C - Le théorème des résidus

[T] 137 Def 36 : Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $0 \leq r < R$, on note $C(z_0,r,R) := B(z_0,R) \setminus \overline{B(z_0,r)}$ la couronne associée à a, r et R.

[T] 137 Thm 37 (formule de Cauchy dans une couronne) : Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < \rho_1 < \rho_2 < R$, $f \in \mathcal{H}(C(z_0,r,R))$, $\gamma_1 : t \in [0,2\pi] \longmapsto z_0 + \rho_1 e^{i\theta}$ et $\gamma_2 : t \in [0,2\pi] \longmapsto z_0 + \rho_2 e^{i\theta}$.

$$\forall z \in C(z_0,\rho_1,\rho_2), \qquad 2i\pi \cdot f(z) = \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

[T] 138 Cor / Def 38 : Il existe une unique suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ dépendant de $C(z_0,r,R)$ telle que f admet le développement en série de Laurent :

$$\forall z \in C(z_0,r,R), \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n := a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

[T] 140 Def 39 : Le coefficient a_{-1} est appelé résidu de f en z_0, et est noté $\mathrm{Res}_{z_0}(f)$.

[T] 141 Thm 40 (des résidus) : Supposons Ω convexe. Soit $\{z_1, \dots, z_r\} \subseteq \Omega$, supposons que $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_r\})$ et que $\gamma([a,b]) \cap \{z_1, \dots, z_r\} = \emptyset$. Alors :

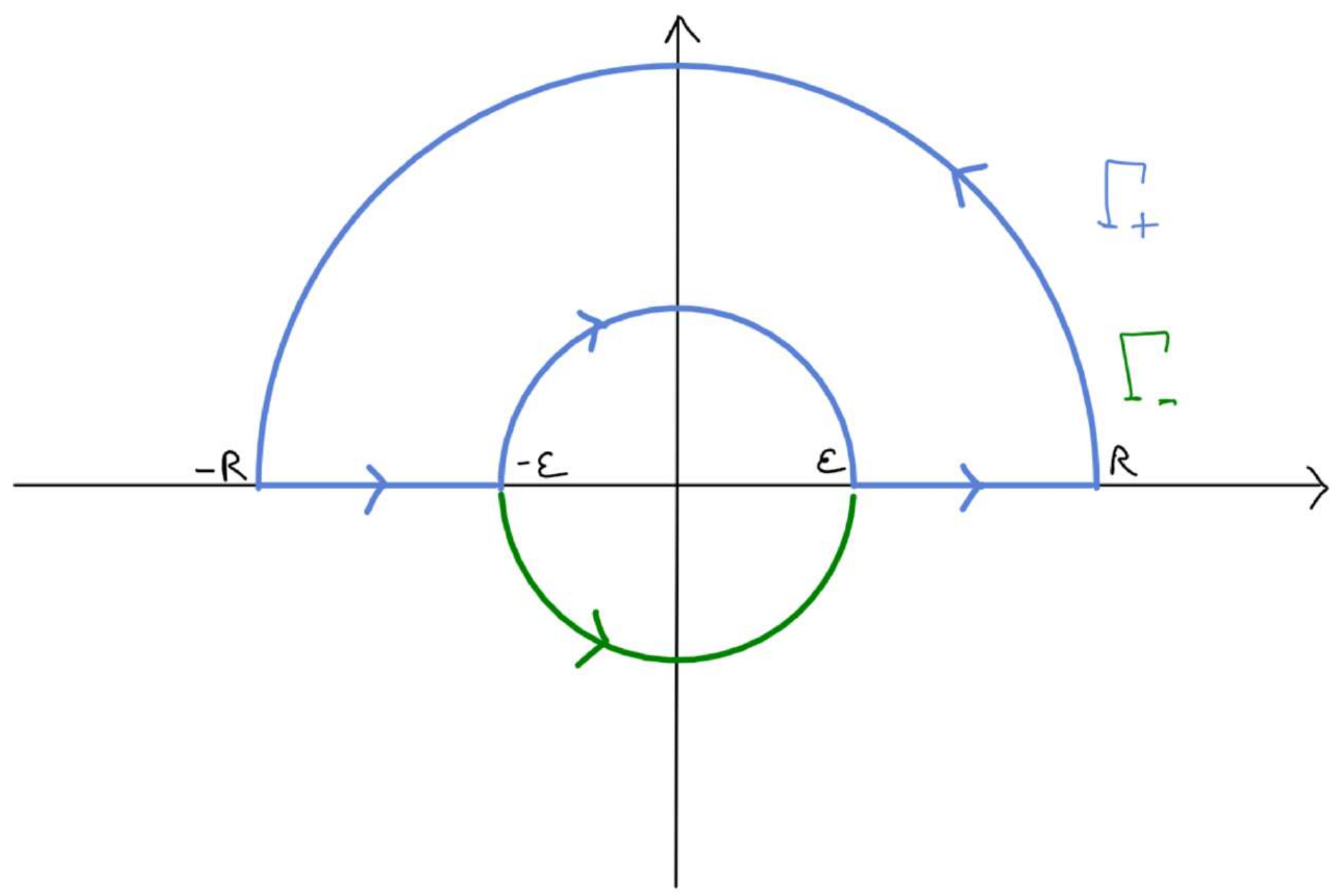
$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{r} \mathrm{Res}_{z_k}(f) \times \mathrm{Ind}_\gamma(z_k)$$

Ex 41 : $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ **DEV 2**

Rq 42 : En choisissant un autre chemin, on peut parfois utiliser plus simplement le théorème de Cauchy.

[B] 259 Ex 43 : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

FIGURE



RÉFÉRENCES

[T] Tauvel, Analyse complexe pour la licence 3

[CGC DM] (DEV 1) Cottrell, Genon-Catalot, Duhamel, Meyre

[B] (Ex 43) Bernis

[ ] (DEV 2)