101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples d'applications.

Dans cette leçon, G désigne un groupe de neutre 1, et X désigne un ensemble.

I. Action d'un groupe sur un ensemble

A. Définitions et premiers exemples

Définition 1 ([R] 19, [U] 27). *Une* action *de G sur X est une application $G \times X \to X$ définie par $(g,x) \mapsto g \cdot x$ vérifiant*

1. $\forall (g,g') \in G^2, \forall x \in X,\ g' \cdot (g \cdot x) = (g'g) \cdot x$
2. $\forall x \in X,\ 1 \cdot x = x$

Pour signigier que G agit sur X, on note $G \circlearrowright X$.

Exemple 2 ([R] 19, [U] 28).
- $\mathfrak{S}(X) \circlearrowright X$ *par* $\sigma \cdot x = \sigma(x)$
- *Si E est un espace vectoriel, alors $GL(E) \circlearrowright E$ par $\varphi \cdot x = \varphi(x)$*
- $(g,x) \mapsto x$ *est une action de G sur X, appelée* action triviale.

Proposition 3 ([R] 19, [U] 28). *La donnée d'une action $(g,x) \mapsto g \cdot x$ de G sur X équivaut à la donnée d'un morphisme $\varphi : G \to \mathfrak{S}(X)$, $g \mapsto [x \mapsto g \cdot x]$, appelé* morphisme associé à l'action de G sur X.

Définition 4 ([R] 19/21, [U] 29). *Soit $x \in X$. Alors :*
- *L'*orbite *de x est l'ensemble* $\mathrm{Orb}(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ *(aussi noté $G \cdot x$) ;*
- *Le* stabilisateur *de x est l'ensemble* $\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$.

Proposition 5 ([U] 34/37).
1. *$G \circlearrowright G$ par $g \cdot h = ghg^{-1}$ (on l'appelle* action par conjugaison*). Le stabilisateur de $h \in G$ est appelé* centralisateur *de h, et est noté $C(h)$.*
2. *G agit sur l'ensemble de ses sous-groupes par $g \cdot H = gHg^{-1}$ (action par conjugaison). Le stabilisateur de $H \leq G$ est appelé* normalisateur *de H, et est noté $N(H)$.*

Définition 6 ([R] 20, [U] 29/31). *On dit que l'action de G sur X est* transitive *si elle n'a qu'une seule orbite,* i.e. *si $\forall (x,y) \in X^2, \exists g \in G : g = g \cdot x$.*

On dit que l'action de G sur X est fidèle *si φ est injective.*

Exemple 7 ([U] 31).
- $\mathfrak{S}_n \circlearrowright [\![1,n]\!]$ *transitivement par $\sigma \cdot i = \sigma(i)$*
- *$G \circlearrowright G$ fidèlement par $g \cdot h = gh$ (on l'appelle* action par translation à gauche*)*
- *Soit H un sous-groupe de G. L'"action de G sur G/H définie par $g \cdot xH = gxH$, appelée* action par translation à gauche*, est transitive.*

Proposition 8 ([R] 21). *Pour tout $x \in X$, $\mathrm{Stab}(x)$ est un sous-groupe de G.*

Proposition 9 ([U] 30). *$x \mathcal{R} y \iff \exists g \in G : g = g \cdot x$ définit une relation d'équivalence sur X dont les classes sont les orbites de l'action de G sur X.*

Corollaire 10 ([U] 30). *Les orbites partitionnent X.*

Exemple 11 ([U] 41). *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Le groupe $\langle \sigma \rangle$ agit sur $[\![1,n]\!]$ par $\sigma^k \cdot i = \sigma^k(i)$. Les orbites non ponctuelles sont les supports des cylckes dans la décomposition en produit de cycles à supports disjoints de σ.*

B. Cas d'un groupe et d'un ensemble finis

Dans ce paragraphe, on suppose G et X finis. On pose $n = \mathrm{Card}(G)$.

Théorème 12 (de Caylay - [R] 21, [U] 31). *G s'identifie à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.*

Proposition 13 ([R] ?, [U] ?). $\forall (x,y) \in X^2, y \in \mathrm{Orb}(x) \implies \exists g \in G : \mathrm{Stab}(y) = g\,\mathrm{Stab}(x)g^{-1}$.

Théorème 14 (Relation orbite-stabilisateur - [R] 21). *Pour tout $x \in X$, $G/\mathrm{Stab}(x)$ et $\mathrm{Orb}(x)$ sont équipotents (cela reste vrai si G est infini). Par conséquent,*

$$\mathrm{Card}(G) = \mathrm{Card}(\mathrm{Stab}(x))\,\mathrm{Card}(\mathrm{Orb}(x))$$

Théorème 15 (Équation aux classes - [R] 21). *Soit $\{x_1, \dots, x_r\}$ un système de représentants pour les orbites. Alors,*

$$\mathrm{Card}\, X = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Card}(\mathrm{Orb}(x_i)) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\mathrm{Card}\, G}{\mathrm{Card}(\mathrm{Stab}(x_i))}$$

Exemple 16 ([R] 22). *Si $\mathrm{Card}\, G$ est une puissance d'un nombre premier, alors son centre $Z(G) := \{g \in G \mid \forall h \in G,\ ghg^{-1} = h\}$ n'est pas réduit à $\{1\}$.*

Corrolaire ([R] 23) *: tout groupe d'ordre p^2 avec p premier est abélien.*

Théorème 17 (Formule de Burnside - [R] 35). *L'action de G sur X possède $\frac{1}{\mathrm{Card}\, G} \sum_{g \in G} \mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(g))$ orbites, où $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$.*

Exemple 18 ([C] 132). *En moyenne, une permutation de $[\![1,n]\!]$ tirée aléatoirement a 1 point fixe.*

Exemple 19 ([C] 132). *Si G n'est pas abélien, alors la probabilité de tirer simultanément deux éléments qui commutent vaut $\frac{k}{n}$, avec k le nombre de classes de conjugaison de G.*

Théorème 20 (de Cauchy - [R] 23). *Soit p un nombre premier. Si $p \mid \mathrm{Card}\, G$, alors G admet un élément d'ordre p.*

II. Applications

A. En géométrie : les isométries des polytopes

Théorème 21 ([R] 94). *L'ensemble des isométries du plan conservant un triangle équilatéral est un groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.*

Proposition 22 ([R] 82). *Soit $\mathcal{C}$ un cube. L'ensemble des isométries de l'espace conservant $\mathcal{C}$ est un groupe, noté $Is(\mathcal{C})$. On note $Is^+(\mathcal{C})$ le sous-groupe de $\mathcal{C}$ formé de rotations.*

Théorème 23 ([R] 85). *$Is^+(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4$ et $Is(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Théorème 24 ([R] 95). *En notant $\mathcal{T}$ le tétraèdre régulier, on a $Is^+(\mathcal{T}) \cong \mathcal{A}_4$ et $Is(\mathcal{T}) \cong \mathfrak{S}_4$.*

B. Du côté des matrices

Dans ce paragraphe, K désigne un corps. On fixe $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Proposition 25 ([R] 184/185/199/195/206)**.** *Les applications suivantes sont des actions :*

1. *Translation à gauche :* $GL_n(K) \times \mathcal{M}_{n,m}(K) \to \mathcal{M}_{n,m}(K)$, $(P, A) \mapsto PA$
2. *Translation à droite :* $GL_n(K) \times \mathcal{M}_{n,m}(K) \to \mathcal{M}_{n,m}(K)$, $(P, A) \mapsto AP^{-1}$
3. *Similitude (ou conjugaison) :* $GL_n(K) \times \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K)$, $(P, A) \mapsto PAP^{-1}$
4. *Équivalence (ou* action de Steiniz*) :* $(GL_n(K) \times GL_m(K)) \times \mathcal{M}_{n,m}(K) \to \mathcal{M}_{n,m}(K)$, $((P, Q), A) \mapsto PAQ^{-1}$
5. *Congruence :* $GL_n(K) \times \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K)$, $(P, A) \to {}^tPAP$

Proposition 26 ([R] 184/185/ ?/195/207)**.** *Dans l'ordre de la proposition précédente, les orbites sont caractérisées par :*

1. *le noyau de* A
2. *l'image de* A
3. *les molynômes minimal et caractéristique de* A
4. *Ça dépend de* K*...*

Exemple 27. *$Diag(1, 2, 2)$ et $Diag(1, 1, 2)$ ont même polynôme minimal mais ne sont pas semblables : il faut donc bien les deux informations !*

C. Théorèmes de Sylow

Dans ce paragraphe, on se donne p premier, et on note $\operatorname{Card} G = p^\alpha m$, $m \wedge p = 1$.

Définition 28 ([U] 85)**.** *Un p-Sylow de G est un sous-groupe de G de cardinal p^α.*

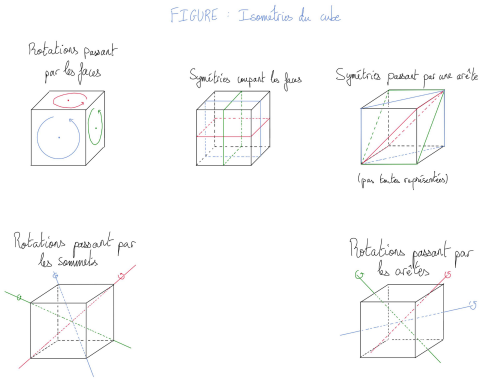
$\operatorname{Syl}_p(G)$ *désigne l'ensemble des p-Sylow de G, et* $n_p := \operatorname{Card}(\operatorname{Syl}_p(G))$.

Théorème 29 (de Sylow - [U] 87)**.** *Soit G un groupe d'ordre $p^\alpha m$, $m \wedge p = 1$. Alors,*

1. $\operatorname{Syl}_p(G) \neq$
2. *G agit transitivement sur* $\operatorname{Syl}_p(G)$ *par conjugaison*
3. $n_p \equiv 1\,[p]$

Définition 30. *On dit que G est* simple *si les seuls sous-groupes de G distingués (*i.e. *fixe par l'action par conjugaison de G) sont $\{1\}$ et G.*

Théorème 31 ([S] 277)**.** *Si G est simple et d'ordre 60, alors $G \cong \mathcal{A}_5$.*



Développements

— Développement 1 : Théorème 23
— Développement 2 : Théorème 31

Références

U *Théorie des groupes*, Félix Ulmer
R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
S *Algèbre pour la licence 3*, Szpirglas
C *Carnets de voyage en Algébrie*, Caldero

105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

I. Permutations d'un ensemble fini

A. Introduction

Définition 1 ([R] 37). *Soit E un ensemble. On note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des bijections de E dans E. On l'appelle* groupe symétrique *de E. On notera plus simplement $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. On appelle* permutation *de E un élément de $\mathfrak{S}(E)$.*

Proposition 2. *$\mathfrak{S}(E)$ est un groupe pour la composition, de neutre l'identité de E.*

Proposition 3 ([R] 39). *Si E et F sont deux ensembles équipotents, alors $\mathfrak{S}(E)$ et $\mathfrak{S}(F)$ sont isomorphes (en tant que groupes).*

Proposition 4 ([R] 39). *Pour $n \geq 3$, $\mathfrak{S}_3$ n'est pas commutatif.*

Dans toute la suite, on étudiera $\mathfrak{S}_n$ pour $n \geq 3$.

Proposition 5 ([R] 40). $\#\mathfrak{S}_n = n!$

Notation ([U] 41). *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On représentera σ par la matrice $2 \times n$:*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

B. Action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, conséquences

Proposition 6 ([U] 41). *$\mathfrak{S}_n$ agit naturellement sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ par $\sigma \cdot i = \sigma(i)$. Le morphisme associé est l'identité de $\mathfrak{S}_n$.*

Définition 7 ([U] 42). *On note* $\mathrm{Fix}(\sigma)$ *l'ensemble des points fixes de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Son complémentaire dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ est appelé* support *de σ, et est noté* $\mathrm{Supp}(\sigma)$.

Proposition 8 ([U] 43). *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Le sous-groupe $\langle \sigma \rangle$ agit sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ par restriction de l'action de $\mathfrak{S}_n$. Les orbites de cette action sont appelées σ-*orbites*. La réunion des σ-orbites ponctuelles est* $\mathrm{Fix}(\sigma)$. *Les σ-orbites non ponctuelles partitionnent* $\mathrm{Supp}(\sigma)$.

Exemple 9. *Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. On a* $\mathrm{Supp}(\sigma) = \{1, 2\} \sqcup \{4, 5\} = \langle \sigma \rangle \cdot \{1\} \sqcup \langle \sigma \rangle \cdot \{4\}$.

Définition 10 ([U] 43). *Un k-*cycle *($2 \leq k \leq n$) est une permutation n'ayant qu'une seule σ-orbite non ponctuelle $\{i_1, \ldots, i_k\}$. On la note $\sigma = (i_1, \ldots, i_k)$ pour signifier que $\forall j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$, $\sigma(j) = j$ et $\sigma(i_j) = i_{j+1}$ en regardant les indices modulo k.*

Un 2-cycle est appelé transposition.

Proposition 11 ([U] 43). $(i_1, i_2, \ldots, i_k) = (i_2, i_3, \ldots, i_k, i_1) = \cdots = (i_k, i_1, i_2, \ldots, i_{k-1})$

Proposition 12. *Un k-cycle est d'ordre k.*

C. Décomposition d'une permutation, conséquences

Proposition 13 ([U] 42). *Deux permutations à supports disjoints commutent.*

Théorème 14 ([U] 43). *Toute permutation se décompose de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme produit de cycles à supports disjoints.*

Algorithme 15 ([U] 43). *Pour trouver une telle décomposition, il suffit de trouver les r-orbites.*

1. *On calcule $\sigma(1), \sigma^2(1), \ldots$ justqu'à trouver $\sigma^{k_1}(1) = 1$ (NB : $k_1 \leq n$) ;*
2. *On pose $i_2 = \min \llbracket 1, n \rrbracket \setminus (\langle \sigma \rangle \cdot \{1\})$, et de même on calcule $\sigma(i_2), \sigma^2(i_2), \ldots$ jusqu'à trouver $\sigma^{k_2}(i_2) = i_2$;*
3. *On itère jusqu'à épuiser $\llbracket 1, n \rrbracket$.*

On a alors $\sigma = (1, \sigma(1), \ldots, \sigma^{k_1 - 1}(1)) \circ (i_2, \sigma(i_2), \ldots, \sigma^{k_2 - 1}(i_2)) \circ \cdots \circ (i_j, \sigma(i_j), \ldots, \sigma^{k_j - 1}(i_j))$

Exemple 16. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (1, 3, 4)(5, 6)$

Proposition 17 ([R] 44). $(i_1, \ldots, i_k) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \ldots (i_{k-1}, i_k)$

Corollaire 18 ([R] 44). *Les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$.*

Proposition 19 ([R] 45). $\mathfrak{S}_n = \langle (i, i+1),\ 1 \leq i \leq n \rangle = \langle (1, i),\ 2 \leq i \leq n \rangle = \langle (1, 2),\ (1, 2, \ldots, n) \rangle$

Définition 20 ([U] 45). *On appelle* type *de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ la liste croissante des cardinaux des σ-orbites.*

Exemple 21. *Le type de $(1, 2, 5)(3, 4)(7, 8) \in \mathfrak{S}_8$ est la liste $[1, 2, 2, 3]$.*

Proposition 22 ([U] 46). *Deux permutations sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$ si, et seulement si, elles ont le même type. Cela décrit donc les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$.*

Proposition 23 ([U] 45). *Si σ est du type $[l_1, \ldots, l_k]$, alors* $\mathrm{ord}(\sigma) = l_1 \vee \cdots \vee l_k$.

D. Signature dune permutation, groupe alterné

Proposition 24 ([R] 47). *Il existe un unique morphisme $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$ qui envoie les transpositions sur -1. On appelle* signature *de σ la quantité $\varepsilon(\sigma)$.*

Corollaire 25. *La signature d'un k-cycle est $(-1)^{k+1}$.*

Proposition 26 ([R] 48). $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

En particulier, la signature mesure le nombre d'inversions.

Définition 27 ([R] 48). *On appelle n-*ième groupe alterné *le sous-groupe $\mathcal{A}_n = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$. C'est l'ensemble des permutations dîtes* paires.

Exemple 28. $\mathcal{A}_3 = \{\mathrm{id},\ (1, 2, 3),\ (1, 3, 2)\}$.

Proposition 29. $\#\mathcal{A}_n = \frac{n!}{2}$

Théorème 30 ([R] 49). *Pour $n \geq 3$, les 3-cycles engendrent $\mathcal{A}_n$, et y sont conjugués.*

Théorème 31 ([R] 50). *Pour $n \geq 5$, $\mathcal{A}_n$ n'admet pas de sous-groupe distingué non trivial.*

II. Quelques applications du groupe symétrique

A. En géométrie : les isométries des polytopes

Théorème 32 ([R] 94). *L'ensemble des isométries du plan conservant un triangle équilatéral est un groupe isomorphe à* $\mathfrak{S}_3$.

Proposition 33 ([R] 82). *Soit* $\mathcal{C}$ *un cube. L'ensemble des isométries de l'espace conservant* $\mathcal{C}$ *est un groupe, noté* $\mathrm{Is}(\mathcal{C})$. *On note* $\mathrm{Is}^+(\mathcal{C})$ *le sous-groupe de* $\mathrm{Is}(\mathcal{C})$ *formé des rotations.*

Théorème 34 ([R] 85). $\mathrm{Is}^+(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4$ *et* $\mathrm{Is}(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Théorème 35 ([R] 95). *En notant* $\mathcal{T}$ *le tétraèdre régulier, on a :* $\mathrm{Is}(\mathcal{T}) \cong \mathfrak{S}_4$ *et* $\mathrm{Is}^+(\mathcal{T}) \cong \mathcal{A}_4$.

Chez les (actions de) groupes

Théorème 36 (de Cayley - [R] 53). *Tout groupe fini d'ordre* n *est isomorphe à un sous-groupe de* $\mathfrak{S}_n$.

Proposition 37. *Comme pout tout corps (commutatif)* K, $\mathfrak{S}_n \circlearrowleft GL_n(K)$, *tout groupe de garde* n *est isomorphe à un sous-groupe de* $GL_n(K)$.

Exemple 38. *Soit* $D_{2\times 4}$ *le groupe des isométries du carré. Comme* $\#D_{2\times 4} = 8$, $D_{2\times 4}$ *est isomorphe à un sous-groupe de* $\mathfrak{S}_8$. *Noton* φ *un tel isomorphisme. Comme* $D_{2\times 4} = \langle r, s\rangle$ *où* $\mathrm{ord}(r) = 4$, $\mathrm{ord}(s) = 2$ *et* $\mathrm{ord}(rs) = 2$, *on a* $\varepsilon \circ \varphi(s) = \varepsilon \circ \varphi(rs) = -1$, *donc* $\varepsilon \circ \varphi(r) = 1$.

C. Polynômes symétriques

Définition 39 ([R] 55). *Un* polynôme symétrique *est un polynôme* $P \in K[X_1, \dots, X_n]$ *tel que* $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = P(X_1, \dots, X_n)$.

Définition 40 ([R] 55). *Les* polynômes symétriques élémentaires *sont les*

$$\Sigma_{k,n} = \sum_{1\le i_1\le\dots\le i_k\le n} X_{i_1}\dots X_{i_k} \in K[X_1, \dots, X_n]$$

Théorème 41 (ADMIS - [R] 55). *Pour tout polynôme symétrique* $P \in K[X_1, \dots, X_n]$, *il existe un unique polynôme* $Q \in K[X_1, \dots, X_n]$ *tel que* $P(X_1, \dots, X_n) = Q(\Sigma_{1,n}, \dots, \Sigma_{n,n})$.

D. En algèbre (multi-)linéaire

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E.

Définition 42 ([R] 545). *Une* forme k-linéaire *sur* E *est une application* $\varphi : E^k \to \mathbb{K}$ *telle que pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, *pour tout* $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_k)$ *est linéaire.*

On note $\bigotimes^k E^*$ *l'ensemble des formes* k*-linéaires sur* E.

Proposition 43 ([R] 546). $\left(e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*\right)_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}$ *est une base de* $\bigotimes^k E^*$, *où pour* $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*(x_1, \dots, x_k) = e_{i_1}^*(x_1)\dots e_{i_k}^*(x_k)$.

Définition 44 ([R] 546). *Une forme* k*-linéaire* alternée *est une forme* k*-linéaire* $\varphi \in \bigotimes^k E^*$ *telle que* $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$, $\forall (x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1, \dots, x_k)$.

On note $\bigwedge^k E^*$ *l'espace des formes* k*-linéaires alternées sur* E.

Proposition 45. $\left(e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*\right)_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}$ *est une base de* $\bigwedge^k E^*$, *où pour* $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) e_{i_1}^*(x_{\sigma(1)})\dots e_{i_k}^*(x_{\sigma(k)})$.

Corollaire 46. *On a* $\dim\left(\bigwedge^k E^*\right) = \binom{n}{k}$.

Définition 47. *On appelle* déterminant dans la base $\mathcal{B}$ *l'unique forme* n*-linéaire alternée* $\det_{\mathcal{B}}$ *sur* E *vérifiant* $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$. *(La fammille* $(\det_{\mathcal{B}})$ *est une base de* $\bigwedge^n E^*$.*)*

Proposition 48 ([R] 547). $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) e_1^*(x_{\sigma(1)})\dots e_n^*(x_{\sigma(n)})$.

E. Résultats en probabilités

Définition 49 ([R] 51). *On appelle* dérangement *une permutation sans point fixes.*

Proposition 50. *Notons* d_n *le nombre de dérangements de* $[\![1, n]\!]$. *Alors* $d_n = n!\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. *En particulier, la probabilité de choisir un dérangement en tiant au hasard une permutation de* $[\![1, n]\!]$ *tend vers* $\frac{1}{e}$ *quand* $n \to +\infty$.

Proposition 51 ([C]). *Soit* X *la variable aléatoire qui compte le nombre de points fixes d'une permutation aléatoirement choisie dans* $\mathfrak{S}_n$. *Alors* $\mathbb{E}[X] = \mathbb{V}[X] = 1$.

F. Groupes simples d'ordre 60

Dans ce paragraphe, on se donne p premier, et on note $\#G = p^\alpha m$, $m \wedge p = 1$.

Définition 52 ([U] 85). *Un* p-Sylow *de* G *est un sous-groupe de* G *de cardinal* p^α.

Notation. $\mathrm{Syl}_p(G)$ *désigne l'ensemble des* p*-Sylow de* G, *et* $n_p = \#\mathrm{Syl}_p(G)$.

Théorème 53 (de Sylow - [U] 87). *Soit* G *un groupe d'ordre* $p^\alpha m$, p *premier et* $m \wedge p = 1$.

1. $\mathrm{Syl}_p(G) \neq \emptyset$
2. G *agit transitivement sur* $\mathrm{Syl}_p(G)$ *par conjugaison*
3. $n_p \equiv 1\,[p]$ *(donc* $n_p \mid m$*).*

Définition 54. *On dit que* G *est* simple *si les seuls sous-groupes de* G *distingués (*i.e. *fixe par l'action par conjugaison de* G*) sont* $\{1\}$ *et* G.

Théorème 55 ([S] - 277). *Si* G *est simple et d'ordre* 60, *alors* $G \cong \mathcal{A}_5$.

Développements

— Développement 1 : Théorème 34
— Développement 2 : Théorème 55

Références

R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition

U *Théorie des groupes*, Félix Ulmer

S *Algèbre pour la licence 3*, Szpirglas

C *Carnets de voyage en Algébrie*, Caldero

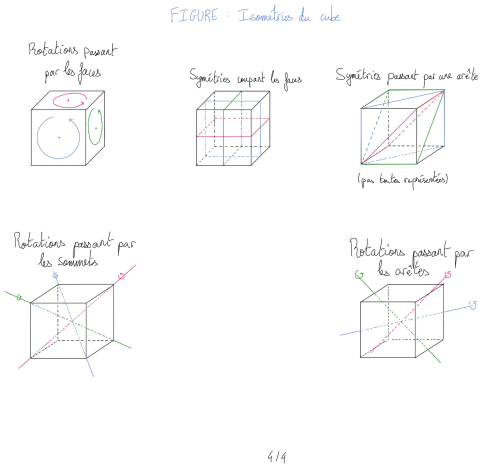


FIGURE 1.1 – Isométries du cube

106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications

Dans cette leçon, K est un corps commutatif, et E est un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

I. Endomorphismes inversibles d'un espace vectoriel

A. Introduction au groupe linéaire

Théorème 1 ([Rb] 139). — *L'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E est un anneau pour $+$ et $\circ$, dont le groupe des inversibles est noté $GL(E)$, et est appelé* groupe linéaire *de E.*

— *Similairement, l'ensemble $\mathcal{M}_n(K)$ des matrices carrées de taille $n \times n$ est un anneau pour $+$ et $\times$, dont le groupe des inversibles est noté $GL_n(K)$, appelé* groupe linéaire d'ordre n sur K.

Remarque 2 ([Rb] 140). *Étant donnée une base $\mathcal{B}$, l'application $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ induit un isomorphisme entre $GL(E)$ et $GL_n(K)$.*

Définition 3 ([Rb] 141). *On note $SL(E)$ (resp. $SL_n(K)$) le noyau du morphisme* det *de $GL(E)$ (resp. $GL_n(K)$) dans $K^\times$. On l'appelle* groupe spécial linéaire de E *(resp.* groupe spécial linéaire d'ordre n sur K*).*

Théorème 4 ([Rb] 140). *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Comme $\dim E < +\infty$, sont équivalentes :*

1. $u \in GL(E)$
2. *(a) u est injectif*
   (b) $\mathrm{Ker}\, u = \{0\}$
   (c) $\exists v \in \mathcal{L}(E) : v \circ u = \mathrm{id}_E$
3. *(a) u est surjectif*
   (b) $\mathrm{Im}\, u = E$
   (c) $\exists v \in \mathcal{L}(E) : u \circ v = \mathrm{id}_E$
4. *L'image par u d'une base de E est une base de E*
5. $\det(u) \neq 0$

Remarque 5. *Un matrice A est inversible si, et seulement si, ses colonnes forment une base de K^n, et si, et seulement si, ses lignes forment une base de K^n.*

Définition 6. *On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est une* homothétie de rapport $\lambda \in K^\times$ *si $\forall x \in E$, $u(x) = \lambda x$.*

Proposition 7. *Une homothétie de rapport $\lambda \in K^\times$ est inversible, d'inverse l'homothétie de rapport $1/\lambda$.*

Proposition 8 ([Rb] e168). *Les homothéties sont les seuls endomorphismes à stabiliser toute droite.*

B. Opérations élémentaires

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On note $L_1, \dots, L_p$ les lignes de A, et $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes.

Définition 9 ([Bu] 315-317). *Soient $\alpha \in K^\times$, $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On définit les matrices suivantes :*

— *Matrice de* dilatation $D_i(\alpha) = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \alpha, 1, \dots, 1) \in GL_n(K)$ *(α est à la i-ième position)*

— *Matrice de* transvection $T_{i,j}(\alpha) = I_n + \alpha E_{i,j} \in GL_n(K)$

— *Matrice de* permutation $P_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in GL_n(K)$

Définition 10. *On définit les* opérations élémentaires *sur les colonnes :*

— $C_i \longleftarrow \alpha C_i$ *: on remplace C_i par αC_i*

— $C_i \longleftarrow C_i + \alpha C_j$ *: on remplace C_i par $\alpha C_i + \alpha C_j$*

— $C_i \longleftrightarrow C_j$ *: on échange C_i et C_j*

Théorème 11 ([Bu] 315-318). *On a les correspondances suivantes entre opérations élémentaires et multiplication matricielle :*

— $D_i(\alpha)A \iff L_i \longleftarrow \alpha L_i$

— $T_{i,j}(\alpha)A \iff L_i \longleftarrow L_i \alpha L_j$

— $P_{(i,j)}A \iff L_i \longleftrightarrow L_j$

et

— $AD_i(\alpha) \iff C_i \longleftarrow \alpha C_i$

— $AT_{i,j}(\alpha) \iff C_i \longleftarrow C_i \alpha C_j$

— $AP_{(i,j)} \iff C_i \longleftrightarrow C_j$

Proposition 12. *$\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes injectif de $\mathfrak{S}_n$ dans $GL_n(K)$.*

II. Structure de $GL(E)$, sous-groupe orthogonal

A. Structure de groupe

Théorème 13 (Pivot de Gauss - [Rb] 191). *Pour toute matrice de rang r, il existe une suite d'opérations élémentaires qui transforme cette matrice en la matrice $J_{n,r} = \mathrm{diag}(I_r, O_{n-r})$. Plus précisément, si $\mathrm{rg}\, A = n$, alors il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et des matrices de transvection $T_1, \dots, T_p$ telles que $A = P_\sigma T_1 \dots T_p D_\alpha$ où D_α est la matrice de dilatation D_α de rapport $\alpha = \det A$.*

Corollaire 14 ([Rb] 154, 153). — *Les matrices de transvection et de dilatation engendrent $GL_n(K)$;*

— *Les matrices de transvection engendrent $SL_n(K)$.*

Corollaire 15 ([Rb] 141). $GL(E)/SL(E) \cong K^\times$

Corollaire 16 ([Rb] 141). — *$Z(GL(E)) = K^\times \mathrm{id}_E$ (c'est l'ensemble des homothéties) ;*

— $Z(SL(E)) = \mathbb{U}_n(K)\, \mathrm{id}_E$, *où* $\mathbb{U}_n(K) \{\lambda \in K^\times \mid \lambda^n = 1\}$.

B. Le groupe spécial orthogonal

Soit q une forme quadratique sur E, de forme polaire φ. Supposons $\mathrm{car}\, K \neq 2$.

Définition 17 ([P] 123-124). — *Le* groupe orthogonal *de (E,q) est $O(q) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid q \circ u = q\}$*

— *Le* groupe spécial orthogonal *de* (E,q) *est* $SO(q) = \{u \in O(q) \mid \det u = 1\}$

— *Lorsque* φ *est le produit scalaire canonique relativement à une base donnée, on note* $O(E) = O(q) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid {}^t u \circ u = \mathrm{id}_E\}$ *et* $SO(E) = SO(q) = \{u \in O(E) \mid \det u = 1\}$.

— *On note également* $O_n(K) = \{M \in \mathcal{M}_n(K) \mid {}^t MM = I_n\}$ *et* $SO_n(K)\{M \in O_n(K) \mid \det M = 1\}$.

Proposition 18 ([Rb] 722)**.** *Si* $\mathcal{B}$ *est une base orthonormale de* E*, alors* $u \in O(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(K)$.

Théorème 19 (de réduction des isométries - [Rb] 727)**.** *Soit* $u \in O(\mathbb{R}^n)$*. Il existe une base orthonormale* $\mathcal{B}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *telle que* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(R(\theta_1), \dots, R(\theta_r), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ *où* $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$ *et* $\varepsilon_i = \pm 1$.

Remarque 20 ([P] 146)**.** $SO_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Théorème 21 ([C] 50)**.** *Soient* p *premier,* $r \geq 1$ *et* $q = p^r$.

$$SO_2(\mathbb{F}_q) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} & \text{si } -1 \text{ est un carré mod } q \\ \mathbb{Z}/(q+1)\mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 22 ([P] 125)**.** *Soit* $u \in O(q)$ *telle que* $u^2 = \mathrm{id}_E$.

On dit que u *est une* réflexion *si* $\dim(\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}_E)) = 1$, i.e. *si* u *est une symétrie par rapport à un hyperplan.*

On dit que u *est une* renversement *si* $\dim(\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}_E)) = 2$, i.e. *si* u *est une symétrie par rapport à un plan.*

On suppose désormais que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et que q est définie positive.

Théorème 23 ([P] 143)**.** *Tout élément de* $O(q)$ *est produit d'au plus* n *réflexions.*

Lemme 24. *Si* $n \geq 3$*, alors pour toutes réflexions* τ_1 *et* τ_2*, il existe deux renversements* σ_1 *et* σ_2 *tels que* $\tau_1\tau_2 = \sigma_1\sigma_2$.

Théorème 25. *Pour* $n \geq 3$*, tout élément de* $SO(q)$ *est produit d'au plus* n *renversements.*

Remarque 26. *Ces théorèmes restent vrais si* E *est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps* K *de caractéristique* $\neq 2$*, et si* q *est non dégénérée (Cartan, Dieudonné).*

III. Topologie dans $GL(E)$

Dans ce paragraphe, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Proposition 27 ([Rb] 160-161)**.** $GL(E)$ *est ouvert dans* $(\mathcal{L}(E), |||\cdot|||)$ *et* $u \mapsto u^{-1}$ *est continue.*

Proposition 28. — $GL_n(\mathbb{C})$ *et* $SL_n(K)$ *sont connexes ;*

— $GL_n(\mathbb{R})$ *a deux composantes connexes.*

Proposition 29. $O_n(\mathbb{R})$ *et* $SO_n(\mathbb{R})$ *sont compacts.*

Théorème 30 (Décomposition polaire - [Rb] 740)**.**

$$\begin{aligned} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) &\to GL_n(\mathbb{R}) \\ (H, S) &\mapsto HS \end{aligned}$$

est un homéomorphisme.

Développements

— Développement 1 : Théorème 21

— Développement 2 : Théorème 23, Lemme 24 et Théorème 25

Références

Rb *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition

P *Cours d'algèbre*, Perrin

B *Algèbre et géométrie : CAPES et Agrégation*, Pierre Burg

C *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et géométries*, P. Caldero, J. Germoni

120 : Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

Dans toute la leçon, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et p est un nombre premier.

I. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

A. Rappels d'arithmétique des entiers

Théorème 1 (division euclidienne - [R] 279). $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2$, $\exists ! (q,r) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < |b| \end{cases}$$

Définition 2 ([R] 279). *Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. On dit que a est* congru à b *modulo n, et on note $a \equiv b\,[n]$ si n divise $b-a$.*

Proposition 3 ([R] 280). *Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $a \equiv b\,[n]$ et $c \equiv d\,[n]$. Alors $a+c \equiv b+d\,[n]$ et $ac \equiv bd\,[n]$.*

B. Construction

Lemme 4. *Tout idéal de $\mathbb{Z}$ est principal, et admet un unique générateur positif.*

Définition 5 ([R] 280). *Le quotient de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ par son idéal $n\mathbb{Z}$ est l'anneau noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On note $\overline{a}$ l'image de $a \in \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Remarque 6. $\overline{a} = \overline{b} \iff a \equiv b\,[n]$

Proposition 7 ([R] 280). $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\right\}$, *et les lois sont données par Prop 3 et Rq 6.*

Exemple 8. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\right\} = \left\{\overline{9}, \overline{64}, \overline{-7}\right\}$, *et on a* $\overline{1} + \overline{2} = \overline{1+2} = \overline{3} = \overline{0}$, *mais aussi* $\overline{1} \times \overline{2} = \overline{1 \times 2} = \overline{2}$.

C. Structure d'anneau

Proposition 9 ([R] 283). *L'ensemble des inversibles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est :*

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid k \wedge n = 1\right\}$$

L'ensemble des diviseurs de O de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est :

$$D_0(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \left[(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \cup \{0\}\right]$$

Exemple 10. $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times = \left\{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\right\}$, *et* $D_0(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \left\{\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\right\}$.

Proposition 11 ([R] 241 et 281). *Les idéaux propres de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $d \mid n$, $d \notin \{1, n\}$. De plus, $(d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \cong \left(\mathbb{Z}/\frac{n}{d}\mathbb{Z}, +\right)$.*

Corollaire 12. *$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est principal.*

Corollaire 13. *L'ensemble des générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.*

Exemple 14. *Les idéaux propres de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sont $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, respectivement isomorphes à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Proposition 15 ([R] 295-282). $\forall n, m \geq 2$,

$$\mathrm{Hom}_{gr}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(n \wedge m)\mathbb{Z},$$

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times,$$

$$\mathrm{Hom}_{Ann}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \{k \bmod n \mapsto k \bmod m\} & \text{si } m \mid n \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

D. Le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Théorème 16. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ;*
2. *$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre ;*
3. *n est premier.*

Corollaire 17 ([R] 292). $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$.

Contre-exemple 18. *C'est très faux pour n non premier ! $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times = \left\{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\right\}$ n'a même pas 7 éléments !*

II. Structure de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

A. Préambule : le théorème des restes chinois

Théorème 19 (des restes chinois - [R] 285). *Soit $(a_1, \ldots, a_d) \in (\mathbb{N} \setminus \{0,1\})^d$. Les entiers, $a_1, \ldots, a_d$ sont deux à deux premiers si, et seulement si, les anneaux $\mathbb{Z}/a_1 \ldots a_d\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_d\mathbb{Z}$ sont isomorphes.*
Le cas échéant, il existe $(u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\sum_{i=1}^d a_i b_i = 1$, où $b_i = \frac{a_1 \ldots a_d}{a_i}$. L'application :

$$\begin{aligned} \overline{\varphi} : \mathbb{Z}/a_1 \ldots a_d\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_d\mathbb{Z} \\ x \bmod a_1 \ldots a_d &\mapsto (x \bmod a_1, \ldots, x \bmod a_d) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'anneaux, de réciproque :

$$\overline{\varphi}^{-1} : (x_1 \bmod a_1, \ldots, x_d \bmod a_d) \mapsto \sum_{i=1}^d x_i a_i b_i \bmod a_1 \ldots a_d$$

B. Fonction indicatrice d'Euler

Définition 20 ([R] 283). L'indicatrice d'Euler *est :* $\varphi : n \mapsto \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \#\{k \in [\![1, n]\!] \mid k \wedge n = 1\}$.

Exemple 21. $\varphi(8) = 4$ *d'après Exemple 10.*

Proposition 22 ([R] 288). *Si $a \wedge b = 1$, alors $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$.*

Corollaire 23 ([R] 288). *Si $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ est la décomposition de n en produit de facteurs premiers, alors :*

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^r p^{\alpha_i - 1}(p-1) = n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Exemple 24. $\varphi(90) = \varphi(3^2)\varphi(2)\varphi(5) = 3(3-1)(2-1)(5-1) = 24$

Théorème 25 (d'Euler - [R] 283). *Si $a \wedge n = 1$, alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1\,[n]$.*

Théorème 26 (de Fermat - [R] 284). *Si $a \wedge p = 1$, alors $a^{p-1} = 1\,[p]$. De manière générale, $a^p \equiv a\,[p]$.*

Proposition 27 ([R] 284).

$$n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$$

Théorème 28 ([R] 292). *Si $p \geq 3$, alors $\forall \alpha \geq 1$, $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.*

Théorème 29 (ADMIS - [R] 294). *$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est cyclique si, et seulement si, $n \in \{2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha\}$ avec $p \geq 3$ (premier) et $\alpha \geq 1$.*

III. Applications

A. Résolution de systèmes de congruence

Théorème 30 ([R] 290). *L'équation $ax \equiv b\,[n]$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$ admet des solutions si, et seulement si, $a \wedge n \mid b$.*

Le cas échéant, $S(ax \equiv b\,[n]) = \frac{b}{a\wedge n}x_0 + \frac{n}{a\wedge n}\mathbb{Z}$, où x_0 est une solution particulière de l'équation.

Remarque 31. *Le théorème des restes chinois permet de résoudre des systèmes de congruences.*

Exemple 32 ([R] 291). $S\left(\begin{cases} x \equiv 2\,[4] \\ x \equiv 3\,[5] \\ x \equiv 1\,[9] \end{cases}\right) = 118 + 180\mathbb{Z}$

Remarque 33 ([R] 291). $S\left(\begin{cases} x \equiv x_1\,[a_1] \\ x \equiv x_2\,[a_2] \end{cases}\right) =$

$$\begin{cases} \emptyset & \text{si } a_1 \wedge a_2 \nmid x_1 - x_2 \\ x_0 + (a_1 \vee a_2)\mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}$$

B. Carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Soit $c : \overline{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mapsto \overline{x}^2$. On s'intéresse à $\operatorname{Im} c$.

Proposition 34. *Tous les éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont des carrés.*

On supposera désormais $p \geq 3$.

Proposition 35 ([R] 426). *Soit $l : \overline{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mapsto \overline{x}^{\frac{p-1}{2}}$.*

- $\forall \overline{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $c \circ l(\overline{x}) = l \circ c(\overline{x}) = \overline{1}$
- $\operatorname{Ker} c = \operatorname{Im} l = \{\pm 1\}$ *et* $\operatorname{Im} c = \operatorname{Ker} l$.

Corollaire 36. *Il y a $\frac{p+1}{2}$ carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

Théorème 37 (de Wilson - [R] 325). *n est premier $\iff$ $(n-1)! \equiv -1\,[n]$*

Proposition 38 ([P] 75). *-1 est un carré modulo p si, et seulement si, $p \equiv 1\,[4]$. Le cas échéant $-1 \equiv (2 \times 3 \times \cdots \times \frac{p-1}{2})^2\,[p]$.*

Théorème 39 (des deux carrés de Fermat - [P] 56). *p s'écrit comme somme de deux carrés d'entiers si, et seulement si, $p = 2$ ou $p \equiv 1\,[4]$.*

C. Algorithme de chiffrement RSA

Algorithme 40 ([G] 37). *Alice veut envoyer à Bob un message représenté par un nombre entier m, en tout sécurité.*

- *Bob choisit en secret deux nombres premiers distincts p et q et calcule leur produit $n = pq$.*
- *Il choisit ensuite un entier $c < \varphi(n) = (p-1)(q-1)$ premier à $\varphi(n)$.*
- *Il trouve ensuite un entier d tel que $cd \equiv 1\,[\varphi(n)]$.*
- *La clé publique de Bob est (n, c), qu'il donne à Alice, et sa clé privée est (n, d), qu'il garde secrète.*
- *Alice envoie à Bob le message m^c mod n.*
- *Pour décoder le message, Bob calcule $(m^c)^d \equiv m\,[n]$.*

Développements

- Développement 1 : Théorème 19 (restes chinois) et exemple 32
- Développement 2 : Théorème 28 (cyclicité des inversibles de $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$)

Références

Rb *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition

P *Cours d'algèbre*, Perrin

G *Les maths en tête - Algèbre et probabilités*, Xavier Gourdon, 3e édition

121 : Nombres premiers. Applications.

Pour un entier n, $\mathrm{Div}(n)$ désigne l'ensemble des diviseurs positifs de n.

I. Résultats fondamentaux sur les nombres premiers

A. Notion de nombre premier, propriétés élémentaires

Définition 1 ([R] 303). *On dit que $p \in \mathbb{N}$ est* premier *si* $\mathrm{Div}(p) = \{1, p\}$. *On dit que n est* composé *si $n \neq 0$ et si* $\exists a \in \mathbb{N} \setminus \{1, n\} : a \mid n$.

Dans la suite, $\mathcal{P}$ désignera l'ensemble des nombres premiers.

Lemme 2 (d'Euclide). $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2$, $\forall p \in \mathcal{P}$, $p \mid ab \implies (p \mid a)$ *ou* $(p \mid b)$.

Lemme 3 ([R] 303). $\forall n \geq 2, \exists p \in \mathcal{P} : p \mid n$

Proposition 4 ([R] 304). *Tout entier composé n admet un facteur premier entre 2 et $\sqrt{n}$.*

Théorème 5 (fondamental de l'Arithmétique - [R] 306). $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! \left(v_p(n)\right)_{p \in \mathcal{P}} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}}$:

$$n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}$$

Cette écriture est appelée "(la) décomposition en produit de facteurs premieres de n".

Définition 6 ([R] 306). *Dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n, l'entier $v_p(n)$ $(p \in \mathcal{P})$ est appelé* valuation p-adique de n.

Proposition 7 ([R] 307). $\forall (a, b) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2, a \mid b \iff \forall p \in \mathcal{P}, v_p(a) \leq v_p(b)$

Proposition 8 ([R] 319). $\forall (a, b) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2, v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$

Proposition 9 ([R] 307). $\forall (a, b) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$, $\forall p \in \mathcal{P}$,

$$v_p(a \vee b) = \max(v_p(a), v_p(b))$$
$$v_p(a \wedge b) = \min(v_p(a), v_p(b))$$

B. Répartition des nombres premiers

Théorème 10 (Euclide - [R] 305). *Il existe une infinité de nombres premiers.*

Théorème 11 (de la progression arithmétique, Dirichlet, ADMIS). *Pour tout $(a, b) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$ tel que $a \wedge b = 1$, il existe une infinité de nombres premiers congrus à a modulo b.*

Conjecture 12 (des nombres premiers jumaux). *Il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p+2$ est premier.*

Proposition 13. *Il existe des intervalles de longueur arbitrairement grande ne contenant aucun nombre premier.*

Théorème 14 (Bertrand - ADMIS - [R] 325). *Il existe toujours un nombre premier compris entre n'importe quel entier naturel non nul et son double.*

Théorème 15 (des nombres premiers - ADMIS - [R] 308).

$$\#\mathcal{P} \cap [\![1, n]\!] \sim_{x \to +\infty} \frac{n}{\ln n}$$

II. Tests de primalité

Proposition 16 (Crible d'Ératosthène - ANNEXE). *Le procédé suivant permet de trouver la liste croissante des nombres premiers : on part de la liste des entiers plus grands que 2. À chaque itération, on garde le plus petit nombre, et on supprime tous ses multiples.*

Proposition 17. *n est premier si, et seulement si, $\forall d \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, $d \nmid n$. La complexité au pire de ce test est donc en $O(\sqrt{n})$.*

Théorème 18 (de Fermat). *Si p est premier, alors* $\forall a \in \mathbb{N}$, $a \wedge p = 1 \implies a^{p-1} \equiv 1 \, [p]$.

Remarque 19. *On en déduit donc un test de non primalité.*

Définition 20 ([R] 329). *Un nombre n composé satisfaisant le test du théorème de Fermat est appelé* nombre de Carmichaël.

Exemple 21 ([R] 329). 561 *est un nombre de Carmichaël.*

Théorème 22 (de Korselt - [R] 330). *n est un nombre de Carmichaël si, et seulement si, pour tout diviseur premier p de n, $(p-1) \mid (n-1)$ et $p^2 \nmid n$.*

Théorème 23 (de Wilson - [R] 326). *n est premier si, et seulement si, $(n-1)! \equiv -1 \, [n]$. C'est un test de primalité qui requiert $n-1$ multiplications dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

III. Applications des nombres premiers

A. Fonctions spéciales

Définition 24 ([R] 283). L'indicatrice d'Euler *est :* $\varphi : n \mapsto \#\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^\times = \#\left\{k \in [\![1, n]\!] \mid k \wedge n = 1\right\}$.

Proposition 25 ([R] 288). $\forall (a, b) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$, *$a \wedge b = 1$, alors* $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$.

Corollaire 26 ([R] 288). $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi(n) = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ v_p(n) \geq 1}} p^{v_p(n)-1}(p-1) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ v_p(n) \geq 1}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Définition 27. *La* fonction ζ de Riemann *est définie par :*

$$\zeta : \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 1\} \to \mathbb{C}$$
$$s \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Proposition 28 ([KG] 461). *On a :*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

Cette écriture est appelé "produit eulérien".

Théorème 29 ([KG] 461, [R] 343). $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p} = +\infty$

Définition 30 ([R] 331). *La* fonction de Moëbius *est définie par :*

$$\mu : n \in \mathbb{N}^* \mapsto \begin{cases} 1 & si\ n = 1 \\ (-1)^r & si\ n = p_1 \dots p_r,\ avec\ p_1, \dots, p_r\ distincts \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Théorème 31 (Cesàro - ADMIS [R] 334). *La probabilité de choisir au hasard $r \geq 2$ entiers entre 1 et n qui sont premiers entre eux vaut $\frac{1}{\zeta(r)}$.*

B. Algorithme de chiffrement RSA

Théorème 32 (d'Euler - [R] 283). $\forall (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, *si* $a \wedge n = 1$, *alors* $a^{\varphi(n)} \equiv 1\,[n]$.

De la complexité des tests de primalité découle la grande difficulté de la recherche de la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier donné. Ce principe est à la base de la sécurité de l'algorithme de chiffrement RSA, détaillé ci-dessous :

Algorithme 33 ([G] 37). *Alice veut envoyer à Bob un message représenté par un nombre entier m, en tout sécurité.*

- *Bob choisit en secret deux nombres premiers distincts p et q et calcule leur produit $n = pq$.*
- *Il choisit ensuite un entier $c < \varphi(n) = (p-1)(q-1)$ premier à $\varphi(n)$.*
- *Il trouve ensuite un entier d tel que $cd \equiv 1\,[\varphi(n)]$.*
- *La clé publique de Bob est (n, c), qu'il donne à Alice, et sa clé privée est (n, d), qu'il garde secrète.*
- *Alice envoie à Bob le message m^c mod n.*
- *Pour décoder le message, Bob calcule $(m^c)^d \equiv m\,[n]$.*

C. Corps finis

Définition 34 ([R] 415). *La* caractéristique *d'un anneau A est l'unique générateur positif du noyau du morphisme $\varphi : \mathbb{Z} \to A$, $n \mapsto n1_A$.*

Lemme 35 ([R] 415). *La caractéristique d'un corps est nulle ou première.*

Exemple 36. *$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps de caractéristique p.*

Théorème 37 ([R] 421). *Il existe un corps fini de cardinal q si, et seulement si, q est une puissance d'un nombre premier. Le cas échéant, un tel corps est unique à isomorphisme près, et on note $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments. Par ailleurs, $p = \operatorname{car} \mathbb{F}_q$ est un nombre premier, et q est une puissance de p.*

D. Le théorème des deux carrés de Fermat

Lemme 38 ([P] 75). *-1 est un carré dans $\mathbb{F}_p$ si, et seulement si, $p \equiv 1\,[4]$.*

Théorème 39 (des deux carrés de Fermat - [P] 56). *Soit $E = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \exists (a,b) \in \mathbb{N}^2 : n = a^2 + b^2\}$ Alors, $n \in E \iff \forall p \in \mathcal{P},\ p \equiv 3\,[4] \implies v_p(n)$ est pair.*

E. En théorie des groupes

Définition 40 ([R] 22). *Un p-groupe est un groupe de cardinal une puissance de p.*

Proposition 41 ([R] 22). *Si un p-groupe G agit sur un ensemble fini X, alors $\#X \equiv \#X^G\,[p]$ où X^G est l'ensemble des éléments de X fixes par l'action de G.*

Corollaire 42 ([R] 23). *Le centre d'un p-groupe n'est pas trivial.*

Définition 43 ([U] 85). *Soit G un groupe fini de cardinal $p^\alpha m$, $m \wedge p = 1$. Un p-Sylow de G est un sous-p-groupe de G de cardinal p^α.*

Théorème 44 (de Sylow - ADMIS [U] 87). *Soit G un groupe d'ordre $p^\alpha m$, $m \wedge p = 1$. Alors,*

1. $\operatorname{Syl}_p(G) \neq$
2. *G agit transitivement sur $\operatorname{Syl}_p(G)$ par conjugaison*
3. $n_p \equiv 1\,[p]$

Théorème 45 ([R] 292). *Si $p \geq 3$, alors $\forall \alpha \geq 1$, $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.*

Proposition 46 ([R] 23). *Tout groupe d'ordre p^2 est abélien.*

Développements

- Développement 1 : Lemme 38, et théorème 39
- Développement 2 : Théorème 45 (cyclicité des inversibles de $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$)

Références

Rb *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition

U *Théorie des groupes*, Félix Ulmer

G *Les maths en tête - Algèbre et probabilités*, Xavier Gourdon, 3e édition

KG *De l'intégration aux probabilités*, Olivier Garet, Aline Kurtzmann, 2e édition augmentée

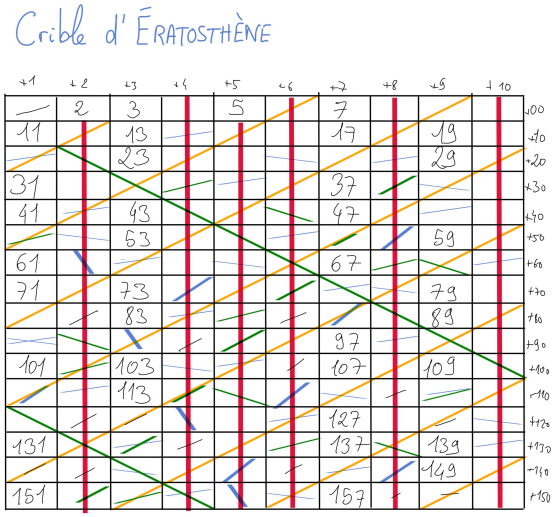


FIGURE 1.2 – Crible d'Eratosthène

123 : Corps finis. Applications.

I. Des corps finis

A. Prérequis sur les extensions de corps

Soit $L/M/K$ une tour d'extensions de corps (commutatifs).

Proposition/Définition 1 ([P] 65). *L est un K-espace vectoriel, sa dimension est appelée* degré de L/K, *et est notée* $[L:K]$.

Théorème 2 (de la base téléscopique - [P] 65). *Soient $(e_i)_{i\in I}$ une base K-base de M et $(f_j)_{j\in K}$ une M-base de L, alors $(e_i f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une K-base de L. En particulier, $[L:K] = [L:M]\times[M:K]$ (dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$).*

Définition 3 ([P] 70). *Soit $P\in K[X]$ non constant. Supposons P irréductible sur K. On dit que L est un* corps de rupture *(CDR) de P sur K s'il existe $\alpha\in L$ tel que $P(\alpha)=0$ et $L=K(\alpha)$.*

On dit que L est un corps de décomposition *(CDD) de P sur K s'il existe $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in L^n$ tel que $L=K(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ et P est scindé sur L.*

Théorème 4 ([P] 70-71). *P admet un unique corps de rupture à K-isomorphisme près. Plus précisément, $K[X]/\langle P\rangle$ est un corps de rupture de P sur K.*

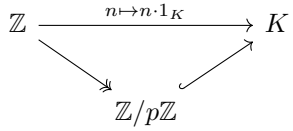
P admet un unique corps de décomposition D à K-isomorphisme près. Celui-ci vérifie $[D:K]\leq \deg(P)!$.

B. Construction des corps finis : existence et unicité

Dans ce paragraphe K désigne un corps fini commutatif.

Exemple 5. *Soit p un nombre premier. L'anneau $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$ est un corps fini commutatif. On le note $\mathbb{F}_p$.*

Théorème/Définition 6 ([P] 72). *Il existe un nombre premier p rendant le diagramme suivant commutatif :*



L'entier p est appelé caractéristique *de K notée* $\operatorname{car} K$ *et $\mathbb{F}_p$ est appelé* sous-corps premier *de K. C'est le plus petit sous-corps de K.*

On notera p la caractéristique de K.

Corollaire 7 ([P] 72). $\#K = p^{[K:\mathbb{F}_p]}$

Remarque 8. *Il n'existe pas de corps fini commutatif à 6 éléments !*

Lemme/Définition 9 ([P] 73). $\mathrm{Fr}: K\to K, x\mapsto x^p$ *est un morphisme de corps, appelé* morphisme de Fröbenius.

Théorème 10 ([P] 73). *Soient $r\in\mathbb{N}^*$, p premier et $q=p^r$. Il existe un corps fini commutatif à q éléments. Un tel corps est un CDD de X^q-X. En particulier, les classes d'isomorphisme de corps finis commutatifs sont caractérisées par le cardinal de ces derniers. On note $\mathbb{F}_q$ un représentant de la classe d'isomorphisme des corps finis commutatifs à q éléments.*

Théorème 11 (de Wedderburn - [P] 82). *Tout corps fini est commutatif.*

Exemple 12. $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[X]/\langle X^2+X+1\rangle = \{0,1,\overline{X},1+\overline{X}\}$.
$\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[X]/\langle X^3+X^2+X+1\rangle$.

C. Proprriétés des corps finis

Soient p un nombre premier, $r\in\mathbb{N}^*$ et $q=p^r$.

Proposition 13 (FIG. 1). $\forall (m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $\mathbb{F}_{p^n}\subseteq\mathbb{F}_{p^m} \iff n\mid m$.

Proposition 14 ([P] e73).
- $\overline{\mathbb{F}_p} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{F}_{p^n}$ *est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$.*
- *Si K est une extension de $\mathbb{F}_q$, alors $\mathbb{F}_q = \{x\in K \mid x^q=x\}$. En particulier, $\mathbb{F}_q$ est l'unique sous-corps de $\overline{\mathbb{F}_p}$ de cardinal q.*

Théorème 15 ([P] 74). $\mathbb{F}_q^\times$ *est cyclique.*

Proposition 16 ([P] 73). Fr *est un automorphisme de $\mathbb{F}_q$.*

Théorème 17 ([R] 425). *Le groupe des automorphismes de $\mathbb{F}_q$ est cyclique d'ordre r, engendré par* Fr.

Remarque 18. *Pour tout $\theta\in\mathbb{F}_q$, il existe $d\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Fr}^d(\theta)=\theta^{dp}=\theta$. Le polynôme minimal de θ sur $\mathbb{F}_p$ est $\prod_{k=1}^{d}\left(X-\mathrm{Fr}^k(\theta)\right)$.*

Exemple 19. *Soit $\beta=\overline{X}^2+\overline{X}\in\mathbb{F}_2[X]/\langle X^4+X+1\rangle$. On a $P_{\beta,\mathbb{F}_2}=X^2+X+1$.*

II. Carrés dans un corps fini

Soient p un nombre premier *impair*, $r\in\mathbb{N}^*$ et $q=p^r$. On pose $c:\mathbb{F}_q\to\mathbb{F}_q, x\mapsto x^2$ et $l:\mathbb{F}_q\to\mathbb{F}_q, x\mapsto x^{\frac{q-1}{2}}$.

Proposition 20. $\operatorname{Im} l = \operatorname{Ker} c = \{\pm 1\}$ *et* $\operatorname{Ker} l = \operatorname{Im} c = \left\{x^2 \mid x\in\mathbb{F}_q^\times\right\}$.

Corollaire 21 (Critère d'Euler - [P] 75). *$x\in\mathbb{F}_q^\times$ est un carré si, et seulement si $x^{\frac{q+1}{2}}=1$.*

Corollaire 22 ([P] 74). *Il y a $\frac{q-1}{2}$ carrés inversibles dans $\mathbb{F}_q$ (et $\frac{q+1}{2}$ carrés).*

Proposition 23 ([P] 74). *Tous les éléments de $\mathbb{F}_{2^r}$ sont des carrés.*

Proposition 24 ([P] 75). *-1 est un carré dans $\mathbb{F}_p$ si, et seulement si, $p\equiv 1\,[4]$.*

Application 25 ([P] 56). *p est la somme de deux carrés si, et seulement si, $p=2$ ou $p\equiv 1\,[4]$.*

Définition 26 ([R] 428). *Le* symbole de Legendre de $a\in\mathbb{Z}$ modulo p *est défini par :*

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } a\in p\mathbb{Z} \\ 1 & \text{si } a \text{ est un carré inversible modulo } p \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 27 ([R] 428). $\forall a\in\mathbb{Z}$, $\left(\frac{a}{p}\right)\equiv a^{\frac{p-1}{2}}$. *En particulier, $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ est un morphisme du groupe $\mathbb{F}_p^\times$.*

Proposition 28 ([R] 431-434). *Soit $a \in \mathbb{F}_p^\times$. L'équation de $ax^2 = 1$ a $1 + \left(\frac{a}{p}\right)$ solutions dans $\mathbb{F}^p$.*

Théorème 29 (Loi de réciprocité quadratique - [R] 431-434). *Soient p et q deux nombres premiers impairs distincts.*

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

Application 30. $\left(\frac{11}{23}\right) = \left(\frac{23}{11}\right)(-1)^{11\cdot 5} = -\left(\frac{1}{11}\right) = -1$ *donc 11 n'est pas un carré modulo 23.*

Proposition 31 ([R] e438, [C] 307). $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

Proposition 32. *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{F}_q^3$ avec $a \neq 0$. L'équation $ax^2+bx+C = 0$ dans $\mathbb{F}_q$ possède des solutions si, et seulement si, $b^2 - 4ac$ est un carré dans $\mathbb{F}_q$. Le cas échéant, si $\delta \in /IF_p$ vérifie $\delta^2 = b^2 - 4ac$, alors les solutions de cette équation sont $\frac{-b\pm\delta}{2a}$.*

Remarque 33. *Dans $\mathbb{F}_{2r}$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est bien plus difficile à résoudre, en dehors des cas triviaux !*

III. Algèbre (bi)linéaire sur les corps finis

Soient p un nombre premier impair, $r \in \mathbb{N}^*$, $q = p^r$ et $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 34 ([R] 155).
— $\#GL_n(\mathbb{F}_q) = (q^n - 1)(q_n - q)\dots(q^n - q^{n-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{k=1}^n(q^k - 1)$
— $\#SL_n(\mathbb{F}_q) = \#GL_n(\mathbb{F}_q)/(q-1)$

Théorème 35 ([C] 50).

$$SO_2(\mathbb{F}_q) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} & \text{si } -1 \text{ est un carré mod } q \\ \mathbb{Z}/(q+1)\mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 36. $SO_2(\mathbb{F}_{2^r}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{F}_{2^r}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, *puis* $SO_2(\mathbb{F}_{2^r}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$.

Soit E un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de dimension finie.

Définition 37 ([R] 463). *Le* discriminant *d'une forme quadratique f sur E est l'image de son déterminant dans une base quelconque modulo les carrés de $\mathbb{F}_q^\times$.*

Théorème 38 ([R] e482). *Il y a deux classes d'équivalence de formes quadratiques non-dégénérées sur E. Plus précisément, soient $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$ qui n'est pas un carré, et f une forme quadratique sur, de matrice M dans la base canonique.*

— *Si* $\det M$ *est un carré dans $\mathbb{F}_p^\times$, alors M est congruente à la matrice* $\mathrm{diag}(1, 1, \dots, 1, 1)$.
— *Sinon, M est congruente à* $\mathrm{diag}(1, 1, \dots, 1, \alpha)$.

Application 39. *Loi de réciprocité quadratique (Thm 29).*

IV. Polynômes et corps finis

Théorème 40 (Critère d'Eisenstein - [P] 76). *Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$. Soit p un nombre premier. Si $p \nmid a_n$, si $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $p \mid a_k$ et $p^2 \nmid a_0$, alors P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.*

Exemple 41. *Pour tout p premier, $\Phi_p = X^{p+1} + \dots + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.*

Théorème 42 ([P] 77). *Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. Soit $p \in \mathbb{Z}$ premier. Si $p \nmid a_n$ et si l'image $\overline{P}$ de P dans $\mathbb{F}_p[X]$ est irréductible, alors P est irréductible sur $\mathbb{Z}$.*

Remarque 43. *La réciproque est fausse : considérer $X^4 + 1$.*

Développements

— Développement 1 : Proposition 28, et théorème 29 : loi de réciprocité quadratique (par les formes quadratiques)
— Développement 2 : Théorème 35

Références

R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition

P *Cours d'algèbre*, Perrin

C *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et géométries*, P. Caldero, J. Germoni

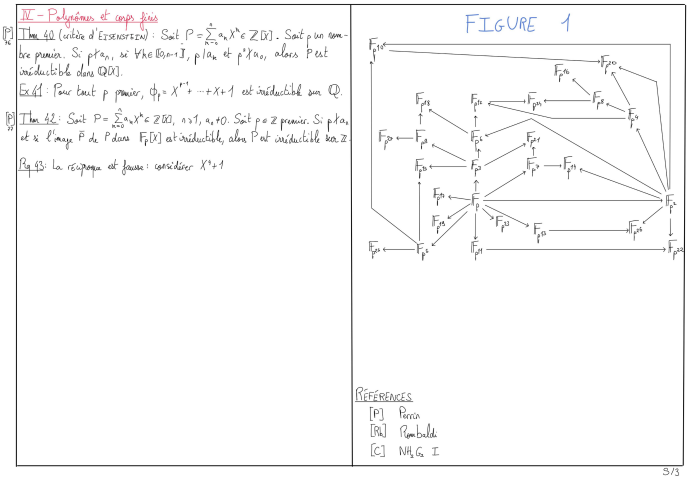


FIGURE 1.3 – Diagramme des extensions de corps finis

141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Soient A un anneau unitaire intègre commutatif, et L/K une extension de corps commutatif. Soit $P \in A[X]$.

I. Polynômes irréductibles

A. Notion d'irréductibilité pour les polynômes

Définition 1 ([R] 370). *On dit que P est* irréductible sur A *si $P \notin A[X]^\times = A^\times$, si $P \neq 0$ et si : $\forall (P_1, P_2) \in A[X]^2$, $P = P_1 P_2 \implies P_1 \in A^\times$ ou $P_2 \in A^\times$.*

Exemple 2 ([R] 370). *Tout polynôme de degré 1 est irréductible ; et les polynômes réels de degré 2 de discriminant < 0 sont irréductibles.*

Proposition 3 ([R] 371). — *Si $P \in K[X]$ est irréductible et si $\deg P > 1$, alors P n'a pas de racine dans K.*

— *Si $P \in K[X]$ n'a pas de racine dans K et si $\deg P \leq 3$, alors P est irréductible sur K.*

Exemple 4. — *$(x^2+1)^2$ est réductible sur $\mathbb{R}$ et sans racine dans $\mathbb{R}$.*

— *Les polynômes irréductibles de petit degré de $\mathbb{F}_2[X]$ sont X, $X+1$, X^2+X+1.*

B. Proprétés de $A[X]$

Proposition 5 ([R] 374). *$A[X]$ euclidien $\iff$ $A[X]$ principal $\iff$ A est un corps.*

Proposition 6 ([R] e375). *Si $P \in K[X]$ est irréductible, alors $K[X]/\langle P \rangle$ est un corps.*

On suppose A factoriel.

Définition 7 ([S] 547-548 ; [P] 51). *Le* contenu de $P \in A[X] \setminus \{0\}$, *noté $c(P)$, est un PGCD des coefficients de P. On dit que P est* primitif *si $c(P) \in A^\times$.*

Théorème 8 ([P] 51 ; [S] 548). *Soit $P \in A[X]$ primitif non constant. P est irréductible dans $A[X] \iff$ A est irréductible dans $K[X]$.*

Exemple 9. *Soient $a_1, \dots, a_n$ des entiers distincts. Le polynôme $(X-a_1)\dots(X-a_n)-1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.*

Lemme 10. *Un produit de polynômes primitifs est primitif.*

Lemme 11 (de Gauss - [S] 548 ; [P] 51). *$c(PQ) = c(P)c(Q)$*

Théorème 12 ([R] 358 ; [S] 548 ; [P] 51). *$A[X]$ est factoriel $\iff$ A est factoriel.*

C. Critères d'irréductibilité

Théorème 13 (Critère d'Eisenstein - [S] 549 ; [P] 76). *Ecrivons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $a_n \neq 0$. S'il existe $p \in A$ premier non nul tel que $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $p \mid a_k$, $p^2 \nmid a_0$ et $p \nmid a_n$, alors P est irrductible dans $\mathrm{Frac}(A)[X]$.*

Exemple 14. *$\forall n \geq 2$, $\forall d \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré, $X^n - d$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.*

Théorème 15 ([P] 77). *Soit I un idéal de A. Ecrivons $P = \sum_{k=0}^n a_k X_k$, $a_n \neq 0$. Si $a_n \not\equiv 0$ mod I et si P mod I est irréductible dans $(A/I)[X]$ alors P est irréductible dans $A[X]$.*

Exemple 16 ([P] 77). *Pour tout p premier, $X^p - X - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.*

II. Polynômes et extensions de corps

Soient L et K deux corps commutatifs. Soit $P \in K[X]$.

A. Extensions de corps, éléments algébriques

Définition 17 ([P] 65). *On dit que L est* une extension de K, *et on note L/K, si $K \subseteq L$.*

Proposition/Définition 18 ([P] 65). *L est un K-espace vectoriel dont on note $[L:K]$ la dimension, que l'on appelle* degré de l'extension L/K. *On dit que L/K est finie si $[L:K]$ est fini.*

Théorème 19 (de la base téléscopique - [P] 65). *Soient $(e_i)_{i\in I}$ une base K-base de M et $(f_j)_{j\in K}$ une M-base de L, alors $(e_i f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une K-base de L.*

Corollaire 20 (Multiplicativité des degrés - [P] 65). *$[L : K] = [L : M] \times [M : K]$*

Définition 21 ([P] 66). *On dit que $\alpha \in L$ est* algébrique sur K *s'il existe $P \in K[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$. Sinon, on dit que α est* transcendant.

Théorème/Définition 22 ([P] 66). *Si $\alpha \in L$ est algébrique sur K, alors $\{P \in K[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un idéal non nul, qui donc admet un unique générateur unitaire $P_{\alpha,K}$ appelé* polynôme minimal de α sur K.

Notation. $K[\alpha] = \{P(\alpha) \mid P \in K[X]\}$

Théorème 23 ([P] 66). *Soit $\alpha \in L$. Sont équivalentes :*

1. *α est algébrique sur K*
2. *$K[\alpha] = K(\alpha)$*
3. *$K[\alpha]$ est un K-espace vectoriel de dimension finie.*

Le cas échéant, $\deg P_{\alpha,L} = [K(\alpha) : K]$.

B. Corps de rupture et de décomposition

Définition 24 ([P] 70). *Supposons P irréductible. On dit que L est un* corps de rupture de P sur K *s'il existe $\alpha \in L$ tel que $P(\alpha) = 0$ et $L = K(\alpha)$.*

Théorème 25 ([P] 70). *Supposons P irréductible. Le corps $K[X]/\langle P \rangle$ est un corps de rupture de P sur K, et c'est le seul à isomorphisme près.*

Exemple 26. *$\mathbb{C}$ peut être défini comme $\mathbb{R}[X]/\langle X^2+1 \rangle$.*

Application 27. *Si P est irréductible et si $\deg P \wedge [L : K]$, alors P est irréductible sur L.*

Définition 28 ([P] 71). *On dit que L est un* corps de décomposition de P sur K *si P est sciendé sur L et si $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines de P.*

Théorème 29 ([P] 71). *Il existe un corps de décomposition de P sur K, unique à isomorphisme près.*

Exemple 30 ([P] 72). *$\mathbb{Q}(j, \sqrt[3]{2})$ est un corps de décomposition de $X^3 - 2$ sur $\mathbb{Q}$.*

Théorème 31 (de l'élément primitif - [P] 87). *Toute extension finie d'un corps de caractéristique nulle est monogène.*

C. Clôture algébrique

Définition 32 ([P] 67). *On dit que K est* algébriquement clos *si tout polynôme non nul de $K[X]$ est scindé, et si K n'admet pas d'extension algébrique non triviale.*

Définition 33 ([P] 72). *On dit que L est une* clôture algébrique *de K si c'est une extension de K algébrique et algébriquement close.*

Exemple 34 ([P] 68-72).
- *$\mathbb{C}$ est algébriquement clos (théorème de d'Alembert-Gauss) ;*
- *$\mathbb{C}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{R}$.*

Exemple 35 ([G] 94). *Si L est algébriquement clos, alors l'ensemble des éléments de L algébriques sur K est un corps algébriquement clos.*

Théorème 36. *K admet une unique clôture algébrique à isomorphisme près.*

III. Polynôme cyclotomiques

On note $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ le groupe des racines complexes n-ièmes de l'unité, et μ_n^* l'ensemble de ses générateurs (que l'on appelle *racines primitives n-ièmes de l'unité*).

Définition 37 ([P] 80 ; [R] 385). *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le* n-ième polynôme cyclotomique *:*

$$\Phi_n = \prod_{\zeta \in \mu_n^*} X - \zeta$$

Proposition 38 ([P] 80-83 ; [R] 386). *On a les propriétés suivantes :*
- *Pour $\zeta_n \in \mu_n^*$,*

$$\Phi_n = \prod_{\substack{k=1 \\ k \wedge n = 1}}^{n} X - \zeta_n^k$$

- $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$
- $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$

Exemple 39 ([P] 81).
- *Pour p premier, $\Phi_p = X^{p-1} + \dots X + 1$*
- $\Phi_1 = X - 1$, $\Phi_4 = X^2 + 1$, $\Phi_6 = X^2 - X + 1$, $\Phi_8 = X^4 + 1$

Théorème 40 ([P] 82-83 ; [R] 392). *Soit $\zeta_n \in \mu_n^*$. Le polynôme minimal de ζ_n sur $\mathbb{Q}$ est Φ_n.*

Corollaire 41. *Φ_n est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$.*

IV. Polynômes irréductibles des corps finis

Définition 42 ([R] 331). *La* fonction de Moëbius *est définie par :*

$$\mu : n \in \mathbb{N}^* \mapsto \begin{cases} 1 & si\ n = 1 \\ (-1)^r & si\ n \text{ est le produit de } r \text{ facteurs premiers di} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Théorème 43 (Formule d'inversion de Moëbius = [R] 333). *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{d|n} v_d$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) u_d$.*

Théorème 44 ([R] 423). *$P_n := X^{p^n} - X = \prod_{d|n} \prod_{\mathcal{U}_d(p)} P$ où $\mathcal{U}_d(p)$ est l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré d de $\mathbb{F}_p[X]$.*

Corollaire 45 ([R] 424). *$\#\mathcal{U}_n(p) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) p^d$*

Développements

- Développement 1 : Lemme de Gauss 11
- Développement 2 : Théorème 40 et Corollaire 41
- Développement 2 : Théorème 43, Théorème 44 et Corollaire 45

Références

R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition

P *Cours d'algèbre*, Perrin

G *Les maths en tête - Algèbre et probabilités*, Xavier Gourdon, 3e édition

S *Algèbre pour la licence 3*, Szpirglas

142 : PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

I. Notion de PGCD et de PPCM dans différents types d'anneaux

Dans cette section, A est un anneau intègre (commutatif) et $(a, b, a_1, \dots, a_r) \in A^{r+2}$.

A. Première définition, existence, cas des anneaux factoriels

Définition 1. *Si $a_1, \dots, a_r \neq 0$, alors sous réserve d'existence, on appelle* PGCD *(resp.* PPCM*) de $a_1, \dots, a_r$, noté $a_1 \wedge \dots \wedge a_R$ ou $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_r)$ (resp. $a_1 \vee \dots \vee a_r$ ou $\text{ppcm}(a_1, \dots, a_r)$) un plus grand minorant (resp. un plus grand majorant) de $\{a_1, \dots, a_r\}$ pour la relation (binaire) de divisibilité. On pose par ailleurs $0 \wedge 0 = 0 \vee a = 0$.*

En particulier, le PGCD et le PPCM sont associatifs et commutatifs : $a \wedge b = b \wedge a$ et $a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge a_4 \wedge a_5 = (a_1 \wedge a_2) \wedge (a_3 \wedge a_4) \wedge a_6$.

Remarque 2. *Les PGCD (resp. PPCM) de $a_1, \dots, a_r$ sont tous associés. L'écriture $d = a_1 \wedge \dots \wedge a_r$ est un abus signifiant que d est un PGCD de $a_1, \dots, a_r$.*

Proposition 3 ([R] 246)**.** *Si a et b ont un PPCM alors ils ont un PGCD $a \wedge b = ab(a \vee b)^{-1}$.*

Exemple 4. *3 et $2 + i\sqrt{5}$ ont un PGCD mais pas de PPCM dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$. 4 et $2 + 2i\sqrt{3}$ n'ont pas de PGCD dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$.*

Définition 5. *On dit que $a_1, \dots, a_r$ sont* premiers entre eux *(dans leur ensemble) si $a_1 \wedge \dots \wedge a_r = 1$. On dit que $a_1, \dots, a_r$ sont* deux à deux premiers entre eux *si $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j \implies a_i \wedge a_j = 1$.*

Théorème 6 (de Gauss - [R] 247)**.** *$\forall (a, b, c) \in A^3$, $a \mid bc$ et $a \wedge b = 1 \implies a \mid c$.*

Proposition 7 ([R] 246)**.** *Si toute paire d'éléments de A admet un PGCD (on dit alors que A est un anneau à PGCD), alors toute paire d'éléments de A admet un PPCM, et la réciproque est vraie.*

Proposition 8 ([P] 49)**.** *Supposons A factoriel, notons $\mathcal{P}$ un système complet de représentants des irréductibles de A. Alors :*

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min(v_p(a), v_p(b))} \text{ est un PGCD de } a \text{ et } b.$$

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max(v_p(a), v_p(b))} \text{ est un PPCM de } a \text{ et } b.$$

Définition 9. *Si $A = \mathbb{Z}$ (resp. $A = K[X]$, K un corps), alors le PGCD de a et b est l'unique PGCD de a et b qui est positif (resp. unitaire).*

B. Situation dans les anneaux principaux

On suppose A principal.

Proposition 10. *$m \in A$ est un PPCM de a et b si, et seulement si, $aA \cap bA = mA$.*

$d \in A$ est un PGCD de a et b si, et seulement si, $aA + bA = dA$.

Théorème 11 (de Bézout)**.** $\left(\exists (u, v) \in A^2 \, au + bv = 1\right) \iff a \wedge b = 1$

Remarque 12. *$\forall (a, b) \in A^2$, $\exists (u, v) \in A^2 : au + bv = 1$. Le théorème de Bézout indique que la réciproque est vraie si $a \wedge b = 1$ (contre-exemple : $3 \times (2) + 2 \times (-2) = 2$, mais $3 \wedge 2 \neq 2$).*

Définition 13 ([R] 247)**.** *Un couple $(u, v) \in A^2$ tel que $a \wedge b = au + bv$ est appelé* couple de Bézout de (a, b)*, et l'égalité est appelée* relation de Bézout*.*

Application 14. *Résolution de $ax + by = c$ avec $a \wedge b = 1$.*

Application 15. *Lemme des noyaux : soit $(P, Q) \in K[X]^2$ tel que $P \wedge Q = 1$. Soient V un K-espace vectoriel de dimension finie. Pour tout endomorphisme f de V ; $\text{Ker}\left((PQ)(f)\right) = \text{Ker}\left(P(f)\right) \bigoplus \text{Ker}\left(Q(f)\right)$.*

Théorème 16 (des restes chinois - [R] 250)**.** *Si $a_1, \dots, a_d$ sont non nuls, non inversibles et deux à deux premiers entre eux, alors :*

$$\overline{\varphi} : x \bmod a_1 \dots a_d \mapsto (x \bmod a_1, \dots, x \bmod a_d)$$

est un isomorphisme d'anneaux de $A/\langle a_1 \dots a_r \rangle$ dans $A/\langle a_1 \rangle \times \dots A/\langle a_r \rangle$.
Posons $a = a_1 \dots a_r$ et pour $j \in [\![1, r]\!]$, $b_j = \frac{a}{a_j}$. Il existe $(u_1, \dots, u_r) \in A^r$ tel que $\sum_{i=1}^r u_i b_i = 1$. La réciproque de $\overline{\varphi}$ s'exprime alors :

$$\overline{\varphi}^{-1} : (x_1 \bmod a_1, \dots, x_d \bmod a_d) \mapsto \sum_{i=1}^{d} x_i a_i b_i \bmod a_1 \dots a_d$$

Application 17 ([R] 291)**.** *Résolution d'un système de congruence.*

Exemple 18 (Interpolation de Lagrange)**.** *Soient $x_1, \dots, x_n \in K$ deux à deux distincts et $y_1, \dots, y_n \in K^n$. Un polynôme interpolateur des x_i en y_i est une solution du système :*

$$\{\forall i \in [\![1, n]\!], \, P \equiv y_i \, [X - x_i]$$

Exemple 19. *Recherche de $P \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ tel que $P(\overline{0}) = \overline{2}$, $P(\overline{1}) = \overline{0}$, $P(\overline{2}) = \overline{1}$ de degré minimal.*

Proposition 20 ([R] 298)**.** *$\forall (n, m) \in \mathbb{N}_{\geq 2}^2$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n \wedge m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n \vee \mathbb{Z}$*

II. Algorithmes de calcul dans un anneau eculidien

Dans cette section, A est supposé euclidien. Soit $(a, b) \in A \times A \setminus \{0\}$.

A. Algorithmes d'Euclide

Lemme 21 (d'Euclide - [R] 264)**.** *Si $a = bq + r$ avec $(q, r) \in A^2$, alors $a \wedge b = b \wedge r$.*

Algorithme 22 (d'Euclide - [R] 264)**.** *Posons $r_{-1} = a$ et $r_0 = b$, et pour $n \geq 1$, r_n est un reste d'une division euclidienne de r_{n-2} par r_{n-1} si $r_{n-1} \neq 0$, et $r_n = 0$ sinon.*

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N + 1$, $r_n = 0$; de plus, $a \wedge b = r_n$.

Exemple 23. $M_n \wedge M_m = M_{n\wedge m}$, *où* $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ *et* $M_n = 2^n - 1$.
$(X^n-1) \wedge (X^m-1) = X^{n\wedge m} - 1$.

Algorithme 24 (d'Euclide étendu - [R] 265)**.** *Soit* $(q_n)_{n\geq 1}$ *une quite de quotients dans l'algorithme d'Euclide, soit* N *le rang du dernier reste non nul. On peut trouver un couple de Bézout en "remontant" l'algorithm d'Euclide,* i.e. *en écrivant* $a \wedge b = r_N = r_{N-2} - q_N r_{N-1}$, *puis en y substituant* $r_{N-1} = r_{N-3} - q_{N-1}r_{N-2}$, *puis en y substituant* $r_{N-2} = r_{N-4} - q_{N-2}r_{N-3}$, *etc. jusqu'à exprimer* $a \wedge b$ *sous la forme* $a \wedge b = af(q_1,\dots,q_N) + bg(q_1,\dots,q_n)$.

Application 25. *Calcul d'un inverse dans un corps de rupture : soit* $K = \mathbb{Q}[X]/\langle X^2 - X - 1\rangle \cong \mathbb{Q}(\varphi)$. *Dans* K, $(2\varphi+1)^{-1} = 2\varphi - 3$.

Proposition 26. $Gl_2(\mathbb{Z})$ *agit sur* $\mathbb{Z}^2$ *par* $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha a + \beta b\\ \gamma a + \delta b\end{pmatrix}$
Les orbites de cette action sont les $E_d = \left\{\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \mid a \wedge b = d\right\}$, $d \in \mathbb{N}$.

Corollaire 27. *D'après l'algorithme d'Euclide,* $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2$, $\exists P \in GL_2(\mathbb{Z}) : P\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\wedge b\\ 0\end{pmatrix}$

Application 28. *Soit* $a = (a_1,\dots,a_n)$ *un vecteur de* $\mathbb{Z}^n$. *On peut compléter* (a) *en une* $\mathbb{Z}$*-base de* $\mathbb{Z}^n$ *si, et seulement si,* $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = 1$.

B. Du côté de $\mathbb{Z}$ et $K[X]$, un point sur la complexité

Dans le cas de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, on impose aux restes d'être positifs, ce qui rend les reste et quotient uniques.

Théorème 29 (de Lamé - [D] 38)**.** *Supposons que* $a > b \geq 1$. *Soient* $(F_k)_k$ *la suite de Fibonacci débutant à 0, et* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $b < F_{k+1}$. *L'algorithme d'Euclide pour* a *et* b *termine en moins de* k *étapes.*

Remarque 30. *Cette majoration est optimale : considérer* $a = F_{k+1}$, $b = F_k$.

Algorithme 31 (PGCD binaire - [D] 36)**.** *Supposons* $a \geq b \geq 0$. *La fonction suivante :*
PGCD_binaire(a,b) :
Si $a = 0$: renvoyer b
Si $2 \mid a$ et $2 \mid b$: renvoyer $2\times$PGCD_binaire$(a/2, b/2)$
Si $2 \mid a$ et non$(2 \mid b)$: renvoyer PGCD_binaire$(a/2, b)$
Si non$(2 \mid a)$ et $2 \mid b$: renvoyer PGCD_binaire$(a, b/2)$
Sinon : renvoyer PGCD_binaire$((a-b)/2, b)$
appliquée à (a,b) *renvoie* $a \wedge b$.

Remarque 32. *Algorithme 31 se termine en au plus* $\lceil \log_2(a) \rceil$ *récursions.*

Proposition 33. *Soit* $(P,Q) \in K[X]^2$ *tel que* $n := \deg P \geq \deg Q \geq 1$. *L'algorithme d'Euclide appliqué à* P *et* Q *termine en au plus* n *étapes.*

III. Applications en arithmétique et en théorie des groupes

A. (Systèmes d') équations diophantiennes linéaires

Définition 34 ([G] 163)**.** *Soit* $M \in \mathcal{M}_{n,m}(IZ)$. *On dit que* M *est sous* forme normale d'Hermite *si elle est sous la forme :*

$$\begin{pmatrix} 0\ \cdots\ 0\ p_1\ *\ \cdots\ *\ +\ *\ \cdots\ *\ + & & & & \\ & & p_2\ *\ \cdots\ *\ + & & \\ & & & p_3\ \cdots & \\ & & \vdots & & \\ & & & & \cdots\ +\ *\ \cdots\ * \\ & & & & p_r\ *\ \cdots\ * \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où les pivots p_i *(*i.e. *les premiers coefficients non-nuls sur chaque ligne) sont strictement positifs, et les coefficients au dessus de chaque pivot sont positifs et inférieurs au pivot.*

Algorithme 35 (d'Hermite - [G] 164)**.** *Soit* $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$. *On définit* $\delta_{i_0,j}(M) = \min\{|M_{i,j}| : i \geq i_0,\ M_{i,j} \neq 0\}$. *L'algorithme d'Hermite :*

Soit $i_0 = 1$. Tant que $i_0 < n$: soit $j_0 = \min\{1 \leq j \leq m \mid \delta_{i_0,j}(M) \neq 0\}$
Si $\forall i > i_0$, $M_{i,j_0} = 0$, alors $L_{i_0} \longleftarrow sg(M_{i_0,j_0})L_{i_0}$, et pour i allant de 1 à $i_0 - 1$, $L_i \longleftarrow L_i - q_i L_{i_0}$ où q_i est le quotient de la division euclidienne de M_{i,j_0} par M_{i_0,j_0}. On remplace i_0 par $i_0 + 1$
Sinon, soit $k \in [\![i_0, n]\!]$ tel que $|M_{k,j_0}|$ soit non nul et minimal. On effectue $L_i \longleftrightarrow L_{i_0}$ puis, pour i allant de i_0+1 à n, $L_i \longleftarrow L_i - q_i L_{i_0}$

transforme M *sous une forme normale d'Hermite* M_H. *En particulier, il existe* $P \in GL_n(\mathbb{Z})$ *telle que* $M_H = PM$.

Application 36. *Résolution d'un système d'équations diophantiennes linéaires.*

Exemple 37. *Cas d'une seule équation linéaire* $(E) : \begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = b$ *avec* $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = 1$.
D'après Cor 24, il existe $P \in GL_4(\mathbb{Z})$ *telle que* $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}^T P = \begin{pmatrix}a_1\wedge\cdots\wedge a_n\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}^T$
De là, $(E) \iff \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}\tilde{x_1}\\ \vdots\\ \tilde{x_n}\end{pmatrix} = b \iff \tilde{x_1} = b$ *où* $\begin{pmatrix}\tilde{x_1}\\ \vdots\\ \tilde{x_n}\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$
Donc $S(E) = \left\{ P\begin{pmatrix}1\\ x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \mid (x_2,\cdots,x_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}\right\}$

B. Un théorème de Liouville

Théorème 38 (de Liouville - [FGN] 179, [R] 404)**.** *L'équation $P^n + Q^n + R^n = 0$ n'admet pas de solution non triviale* (i.e. *P, Q, R non associées) dans $\mathbb{C}[X]$ dès lors que $n \geq 3$.*

C. Quelques résultats en théorie des groupes

Soit G un groupe fini. On note $\mathrm{ord}(g)$ l'ordre de $g \in G$.

Proposition 39 ([R] 9)**.** *L'exposant de G ($\max_{g\in G} \mathrm{ord}(g)$) vaut* $\mathrm{ppcm}\left(\{\mathrm{ord}(g)\}_{g\in G}\right)$.

Lemme 40 ([R] 29)**.** *Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, soit $\overline{d} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On a* $\mathrm{ord}(\overline{d}) = \frac{n^d}{n \wedge d}$.

Théorème 41 (de structure des groupes abéliens finis - [R] 28)**.** *Supposons G abélien, de cardinal au moins 2. Il existe $(d_1, \ldots, d_s) \in (\mathbb{N} \setminus \{0,1\})^s$ tels que :*

$$G \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z}, \quad d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_s$$

Les entiers $d_1, \ldots, d_s$ sont appelés facteurs invariants de G*. Ils sont uniques et déterminent la classe d'isomorphisme de G.*

Exemple 42. *Soit p un nombre premier. Un groupe abélien d'ordre p^2 est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.*

Développements

— Développement 1 : Théorème des restes chinois 16 et Exemple de calcul 19.

— Développement 2 : Théorème de Liouville 38

Références

R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition

P *Cours d'algèbre*, Perrin

D *Cours d'algèbre*, Michel Demazure

FGN *Oraux X-ENS Algèbre 1*, Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas

G *Algèbre I - Groupes, corps et théorie de Galois*, Daniel Guin, Thomas Hausberger

148 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Dans toute cette leçon, E désigne espace vectoriel sur un corps K. On ne rappellera pas les éléments de la théorie des espaces vectoriels.

I. Théorie de la dimension finie

A. Familles libres, familles génératrices, bases

Soit $\mathcal{F} \subseteq E$.

Définition 1 ([Gr] 11-11-10-13). *On dit que $\mathcal{F}$ est* libre *si :* $\forall (\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}) \in \mathcal{F}^n$, $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

On dit que $\mathcal{F}$ est liée *si $\mathcal{F}$ n'est pas libre.*

On dit que $\mathcal{F}$ est génératrice *(de E) si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire finie de vecteurs de $\mathcal{F}$.*

On dit que $\mathcal{F}$ est une base de E si $\mathcal{F}$ est à la fois libre et génératrice.

Exemple 2. — *Dans $\mathbb{R}^2$:*
- *$\{(1,1),(1,-1)\}$ est génératrice et libre ;*
- *$\{(0,1),(1,0),(2,5)\}$ est génératrice et liée ;*
- *$\{(-4,3)\}$ est non génératrice et libre ;*
- *$\{(1,1),(2,2)\}$ est non génératrice et liée ;*

[Gr] 14 *La famille $\{(0,\dots,1,\dots,0)\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de K^n, appelée* base canonique.

Proposition 3 ([Gr] 13). *$\mathcal{F} = \{\} \subseteq E$ est une base de E si, et seulement si, $\forall x \in E$, $\exists!(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in K^n : x = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{v_n}$*

Proposition 4 ([Gr] 14). — *$\{x\}$ est libre $\iff x \neq 0$*
- *Toute sur-famille d'une famille génératrice (resp. liée) est génératrice (resp. liée)*
- *Toute sous-famille d'une famille libre est libre*
- *Une famille contenant le vecteur nul est liée*

B. Dimension d'un espace vectoriel

Définition 5 ([Gr] 11). *On dit que E est de* dimension finie *si E admet une famille génératrice finice.*

Exemple 6. — *K^n est un K-espace vectoriel de dimension finie, contrairement à $K[X]$.*
- *$\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie.*

Lemme 7 (de Steiniz - [Gr] 17). *Si $\mathcal{G} \subset E$ est finie et génératrice, alors toute famille de E contenant plus de $\#\mathcal{G}$ éléments est liée.*

Théorème/Définition 8 ([Gr] 17). *Si E est de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même cardinal (fini), que l'on appelle* dimension de E, *et que l'on note $\dim_K(E)$ ou $\dim(E)$ s'il n'y a pas d'ambiguité sur K.*

À partir de maintenant, on suppose E de dimension finie.

Théorème 9 ([Gr] 18). *$\mathcal{B} \subseteq E$ est une base de $E \iff \mathcal{B}$ est libre et $\#\mathcal{B} = \dim(E) \iff \mathcal{B}$ est génératrice et $\#\mathcal{B} = \dim(E)$.*

Théorème 10 ([Gr] 19). *Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie, et $\dim(F) \leq \dim(E)$ avec égalité si, et seulement si, $E = F$.*

Théorème 11 (des bases extraites et incomplètes - [Gr] 19). *Soient $\mathcal{L} \subseteq E$ libre et $\mathcal{G} \subseteq E$ génératrice telles que $\mathcal{L} \subseteq (G)$. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$.*

Corollaire 12. *Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.*

Proposition 13 ([Gr] 63). *Soit F un espace vectoriel de dimension finie. Les espaces vectoriels E et F sont isomorphes si, et seulement si, $\dim(E) = \dim(F)$.*

Exemple 14. *Soit $(a_0,\dots,a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$. L'application $y \mapsto (y(0), y'(0), \dots, y^{(p-1)}(0))$ est un isomorphisme entre $S_{\mathbb{R}}(E) = \left\{y \in C^p(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mid y^{(p)} = a_{p-1}y^{(p-1)} + \dots + a_0 y\right\}$ et $\mathbb{C}^p$. Par conséquent, $\dim(S_{\mathbb{R}}(E)) = p$.*

Proposition 15 ([Gr] 22). *Soient $E_1,\dots,E_p$ supplémentaires dans E. Si $\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_p$ sont des bases de $E_1,\dots,E_p$, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \sqcup \dots \sqcap \mathcal{B}_p$ est une base de E, dite* adaptée à la décomposition $E = E_1 \bigoplus \dots \bigoplus E_p$.

Corollaire 16 ([Gr] 22). $\dim(E \bigoplus F) = \dim(E) + \dim(F)$

Proposition 17 ([Gr] 23).

$$E = E_1 \bigoplus E_2 \iff \begin{cases} E = E_1 + E_2 \\ \dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} E_1 \cap E_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\} \\ \dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2) \end{cases}$$

C. Calculs de dimensions

Dans ce paragraphe, F est un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 18 (Formule de Grassmann - [Gr] 24). $\dim(E+F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) < +\infty$

Proposition 19 ([Gr] 18). $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F) < +\infty$

Proposition 20. $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F) < +\infty$

D. Extensions de corps

Dans ce paragraphe, $F/L/K$ est une tour d'enxtensions de corps.

Définition 21 ([P] 65). *On appelle* degré de L/K *l'entier* $[L:K] = \dim_K(L)$.

Théorème 22 (de la base téléscopique - [P] 65). *Supposons F/L et L/K de degrés finis : elles admettent alors des bases $\{f_1,\dots,f_n\}$ et $\{e_1,\dots,e_p\}$ respectivement.*

La famille $\{e_i f_j\}_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}}$ est une base de F/K, et donc $[F:K] = [F:L]\cdot[L:K]$.

Définition 23 ([P] 66). *On dit que $\alpha \in L$ est* algébrique *sur K s'il existe $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(\alpha) = 0$.*

Le cas échéant, on définit le polynôme minimal de α sur K *comme étant l'unique générateur unitaire de l'idéal $\{P \in K[X] \mid P(\alpha) = 0\}$, appelé* idéal annumateur de α.

Notation 24 ([P] 66). *Soit $\alpha \in L$. On pose $K[\alpha] = \{P(\alpha) \mid P \in K[X]\}$ et $K(\alpha = \mathrm{Frac}(K[\alpha]))$.*

Théorème 25 ([P] 66). *Soit $\alpha \in L$. Sont équivalentes :*

1. *α est algébrique sur K*
2. *$K[\alpha] = K(\alpha)$*
3. *$[K[\alpha] : K] < +\infty$*

Le cas échéant, $[K[\alpha] : K]$ est le degré du polynôme minimal de α sur K.

II. Rang d'une application linéaire, d'une matrice, d'une famille

A. Définitions - formule du rang et conséquences

Dans ce paragraphe, on se donne F de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, et $(x_1, \dots, x_r) \in E^r$.

Définition 26 ([Gr] 61,82). 1. *Le* rang de u *est l'entier* $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$;
2. *Le* rang de $\{x_1, \dots, x_r\}$ *est l'entier* $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_r) = \dim(\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_r))$.

Proposition 27 ([Gr] e82). $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n))$

Théorème 28 (du rang - [Gr] 64). $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u)$

Théorème 29 ([Gr] 65). *Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors u bijective $\iff$ u injective $\iff$ u surjective $\iff$ $\exists v \mathcal{L}(F, E) : u \circ v = \mathrm{id}_E \iff \exists v \in \mathcal{L}(E, F) : v \circ u = \mathrm{id}_F$.*

Exemple 30 ([Gr] 65). *Ce n'est pas vrai en dimension infinie : dans $K[X]$, $P \mapsto P'$ est surjective mais pas injective.*

Proposition 31. — $\forall v \in GL(E)$, $\mathrm{rg}(u \circ v) = \mathrm{rg}(u)$
— $\forall w \in GL(F)$, $\mathrm{rg}(w \circ u) = \mathrm{rg}(u)$

Corollaire 32. *Le rang est invariant par équivalence.*

B. Le cas particulier des matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Notons $C_1, \dots, C_p$ ses colonnes et $L_1, \dots, L_n$ ses lignes.

Définition 33 ([Gr] 33). *Le* rang de A *est l'entier* $\mathrm{rg}(A) = \dim(\{AX \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(X)\}) = \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_p)$.

Proposition 34 ([Gr] 82). *Le rang d'une application linéaire est le rang de sa matrice dans n'importe quel couple de bases.*

Théorème 35 ([Go] 128). $\mathrm{rg}(A) = r \implies A$ *est équivalente à* $J_{n,p,r} := \begin{pmatrix} I_r & 0_{p-r} \\ 0_{n-r} & 0_* \end{pmatrix}$.

Corollaire 36 ([Go] 128). *Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, elles ont le même rang.*

Remarque 37 ([Go] 128). *Pour déterminer le rang de A en pratique, on utilise l'algorithme du pivot de Gauss pour transformer A en $J_{n,p,r}$.*

Théorème 38 ([Gr] 83). $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$

Théorème 39 ([Go] 128). *Le rang de A est la taille de sa plus grande sous-matrice inversible, donc l'ordre de son plus grand mineur non nul.*

Corollaire 40. *Si L/K est une extension de K, alors $\mathrm{rg}_K(A) = \mathrm{rg}_L(A)$.*

III. Applications

A. Formes quadratiques réelles

Théorème 41 (Loi d'inertie de Sylvester - [R] 476). *Soient E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$, et q est une forme quadratique sur E. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E orthogonale pour q. Quitte à renuméroter $\mathcal{B}$, supposons que $q(e_1) > 0, \dots, q(e_s) > 0, q(e_{s+1}) < 0, \dots, q(e_{s+t}) < 0, q(e_{s+t+1}) = \cdots = q(e_n) = 0$. Le couple (s, t) ne dépend alors pas du choix de la base orthogonale : on l'appelle* signature de q.

Théorème 42. *La classe de congruence d'une forme quadratique réelle ne dépend que du rang et de la signature.*

B. Réduction des endomorphismes

Dans ce paragraphe, on fixe $u \in \mathcal{L}(E)$.

Proposition/Définition 43 ([R] 604). *$\{P \in K[X] \mid P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$ est un idéal non nul : son unique générateur unitaire est appelé* polynôme minimal de u. *On le note μ_u.*

Théorème 44 ([R] 683). *u est diagonalisable $\iff$ μ_u est sciendé à racines simples.*

Dans le groupe suivant, E est un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 45 ([R] 743). *On dit que u est* normal *si $uu^* = u^*u$ où u^* est l'adjoint de u.*

Lemme 46 ([R] 745). *Si u est normal, $\exists P_1, \dots, P_r$ sont de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux et stables par u tels que $E = P_1 \bigoplus \cdots \bigoplus P_r$.*

Théorème 47. *Si u est normal, alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D & & \\ & R_1 & \\ & & \ddots \\ & & & R_p \end{pmatrix}$ par blocs, avec D diagonale et les R_k de la forme $\begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$, $b_k \neq 0$.*

Développements

— Développement 1 : Loi inertie Sylvester 41 et Th 42.
— Développement 2 : Lemme 46 et Théorème 47

Références

R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
P *Cours d'algèbre*, Perrin
Gr *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone, 6e édition, 2e version
Go *Les maths en tête - Algèbre et Probabilités*, Xavier Gourdon, 3e édition

149 : Déterminant. Exemples et applications.

Dans cette leçon, K désigne un corps, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E.

I. Les notions de déterminants

A. Des formes multilinéaires au déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 1 ([Go] 140). *Une* forme k-linéaire sur E *est une application* $\varphi : E^k \to \mathbb{K}$ *telle que pour tout* $i \in [\![1, k]\!]$, *pour tout* $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_k)$ *est linéaire. On note* $\bigotimes^k E^*$ *l'ensemble des formes* k*-linéaires sur* E.

Proposition 2. $\left(e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^*\right)_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n}$ *est une base de* $\bigotimes^k E^*$, *où pour* $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^*(x_1, \dots, x_k) = e_{i_1}^*(x_1) \cdots e_{i_k}^*(x_k)$.

Définition 3 ([Go] 140-141). *Une forme* k*-linéaire* alternée *est une forme* k*-linéaire* $\varphi \in \bigotimes^k E^*$ *telle que* $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$, $\forall (x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1, \dots, x_k)$.

On note $\bigwedge^k E^*$ *l'espace des formes* k*-linéaires alternées sur* E.

Proposition 4. $\left(e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*\right)_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n}$ *est une base de* $\bigwedge^k E^*$, *où pour* $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) e_{i_1}^*(x_{\sigma(1)}) \dots e_{i_k}^*(x_{\sigma(k)})$.

Corollaire 5. *On a* $\dim\left(\bigwedge^k E^*\right) = \binom{n}{k}$.

Définition 6. *On appelle* déterminant dans la base $\mathcal{B}$ *l'unique forme* n*-linéaire alternée* $\det_{\mathcal{B}}$ *sur* E *vérifiant* $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$. *(La fammille* $(\det_{\mathcal{B}})$ *est une base de* $\bigwedge^n E^*$.*)*

B. Déterminant d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

C. Propriétés analytiques

II. Calcul pratique d'un déterminant

A. Cas simples, pivot de Gauss

B. Mineurs, cofacteurs et développements

C. Déterminants remarquables

III. Applications des déterminants...

A. ...en algèbre linéaire

B. ...en calcul intégral

C. ...en géométrie

Développements

— Développement 1 : Loi inertie Sylvester 41 et Th 42.

— Développement 2 : Lemme 46 et Théorème 47

Références

Ro *Petit guide du calcul différentiel*, François Rouvière, 4e édition

IP *L'oral à l'agrégation de mathématiques*, Lucas Issenmann, Timothée Pecatte

M2 *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*, Roger Mansuy, Rached Mneimné, 3e édition

Gr *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone, 6e édition, 2e version

Go *Les maths en tête - Algèbre et Probabilités*, Xavier Gourdon, 3e édition

BMP *Objectif Agrégation*, Vincent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré, 2e édition

BP *Théorie de l'intégration*, Marc Briane, Gilles Pagès, 7e édition

C *Carnet de voyage en Algébrie*, Philippe Caldero, Marie Peronnier

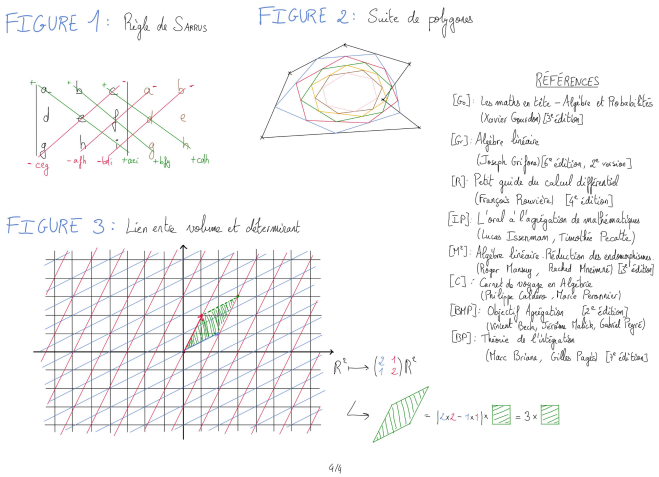


FIGURE 1.4 – s