

Digitális technika

V.

Egyszerűsítés 2.

Logikai függvények realizálása

5.1. Grafikus egyszerűsítés, speciális esetek

Függvény negáltjának egyszerű alakja:

a '0'-kat tartalmazó cellákat kell összevonni

| CD | | 00 | 01 | 11 | 10 |
|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----|
| AB | | | | | |
| 00 | 1 ₀ | 1 ₁ | 0 ₃ | 0 ₂ | |
| 01 | 1 ₄ | 0 ₅ | 0 ₇ | 0 ₆ | |
| 11 | 1 ₁₂ | 0 ₁₃ | 0 ₁₅ | 1 ₁₄ | |
| 10 | 1 ₈ | 1 ₉ | 1 ₁₁ | 1 ₁₀ | |

$\overline{A} * C$

$B * D$

$$\bar{Y} = \bar{A} * C + B * D$$

$$Y = \overline{\bar{A} * C + B * D} = \overline{\bar{A} * C} * \overline{B * D}$$

$$Y = (A + \bar{C}) * (\bar{B} + \bar{D})$$

Konjunktív alak !

5.1. Grafikus egyszerűsítés, speciális esetek

Konjunktív egyszerű alak kiolvasása:

a '0'-kat tartalmazó cellákat kell összevonni és a változók ponált/negált értelmezése fordított, és összegeket kapunk !

Karnaugh táblában

pl.

| CD | | 00 | 01 | 11 | 10 | |
|----|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|
| AB | 00 | 1 ₀ | 1 ₁ | 0 ₃ | 0 ₂ | $A + \bar{C}$ |
| | 01 | 0 ₄ | 0 ₅ | 0 ₇ | 0 ₆ | |
| | 11 | 0 ₁₂ | 0 ₁₃ | 0 ₁₅ | 0 ₁₄ | \bar{B} |
| | 10 | 0 ₈ | 1 ₉ | 1 ₁₁ | 1 ₁₀ | $\bar{A} + C + D$ |

$$Y = (A + \bar{C}) * (\bar{A} + C + D) * \bar{B}$$

Konjunktív alak !

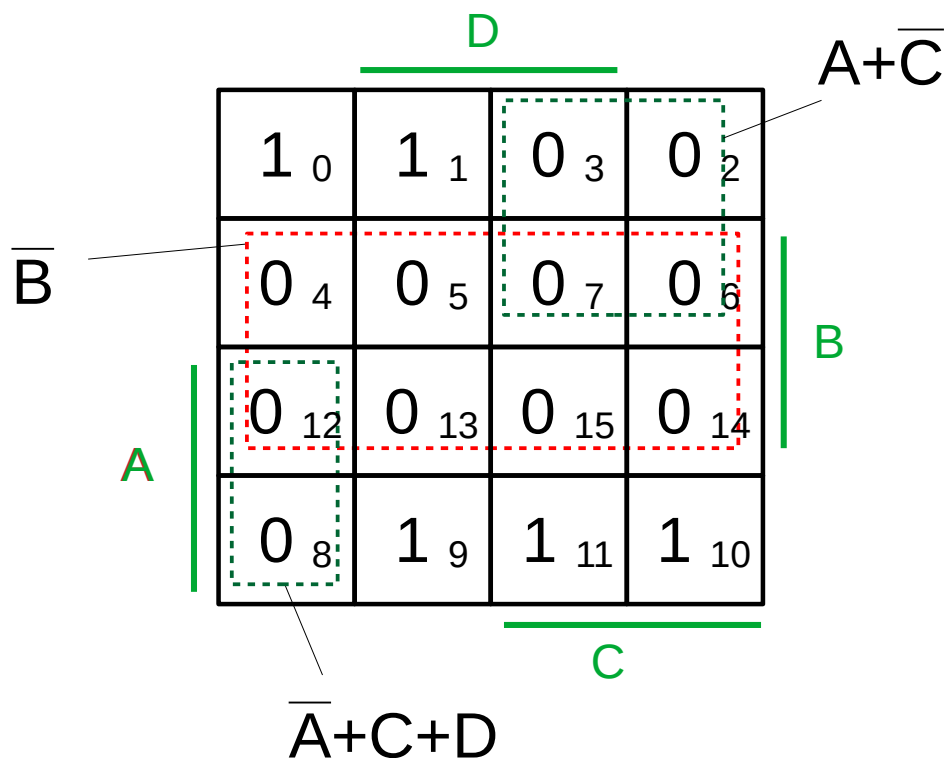
5.1. Grafikus egyszerűsítés, speciális esetek

Konjunktív egyszerű alak kiolvasása:

a '0'-kat tartalmazó cellákat kell összevonni és a változók ponált/negált értelmezése fordított, és összegeket kapunk !

Veitch táblában

pl.



$$Y = (A + \bar{C}) * (\bar{A} + C + D) * \bar{B}$$

Konjunktív alak !

5.1. Grafikus egyszerűsítés, speciális esetek

Konjunktív egyszerű alak kiolvasására másik megoldás:

maxterm táblákat használunk → a változók ponálása/negálása ellentétes,
új_index=maxindex-index, kimenet értékei is fordítva
(tehát lényegében megcsináljuk grafikusan a $\Sigma \rightarrow \Pi$ átalakítást)

| | | CD | | | | |
|----|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|---------------|
| | | 11 | 10 | 00 | 01 | |
| AB | 11 | 0 ₁₅ | 0 ₁₄ | 1 ₁₂ | 1 ₁₃ | $A + \bar{C}$ |
| | 10 | 1 ₁₁ | 1 ₁₀ | 1 ₈ | 1 ₉ | \bar{B} |
| | 00 | 1 ₃ | 1 ₂ | 1 ₀ | 1 ₁ | |
| | 01 | 1 ₇ | 0 ₆ | 0 ₄ | 0 ₅ | |

$\bar{A} + C + D$

$$Y = (A + \bar{C}) * (\bar{A} + C + D) * \bar{B}$$

Konjunktív alak !

5.1. Grafikus egyszerűsítés, speciális esetek

minterm táblák

| A \ BC | | | | |
|--------|----|----|----|----|
| | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 0 | 0 | 1 | 3 | 2 |
| 1 | 4 | 5 | 7 | 6 |

| A | B | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 3 | 2 |
| | 4 | 5 | 7 | 6 |

C

maxterm táblák

| A \ BC | | | | |
|--------|----|----|----|----|
| | 11 | 10 | 00 | 01 |
| 1 | 7 | 6 | 4 | 5 |
| 0 | 3 | 2 | 0 | 1 |

| A | B | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 7 | 6 | 4 | 5 |
| | 3 | 2 | 0 | 1 |

C C

5.1. Grafikus egyszerűsítés, speciális esetek

minterm táblák

| CD \ AB | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00 | 0 | 1 | 3 | 2 |
| 01 | 4 | 5 | 7 | 6 |
| 11 | 12 | 13 | 15 | 14 |
| 10 | 8 | 9 | 11 | 10 |

A 4x4 grid representing a 2D array. The values are arranged as follows:

| | | | |
|----|----|----|----|
| 0 | 1 | 3 | 2 |
| 4 | 5 | 7 | 6 |
| 12 | 13 | 15 | 14 |
| 8 | 9 | 11 | 10 |

Dimensions are labeled with colored lines and text:

- A** (blue vertical line on the left): Height of the array (4 units).
- B** (orange vertical line on the right): Width of the array (4 units).
- C** (purple horizontal line on top): Width of the array (4 units).
- D** (green horizontal line on the bottom): Height of the array (4 units).

maxterm táblák

| CD \ AB | 11 | 10 | 00 | 01 |
|---------|----|----|----|----|
| 11 | 15 | 14 | 12 | 13 |
| 10 | 11 | 10 | 8 | 9 |
| 00 | 3 | 2 | 0 | 1 |
| 01 | 7 | 6 | 4 | 5 |

| | | | |
|----|----|----|----|
| 15 | 14 | 12 | 13 |
| 11 | 10 | 8 | 9 |
| 3 | 2 | 0 | 1 |
| 7 | 6 | 4 | 5 |

5.1. Grafikus egyszerűsítés, speciális esetek

Minta feladat

$$Y^4 = \prod^4 (2,3,8,9,10,11,12,14)$$

1. megoldás

$A + \bar{D}$

| | | | | | |
|----|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | | | | | |
| | CD | 11 | 10 | 00 | 01 |
| AB | 11 | 0 ₁₅ | 1 ₁₄ | 1 ₁₂ | 0 ₁₃ |
| 11 | | | | | |
| 10 | | 1 ₁₁ | 1 ₁₀ | 1 ₈ | 1 ₉ |
| 00 | | 1 ₃ | 1 ₂ | 0 ₀ | 0 ₁ |
| 01 | | 0 ₇ | 0 ₆ | 0 ₄ | 0 ₅ |

$\bar{B} + C$

$A + \bar{B}$

Konjunktív alak !

$$Y = (A + \bar{D}) * (\bar{B} + C) * (A + \bar{B})$$

2. megoldás

$$\bar{Y}^4 = \prod^4 (0,1,4,5,6,7,13,15)$$

$$Y^4 = \Sigma^4 (15,14,11,10,9,8,2,0)$$

| | | | | | |
|----|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | | | | | |
| | CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
| AB | 00 | 1 ₀ | 0 ₁ | 0 ₃ | 1 ₂ |
| 01 | | 0 ₄ | 0 ₅ | 0 ₇ | 0 ₆ |
| 11 | | 0 ₁₂ | 0 ₁₃ | 1 ₁₅ | 1 ₁₄ |
| 10 | | 1 ₈ | 1 ₉ | 1 ₁₁ | 1 ₁₀ |

$\bar{B} * \bar{D}$

$A * C$

$A * \bar{B}$

Diszjunktív alak !

$$Y = A * \bar{B} + A * C + \bar{B} * \bar{D}$$

5.2. Nem teljesen határozott logikai függvény

határozatlan vagy tiltott bemeneti kombinációk is vannak
(vagy nem érdekes mindig, hogy mi a kimenet)

jelölése – x
–
h

Egyszerűsítésnél a kedvezőbb értéként
célszerű figyelembe venni !!

pl.

| CD | | 00 | 01 | 11 | 10 |
|----|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| AB | 00 | 1 ₀ | 1 ₁ | 1 ₃ | x ₂ |
| | 01 | 0 ₄ | 1 ₅ | 1 ₇ | 0 ₆ |
| | 11 | x ₁₂ | 1 ₁₃ | x ₁₅ | 0 ₁₄ |
| | 10 | 0 ₈ | 0 ₉ | 0 ₁₁ | x ₁₀ |

$\overline{A} * \overline{B}$

$B * D$

$$Y^4 = \Sigma^4 (0,1,3,5,7,13 \text{ hat. } 2,10,12,15)$$

$$\overline{Y}^4 = \Sigma^4 (4,6,8,9,11,14 \text{ hat. } 2,10,12,15)$$

$$Y^4 = \Pi^4 (11,9,7,6,4,1 \text{ hat. } 13,5,3,0)$$

5.3. Gyakorló feladatok

Egyszerűsítsd a függvényeket !

1. feladat

| A \ BC | | | | |
|--------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 0 | X ₀ | 0 ₁ | 1 ₃ | 1 ₂ |
| 1 | 0 ₄ | 0 ₅ | 1 ₇ | X ₆ |

2. feladat

| AB \ CD | | | | |
|---------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 00 | 1 ₀ | 0 ₁ | X ₃ | 0 ₂ |
| 01 | X ₄ | 0 ₅ | 0 ₇ | 1 ₆ |
| 11 | 0 ₁₂ | 1 ₁₃ | 1 ₁₅ | 0 ₁₄ |
| 10 | 0 ₈ | 1 ₉ | 1 ₁₁ | X ₁₀ |

3. feladat

$$Y^4 = \Sigma^4 (0,2,3,5,10,11, \text{ határozatlan: } 1,7,12)$$

5.4. Gyakorló feladatok

Egyszerűsítsd a függvényeket, mindkét alakban ! (diszjunktív, konjunktív)

1. feladat

| | | CD | | | |
|----|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | | 00 | 01 | 11 | 10 |
| AB | 00 | 1 ₀ | 0 ₁ | - ₃ | 0 ₂ |
| | 01 | 1 ₄ | 0 ₅ | 0 ₇ | 0 ₆ |
| | 11 | - ₁₂ | 0 ₁₃ | 1 ₁₅ | 1 ₁₄ |
| | 10 | 1 ₈ | - ₉ | 1 ₁₁ | 1 ₁₀ |

2. feladat

$$Y^4 = \Sigma^4 (0,1,2,3,5,8,10,11)$$

3. feladat

$$Y^4 = \Pi^4 (0,2,6,8,10,11,14,15)$$

4. feladat

$$Y^4 = \Pi^4 (1,3,10,11,13,14 \text{ határozatlan: } 7,9,15)$$

5.5. Logikai függvények megvalósítása

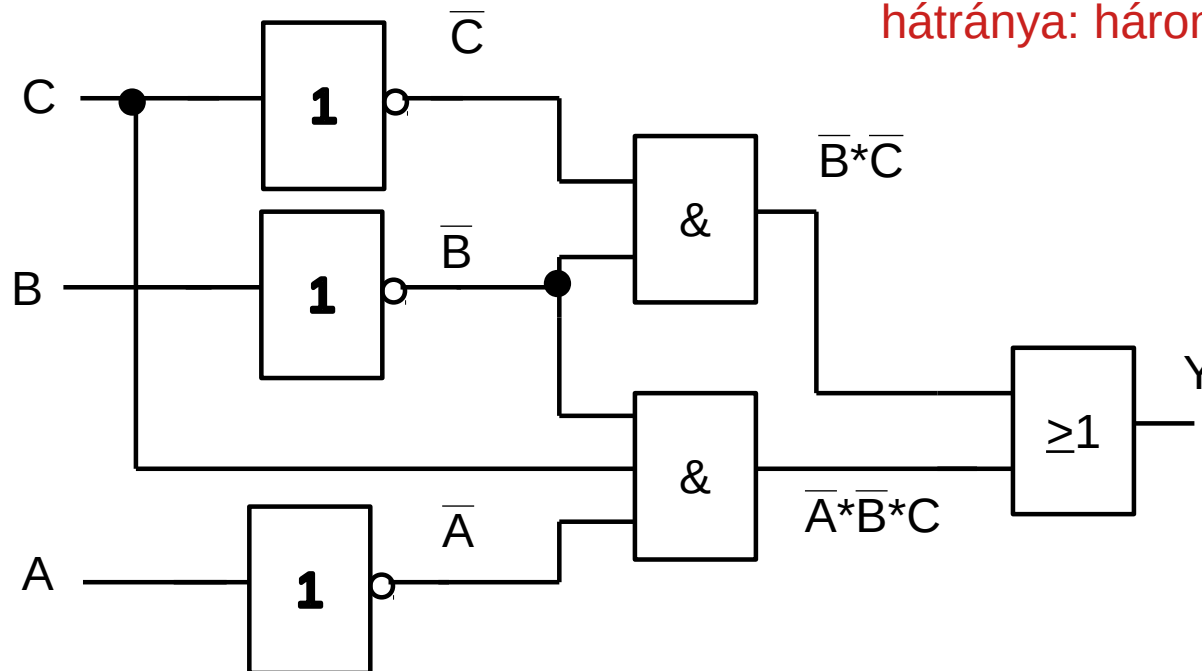
Megvalósítás (realizálás) logikai kapuáramkörökkel
de háromféle rendszer létezik ! →
funkcionálisan teljes rendszerek, mert bármilyen
kombinációs hálózatot képesek megvalósítani

1. NÉV rendszer (NEM-ÉS-VAGY)

ezt használtuk eddig

AND kapu, OR kapu és NOT kapu (inverter) alkalmazása

pl. $Y = \bar{B} * \bar{C} + \bar{A} * C * \bar{B}$



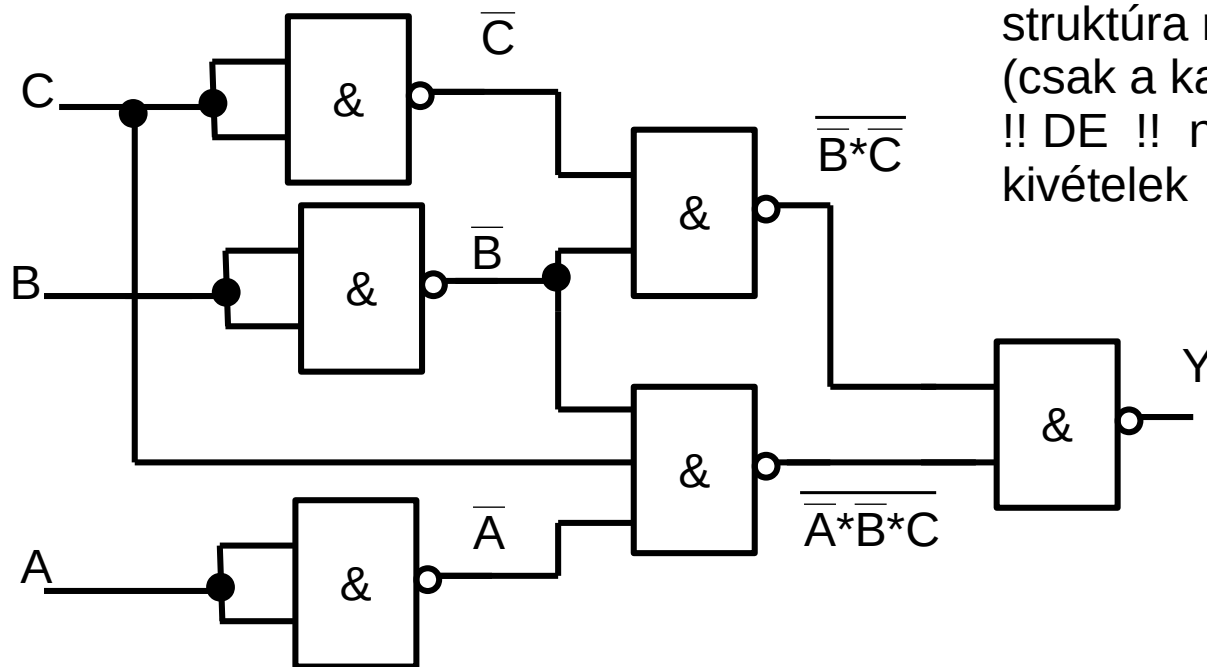
hátránya: háromféle kapu kell !

5.5. Logikai függvények megvalósítása

2. NAND rendszer

csak NAND kapuk alkalmazásával is megvalósítható
bármilyen kombinációs hálózat ! mert univerzális elem

$$\text{pl. } Y = \overline{B \cdot C} + \overline{A \cdot C \cdot B} = \overline{\overline{\overline{B \cdot C} + \overline{A \cdot C \cdot B}}} = \overline{\overline{B \cdot C} \cdot \overline{\overline{A \cdot C \cdot B}}}$$

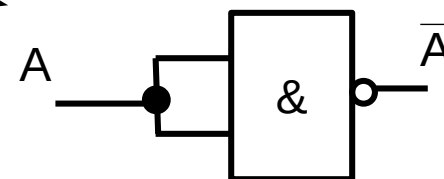


A legtöbbször teljesen hasonló
struktúra mint a NÉV rendszerben
(csak a kapuk vannak NAND-ra cserélve),
!! DE !! nem mindig hasonló, vannak
kivételek

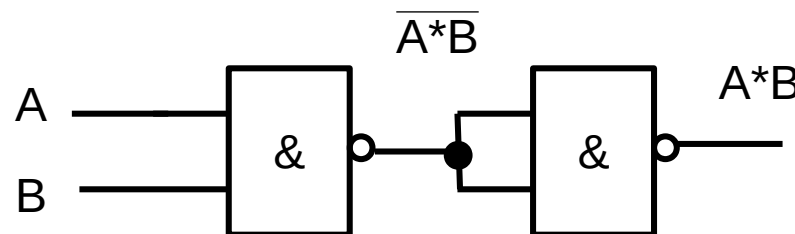
5.5. Logikai függvények megvalósítása

NAND rendszer

Az invertálás az $\bar{A} = \overline{A \cdot A}$ azonosság felhasználásával

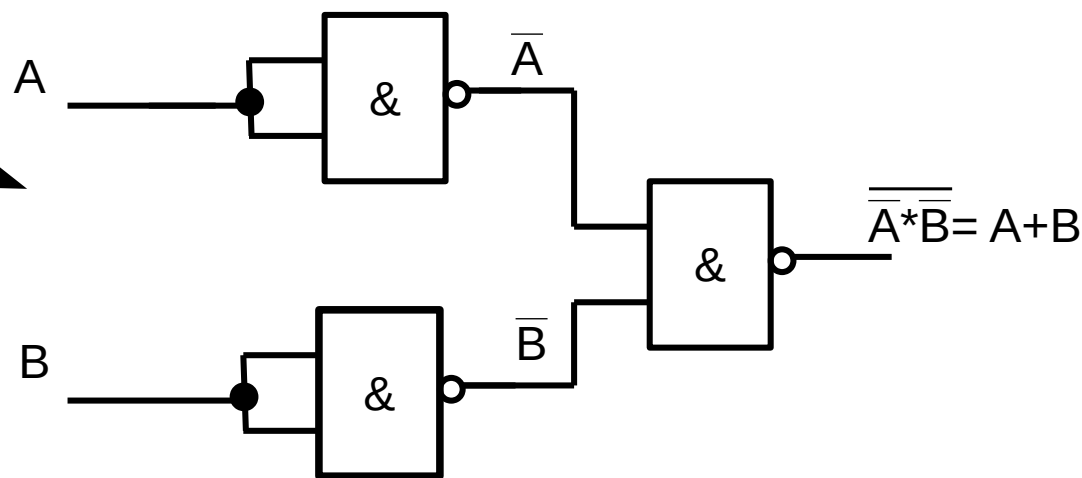


Az ÉS függvény az $A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}}$ azonosság felhasználásával



A VAGY függvény,

az $A + B = \overline{\overline{A + B}} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$ azonosság felhasználásával



5.5. Logikai függvények megvalósítása

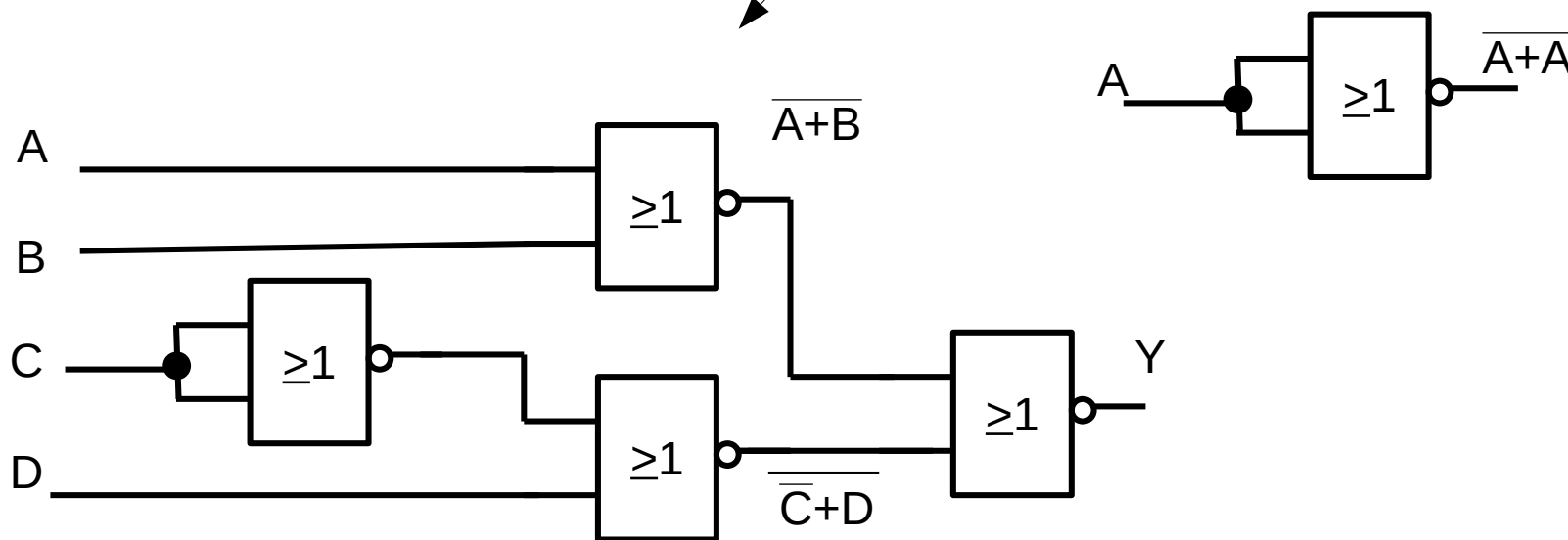
3. NOR rendszer

csak NOR kapuk alkalmazásával is megvalósítható
bármilyen kombinációs hálózat !

Mert univerzális elem ez is. Viszont a konjunktív alakból kell kiindulni !

$$\text{pl. } Y = (A+B) * (\overline{C+D}) = \overline{\overline{A+B} * \overline{\overline{C+D}}} = \overline{\overline{A+B} + \overline{\overline{C+D}}}$$

invertálás, $\overline{\overline{A}} = A$ azonossággal



5.6. Minta feladat

$$Y^4 = \Sigma^4 (0,1,2,3,10,11)$$

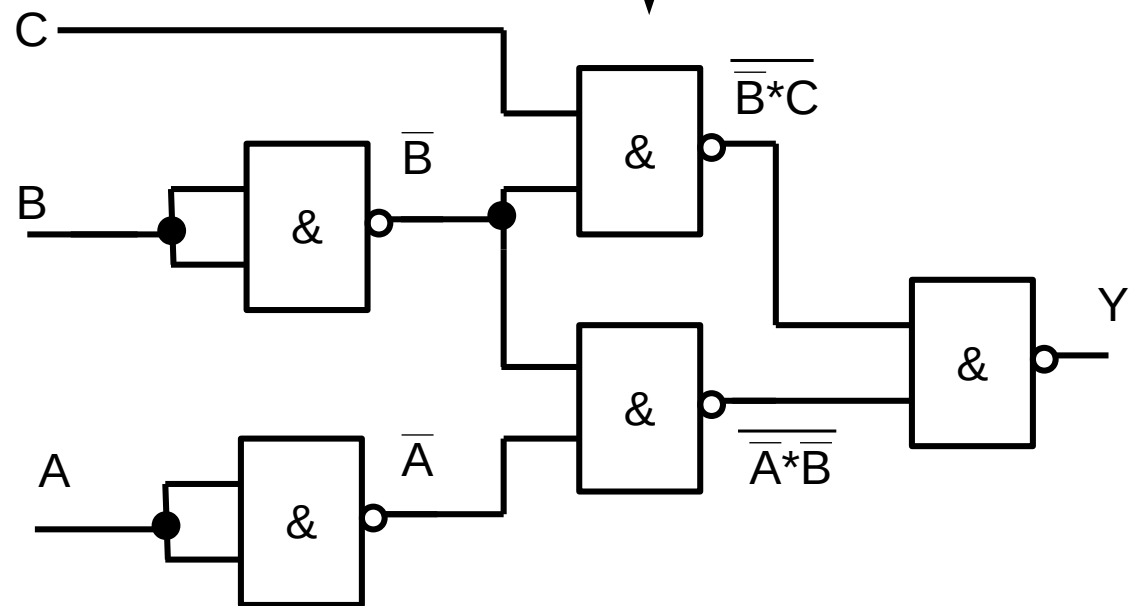
Megoldás NAND kapukkal

$$Y = \overline{B} * C + \overline{A} * \overline{B} = \overline{\overline{\overline{B} * C + \overline{A} * \overline{B}}}$$

$$Y = \overline{\overline{B} * C} * \overline{\overline{A} * \overline{B}}$$

↓

| | | | | |
|---------|-----------------|-----------------|-------------------------------|-----------------|
| | | | $\overline{A} * \overline{B}$ | |
| CD \ AB | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 00 | 1 ₀ | 1 ₁ | 1 ₃ | 1 ₂ |
| 01 | 0 ₄ | 0 ₅ | 0 ₇ | 0 ₆ |
| 11 | 0 ₁₂ | 0 ₁₃ | 0 ₁₅ | 0 ₁₄ |
| 10 | 0 ₈ | 0 ₉ | 1 ₁₁ | 1 ₁₀ |
| | | | $\overline{B} * C$ | |



5.6. Minta feladat

Ugyanaz a feladat megoldása NOR kapukkal

$$Y^4 = \Sigma^4 (0,1,2,3,10,11)$$

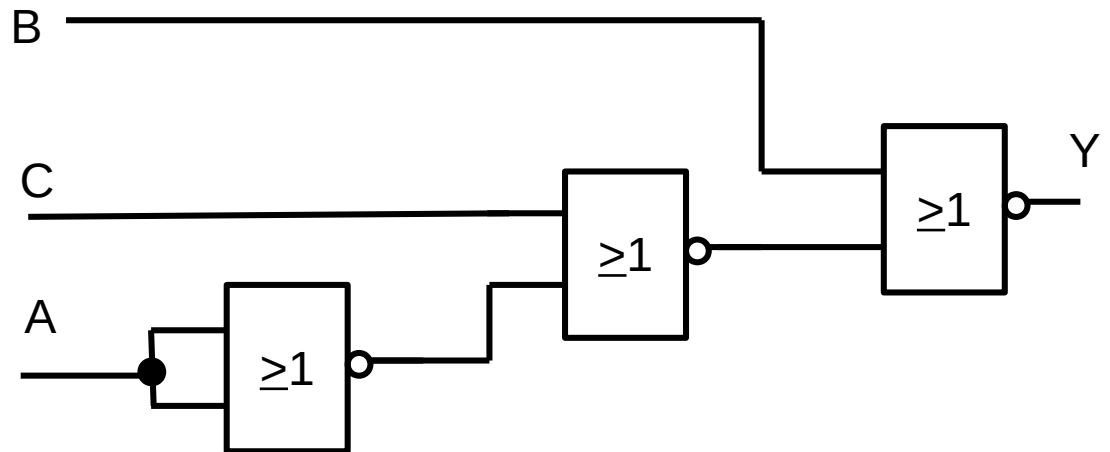
↓

| | | | | | | |
|----|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|
| | CD | 00 | 01 | 11 | 10 | |
| AB | | | | | | |
| 00 | | 1 ₀ | 1 ₁ | 1 ₃ | 1 ₂ | |
| 01 | | 0 ₄ | 0 ₅ | 0 ₇ | 0 ₆ | \overline{B} |
| 11 | | 0 ₁₂ | 0 ₁₃ | 0 ₁₅ | 0 ₁₄ | |
| 10 | | 0 ₈ | 0 ₉ | 1 ₁₁ | 1 ₁₀ | |

$\overline{A+C}$

$$Y = \overline{B} * (\overline{A+C}) = \overline{\overline{\overline{B}} * (\overline{A+C})} = \overline{\overline{B} + \overline{A+C}} = B + (\overline{A+C})$$

↓

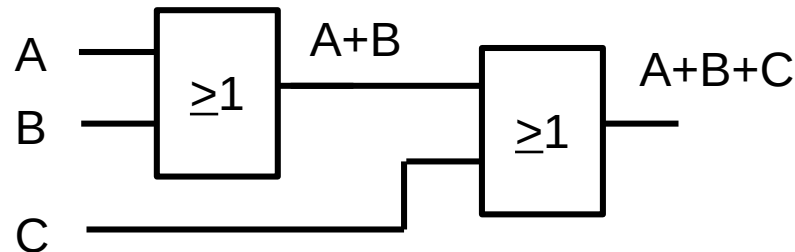


5.7. Bemenetek száma

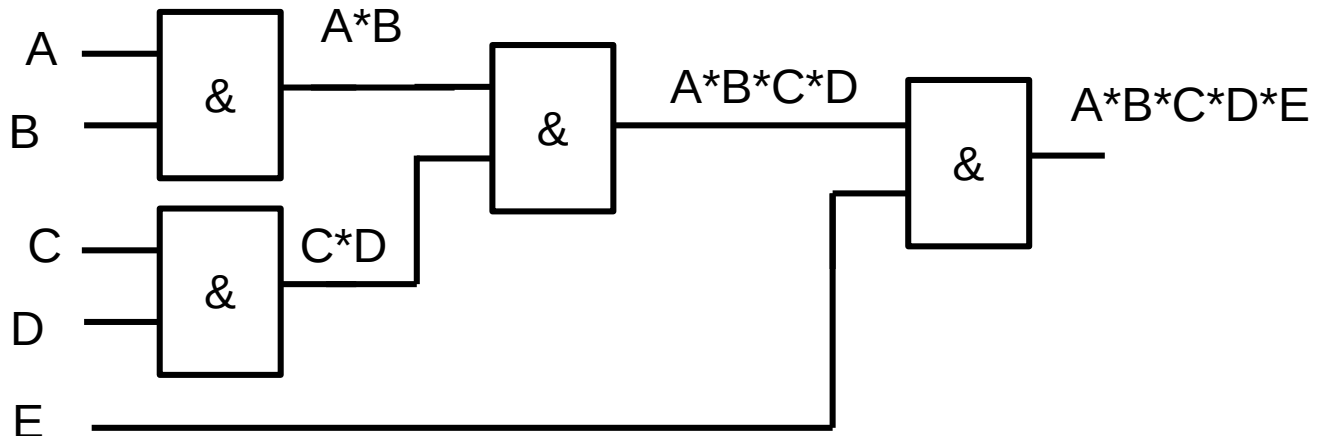
Ha a kapu bemenetek száma túl kevés
több lépésben végezzük el a műveletet

akár logikai szorzásról, akár logikai összeadásról van szó →
a műveleti sorrend bárhogy felcserélhető! $A+B+C = B+A+C = C+A+B = \dots$
 $A*B*C = B*A*C = \dots$

pl. $A+B+C$



pl. $A*B*C*D*E$

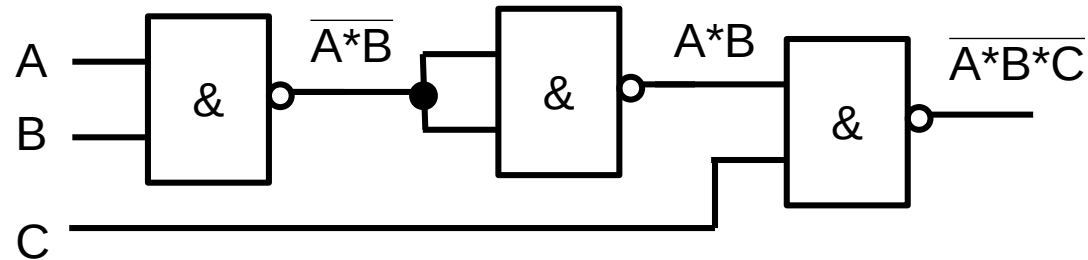


5.7. Bemenetek száma

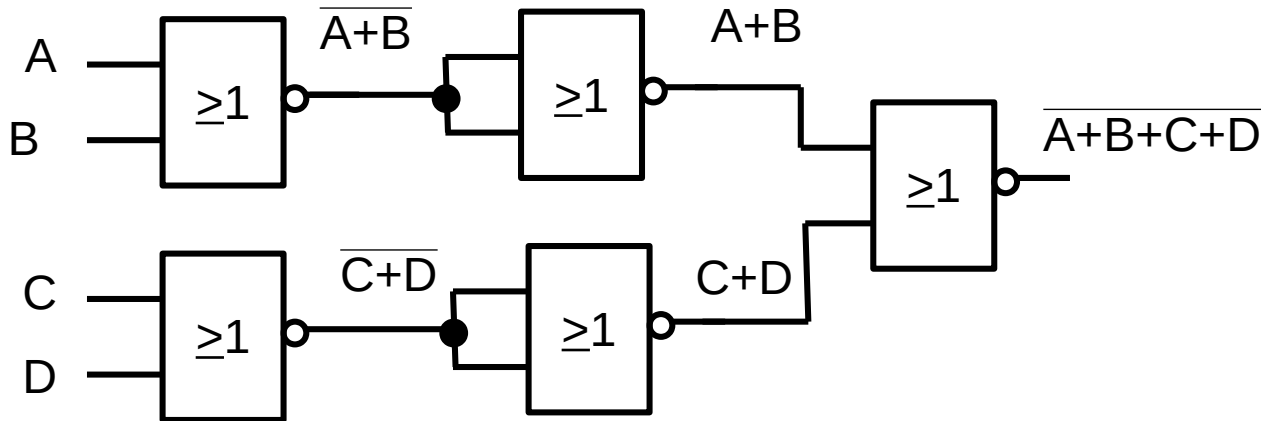
Ha a kapu bemenetek száma túl kevés
több lépésben végezzük el a műveletet

NAND és NOR kapuk esetén az invertálás miatt további plusz kapuk kellene !!

pl. $\overline{A*B*C}$



pl. $\overline{A+B+C+D}$

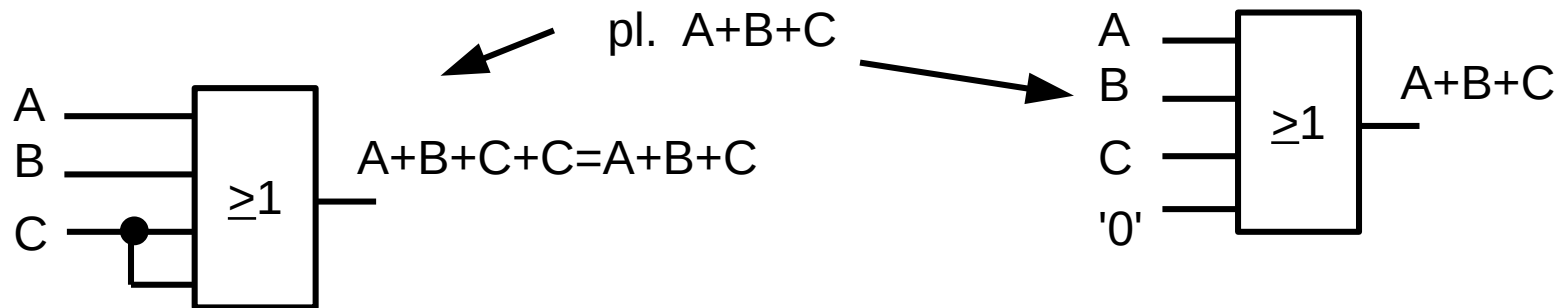


5.7. Bemenetek száma

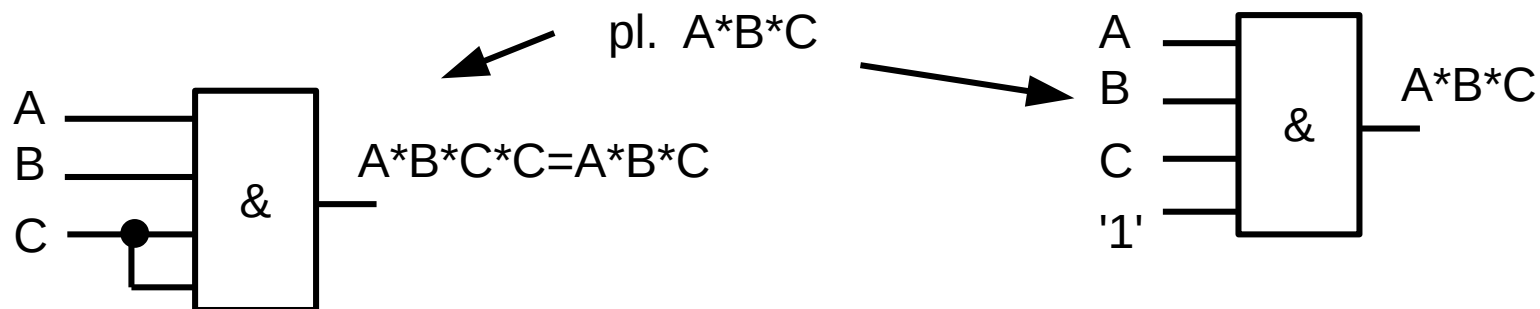
Ha a kapu bemenetek száma túl sok

üresen ne maradjanak mert hibás működést eredményezhetnek !!

VAGY kapu (vagy NOR) esetén az üres bemenetre vagy '0' szint kötendő, vagy egy másik bemenet lepárhuzamosítva (mert $A+A=A$)



ÉS kapu (vagy NAND) esetén az üres bemenetre vagy '1' szint kötendő, vagy egy másik bemenet lepárhuzamosítva (mert $A*A=A$)



5.8. Gyakorló feladatok

1. feladat

Tervezzünk 4 bemenetű kombinációs hálózatot, amelynek kimenete akkor 1 értékű ha

- minimum egy,
- maximum két bemenete egyidejűleg 0-ás értékű.

a, igazságtáblázat megadása

b, diszjunktív és konjunktív normál alak megadása

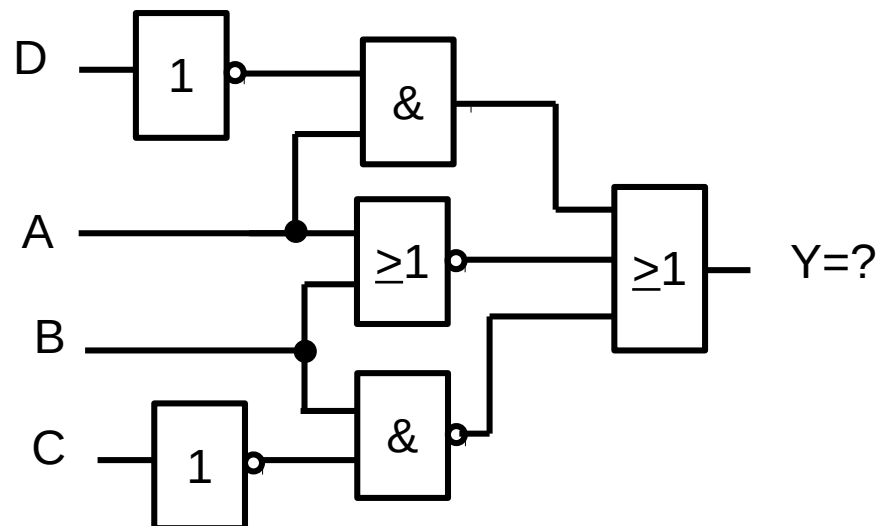
c, egyszerűsítés, majd a függvény megvalósítása (bármilyen kapu használható)

2. feladat

Írd fel az alábbi hálózat kimenetének (Y) logikai függvényét !

a, egyszerűsítsd a függvényt, és valósítsd meg NAND kapukkal

b, egyszerűsítsd a függvényt, és valósítsd meg NOR kapukkal



5.8. Gyakorló feladatok

3. feladat

$$Y^4 = \Sigma^4 (0,1,2,3,5,8,10,11)$$

- Egyszerűsítsd a függvényt !
- Valósítsd meg a függvényt 2 bemenetű NAND kapuk felhasználásával !

4. feladat

$$Y^4 = \Pi^4 (0,2,6,8,10,11,14,15)$$

- Egyszerűsítsd a függvényt !
- Valósítsd meg a függvényt 2 bemenetű NAND kapuk felhasználásával !

5. feladat

$$Y^4 = \Pi^4 (1,3,10,11,13,14 \text{ határozatlan: } 7,9,15)$$

- Egyszerűsítsd a függvényt !
- Valósítsd meg a függvényt 2 bemenetű NOR kapuk felhasználásával !
- Valósítsd meg a függvényt csak NAND kapuk felhasználásával !

5.8. Gyakorló feladatok

6. feladat

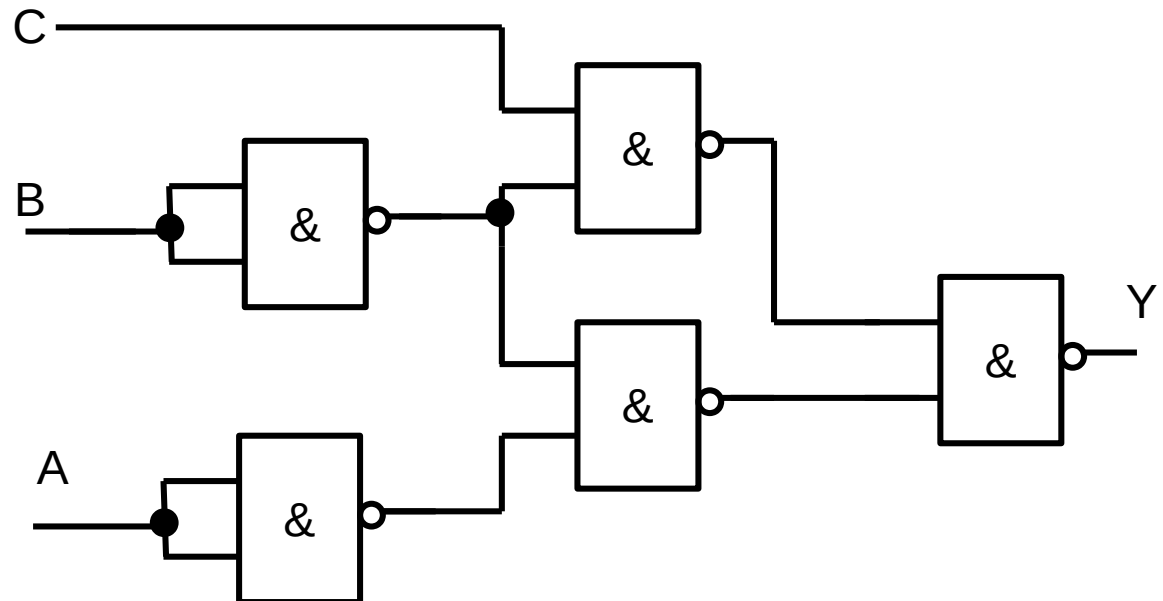
Tervezzünk 4 bemenetű kombinációs hálózatot, amelynek kimenete akkor 1 értékű ha a bemenetére érkező 4 bites szám (helyi értékek: A-8, B-4, C-2, D-1) → páratlan és kisebb 12-nél

- a, igazságtáblázat megadása
- b, diszjunktív normál alak megadása
- c, egyszerűsítés, majd a függvény megvalósítása NAND kapukkal

7. feladat

Írd fel az alábbi hálózat kimenetének (Y) logikai függvényét !

valósítsd meg a függvényt
NOR kapukkal !



5.8. Gyakorló feladatok

8. feladat

Tervezzünk 4 bemenetű kombinációs hálózatot, amelynek kimenete akkor 0 értékű ha a bemenetére érkező 4 bites szám nagyobb mint 2 és kisebb mint 11 (helyi értékek: A-8, B-4, C-2, D-1)

Feladatok:

- a, igazságtáblázat megadása
- b, egyszerűsítés
- c, a függvény megvalósítása NAND kapukkal !
- d, a függvény megvalósítása NOR kapukkal !

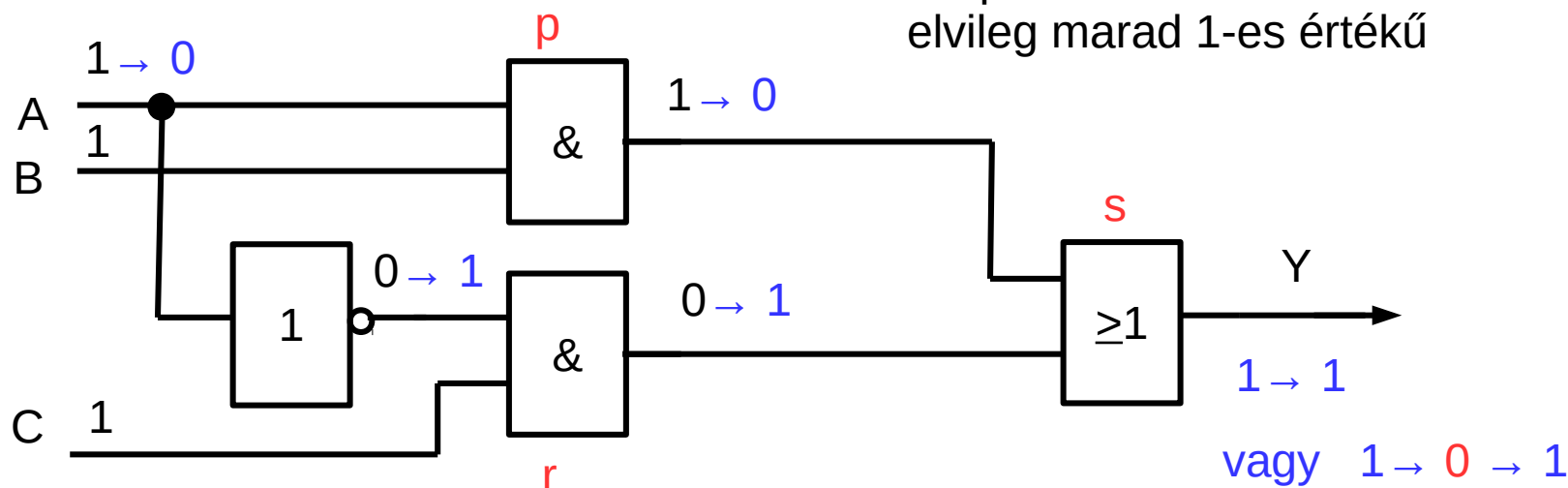
5.9. Hazárd mentes egyszerűsítés

Hazárd:

a kapuk és összeköttetések késleltetése átmenetileg hibás kimeneti állapotot okoz

pl. $Y = A*B + \bar{A}*C$

ha az $A=1$ $B=1$ $C=1$ állapotból
a bemenetek az $A=0$ $B=1$ $C=1$
állapotba váltanak → a kimenet
elvileg marad 1-es értékű



De ha az 'r' kapu egy picit később vált át mint a 'p' kapu →
's' kapu mindkét bemenetére '0' kerül egy rövid ideig →
Y értéke átmenetileg '0' lesz !!! → hibás működést okozhat

5.9. Hazárd mentes egyszerűsítés

Hazárd kiküszöbölése:

plusz tömbökkel !

→ minden szomszédos '1'-es értékű kimenet szerepeljen egy közös tömbben

pl. az előző $Y = A*B + \bar{A}*C$ függvény esetén

| BC | | $\bar{A}*C$ | | | |
|----|--|-------------|----|----|----|
| A | | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 0 | | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | | 0 | 0 | 1 | 1 |

$A*B$

$B*C$

hazárd mentes megvalósítás miatt !!

$$Y = A*B + \bar{A}*C + B*C$$

Legegyszerűbb hazárd mentes alak

5.10. Ismétlés, gyakorlás

1. feladat

$$Y = (A + \overline{B}) * (B + D) * (C + D)$$

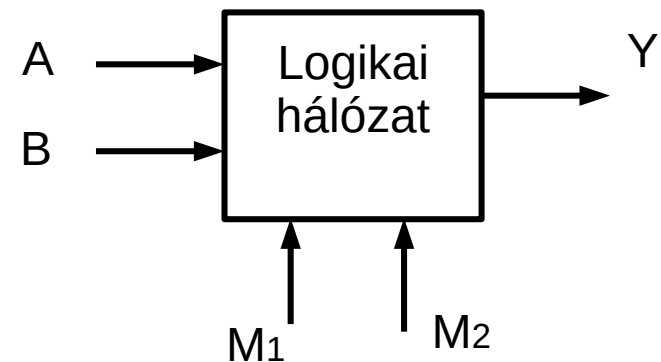
- igazságtáblázat megadása
- diszjunktív normál alak megadása
- egyszerűsítés, majd a függvény megvalósítása NAND kapukkal

2. feladat

Tervezzünk 4 bemenetű kombinációs hálózatot, amely egy egyszerű műveletvégző egység

- az 'A' és 'B' egy bites számokkal tud végezni különböző műveleteket
- M₁ és M₂ vezérlő bemenetekkel adjuk meg, hogy milyen műveletet végezzen

| | |
|--|------------------------|
| M ₁ =M ₂ =0 | → Y = \overline{A} |
| M ₁ =0 és M ₂ =1 | → Y = $\overline{A+B}$ |
| M ₁ =1 és M ₂ =0 | → Y = $\overline{A*B}$ |
| M ₁ =M ₂ =1 | → Y = \overline{B} |



- add meg az igazságtáblázatot !
- egyszerűsítsd a függvényt !
- valósítsd meg a függvényt két bemenetű NOR kapukkal !

5.10. Ismétlés, gyakorlás

Egyszerűsítsd a függvényeket ! Valósítsd meg az áramkört NAND kapukkal !

3. feladat

| A \ BC | | | | |
|--------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 0 | 1 ₀ | 0 ₁ | 1 ₃ | 1 ₂ |
| 1 | 0 ₄ | 1 ₅ | 1 ₇ | 1 ₆ |

4. feladat

$$Y^3 = \Sigma^3 (0,1,2,7 \text{ határozatlan: } 3,4)$$

5.10. Ismétlés, gyakorlás

Egyszerűsítsd a függvényeket ! Valósítsd meg az áramkört NOR kapukkal !

5. feladat

| CD | | 00 | 01 | 11 | 10 |
|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----|
| AB | | | | | |
| 00 | 1 ₀ | 0 ₁ | - ₃ | 0 ₂ | |
| 01 | 1 ₄ | 0 ₅ | 0 ₇ | 0 ₆ | |
| 11 | - ₁₂ | 0 ₁₃ | 1 ₁₅ | 1 ₁₄ | |
| 10 | 1 ₈ | - ₉ | 1 ₁₁ | 1 ₁₀ | |

6. feladat

$$Y^4 = \Sigma^4 (1,3,5,7,8,10,11)$$