

|||| eNote 27

Stokes' rotationssætning

I denne eNote vil vi benytte Gauss' divergenssætning fra [eNote ??](#) til at motivere, bevise, og illustrere Stokes' sætning, som udtrykker en præcis sammenhæng mellem rotation og cirkulation af et givet vektorfelt: For enhver glat parametriseret flade F_r er fluxen af rotationen af et glat vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z)$ igennem F_r lig med cirkulationen af vektorfeltet langs randkurven ∂F . Som hermed antydet får vi brug for både rum-, flade-, og kurve-integraler samt viden om vektorfelter og deres restriktioner til flader og kurver. Det vil sige, at basismaterialet for nærværende eNote skal findes i en række eNoter: [eNote ??](#) (om plan- og kurve-integraler), [eNote 23](#) (om fladeintegraler), [eNote ??](#) (om vektorfelter), [eNote ??](#) (om tangentIELLE kurveintegraler og cirkulationer), og [eNote ??](#) (om flux-beregninger og Gauss' sætning).

27.1 Stokes' sætning



Figur 27.1: George Gabriel Stokes. Se [Biografi](#).

Stokes' sætning er en af de mest elegante og mest benyttede resultater fra analysen af vektorfelter i rummet. Sætningen har ligesom Gauss' divergenssætning mangfoldige anvendelser - f.eks. i fluid mekanik og i elektromagnetisme.

Her er et citat som fortæller lidt om historien bag resultatet:

The history of Stokes' Theorem is clear but very complicated. It was first given by Stokes without proof - as was necessary since it was given as an examination question for the Smith's Prize Examination of that year [at Cambridge in 1854]! Among the candidates for the prize was Maxwell, who later traced to Stokes the origin of the theorem, which by 1870 was frequently used. On this see George Gabriel Stokes, *Mathematical and Physical Papers*, vol. V (Cambridge, England, 1905), 320–321. See also the important historical footnote which indicates that Kelvin in a letter of 1850 was the first who actually stated the theorem, although others as Ampère had employed "the same kind of analysis ... in particular cases."

M. J. Crowe, [A history of vector analysis, 1967], s. 147.



Figur 27.2: James Clerk Maxwell ([Biografi](#)), William Thomson (Lord Kelvin) ([Biografi](#)), og André-Marie Ampère ([Biografi](#)).

Som antydet er Stokes' resultat af samme kaliber som Gauss' divergens-sætning. De er begge to medlemmer af en 'familie' af resultater, hvor hovedideen er at omskrive et integral over et område til en andet integral over områdets rand - altså så at sige 'skubbe integrationen ud på randen'. Det ældste medlem af den familie er Integralregningens fundamental-sætning, jvf. [sætning ?? eNote ??](#) som vi gentager her med følgende formulering:

||| Sætning 27.1 Integralregningens fundamentalsætning

Lad $f(u)$ betegne en kontinuert funktion på \mathbb{R} . Så er følgende funktion differentiabel

$$A(x) = \int_0^x f(u) du \quad \text{med} \quad A'(x) = f(x) . \quad (27-1)$$

Hvis $F(x)$ er en (anden) funktion, som opfylder $F'(x) = f(x)$, så er

$$\int_a^b f(u) du = F(b) - F(a) . \quad (27-2)$$

Her er nu formuleringen af Stokes' sætning:

||| Sætning 27.2 Stokes' sætning

Lad F_r betegne en glat parametriseret flade med randkurven ∂F_r og enheds-normalvektorfelt \mathbf{n}_F og lad \mathbf{V} være et glat vektorfelt i \mathbb{R}^3 . Så gælder

$$\int_F \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_F d\mu = \int_{\partial F} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_{\partial F} d\mu . \quad (27-3)$$

Ved beregning af højresiden skal orienteringen (givet ved retningen af enheds-tangent-vektorfeltet $\mathbf{e}_{\partial F}$) af randen vælges således at krydsproduktet $\mathbf{e}_{\partial F} \times \mathbf{n}_F$ peger væk fra fladen langs med randen.



Stokes' sætning udtrykker altså – ligesom (27-2) – at et indre integral (her på et fladestykke) kan udtrykkes som et rand-integral (langs fladestykets rand). Stokes' sætning kan også formuleres som følger, idet vi henviser til definitionerne af flux og cirkulation i henholdsvis eNote ?? og eNote ??:

$$\text{Flux}(\mathbf{Rot}(\mathbf{V}), F_r) = \text{Cirk}(\mathbf{V}, \partial F) . \quad (27-4)$$

Det vil sige: Fluxen af *rotationen af* vektorfeltet \mathbf{V} igennem fladen F_r er lig med *cirkulationen af* vektorfeltet langs fladestykets lukkede randkurve ∂F .



Læg mærke til, at hvis F_r er *hele* overfladen af et rumligt område, så er $\partial F = \emptyset$, og derfor følger det af Stokes' sætning at

$$\text{Flux}(\text{Rot}(\mathbf{V}), F_r) = 0 \quad (27-5)$$

i overensstemmelse med den følgesætning fra Gauss' divergenssætning som er nævnt i [sætning ??](#) i eNote ??.

27.2 Motivering af – og et bevis for – Stokes' sætning

Vi får brug for følgende resultat, som også er nævnt i [afsnit ??](#) i eNote ??:

||| Sætning 27.3

Lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ og $\mathbf{W}(x, y, z)$ betegne to vektorfelter i \mathbb{R}^3 . Så gælder følgende identitet

$$\text{Div}(\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = \text{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{W} - \mathbf{V} \cdot \text{Rot}(\mathbf{W}) . \quad (27-6)$$

Specielt har vi derfor: Hvis \mathbf{W} er et gradient-vektorfelt for en funktion $\psi(x, y, z)$ i \mathbb{R}^3 , dvs. $\mathbf{W} = \nabla(\psi)$, så får vi fra $\text{Rot}(\nabla(\psi)) = \mathbf{0}$:

$$\text{Div}(\mathbf{V} \times \nabla(\psi)) = \text{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \nabla(\psi) . \quad (27-7)$$

Ved at bruge Gauss' divergens-sætning ([sætning ??](#) eNote ??) i forbindelse med (27-7) får vi direkte et interessant resultat om integraler over rumlige områder således:

||| Sætning 27.4 En konsekvens af Gauss' divergenssætning

Lad $\psi(x, y, z)$ betegne en glat funktion og $\mathbf{V}(x, y, z)$ et glat vektorfelt i \mathbb{R}^3 . Lad Ω være et rumligt område med randen $\partial\Omega$ og udadrettet enheds-normalvektorfelt $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ på $\partial\Omega$.

Så har vi direkte fra Gauss' sætning ??:

$$\int_{\Omega} \operatorname{Div}(\mathbf{V} \times \nabla(\psi)) d\mu = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{V} \times \nabla(\psi)) \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} d\mu . \quad (27-8)$$

Ved brug af (27-7) har vi derfor også

$$\int_{\Omega} \operatorname{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \nabla(\psi) d\mu = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n}_{\partial\Omega} \times \mathbf{V}) \cdot \nabla(\psi) d\mu . \quad (27-9)$$



På højresiden i ligning (27-9) har vi benyttet, at rumproduktet $[\mathbf{abc}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ af tre vektorer \mathbf{a} , \mathbf{b} , og \mathbf{c} tilfredsstiller følgende identiteter (hvoraf vi har brugt den første):

$$[\mathbf{abc}] = [\mathbf{cab}] = [\mathbf{bca}] = -[\mathbf{bac}] = -[\mathbf{cba}] = -[\mathbf{acb}] . \quad (27-10)$$

Specielt får vi den totale rotationsvektor af vektorfeltet \mathbf{V} i Ω således:

||| Følgesætning 27.5 Totale rotation i et rumligt område

Lad Ω være et rumligt område med randen $\partial\Omega$ og udadrettet enheds-normalvektorfelt $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ på $\partial\Omega$. Så gælder for ethvert glat vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z)$:

$$\int_{\Omega} \operatorname{Rot}(\mathbf{V}) d\mu = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n}_{\partial\Omega} \times \mathbf{V} d\mu . \quad (27-11)$$

||| Bevis

Dette følger direkte af (27-9) ved at vælge, skiftevis, $\psi(x, y, z) = x$, $\psi(x, y, z) = y$, og $\psi(x, y, z) = z$, således at $\nabla(\psi)$ er henholdsvis $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, og $(0, 0, 1)$.

■

Højresiden af ligningen (27-11) vil vi tillade os at kalde *den totale vridning* af fladen $\partial\Omega$

med vektorfeltet \mathbf{V} med hensyn til normalvektorfeltet $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ og iøvrigt betegne denne vektor med $\mathbf{Vrid}(\mathbf{V}, \partial\Omega)$ således:

||| Definition 27.6 Vridning

Lad F_r betegne en glat flade i rummet med standard enheds-normalvektorfelt \mathbf{n}_F , og lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ være et glat vektorfelt. Så definerer vi vridningen af F_r med vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z)$ på følgende måde:

$$\mathbf{Vrid}(\mathbf{V}, F_r) = \int_{F_r} \mathbf{n}_F \times \mathbf{V} \, d\mu \quad . \quad (27-12)$$

Generelt er den totale rotation af et givet vektorfelt i et rumligt område (også kaldet 'total vorticity' i fluid mekanik) altså – via 27.5 – lig med vridningen af områdets overflade med vektorfeltet. Dette minder meget om Gauss' tilsvarende identitet for den totale divergens af et glat vektorfelt, [sætning ??](#): Den totale divergens af vektorfeltet i et område er lig med fluxen af vektorfeltet ud igennem overfladen af området.

I lighed med [sætning ??](#) har vi da også følgende tolkning og konstruktion af rotationsvektoren i et givet punkt:

||| Sætning 27.7

Rotationen af et vektorfelt udtrykker *den volumen-relative lokale vridning af overfladen* for vektorfeltet i følgende forstand: Lad K_ρ betegne en massiv kugle med radius ρ og centrum i punktet (x_0, y_0, z_0) . Så gælder:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\text{Vol}(K_\rho)} \mathbf{Vrid}(\mathbf{V}, \partial K_\rho) \right) = \mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x_0, y_0, z_0) \quad . \quad (27-13)$$

Sætning 27.7 indses på samme måde som for den analoge identitet for divergensen. Vektorfeltet udvikles til første orden med udviklingspunkt p og indsættes i vridningsudtrykket, hvorefter følgende identiteter benyttes:



$$\begin{aligned}\int_{\partial K_\rho} x \, d\mu &= \int_{\partial K_\rho} y \, d\mu = \int_{\partial K_\rho} z \, d\mu = 0 \quad , \\ \int_{\partial K_\rho} x^2 \, d\mu &= \int_{\partial K_\rho} y^2 \, d\mu = \int_{\partial K_\rho} z^2 \, d\mu = (4\pi/3)\rho^4 = \rho \operatorname{Vol}(K_\rho) \quad , \\ \int_{\partial K_\rho} xy \, d\mu &= \int_{\partial K_\rho} xz \, d\mu = \int_{\partial K_\rho} zy \, d\mu = 0 \quad .\end{aligned}\tag{27-14}$$

De eneste partielle afledeede af vektorfeltets koordinatfunktioner, der ikke integreres væk, er præcis dem, der optræder i rotationsvektoren $\operatorname{Rot}(\mathbf{V})$ når denne evalueres i p . Prøv det!

||| Eksempel 27.8 Lokal vridning af kugleflade giver rotationsvektoren

Vi ser på et roterende vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z) = (-y, x, 1)$. Dette felt har den konstante rotation $\operatorname{Rot}(\mathbf{V}) = (0, 0, 2)$. Vi vil vise, hvordan $\operatorname{Vrid}(\mathbf{V}, \partial K_\rho)$ netop giver denne rotation i punktet $(0, 0, 0)$. Lad altså K_ρ betegne den kugleflade, der har radius ρ , centrum i $(0, 0, 0)$, og overflade ∂K_ρ med udadrettet normalvektorfelt $\mathbf{n} = \frac{1}{\rho}(x, y, z)$. Så er

$$\begin{aligned}\operatorname{Vrid}(\mathbf{V}, \partial K_\rho) &= \int_{\partial K_\rho} \mathbf{n}_{\partial K} \times \mathbf{V} \, d\mu \\ &= \frac{1}{\rho} \int_{\partial K_\rho} (x, y, z) \times (-y, x, 1) \, d\mu \\ &= \frac{1}{\rho} \int_{\partial K_\rho} (y - xz, -x - yz, x^2 + y^2) \, d\mu \\ &= (0, 0, 2 \operatorname{Vol}(K_\rho)) \\ &= \operatorname{Vol}(K_\rho) \operatorname{Rot}(\mathbf{V})(0, 0, 0) \quad ,\end{aligned}$$

i overensstemmelse med sætning 27.7.



I mere komplicerede tilfælde kan den totale vridning af en flade med et givet vektorfelt beregnes med Maple. Hvis den aktuelle flade er randoverfladen af et givet rumligt område kan vridningen også beregnes som integralet af det tilhørende rotationsvektorfelt over det rumlige område. Derved muliggøres naturligvis også konkrete eftervisninger af ligning (27-11).

27.2.1 Fladen, randen, og normal-vektorfeltet

De flader, der betragtes i Stokes' sætning er parametriserede på sædvanlig vis:

$$F_{\mathbf{r}} : \quad \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3 , \quad (27-15)$$

hvor

$$(u, v) \in D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 . \quad (27-16)$$

Randen $\partial F_{\mathbf{r}}$ af $F_{\mathbf{r}}$ fremkommer ved at bruge vektorfunktionen \mathbf{r} på de 4 rette linjestykker, der udgør randen ∂D af det rektangulære parameterområde $D = [a, b] \times [c, d]$. Vi parametriserer hele ∂D på én gang ved hjælp af en parameter θ og en vektor-funktion \mathbf{d} :

$$\partial D : \quad \mathbf{d}(\theta) = (u(\theta), v(\theta)) \in \partial D \subset \mathbb{R}^2 , \quad \theta \in I \subset \mathbb{R} ,$$

hvor $u(\theta)$ og $v(\theta)$ kun er stykkevis differentiable funktioner af θ . De kan f.eks. vælges som lineære funktioner af θ for hvert enkelt af de 4 linjestykker der udgør ∂D .

Randen af $F_{\mathbf{r}}$ er så

$$\partial F_{\mathbf{r}} : \quad \mathbf{b}(\theta) = \mathbf{r}(\mathbf{d}(\theta)) = \mathbf{r}(u(\theta), v(\theta)) \in \mathbb{R}^3 , \quad \theta \in I \subset \mathbb{R} .$$

Jacobi-funktionerne for \mathbf{r} og \mathbf{b} er henholdsvis:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = \|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\| , \quad \text{og} \quad (27-17)$$

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{b}}(\theta) = \|\mathbf{b}'_\theta\| . \quad (27-18)$$

Regulariteten af \mathbf{r} giver

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) > 0 \quad \text{for all } (u, v) \in D .$$

Enheds-normalvektorfeltet langs $F_{\mathbf{r}}$ er tilsvarende $\mathbf{n}_F = \mathbf{n}(u, v)$:

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{\|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\|} \quad \text{for alle } (u, v) \in D . \quad (27-19)$$

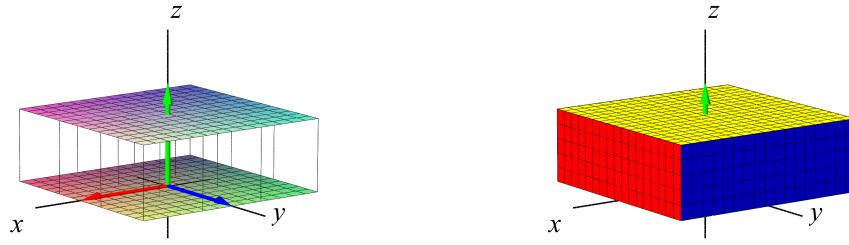
27.2.2 Tubulære skaller og en afstandsfunktion

Vi definerer den tubulære skal med tykkelse t ud fra $F_{\mathbf{r}}$ som følgende område i \mathbb{R}^3 :

$$\Omega_t : \quad \mathbf{R}(u, v, w) = \mathbf{r}(u, v) + w \mathbf{n}(u, v) , \quad (u, v) \in D , \quad w \in [0, t] . \quad (27-20)$$

Specielt er fladen $F_{\mathbf{r}}$ netop basis-fladen for skallen og fås ved at bruge afbildningen \mathbf{R} på D (hvor $w = 0$):

$$F_0 = F_{\mathbf{R}}(0) = F_{\mathbf{r}} : \quad \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{R}(u, v, 0) , \quad (u, v) \in D . \quad (27-21)$$



Figur 27.3: En tubulær skal der er defineret ved flow langs *enheds-normalvektorfeltet* \mathbf{n}_F fra et kvadrat.

Tilsvarende får vi, for $w = t$, top-fladen af skallen. Den er parametriseret således:

$$F_t = F_{\mathbf{R}}(t) = F_{\hat{\mathbf{r}}} : \hat{\mathbf{r}}(u, v) = \mathbf{R}(u, v, t), (u, v) \in D . \quad (27-22)$$

Jacobi-funktionen for \mathbf{R} er

$$\begin{aligned} \text{Jacobi}_{\mathbf{R}}(u, v, w) &= |(\mathbf{R}'_u \times \mathbf{R}'_v) \cdot \mathbf{R}'_w| \\ &= |((\mathbf{r}'_u + w \mathbf{n}'_u) \times (\mathbf{r}'_v + w \mathbf{n}'_v)) \cdot \mathbf{n}_F| . \end{aligned} \quad (27-23)$$

Da \mathbf{n}_F er et enhedsvektorfelt som er parallelt med $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ langs $F_{\mathbf{r}}$, får vi specielt (for $w = 0$):

$$\begin{aligned} \text{Jacobi}_{\mathbf{R}}(u, v, 0) &= |(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) \cdot \mathbf{n}_F| \\ &= \|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\| \\ &= \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) > 0 . \end{aligned} \quad (27-24)$$

Afbildningen \mathbf{R} er regulær og bijektiv på $D \times [0, t]$ - hvis blot t er tilstrækkelig lille. Det følger dels af $\text{Jacobi}_{\mathbf{R}}(u, v, 0) > 0$ og dels af kontinuiteten af $\text{Jacobi}_{\mathbf{R}}(u, v, w)$.

Værdien af w betragtet som en funktion på $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ er en differentiabel funktion af de tre rum-variable (x, y, z) . Selv om dette kan forekomme at være helt tydeligt, rent intuitivt, så er det faktisk et resultat, der finder sin bedste formulering og begrundelse i den såkaldte *invers funktions-sætning*, som dyrkes i kurset **Matematik 3**:



Figur 27.4: En tubulær skal der er defineret ved flow langs *enheds-normalvektorfeltet* \mathbf{n}_F fra et fladestykke af en kugleflade.

||| Sætning 27.9 Invers funktionssætning

Lad Q betegne en åben mængde i \mathbb{R}^3 og lad $\mathbf{f} : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ betegne en differentiabel bijektiv afbildning med $\text{Jacobi}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) > 0$ for alle $\mathbf{x} \in Q$.

Så er den omvendte afbildning $\mathbf{f}^{\circ -1} : \mathbf{f}(Q) \rightarrow Q$ også differentiabel med $\text{Jacobi}_{\mathbf{f}^{\circ -1}}(\mathbf{y}) > 0$ for alle $\mathbf{y} \in \mathbf{f}(Q)$.

Intuitionen er altså i dette tilfælde præcis og korrekt. Når t er tilstrækkelig lille, så er w en differentiabel funktion af de tre rum-variable, (x, y, z) ; lad os kalde den funktion $h(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Omega_t$. Den funktion har så en egentlig gradient $\nabla(h)(x, y, z)$, som er vinkelret på niveaufladerne for h . Specielt er $\nabla(h)$ vinkelret på top-fladen $F_t = F_{\mathbf{R}}(t)$ af skallen Ω_t , hvor $h = t$ og den er tilsvarende vinkelret på basis-fladen $F_0 = F_{\mathbf{R}}(0) = F_{\mathbf{r}}$, hvor $h = 0$.

Gradienten $\nabla(h)$ er faktisk præcis lig med \mathbf{n}_F på basis-fladen. For at indse dette behøver vi kun at vise, at længden af gradienten der er 1. Retningen er jo den samme. Lad derfor (u_0, v_0) betegne et punkt i D og betragt restriktionen af h til den rette linje $\mathbf{r}(u_0, v_0) + w\mathbf{n}(u_0, v_0)$, hvor $w \in [0, t]$. Lad os benytte notationen $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ og $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}(u_0, v_0)$.

Så giver kædereglen

$$\begin{aligned} 1 &= \left| \frac{d}{dw} h(\mathbf{r}_0 + w \mathbf{n}_0) \right| \\ &= |\mathbf{n}_0 \cdot \nabla(h)(\mathbf{r}_0 + w \mathbf{n}_0)| \\ &= \|\nabla(h)(\mathbf{r}_0 + w \mathbf{n}_0)\| , \end{aligned} \quad (27-25)$$

således at vi på fladen F_r , hvor $w = 0$, har $\|\nabla(h)(\mathbf{r}_0)\| = 1$. Det var det, vi skulle vise.
Vi har derfor:

$$\nabla(h)|_F = \mathbf{n}_F . \quad (27-26)$$



Funktionen $h(x, y, z)$ er den *Euklidiske afstand* fra punktet (x, y, z) til fladen F_r . Lokalt, dvs. tilstrækkeligt tæt på (og i normalretningen af) fladen F_r er $\nabla h(x, y, z)$ en *udvidelse* af enhedsnormalvektorfeltet \mathbf{n}_F til fladen. Vektorfeltet $\nabla h(x, y, z)$ er selv et enhedsvektorfelt. Ved at lade F_r flyde tiden t langs flowkurverne for $\nabla h(x, y, z)$ dannes (udfejes) det rumlige område, den massive skal, Ω_t , se figurerne 27.3, 27.4.

27.2.3 Integration i skallen

For en funktion $f(x, y, z)$ som er defineret i Ω_t fås integralet af f over området således:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_t} f d\mu \\ &= \int_0^t \left(\int_D f(\mathbf{R}(u, v, w)) \text{Jacobi}_{\mathbf{R}}(u, v, w) du dv \right) dw . \end{aligned} \quad (27-27)$$

Den t -aflede af dette integral er, for $t = 0$, simpelthen fladeintegralet af f over F_r :

||| Hjælpesætning 27.10 Fladeintegral som t -afleddet af rumintegral

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{|t=0} \int_{\Omega_t} f d\mu = \int_{F_r} f d\mu . \quad (27-28)$$

||| Bevis

Det følger direkte af fundamentalsætningen 27.1:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{d}{dt} \right)_{|t=0} \int_{\Omega_t} f d\mu \\
 &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{|t=0} \int_0^t \left(\int_D f(\mathbf{R}(u, v, w)) \text{Jacobi}_{\mathbf{R}}(u, v, w) du dv \right) dw \\
 &= \int_D f(\mathbf{R}(u, v, 0)) \text{Jacobi}_{\mathbf{R}}(u, v, 0) du dv \\
 &= \int_D f(\mathbf{r}(u, v)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) du dv \\
 &= \int_{F_r} f d\mu \quad .
 \end{aligned} \tag{27-29}$$

■

27.2.4 The Wall - Væggen

Skallen Ω_t har en rand $\partial\Omega_t$ som består af top-fladen F_t , basis-fladen $F_0 = F_r = F_{\mathbf{R}}(0)$ og en 'væg' W_t med højden t . Se figurerne 27.3 og 27.4. Væg-komponenten fås ved restriktion af afbildningen \mathbf{R} til $\partial D \times [0, t]$ således:

$$\begin{aligned}
 W_t : \quad \mathbf{B}(\theta, w) &= \mathbf{R}(u(\theta), v(\theta), w) \\
 &= \mathbf{r}(u(\theta), v(\theta)) + w \mathbf{n}(u(\theta), v(\theta)) \\
 &= \mathbf{b}(\theta) + w \mathbf{n}(\mathbf{d}(\theta)), \quad \theta \in I, \quad w \in [0, t] \quad .
 \end{aligned} \tag{27-30}$$

Jacobi-funktionen for denne afbildning er derfor

$$\begin{aligned}
 \text{Jacobi}_{\mathbf{B}}(\theta, w) &= \|\mathbf{B}'_\theta \times \mathbf{B}'_w\| \\
 &= \|(\mathbf{b}'_\theta + w (\mathbf{n} \circ \mathbf{d})'_\theta) \times \mathbf{n}_F\| \quad .
 \end{aligned} \tag{27-31}$$

Da \mathbf{n}_F står vinkelret på fladen F_r og derfor også på randen ∂F_r (parametriseret via \mathbf{b}), får vi:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{B}}(\theta, 0) = \|\mathbf{b}'_\theta \times \mathbf{n}_F\| = \|\mathbf{b}'_\theta\| = \text{Jacobi}_{\mathbf{b}}(\theta) \quad . \tag{27-32}$$

27.2.5 Integration langs væggen

For en given funktion $g(x, y, z)$ defineret på W_t fås integralet af g over den flade:

$$\int_{W_t} g d\mu = \int_0^t \left(\int_I g(\mathbf{B}(\theta, w)) \text{Jacobi}_{\mathbf{B}}(\theta, w) d\theta \right) dw \quad . \tag{27-33}$$

Den t -aflede af dette integral er, for $t = 0$, kurve-integralet af g over ∂F :

||| Hjælpesætning 27.11 Kurveintegral som t -afleddet af fladeintegral

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{|t=0} \int_{W_t} g d\mu = \int_{\partial F} g d\mu . \quad (27-34)$$

||| Bevis

Det følger igen af fundamentalssætningen, Sætning 27.1:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} \right)_{|t=0} \int_{W_t} g d\mu \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{|t=0} \int_0^t \left(\int_I g(\mathbf{B}(\theta, w)) \text{Jacobi}_{\mathbf{B}}(\theta, w) d\theta \right) dw \\ &= \int_I g(\mathbf{B}(\theta, 0)) \text{Jacobi}_{\mathbf{B}}(\theta, 0) d\theta \\ &= \int_I g(\mathbf{b}(\theta)) \text{Jacobi}_{\mathbf{b}}(\theta) d\theta \\ &= \int_{\partial F} g d\mu . \end{aligned} \quad (27-35)$$

■

27.2.6 Bevis for Stokes' sætning

Vi er nu parate til at bevise Sætning 27.2.

||| Bevis

Funktionen $h(x, y, z)$ fra det foregående afsnit 27.2.2 indsættes i stedet for $\psi(x, y, z)$ i Sætning 27.4, ligning (27-9). Med integrations-området $\Omega = \Omega_t$ får vi så:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \nabla(h) d\mu \\ &= \int_{\partial \Omega_t} (\mathbf{n}_{\partial \Omega_t} \times \mathbf{V}) \cdot \nabla(h) d\mu \\ &= \int_{F_t} (\mathbf{n}_{F_t} \times \mathbf{V}) \cdot \nabla(h) d\mu \\ &\quad - \int_{F_0} (\mathbf{n}_{F_0} \times \mathbf{V}) \cdot \nabla(h) d\mu \\ &\quad + \int_{W_t} (\mathbf{n}_{W_t} \times \mathbf{V}) \cdot \nabla(h) d\mu . \end{aligned} \quad (27-36)$$

Men i ligning (27-36) har vi

$$\begin{aligned} \int_{F_t} (\mathbf{n}_{F_t} \times \mathbf{V}) \cdot \nabla(h) d\mu &= 0 \quad \text{og} \\ \int_{F_0} (\mathbf{n}_{F_0} \times \mathbf{V}) \cdot \nabla(h) d\mu &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (27-37)$$

idet $\nabla(h)$ er vinkelret på begge fladerne F_t og F_0 således at $\nabla(h)$ er proportional med henholdsvis \mathbf{n}_{F_t} og \mathbf{n}_{F_0} på de respektive flader.

Langs $\partial F \subset W_t$ har vi $\mathbf{n}_{W_t} = \mathbf{e}_{\partial F} \times \mathbf{n}_F$ og derfor $\mathbf{e}_{\partial F} = \mathbf{n}_F \times \mathbf{n}_{W_t}$ - i overensstemmelse med orienterings-reglen i Sætning 27.2. Hvis vi t -afleder begge sider af den reducerede ligning (27-36) får vi:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d}{dt} \right)_{|t=0} \int_{\Omega_t} \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \nabla(h) d\mu \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{|t=0} \int_{W_t} (\mathbf{n}_{W_t} \times \mathbf{V}) \cdot \nabla(h) d\mu \quad , \end{aligned} \quad (27-38)$$

således at vi endelig har - i kraft af ligningerne (27-28) og (27-34):

$$\begin{aligned} &\int_F \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_F d\mu \\ &= \int_{\partial F} (\mathbf{n}_{W_t} \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_F d\mu \\ &= \int_{\partial F} \mathbf{V} \cdot (\mathbf{n}_F \times \mathbf{n}_{W_t}) d\mu \\ &= \int_{\partial F} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_{\partial F} d\mu \quad . \end{aligned} \quad (27-39)$$

Stokes' sætning er dermed bevist. ■

27.3 Verificering af Stokes' sætning i konkrete eksempler

I lighed med Gauss' divergens-sætning kan Stokes' sætning verificeres ved i konkrete givne tilfælde at beregne *begge sider* af identiteten (27-3) i Stokes' sætning.

||| Eksempel 27.12 Stokes' sætning med en cirkelskive

En standard cirkelskive i (x, y) -planen er givet ved sin sædvanlige parameterfremstilling:

$$F_r : \mathbf{r}(u, v) = (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), 0) \quad , \quad (u, v) \in [0, 1] \times [-\pi, \pi] \quad (27-40)$$

med Jacobifunktionen

$$\text{Jacobi}_r(u, v) = u \quad , \quad (27-41)$$

standard enhedsnormalvektorfelt til fladen

$$\mathbf{n}_F = (0, 0, 1) \quad , \quad (27-42)$$

og standard enheds-tangentvektorfelt langs den *cirkulære* rand ∂F :

$$\mathbf{e}_{\partial F} = \mathbf{r}'_v(1, v) = (-\sin(v), \cos(v), 0) \quad . \quad (27-43)$$



Bemærk, at det er $\mathbf{r}(1, v)$, $v \in [-\pi, \pi]$, der giver *hele randen*, at $\mathbf{r}'_v(1, v)$ er en enhedsvektor for alle v , og at $\mathbf{r}'_v(1, v) \times \mathbf{n}_F$ peger væk fra cirkelskiven langs hele randkurven.

Et glat vektorfelt i rummet er givet ved sine koordinatfunktioner således:

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (x \cdot y, x, x^2) \quad , \quad (27-44)$$

og har det tilhørende rotationsvektorfelt

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x, y, z) = (0, -2 \cdot x, 1 - x) \quad . \quad (27-45)$$

Vi vil verificere Stokes' sætning ved at beregne "begge sider" af ligning (27-3) i dette konkrete tilfælde.

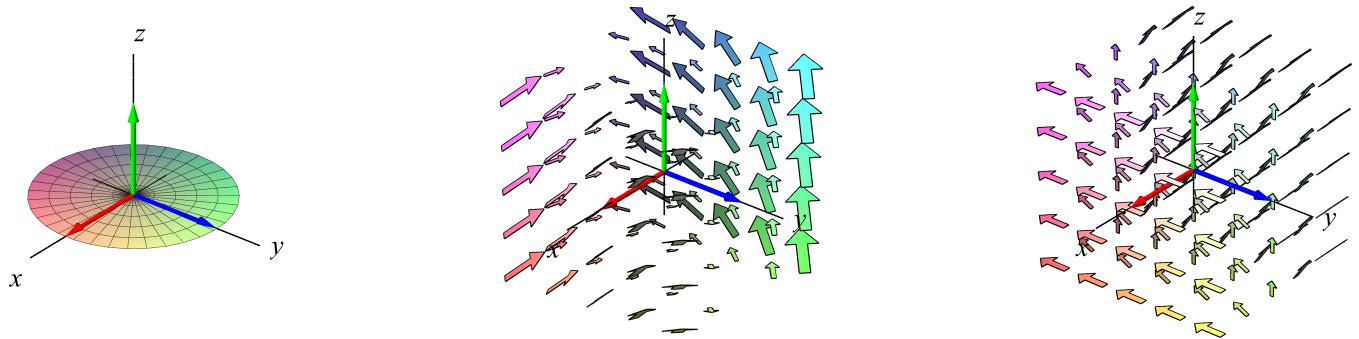
Den totale flux af vektorfeltet $\mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x, y, z)$ igennem F_r i retning af standard-enhedsnormalen $\mathbf{n}_F = (0, 0, 1)$ er

$$\begin{aligned} \text{Flux}(\mathbf{Rot}(\mathbf{V}), F_r) &= \int_{F_r} \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_F d\mu \\ &= \int_{F_r} (1 - x) d\mu \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 (1 - u \cdot \cos(v)) \cdot u du dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \cos(v) \right) dv \\ &= \pi \quad . \end{aligned} \quad (27-46)$$

Cirkulationen af vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z)$ langs ∂F_r i retning af standard-enheds-tangentvektorfeltet $\mathbf{e}_{\partial F} = (-\sin(v), \cos(v), 0)$ er

$$\begin{aligned} \text{Cirk}(\mathbf{V}, \partial F) &= \int_{\partial F} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_{\partial F} d\mu \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{V}(\mathbf{r}(1, v)) \cdot (-\sin(v), \cos(v), 0) dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(v) \cdot \sin(v), \cos(v), *) \cdot (-\sin(v), \cos(v), 0) dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (-\cos(v) \cdot \sin^2(v) + \cos^2(v)) dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(v) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2(v) + \sin^2(v)) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dv \\ &= \pi \quad . \end{aligned} \quad (27-47)$$

Begge sider i ligningen (27-3) giver altså π i dette eksempel – og vi har derfor verificeret Stokes' sætning.



Figur 27.5: En cirkelskive i et vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z) = (x \cdot y, x, x^2)$ (i midten) og vektorfeltets rotationsvektorfelt $\text{Rot}(\mathbf{V})(x, y, z) = (0, -2 \cdot x, 1 - x)$.

||| Eksempel 27.13 Stokes' sætning med en paraboloid

Et udsnit af en paraboloid er givet ved en parameterfremstilling således:

$$F_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u, v) = (2 \cdot u \cdot \cos(v), 2 \cdot u \cdot \sin(v), u^2) , \quad (27-48)$$

hvor

$$(u, v) \in [1/2, 1] \times [0, \pi] \quad (27-49)$$

Parameterfremstillingen har Jacobifunktionen

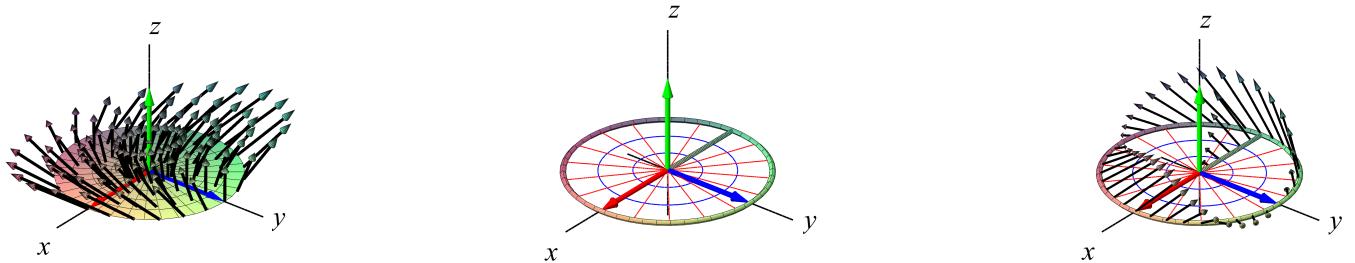
$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = 4 \cdot u \cot \sqrt{1 + u^2} , \quad (27-50)$$

og standard-normalvektorfeltet (ikke nødvendigvis enheds-vektorer) til fladen er givet ved

$$\mathbf{N}_F(u, v) = \mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v) = (-4 \cdot u^2 \cdot \cos(v), -4 \cdot u^2 \cdot \sin(v), 4 \cdot u) . \quad (27-51)$$

Et glat vektorfelt i rummet er givet ved sine koordinatfunktioner således:

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (z, y, -x) , \quad (27-52)$$



Figur 27.6: Restriktionen af rotationsvektorfeltet $\text{Rot}(\mathbf{V})(x, y, z) = (0, -2 \cdot x, 1 - x)$ til en cirkelskive, cirkelskivens rand, og vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (x \cdot y, x, x^2)$ restringeret til randen.

med det tilhørende rotationsvektorfelt

$$\text{Rot}(\mathbf{V})(x, y, z) = (0, 2, 0) . \quad (27-53)$$

Vi vil verificere Stokes' sætning ved at beregne "begge sider" af ligning (27-3) i dette konkrete tilfælde.

Den totale flux af vektorfeltet $\text{Rot}(\mathbf{V})(x, y, z)$ igennem F_r i retning af standardenhedsnormalen er, idet vi benytter normalvektorfeltet $\mathbf{N}_F(u, v)$ direkte:

$$\begin{aligned} \text{Flux}(\text{Rot}(\mathbf{V}), F_r) &= \int_{F_r} \text{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_F \, d\mu \\ &= \int_0^\pi \int_{1/2}^1 \text{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{N}_F(u, v) \, du \, dv \\ &= \int_0^\pi \int_{1/2}^1 (-8 \cdot u^2 \cdot \sin(v)) \, du \, dv \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{-7}{3} \cdot \sin(v) \right) \, dv \\ &= \frac{-14}{3} . \end{aligned} \quad (27-54)$$

Cirkulationen af vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z)$ langs ∂F_r i retning af den korrekt orienterede randkurve består af fire komponenter. De fås fra fladens parameterfremstilling $\mathbf{r}(u, v)$ dels ved at fastholde v til at være henholdsvis 0 og π , og dels ved at fastholde u til at være henholdsvis $1/2$ og 1 , idet det i hvert tilfælde samtidigt sikres, at den frie parameter løber den 'rigtige

vej', dvs. således at alle fire randkomponenter får den rette orientering i forhold til fladens normalvektorfelt:

$$\begin{aligned}\partial_1 F : \quad & \mathbf{r}_1(u) = \mathbf{r}(u, 0) = (2 \cdot u, 0, u^2) , \quad u \in [1/2, 1] \\ & \mathbf{r}'_1(u) = (2, 0, 2 \cdot u) \\ & \mathbf{V}(\mathbf{r}_1(u)) = (u^2, 0, -2 \cdot u) \\ & \mathbf{r}'_1(u) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}_1(u)) = -2 \cdot u^2 ,\end{aligned}\tag{27-55}$$

$$\begin{aligned}\partial_3 F : \quad & \mathbf{r}_3(u) = \mathbf{r}(1 - u + 1/2, v) = (-3 + 2 \cdot u, 0, (-3/2 + u)^2) , \quad u \in [1/2, 1] \\ & \mathbf{r}'_3(u) = (2, 0, 2 \cdot u - 3) \\ & \mathbf{V}(\mathbf{r}_3(u)) = ((-3/2 + u)^2, 0, 3 - 2 \cdot u) \\ & \mathbf{r}'_3(u) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}_3(u)) = \frac{-9}{2} + 6 \cdot u - 2 \cdot u^2 ,\end{aligned}\tag{27-56}$$

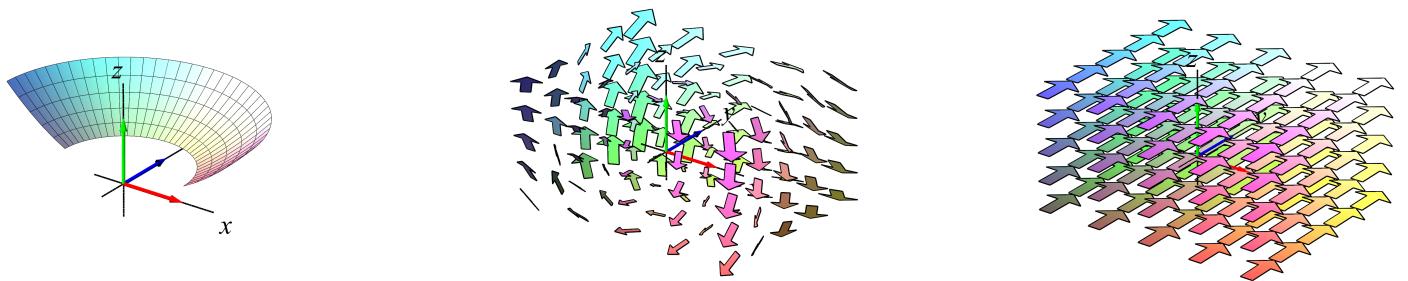
$$\begin{aligned}\partial_2 F : \quad & \mathbf{r}_2(v) = \mathbf{r}(1, v) = (2 \cdot \cos(v), 2 \cdot \sin(v), 1) , \quad v \in [0, \pi] \\ & \mathbf{r}'_2(v) = (-2 \cdot \sin(v), 2 \cdot \cos(v), 0) \\ & \mathbf{V}(\mathbf{r}_2(v)) = (1, 2 \cdot \sin(v), -2 \cdot \cos(v)) \\ & \mathbf{r}'_2(v) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}_2(v)) = 2 \cdot \sin(v) \cdot (2 \cdot \cos(v) - 1) ,\end{aligned}\tag{27-57}$$

$$\begin{aligned}\partial_4 F : \quad & \mathbf{r}_4(v) = \mathbf{r}(1/2, \pi - v) = (-\cos(v), \sin(v), 1/4) , \quad v \in [0, \pi] \\ & \mathbf{r}'_4(v) = (\sin(v), \cos(v), 0) \\ & \mathbf{V}(\mathbf{r}_4(v)) = \left(\frac{1}{4}, \sin(v), \cos(v)\right) \\ & \mathbf{r}'_4(v) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}_4(v)) = \frac{1}{4} \cdot \sin(v) \cdot (\cos(v) + 1) .\end{aligned}\tag{27-58}$$

Vi har dermed følgende totale cirkulation af $\mathbf{V}(x, y, z)$ langs randen:

$$\begin{aligned}\text{Cirk}(\mathbf{V}, \partial F) &= \sum_{i=1}^4 \text{Cirk}(\mathbf{V}, \partial_i F) \\ &= \sum_{i=1}^4 \int_{\partial_i F} \mathbf{V}(\mathbf{r}_i(t)) \cdot \mathbf{r}'_i(t) \, dt \\ &= \int_{1/2}^1 (-2 \cdot u^2) \, du \\ &\quad + \int_{1/2}^1 \left(\frac{-9}{2} + 6 \cdot u - 2 \cdot u^2\right) \, du \\ &\quad + \int_0^\pi 2 \cdot \sin(v) \cdot (2 \cdot \cos(v) - 1) \, dv \\ &\quad + \int_0^\pi \frac{1}{4} \cdot \sin(v) \cdot (\cos(v) + 1) \, dv \\ &= -\frac{7}{12} - \frac{7}{12} - 4 + \frac{1}{2} = -\frac{14}{3} .\end{aligned}\tag{27-59}$$

Begge sider i ligningen (27-3) giver altså $-14/3$ i dette eksempel, og vi har således igen verificeret Stokes' sætning.



Figur 27.7: Et stykke af en paraboloid i et vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z) = (z, y, -x)$ (i midten) og vektorfeltets rotationsvektorfelt $\text{Rot}(\mathbf{V})(x, y, z) = (0, 2, 0)$.

||| Opgave 27.14

Lad F_r betegne den flade, der har følgende parameterfremstilling og parameter-område:

$$F_r : \mathbf{r}(u, v) = ((1 + u^2) \cos(v), (1 + u^2) \sin(v), \sin(u)) , \quad (27-60)$$

hvor

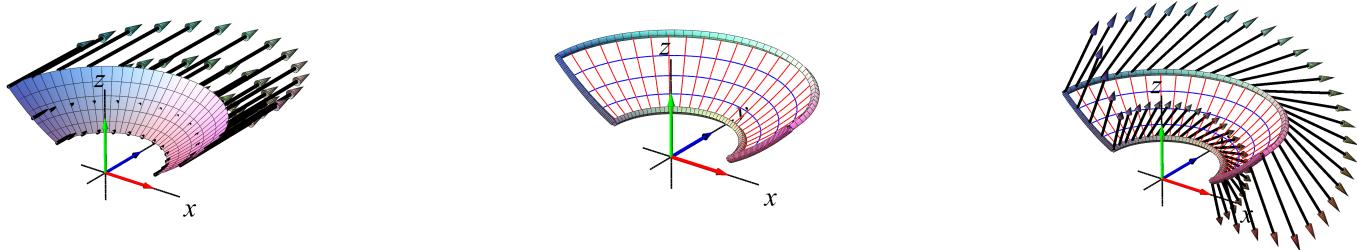
$$(u, v) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\pi, \frac{\pi}{2}] . \quad (27-61)$$

Verificér at Stokes' sætning er opfyldt for vektorfeltet $\mathbf{V} = (yx, yz, xz)$ over fladen F_r med den givne rand ∂F_r .

||| Opgave 27.15

Lad F_r betegne den flade – et såkaldt Möbius-bånd – der har følgende parameterfremstilling og parameter-område:

$$\begin{aligned} F_r : & \mathbf{r}(u, v) \\ &= (2 \cos(u) + v \cos(u/2) \cos(u), 2 \sin(u) + v \cos(u/2) \sin(u), v \sin(u/2)) , \end{aligned} \quad (27-62)$$



Figur 27.8: Restriktionen af rotationsvektorfeltet $\text{Rot}(\mathbf{V})(x, y, z) = (0, 2, 0)$ til et stykke af en paraboloide, fladestykkeets rand, og vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (z, y, -x)$ restringeret til randen.

hvor $(u, v) \in [-\pi, \pi] \times [-1, 1]$. Verificér at Stokes' sætning er opfyldt for vektorfeltet $\mathbf{V} = (-y, x, 1)$ over fladen F_r med den givne rand ∂F_r , se Figur 27.10: Vis eksplisit, at der gælder:

$$\int_F \text{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_F \, d\mu = \int_{\partial F} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_{\partial F} \, d\mu = -32 \quad . \quad (27-63)$$

||| Opgave 27.16

Lad nu G_r betegne det samme Møbius-bånd som i opgave 27.15:

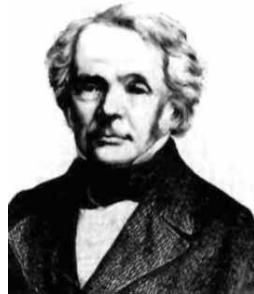
$$\begin{aligned} G_r : \mathbf{r}(u, v) \\ = (2 \cos(u) + v \cos(u/2) \cos(u), 2 \sin(u) + v \cos(u/2) \sin(u), v \sin(u/2)) \end{aligned} \quad , \quad (27-64)$$

men nu med et lidt modificeret parameterområde:

$$(u, v) \in [0, 2\pi] \times [-1, 1] \quad . \quad (27-65)$$

Verificér at Stokes' sætning er opfyldt for vektorfeltet $\mathbf{V} = (-y, x, 1)$ over fladen G_r med den givne rand ∂G_r : Vis eksplisit, at der gælder:

$$\int_{G_r} \text{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_G \, d\mu = \int_{\partial G_r} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_{\partial G} \, d\mu = 0 \quad . \quad (27-66)$$



Figur 27.9: August Ferdinand Möbius, se [Biografi](#).

||| Opgave 27.17

Forklar forskellen mellem de to (værdi-)resultater (henholdsvis -32 og 0), der opnås i henholdsvis (27-63) og (27-66). Vink: Hold øje med normalvektorfeltet \mathbf{n}_F .

Hvilke *værdier* for rotationsflux og cirkulation opnås ved at skifte intervaller i parametriseringen, dvs. ved blot at benytte følgende parameterintervaller for forskellige $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(u, v) \in [-\pi + \alpha, \pi + \alpha] \times [-1, 1] \quad ? \quad (27-67)$$

27.4 Stokes' sætning i planen

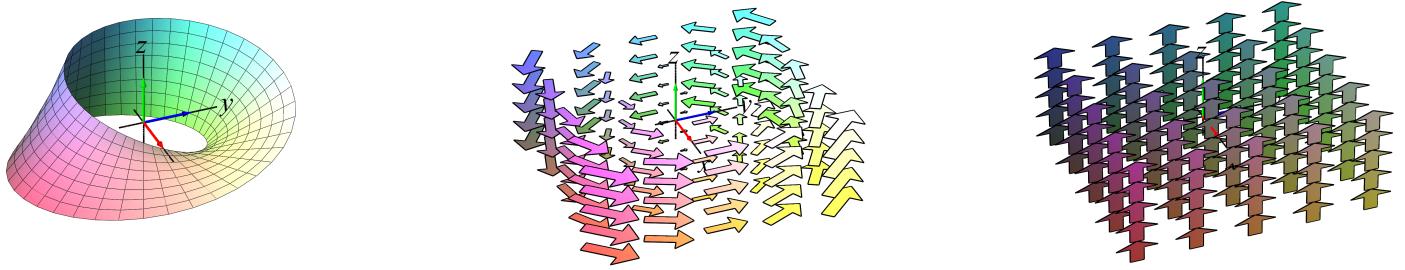
Plane områder, for eksempel områder i (x, y) -planen, kan parametriseres således:

$$F_{\mathbf{r}} : \quad \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), 0) \in \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \in D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 . \quad (27-68)$$

Et plant område har et særligt simpelt enhedsnormal-vektorfelt i rummet, dvs. når vi betragter det plane område som en flade i rummet, der tilfældigvis ligger helt i (x, y) -planen: $\mathbf{n}_F = (0, 0, 1)$.

Med hensyn til randen af det plane område repeterer vi notationen fra afsnit 27.2.1: Randen $\partial F_{\mathbf{r}}$ af $F_{\mathbf{r}}$ fremkommer ved at bruge vektorfunktionen \mathbf{r} på de 4 rette linjestykker, der udgør randen ∂D af det rektangulære parameterområde $D = [a, b] \times [c, d]$. Vi parametriserer hele ∂D på én gang ved hjælp af en parameter θ og en vektor-funktion \mathbf{d} :

$$\partial D : \quad \mathbf{d}(\theta) = (u(\theta), v(\theta)) \in \partial D \subset \mathbb{R}^2, \quad \theta \in I \subset \mathbb{R} ,$$

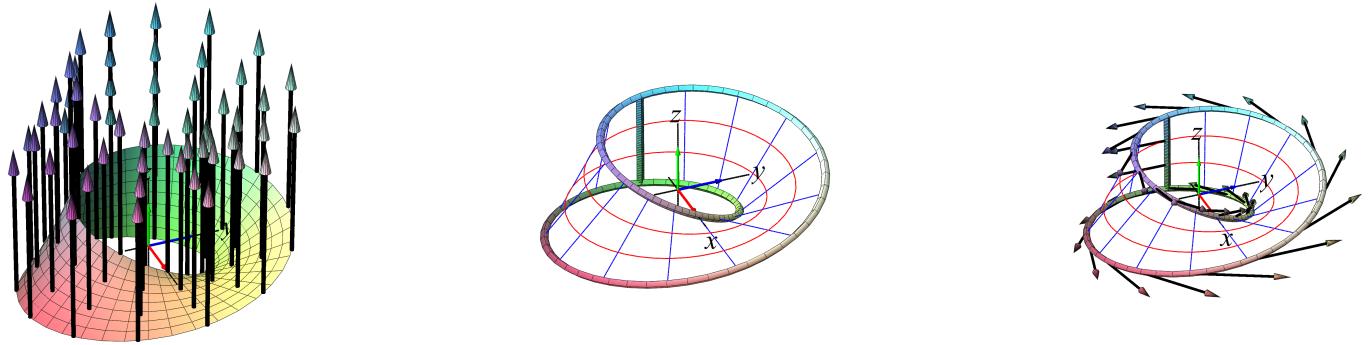


Figur 27.10: Et Möbius bånd i et vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z) = (-y, x, 1)$ (i midten) og vektorfeltets rotationsvektorfelt $\text{Rot}(\mathbf{V})(x, y, z) = (0, 0, 2)$.

hvor $u(\theta)$ og $v(\theta)$ kun er stykkevis differentiable funktioner af θ . De kan f.eks. vælges som lineære funktioner af θ for hvert enkelt af de 4 linjestykke der udgør ∂D .
Randen af F_r er så

$$\partial F_r : \quad \mathbf{b}(\theta) = \mathbf{r}(\mathbf{d}(\theta)) = \mathbf{r}(u(\theta), v(\theta)) \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3, \quad \theta \in I = [0, T] \subset \mathbb{R} \quad . \quad (27-69)$$

Lad nu $\mathbf{V}(x, y, z) = (V_1(x, y, z), V_2(x, y, z), V_3(x, y, z))$ betegne et vilkårligt vektorfelt i rummet, så har vi følgende konsekvens af Stokes' sætning:



Figur 27.11: Restriktionen af rotationsvektorfeltet $\text{Rot}(\mathbf{V})(x, y, z) = (0, 0, 2)$ til et stykke af et Möbius bånd, båndets rand, og vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (-y, x, 1)$ restringeret til randen.

||| Sætning 27.18 Stokes' sætning i planen

Med ovenstående notation gælder:

$$\begin{aligned}
 \int_{F_r} \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_F \, d\mu &= \int_{\partial F} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_{\partial F} \, d\mu \\
 \int_{F_r} \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot (0, 0, 1) \, d\mu &= \int_{\partial F} (V_1, V_2, V_3) \cdot \mathbf{e}_{\partial F} \, d\mu \\
 \int_{F_r} \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot (0, 0, 1) \, d\mu &= \int_I (V_1, V_2, V_3) \cdot \mathbf{b}'(\theta) \, d\theta \\
 \int_{F_r} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \, d\mu &= \int_0^T (V_1 b'_1(\theta) + V_2 b'_2(\theta)) \, d\theta
 \end{aligned} \tag{27-70}$$

og dermed

$$\int_c^d \int_a^b \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \text{Jacobi}_r(u, v) \, du \, dv = \int_0^T (V_1 b'_1(\theta) + V_2 b'_2(\theta)) \, d\theta \quad . \tag{27-71}$$

||| Bemærkning 27.19

Det ses, at vektorfeltets tredie koordinat-funktion $V_3(x, y, z)$ ikke spiller nogen rolle i sætningen. Sætningen er derfor et resultat om vektorfunktioner i *planen*: $\mathbf{V}(x, y) = (V_1(x, y), V_2(x, y))$. Vi illustrerer med et detaljeret - men simpelt - eksempel nedenfor.

||| Eksempel 27.20 Stokes' sætning i planen

Lad $\mathbf{V}(x, y) = (-y, x)$ og $\mathbf{r}(u, v) = (3u, 4v)$, $u \in [a, b]$, $v \in [c, d]$, så får vi: $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = 12$ og $\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = 2$ sådan at venstre side i ligning (27-71) giver:

$$\begin{aligned} & \int_c^d \int_a^b \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) \, du \, dv \\ &= \int_c^d \int_a^b 2 \cdot 12 \, du \, dv \\ &= 24(b-a)(d-c) . \end{aligned} \tag{27-72}$$

Højre side i ligning (27-71) skal give samme værdi.

Vi bestemmer højre sides værdi ved at opdele randen af $F_{\mathbf{r}}$ i 4 retlinede komponenter og ved at beregne det tangentielle kurveintegral af \mathbf{V} langs hver komponent, idet vi i hvert tilfælde sørger for at orientere (parametrise) komponenten korrekt efter den forskrift, som er præciseret i Stokes' sætning.

Vi begynder med at sætte $T = 2(b-a) + 2(d-c)$, dvs. T er den totale omkreds af parameterområdet D . Randen af D kan vi så parametrise på følgende måde:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\theta) &= (a + \theta, 0) \quad \text{for } \theta \in [0, b-a] \\ \mathbf{d}(\theta) &= (b, c + \theta) \quad \text{for } \theta \in [b-a, b-a+d-c] \\ \mathbf{d}(\theta) &= (b-\theta, d) \quad \text{for } \theta \in [b-a+d-c, 2(b-a)+d-c] \\ \mathbf{d}(\theta) &= (a, d-\theta) \quad \text{for } \theta \in [2(b-a)+d-c, 2(b-a)+2(d-c)] . \end{aligned} \tag{27-73}$$

Randen af $F_{\mathbf{r}}$ har vi dernæst på følgende form:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\theta) &= (3(a+\theta), 0) \quad \text{for } \theta \in [0, b-a] \\ \mathbf{b}(\theta) &= (3b, 4(c+\theta)) \quad \text{for } \theta \in [b-a, b-a+d-c] \\ \mathbf{b}(\theta) &= (3(b-\theta), 4d) \quad \text{for } \theta \in [b-a+d-c, 2(b-a)+d-c] \\ \mathbf{b}(\theta) &= (3a, 4(d-\theta)) \quad \text{for } \theta \in [2(b-a)+d-c, 2(b-a)+2(d-c)] , \end{aligned} \tag{27-74}$$

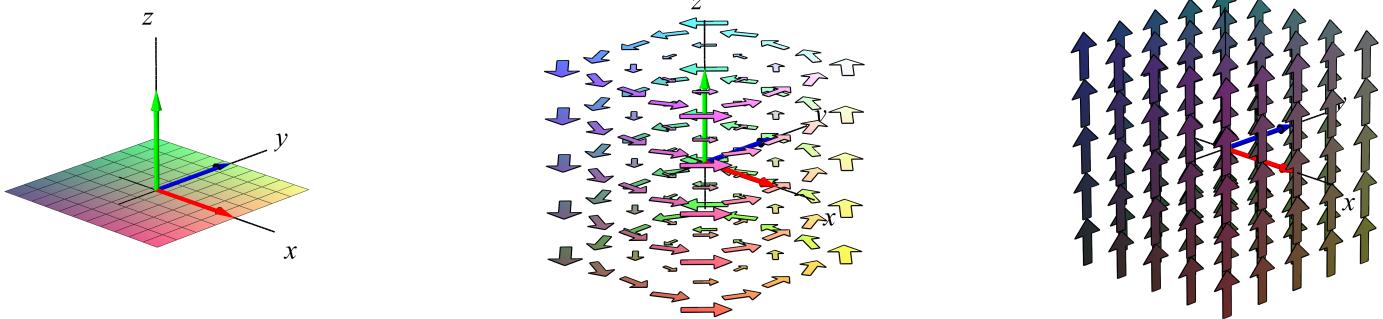
og dermed:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'(\theta) &= (3, 0) \quad \text{for } \theta \in [0, b-a] \\ \mathbf{b}'(\theta) &= (0, 4) \quad \text{for } \theta \in [b-a, b-a+d-c] \\ \mathbf{b}'(\theta) &= (-3, 0) \quad \text{for } \theta \in [b-a+d-c, 2(b-a)+d-c] \\ \mathbf{b}'(\theta) &= (0, -4) \quad \text{for } \theta \in [2(b-a)+d-c, 2(b-a)+2(d-c)] . \end{aligned} \tag{27-75}$$

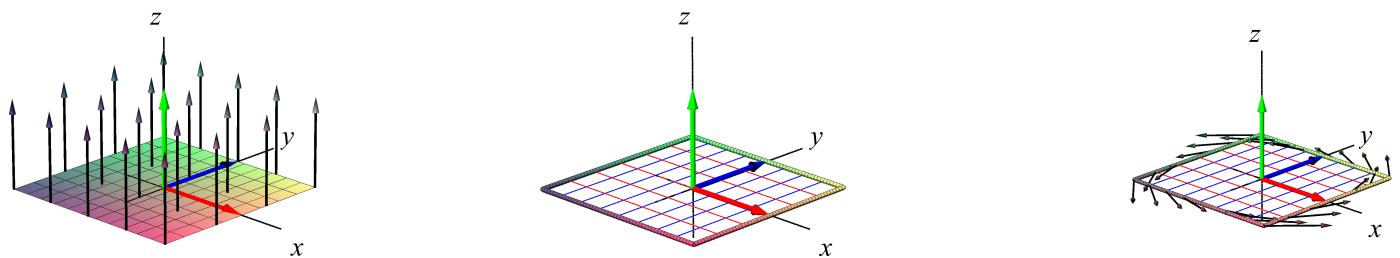
Vi kan nu beregne højresiden i ligning (27-71) som summen af de 4 led, der stammer fra hver sin komponent af randkurven. For eksempel, for det første linjestykke i randkurven, som er parallel med x -aksen og med konstant $y = 4c$ har vi: $\theta \in [0, b - a]$ har vi $b'_1(\theta) = 3, b'_2(\theta) = 0, V_1(x, y) = y = b_2(u, v) = 4v = 4c$ og ligeledes for de andre 3 bidrag (se figurerne 27.12 og 27.13):

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T V_1 b'_1(\theta) + V_2 b'_2(\theta) \, d\theta = \\
 & \quad \int_0^{b-a} 12c \, d\theta \\
 & \quad + \int_{b-a}^{b-a+d-c} 12b \, d\theta \\
 & \quad + \int_{b-a+d-c}^{2(b-a)+d-c} 12d \, d\theta \\
 & \quad + \int_{2(b-a)+d-c}^{2(b-a)+2(d-c)} 12a \, d\theta \tag{27-76} \\
 & = \\
 & \quad 12c(b - a) \\
 & \quad + 12b(d - c) \\
 & \quad + 12d(b - a) \\
 & \quad + 12a(d - c) \\
 & = \\
 & \quad 24(b - a)(d - c) ,
 \end{aligned}$$

i overensstemmelse med resultatet i ligning (27-72), sådan at den generelle ligning (27-71) dermed er verificeret i dette tilfælde.



Figur 27.12: 3D versionering af eksempel 27.20. Vektorfeltet $\mathbf{V}(x,y) = (-y, x, 0)$ har rotationsvektorfeltet $(0, 0, 2)$. Her er valgt et kvadrat med parameterfremstilling $\mathbf{r}(u,v) = (3u, 4v, 0)$, $u \in [a, b]$, $v \in [c, d]$, $a = -1/3$, $b = 1/3$, $c = -1/4$, og $d = 1/4$.



Figur 27.13: Opstilling af fluxen af rotationsvektorfeltet $\text{Rot}(\mathbf{V}(x,y,z)) = (0, 0, 2)$ igennem kvadrat i (x,y) -planen og tilhørende cirkulation af vektorfeltet $\mathbf{V}(x,y,z) = (-y, x, 0)$ langs den firkantede randkurve.

27.5 Opsummering

Vi har set her, at fluxen af et rotationsvektorfelt $\mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x, y, z)$ igennem en flade kan beregnes som cirkulationen af $\mathbf{V}(x, y, z)$ langs randkurven til fladen – passende orienteret.

- Lad F_r betegne en glat parametriseret flade med randkurven ∂F_r og enheds-normalvektorfelt \mathbf{n}_F og lad \mathbf{V} være et glat vektorfelt i \mathbb{R}^3 . Så udtrykker Stokes' sætning følgende identitet

$$\int_F \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_F \, d\mu = \int_{\partial F} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_{\partial F} \, d\mu . \quad (27-77)$$

Ved beregning af højresiden er det vigtigt (for at få det korrekte fortegn) at orienteringen af randen vælges sådan at krydsproduktet $\mathbf{e}_{\partial F} \times \mathbf{n}_F$ peger væk fra fladen langs med randen.

- Alternativt kan Stokes' sætning udtrykkes således: Fluxen af *rotationen af* vektorfeltet \mathbf{V} igennem fladen F_r er lig med *cirkulationen* af vektorfeltet langs fladestykkets lukkede randkurve ∂F :

$$\text{Flux}(\mathbf{Rot}(\mathbf{V}), F_r) = \text{Cirk}(\mathbf{V}, \partial F) . \quad (27-78)$$

- Den Totale rotation af et vektorfelt i et rumligt område kan tilsvarende beregnes ved fladeintegral over den totale overflade af området: Lad Ω være et rumligt område med randen $\partial\Omega$ og udadrettet enheds-normalvektorfelt $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ på $\partial\Omega$. Så gælder for ethvert glat vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z)$:

$$\int_{\Omega} \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \, d\mu = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n}_{\partial\Omega} \times \mathbf{V} \, d\mu = \mathbf{Vrid}(\mathbf{V}, \partial\Omega) . \quad (27-79)$$