

|||| eNote 22

Kurve- og plan-integraler

Vi vil her med udgangspunkt i de metoder og resultater der er opstillet i eNote ?? vise, hvordan Riemann-integralerne derfra kan benyttes til blandt andet at finde længder af kurver og arealer af plane områder, for så vidt de er beskrevet på en passende parameterform.

22.1 Kurveintegraler

Vi vil i udgangspunktet betragte kurver som er parametriserede på følgende måde ved en parameterfremstilling.

En parametriseret kurve K_r i rummet er givet ved en parameterfremstilling således:

$$K_r : \quad \mathbf{r}(u) = (x(u), y(u), z(u)) \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad u \in [a, b] \quad . \quad (22-1)$$

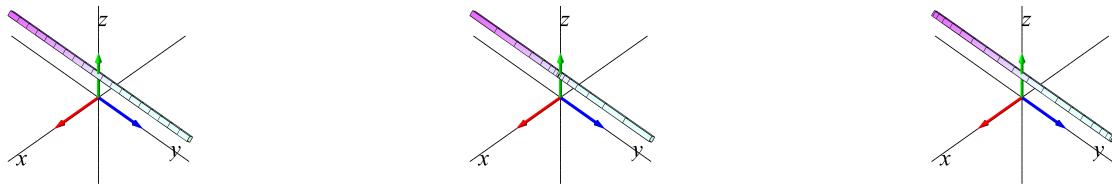


En given kurve kan sædvanligvis parametriseres på uendelig mange måder. Figur ?? viser tre forskellige parametriseringer af det rette linjestykke fra $(0, -2, \frac{1}{2})$ til $(0, 2, \frac{1}{2})$. Figur ?? viser tilsvarende to forskellige parametriseringer af en cirkel med radius 1 og centrum i $(0, 0, 0)$. Figur ?? viser tilsvarende 2 forskellige parametriseringer af en skruelinje.

Vi antager her og i det følgende, at de tre koordinatfunktioner $x(u)$, $y(u)$ og $z(u)$ i parameterfremstillingerne er påne funktioner af u . Vi antager simpelthen, at de alle tre er glatte funktioner af u således at de kan differentieres vilkårligt mange gange. Specielt er de aflede funktioner $x'(u)$, $y'(u)$ og $z'(u)$ derfor kontinuerte i intervallet $[a, b]$. Så har vi også, at

$$|\mathbf{r}'(u)| = \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} \quad (22-2)$$

er en kontinuert funktion i intervallet $[a, b]$. Specielt kan denne funktion derfor *integreges* over intervallet, jvf. eNote ?? og det har vi om lidt brug for i definition ?? nedenfor.



Figur 22.1: Linjestykket fra $(0, -2, \frac{1}{2})$ til $(0, 2, \frac{1}{2})$ er her parametriseret på 3 forskellige måder: $\mathbf{r}_1(u) = (0, 2u, \frac{1}{2})$, $u \in [-1, 1]$; $\mathbf{r}_2(u) = (0, 2u^3, \frac{1}{2})$, $u \in [-1, 1]$, og $\mathbf{r}_3(u) = (0, 2 \sin(\frac{\pi}{2}u), \frac{1}{2})$, $u \in [-1, 1]$. Markeringerne på de enkelte linjestykker stammer fra den indeling af det fælles parameterinterval $[-1, 1]$ som består af 20 lige store delintervaller. Bemærk, at længden af de tre 'kurver' klart er den samme, selv om parametriseringerne er ret forskellige. Se Opgave ??.

||| Definition 22.1 Regulær parameterfremstilling

En parameterfremstilling $\mathbf{r}(u)$ for en kurve K_r - som i ?? - siges at være en *regulær parameterfremstilling* hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\mathbf{r}'(u) \neq \mathbf{0} \quad \text{for alle } u \in [a, b] . \quad (22-3)$$

||| Opgave 22.2

Hvilke af parameterfremstillingerne i figurerne ??, ??, ??, og ?? er regulære?

En parametriseret kurve er andet og mere end blot billedmængden (punkt-mængden) $\mathbf{r}([a, b])$, idet selve parametriseringen eksempelvis kan foreskrive at dele af punktmængden skal gennemløbes flere gange, se eksempel ?? nedenfor.

Man kan gerne tænke på intervallet $[a, b]$ som en retlinet elastik i hvile. Vektorafbildningen \mathbf{r} deformerer elastikken (ind i rummet) ved at bøje, strække eller komprimere elastikken. En lokal strækning gør selvfølgelig elastikken lokalt længere, mens en lokal komprimering gør elastikken lokalt kortere. Et første naturligt spørgsmål er derfor hvor lang hele elastikken er efter brug af afbildningen \mathbf{r} . Kurveintegralet indføres blandt andet med henblik på at finde den totale længde af den deformede kurve i rummet.



Vi kan ligeledes forestille os, at den parametriserede kurve selv er masseløs, men at den til gengæld efter deformationen med \mathbf{r} farves med en maling på en sådan måde at massetætheden af malingen langs med kurven (i gram pr. centimeter, f.eks.) er givet som en funktion f af stedet (x, y, z) i rummet – altså sådan at massetætheden af malingen på stedet $\mathbf{r}(u)$ er $f(\mathbf{r}(u))$. Opgaven er da at finde den totale masse af den deformede og farvelagte parametriserede kurve. Bemærk, at med lidt fantasi kan vi endda gerne tillade, at 'massetætheden' f antager negative værdier.

Disse forestillinger skal naturligvis kun hjælpe os til at få en passende intuitiv forståelse af de indførte begreber; vi skal i de relaterede eNoter se adskillige andre tolkninger og brug af kurveintegralet.

||| Eksempel 22.3 Skruelinje

Skruelinjen i figur ?? er præsenteret med 2 forskellige parametriseringer:

$$\mathbf{r}_1(u) = (\cos(2\pi u), \sin(2\pi u), \frac{\pi}{5}u), \quad u \in [-1, 1], \text{ og}$$

$$\mathbf{r}_2(u) = (\cos(2\pi u^3), \sin(2\pi u^3), \frac{\pi}{5}u^3), \quad u \in [-1, 1].$$

Markeringerne stammer fra den inddeling af *parameterintervallet* $[-1, 1]$ som består af 200 lige store delintervaller. Kurverne er igen klart lige lange (se opgave ??).

||| Eksempel 22.4 Knude

Knuden i Figur ?? har den noget komplicerede parameterfremstilling

$$\mathbf{r}(u) = \left(-\frac{1}{3} \cos(u) - \frac{1}{15} \cos(5u) + \frac{1}{2} \sin(2u), \frac{1}{3} \sin(u) - \frac{1}{15} \sin(5u) - \frac{1}{2} \cos(2u), \frac{1}{3} \cos(3u) \right),$$

hvor $u \in [-\pi, \pi]$.



Figur 22.2: En cirkel i (x, y) -planen er her parametriseret på 2 forskellige måder: $\mathbf{r}_1(u) = (\cos(\pi u), \sin(\pi u), 0)$, $u \in [-1, 1]$, og $\mathbf{r}_2(u) = (\cos(\pi u^3), \sin(\pi u^3), 0)$, $u \in [-1, 1]$. Markeeringerne stammer fra den inddeling af parameterintervallet $[-1, 1]$ som består af 100 lige store delintervaller. Længden af cirklen er 2π - uafhængig af parametriseringen.

Vi definerer kurveintegration på følgende måde, og motiverer definitionen i afsnit ?? nedenfor:

||| Definition 22.5 Kurveintegral

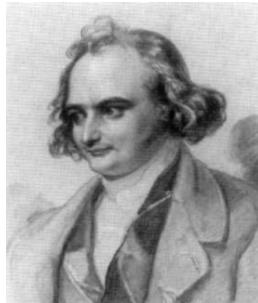
Lad $f(x, y, z)$ betegne en kontinuert funktion på \mathbb{R}^3 . Kurveintegralet af funktionen f over en parametriseret kurve K_r defineres ved

$$\int_{K_r} f d\mu = \int_a^b f(\mathbf{r}(u)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u) du , \quad (22-4)$$

hvor Jacobi-funktionen $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u)$ er givet ved:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u) = |\mathbf{r}'(u)| . \quad (22-5)$$

Jacobi-funktionen $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u)$ betegner altså længden af tangentvektoren $\mathbf{r}'(u)$ til kurven på stedet $\mathbf{r}(u)$.



Figur 22.3: Carl Gustav Jakob Jacobi. Se Biografi.



Læg mærke til, at det symbol, der står på venstre side af lighedstegnet i (??), *kun* er et *symbol* for kurveintegralet. Det integral vi skal regne ud står på højre side. Og det kan lade sig gøre at integrere, fordi både f , \mathbf{r} og $|\mathbf{r}'|$ er kontinuerte, således at integranden er kontinuert.

Hvis vi indsætter $\mathbf{r}(u) = (x(u), y(u), z(u))$ i udtrykket for kurveintegralet får vi:

$$\int_{K_r} f d\mu = \int_a^b f(x(u), y(u), z(u)) \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} du . \quad (22-6)$$

||| Bemærkning 22.6

Parameterfremstillingen (??) for kurven er *regulær* hvis parameterfremstillingens Jacobi-funktion er positiv: $Jacobi_{\mathbf{r}}(u) = |\mathbf{r}'(u)| > 0$ for alle u i det givne interval $[a, b]$.

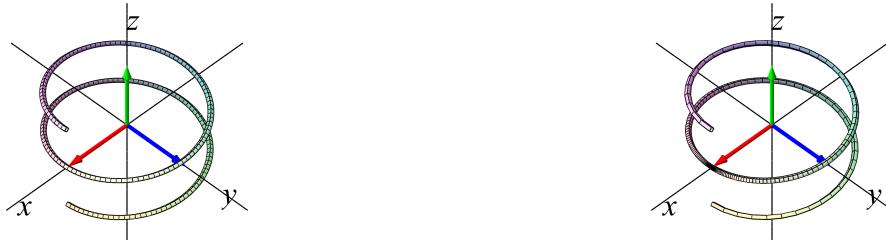
||| Eksempel 22.7 En vægtet cirkel

Givet funktionen $f(x, y, z) = 7x$ og et parametriseret cirkelstykke

$$C_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u) = (x(u), y(u), z(u)) = (\cos(u), \sin(u), 0), \quad u \in [-\frac{\pi}{2}, \pi] .$$

Kurveintegralet af f over $C_{\mathbf{r}}$ er

$$\begin{aligned} \int_{C_{\mathbf{r}}} f d\mu &= \int_{-\pi/2}^{\pi} f(x(u), y(u), z(u)) \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} du \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi} 7 \cos(u) \sqrt{(-\sin(u))^2 + (\cos(u))^2} du \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi} 7 \cos(u) du = 7 . \end{aligned}$$



Figur 22.4: En skruelinje i rummet med to forskellige parametriseringer. Se eksempel ??.

Som nævnt, og som vi vil godtgøre nedenfor - i afsnit ?? om *Motivering af kurveintegralet* - kan kurveintegraler benyttes til at finde længder af parametriserede kurver og til at finde den totale masse af parametriserede kurver med givne massetæthed. Hvis massetætheden er konstant 1 fås længden (man kan finde længden af en sådan kurve ved at veje den):

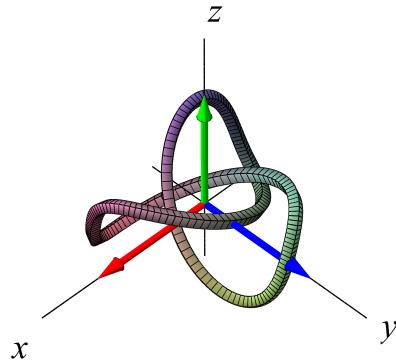
||| **Definition 22.8 Længden af en kurve**

Længden af den parametriserede kurve

$$K_{\mathbf{r}} : \quad \mathbf{r}(u) = (x(u), y(u), z(u)) \quad , \quad u \in [a, b]$$

defineres som kurveintegralet

$$L(K_{\mathbf{r}}) = \int_{K_{\mathbf{r}}} 1 d\mu = \int_a^b |\mathbf{r}'(u)| du . \quad (22-7)$$



Figur 22.5: En knude. Se eksempel ??

||| Eksempel 22.9 Længde af cirkelstykke

Det parametriserede cirkelstykke

$$C_r : \mathbf{r}(u) = (\cos(u), \sin(u), 0), \quad u \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$$

har længden

$$\begin{aligned} L(C_r) &= \int_{C_r} 1 \, d\mu = \int_{-\pi/2}^{\pi} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} \, du \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi} \sqrt{(-\sin(u))^2 + \cos(u))^2} \, du \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi} 1 \, du = \frac{3\pi}{2} . \end{aligned}$$

||| Eksempel 22.10 Multiple cirkelvindinger

Den parametriserede plane kurve

$$\tilde{C}_r : \mathbf{r}(u) = (\cos(u), \sin(u), 0), \quad u \in [-\frac{\pi}{2}, 7\pi]$$

har længden $L(\tilde{C}_r) = \frac{15\pi}{2}$ svarende til at parametriseringen 'lægger' det lange interval flere

█ gange rundt på enhedscirklen!

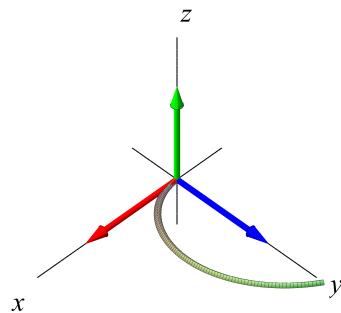
||| Eksempel 22.11 Længden af en plan spiral

Den parametrerede plane spiral (se figur ??)

$$K_r : \mathbf{r}(u) = (u \cos(u), u \sin(u), 0), u \in [0, \pi/2]$$

har længden

$$\begin{aligned}
 L(K_r) &= \int_{K_r} 1 d\mu = \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} du \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\cos(u) - u \sin(u))^2 + (\sin(u) + u \cos(u))^2} du \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + u^2} du \\
 &= \left[(1/2)u\sqrt{1+u^2} + (1/2)\operatorname{arcsinh}(u) \right]_0^{\pi/2} \\
 &= (\pi/4)\sqrt{1+(\pi/2)^2} + (1/2)\operatorname{arcsinh}(\pi/2) \\
 &= (\pi/8)\sqrt{4+\pi^2} + (1/2)\ln(2) - (1/2)\ln(-\pi + \sqrt{4+\pi^2}) \\
 &= 2.079 .
 \end{aligned} \tag{22-8}$$



Figur 22.6: Del af en plan spiral. Se eksempel ??.

||| Eksempel 22.12 Ellipsens længde

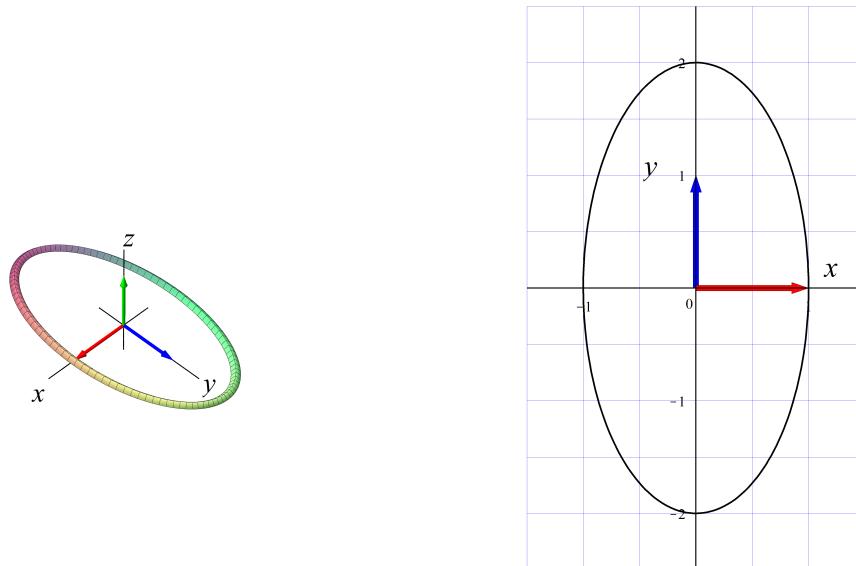
Længden af en ellipse. Den parametriserede ellipse (se Figur ??)

$$K_r : \mathbf{r}(u) = (a \cos(u), b \sin(u), 0), u \in [-\pi, \pi]$$

har længden

$$\begin{aligned} L(K_r) &= \int_{K_r} 1 d\mu = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} du \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(u) + b^2 \cos^2(u)} du \\ &= 4aE\left(\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}\right), \end{aligned}$$

hvor E betegner det såkaldte fuldstændige elliptiske integral af 2. orden. Om funktionen $E(u)$ nævner vi her kun, at funktionsværdien i $u = 0$ er $E(0) = \pi/2$, således at ovenstående resultat betyder, at når ellipsen specielt er en cirkel, dvs. når $a = b$, så får vi den korrekte omkreds af cirklen med radius a : $L = 2\pi a$.



Figur 22.7: En ellipse med halvakser $a = 1$ og $b = 2$. Se eksempel ??.

||| Eksempel 22.13 Skruelinjens længde

Den parametrerede skruelinje

$$K_r : \mathbf{r}(u) = (\cos(u), \sin(u), u), \quad u \in [-2\pi, 2\pi]$$

har længden

$$\begin{aligned} L(K_r) &= \int_{K_r} 1 d\mu = \int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} du \\ &= \int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{(-\sin(u))^2 + (\cos(u))^2 + 1} du \\ &= \int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{2} du = 4\pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

||| Definition 22.14 En-entydig parameterfremstilling

Parameterfremstillingen i (??) for kurven K_r siges at være *en-entydig* hvis der for alle $u_1 \in [a, b]$ og for alle $u_2 \in [a, b]$ gælder følgende:

$$u_1 \neq u_2 \text{ medfører at } \mathbf{r}(u_1) \neq \mathbf{r}(u_2). \quad (22-9)$$

||| Opgave 22.15

Hvilke af parameterfremstillingerne i figurerne ??, ??, og ??, henholdsvis i eksemplerne ??, ??, og ??, er en-entydige?

||| Opgave 22.16

Vis, at Definition ?? giver samme længde for de tre parametriseringer af linjestykket i figur ??, samme længde af de to cirkelstykker i figur ?? og samme længde af de to skruelinjer i figur ??.

||| Opgave 22.17

Find længden (med 3 decimaler) af knuden i figur ??.

||| Opgave 22.18

Find regulære, en-entydige parameterfremstillinger af linjestykket (figur ??), cirklen (figur ??), og skruelinjen (figur ??), således at alle parameterfremstillingerne har det fælles parameterinterval $[0, \pi]$.

22.1.1 Motivering af kurveintegralet

Hvis vi deler intervallet $[a, b]$ i n lige store dele, så har hvert delinterval længden $\delta_u = (b - a)/n$ og delepunkternes koordinater i $[a, b]$ bliver:

$$\begin{aligned} u_1 &= a, \\ u_2 &= u_1 + \delta_u = a + \delta_u, \\ u_3 &= u_2 + \delta_u = a + 2\delta_u, \\ u_4 &= u_3 + \delta_u = a + 3\delta_u, \\ &\dots \\ b &= u_n + \delta_u = a + n\delta_u . \end{aligned} \tag{22-10}$$

Med hver af disse fast valgte værdier af u_i som udviklingspunkt kan vi nu bruge Taylor's grænseformel for hver af de 3 koordinat-funktioner $x(u)$, $y(u)$, og $z(u)$ for $\mathbf{r}(u) = (x(u), y(u), z(u))$ til første orden og med de tilhørende epsilon-funktioner som følger, se eNote 17:

$$\begin{aligned} x(u) &= x(u_i) + x'(u_i)(u - u_i) + \varepsilon_x(u - u_i) \cdot |u - u_i| \\ y(u) &= y(u_i) + y'(u_i)(u - u_i) + \varepsilon_y(u - u_i) \cdot |u - u_i| \\ z(u) &= z(u_i) + z'(u_i)(u - u_i) + \varepsilon_z(u - u_i) \cdot |u - u_i| . \end{aligned} \tag{22-11}$$

Disse 3 formler kan vi samle og udtrykke med vektor-notation således:

$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{r}(u_i) + \mathbf{r}'(u_i) \cdot (u - u_i) + \boldsymbol{\varepsilon}_i(u - u_i) \cdot \rho_i , \tag{22-12}$$

hvor vi bruger den korte skrivemåde $\rho_i = |u - u_i| = \sqrt{(u - u_i)^2}$ for afstanden mellem den variable værdi u og den faste værdi u_i i parameterintervallet. Desuden gælder at vektoren $\boldsymbol{\varepsilon}_i(u - u_i) = (\varepsilon_x(u - u_i), \varepsilon_y(u - u_i), \varepsilon_z(u - u_i)) \rightarrow (0, 0, 0) = \mathbf{0}$ for $u \rightarrow u_i$.

Hvert del-interval $[u_i, u_i + \delta_u]$ fra u -aksen afbildes på kurve-stykket $\mathbf{r}(u)$, $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$, og dette kurve-stykke kan vi approksimere med den lineære del af udtrykket i (??), som fås ved at fjerne $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ -bidraget fra højre side i (??):

$$\mathbf{r}_{app_i}(u) = \mathbf{r}(u_i) + \mathbf{r}'(u_i) \cdot (u - u_i) , \quad u \in [u_i, u_i + \delta_u] . \tag{22-13}$$

Se figurerne ?? og ?? hvor de approksimerende linjestykker er vist for en parametriseret cirkel, for to forskellige parametriseringer og for forskellige værdier af n . Det i 'te linjestykke har pr. definition kontakt med kurven i sit ene endepunkt. Det kalder vi kontaktpunktet for linjestykket.

Længden af en kurve

Hvert enkelt af de i alt n approksimerende linjestykker har en længde, se Figur ???. Længden af det i 'te linjestykke er ifølge (??)

$$\Delta L_i = |\mathbf{r}_{\text{app}}_i(u_i + \delta_u) - \mathbf{r}_{\text{app}}_i(u_i)| = |\mathbf{r}'(u_i)| \cdot \delta_u . \quad (22-14)$$

Summen af disse n længder er (for store værdier af n) klart en god approksimation til længden af kurven, således at vi kan skrive

$$L_{\text{app}}(n) = \sum_{i=1}^n \Delta L_i = \sum_{i=1}^n |\mathbf{r}'(u_i)| \cdot \delta_u , \quad (22-15)$$

Da ovenstående sum er en integralsum (se eNote ??) for den kontinuerte funktion $|\mathbf{r}'(u)|$ over intervallet $[a, b]$, opnås i grænsen, hvor n går imod uendelig:

$$L_{\text{app}}(n) \rightarrow L = \int_a^b |\mathbf{r}'(u)| du \quad \text{for } n \rightarrow \infty . \quad (22-16)$$

Vi har dermed motiveret definitionen af længden af en kurve som angivet ovenfor, nemlig som kurveintegralet af den konstante funktion 1 over den parametriserede kurve.

Masse, vægten af en kurve med massetæthed

Hvis vi antager, at hvert enkelt linjestykke i (??) tildeles en konstant massetæthed givet ved værdien af funktionen $f(x, y, z)$ i linjestykrets kontaktpunkt med kurven, så får vi massen af det i 'te linjestykke:

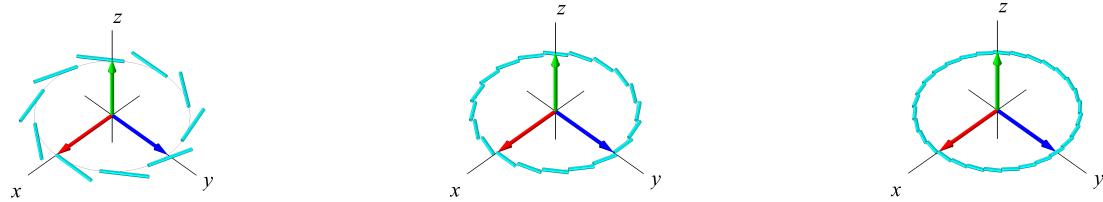
$$\Delta M_i = f(x(u_i), y(u_i), z(u_i)) |\mathbf{r}'(u_i)| \cdot \delta_u = f(\mathbf{r}(u_i)) |\mathbf{r}'(u_i)| \cdot \delta_u .$$

Den totale masse af hele systemet af linjestykker er derfor følgende, som er en god approksimation til massen af hele kurven, når kurven tildeles massetæden $f(\mathbf{r}(u))$ på stedet $\mathbf{r}(u)$:

$$M_{\text{app}}(n) = \sum_{i=1}^n \Delta M_i = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}(u_i)) |\mathbf{r}'(u_i)| \cdot \delta_u . \quad (22-17)$$

Dette er igen en integralsum, men nu for den kontinuerte funktion $f(\mathbf{r}(u)) |\mathbf{r}'(u)|$ over intervallet $[a, b]$. Vi får altså i grænsen, hvor n går mod uendelig:

$$M_{\text{app}}(n) \rightarrow M = \int_a^b f(\mathbf{r}(u)) |\mathbf{r}'(u)| du \quad \text{for } n \rightarrow \infty . \quad (22-18)$$



Figur 22.8: Kurven $\mathbf{r}(u) = (\cos(2\pi u), \sin(2\pi u), 0)$, $u \in [-1, 1]$, med henholdsvis 10, 20, og 30 approksimerende linjestykker. Det er rimeligt at definere længden af kurven som den totale længde af de approksimerende linjestykker i den grænse hvor antallet af linjestykker går mod uendelig.

Dermed har vi motiveret definitionen af massen af en kurve med massetætheden $f(\mathbf{r}(u))$ (for så vidt denne funktion er positiv i $[a, b]$) og dermed den generelle definition af kurveintegraler, Definition ??.

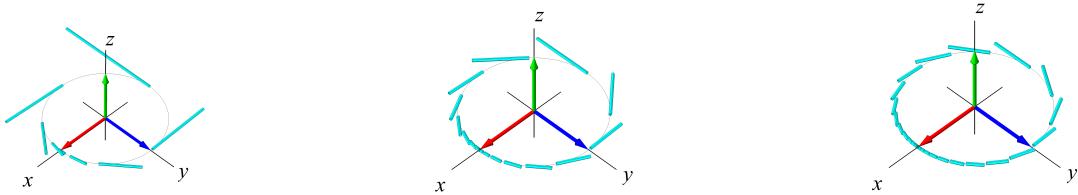
22.2 Planintegraler

Et parametreret område i planen er givet ved en parameterfremstilling

$$P_{\mathbf{r}}: \quad \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad u \in [a, b] , \quad v \in [c, d] \quad , \quad (22-19)$$

hvor $x(u, v)$ og $y(u, v)$ er givne (typisk glatte) funktioner af de to parameter-variable u og v .

Planintegraler opstilles, betegnes, og beregnes helt analogt til kurveintegralerne:



Figur 22.9: Kurven $\mathbf{r}(u) = (\cos(2\pi u^3), \sin(2\pi u^3), 0)$, $u \in [-1, 1]$, med henholdsvis 30, 60 og 100 approksimerende linjestykker. Det er stadig rimeligt at definere længden af kurven som den totale længde af de approksimerende linjestykker i den grænse hvor antallet af approksimerende linjestykker går mod uendelig.

||| Definition 22.19 Planintegral

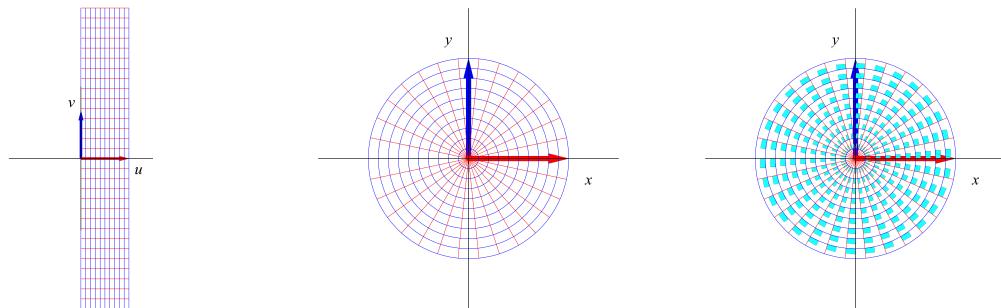
Lad $f(x, y)$ betegne en kontinuert funktion på \mathbb{R}^2 . Planintegralet af funktionen f over det parametriserede område $P_{\mathbf{r}}$ defineres ved

$$\int_{P_{\mathbf{r}}} f d\mu = \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) du dv , \quad (22-20)$$

hvor Jacobi-funktionen $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$,

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = |\mathbf{r}'_u(u, v)| \cdot |\mathbf{r}'_v(u, v)| \cdot \sin(\theta(u, v)) , \quad (22-21)$$

er arealet af det parallelogram i planen, der på stedet $\mathbf{r}(u, v)$ udspændes af de to tangentvektorer $\mathbf{r}'_u(u, v)$ og $\mathbf{r}'_v(u, v)$ til de respektive koordinatkurver igennem punktet $\mathbf{r}(u, v)$ i planen (funktionen $\theta(u, v) \in [0, \pi]$ betegner vinklen mellem disse tangentvektorer).



Figur 22.10: Dette område i planen er givet ved følgende parameterfremstilling, der repræsenterer *polære koordinater* i planen: $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v))$, $u \in [0, 1]$, $v \in [-\pi, \pi]$. Parameterrettanglet ses til venstre. Den deformeres og afbides (ved brug af \mathbf{r}) på det plane område i midten. Til højre er antydet placeringen og størrelsen (pånær en faktor 4) af de til det givne net hørende approksimerende平行四边形 (her er der tale om rettangler).

||| Definition 22.20 Regulær parameterfremstilling for et område i planen

Parameterfremstillingen (??) siges at være en *regulær parameterfremstilling* for det plane område hvis der gælder følgende:

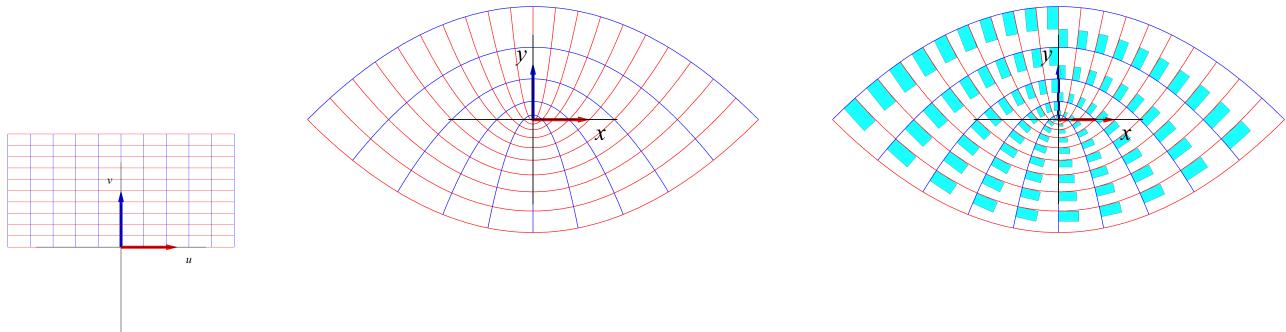
$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) > 0 \quad \text{for alle } u \in [a, b], v \in [c, d]. \quad (22-22)$$

||| Definition 22.21 En-entydig parameterfremstilling

Som for parametrerede kurver siges parameterfremstillingen i (??) at være en-entydig hvis forskellige punkter i definitionsmængden afbildes i forskellige punkter i billedmængden i planen.

||| Opgave 22.22

Vis, at $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$ (i (??)) også kan findes som den numeriske værdi af determinanten af den (2×2) -matrix, der som søjler har koordinaterne for de to vektorer $\mathbf{r}'_u(u, v)$ og $\mathbf{r}'_v(u, v)$.



Figur 22.11: Plant område med parabelkoordinater. Dette område i planen er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v) = (u v, \frac{1}{2}(u^2 - v^2))$, $u \in [-2, 2]$, $v \in [0, 2]$. Figuren til højre antyder igen et system af areal-approksimerende parallelogrammer på nær faktor 4.

||| Eksempel 22.23 Standard graf-afgrænset område

Lad $f(x)$ betegne en positiv funktion på et x -interval $[a, b]$. Så kan vi parametrise området imellem x -aksen og grafen for funktionen $f(x)$ på følgende simple måde:

$$P_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u, v) = (u, v \cdot f(u)) , \quad u \in [a, b] , \quad v \in [0, 1] . \quad (22-23)$$

Se figur ?? (hvor funktionen $f(x) = 1 + x + x^2$ er benyttet til illustration). Til bestemmelse af arealet af området imellem grafen for $f(x)$ og x -aksen har vi nu helt generelt:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = f(u) , \quad (22-24)$$

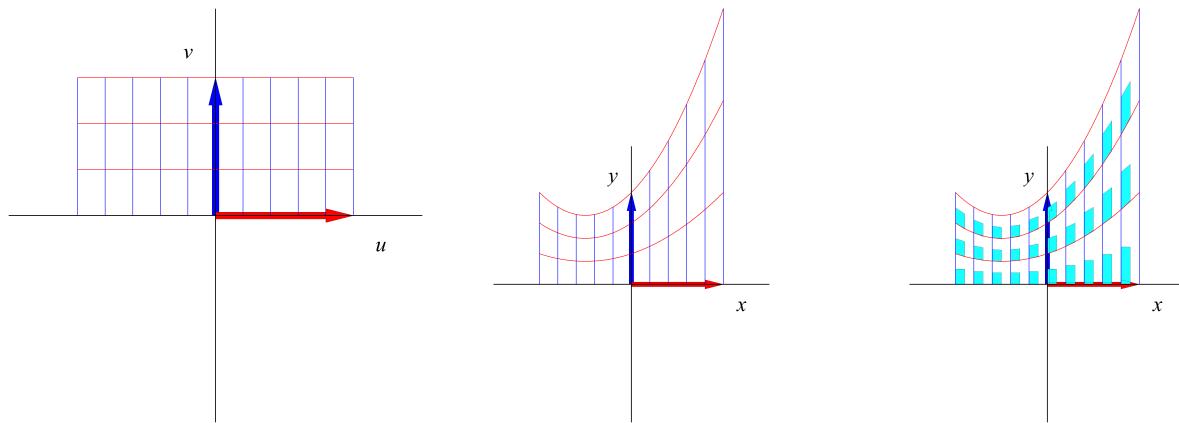
fordi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_u(u, v) &= (1, v \cdot f'(u)) \quad \text{og} \\ \mathbf{r}'_v(u, v) &= (0, f(u)) , \end{aligned} \quad (22-25)$$

sådan at determinanten af den matrix, der har søjlerne $\mathbf{r}'_u(u, v)$ og $\mathbf{r}'_v(u, v)$, netop i dette tilfælde er funktionen $f(u)$ selv og dermed er også Jacobifunktionen givet ved $f(u)$ ifølge opgave ???. Heraf fås det ønskede areal rekonstrueret som:

$$\begin{aligned} \text{Areal}(P_{\mathbf{r}}) &= \int_{P_{\mathbf{r}}} 1 d\mu = \int_0^1 \left(\int_a^b f(u) du \right) dv \\ &= \int_a^b f(u) du . \end{aligned} \quad (22-26)$$

Overvej, hvad der sker med integralet i ??, hvis $f(x)$ tillades at være negativ på givne delintervaller af $[a, b]$.



Figur 22.12: Parametrisering af området imellem x -aksen og grafen for funktionen $f(x) = 1 + x + x^2$. Se eksempel ??.

||| Eksempel 22.24 Elliptisk område

Det parametriserede elliptiske område i planen (se figur ??)

$$P_r : \mathbf{r}(u, v) = (av \cos(u), bv \sin(u)) , \quad u \in [-\pi, \pi] , \quad v \in [0, 1] .$$

har arealet

$$\text{Areal}(P_r) = \int_{P_r} 1 d\mu = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} abv \, du \, dv = ab\pi \quad ,$$

idet $\text{Jacobi}_r(u, v) = abv$. Sammenlign med beregningen af længden af ellipsen i eksempel ??.

||| Opgave 22.25 Niveau-afgrænset elliptisk område

Et elliptisk område i planen er afgrænset af niveaukurven $\mathcal{K}_0(f)$ for andengradspolynomiet

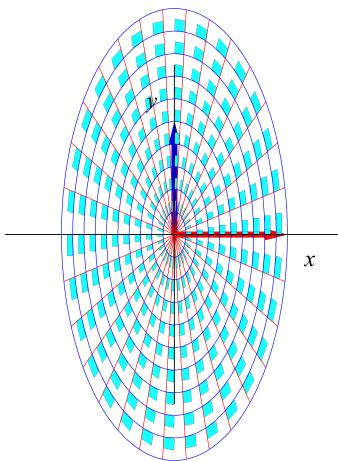
$$f(x, y) = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot x \cdot y - 8 \cdot x - 10 \cdot y + 13 \quad . \quad (22-27)$$

Bestem længden af niveaukurven og bestem arealet af det afgrænsede elliptiske område i (x, y) -planen. Se figur ???. Vink: eksempel 20.1 i eNote 20.

||| Eksempel 22.26 Spiral-område

Det parametriserede spiral-afgrænsede område i planen (se Figur ??)

$$P_r : \mathbf{r}(u, v) = (vu \cos(u), vu \sin(u)) , \quad u \in [0, \pi/2] , \quad v \in [0, 1] .$$



Figur 22.13: Et elliptisk område i planen med halvakser $a = 1$ og $b = 2$. Se eksempel ???.
Bemærk, at de approksimerende parallelogrammer (her vist skalerede) ikke er rektangler.

har arealet

$$\text{Areal}(P_r) = \int_{P_r} 1 d\mu = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} v^2 u \, du \, dv = \pi^3 / 48 ,$$

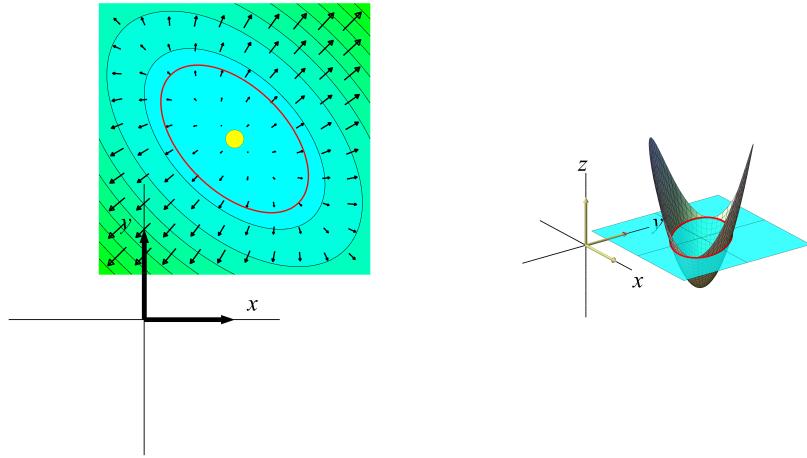
idet $\text{Jacobi}_r(u, v) = v^2 u$. Sammenlign med beregningen af længden af spiralen i eksempel ???.

22.2.1 Motivering af plan-integralet

Hvis vi i analogi med opstillingen af kurveintegralet deler *begge* parameter-intervallerne $[a, b]$ og $[c, d]$ i henholdsvis n og m lige store dele, så har hvert u -delinterval længden $\delta_u = (b - a)/n$ og hvert v -delinterval har længden $\delta_v = (d - c)/m$. Tilsvarende bliver delepunkternes koordinater i (u, v) -parameterområdet (som jo er rektanglet $[a, b] \times [c, d]$ i \mathbb{R}^2) - jvf. eNote 20:

$$\begin{aligned}
 (u_1, v_1) &= (a, c), \\
 (u_1, v_j) &= (a, c + (j - 1)\delta_v), \\
 (u_i, v_1) &= (a + (i - 1)\delta_u, c), \\
 (u_i, v_j) &= (a + (i - 1)\delta_u, c + (j - 1)\delta_v), \\
 &\dots \\
 (b, d) &= (a + n\delta_u, c + m\delta_v) .
 \end{aligned} \tag{22-28}$$

Med hvert af disse faste punkter (u_i, v_j) som udviklingspunkt kan vi igen benytte Taylor's grænseformel, nu for hver af de 2 koordinat-funktioner $x(u, v)$ og $y(u, v)$ for $\mathbf{r}(u, v) =$



Figur 22.14: Et elliptisk område i planen er afgrænset af en ellipse som er niveaukurven $\mathcal{K}_0(f)$ for andengradspolynomiet $f(x, y) = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot x \cdot y - 8 \cdot x - 10 \cdot y + 13$. Se opgave ?? og eksempel 20.1 i eNote 20.

$(x(u, v), y(u, v))$ til første orden med tilhørende epsilon-funktioner:

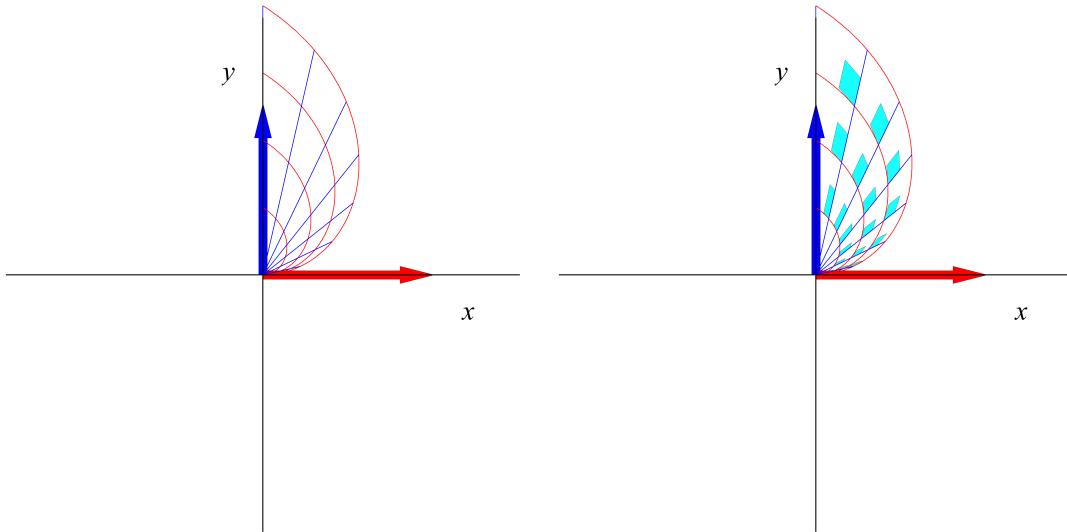
$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= \mathbf{r}(u_i, v_j) \\ &+ \mathbf{r}'_u(u_i, v_j) \cdot (u - u_i) \\ &+ \mathbf{r}'_v(u_i, v_j) \cdot (v - v_j) \\ &+ \rho_{ij} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(u - u_i, v - v_j) , \end{aligned} \quad (22-29)$$

hvor $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$, $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$. Her betegner $\rho_{ij} = \sqrt{(u - u_i)^2 + (v - v_j)^2}$ afstanden mellem det variable punkt (u, v) og det faste udviklingspunkt (u_i, v_j) i parameterområdet. Der gælder her, at vektorfunktionen $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(u - u_i, v - v_j) \rightarrow (0, 0) = \mathbf{0}$ for $(u - u_i, v - v_j) \rightarrow (0, 0)$.

Hvert del-rektangel $[u_i, u_i + \delta_u] \times [v_j, v_j + \delta_v]$ afbordes på det plane del-område, som vi kan angive med $\mathbf{r}(u, v)$ evalueret i parameter-del-rektanglet $u \in [u_i, u_i + \delta_u], v \in [v_j, v_j + \delta_v]$ og dette delområde af det plane område kan vi approksimere med den lineære del af udtrykket i (??), som igen netop fås ved at fjerne $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ -bidraget fra højre side i (??):

$$\mathbf{r}_{\text{app}}_{ij}(u, v) = \mathbf{r}(u_i, v_j) + \mathbf{r}'_u(u_i, v_j) \cdot (u - u_i) + \mathbf{r}'_v(u_i, v_j) \cdot (v - v_j) , \quad (22-30)$$

hvor u og v stadig gennemløber del-intervallerne $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$, $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$. Disse lineære approksimationer er parallelogrammer, som udspændes af de to tangentvektorer $\mathbf{r}'_u(u_i, v_j) \cdot \delta_u$ og $\mathbf{r}'_v(u_i, v_j) \cdot \delta_v$.



Figur 22.15: Et spiral-afgrænset område i planen. Se eksempel ??.

Areal af plant område

Hvert enkelt af de i alt $n \cdot m$ approksimerende平行四邊形 har et areal. Arealet af det (i, j) 'te parallelogram er givet ved

$$\begin{aligned}\Delta \text{Areal}_{ij} &= |\mathbf{r}'_u(u_i, v_j)| \cdot |\mathbf{r}'_v(u_i, v_j)| \sin(\theta(u_i, v_j)) \cdot \delta_u \cdot \delta_v \\ &= \text{Jacobi}_\mathbf{r}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \cdot \delta_v .\end{aligned}\quad (22-31)$$

||| Opgave 22.27

Bevis denne påstand: Arealet af et平行四邊形 er produktet af længderne af de to udspændende vektorer og sinus til den mellemliggende vinkel. Se eNote 6

Summen af disse i alt $n m$ arealer er klart en god approksimation til arealet af hele fladestykket, således at vi har

$$\text{Areal}_{\text{app}}(n, m) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \Delta \text{Areal}_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \text{Jacobi}_\mathbf{r}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v . \quad (22-32)$$

Da ovenstående sum er en dobbelt integralsum for den kontinuerte funktion $\text{Jacobi}_\mathbf{r}(u, v)$ over parameter-rektanglet $[a, b] \times [c, d]$ får vi i grænsen, hvor n og m begge går mod uendelig (se eNote ??):

$$\text{Areal}_{\text{app}}(n, m) \rightarrow \text{Areal} = \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_\mathbf{r}(u, v) du dv \quad \text{for } n, m \rightarrow \infty . \quad (22-33)$$

Dette er begrundelsen for definitionen af arealet af et parametriseret område i planen som angivet ovenfor, nemlig som fladeintegralet af den konstante funktion 1.

Massen, vægten af et plant område

Hvis vi nu antager, at hvert enkelt parallelogram i (??) tildeles en konstant massetæthed givet ved værdien af funktionen $f(x, y)$ i parallelogrammets kontaktpunkt med fladen, så får vi massen af det (i, j) 'te parallelogram :

$$\begin{aligned}\Delta M_{ij} &= f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v \\ &= f(\mathbf{r}(u_i, v_j)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v .\end{aligned}\quad (22-34)$$

Den totale masse af hele systemet af parallelogrammer er derfor følgende, som er en god approksimation til massen af hele det plane område når dette gives massetætheden $f(\mathbf{r}(u, v))$ i punktet $\mathbf{r}(u, v)$.

$$M_{\text{app}}(n, m) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \Delta M_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}(u_i, v_j)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v . \quad (22-35)$$

Dette er en dobbelt integralsum for den kontinuerte funktion $f(\mathbf{r}(u, v)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$ over parameter-rektanglet $[a, b] \times [c, d]$. Vi får altså i grænsen, hvor n og m går mod uendelig:

$$M_{\text{app}}(n, m) \rightarrow M = \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) du dv \quad \text{for } n, m \rightarrow \infty . \quad (22-36)$$

Dermed har vi motiveret definitionen af massen af et parametriseret område i planen med massetætheden $f(\mathbf{r}(u, v))$ og dermed også den generelle definition af planintegral, definition ??.

||| Eksempel 22.28 Total vægt af ring-område

Lad $f(x, y) = 1 + x$ være vægtfunktion på det plane område i (x, y) -planen der er afgrænset af x -aksen og de to øvre halvcirkelbuer af cirklerne med radius henholdsvis 1 og $1/2$, begge med centrum i $(0, 0)$, se figur ???. En parametrisering af området er for eksempel:

$$P_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u, v) = (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v)) , \quad \text{hvor } u \in [1/2, 1] , \quad v \in [0, \pi] . \quad (22-37)$$

Når området er vægtet med vægtfunktionen $f(x, y)$ bliver den totale vægt af området:

$$M(P_{\mathbf{r}}) = \int_{P_{\mathbf{r}}} f d\mu = \int_0^\pi \int_{1/2}^1 f(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) du dv , \quad (22-38)$$

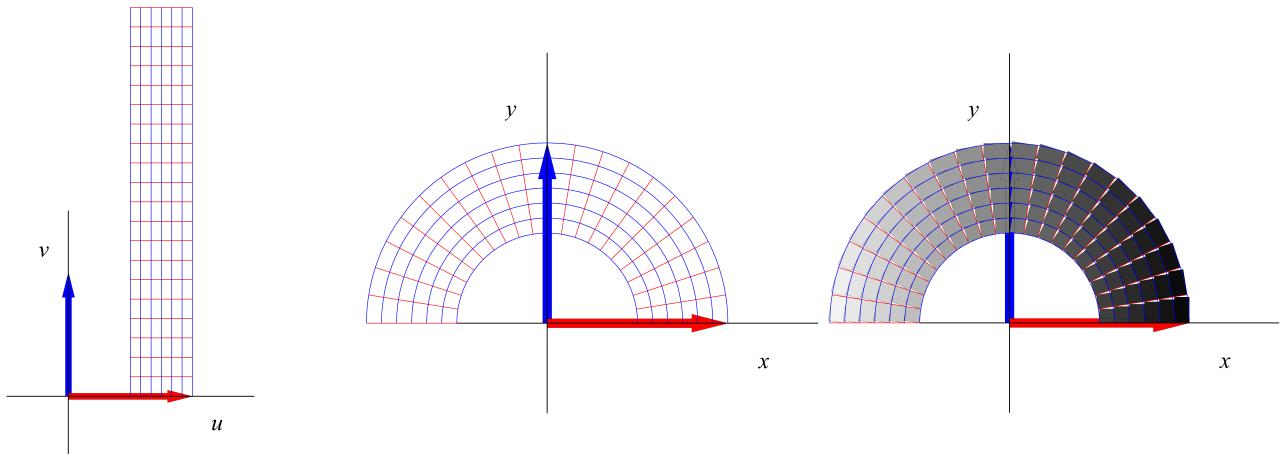
hvor

$$\begin{aligned}f(\mathbf{r}(u, v)) &= 1 + x(u, v) = 1 + u \cdot \cos(v) \quad \text{og} \\ \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) &= u ,\end{aligned}\quad (22-39)$$

sådan at

$$\begin{aligned}
 M(P_r) &= \int_0^\pi \int_{1/2}^1 (1 + u \cdot \cos(v)) \cdot u \, du \, dv \\
 &= \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 \cdot \cos(v) \right]_{u=1/2}^{u=1} \, dv \\
 &= \int_0^\pi \left(\frac{3}{8} + \frac{7}{24} \cdot \cos(v) \right) \, dv \\
 &= \left[\frac{3}{8}v + \frac{7}{24} \cdot \sin(v) \right]_{v=0}^{v=\pi} \\
 &= \frac{3}{8} \cdot \pi \quad .
 \end{aligned} \tag{22-40}$$

Den totale masse af området med den givne vægtfordeling er altså $M(P_r) = 3\pi/8$. Til sammenligning er arealet af området jo også $\text{Areal}(P_r) = 3\pi/8$ – men det er et tilfælde.



Figur 22.16: Et (halvt) ring-område i planen med antydet vægtfordeling. Se eksempel ??.

22.3 Opsummering

Vi har i denne eNote opstillet de begreber og metoder, der giver os præcise udtryk for længder af kurver, arealer af plane områder og mere generelt kurve- og plan-integraler af (vægt-)funktioner på kurver og plane områder, der er parametriserede ud fra henholdsvis et interval eller et rektangulært parameter-område. Kurve- og plan-integralerne er opstillet ved hjælp af de respektive Jacobi-funktioner, som angiver hvor meget parameterintervallet eller parameter-området lokalt deformeres når det afbordes over i den ønskede kurve eller over i det ønskede plane område ved de valgte vektor-afbildninger $\mathbf{r}(u)$ og $\mathbf{r}(u, v)$.

- For en rum-kurve K_r med parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u) = (x(u), y(u), z(u))$ har vi følgende motiverede kurveintegral af funktionen $f(x, y, z)$ over rumkurven:

$$\int_{K_r} f d\mu = \int_a^b f(\mathbf{r}(u)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u) du , \quad (22-41)$$

hvor Jacobi-funktionen $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u)$ er givet ved længden af parametriseringens tangentvektor:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u) = |\mathbf{r}'(u)| . \quad (22-42)$$

- For et plant område P_r med parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ har vi ligeledes motiveret følgende definition af planintegralet af funktionen $f(x, y)$ over området:

$$\int_{P_r} f d\mu = \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) du dv , \quad (22-43)$$

hvor Jacobi-funktionen $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$ nu er givet ved parallelogram-arealet udspændt af koordinatkurvernes tangentvektorer:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = |\mathbf{r}'_u(u, v)| \cdot |\mathbf{r}'_v(u, v)| \cdot \sin(\theta(u, v)) , \quad (22-44)$$

hvor $\theta(u, v) \in [0, \pi]$ betegner vinklen mellem de to tangentvektorer $\mathbf{r}'_u(u, v)$ og $\mathbf{r}'_v(u, v)$.