaire d'ordre n sur K .

Remarque 2 ([Rb] 140). Étant donnée une base \mathcal{B} , l'application $u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ induit un isomorphisme entre $GL(E)$ et $GL_n(K)$.

Définition 3 ([Rb] 141). On note $SL(E)$ (resp. $SL_n(K)$) le noyau du morphisme \det de $GL(E)$ (resp. $GL_n(K)$) dans K^\times . On l'appelle groupe spécial linéaire de E (resp. groupe spécial linéaire d'ordre n sur K).

Théorème 4 ([Rb] 140). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Comme $\dim E < +\infty$, sont équivalentes :

1. $u \in GL(E)$
2. (a) u est injectif
(b) $\text{Ker } u = \{0\}$
(c) $\exists v \in \mathcal{L}(E) : v \circ u = \text{id}_E$
3. (a) u est surjectif
(b) $\text{Im } u = E$
(c) $\exists v \in \mathcal{L}(E) : u \circ v = \text{id}_E$
4. L'image par u d'une base de E est une base de E
5. $\det(u) \neq 0$

Remarque 5. Une matrice A est inversible si, et seulement si, ses colonnes forment une base de K^n , et si, et seulement si, ses lignes forment une base de K^n .

Définition 6. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie de rapport $\lambda \in K^\times$ si $\forall x \in E, u(x) = \lambda x$.

Proposition 7. Une homothétie de rapport $\lambda \in K^\times$ est inversible, d'inverse l'homothétie de rapport $1/\lambda$.

Proposition 8 ([Rb] e168). Les homothéties sont les seuls endomorphismes à stabiliser toute droite.

B. Opérations élémentaires

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On note L_1, \dots, L_p les lignes de A , et C_1, \dots, C_n ses colonnes.

Définition 9 ([Bu] 315-317). Soient $\alpha \in K^\times, (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On définit les matrices suivantes :

— Matrice de dilatation $D_i(\alpha) = \text{diag}(1, \dots, 1, \alpha, 1, \dots, 1) \in GL_n(K)$ (α est à la i -ième position)

— Matrice de transvection $T_{i,j}(\alpha) = I_n + \alpha E_{i,j} \in GL_n(K)$

— Matrice de permutation $P_\sigma = (\delta_{i, \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n} \in GL_n(K)$

Définition 10. On définit les opérations élémentaires sur les colonnes :

- $C_i \leftarrow \alpha C_i$: on remplace C_i par αC_i
- $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$: on remplace C_i par $\alpha C_i + \alpha C_j$
- $C_i \longleftrightarrow C_j$: on échange C_i et C_j

Théorème 11 ([Bu] 315-318). On a les correspondances suivantes entre opérations élémentaires et multiplication matricielle :

- $D_i(\alpha)A \iff L_i \leftarrow \alpha L_i$
- $T_{i,j}(\alpha)A \iff L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$
- $P_{(i,j)}A \iff L_i \longleftrightarrow L_j$

et

- $AD_i(\alpha) \iff C_i \leftarrow \alpha C_i$
- $AT_{i,j}(\alpha) \iff C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$
- $AP_{(i,j)} \iff C_i \longleftrightarrow C_j$

Proposition 12. $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes injectif de \mathfrak{S}_n dans $GL_n(K)$.

II. Structure de $GL(E)$, sous-groupe orthogonal

A. Structure de groupe

Théorème 13 (Pivot de Gauss - [Rb] 191). Pour toute matrice de rang r , il existe une suite d'opérations élémentaires qui transforme cette matrice en la matrice $J_{n,r} = \text{diag}(I_r, O_{n-r})$. Plus précisément, si $\text{rg } A = n$, alors il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et des matrices de transvection T_1, \dots, T_p telles que $A = P_\sigma T_1 \dots T_p D_\alpha$ où D_α est la matrice de dilatation D_α de rapport $\alpha = \det A$.

Corollaire 14 ([Rb] 154, 153). — Les matrices de transvection et de dilatation engendrent $GL_n(K)$;

— Les matrices de transvection engendrent $SL_n(K)$.

Corollaire 15 ([Rb] 141). $GL(E)/SL(E) \cong K^\times$

Corollaire 16 ([Rb] 141). — $Z(GL(E)) = K^\times \text{id}_E$ (c'est l'ensemble des homothéties) ;

— $Z(SL(E)) = \mathbb{U}_n(K) \text{id}_E$, où $\mathbb{U}_n(K) = \{\lambda \in K^\times \mid \lambda^n = 1\}$.

B. Le groupe spécial orthogonal

Soit q une forme quadratique sur E , de forme polaire φ . Supposons $\text{car } K \neq 2$.

Définition 17 ([P] 123-124). — Le groupe orthogonal de (E, q) est $O(q) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid q \circ u = q\}$

- Le groupe spécial orthogonal de (E, q) est $SO(q) = \{u \in O(q) \mid \det u = 1\}$
- Lorsque φ est le produit scalaire canonique relativement à une base donnée, on note $O(E) = O(q) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid {}^t u \circ u = \text{id}_E\}$ et $SO(E) = SO(q) = \{u \in O(E) \mid \det u = 1\}$.
- On note également $O_n(K) = \{M \in \mathcal{M}_n(K) \mid {}^t M M = I_n\}$ et $SO_n(K) = \{M \in O_n(K) \mid \det M = 1\}$.

Proposition 18 ([Rb] 722). Si \mathcal{B} est une base orthonormale de E , alors $u \in O(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(K)$.

Théorème 19 (de réduction des isométries - [Rb] 727). Soit $u \in O(\mathbb{R}^n)$. Il existe une base orthonormale \mathcal{B} de \mathbb{R}^n telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(R(\theta_1), \dots, R(\theta_r), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ où $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_i = \pm 1$.

Remarque 20 ([P] 146). $SO_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Théorème 21 ([C] 50). Soient p premier, $r \geq 1$ et $q = p^r$.

$$SO_2(\mathbb{F}_q) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} & \text{si } -1 \text{ est un carré mod } q \\ \mathbb{Z}/(q+1)\mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 22 ([P] 125). Soit $u \in O(q)$ telle que $u^2 = \text{id}_E$.

On dit que u est une réflexion si $\dim(\text{Ker}(u + \text{id}_E)) = 1$, i.e. si u est une symétrie par rapport à un hyperplan.

On dit que u est un renversement si $\dim(\text{Ker}(u + \text{id}_E)) = 2$, i.e. si u est une symétrie par rapport à un plan.

On suppose désormais que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et que q est définie positive.

Théorème 23 ([P] 143). Tout élément de $O(q)$ est produit d'au plus n réflexions.

Lemme 24. Si $n \geq 3$, alors pour toutes réflexions τ_1 et τ_2 , il existe deux renversements σ_1 et σ_2 tels que $\tau_1 \tau_2 = \sigma_1 \sigma_2$.

Théorème 25. Pour $n \geq 3$, tout élément de $SO(q)$ est produit d'au plus n renversements.

Remarque 26. Ces théorèmes restent vrais si E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K de caractéristique $\neq 2$, et si q est non dégénérée (Cartan, Dieudonné).

III. Topologie dans $GL(E)$

Dans ce paragraphe, K désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Proposition 27 ([Rb] 160-161). $GL(E)$ est ouvert dans $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|)$ et $u \mapsto u^{-1}$ est continue.

Proposition 28. — $GL_n(\mathbb{C})$ et $SL_n(K)$ sont connexes ;
— $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes.

Proposition 29. $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont compacts.

Théorème 30 (Décomposition polaire - [Rb] 740).

$$O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ (H, S) \mapsto HS$$

est un homéomorphisme.

Développements

- Développement 1 : Théorème 21
- Développement 2 : Théorème 23, Lemme 24 et Théorème 25

Références

- Rb *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
- P *Cours d'algèbre*, Perrin
- B *Algèbre et géométrie : CAPES et Agrégation*, Pierre Burg
- C *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et géométries*, P. Caldero, J. Germoni

120 : Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

Dans toute la leçon, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et p est un nombre premier.

I. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

A. Rappels d'arithmétique des entiers

Théorème 1 (division euclidienne - [R] 279). $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \exists ! (q, r) \in \mathbb{Z}^2 :$

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < |b| \end{cases}$$

Définition 2 ([R] 279). Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. On dit que a est congru à b modulo n , et on note $a \equiv b[n]$ si n divise $b - a$.

Proposition 3 ([R] 280). Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$. Alors $a + c \equiv b + d[n]$ et $ac \equiv bd[n]$.

B. Construction

Lemme 4. Tout idéal de \mathbb{Z} est principal, et admet un unique générateur positif.

Définition 5 ([R] 280). Le quotient de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ par son idéal $n\mathbb{Z}$ est l'anneau noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On note \bar{a} l'image de $a \in \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Remarque 6. $\bar{a} = \bar{b} \iff a \equiv b[n]$

Proposition 7 ([R] 280). $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$, et les lois sont données par Prop 3 et Rq 6.

Exemple 8. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} = \{\bar{9}, \bar{64}, \bar{-7}\}$, et on a $\bar{1} + \bar{2} = \overline{1+2} = \bar{3} = \bar{0}$, mais aussi $\bar{1} \times \bar{2} = \overline{1 \times 2} = \bar{2}$.

C. Structure d'anneau

Proposition 9 ([R] 283). L'ensemble des inversibles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est :

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid k \wedge n = 1\}$$

L'ensemble des diviseurs de 0 de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est :

$$D_0(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus [(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \cup \{0\}]$$

Exemple 10. $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$, et $D_0(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$.

Proposition 11 ([R] 241 et 281). Les idéaux propres de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $d \mid n$, $d \notin \{1, n\}$. De plus, $(d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \cong (\mathbb{Z}/\frac{n}{d}\mathbb{Z}, +)$.

Corollaire 12. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est principal.

Corollaire 13. L'ensemble des générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Exemple 14. Les idéaux propres de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sont $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, respectivement isomorphes à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Proposition 15 ([R] 295-282). $\forall n, m \geq 2$,

$$\text{Hom}_{gr}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(n \wedge m)\mathbb{Z},$$

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times,$$

$$\text{Hom}_{Ann}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \{k \bmod n \mapsto k \bmod m\} & \text{si } m \mid n \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

D. Le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Théorème 16. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ;
2. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre ;
3. n est premier.

Corollaire 17 ([R] 292). $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$.

Contre-exemple 18. C'est très faux pour n non premier ! $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$ n'a même pas 7 éléments !

II. Structure de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

A. Préambule : le théorème des restes chinois

Théorème 19 (des restes chinois - [R] 285). Soit $(a_1, \dots, a_d) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^d$. Les entiers, a_1, \dots, a_d sont deux à deux premiers si, et seulement si, les anneaux $\mathbb{Z}/a_1 \dots a_d \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/a_1 \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/a_d \mathbb{Z}$ sont isomorphes.

Le cas échéant, il existe $(u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\sum_{i=1}^d a_i b_i = 1$, où $b_i = \frac{a_1 \dots a_d}{a_i}$. L'application :

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : \mathbb{Z}/a_1 \dots a_d \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/a_1 \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/a_d \mathbb{Z} \\ x \bmod a_1 \dots a_d &\mapsto (x \bmod a_1, \dots, x \bmod a_d) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'anneaux, de réciproque :

$$\bar{\varphi}^{-1} : (x_1 \bmod a_1, \dots, x_d \bmod a_d) \mapsto \sum_{i=1}^d x_i a_i b_i \bmod a_1 \dots a_d$$

B. Fonction indicatrice d'Euler

Définition 20 ([R] 283). L'indicatrice d'Euler est : $\varphi : n \mapsto \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \#\{k \in [1, n] \mid k \wedge n = 1\}$.

Exemple 21. $\varphi(8) = 4$ d'après Exemple 10.

Proposition 22 ([R] 288). Si $a \wedge b = 1$, alors $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$.

Corollaire 23 ([R] 288). Si $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ est la décomposition de n en produit de facteurs premiers, alors :

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1) = n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Exemple 24. $\varphi(90) = \varphi(3^2)\varphi(2)\varphi(5) = 3(3-1)(2-1)(5-1) = 24$

Théorème 25 (d'Euler - [R] 283). Si $a \wedge n = 1$, alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$.

Théorème 26 (de Fermat - [R] 284). Si $a \wedge p = 1$, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$. De manière générale, $a^p \equiv a[p]$.

Proposition 27 ([R] 284).

$$n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$$

Théorème 28 ([R] 292). Si $p \geq 3$, alors $\forall \alpha \geq 1$, $(\mathbb{Z}/p^\alpha \mathbb{Z})^\times$ est cyclique.

Théorème 29 (ADMIS - [R] 294). $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est cyclique si, et seulement si, $n \in \{2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha\}$ avec $p \geq 3$ (premier) et $\alpha \geq 1$.

III. Applications

A. Résolution de systèmes de congruence

Théorème 30 ([R] 290). L'équation $ax \equiv b[n]$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$ admet des solutions si, et seulement si, $a \wedge n \mid b$.

Le cas échéant, $S(ax \equiv b[n]) = \frac{b}{a \wedge n} x_0 + \frac{n}{a \wedge n} \mathbb{Z}$, où x_0 est une solution particulière de l'équation.

Remarque 31. Le théorème des restes chinois permet de résoudre des systèmes de congruences.

Exemple 32 ([R] 291). $S \left(\begin{cases} x \equiv 2[4] \\ x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[9] \end{cases} \right) = 118 + 180\mathbb{Z}$

Remarque 33 ([R] 291). $S \left(\begin{cases} x \equiv x_1[a_1] \\ x \equiv x_2[a_2] \end{cases} \right) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a_1 \wedge a_2 \nmid x_1 - x_2 \\ x_0 + (a_1 \vee a_2)\mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}$

B. Carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Soit $c : \bar{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mapsto \bar{x}^2$. On s'intéresse à $\text{Im } c$.

Proposition 34. Tous les éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont des carrés.

On supposera désormais $p \geq 3$.

Proposition 35 ([R] 426). Soit $l : \bar{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mapsto \bar{x}^{\frac{p-1}{2}}$.

- $\forall \bar{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $c \circ l(\bar{x}) = l \circ c(\bar{x}) = \bar{1}$
- $\text{Ker } c = \text{Im } l = \{\pm 1\}$ et $\text{Im } c = \text{Ker } l$.

Corollaire 36. Il y a $\frac{p+1}{2}$ carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Théorème 37 (de Wilson - [R] 325). n est premier $\iff (n-1)! \equiv -1[n]$

Proposition 38 ([P] 75). -1 est un carré modulo p si, et seulement si, $p \equiv 1[4]$. Le cas échéant $-1 \equiv (2 \times 3 \times \dots \times \frac{p-1}{2})^2[p]$.

Théorème 39 (des deux carrés de Fermat - [P] 56). p s'écrit comme somme de deux carrés d'entiers si, et seulement si, $p = 2$ ou $p \equiv 1[4]$.

C. Algorithme de chiffrement RSA

Algorithme 40 ([G] 37). Alice veut envoyer à Bob un message représenté par un nombre entier m , en toute sécurité.

- Bob choisit en secret deux nombres premiers distincts p et q et calcule leur produit $n = pq$.
- Il choisit ensuite un entier $c < \varphi(n) = (p-1)(q-1)$ premier à $\varphi(n)$.
- Il trouve ensuite un entier d tel que $cd \equiv 1[\varphi(n)]$.
- La clé publique de Bob est (n, c) , qu'il donne à Alice, et sa clé privée est (n, d) , qu'il garde secrète.
- Alice envoie à Bob le message $m^c \bmod n$.
- Pour décoder le message, Bob calcule $(m^c)^d \equiv m[n]$.

Développements

- Développement 1 : Théorème 19 (restes chinois) et exemple 32
- Développement 2 : Théorème 28 (cyclicité des inversibles de $\mathbb{Z}/p^\alpha \mathbb{Z}$)

Références

- Rb *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
- P *Cours d'algèbre*, Perrin
- G *Les maths en tête - Algèbre et probabilités*, Xavier Gourdon, 3e édition

121 : Nombres premiers. Applications.

Pour un entier n , $\text{Div}(n)$ désigne l'ensemble des diviseurs positifs de n .

I. Résultats fondamentaux sur les nombres premiers

A. Notion de nombre premier, propriétés élémentaires

Définition 1 ([R] 303). On dit que $p \in \mathbb{N}$ est premier si $\text{Div}(p) = \{1, p\}$. On dit que n est composé si $n \neq 0$ et si $\exists a \in \mathbb{N} \setminus \{1, n\} : a \mid n$.

Dans la suite, \mathcal{P} désignera l'ensemble des nombres premiers.

Lemme 2 (d'Euclide). $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, \forall p \in \mathcal{P}, p \mid ab \implies (p \mid a) \text{ ou } (p \mid b)$.

Lemme 3 ([R] 303). $\forall n \geq 2, \exists p \in \mathcal{P} : p \mid n$

Proposition 4 ([R] 304). Tout entier composé n admet un facteur premier entre 2 et \sqrt{n} .

Théorème 5 (fondamental de l'Arithmétique - [R] 306). $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! (v_p(n))_{p \in \mathcal{P}} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}}$:

$$n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}$$

Cette écriture est appelée "(la) décomposition en produit de facteurs premiers de n ".

Définition 6 ([R] 306). Dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n , l'entier $v_p(n)$ ($p \in \mathcal{P}$) est appelé valuation p -adique de n .

Proposition 7 ([R] 307). $\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, a \mid b \iff \forall p \in \mathcal{P}, v_p(a) \leq v_p(b)$

Proposition 8 ([R] 319). $\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$

Proposition 9 ([R] 307). $\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, \forall p \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} v_p(a \vee b) &= \max(v_p(a), v_p(b)) \\ v_p(a \wedge b) &= \min(v_p(a), v_p(b)) \end{aligned}$$

B. Répartition des nombres premiers

Théorème 10 (Euclide - [R] 305). Il existe une infinité de nombres premiers.

Théorème 11 (de la progression arithmétique, Dirichlet, ADMIS). Pour tout $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $a \wedge b = 1$, il existe une infinité de nombres premiers congrus à a modulo b .

Conjecture 12 (des nombres premiers jumeaux). Il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p+2$ est premier.

Proposition 13. Il existe des intervalles de longueur arbitrairement grande ne contenant aucun nombre premier.

Théorème 14 (Bertrand - ADMIS - [R] 325). Il existe toujours un nombre premier compris entre n'importe quel entier naturel non nul et son double.

Théorème 15 (des nombres premiers - ADMIS - [R] 308).

$$\#\mathcal{P} \cap [1, n] \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln n}$$

II. Tests de primalité

Proposition 16 (Crible d'Ératosthène - ANNEXE). Le procédé suivant permet de trouver la liste croissante des nombres premiers : on part de la liste des entiers plus grands que 2. À chaque itération, on garde le plus petit nombre, et on supprime tous ses multiples.

Proposition 17. n est premier si, et seulement si, $\forall d \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor, d \nmid n$. La complexité au pire de ce test est donc en $O(\sqrt{n})$.

Théorème 18 (de Fermat). Si p est premier, alors $\forall a \in \mathbb{N}, a \wedge p = 1 \implies a^{p-1} \equiv 1 [p]$.

Remarque 19. On en déduit donc un test de non primalité.

Définition 20 ([R] 329). Un nombre n composé satisfaisant le test du théorème de Fermat est appelé nombre de Carmichael.

Exemple 21 ([R] 329). 561 est un nombre de Carmichael.

Théorème 22 (de Korselt - [R] 330). n est un nombre de Carmichael si, et seulement si, pour tout diviseur premier p de n , $(p-1) \mid (n-1)$ et $p^2 \nmid n$.

Théorème 23 (de Wilson - [R] 326). n est premier si, et seulement si, $(n-1)! \equiv -1 [n]$. C'est un test de primalité qui requiert $n-1$ multiplications dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

III. Applications des nombres premiers

A. Fonctions spéciales

Définition 24 ([R] 283). L'indicatrice d'Euler est : $\varphi : n \mapsto \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \#\{k \in [1, n] \mid k \wedge n = 1\}$.

Proposition 25 ([R] 288). $\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, a \wedge b = 1$, alors $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*, \varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$.

Corollaire 26 ([R] 288). $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi(n) = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ v_p(n) \geq 1}} p^{v_p(n)-1}(p-1) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ v_p(n) \geq 1}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Définition 27. La fonction ζ de Riemann est définie par :

$$\zeta : \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 1\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$s \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Proposition 28 ([KG] 461). On a :

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

Cette écriture est appelé "produit eulérien".

Théorème 29 ([KG] 461, [R] 343). $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p} = +\infty$

Définition 30 ([R] 331). La fonction de Moëbius est définie par :

$$\mu : n \in \mathbb{N}^* \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^r & \text{si } n = p_1 \dots p_r, \text{ avec } p_1, \dots, p_r \text{ distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 31 (Cesàro - ADMIS [R] 334). La probabilité de choisir au hasard $r \geq 2$ entiers entre 1 et n qui sont premiers entre eux vaut $\frac{1}{\zeta(r)}$.

B. Algorithme de chiffrement RSA

Théorème 32 (d'Euler - [R] 283). $\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, si $a \wedge n = 1$, alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1 [n]$.

De la complexité des tests de primalité découle la grande difficulté de la recherche de la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier donné. Ce principe est à la base de la sécurité de l'algorithme de chiffrement RSA, détaillé ci-dessous :

Algorithme 33 ([G] 37). Alice veut envoyer à Bob un message représenté par un nombre entier m , en toute sécurité.

- Bob choisit en secret deux nombres premiers distincts p et q et calcule leur produit $n = pq$.
- Il choisit ensuite un entier $c < \varphi(n) = (p-1)(q-1)$ premier à $\varphi(n)$.
- Il trouve ensuite un entier d tel que $cd \equiv 1 [\varphi(n)]$.
- La clé publique de Bob est (n, c) , qu'il donne à Alice, et sa clé privée est (n, d) , qu'il garde secrète.
- Alice envoie à Bob le message $m^c \bmod n$.
- Pour décoder le message, Bob calcule $(m^c)^d \equiv m [n]$.

C. Corps finis

Définition 34 ([R] 415). La caractéristique d'un anneau A est l'unique générateur positif du noyau du morphisme $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow A, n \mapsto n1_A$.

Lemme 35 ([R] 415). La caractéristique d'un corps est nulle ou première.

Exemple 36. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps de caractéristique p .

Théorème 37 ([R] 421). Il existe un corps fini de cardinal q si, et seulement si, q est une puissance d'un nombre premier. Le cas échéant, un tel corps est unique à isomorphisme près, et on note \mathbb{F}_q le corps fini à q éléments. Par ailleurs, $p = \text{car } \mathbb{F}_q$ est un nombre premier, et q est une puissance de p .

D. Le théorème des deux carrés de Fermat

Lemme 38 ([P] 75). -1 est un carré dans \mathbb{F}_p si, et seulement si, $p \equiv 1 [4]$.

Théorème 39 (des deux carrés de Fermat - [P] 56). Soit $E = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \exists (a, b) \in \mathbb{N}^2 : n = a^2 + b^2\}$. Alors, $n \in E \iff \forall p \in \mathcal{P}, p \equiv 3 [4] \implies v_p(n) \text{ est pair}$.

E. En théorie des groupes

Définition 40 ([R] 22). Un p -groupe est un groupe de cardinal une puissance de p .

Proposition 41 ([R] 22). Si un p -groupe G agit sur un ensemble fini X , alors $\#X \equiv \#X^G [p]$ où X^G est l'ensemble des éléments de X fixes par l'action de G .

Corollaire 42 ([R] 23). Le centre d'un p -groupe n'est pas trivial.

Définition 43 ([U] 85). Soit G un groupe fini de cardinal $p^\alpha m$, $m \wedge p = 1$. Un p -Sylow de G est un sous- p -groupe de G de cardinal p^α .

Théorème 44 (de Sylow - ADMIS [U] 87). Soit G un groupe d'ordre $p^\alpha m$, $m \wedge p = 1$. Alors,

1. $\text{Syl}_p(G) \neq \emptyset$
2. G agit transitivement sur $\text{Syl}_p(G)$ par conjugaison
3. $n_p \equiv 1 [p]$

Théorème 45 ([R] 292). Si $p \geq 3$, alors $\forall \alpha \geq 1, (\mathbb{Z}/p^\alpha \mathbb{Z})^\times$ est cyclique.

Proposition 46 ([R] 23). Tout groupe d'ordre p^2 est abélien.

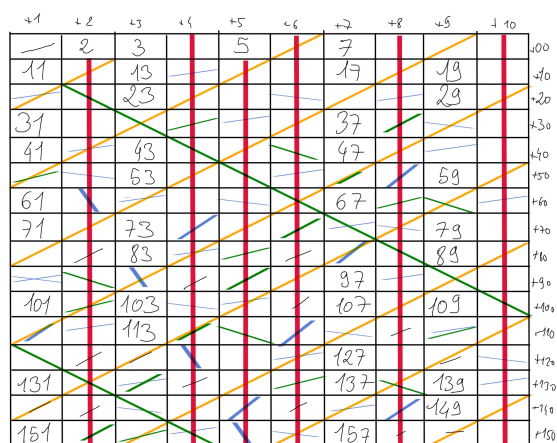
Développements

- Développement 1 : Lemme 38, et théorème 39
- Développement 2 : Théorème 45 (cyclicité des inversibles de $\mathbb{Z}/p^\alpha \mathbb{Z}$)

Références

- Rb *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
- U *Théorie des groupes*, Félix Ulmer
- G *Les maths en tête - Algèbre et probabilités*, Xavier Gourdon, 3e édition
- KG *De l'intégration aux probabilités*, Olivier Garet, Aline Kurtzmann, 2e édition augmentée

Crible d'ÉRATOSTHÈNE



4/4

FIGURE 1.2 – Crible d'Eratosthène

123 : Corps finis. Applications.

I. Des corps finis

A. Prérequis sur les extensions de corps

Soit $L/M/K$ une tour d'extensions de corps (commutatifs).

Proposition/Définition 1 ([P] 65). L est un K -espace vectoriel, sa dimension est appelée degré de L/K , et est notée $[L : K]$.

Théorème 2 (de la base télescopique - [P] 65). Soient $(e_i)_{i \in I}$ une base K -base de M et $(f_j)_{j \in K}$ une M -base de L , alors $(e_i f_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une K -base de L . En particulier, $[L : K] = [L : M] \times [M : K]$ (dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$).

Définition 3 ([P] 70). Soit $P \in K[X]$ non constant. Supposons P irréductible sur K . On dit que L est un corps de rupture (CDR) de P sur K s'il existe $\alpha \in L$ tel que $P(\alpha) = 0$ et $L = K(\alpha)$.

On dit que L est un corps de décomposition (CDD) de P sur K s'il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in L^n$ tel que $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et P est scindé sur L .

Théorème 4 ([P] 70-71). P admet un unique corps de rupture à K -isomorphisme près. Plus précisément, $K[X]/\langle P \rangle$ est un corps de rupture de P sur K .

P admet un unique corps de décomposition D à K -isomorphisme près. Celui-ci vérifie $[D : K] \leq \deg(P)!$.

B. Construction des corps finis : existence et unicité

Dans ce paragraphe K désigne un corps fini commutatif.

Exemple 5. Soit p un nombre premier. L'anneau $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps fini commutatif. On le note \mathbb{F}_p .

Théorème/Définition 6 ([P] 72). Il existe un nombre premier p rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{n \mapsto n \cdot 1_K} & K \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \end{array}$$

L'entier p est appelé caractéristique de K notée car K et \mathbb{F}_p est appelé sous-corps premier de K . C'est le plus petit sous-corps de K .

On notera p la caractéristique de K .

Corollaire 7 ([P] 72). $\#K = p^{[K : \mathbb{F}_p]}$

Remarque 8. Il n'existe pas de corps fini commutatif à 6 éléments !

Lemme/Définition 9 ([P] 73). $\text{Fr} : K \rightarrow K, x \mapsto x^p$ est un morphisme de corps, appelé morphisme de Frobenius.

Théorème 10 ([P] 73). Soient $r \in \mathbb{N}^*$, p premier et $q = p^r$. Il existe un corps fini commutatif à q éléments. Un tel corps est un CDD de $X^q - X$. En particulier, les classes d'isomorphisme de corps finis commutatifs sont caractérisées par le cardinal de ces derniers. On note \mathbb{F}_q un représentant de la classe d'isomorphisme des corps finis commutatifs à q éléments.

Théorème 11 (de Wedderburn - [P] 82). Tout corps fini est commutatif.

Exemple 12. $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[X]/\langle X^2 + X + 1 \rangle = \{0, 1, \bar{X}, 1 + \bar{X}\}$.
 $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[X]/\langle X^3 + X^2 + X + 1 \rangle$.

C. Propriétés des corps finis

Soient p un nombre premier, $r \in \mathbb{N}^*$ et $q = p^r$.

Proposition 13 (FIG. 1). $\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \mathbb{F}_{p^n} \subseteq \mathbb{F}_{p^m} \iff n \mid m$.

Proposition 14 ([P] e73). — $\overline{\mathbb{F}_p} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{F}_{p^n}$ est une clôture algébrique de \mathbb{F}_p .

— Si K est une extension de \mathbb{F}_q , alors $\mathbb{F}_q = \{x \in K \mid x^q = x\}$. En particulier, \mathbb{F}_q est l'unique sous-corps de $\overline{\mathbb{F}_p}$ de cardinal q .

Théorème 15 ([P] 74). \mathbb{F}_q^\times est cyclique.

Proposition 16 ([P] 73). Fr est un automorphisme de \mathbb{F}_q .

Théorème 17 ([R] 425). Le groupe des automorphismes de \mathbb{F}_q est cyclique d'ordre r , engendré par Fr .

Remarque 18. Pour tout $\theta \in \mathbb{F}_q$, il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Fr}^d(\theta) = \theta^{d^p} = \theta$. Le polynôme minimal de θ sur \mathbb{F}_p est $\prod_{k=1}^d (X - \text{Fr}^k(\theta))$.

Exemple 19. Soit $\beta = \bar{X}^2 + \bar{X} \in \mathbb{F}_2[X]/\langle X^4 + X + 1 \rangle$. On a $P_{\beta, \mathbb{F}_2} = X^2 + X + 1$.

II. Carrés dans un corps fini

Soient p un nombre premier impair, $r \in \mathbb{N}^*$ et $q = p^r$. On pose $c : \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q, x \mapsto x^2$ et $l : \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q, x \mapsto x^{\frac{q-1}{2}}$.

Proposition 20. $\text{Im } l = \text{Ker } c = \{\pm 1\}$ et $\text{Ker } l = \text{Im } c = \{x^2 \mid x \in \mathbb{F}_q^\times\}$.

Corollaire 21 (Critère d'Euler - [P] 75). $x \in \mathbb{F}_q^\times$ est un carré si, et seulement si $x^{\frac{q-1}{2}} = 1$.

Corollaire 22 ([P] 74). Il y a $\frac{q-1}{2}$ carrés inversibles dans \mathbb{F}_q (et $\frac{q+1}{2}$ carrés).

Proposition 23 ([P] 74). Tous les éléments de \mathbb{F}_{2^r} sont des carrés.

Proposition 24 ([P] 75). -1 est un carré dans \mathbb{F}_p si, et seulement si, $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Application 25 ([P] 56). p est la somme de deux carrés si, et seulement si, $p = 2$ ou $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Définition 26 ([R] 428). Le symbole de Legendre de $a \in \mathbb{Z}$ modulo p est défini par :

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \in p\mathbb{Z} \\ 1 & \text{si } a \text{ est un carré inversible modulo } p \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 27 ([R] 428). $\forall a \in \mathbb{Z}, \left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$. En particulier, $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ est un morphisme du groupe \mathbb{F}_p^\times .

Proposition 28 ([R] 431-434). Soit $a \in \mathbb{F}_p^\times$. L'équation de $ax^2 = 1$ a $1 + \left(\frac{a}{p}\right)$ solutions dans \mathbb{F}_p .

Théorème 29 (Loi de réciprocité quadratique - [R] 431-434). Soient p et q deux nombres premiers impairs distincts.

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

Application 30. $\left(\frac{11}{23}\right) = \left(\frac{23}{11}\right)(-1)^{11 \cdot 5} = -\left(\frac{1}{11}\right) = -1$ donc 11 n'est pas un carré modulo 23.

Proposition 31 ([R] e438, [C] 307). $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

Proposition 32. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{F}_q^3$ avec $a \neq 0$. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dans \mathbb{F}_q possède des solutions si, et seulement si, $b^2 - 4ac$ est un carré dans \mathbb{F}_q . Le cas échéant, si $\delta \in \sqrt{b^2 - 4ac}$, alors les solutions de cette équation sont $\frac{-b \pm \delta}{2a}$.

Remarque 33. Dans \mathbb{F}_{2^r} , l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est bien plus difficile à résoudre, en dehors des cas triviaux !

III. Algèbre (bi)linéaire sur les corps finis

Soient p un nombre premier impair, $r \in \mathbb{N}^*$, $q = p^r$ et $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 34 ([R] 155). — $\#GL_n(\mathbb{F}_q) = (q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} (q^k - 1)$
— $\#SL_n(\mathbb{F}_q) = \#GL_n(\mathbb{F}_q)/(q - 1)$

Théorème 35 ([C] 50).

$$SO_2(\mathbb{F}_q) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} & \text{si } -1 \text{ est un carré mod } q \\ \mathbb{Z}/(q+1)\mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 36. $SO_2(\mathbb{F}_{2^r}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{F}_{2^r} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, puis $SO_2(\mathbb{F}_{2^r}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$.

Soit E un \mathbb{F}_q -espace vectoriel de dimension finie.

Définition 37 ([R] 463). Le discriminant d'une forme quadratique f sur E est l'image de son déterminant dans une base quelconque modulo les carrés de \mathbb{F}_q^\times .

Théorème 38 ([R] e482). Il y a deux classes d'équivalence de formes quadratiques non-dégénérées sur E . Plus précisément, soient $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$ qui n'est pas un carré, et f une forme quadratique sur, de matrice M dans la base canonique.

- Si $\det M$ est un carré dans \mathbb{F}_p^\times , alors M est congruente à la matrice $\text{diag}(1, 1, \dots, 1, 1)$.
- Sinon, M est congruente à $\text{diag}(1, 1, \dots, 1, \alpha)$.

Application 39. Loi de réciprocité quadratique (Thm 29).

IV. Polynômes et corps finis

Théorème 40 (Critère d'Eisenstein - [P] 76). Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$. Soit p un nombre premier. Si $p \nmid a_n$, si $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $p \mid a_k$ et $p^2 \nmid a_0$, alors P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exemple 41. Pour tout p premier, $\Phi_p = X^{p+1} + \dots + X + 1$ est irréductible sur \mathbb{Q} .

Théorème 42 ([P] 77). Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. Soit $p \in \mathbb{Z}$ premier. Si $p \nmid a_n$ et si l'image \overline{P} de P dans $\mathbb{F}_p[X]$ est irréductible, alors P est irréductible sur \mathbb{Z} .

Remarque 43. La réciproque est fautive : considérer $X^4 + 1$.

Développements

- Développement 1 : Proposition 28, et théorème 29 : loi de réciprocité quadratique (par les formes quadratiques)
- Développement 2 : Théorème 35

Références

- R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
P *Cours d'algèbre*, Perrin
C *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et géométries*, P. Caldero, J. Germoni

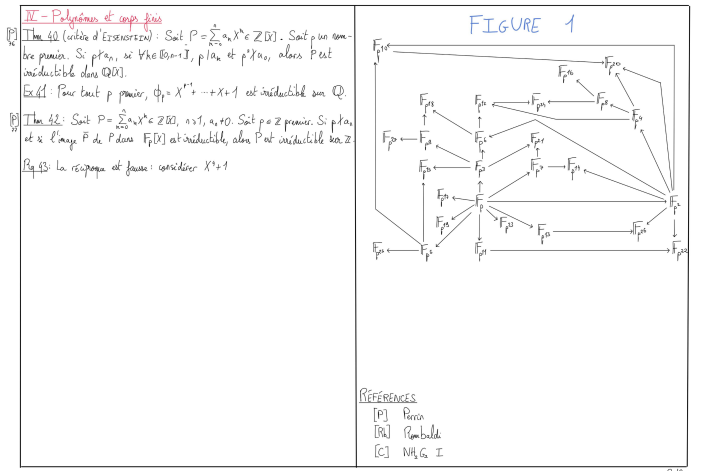


FIGURE 1.3 – Diagramme des extensions de corps finis

141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Soient A un anneau unitaire intègre commutatif, et L/K une extension de corps commutatif. Soit $P \in A[X]$.

I. Polynômes irréductibles

A. Notion d'irréductibilité pour les polynômes

Définition 1 ([R] 370). On dit que P est irréductible sur A si $P \notin A[X]^\times = A^\times$, si $P \neq 0$ et si $\forall (P_1, P_2) \in A[X]^2$, $P = P_1 P_2 \implies P_1 \in A^\times$ ou $P_2 \in A^\times$.

Exemple 2 ([R] 370). Tout polynôme de degré 1 est irréductible ; et les polynômes réels de degré 2 de discriminant < 0 sont irréductibles.

Proposition 3 ([R] 371). — Si $P \in K[X]$ est irréductible et si $\deg P > 1$, alors P n'a pas de racine dans K .

— Si $P \in K[X]$ n'a pas de racine dans K et si $\deg P \leq 3$, alors P est irréductible sur K .

Exemple 4. — $(x^2+1)^2$ est réductible sur \mathbb{R} et sans racine dans \mathbb{R} .

— Les polynômes irréductibles de petit degré de $\mathbb{F}_2[X]$ sont $X, X+1, X^2+X+1$.

B. Propriétés de $A[X]$

Proposition 5 ([R] 374). $A[X]$ euclidien $\iff A[X]$ principal $\iff A$ est un corps.

Proposition 6 ([R] e375). Si $P \in K[X]$ est irréductible, alors $K[X]/\langle P \rangle$ est un corps.

On suppose A factoriel.

Définition 7 ([S] 547-548; [P] 51). Le contenu de $P \in A[X] \setminus \{0\}$, noté $c(P)$, est un PGCD des coefficients de P . On dit que P est primitif si $c(P) \in A^\times$.

Théorème 8 ([P] 51; [S] 548). Soit $P \in A[X]$ primitif non constant. P est irréductible dans $A[X] \iff A$ est irréductible dans $K[X]$.

Exemple 9. Soient a_1, \dots, a_n des entiers distincts. Le polynôme $(X - a_1) \dots (X - a_n) - 1$ est irréductible sur \mathbb{Q} .

Lemme 10. Un produit de polynômes primitifs est primitif.

Lemme 11 (de Gauss - [S] 548; [P] 51). $c(PQ) = c(P)c(Q)$

Théorème 12 ([R] 358; [S] 548; [P] 51). $A[X]$ est factoriel $\iff A$ est factoriel.

C. Critères d'irréductibilité

Théorème 13 (Critère d'Eisenstein - [S] 549; [P] 76). Écrivons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $a_n \neq 0$. S'il existe $p \in A$ premier non nul tel que $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $p \mid a_k$, $p^2 \nmid a_0$ et $p \nmid a_n$, alors P est irréductible dans $\text{Frac}(A)[X]$.

Exemple 14. $\forall n \geq 2, \forall d \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré, $X^n - d$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Théorème 15 ([P] 77). Soit I un idéal de A . Écrivons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $a_n \neq 0$. Si $a_n \notin I$ et si $P \bmod I$ est irréductible dans $(A/I)[X]$ alors P est irréductible dans $A[X]$.

Exemple 16 ([P] 77). Pour tout p premier, $X^p - X - 1$ est irréductible sur \mathbb{Q} .

II. Polynômes et extensions de corps

Soient L et K deux corps commutatifs. Soit $P \in K[X]$.

A. Extensions de corps, éléments algébriques

Définition 17 ([P] 65). On dit que L est une extension de K , et on note L/K , si $K \subseteq L$.

Proposition/Définition 18 ([P] 65). L est un K -espace vectoriel dont on note $[L : K]$ la dimension, que l'on appelle degré de l'extension L/K . On dit que L/K est finie si $[L : K]$ est fini.

Théorème 19 (de la base télescopique - [P] 65). Soient $(e_i)_{i \in I}$ une base K -base de M et $(f_j)_{j \in K}$ une M -base de L , alors $(e_i f_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une K -base de L .

Corollaire 20 (Multiplicativité des degrés - [P] 65). $[L : K] = [L : M] \times [M : K]$

Définition 21 ([P] 66). On dit que $\alpha \in L$ est algébrique sur K s'il existe $P \in K[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$. Sinon, on dit que α est transcendant.

Théorème/Définition 22 ([P] 66). Si $\alpha \in L$ est algébrique sur K , alors $\{P \in K[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un idéal non nul, qui donc admet un unique générateur unitaire $P_{\alpha,K}$ appelé polynôme minimal de α sur K .

Notation. $K[\alpha] = \{P(\alpha) \mid P \in K[X]\}$

Théorème 23 ([P] 66). Soit $\alpha \in L$. Sont équivalentes :

1. α est algébrique sur K
 2. $K[\alpha] = K(\alpha)$
 3. $K[\alpha]$ est un K -espace vectoriel de dimension finie.
- Le cas échéant, $\deg P_{\alpha,L} = [K(\alpha) : K]$.

B. Corps de rupture et de décomposition

Définition 24 ([P] 70). Supposons P irréductible. On dit que L est un corps de rupture de P sur K s'il existe $\alpha \in L$ tel que $P(\alpha) = 0$ et $L = K(\alpha)$.

Théorème 25 ([P] 70). Supposons P irréductible. Le corps $K[X]/\langle P \rangle$ est un corps de rupture de P sur K , et c'est le seul à isomorphisme près.

Exemple 26. \mathbb{C} peut être défini comme $\mathbb{R}[X]/\langle X^2 + 1 \rangle$.

Application 27. Si P est irréductible et si $\deg P \wedge [L : K]$, alors P est irréductible sur L .

Définition 28 ([P] 71). On dit que L est un corps de décomposition de P sur K si P est scindé sur L et si $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines de P .

Théorème 29 ([P] 71). *Il existe un corps de décomposition de P sur K , unique à isomorphisme près.*

Exemple 30 ([P] 72). $\mathbb{Q}(j, \sqrt[3]{2})$ est un corps de décomposition de $X^3 - 2$ sur \mathbb{Q} .

Théorème 31 (de l'élément primitif - [P] 87). *Toute extension finie d'un corps de caractéristique nulle est monogène.*

C. Clôture algébrique

Définition 32 ([P] 67). *On dit que K est algébriquement clos si tout polynôme non nul de $K[X]$ est scindé, et si K n'admet pas d'extension algébrique non triviale.*

Définition 33 ([P] 72). *On dit que L est une clôture algébrique de K si c'est une extension de K algébrique et algébriquement close.*

Exemple 34 ([P] 68-72). — \mathbb{C} est algébriquement clos (théorème de d'Alembert-Gauss) ;

— \mathbb{C} est une clôture algébrique de \mathbb{R} .

Exemple 35 ([G] 94). *Si L est algébriquement clos, alors l'ensemble des éléments de L algébriques sur K est un corps algébriquement clos.*

Théorème 36. *K admet une unique clôture algébrique à isomorphisme près.*

III. Polynôme cyclotomiques

On note $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ le groupe des racines complexes n -ièmes de l'unité, et μ_n^* l'ensemble de ses générateurs (que l'on appelle *racines primitives n -ièmes de l'unité*).

Définition 37 ([P] 80 ; [R] 385). *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n -ième polynôme cyclotomique :*

$$\Phi_n = \prod_{\zeta \in \mu_n^*} X - \zeta$$

Proposition 38 ([P] 80-83 ; [R] 386). *On a les propriétés suivantes :*

— Pour $\zeta_n \in \mu_n^*$,

$$\Phi_n = \prod_{\substack{k=1 \\ k \wedge n=1}}^n X - \zeta_n^k$$

— $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$

— $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$

Exemple 39 ([P] 81). — Pour p premier, $\Phi_p = X^{p-1} + \dots X + 1$

— $\Phi_1 = X - 1$, $\Phi_4 = X^2 + 1$, $\Phi_6 = X^2 - X + 1$, $\Phi_8 = X^4 + 1$

Théorème 40 ([P] 82-83 ; [R] 392). *Soit $\zeta_n \in \mu_n^*$. Le polynôme minimal de ζ_n sur \mathbb{Q} est Φ_n .*

Corollaire 41. Φ_n est irréductible sur \mathbb{Q} et $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$.

IV. Polynômes irréductibles des corps finis

Définition 42 ([R] 331). *La fonction de Moëbius est définie par :*

$$\mu : n \in \mathbb{N}^* \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ facteurs premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 43 (Formule d'inversion de Moëbius = [R] 333). *Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{d|n} v_d$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) u_d$.*

Théorème 44 ([R] 423). $P_n := X^{p^n} - X = \prod_{d|n} \prod_{\mathcal{U}_d(p)} P$ où $\mathcal{U}_d(p)$ est l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré d de $\mathbb{F}_p[X]$.

Corollaire 45 ([R] 424). $\#\mathcal{U}_n(p) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) p^d$

Développements

— Développement 1 : Lemme de Gauss 11

— Développement 2 : Théorème 40 et Corollaire 41

— Développement 2 : Théorème 43, Théorème 44 et Corollaire 45

Références

R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition

P *Cours d'algèbre*, Perrin

G *Les maths en tête - Algèbre et probabilités*, Xavier Gourdon, 3e édition

S *Algèbre pour la licence 3*, Szpirglas

142 : PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

I. Notion de PGCD et de PPCM dans différents types d'anneaux

Dans cette section, A est un anneau intègre (commutatif) et $(a, b, a_1, \dots, a_r) \in A^{r+2}$.

A. Première définition, existence, cas des anneaux factoriels

Définition 1. Si $a_1, \dots, a_r \neq 0$, alors sous réserve d'existence, on appelle PGCD (resp. PPCM) de a_1, \dots, a_r , noté $a_1 \wedge \dots \wedge a_r$ ou $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_r)$ (resp. $a_1 \vee \dots \vee a_r$ ou $\text{ppcm}(a_1, \dots, a_r)$) un plus grand minorant (resp. un plus grand majorant) de $\{a_1, \dots, a_r\}$ pour la relation (binaire) de divisibilité. On pose par ailleurs $0 \wedge 0 = 0 \vee a = 0$.

En particulier, le PGCD et le PPCM sont associatifs et commutatifs : $a \wedge b = b \wedge a$ et $a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge a_4 \wedge a_5 = (a_1 \wedge a_2) \wedge (a_3 \wedge a_4) \wedge a_5$.

Remarque 2. Les PGCD (resp. PPCM) de a_1, \dots, a_r sont tous associés. L'écriture $d = a_1 \wedge \dots \wedge a_r$ est un abus signifiant que d est un PGCD de a_1, \dots, a_r .

Proposition 3 ([R] 246). Si a et b ont un PPCM alors ils ont un PGCD $a \wedge b = ab(a \vee b)^{-1}$.

Exemple 4. 3 et $2 + i\sqrt{5}$ ont un PGCD mais pas de PPCM dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$. 4 et $2 + 2i\sqrt{3}$ n'ont pas de PGCD dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$.

Définition 5. On dit que a_1, \dots, a_r sont premiers entre eux (dans leur ensemble) si $a_1 \wedge \dots \wedge a_r = 1$. On dit que a_1, \dots, a_r sont deux à deux premiers entre eux si $\forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, i \neq j \implies a_i \wedge a_j = 1$.

Théorème 6 (de Gauss - [R] 247). $\forall (a, b, c) \in A^3, a \mid bc$ et $a \wedge b = 1 \implies a \mid c$.

Proposition 7 ([R] 246). Si toute paire d'éléments de A admet un PGCD (on dit alors que A est un anneau à PGCD), alors toute paire d'éléments de A admet un PPCM, et la réciproque est vraie.

Proposition 8 ([P] 49). Supposons A factoriel, notons \mathcal{P} un système complet de représentants des irréductibles de A . Alors :

$\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min(v_p(a), v_p(b))}$ est un PGCD de a et b .

$\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max(v_p(a), v_p(b))}$ est un PPCM de a et b .

Définition 9. Si $A = \mathbb{Z}$ (resp. $A = K[X]$, K un corps), alors le PGCD de a et b est l'unique PGCD de a et b qui est positif (resp. unitaire).

B. Situation dans les anneaux principaux

On suppose A principal.

Proposition 10. $m \in A$ est un PPCM de a et b si, et seulement si, $aA \cap bA = mA$.

$d \in A$ est un PGCD de a et b si, et seulement si, $aA + bA = dA$.

Théorème 11 (de Bézout). $(\exists (u, v) \in A^2 : au + bv = 1) \iff a \wedge b = 1$

Remarque 12. $\forall (a, b) \in A^2, \exists (u, v) \in A^2 : au + bv = 1$. Le théorème de Bézout indique que la réciproque est vraie si $a \wedge b = 1$ (contre-exemple : $3 \times (2) + 2 \times (-2) = 2$, mais $3 \wedge 2 \neq 1$).

Définition 13 ([R] 247). Un couple $(u, v) \in A^2$ tel que $a \wedge b = au + bv$ est appelé couple de Bézout de (a, b) , et l'égalité est appelée relation de Bézout.

Application 14. Résolution de $ax + by = c$ avec $a \wedge b = 1$.

Application 15. Lemme des noyaux : soit $(P, Q) \in K[X]^2$ tel que $P \wedge Q = 1$. Soient V un K -espace vectoriel de dimension finie. Pour tout endomorphisme f de V ; $\text{Ker}((PQ)(f)) = \text{Ker}(P(f)) \oplus \text{Ker}(Q(f))$.

Théorème 16 (des restes chinois - [R] 250). Si a_1, \dots, a_d sont non nuls, non inversibles et deux à deux premiers entre eux, alors :

$$\bar{\varphi} : x \bmod a_1 \dots a_d \mapsto (x \bmod a_1, \dots, x \bmod a_d)$$

est un isomorphisme d'anneaux de $A/\langle a_1 \dots a_d \rangle$ dans $A/\langle a_1 \rangle \times \dots \times A/\langle a_d \rangle$.

Posons $a = a_1 \dots a_d$ et pour $j \in \llbracket 1, d \rrbracket, b_j = \frac{a}{a_j}$. Il existe $(u_1, \dots, u_d) \in A^d$ tel que $\sum_{i=1}^d u_i b_i = 1$. La réciproque de $\bar{\varphi}$ s'exprime alors :

$$\bar{\varphi}^{-1} : (x_1 \bmod a_1, \dots, x_d \bmod a_d) \mapsto \sum_{i=1}^d x_i a_i b_i \bmod a_1 \dots a_d$$

Application 17 ([R] 291). Résolution d'un système de congruence.

Exemple 18 (Interpolation de Lagrange). Soient $x_1, \dots, x_n \in K$ deux à deux distincts et $y_1, \dots, y_n \in K^n$. Un polynôme interpolateur des x_i en y_i est une solution du système :

$$\{\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P \equiv y_i [X - x_i]\}$$

Exemple 19. Recherche de $P \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ tel que $P(\bar{0}) = \bar{2}, P(\bar{1}) = \bar{0}, P(\bar{2}) = \bar{1}$ de degré minimal.

Proposition 20 ([R] 298). $\forall (n, m) \in \mathbb{N}_{\geq 2}^2, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n \wedge m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n \vee m\mathbb{Z}$

II. Algorithmes de calcul dans un anneau euclidien

Dans cette section, A est supposé euclidien. Soit $(a, b) \in A \times A \setminus \{0\}$.

A. Algorithmes d'Euclide

Lemme 21 (d'Euclide - [R] 264). Si $a = bq + r$ avec $(q, r) \in A^2$, alors $a \wedge b = b \wedge r$.

Algorithme 22 (d'Euclide - [R] 264). Posons $r_{-1} = a$ et $r_0 = b$, et pour $n \geq 1, r_n$ est un reste d'une division euclidienne de r_{n-2} par r_{n-1} si $r_{n-1} \neq 0$, et $r_n = 0$ sinon.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N + 1, r_n = 0$; de plus, $a \wedge b = r_n$.

Exemple 23. $M_n \wedge M_m = M_{n \wedge m}$, où $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et $M_n = 2^n - 1$.

$$(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = X^{n \wedge m} - 1.$$

Algorithme 24 (d'Euclide étendu - [R] 265). Soit $(q_n)_{n \geq 1}$ une suite de quotients dans l'algorithme d'Euclide, soit N le rang du dernier reste non nul. On peut trouver un couple de Bézout en "remontant" l'algorithme d'Euclide, i.e. en écrivant $a \wedge b = r_N = r_{N-2} - q_N r_{N-1}$, puis en y substituant $r_{N-1} = r_{N-3} - q_{N-1} r_{N-2}$, puis en y substituant $r_{N-2} = r_{N-4} - q_{N-2} r_{N-3}$, etc. jusqu'à exprimer $a \wedge b$ sous la forme $a \wedge b = af(q_1, \dots, q_N) + bg(q_1, \dots, q_N)$.

Application 25. Calcul d'un inverse dans un corps de rupture : soit $K = \mathbb{Q}[X]/\langle X^2 - X - 1 \rangle \cong \mathbb{Q}(\varphi)$. Dans K , $(2\varphi + 1)^{-1} = 2\varphi - 3$.

Proposition 26. $GL_2(\mathbb{Z})$ agit sur \mathbb{Z}^2 par $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta b \\ \gamma a + \delta b \end{pmatrix}$. Les orbites de cette action sont les $E_d = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \mid a \wedge b = d \right\}$, $d \in \mathbb{N}$.

Corollaire 27. D'après l'algorithme d'Euclide, $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $\exists P \in GL_2(\mathbb{Z}) : P \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \wedge b \\ 0 \end{pmatrix}$

Application 28. Soit $a = (a_1, \dots, a_n)$ un vecteur de \mathbb{Z}^n . On peut compléter (a) en une \mathbb{Z} -base de \mathbb{Z}^n si, et seulement si, $a_1 \wedge \dots \wedge a_n = 1$.

B. Du côté de \mathbb{Z} et $K[X]$, un point sur la complexité

Dans le cas de la division euclidienne dans \mathbb{Z} , on impose aux restes d'être positifs, ce qui rend les reste et quotient uniques.

Théorème 29 (de LAMÉ - [D] 38). Supposons que $a > b \geq 1$. Soient $(F_k)_k$ la suite de FIBONACCI débutant à 0, et $k \in \mathbb{N}$ tel que $b < F_{k+1}$. L'algorithme d'EUCLIDE pour a et b termine en moins de k étapes.

Remarque 30. Cette majoration est optimale : considérer $a = F_{k+1}$, $b = F_k$.

Algorithme 31 (PGCD binaire - [D] 36). Supposons $a \geq b \geq 0$. La fonction suivante :

```
PGCD_binaire(a, b) :
  Si  $a = 0$  : renvoyer  $b$ 
  Si  $2 \mid a$  et  $2 \mid b$  : renvoyer  $2 \times \text{PGCD\_binaire}(a/2, b/2)$ 
  Si  $2 \mid a$  et non( $2 \mid b$ ) : renvoyer  $\text{PGCD\_binaire}(a/2, b)$ 
  Si non( $2 \mid a$ ) et  $2 \mid b$  : renvoyer  $\text{PGCD\_binaire}(a, b/2)$ 
  Sinon : renvoyer  $\text{PGCD\_binaire}((a - b)/2, b)$ 
appliquée à  $(a, b)$  renvoie  $a \wedge b$ .
```

Remarque 32. Algorithme 31 se termine en au plus $\lceil \log_2(a) \rceil$ récursions.

Proposition 33. Soit $(P, Q) \in K[X]^2$ tel que $n := \deg P \geq \deg Q \geq 1$. L'algorithme d'EUCLIDE appliqué à P et Q termine en au plus n étapes.

III. Applications en arithmétique et en théorie des groupes

A. (Systèmes d') équations diophantiennes linéaires

Définition 34 ([G] 163). Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(I\mathbb{Z})$. On dit que M est sous forme normale d'HERMITE si elle est sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & p_1 & * & \dots & * & + & * & \dots & * & + \\ & & & & p_2 & * & \dots & * & + & * & \dots & * \\ & & & & & & & & p_3 & \dots & & \\ & & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & \dots & + & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & p_r & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où les pivots p_i (i.e. les premiers coefficients non-nuls sur chaque ligne) sont strictement positifs, et les coefficients au dessus de chaque pivot sont positifs et inférieurs au pivot.

Algorithme 35 (d'HERMITE - [G] 164). Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$. On définit $\delta_{i_0,j}(M) = \min \{|M_{i,j}| : i \geq i_0, M_{i,j} \neq 0\}$. L'algorithme d'HERMITE :

Soit $i_0 = 1$. Tant que $i_0 < n$: soit $j_0 = \min \{1 \leq j \leq m \mid \delta_{i_0,j}(M) \neq 0\}$

Si $\forall i > i_0, M_{i,j_0} = 0$, alors $L_{i_0} \leftarrow sg(M_{i_0,j_0})L_{i_0}$, et pour i allant de 1 à $i_0 - 1$, $L_i \leftarrow L_i - q_i L_{i_0}$ où q_i est le quotient de la division euclidienne de M_{i,j_0} par M_{i_0,j_0} . On remplace i_0 par $i_0 + 1$

Sinon, soit $k \in \llbracket i_0, n \rrbracket$ tel que $|M_{k,j_0}|$ soit non nul et minimal. On effectue $L_i \longleftrightarrow L_{i_0}$ puis, pour i allant de $i_0 + 1$ à n , $L_i \leftarrow L_i - q_i L_{i_0}$

transforme M sous une forme normale d'HERMITE M_H . En particulier, il existe $P \in GL_n(\mathbb{Z})$ telle que $M_H = PM$.

Application 36. Résolution d'un système d'équations diophantiennes linéaires.

Exemple 37. Cas d'une seule équation linéaire

$$(E) : \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \text{ avec } a_1 \wedge \dots \wedge a_n = 1.$$

D'après Cor 24, il existe $P \in GL_n(\mathbb{Z})$ telle que

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^T P = \begin{pmatrix} a_1 \wedge \dots \wedge a_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\text{De là, } (E) \iff \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = b \iff \tilde{x}_1 = b \text{ où}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } S(E) = \left\{ P \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n-1} \right\}$$

B. Un théorème de LIOUVILLE

Théorème 38 (de LIOUVILLE - [FGN] 179, [R] 404). *L'équation $P^n + Q^n + R^n = 0$ n'admet pas de solution non triviale (i.e. P, Q, R non associées) dans $\mathbb{C}[X]$ dès lors que $n \geq 3$.*

C. Quelques résultats en théorie des groupes

Soit G un groupe fini. On note $\text{ord}(g)$ l'ordre de $g \in G$.

Proposition 39 ([R] 9). *L'exposant de G ($\max_{g \in G} \text{ord}(g)$) vaut $\text{ppcm}(\{\text{ord}(g)\}_{g \in G})$.*

Lemme 40 ([R] 29). *Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, soit $\bar{d} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On a $\text{ord}(\bar{d}) = \frac{n^d}{n \wedge d}$.*

Théorème 41 (de structure des groupes abéliens finis - [R] 28). *Supposons G abélien, de cardinal au moins 2. Il existe $(d_1, \dots, d_s) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^s$ tels que :*

$$G \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z}, \quad d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_s$$

Les entiers d_1, \dots, d_s sont appelés facteurs invariants de G . Ils sont uniques et déterminent la classe d'isomorphisme de G .

Exemple 42. *Soit p un nombre premier. Un groupe abélien d'ordre p^2 est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.*

Développements

- Développement 1 : Théorème des restes chinois 16 et Exemple de calcul 19.
- Développement 2 : Théorème de Liouville 38

Références

- R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
- P *Cours d'algèbre*, Perrin
- D *Cours d'algèbre*, Michel Demazure
- FGN *Oraux X-ENS Algèbre 1*, Serge Francinou, Hervé Giannella, Serge Nicolas
- G *Algèbre I - Groupes, corps et théorie de Galois*, Daniel Guin, Thomas Hausberger

148 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Dans toute cette leçon, E désigne espace vectoriel sur un corps K . On ne rappellera pas les éléments de la théorie des espaces vectoriels.

I. Théorie de la dimension finie

A. Familles libres, familles génératrices, bases

Soit $\mathcal{F} \subseteq E$.

Définition 1 ([Gr] 11-11-10-13). On dit que \mathcal{F} est libre si : $\forall (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \in \mathcal{F}^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n,$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

On dit que \mathcal{F} est liée si \mathcal{F} n'est pas libre.

On dit que \mathcal{F} est génératrice (de E) si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire finie de vecteurs de \mathcal{F} .

On dit que \mathcal{F} est une base de E si \mathcal{F} est à la fois libre et génératrice.

Exemple 2. — Dans \mathbb{R}^2 :

- $\{(1, 1), (1, -1)\}$ est génératrice et libre ;
- $\{(0, 1), (1, 0), (2, 5)\}$ est génératrice et liée ;
- $\{(-4, 3)\}$ est non génératrice et libre ;
- $\{(1, 1), (2, 2)\}$ est non génératrice et liée ;

[Gr] 14 La famille $\{(0, \dots, 1, \dots, 0)\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une base de K^n , appelée base canonique.

Proposition 3 ([Gr] 13). $\mathcal{F} = \{\}$ est une base de E si, et seulement si, $\forall x \in E, \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n : x = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$

Proposition 4 ([Gr] 14). — $\{x\}$ est libre $\iff x \neq 0$

- Toute sur-famille d'une famille génératrice (resp. liée) est génératrice (resp. liée)
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre
- Une famille contenant le vecteur nul est liée

B. Dimension d'un espace vectoriel

Définition 5 ([Gr] 11). On dit que E est de dimension finie si E admet une famille génératrice finie.

Exemple 6. — K^n est un K -espace vectoriel de dimension finie, contrairement à $K[X]$.

- \mathbb{R} est un \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension infinie.

Lemme 7 (de STEINIZ - [Gr] 17). Si $\mathcal{G} \subset E$ est finie et génératrice, alors toute famille de E contenant plus de $\#\mathcal{G}$ éléments est liée.

Théorème/Définition 8 ([Gr] 17). Si E est de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même cardinal (fini), que l'on appelle dimension de E , et que l'on note $\dim_K(E)$ ou $\dim(E)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur K .

À partir de maintenant, on suppose E de dimension finie.

Théorème 9 ([Gr] 18). $\mathcal{B} \subseteq E$ est une base de $E \iff \mathcal{B}$ est libre et $\#\mathcal{B} = \dim(E) \iff \mathcal{B}$ est génératrice et $\#\mathcal{B} = \dim(E)$.

Théorème 10 ([Gr] 19). Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors F est de dimension finie, et $\dim(F) \leq \dim(E)$ avec égalité si, et seulement si, $E = F$.

Théorème 11 (des bases extraites et incomplètes - [Gr] 19). Soient $\mathcal{L} \subseteq E$ libre et $\mathcal{G} \subseteq E$ génératrice telles que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{G}$. Alors il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$.

Corollaire 12. Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

Proposition 13 ([Gr] 63). Soit F un espace vectoriel de dimension finie. Les espaces vectoriels E et F sont isomorphes si, et seulement si, $\dim(E) = \dim(F)$.

Exemple 14. Soit $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$. L'application $y \mapsto (y(0), y'(0), \dots, y^{(p-1)}(0))$ est un isomorphisme entre $S_{\mathbb{R}}(E) = \{y \in C^p(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid y^{(p)} = a_{p-1}y^{(p-1)} + \dots + a_0y\}$ et \mathbb{C}^p . Par conséquent, $\dim(S_{\mathbb{R}}(E)) = p$.

Proposition 15 ([Gr] 22). Soient E_1, \dots, E_p supplémentaires dans E . Si $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ sont des bases de E_1, \dots, E_p , alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{B}_p$ est une base de E , dite adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$.

Corollaire 16 ([Gr] 22). $\dim(E \oplus F) = \dim(E) + \dim(F)$

Proposition 17 ([Gr] 23).

$$\begin{aligned} E = E_1 \oplus E_2 &\iff \begin{cases} E = E_1 + E_2 \\ \dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\} \\ \dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2) \end{cases} \end{aligned}$$

C. Calculs de dimensions

Dans ce paragraphe, F est un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 18 (Formule de GRASSMANN - [Gr] 24). $\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) < +\infty$

Proposition 19 ([Gr] 18). $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F) < +\infty$

Proposition 20. $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F) < +\infty$

D. Extensions de corps

Dans ce paragraphe, $F/L/K$ est une tour d'extensions de corps.

Définition 21 ([P] 65). On appelle degré de L/K l'entier $[L : K] = \dim_K(L)$.

Théorème 22 (de la base télescopique - [P] 65). Supposons F/L et L/K de degrés finis : elles admettent alors des bases $\{f_1, \dots, f_n\}$ et $\{e_1, \dots, e_p\}$ respectivement.

La famille $\{e_i f_j\}_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une base de F/K , et donc $[F : K] = [F : L] \cdot [L : K]$.

Définition 23 ([P] 66). On dit que $\alpha \in L$ est algébrique sur K s'il existe $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Le cas échéant, on définit le polynôme minimal de α sur K comme étant l'unique générateur unitaire de l'idéal $\{P \in K[X] \mid P(\alpha) = 0\}$, appelé idéal annulateur de α .

Notation 24 ([P] 66). Soit $\alpha \in L$. On pose $K[\alpha] = \{P(\alpha) \mid P \in K[X]\}$ et $K(\alpha = \text{Frac}(K[\alpha]))$.

Théorème 25 ([P] 66). Soit $\alpha \in L$. Sont équivalentes :

1. α est algébrique sur K
2. $K[\alpha] = K(\alpha)$
3. $[K[\alpha] : K] < +\infty$

Le cas échéant, $[K[\alpha] : K]$ est le degré du polynôme minimal de α sur K .

II. Rang d'une application linéaire, d'une matrice, d'une famille

A. Définitions - formule du rang et conséquences

Dans ce paragraphe, on se donne F de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E , et $(x_1, \dots, x_r) \in E^r$.

Définition 26 ([Gr] 61,82). 1. Le rang de u est l'entier $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u))$;
2. Le rang de $\{x_1, \dots, x_r\}$ est l'entier $\text{rg}(x_1, \dots, x_r) = \dim(\text{Vect}(x_1, \dots, x_r))$.

Proposition 27 ([Gr] e82). $\text{rg}(u) = \text{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n))$

Théorème 28 (du rang - [Gr] 64). $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u)) + \text{rg}(u)$

Théorème 29 ([Gr] 65). Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors u bijective $\iff u$ injective $\iff u$ surjective $\iff \exists v \in \mathcal{L}(F, E) : u \circ v = \text{id}_E \iff \exists v \in \mathcal{L}(E, F) : v \circ u = \text{id}_F$.

Exemple 30 ([Gr] 65). Ce n'est pas vrai en dimension infinie : dans $K[X]$, $P \mapsto P'$ est surjective mais pas injective.

Proposition 31. — $\forall v \in GL(E), \text{rg}(u \circ v) = \text{rg}(u)$
— $\forall w \in GL(F), \text{rg}(w \circ u) = \text{rg}(u)$

Corollaire 32. Le rang est invariant par équivalence.

B. Le cas particulier des matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Notons C_1, \dots, C_p ses colonnes et L_1, \dots, L_n ses lignes.

Définition 33 ([Gr] 33). Le rang de A est l'entier $\text{rg}(A) = \dim(\{AX \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)\}) = \text{rg}(C_1, \dots, C_p)$.

Proposition 34 ([Gr] 82). Le rang d'une application linéaire est le rang de sa matrice dans n'importe quel couple de bases.

Théorème 35 ([Go] 128). $\text{rg}(A) = r \implies A$ est équivalente à $J_{n,p,r} := \begin{pmatrix} I_r & 0_{p-r} \\ 0_{n-r} & 0_* \end{pmatrix}$.

Corollaire 36 ([Go] 128). Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, elles ont le même rang.

Remarque 37 ([Go] 128). Pour déterminer le rang de A en pratique, on utilise l'algorithme du pivot de GAUSS pour transformer A en $J_{n,p,r}$.

Théorème 38 ([Gr] 83). $\text{rg}(A) = \text{rg}(^t A)$

Théorème 39 ([Go] 128). Le rang de A est la taille de sa plus grande sous-matrice inversible, donc l'ordre de son plus grand mineur non nul.

Corollaire 40. Si L/K est une extension de K , alors $\text{rg}_K(A) = \text{rg}_L(A)$.

III. Applications

A. Formes quadratiques réelles

Théorème 41 (Loi d'inertie de SYLVESTER - [R] 476). Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n > 0$, et q est une forme quadratique sur E . Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E orthogonale pour q . Quitte à renuméroter \mathcal{B} , supposons que $q(e_1) > 0, \dots, q(e_s) > 0, q(e_{s+1}) < 0, \dots, q(e_{s+t}) < 0, q(e_{s+t+1}) = \dots = q(e_n) = 0$. Le couple (s, t) ne dépend alors pas du choix de la base orthogonale : on l'appelle signature de q .

Théorème 42. La classe de congruence d'une forme quadratique réelle ne dépend que du rang et de la signature.

B. Réduction des endomorphismes

Dans ce paragraphe, on fixe $u \in \mathcal{L}(E)$.

Proposition/Définition 43 ([R] 604). $\{P \in K[X] \mid P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$ est un idéal non nul : son unique générateur unitaire est appelé polynôme minimal de u . On le note μ_u .

Théorème 44 ([R] 683). u est diagonalisable $\iff \mu_u$ est scindé à racines simples.

Dans le groupe suivant, E est un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 45 ([R] 743). On dit que u est normal si $uu^* = u^*u$ où u^* est l'adjoint de u .

Lemme 46 ([R] 745). Si u est normal, $\exists P_1, \dots, P_r$ sont de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux et stables par u tels que $E = P_1 \oplus \dots \oplus P_r$.

Théorème 47. Si u est normal, alors il existe une base orthonormée \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D & & \\ & \ddots & \\ & & R_p \end{pmatrix}$ par blocs, avec D diagonale et les R_k de la forme $\begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$, $b_k \neq 0$.

Développements

- Développement 1 : Loi inertie Sylvester 41 et Th 42.
- Développement 2 : Lemme 46 et Théorème 47

Références

- R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
- P *Cours d'algèbre*, Perrin
- Gr *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone, 6e édition, 2e version
- Go *Les maths en tête - Algèbre et Probabilités*, Xavier Gourdon, 3e édition

149 : Déterminant. Exemples et applications.

Dans cette leçon, K désigne un corps, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E .

I. Les notions de déterminants

A. Des formes multilinéaires au déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 1 ([Go] 140). Une forme k -linéaire sur E est une application $\varphi : E^k \rightarrow \mathbb{K}$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, pour tout $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_k)$ est linéaire. On note $\bigotimes^k E^*$ l'ensemble des formes k -linéaires sur E .

Proposition 2. $(e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*)_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n}$ est une base de $\bigotimes^k E^*$, où pour $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*(x_1, \dots, x_k) = e_{i_1}^*(x_1) \dots e_{i_k}^*(x_k)$.

Définition 3 ([Go] 140-141). Une forme k -linéaire alternée est une forme k -linéaire $\varphi \in \bigotimes^k E^*$ telle que $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$, $\forall (x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma) \varphi(x_1, \dots, x_k)$.

On note $\bigwedge^k E^*$ l'espace des formes k -linéaires alternées sur E .

Proposition 4. $(e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*)_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$ est une base de $\bigwedge^k E^*$, où pour $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) e_{i_1}^*(x_{\sigma(1)}) \dots e_{i_k}^*(x_{\sigma(k)})$.

Corollaire 5. On a $\dim(\bigwedge^k E^*) = \binom{n}{k}$.

Définition 6 ([Go] 141). On appelle déterminant dans la base \mathcal{B} l'unique forme n -linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}}$ sur E vérifiant $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$. (La famille $(\det_{\mathcal{B}})$ est une base de $\bigwedge^n E^*$.)

Proposition 7 ([Go] 141). $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) e_1^*(x_{\sigma(1)}) \dots e_n^*(x_{\sigma(n)})$.

Corollaire 8 ([Go] 141). Soient $\varphi \in \bigwedge^n E^*$ et \mathcal{B}' une autre base de E . On a $\varphi = \varphi(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$, en particulier on a donc $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$.

Proposition 9 ([Go] 141-142). Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Sont équivalentes :

1. (x_1, \dots, x_n) est liée ;
2. Pour toute base \mathcal{B} de E , $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$;
3. Il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$.

B. Déterminant d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 10 ([Go] 142). Si C_1, \dots, C_n sont les colonnes de A , alors :

$$\det(A) := \det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$$

où \mathcal{E} désigne la base canonique de K^n .

Proposition 11 ([Go] 142). Soient $\lambda \in K$ et $B \in \mathcal{M}_n(K)$.

1. $\det(A)$ ne change pas si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes ;
2. $\det(A^T) = \det(A)$
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
4. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
5. $A \in GL_n(K) \iff \det(A) \neq 0$ (auquel cas, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$)

Définition 12 ([Go] 142). Le déterminant de u , défini par : $\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$ ne dépend pas du choix de \mathcal{B} .

C. Propriétés analytiques

Proposition 13 ([Rv] 83). $A \mapsto \det A$ est polynomiale en les coefficients de A (relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$), donc lisse.

Corollaire 14. $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $SL_n(\mathbb{R})$ est fermé.

Proposition 15 ([Rv] 83). $\forall x \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $d(\det)(X)(H) = \text{tr}(\text{Com}(X)^T H)$, où $\text{Com}(X)$ est appelée dans le paragraphe II.B.

II. Calcul pratique d'un déterminant

A. Cas simples, pivot de GAUSS

Notation 16 ([Go] 142). On note $|A|$ le déterminant d'une matrice carrée A .

Proposition 17 ([Go] 106). $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ i & j & k \end{vmatrix} = aek + bfi + djc - cei - fja - bdk$ (règle de SARRUS)

Lemme 18 ([Go] 142). Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 1}$ est triangulaire, alors $\det(A) = a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}$.

Algorithme 19 (pivot de GAUSS). Pour calculer le déterminant d'une matrice, on peut la transformer en une matrice triangulaire par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes :

- la transvection $(C_i \rightarrow C_i + \lambda C_j)$ ne change pas le déterminant ;
- la permutation $(C_i \leftrightarrow C_j)$ change le signe du déterminant ;
- la dilatation $(C_i \Rightarrow \alpha C_i)$ change le déterminant d'un facteur α .

Exemple 20.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Théorème 21 ([Go] 142). Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux.

B. Mineurs, cofacteurs et développements

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$.

Définition 22 ([Go] 142). Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. On appelle mineur d'indice (i, j) de A le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant sa i -ième ligne et sa j -ième colonne. On note $\Delta_{i,j}$ ce mineur.

On appelle cofacteur d'indice (i, j) de A la quantité $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$.

On appelle comatrice de A la matrice $\text{Com}(A) = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Théorème 23 (Formules de développement d'un déterminant

Par rapport à la i -ième ligne : $\det A = \sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$

— Par rapport à la j -ième colonne : $\det A = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$

Exemple 24. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 + 0 = 1$$

Théorème 25 (Formule de la comatrice - [Go] 143). $A \text{Com}(A)^T = \text{Com}(A)^T A = \det(A) I_n$

C. Déterminants remarquables

Exemple 26 (déterminant circulant - [Go] 143; [IP] 388). Pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n P(\omega^k)$$

où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} X^i$.

Application 27 (FIG 1 - [IP] 388). Soient z_1, \dots, z_n des complexes qui sont les affixes des points M_1, \dots, M_n . On définit une suite de polygones du plan comme suivant :

- $P_0 = M_1 \dots M_n$
- Pour $n \geq 1$, P_n est le polygone dont les sommets sont les milieux des arêtes de P_{n-1} . Alors $(P_n)_n$ converge vers l'isobarycentre de P_0 .

Exemple 28 (déterminant de VANDERMONDE - [Go] 143). Pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$,

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i, j \leq n} a_i - a_j$$

III. Applications des déterminants...

A. ...en algèbre linéaire

Remarque 29 ([BMP] 181). On étend la formule explicite du déterminant au cas des matrices à coefficients dans un anneau intègre A . Si $M \in \mathcal{M}_n(A)$, alors $\det(M) \in A$, et par plongement de A dans $\text{Frac}(A)$, les propriétés déjà vues restent vraies.

Définition 30 ([Go] 172). Le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est $\chi_A = \det(XI_n - A)$.

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est celui de sa matrice dans n'importe quelle base.

Proposition 31 ([Go] 159; [C] 47). — $\forall A \in \mathcal{M}_n(K)$, $\text{Sp}(A) = \chi_A^{-1}(\{0\})$

— $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Théorème 32 (de CAYLEY-HAMILTON - [M2] 81). $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_A(A) = 0$.

Théorème 33 (Systèmes de CRAMER - [Gr] 145). Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $B \in K^n$. On note A_1, \dots, A_n les colonnes de A . La solution de $AX = B$ est donnée par $X = (x_1, \dots, x_n)$ où

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i = \frac{\det(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)}{\det(A)}$$

B. ...en calcul intégral

Théorème 34 (de changement de variable - ADMIS - [BP] 255-256). Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^n , et $\varphi : U \rightarrow V$ un C^1 -difféomorphisme. Pour tout fonction $f : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ borélienne,

$$\int_U f \circ \varphi(u) \cdot |\det(d\varphi(u))| du = \int_V f(v) dv$$

Application 35. $\forall \alpha > 0$, $\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

Théorème 36 ([BMP] 184). Notons λ la mesure de LEBESGUE sur \mathbb{R}^n . Pour tous $X \subseteq \mathbb{R}^n$ mesurable et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda(u(X)) = |\det(u)| \cdot \lambda(X)$

Corollaire 37 (FIG. 3 - [BMP] 184). Soit $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, notons $\mathcal{P}(v_1, \dots, v_n) = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$ le parallélotope engendré par v_1, \dots, v_n . On a $\lambda(\mathcal{P}(v_1, \dots, v_n)) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$.

C. ...en géométrie

Dans ce paragraphe, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un \mathbb{K} -espace préhilbertien.

Définition 38 ([Go] 274). Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On appelle matrice de GRAM de x_1, \dots, x_n la matrice $M_G(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i | x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$, et déterminant de GRAM de x_1, \dots, x_n sont déterminant $G(x_1, \dots, x_n)$.

Théorème 39 ([Go] 275). Soient F un sous-espace vectoriel de E , et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F . Alors, $\forall x \in E$, $d(x, F)^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$.

Théorème 40 (inégalités de HADAMARD - [Go] 275). On a :

1. $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $G(x_1, \dots, x_n) \leq \|x_1\|^2 \dots \|x_n\|^2$
2. $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{C}^n)^n$, $|\det(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\|_2 \dots \|x_n\|_2$

De plus, dans les deux points, il y a égalité si, et seulement si, (x_1, \dots, x_n) est orthogonale.

Développements

- Développement 1 : Exemple 26 et Application 27.
- Développement 2 : Théorèmes 39 et 40

Références

Rv *Petit guide du calcul différentiel*, François Rouvière, 4e édition

IP *L'oral à l'agrégation de mathématiques*, Lucas Issenmann, Timothée Pecatte

M2 *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*, Roger Mansuy, Rached Mneimné, 3e édition

Gr *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone, 6e édition, 2e version

Go *Les maths en tête - Algèbre et Probabilités*, Xavier Gourdon, 3e édition

BMP *Objectif Agrégation*, Vincent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré, 2e édition

BP *Théorie de l'intégration*, Marc Briane, Gilles Pagès, 7e édition

C *Carnet de voyage en Algèbre*, Philippe Caldero, Marie Peronnier

FIGURE 1: Règle de Sarrus

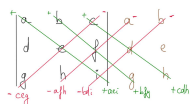
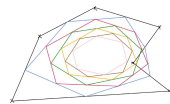


FIGURE 2: Suite de polygones



RÉFÉRENCES

- [Go]: Les maths en tête - Algèbre et Probabilités (Xavier Gourdon) [3^e édition]
- [Gr]: Algèbre linéaire (Joseph Grifone) [6^e édition, 2^e version]
- [R]: Petit guide du calcul différentiel (François Rouvière) [4^e édition]
- [IP]: L'oral à l'agrégation de mathématiques (Lucas Issenmann, Timothée Pecatte)
- [M2]: Algèbre linéaire (Réduction des endomorphismes) (Roger Mansuy, Rached Mneimné) [3^e édition]
- [C]: Carnet de voyage en Algèbre (Philippe Caldero, Marie Peronnier)
- [BMP]: Objectif Agrégation [2^e édition] (Vincent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré)
- [BP]: Théorie de l'intégration (Marc Briane, Gilles Pagès) [7^e édition]

FIGURE 3: Lien entre volume et déterminant

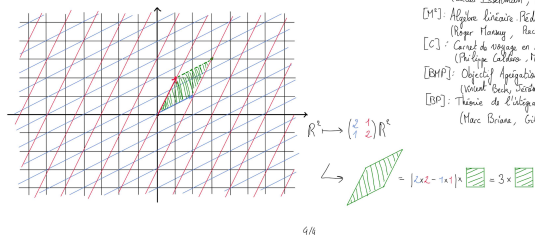


FIGURE 1.4 – s

151 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Soient K un corps commutatif, E un K -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E .

I. Stabilité d'un sous-espace par un endomorphisme

A. Introduction

Définition 1 ([M2] 17). On dit que F est stable par u (ou u -stable) si $u(F) \subseteq F$.

Exemple 2 ([M2] 17). On a :

- $\{0\}$, $\text{Ker}(u)$, $\text{Im}(u)$ et E sont stables par u .
- $\forall P \in K[X]$, $\text{Ker}(P(u))$ et $\text{Im}(P(u))$ sont stables par u .

Proposition 3 ([M2] 17). Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Si v commute avec u , alors pour tout $P \in K[X]$, $\text{Ker}(P(u))$ et $\text{Im}(P(u))$ sont stables par u .

Remarque 4. En particulier, $\forall \lambda \in K$, $E_\lambda(u) := \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ est stable par u , et par tout endomorphisme qui commute avec u .

Proposition 5 ([M2] e17). Soit $E = F \oplus G$ une décomposition de E , soit \mathcal{B} une base de E adaptée à cette décomposition, notation $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ par blocs. Alors F (resp. G) est stable par u si, et seulement si, $C = 0$ (resp. $B = 0$).

Corollaire 6 ([M2] e120). F est stable par u si, et seulement si, F^\perp est stable par ${}^t u$. (NB : $\text{Mat}_{\mathcal{B}^*}({}^t u) = {}^t \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$).

B. Notion d'endomorphisme induit

Définition 7 ([M2] 17). Si F est stable par u , alors on dispose de l'endomorphisme induit par u sur F : $u_F : F \rightarrow F$, $x \mapsto u(x)$.

Proposition 8 ([M2] 55, 18). Si F est stable par u , alors $\chi_{u_F} \mid \chi_u$ et $\pi_{u_F} \mid \pi_u$.

Corollaire 9 ([M2] 93). Si F est stable par u et si u est diagonalisable (resp. trigonalisable, resp. nilpotent), alors u_F aussi.

Proposition 10 ([M2] 55, 18). Si $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ est une décomposition de E en somme de sous-espaces stables, alors : $\chi_u = \chi_{u_{F_1}} \dots \chi_{u_{F_p}}$ et $\pi_u = \pi_{u_{F_1}} \vee \dots \vee \pi_{u_{F_p}}$.

II. Application à la réduction des endomorphismes

Lemme 11 (des noyaux - [M2] 43). $\forall (P, Q) \in K[X]^2$, $P \wedge Q = 1 \implies \text{Ker}((PQ)(u)) = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$

A. Diagonalisation, trigonalisation

Théorème 12 (de CAYLEY-HAMILTON - [M2] 82). $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Corollaire 13. $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \text{Ker}((u - \lambda \text{id}_E)^{\mu_{\lambda}(u)})$ est une décomposition de E en somme de sous-espaces stables.

Proposition 14 ([M2] 84). Écrivons $\chi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m(\lambda)}$ et posons $E_\lambda(u) = \text{Ker}(\lambda \text{id}_E - u)$. Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m(\lambda)$.

Théorème 15 ([R] 683 ; [M2] 90-93). On a :

- u est diagonalisable $\iff \pi_u$ est scindé à racines simples \iff il existe P annulateur de u scindé à racines simples $\iff \chi_u$ est scindé et $\forall \lambda \in \text{Sp}(u)$, $\dim(E_\lambda(u)) = \mu_{\chi_u}(\lambda)$.
- u est trigonalisable $\iff \chi_u$ est scindé \iff il existe un polynôme scindé qui annule u .

Théorème 16 (de réduction simultanée - [M2] 94,107). Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}(E)^I$ une famille d'endomorphismes qui commutent deux à deux. Si tous les u_i , $i \in I$ sont diagonalisables (resp. trigonalisables), alors il existe une base de E qui diagonalise (resp. trigonalise) simultanément tous les u_i , $i \in I$.

Lemme 17 ([R] 743). Il existe un sous-espace de E de dimension 1 ou 2 stable par u .

B. Cas des endomorphismes normaux

Dans l'encadré suivant, on suppose u normal

Lemme 18 ([R] 743). Si F est un sous-espace de E stable par u , alors F^\perp est stable par u .

Lemme 19 ([R] 744). Il existe des sous-espaces P_1, \dots, P_r de E stables par u , de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, tels que

$$E = P_1 \bigoplus \dots \bigoplus P_r$$

Lemme 20 (PAS DEV - [R] 745). Si $n = \dim E = 2$, alors :

- Si u admet une valeur propre réelle, alors u est diagonalisable dans une base orthonormée,
- Sinon, pour toute base orthonormée \mathcal{B} de E , il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b \neq 0$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Théorème 21 (de réduction des endomorphismes normaux - [R] 745). Il existe une base orthonormée \mathcal{B} de E telle que, par blocs, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(D_p, R_1, \dots, R_r)$, où $D_p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonale, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\exists (a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2 : b_i \neq 0$ et $R_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ et $p + 2r = n$.

Corollaire 22 (théorème spectral - [R] 746 (734)). Tout endomorphisme auto-adjoint se diagonalise dans une base orthonormée.

Corollaire 23 ([R] 727). Si u est orthogonal, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la

$$\text{forme, par blocs : } \begin{pmatrix} I_p & & & \\ & -I_q & & \\ & & R_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & R_r \end{pmatrix}, \text{ où } R_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}$$

Proposition 24. Si u est une rotation et que $\dim(E)$ est impaire, alors $\text{Ker}(u - \text{id}_E) \neq \{0\}$.

Références

- R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
M2 *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*, Roger Mansuy, Rached Mneimné, 3e édition

II. Application à la décomposition des endomorphismes

A. Décomposition de JORDAN des endomorphismes nilpotents

Définition 25 ([M2] 143). On appelle bloc de JORDAN de taille d la matrice :

$$J_d := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{N}^r$, on pose $J_\lambda = \text{diag}(J_{\lambda_1}, \dots, J_{\lambda_r})$.

Théorème 26 (décomposition de JORDAN des endomorphismes nilpotents - [M2] 144). Supposons u nilpotent d'indice λ_1 . Il existe $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ telle que $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = n$, et \mathcal{B} une base de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}$. Cette décomposition est unique.

B. Décomposition de DUNFORD

Théorème 27 (décomposition de DUNFORD - [M2] 141 ; [R] 613). Si u est trigonalisable, alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u = d + n$, $d \circ n = n \circ d$, d est diagonalisable et n est nilpotent.

Corollaire 28 ([R] 634). Sur $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, e^u est diagonalisable si, et seulement si, u l'est.

C. Une application : le critère de diagonalisabilité de KLARÈS

Théorème 29 (critère de KLARÈS - [M2] 154). Posons $\text{ad}_u : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ v - v \circ u$. Si u est trigonalisable, alors :

$$u \text{ diagonalisable} \iff \text{Ker}(\text{ad}_u) = \text{Ker}(\text{ad}_u^2)$$

Développements

- Développement 1 : Lemmes 17, 18, 19 et Théorème ??.
- Développement 2 : Théorème 29

155 : Exponentielle de matrices. Applications.

Dans cette leçon, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. On fixe une norme d'algèbre $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose connu et maîtrisé le calcul matriciel élémentaire.

Théorème/Définition 1 ([R] 761). La série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ converge normalement sur tout compact. Sa somme est appelée exponentielle de A , et est notée $\exp(A)$ ou e^A .

Exemple 2 ([R] 761). $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\exp(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$. En particulier, $\exp(0_n) = I_n$ et $\exp(I_n) = e \cdot I_n$.

Exemple 3. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}\right)$

I. Propriétés algébriques de l'exponentielle matricielle

Proposition 4. Si A et B commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. (NB : la réciproque est vraie !) et $\exp(A)$ et $\exp(B)$ commutent.

Contre-exemple 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne commutent pas, et $e^A e^B = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 1/e \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e & 1/e \\ 0 & 1/e \end{pmatrix} = e^B e^A$.

Corollaire 6. $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) \subseteq GL_n(\mathbb{K})$, et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Proposition 7 ([R] 761-762). On a les propriétés suivantes :

- $\forall P \in GL_n(\mathbb{K})$, $P \exp(A) P^{-1} = \exp(PAP^{-1})$
- ${}^t \exp(A) = \exp({}^t A)$
- $\det(\exp(A)) = e^{\text{tr}(A)}$
- $\overline{\exp(A)} = \exp(\overline{A})$

Corollaire 8. $\exp(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) \subseteq O_n(\mathbb{K})$, avec $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^t M = -M\}$.

Remarque 9. On peut montrer que $\exp(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = SO_n(\mathbb{R})$.

Proposition 10. Si A est diagonalisable, alors $\text{Sp}(\exp(A)) = \exp(\text{Sp}(A))$.

Théorème 11. On a :

- $\exp(A) \in \mathbb{K}_{n-1}[A]$ et commute avec A .
- Si A est diagonalisable et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $A \in \mathbb{R}_{n-1}[\exp(A)]$.

Remarque 12. Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i\pi \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on a $\exp(A) = I_2$ donc pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(\exp(A)) = P(1)I_2 \neq A$.

II. L'exponentielle d'une matrice en pratique

A. Quelques méthodes de calcul

Proposition 13. Supposons A diagonalisable. Il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $P \in O_n(\mathbb{K})$ tels

$$\text{que } A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}; \text{ alors } \exp(A) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Théorème 14 (décomposition de DUNFORD - [R] 613). Si A est trigonalisable, alors il existe un unique $(D, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que D est diagonalisable, N est nilpotente, D et N commutent, et $A = D + N$. De plus, $(D, N) \in K[A]^2$.

Proposition 15. Si A est nilpotente d'indice r , alors $\exp(A) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{A^k}{k!}$.

Proposition 16 ([R] 765). Si A est trigonalisable, et si $A = D + N$ est la décomposition de DUNFORD de A , alors $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$.

En particulier, e^D est diagonalisable et $e^D(e^N - I_n)$ est nilpotente, et ce sont les éléments de la décomposition de DUNFORD de e^A .

Proposition 17 ([R] 778). $(I_n + \frac{A}{k})^k \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} \exp(A)$

Remarque 18. Cela fournit une méthode pour approcher numériquement l'exponentielle d'une matrice, toutefois bien moins efficace qu'un calcul direct.

B. Application : résolution d'EDO linéaires à coefficients constants

Proposition 19 ([Gr] 378). $t \mapsto e^{tA}$ est lisse sur \mathbb{R} , de dérivée $t \mapsto Ae^{tA} = e^{tA}A$.

Proposition 20 ([Gr] e378). L'unique solution du problème de CAUCHY

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

pour $t_0 \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, est $t \mapsto e^{(t-t_0)A}Y_0$.

Exemple 21. Le problème de CAUCHY $\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y, \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ admet pour (unique) solution $t \mapsto \exp\left(t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 22 (formule de DUHAMEL). Soient $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}\mathbb{R}$ continue, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'unique solution du problème de CAUCHY $\begin{cases} Y' = AY + B; \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$ est

$$t \mapsto e^{(t-t_0)A}Y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}B(s)ds$$

III. Propriétés analytiques de l'exponentielle matricielle

A. Injectivité, surjectivité

Théorème 23 ([R] 769). L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective, non injective.

Contre-exemple 24. $\forall k \in \mathbb{Z}, \exp(2i\pi k I_n) = I_n$

Théorème 25. *L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ n'est ni surjective, ni injective. Plus précisément,*

- $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{M^2 \mid M \in GL_n(\mathbb{R})\} \neq GL_n(\mathbb{R})$
- Exemple 3 justifie la non-injectivité

Remarque 26. Comme $\det(\exp(A)) = e^{\text{tr}(A)} > 0$, on a $\det^{-1}(\mathbb{R}^+) \cap \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \emptyset$.

Proposition 27 ([R] e768-777). Notons $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application $\exp : \mathcal{N}_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est injective.

Notons $\Delta_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application $\exp : \Delta_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est injective.

Application 28 ([R] 777). $\exp(A)$ est diagonalisable si, et seulement si, A l'est.

Théorème 29 ([C] 357). L'application $\exp : S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Théorème/Définition 30 ([R] 766-768). Si $A \in \mathcal{B}(I_n, 1)$, alors $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{A^n}{n}$ converge normalement sur tout compact. Sa somme est notée $\ln(I_n + A)$, et est appelée logarithme de A .

Remarque 31. On a $\ln(I_n) = 0_n$.

Théorème 32 (ADMIS). L'application $\exp : \mathcal{N}_n(\mathbb{C}) \rightarrow I_n + \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ est une bijection de réciproque \ln .

B. Régularité

Théorème 33 (ADMIS - [Rv] 306). \exp est lisse sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 34. La différentielle de \exp en $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est :

$$d(\exp)(X) : H \mapsto \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[\cdot, X]^n}{(n+1)!} \right) (H)$$

où $[\cdot, X] : H \mapsto [H, X] = HX - XH$.

Corollaire 35. \exp induit un C^1 -difféomorphisme local d'un voisinage de 0_n sur un voisinage de I_n .

Développements

- Développement 1 : Théorème 29
- Développement 2 : Proposition 34

Références

- R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
- C *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et géométries I*, P. Caldero, J. Germoni
- Gr *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone, 6e édition, 2e version
- Rv *Petit guide du calcul différentiel*, François Rouvière, 4e édition

156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Dans cette leçon, K désigne un corps, E est un K -espace vectoriel de dimension finie n , et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I. Rappels sur l'étude des endomorphismes

Théorème 1 (de structure - [M2] 2). L'application $\varphi_u : K[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$ qui à $P = \sum a_k X^k$ associe $P(u) := \sum a_k u^k$, est un morphisme de K -algèbres.

Proposition/Définition 2 ([M2] 3,4). L'ensemble $I_u = \text{Ker}(\varphi_u)$ des polynômes dits annulateurs de u , est un idéal de $K[X]$, appelé idéal annulateur de u . Il n'est pas réduit à $\{0\}$, et donc admet un unique générateur unitaire, noté μ_u , appelé polynôme minimal de u .

Remarque 3. Par correspondance entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(K)$, ces résultats restent valables pour les matrices.

Définition 4 ([M2] 54). Le polynôme caractéristique de u est définie par $\chi_u = \det(X \text{id}_E - u)$.

Théorème 5 (de CAYLEY-HAMILTON - [M2] 81). $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Proposition 6 ([R] 605). $\text{Sp}(u) = \chi^{-1}(\{0\}) = \pi^{-1}(\{0\})$

Proposition 7 ([M2] 55?). Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Notons $u_F \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme induit par u sur F . Alors $\pi_{u_F} \mid \pi_u$ et $\chi_{u_F} \mid \chi_u$.

Proposition 8 ([M2] 18-55). Si $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ est une décomposition de E en sous-espaces stables par u , alors $\chi_u = \chi_{u_{F_1}} \cdots \chi_{u_{F_r}}$ et $\pi_u = \pi_{u_{F_1}} \vee \dots \vee \pi_{u_{F_r}}$.

Lemme 9 (des noyaux - [M2] 43). Soit $(P, Q) \in K[X]^2$. Si $P \wedge Q = 1$, alors $\text{Ker}((PQ)(u)) = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$.

II. Trigonalisation

Définition 10 ([R] 675). On dit que u est trigonalisable s'il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire.

Corollaire 11 ([R] 676). Si u est trigonalisable, alors $\text{tr}(u) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} m(\lambda)\lambda$ et $\det(u) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda^{m(\lambda)}$.

Théorème 12 ([R] 676). u est trigonalisable $\iff \pi_u$ est scindé \iff il existe $P \in I_u$ scindé.

Corollaire 13 ([R] 676). Sur un corps algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable.

Exemple 14. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur \mathbb{C} mais pas sur \mathbb{R} .

Application 15 ([R] 762). $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$.

Proposition 16. Si F est un sous-espace vectoriel stable par u et si u est trigonalisable, alors $u_F : F \rightarrow F$ est trigonalisable.

Proposition 17. Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ s'écrit par blocs $\text{diag}(A_1, \dots, A_r)$, alors $\chi_A = \chi_{A_1} \cdots \chi_{A_r}$ et $\pi_A = \pi_{A_1} \vee \dots \vee \pi_{A_r}$.

Proposition 18 ([Go] 175). Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent, alors pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $E_\lambda(u)$ est stable par v .

Théorème 19 ([R] 678). Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}(E)^I$ une famille d'endomorphismes qui commutent deux à deux. Si les $u_i, i \in I$, sont tous trigonalisables, alors ils le sont dans une même base (on dit qu'ils sont cotrigonalisables).

Proposition 20 ([Go] e192). Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v sont cotrigonalisables, alors $u + v$ et $u \circ v$ sont trigonalisables.

Exemple 21. On a :

- $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont trigonalisables, mais pas leur somme.
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont trigonalisables, mais pas leur produit.

III. Endomorphismes nilpotents

A. Définition, critères, propriétés

Définition 22 ([Gr] 93). On dit que u est nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On définit alors l'indice (de nilpotence) de u comme $\min \{k \in \mathbb{N}^* \mid u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$.

Exemple 23. La dérivation de $\mathbb{C}_n[X]$ est nilpotente d'indice $n + 1$.

Proposition 24 ([Gr] e192). Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Si u et v commutent, alors $u + v$ et $u \circ v$ sont nilpotents.

Théorème 25. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- u est nilpotent
- $\chi_u = X^n$
- $\exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \pi_u = X^k$
- u est trigonalisable et $\text{Sp}(u) = \{0\}$.

Corollaire 26. Si K est algébriquement clos, alors u est nilpotent $\iff \text{Sp}(u) = \{0\}$.

Exemple 27. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nilpotente, mais son spectre est $\{0\}$.

Théorème 28 ([C] 27-32). Si $K = \mathbb{R}$, alors u est nilpotent $\iff \forall k \in \mathbb{N}^*, \text{tr}(u^k) = 0$.

Remarque 29. Si K est un corps fini, le résultat est faux : considérer $\text{id}_{(\mathbb{F}_p)^p}$.

Proposition 30. Si F est un sous-espace vectoriel stable par u et si u est nilpotent, alors $u_F : F \rightarrow F$ est nilpotent.

B. Réduction de JORDAN des endomorphismes nilpotents

Notation 31 ([M2] 143). Posons

$$J_r := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On l'appelle bloc de JORDAN d'ordre r .

Lemme 32 ([R] 678). Supposons u nilpotent d'indice p . Soit $x \notin \text{Ker}(u^{p-1})$, posons $F_x = \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$.

- F_x est stable par u et $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est une base de F_x ;
- F_x admet un supplémentaire stable par u .

Théorème 33 (réduction de JORDAN). Supposons u nilpotent. Il existe $d_1 \geq \dots \geq d_r$ et une base \mathcal{B} de E tels que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(J_{d_1}, \dots, J_{d_r})$.

Proposition 34. Posons $A = \text{diag}(J_{i_1}, \dots, J_{i_r})$. On a $\chi_A = \pi_A = X^{i_r}$, et A est nilpotente d'indice r .

C. Noyaux itérés et tableaux de YOUNG

Proposition 35 ([M2] 16). La suite $(\text{Ker}(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et stationnaire, et si on note $d_k = \dim(\text{Ker}(u^k))$, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $d_{k+1} = d_k + \dim(\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u^k))$.

Proposition 36 ([M2] 16). $(d_{k+1} - d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante (on dit que $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ s'essouffle).

Proposition 37 ([Gr] 93). $p = \min \{k \in \mathbb{N} \mid \forall q \geq k, \text{Ker}(u^q) = \text{Ker}(u^k)\}$ est appelé caractère de u . Il vérifie $p \leq n$. Si u est nilpotent, alors p est aussi l'indice de nilpotence de u .

Définition 38 ([M2] 147). — Le tableau de YOUNG associé à une suite d'entiers $n_1 \geq \dots \geq n_r$ est le tableau à r lignes tel que la i -ième ligne contient n_i cases (alignées à gauche).

- Le tableau de YOUNG d'un endomorphisme nilpotent est le tableau de YOUNG de $d_2 - d_1 \geq d_3 - d_2 \geq \dots \geq d_p - d_{p-1}$ avec les notations ci-dessus.

Exemple 39. FIGURE 1.

Proposition 40. Soit $d_1 \geq \dots \geq d_r$. La matrice par blocs $\text{diag}(J_{d_1}, \dots, J_{d_r})$ est nilpotente d'indice d_1 .

Exemple (Construction du tableau de YOUNG à partir de la réduite de JORDAN). / [M2] 147/ FIGURE 2. A PRESENTER.

Théorème 41 ([M2] 148). Deux endomorphismes nilpotents sont semblables si, et seulement si, ils ont la même réduction de JORDAN.

Corollaire 42. Il y a autant de classes de similitude de matrices nilpotentes que de partitions de n .

IV. Décomposition de DUNFORD et applications

Dans cette section, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Théorème 43 (décomposition de DUNFORD - [R] 683). Si χ_u est scindé, alors il existe un unique $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que d est diagonalisable, n nilpotent, d et n commutent et $u = d + n$. De plus, $(d, n) \in K[u]^2$.

Application 44 ([R] 684). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que χ_A est scindé. Soit $A = D + N$ sa décomposition de DUNFORD. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $P^{-1}DP =$

$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On a alors :

$$e^A = P \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$$

Exemple 45. $\exp \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(I_3 + J_3) = \begin{pmatrix} e & e & e/2 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$

Application 46. $\{Y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n) \mid Y' = AY\} = \{t \mapsto e^{tA} Y_0 \mid Y_0 \in \mathbb{K}^n\}$

Théorème 47 (critère de KLARÈS - [M2 154]). Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable, alors u est diagonalisable si, et seulement si, $\text{ad}_u : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ v - v \circ u$ l'est.

Développements

- Développement 1 : Théorème 43 et application 44
- Développement 2 : Théorème 47

Références

- Gr Algèbre linéaire, Joseph Grifone, 6e édition, 2e version
M2 Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes, Roger Mansuy, Rached Mneimné, 3e édition
R Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
Go Les maths en tête - Algèbre et probabilités, Xavier Gourdon, 3e édition
C Carnet de voyage en Algèbre, Philippe Caldero, Marie Peronnier

FIGURE 1 : Tableaux de Young

- Associez à la suite d'entiers $(4, 2, 2, 1)$:



- Pour un endomorphisme tel que $d_1=2, d_2=4, d_3=5, d_4=6=d_5=d_6=\dots$



FIGURE 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

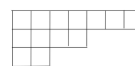
On a $\text{rg}(A) = 7$ et $d_1 = \dim(\text{Im}(A)) = 3$

Ensuite, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a $\text{rg}(A^2) = 3$ et $d_2 = \dim(\text{Im}(A^2)) = 7$.

Ensuite, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a $\text{rg}(A^3) = 1$ et $d_3 = \dim(\text{Im}(A^3)) = 3$. Puis $A^4 = 0$. On a donc le tableau de Young suivant :



9/9

FIGURE 1.5 - s

157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Dans cette leçon, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $A^* = {}^t\bar{A}$. Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E .

I. Généralités

A. Définitions et premières propriétés

Définition 1 ([Go] 240-241). On définit :

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$ est l'ensemble des matrices réelles dites symétriques ;
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A\}$ est l'ensemble des matrices réelles dites anti-symétriques ;
- $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{A} = A\}$ est l'ensemble des matrices complexes dites hermitiennes ;
- On dit que A est auto-adjointe si $A = A^*$, i.e. si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ou $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$.

Exemple 2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2(\mathbb{C})$.

Proposition 3 ([Go] 240-241). $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{C}) \oplus i\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Définition 4. On définit :

- $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXAX \geq 0\}$ est l'ensemble des matrices symétriques réelles dites positives.
- $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXAX = 0 \implies X = 0\}$ est l'ensemble des matrices symétriques réelles dites définies positives.
- $\mathcal{H}_n^+(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \mid \forall X \in \mathbb{C}^n, {}^t\bar{X}AX \geq 0\}$ est l'ensemble des matrices hermitiennes dites positives.
- $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \mid \forall X \in \mathbb{C}^n, {}^t\bar{X}AX = 0 \implies X = 0\}$ est l'ensemble des matrices hermitiennes dites définies positives.

B. Lien avec les formes quadratiques / hermitiennes

Définition 5 ([Go] 240-241). Soit $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On dit que φ est symétrique si $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$. Le cas échéant, $q : x \in E \mapsto \varphi(x, x)$ est appelée forme quadratique associée à φ , et φ est appelée forme polaire associée à q (elle est alors unique).

Définition 6. Soit $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire (on prend l'antilinéarité à droite). On dit que φ est hermitienne si $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$. Le cas échéant, $q : x \in E \mapsto \varphi(x, x)$ est appelée forme hermitienne associée à φ , et φ est appelée forme polaire associée à q (elle est alors unique).

Exemple 7 ([Go] 239). — $(f, g) \mapsto \int_0^1 f\bar{g}$ est une forme sesquilinéaire hermitienne sur $C^0([0, 1], \mathbb{C})$, et induit une forme bilinéaire symétrique sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

- $(X, Y) \mapsto {}^t\bar{X}Y$ est bilinéaire symétrique ou sesquilinéaire hermitienne sur \mathbb{K}^n .

Proposition 8 ([Go] e241). Soit $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{K}$ bilinéaire ou sesquilinéaire. On définit la matrice de φ dans \mathcal{B} comme $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) := (\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$. Pour x et y dans E , de vecteurs coordonnés X et Y , on a alors $\varphi(x, y) = {}^t\bar{X} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot Y$ en identifiant \mathbb{K} et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors,

- φ est symétrique si, et seulement si, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
- φ est hermitienne si, et seulement si, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$

Proposition 9 ([R] 163). Soit \mathcal{B}' une autre base de E . Si P est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = {}^t\bar{P}AP$.

Proposition 10. $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cup \mathcal{H}_n(\mathbb{C}), \text{Sp}(A) \subseteq \mathbb{R}$.

II. Réduction des matrices symétriques / hermitiennes

A. Orthogonalité et théorème spectral

Soit q une forme quadratique ou hermitienne sur E , de forme polaire φ . On pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Définition 11 ([Go] 243). On dit que \mathcal{B} est q -orthogonale si $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j \implies \varphi(e_i, e_j) = 0$, i.e. si A est diagonale.

Théorème 12 (spectral - [Go] 256). Pour toute $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $M \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$), il existe P orthogonale (resp. unitaire) (i.e. $P^{-1} = P^*$) telle que P^*MP est diagonale.

Théorème 13 ([Go] 243). Il existe une base q -orthogonale de E .

Application 14. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors :

- $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subseteq \mathbb{R}^+$;
- $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subseteq \mathbb{R}^{*+}$

Théorème 15. $\forall A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que ${}^tPAP = I_n$ et tPBP est diagonale.

Théorème 16. $\forall A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \exists ! B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) : A = B^2$ (on note $B = \sqrt{A}$).

Théorème 17 (décomposition polaire - [C] 348). Toute matrice A (invertible) se décompose (de manière unique) sous la forme $A = \Theta S$, où $\Theta \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

B. Réduction de GAUSS et signature d'une forme quadratique / hermitienne

Théorème 18 (réduction de GAUSS - [R] 469). Il existe des formes linéaires l_1, \dots, l_r linéairement indépendantes et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^r$ tels que $q = \lambda_1|l_1|^2 + \dots + \lambda_r|l_r|^2$.

Exemple 19. $q(x, y, z) = x^2 + 2xy - yz + \frac{3}{4}z^2 = (x + y)^2 - (y + \frac{1}{2})^2 + z^2$

Théorème 20 (loi d'inertie de SYLVESTER - [R] 477). Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base q -orthogonale de E . Les entiers $s = \#\{e_i \in \mathcal{B} \mid q(e_i) > 0\}$ et $t = \#\{e_i \in \mathcal{B} \mid q(e_i) < 0\}$ ne dépendent que de q . Le couple (s, t) est appelé signature de q .

Exemple 21. La forme quadratique de l'exemple 19 a pour signature $(2, 1)$.

Corollaire 22 ([R] 207). Les orbites de l'action de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ par congruence sont caractérisées par le rang et la signature.

III. Propriétés topologiques en lien avec $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Définition 23. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Exemple 24. $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\exp(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.

Théorème 25 ([C] 357). On a que $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

IV. Applications

A. Vecteurs gaussiens

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n .

Définition 26 ([CR] 160,157,158). Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n) : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ est un vecteur gaussien si pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $\langle u | X \rangle$ suit une loi normale (réelle). On note alors $X \sim \mathcal{N}_n(m, \Gamma)$ où $m = {}^t(\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_n])$ est l'espérance de X , et $\Gamma = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ sa matrice de covariance.

Exemple 27 ([CR] 160). Si X_1, \dots, X_n sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, alors $\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(0_n, I_n)$.

Théorème 28 ([CR] 160). Une variable aléatoire X est gaussienne si, et seulement si il existe $m \in \mathbb{R}^m$ et $\Gamma \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tels que :

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \varphi_X(u) = \exp(i\langle m, u \rangle - \frac{1}{2}\langle \Gamma u, u \rangle)$$

Le cas échéant, m est l'espérance, et Γ sa matrice de covariance.

Corollaire 29. La loi d'un vecteur gaussien est entièrement déterminée par son espérance et sa matrice de covariance.

Proposition 30 ([CR] 161). Si $X \sim \mathcal{N}_n(m, \Gamma)$, alors $\forall A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $\forall b \in \mathbb{R}^p$, $AX + b \sim \mathcal{N}_p(Am + b, A\Gamma^t A)$.

Proposition 31. $\forall \Gamma \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\exists c \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $\Gamma = {}^t C C$.

Corollaire 32 ([CR] 161). Pour tous $m \in \mathbb{R}^n$ et $\Gamma \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_n(m, \Gamma)$.

Théorème 33. Soient $m \in \mathbb{R}^n$, $\Gamma \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $X \sim \mathcal{N}_n(m, \Gamma)$. Alors X est à densité $\iff \Gamma \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Le cas échéant, $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $f_X(u) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \det(\Gamma)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{1}{2}\langle \Gamma^{-1}(u - m) | u - m \rangle)$.

B. Optimisation des fonctions de plusieurs variables

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

Définition 34 ([Rv] 294). On appelle (matrice) hessien de f en a la matrice $\text{Hess}_a(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Remarque 35. $\text{Hess}_a(f)$ est la matrice dans \mathcal{B} de la forme bilinéaire $d^2 f(a) : \text{en particulier, pour tous } h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$,

$$d^2 f(a)(h)(k) = {}^t h \cdot \text{Hess}_a(f) \cdot k.$$

Définition 36 ([Go] 336). On dit que a est un point critique si $df(a) = 0$.

Théorème 37 ([Go] 335-336). Si f admet un maximum (resp. un minimum) local en a , alors a est un point critique, et $\text{Hess}_a(f)$ est négative (resp. positive).

NB : la réciproque est vraie si on suppose en plus $\text{Hess}_a(f)$ définie.

Algorithme 38 (de descente de gradient à pas fixe). Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\alpha > 0$ et $x_0 \in \Omega$. La suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \alpha \nabla f(x_n)$ converge vers un $x^* \in \Omega$ vérifiant $\nabla f(x^*)$.

Théorème 39 ([BMP] 24-32). Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. La solution de $Ax = b$ est donné par le minimum de $x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$, lequel peut être trouvé par descente de gradient.

Développements

- Développement 1 : Partie 1) Théorèmes 12 et 13 ; Partie 2) Théorème 15
- Développement 2 : Théorème 25

Références

- R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
- Go *Les maths en tête - Algèbre et probabilités*, Xavier Gourdon, 3e édition
- C *Carnet de voyage en Algèbre*, Philippe Caldero, Marie Peronnier
- CR *Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques*, Marie-Line Chabanol, Jean-Jacques Ruch
- Rv *Petit guide du calcul différentiel*, François Rouvière, 4e édition
- BMP *Objectif Agrégation*, Vincent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré, 2e édition

159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.