eNote 15

Funktioner af to variable

I denne og i de efterfølgende eNoter vil vi udvide funktionsbegrebet til at omfatte reelle funktioner af flere variable; vi starter udvidelsen med 2 variable, så vi vil i denne eNote definere værdimængder, kontinuitet, og differentiabilitet af funktioner $f(x,y)$ af to variable, her x og y. Ligesom for funktioner af én variabel vil vi bruge epsilon-funktions-begrebet (nu ligeledes af to variable) til formålet.

15.1 Definitionsmængder

Ved beskrivelsen af en reel funktion $f(x,y)$ af to variable anføres dels de punkter (x,y), i (x,y)-planen hvor funktionen er defineret, og dels de værdier, som kan fås ved at benytte funktionen på defintionsmængden. ***Definitionsmængden*** kalder vi $\mathcal{D}m(f)$ og ***værdimængden*** kalder vi $\mathcal{V}m(f)$. Det er især definitionsmængderne vi vil fokusere på her.

Som noget nyt i forhold til funktioner af én variabel er definitionsmængderne i planen generelt ikke så simple som intervallerne på den reelle talakse.

Eksempel 15.1 Definitionsmængde for en funktion af to variable

Lad os se på en funktion $f(x,y)$ af to variable:

$$f(x,y) = \ln(\sqrt{5 - x^2 - y^2}) \quad . \tag{15-1}$$

For hvilke punkter (x,y) i $\mathbb{R}^2$ er denne funktion defineret? Vi har f.eks. at $f(0,0) = \ln(\sqrt{5})$, $f(2,0) = f(0,2) = 0$, $f(1,0) = f(0,1) = \ln(2)$, og faktisk er $f(\cos(t), \sin(t)) = \ln(2)$ for alle t, men $f(3,7)$ er ikke defineret for denne funktion. Ved inspektion af funktionen ses det, at definitionsmængden for $f(x,y)$ består præcis af de punkter, der ligger helt inde i den cirkelskive, der har centrum i $(0,0)$ og radius $\sqrt{5}$:

$$\mathcal{D}m(f) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 < 5 \right\} \quad . \tag{15-2}$$

Læg mærke til, at cirkel-randen af cirkelskiven ikke er med i definitionsmængden.

Vi vil nu indføre nogle vigtige begreber til beskrivelse af definitionsmængder og iøvrigt generelt til beskrivelse af vilkårlige delmængder af (x, y)-planen som kan være gode at benytte sig af, når man f.eks. skal tegne eller skitsere mængderne:

15.1.1 Åbne og afsluttede mængder i planen

|||| Definition 15.2 Åbne mængder i planen

En delmængde eller et område M i planen kaldes ***en åben mængde*** hvis ethvert punkt (x_0, y_0) i mængden er centrum for en eller anden (gerne meget lille) cirkelskive, som selv er helt indeholdt i M.

|||| Eksempel 15.3 En cirkelskive

Mængden $\mathcal{D}m = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 5 \}$ er en åben mængde. Men mængden $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 5 \}$ er *ikke* en åben mængde.

|||| Definition 15.4 Randen af en mængde i planen, indre og ydre

Randen af et område M i planen består af de punkter (x_0, y_0) *i planen* som har følgende egenskab: Enhver cirkelskive med centrum i (x_0, y_0) indeholder både punkter som tilhører M og punkter som ikke tilhører M. Bemærk, randpunkterne for M ikke selv behøver at være med i mængden M. Mængden af randpunkter for M betegnes med ∂M.

Det indre af et område M er alle de punkter i M, som ikke ligger på randen af M. Det indre af M betegnes med $\mathring{M}$.

Det ydre af et område M i planen er alle de punkter i planen som ikke tilhører hverken M eller ∂M.

|||| Eksempel 15.5 Randen af en åben cirkelskive

Mængden $\mathcal{D}m = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 5 \}$ har randen:

$$\partial\mathcal{D}m = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 5 \} \quad . \tag{15-3}$$

|||| Definition 15.6 Afslutningen af en mængde i planen

Hvis en mængde M tilføjes sine randpunkter ∂M fås ***afslutningen*** af mængden som betegnes med:

$$\bar{M} = M \cup \partial M \quad . \tag{15-4}$$

Hvis randpunkterne allerede er med i mængden M fås ikke derved nogen udvidelse af M. Mængden M kaldes ***afsluttet*** hvis $\bar{M} = M$.

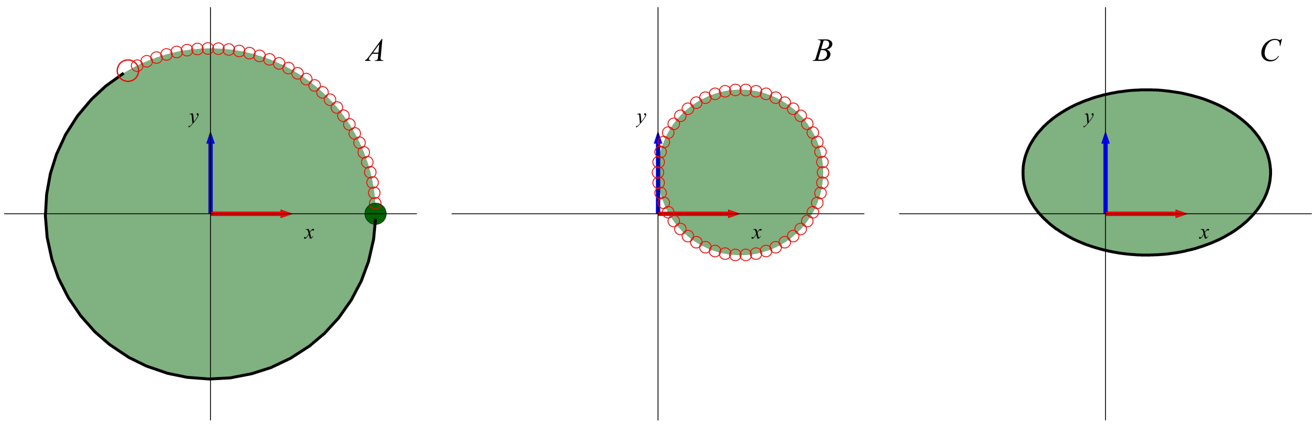
|||| Eksempel 15.7 Figurativt om åbne og afsluttede mængder

Mængden A i figur 15.1 er hverken åben eller afsluttet (der er nogle punkter på randen, som selv er med i mængden og der er andre punkter på randen som ikke er med i mængden. Tegne-forskriften er følgende: Punkter, der er med i mængden er grønne eller ligger på en fuldt optrukket stykke af randen; punkter, der ikke er med i mængden er ikke farvede eller (hvis de er en del af randen) markerede med røde cirkler. Mængden B i figur 15.1 er en åben mængde. Mængden C i figur 15.1 er en afsluttet mængde.

15.1.2 Stjerneformede mængder i planen

|||| Definition 15.8 Stjerneformede områder

Hvis ethvert punkt (x,y) i en mængde M i planen kan 'ses' fra et punkt (x_0, y_0) i mængden sådan at hele syns-linjestykket fra og med (x_0, y_0) til og med (x,y) er indeholdt i mængden, så siges M at være ***stjerneformet*** ud fra ***stjernepunktet*** (x_0, y_0). Med andre ord: Ethvert punkt (x,y) i mængden kan forbindes med stjernepunktet med et linjestykke, der helt er indeholdt i mængden. Se figur 15.3.



Figur 15.1: Områder i planen. Mængden A er hverken åben eller afsluttet, B er en åben mængde, og C er en afsluttet mængde.

|||| Opgave 15.9 Stjerneform og dobbelt-stjerneform

Hvilke punkter i den mængde der er vist til venstre figur 15.3 kan bruges som stjernepunkter for mængden? Er mængden af samtlige mulige stjernepunkter afsluttet eller åben? I hvilken forstand ville man kunne sige, at figuren til højre i 15.3 er *dobbelt*-stjerneformet?

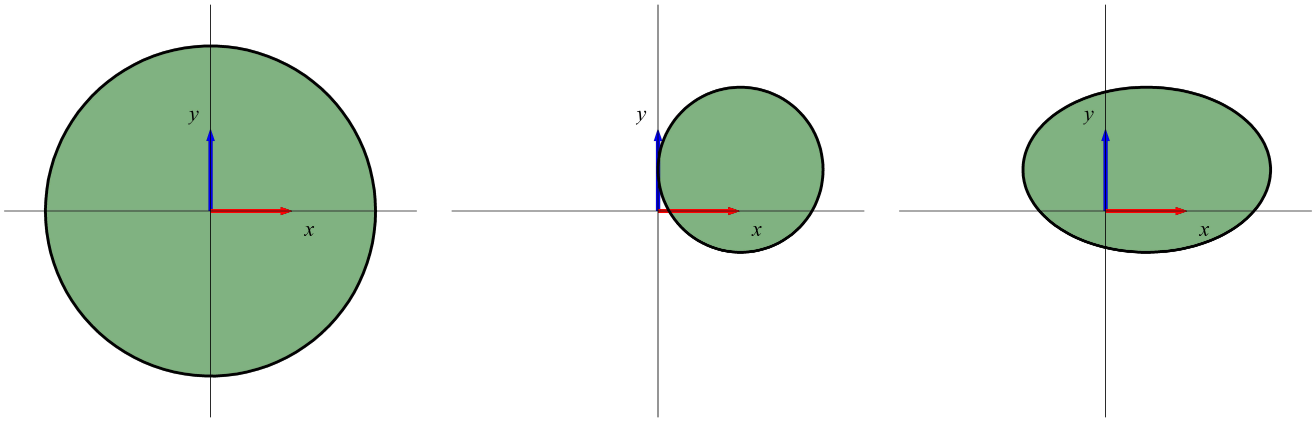
15.1.3 Begrænsede mængder i planen

|||| Definition 15.10 Begrænsede mængder

En mængde M i planen siges at være ***begrænset*** hvis den er helt indeholdt i en (gerne meget stor) cirkelskive med centrum i $(0, 0)$.

|||| Eksempel 15.11

De tre mængder A, B, og C i figur 15.1 er tydeligvis begrænsede – de er helt indeholdt i den cirkelskive som har centrum i $(0, 0)$ og radius 100. Den mængde af punkter, der udgøres af punkterne på x-aksen er ikke begrænset.



Figur 15.2: Afslutningerne $\bar{A}$, $\bar{B}$, og $\bar{C}$ af områderne A, B, og C fra figur 15.1.

15.1.4 Udvidelser af definitionsmængden til hele $\mathbb{R}^2$

Ligesom vi kan udvide definitionsmængder for funktioner af én variabel, kan vi gøre præcis det samme for funktioner $f(x,y)$ af to variable:

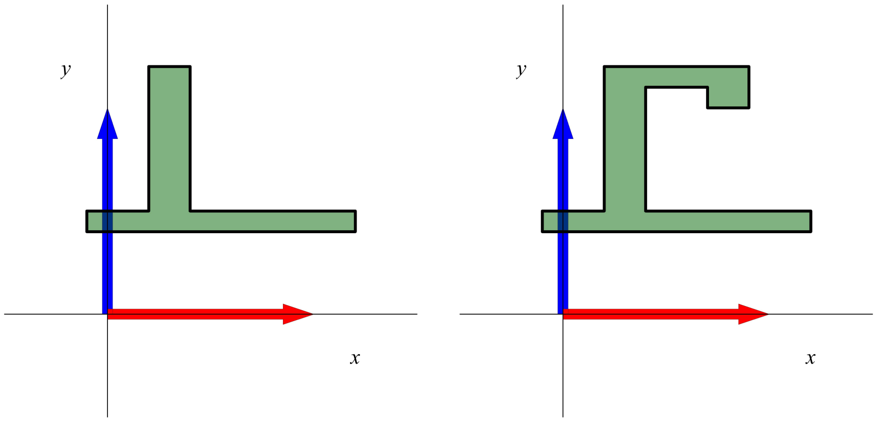
Definition 15.12 Udvidelse af definitionsmængden

Givet funktionen $f(x,y)$ med definitionsmængde $\mathcal{D}m(f)$, så definerer vi 0-udvidelsen $\widehat{f}(x,y)$ af $f(x,y)$ på følgende måde:

$$\widehat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y)\,, & \text{for} \quad (x,y) \in \mathcal{D}m(f) \\ 0\,, & \text{for} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}m(f) \end{cases} \quad . \tag{15-5}$$

15.2 Grafer for funktioner af to variable

Med henblik på at illustrere funktioner af to variable tegner vi dem i rummet – vi plotter den punktmængde, der fremkommer ved at konstruere graferne i $\{\,\mathcal{O}, x, y, z\,\}$-koordinatsystemet:



Figur 15.3: Mængden til venstre er stjerneformet. Mængden til højre er *ikke* stjerneformet.

|||| Definition 15.13 Grafer for funktioner af to variable

Lad $f(x,y)$ være en funktion af to variable med definitionsmængden $\mathcal{D}m(f)$. Så er ***grafen for en funktion af to variable*** givet ved:

$$z = f(x,y) \quad , \quad \text{hvor} \quad (x,y) \in \mathcal{D}m(f) \quad . \tag{15-6}$$

Grafen består altså af den punktmængde i rummet som vi også kan beskrive på følgende måde:

$$\mathcal{G}(f) = \{\, (x,y,f(x,y)) \,\big|\, (x,y) \in \mathcal{D}m(f) \,\} \quad . \tag{15-7}$$

Hvert enkelt punkt på grafen fremkommer på følgende måde: Fra punktet $(x,y,0)$ i (x,y)-planen går vi højden (med fortegn) $f(x,y)$ lodret op (eller ned) fra den (vandrette) (x,y)-plan og markere graf-punktet $(x,y,f(x,y)$ i den højde som funktionsværdien $f(x,y)$ foreskriver – lige over (eller under) punktet $(x,y,0)$.

15.3 Niveau-mængder og højdesnit

I (x,y)-planen hvor funktionen $f(x,y)$ er defineret kan vi gøre noget helt andet for at vise, hvordan funktionsværdierne varierer fra punkt til punkt.

|||| Definition 15.14 Niveau-mængder

For en funktion $f(x,y)$ af to variable definerer vi for ethvert reelt tal c den tilhørende ***niveau-mængde*** på følgende måde:

$$\mathcal{K}_c(f) = \{\, (x,y) \in \mathcal{D}m(f) \mid f(x,y) = c \,\} \quad . \tag{15-8}$$

Mængden $\mathcal{K}_c$ kan være tom, hele planen, en kurve, eller hvilken som helst punktmængde i planen.

|||| Eksempel 15.15 Niveaumængder

Vi lader A betegne en vilkårlig mængde i planen og konstruerer en funktion $f(x,y)$ i hele planen på følgende måde:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{for } (x,y) \in A \\ 0 & \text{for } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A \quad , \end{cases} \tag{15-9}$$

dvs. f er 0-udvidelsen af den funktion, som er konstant 1 på A. Så er

$$\mathcal{K}_c(f) = \begin{cases} A & \text{for } c = 1 \\ \mathbb{R}^2 \setminus A & \text{for } c = 0 \\ \emptyset & \text{for } c \neq 1 \text{ og } c \neq 0 \quad . \end{cases} \tag{15-10}$$

Ofte er niveau-mængden $\mathcal{K}_c$ dog meget mere velstruktureret og består typisk af en eller flere kurver. De kurver kan med fuld ret kaldes niveau-kurver eller højdekurver, for de angiver jo præcis de punkter (x,y) i definitionsmængden hvor funktionen antager værdien c og hvor grafen for f derfor lige præcis har højden (med fortegn) c over (x,y)-planen. Med andre ord, hvis vi skærer grafen for f med den vandrette plan $z = c$ i højden c over (x,y)-planen, så fås en snitkurve, hvis projektion ned i (eller op i) (x,y)-planen netop er $\mathcal{K}_c$, se figurerne 15.4 15.6, 15.5.

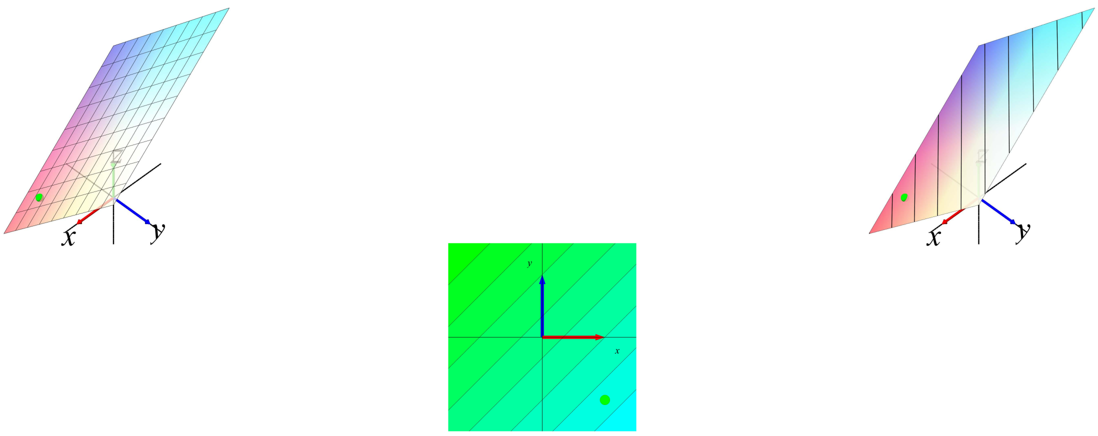
Nedenfor i afsnit 15.8.1 vil vi i ethvert punkt i definitionsmængden for $f(x,y)$ definere en vektor, gradientvektoren for $f(x,y)$, som har den særlige egenskab, at hvis den ikke er $\mathbf{0}$ i et åbent område omkring et givet punkt (x_0, y_0), så er den niveau-mængde der indeholder (x_0, y_0) en kurve igennem punktet. Gradientvektorer er dog kun veldefinerede for differentiable funktioner, så den egenskab må vi derfor først have indført forfunktioner af to variable.

|||| Eksempel 15.16 Grafer og niveau-kurver

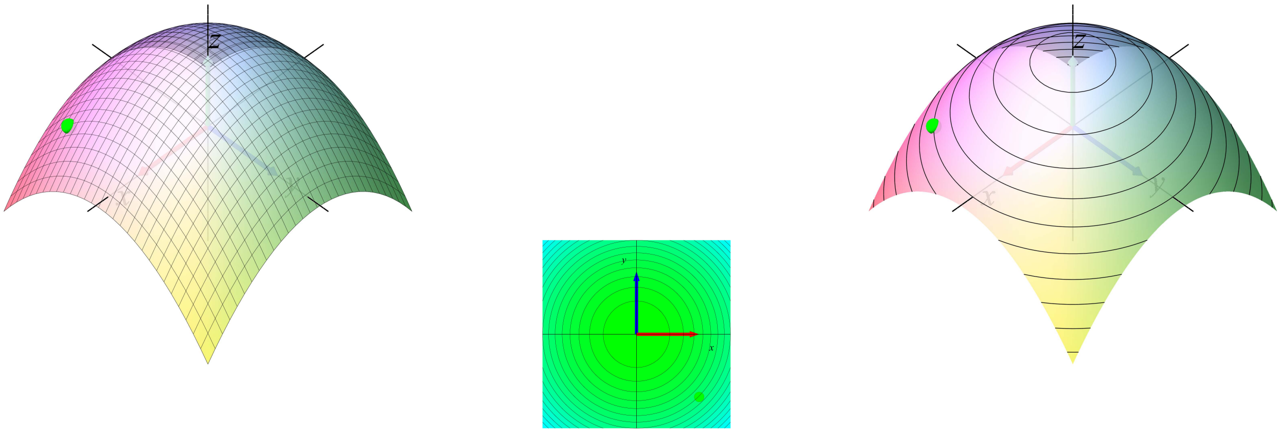
Følgende funktioner er alle definerede i hele (x,y)-planen.

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= -x+y+2 \\
f(x,y) &= 1-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) \\
f(x,y) &= \cos(3x)\cdot\sin(3y) \quad .
\end{aligned}
\tag{15-11}
$$

Funktionernes grafer er vist i figurerne 15.4, 15.5, og 15.6 dels sammen med deres respektive niveau-kurver i (x,y)-planen og dels sammen med en figur, der antyder, hvordan niveaukurverne i (x,y)-planen kan opfattes som projektionerne af de højde-snit-kurver der fremkommer ved at skære graffladerne for funktionerne i forskellige højder, altså med planerne $z = c$, hvor c er den konstante værdi som den aktuelle funktion $f(x,y)$ antager på niveau-kurven $\mathcal{K}_c$. Bemærk, at niveaumængderne $\mathcal{K}_c$ virkelig *er* kurver (eller punkter) i disse tilfælde.



Figur 15.4: Grafen i (x,y,z)-rummet, niveaukurverne i (x,y)-planen, og højdesnitkurverne for funktionen $f(x,y) = -x+y+2$. Læg mærke til, at det naturligvis ikke er *hele* grafen for funktionen vi kan plotte. Her er kun vist det udsnit der hører til $-1 \leq x \leq 1$ og $-1 \leq y \leq 1$.



Figur 15.5: Grafen i (x, y, z)-rummet, niveaukurverne i (x, y)-planen, og højdesnitkurverne for funktionen $f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$.

15.4 Epsilon-funktioner af to variable

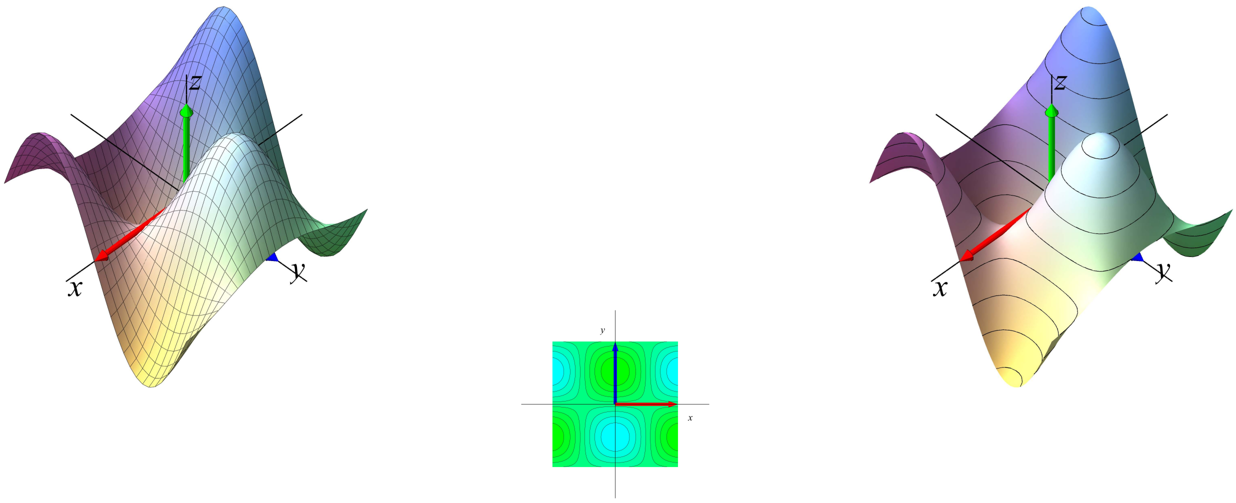
En meget vigtig klasse af funktioner af to variable er afstandsfunktionerne. For ethvert punkt (x_0, y_0) i planen definerer vi afstanden til (x_0, y_0) på velkendt måde:

|||| Definition 15.17 Afstandsfunktioner

Afstanden fra et punkt (x, y) til et punkt (x_0, y_0) i (x, y)-planen betegnes med

$$\rho_{(x_0,y_0)}(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad . \tag{15-12}$$

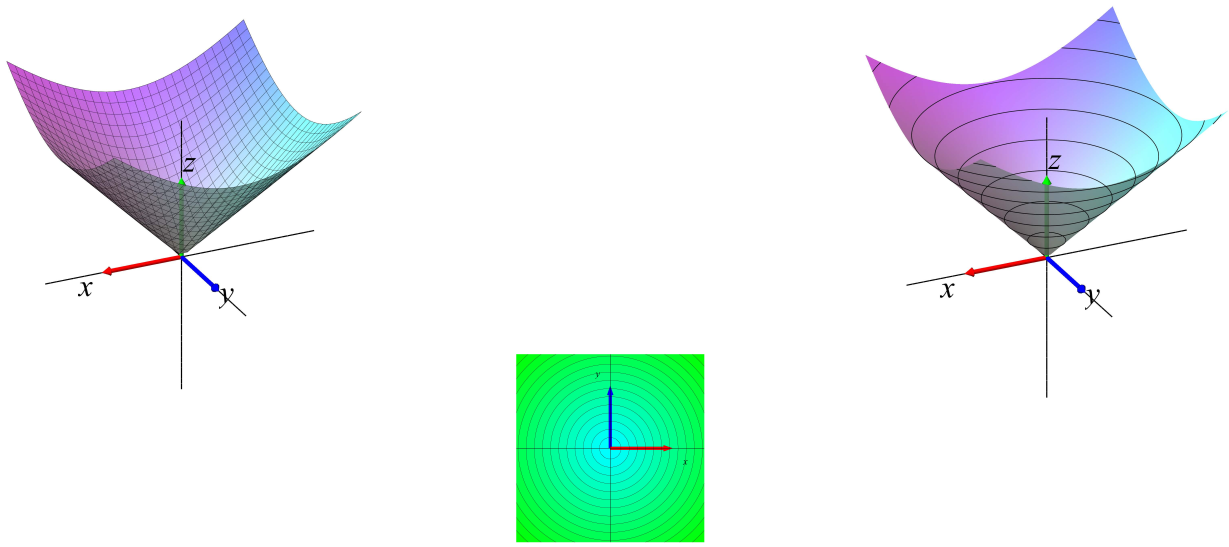
Dette er den sædvanlige afstand mellem de to punkter (x, y) og (x_0, y_0) i planen – bestemt med Pythagoras' sætning.



Figur 15.6: Grafen i (x, y, z)-rummet, niveaukurverne i (x, y)-planen, og højdesnitkurverne for funktionen $f(x, y) = \cos(3x) \cdot \sin(3y)$.

Det er denne funktion vi vil bruge på samme måde som vi benyttede funktionen $(x - x_0)$ til definitionerne af epsilon-funktioner af én variabel og til definition af kontinuitet og differerentiabilitet af funktioner af én variabel. Læg mærke til, at $\rho_{(x_0,y_0)}(x, y)$ altid er positiv eller 0; og læg mærke til at værdien 0 dog kun optræder for $(x, y) = (x_0, y_0)$. Funktionen $\rho_{(0,0)}(x, y)$, altså afstanden fra (x, y) til $(x_0, y_0) = (0, 0)$, er vist i figur 15.7. Læg mærke til, at niveaukurverne er ækvidistante, og at grafen er 'konisk spids' i kontaktpunktet til (x, y)-planen!

Vi er nu klar til at definere klassen af epsilonfunktioner af to variable:



Figur 15.7: Grafen for afstandsfunktionen $\rho_{(0,0)}(x,y)$ til punktet $(x_0,y_0) = (0,0)$, funktionens niveaukurver, og højdesnit-kurverne på grafen.

Definition 15.18 Epsilonfunktioner af to variable

Enhver funktion $\varepsilon(x,y)$ som er defineret i et åbent område i $\mathbb{R}^2$ indeholdende $(0,0)$, og som antager værdien 0 i $(x,y) = (0,0)$, og som derudover går imod 0 når (x,y) går imod (x_0,y_0) kaldes en ***epsilon-funktion af*** (x,y). Epsilon-funktioner af to variable er altså karakteriserede ved egenskaberne:

$$\varepsilon(0,0) = 0 \quad \text{og} \quad \varepsilon(x,y) \to 0 \quad \text{for} \quad (x,y) \to (0,0) \quad . \tag{15-13}$$

Den sidste betingelse betyder, at den numeriske værdi af funktionsværdierne $\varepsilon(x,y)$ kan gøres så lille som ønsket ved blot at vælge (x,y) *tilstrækkelig tæt på* $(0,0)$. Helt præcis betyder betingelsen: For ethvert helt positivt tal k findes der et helt positivt tal K sådan at $|\varepsilon(x,y)| < 1/k$ for alle (x,y) med $\rho_{(x_0,y_0)}(x,y) < 1/K$.

Det følger direkte af definitionen, at afstandsfunktionen $\rho_{(x_0,y_0)}(x,y)$ til et punkt (x_0,y_0) selv er en epsilonfunktion af $x - x_0$ og $y - y_0$.

15.5 Kontinuerte funktioner af to variable

Som for funktioner af én variabel definerer vi kontinuitet for funktioner af to variable ved hjælp af klassen af epsilonfunktioner:

|||| Definition 15.19 Kontinuerte funktioner af to variable

En funktion $f(x,y)$ er kontinuert i (x_0, y_0) hvis der eksisterer en epsilon-funktion $\varepsilon_f(x - x_0, y - y_0)$ sådan at følgende gælder i et åbent område der indeholder (x_0, y_0):

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + \varepsilon_f(x - x_0, y - y_0) \quad . \tag{15-14}$$

Hvis $f(x,y)$ er kontinuert i alle (x_0, y_0) i et givet åbent område i $\mathcal{D}m(f)$, så siger vi, at $f(x,y)$ er kontinuert i hele området.

Enhver epsilonfunktion af $x - x_0$ og $y - y_0$ som f.eks. $\rho_{(x_0,y_0)}(x,y)$ er derfor kontinuert i (x_0, y_0). Grafer og niveaukurver kan ofte afsløre, om en funktion er kontinuert i et punkt.

|||| Sætning 15.20 Inspektion af niveau-mængder

Hvis en funktion $f(x,y)$ har to niveau-mængder $\mathcal{K}_{c_1}$ og $\mathcal{K}_{c_2}$ (hvor $c_1 \neq c_2$) som begge indeholder punkter (x,y) vilkårligt tæt på (x_0, y_0), så er $f(x,y)$ ikke kontinuert i (x_0, y_0).

|||| Bevis

Antag, at $f(x,y)$ er kontinuert i (x_0, y_0). Hvis vi går i mængden $\mathcal{K}_{c_1}$ hen mod (x_0, y_0) så skal (pr. kontinuitet) $f(x_0, y_0)$ være c_1. Hvis vi derimod går i mængden $\mathcal{K}_{c_2}$ hen mod (x_0, y_0) får vi $f(x_0, y_0) = c_2$, hvilket er en modstrid, da $c_1 \neq c_2$.

■

To niveaukurver hørende til forskellige funktionsværdier for en funktion $f(x,y)$ kan ligge meget tæt på hinanden i (x,y)-planen – men altså ikke vilkårligt tæt – hvis funktionen er kontinuert.

|||| Eksempel 15.21 En funktion som ikke er kontinuert

Vi ser på 0-udvidelsen $\widehat{f}(x,y)$ af funktionen

$$f(x,y) = \frac{x^2\,y}{x^4+y^2} \quad , \quad \text{hvor} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\,(0,0)\,\} \quad . \tag{15-15}$$

Det vil sige:

$$\widehat{f}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2\,y}{x^4+y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \quad . \end{cases} \tag{15-16}$$

Funktionen kan inspiceres i figur 15.8. Ved den inspektion bemærkes, at niveaukurverne 'ligner parabler' igennem $(0,0)$. Vi vil teste den hypotese, at det faktisk er parabler: Hvis vi sætter $y = c\,x^2$ (parabelligning) får vi følgende udregninger:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x,c\,x^2) \\ &= \frac{x^2\,c\,x^2}{x^4+(c\,x^2)^2} \\ &= \frac{c\,x^4}{(1+c^2)\,x^4} \\ &= \frac{c}{1+c^2} \quad , \end{aligned} \tag{15-17}$$

hvilket netop betyder, at parablerne $y = c\,x^2$ er (indeholdt i) niveau-mængden $\mathcal{K}_{c/(1+c^2)}$. Da alle parablerne går igennem $(0,0)$ følger det af sætning 15.20 at funktionen $f(x,y)$ ikke er kontinuert i $(0,0)$.

|||| Opgave 15.22

Vis, at 0-udvidelsen $\widehat{f}(x,y)$ af følgende funktion ikke er kontinuert i $(0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad . \tag{15-18}$$

|||| Eksempel 15.23 Første-grads-polynomier er kontinuerte

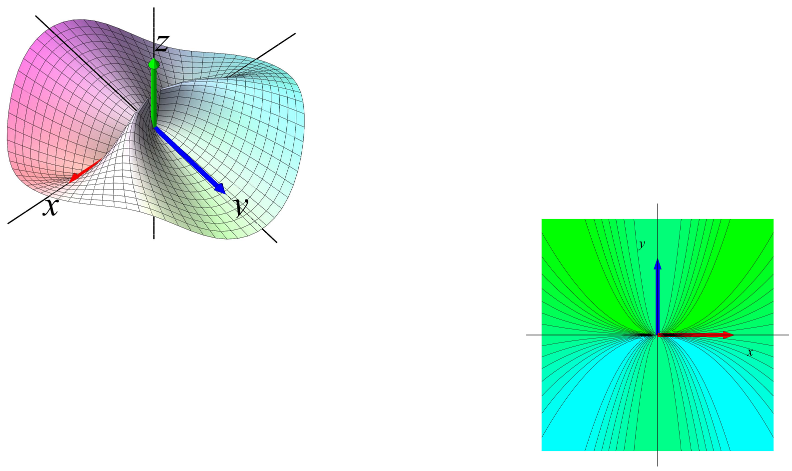
Vi vil vise, at $f(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ er kontinuert i (x_0,y_0). Det følger direkte af, at

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) \to 0 \quad \text{for} \quad (x,y) \to (x_0,y_0)) \quad , \tag{15-19}$$

sådan at

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \varepsilon_f(x-x_0,y-y_0) \tag{15-20}$$

med epsilonfunktionen $\varepsilon_f(x-x_0,y-y_0) = \alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0)$. Overvej hvorfor dette er en epsilonfunktion.



Figur 15.8: Grafen i rummet og niveaukurve-forløbet i planen for funktionen i eksempel 15.21.

|||| Opgave 15.24

Vis, at følgende anden-grads polynomium er kontinuert i $(0,0)$:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad . \tag{15-21}$$

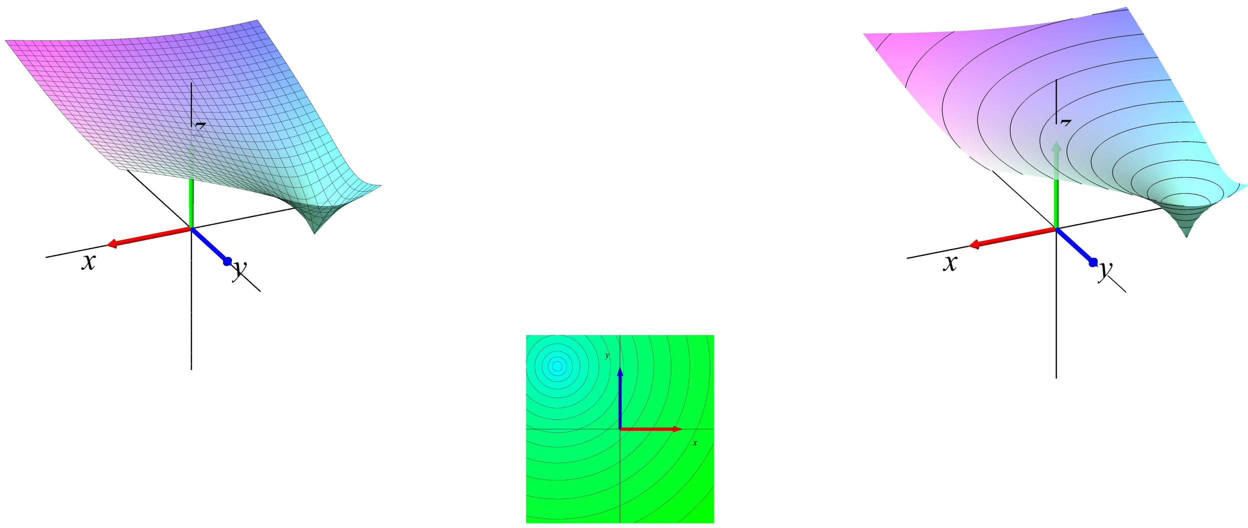
|||| Opgave 15.25

Vis, at 0-udvidelsen af følgende funktion er kontinuert i $(0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{x\,y^2}{x^2+y^2} \quad . \tag{15-22}$$

|||| Eksempel 15.26 Kvadratroden af afstandsfunktionen

Funktionen $f(x,y) = \sqrt{\rho_{(x_0,y_0)}(x,y)}$ er – ligesom $\rho_{(x_0,y_0)}(x,y)$ selv – en epsilonfunktion og er derfor kontinuert i (x_0,y_0). Se figur 15.9.



Figur 15.9: Grafen, niveau-kurverne, og højdesnitkurverne for kvadratroden af afstandsfunktionen til punktet $(x_0, y_0) = (-1, 1)$: $f(x,y) = \sqrt{\rho_{(x_0,y_0)}(x,y)}$.

15.6 Differentiable funktioner af to variable

Langt de fleste af de funktioner vi betragter i Matematik 1 er differentiable i deres definitionsområder og af den grund også kontinuerte, som vi skal se nedenfor – jævnfør tilsvarende for funktioner af én variabel.

Differentiabilitet defineres som for funktioner af én variabel, men her igen ved brug af de indførte epsilonfunktioner af to variable:

|||| Definition 15.27 Differentiabilitet og partielle afledede

En funktion $f(x,y)$ er differentiabel i $(x_0,y_0) \in \mathcal{D}m(f)$ hvis der findes *to* konstanter a og b og en epsilon-funktion $\varepsilon_f(x-x_0,y-y_0)$ sådan at

$$\begin{aligned} f(x,y) = & f(x_0,y_0) + a\cdot(x-x_0) + b\cdot(y-y_0) \\ & + \rho_{(x_0,y_0)}(x,y)\cdot\varepsilon_f(x-x_0,y-y_0) \quad . \end{aligned} \tag{15-23}$$

Det er de to konstanter a og b vi herefter (når de findes, altså når $f(x,y)$ er differentiabel) kalder de ***partielle afledede*** af f i (x_0,y_0). De betegnes henholdsvis:

$$a = f'_x(x_0,y_0) \quad \text{og} \quad b = f'_y(x_0,y_0) \tag{15-24}$$

Med denne notation gælder altså – når $f(x,y)$ er differentiabel i (x_0,y_0):

$$\begin{aligned} f(x,y) = & f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \\ & + \rho_{(x_0,y_0)}(x,y)\cdot\varepsilon_f(x-x_0,y-y_0) \quad . \end{aligned} \tag{15-25}$$

|||| Definition 15.28 Partielle afledede af partielle afledede

Hvis $f(x,y)$ er differentiabel i alle punkter (x_0, y_0) i et givet åbent område i $\mathcal{D}m(f) \subset \mathbb{R}^2$ siger vi, at $f(x,y)$ er differentiabel i hele området. Vi skriver så ofte de partielle afledede af $f(x,y)$ på følgende måde, idet de jo dermed selv er funktioner af de to *variable* (x_0, y_0):

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \text{og} \quad f'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad . \tag{15-26}$$

Hvis disse partielle afledede af $f(x,y)$ selv er differentiable, kan vi fortsætte og finde de tilhørende ***partielle afledede af de partielle afledede***, etc. De benævnes på følgende måde:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} f'_x(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) \\ f''_{xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} f'_x(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} f'_y(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ f''_{yy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} f'_y(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) \quad . \end{aligned} \tag{15-27}$$

Hvordan finder vi så konkret de partielle afledede af en given funktion $f(x,y)$, f.eks. $f(x,y) = x \cdot \sin(y)$? Det er ikke svært:

|||| Sætning 15.29 Hjælpefunktioner giver partielle afledede

De partielle afledede af en funktion $f(x,y)$, der er differentiabel i (x_0,y_0) kan findes ved sædvanlig differentiation af to funktioner af én variabel. Sæt

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x,y_0) \\ f_2(y) &= f(x_0,y) \quad . \end{aligned} \tag{15-28}$$

Så er funktionerne $f_1(x)$ og $f_2(y)$ to funktioner af hver én variabel, henholdsvis x og y, og de er begge differentiable i henholdsvis x_0 og y_0, og differentialkvotienterne er netop de partielle afledede:

$$f'_x(x_0,y_0) = f'_1(x_0) \quad \text{og} \quad f'_y(x_0,y_0) = f'_2(y_0) \tag{15-29}$$

Med andre ord: Ved at indføre de to hjælpefunktioner af én variabel, $f_1(x)$ og $f_2(y)$, fås de partielle afledede af $f(x,y)$ ved at finde de sædvanlige differentialkvotienter af $f_1(x)$ og $f_2(y)$ i henholdsvis x_0 og y_0.

|||| Bevis

Hvis vi sætter $y = y_0$ overalt i ligning (15-25) får vi:

$$\begin{aligned} f_1(x) = f(x,y_0) = & f_1(x_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) \\ & + \rho_{(x_0,y_0)}(x,y_0)\cdot\varepsilon_f(x-x_0,0) \quad , \end{aligned} \tag{15-30}$$

sådan at koefficienten til faktoren $(x-x_0)$ lige præcis er $f'_x(x_0,y_0)$. Vi aflæser altså for det første, at $f_1(x)$ er differentiabel i x_0 og for det andet, at $f'_1(x_0) = f'_x(x_0,y_0)$. Og det var den ene halvdel af det vi skulle vise; den anden halvdel – vedrørende $f'_2(y_0) = f'_y(x_0,y_0)$ – fås på helt tilsvarende måde.

■

|||| Eksempel 15.30 Bestemmelse af partielle afledede

Vi vil bestemme de partielle afledede af funktionen $f(x,y) = 3\,x^2 + 7\,y^3 + 10\,x\,y^7$ i ethvert punkt (x_0,y_0) i $\mathbb{R}^2$. Vi opstiller først de to hjælpefunktioner $f_1(x) = f(x,y_0)$ og $f_2(y) = f(x_0,y)$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3\,x^2 + 7\,y_0^3 + 10\,x\,y_0^7 \\ f_2(y) &= 3\,x_0^2 + 7\,y^3 + 10\,x_0\,y^7 \quad . \end{aligned} \tag{15-31}$$

De to hjælpefunktioner har differentialkvotienterne henholdsvis:

$$\begin{aligned} f'_1(x) &= 6\,x + 0 + 10\,y_0^7 \quad \text{da } y_0 \text{ jo er en konstant her,} \\ f'_2(y) &= 0 + 21\,y^2 + 70\,x_0\,y^6 \quad \text{da } x_0 \text{ er en konstant} \quad . \end{aligned} \tag{15-32}$$

Heraf får vi dernæst hjælpefunktionernes differentialkvotienter i x_0 henholdsvis y_0:

$$\begin{aligned} f_1'(x_0) &= 6\,x_0 + 10\,y_0^7 = f_x'(x_0, y_0) \\ f_2'(y_0) &= 21\,y_0^2 + 70\,x_0\,y_0^6 = f_y'(x_0, y_0) \quad . \end{aligned} \tag{15-33}$$

Heraf fås generelt, det vil sige for alle (x, y) i $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f_x'(x, y) &= 6\,x + 10\,y^7 \\ f_y'(x, y) &= 21\,y^2 + 70\,x\,y^6 \quad . \end{aligned} \tag{15-34}$$

|||| Opgave 15.31

Vis (på samme måde som for differentiable funktioner af én variabel), at hvis $f(x, y)$ er differentiabel i (x_0, y_0), så er de to konstanter a og b, altså konstanterne $f_x'(x_0, y_0)$ og $f_y'(x_0, y_0)$, veldefinerede i følgende forstand: Der findes *ikke* to forskellige par af konstanter a_1, b_1 og a_2, b_2 og to epsilonfunktioner ε_1 og ε_2 sådan at der samtidig gælder:

$$\begin{aligned} f(x, y) =& f(x_0, y_0) + a_1 \cdot (x - x_0) + b_1 \cdot (y - y_0) \\ & + \rho_{(x_0, y_0)}(x, y) \cdot \varepsilon_1(x - x_0, y - y_0) \\ \\ f(x, y) =& f(x_0, y_0) + a_2 \cdot (x - x_0) + b_2 \cdot (y - y_0) \\ & + \rho_{(x_0, y_0)}(x, y) \cdot \varepsilon_2(x - x_0, y - y_0) \quad . \end{aligned} \tag{15-35}$$

|||| Opgave 15.32

Bestem samtlige partielle afledede af de partielle afledede i ethvert punkt (x, y) for funktionen $f(x, y) = 3\,x^2 + 7\,y^3 + 10\,x\,y^7$.

|||| Opgave 15.33

Bestem samtlige partielle afledede af de partielle afledede i ethvert punkt (x, y) for funktionen $f(x, y) = \cos(3x) \cdot \sin(3y)$.

Den opmærksomme opgaveløser vil have observeret (f.eks. i opgaverne ovenfor) at $f_{xy}''(x, y)$ og $f_{yx}''(x, y)$ typisk er ens! Det er ikke nogen tilfældighed, det gælder sædvanligvis at man kan nøjes med at beregne den ene af de to dobbeltafledede:

|||| Sætning 15.34 De blandede dobbeltafledede er ens

Hvis alle de 4 dobbelt afledede af en given funktion $f(x,y)$ er kontinuerte i et åbent område, så gælder i hele området:

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) \quad . \tag{15-36}$$

|||| Opgave 15.35

Vis (på samme måde som for funktioner af én variabel) at: Hvis en funktion $f(x,y)$ af to variable er differentiabel i et punkt (x_0,y_0), så er funktionen også kontinuert i dette punkt. Vis også med et eksempel, at hvis en funktion er kontinuert i (x_0,y_0), så behøver den ikke at være differentiabel i (x_0,y_0). Se f.eks. på $\rho_{(x_0,y_0)}(x,y)$.

Den opmærksomme vil også have noteret, at vi mangler en overvejelse: Hvis $f(x,y)$ er differentiabel i et punkt (x_0,y_0), så findes de partielle afledede i konsekvens af differentiabiliteten og de kan bestemmes ved hjælp af de differentiable hjælpefunktioner $f_1(x)$ og $f_2(y)$. Man kan nu med god grund spørge: Hvis de to hjælpefunktioner findes for en given funktion $f(x,y)$, og det viser sig, at de er differentiable i henholdsvis x_0 og y_0, betyder det så, at $f(x,y)$ er differentiabel i (x_0,y_0)?

Følgende sætning kaster lys over dette spørgsmål:

|||| Sætning 15.36 Fra partielle afledede til differentiabilitet

Hvis $f(x,y)$ har partielle afledede (fundet via hjælpefunktionerne $f_1(x)$ og $f_2(y)$) i et åbent område A indeholdende (x_0,y_0), og hvis de partielle afledede af $f(x,y)$ begge er kontinuerte i A, så er $f(x,y)$ differerentiabel.

At der nødvendigvis må være en ekstra betingelse i sætning 15.36 følger af eksemplet her:

|||| Eksempel 15.37 Differentiable hjælpefunktioner er ikke nok

Vi ser på 0-udvidelsen af følgende funktion:

$$f(x,y) = \frac{x\,y^2}{x^2+y^4} \quad . \tag{15-37}$$

Den funktion er ikke differentiabel i $(0,0)$ – den er nemlig ikke engang kontinuert i $(0,0)$ (!)

(Hvorfor ikke?) Ikke desto mindre findes de to hjælpefunktioner

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x,0) = 0 \\ f_2(y) &= f(0,y) = 0 \quad , \end{aligned} \tag{15-38}$$

og som det ses, er de begge to særdeles differentiable i $(0,0)$. Selv om hjælpefunktionerne er differentiable behøver den aktuelle funktion selv ikke at være differentiabel.

15.7 Det approksimerende første-grads-polynomium

Som for funktioner af én variabel kan vi trunkere udtrykket i ligning (15-25) ved simpelthen at fjerne 'epsilon-funktions-delen' hvorved vi står tilbage med et førstegrads-polynomium i de to variable x og y:

$$P_{1,(x_0,y_0)}(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \quad . \tag{15-39}$$

Funktionen $P_{1,(x_0,y_0)}(x,y)$ kaldes det approksimerende første-gradspolynomium for $f(x,y)$ med udviklingspunkt (x_0,y_0).

Læg mærke til, at $P_{1,(x_0,y_0)}(x,y)$ virkelig *er* et første-grads-polynomium i de to variable x og y fordi de højst optræder med potensen 1 og alle andre faktorer og addender er konstanter.

|||| Eksempel 15.38 Paraboloide med tangentplan

Vi ser på funktionen

$$f(x,y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 \quad . \tag{15-40}$$

Så er

$$\begin{aligned} f'_x(x_0,y_0) &= -x_0 \\ f'_y(x_0,y_0) &= -y_0 \quad , \end{aligned} \tag{15-41}$$

sådan at

$$\begin{aligned} P_{1,(x_0,y_0)}(x,y) &= f(x_0,y_0) - x_0\cdot(x-x_0) - y_0\cdot(y-y_0) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x_0^2 - \frac{1}{2}y_0^2 - x\cdot x_0 + x_0^2 - y\cdot y_0 + y_0^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{2}y_0^2 - x\cdot x_0 - y\cdot y_0 \quad . \end{aligned} \tag{15-42}$$

Specielt får vi med udviklingspunktet $(x_0,y_0) = (1,-1)$:

$$P_{1,(1,-1)}(x,y) = y - x + 2 \quad . \tag{15-43}$$

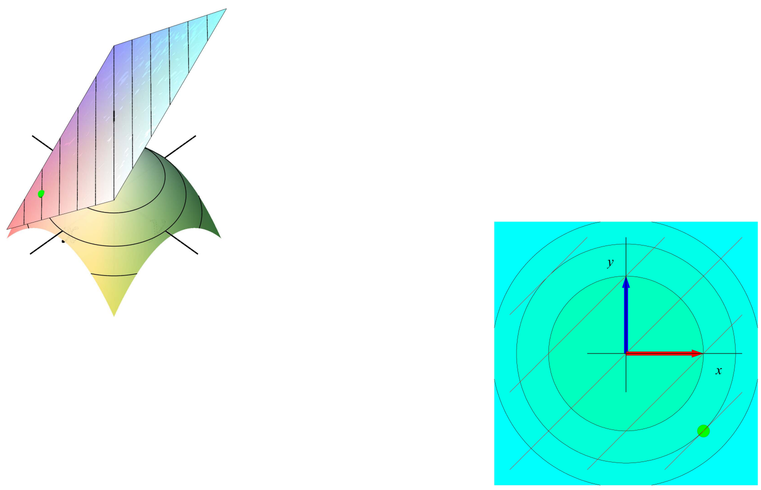
Se figur 15.10, hvor grafen for dette approksimerende første-gradspolynomium for $f(x,y)$ er plottet sammen med grafen for funktionen selv. Højde-snit-kurverne og niveau-kurverne er ligeledes gengivet for begge funktionerne. I og omkring det markerede udviklingspunkt er funktionerne meget ens - grafen for det approksimerende førstegrads-polynomium med udviklingspunkt (x_0, y_0) fortjener helt klart at blive kaldt ***tangentplanen*** til grafen for $f(x, y)$ i punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

|||| Definition 15.39 Tangentplan til grafen for en funktion af to variable

Givet en differentiabel funktion $f(x, y)$. Tangentplanen til grafen for $f(x, y)$ i punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ er givet ved ligningen:

$$z = P_{1,(x_0,y_0)}(x, y) \quad , \tag{15-44}$$

hvor højresiden er det approksimerende polynomium af første grad for $f(x, y)$ med udviklingspunkt (x_0, y_0).



Figur 15.10: Tangentplanen approksimerer grafen over udviklingspunktet og niveaulinjerne for det approksimerende førstegradspolynomium approksimerer niveaulinjerne for funktionen omkring udviklingspunktet i (x, y)-planen

|||| Opgave 15.40

Bestem det approksimerende første-grads-polynomium for følgende funktion i ethvert punkt (x_0, y_0):

$$f(x,y) = \cos(3x)\cdot\sin(3y) \quad . \tag{15-45}$$

15.8 Partielle afledede af sammensatte funktioner

Sammensatte funktioner af to variable optræder i rigtig mange anvendelser, lige fra GPS teknologi til geologi og termodynamik.

En sammensat funktion af to variable fås typisk således: Lad $f(x,y)$ være en funktion af to variable, hvor $(x,y) \in \mathcal{D}m(f) \subset \mathbb{R}^2$ og lad $p(u,v)$ og $q(u,v)$ være *to* andre funktioner af to variable, hvor vi så antager, at $(u,v) \in \mathcal{D}m(p) \cap \mathcal{D}m(q) \subset \mathbb{R}^2$. Antager vi nu yderligere, at (u,v) tilhører et område A i $\mathbb{R}^2$ sådan at der gælder, at *værdierne* af $p(u,v)$ og $q(u,v)$ ligger i definitionsmængden for $f(x,y)$ i den forstand, at $(p(u,v), q(u,v)) \in \mathcal{D}m(f)$ for $(u,v) \in A$, så er den sammensatte funktion

$$h(u,v) = f(p(u,v), q(u,v)) \quad \text{veldefineret for alle} \quad (x,y) \in A \quad . \tag{15-46}$$

Vi vil sædvanligvis kun se på sammensatte funktioner som er definerede i hele planen, sådan at $A = \mathbb{R}^2$.

|||| Eksempel 15.41 Sammensatte funktioner af to variable

Lad $f(x,y)$, $p(u,v)$, og $q(u,v)$ være bestemt ved de angivne funktioner nedenfor. Så fås de tilsvarende sammensatte funktioner $h(u,v)$ ved at sætte $x = p(u,v)$, $y = q(u,v)$, og $h(u,v) = f(x,y) = f(p(u,v), q(u,v))$ i de respektive definitions-områder (de anføres ikke her):

$$\begin{array}{llll} f(x,y) = x+y & , \ p(u,v) = 2u\cdot v & , \ q(u,v) = u^2+v^2 & , \ h(u,v) = (u+v)^2 \\ f(x,y) = y\cdot e^x & , \ p(u,v) = \ln(uv) & , \ q(u,v) = 1/uv & , \ h(u,v) = 1 \\ f(x,y) = \sqrt{x+y} & , \ p(u,v) = u^4 & , \ q(u,v) = 8\,u^4 & , \ h(u,v) = 3\cdot u^2 \end{array} \tag{15-47}$$

|||| Sætning 15.42 Kædereglen i planen

Lad $f(x,y)$, $p(u,v)$, og $q(u,v)$ være tre differentiable funktioner - hver af to variable. Lad $h(u,v)$ betegne den sammensatte funktion

$$h(u,v) = f(p(u,v), q(u,v)) \quad . \tag{15-48}$$

Så kan de partielle afledede af $h(u,v)$ udtrykkes ved hjælp af dels de partielle afledede af $f(x,y)$, dels de partielle afledede af $p(u,v)$, og dels de partielle afledede af $q(u,v)$. Vi vil udtrykke de partielle afledede af $h(u,v)$ i (u_0, v_0) så vi sætter $x_0 = p(u_0, v_0)$ og $y_0 = q(u_0, v_0)$.
Så har vi:

$$\begin{aligned} h'_u(u_0, v_0) &= f'_x(x_0, y_0) \cdot p'_u(u_0, v_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot q'_u(u_0, v_0) \\ h'_v(u_0, v_0) &= f'_x(x_0, y_0) \cdot p'_v(u_0, v_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot q'_v(u_0, v_0) \quad . \end{aligned} \tag{15-49}$$

|||| Bevis

Resultatet følger efter præcis samme opskrift som beviset for differentiation af den sammensatte funktion $f(g(x))$ af én variabel – der er bare lidt flere konstanter og funktioner at holde styr på.

■

|||| Opgave 15.43

Bestem de partielle afledede i ethvert punkt (u,v) for hver af de sammensatte funktioner nedenfor – dels ved at beregne dem direkte ud fra det givne eksplicitte udtryk for $h(u,v)$ og dels ved at benytte kædereglen og de parteille afledede af ingredienserne i $h(u,v)$, altså de partielle afledede af $f(x,y)$, $p(u,v)$ og $q(u,v)$.

$$\begin{array}{llllllll} f(x,y) = x + y & , & p(u,v) = 2u \cdot v & , & q(u,v) = u^2 + v^2 & , & h(u,v) = (u+v)^2 \\ f(x,y) = y \cdot \mathrm{e}^x & , & p(u,v) = \ln(uv) & , & q(u,v) = 1/uv & , & h(u,v) = 1 \\ f(x,y) = \sqrt{x+y} & , & p(u,v) = u^4 & , & q(u,v) = 8\,u^4 & , & h(u,v) = 3 \cdot u^2 \end{array} \tag{15-50}$$

Læg mærke til, at hver af de partielle afledede af den sammensatte funktion $h(u,v) = f(p(u,v),q(u,v))$ i et punkt (u_0,v_0) effektivt kan udtrykkes ved prikprodukter hvori indgår en fælles faktor, nemlig vektoren $\left(f'_x(x_0,y_0)\,,\; f'_y(x_0,y_0)\right)$ hvor $x_0 = p(u_0,v_0)$ og $y_0 = q(u_0,v_0)$:

$$h'_u(u_0,v_0) = \left(f'_x(x_0,y_0)\,,\; f'_y(x_0,y_0)\right) \cdot \left(p'_u(u_0,v_0)\,,\; q'_u(u_0,v_0)\right)$$
$$h'_v(u_0,v_0) = \left(f'_x(x_0,y_0)\,,\; f'_y(x_0,y_0)\right) \cdot \left(p'_v(u_0,v_0)\,,\; q'_v(u_0,v_0)\right) \quad .$$

15.8.1 Gradientvektorer

|||| Definition 15.44 Gradientvektor

Lad $f(x,y)$ betegne en differentiabel funktion af to variable. De partielle afledede af $f(x,y)$ i et punkt (x_0,y_0) definerer ***gradientvektoren for*** $f(x,y)$ i (x_0,y_0) på følgende måde:

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(f'_x(x_0,y_0)\,,\; f'_y(x_0,y_0)\right) \quad . \tag{15-51}$$

På denne måde får vi altså defineret en ganske bestemt vektor i ethvert punkt, hvor $f(x,y)$ er differentiabel:

$$\nabla f(x,y) = \left(f'_x(x,y)\,,\; f'_y(x,y)\right) \quad . \tag{15-52}$$

Hvis vi for ethvert fodpunkt (x_0,y_0) afsætter gradientvektoren $\nabla f(x_0,y_0)$ for $f(x,y)$ ud fra det fodpunkt i planen $\mathbb{R}^2$ får vi konstrueret ***gradientvektorfeltet*** for $f(x,y)$.

|||| Opgave 15.45

Bestem gradientvektorfeltet i ethvert punkt (x,y) for hver af følgende funktioner i deres respektive definitionsmængder: $f(x,y) = x+y$, $f(x,y) = y\cdot \mathrm{e}^x$, og $f(x,y) = \rho^2_{x_0,y_0}(x,y)$.

Ved hjælp af gradientvektorfeltet $\nabla f(x,y)$ for $f(x,y)$ kan vi nu formulere de partielle afledede af den sammensatte funktion $h(u,v) = f(p(u,v),q(u,v))$ lidt smartere:

|||| **Sætning 15.46 Kædereglen udtrykt med gradienten af $f(x,y)$**

Lad $f(x,y)$, $p(u,v)$, og $q(u,v)$ være tre differentiable funktioner - hver af to variable. Lad $h(u,v)$ betegne den sammensatte funktion

$$h(u,v) = f(p(u,v), q(u,v)) \quad . \tag{15-53}$$

Så kan de partielle afledede af $h(u_0, v_0)$ med hensyn til henholdsvis u og v i (u_0, v_0) udtrykkes ved gradienten af $f(x,y)$ i $(x_0, y_0) = (\, p(u_0, v_0), q(u_0, v_0)\,)$:

$$\begin{aligned} h'_u(u_0, v_0) &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot (p'_u(u_0, v_0), q'_u(u_0, v_0)) \\ h'_v(u_0, v_0) &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot (p'_v(u_0, v_0), q'_v(u_0, v_0)) \quad . \end{aligned} \tag{15-54}$$

15.8.2 Kædereglen 'langs' kurver i planen

Hvis funktionerne $p(u,v)$ og $q(u,v)$ kun afhænger af den ene variable u kan vi selvfølgelig betegne funktionerne med henholdsvis $p(u)$ og $q(u)$. Den sammensattte funktion $h(u) = f(p(u), q(u))$ – hvor $f(x,y)$ er en givet differerentiabel funktion i planen – angiver så de funktionsværdier, som $f(x,y)$ antager *langs den kurve* i planen, som er givet ved de to funktioner $p(u)$ og $q(u)$:

|||| **Definition 15.47 Parametriserede kurver i planen**

En ***kurve i planen*** består af en punktmængde $\mathcal{C}$ i planen, som vi vil antage er givet ved to funktioner $p(u)$ og $q(u)$ på følgende måde:

$$\mathcal{C}_{\mathbf{r}} \quad : \quad \mathbf{r}(u) = (p(u), q(u)) \quad \text{hvor} \quad u \in \,]\alpha, \beta[\, \subset \mathbb{R} \quad . \tag{15-55}$$

Det vil sige, at kurven er en parametriseret punktmængde med stedvektorerne $\mathbf{r}(u)$ og parameteren u i et givet interval. Kurven er ***differentiabel*** hvis de to funktioner $p(u)$ og $q(u)$ begge er differentiable i hele intervallet $]\alpha, \beta[$.

Den parametriserede kurve siges at være ***regulær***, hvis $\mathbf{r}'(u) \neq \mathbf{0}$ for alle $u \in \,]\alpha, \beta[$.

|||| Sætning 15.48 Tangent til kurve

Lad $\mathcal{C}_{\mathbf{r}}$ betegne en differentiabel kurve med parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u)$ og antag at $\mathbf{r}'(u_0) \neq (0,0)$. Tangenten L_{u_0} (igennem punktet $\mathbf{r}(u_0)$) til $\mathcal{C}_{\mathbf{r}}$ er så givet ved følgende parameterfremstilling:

$$L_{u_0} \quad : \quad \mathbf{T}(t) = \mathbf{r}(u_0) + t \cdot \mathbf{r}'(u_0) \quad \text{hvor} \quad t \in \mathbb{R} \quad . \tag{15-56}$$

|||| Bevis

Vi nøjes med at se på det tilfælde hvor $p(u)$ er meget elementær: $p(u) = u$. Så er $\mathcal{C}_{\mathbf{r}}$ simpelthen grafen for funktionen $q(x)$ i (x,y)-planen. Grafen for den funktion har en tangent i punktet $(x_0, q(x_0)$, som er givet ved ved det velkendte udtryk: $y = q(x_0) + q'(x_0)(x - x_0)$. En parameterfremstilling for den tangent er derfor:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= (x_0, q(x_0)) + t \cdot (1, q'(x_0)) \\ &= (p(u_0), q(u_0)) + t \cdot (p'(u_0), q'(u_0)) \quad (\text{fordi } x = p(u) = u \\ &= \mathbf{r}(u_0) + t \cdot \mathbf{r}'(u_0) \quad , \end{aligned} \tag{15-57}$$

og det var det, vi skulle indse.

■

Vi kan nu undersøge hvordan kædereglen ser ud og simplificeres langs parametriserede kurver – vi skal blot 'bruge' den generelle kæderegel på de to v-uafhængige funktioner $p(u)$ og $q(u)$:

|||| Sætning 15.49 Kædereglen langs kurver

Lad $\mathbf{r}(u) = (p(u), q(u))$ være en differentiabel parametriseret kurve i (x,y)-planen. En differentiabel funktion $f(x,y)$ antager så værdierne $h(u) = f(p(u), q(u)) = f(\mathbf{r}(u))$ langs kurven. Den sammensatte funktion $h(u)$ af den ene variabel u er differentiabel, og

$$h'(u) = \nabla f(p(u), q(u)) \cdot (p'(u), q'(u)) = \nabla f(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) \quad . \tag{15-58}$$

|||| Bevis

Resultatet følger direkte af den øverste ligning i (15-54). Bemærk, at funktionerne $h(u)$, $p(u)$, og $q(u)$ jo ikke afhænger af v, sådan at den nederste ligning i (15-54) reducerer til $0 = 0$.

■

Motiveret af dette simple udtryk for den afledede af funktionen $f(x,y)$ langs en parametriseret kurve $\mathbf{r}(u)$ indfører vi den ***retningsafledede af funktionen*** i den retning fra et givet punkt (x_0, y_0) som er givet ved en enhedsvektor $\mathbf{e}$:

|||| Definition 15.50 Retningsafledede

Den ***retningsafledede*** af $f(x,y)$ i punktet (x_0, y_0) i retningen med enhedsretningsvektor $\mathbf{e}$ betegnes med $f'((x_0, y_0); \mathbf{e})$ og er givet ved prikproduktet:

$$f'((x_0, y_0); \mathbf{e}) = \boldsymbol{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{e} \quad . \tag{15-59}$$

Kædereglen langs kurver kan nu formuleres ved hjælp af den retningsafledede:

|||| Sætning 15.51 Kæderegel langs kurver udtrykt ved retningsafledede

Funktionen $f(x,y)$ antager værdierne $h(u) = f(p(u), q(u)) = f(\mathbf{r}(u))$ langs $\mathbf{r}(u)$. Hvis $\mathbf{r}(u)$ er en regulær parameterfremstilling for kurven får vi differentialkvotienten af $h(u)$:

$$h'(u) = \boldsymbol{\nabla} f(p(u), q(u)) \cdot (p'(u), q'(u)) = f'((x_0, y_0); \mathbf{e}) \cdot |\mathbf{r}'(u)| \quad . \tag{15-60}$$

Læg mærke til, at den afledede af den sammensatte funktion $h(u) = f(\mathbf{r}(u))$ i et punkt på kurven $\mathbf{r}(u)$ kun afhænger af tangentvektoren til kurven i punktet – $h'(u)$ er uafhængig af 'resten' af kurven.

|||| Eksempel 15.52 Retningsafledede

Funktionen $f(x,y) = 2\,x^2 + 3\,y^2$ har de partielle afledede

$$f'_x(x,y) = 4\,x \quad , \quad f'_y(x,y) = 6\,y \quad , \tag{15-61}$$

og derfor gradientvektorfeltet

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = (4\,x\,,\; 6\,y) \tag{15-62}$$

Den retningsafledede af $f(x,y)$ i punktet $(x_0,y_0) = (1,1)$ i retningen bestemt ved $\mathbf{e}(\theta) = (\cos(\theta),\sin(\theta))$, hvor $\theta \in [0,2\pi]$ er derfor:

$$f'((1,1);(\cos(\theta),\sin(\theta))) = 4\cos(\theta) + 6\sin(\theta) \quad . \tag{15-63}$$

15.8.3 Kædereglen 'langs' *niveau*-kurver for en funktion

En kurve $(p(u),q(u))$ som er niveaukurve for en funktion $f(x,y)$ giver anledning til en særlig simpel – og meget vigtig – version af kædereglen:

|||| Sætning 15.53 Kædereglen langs niveaukurver

Lad $\mathbf{r}(u) = (p(u),q(u))$ være en parametriseret kurve i (x,y)-planen. Antag, at kurven er en niveau-kurve for $f(x,y)$, dvs. $f(x,y)$ er en konstant c langs hele kurven,

$$f(p(u),q(u)) = c \quad \text{for alle } u \quad . \tag{15-64}$$

Så er

$$\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) = 0 \quad . \tag{15-65}$$

Med andre ord: Gradienten for en funktion $f(x,y)$ er i ethvert punkt hvor den ikke er $\mathbf{0}$ vinkelret på den niveau-kurve for $f(x,y)$ som går igennem punktet:

$$\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}(u)) \perp \mathbf{r}'(u) \quad . \tag{15-66}$$

|||| Bevis

Funktionen $h(u) = f(p(u),q(u)) = c$ har tydeligvis $h'(u) = 0$ og da sætning 15.49 giver $h'(u) = \boldsymbol{\nabla} f(p(u),q(u)) \cdot (p'(u),q'(u))$ fås resultatet.

■

Læg mærke til, at sætning 15.53 mere end antyder en anden sætning, som vi dog ikke vil vise her: Hvis en differentiabel funktion $f(x,y)$ har et egentligt gradientvektorfelt – dvs. hvis $\boldsymbol{\nabla} f(x,y) \neq (0,0)$ for alle (x,y) i et givet åbent område A i definitionsmængden – så består alle niveau-mængderne for $f(x,y)$ i A af pæne kurver, dvs. de kan parametriseres med differentiable vektorfunktioner $\mathbf{r}(u)$ som ovenfor.

15.9 Opsummering

Funktioner af to variable er behandlet i denne eNote efter samme 'skema' som funktioner af én variabel: Definitionsmængderne er her delmængder af planen og giver derfor anledning til nye begreber og deskriptorer, som kan bruges til beskrivelse af generelle mængder i planen. Vi har indført og illustreret begreberne: Åbne, afsluttede, begrænsede, og stjerneformede mængder samt defineret det indre af en mængde og det ydre af en mængde. Grafer og niveau-mængder for en funktion er vigtige hjælpemidler til at forstå hvordan funktionsværdierne $f(x,y)$ 'opfører sig' i afhængighed af hvor punktet (x,y) befinder sig i definitionsmængden. Kontinuitet og differentiabilitet (eller mangel på samme) for en funktion kan ofte inspiceres ved at konstruere eller tegne grafen for funktionen eller ved at tegne niveau-mængderne for funktionen.

- Niveaumængden hørende til værdien c for funktionen $f(x,y)$ er givet ved

$$\mathcal{K}_c(f) = \left\{ \, (x,y) \in \mathcal{D}m(f) \;\middle|\; f(x,y) = c \, \right\} \quad . \tag{15-67}$$

- En funktion $f(x,y)$ er kontinuert i (x_0, y_0) hvis $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ er en epsilon-funktion af $x - x_0, y - y_0)$, dvs.

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \varepsilon_f(x - x_0, y - y_0) \quad . \tag{15-68}$$

- En funktion $f(x,y)$ er differentiabel med de partielle afledede $f'_x(x_0,y_0)$ og $f'_x(x_0,y_0)$ i (x_0,y_0) hvis

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \\ &+ \rho_{(x_0,y_0)}(x,y)\cdot\varepsilon_f(x-x_0,y-y_0) \quad . \end{aligned} \tag{15-69}$$

- De partielle afledede af $f(x,y)$ i et punkt (x_0,y_0) kan findes ved at beregne de sædvanlige differentialkvotienter af de to hjælpefunktioner $f_1(x) = f(x,y_0)$ og $f_2(y) = f(x_0,y)$ i henholdsvis x_0 og y_0:

$$f'_x(x_0,y_0) = f'_1(x_0) \quad \text{og} \quad f'_y(x_0,y_0) = f'_2(y_0) \tag{15-70}$$

- Det approksimerende førstegradspolynomium for $f(x,y)$ med udviklingspunkt (x_0,y_0) er givet ved:

$$P_{1,(x_0,y_0)}(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \quad . \tag{15-71}$$

- Tangentplanen til grafen for $f(x,y)$ i punktet $(x_0, y_0, f(x_0,y_0)$ er givet ved:

$$z = P_{1,(x_0,y_0)}(x,y) \quad . \tag{15-72}$$

- Gradientvektorfeltet for en funktion $f(x,y)$ er givet ved:

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(f'_x(x_0,y_0)\,,\ f'_y(x_0,y_0)\right) \quad . \tag{15-73}$$

- Den retningsafledede af $f(x,y)$ i punktet (x_0,y_0) i retningen givet ved en enhedsvektor $\mathbf{e}$ er givet ved:

$$f'((x_0,y_0);\mathbf{e}) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot\mathbf{e} \quad . \tag{15-74}$$