

101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples d'applications.

Dans cette leçon, G désigne un groupe de neutre 1, et X désigne un ensemble.

I. Action d'un groupe sur un ensemble

A. Définitions et premiers exemples

Définition 1 ([R] 19, [U] 27). Une action de G sur X est une application $G \times X \rightarrow X$ définie par $(g, x) \mapsto g \cdot x$ vérifiant

1. $\forall (g, g') \in G^2, \forall x \in X, g' \cdot (g \cdot x) = (g'g) \cdot x$
2. $\forall x \in X, 1 \cdot x = x$

Pour signifier que G agit sur X , on note $G \curvearrowright X$.

Exemple 2 ([R] 19, [U] 28). — $\mathfrak{S}(X) \curvearrowright X$ par $\sigma \cdot x = \sigma(x)$
— Si E est un espace vectoriel, alors $GL(E) \curvearrowright E$ par $\varphi \cdot x = \varphi(x)$
— $(g, x) \mapsto x$ est une action de G sur X , appelée action triviale.

Proposition 3 ([R] 19, [U] 28). La donnée d'une action $(g, x) \mapsto g \cdot x$ de G sur X équivaut à la donnée d'un morphisme $\varphi : G \rightarrow \mathfrak{S}(X)$, $g \mapsto [x \mapsto g \cdot x]$, appelé morphisme associé à l'action de G sur X .

Définition 4 ([R] 19/21, [U] 29). Soit $x \in X$. Alors :

- L'orbite de x est l'ensemble $\text{Orb}(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ (aussi noté $G \cdot x$);
- Le stabilisateur de x est l'ensemble $\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$.

Proposition 5 ([U] 34/37). 1. $G \curvearrowright G$ par $g \cdot h = ghg^{-1}$ (on l'appelle action par conjugaison). Le stabilisateur de $h \in G$ est appelé centralisateur de h , et est noté $C(h)$.

2. G agit sur l'ensemble de ses sous-groupes par $g \cdot H = gHg^{-1}$ (action par conjugaison). Le stabilisateur de $H \leq G$ est appelé normalisateur de H , et est noté $N(H)$.

Définition 6 ([R] 20, [U] 29/31). On dit que l'action de G sur X est transitive si elle n'a qu'une seule orbite, i.e. si $\forall (x, y) \in X^2, \exists g \in G : g \cdot x = y$.

On dit que l'action de G sur X est fidèle si φ est injective.

Exemple 7 ([U] 31). — $\mathfrak{S}_n \curvearrowright [1, n]$ transitivement par $\sigma \cdot i = \sigma(i)$

- $G \curvearrowright G$ fidèlement par $g \cdot h = gh$ (on l'appelle action par translation à gauche)
- Soit H un sous-groupe de G . L'action de G sur G/H définie par $g \cdot xH = gxH$, appelée action par translation à gauche, est transitive.

Proposition 8 ([R] 21). Pour tout $x \in X$, $\text{Stab}(x)$ est un sous-groupe de G .

Proposition 9 ([U] 30). $x \mathcal{R} y \iff \exists g \in G : y = g \cdot x$ définit une relation d'équivalence sur X dont les classes sont les orbites de l'action de G sur X .

Corollaire 10 ([U] 30). Les orbites partitionnent X .

Exemple 11 ([U] 41). Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Le groupe $\langle \sigma \rangle$ agit sur $[1, n]$ par $\sigma^k \cdot i = \sigma^k(i)$. Les orbites non ponctuelles sont les supports des cycles dans la décomposition en produit de cycles à supports disjoints de σ .

B. Cas d'un groupe et d'un ensemble finis

Dans ce paragraphe, on suppose G et X finis. On pose $n = \text{Card}(G)$.

Théorème 12 (de Cayley - [R] 21, [U] 31). G s'identifie à un sous-groupe de \mathfrak{S}_n .

Proposition 13 ([R] ?, [U] ?). $\forall (x, y) \in X^2, y \in \text{Orb}(x) \implies \exists g \in G : \text{Stab}(y) = g \text{Stab}(x) g^{-1}$.

Théorème 14 (Relation orbite-stabilisateur - [R] 21). Pour tout $x \in X$, $G/\text{Stab}(x)$ et $\text{Orb}(x)$ sont équipotents (cela reste vrai si G est infini). Par conséquent,

$$\text{Card}(G) = \text{Card}(\text{Stab}(x)) \text{Card}(\text{Orb}(x))$$

Théorème 15 (Équation aux classes - [R] 21). Soit $\{x_1, \dots, x_r\}$ un système de représentants pour les orbites. Alors,

$$\text{Card } X = \sum_{i=1}^r \text{Card}(\text{Orb}(x_i)) = \sum_{i=1}^r \frac{\text{Card } G}{\text{Card}(\text{Stab}(x_i))}$$

Exemple 16 ([R] 22). Si $\text{Card } G$ est une puissance d'un nombre premier, alors son centre $Z(G) := \{g \in G \mid \forall h \in G, ghg^{-1} = h\}$ n'est pas réduit à $\{1\}$.

Corollaire ([R] 23) : tout groupe d'ordre p^2 avec p premier est abélien.

Théorème 17 (Formule de Burnside - [R] 35). L'action de G sur X possède $\frac{1}{\text{Card } G} \sum_{g \in G} \text{Card}(\text{Fix}(g))$ orbites, où $\text{Fix}(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$.

Exemple 18 ([C] 132). En moyenne, une permutation de $[1, n]$ tirée aléatoirement a 1 point fixe.

Exemple 19 ([C] 132). Si G n'est pas abélien, alors la probabilité de tirer simultanément deux éléments qui commutent vaut $\frac{k}{n}$, avec k le nombre de classes de conjugaison de G .

Théorème 20 (de Cauchy - [R] 23). Soit p un nombre premier. Si $p \mid \text{Card } G$, alors G admet un élément d'ordre p .

II. Applications

A. En géométrie : les isométries des polytopes

Théorème 21 ([R] 94). L'ensemble des isométries du plan conservant un triangle équilatéral est un groupe isomorphe à \mathfrak{S}_3 .

Proposition 22 ([R] 82). Soit \mathcal{C} un cube. L'ensemble des isométries de l'espace conservant \mathcal{C} est un groupe, noté $\text{Is}(\mathcal{C})$. On note $\text{Is}^+(\mathcal{C})$ le sous-groupe de \mathcal{C} formé de rotations.

Théorème 23 ([R] 85). $\text{Is}^+(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4$ et $\text{Is}(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Théorème 24 ([R] 95). En notant \mathcal{T} le tétraèdre régulier, on a $\text{Is}^+(\mathcal{T}) \cong \mathcal{A}_4$ et $\text{Is}(\mathcal{T}) \cong \mathfrak{S}_4$.

B. Du côté des matrices

Dans ce paragraphe, K désigne un corps. On fixe $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Proposition 25 ([R] 184/185/199/195/206). *Les applications suivantes sont des actions :*

1. Translation à gauche : $GL_n(K) \times \mathcal{M}_{n,m}(K) \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(K), (P, A) \mapsto PA$
2. Translation à droite : $GL_n(K) \times \mathcal{M}_{n,m}(K) \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(K), (P, A) \mapsto AP^{-1}$
3. Similitude (ou conjugaison) : $GL_n(K) \times \mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathcal{M}_n(K), (P, A) \mapsto PAP^{-1}$
4. Équivalence (ou action de Steiniz) : $(GL_n(K) \times GL_m(K)) \times \mathcal{M}_{n,m}(K) \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(K), ((P, Q), A) \mapsto PAQ^{-1}$
5. Congruence : $GL_n(K) \times \mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathcal{M}_n(K), (P, A) \mapsto {}^tPAP$

Proposition 26 ([R] 184/185/?/195/207). *Dans l'ordre de la proposition précédente, les orbites sont caractérisées par :*

1. le noyau de A
2. l'image de A
3. les polynômes minimal et caractéristique de A
4. Ça dépend de K ...

Exemple 27. $\text{Diag}(1, 2, 2)$ et $\text{Diag}(1, 1, 2)$ ont même polynôme minimal mais ne sont pas semblables : il faut donc bien les deux informations !

C. Théorèmes de Sylow

Dans ce paragraphe, on se donne p premier, et on note $\text{Card } G = p^\alpha m, m \wedge p = 1$.

Définition 28 ([U] 85). *Un p -Sylow de G est un sous-groupe de G de cardinal p^α .*

$\text{Syl}_p(G)$ désigne l'ensemble des p -Sylow de G , et $n_p := \text{Card}(\text{Syl}_p(G))$.

Théorème 29 (de Sylow - [U] 87). *Soit G un groupe d'ordre $p^\alpha m, m \wedge p = 1$. Alors,*

1. $\text{Syl}_p(G) \neq \emptyset$
2. G agit transitivement sur $\text{Syl}_p(G)$ par conjugaison
3. $n_p \equiv 1 [p]$

Définition 30. *On dit que G est simple si les seuls sous-groupes de G distingués (i.e. fixe par l'action par conjugaison de G) sont $\{1\}$ et G .*

Théorème 31 ([S] 277). *Si G est simple et d'ordre 60, alors $G \cong A_5$.*

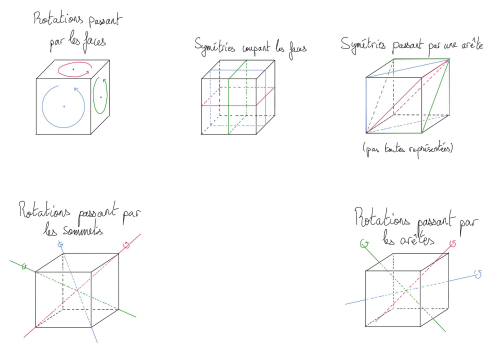
Développements

- Développement 1 : Théorème 23
- Développement 2 : Théorème 31

Références

- U *Théorie des groupes*, Félix Ulmer
- R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
- S *Algèbre pour la licence 3*, Szpirglas
- C *Carnets de voyage en Algèbre*, Caldero

FIGURE : Isométries du cube



105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

I. Permutations d'un ensemble fini

A. Introduction

Définition 1 ([R] 37). Soit E un ensemble. On note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des bijections de E dans E . On l'appelle groupe symétrique de E . On notera plus simplement $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}([1, n])$. On appelle permutation de E un élément de $\mathfrak{S}(E)$.

Proposition 2. $\mathfrak{S}(E)$ est un groupe pour la composition, de neutre l'identité de E .

Proposition 3 ([R] 39). Si E et F sont deux ensembles équipotents, alors $\mathfrak{S}(E)$ et $\mathfrak{S}(F)$ sont isomorphes (en tant que groupes).

Proposition 4 ([R] 39). Pour $n \geq 3$, \mathfrak{S}_3 n'est pas commutatif.

Dans toute la suite, on étudiera \mathfrak{S}_n pour $n \geq 3$.

Proposition 5 ([R] 40). $\#\mathfrak{S}_n = n!$

Notation ([U] 41). Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On représentera σ par la matrice $2 \times n$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

B. Action naturelle de \mathfrak{S}_n sur $[1, n]$, conséquences

Proposition 6 ([U] 41). \mathfrak{S}_n agit naturellement sur $[1, n]$ par $\sigma \cdot i = \sigma(i)$. Le morphisme associé est l'identité de \mathfrak{S}_n .

Définition 7 ([U] 42). On note $\text{Fix}(\sigma)$ l'ensemble des points fixes de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Son complémentaire dans $[1, n]$ est appelé support de σ , et est noté $\text{Supp}(\sigma)$.

Proposition 8 ([U] 43). Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Le sous-groupe $\langle \sigma \rangle$ agit sur $[1, n]$ par restriction de l'action de \mathfrak{S}_n . Les orbites de cette action sont appelées σ -orbites. La réunion des σ -orbites ponctuelles est $\text{Fix}(\sigma)$. Les σ -orbites non ponctuelles partitionnent $\text{Supp}(\sigma)$.

Exemple 9. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. On a $\text{Supp}(\sigma) = \{1, 2\} \sqcup \{4, 5\} = \langle \sigma \rangle \cdot \{1\} \sqcup \langle \sigma \rangle \cdot \{4\}$.

Définition 10 ([U] 43). Un k -cycle ($2 \leq k \leq n$) est une permutation n'ayant qu'une seule σ -orbite non ponctuelle $\{i_1, \dots, i_k\}$. On la note $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ pour signifier que $\forall j \notin \{i_1, \dots, i_k\}, \sigma(j) = j$ et $\sigma(i_j) = i_{j+1}$ en regardant les indices modulo k .

Un 2-cycle est appelé transposition.

Proposition 11 ([U] 43). $(i_1, i_2, \dots, i_k) = (i_2, i_3, \dots, i_k, i_1) = \dots = (i_k, i_1, i_2, \dots, i_{k-1})$

Proposition 12. Un k -cycle est d'ordre k .

C. Décomposition d'une permutation, conséquences

Proposition 13 ([U] 42). Deux permutations à supports disjoints commutent.

Théorème 14 ([U] 43). Toute permutation se décompose de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme produit de cycles à supports disjoints.

Algorithme 15 ([U] 43). Pour trouver une telle décomposition, il suffit de trouver les r -orbites.

1. On calcule $\sigma(1), \sigma^2(1), \dots$ jusqu'à trouver $\sigma^{k_1}(1) = 1$ (NB : $k_1 \leq n$);
2. On pose $i_2 = \min([1, n] \setminus \langle \sigma \rangle \cdot \{1\})$, et de même on calcule $\sigma(i_2), \sigma^2(i_2), \dots$ jusqu'à trouver $\sigma^{k_2}(i_2) = i_2$;
3. On itère jusqu'à épuiser $[1, n]$.

On a alors $\sigma = (1, \sigma(1), \dots, \sigma^{k_1-1}(1)) \circ (i_2, \sigma(i_2), \dots, \sigma^{k_2-1}(i_2)) \circ \dots \circ (i_j, \sigma(i_j), \dots, \sigma^{k_j-1}(i_j))$

Exemple 16. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (1, 3, 4)(5, 6)$

Proposition 17 ([R] 44). $(i_1, \dots, i_k) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \dots (i_{k-1}, i_k)$

Corollaire 18 ([R] 44). Les transpositions engendrent \mathfrak{S}_n .

Proposition 19 ([R] 45). $\mathfrak{S}_n = \langle (i, i+1), 1 \leq i \leq n \rangle = \langle (1, i), 2 \leq i \leq n \rangle = \langle (1, 2), (1, 2, \dots, n) \rangle$

Définition 20 ([U] 45). On appelle type de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ la liste croissante des cardinaux des σ -orbites.

Exemple 21. Le type de $(1, 2, 5)(3, 4)(7, 8) \in \mathfrak{S}_8$ est la liste $[1, 2, 2, 3]$.

Proposition 22 ([U] 46). Deux permutations sont conjuguées dans \mathfrak{S}_n si, et seulement si, elles ont le même type. Cela décrit donc les classes de conjugaison de \mathfrak{S}_n .

Proposition 23 ([U] 45). Si σ est du type $[l_1, \dots, l_k]$, alors $\text{ord}(\sigma) = l_1 \vee \dots \vee l_k$.

D. Signature d'une permutation, groupe alterné

Proposition 24 ([R] 47). Il existe un unique morphisme $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$ qui envoie les transpositions sur -1 . On appelle signature de σ la quantité $\varepsilon(\sigma)$.

Corollaire 25. La signature d'un k -cycle est $(-1)^{k+1}$.

Proposition 26 ([R] 48). $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

En particulier, la signature mesure le nombre d'inversions.

Définition 27 ([R] 48). On appelle n -ième groupe alterné le sous-groupe $\mathcal{A}_n = \text{Ker}(\varepsilon)$. C'est l'ensemble des permutations dîtes paires.

Exemple 28. $\mathcal{A}_3 = \{\text{id}, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$.

Proposition 29. $\#\mathcal{A}_n = \frac{n!}{2}$

Théorème 30 ([R] 49). Pour $n \geq 3$, les 3-cycles engendrent \mathcal{A}_n , et y sont conjugués.

Théorème 31 ([R] 50). Pour $n \geq 5$, \mathcal{A}_n n'admet pas de sous-groupe distingué non trivial.

II. Quelques applications du groupe symétrique

A. En géométrie : les isométries des polytopes

Théorème 32 ([R] 94). *L'ensemble des isométries du plan conservant un triangle équilatéral est un groupe isomorphe à \mathfrak{S}_3 .*

Proposition 33 ([R] 82). *Soit \mathcal{C} un cube. L'ensemble des isométries de l'espace conservant \mathcal{C} est un groupe, noté $\text{Is}(\mathcal{C})$. On note $\text{Is}^+(\mathcal{C})$ le sous-groupe de $\text{Is}(\mathcal{C})$ formé des rotations.*

Théorème 34 ([R] 85). $\text{Is}^+(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4$ et $\text{Is}(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Théorème 35 ([R] 95). *En notant \mathcal{T} le tétraèdre régulier, on a : $\text{Is}(\mathcal{T}) \cong \mathfrak{S}_4$ et $\text{Is}^+(\mathcal{T}) \cong \mathfrak{A}_4$.*

Chez les (actions de) groupes

Théorème 36 (de Cayley - [R] 53). *Tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de \mathfrak{S}_n .*

Proposition 37. *Comme pour tout corps (commutatif) K , $\mathfrak{S}_n \curvearrowright GL_n(K)$, tout groupe de garde n est isomorphe à un sous-groupe de $GL_n(K)$.*

Exemple 38. Soit $D_{2 \times 4}$ le groupe des isométries du carré. Comme $\#D_{2 \times 4} = 8$, $D_{2 \times 4}$ est isomorphe à un sous-groupe de \mathfrak{S}_8 . Noton φ un tel isomorphisme. Comme $D_{2 \times 4} = \langle r, s \rangle$ où $\text{ord}(r) = 4$, $\text{ord}(s) = 2$ et $\text{ord}(rs) = 2$, on a $\varepsilon \circ \varphi(s) = \varepsilon \circ \varphi(rs) = -1$, donc $\varepsilon \circ \varphi(r) = 1$.

C. Polynômes symétriques

Définition 39 ([R] 55). *Un polynôme symétrique est un polynôme $P \in K[X_1, \dots, X_n]$ tel que $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = P(X_1, \dots, X_n)$.*

Définition 40 ([R] 55). *Les polynômes symétriques élémentaires sont les*

$$\Sigma_{k,n} = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} X_{i_1} \dots X_{i_k} \in K[X_1, \dots, X_n]$$

Théorème 41 (ADMIS - [R] 55). *Pour tout polynôme symétrique $P \in K[X_1, \dots, X_n]$, il existe un unique polynôme $Q \in K[\Sigma_{1,n}, \dots, \Sigma_{n,n}]$ tel que $P(X_1, \dots, X_n) = Q(\Sigma_{1,n}, \dots, \Sigma_{n,n})$.*

D. En algèbre (multi-)linéaire

Dans ce paragraphe, E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E .

Définition 42 ([R] 545). *Une forme k -linéaire sur E est une application $\varphi : E^k \rightarrow \mathbb{K}$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, pour tout $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_k)$ est linéaire.*

On note $\bigotimes^k E^*$ l'ensemble des formes k -linéaires sur E .

Proposition 43 ([R] 546). $(e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*)_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$ est une base de $\bigotimes^k E^*$, où pour $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*(x_1, \dots, x_k) = e_{i_1}^*(x_1) \dots e_{i_k}^*(x_k)$.

Définition 44 ([R] 546). *Une forme k -linéaire alternée est une forme k -linéaire $\varphi \in \bigotimes^k E^*$ telle que $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$, $\forall (x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1, \dots, x_k)$.*

On note $\bigwedge^k E^*$ l'espace des formes k -linéaires alternées sur E .

Proposition 45. $(e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*)_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$ est une base de $\bigwedge^k E^*$, où pour $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) e_{i_1}^*(x_{\sigma(1)}) \dots e_{i_k}^*(x_{\sigma(k)})$.

Corollaire 46. On a $\dim \left(\bigwedge^k E^* \right) = \binom{n}{k}$.

Définition 47. On appelle déterminant dans la base \mathcal{B} l'unique forme n -linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}}$ sur E vérifiant $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$. (La famille $(\det_{\mathcal{B}})$ est une base de $\bigwedge^n E^*$.)

Proposition 48 ([R] 547). $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) e_1^*(x_{\sigma(1)}) \dots e_n^*(x_{\sigma(n)})$.

E. Résultats en probabilités

Définition 49 ([R] 51). On appelle dérangement une permutation sans point fixes.

Proposition 50. Notons d_n le nombre de dérangements de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. En particulier, la probabilité de choisir un dérangement en tirant au hasard une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tend vers $\frac{1}{e}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Proposition 51 ([C]). Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de points fixes d'une permutation aléatoirement choisie dans \mathfrak{S}_n . Alors $\mathbb{E}[X] = \mathbb{V}[X] = 1$.

F. Groupes simples d'ordre 60

Dans ce paragraphe, on se donne p premier, et on note $\#G = p^\alpha m$, $m \wedge p = 1$.

Définition 52 ([U] 85). *Un p -Sylow de G est un sous-groupe de G de cardinal p^α .*

Notation. $\text{Syl}_p(G)$ désigne l'ensemble des p -Sylow de G , et $n_p = \# \text{Syl}_p(G)$.

Théorème 53 (de Sylow - [U] 87). *Soit G un groupe d'ordre $p^\alpha m$, p premier et $m \wedge p = 1$.*

1. $\text{Syl}_p(G) \neq \emptyset$
2. G agit transitivement sur $\text{Syl}_p(G)$ par conjugaison
3. $n_p \equiv 1 [p]$ (donc $n_p \mid m$).

Définition 54. On dit que G est simple si les seuls sous-groupes de G distingués (i.e. fixe par l'action par conjugaison de G) sont $\{1\}$ et G .

Théorème 55 ([S] - 277). *Si G est simple et d'ordre 60, alors $G \cong \mathfrak{A}_5$.*

Développements

- Développement 1 : Théorème 34
- Développement 2 : Théorème 55

Références

- R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
- U *Théorie des groupes*, Félix Ulmer
- S *Algèbre pour la licence 3*, Szpirglas
- C *Carnets de voyage en Algèbre*, Caldero

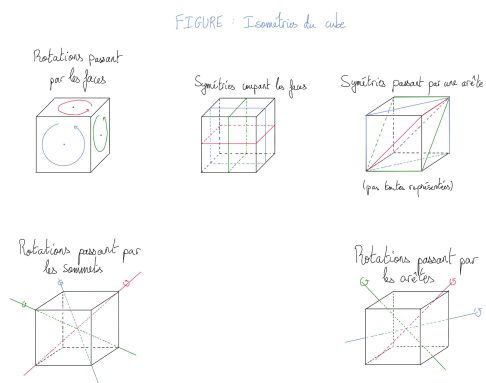


FIGURE 1.1 – Isométries du cube

106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications

Dans cette leçon, K est un corps commutatif, et E est un K -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

I. Endomorphismes inversibles d'un espace vectoriel

A. Introduction au groupe linéaire

Théorème 1 ([Rb] 139). — L'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E est un anneau pour $+$ et \circ , dont le groupe des inversibles est noté $GL(E)$, et est appelé groupe linéaire de E .

— Similairement, l'ensemble $\mathcal{M}_n(K)$ des matrices carrées de taille $n \times n$ est un anneau pour $+$ et \times , dont le groupe des inversibles est noté $GL_n(K)$, appelé groupe linéaire d'ordre n sur K .

Remarque 2 ([Rb] 140). Étant donnée une base \mathcal{B} , l'application $u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ induit un isomorphisme entre $GL(E)$ et $GL_n(K)$.

Définition 3 ([Rb] 141). On note $SL(E)$ (resp. $SL_n(K)$) le noyau du morphisme \det de $GL(E)$ (resp. $GL_n(K)$) dans K^\times . On l'appelle groupe spécial linéaire de E (resp. groupe spécial linéaire d'ordre n sur K).

Théorème 4 ([Rb] 140). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Comme $\dim E < +\infty$, sont équivalentes :

1. $u \in GL(E)$
2. (a) u est injectif
(b) $\text{Ker } u = \{0\}$
(c) $\exists v \in \mathcal{L}(E) : v \circ u = \text{id}_E$
3. (a) u est surjectif
(b) $\text{Im } u = E$
(c) $\exists v \in \mathcal{L}(E) : u \circ v = \text{id}_E$
4. L'image par u d'une base de E est une base de E
5. $\det(u) \neq 0$

Remarque 5. Une matrice A est inversible si, et seulement si, ses colonnes forment une base de K^n , et si, et seulement si, ses lignes forment une base de K^n .

Définition 6. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie de rapport $\lambda \in K^\times$ si $\forall x \in E, u(x) = \lambda x$.

Proposition 7. Une homothétie de rapport $\lambda \in K^\times$ est inversible, d'inverse l'homothétie de rapport $1/\lambda$.

Proposition 8 ([Rb] e168). Les homothéties sont les seuls endomorphismes à stabiliser toute droite.

B. Opérations élémentaires

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On note L_1, \dots, L_p les lignes de A , et C_1, \dots, C_n ses colonnes.

Définition 9 ([Bu] 315-317). Soient $\alpha \in K^\times, (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On définit les matrices suivantes :

— Matrice de dilatation $D_i(\alpha) = \text{diag}(1, \dots, 1, \alpha, 1, \dots, 1) \in GL_n(K)$ (α est à la i -ième position)

— Matrice de transvection $T_{i,j}(\alpha) = I_n + \alpha E_{i,j} \in GL_n(K)$

— Matrice de permutation $P_\sigma = (\delta_{i, \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n} \in GL_n(K)$

Définition 10. On définit les opérations élémentaires sur les colonnes :

- $C_i \leftarrow \alpha C_i$: on remplace C_i par αC_i
- $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$: on remplace C_i par $\alpha C_i + \alpha C_j$
- $C_i \longleftrightarrow C_j$: on échange C_i et C_j

Théorème 11 ([Bu] 315-318). On a les correspondances suivantes entre opérations élémentaires et multiplication matricielle :

- $D_i(\alpha)A \iff L_i \leftarrow \alpha L_i$
- $T_{i,j}(\alpha)A \iff L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$
- $P_{(i,j)}A \iff L_i \longleftrightarrow L_j$

et

- $AD_i(\alpha) \iff C_i \leftarrow \alpha C_i$
- $AT_{i,j}(\alpha) \iff C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i$
- $AP_{(i,j)} \iff C_i \longleftrightarrow C_j$

Proposition 12. $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes injectif de \mathfrak{S}_n dans $GL_n(K)$.

II. Structure de $GL(E)$, sous-groupe orthogonal

A. Structure de groupe

Théorème 13 (Pivot de Gauss - [Rb] 191). Pour toute matrice de rang r , il existe une suite d'opérations élémentaires qui transforme cette matrice en la matrice $J_{n,r} = \text{diag}(I_r, O_{n-r})$. Plus précisément, si $\text{rg } A = n$, alors il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et des matrices de transvection T_1, \dots, T_p telles que $A = P_\sigma T_1 \dots T_p D_\alpha$ où D_α est la matrice de dilatation D_α de rapport $\alpha = \det A$.

Corollaire 14 ([Rb] 154, 153). — Les matrices de transvection et de dilatation engendrent $GL_n(K)$;

— Les matrices de transvection engendrent $SL_n(K)$.

Corollaire 15 ([Rb] 141). $GL(E)/SL(E) \cong K^\times$

Corollaire 16 ([Rb] 141). — $Z(GL(E)) = K^\times \text{id}_E$ (c'est l'ensemble des homothéties) ;

— $Z(SL(E)) = \mathbb{U}_n(K) \text{id}_E$, où $\mathbb{U}_n(K) = \{\lambda \in K^\times \mid \lambda^n = 1\}$.

B. Le groupe spécial orthogonal

Soit q une forme quadratique sur E , de forme polaire φ . Supposons $\text{car } K \neq 2$.

Définition 17 ([P] 123-124). — Le groupe orthogonal de (E, q) est $O(q) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid q \circ u = q\}$

- Le groupe spécial orthogonal de (E, q) est $SO(q) = \{u \in O(q) \mid \det u = 1\}$
- Lorsque φ est le produit scalaire canonique relativement à une base donnée, on note $O(E) = O(q) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid {}^t u \circ u = \text{id}_E\}$ et $SO(E) = SO(q) = \{u \in O(E) \mid \det u = 1\}$.
- On note également $O_n(K) = \{M \in \mathcal{M}_n(K) \mid {}^t M M = I_n\}$ et $SO_n(K) = \{M \in O_n(K) \mid \det M = 1\}$.

Proposition 18 ([Rb] 722). Si \mathcal{B} est une base orthonormale de E , alors $u \in O(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(K)$.

Théorème 19 (de réduction des isométries - [Rb] 727). Soit $u \in O(\mathbb{R}^n)$. Il existe une base orthonormale \mathcal{B} de \mathbb{R}^n telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(R(\theta_1), \dots, R(\theta_r), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ où $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_i = \pm 1$.

Remarque 20 ([P] 146). $SO_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Théorème 21 ([C] 50). Soient p premier, $r \geq 1$ et $q = p^r$.

$$SO_2(\mathbb{F}_q) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} & \text{si } -1 \text{ est un carré mod } q \\ \mathbb{Z}/(q+1)\mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 22 ([P] 125). Soit $u \in O(q)$ telle que $u^2 = \text{id}_E$.

On dit que u est une réflexion si $\dim(\text{Ker}(u + \text{id}_E)) = 1$, i.e. si u est une symétrie par rapport à un hyperplan.

On dit que u est un renversement si $\dim(\text{Ker}(u + \text{id}_E)) = 2$, i.e. si u est une symétrie par rapport à un plan.

On suppose désormais que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et que q est définie positive.

Théorème 23 ([P] 143). Tout élément de $O(q)$ est produit d'au plus n réflexions.

Lemme 24. Si $n \geq 3$, alors pour toutes réflexions τ_1 et τ_2 , il existe deux renversements σ_1 et σ_2 tels que $\tau_1 \tau_2 = \sigma_1 \sigma_2$.

Théorème 25. Pour $n \geq 3$, tout élément de $SO(q)$ est produit d'au plus n renversements.

Remarque 26. Ces théorèmes restent vrais si E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K de caractéristique $\neq 2$, et si q est non dégénérée (Cartan, Dieudonné).

III. Topologie dans $GL(E)$

Dans ce paragraphe, K désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Proposition 27 ([Rb] 160-161). $GL(E)$ est ouvert dans $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|)$ et $u \mapsto u^{-1}$ est continue.

Proposition 28. — $GL_n(\mathbb{C})$ et $SL_n(K)$ sont connexes ;
— $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes.

Proposition 29. $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont compacts.

Théorème 30 (Décomposition polaire - [Rb] 740).

$$O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ (H, S) \mapsto HS$$

est un homéomorphisme.

Développements

- Développement 1 : Théorème 21
- Développement 2 : Théorème 23, Lemme 24 et Théorème 25

Références

- Rb *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
- P *Cours d'algèbre*, Perrin
- B *Algèbre et géométrie : CAPES et Agrégation*, Pierre Burg
- C *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et géométries*, P. Caldero, J. Germoni

108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Soit (G, \cdot) un groupe.

0. Introduction

Lemme 1 ([R] 10). Une intersection (quelconque) de sous-groupes de G est un sous-groupe de G .

Définition 2 ([R] 11). Soit X une partie de G . On appelle sous-groupe engendré par X , et on note $\langle X \rangle$, le plus petit sous-groupe de G contenant X . C'est l'intersection des sous-groupes de G contenant X .

Lorsque $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, on note plus simple $\langle X \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

Proposition 3 ([R] 11). Soit X une partie de G . Posons $X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\}$. Alors :

$$\langle X \rangle = \{x_1, \dots, x_n \mid n \in \mathbb{N}^*, (x_1, \dots, x_n) \in (X \cup X^{-1})^n\}$$

Définition 4 ([R] 11). Une partie génératrice de G est un sous-ensemble $X \subseteq G$ tel que $G = \langle X \rangle$.

Exemple 5 ([R] 12). On pose $D(G) := \langle \{[a, b] = aba^{-1}b^{-1} \mid (a, b) \in G^2\} \rangle$. On l'appelle groupe dérivé de G , c'est le plus grand sous-groupe de G tel que $G/D(G)$ est abélien.

I. Groupes monogènes, groupes cycliques

Définition 6 ([R] 13). On dit que G est monogène s'il existe $g \in G$ tel que $G = \langle g \rangle$. On dit que G est cyclique si G est monogène et fini.

Théorème 7 ([R] 14). Si G est monogène infini, alors $G \cong \mathbb{Z}$. Si G est cyclique, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Proposition 8. L'ensemble des générateurs de \mathbb{Z} est $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$.

L'ensemble des générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \exists \bar{l} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \bar{k}\bar{l} = \bar{1}\} = \{\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid k \wedge n = 1\}$.

Corollaire 9 ([R] 14). Si $G = \langle g \rangle$, alors l'ensemble des générateurs de G est $\{g^k \mid k \wedge \#G = 1\}$.

Proposition/Définition 10. L'ordre d'un élément $g \in G$ est le plus petit entier k (ou $+\infty$) tel que $g^k = 1$. C'est aussi l'ordre de $\langle g \rangle$.

Proposition 11. G est cyclique si, et seulement si, G admet un élément d'ordre $\#G$.

Corollaire 12 ([R] 14). Tout groupe d'ordre premier est cyclique, tous ses éléments sauf 1_G en sont les générateurs.

Théorème 13 ([R] 292). Pour tous $p \geq 3$ et $\alpha \geq 1$, $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.

Théorème 14 (ADMIS - [R] 294). $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est cyclique si, et seulement si, $n \in \{2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha : p \geq 3 \text{ premier}, \alpha \geq 1\}$.

II. Groupes symétriques

Soit $n \geq 3$.

Définition 15 ([U] 43). Le n -ième groupe symétrique \mathfrak{S}_n est l'ensemble des bijections de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$. Les éléments $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sont appelés permutations.

Proposition/Définition 16. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Le sous-groupe $\langle \sigma \rangle$ agit sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ par restriction de l'action de \mathfrak{S}_n . Les orbites de cette action sont appelées σ -orbites.

Définition 17 ([U] 43). Un k -cycle ($2 \leq k \leq n$) est une permutation σ n'ayant qu'une seule σ -orbite non ponctuelle $\{i_1, \dots, i_k\}$. On la note $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ pour signifier que $\forall j \notin \{i_1, \dots, i_k\}, \sigma(j) = j$, et $\sigma(i_j) = i_{j+1}$ en regardant les indices modulo k .

Un 2-cycle est appelé transposition.

Théorème 18 ([U] 43). Toute permutation se décompose de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme produit de cycles à supports disjoints.

Proposition 19 ([R] 44). $(i_1, \dots, i_k) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \cdots (i_{k-1}, i_k)$

Corollaire 20 ([R] 44). Les transpositions engendrent \mathfrak{S}_n .

Proposition 21 ([R] 44-45). $\mathfrak{S}_n = \langle (i, i+1), 1 \leq i \leq n \rangle = \langle (1, i), 2 \leq i \leq n \rangle = \langle (1, 2), (1, 2, \dots, n) \rangle$.

Proposition/Définition 22 ([R] 47). Il existe un unique morphisme $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$ qui envoie les transpositions sur -1 . On appelle signature de σ la quantité $\varepsilon(\sigma)$.

Définition 23 ([R] 49). On appelle n -ième groupe alterné le sous-groupe $\mathcal{A}_n = \text{Ker } \varepsilon$. C'est l'ensemble des permutations dites paires.

Théorème 24 ([R] 49). Pour $n \geq 3$, les 3-cycles engendrent \mathcal{A}_n , et y sont conjugués.

Théorème 25 ([R] 50). Pour $n \geq 5$, \mathcal{A}_n est simple.

III. Groupes linéaires, groupes orthogonaux

Soient K un corps et $n \geq 2$.

A. Groupes linéaires et pivot de GAUSS

Définition 26 ([R] 139). L'ensemble $\mathcal{M}_n(K)$ des matrices carrées de taille $n \times n$ est un anneau pour $+$ et \times , dont le groupe des inversibles est noté $GL_n(K)$, appelé groupe linéaire d'ordre n sur K .

Définition 27. On note $SL_n(K)$ le noyau du morphisme \det de $GL_n(K)$ dans K^\times . On l'appelle groupe spécial linéaire d'ordre n sur K .

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On note L_1, \dots, L_p les lignes de A , et C_1, \dots, C_n ses colonnes.

Définition 28 ([Bu] 315-317). Soient $\alpha \in K^\times$, $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On définit les matrices suivantes :

- Matrice de dilatation $D_i(\alpha) = \text{diag}(1, \dots, 1, \alpha, 1, \dots, 1) \in GL_n(K)$ (α est à la i -ième position)
- Matrice de transvection $T_{i,j}(\alpha) = I_n + \alpha E_{i,j} \in GL_n(K)$
- Matrice de permutation $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n} \in GL_n(K)$

Définition 29. On définit les opérations élémentaires sur les colonnes :

- $C_i \leftarrow \alpha C_i$: on remplace C_i par αC_i
- $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$: on remplace C_i par $\alpha C_i + \alpha C_j$
- $C_i \longleftrightarrow C_j$: on échange C_i et C_j

Théorème 30 ([Bu] 315-318). On a les correspondances suivantes entre opérations élémentaires et multiplication matricielle :

- $D_i(\alpha)A \iff L_i \leftarrow \alpha L_i$
- $T_{i,j}(\alpha)A \iff L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$
- $P_{(i,j)}A \iff L_i \longleftrightarrow L_j$

et

- $AD_i(\alpha) \iff C_i \leftarrow \alpha C_i$
- $AT_{i,j}(\alpha) \iff C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i$
- $AP_{(i,j)} \iff C_i \longleftrightarrow C_j$

Théorème 31 (Pivot de Gauss - [Rb] 191). Pour toute matrice de rang r , il existe une suite d'opérations élémentaires qui transforme cette matrice en la matrice $J_{n,r} = \text{diag}(I_r, O_{n-r})$. Plus précisément, si $\text{rg } A = n$, alors il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et des matrices de transvection T_1, \dots, T_p telles que $A = P_\sigma T_1 \dots T_p D_\alpha$ où D_α est la matrice de dilatation D_α de rapport $\alpha = \det A$.

Corollaire 32 ([Rb] 154, 153). — Les matrices de transvection et de dilatation engendrent $GL_n(K)$;
— Les matrices de transvection engendrent $SL_n(K)$.

B. Groupe orthogonal d'un espace quadratique

Soit (E, q) un espace quadratique sur K , de forme polaire φ . Supposons $\text{car } K \neq 2$.

Définition 33 ([P] 123-124). On définit les éléments suivants :

- Le groupe orthogonal de (E, q) est $O(q) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid q \circ u = q\}$
- Le groupe spécial orthogonal de (E, q) est $SO(q) = \{u \in O(q) \mid \det u = 1\}$.
- Lorsque φ est le produit scalaire canonique relativement à une base donnée, note $O(E) = O(q) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid {}^t u \circ u = \text{id}_E\}$ et $SO(E) = SO(q) = \{u \in O(E) \mid \det u = 1\}$
- No note également $\mathcal{O}_n(K) = \{M \in \mathcal{M}_n(K) \mid {}^t M M = I_n\}$ et $\mathcal{SO}_n(K) = \{M \in \mathcal{O}_n(K) \mid \det M = 1\}$.

Proposition 34 ([R] e723). Si \mathcal{B} est une base orthonormale de E , alors $u \in O(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}_n(K)$.

Théorème 35 (de réduction des isométries - [R] 746). Soit $u \in O(\mathbb{R}^n)$. Il existe une base orthonormale \mathcal{B} de \mathbb{R}^n telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(R(\theta_1), \dots, R(\theta_r), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ où $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_i = \pm 1$.

Définition 36 ([P] 125). Soit $u \in O(q)$ telle que $u^2 = \text{id}_E$.
On dit que u est une réflexion si $\dim(\text{Ker}(u + \text{id}_E)) = 1$, i.e. si u est une symétrie par rapport à un hyperplan.
On dit que u est un renversement si $\dim(\text{Ker}(u + \text{id}_E)) = 2$, i.e. si u est une symétrie par rapport à un plan.

On suppose désormais que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et que q est définie positive.

Théorème 37 ([P] 143). Tout élément de $O(q)$ est produit d'au plus n réflexions.

Lemme 38 ([P] 143). Si $n \geq 3$, alors pour toutes réflexions τ_1 et τ_2 , il existe deux renversements σ_1 et σ_2 tels que $\tau_1 \tau_2 = \sigma_1 \sigma_2$.

Théorème 39 ([P] 143). Pour $n \geq 3$, tout élément de $SO(q)$ est produit d'au plus n renversements.

Développements

- Développement 1 : Théorème 13
- Développement 2 : Lemme 37 et Théorèmes 38 et ??

Références

- R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
- P *Cours d'algèbre*, Perrin
- B *Algèbre et géométrie : CAPES et Agrégation*, Pierre Burg
- U *Théorie des groupes*, Félix Ulmer

120 : Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

Dans toute la leçon, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et p est un nombre premier.

I. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

A. Rappels d'arithmétique des entiers

Théorème 1 (division euclidienne - [R] 279). $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \exists ! (q, r) \in \mathbb{Z}^2 :$

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < |b| \end{cases}$$

Définition 2 ([R] 279). Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. On dit que a est congru à b modulo n , et on note $a \equiv b[n]$ si n divise $b - a$.

Proposition 3 ([R] 280). Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$. Alors $a + c \equiv b + d[n]$ et $ac \equiv bd[n]$.

B. Construction

Lemme 4. Tout idéal de \mathbb{Z} est principal, et admet un unique générateur positif.

Définition 5 ([R] 280). Le quotient de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ par son idéal $n\mathbb{Z}$ est l'anneau noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On note \bar{a} l'image de $a \in \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Remarque 6. $\bar{a} = \bar{b} \iff a \equiv b[n]$

Proposition 7 ([R] 280). $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$, et les lois sont données par Prop 3 et Rq 6.

Exemple 8. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} = \{\bar{9}, \bar{64}, \bar{-7}\}$, et on a $\bar{1} + \bar{2} = \overline{1+2} = \bar{3} = \bar{0}$, mais aussi $\bar{1} \times \bar{2} = \overline{1 \times 2} = \bar{2}$.

C. Structure d'anneau

Proposition 9 ([R] 283). L'ensemble des inversibles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est :

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid k \wedge n = 1\}$$

L'ensemble des diviseurs de 0 de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est :

$$D_0(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus [(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \cup \{0\}]$$

Exemple 10. $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$, et $D_0(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$.

Proposition 11 ([R] 241 et 281). Les idéaux propres de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $d \mid n$, $d \notin \{1, n\}$. De plus, $(d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \cong (\mathbb{Z}/\frac{n}{d}\mathbb{Z}, +)$.

Corollaire 12. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est principal.

Corollaire 13. L'ensemble des générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Exemple 14. Les idéaux propres de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sont $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, respectivement isomorphes à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Proposition 15 ([R] 295-282). $\forall n, m \geq 2$,

$$\text{Hom}_{gr}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(n \wedge m)\mathbb{Z},$$

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times,$$

$$\text{Hom}_{Ann}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \{k \bmod n \mapsto k \bmod m\} & \text{si } m \mid n \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

D. Le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Théorème 16. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ;
2. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre ;
3. n est premier.

Corollaire 17 ([R] 292). $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$.

Contre-exemple 18. C'est très faux pour n non premier ! $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$ n'a même pas 7 éléments !

II. Structure de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

A. Préambule : le théorème des restes chinois

Théorème 19 (des restes chinois - [R] 285). Soit $(a_1, \dots, a_d) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^d$. Les entiers, a_1, \dots, a_d sont deux à deux premiers si, et seulement si, les anneaux $\mathbb{Z}/a_1 \dots a_d \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/a_1 \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/a_d \mathbb{Z}$ sont isomorphes.

Le cas échéant, il existe $(u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\sum_{i=1}^d a_i b_i = 1$, où $b_i = \frac{a_1 \dots a_d}{a_i}$. L'application :

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : \mathbb{Z}/a_1 \dots a_d \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/a_1 \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/a_d \mathbb{Z} \\ x \bmod a_1 \dots a_d &\mapsto (x \bmod a_1, \dots, x \bmod a_d) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'anneaux, de réciproque :

$$\bar{\varphi}^{-1} : (x_1 \bmod a_1, \dots, x_d \bmod a_d) \mapsto \sum_{i=1}^d x_i a_i b_i \bmod a_1 \dots a_d$$

B. Fonction indicatrice d'Euler

Définition 20 ([R] 283). L'indicatrice d'Euler est : $\varphi : n \mapsto \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \#\{k \in [1, n] \mid k \wedge n = 1\}$.

Exemple 21. $\varphi(8) = 4$ d'après Exemple 10.

Proposition 22 ([R] 288). Si $a \wedge b = 1$, alors $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$.

Corollaire 23 ([R] 288). Si $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ est la décomposition de n en produit de facteurs premiers, alors :

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1) = n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Exemple 24. $\varphi(90) = \varphi(3^2)\varphi(2)\varphi(5) = 3(3-1)(2-1)(5-1) = 24$

Théorème 25 (d'Euler - [R] 283). Si $a \wedge n = 1$, alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$.

Théorème 26 (de Fermat - [R] 284). Si $a \wedge p = 1$, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$. De manière générale, $a^p \equiv a[p]$.

Proposition 27 ([R] 284).

$$n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$$

Théorème 28 ([R] 292). Si $p \geq 3$, alors $\forall \alpha \geq 1$, $(\mathbb{Z}/p^\alpha \mathbb{Z})^\times$ est cyclique.

Théorème 29 (ADMIS - [R] 294). $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est cyclique si, et seulement si, $n \in \{2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha\}$ avec $p \geq 3$ (premier) et $\alpha \geq 1$.

III. Applications

A. Résolution de systèmes de congruence

Théorème 30 ([R] 290). L'équation $ax \equiv b[n]$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$ admet des solutions si, et seulement si, $a \wedge n \mid b$.

Le cas échéant, $S(ax \equiv b[n]) = \frac{b}{a \wedge n} x_0 + \frac{n}{a \wedge n} \mathbb{Z}$, où x_0 est une solution particulière de l'équation.

Remarque 31. Le théorème des restes chinois permet de résoudre des systèmes de congruences.

Exemple 32 ([R] 291). $S \left(\begin{cases} x \equiv 2[4] \\ x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[9] \end{cases} \right) = 118 + 180\mathbb{Z}$

Remarque 33 ([R] 291). $S \left(\begin{cases} x \equiv x_1[a_1] \\ x \equiv x_2[a_2] \end{cases} \right) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a_1 \wedge a_2 \nmid x_1 - x_2 \\ x_0 + (a_1 \vee a_2)\mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}$

B. Carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Soit $c : \bar{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mapsto \bar{x}^2$. On s'intéresse à $\text{Im } c$.

Proposition 34. Tous les éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont des carrés.

On supposera désormais $p \geq 3$.

Proposition 35 ([R] 426). Soit $l : \bar{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mapsto \bar{x}^{\frac{p-1}{2}}$.

- $\forall \bar{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $c \circ l(\bar{x}) = l \circ c(\bar{x}) = \bar{1}$
- $\text{Ker } c = \text{Im } l = \{\pm 1\}$ et $\text{Im } c = \text{Ker } l$.

Corollaire 36. Il y a $\frac{p+1}{2}$ carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Théorème 37 (de Wilson - [R] 325). n est premier $\iff (n-1)! \equiv -1[n]$

Proposition 38 ([P] 75). -1 est un carré modulo p si, et seulement si, $p \equiv 1[4]$. Le cas échéant $-1 \equiv (2 \times 3 \times \dots \times \frac{p-1}{2})^2[p]$.

Théorème 39 (des deux carrés de Fermat - [P] 56). p s'écrit comme somme de deux carrés d'entiers si, et seulement si, $p = 2$ ou $p \equiv 1[4]$.

C. Algorithme de chiffrement RSA

Algorithme 40 ([G] 37). Alice veut envoyer à Bob un message représenté par un nombre entier m , en toute sécurité.

- Bob choisit en secret deux nombres premiers distincts p et q et calcule leur produit $n = pq$.
- Il choisit ensuite un entier $c < \varphi(n) = (p-1)(q-1)$ premier à $\varphi(n)$.
- Il trouve ensuite un entier d tel que $cd \equiv 1[\varphi(n)]$.
- La clé publique de Bob est (n, c) , qu'il donne à Alice, et sa clé privée est (n, d) , qu'il garde secrète.
- Alice envoie à Bob le message $m^c \bmod n$.
- Pour décoder le message, Bob calcule $(m^c)^d \equiv m[n]$.

Développements

- Développement 1 : Théorème 19 (restes chinois) et exemple 32
- Développement 2 : Théorème 28 (cyclicité des inversibles de $\mathbb{Z}/p^\alpha \mathbb{Z}$)

Références

- Rb *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
- P *Cours d'algèbre*, Perrin
- G *Les maths en tête - Algèbre et probabilités*, Xavier Gourdon, 3e édition

121 : Nombres premiers. Applications.

Pour un entier n , $\text{Div}(n)$ désigne l'ensemble des diviseurs positifs de n .

I. Résultats fondamentaux sur les nombres premiers

A. Notion de nombre premier, propriétés élémentaires

Définition 1 ([R] 303). On dit que $p \in \mathbb{N}$ est premier si $\text{Div}(p) = \{1, p\}$. On dit que n est composé si $n \neq 0$ et si $\exists a \in \mathbb{N} \setminus \{1, n\} : a \mid n$.

Dans la suite, \mathcal{P} désignera l'ensemble des nombres premiers.

Lemme 2 (d'Euclide). $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, \forall p \in \mathcal{P}, p \mid ab \implies (p \mid a) \text{ ou } (p \mid b)$.

Lemme 3 ([R] 303). $\forall n \geq 2, \exists p \in \mathcal{P} : p \mid n$

Proposition 4 ([R] 304). Tout entier composé n admet un facteur premier entre 2 et \sqrt{n} .

Théorème 5 (fondamental de l'Arithmétique - [R] 306). $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! (v_p(n))_{p \in \mathcal{P}} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}}$:

$$n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}$$

Cette écriture est appelée "(la) décomposition en produit de facteurs premiers de n ".

Définition 6 ([R] 306). Dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n , l'entier $v_p(n)$ ($p \in \mathcal{P}$) est appelé valuation p -adique de n .

Proposition 7 ([R] 307). $\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, a \mid b \iff \forall p \in \mathcal{P}, v_p(a) \leq v_p(b)$

Proposition 8 ([R] 319). $\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$

Proposition 9 ([R] 307). $\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, \forall p \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} v_p(a \vee b) &= \max(v_p(a), v_p(b)) \\ v_p(a \wedge b) &= \min(v_p(a), v_p(b)) \end{aligned}$$

B. Répartition des nombres premiers

Théorème 10 (Euclide - [R] 305). Il existe une infinité de nombres premiers.

Théorème 11 (de la progression arithmétique, Dirichlet, ADMIS). Pour tout $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $a \wedge b = 1$, il existe une infinité de nombres premiers congrus à a modulo b .

Conjecture 12 (des nombres premiers jumeaux). Il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p+2$ est premier.

Proposition 13. Il existe des intervalles de longueur arbitrairement grande ne contenant aucun nombre premier.

Théorème 14 (Bertrand - ADMIS - [R] 325). Il existe toujours un nombre premier compris entre n'importe quel entier naturel non nul et son double.

Théorème 15 (des nombres premiers - ADMIS - [R] 308).

$$\#\mathcal{P} \cap [1, n] \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln n}$$

II. Tests de primalité

Proposition 16 (Crible d'Ératosthène - ANNEXE). Le procédé suivant permet de trouver la liste croissante des nombres premiers : on part de la liste des entiers plus grands que 2. À chaque itération, on garde le plus petit nombre, et on supprime tous ses multiples.

Proposition 17. n est premier si, et seulement si, $\forall d \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor, d \nmid n$. La complexité au pire de ce test est donc en $O(\sqrt{n})$.

Théorème 18 (de Fermat). Si p est premier, alors $\forall a \in \mathbb{N}, a \wedge p = 1 \implies a^{p-1} \equiv 1 [p]$.

Remarque 19. On en déduit donc un test de non primalité.

Définition 20 ([R] 329). Un nombre n composé satisfaisant le test du théorème de Fermat est appelé nombre de Carmichael.

Exemple 21 ([R] 329). 561 est un nombre de Carmichael.

Théorème 22 (de Korselt - [R] 330). n est un nombre de Carmichael si, et seulement si, pour tout diviseur premier p de n , $(p-1) \mid (n-1)$ et $p^2 \nmid n$.

Théorème 23 (de Wilson - [R] 326). n est premier si, et seulement si, $(n-1)! \equiv -1 [n]$. C'est un test de primalité qui requiert $n-1$ multiplications dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

III. Applications des nombres premiers

A. Fonctions spéciales

Définition 24 ([R] 283). L'indicatrice d'Euler est : $\varphi : n \mapsto \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \#\{k \in [1, n] \mid k \wedge n = 1\}$.

Proposition 25 ([R] 288). $\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, a \wedge b = 1$, alors $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*, \varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$.

Corollaire 26 ([R] 288). $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi(n) = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ v_p(n) \geq 1}} p^{v_p(n)-1}(p-1) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ v_p(n) \geq 1}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Définition 27. La fonction ζ de Riemann est définie par :

$$\begin{aligned} \zeta : \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 1\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ s &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \end{aligned}$$

Proposition 28 ([KG] 461). On a :

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

Cette écriture est appelé "produit eulérien".

Théorème 29 ([KG] 461, [R] 343). $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p} = +\infty$

Définition 30 ([R] 331). La fonction de Moëbius est définie par :

$$\mu : n \in \mathbb{N}^* \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^r & \text{si } n = p_1 \dots p_r, \text{ avec } p_1, \dots, p_r \text{ distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 31 (Cesàro - ADMIS [R] 334). La probabilité de choisir au hasard $r \geq 2$ entiers entre 1 et n qui sont premiers entre eux vaut $\frac{1}{\zeta(r)}$.

B. Algorithme de chiffrement RSA

Théorème 32 (d'Euler - [R] 283). $\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, si $a \wedge n = 1$, alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1 [n]$.

De la complexité des tests de primalité découle la grande difficulté de la recherche de la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier donné. Ce principe est à la base de la sécurité de l'algorithme de chiffrement RSA, détaillé ci-dessous :

Algorithme 33 ([G] 37). Alice veut envoyer à Bob un message représenté par un nombre entier m , en toute sécurité.

- Bob choisit en secret deux nombres premiers distincts p et q et calcule leur produit $n = pq$.
- Il choisit ensuite un entier $c < \varphi(n) = (p-1)(q-1)$ premier à $\varphi(n)$.
- Il trouve ensuite un entier d tel que $cd \equiv 1 [\varphi(n)]$.
- La clé publique de Bob est (n, c) , qu'il donne à Alice, et sa clé privée est (n, d) , qu'il garde secrète.
- Alice envoie à Bob le message $m^c \bmod n$.
- Pour décoder le message, Bob calcule $(m^c)^d \equiv m [n]$.

C. Corps finis

Définition 34 ([R] 415). La caractéristique d'un anneau A est l'unique générateur positif du noyau du morphisme $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow A, n \mapsto n1_A$.

Lemme 35 ([R] 415). La caractéristique d'un corps est nulle ou première.

Exemple 36. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps de caractéristique p .

Théorème 37 ([R] 421). Il existe un corps fini de cardinal q si, et seulement si, q est une puissance d'un nombre premier. Le cas échéant, un tel corps est unique à isomorphisme près, et on note \mathbb{F}_q le corps fini à q éléments. Par ailleurs, $p = \text{car } \mathbb{F}_q$ est un nombre premier, et q est une puissance de p .

D. Le théorème des deux carrés de Fermat

Lemme 38 ([P] 75). -1 est un carré dans \mathbb{F}_p si, et seulement si, $p \equiv 1 [4]$.

Théorème 39 (des deux carrés de Fermat - [P] 56). Soit $E = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \exists (a, b) \in \mathbb{N}^2 : n = a^2 + b^2\}$. Alors, $n \in E \iff \forall p \in \mathcal{P}, p \equiv 3 [4] \implies v_p(n) \text{ est pair}$.

E. En théorie des groupes

Définition 40 ([R] 22). Un p -groupe est un groupe de cardinal une puissance de p .

Proposition 41 ([R] 22). Si un p -groupe G agit sur un ensemble fini X , alors $\#X \equiv \#X^G [p]$ où X^G est l'ensemble des éléments de X fixes par l'action de G .

Corollaire 42 ([R] 23). Le centre d'un p -groupe n'est pas trivial.

Définition 43 ([U] 85). Soit G un groupe fini de cardinal $p^\alpha m$, $m \wedge p = 1$. Un p -Sylow de G est un sous- p -groupe de G de cardinal p^α .

Théorème 44 (de Sylow - ADMIS [U] 87). Soit G un groupe d'ordre $p^\alpha m$, $m \wedge p = 1$. Alors,

1. $\text{Syl}_p(G) \neq \emptyset$
2. G agit transitivement sur $\text{Syl}_p(G)$ par conjugaison
3. $n_p \equiv 1 [p]$

Théorème 45 ([R] 292). Si $p \geq 3$, alors $\forall \alpha \geq 1, (\mathbb{Z}/p^\alpha \mathbb{Z})^\times$ est cyclique.

Proposition 46 ([R] 23). Tout groupe d'ordre p^2 est abélien.

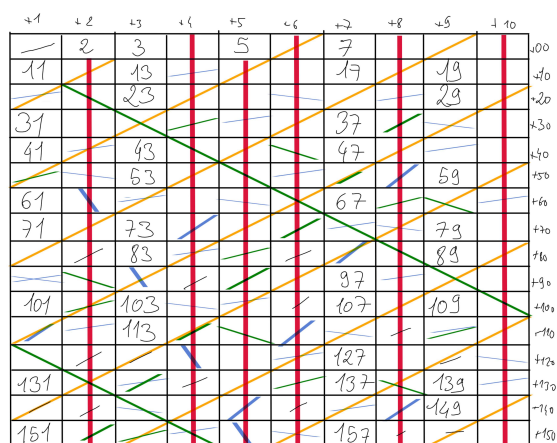
Développements

- Développement 1 : Lemme 38, et théorème 39
- Développement 2 : Théorème 45 (cyclicité des inversibles de $\mathbb{Z}/p^\alpha \mathbb{Z}$)

Références

- Rb *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
- U *Théorie des groupes*, Félix Ulmer
- G *Les maths en tête - Algèbre et probabilités*, Xavier Gourdon, 3e édition
- KG *De l'intégration aux probabilités*, Olivier Garet, Aline Kurtzmann, 2e édition augmentée

Crible d'ÉRATOSTHÈNE



4/4

FIGURE 1.2 – Crible d'Eratosthène

123 : Corps finis. Applications.

I. Des corps finis

A. Prérequis sur les extensions de corps

Soit $L/M/K$ une tour d'extensions de corps (commutatifs).

Proposition/Définition 1 ([P] 65). L est un K -espace vectoriel, sa dimension est appelée degré de L/K , et est notée $[L : K]$.

Théorème 2 (de la base télescopique - [P] 65). Soient $(e_i)_{i \in I}$ une base K -base de M et $(f_j)_{j \in K}$ une M -base de L , alors $(e_i f_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une K -base de L . En particulier, $[L : K] = [L : M] \times [M : K]$ (dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$).

Définition 3 ([P] 70). Soit $P \in K[X]$ non constant. Supposons P irréductible sur K . On dit que L est un corps de rupture (CDR) de P sur K s'il existe $\alpha \in L$ tel que $P(\alpha) = 0$ et $L = K(\alpha)$.

On dit que L est un corps de décomposition (CDD) de P sur K s'il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in L^n$ tel que $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et P est scindé sur L .

Théorème 4 ([P] 70-71). P admet un unique corps de rupture à K -isomorphisme près. Plus précisément, $K[X]/\langle P \rangle$ est un corps de rupture de P sur K .

P admet un unique corps de décomposition D à K -isomorphisme près. Celui-ci vérifie $[D : K] \leq \deg(P)!$.

B. Construction des corps finis : existence et unicité

Dans ce paragraphe K désigne un corps fini commutatif.

Exemple 5. Soit p un nombre premier. L'anneau $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps fini commutatif. On le note \mathbb{F}_p .

Théorème/Définition 6 ([P] 72). Il existe un nombre premier p rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{n \mapsto n \cdot 1_K} & K \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \end{array}$$

L'entier p est appelé caractéristique de K notée car K et \mathbb{F}_p est appelé sous-corps premier de K . C'est le plus petit sous-corps de K .

On notera p la caractéristique de K .

Corollaire 7 ([P] 72). $\#K = p^{[K : \mathbb{F}_p]}$

Remarque 8. Il n'existe pas de corps fini commutatif à 6 éléments !

Lemme/Définition 9 ([P] 73). $\text{Fr} : K \rightarrow K, x \mapsto x^p$ est un morphisme de corps, appelé morphisme de Frobenius.

Théorème 10 ([P] 73). Soient $r \in \mathbb{N}^*$, p premier et $q = p^r$. Il existe un corps fini commutatif à q éléments. Un tel corps est un CDD de $X^q - X$. En particulier, les classes d'isomorphisme de corps finis commutatifs sont caractérisées par le cardinal de ces derniers. On note \mathbb{F}_q un représentant de la classe d'isomorphisme des corps finis commutatifs à q éléments.

Théorème 11 (de Wedderburn - [P] 82). Tout corps fini est commutatif.

Exemple 12. $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[X]/\langle X^2 + X + 1 \rangle = \{0, 1, \bar{X}, 1 + \bar{X}\}$.
 $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[X]/\langle X^3 + X^2 + X + 1 \rangle$.

C. Propriétés des corps finis

Soient p un nombre premier, $r \in \mathbb{N}^*$ et $q = p^r$.

Proposition 13 (FIG. 1). $\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \mathbb{F}_{p^n} \subseteq \mathbb{F}_{p^m} \iff n \mid m$.

Proposition 14 ([P] e73). — $\overline{\mathbb{F}_p} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{F}_{p^n}$ est une clôture algébrique de \mathbb{F}_p .

— Si K est une extension de \mathbb{F}_q , alors $\mathbb{F}_q = \{x \in K \mid x^q = x\}$. En particulier, \mathbb{F}_q est l'unique sous-corps de $\overline{\mathbb{F}_p}$ de cardinal q .

Théorème 15 ([P] 74). \mathbb{F}_q^\times est cyclique.

Proposition 16 ([P] 73). Fr est un automorphisme de \mathbb{F}_q .

Théorème 17 ([R] 425). Le groupe des automorphismes de \mathbb{F}_q est cyclique d'ordre r , engendré par Fr .

Remarque 18. Pour tout $\theta \in \mathbb{F}_q$, il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Fr}^d(\theta) = \theta^{d^p} = \theta$. Le polynôme minimal de θ sur \mathbb{F}_p est $\prod_{k=1}^d (X - \text{Fr}^k(\theta))$.

Exemple 19. Soit $\beta = \bar{X}^2 + \bar{X} \in \mathbb{F}_2[X]/\langle X^4 + X + 1 \rangle$. On a $P_{\beta, \mathbb{F}_2} = X^2 + X + 1$.

II. Carrés dans un corps fini

Soient p un nombre premier impair, $r \in \mathbb{N}^*$ et $q = p^r$. On pose $c : \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q, x \mapsto x^2$ et $l : \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q, x \mapsto x^{\frac{q-1}{2}}$.

Proposition 20. $\text{Im } l = \text{Ker } c = \{\pm 1\}$ et $\text{Ker } l = \text{Im } c = \{x^2 \mid x \in \mathbb{F}_q^\times\}$.

Corollaire 21 (Critère d'Euler - [P] 75). $x \in \mathbb{F}_q^\times$ est un carré si, et seulement si $x^{\frac{q+1}{2}} = 1$.

Corollaire 22 ([P] 74). Il y a $\frac{q-1}{2}$ carrés inversibles dans \mathbb{F}_q (et $\frac{q+1}{2}$ carrés).

Proposition 23 ([P] 74). Tous les éléments de \mathbb{F}_{2^r} sont des carrés.

Proposition 24 ([P] 75). -1 est un carré dans \mathbb{F}_p si, et seulement si, $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Application 25 ([P] 56). p est la somme de deux carrés si, et seulement si, $p = 2$ ou $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Définition 26 ([R] 428). Le symbole de Legendre de $a \in \mathbb{Z}$ modulo p est défini par :

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \in p\mathbb{Z} \\ 1 & \text{si } a \text{ est un carré inversible modulo } p \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 27 ([R] 428). $\forall a \in \mathbb{Z}, \left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$. En particulier, $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ est un morphisme du groupe \mathbb{F}_p^\times .

Proposition 28 ([R] 431-434). Soit $a \in \mathbb{F}_p^\times$. L'équation de $ax^2 = 1$ a $1 + \left(\frac{a}{p}\right)$ solutions dans \mathbb{F}_p .

Théorème 29 (Loi de réciprocité quadratique - [R] 431-434). Soient p et q deux nombres premiers impairs distincts.

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

Application 30. $\left(\frac{11}{23}\right) = \left(\frac{23}{11}\right)(-1)^{11 \cdot 5} = -\left(\frac{1}{11}\right) = -1$ donc 11 n'est pas un carré modulo 23.

Proposition 31 ([R] e438, [C] 307). $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

Proposition 32. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{F}_q^3$ avec $a \neq 0$. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dans \mathbb{F}_q possède des solutions si, et seulement si, $b^2 - 4ac$ est un carré dans \mathbb{F}_q . Le cas échéant, si $\delta \in \sqrt{b^2 - 4ac}$, alors les solutions de cette équation sont $\frac{-b \pm \delta}{2a}$.

Remarque 33. Dans \mathbb{F}_{2^r} , l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est bien plus difficile à résoudre, en dehors des cas triviaux !

III. Algèbre (bi)linéaire sur les corps finis

Soient p un nombre premier impair, $r \in \mathbb{N}^*$, $q = p^r$ et $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 34 ([R] 155). — $\#GL_n(\mathbb{F}_q) = (q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} (q^k - 1)$
— $\#SL_n(\mathbb{F}_q) = \#GL_n(\mathbb{F}_q)/(q - 1)$

Théorème 35 ([C] 50).

$$SO_2(\mathbb{F}_q) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} & \text{si } -1 \text{ est un carré mod } q \\ \mathbb{Z}/(q+1)\mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 36. $SO_2(\mathbb{F}_{2^r}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{F}_{2^r} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, puis $SO_2(\mathbb{F}_{2^r}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$.

Soit E un \mathbb{F}_q -espace vectoriel de dimension finie.

Définition 37 ([R] 463). Le discriminant d'une forme quadratique f sur E est l'image de son déterminant dans une base quelconque modulo les carrés de \mathbb{F}_q^\times .

Théorème 38 ([R] e482). Il y a deux classes d'équivalence de formes quadratiques non-dégénérées sur E . Plus précisément, soient $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$ qui n'est pas un carré, et f une forme quadratique sur, de matrice M dans la base canonique.

- Si $\det M$ est un carré dans \mathbb{F}_p^\times , alors M est congruente à la matrice $\text{diag}(1, 1, \dots, 1, 1)$.
- Sinon, M est congruente à $\text{diag}(1, 1, \dots, 1, \alpha)$.

Application 39. Loi de réciprocité quadratique (Thm 29).

IV. Polynômes et corps finis

Théorème 40 (Critère d'Eisenstein - [P] 76). Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$. Soit p un nombre premier. Si $p \nmid a_n$, si $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $p \mid a_k$ et $p^2 \nmid a_0$, alors P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exemple 41. Pour tout p premier, $\Phi_p = X^{p+1} + \dots + X + 1$ est irréductible sur \mathbb{Q} .

Théorème 42 ([P] 77). Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. Soit $p \in \mathbb{Z}$ premier. Si $p \nmid a_n$ et si l'image \overline{P} de P dans $\mathbb{F}_p[X]$ est irréductible, alors P est irréductible sur \mathbb{Z} .

Remarque 43. La réciproque est fautive : considérer $X^4 + 1$.

Développements

- Développement 1 : Proposition 28, et théorème 29 : loi de réciprocité quadratique (par les formes quadratiques)
- Développement 2 : Théorème 35

Références

- R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
P *Cours d'algèbre*, Perrin
C *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et géométries*, P. Caldero, J. Germoni

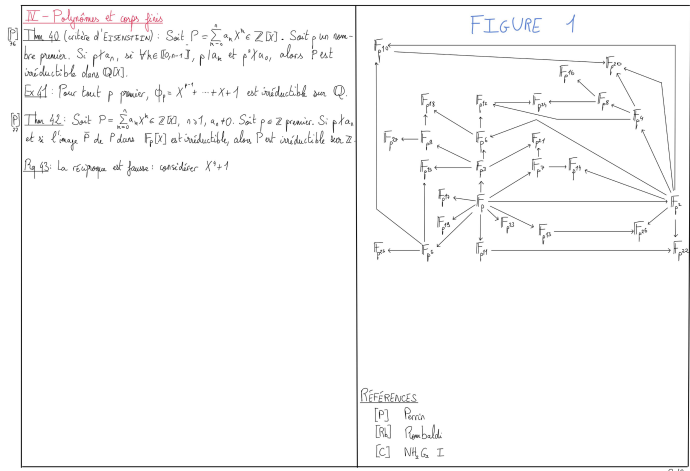


FIGURE 1.3 – Diagramme des extensions de corps finis

141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Soient A un anneau unitaire intègre commutatif, et L/K une extension de corps commutatif. Soit $P \in A[X]$.

I. Polynômes irréductibles

A. Notion d'irréductibilité pour les polynômes

Définition 1 ([R] 370). On dit que P est irréductible sur A si $P \notin A[X]^\times = A^\times$, si $P \neq 0$ et si $\forall (P_1, P_2) \in A[X]^2$, $P = P_1 P_2 \implies P_1 \in A^\times$ ou $P_2 \in A^\times$.

Exemple 2 ([R] 370). Tout polynôme de degré 1 est irréductible ; et les polynômes réels de degré 2 de discriminant < 0 sont irréductibles.

Proposition 3 ([R] 371). — Si $P \in K[X]$ est irréductible et si $\deg P > 1$, alors P n'a pas de racine dans K .
— Si $P \in K[X]$ n'a pas de racine dans K et si $\deg P \leq 3$, alors P est irréductible sur K .

Exemple 4. — $(x^2+1)^2$ est réductible sur \mathbb{R} et sans racine dans \mathbb{R} .
— Les polynômes irréductibles de petit degré de $\mathbb{F}_2[X]$ sont $X, X+1, X^2+X+1$.

B. Propriétés de $A[X]$

Proposition 5 ([R] 374). $A[X]$ euclidien $\iff A[X]$ principal $\iff A$ est un corps.

Proposition 6 ([R] e375). Si $P \in K[X]$ est irréductible, alors $K[X]/\langle P \rangle$ est un corps.

On suppose A factoriel.

Définition 7 ([S] 547-548; [P] 51). Le contenu de $P \in A[X] \setminus \{0\}$, noté $c(P)$, est un PGCD des coefficients de P . On dit que P est primitif si $c(P) \in A^\times$.

Théorème 8 ([P] 51; [S] 548). Soit $P \in A[X]$ primitif non constant. P est irréductible dans $A[X] \iff A$ est irréductible dans $K[X]$.

Exemple 9. Soient a_1, \dots, a_n des entiers distincts. Le polynôme $(X - a_1) \dots (X - a_n) - 1$ est irréductible sur \mathbb{Q} .

Lemme 10. Un produit de polynômes primitifs est primitif.

Lemme 11 (de Gauss - [S] 548; [P] 51). $c(PQ) = c(P)c(Q)$

Théorème 12 ([R] 358; [S] 548; [P] 51). $A[X]$ est factoriel $\iff A$ est factoriel.

C. Critères d'irréductibilité

Théorème 13 (Critère d'Eisenstein - [S] 549; [P] 76). Écrivons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $a_n \neq 0$. S'il existe $p \in A$ premier non nul tel que $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $p \mid a_k$, $p^2 \nmid a_0$ et $p \nmid a_n$, alors P est irréductible dans $\text{Frac}(A)[X]$.

Exemple 14. $\forall n \geq 2, \forall d \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré, $X^n - d$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Théorème 15 ([P] 77). Soit I un idéal de A . Écrivons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $a_n \neq 0$. Si $a_n \not\equiv 0 \pmod I$ et si $P \pmod I$ est irréductible dans $(A/I)[X]$ alors P est irréductible dans $A[X]$.

Exemple 16 ([P] 77). Pour tout p premier, $X^p - X - 1$ est irréductible sur \mathbb{Q} .

II. Polynômes et extensions de corps

Soient L et K deux corps commutatifs. Soit $P \in K[X]$.

A. Extensions de corps, éléments algébriques

Définition 17 ([P] 65). On dit que L est une extension de K , et on note L/K , si $K \subseteq L$.

Proposition/Définition 18 ([P] 65). L est un K -espace vectoriel dont on note $[L : K]$ la dimension, que l'on appelle degré de l'extension L/K . On dit que L/K est finie si $[L : K]$ est fini.

Théorème 19 (de la base télescopique - [P] 65). Soient $(e_i)_{i \in I}$ une base K -base de M et $(f_j)_{j \in K}$ une M -base de L , alors $(e_i f_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une K -base de L .

Corollaire 20 (Multiplicativité des degrés - [P] 65). $[L : K] = [L : M] \times [M : K]$

Définition 21 ([P] 66). On dit que $\alpha \in L$ est algébrique sur K s'il existe $P \in K[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$. Sinon, on dit que α est transcendant.

Théorème/Définition 22 ([P] 66). Si $\alpha \in L$ est algébrique sur K , alors $\{P \in K[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un idéal non nul, qui donc admet un unique générateur unitaire $P_{\alpha,K}$ appelé polynôme minimal de α sur K .

Notation. $K[\alpha] = \{P(\alpha) \mid P \in K[X]\}$

Théorème 23 ([P] 66). Soit $\alpha \in L$. Sont équivalentes :

1. α est algébrique sur K
 2. $K[\alpha] = K(\alpha)$
 3. $K[\alpha]$ est un K -espace vectoriel de dimension finie.
- Le cas échéant, $\deg P_{\alpha,L} = [K(\alpha) : K]$.

B. Corps de rupture et de décomposition

Définition 24 ([P] 70). Supposons P irréductible. On dit que L est un corps de rupture de P sur K s'il existe $\alpha \in L$ tel que $P(\alpha) = 0$ et $L = K(\alpha)$.

Théorème 25 ([P] 70). Supposons P irréductible. Le corps $K[X]/\langle P \rangle$ est un corps de rupture de P sur K , et c'est le seul à isomorphisme près.

Exemple 26. \mathbb{C} peut être défini comme $\mathbb{R}[X]/\langle X^2 + 1 \rangle$.

Application 27. Si P est irréductible et si $\deg P \wedge [L : K]$, alors P est irréductible sur L .

Définition 28 ([P] 71). On dit que L est un corps de décomposition de P sur K si P est scindé sur L et si $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines de P .

Théorème 29 ([P] 71). *Il existe un corps de décomposition de P sur K , unique à isomorphisme près.*

Exemple 30 ([P] 72). $\mathbb{Q}(j, \sqrt[3]{2})$ est un corps de décomposition de $X^3 - 2$ sur \mathbb{Q} .

Théorème 31 (de l'élément primitif - [P] 87). *Toute extension finie d'un corps de caractéristique nulle est monogène.*

C. Clôture algébrique

Définition 32 ([P] 67). *On dit que K est algébriquement clos si tout polynôme non nul de $K[X]$ est scindé, et si K n'admet pas d'extension algébrique non triviale.*

Définition 33 ([P] 72). *On dit que L est une clôture algébrique de K si c'est une extension de K algébrique et algébriquement close.*

Exemple 34 ([P] 68-72). — \mathbb{C} est algébriquement clos (théorème de d'Alembert-Gauss) ;

— \mathbb{C} est une clôture algébrique de \mathbb{R} .

Exemple 35 ([G] 94). *Si L est algébriquement clos, alors l'ensemble des éléments de L algébriques sur K est un corps algébriquement clos.*

Théorème 36. *K admet une unique clôture algébrique à isomorphisme près.*

III. Polynôme cyclotomiques

On note $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ le groupe des racines complexes n -ièmes de l'unité, et μ_n^* l'ensemble de ses générateurs (que l'on appelle *racines primitives n -ièmes de l'unité*).

Définition 37 ([P] 80 ; [R] 385). *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n -ième polynôme cyclotomique :*

$$\Phi_n = \prod_{\zeta \in \mu_n^*} X - \zeta$$

Proposition 38 ([P] 80-83 ; [R] 386). *On a les propriétés suivantes :*

— Pour $\zeta_n \in \mu_n^*$,

$$\Phi_n = \prod_{\substack{k=1 \\ k \wedge n=1}}^n X - \zeta_n^k$$

— $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$

— $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$

Exemple 39 ([P] 81). — Pour p premier, $\Phi_p = X^{p-1} + \dots X + 1$

— $\Phi_1 = X - 1$, $\Phi_4 = X^2 + 1$, $\Phi_6 = X^2 - X + 1$, $\Phi_8 = X^4 + 1$

Théorème 40 ([P] 82-83 ; [R] 392). *Soit $\zeta_n \in \mu_n^*$. Le polynôme minimal de ζ_n sur \mathbb{Q} est Φ_n .*

Corollaire 41. Φ_n est irréductible sur \mathbb{Q} et $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$.

IV. Polynômes irréductibles des corps finis

Définition 42 ([R] 331). *La fonction de Moëbius est définie par :*

$$\mu : n \in \mathbb{N}^* \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ facteurs premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 43 (Formule d'inversion de Moëbius = [R] 333). *Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{d|n} v_d$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) u_d$.*

Théorème 44 ([R] 423). $P_n := X^{p^n} - X = \prod_{d|n} \prod_{\mathcal{U}_d(p)} P$ où $\mathcal{U}_d(p)$ est l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré d de $\mathbb{F}_p[X]$.

Corollaire 45 ([R] 424). $\#\mathcal{U}_n(p) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) p^d$

Développements

— Développement 1 : Lemme de Gauss 11

— Développement 2 : Théorème 40 et Corollaire 41

— Développement 2 : Théorème 43, Théorème 44 et Corollaire 45

Références

R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition

P *Cours d'algèbre*, Perrin

G *Les maths en tête - Algèbre et probabilités*, Xavier Gourdon, 3e édition

S *Algèbre pour la licence 3*, Szpirglas

142 : PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

I. Notion de PGCD et de PPCM dans différents types d'anneaux

Dans cette section, A est un anneau intègre (commutatif) et $(a, b, a_1, \dots, a_r) \in A^{r+2}$.

A. Première définition, existence, cas des anneaux factoriels

Définition 1. Si $a_1, \dots, a_r \neq 0$, alors sous réserve d'existence, on appelle PGCD (resp. PPCM) de a_1, \dots, a_r , noté $a_1 \wedge \dots \wedge a_r$ ou $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_r)$ (resp. $a_1 \vee \dots \vee a_r$ ou $\text{ppcm}(a_1, \dots, a_r)$) un plus grand minorant (resp. un plus grand majorant) de $\{a_1, \dots, a_r\}$ pour la relation (binaire) de divisibilité. On pose par ailleurs $0 \wedge 0 = 0 \vee a = 0$.

En particulier, le PGCD et le PPCM sont associatifs et commutatifs : $a \wedge b = b \wedge a$ et $a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge a_4 \wedge a_5 = (a_1 \wedge a_2) \wedge (a_3 \wedge a_4) \wedge a_5$.

Remarque 2. Les PGCD (resp. PPCM) de a_1, \dots, a_r sont tous associés. L'écriture $d = a_1 \wedge \dots \wedge a_r$ est un abus signifiant que d est un PGCD de a_1, \dots, a_r .

Proposition 3 ([R] 246). Si a et b ont un PPCM alors ils ont un PGCD $a \wedge b = ab(a \vee b)^{-1}$.

Exemple 4. 3 et $2 + i\sqrt{5}$ ont un PGCD mais pas de PPCM dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$. 4 et $2 + 2i\sqrt{3}$ n'ont pas de PGCD dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$.

Définition 5. On dit que a_1, \dots, a_r sont premiers entre eux (dans leur ensemble) si $a_1 \wedge \dots \wedge a_r = 1$. On dit que a_1, \dots, a_r sont deux à deux premiers entre eux si $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \implies a_i \wedge a_j = 1$.

Théorème 6 (de Gauss - [R] 247). $\forall (a, b, c) \in A^3, a \mid bc$ et $a \wedge b = 1 \implies a \mid c$.

Proposition 7 ([R] 246). Si toute paire d'éléments de A admet un PGCD (on dit alors que A est un anneau à PGCD), alors toute paire d'éléments de A admet un PPCM, et la réciproque est vraie.

Proposition 8 ([P] 49). Supposons A factoriel, notons \mathcal{P} un système complet de représentants des irréductibles de A . Alors :

$\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min(v_p(a), v_p(b))}$ est un PGCD de a et b .

$\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max(v_p(a), v_p(b))}$ est un PPCM de a et b .

Définition 9. Si $A = \mathbb{Z}$ (resp. $A = K[X]$, K un corps), alors le PGCD de a et b est l'unique PGCD de a et b qui est positif (resp. unitaire).

B. Situation dans les anneaux principaux

On suppose A principal.

Proposition 10. $m \in A$ est un PPCM de a et b si, et seulement si, $aA \cap bA = mA$.

$d \in A$ est un PGCD de a et b si, et seulement si, $aA + bA = dA$.

Théorème 11 (de Bézout). $(\exists (u, v) \in A^2 : au + bv = 1) \iff a \wedge b = 1$

Remarque 12. $\forall (a, b) \in A^2, \exists (u, v) \in A^2 : au + bv = 1$. Le théorème de Bézout indique que la réciproque est vraie si $a \wedge b = 1$ (contre-exemple : $3 \times (2) + 2 \times (-2) = 2$, mais $3 \wedge 2 \neq 1$).

Définition 13 ([R] 247). Un couple $(u, v) \in A^2$ tel que $a \wedge b = au + bv$ est appelé couple de Bézout de (a, b) , et l'égalité est appelée relation de Bézout.

Application 14. Résolution de $ax + by = c$ avec $a \wedge b = 1$.

Application 15. Lemme des noyaux : soit $(P, Q) \in K[X]^2$ tel que $P \wedge Q = 1$. Soient V un K -espace vectoriel de dimension finie. Pour tout endomorphisme f de V ; $\text{Ker}((PQ)(f)) = \text{Ker}(P(f)) \oplus \text{Ker}(Q(f))$.

Théorème 16 (des restes chinois - [R] 250). Si a_1, \dots, a_d sont non nuls, non inversibles et deux à deux premiers entre eux, alors :

$$\bar{\varphi} : x \bmod a_1 \dots a_d \mapsto (x \bmod a_1, \dots, x \bmod a_d)$$

est un isomorphisme d'anneaux de $A/\langle a_1 \dots a_d \rangle$ dans $A/\langle a_1 \rangle \times \dots \times A/\langle a_d \rangle$.

Posons $a = a_1 \dots a_d$ et pour $j \in \llbracket 1, d \rrbracket, b_j = \frac{a}{a_j}$. Il existe $(u_1, \dots, u_d) \in A^d$ tel que $\sum_{i=1}^d u_i b_i = 1$. La réciproque de $\bar{\varphi}$ s'exprime alors :

$$\bar{\varphi}^{-1} : (x_1 \bmod a_1, \dots, x_d \bmod a_d) \mapsto \sum_{i=1}^d x_i a_i b_i \bmod a_1 \dots a_d$$

Application 17 ([R] 291). Résolution d'un système de congruence.

Exemple 18 (Interpolation de Lagrange). Soient $x_1, \dots, x_n \in K$ deux à deux distincts et $y_1, \dots, y_n \in K^n$. Un polynôme interpolateur des x_i en y_i est une solution du système :

$$\{\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P \equiv y_i [X - x_i]\}$$

Exemple 19. Recherche de $P \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ tel que $P(\bar{0}) = \bar{2}, P(\bar{1}) = \bar{0}, P(\bar{2}) = \bar{1}$ de degré minimal.

Proposition 20 ([R] 298). $\forall (n, m) \in \mathbb{N}_{\geq 2}^2, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n \wedge m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n \vee m\mathbb{Z}$

II. Algorithmes de calcul dans un anneau euclidien

Dans cette section, A est supposé euclidien. Soit $(a, b) \in A \times A \setminus \{0\}$.

A. Algorithmes d'Euclide

Lemme 21 (d'Euclide - [R] 264). Si $a = bq + r$ avec $(q, r) \in A^2$, alors $a \wedge b = b \wedge r$.

Algorithme 22 (d'Euclide - [R] 264). Posons $r_{-1} = a$ et $r_0 = b$, et pour $n \geq 1, r_n$ est un reste d'une division euclidienne de r_{n-2} par r_{n-1} si $r_{n-1} \neq 0$, et $r_n = 0$ sinon.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N + 1, r_n = 0$; de plus, $a \wedge b = r_n$.

Exemple 23. $M_n \wedge M_m = M_{n \wedge m}$, où $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et $M_n = 2^n - 1$.

$$(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = X^{n \wedge m} - 1.$$

Algorithme 24 (d'Euclide étendu - [R] 265). Soit $(q_n)_{n \geq 1}$ une suite de quotients dans l'algorithme d'Euclide, soit N le rang du dernier reste non nul. On peut trouver un couple de Bézout en "remontant" l'algorithme d'Euclide, i.e. en écrivant $a \wedge b = r_N = r_{N-2} - q_N r_{N-1}$, puis en y substituant $r_{N-1} = r_{N-3} - q_{N-1} r_{N-2}$, puis en y substituant $r_{N-2} = r_{N-4} - q_{N-2} r_{N-3}$, etc. jusqu'à exprimer $a \wedge b$ sous la forme $a \wedge b = af(q_1, \dots, q_N) + bg(q_1, \dots, q_N)$.

Application 25. Calcul d'un inverse dans un corps de rupture : soit $K = \mathbb{Q}[X]/\langle X^2 - X - 1 \rangle \cong \mathbb{Q}(\varphi)$. Dans K , $(2\varphi + 1)^{-1} = 2\varphi - 3$.

Proposition 26. $GL_2(\mathbb{Z})$ agit sur \mathbb{Z}^2 par $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta b \\ \gamma a + \delta b \end{pmatrix}$$

Les orbites de cette action sont les $E_d = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \mid a \wedge b = d \right\}$, $d \in \mathbb{N}$.

Corollaire 27. D'après l'algorithme d'Euclide, $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $\exists P \in GL_2(\mathbb{Z}) : P \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \wedge b \\ 0 \end{pmatrix}$

Application 28. Soit $a = (a_1, \dots, a_n)$ un vecteur de \mathbb{Z}^n . On peut compléter (a) en une \mathbb{Z} -base de \mathbb{Z}^n si, et seulement si, $a_1 \wedge \dots \wedge a_n = 1$.

B. Du côté de \mathbb{Z} et $K[X]$, un point sur la complexité

Dans le cas de la division euclidienne dans \mathbb{Z} , on impose aux restes d'être positifs, ce qui rend les reste et quotient uniques.

Théorème 29 (de LAMÉ - [D] 38). Supposons que $a > b \geq 1$. Soient $(F_k)_k$ la suite de FIBONACCI débutant à 0, et $k \in \mathbb{N}$ tel que $b < F_{k+1}$. L'algorithme d'EUCLIDE pour a et b termine en moins de k étapes.

Remarque 30. Cette majoration est optimale : considérer $a = F_{k+1}$, $b = F_k$.

Algorithme 31 (PGCD binaire - [D] 36). Supposons $a \geq b \geq 0$. La fonction suivante :

PGCD_binaire(a, b) :
 Si $a = 0$: renvoyer b
 Si $2 \mid a$ et $2 \mid b$: renvoyer $2 \times \text{PGCD_binaire}(a/2, b/2)$
 Si $2 \mid a$ et non($2 \mid b$) : renvoyer $\text{PGCD_binaire}(a/2, b)$
 Si non($2 \mid a$) et $2 \mid b$: renvoyer $\text{PGCD_binaire}(a, b/2)$
 Sinon : renvoyer $\text{PGCD_binaire}((a - b)/2, b)$

appliquée à (a, b) renvoie $a \wedge b$.

Remarque 32. Algorithme 31 se termine en au plus $\lceil \log_2(a) \rceil$ récursions.

Proposition 33. Soit $(P, Q) \in K[X]^2$ tel que $n := \deg P \geq \deg Q \geq 1$. L'algorithme d'EUCLIDE appliqué à P et Q termine en au plus n étapes.

III. Applications en arithmétique et en théorie des groupes

A. (Systèmes d') équations diophantiennes linéaires

Définition 34 ([G] 163). Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(IZ)$. On dit que M est sous forme normale d'HERMITE si elle est sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & p_1 & * & \dots & * & + & * & \dots & * & + \\ & & & & p_2 & * & \dots & * & + & * & \dots & * \\ & & & & & & & & p_3 & \dots & & \\ & & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & \dots & + & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & p_r & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où les pivots p_i (i.e. les premiers coefficients non-nuls sur chaque ligne) sont strictement positifs, et les coefficients au dessus de chaque pivot sont positifs et inférieurs au pivot.

Algorithme 35 (d'HERMITE - [G] 164). Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$. On définit $\delta_{i_0,j}(M) = \min \{|M_{i,j}| : i \geq i_0, M_{i,j} \neq 0\}$. L'algorithme d'HERMITE :

Soit $i_0 = 1$. Tant que $i_0 < n$: soit $j_0 = \min \{1 \leq j \leq m \mid \delta_{i_0,j}(M) \neq 0\}$

Si $\forall i > i_0, M_{i,j_0} = 0$, alors $L_{i_0} \leftarrow sg(M_{i_0,j_0})L_{i_0}$, et pour i allant de 1 à $i_0 - 1$, $L_i \leftarrow L_i - q_i L_{i_0}$ où q_i est le quotient de la division euclidienne de M_{i,j_0} par M_{i_0,j_0} . On remplace i_0 par $i_0 + 1$

Sinon, soit $k \in \llbracket i_0, n \rrbracket$ tel que $|M_{k,j_0}|$ soit non nul et minimal. On effectue $L_i \longleftrightarrow L_{i_0}$ puis, pour i allant de $i_0 + 1$ à n , $L_i \leftarrow L_i - q_i L_{i_0}$

transforme M sous une forme normale d'HERMITE M_H . En particulier, il existe $P \in GL_n(\mathbb{Z})$ telle que $M_H = PM$.

Application 36. Résolution d'un système d'équations diophantiennes linéaires.

Exemple 37. Cas d'une seule équation linéaire

$$(E) : \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \text{ avec } a_1 \wedge \dots \wedge a_n = 1.$$

D'après Cor 24, il existe $P \in GL_n(\mathbb{Z})$ telle que

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^T P = \begin{pmatrix} a_1 \wedge \dots \wedge a_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\text{De là, } (E) \iff \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = b \iff \tilde{x}_1 = b \text{ où}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } S(E) = \left\{ P \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n-1} \right\}$$

B. Un théorème de LIOUVILLE

Théorème 38 (de LIOUVILLE - [FGN] 179, [R] 404). *L'équation $P^n + Q^n + R^n = 0$ n'admet pas de solution non triviale (i.e. P, Q, R non associées) dans $\mathbb{C}[X]$ dès lors que $n \geq 3$.*

C. Quelques résultats en théorie des groupes

Soit G un groupe fini. On note $\text{ord}(g)$ l'ordre de $g \in G$.

Proposition 39 ([R] 9). *L'exposant de G ($\max_{g \in G} \text{ord}(g)$) vaut $\text{ppcm}(\{\text{ord}(g)\}_{g \in G})$.*

Lemme 40 ([R] 29). *Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, soit $\bar{d} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On a $\text{ord}(\bar{d}) = \frac{n^d}{n \wedge d}$.*

Théorème 41 (de structure des groupes abéliens finis - [R] 28). *Supposons G abélien, de cardinal au moins 2. Il existe $(d_1, \dots, d_s) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^s$ tels que :*

$$G \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z}, \quad d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_s$$

Les entiers d_1, \dots, d_s sont appelés facteurs invariants de G . Ils sont uniques et déterminent la classe d'isomorphisme de G .

Exemple 42. *Soit p un nombre premier. Un groupe abélien d'ordre p^2 est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.*

Développements

- Développement 1 : Théorème des restes chinois 16 et Exemple de calcul 19.
- Développement 2 : Théorème de Liouville 38

Références

- R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
- P *Cours d'algèbre*, Perrin
- D *Cours d'algèbre*, Michel Demazure
- FGN *Oraux X-ENS Algèbre 1*, Serge Francinou, Hervé Giannella, Serge Nicolas
- G *Algèbre I - Groupes, corps et théorie de Galois*, Daniel Guin, Thomas Hausberger

148 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Dans toute cette leçon, E désigne espace vectoriel sur un corps K . On ne rappellera pas les éléments de la théorie des espaces vectoriels.

I. Théorie de la dimension finie

A. Familles libres, familles génératrices, bases

Soit $\mathcal{F} \subseteq E$.

Définition 1 ([Gr] 11-11-10-13). On dit que \mathcal{F} est libre si : $\forall (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \in \mathcal{F}^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n,$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

On dit que \mathcal{F} est liée si \mathcal{F} n'est pas libre.

On dit que \mathcal{F} est génératrice (de E) si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire finie de vecteurs de \mathcal{F} .

On dit que \mathcal{F} est une base de E si \mathcal{F} est à la fois libre et génératrice.

Exemple 2. — Dans \mathbb{R}^2 :

- $\{(1, 1), (1, -1)\}$ est génératrice et libre ;
- $\{(0, 1), (1, 0), (2, 5)\}$ est génératrice et liée ;
- $\{(-4, 3)\}$ est non génératrice et libre ;
- $\{(1, 1), (2, 2)\}$ est non génératrice et liée ;

[Gr] 14 La famille $\{(0, \dots, 1, \dots, 0)\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une base de K^n , appelée base canonique.

Proposition 3 ([Gr] 13). $\mathcal{F} = \{\} \subseteq E$ est une base de E si, et seulement si, $\forall x \in E, \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n : x = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$

Proposition 4 ([Gr] 14). — $\{x\}$ est libre $\iff x \neq 0$

- Toute sur-famille d'une famille génératrice (resp. liée) est génératrice (resp. liée)
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre
- Une famille contenant le vecteur nul est liée

B. Dimension d'un espace vectoriel

Définition 5 ([Gr] 11). On dit que E est de dimension finie si E admet une famille génératrice finie.

Exemple 6. — K^n est un K -espace vectoriel de dimension finie, contrairement à $K[X]$.

- \mathbb{R} est un \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension infinie.

Lemme 7 (de STEINIZ - [Gr] 17). Si $\mathcal{G} \subset E$ est finie et génératrice, alors toute famille de E contenant plus de $\#\mathcal{G}$ éléments est liée.

Théorème/Définition 8 ([Gr] 17). Si E est de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même cardinal (fini), que l'on appelle dimension de E , et que l'on note $\dim_K(E)$ ou $\dim(E)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur K .

À partir de maintenant, on suppose E de dimension finie.

Théorème 9 ([Gr] 18). $\mathcal{B} \subseteq E$ est une base de $E \iff \mathcal{B}$ est libre et $\#\mathcal{B} = \dim(E) \iff \mathcal{B}$ est génératrice et $\#\mathcal{B} = \dim(E)$.

Théorème 10 ([Gr] 19). Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors F est de dimension finie, et $\dim(F) \leq \dim(E)$ avec égalité si, et seulement si, $E = F$.

Théorème 11 (des bases extraites et incomplètes - [Gr] 19). Soient $\mathcal{L} \subseteq E$ libre et $\mathcal{G} \subseteq E$ génératrice telles que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{G}$. Alors il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$.

Corollaire 12. Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

Proposition 13 ([Gr] 63). Soit F un espace vectoriel de dimension finie. Les espaces vectoriels E et F sont isomorphes si, et seulement si, $\dim(E) = \dim(F)$.

Exemple 14. Soit $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$. L'application $y \mapsto (y(0), y'(0), \dots, y^{(p-1)}(0))$ est un isomorphisme entre $S_{\mathbb{R}}(E) = \{y \in C^p(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid y^{(p)} = a_{p-1}y^{(p-1)} + \dots + a_0y\}$ et \mathbb{C}^p . Par conséquent, $\dim(S_{\mathbb{R}}(E)) = p$.

Proposition 15 ([Gr] 22). Soient E_1, \dots, E_p supplémentaires dans E . Si $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ sont des bases de E_1, \dots, E_p , alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{B}_p$ est une base de E , dite adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$.

Corollaire 16 ([Gr] 22). $\dim(E \oplus F) = \dim(E) + \dim(F)$

Proposition 17 ([Gr] 23).

$$\begin{aligned} E = E_1 \oplus E_2 &\iff \begin{cases} E = E_1 + E_2 \\ \dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\} \\ \dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2) \end{cases} \end{aligned}$$

C. Calculs de dimensions

Dans ce paragraphe, F est un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 18 (Formule de GRASSMANN - [Gr] 24). $\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) < +\infty$

Proposition 19 ([Gr] 18). $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F) < +\infty$

Proposition 20. $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F) < +\infty$

D. Extensions de corps

Dans ce paragraphe, $F/L/K$ est une tour d'extensions de corps.

Définition 21 ([P] 65). On appelle degré de L/K l'entier $[L : K] = \dim_K(L)$.

Théorème 22 (de la base télescopique - [P] 65). Supposons F/L et L/K de degrés finis : elles admettent alors des bases $\{f_1, \dots, f_n\}$ et $\{e_1, \dots, e_p\}$ respectivement.

La famille $\{e_i f_j\}_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une base de F/K , et donc $[F : K] = [F : L] \cdot [L : K]$.

Définition 23 ([P] 66). On dit que $\alpha \in L$ est algébrique sur K s'il existe $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Le cas échéant, on définit le polynôme minimal de α sur K comme étant l'unique générateur unitaire de l'idéal $\{P \in K[X] \mid P(\alpha) = 0\}$, appelé idéal annulateur de α .

Notation 24 ([P] 66). Soit $\alpha \in L$. On pose $K[\alpha] = \{P(\alpha) \mid P \in K[X]\}$ et $K(\alpha = \text{Frac}(K[\alpha]))$.

Théorème 25 ([P] 66). Soit $\alpha \in L$. Sont équivalentes :

1. α est algébrique sur K
2. $K[\alpha] = K(\alpha)$
3. $[K[\alpha] : K] < +\infty$

Le cas échéant, $[K[\alpha] : K]$ est le degré du polynôme minimal de α sur K .

II. Rang d'une application linéaire, d'une matrice, d'une famille

A. Définitions - formule du rang et conséquences

Dans ce paragraphe, on se donne F de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E , et $(x_1, \dots, x_r) \in E^r$.

Définition 26 ([Gr] 61,82). 1. Le rang de u est l'entier $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u))$;
2. Le rang de $\{x_1, \dots, x_r\}$ est l'entier $\text{rg}(x_1, \dots, x_r) = \dim(\text{Vect}(x_1, \dots, x_r))$.

Proposition 27 ([Gr] e82). $\text{rg}(u) = \text{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n))$

Théorème 28 (du rang - [Gr] 64). $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u)) + \text{rg}(u)$

Théorème 29 ([Gr] 65). Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors u bijective $\iff u$ injective $\iff u$ surjective $\iff \exists v \in \mathcal{L}(F, E) : u \circ v = \text{id}_E \iff \exists v \in \mathcal{L}(E, F) : v \circ u = \text{id}_F$.

Exemple 30 ([Gr] 65). Ce n'est pas vrai en dimension infinie : dans $K[X]$, $P \mapsto P'$ est surjective mais pas injective.

Proposition 31. — $\forall v \in GL(E), \text{rg}(u \circ v) = \text{rg}(u)$
— $\forall w \in GL(F), \text{rg}(w \circ u) = \text{rg}(u)$

Corollaire 32. Le rang est invariant par équivalence.

B. Le cas particulier des matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Notons C_1, \dots, C_p ses colonnes et L_1, \dots, L_n ses lignes.

Définition 33 ([Gr] 33). Le rang de A est l'entier $\text{rg}(A) = \dim(\{AX \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)\}) = \text{rg}(C_1, \dots, C_p)$.

Proposition 34 ([Gr] 82). Le rang d'une application linéaire est le rang de sa matrice dans n'importe quel couple de bases.

Théorème 35 ([Go] 128). $\text{rg}(A) = r \implies A$ est équivalente à $J_{n,p,r} := \begin{pmatrix} I_r & 0_{p-r} \\ 0_{n-r} & 0_* \end{pmatrix}$.

Corollaire 36 ([Go] 128). Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, elles ont le même rang.

Remarque 37 ([Go] 128). Pour déterminer le rang de A en pratique, on utilise l'algorithme du pivot de GAUSS pour transformer A en $J_{n,p,r}$.

Théorème 38 ([Gr] 83). $\text{rg}(A) = \text{rg}(^t A)$

Théorème 39 ([Go] 128). Le rang de A est la taille de sa plus grande sous-matrice inversible, donc l'ordre de son plus grand mineur non nul.

Corollaire 40. Si L/K est une extension de K , alors $\text{rg}_K(A) = \text{rg}_L(A)$.

III. Applications

A. Formes quadratiques réelles

Théorème 41 (Loi d'inertie de SYLVESTER - [R] 476). Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n > 0$, et q est une forme quadratique sur E . Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E orthogonale pour q . Quitte à renuméroter \mathcal{B} , supposons que $q(e_1) > 0, \dots, q(e_s) > 0, q(e_{s+1}) < 0, \dots, q(e_{s+t}) < 0, q(e_{s+t+1}) = \dots = q(e_n) = 0$. Le couple (s, t) ne dépend alors pas du choix de la base orthogonale : on l'appelle signature de q .

Théorème 42. La classe de congruence d'une forme quadratique réelle ne dépend que du rang et de la signature.

B. Réduction des endomorphismes

Dans ce paragraphe, on fixe $u \in \mathcal{L}(E)$.

Proposition/Définition 43 ([R] 604). $\{P \in K[X] \mid P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$ est un idéal non nul : son unique générateur unitaire est appelé polynôme minimal de u . On le note μ_u .

Théorème 44 ([R] 683). u est diagonalisable $\iff \mu_u$ est scindé à racines simples.

Dans le groupe suivant, E est un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 45 ([R] 743). On dit que u est normal si $uu^* = u^*u$ où u^* est l'adjoint de u .

Lemme 46 ([R] 745). Si u est normal, $\exists P_1, \dots, P_r$ sont de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux et stables par u tels que $E = P_1 \oplus \dots \oplus P_r$.

Théorème 47. Si u est normal, alors il existe une base orthonormée \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D & & \\ & \ddots & \\ & & R_p \end{pmatrix}$ par blocs, avec D diagonale et les R_k de la forme $\begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$, $b_k \neq 0$.

Développements

- Développement 1 : Loi inertie Sylvester 41 et Th 42.
- Développement 2 : Lemme 46 et Théorème 47

Références

- R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
- P *Cours d'algèbre*, Perrin
- Gr *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone, 6e édition, 2e version
- Go *Les maths en tête - Algèbre et Probabilités*, Xavier Gourdon, 3e édition

149 : Déterminant. Exemples et applications.

Dans cette leçon, K désigne un corps, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E .

I. Les notions de déterminants

A. Des formes multilinéaires au déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 1 ([Go] 140). Une forme k -linéaire sur E est une application $\varphi : E^k \rightarrow \mathbb{K}$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, pour tout $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_k)$ est linéaire. On note $\bigotimes^k E^*$ l'ensemble des formes k -linéaires sur E .

Proposition 2. $(e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*)_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n}$ est une base de $\bigotimes^k E^*$, où pour $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*(x_1, \dots, x_k) = e_{i_1}^*(x_1) \dots e_{i_k}^*(x_k)$.

Définition 3 ([Go] 140-141). Une forme k -linéaire alternée est une forme k -linéaire $\varphi \in \bigotimes^k E^*$ telle que $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$, $\forall (x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma) \varphi(x_1, \dots, x_k)$.

On note $\bigwedge^k E^*$ l'espace des formes k -linéaires alternées sur E .

Proposition 4. $(e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*)_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$ est une base de $\bigwedge^k E^*$, où pour $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) e_{i_1}^*(x_{\sigma(1)}) \dots e_{i_k}^*(x_{\sigma(k)})$.

Corollaire 5. On a $\dim(\bigwedge^k E^*) = \binom{n}{k}$.

Définition 6 ([Go] 141). On appelle déterminant dans la base \mathcal{B} l'unique forme n -linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}}$ sur E vérifiant $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$. (La famille $(\det_{\mathcal{B}})$ est une base de $\bigwedge^n E^*$.)

Proposition 7 ([Go] 141). $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) e_1^*(x_{\sigma(1)}) \dots e_n^*(x_{\sigma(n)})$.

Corollaire 8 ([Go] 141). Soient $\varphi \in \bigwedge^n E^*$ et \mathcal{B}' une autre base de E . On a $\varphi = \varphi(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$, en particulier on a donc $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$.

Proposition 9 ([Go] 141-142). Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Sont équivalentes :

1. (x_1, \dots, x_n) est liée ;
2. Pour toute base \mathcal{B} de E , $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$;
3. Il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$.

B. Déterminant d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 10 ([Go] 142). Si C_1, \dots, C_n sont les colonnes de A , alors :

$$\det(A) := \det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$$

où \mathcal{E} désigne la base canonique de K^n .

Proposition 11 ([Go] 142). Soient $\lambda \in K$ et $B \in \mathcal{M}_n(K)$.

1. $\det(A)$ ne change pas si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes ;
2. $\det(A^T) = \det(A)$
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
4. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
5. $A \in GL_n(K) \iff \det(A) \neq 0$ (auquel cas, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$)

Définition 12 ([Go] 142). Le déterminant de u , défini par : $\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$ ne dépend pas du choix de \mathcal{B} .

C. Propriétés analytiques

Proposition 13 ([Rv] 83). $A \mapsto \det A$ est polynomiale en les coefficients de A (relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$), donc lisse.

Corollaire 14. $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $SL_n(\mathbb{R})$ est fermé.

Proposition 15 ([Rv] 83). $\forall x \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $d(\det)(X)(H) = \text{tr}(\text{Com}(X)^T H)$, où $\text{Com}(X)$ est appelée dans le paragraphe II.B.

II. Calcul pratique d'un déterminant

A. Cas simples, pivot de GAUSS

Notation 16 ([Go] 142). On note $|A|$ le déterminant d'une matrice carrée A .

Proposition 17 ([Go] 106). $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ i & j & k \end{vmatrix} = aek + bfi + djc - cei - fja - bdk$ (règle de SARRUS)

Lemme 18 ([Go] 142). Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 1}$ est triangulaire, alors $\det(A) = a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}$.

Algorithme 19 (pivot de GAUSS). Pour calculer le déterminant d'une matrice, on peut la transformer en une matrice triangulaire par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes :

- la transvection $(C_i \rightarrow C_i + \lambda C_j)$ ne change pas le déterminant ;
- la permutation $(C_i \leftrightarrow C_j)$ change le signe du déterminant ;
- la dilatation $(C_i \Rightarrow \alpha C_i)$ change le déterminant d'un facteur α .

Exemple 20.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Théorème 21 ([Go] 142). Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux.

B. Mineurs, cofacteurs et développements

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$.

Définition 22 ([Go] 142). Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. On appelle mineur d'indice (i, j) de A le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant sa i -ième ligne et sa j -ième colonne. On note $\Delta_{i,j}$ ce mineur.

On appelle cofacteur d'indice (i, j) de A la quantité $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$.

On appelle comatrice de A la matrice $\text{Com}(A) = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Théorème 23 (Formules de développement d'un déterminant

Par rapport à la i -ième ligne : $\det A = \sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$

— Par rapport à la j -ième colonne : $\det A = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$

Exemple 24. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 + 0 = 1$$

Théorème 25 (Formule de la comatrice - [Go] 143). $A \text{Com}(A)^T = \text{Com}(A)^T A = \det(A) I_n$

C. Déterminants remarquables

Exemple 26 (déterminant circulant - [Go] 143; [IP] 388). Pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n P(\omega^k)$$

où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} X^i$.

Application 27 (FIG 1 - [IP] 388). Soient z_1, \dots, z_n des complexes qui sont les affixes des points M_1, \dots, M_n . On définit une suite de polygones du plan comme suivant :

- $P_0 = M_1 \dots M_n$
- Pour $n \geq 1$, P_n est le polygone dont les sommets sont les milieux des arêtes de P_{n-1} . Alors $(P_n)_n$ converge vers l'isobarycentre de P_0 .

Exemple 28 (déterminant de VANDERMONDE - [Go] 143). Pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$,

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i, j \leq n} a_i - a_j$$

III. Applications des déterminants...

A. ...en algèbre linéaire

Remarque 29 ([BMP] 181). On étend la formule explicite du déterminant au cas des matrices à coefficients dans un anneau intègre A . Si $M \in \mathcal{M}_n(A)$, alors $\det(M) \in A$, et par plongement de A dans $\text{Frac}(A)$, les propriétés déjà vues restent vraies.

Définition 30 ([Go] 172). Le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est $\chi_A = \det(XI_n - A)$.

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est celui de sa matrice dans n'importe quelle base.

Proposition 31 ([Go] 159; [C] 47). — $\forall A \in \mathcal{M}_n(K)$, $\text{Sp}(A) = \chi_A^{-1}(\{0\})$

— $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Théorème 32 (de CAYLEY-HAMILTON - [M2] 81). $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_A(A) = 0$.

Théorème 33 (Systèmes de CRAMER - [Gr] 145). Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $B \in K^n$. On note A_1, \dots, A_n les colonnes de A . La solution de $AX = B$ est donnée par $X = (x_1, \dots, x_n)$ où

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i = \frac{\det(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)}{\det(A)}$$

B. ...en calcul intégral

Théorème 34 (de changement de variable - ADMIS - [BP] 255-256). Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^n , et $\varphi : U \rightarrow V$ un C^1 -difféomorphisme. Pour tout fonction $f : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ borélienne,

$$\int_U f \circ \varphi(u) \cdot |\det(d\varphi(u))| du = \int_V f(v) dv$$

Application 35. $\forall \alpha > 0$, $\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

Théorème 36 ([BMP] 184). Notons λ la mesure de LE-BESGUE sur \mathbb{R}^n . Pour tous $X \subseteq \mathbb{R}^n$ mesurable et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda(u(X)) = |\det(u)| \cdot \lambda(X)$

Corollaire 37 (FIG. 3 - [BMP] 184). Soit $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, notons $\mathcal{P}(v_1, \dots, v_n) = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$ le parallélotope engendré par v_1, \dots, v_n . On a $\lambda(\mathcal{P}(v_1, \dots, v_n)) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$.

C. ...en géométrie

Dans ce paragraphe, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un \mathbb{K} -espace préhilbertien.

Définition 38 ([Go] 274). Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On appelle matrice de GRAM de x_1, \dots, x_n la matrice $M_G(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i | x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$, et déterminant de GRAM de x_1, \dots, x_n sont déterminant $G(x_1, \dots, x_n)$.

Théorème 39 ([Go] 275). Soient F un sous-espace vectoriel de E , et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F . Alors, $\forall x \in E$, $d(x, F)^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$.

Théorème 40 (inégalités de HADAMARD - [Go] 275). On a :

1. $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $G(x_1, \dots, x_n) \leq \|x_1\|^2 \dots \|x_n\|^2$
2. $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{C}^n)^n$, $|\det(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\|_2 \dots \|x_n\|_2$

De plus, dans les deux points, il y a égalité si, et seulement si, (x_1, \dots, x_n) est orthogonale.

Développements

- Développement 1 : Exemple 26 et Application 27.
- Développement 2 : Théorèmes 39 et 40

Références

- Rv *Petit guide du calcul différentiel*, François Rouvière, 4e édition
- IP *L'oral à l'agrégation de mathématiques*, Lucas Issenmann, Timothée Pecatte
- M2 *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*, Roger Mansuy, Rached Mneimné, 3e édition
- Gr *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone, 6e édition, 2e version
- Go *Les maths en tête - Algèbre et Probabilités*, Xavier Gourdon, 3e édition
- BMP *Objectif Agrégation*, Vincent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré, 2e édition
- BP *Théorie de l'intégration*, Marc Briane, Gilles Pagès, 7e édition
- C *Carnet de voyage en Algèbre*, Philippe Caldero, Marie Peronnier

FIGURE 1: Règle de Sarrus

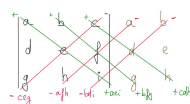


FIGURE 2: Suite de polygones

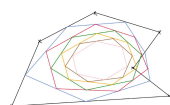


FIGURE 3: Lien entre volume et déterminant

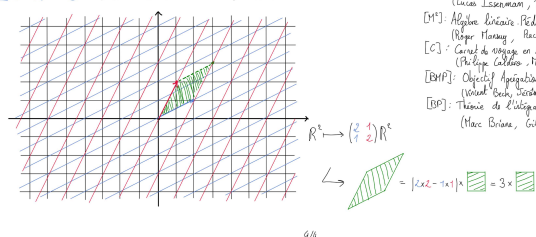


FIGURE 1.4 – s

Le p'tit recul personnel

En quoi est-ce que la continuité du déterminant est intéressante (dim finie) ?

- Stabilité** : en dim finie, le déterminant est un indicateur de bijectivité, tout comme le noyau est un indicateur d'injectivité. La continuité de la fonction \det permet d'affirmer que si un endomorphisme est de déterminant disons 50, alors les endomorphismes *proches* de celui-ci devraient être bijectifs. De même lorsqu'on est proche de 0, où on peut se demander en pratique si une valeur de déterminant de 0.001 n'implique pas que l'on travaille avec des endomorphismes dangereusement proches de la non-inversibilité. C'est ce qu'on fait en robotique en étudiant soit le déterminant de la Jacobienne d'un système, soit la dernière valeur singulière si la Jacobienne n'est pas carrée.
- Topologie** : toute image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert. On a donc naturellement le fait que $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $GL_n(\mathbb{R})$ est un groupe (multiplicatif non-abélien), sa structure topologique lui induit une structure de variété différentielle et donc de groupe de Lie.

3. **Exponentielle** : cf. partie topologie : continuité de $\det \implies GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \implies GL_n(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie donc c'est le cadre naturel pour l'existence et la définition de l'exponentielle dessus.

4. **Continuité des valeurs propres** : 1) $\det A$ (et $\text{tr } A$) sont des polynômes en les coefficients de A ; 2) en analyse complexe un théorème dit que les racines d'un polynôme varient continûment en fct de ses coefficients \implies valeurs propres d'une matrice sont des fcts continues des coefficients de cette matrice.

Pourquoi ça fait chier qu'elle ne soit pas forcément assurée en dimension infinie ?

- Inversibilité n'est plus stable** : voilà. L'inversibilité c'est une propriété fragile désormais. En particulier, une suite d'opérateurs inversibles peuvent converger vers un opérateur non-inversible. Exemple : sur $\ell^2(\mathbb{N})$, $A_\varepsilon : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (\varepsilon x_1, x_2, x_3, \dots)$. L'inverse de A_ε est naturellement $A_{1/\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ aussi petit soit-il. Par contre si on fait tendre $\varepsilon \rightarrow +\infty$, alors $A_\varepsilon \rightarrow A_0$ qui n'est pas inversible (de noyau toutes les suites de la forme $(c, 0, 0, \dots)$).
- Généralement** : en fait la notion d'inversibilité ne devrait pas être transposée en dimension finie : on devrait plutôt avoir une notion de *oui c'est inversible, mais c'est à un cheveu de ne pas l'être*, ou à quel point est l'opérateur inversible ?

Comment on y remédie en dim infinie ?

- Déterminant de Fredholm** : $A \mapsto \det(I + A) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (1 + \lambda)$ avec A un opérateur à trace (*i.e.* suffisamment "petit" : la somme de ses valeurs singulières est finie - c'est une condition très forte, bien plus qu'être compact) joue un rôle analogue au déterminant en dimension finie : il est non nul si et seulement si l'équation suivante admet une unique solution pour tout g : $g(x) = f(x) + \int K(x, y)f(y)dy$, qui est une équation de la forme $g = (I + A)f$ où A est un opérateur intégral. On a bien ici que le déterminant de Fredholm est continue pour cette classe de matrices.

151 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Soient K un corps commutatif, E un K -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E .

I. Stabilité d'un sous-espace par un endomorphisme

A. Introduction

Définition 1 ([M2] 17). On dit que F est stable par u (ou u -stable) si $u(F) \subseteq F$.

Exemple 2 ([M2] 17). On a :

- $\{0\}$, $\text{Ker}(u)$, $\text{Im}(u)$ et E sont stables par u .
- $\forall P \in K[X]$, $\text{Ker}(P(u))$ et $\text{Im}(P(u))$ sont stables par u .

Proposition 3 ([M2] 17). Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Si v commute avec u , alors pour tout $P \in K[X]$, $\text{Ker}(P(u))$ et $\text{Im}(P(u))$ sont stables par u .

Remarque 4. En particulier, $\forall \lambda \in K$, $E_\lambda(u) := \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ est stable par u , et par tout endomorphisme qui commute avec u .

Proposition 5 ([M2] e17). Soit $E = F \oplus G$ une décomposition de E , soit \mathcal{B} une base de E adaptée à cette décomposition, notation $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ par blocs. Alors F (resp. G) est stable par u si, et seulement si, $C = 0$ (resp. $B = 0$).

Corollaire 6 ([M2] e120). F est stable par u si, et seulement si, F^\perp est stable par ${}^t u$. (NB : $\text{Mat}_{\mathcal{B}^*}({}^t u) = {}^t \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$).

B. Notion d'endomorphisme induit

Définition 7 ([M2] 17). Si F est stable par u , alors on dispose de l'endomorphisme induit par u sur $F : u_F : F \rightarrow F, x \mapsto u(x)$.

Proposition 8 ([M2] 55, 18). Si F est stable par u , alors $\chi_{u_F} \mid \chi_u$ et $\pi_{u_F} \mid \pi_u$.

Corollaire 9 ([M2] 93). Si F est stable par u et si u est diagonalisable (resp. trigonalisable, resp. nilpotent), alors u_F aussi.

Proposition 10 ([M2] 55, 18). Si $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ est une décomposition de E en somme de sous-espaces stables, alors : $\chi_u = \chi_{u_{F_1}} \dots \chi_{u_{F_p}}$ et $\pi_u = \pi_{u_{F_1}} \vee \dots \vee \pi_{u_{F_p}}$.

II. Application à la réduction des endomorphismes

Lemme 11 (des noyaux - [M2] 43). $\forall (P, Q) \in K[X]^2, P \wedge Q = 1 \implies \text{Ker}((PQ)(u)) = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$

A. Diagonalisation, trigonalisation

Théorème 12 (de CAYLEY-HAMILTON - [M2] 82). $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Corollaire 13. $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \text{Ker}((u - \lambda \text{id}_E)^{\mu_{\lambda}(u)})$ est une décomposition de E en somme de sous-espaces stables.

Proposition 14 ([M2] 84). Écrivons $\chi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m(\lambda)}$ et posons $E_\lambda(u) = \text{Ker}(\lambda \text{id}_E - u)$. Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m(\lambda)$.

Théorème 15 ([R] 683 ; [M2] 90-93). On a :

- u est diagonalisable $\iff \pi_u$ est scindé à racines simples \iff il existe P annulateur de u scindé à racines simples $\iff \chi_u$ est scindé et $\forall \lambda \in \text{Sp}(u)$, $\dim(E_\lambda(u)) = \mu_{\chi_u}(\lambda)$.
- u est trigonalisable $\iff \chi_u$ est scindé \iff il existe un polynôme scindé qui annule u .

Théorème 16 (de réduction simultanée - [M2] 94,107). Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}(E)^I$ une famille d'endomorphismes qui commutent deux à deux. Si tous les $u_i, i \in I$ sont diagonalisables (resp. trigonalisables), alors il existe une base de E qui diagonalise (resp. trigonalise) simultanément tous les $u_i, i \in I$.

Lemme 17 ([R] 743). Il existe un sous-espace de E de dimension 1 ou 2 stable par u .

B. Cas des endomorphismes normaux

Dans l'encadré suivant, on suppose u normal

Lemme 18 ([R] 743). Si F est un sous-espace de E stable par u , alors F^\perp est stable par u .

Lemme 19 ([R] 744). Il existe des sous-espaces P_1, \dots, P_r de E stables par u , de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, tels que

$$E = P_1 \bigoplus \dots \bigoplus P_r$$

Lemme 20 (PAS DEV - [R] 745). Si $n = \dim E = 2$, alors :

- Si u admet une valeur propre réelle, alors u est diagonalisable dans une base orthonormée,
- Sinon, pour toute base orthonormée \mathcal{B} de E , il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b \neq 0$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Théorème 21 (de réduction des endomorphismes normaux - [R] 745). Il existe une base orthonormée \mathcal{B} de E telle que, par blocs, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(D_p, R_1, \dots, R_r)$, où $D_p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonale, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists (a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2 : b_i \neq 0$ et $R_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ et $p + 2r = n$.

Corollaire 22 (théorème spectral - [R] 746 (734)). Tout endomorphisme auto-adjoint se diagonalise dans une base orthonormée.

Corollaire 23 ([R] 727). Si u est orthogonal, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la

$$\text{forme, par blocs : } \begin{pmatrix} I_p & & & \\ & -I_q & & \\ & & R_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & R_r \end{pmatrix}, \text{ où } R_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}$$

Proposition 24. Si u est une rotation et que $\dim(E)$ est impaire, alors $\text{Ker}(u - \text{id}_E) \neq \{0\}$.

Références

- R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
M2 *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*, Roger Mansuy, Rached Mneimné, 3e édition

II. Application à la décomposition des endomorphismes

A. Décomposition de JORDAN des endomorphismes nilpotents

Définition 25 ([M2] 143). On appelle bloc de JORDAN de taille d la matrice :

$$J_d := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{N}^r$, on pose $J_\lambda = \text{diag}(J_{\lambda_1}, \dots, J_{\lambda_r})$.

Théorème 26 (décomposition de JORDAN des endomorphismes nilpotents - [M2] 144). Supposons u nilpotent d'indice λ_1 . Il existe $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ telle que $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = n$, et \mathcal{B} une base de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}$. Cette décomposition est unique.

B. Décomposition de DUNFORD

Théorème 27 (décomposition de DUNFORD - [M2] 141 ; [R] 613). Si u est trigonalisable, alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u = d + n$, $d \circ n = n \circ d$, d est diagonalisable et n est nilpotent.

Corollaire 28 ([R] 634). Sur $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, e^u est diagonalisable si, et seulement si, u l'est.

C. Une application : le critère de diagonalisabilité de KLARÈS

Théorème 29 (critère de KLARÈS - [M2] 154). Posons $\text{ad}_u : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ v - v \circ u$. Si u est trigonalisable, alors :

$$u \text{ diagonalisable} \iff \text{Ker}(\text{ad}_u) = \text{Ker}(\text{ad}_u^2)$$

Développements

- Développement 1 : Lemmes 17, 18, 19 et Théorème ??.
- Développement 2 : Théorème 29

155 : Exponentielle de matrices. Applications.

Dans cette leçon, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. On fixe une norme d'algèbre $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose connu et maîtrisé le calcul matriciel élémentaire.

Théorème/Définition 1 ([R] 761). La série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ converge normalement sur tout compact. Sa somme est appelée exponentielle de A , et est notée $\exp(A)$ ou e^A .

Exemple 2 ([R] 761). $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\exp(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$. En particulier, $\exp(0_n) = I_n$ et $\exp(I_n) = e \cdot I_n$.

Exemple 3. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}\right)$

I. Propriétés algébriques de l'exponentielle matricielle

Proposition 4. Si A et B commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. (NB : la réciproque est vraie !) et $\exp(A)$ et $\exp(B)$ commutent.

Contre-exemple 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne commutent pas, et $e^A e^B = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 1/e \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e & 1/e \\ 0 & 1/e \end{pmatrix} = e^B e^A$.

Corollaire 6. $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) \subseteq GL_n(\mathbb{K})$, et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Proposition 7 ([R] 761-762). On a les propriétés suivantes :

- $\forall P \in GL_n(\mathbb{K})$, $P \exp(A) P^{-1} = \exp(PAP^{-1})$
- ${}^t \exp(A) = \exp({}^t A)$
- $\det(\exp(A)) = e^{\text{tr}(A)}$
- $\overline{\exp(A)} = \exp(\overline{A})$

Corollaire 8. $\exp(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) \subseteq O_n(\mathbb{K})$, avec $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^t M = -M\}$.

Remarque 9. On peut montrer que $\exp(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = SO_n(\mathbb{R})$.

Proposition 10. Si A est diagonalisable, alors $\text{Sp}(\exp(A)) = \exp(\text{Sp}(A))$.

Théorème 11. On a :

- $\exp(A) \in \mathbb{K}_{n-1}[A]$ et commute avec A .
- Si A est diagonalisable et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $A \in \mathbb{R}_{n-1}[\exp(A)]$.

Remarque 12. Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i\pi \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on a $\exp(A) = I_2$ donc pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(\exp(A)) = P(1)I_2 \neq A$.

II. L'exponentielle d'une matrice en pratique

A. Quelques méthodes de calcul

Proposition 13. Supposons A diagonalisable. Il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $P \in O_n(\mathbb{K})$ tels

$$\text{que } A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}; \text{ alors } \exp(A) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Théorème 14 (décomposition de DUNFORD - [R] 613). Si A est trigonalisable, alors il existe un unique $(D, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que D est diagonalisable, N est nilpotente, D et N commutent, et $A = D + N$. De plus, $(D, N) \in K[A]^2$.

Proposition 15. Si A est nilpotente d'indice r , alors $\exp(A) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{A^k}{k!}$.

Proposition 16 ([R] 765). Si A est trigonalisable, et si $A = D + N$ est la décomposition de DUNFORD de A , alors $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$.

En particulier, e^D est diagonalisable et $e^D(e^N - I_n)$ est nilpotente, et ce sont les éléments de la décomposition de DUNFORD de e^A .

Proposition 17 ([R] 778). $(I_n + \frac{A}{k})^k \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} \exp(A)$

Remarque 18. Cela fournit une méthode pour approcher numériquement l'exponentielle d'une matrice, toutefois bien moins efficace qu'un calcul direct.

B. Application : résolution d'EDO linéaires à coefficients constants

Proposition 19 ([Gr] 378). $t \mapsto e^{tA}$ est lisse sur \mathbb{R} , de dérivée $t \mapsto Ae^{tA} = e^{tA}A$.

Proposition 20 ([Gr] e378). L'unique solution du problème de CAUCHY

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

pour $t_0 \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, est $t \mapsto e^{(t-t_0)A}Y_0$.

Exemple 21. Le problème de CAUCHY $\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ admet pour (unique) solution $t \mapsto \exp\left(t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 22 (formule de DUHAMEL). Soient $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}\mathbb{R}$ continue, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'unique solution du problème de CAUCHY $\begin{cases} Y' = AY + B; \quad Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$ est

$$t \mapsto e^{(t-t_0)A}Y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}B(s)ds$$

III. Propriétés analytiques de l'exponentielle matricielle

A. Injectivité, surjectivité

Théorème 23 ([R] 769). L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective, non injective.

Contre-exemple 24. $\forall k \in \mathbb{Z}, \exp(2i\pi k I_n) = I_n$

Théorème 25. *L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ n'est ni surjective, ni injective. Plus précisément,*

- $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{M^2 \mid M \in GL_n(\mathbb{R})\} \neq GL_n(\mathbb{R})$
- Exemple 3 justifie la non-injectivité

Remarque 26. Comme $\det(\exp(A)) = e^{\text{tr}(A)} > 0$, on a $\det^{-1}(\mathbb{R}^+) \cap \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \emptyset$.

Proposition 27 ([R] e768-777). Notons $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application $\exp : \mathcal{N}_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est injective.

Notons $\Delta_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application $\exp : \Delta_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est injective.

Application 28 ([R] 777). $\exp(A)$ est diagonalisable si, et seulement si, A l'est.

Théorème 29 ([C] 357). L'application $\exp : S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Théorème/Définition 30 ([R] 766-768). Si $A \in \mathcal{B}(I_n, 1)$, alors $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{A^n}{n}$ converge normalement sur tout compact. Sa somme est notée $\ln(I_n + A)$, et est appelée logarithme de A .

Remarque 31. On a $\ln(I_n) = 0_n$.

Théorème 32 (ADMIS). L'application $\exp : \mathcal{N}_n(\mathbb{C}) \rightarrow I_n + \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ est une bijection de réciproque \ln .

B. Régularité

Théorème 33 (ADMIS - [Rv] 306). \exp est lisse sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 34. La différentielle de \exp en $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est :

$$d(\exp)(X) : H \mapsto \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[\cdot, X]^n}{(n+1)!} \right) (H)$$

où $[\cdot, X] : H \mapsto [H, X] = HX - XH$.

Corollaire 35. \exp induit un C^1 -difféomorphisme local d'un voisinage de 0_n sur un voisinage de I_n .

Développements

- Développement 1 : Théorème 29
- Développement 2 : Proposition 34

Références

- R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
- C *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et géométries I*, P. Caldero, J. Germoni
- Gr *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone, 6e édition, 2e version
- Rv *Petit guide du calcul différentiel*, François Rouvière, 4e édition

156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Dans cette leçon, K désigne un corps, E est un K -espace vectoriel de dimension finie n , et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I. Rappels sur l'étude des endomorphismes

Théorème 1 (de structure - [M2] 2). L'application $\varphi_u : K[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$ qui à $P = \sum a_k X^k$ associe $P(u) := \sum a_k u^k$, est un morphisme de K -algèbres.

Proposition/Définition 2 ([M2] 3,4). L'ensemble $I_u = \text{Ker}(\varphi_u)$ des polynômes dits annulateurs de u , est un idéal de $K[X]$, appelé idéal annulateur de u . Il n'est pas réduit à $\{0\}$, et donc admet un unique générateur unitaire, noté μ_u , appelé polynôme minimal de u .

Remarque 3. Par correspondance entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(K)$, ces résultats restent valables pour les matrices.

Définition 4 ([M2] 54). Le polynôme caractéristique de u est définie par $\chi_u = \det(X \text{id}_E - u)$.

Théorème 5 (de CAYLEY-HAMILTON - [M2] 81). $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Proposition 6 ([R] 605). $\text{Sp}(u) = \chi^{-1}(\{0\}) = \pi^{-1}(\{0\})$

Proposition 7 ([M2] 55?). Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Notons $u_F \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme induit par u sur F . Alors $\pi_{u_F} \mid \pi_u$ et $\chi_{u_F} \mid \chi_u$.

Proposition 8 ([M2] 18-55). Si $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ est une décomposition de E en sous-espaces stables par u , alors $\chi_u = \chi_{u_{F_1}} \cdots \chi_{u_{F_r}}$ et $\pi_u = \pi_{u_{F_1}} \vee \dots \vee \pi_{u_{F_r}}$.

Lemme 9 (des noyaux - [M2] 43). Soit $(P, Q) \in K[X]^2$. Si $P \wedge Q = 1$, alors $\text{Ker}((PQ)(u)) = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$.

II. Trigonalisation

Définition 10 ([R] 675). On dit que u est trigonalisable s'il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire.

Corollaire 11 ([R] 676). Si u est trigonalisable, alors $\text{tr}(u) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} m(\lambda)\lambda$ et $\det(u) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda^{m(\lambda)}$.

Théorème 12 ([R] 676). u est trigonalisable $\iff \pi_u$ est scindé \iff il existe $P \in I_u$ scindé.

Corollaire 13 ([R] 676). Sur un corps algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable.

Exemple 14. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur \mathbb{C} mais pas sur \mathbb{R} .

Application 15 ([R] 762). $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$.

Proposition 16. Si F est un sous-espace vectoriel stable par u et si u est trigonalisable, alors $u_f : F \rightarrow F$ est trigonalisable.

Proposition 17. Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ s'écrit par blocs $\text{diag}(A_1, \dots, A_r)$, alors $\chi_A = \chi_{A_1} \cdots \chi_{A_r}$ et $\pi_A = \pi_{A_1} \vee \dots \vee \pi_{A_r}$.

Proposition 18 ([Go] 175). Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent, alors pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $E_\lambda(u)$ est stable par v .

Théorème 19 ([R] 678). Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}(E)^I$ une famille d'endomorphismes qui commutent deux à deux. Si les u_i , $i \in I$, sont tous trigonalisables, alors ils le sont dans une même base (on dit qu'ils sont cotrigonalisables).

Proposition 20 ([Go] e192). Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v sont cotrigonalisables, alors $u + v$ et $u \circ v$ sont trigonalisables.

Exemple 21. On a :

- $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont trigonalisables, mais pas leur somme.
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont trigonalisables, mais pas leur produit.

III. Endomorphismes nilpotents

A. Définition, critères, propriétés

Définition 22 ([Gr] 93). On dit que u est nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On définit alors l'indice (de nilpotence) de u comme $\min \{k \in \mathbb{N}^* \mid u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$.

Exemple 23. La dérivation de $\mathbb{C}_n[X]$ est nilpotente d'indice $n + 1$.

Proposition 24 ([Gr] e192). Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Si u et v commutent, alors $u + v$ et $u \circ v$ sont nilpotents.

Théorème 25. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- u est nilpotent
- $\chi_u = X^n$
- $\exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\pi_u = X^k$
- u est trigonalisable et $\text{Sp}(u) = \{0\}$.

Corollaire 26. Si K est algébriquement clos, alors u est nilpotent $\iff \text{Sp}(u) = \{0\}$.

Exemple 27. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nilpotente, mais son spectre est $\{0\}$.

Théorème 28 ([C] 27-32). Si $K = \mathbb{R}$, alors u est nilpotent $\iff \forall k \in \mathbb{N}^*$, $\text{tr}(u^k) = 0$.

Remarque 29. Si K est un corps fini, le résultat est faux : considérer $\text{id}_{(\mathbb{F}_p)^p}$.

Proposition 30. Si F est un sous-espace vectoriel stable par u et si u est nilpotent, alors $u_F : F \rightarrow F$ est nilpotent.

B. Réduction de JORDAN des endomorphismes nilpotents

Notation 31 ([M2] 143). Posons

$$J_r := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On l'appelle bloc de JORDAN d'ordre r .

Lemme 32 ([R] 678). Supposons u nilpotent d'indice p . Soit $x \notin \text{Ker}(u^{p-1})$, posons $F_x = \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$.

- F_x est stable par u et $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est une base de F_x ;
- F_x admet un supplémentaire stable par u .

Théorème 33 (réduction de JORDAN). Supposons u nilpotent. Il existe $d_1 \geq \dots \geq d_r$ et une base \mathcal{B} de E tels que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(J_{d_1}, \dots, J_{d_r})$.

Proposition 34. Posons $A = \text{diag}(J_{i_1}, \dots, J_{i_r})$. On a $\chi_A = \pi_A = X^{i_r}$, et A est nilpotente d'indice r .

C. Noyaux itérés et tableaux de YOUNG

Proposition 35 ([M2] 16). La suite $(\text{Ker}(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et stationnaire, et si on note $d_k = \dim(\text{Ker}(u^k))$, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $d_{k+1} = d_k + \dim(\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u^k))$.

Proposition 36 ([M2] 16). $(d_{k+1} - d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante (on dit que $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ s'essouffle).

Proposition 37 ([Gr] 93). $p = \min \{k \in \mathbb{N} \mid \forall q \geq k, \text{Ker}(u^q) = \text{Ker}(u^k)\}$ est appelé caractère de u . Il vérifie $p \leq n$. Si u est nilpotent, alors p est aussi l'indice de nilpotence de u .

Définition 38 ([M2] 147). — Le tableau de YOUNG associé à une suite d'entiers $n_1 \geq \dots \geq n_r$ est le tableau à r lignes tel que la i -ième ligne contient n_i cases (alignées à gauche).

- Le tableau de YOUNG d'un endomorphisme nilpotent est le tableau de YOUNG de $d_2 - d_1 \geq d_3 - d_2 \geq \dots \geq d_p - d_{p-1}$ avec les notations ci-dessus.

Exemple 39. FIGURE 1.

Proposition 40. Soit $d_1 \geq \dots \geq d_r$. La matrice par blocs $\text{diag}(J_{d_1}, \dots, J_{d_r})$ est nilpotente d'indice d_1 .

Exemple (Construction du tableau de YOUNG à partir de la réduite de JORDAN). / [M2] 147/ FIGURE 2. A PRESENTER.

Théorème 41 ([M2] 148). Deux endomorphismes nilpotents sont semblables si, et seulement si, ils ont la même réduction de JORDAN.

Corollaire 42. Il y a autant de classes de similitude de matrices nilpotentes que de partitions de n .

IV. Décomposition de DUNFORD et applications

Dans cette section, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Théorème 43 (décomposition de DUNFORD - [R] 683). Si χ_u est scindé, alors il existe un unique $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que d est diagonalisable, n nilpotent, d et n commutent et $u = d + n$. De plus, $(d, n) \in K[u]^2$.

Application 44 ([R] 684). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que χ_A est scindé. Soit $A = D + N$ sa décomposition de DUNFORD. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $P^{-1}DP =$

$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On a alors :

$$e^A = P \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$$

Exemple 45. $\exp \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(I_3 + J_3) = \begin{pmatrix} e & e & e/2 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$

Application 46. $\{Y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n) \mid Y' = AY\} = \{t \mapsto e^{tA} Y_0 \mid Y_0 \in \mathbb{K}^n\}$

Théorème 47 (critère de KLARÈS - [M2 154]). Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable, alors u est diagonalisable si, et seulement si, $\text{ad}_u : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ v - v \circ u$ l'est.

Développements

- Développement 1 : Théorème 43 et application 44
- Développement 2 : Théorème 47

Références

- Gr *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone, 6e édition, 2e version
- M2 *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*, Roger Mansuy, Rached Mneimné, 3e édition
- R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
- Go *Les maths en tête - Algèbre et probabilités*, Xavier Gourdon, 3e édition
- C *Carnet de voyage en Algèbre*, Philippe Caldero, Marie Peronnier

FIGURE 1 : Tableaux de Young

► Associez à la suite d'entiers $(4, 2, 2, 1)$:



► Pour un endomorphisme tel que $d_1=2, d_2=4, d_3=5, d_4=6 \dots$



FIGURE 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

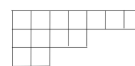
On a $\text{rg}(A) = 7$ et $d_1 = \dim(\text{Im}(A)) = 3$

Ensuite, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a $\text{rg}(A^2) = 3$ et $d_2 = \dim(\text{Im}(A^2)) = 7$.

Ensuite, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On a $\text{rg}(A^3) = 1$ et $d_3 = \dim(\text{Im}(A^3)) = 3$. Puis $A^4 = 0$. On a donc le tableau de Young suivant :



9/9

FIGURE 1.5 - s

157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Dans cette leçon, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $A^* = {}^t\bar{A}$. Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E .

I. Généralités

A. Définitions et premières propriétés

Définition 1 ([Go] 240-241). On définit :

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$ est l'ensemble des matrices réelles dites symétriques ;
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A\}$ est l'ensemble des matrices réelles dites anti-symétriques ;
- $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{A} = A\}$ est l'ensemble des matrices complexes dites hermitiennes ;
- On dit que A est auto-adjointe si $A = A^*$, i.e. si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ou $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$.

Exemple 2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2(\mathbb{C})$.

Proposition 3 ([Go] 240-241). $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{C}) \oplus i\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Définition 4. On définit :

- $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXAX \geq 0\}$ est l'ensemble des matrices symétriques réelles dites positives.
- $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXAX = 0 \implies X = 0\}$ est l'ensemble des matrices symétriques réelles dites définies positives.
- $\mathcal{H}_n^+(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \mid \forall X \in \mathbb{C}^n, {}^t\bar{X}AX \geq 0\}$ est l'ensemble des matrices hermitiennes dites positives.
- $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \mid \forall X \in \mathbb{C}^n, {}^t\bar{X}AX = 0 \implies X = 0\}$ est l'ensemble des matrices hermitiennes dites définies positives.

B. Lien avec les formes quadratiques / hermitiennes

Définition 5 ([Go] 240-241). Soit $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On dit que φ est symétrique si $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$. Le cas échéant, $q : x \in E \mapsto \varphi(x, x)$ est appelée forme quadratique associée à φ , et φ est appelée forme polaire associée à q (elle est alors unique).

Définition 6. Soit $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire (on prend l'antilinéarité à droite). On dit que φ est hermitienne si $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$. Le cas échéant, $q : x \in E \mapsto \varphi(x, x)$ est appelée forme hermitienne associée à φ , et φ est appelée forme polaire associée à q (elle est alors unique).

Exemple 7 ([Go] 239). — $(f, g) \mapsto \int_0^1 f\bar{g}$ est une forme sesquilinéaire hermitienne sur $C^0([0, 1], \mathbb{C})$, et induit une forme bilinéaire symétrique sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

- $(X, Y) \mapsto {}^t\bar{X}Y$ est bilinéaire symétrique ou sesquilinéaire hermitienne sur \mathbb{K}^n .

Proposition 8 ([Go] e241). Soit $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{K}$ bilinéaire ou sesquilinéaire. On définit la matrice de φ dans \mathcal{B} comme $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) := (\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$. Pour x et y dans E , de vecteurs coordonnés X et Y , on a alors $\varphi(x, y) = {}^t\bar{X} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot Y$ en identifiant \mathbb{K} et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors,

- φ est symétrique si, et seulement si, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
- φ est hermitienne si, et seulement si, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$

Proposition 9 ([R] 163). Soit \mathcal{B}' une autre base de E . Si P est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = {}^t\bar{P}AP$.

Proposition 10. $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cup \mathcal{H}_n(\mathbb{C}), \text{Sp}(A) \subseteq \mathbb{R}$.

II. Réduction des matrices symétriques / hermitiennes

A. Orthogonalité et théorème spectral

Soit q une forme quadratique ou hermitienne sur E , de forme polaire φ . On pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Définition 11 ([Go] 243). On dit que \mathcal{B} est q -orthogonale si $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j \implies \varphi(e_i, e_j) = 0$, i.e. si A est diagonale.

Théorème 12 (spectral - [Go] 256). Pour toute $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $M \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$), il existe P orthogonale (resp. unitaire) (i.e. $P^{-1} = P^*$) telle que P^*MP est diagonale.

Théorème 13 ([Go] 243). Il existe une base q -orthogonale de E .

Application 14. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors :

- $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subseteq \mathbb{R}^+$;
- $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subseteq \mathbb{R}^{*+}$

Théorème 15. $\forall A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que ${}^tPAP = I_n$ et tPBP est diagonale.

Théorème 16. $\forall A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \exists ! B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) : A = B^2$ (on note $B = \sqrt{A}$).

Théorème 17 (décomposition polaire - [C] 348). Toute matrice A (invertible) se décompose (de manière unique) sous la forme $A = \Theta S$, où $\Theta \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

B. Réduction de GAUSS et signature d'une forme quadratique / hermitienne

Théorème 18 (réduction de GAUSS - [R] 469). Il existe des formes linéaires l_1, \dots, l_r linéairement indépendantes et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^r$ tels que $q = \lambda_1|l_1|^2 + \dots + \lambda_r|l_r|^2$.

Exemple 19. $q(x, y, z) = x^2 + 2xy - yz + \frac{3}{4}z^2 = (x + y)^2 - (y + \frac{1}{2})^2 + z^2$

Théorème 20 (loi d'inertie de SYLVESTER - [R] 477). Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base q -orthogonale de E . Les entiers $s = \#\{e_i \in \mathcal{B} \mid q(e_i) > 0\}$ et $t = \#\{e_i \in \mathcal{B} \mid q(e_i) < 0\}$ ne dépendent que de q . Le couple (s, t) est appelé signature de q .

Exemple 21. La forme quadratique de l'exemple 19 a pour signature $(2, 1)$.

Corollaire 22 ([R] 207). Les orbites de l'action de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ par congruence sont caractérisées par le rang et la signature.

III. Propriétés topologiques en lien avec $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Définition 23. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Exemple 24. $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\exp(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.

Théorème 25 ([C] 357). On a que $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

IV. Applications

A. Vecteurs gaussiens

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n .

Définition 26 ([CR] 160,157,158). Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n) : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ est un vecteur gaussien si pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $\langle u | X \rangle$ suit une loi normale (réelle). On note alors $X \sim \mathcal{N}_n(m, \Gamma)$ où $m = {}^t(\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_n])$ est l'espérance de X , et $\Gamma = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ sa matrice de covariance.

Exemple 27 ([CR] 160). Si X_1, \dots, X_n sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, alors $\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(0_n, I_n)$.

Théorème 28 ([CR] 160). Une variable aléatoire X est gaussienne si, et seulement si il existe $m \in \mathbb{R}^n$ et $\Gamma \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tels que :

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \varphi_X(u) = \exp(i\langle m, u \rangle - \frac{1}{2}\langle \Gamma u, u \rangle)$$

Le cas échéant, m est l'espérance, et Γ sa matrice de covariance.

Corollaire 29. La loi d'un vecteur gaussien est entièrement déterminée par son espérance et sa matrice de covariance.

Proposition 30 ([CR] 161). Si $X \sim \mathcal{N}_n(m, \Gamma)$, alors $\forall A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $\forall b \in \mathbb{R}^p$, $AX + b \sim \mathcal{N}_p(Am + b, A\Gamma^t A)$.

Proposition 31. $\forall \Gamma \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\exists c \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $\Gamma = {}^t C C$.

Corollaire 32 ([CR] 161). Pour tous $m \in \mathbb{R}^n$ et $\Gamma \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_n(m, \Gamma)$.

Théorème 33. Soient $m \in \mathbb{R}^n$, $\Gamma \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $X \sim \mathcal{N}_n(m, \Gamma)$. Alors X est à densité $\iff \Gamma \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Le cas échéant, $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $f_X(u) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \det(\Gamma)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{1}{2}\langle \Gamma^{-1}(u - m) | u - m \rangle)$.

B. Optimisation des fonctions de plusieurs variables

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

Définition 34 ([Rv] 294). On appelle (matrice) hessien de f en a la matrice $\text{Hess}_a(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Remarque 35. $\text{Hess}_a(f)$ est la matrice dans \mathcal{B} de la forme bilinéaire $d^2 f(a) : \text{en particulier, pour tous } h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$,

$$d^2 f(a)(h)(k) = {}^t h \cdot \text{Hess}_a(f) \cdot k.$$

Définition 36 ([Go] 336). On dit que a est un point critique si $df(a) = 0$.

Théorème 37 ([Go] 335-336). Si f admet un maximum (resp. un minimum) local en a , alors a est un point critique, et $\text{Hess}_a(f)$ est négative (resp. positive).

NB : la réciproque est vraie si on suppose en plus $\text{Hess}_a(f)$ définie.

Algorithme 38 (de descente de gradient à pas fixe). Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\alpha > 0$ et $x_0 \in \Omega$. La suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \alpha \nabla f(x_n)$ converge vers un $x^* \in \Omega$ vérifiant $\nabla f(x^*) = 0$.

Théorème 39 ([BMP] 24-32). Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. La solution de $Ax = b$ est donné par le minimum de $x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$, lequel peut être trouvé par descente de gradient.

Développements

- Développement 1 : Partie 1) Théorèmes 12 et 13 ; Partie 2) Théorème 15
- Développement 2 : Théorème 25

Références

- R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
- Go *Les maths en tête - Algèbre et probabilités*, Xavier Gourdon, 3e édition
- C *Carnet de voyage en Algèbre*, Philippe Caldero, Marie Peronnier
- CR *Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques*, Marie-Line Chabanol, Jean-Jacques Ruch
- Rv *Petit guide du calcul différentiel*, François Rouvière, 4e édition
- BMP *Objectif Agrégation*, Vincent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré, 2e édition

159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Dans cette leçon, K désigne un corps, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , E est un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E .

I. Formes linéaires, espace dual

A. Généralités sur les formes linéaires

Définition 1 ([R] 441). Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans K . On note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E , et on l'appelle (espace) dual de E .

Exemple 2 ([R] 441). — Pour tout $x \in E$, il existe un unique $(e_1^*(x), \dots, e_n^*(x)) \in K^n$ tel que $x = e_1^*(x)e_1 + \dots + e_n^*(x)e_n$. L'application e_i^* , appelée i -ième application coordonnée, est une forme linéaire sur E .

- Si $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E , alors pour tout $y \in E$, $\langle \cdot | y \rangle$ est une forme linéaire sur E .
- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $\text{tr}(A \cdot)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(K)$.
- Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$, alors $df(a) \in (\mathbb{R}^n)^*$.
- Pour tout $\alpha \in K$, le morphisme d'évaluation en α est une forme linéaire sur $K_n[X]$, l'ensemble des polynômes de $K[X]$ de degré inférieur ou égal à n .

Proposition 3 ([R] e445). Soit H un sous-espace vectoriel de E . H est un hyperplan $\iff H$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Corollaire 4 ([R] 441). Une forme linéaire non nulle est surjective.

B. Espace dual, base duale

Proposition/Définition 5 ([R] 442). $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ est une base de E^* , appelée base duale de \mathcal{B} . Plus précisément, $\forall \varphi \in E^*$, $\varphi = \sum_{k=1}^n \varphi(e_k)e_k^*$, i.e. $e_k^{**}(\varphi) = \varphi(e_k)$.

Exemple 6. — La base duale de la base canonique de \mathbb{R}^n est $\{(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i\}_{1 \leq i \leq n}$
— La base duale de la base canonique $\{E_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(K)$ est $\{\text{tr}(E_{i,j} \cdot)\}_{1 \leq i,j \leq n}$.

Corollaire 7. $\dim E = \dim E^*$, et $E^* \cong E$.

Remarque 8. Cet isomorphisme n'est pas canonique, car il dépend du choix de la base \mathcal{B} .

Théorème 9 (de représentation de RIESZ - [BMF] 103). Soit $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert (on choisit, dans le cas complexe, l'antilinéarité à droite).

$$\forall \varphi \in H^*, \exists ! v \in H : \varphi = \langle \cdot | v \rangle$$

De plus, $\varphi \mapsto v$ est une isométrie entre H^* et H .

Remarque 10. Si E est euclidien ou hermitien, alors $y \mapsto \langle \cdot | y \rangle$ est un isomorphisme canonique entre E et E^* .

Application 11. On se place dans le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^3 . On note $[x, y, z]$ le produit mixte de (x, y, z) . Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique vecteur $x \wedge y$ tel que $[x, y, \cdot] = \langle \cdot | x \wedge y \rangle$, que l'on appelle produit vectoriel de x et y .

Exemple 12. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in K^n$ une famille de points deux à deux distincts. Pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, posons $l_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$ et $\mathcal{B} = \{l_0, l_1, \dots, l_n\}$ la base de $K_n[X]$ des polynômes de LAGRANGE. La base duale de \mathcal{B} est $\mathcal{B}^* = \{\text{eval}_{a_0}, \dots, \text{eval}_{a_n}\}$.

Exemple 13. Supposons que $\text{car } K = 0$. Fixons $a \in K$. Rappelons que :

$$\forall P \in K_n[X], P = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a) \frac{(X - a)^k}{k!}$$

et cette écriture est unique, i.e. $\left\{ \frac{(X - a)^k}{k!} \right\}_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $K_n[X]$. Sa base duale est $\{P \mapsto P^{(k)}(a)\}_{0 \leq k \leq n}$.

Application 14 ([Go] 324). Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$, alors il existe un unique vecteur $\nabla f(a)$, appelé gradient de f en a , tel que $df(a) = \langle \cdot | \nabla f(a) \rangle$.

Le cas particulier de $\mathcal{M}_n(K)$: Soit $n \geq 2$.

Théorème 15 ([R] 458). $A \mapsto \text{tr}(A \cdot)$ est un isomorphisme (canonique) entre $\mathcal{M}_n(K)$ et $\mathcal{M}_n(K)^*$.

Proposition 16. Si $\varphi \in \mathcal{M}_n(K)^*$ vérifie $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(K)^2$, $\varphi(AB) = \varphi(BA)$, alors φ est colinéaire à la trace.

Proposition 17 ([C] 16-18). — Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$ contient une matrice inversible ;

— Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice orthogonale.

C. Espace bidual, base antéduale

Définition 18 ([R] 445). L'espace $E^{**} = (E^*)^*$ est appelé (espace) bidual de E .

Théorème 19 ([R] e445). $\text{eval} : E \rightarrow E^{**}$, $x \mapsto [\varphi \mapsto \varphi(x)]$ est un isomorphisme (canonique).

Remarque 20. Ce n'est pas toujours vrai en dimension infinie !

Proposition 21 ([R] 443-444). Soit $\tilde{\mathcal{B}} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ une base de E^* . Il existe une unique base \mathcal{B} de E , appelée base antéduale de $\tilde{\mathcal{B}}$, dont \mathcal{B}^* est la base duale.

II. Notion d'orthogonalité

A. Orthogonal d'une partie

Notation 22. Pour $\varphi \in E^*$ et $x \in E$, on pose $\langle \varphi, x \rangle_{E^*, E} = \varphi(x)$ (ou plus simplement, $\langle \varphi, x \rangle$ s'il n'y a aucune ambiguïté). On appelle cette notation crochet de dualité. **Attention : c'est différent de la notation du produit scalaire.**

Remarque 23. Cette notation n'est pas anodine : dans le cadre euclidien ou hermitien (hilbertien en général), si $\varphi = \langle \cdot | y \rangle$, alors $\varphi(x) = 0 \iff \langle x | y \rangle = 0$.

Définition 24 ([R] 447). — L'orthogonal de $A \subseteq E$ est $A^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in A, \langle \varphi, x \rangle = 0\}$
— L'orthogonal de $B \subseteq E^*$ est $B^\circ = \{\varphi \in E^* \mid \forall \varphi \in B, \langle \varphi, x \rangle = 0\}$

Proposition 25 ([R] 447). — $A \mapsto A^\perp$ et $B \mapsto B^\circ$ sont décroissantes pour l'inclusion.

- $\forall A \subseteq E, A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$
- $\forall B \subseteq E^*, B^\circ = \text{Vect}(B)^\circ$

Proposition 26 ([R] 448). — Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors $(F^\perp)^\circ = F$ et $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$
— Si F est un sous-espace vectoriel de E^* , alors $(F^\circ)^\perp = F$ et $\dim F + \dim F^\circ = \dim E$

Corollaire 27. Pour tout sous-espace vectoriel F de E , $F = E \iff F^\perp = \{0\}$.

Théorème 28 (Équation d'un s.e.v - [R] 451). Si $(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in (E^*)^p$ est de rang r , alors $\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\varphi_i)$ est de dimension $n - r$. Réciproquement, si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - r$, alors il existe une famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ de E^* libre telle que $F = \bigcap_{i=1}^r \text{Ker} \varphi_i$.

Remarque 29 ([R] e446). Pour simplifier les notations, plaçons nous dans $E = K^n$. Si $H = \text{Ker} \varphi$ est un hyperplan, alors $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid \varphi(e_1)x_1 + \dots + \varphi(e_n)x_n = 0\}$ (où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de K^n). Un hyperplan est donc caractérisé par une équation, et d'après le théorème précédent, un sev de E de dimension $n - r$ est caractérisé par un système de r équations (à n inconnues).

Proposition 30 ([R] 448). Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de E . Alors :

- $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$
- $(A \cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$

On a les mêmes résultats pour l'orthogonalité dans E^* .

Application au calcul différentiel

Lemme 31 ([R] 444). $\forall (\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_r) \in (E^*)^{r+1}$, $\varphi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \iff \bigcap_{i=1}^r g_i^{-1}(\{0\})$.

Théorème 32 (des extrema liés - [Rv] 372). Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et $(f, g_1, \dots, g_r) \in C^1(U, \mathbb{R})^{r+1}$. Posons $\Gamma = \bigcap_{i=1}^r g_i^{-1}(\{0\})$. Si $f|_\Gamma$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$, et si $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$ est libre, alors il existe des réels (uniques) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ appelées multiplicateurs de LAGRANGE, tels que $df(a) = \lambda_1 dg_1(a) + \dots + \lambda_r dg_r(a)$.

B. Morphisme transposé

Dans ce paragraphe, F est un K -espace vectoriel de dimension finie p , et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition 33 ([R] 452). Le morphisme transposé de u est ${}^t u : F^* \rightarrow E^*$, $\varphi \mapsto \varphi \circ u$.

Remarque 34. Avec la notation du crochet de dualité, ${}^t u$ est le morphisme vérifiant $\forall \varphi \in F^*, \forall x \in E, \langle \varphi, u(x) \rangle_{F^*, F} = \langle \varphi \circ u, x \rangle_{E^*, E}$.

Remarque 35 ([R] 454). Dans le cadre euclidien ou hermitien, la correspondance entre E et E^* traduit une correspondance entre ${}^t u$ et u^* (l'adjoint de u).

Proposition 36 ([R] 452). On a :

- $u \mapsto {}^t u$ est linéaire injective de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{F}^*, \mathcal{E}^*$.
- $\text{Ker } {}^t u = (\text{Im } u)^\perp$
- $\text{Im } {}^t u = (\text{Ker } u)^\perp$
- Si $v \in \mathcal{L}(F, G)$, alors ${}^t (v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$.

Proposition 37 ([R] 454-452). Soient \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F des bases de E et de F . On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F^*, \mathcal{B}_E^*}({}^t u) = {}^t \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$. En particulier, $\text{rg } {}^t u = \text{rg } u$.

Proposition 38. Soient \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux bases de E . Alors, $\text{Pass}_{\mathcal{B}_2^*, \mathcal{B}_1^*} = {}^t \text{Pass}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$.

III. Application aux formes quadratiques réelles HORS-SUJET A REFAIRE

NB : Attention, ne peut rien faire par rapport aux espaces de Hilbert car on doit rester en dimension finie. Du coup la réflexivité est naturellement présente partout.

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n > 0$, et q une forme quadratique sur E .

Théorème 39. Il existe une base q -orthogonale, que l'on peut déterminer avec l'algorithme de GAUSS.

Théorème 40 (Loi d'inertie de SYLVESTER - [R] 476).

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E orthogonale pour q . Quitte à renuméroter \mathcal{B} , supposons que $q(e_1) > 0, \dots, q(e_s) > 0, q(e_{s+1}) < 0, \dots, q(e_{s+t}) < 0, q(e_{s+t+1}) = \dots = q(e_n) = 0$. Le couple (s, t) ne dépend alors pas du choix de la base orthogonale : on l'appelle signature de q .

Exemple 41. $q(a, b, c, d, e) =$

Développements

- Développement 1 : Théorème 15 et Propositions 16, 17
- Développement 2 : Théorème 40

Références

- R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
- Go *Les maths en tête - Algèbre et probabilités*, Xavier Gourdon, 3e édition
- Go' *Les maths en tête - Analyse*, Xavier Gourdon, 3e édition
- C *Carnet de voyage en Algèbre*, Philippe Caldero, Marie Peronnier
- Rv *Petit guide du calcul différentiel*, François Rouvière, 4e édition
- BMP *Objectif Agrégation*, Vincent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré, 2e édition
- FGN *Oraux X-ENS Algèbre 2*, 2e édition

171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

On suppose connue la théorie générale des espaces quadratiques, pour se concentrer sur le cas particulier d'une espace quadratique réel (E, q) de dimension $n \geq 1$. On note φ la forme polaire de q .

I. Propriétés propres aux formes quadratiques réelles

A. Positivité de définition

Définition 1 ([R] 475). On dit que q est positive (resp. négative) si $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $q(x) \geq 0$ (resp. $q(x) \leq 0$). Si cette inégalité est stricte, alors on dit que q est définie positive (resp. définie négative).

Exemple 2. Sur \mathbb{R}^2 , $q : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est définie positive, $q : (x, y) \mapsto x^2$ est positive non définie, et $q : (x, y) \mapsto xy$ est rien du tout.

Théorème 3 (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ - [R] 475). Si q est positive, alors pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y)^2 \leq q(x)q(y)$, avec égalité si (et seulement si lorsque q est définie positive) x et y sont colinéaires.

Corollaire 4. Si q est positive, \sqrt{q} est une semi-norme. Si q est définie positive, alors \sqrt{q} est une norme.

Corollaire 5. Si q est positive, alors q définie positive \iff q non dégénérée.

B. Réduction et algorithme de GAUSS

Théorème 6 (réduction de GAUSS - [R] 469). Il existe (l_1, \dots, l_r) une famille libre de formes linéaires et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^r$ telles que $q = \sum_{i=1}^r \lambda_i l_i^2$.

Algorithme 7 ([R] 469-472). Écrivons $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_{i,j} x_i x_j$.

S'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $a_i \neq 0$ (quitte à renuméroter, disons $a_1 \neq 0$), on écrit $q(x_1, \dots, x_n) = a_1 \left(x_1 + \frac{1}{a_1} \sum_{2 \leq j \leq n} b_{1,j} x_j \right)^2 + [\text{ce qui manque}] = f(x_2, \dots, x_n)$.

Si non, quitte à renuméroter, supposons que $b_{1,2} \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_n) &= 2b_{1,2}x_1x_2 + 2x_1 \sum_{3 \leq j \leq n} b_{1,j}x_j + 2x_2 \sum_{3 \leq j \leq n} b_{2,j}x_j + \dots \\ &=: 2b_{1,2}x_1x_2 + 2x_1f_1(x_3, \dots, x_n) + 2x_2f_2(x_3, \dots, x_n) + \dots \\ &= 2b_{1,2}(x_1 + \frac{1}{b_{1,2}}f_2(x_3, \dots, x_n))(x_2 + \frac{1}{b_{1,2}}f_1(x_3, \dots, x_n)) + \dots \\ &=: 2b_{1,2}l_1l_2 + \dots \end{aligned}$$

puis on écrit $l_1l_2 = \frac{1}{4}((l_1 + l_2)^2 - (l_1 - l_2)^2)$ Puis on itère sur les autres variables.

Exemple 8 ([R] 485). $5xy + 6xz + 3yz = \frac{1}{20}(5x + 5y + 9z)^2 - \frac{1}{20}(5x + 5y - 3z)^2 - \frac{18}{5}z^2$

Corollaire 9 ([R] 473). Il existe une base q -orthogonale de E , i.e. dans laquelle la matrice de q est diagonale.

Théorème 10 (orthogonalisation simultanée - [Gr] e315, [Au] 271). Si q et q' sont deux formes quadratiques sur E avec q définie positive, alors il existe une base de E qui est à la fois q -orthogonale et q' -orthogonale.

Matriciellement, si $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPMP = I_n$ et tPNP est diagonale.

C. Signature et classification

Définition 11 ([R] 477). Notons \P (resp. \mathcal{N}) l'ensemble des sous-espaces f de E tels que $q|_f$ est définie positive (resp. définie négative). Posons $s = \max_{F \in \P} \dim F$ et $t = \max_{F \in \mathcal{N}} \dim F$ avec la convention $\max \emptyset = 0$.

Le couple (s, t) est appelé signature de q .

Théorème 12 (loi d'inertie de Sylvester - [R] 476). Supposons que \mathcal{B} est q -orthogonale. Alors $s = \#\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid q(e_i) > 0\}$ et $t = \#\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid q(e_i) < 0\}$.

Remarque 13 ([R] 476). En particulier, $s + t = \text{rg } q$

Corollaire 14. Les classes d'équivalence sont caractérisées par la signature. En particulier, il y a $n + 1$ classes non dégénérées.

Exemple 15 ([R] 491). La signature de $M \mapsto \text{tr}(M^2)$ est $(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2})$.

D. Matrice hessienne et optimisation

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Théorème 16 ([BMP] 18). Si f admet un maximum (resp. un minimum) local en a , alors a est un point critique, et $\text{Hess}_a(f)$ est négative (resp. positive).

La réciproque est vraie si on suppose en plus $\text{Hess}_a(f)$ définie.

Si a est un point critique et si $\text{Hess}_a(f)$ admet deux valeurs propres de signes strictement opposés, alors a est un point-selle.

Remarque 17. $x \mapsto x^4$ admet un minimum globale en 0, mais hessienne (sa dérivée seconde) est nulle en 0.

Exemple 18 ([BMP] 24-32). Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $J : x \mapsto \frac{1}{2}\langle AX \mid X \rangle - \langle b \mid x \rangle$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla J(x) = Ax - b$ et $\text{Hess}_J(x) = A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. En particulier, J admet un unique minimum (global) qui est la solution de $Ax = b$.

II. Étude des coniques d'un plan affine euclidien

Soient \mathcal{P} un plan affine euclidien. On fixe un repère ortho-normé.

A. Définition algébrique, classification

Définition 19 ([R] 493-494). Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ non tous nuls, et $(d, e, f) \in \mathbb{R}^3$. On pose $q : (x, y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2$ et $l : (x, y) \mapsto dx + ey$. Une conique est

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathcal{P} \mid q(x, y) + l(x, y) + f = 0\}$$

On définit $Q : (x, y, z) \mapsto q(x, y) + l(x, y)z + fz^2$.

Exemple 20 ([Au] 228-231). On a les coniques suivantes :

- $\{(x, y) \in \mathcal{P} \mid (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2\}$ = Cercle $\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, r\right)$
- $\{(x, y) \in \mathcal{P} \mid (x/\alpha)^2 + (y/\beta)^2 = r^2\}$ est une ellipse.
- $\{(x, y) \in \mathcal{P} \mid y = 2px^2\}$ est une parabole.

Théorème 21. Classification : ANNEXE 1

Proposition 22. Soit $\Delta = b^2 - 4ac \equiv \text{disc}(q)$ avec les notations de Def 19.

- Si $\Delta < 0$, alors \mathcal{C} est une ellipse, un point ou vide ;
- Si $\Delta = 0$, alors \mathcal{C} est une parabole, deux droites parallèles ou vide ;
- Si $\Delta > 0$, alors \mathcal{C} est une hyperbole, deux droites sécantes ou vide.

B. Définitions géométriques

Proposition 23 (FIG. 2 - [R] 494). Les ellipses, paraboles, hyperboles, points, et couples de droites sécantes sont obtenus comme intersection d'un cône et d'un plan.

Théorème 24 (FIG. 3 - [R] 505-506). Soient \mathcal{D} une droite de \mathcal{P} , $F \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{D}$ et $e > 0$. L'ensemble $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \mid d(M, F) = ed(M, \mathcal{D})\}$ est une conique, on appelle \mathcal{D} la directrice, F son foyer et e son excentricité.

Plus précisément, \mathcal{C} est soit vide, soit une ellipse si $e < 1$, une parabole si $e = 1$, une hyperbole si $e > 1$.

Remarque 25 ([R] 506). On peut déterminer une équation dans un repère bien choisi, comme détaillé dans FIGURE 3.

Théorème 26 (FIG. 1 - [Au] 233-234). — Si \mathcal{C} est une ellipse, alors il existe F et F' dans \mathcal{P} (appelés foyers de \mathcal{C}) et $a > 0$ (appelé demi-grand axe de \mathcal{C}) tels que :

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \mid MF + MF' = 2a\}$$

- Si \mathcal{C} est une hyperbole, alors il existe F et F' dans \mathcal{P} (appelés foyers de \mathcal{C}) et $a > 0$ (appelé demi-grand axe de \mathcal{C}) tels que :

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \mid |MF - MF'| = 2a\}$$

Théorème 27 ([Ei] 52). Soient A, B, C, D et E cinq points de \mathcal{P} distincts.

1. Il existe une conique passant par A, B, C, D et E ;
2. Elle est unique si, et seulement si, 4 points ne sont pas alignés ;
3. Elle est non dégénérée si, et seulement si, 3 points ne sont pas alignés.

ANNEXE 1 : Classification des coniques

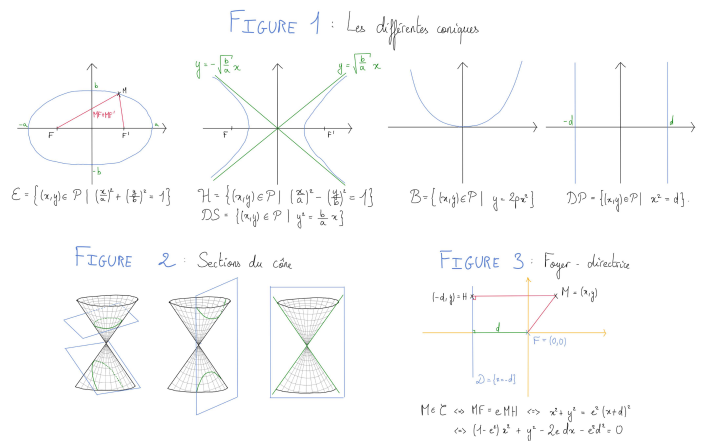
Type	Signature de q	Signature de Q	Éq. réduite
Ellipse	$(2, 0)/(0, 2)$	$(2, 1)/(1, 2)$	$x^2 + y^2 = 1$
Parabole	$(1, 0)/(0, 1)$	$(2, 1)/(1, 2)$	$x^2 + y = 0$
Hyperbole	$(1, 1)$	$(2, 1)/(1, 2)$	$x^2 - y^2 = 1$
Droites sécantes	$(1, 1)$	$(1, 1)$	$x^2 - y^2 = 0$
Droites parallèles	$(1, 0)/(0, 1)$	$(1, 1)$	$x^2 = 1$
Droites confondues	$(1, 0)/(0, 1)$	$(1, 0)/(0, 1)$	$x^2 = 0$
Point	$(2, 0)/(0, 2)$	$(2, 0)/(0, 2)$	$x^2 + y^2 = 0$
Vide (1)	$(2, 0)/(0, 2)$	$(3, 0)/(0, 3)$	$x^2 + y^2 = -1$
Vide (2)	$(1, 0)/(0, 1)$	$(2, 0)/(0, 2)$	$x^2 = -1$

Développements

- Développement 1 : Théorème 12
- Développement 2 : Théorème 27

Références

- R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition
- BMP *Objectif Agrégation*, Vincent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré, 2e édition
- Au *Géométrie*, Audin
- Ei *Géométrie analytique classique*, Eiden
- Gr *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone, 6e édition, 2e version



4/4

FIGURE 1.6 - s

IMPASSE / PAS FINI 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

On considère K un corps commutatif. Soient $n, p \geq 1$.

I. Mise en place du problème

Définition 1 ([TL1] 377 ; [Gr] 37). Un système d'équations linéaires à n équations et p inconnues est un système de la forme :

$$(S) \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où les coefficients $a_{i,j}$ et b_i appartiennent K . Si tous les b_i sont nuls, le système est dit homogène (ou sans second membre).

La matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ est la matrice du système.

Proposition 2 ([TL1] 378). Le système (S) prend la forme matricielle $AX = B$, où $B = {}^t(b_1, \dots, b_n)$ et $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$.

Théorème 3 ([TL1] 378). Un système linéaire homogène de n équations à n inconnues possède une solution non triviale si, et seulement si, sa matrice A n'est pas inversible.

Définition 4 ([TL1] 379 ; [R] 191). Le système (S) est dit compatible s'il possède au moins une solution et incompatible sinon.

Proposition 5 ([TL1] 379). Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Le système (S) est compatible ;
2. B est combinaison linéaire (non triviale) des colonnes de A .

Proposition 6. Supposons $A = 0_{n,p}$. Si $B = 0_{n,1}$, alors tout vecteur X est solution du système. Si $B \neq 0_{n,1}$, alors le système n'a pas de solution.

II. Techniques de résolutions dans des cas précis

On considère jusqu'à la fin de la leçon un système (S) à n équations et p inconnues. On note A la matrice associée à ce système.

A. Méthode de Cramer

Définition 7 ([TL1] 379). Le système (S) est appelé système de Cramer si $n = p$ et si A est inversible.

Théorème 8 ([TL1] 380). Supposons que (S) soit un système de Cramer. Il possède alors une unique solution $X \in K^n$,

qui est $X = A^{-1}B$. Ses coefficients x_j vérifient, pour tout $1 \leq j \leq n$:

$$x_j = \frac{\det(C_1, \dots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \dots, C_n)}{\det A}$$

où C_i est donnée par la i -ième colonne de A .

Exemple 9 ([TL1] 380). Considérons le système

$$(S) : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 4y + 9z = 1 \\ 3x - 4y + 2z = 1 \end{cases}$$

La matrice associée à ce système est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, en

particulier $\det A = 1 \neq 0$ donc il existe une unique solution à ce système. Cette dernière est donnée par :

$$x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}, y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \text{ et } z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

donc $x = 29$, $y = 15$ et $z = -13$.

Remarque 10 ([TL1] 381). Intérêt essentiellement théorique car coût plus élevé que de résoudre le système par pivot de GAUSS.

B. Matrices échelonnées et méthode de remontée

Définition 11 ([R] 187). On dit que A est échelonnée en ligne si elle est nulle ou si il existe $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que les lignes L_i de A vérifient :

1. $L_i \neq 0, \forall i \leq r$
2. $L_i = 0, \forall i \geq r + 1$
3. $1 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_r \leq p$ où $d_i = \min \{1 \leq j \leq p \mid a_{ij} \neq 0\}$.

Les coefficients a_{i,d_i} sont appelés les pivots de la matrice échelonnée A .

Exemple 12 ([Gr] 39). La matrice définie par :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est échelonnée, mais ce n'est pas le cas de :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Proposition 13 ([R] 187). Avec les notations précédentes, une matrice A non nulle échelonnée en lignes est de rang r ($=$ le nombre de lignes non nulles).

Définition 14 ([R] 188). *On dit qu'un système linéaire $AX = B$ est échelonné si la matrice A est échelonnée en lignes.*

Algorithme 15 (Échelonnage d'une matrice - [R] 193). *A FAIRE*

Développements

Références

R *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne Rombaldi, 2e édition

C *Carnets de voyage en Algébrie*, Caldero

Gr *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone, 6e édition, 2e version

TL1 *Mathématiques Tout-en-un pour la Licence 1*, Jean-Pierre Ramis, André Warusfel

203 : Utilisation de la notion de compacité

Dans toute la leçon, (X, d) et (Y, δ) sont des espaces métriques.

I. Notion de compacité : définition, caractérisation, propriétés

Définition 1 ([G] 27). On dit que (X, d) est compact si de tout recouvrement de X par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini de X .

Exemple 2 ([G] 27). Si X est fini, alors (X, d) est compact. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ n'est pas compact : $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]-n, n[$.

Proposition 3 ([G] 27). Un espace métrique compact est borné.

Proposition 4 ([G] 28). Si (X, d) est compact, alors toute intersection décroissante de fermés non vides de X est non vide.

Remarque 5 ([G] 28). La compacité est cruciale : considérer $X = \mathbb{R}$, et $([n, +\infty[)_{n \in \mathbb{N}}$.

Théorème 6 (de BOLZANO-WEIERSTRASS - [G] 28). (X, d) est compact si, et seulement si, de toute suite d'éléments de X on peut extraire une sous-suite convergente.

Exemple 7. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$, $[a, b]$ est compact.

Corollaire 8 ([G] 30). Tout espace métrique compact est complet.

Corollaire 9 ([G] 30). Toute partie fermée d'un compact est compacte.

Exemple 10 ([G] 30). Les compacts de \mathbb{R} sont les fermés bornés.

Proposition 11 ([G] 30). Tout compact est fermé et borné.

Remarque 12. La réciproque est fautive : la boule unité fermée de $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$ est fermée et bornée, mais pas compacte.

Théorème 13 ([G] 30). Les compacts de $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$ sont les fermés bornés.

Théorème 14 (de TYCHONOV - [G] 30). Un produit fini de compacts est compact.

Proposition 15 ([G] 30). Dans un espace compact, une suite converge si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.

Remarque 16. La compacité est cruciale : considérer $(n\delta_{n \in 2\mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Dans toute la suite, on supposera (X, d) compact.

Fonctions continues sur un compact

A. Cas des fonctions numériques

Théorème 17 ([G] 31). L'image d'un compact par une application continue est compacte.

Exemple 18. La compacité est cruciale : $\mathbb{R} = \arctan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Proposition 19 ([G] 31). La réciproque d'une bijection continue sur un compact est continue (on a donc homéomorphisme).

Théorème 20 (des bornes atteintes - [G] 31). Toute fonction de $C(X, \mathbb{R})$ est bornée et atteint ses bornes.

Exemple 21 ([Rv] 413). Sur un billard elliptique, il existe une trajectoire fermée à 3 rebonds.

Exemple 22 ([G] e33). Soit $F \subseteq X$ non vide fermée. Pour tout $x \in X$, il existe $y \in F$ tel que $d(x, y) = d(x, F) = \inf_{z \in F} d(x, z)$.

Dans la suite de ce paragraphe, $(X, d) = ([a, b], \|\cdot\|)$, et on fixe $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$.

Théorème 23 (de ROLLE - [G] 73, [R] 251). Si f est dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exemple 24 ([R] 243). Si f est n fois dérivable sur $]a, b[$ et s'annule $n + 1$ fois, alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

Théorème 25 (des accroissements finis - [G] 74, [R] 258). Si f est dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Exemple 26 ([G] 74, [R] 261). Soit I un intervalle de \mathbb{R} , soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Alors f est croissante sur I si, et seulement si, $f' \geq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.

Exemple 27 ([R] 238, [G] 96). Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle non ponctuel, soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Si $f'' \geq 0$, alors f est convexe.

B. Uniforme continuité, approximation uniforme

Théorème 28 (de HEINE - [G] 31). Une fonction continue sur un compact Y est uniformément continue.

Théorème 29 (de DINI - [G] 238). 1. Soit $(f_n)_n \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. Si $(f_n)_n$ est croissante et converge simplement vers $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f .

2. Soit $(f_n)_n \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante. Si $(f_n)_n$ converge simplement vers $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f .

Exemple 30 ([HL] 26). Soit $(P_n)_n$ définie par $\forall x \in [-1, 1]$, $P_0(x) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2(x))$. La suite $(P_n)_n$ converge uniformément vers $|\cdot|$ sur $[-1, 1]$.

Théorème 31 (de STONE-WEIERSTRASS - [HL] 26). Toute sous-algèbre H de $C(X, \mathbb{R})$ unitaire et séparante (i.e. $\forall (x, y) \in X^2$, $x \neq y \implies \exists h \in H : h(x) \neq h(y)$) est dense pour $\|\cdot\|_\infty$.

Corollaire 32 (théorème de WEIERSTRASS - [G] 304). Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales.

C. Équicontinuité

Définition 33 ([HL] 37). Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{C}(X, Y)$. On dit que \mathcal{A} est :

- équicontinue en $x_0 \in X$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall f \in \mathcal{A}, \forall x \in X, d(x_0, x) < \eta \implies \delta(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.
- uniformément équicontinue si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall f \in \mathcal{A}, \forall (x, y) \in X^2, d(x, y) < \eta \implies \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Proposition 34 ([HL] 38). (X, d) étant compact, \mathcal{A} est uniformément équicontinue si, et seulement si, elle est équicontinue en tout point de X .

Exemple 35 ([HL] 38). Toute famille finie de $\mathcal{C}(X, Y)$ est uniformément équicontinue, de même que les familles de fonctions k -lipschitziennes, pour tout $k > 0$ fixé.

Théorème 36 (d'ASCOLI-ARZELÀ - [HL] 39). Les parties compactes de $\mathcal{C}(X, Y)$ sont les fermés bornés équicontinus.

Exemple 37 ([HL] 39). Munissons Y d'une mesure μ finie, et supposons Y compact. Pour $K \in \mathcal{C}(X \times Y, \mathbb{R})$, on définit $T_K : \mathcal{C}(Y, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R}), f \mapsto \int_Y K(\cdot, y)f(y)d\mu(y)$. Alors $\overline{T_K(\mathcal{B}_{\mathcal{C}(Y)}(0, 1))}$ est compact.

III. Compacité dans les espaces vectoriels normés

On fixe $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux \mathbb{K} -espaces de Banach.

A. Parties compactes et dimension finie

Théorème 38. Si E est de dimension finie, alors ses compacts sont les fermés bornés.

Théorème 39 ([G] 50). Si E est de dimension finie, alors toutes ses normes sont équivalentes.

Théorème 40 (de RIESZ - [G] 56). E est de dimension finie si, et seulement si, sa boule unité fermée (pour une norme quelconque) est compacte.

Exemple 41 ([G] 33). Supposons E de dimension finie. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si $f(x) \rightarrow_{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$, alors f est minorée et atteint son minimum.

B. Opérateurs compacts

Définition 42 ([HL] 186). On dit que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est compact si $\overline{T(\mathcal{B}_E(0, 1))}$ est compact.

Exemple 43 ([HL] 186). Les opérateurs à noyau, i.e. de la forme donnée dans Exemple 37, sont des opérateurs compacts.

Proposition 44 ([HL] 186). — Les opérateurs de rang fini sont compacts ;

- id_E est compact si, et seulement si, E est de dimension finie.

Notation 45. On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F , et $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.

Proposition 46 ([HL] 187). $\mathcal{K}(E)$ est un idéal.

Proposition 47 ([HL] 187). $\mathcal{K}(E, F)$ est un fermé de $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$.

Corollaire 48 ([HL] 188). Une limite d'une suite d'opérateurs de rang fini est compacte.

Développements

- Développement 1 : Exemple 30 et Théorème 31
- Développement 2 : Théorèmes 39 et 40

Références

- G *Les maths en tête - Analyse*, Xavier Gourdon, 3e édition
- HL *Éléments d'analyse fonctionnelle*, Francis Hirsch, Giles Lacombe
- R *Éléments d'analyse réelle*, Jean-Etienne Rombaldi, 2e édition
- Rv *Petit guide du calcul différentiel*, François Rouvier, 4e édition

208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Dans cette leçon, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

I. Normes et opérateurs sur un espace vectoriel

A. Norme sur un espace vectoriel

Définition 1 ([G] 7). Une norme sur E est une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

- $\forall x \in E, \|x\| = 0 \implies x = 0$ (séparation)
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (homogénéité)
- $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

Exemple 2 ([G] 7-8). — Le module est une norme sur \mathbb{K} ;

- Sur \mathbb{K}^n , $\|\cdot\|_p : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{1/p}$, avec $p \in [1, +\infty[$ est une norme ;
- Sur \mathbb{K}^n , $\|\cdot\|_p : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ est une norme ;
- Soit (X, d) un espace métrique compact. L'application suivante est une norme :

$$\|\cdot\|_\infty : f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{K}) \mapsto \max_{x \in X} |f(x)|$$

- Pour $p \in [1, +\infty[$, $\|\cdot\|_p : f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}) \mapsto \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$ est une norme.

Définition 3 ([G] 47). Soient N_1 et N_2 deux normes sur E . On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$.

Exemple 4. — Sur \mathbb{K}^n , $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq n \|\cdot\|_\infty$.

- Sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$, $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_\infty$, mais $\|\cdot\|_\infty \not\leq \|\cdot\|_1$.

Proposition 5. — Sur \mathbb{K}^n , pour $p \in [1, +\infty[$, $\|\cdot\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|\cdot\|_\infty$

- Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, pour $p \in [1, +\infty[$, $\|\cdot\|_p \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} \|\cdot\|_\infty$.
Corollaire : sur ces deux espaces, $\|\cdot\|_p \rightarrow_{p \rightarrow +\infty} \|\cdot\|_\infty$.

Définition 6 ([BP] 157, 158, 175). Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Pour $p \in [1, +\infty]$, on note $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace de LEBESGUE, et $\|\cdot\|_p$ la norme usuelle sur $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Les esâce $(L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$ sont des espaces vectoriels normés.

B. Opérateurs (applications linéaires continues)

Théorème 7 ([G] 48). Soit $T : E \rightarrow F$ linéaire. Sont équivalentes :

1. T est continu sur E
2. T est continu en 0_E
3. T est uniformément continue sur E
4. T est lipschitzien
5. T est borné sur E , i.e. $\exists C > 0 : \forall x \in E, \|Tx\| \leq C\|x\|$
6. T est borné sur $\overline{\mathcal{B}(0, 1)}$

7. T est borné sur $S(0, 1)$

Notation 8. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F . On pose également $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.

Exemple 9. L'application $D : (C^1([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$, $f \mapsto f'$ est linéaire mais pas continue. Cependant, elle le devient si on munit $C^1([0, 1])$ de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. La continuité dépend donc de la norme !

Proposition 10. La continuité est préservée pour des normes équivalentes.

Définition 11 ([G] 48). Soient $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ deux normes sur E et sur F . Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On pose $\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E \setminus \{0\} \right\}$.

Proposition 12 ([G] 48). L'application $\|T\|$ est appelée norme d'opérateur, ou norme subordonnée à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. C'est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.

Exemple 13. — Soit $T : u \in l^\infty(\mathbb{N}) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{12^n}$: on a $\|T\| = \frac{12}{11}$.

- Soit $T : f \in (\mathcal{C}([0, 1], \|\cdot\|_\infty)) \mapsto f'$: on a $\|T\| = 1$.

Proposition 14 ([G] 48). Soit $(G, \|\cdot\|_G)$ un espace vectoriel normé. $\forall f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\forall g \in \mathcal{L}(F, G)$, $\|g \circ f\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.

Proposition 15 ([G] 48). Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|Tx\|_F \\ &= \sup_{\|x\|_2 = 1} \|Tx\|_F \\ &= \inf \{c > 0 \mid \forall x \in E, \|Tx\|_F \leq c\|x\|_E\} \end{aligned}$$

Lemme 16. Si $T : E \rightarrow F$ est linéaire, alors T est de rang fini r si, et seulement si, il existe $\varphi_1, \dots, \varphi_r : E \rightarrow \mathbb{K}$ linéaires, linéairement indépendantes, et $(a_1, \dots, a_r) \in F^r$ libre, telles que $\forall x \in E, T(x) = \sum_{i=1}^r \varphi_i(x) a_i$.

Théorème 17 ([G] e55-56). Soit $T : E \rightarrow F$ linéaire et de rang fini. T est continu si, et seulement si, $\text{Ker } T$ est fermé.

II. Espaces de dimension finie

Dans ce paragraphe, on suppose E de dimension finie n .

A. Équivalence des normes

Définition 18. Soit \mathcal{B} une base de E . Soit $x \in E$, notons (x_1, \dots, x_n) le vecteur coordonnées de x dans \mathcal{B} . Pour $p \in [1, +\infty]$, on définit $\|x\|_p$ comme étant $\|(x_1, \dots, x_n)\|_p$ dans \mathbb{K}^n .

Proposition 19. Toute norme sur E est une application continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $\{\mathbb{R}, |\cdot|\}$.

Théorème 20 ([G] 50). Toutes les normes sur E sont équivalentes.

Corollaire 21 ([G] 50). Toute application linéaire de E dans F est continue.

Corollaire 22 ([G] 50). E est complet.

Corollaire 23 ([G] 50). Tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.

Application 24. Soit M un sous-espace vectoriel de F de dimension finie. Alors, $\forall y \in F, \exists x \in M : d(y, F) = \|x - y\|_F$.

Corollaire 25 ([G] 50). Les compacts de E sont les fermés bornés.

Remarque 26. On munit $\mathbb{R}[X]$ de $\|\cdot\|_\infty : \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \mapsto \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$. La boule unité est fermée et bornée, mais elle n'est pas compacte : la dimension finie est donc cruciale !

Théorème 27 (de RIESZ - [G] 56). E est de dimension finie si, et seulement si, $\mathcal{B}_E(0, 1)$ est compacte.

B. Normes matricielles

Définition 28. Une norme matricielle est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, i.e. une norme $\|\cdot\|$ vérifiant $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Exemple 29. D'après Proposition 14, tout norme subordonnée à une norme sur \mathbb{K}^n est une norme matricielle, en confondant \mathbb{K}^n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$.

Théorème 30 ([Rv] 24). Pour $(p, q) \in [1, +\infty]^2$, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\|A\|_{p,q} = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_q} : x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \right\}$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On a :

- $\|A\|_{1,1} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$
- $\|A\|_{\infty,\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$
- $\|A\|_{2,2} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \|A^*\|_2$ où $A^* = {}^t \overline{A}$ et $\rho(M) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(M)} |\lambda|$.

III. Espaces de Banach : exemples et applications

A. Définition et premiers exemples

Définition 31 ([G] 47). Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

Exemple 32. — Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

- $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ est de Banach pour $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour $\|\cdot\|_1$.

Théorème 33 (de RIEZS-FISHER - [BP] 166-176). $(L^p(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

Proposition 34 ([G] 48). Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E , et si (E, N_1) est de Banach pour N_1 , alors (E, N_2) est de Banach.

Théorème 35. (E, N) est de Banach si, et seulement si, toutes ses séries normalement convergentes sont convergentes (dans (E, N)).

Proposition 36 ([G] 49). Si $(F, \|\cdot\|_F)$ est de Banach, alors $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$ est de Banach.

Application 37 (lemme de VON NEUMANN - [G] 49). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de Banach. Si $\|u\| < 1$, alors $\text{id}_E - u$ est inversible, d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} u^k$.

B. Espaces de Hilbert

Définition 38 ([HL] 84). Un produit scalaire hermitien sur E est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E^2 \rightarrow \mathbb{K}$ telle que pour tous $(x, y, z) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

- $\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$
- $\langle x, y + \lambda z \rangle = \langle x, y \rangle + \overline{\lambda} \langle x, z \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- $\langle x, x \rangle \geq 0$
- $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$

L'application $\|\cdot\| : x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E , appelée norme associée au produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exemple 39 ([HL] 84). — Sur \mathbb{K}^n , $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ est un produit scalaire hermitien.

- Sur $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(f, g) \mapsto \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$ est un produit scalaire hermitien.

Définition 40 ([HL] 88). On dit que $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert si $(H, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|$ associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exemple 41 ([HL] 88). Munis des produits scalaires hermitiens de Ex 39, \mathbb{K}^n et $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ sont des espaces de Hilbert.

Théorème 42 (de FRÉCHET - VON NEUMANN - JORDAN). Une norme $\|\cdot\|$ est associée à un produit scalaire hermitien si, et seulement si, elle vérifie l'identité du parallélogramme :

$$\forall x, y, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Le cas échéant, le produit scalaire hermitien associé est $(x, y) \mapsto \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|x + i^k y\|^2$.

Théorème 43 (de projection sur un convexe fermé - [HL] 91). Soient $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et C un convexe de H . Alors :

$$\forall x \in H, \exists ! y \in C : \|x - y\| = d(x, C)$$

Théorème 44 (de RIESZ). $\forall \varphi \in H', \exists ! x \in H : \varphi(\cdot) = \langle \cdot, x \rangle$.

Développements

- Développement 1 : Théorèmes 20 et 27
- Développement 2 : Théorèmes 43 et 44

Références

- G *Les maths en tête - Analyse*, Xavier Gourdon, 3e édition
- HL *Éléments d'analyse fonctionnelle*, Francis Hirsch, Giles Lacombe
- BP *Théorie de l'intégration*, Marc Briane, Filles Pagès, 7e édition
- Rv *Petit guide du calcul différentiel*, François Rouvier, 4e édition

213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

Dans cette leçon, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et H est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

I. Les espaces de Hilbert et leur structure

A. Produit scalaire / hermitien, orthogonalité

Définition 1 ([HL] 84). Un produit scalaire est une application $\langle \cdot | \cdot \rangle : H^2 \rightarrow \mathbb{K}$ vérifiant : $\forall (x, y, z) \in H^3, \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

- $\langle x + \lambda y | z \rangle = \langle x | z \rangle + \lambda \langle y | z \rangle$
- $\langle x | y \rangle = \overline{\langle y | x \rangle}$
- $\langle x | x \rangle \geq 0$
- $\langle x | x \rangle = 0 \implies x = 0$

Exemple 2 ([HL] 84). — $(\underline{x}, \underline{y}) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$ est un produit scalaire sur \mathbb{K}^n (dit usuel).

- $(f, g) \mapsto \int_0^1 f \overline{g}$ est un produit scalaire sur $C^0([0, 1])$.
- $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^t \overline{B})$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On fixe un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Proposition 3 ([HL] 86). $\|\cdot\| : x \mapsto \sqrt{\langle x | x \rangle}$ est une norme sur H , dite associée à $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Définition 4 ([HL] 86,88). On dit que $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien. Si $(H, \|\cdot\|)$ est complet, alors $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert.

Exemple 5 ([HL] 88). — Un espace euclidien ou hermitien est de Hilbert.

- $l^2(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert pour $\langle \cdot | \cdot \rangle : (u, v) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \overline{v_n}$.

On suppose désormais que $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 6 (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ - [HL] 86). Pour tout $(x, y) \in H^2$, $|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ avec égalité si, et seulement si, (x, y) est liée.

Application 7. On définit l'écart angulaire entre deux vecteurs non nuls $x, y \in H$ comme $\arccos \left(\frac{|\langle x | y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \right)$.

Théorème 8 (identité du parallélogramme - [HL] 87). $\forall x, y \in H$, on a

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$$

Remarque 9. Une norme sur H est associée à un produit scalaire si, et seulement si, elle vérifie l'identité du parallélogramme (= théorème de FRÉCHET - VON NEUMANN - JORDAN).

Définition 10 ([HL] 87). Soit $A \subseteq H$. On définit l'orthogonal de A comme :

$$A^\perp = \{x \in H \mid \forall y \in A, \langle x | y \rangle = 0\} = \bigcap_{y \in A} \text{Ker}(\langle \cdot | y \rangle)$$

Proposition 11 ([HL] 87). Soient $A \subseteq H$ et $B \subseteq H$.

- A^\perp est un sous-espace vectoriel fermé de H ,
- $B \subseteq A \implies A^\perp \subseteq B^\perp$
- $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp = \overline{A}^\perp$
- $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$
- $A \subseteq A^{\perp\perp}$

Exemple 12. ? ? ?

B. Projection sur un convexe fermé, conséquences

Soient C un convexe fermé non vide de H et F un sous-espace vectoriel fermé de H .

Théorème 13 (de projection sur un convexe fermé - FIG. 1 - [HL] 91). $\forall x \in H, \exists ! P_C(x) \in C : \|x - P_C(x)\| = d(x, C) =: \inf_{y \in C} \|x - y\|$.
De plus, $P_C(x)$ est caractérisé par $\forall y \in C, \Re(\langle x - P_C(x) | x - y \rangle) \leq 0$.
Dans le cas de F , le projeté $P_F(x)$ est caractérisé par $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^\perp$.

Corollaire 14 ([HL] 92-93). P_C est 1-lipschitzienne, P_F est un projecteur orthogonal de norme 1.

Contre-exemple 15. C'est faux si H est seulement de Banach : dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, tous les $(x, 0)$ tels que $-1 \leq x \leq 1$ réalisent $d\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right)$.

Corollaire 16 ([HL] 93). $H = F \oplus F^\perp$ (et $H = \overline{F} \oplus F^\perp$ si F n'est pas supposé fermé).

Contre-exemple 17. C'est faux si F n'est pas fermé : dans $H = l^2(\mathbb{N})$, pour $F = \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, on a $F^\perp = \{0\}$ mais $H = F \oplus \{0\} = F$.

Corollaire 18 ([HL] 94-93). On a :

- $F = F^{\perp\perp}$
- Pour tout sous-espace vectoriel G de H , $\overline{G} = H \iff G^\perp = \{0\}$

Théorème 19 (de représentation de RIESZ - [HL] 96). $J : H \rightarrow H', y \mapsto \langle \cdot | y \rangle$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert, i.e. une isométrie linéaire surjective.

Application 20 ([Bu] 501, [G] 324). — Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique vecteur $x \wedge y \in \mathbb{R}^3$ appelé produit vectoriel de x et y tel que $[x, y, \cdot] = \langle \cdot | x \wedge y \rangle$ où $[\cdot, \cdot, \cdot]$ est le produit mixte.

- Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$. Il existe un unique vecteur $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^n$ appelé gradient de f en a , tel que $df(a) = \langle \cdot | \nabla f(a) \rangle$.

Définition 21 ([HL] 97). Pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\forall x, y \in H, \langle Tx | y \rangle = \langle x | T^*y \rangle$. On l'appelle adjoint de T . On dit que T est auto-adjoint si $T = T^*$.

C. Notion de base hilbertienne

Définition 22 ([HL] 107-108 ?). Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de H . On dit que $(e_i)_{i \in I}$ est :

- orthogonale si $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies \langle e_i | e_j \rangle = 0$
- orthonormale si $\forall (i, j) \in I^2, \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{i,j}$
- totale si $\overline{\text{Vect}(\{e_i\}_{i \in I})} = H$.

Définition 23 ([HL] 108). Une base hilbertienne de H est une famille orthonormale et totale.

Théorème 24 (ADMIS - [HL] 113). H est séparable $\iff H$ admet une base hilbertienne dénombrable.

Dans la suite, on suppose H séparable, et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une base hilbertienne de H .

Exemple 25 ([HL] ? - 108). — En dimension finie pour le produit scalaire usuel, toute base (algébrique) orthonormée est hilbertienne.

— $((\delta_{k,n})_{n \in \mathbb{N}})_{k \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $l^2(\mathbb{N})$.

Remarque 26. Dans un espace euclidien ou hermitien, les notions de base hilbertienne et de base (algébrique) orthogonal coïncident. Ce n'est plus vrai en dimension infinie, comme on le verra par la suite.

Proposition 27 ([HL] 109). Soit $(e_0, \dots, e_n) \in H^{n+1}$ une famille orthonormale, posons $F = \text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$. Alors,

$$P_F = \sum_{k=0}^n \langle \cdot | e_k \rangle e_k$$

Théorème 28 (procédé de GRAM-SCHMIDT - FIG. 2 - [HL] 112). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ libre. On définit $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\tilde{e}_k = f_k - \sum_{i=0}^{k-1} \langle f_k | e_i \rangle e_i = f_k - P_{\text{Vect}(e_0, \dots, e_{k-1})}(f_k)$ et $e_k = \frac{\tilde{e}_k}{\|\tilde{e}_k\|}$.

La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormale.

Théorème 29 ([HL] e103). Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormée. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H
- $\forall x \in H, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x | e_n \rangle e_n$ au sens $\|x - \sum_{n=0}^N \langle x | e_n \rangle e_n \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0$
- $\forall x \in H, \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x | e_n \rangle|^2$ (égalité de BESSEL-PARSEVAL)
- $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}^\perp = \{0\}$.

Théorème 30 ([HL] 109). $x \mapsto (\langle x | e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert de H dans $l^2(\mathbb{N})$.

II. L'exemple fondamental : les espace L^2

Théorème 31 ([HL] e125). Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Pour f et g dans $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, posons $\langle f | g \rangle = \int_X f(x)g(x)d\mu(x)$ (produit scalaire usuel). L'espace $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ muni de $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un espace de Hilbert.

A. Cas des fonctions périodiques : séries de FOURIER

Dans ce paragraphe, $H = L^2_{2\pi}$ est l'espace des fonctions 2π -périodiques de carré intégrable sur $[-\pi, \pi]$. On pose $\forall f, g \in H, \langle f | g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\frac{dt}{2\pi}$. On pose $\forall n \in \mathbb{Z}, e_n : t \mapsto e^{int}$. On not $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n = u_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n + u_{-n}$.

Proposition 32 ([EA] 172). $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale.

Définition 33 ([EA] 173). Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $f \in L^1_{2\pi}$, on pose $c_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\frac{dt}{2\pi}$. Si $f \in L^2_{2\pi}$, alors $c_n(f) = \langle f | e_n \rangle$. On l'appelle n -ième coefficient de FOURIER de f .

Définition 34 ([EA] 184-186). Soient $f \in H$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On pose :

- $D_N = \sum_{n=-N}^N e_n$ (noyau de DIRICHLET)

— $K_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N_1} D_n = \sum_{n=-N}^N (1 - \frac{|n|}{N})e_n$ (noyau de FÉJER)

— $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f)e_n = D_N * f$

— $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N_1} S_n(f) = K_N * f$

Remarque 35. $S_N(f)$ est le projeté de f sur $\text{Vect}(\{e_n\}_{-N \leq n \leq N})$.

Proposition 36 ([EA] 184-186). Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$.

— $D_N(-t) = D_N(t) = \sin((N + \frac{1}{2})t) / \sin(t/2)$

— $\|D_N\|_1 = 1$

— $K_N(t) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(\frac{NT}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \right)^2 \geq 0$

— $\|K_N\|_1 = 1$

— $\forall \delta \in]0, \pi], \int_{\pi \geq |t| \geq \delta} K_N(t)dt \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0$

Théorème 37 (de FÉJER - [EA] 190). — $\forall f \in C^0_{2\pi}, \forall N \in \mathbb{N}^*, \|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0$

— $\forall p \geq 1, \forall f \in L^0_{2\pi}, \forall N \in \mathbb{N}^*, \|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\|\sigma_N(f) - f\|_p \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0$

Corollaire 38 ([EA] 193). $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$. En particulier, $\forall f \in L^2_{2\pi}$,

— $\|S_N(f) - f\|_2 \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0$

— $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$. Plus précisément, $f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une isométrie linéaire de $L^2_{2\pi}$ dans $l^2(\mathbb{Z})$.

Application 39. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

B. Cas des variables aléatoires

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles, et $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ une sous-tribu.

Proposition 40. $(X, Y) \mapsto \mathbb{E}[XY]$ est le produit scalaire usuel sur $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, qui en fait donc un espace de Hilbert.

Remarque 41. $\text{Cov} : (X, Y) \mapsto \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ est un semi-produit scalaire (i.e. un produit scalaire ne vérifiant pas $\langle x | x \rangle = 0 \implies x = 0$) sur $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Sa semi-norme associée est $X \mapsto \sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}[X]}$. On dispose de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ : $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y$.

Remarque 42. On dit que X et Y sont non corrélées si $\text{Cov}(X, Y) = 0$, i.e. si X et Y sont orthogonales pour Cov . Si X et Y sont indépendantes, alors elles sont non corrélées, mais la réciproque est fautive en général (elle est cependant vraie si X et Y sont des vecteurs gaussiens).

Définition 43 ([CR] 77). L'espérance conditionnelle de X sachant \mathcal{B} est le projeté de X sur $L^2(\mathcal{B})$. On la note $\mathbb{E}[X | \mathcal{B}]$, et elle est caractérisée par $\forall z \in L^2(\mathcal{B}), \mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{B}]Z]$.

Remarque 44. Si on note $\langle X | Y \rangle = \mathbb{E}[XY]$, $F = L^2(\mathcal{B})$ et $\mathbb{E}[X | \mathcal{B}] = P_F(X)$, cette caractérisation dit que $P_F(X)$ est l'unique vecteur de F tel que $\forall z \in F, \langle X | Z \rangle = \langle P_F(X) | Z \rangle$, i.e. $\forall z \in F, \langle X - P_F(X) | Z \rangle = 0$ i.e. $X - P_F(X) \in F^\perp$: on retombe sur nos pattes !

C. Opérateurs de HILBERT-SCHMIDT

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $H := L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est séparable. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$.

Définition 45 ([LM] 114-122). On dit que T est un opérateur de HILBERT-SCHMIDT s'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 < +\infty$. On note $\mathcal{HS}(H)$ l'ensemble des opérateurs de HILBERT-SCHMIDT de H .

Théorème 46. $T \in \mathcal{HS}(H) \iff T^* \in \mathcal{HS}(H)$, et la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2$ (finie ou non) ne dépend pas du choix de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On la note $\|T\|_2$.

Proposition 47. $\mathcal{HS}(H)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par :

$$\forall (S, T) \in \mathcal{HS}(H)^2, \langle S | T \rangle_2 := \sum_{n=0}^{+\infty} \langle Se_n | Te_n \rangle$$

Lemme 48. L'ensemble des opérateurs de rang fini est dense dans $\mathcal{HS}(H)$.

Théorème 49. $T \in \mathcal{HS}(H) \iff \exists K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mu \otimes \mu) : T = T_K$, où $T_K : f \in H \mapsto \int_{\Omega} K(x, \cdot) f(x) d\mu(x)$.

Développements

- Développement 1 : Théorème 13 et Théorème 19
- Développement 2 : Tout de 46 à 49

Références

- HL *Éléments d'analyse fonctionnelle*, Francis Hirsch, Giles Lacombe
- G *Les maths en tête - Analyse*, Xavier Gourdon, 3e édition
- EA *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*, Mohamed El Amrani
- LM *Analyse fonctionnelle*, Gilles Lacombe, Pascal Massat
- B *Algèbre et géométrie : CAPES et Agrégation*, Pierre Burg
- CR *Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques*, Chabanol, Ruch

FIGURE 1 : Projection sur un convexe fermé

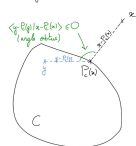
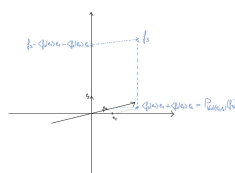


FIGURE 2 : Processus de GRAM-SCHMIDT



Références

- [H]
- [G]
- [EA]
- [LM]
- [B]
- [CR]

214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

IMPASSE

215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Exemples et applications.

Dans cette leçon, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) est ouvert, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($p \geq 1$), et $a \in U$. On note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire sur \mathbb{R}^n , $\| \cdot \|$ la norme sur \mathbb{R}^n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de \mathbb{R}^n , $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de \mathbb{R}^p . On décompose f dans \mathcal{B}' : $\forall x \in U, f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x) \varepsilon_k$.

I. Définitions et premières propriétés

A. Différentielle et dérivée directionnelle

Définition 1 ([G] 323). On dit que f est différentiable en a s'il existe $u_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que $\frac{\|f(a+h)-f(a)-u_a(h)\|}{\|h\|} \rightarrow_{h \rightarrow 0} 0$. Dans ce cas, u_a est unique : on l'appelle différentielle de f en a , et on la note $df(a)$. Si f est différentiable en tout point de U , alors on dit que f est différentiable sur U , et on suppose de $df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, $a \mapsto df(a)$.

Exemple 2 ([G] 323). Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$, alors f est différentiable en a si, et seulement si, f est dérivable en a . Le cas échéant, $df(a) : h \mapsto h \cdot f'(a)$.

Définition 3 ([G] 324). On dit que f admet une dérivée directionnelle suivant $h \in \mathbb{R}^n$ si $D_h f(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$ existe.

Proposition 4 ([G] 324). Si f est différentiable en a , alors f admet une dérivée directionnelle en a suivant tout vecteur. Plus précisément, $\forall h \in \mathbb{R}^n, D_h f(a) = df(a)(h)$.

Proposition 5 ([G] 324). Si f est différentiable en a , alors f est continue en a .

Théorème 6 (inégalité des accroissements finis - [G] 327). Soit $(a, b) \in U^2$ tel que $[a, b] \subseteq U$. Si f est continue sur $[a, b]$ et différentiable sur $]a, b[$, alors :

$$\|f(a) - f(b)\| \leq \sup_{x \in]a, b[} \|df(x)\| \|b - a\|$$

Exemple 7. $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est en tout point différentiable, et $\forall a \in \mathbb{R}^2, df(a) = 2\langle a | \cdot \rangle$.

B. Opérations sur les applications différentiables, exemples

Proposition 8. Si $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ est bilinéaire, alors elle est différentiable en tout point, et $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \forall (h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, dB(a, b)(h, k) = B(h, b) + B(a, k)$.

Exemple 9. $\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy$ est bilinéaire, et $d\varphi(a, b)(h, k) = hb + ak$.

Exemple 10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application $u : (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \langle Ax | y \rangle$ est bilinéaire, et $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \forall (h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, du(a, b)(h, k) = \langle Ah | b \rangle + \langle Aa | k \rangle$.

Proposition 11. Si f et $g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ sont différentiables en a , alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha f + \beta g$ est différentiable en a , et $d(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha df(a) + \beta dg(a)$.

Proposition 12 ([G] 324). Soient $V \subseteq f(U)$ ouvert et $g : V \rightarrow \mathbb{R}^d$. Si f est différentiable en a et g en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a , et $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$.

Exemple 13. Si $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont différentiables en a , alors fg est différentiable en a , et $d(fg)(a) \cdot d(\varphi \circ (f, g))(a) = f \cdot dg(a) + g \cdot df(a)$ (φ est donnée en exemple 9).

C. Dérivées partielles d'ordre 1, classe C^1

Définition 14 ([G] 325). On dit que f admet en a une j -ième dérivée partielle dans \mathcal{B} si f admet une dérivée suivant e_j , que l'on note plutôt $\frac{\partial f}{\partial e_j}(a)$ ou $\partial_j f(a)$.

Remarque 15 ([G] 325). Si f est différentiable en a , alors f admet des dérivées partielles, mais la réciproque est fautive : considérer $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}, (0, 0) \mapsto 0$.

Notation. Lorsque $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$, on note $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f}{\partial e_j}(x)$, qui se calcule en considérant les $x_i, i \neq j$ comme constants, et en dérivant la fonction de x_j .

Définition 16 ([G] 327). Si f admet en a des dérivées partielles suivant chaque e_j , alors on définit la (matrice) jacobienne de f en a :

$$Jac_a(f) = (\partial_j f_i(a))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Pour tout $h \in \mathbb{R}^n, df(a)(h) = Jac_a(f) \cdot (e_i^*(h))_{1 \leq i \leq n}$.

Proposition 17 (règle de la chaîne - [G] 327). Sous les hypothèses de la proposition 12, $Jac_a(g \circ f) = Jac_{f(a)}(g) Jac_a(f)$, i.e. $\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial e_j}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial e_j}(f(a)) \times \frac{\partial f_k}{\partial e_j}(a)$.

Définition 18 ([G] 323). On dit que f est de classe C^1 sur U si f est différentiable sur U et si df est continue sur U .

Proposition 19 ([G] e325). Les dérivées partielles (d'ordre 1) dans \mathcal{B} existent et sont continues sur U si, et seulement si, f est de classe C^1 sur U .

II. Ordre supérieur - Étude locale

A. Différentielle et dérivée partielles d'ordre supérieur

Définition 20 ([Rv] 283). On dit que f est deux fois différentiable en a si f est différentiable sur U et si df est différentiable en a . On note alors $d^2 f(a) := d(df)(a)$. On dit que f est k fois différentiable en a si f est $k-1$ fois différentiable sur U et si $d^{k-1} f$ est différentiable en a .

Remarque 21 ([Rv] 294). Si f est deux fois différentiable sur U , alors on dispose de $d^2 f : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)) \cong \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p), a \mapsto d^2 f(a)$. Ainsi, $d^2 f(a)$ s'identifie à une forme bilinéaire sur \mathbb{R}^n .

Définition 22 ([Rv] 294). Sous réserve d'existence, on appelle dérivées partielles d'ordre 2 de f dans \mathcal{B} en a les vecteurs

$$\frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j}(a) := \frac{\partial}{\partial e_i} \left[\frac{\partial f}{\partial e_j} \right](a)$$

On appelle dérivées partielles d'ordre k de f dans \mathcal{B} en a les vecteurs $\frac{\partial^2 f}{\partial e_{i_1} \dots \partial e_{i_k}}(a) := \frac{\partial}{\partial e_{i_1}} \left[\frac{\partial f}{\partial e_{i_2} \dots \partial e_{i_k}} \right](a)$ ($1 \leq k \leq n$, $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$).

Remarque 23 ([Rv] 296). En général, $\frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j}(a) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_i}(a)$: considérer la fonction de Remarque 15.

Proposition 24. Proposition 19 reste vraie en remplaçant 1 par k , pour tout $k \geq 1$.

Théorème 25 (de SCHWARZ - [Rv] 294). Si f est deux fois différentiable en a , alors :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_i}(a)$$

Théorème 26 (Différentielle de l'exponentielle matricielle).

B. Étude locale

Théorème 27 (d'inversion locale - [G] 341). Si $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ et si $df(a)$ est inversible, alors il existe un voisinage $V \subseteq U$ de a tel que f induit une bijection de V dans $f(V)$ de réciproque C^1 .

Exemple 28 ([Rv] 208). Définition locale d'un logarithme matriciel.

Théorème 29 (des fonctions implicites - [Rv] 344). Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un ouvert, $(a, b) \in \Omega$ et $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$. Si $f(a, b) = 0$ et si $f(a, \cdot)$ est différentiable en b , de différentielle inversible, alors il existe des voisinages U de a et V de b tels que $U \times V \subseteq \Omega$, et une unique application $\varphi \in C^1(U, V)$ telle que : $\{(x, y) \in U \times V \mid f(x, y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in U\}$.

Exemple 30 ([Rv] 348). Détermination des équations d'état d'un système thermodynamique qui satisfait la loi des gaz parfaits : $f(P, V, T) = PV - nRT = 0$.

Théorème 31 (formule de TAYLOR - [Rv] 296). Si f est k fois différentiable en a , alors $\forall h \in U$,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} d^j f(a)(h) \dots (h) \quad [h] \text{ appliqué } j \text{ fois} \\ &= \sum_{j=0}^k \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial e_i} \right)^j [f](a) + o(\|h\|^k) \end{aligned}$$

Théorème 32 (formule de TAYLOR avec reste intégral - [Rv] 298). Si $f \in C^{k+1}(U, \mathbb{R}^n)$, alors pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $[a, a+h] \subseteq U$,

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} d^j f(a)(h) \dots (h) + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d^{k+1} f(a+th)(h) dt$$

NB : sous la somme, il y a j fois (h) , tandis que sous l'intégral il y a $k+1$ fois (h) .

III. Cas des fonctions à valeurs dans \mathbb{R}

Dans ce paragraphe, on suppose que $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en a .

A. Gradient, hessienne

Définition 33 ([G] 324). On appelle gradient de f en a l'unique vecteur $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^n$ tel que $df(a) = \langle \cdot \mid \nabla f(a) \rangle$.

Proposition 34 ([Rv] 325). $df(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial e_k}(a) e_k^*$ et si \mathcal{B} est orthonormale, $\nabla f(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial e_k}(a) e_k$.

À partir de maintenant, sauf mention contraire, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$.

Définition 35 ([Rv] 294). On appelle (matrice) hessienne de f en a la matrice

$$\text{Hess}_a(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

Remarque 36. D'après le théorème de SCHWARZ, $\text{Hess}_a(f)$ est symétrique. C'est la matrice de la forme bilinéaire $d^2 f(a)$ dans \mathcal{B} . Pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $d^2 f(a)(h)(k) = {}^t(e_i^*(h))_{1 \leq i \leq n} \cdot \text{Hess}_a(f) \cdot (e_i^*(k))_{1 \leq i \leq n}$.

Exemple 37. Expression du laplacien en coordonnées polaires $[\varphi : (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))]$:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (f \circ \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (f \circ \varphi)}{\partial \theta^2}$$

B. Optimisation

Définition 38 ([G] 336). On dit que a est un point critique si $df(a) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$.

Théorème 39 (FIGURE - [G] 335-336). — Si f admet un maximum (resp. un minimum) local en a , alors a est un point critique, et $\text{Hess}_a(f)$ est négative (resp. positive).

— La réciproque est vraie si on suppose en plus $\text{Hess}_a(f)$ définie.

— Si a est un point critique et si $\text{Hess}_a(f)$ admet deux valeurs propres de signes strictement opposés, alors a est un point-selle.

Exemple 40. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors on retrouve un résultat bien connu :

— Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$ (resp. $f''(a) < 0$), alors f admet un minimum (resp. un maximum) local en a .

— Si $f'(a) = f''(a) = 0$ et $f'''(a) \neq 0$, alors a est un point d'inflexion.

Exemple 41 ([BMP] 24-32). Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. La solution de $Ax = b$ est le minimum global de $J \cdot x \mapsto \frac{1}{2} \langle Ax \mid x \rangle$.

Théorème 42 (des extrema liés - [Rv] 372). Soit $(f, g_1, \dots, g_r) \in C^1(U, \mathbb{R})^{r+1}$, posons $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f|_{\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$, et si $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$ est libre, alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, appelés multiplicateurs de LAGRANGE, tels que :

$$df(a) = \sum_{k=1}^r \lambda_k dg_k(a)$$

Application ([Rv] 413). Existence d'une trajectoire fermée à 3 rebonds sur un billard elliptique.

Remarque 43. Ce théorème permet de ramener la recherche d'un extremum local en dimension n sous r contraintes à la résolution du système carré $n + r$:

$$\{\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial e_i}(a) \quad g_1(a) = \dots = g_r(a) = 0\}$$

Proposition 44 ([Rv] 127). Supposons U convexe.

— Si f est différentiable sur U , alors f est convexe si, et seulement si :

$$\forall (x, y) \in U, f(y) - f(x) \geq df(x)(y - x)$$

— Si f est deux fois différentiable sur U , alors f est convexe si, et seulement si, pour tout $a \in U$, $\text{Hess}_a(f)$ est (symétrique) positive.

Proposition 45 ([Rv] 381). Si U est convexe, si f est convexe, et si a est un point critique, alors f admet en a un minimum global sur U .

IV. Cas des fonctions du plan : holomorphie

On suppose que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. On note u et v les applications coordonnées de f dans la base canonique : $f = (u, v)$. Soit $z_0 \in \mathbb{R}^2$.

Définition 46 ([T] e59). On dit que f est holomorphe en z_0 si f est différentiable en z_0 et vérifie la condition de CAUCHY-RIEMANN :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

Le cas échéant, on pose $f'(z_0) := \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_0), \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \right)$.

Proposition 47 ([T] e60-61). Si f est différentiable en z_0 , alors $\forall h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^2$, $df(z_0)(h) = \langle \partial_z f(z_0) \mid h \rangle + \langle \partial_{\bar{z}} f(z_0) \mid \bar{h} \rangle$ où $\bar{h} = (h_x, -h_y)$, $\partial_z f(z_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right)$ et $\partial_{\bar{z}} f(z_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right)$.

Proposition 48 ([T] e61). f est holomorphe en z_0 si, et seulement si, f est différentiable en z_0 et $\partial_{\bar{z}} f(z_0) = 0$. Le cas échéant, $f'(z_0) = \partial_z f(z_0)$.

Définition 49 ([T] e69). Soit $\gamma = (\gamma_x, \gamma_y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un arc paramétré de classe C^1 . On définit l'intégrale de f le long de γ comme :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \times \gamma'(t) dt$$

Théorème 50 (formule de CAUCHY - [T] e77). Soient $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ouvert, $a \in \mathbb{R}^2$ et $R > 0$ tels que $\bar{B}(a, R) \subseteq U$. Supposons f holomorphe sur U . Alors,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

pù $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto a + R(\cos(t), \sin(t))$.

Théorème 51 ([T] 78). Si f est holomorphe en z_0 , alors f est infiniment différentiable en z_0 .

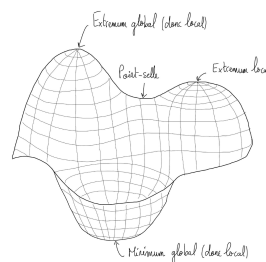
Développements

- Développement 1 : Théorème 26
- Développement 2 : Application 1

Références

- G *Les maths en tête - Analyse*, Xavier Gourdon, 3e édition
 Rv *Petit guide du calcul différentiel*, François Rouvière, 4e édition
 BMP *Objectif Agrégation*, Vincent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré, 2e édition
 T *Analyse complexe pour la licence 3*, Patrice Tauvel, 2e édition

FIGURE : Extrema, point-selle



4/4

FIGURE 1.8 – s

219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel normé, $U \subseteq E$ non vide et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

I. Existence et unicité d'extrema

Définition 1. On dit que f admet un maximum local (resp. un minimum local) en $a \in U$ s'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V \cap U, f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).

Si cette inégalité est vraie pour tout $x \in U$, alors $f(a)$ est un maximum global (resp. un minimum global) de f .

Remarque 2. Un extremum global est local, mais la réciproque est fausse ! Considérer $x \mapsto (x-2)x(x+2)$ sur \mathbb{R} .

A. Optimisation des fonctions continues sur un compact

Théorème 3 (des bornes atteintes - [G] 31). Si U est compact, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Remarque 4. — \mathbb{R} n'est pas compact, arctan est continue et bornée sur \mathbb{R} mais n'atteint pas ses bornes.

— $f : x \neq 0 \mapsto 1/x, 0 \mapsto 0$ n'est pas continue sur le compact $[-1, 1]$, et n'est pas bornée.

Corollaire 5 ([G] e33). Si $U = E \cong \mathbb{R}^n$, f est continue sur U et $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors f admet et atteint un minimum global.

Corollaire 6 ([BMP] 30). Soit $F \subseteq E$ fermé non vide. Pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ tel que

$$\|x - y\| = d(x, F) = \inf_{z \in F} \|x - z\|$$

B. Optimisation et convexité

Supposons U convexe, i.e. $\forall (x, y) \in U^2, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in U$.

Définition 7 ([BMP] 26). On dit que f est convexe si :

$$\forall (x, y) \in U^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

On dit que f est strictement convexe si cette inégalité est stricte pour $x \neq y$ et $\lambda \notin \{0, 1\}$.

Exemple 8 ([BMP] e32). Soient $E = U = \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ $f : x \mapsto \langle Ax \mid x \rangle$. Alors f est (strictement) convexe si, et seulement si, A est (définie) positive.

Proposition 9 ([BMP] 30). Si f est convexe et admet un minimum local, alors c'est un minimum global. Si f est de plus strictement convexe, alors ce minimum est unique.

Soient $(H, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, $C \subseteq H$ un convexe fermé non vide, et F un sous-espace vectoriel fermé de H .

Théorème 10 (de projection sur un convexe fermé - FIG. 1 - [HL] 91). $\forall x \in H, \exists ! P_C(x) \in C : \|x - P_C(x)\| = d(x, C) =: \inf_{y \in C} \|x - y\|$.
De plus, $P_C(x)$ est caractérisé par $\forall y \in C, \Re(\langle x - P_C(x) \mid x - y \rangle) \leq 0$.

Dans le cas de F , le projeté $P_F(x)$ est caractérisé par $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^\perp$.

Théorème 11 (de RIESZ - [HL] 96). $J : H \rightarrow H', y \mapsto \langle \cdot \mid y \rangle$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert, i.e. une isométrie linéaire surjective.

C. Optimisation et holomorphicité

On prend $E = \mathbb{C}$, U ouvert connexe, et f holomorphe sur U .

Théorème 12 ([BMP] 72). $\forall a \in U, \forall r > 0$,

$$B(a, r) \subseteq U \implies f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

Théorème 13 (principe du maximum local - [BMP] 72). Si $|f|$ admet un maximum local, alors f est constant.

Théorème 14 (principe du maximum global - [BMP] 72). Supposons U borné et f continue sur \bar{U} . Alors $\sup_U |f| = \max_{\partial U} |f|$ et si ce maximum est atteint en un point de U , alors f est constante.

Théorème 15 (de LIOUVILLE). Si f est holomorphe sur \mathbb{C} et bornée, alors f est constante.

Théorème 16 (d'ALEMBERT-GAUSS). \mathbb{C} est algébriquement clos.

II. Optimisation des fonctions différentiables - caractérisation des extremums.

Dans ce paragraphe, $E = \mathbb{R}^n$ et U est ouvert.

A. Conditions de premier ordre

Définition 17 ([BMP] 16). On dit que a est un point critique si $df(a) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$.

Théorème 18 ([BMP] 18). Si f admet un maximum (resp. un minimum) local en a , alors a est un point critique, et $\text{Hess}_a(f)$ est négative (resp. positive).

Remarque 19. $x \mapsto x^3$ admet un point critique qui n'est pas un extremum.

Théorème 20 (de ROLLE - [R] 251). Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 21 (des accroissements finis - [R] 258). Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Corollaire 22 ([R] 205-238). — Si f est dérivable sur un intervalle de dérivée positive, alors f est croissante.

— Si f est deux fois dérivable sur un intervalle de dérivée seconde positive, alors f est convexe.

B. Conditions de second ordre

Théorème 23 (FIGURE 2 - [BMP] e18). — Si f admet un maximum (resp. un minimum) local en a , alors a est un point critique, et $\text{Hess}_a(f)$ est négative (resp. positive).

— La réciproque est vraie si on suppose en plus $\text{Hess}_a(f)$ définie.

— Si a est un point critique et si $\text{Hess}_a(f)$ admet deux valeurs propres de signes strictement opposés, alors a est un point-selle.

Remarque 24 ([Rv] 371). $x \mapsto x^4$ admet un minimum global en 0, mais sa hessienne (sa dérivée seconde) est nulle en 0.

Exemple 25 ([BMP] 24-32). Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $J : x \mapsto \frac{1}{2} \langle AX | X \rangle - \langle b | x \rangle$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla J(x) = Ax - b$ et $\text{Hess}_J(x) = A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. En particulier, J admet un unique minimum (global) qui est la solution de $Ax = b$.

C. Optimisation sous contrainte

Théorème 26 (des extrema liés - [Rv] 372). Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et $(f, g_1, \dots, g_r) \in C^1(U, \mathbb{R})^{r+1}$. Posons $\Gamma = \bigcap_{i=1}^r g_i^{-1}(\{0\})$. Si $f|_\Gamma$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$, et si $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$ est libre, alors il existe des réels (uniques) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ appelées multiplicateurs de LAGRANGE, tels que $df(a) = \lambda_1 dg_1(a) + \dots + \lambda_r dg_r(a)$.

Application 27 ([Rv] 413). Sur un billard elliptique, il existe une trajectoire fermée à 3 rebonds.

Remarque 28. Ce théorème permet de ramener la recherche d'un extremum local en dimension n sous r contraintes à la résolution du système carré $n + r$:

$$\{\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial e_i}(a) \quad g_1(a) = \dots = g_r(a) = 0\}$$

Exemple 29 ([Rv] 411, 412). Soient a_1, \dots, a_n, a des réels deux à deux distincts, et posons $\Sigma = \{(p_1, \dots, p_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n \mid \sum_{k=1}^n p_k = 1 \text{ et } \sum_{k=1}^n a_k p_k = a\}$ (qui est non vide). La fonction :

$$H : (p_1, \dots, p_n) \in \Sigma \mapsto - \sum_{k=1}^n p_k \ln(p_k)$$

admet un unique maximum, en $\frac{1}{n}(1, \dots, 1)$.

III. Optimisation numérique : algorithmes de recherche d'extrema

Théorème 30 (méthode de NEWTON - [R] 345-346). Soient $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ sur $[a, b]$. soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 \in [a, b] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

1. Pour x_0 assez proche de l'unique zéro α de f , $(x_n)_n$ converge vers α à vitesse quadratique.
2. Si $f'' > 0$ sur $[a, b]$, alors la convergence (quadratique) de $(x_n)_n$ ne dépend pas du choix de x_0 , et

$$x_{n+1} - \alpha \sim \frac{1}{2} \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} (x_n - \alpha)^2$$

Application 31. — Recherche de points critiques

— Schéma d'EULER implicite

Théorème 32 (méthode du gradient - [BMP] 22-23). Soit $a \in U$ où f atteint un minimum local, soit $x_0 \in U$ proche de a . La suite définie par $x_0 = x_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \nabla f(x_n)$ converge (sous certaines hypothèses) vers a .

Développements

— Développement 1 : Théorèmes 10 et 11

— Développement 2 : Application 27

Références

BMP *Objectif Agrégation*, Vincent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré, 2e édition

R *Éléments d'analyse réelle*, Rombaldi

Rv *Petit guide du calcul différentiel*, François Rouvière, 4e édition

G *Les maths en tête - Analyse*, Xavier Gourdon, 3e édition

HL *Éléments d'analyse fonctionnelle*, Francis Hirsch, Giles Lacombe

FIGURE 1: Projection sur un convexe fermé

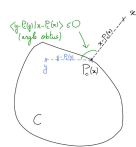
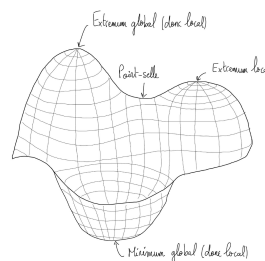


FIGURE 2: Extrema, point-selle



4/4

FIGURE 1.9 – s

220 : Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.

Développements

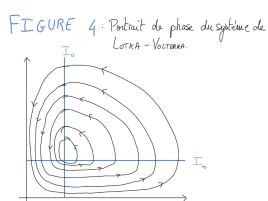
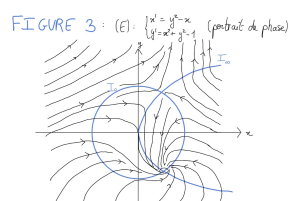
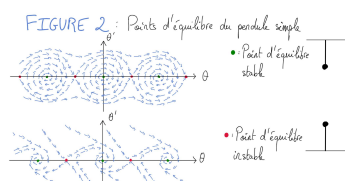
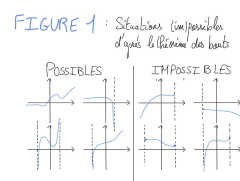
- Développement 1 : Théorèmes 10 et 11
- Développement 2 : Application 27

Références

Be *Équations différentielles*, Florent Berthelin

G *Les maths en tête - Analyse*, Xavier Gourdon, 3e édition

Gr *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone, 6e édition, 2e version



4/4

RÉFÉRENCES

FIGURE 1.10 – s