Projet Analyse Numérique 2 : Équations de Prédation

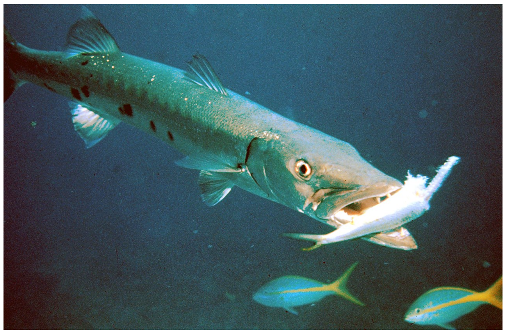
Enseignants: Cédric BOULBE & Vincent VADEZ

Polytech Nice Sophia, MAM3. Année 2022-2023.

__Modalités:__ Un rapport par groupe de 3 avec le code en annexe. **Soutenance le 18 avril.**

1 Contexte

Le modèle proie-prédateur de Lotka–Volterra a été initialement proposé par Alfred J. Lotka dans la théorie des réactions chimiques auto-catalytiques en 1910. Il s'agissait en fait de la fonction logistique, proposée à l'origine par Pierre François Verhulst. En 1920, Lotka étendit le modèle, avec l'aide d'Andrey Kolmogorov, aux systèmes organiques en utilisant une espèce végétale et une espèce animale herbivore comme exemple et en 1925, il utilisa les équations pour analyser les interactions proie-prédateur dans son livre sur les biomathématiques. Le même ensemble d'équations a été publié en 1926 par Vito Volterra, un mathématicien et physicien, qui s'était intéressé à la biologie mathématique. L'étude de Volterra a été inspirée par ses interactions avec le biologiste marin Umberto D'Ancona. D'Ancona a étudié les captures de poissons dans la mer Adriatique et avait remarqué que le pourcentage de poissons prédateurs capturés avait augmenté pendant les années de la Première Guerre mondiale (1914-18). Cela le déconcertait, car l'effort de pêche avait été très réduit pendant les années de guerre. Volterra a développé son modèle indépendamment de Lotka et l'a utilisé pour expliquer l'observation de d'Ancona. Un autre exemple plus récent de l'importance de ce genre d'études est la réintroduction des loups dans le parc de Yellowstone aux États-Unis, mettant en évidence la nécessité de la présence de prédateurs dans certains écosystèmes : `https://www.youtube.com/watch?v=Hzfsj-91ATc&ab_channel=NationalGeographicWildFrance`. D'autres exemples similaires ici: `https://blog.ted.com/a-walk-on-the-wild-side-7-fascinating-experiments-in-rewilding`.



2 Étude du modèle mathématique

Le modèle de Lotka-Volterra peut se formuler de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy, \\ \frac{dy}{dt} &= \delta xy - \gamma y, \end{aligned} \tag{1}$$

avec x la quantité de proies (lapins par exemple), y la quantité de prédateurs (loups), α, β, γ et δ sont des coefficients positifs réels descrivant les intéractions entre les deux espèces étudiées. α et δ pour le taux de reproduction, β et γ pour le taux de mortalité.

1°) Proposer une méthode de résolution du système proie-prédateur (1) en utilisant une méthode d'Euler implicite.

2°) Faire de même avec un schéma Runge Kutta.

3°) Déterminer le ou les point(s) d'équilibre(s) du système.

4°) Implémenter en Python les schémas numériques proposés dans les questions précédentes et comparer les solutions obtenues.

5°) Visualiser graphiquement les résultats pour différents scenarii (différentes quantités initiales de population et différentes valeurs des coefficients d'intéractions). Au minimum deux graphiques sont attendus pour chaque schéma numérique, à savoir la population des proies/prédateurs en fonction du temps ainsi que la population des prédateurs en fonction de la quantité de proies.

6°) On considère désormais le modèle à trois populations suivant:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(\alpha - \beta x - \gamma y), \\ \frac{dy}{dt} &= y(\delta - \epsilon y - \zeta x - \eta z), \\ \frac{dz}{dt} &= z(\theta y - \iota z - \kappa) \end{aligned} \tag{2}$$

Décrire les différents coefficients ainsi que les intéractions entre les trois populations x, y et z. Répéter les étapes précédentes (1 à 5) et analyser les résultats obtenus. Utiliser dans un premier temps les valeurs numériques suivantes: $\alpha = 3$, $\beta = 0.025$, $\gamma = 0.1$, $\delta = 2$, $\epsilon = 0.05$, $\zeta = 0.025$, $\eta = 0.05$, $\theta = 1$, $\iota = 0.05$, $\kappa = 0.05$.

7°) En tirer les conclusions et les limites d'une telle modélisation.

8°) Proposer des améliorations au modèle de Lotka-Volterra et comparer votre modélisation à celles obtenues précédemment.