יחידה 13
שפות (בעיות) NP-שלמות נוספות

- ביחידה הקודמת הכרנו שתי שפות **NP**-שלמות:
  - $SAT = \{<\phi> \mid \phi$ is a satisfiable Boolean formula$\}$
  - $CNF\text{-}SAT = \{<\phi> \mid \phi$ is a satisfiable CNF Boolean formula$\}$
- ביחידה הנוכחית נתוודע לכמה שפות (בעיות) **NP**-שלמות נוספות
  - בעיות **NP**-שלמות קיימות במגוון של תחומים

איך נוכיח על שפות נוספות?

- ברגע שידועה לנו שפה **NP**-שלמה אחת, אפשר להוכיח על שפות נוספות שגם הן **NP**-שלמות.
- **משפט**: אם B **NP**-שלמה, ו-D מקיימת
  - D שייכת ל-**NP**
  - $B \leq_P D$ (שימו לב היטב לכיוון של הרדוקציה!)

  אז גם D **NP**-שלמה
- **תרגיל**: הוכיחו את המשפט
  - זכרו שהיחס $\leq_P$ הוא טרנזיטיבי

3SAT

- פסוק בתחשיב הפסוקים הוא ב-3CNF אם
  - הפסוק ב-CNF
  - בכל פסוקית יש שלושה ליטרלים
- **דוגמה** : $(x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee w)$
- $3SAT = \{<\phi> \mid \phi$ is a satisfiable 3CNF Boolen formula$\}$
- זוהי שפת הפסוקים הספיקים ב-3CNF

$3SAT$ היא NP-שלמה (1)

- נוכיח ש-$3SAT$ היא **NP**-שלמה
  - **תרגיל** : הוכיחו ש-$3SAT$ שייכת ל-**NP**
  - נראה : $CNF\text{-}SAT \leq_P 3SAT$
    - כל פסוקית שיש בה שלושה ליטרלים נשאיר כמות שהיא
    - כל פסוקית שיש בה יותר משלושה ליטרלים,
      נחליף בקבוצת פסוקיות שבכל אחת שלושה ליטרלים,
      באופן שהפסוקית המקורית ספיקה, אם, ורק אם, קבוצת
      הפסוקיות שהחליפה אותה ספיקה
      - **דוגמה** : נחליף את הפסוקית $(l_1 \vee l_2 \vee l_3 \vee l_4)$ בשתי הפסוקיות
        $(l_1 \vee l_2 \vee z) \wedge (\neg z \vee l_3 \vee l_4)$, כאשר z הוא משתנה חדש
        - מוסיפים משתנה חדש לכל פסוקית ארוכה

$3SAT$ היא NP-שלמה (2)

- **תרגיל**: הוכיחו שהפסוקית המקורית (4 ליטרלים) ספיקה אם ורק אם קבוצת שתי הפסוקיות (3 ליטרלים) ספיקה
- **תרגיל**: הכלילו את הרעיון הזה לכל פסוקית שיש בה יותר מ-3 ליטרלים (לאו דווקא 4 ליטרלים)
- **שאלה**: איך נטפל בפסוקיות שיש בהן פחות מ-3 ליטרלים?
  - אם מרשים מופעים כפולים של ליטרלים בפסוקית, נשכפל ליטרלים, עד שיהיו בפסוקית 3 ליטרלים
  - אם לא מרשים מופעים כפולים של ליטרלים בפסוקית, נחליף כל פסוקית עם 2 ליטרלים בשתי פסוקיות עם 3 ליטרלים
  - **דוגמה**: נחליף את הפסוקית $(l_1 \vee l_2)$ בשתי הפסוקיות $(l_1 \vee l_2 \vee z) \wedge (\neg z \vee l_1 \vee l_2)$, כאשר z הוא משתנה חדש
    - אפשר להשתמש באותו משתנה z לכל הפסוקיות הקצרות

3SAT היא NP-שלמה (3)

- **תרגיל**: הוכיחו שהפסוקית המקורית (2 ליטרלים) ספיקה אם ורק אם קבוצת שתי הפסוקיות (3 ליטרלים) ספיקה
- **תרגיל**: איך נטפל בפסוקיות עם ליטרל בודד - (l)?

– הראינו ש-*3SAT* שייכת ל-**NP**

– תיארנו רדוקציה של *CNF-SAT* ל-*3SAT*

– להשלמת ההוכחה ש-*3SAT* היא **NP**-שלמה

- צריך להוכיח שהרדוקציה תקפה
- וצריך להראות שהרדוקציה ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט

– **תרגיל**: השלימו את ההוכחה

2SAT

- כמו שהגדרנו פסוקים ב-3CNF, אפשר להגדיר פסוקים ב-2CNF
  - **דוגמה** : פסוק ב-2CNF : $(x\vee\neg y)\wedge(\neg x\vee y)$
- $2SAT$ = {<ϕ> | ϕ is a satisfiable 2CNF Boolen formula}
- זוהי שפת הפסוקים הספיקים ב-2CNF

2SAT שייכת ל-P (1)

- **משפט**: $2SAT$ שייכת ל-**P**
- **הוכחה**: פסוקית מהצורה $(l_1 \vee l_2)$ שקולה לוגית לפסוק $\neg l_1 \rightarrow l_2$ ולפסוק $\neg l_2 \rightarrow l_1$
  - מחליפים כל פסוקית $(l_1 \vee l_2)$ בפסוק $(\neg l_1 \rightarrow l_2) \wedge (\neg l_2 \rightarrow l_1)$ (כאשר $\neg\neg x = x$)
  - בונים גרף מכוון:
    - הצמתים: צומת לכל ליטרל l
    - הקשתות: אם יש תת-פסוק $(l_1 \rightarrow l_2)$, אז תהיה קשת מכוונת מ-l_1 אל l_2

2SAT שייכת ל-P (2)

- **תרגיל**: הוכיחו שהפסוק ב-2CNF איננו ספיק, אם, ורק אם, יש בגרף מסלול מכוון מליטרל l אל $\neg l$ וגם מסלול מכוון מ-$\neg l$ אל l
- **תרגיל**: הוכיחו שזמן הריצה של האלגוריתם המתקבל להכרעת השייכות ל-*2SAT* הוא פולינומיאלי בגודל הקלט
- **תרגיל**: הסבירו היטב למה אי אפשר להראות רדוקציה של *CNF-SAT* ל-*2SAT*, בדומה לרדוקציה שהראינו ל-*3SAT*.

INDEPENDENT-SET

- **תזכורת**: קבוצה בלתי תלויה של צמתים בגרף לא מכוון G היא קבוצת צמתים שאין קשת בין כל שניים מהם
- *INDEPENDENT-SET* = {<*G*, *k*> | *G* is an undirected graph that has a *k*-node independent-set}
- נוכיח ש-*INDEPENDENT-SET* (בקיצור, *IS*) היא **NP**-שלמה
- כבר הראינו שהיא שייכת ל-**NP**.
  נראה כי $3SAT \le_P IS$.

(1) $3SAT \leq_P IS$

- לכל פסוק ϕ ב-3CNF, יש לבנות, בזמן פולינומיאלי בגודל של ϕ, גרף לא מכוון G ומספר טבעי k, כך שב-G יש קב"ית בגודל k, אם, ורק אם, ϕ ספיק.
  - צומתי הגרף: לכל מופע של ליטרל בפסוק יהיה צומת
    - אם הליטרל l מופיע ב-m פסוקיות, אז יהיו בגרף m צמתים שמתאימים ל-l
  - קשתות הגרף: לכל פסוקית, מחברים בקשתות את שלושת הליטרלים שלה (בונים "משולש")
    - זה מבטיח שרק ליטרל אחד מן הפסוקית יוכל להשתייך לקבוצה הבלתי תלויה (זה יהיה ליטרל שערכו *true*)

IS היא **NP**-שלמה

– קשתות הגרף (המשך): בנוסף ל"משולשים" של הפסוקיות, מחברים בקשת כל מופע של ליטרל l עם כל מופע של $\neg l$

  • בזה מבטיחים, שלא ייתכן שגם l וגם $\neg l$ יהיו בקבוצה הבלתי תלויה (לא ייתכן שגם l וגם $\neg l$ יקבלו ערך *true*)

– המספר k יהיה מספר הפסוקיות בפסוק ב-3CNF

• **תרגיל**: הוכיחו שהרדוקציה תקפה, ושהיא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

• **מסקנה**: IS היא **NP**-שלמה

CLIQUE היא NP-שלמה

- **תזכורת**: קליקה בגרף לא מכוון G היא קבוצה של צמתים שיש קשת בין כל שניים מהם
- $CLIQUE = \{<G, k> \mid G$ is an undirected graph with a k-clique$\}$
- הראינו ש-*CLIQUE* שייכת ל-**NP**,
  והראינו כי $IS \leq_P CLIQUE$ (מעבר לגרף המשלים)
- **מסקנה**: *CLIQUE* היא **NP**-שלמה

כיסוי קדקודים

- קבוצת צמתים U בגרף לא מכוון $G=(V, E)$ נקראת כיסוי קדקודים, אם לכל קשת (u, v) ב-E, או $u \in U$, או $v \in U$ (או שניהם).
  - צומתי U "מכסים" את כל קשתות הגרף
- **תרגיל**: מהו גודל כיסוי הקדקודים המינימלי
  - של "משולש"?
  - של "כוכב"?
  - של מעגל בעל m צמתים?
  - של מסלול פשוט (ללא מעגלים) בעל m צמתים?

VERTEX-COVER

- *VERTEX-COVER* = {<*G*, *k*> | *G* is an undirected graph that has a *k*-node vertex cover}
- נוכיח שזו שפה **NP**-שלמה:
  - **תרגיל**: הוכיחו שהיא שייכת ל-**NP**
  - **תרגיל**: הוכיחו: קבוצת צמתים *U* בגרף לא מכוון $G=(V, E)$ היא קבוצה בלתי תלויה ב-*G*, אם, ורק אם, $V–U$ היא כיסוי קדקודים ב-*G*.
    - מומלץ להוכיח בשלילה כל אחד מן הכיוונים
  - **תרגיל**: הוכיחו: *VERTEX-COVER* היא **NP**-שלמה

HAMPATH

- **תזכורת**: מסלול המילטון בגרף מכוון G הוא מסלול פשוט (ללא מעגלים) שמבקר בכל צומת פעם אחת ויחידה
- $HAMPATH = \{<G, s, t> \mid G$ is a directed graph with a Hamiltonian path from s to $t\}$
- נוכיח שזו שפה **NP**-שלמה:
  - כבר הראינו שהיא שייכת ל-**NP**
  - נראה כי $3SAT \leq_P HAMPATH$ (שקפים ממצגת אחרת)

SUBSET-SUM

- **תזכורת**: הקלט: קבוצה S של מספרים ומספר t.
השאלה: האם יש ל-S תת-קבוצה שהסכום שלה t?
- $SUBSET\text{-}SUM = \{<S, t> \mid S=\{x_1, \ldots, x_n\},$
$\exists\{y_1, \ldots, y_k\}\subseteq\{x_1, \ldots, x_n\}, \Sigma_{yi}=t\}$
- נוכיח שזו שפה **NP**-שלמה:
  – כבר הראינו שהיא שייכת ל-**NP**
  – נראה כי $3SAT\leq_P SUBSET\text{-}SUM$

$3SAT \leq_P SUBSET\text{-}SUM$

- מפסוק ϕ ב-3CNF נבנה קבוצת מספרים טבעיים S ומספר טבעי t
  - כל המספרים יהיו בייצוג עשרוני
    - כדי שלא יהיה נשא (carry) כאשר מחברים אותם
  - הספרות של כל המספרים בקבוצה S יהיו רק 0, 1 ו-2
    - אבל ב-t יהיו גם ספרות אחרות
  - האורך של כל מספר (כולל t) יהיה כמספר המשתנים + מספר הפסוקיות בפסוק ϕ
    - חלק מן המספרים יהיו קצרים יותר, משום שיהיו בהם 0-ים מובילים (בחלק השמאלי של המספר)

המשך הרדוקציה

– בכל מספר, הספרות המתאימות לפסוקיות יהיו הספרות הפחות חשובות, והספרות המתאימות למשתנים יהיו הספרות היותר חשובות.
– לכל משתנה (אטום) x_i יהיו שני מספרים, אחד שמתאים להצבת *true* ב-x_i (מתאים לליטרל x_i), ואחד שמתאים להצבת *false* ב-x_i (מתאים ל-$\neg x_i$).
  - בכל מספר כזה יהיה 1 בספרה המתאימה למשתנה x_i, ו-0 בכל הספרות של המשתנים האחרים. כמו כן יהיה 1 בספרה של כל פסוקית שבה הליטרל המתאים (x או $\neg x$) מופיע, ו-0 בספרה של כל פסוקית שבה הוא לא מופיע.

סיום הרדוקציה

– במספר t יהיה 1 בספרה של כל משתנה

- זה מבטיח שלתת-קבוצה שסכומה t ייבחר אחד ורק אחד משני המספרים של כל משתנה x_i - זה שמתאים להשמה שמספקת את הפסוק
  – בכל השמה כזו נקבע ערך *true/false* לכל משתנה

– בהשמה מספקת, בעמודה של כל פסוקית, במספרים שנבחרו לתת-קבוצה, יש 1 אחד, או 2 1-ים או 3 1-ים

- אבל לא 0 1-ים (כי זו השמה מספקת)

– נוסיף לכל פסוקית C_j שני מספרים g_j ו-h_j שיהיה בהם 0 בכל מקום, פרט למקום שמתאים לַפסוקית C_j.
במקום הזה יהיה 1 ב-g_j ו-2 ב-h_j.

תרגול והוכחת נכונות

- **תרגיל**: איזו ספרה תהיה במספר t במקום של כל פסוקית?
- **תרגיל**: בנו את קבוצת המספרים S ואת המספר t המתאימים לפסוק הבא:
$$(x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee w) \wedge (y \vee z \vee \neg w)$$
- **תרגיל**: הוכיחו שהרדוקציה תקפה.
הוכיחו שהיא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.
- **מסקנה**: *SUBSET-SUM* היא **NP**-שלמה

בעיות NP-שלמות נוספות

- גרפים לא מכוונים שיש להם צביעה חוקית בשלושה צבעים
  - רדוקציה של *3SAT*
- גרפים לא מכוונים שיש להם מסלול המילטון מ-s ל-t
  - רדוקציה של *HAMPATH*
- ומאות בעיות נוספות