

|||| eNote 18

Taylor's grænseformel for funktioner af to variable

I eNote ?? har vi studeret Taylor's grænseformel for én variabel og fundet approksimerende polynomier af vilkårlig høj grad til givne funktioner. For funktioner af to variable gælder en tilsvarende formel, som vi dog vil nøjes med at udvikle til approksimation med andengrads-polynomier. Vi kan også her benytte Taylor's grænseformel til at undersøge funktionsværdierne i og omkring ethvert punkt hvor funktionen er glat. Specielt vil vi i første omgang benytte formlen for funktioner af to variable til at finde og undersøge lokale og globale minima og maksima for funktionerne.

18.1 Højere-ordens afledede

Vi vil i denne eNote undersøge funktioner $f(x, y)$ af to variable i et område M som er en delmængde af definitionsmængden for $f(x, y)$ i planen, $M \subset \mathcal{D}f \subset \mathbb{R}^2$.

Vi vil antage, at funktionen kan differentieres partielt vilkårligt mange gange, altså at alle de afledede funktioner eksisterer for ethvert (x, y) i det indre af M : $f'_x(x, y), f'_y(x, y), f''_{xx}(x, y), f''_{xy}(x, y), f''_{yy}(x, y), f'''_{xyx}(x, y)$ osv. Disse højere afledede vil vi bruge til at konstruere (koefficienterne i) de approksimerende polynomier af to variable præcis på samme måde som vi konstruerede dem for funktioner af én variabel.

|||| Definition 18.1

Hvis en funktion $f(x, y)$ kan differentieres partielt vilkårligt mange gange i ethvert punkt (x, y) i det indre $\overset{\circ}{M}$ af et givet område M i planen, så siger vi, at funktionen er *glat* i $\overset{\circ}{M}$.

||| Eksempel 18.2 Højere-ordens afledeede af nogle elementære funktioner

Her er nogle første- og anden-ordens afledeede af nogle kendte funktioner af to variable. Læg mærke til, at $f''_{yx}(x, y)$ ikke optræder eksplisit i tabellen – det er fordi $f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y)$ for alle (x, y) når funktionerne er glatte, som antaget, se eNote ???. Funktionen $\rho_{(0,0)}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ betegner afstandsfunktionen fra $(0, 0)$ til (x, y) ; den er kun glat for $(x, y) \neq (0, 0)$ som det også fremgår af de viste første- og anden-ordens partielle afledeede af $\rho_{(0,0)}(x, y)$ i tabellen. Funktionen $\rho_{(0,0)}^2(x, y) = x^2 + y^2$ er derimod (som det også fremgår af tabellen) en glat funktion i hele definitionsområdet, dvs. for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Det er kvadratet på afstanden fra et *vilkårligt punkt* (x_0, y_0) tilsvarende også, dvs. funktionen:

$$\rho_{(x_0, y_0)}^2(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 .$$

$f(x, y)$	$f'_x(x, y)$	$f'_y(x, y)$	$f''_{xx}(x, y)$	$f''_{xy}(x, y)$	$f''_{yy}(x, y)$
e^x	e^x	0	e^x	0	0
e^{x+y}	e^{x+y}	e^{x+y}	e^{x+y}	e^{x+y}	e^{x+y}
$e^{x^2+y^2}$	$2 \cdot x \cdot e^{x^2+y^2}$	$2 \cdot y \cdot e^{x^2+y^2}$	$(2 + 4 \cdot x^2) \cdot e^{x^2+y^2}$	$4 \cdot x \cdot y \cdot e^{x^2+y^2}$	$(2 + 4 \cdot y^2) \cdot e^{x^2+y^2}$
$e^{x \cdot y}$	$y \cdot e^{x \cdot y}$	$x \cdot e^{x \cdot y}$	$y^2 \cdot e^{x \cdot y}$	$e^{x \cdot y} + x \cdot y \cdot e^{x \cdot y}$	$x^2 \cdot e^{x \cdot y}$
$\rho_{(0,0)}(x, y)$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$	$-\frac{x \cdot y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$	$\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$
$\rho_{(0,0)}^2(x, y)$	$2 \cdot x$	$2 \cdot y$	2	0	2
$\rho_{(x_0, y_0)}^2(x, y)$	$2 \cdot (x - x_0)$	$2 \cdot (y - y_0)$	2	0	2

I eksemplet 18.2 ovenfor er de partielle afledeede sat på linje i tabellen. I det følgende viser det sig smart at *samle* eller *pakke* de partielle afledeede, dels de to første-ordens afledeede til en vektor, gradientvektoren for $f(x, y)$ i (x_0, y_0) , som også indføres og benyttes i eNote ???:

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)) , \quad (18-1)$$

og dels de tre anden-ordensafledeede i en matrix $\mathbf{H}f(x_0, y_0)$ – den såkaldte Hesse-matrix for funktionen $f(x, y)$ i punktet (x_0, y_0) , som er bestemt ved

$$\mathbf{H}f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} . \quad (18-2)$$



Bemærk specielt at denne matrix er symmetrisk fordi $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$. Den har derfor nogle særlige egenskaber, som er afgørende i den geometriske analyse af funktioner til anden orden.

||| Eksempel 18.3 Gradienter og Hesse-matricer

Ud fra tabellen aflæser vi følgende gradienter og Hesse-matricer for de givne elementære glatte funktioner i punktet (x_0, y_0) :

$f(x, y)$	$\nabla f(x, y)$	$\mathbf{H}f(x, y)$
e^x	$(e^x, 0)$	$\begin{bmatrix} e^x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
e^{x+y}	(e^{x+y}, e^{x+y})	$\begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{bmatrix}$
$\rho_{(0,0)}^2(x, y) = x^2 + y^2$	$(2 \cdot x, 2 \cdot y)$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
$(x - x_0) \cdot \rho_{(x_0, y_0)}^2(x, y)$	$(3 \cdot (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, 2 \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0))$	$\begin{bmatrix} 6 \cdot (x - x_0) & 2 \cdot (y - y_0) \\ 2 \cdot (y - y_0) & 2 \cdot (x - x_0) \end{bmatrix}$



Bemærk, at funktionen $f(x, y) = (x - x_0) \cdot \rho_{(x_0, y_0)}^2(x, y)$ har gradientvektoren $\mathbf{0}$ og Hesse-matricen $\mathbf{0}$ når de udregnes i selve basispunktet (x_0, y_0) for afstandsfunktionen $\rho_{(x_0, y_0)}(x, y)$.

||| Opgave 18.4

Bestem gradierten $\nabla f(x, y)$ og Hesse-matricen $\mathbf{H}f(x, y)$ i ethvert punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ for hver af følgende funktioner:

$$f(x, y) = \cos(x + y) , \quad f(x, y) = \cos(x \cdot y) , \quad f(x, y) = x^3 + y^2 + x \cdot y . \quad (18-3)$$

18.2 Approksimation af funktioner af to variable

Vi vil nu sammenligne funktionen $f(x, y)$ med et vilkårligt andengrads-polynomium i de to variable x og y og bestemme koefficienterne i polynomiet ved at kræve, at forskellen skal være lille i og omkring punktet x_0 .

Det polynomium, vi vil afprøve og sammenligne med, er følgende:

$$\begin{aligned} & a + b_1 \cdot (x - x_0) + b_2 \cdot (y - y_0) \\ & + \left(\frac{h_{11}}{2} \right) \cdot (x - x_0)^2 + h_{12} \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + \left(\frac{h_{22}}{2} \right) \cdot (y - y_0)^2 . \end{aligned} \quad (18-4)$$

Vi vil vælge koefficienterne $a, b_1, b_2, h_{11}, h_{12}$, og h_{22} , så præcise at restfunktionen $R(x, y) = R_{2,(x_0, y_0)}(x, y)$ i forhold til $f(x, y)$ bliver så (numerisk) lille som muligt i og omkring

punktet (x_0, y_0) – på samme måde som vi motiverede Taylor's formler for funktioner af én variabel i eNote ??:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a + b_1 \cdot (x - x_0) + b_2 \cdot (y - y_0) \\ &+ \left(\frac{h_{11}}{2} \right) \cdot (x - x_0)^2 + h_{12} \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + \left(\frac{h_{22}}{2} \right) \cdot (y - y_0)^2 \quad (18-5) \\ &+ R(x, y) . \end{aligned}$$



Det polynomium af anden grad, som vi prøver at approksimere med i (18-5), er et helt generelt andengradspolynomium; *ethvert* andengradspolynomium kan skrives på denne form også selv om værdierne af x_0 og y_0 er givet på forhånd. Bemærk, at der er 6 koefficienter, der endnu ikke er bestemt: $a, b_1, b_2, h_{11}, h_{12}$, og h_{22} . Og mængden af andengradspolynomier i to variable er netop et 6-dimensionalt vektorrum!

Kunsten er at finde de bedste værdier af disse 6 koefficienter, således at $R(x, y)$ bliver numerisk lille i og tæt på punktet (x_0, y_0) .

Restfunktionen $R(x, y)$ kan skrives som forskellen mellem $f(x, y)$ og polynomiet:

$$\begin{aligned} R(x, y) &= f(x, y) - a - b_1 \cdot (x - x_0) - b_2 \cdot (y - y_0) \\ &- \left(\frac{h_{11}}{2} \right) \cdot (x - x_0)^2 - h_{12} \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) - \left(\frac{h_{22}}{2} \right) \cdot (y - y_0)^2 . \quad (18-6) \end{aligned}$$

Vi vil nu stille følgende naturlige krav til restfunktionen – krav som sikrer, at restfunktionen er meget lille i og omkring (x_0, y_0) og dermed, at *polynomiet* vi får frem på den måde er meget tæt på funktionen $f(x, y)$.

Det første krav er naturligvis, at restfunktionen er 0 i (x_0, y_0) . Vi indsætter kravet i ligningen (18-6) og får:

$$R(x_0, y_0) = 0 \text{ giver } 0 = f(x_0, y_0) - a , \quad (18-7)$$

hvormed konstantleddet i det approksimerende polynomium allerede er bestemt:

$$a = f(x_0, y_0) . \quad (18-8)$$

Det næste krav er selvfølgelig at $R'_x(x_0, y_0) = R'_y(x_0, y_0) = 0$ således at $\nabla R(x_0, y_0) = (0, 0)$, hvilket geometrisk betyder, at grafen for restfunktionen har vandret tangentplan – identisk med (x, y) -planen – i (x_0, y_0) . Indsættes disse krav til $R(x, y)$ i ligningen (18-6) får vi at

$$R'_x(x_0, y_0) = 0 \text{ som giver } 0 = f'_x(x_0, y_0) - b_1 , \quad (18-9)$$

$$R'_y(x_0, y_0) = 0 \text{ som giver } 0 = f'_y(x_0, y_0) - b_2 ,$$

hvorfed koefficienterne $b_1 = f'_x(x_0, y_0)$ og $b_2 = f'_y(x_0, y_0)$ også er bestemte. Vi har:

$$(b_1, b_2) = \nabla f(x_0, y_0) . \quad (18-10)$$

Det sidste krav til $R(x, y)$ vi vil anvende er at alle de tre anden-ordens partielle afledede af $R(x, y)$ også er 0 i (x_0, y_0) :

Indsættes disse 3 krav til $R(x, y)$ i ligningen (18-6) får vi at

$$R''_{xx}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{som giver} \quad 0 = f''_{xx}(x_0, y_0) - h_{11} ,$$

$$R''_{xy}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{som giver} \quad 0 = f''_{xy}(x_0, y_0) - h_{12} , \quad (18-11)$$

$$R''_{yy}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{som giver} \quad 0 = f''_{yy}(x_0, y_0) - h_{22} .$$

Dermed er de sidste 3 koefficienter i det søgte polynomium fundet.

Vi kan skrive resultatet således – når vi stadig husker på, at $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0) = h_{12}$:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} = \mathbf{H}f(x_0, y_0) . \quad (18-12)$$

Vi har dermed indset, at de stillede krav til restfunktionen *kan opfyldes*, og at det resulterende andengradspolynomium, der opfylder kravene, derefter netop fortjener at blive kaldt *det approksimerende polynomium af anden grad* for $f(x, y)$ med udviklingspunkt (x_0, y_0) :

||| Definition 18.5 Approksimerende andengrads-polynomium

Lad $f(x, y)$ betegne en glat funktion i et område M i \mathbb{R}^2 som indeholder punktet $(x_0, y_0) \in M$. Polynomiet

$$\begin{aligned} P_{2,(x_0,y_0)}(x, y) &= f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 \\ &\quad + f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2 \end{aligned} \quad (18-13)$$

kaldes det *approksimerende polynomium* af anden grad for funktionen $f(x, y)$ med udviklingspunkt (x_0, y_0) .

Ligesom for funktioner af én variabel er det nu rimeligt at forvente, at med de benyttede krav til restfunktionen $R(x, y) = R_{2,(x_0, y_0)}(x, y)$ må den være numerisk sammenlignelig med en *potens af afstandsfunktionen* $\rho_{(x_0, y_0)}(x, y)$ til det betragtede punkt (x_0, y_0) . For eksempel kan vi se af det sidste eksempel i 18.3 at alle de krav, vi har stillet til $R(x, y)$, er opfyldte for funktionen $(x - x_0) \cdot \rho_{(x_0, y_0)}^2(x, y)$.

Det er præcis indholdet af følgende sætning som udtrykker netop dette ved hjælp af en epsilonfunktion, som selvfølgelig sædvanligvis ikke er så simpel som $(x - x_0)$:

||| Hjælpesætning 18.6 Restfunktion med epsilon-led

Givet en glat funktion $f(x, y)$. Så kan restfunktionen $R_{2,(x_0, y_0)}(x, y)$ skrives på følgende form:

$$R_{2,(x_0, y_0)}(x, y) = \rho_{(x_0, y_0)}^2(x, y) \cdot \varepsilon_f(x - x_0, y - y_0) , \quad (18-14)$$

hvor $\varepsilon_f(x - x_0, y - y_0)$ er en epsilonfunktion af $(x - x_0, y - y_0)$, dvs.

$$\varepsilon_f(x - x_0, y - y_0) \rightarrow 0 \quad \text{for} \quad (x, y) \rightarrow (x_0, y_0) . \quad (18-15)$$

Vi har nu alle ingredienserne til hovedsætningen i denne eNote:

||| Sætning 18.7 Taylor's grænseformel for funktioner af to variable

Enhver glat funktion $f(x, y)$ af to variable kan opdeles i et approksimerende andengrads-polynomium med givet udviklingspunkt (x_0, y_0) og en restfunktion med epsilon-led således:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= P_{2,(x_0, y_0)}(x, y) + R_{2,(x_0, y_0)}(x, y) \\ &= f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 \\ &\quad + f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2 \\ &\quad + \rho_{(x_0, y_0)}^2(x, y) \cdot \varepsilon_f(x - x_0, y - y_0) . \end{aligned} \quad (18-16)$$

Ved at bruge gradienten af $f(x, y)$ og Hesse-matricen for $f(x, y)$ kan vi skrive Taylor's grænseformel (18-16) på en mere kompakt form, som vi vil benytte i det følgende med henblik på den geometriske analyse af $f(x, y)$ i og omkring udviklingspunktet (x_0, y_0) :

||| Sætning 18.8 Taylor's grænseformel, kompakt, geometrisk

Enhver glat funktion $f(x, y)$ af to variable er en sum af et approksimerende andengrads-polynomium med givet udviklingspunkt (x_0, y_0) og en restfunktion således:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{H}f(x_0, y_0) \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \rho_{(x_0, y_0)}^2(x, y) \cdot \varepsilon_f(x - x_0, y - y_0), \end{aligned} \quad (18-17)$$

hvor

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)) \quad \text{og}$$

$$\mathbf{H}f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}. \quad (18-18)$$

||| Bevis

En direkte udregningen af følgende matrixprodukt viser, at (18-17) er ækvivalent med (18-16), og det er det eneste nye i sætningen:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{H}f(x_0, y_0) \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \\ &= f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 \\ &\quad + 2 \cdot f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) \\ &\quad + f''_{yy}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2. \end{aligned} \quad (18-19)$$

Det approksimerende andengrads-polynomium for $f(x, y)$ med udviklingspunkt (x_0, y_0)

er derfor på kompakt form:

$$\begin{aligned} P_{2,(x_0,y_0)}(x,y) &= f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot [x - x_0 \ y - y_0] \cdot Hf(x_0, y_0) \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (18-20)$$

Læg mærke til, at det approksimerende førstegrads-polynomium for $f(x, y)$ netop er den *lineære del* (lineariseringen) af det approksimerende andengrads-polynomium:



$$P_{1,(x_0,y_0)}(x,y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0). \quad (18-21)$$

I eNote ?? har vi set, at den geometriske tolkning af $P_{1,(x_0,y_0)}(x,y)$ er at grafen for det approksimerende førstegrads-polynomium $P_{1,(x_0,y_0)}(x,y)$ (dvs. planen $z = P_{1,(x_0,y_0)}(x,y)$ i (x, y, z) -rummet), netop er *tangentplanen til graf-fladen* for $f(x, y)$ i punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

||| Definition 18.9 Stationære punkter for funktioner af to variable

Lad $f(x, y)$ betegne en glat funktion i et område M i $Dm(f) \subset \mathbb{R}^2$. Ved et **stationært punkt** for $f(x, y)$ vil vi forstå ethvert punkt (x_0, y_0) i M hvor gradienten for $f(x, y)$ er $(0, 0)$.

I et stationært punkt for $f(x, y)$ har vi altså:

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)) = (0, 0) . \quad (18-22)$$



Geometrisk betyder definition 18.9, at (x_0, y_0) er et stationært punkt i M for $f(x, y)$ hvis tangentplanen til grafen for $f(x, y)$ igennem punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ er vandret, altså parallel med (x, y) -planen, således at enheds-normalvektoren til graf-fladen i punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ er $\mathbf{N}_{(x_0,y_0)}(f) = (0, 0, 1)$.

18.3 Funktionsundersøgelser

Ligesom for kontinuerte funktioner af én variabel gælder det for kontinuerte funktioner af to variable, at hvis det aktuelle område for funktionsundersøgelsen er tilstrækkelig

pæn, så er funktionsværdierne $f(x, y)$ begrænsede i området:

||| Sætning 18.10 Hovedsætning for kontinuerte funktioner af to variable

Lad $f(x, y)$ betegne en funktion som er kontinuert i hele sin definitionsmængde $\mathcal{D}m(f) \subset \mathbb{R}^2$. Lad M være en begrænset, afsluttet, og sammenhængende mængde i $\mathcal{D}m(f)$.

Så er værdimængden for funktionen $f(x, y)$ i mængden M et begrænset, afsluttet, og sammenhængende interval $[A, B] \subset \mathbb{R}$. Vi kan skrive således:

$$\mathcal{V}m(f|_M) = f(M) = \{f(x) \mid x \in M\} = [A, B] , \quad (18-23)$$

hvor der stadig tillades den mulighed at $A = B$ og det sker naturligvis netop når $f(x, y)$ er konstant i hele M .

Præcis som for funktioner af én variabel definerer vi nu:

||| Definition 18.11 Globalt minimum og globalt maksimum

Når en funktion $f(x, y)$ har værdimængden $\mathcal{V}m(f|_M) = f(M) = [A, B]$ i en mængde M siger vi, at

1. A er den *globale minimumværdi* for $f(x, y)$ i M , og hvis $f(x_0, y_0) = A$ for $(x_0, y_0) \in M$ så er (x_0, y_0) et *globalt minimumpunkt* for $f(x, y)$ i M .
2. B er den *globale maksimumværdi* for $f(x, y)$ i M , og hvis $f(x_0, y_0) = B$ for $(x_0, y_0) \in M$ så er (x_0, y_0) et *globalt maksimumpunkt* for $f(x, y)$ i M .

En helt naturlig og meget ofte forekommende opgave går ud på at finde de globale maksimum- og minimum-værdier for givne funktioner $f(x, y)$ i givne mængder og områder M i \mathbb{R}^2 og samtidig dermed at bestemme de (x, y) -punkter i M for hvilke disse maksimum- og minimum-værdier *antages* – altså bestemme minimum- og maksimum-punkterne.

For at løse den opgave er følgende igen en uvurderlig hjælp (på samme måde som ved undersøgelsen af funktioner af én variabel):

||| Hjælpestning 18.12 Maksima og minima i stationære punkter

Lad (x_0, y_0) være et globalt maksimum- eller minimum-punkt for $f(x, y)$ i M .

Antag, at (x_0, y_0) ikke er et punkt på randen af området M , dvs. vi antager, at (x_0, y_0) er et indre punkt i M . Antag yderligere, at $f(x, y)$ er differentiabel i punktet (x_0, y_0) .

Så er (x_0, y_0) et **stationært punkt** for $f(x, y)$ i $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{M}$:

$$(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)) = \nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0} = (0, 0) \quad . \quad (18-24)$$

||| Bevis

Beviset følger det tilsvarende argument for funktioner af én variabel. Kort fortalt: Hvis $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ så stiger funktionsværdierne effektivt i retningen $\nabla f(x_0, y_0)$ fra (x_0, y_0) og funktionsværdierne aftager effektivt i den modsatte retning $-\nabla f(x_0, y_0)$ fra (x_0, y_0) og (x_0, y_0) kan i så fald hverken være et minimum- eller et maksimum-punkt.

Hermed har vi undersøgelsesmetoden for funktioner af to variable:

||| Metode 18.13 Undersøgelsesmetode

Lad $f(x, y)$ være en kontinuert funktion og M et afsluttet, begrænset, og sammenhængende område i definitionsmængden $Dm(f) \subset \mathbb{R}^2$.

Maksimum- og minimum-værdierne for funktionen $f(x, y)$, altså A og B i værdimængden $[A, B]$ for $f(x, y)$ i M findes ved at finde og sammenligne funktionsværdierne i følgende punkter:

1. Randpunkterne for mængden M .
2. Undtagelsespunkter, dvs. de punkter i det indre af M hvor funktionen $f(x, y)$ ikke er differentiabel.
3. De stationære punkter, dvs. samtlige de punkter (x_0, y_0) i det indre af M hvor funktionen $f(x, y)$ er differentiabel og $(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)) = \nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0} = (0, 0)$.



Ved denne undersøgelsesmetode findes naturligvis ikke blot de globale maksimum- og minimum-værdier A og B men også de (x, y) -punkter i $M \subset \mathbb{R}^2$ for hvilke det globale maksimum B og det globale minimum A antages, altså maksimum- og minimum-punkterne i det aktuelle område.

||| Eksempel 18.14 Funktionsundersøgelse, værdimængde

Lad $f(x, y) = 1 + x^2 - x \cdot y^2$. Vi vil undersøge funktionen i det afsluttede begrænsede cirkulære område M i planen som er afgrænset af cirklen med radius 1 og centrum i $(0, 0)$, se figur 18.1.

$$\nabla f(x, y) = (2 \cdot x + y^2, 2 \cdot y \cdot x) . \quad (18-25)$$

Funktionen er differentiabel i hele sin definitionsmængde $Dm(f) = \mathbb{R}^2$. I det indre af M , som er den åbne cirkelskive med radius 1 og centrum i $(0, 0)$ har funktionen netop ét stationært punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ og værdien af $f(x_0, y_0)$ er $f(0, 0) = 1$. Da der ikke er undtagelsespunkter for $f(x, y)$ i den åbne cirkelskive mangler vi blot at undersøge funktionen på randen af området, altså funktionsværdierne på cirklen med radius 1 og centrum i $(0, 0)$. Vi parametriserer den aktuelle cirkel i planen på sædvanlig måde:

$$\mathbf{r}(u) = (\cos(u), \sin(u)) , \quad u \in [-\pi, \pi] , \quad (18-26)$$

og indsætter cirklens punkter i funktionsudtrykket og får dermed følgende sammensatte funktion, som angiver funktionsværdierne på cirklen når u gennemløber intervallet $[-\pi, \pi]$:

$$h(u) = f(\mathbf{r}(u)) = 1 + \cos^2(u) - \cos(u) \cdot \sin^2(u) . \quad (18-27)$$

Vi differentierer $h(u)$ og finder:

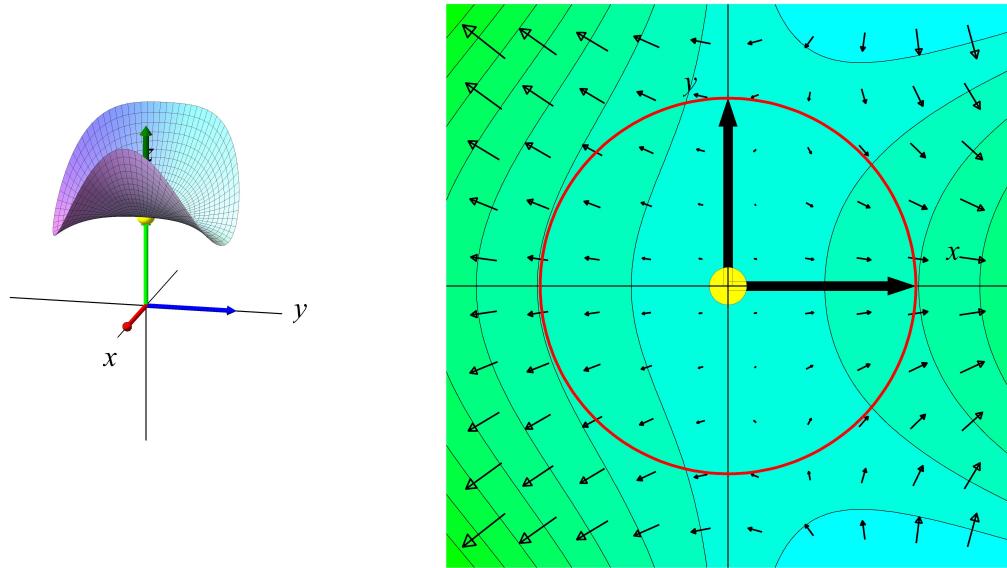
$$h'(u) = -\sin(u) \cdot (2 \cdot \cos(u) + 3 \cdot \cos^2(u) - 1) \quad (18-28)$$

som giver $h'(u) = 0$ for $u = 0, u = \pm\pi$, og $u = \pm \arccos(1/3)$. I disse stationære punkter for funktionen $h(u)$ antager $h(u)$ værdierne: $h(0) = 2$, $h(\pm\pi) = 2$, og $h(\pm \arccos(1/3)) = 22/27$.

Ved at sammenligne alle kandidatværdierne for henholdsvis maksimum- og minimumværdi for $f(x, y)$ som givet ved metoden 18.13 konkluderer vi, at værdimængden for $f(x, y)$ i den givne cirkelskive er:

$$f(M) = \left[\frac{22}{27}, 2 \right] , \quad (18-29)$$

og maksimumspunkter og minimumspunkter findes alle på randen af cirkelområdet og er henholdsvis: maksimumspunkterne er $(\cos(0), \sin(0)) = (1, 0)$ og $(\cos(\pm\pi), \sin(\pm\pi)) = (-1, 0)$ og minimumspunkterne er $(\cos(\pm \arccos(1/3)), \sin(\pm \arccos(1/3))) = (1/3, \pm 2\sqrt{2}/3)$.



Figur 18.1: Grafen for funktionen $f(x, y) = 1 + x^2 - x \cdot y^2$. Til højre inspiceres niveaukurver og gradientvektorfeltet for funktionen. Den røde cirkel er randen af det cirkulære område, der betragtes i eksempel 18.14. Det ses, at gradientvektorfeltet for $f(x, y)$ er *orthogonal på cirklen* præcis i de 4 fundne punkter hvor 'højde'-funktionen $h(u)$ har $h'(u) = 0$ nemlig $(\pm 1, 0)$ og $(1/3, \pm 2\sqrt{2}/3)$.

||| Definition 18.15 Lokale minima og lokale maksima

Lad $f(x, y)$ betegne en funktion i et område M som indeholder et givet indre punkt $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{M}$.

- Hvis $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ for alle (x, y) i en (gerne lille) omegn om (x_0, y_0) dvs. for alle (x, y) tilstrækkelig tæt på (x_0, y_0) , så kaldes $f(x_0, y_0)$ en **lokalt minimumsværdi** for $f(x, y)$ i M , og (x_0, y_0) er et **lokalt minimumspunkt** for $f(x, y)$ i M . Hvis der faktisk gælder $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ for alle (x, y) i omegnen fraregnet punktet (x_0, y_0) selv, så kaldes $f(x_0, y_0)$ en **egentlig lokal minimumsværdi**.
- Hvis $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ for alle (x, y) i en (gerne lille) omegn om (x_0, y_0) , så kaldes $f(x_0, y_0)$ en **lokalt maksimumsværdi** for $f(x, y)$ i M , og (x_0, y_0) er et **lokalt maksimumspunkt** for $f(x, y)$ i M . Hvis der faktisk gælder at $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ for alle (x, y) i omegnen (fraregnet (x_0, y_0) selv), så kaldes $f(x_0, y_0)$ en **egentlig lokal maksimumsværdi**.

18.4 Speciel undersøgelse i stationære punkter

Hvis den funktion vi vil undersøge er glat i sine stationære punkter, så kan vi kvalificere metoden 18.13 endnu bedre, idet det approksimerende andengrads-polynomium med udviklingspunkt i et stationært punkt (x_0, y_0) kan hjælpe med at afgøre, om værdien af $f(x, y)$ i det stationære punkt er en kandidat til at være en global maksimumsværdi eller global minimumsværdi.



Et egentligt lokalt minimumspunkt i det indre af M kan begrænset vis ikke være et globalt maksimumspunkt for $f(x, y)$ i M og et egentligt lokalt maksimumspunkt i det indre af M kan ikke være et globalt minimumspunkt for $f(x, y)$ i M .

Til den lokale analyse af $f(x, y)$ omkring et stationært punkt vil vi bruge *egenværdierne* for Hesse-matricen $\mathbf{H}f(x_0, y_0)$ for $f(x, y)$ i det stationære punkt. Som nævnt er symmetrien af $\mathbf{H}f(x_0, y_0)$ en vigtig egenskab, for som vi nu skal se betyder det, at $\mathbf{H}f(x_0, y_0)$ kan *diagonaliseres ved en similartransformation*, som indført og behandlet i eNote 10.

Følgende sætning om symmetriske matricer er også helt central for rigtig mange andre anvendelser. Som det vises i eNote 19 kan resultatet generaliseres til vilkårlige symmetriske matricer. For 2×2 -matricer er beviset rimelig simpelt, så vi går igennem begründelserne nedenfor – som en opvarmning til det generelle resultat.

||| Sætning 18.16 Diagonalisering af symmetriske 2×2 -matricer

Enhver symmetrisk 2×2 -matrix \mathbf{A} har reelle egenværdier λ_1 og λ_2 og \mathbf{A} kan diagonaliseres ved en 2×2 -similartransformation \mathbf{D} (basisskiftematrix) hvori de to søjlevektorer er ortogonale enheds-eigenvektorer for \mathbf{A} .

Det betyder at $\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}^\top$ og

$$\begin{aligned}\Lambda &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A} &= \mathbf{D} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{D}^\top, \text{ og} \\ \Lambda &= \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{D}^\top \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{D}.\end{aligned}\tag{18-30}$$

||| Bevis

For det første kan vi direkte se, at enhver symmetrisk 2×2 -matrix har *reelle egenværdier*: Det karakteristiske polynomium for den symmetriske matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad (18-31)$$

er

$$\mathbf{K}_\mathbf{A}(\lambda) = (a - \lambda) \cdot (c - \lambda) - b^2 = \lambda^2 - \lambda \cdot (a + c) + (a \cdot c - b^2) , \quad (18-32)$$

der har rødderne (egenværdierne)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left(a + c + \sqrt{(a - c)^2 + 4 \cdot b^2} \right) \quad \text{og} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left(a + c - \sqrt{(a - c)^2 + 4 \cdot b^2} \right) , \end{aligned} \quad (18-33)$$

som begge er reelle tal.

De to egenværdier er ens netop når $a = c$ og $b = 0$, dvs. når \mathbf{A} allerede er på diagonalform og er et produkt af enhedsmatricen – muligvis $\mathbf{0}$ -matricen. I de tilfælde kan vi vælge $\mathbf{D} = \mathbf{E}$.

Hvis $\lambda_1 \neq \lambda_2$ får vi også direkte fra eNote 10, sætning 10.4, at der *findes* en similartransformation \mathbf{D} der diagonaliserer \mathbf{A} :

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} . \quad (18-34)$$

Søjlevektorerne i \mathbf{D} er egenvektorer \mathbf{v}_1 og \mathbf{v}_2 hørende til henholdsvis λ_1 og λ_2 .

Vi vil vise, at \mathbf{v}_1 og \mathbf{v}_2 er ortogonale vektorer. Da \mathbf{A} er symmetrisk har vi

$$\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{v}_1) ; \quad (18-35)$$

det kan ses ved en direkte udregning med vilkårlige vektorer \mathbf{v}_1 og \mathbf{v}_2 .

Da \mathbf{v}_1 er en egentlig egenvektor for \mathbf{A} hørende til λ_1 og tilsvarende \mathbf{v}_2 er en egentlig egenvektor for \mathbf{A} hørende til λ_2 har vi derfor:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{v}_2 &= \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{A}\mathbf{v}_1 &= \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 , \end{aligned} \quad (18-36)$$

som indsatt i (18-35) giver:

$$\lambda_2 \cdot \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 , \quad (18-37)$$

således at

$$(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) = 0 . \quad (18-38)$$

Da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ kan denne ligning kun være opfyldt for $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. De to egenvektorer er altså ortogonale som påstået i sætningen.

Vi kan dernæst gerne antage, at de to egenvektorer \mathbf{v}_1 og \mathbf{v}_2 er enhedsvektorer – ellers dividerer vi blot med deres respektive længder, og det ændrer ikke deres ”egenvektor-egenskab”.

De to enhedsegenvektorer benyttes som søjlevекторne i similartransformationsmatricen D , som dermed opfylder følgende ligning :

$$\mathbf{D}^\top \cdot \mathbf{D} = \mathbf{E} , \quad (18-39)$$

og dermed

$$\mathbf{D}^\top = \mathbf{D}^{-1} \quad (18-40)$$

som ønsket og påstået i sætningen .

■

Specielt er egenværdierne for Hesse-matricen altid to reelle tal og det er disse egenværdier vi nu vil benytte som hjælp til at afgøre, om et givet stationært punkt er et egentligt maksimum- eller minimum-punkt.

||| Hjælpestøtte 18.17 Lokal analyse omkring et stationært punkt

Lad $f(x, y)$ være en glat funktion og antag, at (x_0, y_0) er et stationært punkt for $f(x, y)$ i et åbent område $M \subset Dm(f) \subset \mathbb{R}^2$. Lad $\lambda_1(x_0, y_0)$ og $\lambda_2(x_0, y_0)$ betegne egenværdierne for Hesse-matricen for $f(x, y)$ i (x_0, y_0) . Så gælder følgende:

1. Hvis $\lambda_1(x_0, y_0) > 0$ og $\lambda_2(x_0, y_0) > 0$ så er $f(x_0, y_0)$ en egentlig lokal minimumsværdi for $f(x, y)$.
2. Hvis $\lambda_1(x_0, y_0) < 0$ og $\lambda_2(x_0, y_0) < 0$ så er $f(x_0, y_0)$ en egentlig lokal maksimumsværdi for $f(x, y)$.
3. Hvis $\lambda_1(x_0, y_0) \cdot \lambda_2(x_0, y_0) < 0$ så er $f(x_0, y_0)$ hverken lokal minimumsværdi eller lokal maksimumsværdi for $f(x, y)$.
4. Hvis $\lambda_1(x_0, y_0) \cdot \lambda_2(x_0, y_0) = 0$ så er dette ikke tilstrækkelig information til at sikre at $f(x_0, y_0)$ er lokal minimumsværdi eller lokal maksimumsværdi for $f(x, y)$.

||| Bevis

Fra Taylor's grænseformel har vi i det stationære punkt følgende fremstilling af $f(x, y)$:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{H}f(x_0, y_0) \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + R_2(x, y). \quad (18-41)$$

Vi diagonaliserer $\mathbf{H}f(x_0, y_0)$ med similartransformationen \mathbf{D} , jvf. sætning 18.16, sådan at

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{D} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + R_2(x, y) \\ &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{D} \right) \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \left(\mathbf{D}^\top \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \right) + R_2(x, y), \end{aligned} \quad (18-42)$$

hvor vi bemærker, at følgende to vektorer er ens (pånær transponeringen)

$$\left(\begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{D} \right)^\top = \left(\mathbf{D}^\top \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}. \quad (18-43)$$

Det vil sige vi kan skrive på kort form:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + R_2(x, y) \\ &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \cdot (\lambda_1 \cdot \alpha^2 + \lambda_2 \cdot \beta^2) + R_2(x, y) \end{aligned} \quad (18-44)$$

Hvis både λ_1 og λ_2 er positive og $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$ får direkte heraf at:

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) + \lambda_2 \cdot (\alpha^2 + \beta^2) + R_2(x, y). \quad (18-45)$$

Men vi har også, at $\alpha^2 + \beta^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ fordi \mathbf{D} er så skikkelig:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= \left(\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \cdot \mathbf{D}^\top \right) \cdot \left(\mathbf{D} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \\ &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \\ &= \rho_{(x_0, y_0)}^2(x, y). \end{aligned} \quad (18-46)$$

Hvis vi dernæst indfører restfunktionen $R_2(x, y)$ med epsilon-led, får vi sluttelig:

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) + \rho_{(x_0, y_0)}^2(x, y) \cdot (\lambda_2 + \varepsilon_f(x - x_0, y - y_0)). \quad (18-47)$$

Vi kan hermed konkludere, at for alle (x, y) tilstrækkelig tæt på (men forskellig fra) udviklingspunktet (x_0, y_0) er $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ fordi $\lambda_2 > 0$ og $\varepsilon_f(x - x_0, y - y_0) \rightarrow 0$ for $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$.

Tilsvarende kan naturligvis sluttes, at $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ for alle punkter (x, y) tilstrækkeligt tæt på (men forskellig fra) (x_0, y_0) hvis begge egenværdierne er negative.

Hvis $\lambda_1 > 0$ og $\lambda_2 < 0$ så kan vi benytte (18-44) direkte med $\beta = 0$ henholdsvis $\alpha = 0$ og derved opnå værdier af $f(x, y)$ som er større henholdsvis mindre end $f(x_0, y_0)$ for de tilsvarende punkter (x, y) tilstrækkeligt tæt på (men forskellig fra) (x_0, y_0) således at $f(x_0, y_0)$ ikke kan være hverken lokal minimum- eller maksimum-værdi. Tilsvarende konklusion fås på samme måde for $\lambda_1 < 0$ og $\lambda_2 > 0$. Og det var det, vi skulle vise. ■

Man kunne måske forledes til at tro, at hvis blot alle andenordens-afleddede af $f(x, y)$ er positive i et stationært punkt (x_0, y_0) så må funktionen have et egentligt minimumpunkt i (x_0, y_0) . Men så simpelt er det ikke. For eksempel har følgende Hesse-matrix ikke positive egenværdier selv om alle elementerne er positive:

$$\mathbf{H}f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} . \quad (18-48)$$

Egenværdierne er henholdsvis $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_2 = -1$, så ifølge hjælpesætningen 18.17 kan vi konkludere, at eventuelt stationært punkt for $f(x, y)$ ikke er hverken et lokalt maksimum- eller minimum-punkt for $f(x, y)$.



Den viste matrix er den *konstante* Hesse-matrix for funktionen

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2 + 4 \cdot x \cdot y) . \quad (18-49)$$

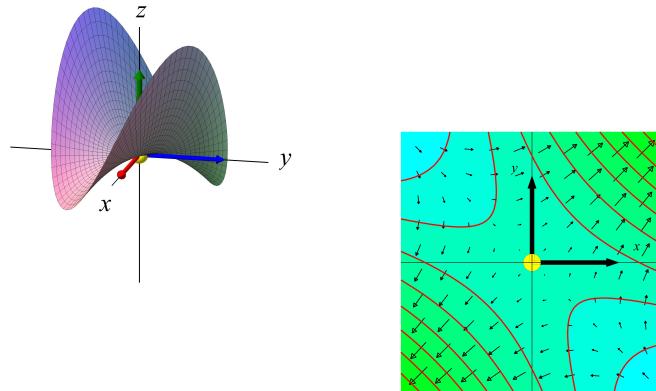
Funktionen har klart et stationært punkt i $(x_0, y_0) = (0, 0)$ men tydeligvis ikke noget egentligt minimumpunkt i $(0, 0)$, som det også fremgår af figur 18.2. Den betragtede funktion er sit eget approksimerende polynomium af anden grad med udviklingspunkt i $(0, 0)$.

||| Eksempel 18.18 Inspektion af stationært punkt

Lad funktionen $f(x, y)$ være givet ved

$$f(x, y) = x^3 + y^2 + x \cdot y , \quad \nabla f(x, y) = (3 \cdot x^2 + y, x + 2 \cdot y) , \quad \mathbf{H}f(x, y) = \begin{bmatrix} 6 \cdot x & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

Så er $(0, 0)$ et stationært punkt for $f(x, y)$ og egenværdierne for $\mathbf{H}f(0, 0)$ er henholdsvis $\lambda_1(x_0, y_0) = 1 + \sqrt{2} > 0$ og $\lambda_2(x_0, y_0) = 1 - \sqrt{2} < 0$. Se figur 18.3. Der er tydeligvis hverken lokalt minimum eller lokalt maksimum i det stationære punkt i overensstemmelse med hjælpesætning 18.17.



Figur 18.2: Grafen for funktionen $f(x,y) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2 + 4 \cdot x \cdot y)$ er vist til venstre og funktionens niveaukurver med gradientvektorfelt til højre.

||| Opgave 18.19

Funktionen $f(x,y) = x^3 + y^2 + x \cdot y$ som vi undersøgte i eksempel 18.18 har også et stationært punkt i $(x_0, y_0) = (1/12, -1/24)$. Undersøg, om dette stationære punkt er et lokalt maksimum eller et lokalt minimum eller ingen af delene for $f(x,y)$.

||| Eksempel 18.20 Inspektion af stationært punkt

Lad funktionen $f(x,y)$ være givet med følgende data i \mathbb{R}^2 :

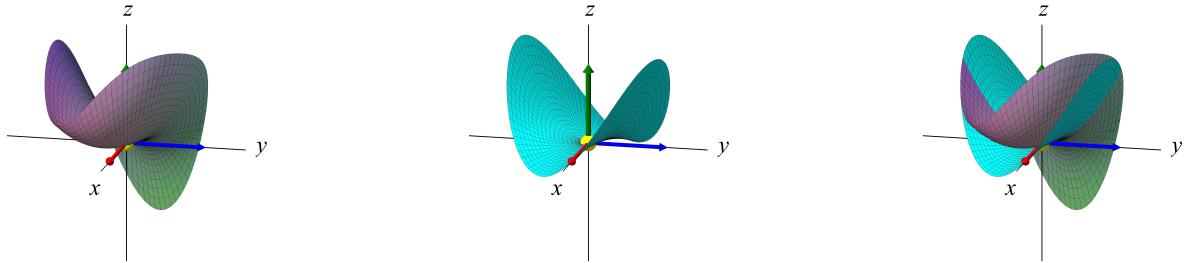
$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sin(x) \cdot \cos(x \cdot y) , \\ \nabla f(x,y) &= (\cos(x) \cos(x \cdot y) - y \cdot \sin(x) \cdot \sin(x \cdot y), -x \cdot \sin(x) \cdot \sin(x \cdot y)) . \end{aligned} \quad (18-50)$$

Så er $(x_0, y_0) = (\pi/2, 0)$ et stationært punkt for $f(x,y)$ og i det punkt har vi

$$\mathbf{H}f(\pi/2, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\pi^2/4 \end{bmatrix} \quad (18-51)$$

I det stationære punkt har Hesse-matricen således egenværdierne -1 og $-\pi^2/4$. Vi konkluderer, at det stationære punkt er et egentligt lokalt maksimumspunkt for $f(x,y)$ i overensstemmelse med inspektion af figur 18.5 – og i overensstemmelse med hjælpesætning 18.17. Det approksimerende andengradspolynomium for $f(x,y)$ med udviklingspunkt i det stationære punkt $(x_0, y_0) = (\pi/2, 0)$ er:

$$\begin{aligned} P_{2,(\pi/2,0)}(x,y) &= 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot y^2 \\ &= \left(1 - \frac{\pi^2}{8} \right) + \frac{\pi}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{\pi^2}{8} \cdot y^2 . \end{aligned} \quad (18-52)$$



Figur 18.3: Grafen for funktionen $f(x,y) = x^3 + y^2 + x \cdot y$ er vist til venstre, grafen for det approksimerende andengrads-polynomium med udviklingspunkt $(0,0)$ er vist i midten, begge i samme plot til højre.

||| Eksempel 18.21 Inspektion af stationært punkt

Lad funktionen $f(x,y)$ være givet med følgende data i \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1 + x^2 + (1-y)^2 + x \cdot y \quad , \\ \nabla f(x,y) &= (2 \cdot x + y, 2 \cdot y - 2 + x) \quad . \end{aligned} \tag{18-53}$$

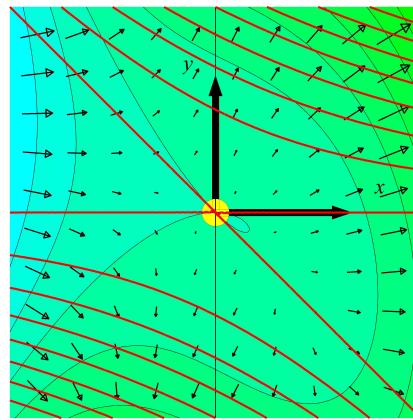
Så er $(x_0, y_0) = (-2/3, 4/3)$ et stationært punkt for $f(x,y)$ og i det punkt har vi som i alle andre punkter

$$Hf(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{18-54}$$

I det stationære punkt har Hesse-matricen således egenværdierne 3 og 1. Vi konkluderer, at det stationære punkt er et egentligt lokalt minimumspunkt for $f(x,y)$ i overensstemmelse med inspektion af figur 18.6 og i overensstemmelse med hjælpesætning 18.17.

Det approksimerende andengradspolynomium for $f(x,y)$ med udviklingspunkt i det stationære punkt $(x_0, y_0) = (\pi/2, 0)$ er funktionen selv:

$$P_{2,(-2/3,4/3)}(x,y) = f(x,y) \quad . \tag{18-55}$$



Figur 18.4: Niveaumkurver (sorte) og gradientvektorfeltet for funktionen $f(x, y) = x^3 + y^2 + x \cdot y$ sammen med nogle niveaumkurver (røde) for det approksimerende andengrads-polynomium for $f(x, y)$ omkring det stationære punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

||| Eksempel 18.22 Inspektion af stationært punkt

Lad funktionen $f(x, y)$ være givet med følgende data i \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2} \cdot \sin(\pi \cdot x^2 + \pi \cdot y^2) , \\ \nabla f(x, y) &= (\pi \cdot x \cdot \cos(\pi \cdot x^2 + \pi \cdot y^2), \pi \cdot y \cdot \cos(\pi \cdot x^2 + \pi \cdot y^2)) . \end{aligned} \quad (18-56)$$

Så er $(x_0, y_0) = (0, 1/\sqrt{2})$ et (blandt rigtig mange) stationært punkt for $f(x, y)$ og i det punkt har vi

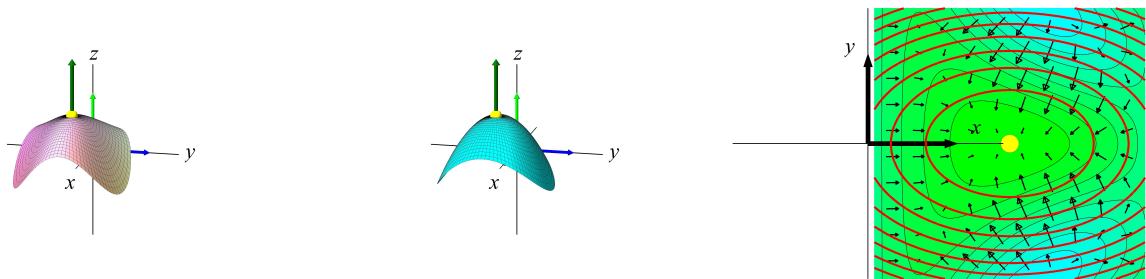
$$Hf(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\pi^2 \end{bmatrix} \quad (18-57)$$

I det stationære punkt har Hesse-matricen således egenværdierne 0 og $-\pi^2$. Hjælpestætning 18.17 kan derfor ikke afgøre, om vi har lokalt maksimum eller minimum i punktet. Men da $f(0, 1/\sqrt{2}) = 1/2$, som er den maksimale værdi $f(x, y)$ kan antage, så er $(0, 1/\sqrt{2})$ et lokalt maksimumspunkt for $f(x, y)$ men det er ikke et egentligt lokalt maksimumspunkt fordi alle punkter på hele cirklen $x^2 + y^2 = 1/2$ er også lokale maksimumspunkter for $f(x, y)$. Se også figur 18.7.

||| Eksempel 18.23 Inspektion af stationært punkt

Vi ser på en funktion $f(x, y)$ som er defineret ved

$$f(x, y) = \frac{1}{5} \cdot (1 - (1 - y)^2 - x^2) \cdot (4 - (2 - y)^2 - x^2) . \quad (18-58)$$



Figur 18.5: Til venstre: Grafen for funktionen $f(x,y) = \sin(x) \cdot \cos(x \cdot y)$. I midten: Grafen for det approksimerende andengradspolynomium for $f(x,y)$ med udviklingspunkt i det stationære punkt $(\pi/2, 0)$. Til højre: Gradientvektorfeltet for funktionen $f(x,y)$, dens niveaukurver (sorte) samt niveaukurver for det approksimerende andengradspolynomium (røde).

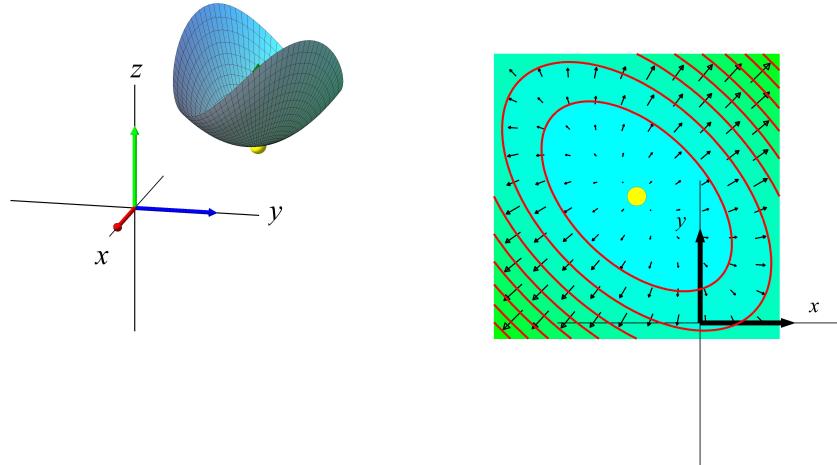
Så er $(x_0, y_0) = (0, 0)$ et stationært punkt for $f(x,y)$ og i det punkt har vi

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16/5 \end{bmatrix} \quad (18-59)$$

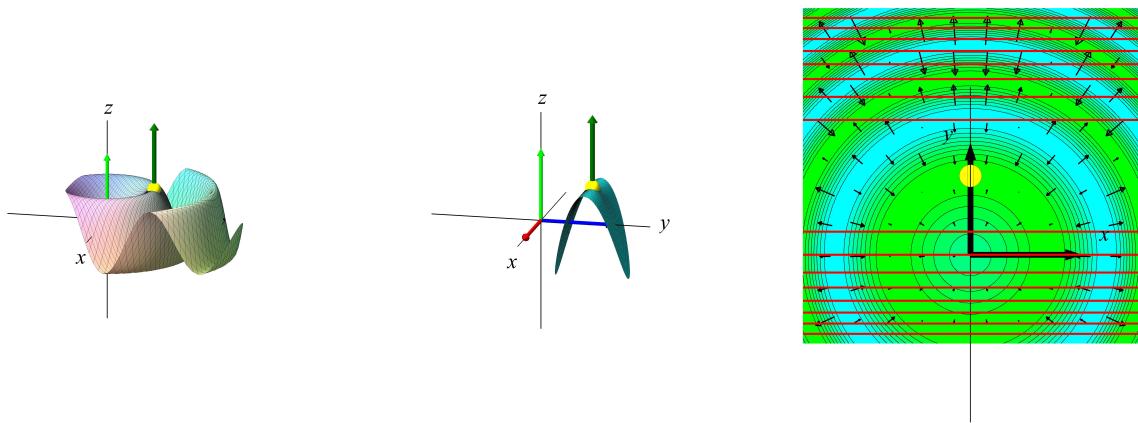
I det stationære punkt har Hesse-matricen således egenværdierne 0 og $16/5$. Hjælpestætning 18.17 kan derfor ikke afgøre, om vi har lokalt maksimum eller minimum i punktet. Det er dog forholdsvis let at se, at der vilkårligt tæt på $(0,0)$ findes punkter (x,y) hvor funktionsværdierne $f(x,y)$ er negative og at der også vilkårligt tæt på $(0,0)$ findes punkter (x,y) hvor funktionsværdierne $f(x,y)$ er positive. Se figur 18.8. Det stationære punkt $(0,0)$ er derfor ikke lokalt minimumspunkt for $f(x,y)$.



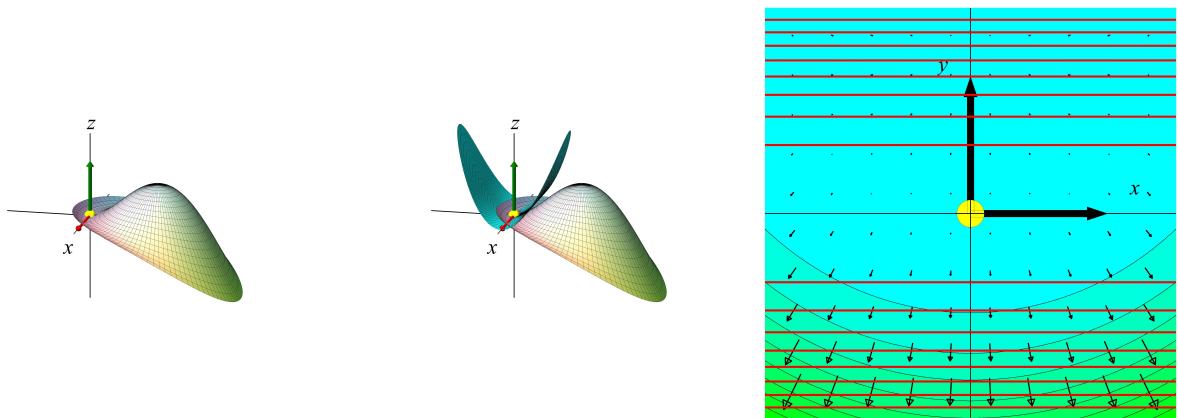
Den funktion, der inspiceres i eksempel 18.23 har følgende forbavsende egenskab: Lad $\mathbf{r}(u)$ være parameterfremstillingen for en vilkårlig ret linje gennem $\mathbf{r}(0) = (0,0)$. Så har den sammensatte (højde-)funktion $h(u) = f(\mathbf{r}(u))$ et egentligt lokalt minimum i $u = 0$. Dette forekommer altså til trods for, at funktionen $f(x,y)$ ikke selv har noget lokalt minimum i $(0,0)$. En fyldestgørende funktionsundersøgelse af en funktion af to variable omkring et stationært punkt kan altså ikke opnås ved blot at undersøge restriktionerne af funktionen til de rette linjer igennem punktet!



Figur 18.6: Til venstre: Grafen for funktionen $f(x, y) = 1 + x^2 + (1 - y)^2 + x \cdot y$. Til højre: Gradientvektorfeltet for funktionen $f(x, y)$, og dens niveaukurver (røde) omkring det stationære punkt $(x_0, y_0) = (-2/3, 4/3)$. Bemærk, at funktionen er sit eget approksimerende andengradspolynomium med udviklingspunkt i det stationære punkt.



Figur 18.7: Til venstre: Grafen for funktionen $f(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \sin(\pi \cdot x^2 + \pi \cdot y^2)$. I midten: Det approksimerende andengradspolynomium for funktionen med udviklingspunkt $(0, 1/\sqrt{2})$. Til højre: Gradientvektorfeltet for funktionen $f(x, y)$, og dens niveaukurver (sorte) samt niveaukurver for det approksimerende andengradspolynomium (røde) omkring det stationære punkt $(x_0, y_0) = (0, 1/\sqrt{2})$.



Figur 18.8: Til venstre: Grafen for funktionen $f(x,y) = \frac{1}{5} \cdot (1 - (1 - y)^2 - x^2) \cdot (4 - (2 - y)^2 - x^2)$. I midten: Grafen for $f(x,y)$ sammen med det approksimerende andengradspolynomium for funktionen med udviklingspunkt $(0,0)$. Til højre: Gradientvektorfeltet for funktionen $f(x,y)$ og dens niveaukurver (sorte) samt niveaukurver for det approksimerende andengradspolynomium (røde) omkring det stationære punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

18.5 Opsummering

Denne eNote handler om analyse af funktioner af to variable.

- Vi bruger den kompakte notation for gradientvektorfeltet og Hesse-matricen som er givet ved de aflede af $f(x, y)$ til og med anden orden:

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)) \quad , \quad (18-60)$$

$$\mathbf{H}f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \quad . \quad (18-61)$$

- Det approksimerende polynomium af anden grad for $f(x, y)$ er så givet ved:

$$\begin{aligned} P_{2,(x_0,y_0)}(x, y) &= f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot [x - x_0 \ y - y_0] \cdot \mathbf{H}f(x_0, y_0) \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned} \quad (18-62)$$

- Taylor's grænseformel for funktioner af to variable kan dermed skrives

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot [x - x_0 \ y - y_0] \cdot \mathbf{H}f(x_0, y_0) \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \rho^2_{(x_0,y_0)}(x, y) \cdot \varepsilon_f(x - x_0, y - y_0) \quad . \end{aligned} \quad (18-63)$$

- Stationære punkter (x_0, y_0) for funktioner $f(x, y)$ af to variable er karakteriserede ved at $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.
- Egenværdierne for Hesse-matricen i et stationært punkt kan hjælpe med at afgøre, om punktet er et egentligt lokalt maksimum- eller minimum-punkt for en glat funktion $f(x, y)$. Hvis egenværdierne er positive, så er punktet et egentligt lokalt minimumspunkt. Hvis de begge er negative, så er punktet et egentligt lokalt maksimumspunkt. Hvis egenværdierne begge er forskellige fra 0 og har modsatte fortegn, så er der hverken maksimum- eller minimum-punkt i det stationære punkt.