

|||| eNote 23

Flade- og rum-integraler

Flade og rumintegraler opstilles her på stort set samme måde som kurve- og planintegralerne i eNote 22, som derved sammen med den grundlæggende generelle indførelse i Riemann-integralerne eNote ?? danner basis for nærværende eNote. Udgangspunktet for bestemmelse af flade- og rum-integralerne er fladernes og de rumlige områders respektive parameterfremstillinger. Til hver parameterfremstilling hører en Jacobi-funktion og det er denne funktion der benyttes til opstilling og beregning af integralerne.

23.1 Flade-integraler

En parametriseret flade i rummet er givet ved en parameterfremstilling som meget ligner parameterfremstillingerne for plane områder, jvf. eNote 22. Forskellen er dog den helt essentielle, at her er også z -koordinaten en funktion af de to parameterværdier u og v :

$$F_r : \quad \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad u \in [a, b] , \quad v \in [c, d] \quad , \quad (23-1)$$

hvor $x(u, v)$, $y(u, v)$, og $z(u, v)$ er givne glatte funktioner af de to variable u og v .

|||| Eksempel 23.1 Graf-flader for funktioner af to variable

En funktion $h(x, y)$ af to variable $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ har en grafflade \mathcal{F} i rummet, som let kan 'parametriseres' på den anviste form:

$$\mathcal{F} : \quad \mathbf{r}(u, v) = (u, v, h(u, v)) \quad , \quad u \in \mathbb{R} , \quad v \in \mathbb{R} \quad . \quad (23-2)$$

Typisk er vi kun interesserede i et udsnit af sådanne graf-flader, f.eks. det udsnit, der ligger over et rektangel i (x, y) planen: $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$. Det udsnit parametriseres lige så let som hele graffladen:

$$\widehat{\mathcal{F}} : \quad \widehat{\mathbf{r}}(u, v) = (u, v, h(u, v)) \quad , \quad u \in [a, b] , \quad v \in [c, d] \quad . \quad (23-3)$$



Figur 23.1: Graf-fladen for funktionen $h(x, y) = x^2 - y^2 + y$ dels over kvadratet $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ og dels over cirkelskiven med radius 1 og centrum i $(0, 0)$ i $((x, y))$ -planen.

Hvis vi derimod er interesserede i det udsnit af graffladen som ligger over cirkelskiven med radius a og centrum i $(0, 0)$ så må vi først parametrise cirkelskiven i (x, y) -planen med de to parametre u og v , hvorefter grafflade-udsnyttet kan præsenteres ved at 'løfte' cirkelskivepunkterne til den korrekte 'højde' med funktionen $h(x, y)$:

$$\tilde{\mathcal{F}} : \tilde{\mathbf{r}}(u, v) = (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), h(u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v))) , \quad (23-4)$$

hvor parametrene u og v nu gennemløber parameterområdet for cirkelskiveparametriseringen:

$$u \in [0, a] , \quad v \in [-\pi, \pi] . \quad (23-5)$$

I analogi med planintegralerne (jvf. eNote 22) definerer vi nu fladeintegralerne således:

||| Definition 23.2 Fladeintegralet

Lad $f(x, y, z)$ betegne en kontinuert funktion i \mathbb{R}^3 . Fladeintegralet af funktionen $f(x, y, z)$ over den parametriserede flade F_r defineres ved

$$\int_{F_r} f d\mu = \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v)) \text{Jacobi}_r(u, v) du dv , \quad (23-6)$$

hvor Jacobi-funktionen $\text{Jacobi}_r(u, v)$

$$\text{Jacobi}_r(u, v) = |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| \quad (23-7)$$

er arealet af det parallellogram, der på stedet $\mathbf{r}(u, v)$ udspændes af de to tangentvektorer $\mathbf{r}'_u(u, v)$ og $\mathbf{r}'_v(u, v)$ til de respektive koordinatkurver igennem punktet $\mathbf{r}(u, v)$ på fladen.

||| Definition 23.3 Regulær parameterfremstilling

Parameterfremstillingen (23-1) siges at være en *regulær parameterfremstilling* hvis der gælder følgende:

$$\text{Jacobi}_r(u, v) > 0 \quad \text{for alle } u \in [a, b] , v \in [c, d] . \quad (23-8)$$

||| Definition 23.4 En-entydig parameterfremstilling

Som for parametriserede kurver siges parameterfremstillingen i (23-1) at være *en-entydig* hvis forskellige punkter i definitionsmængden afbildes i forskellige punkter i billedmængden.

||| Eksempel 23.5 Kugleflade-parametrisering

Hele kuglefladen med radius R og centrum i $(0, 0, 0)$ kan parametriseres med 'geografiske' parametre således:

$$\mathcal{S}_R : \mathbf{r}(u, v) = (R \cdot \sin(u) \cdot \cos(v), R \cdot \sin(u) \cdot \sin(v), R \cdot \cos(u)) , \quad (23-9)$$

hvor $u \in [0, \pi]$ og $v \in [-\pi, \pi]$.



Figur 23.2: Enheds-kuglefladen og en del af enheds-kuglefladen. Delen er konstrueret ved at indskrænke parameterdomænet til $(u, v) \in [\pi/3, 2\pi/3] \times [-2\pi/3, 2\pi/3]$.

Jacobi-funktionen hørende til denne parametrisering fås af følgende beregninger:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_u &= R \cdot (\cos(u) \cdot \cos(v), \cos(u) \cdot \sin(v), -\sin(v)) , \\ \mathbf{r}'_v &= R \cdot (-\sin(u) \cdot \sin(v), \sin(u) \cdot \cos(v), 0) , \\ \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) &= |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| = R^2 \cdot \sin(u) .\end{aligned}\quad (23-10)$$

Denne parametrisering er hverken regulær overalt eller en-entydig i det givne parameterområde. Hvorfor ikke? Hvor og hvordan er der brud på regulariteten? Hvor og hvordan er der brud på en-entydigheden? Se afsnit [afsnit 20.4](#) i eNote 20.

||| Eksempel 23.6 Grafflader

Enhver standard-parametrisering af en grafflade for en glat funktion $h(x, y)$ af to variable er en-entydig og regulær overalt. Hvis vi ser på standard-parametriseringen

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, h(u, v)) , \quad u \in [a, b] , \quad v \in [c, d] \quad (23-11)$$

får vi Jacobifunktionen ved følgende generelle beregning:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_u(u, v) &= (1, 0, h'_u(u, v)) , \\ \mathbf{r}'_v(u, v) &= (0, 1, h'_v(u, v)) , \\ \mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v) &= (-h'_u(u, v), -h'_v(u, v), 1) , \\ \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) &= \sqrt{1 + (h'_u(u, v))^2 + (h'_v(u, v))^2} = \sqrt{1 + |\nabla h(u, v)|^2} ,\end{aligned}\quad (23-12)$$

som jo klart er positiv for alle (u, v) i parameter-området.

||| Definition 23.7 Areal af flade

Arealet af den parametriserede flade

$$F_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) , \quad u \in [a, b] , \quad v \in [c, d]$$

defineres som fladeintegralet af den konstante funktion 1 over fladen:

$$\text{Areal}(F_{\mathbf{r}}) = \int_{F_{\mathbf{r}}} 1 \, d\mu = \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) \, du \, dv . \quad (23-13)$$

||| Eksempel 23.8 Areal af graf-flader

Arealet af graffladen for funktionen $h(x, y)$ over det rektangulære område $[a, b] \times [c, d]$ i (x, y) -planen er derfor:

$$\text{Areal}(\widehat{\mathcal{F}}) = \int_{\widehat{\mathcal{F}}} 1 \, d\mu = \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) \, du \, dv , \quad (23-14)$$

hvor

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{F}} &= F_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u, v) = (u, v, h(u, v)) , \quad u \in [a, b] , \quad v \in [c, d] , \\ \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) &= \sqrt{1 + |\nabla h(u, v)|^2} \end{aligned} \quad (23-15)$$

sådan at

$$\text{Areal}(\widehat{\mathcal{F}}) = \int_c^d \int_a^b \sqrt{1 + |\nabla h(u, v)|^2} \, du \, dv . \quad (23-16)$$

||| Opgave 23.9

Bestem arealet af den del af graffladen for funktionen $h(x, y) = x + y - 1$ som ligger over kvadratet $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ i (x, y) -planen. Bemærk, at denne del af graffladen er et plant parallelogram. Brug dels dobbelt-integration som i eksempel 23.8 og dels den klassiske arealbestemmelse ved hjælp af grundlinje og højde.

||| Opgave 23.10

Bestem arealet af den del af graffladen for funktionen $h(x, y) = x + y - 1$ som ligger over den cirkelskive i (x, y) -planen som har radius $1/2$ og centrum i $(1/2, 1/2)$. Bemærk, at denne del af graffladen er et plant område, som er afgrænset af en ellipse.



Figur 23.3: Dele af en plan grafflade.

||| Opgave 23.11

Bestem arealet af den del af graf-fladen for funktionen $h(x, y) = x \cdot y$ som ligger over kvadratet $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ i (x, y) -planen.

||| Eksempel 23.12 Areal af kugleflade

En del af en kugleflade med radius R og centrum i $(0, 0, 0)$ er parametreret således:

$$\hat{\mathcal{S}} : \hat{\mathbf{r}}(u, v) = (R \cdot \sin(u) \cdot \cos(v), R \cdot \sin(u) \cdot \sin(v), R \cdot \cos(u)) , \quad (23-17)$$

hvor $u \in [a, b] \subset [0, \pi]$ og $v \in [c, d] \subset [-\pi, \pi]$.

Arealet af den del af kuglefladen er så, idet $\text{Jacobi}_{\hat{\mathbf{r}}}(u, v) = R^2 \cdot \sin(u)$:

$$\begin{aligned} \text{Areal}(\hat{\mathcal{S}}) &= \int_c^d \int_a^b R^2 \cdot \sin(u) du dv \\ &= R^2 \cdot (d - c) \cdot [-\cos(u)]_{u=a}^{u=b} \\ &= R^2 \cdot (d - c) \cdot (\cos(a) - \cos(b)) . \end{aligned} \quad (23-18)$$

Specielt får vi derfor også arealet af hele kuglefladen med $a = 0, b = \pi, c = -\pi$, og $d = \pi$:

$$\text{Areal}(\mathcal{S}_R) = 4\pi \cdot R^2 . \quad (23-19)$$

23.1.1 Motivering af fladeintegralet

Hvis vi – i stil med motiveringen af kurveintegralet – deler *begge* intervallerne $[a, b]$ og $[c, d]$ i henholdsvis n og m lige store dele, så har hvert u -delinterval længden $\delta_u = (b - a)/n$ og hvert v -delinterval har længden $\delta_v = (d - c)/m$. Tilsvarende bliver delepunkternes koordinater i (u, v) -parameterområdet (som jo er rektanglet $[a, b] \times [c, d]$ i \mathbb{R}^2) - jvf. afsnittet om dobbelt-integralsummer i eNote ??:

$$\begin{aligned}(u_1, v_1) &= (a, c), \\ (u_1, v_j) &= (a, c + (j-1)\delta_v), \\ (u_i, v_1) &= (a + (i-1)\delta_u, c), \\ (u_i, v_j) &= (a + (i-1)\delta_u, c + (j-1)\delta_v), \\ &\dots \\ (b, d) &= (a + n\delta_u, c + m\delta_v) .\end{aligned}\tag{23-20}$$

Med hvert af disse faste punkter (u_i, v_j) som udviklingspunkt kan vi betragte Taylor's grænseformel for hver af de 3 koordinat-funktioner for $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ til første orden med tilhørende epsilon-funktioner:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u, v) &= \mathbf{r}(u_i, v_j) \\ &+ \mathbf{r}'_u(u_i, v_j) \cdot (u - u_i) \\ &+ \mathbf{r}'_v(u_i, v_j) \cdot (v - v_j) \\ &+ \rho_{ij} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(u - u_i, v - v_j) ,\end{aligned}\tag{23-21}$$

hvor $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$, $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$. Her betegner $\rho_{ij} = \sqrt{(u - u_i)^2 + (v - v_j)^2}$ afstanden mellem det variable punkt (u, v) og det faste udviklingspunkt (u_i, v_j) i parameterområdet. Der gælder her, at $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(u - u_i, v - v_j) \rightarrow (0, 0, 0) = \mathbf{0}$ for $(u - u_i, v - v_j) \rightarrow (0, 0)$.

Hvert delrekangel $[u_i, u_i + \delta_u] \times [v_j, v_j + \delta_v]$ afbildes på flade-stykket $\mathbf{r}(u, v)$, $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$, $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$ og dette fladestykke kan vi approksimere med den lineære del af udtrykket i (23-21), som fås ved at fjerne $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ -bidraget fra højre side i (23-21):

$$\mathbf{r}_{\text{app}}_{ij}(u, v) = \mathbf{r}(u_i, v_j) + \mathbf{r}'_u(u_i, v_j) \cdot (u - u_i) + \mathbf{r}'_v(u_i, v_j) \cdot (v - v_j) ,\tag{23-22}$$

hvor u og v stadig gennemløber del-intervallerne $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$, $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$. Disse lineære approksimationer er parallelogrammer, som udspændes af de to tangentvektorer $\mathbf{r}'_u(u_i, v_j) \cdot \delta_u$ og $\mathbf{r}'_v(u_i, v_j) \cdot \delta_v$. Se Figur 23.4 hvor de approksimerende parallelogrammer er vist for en parametrisering af en kegleflade.

Areal

Hvert enkelt af de i alt $n \cdot m$ approksimerende parallelogrammer har et areal. Arealet af det (i, j) 'te parallelogram er længden af krydsproduktet af de to vektorer, der udspænder det pågældende parallelogram:

$$\Delta \text{Areal}_{ij} = |(\mathbf{r}'_u(u_i, v_j) \cdot \delta_u) \times (\mathbf{r}'_v(u_i, v_j) \cdot \delta_v)| = \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v . \quad (23-23)$$

||| Opgave 23.13

Bevis denne påstand: Arealet af et parallelogram er længden af krydsproduktet af de to vektorer, der udspænder parallelogrammet.

Summen af disse i alt $n \cdot m$ arealer er klart en god approksimation til arealet af hele fladestykket, således at vi har

$$\text{Areal}_{\text{app}}(n, m) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \Delta \text{Areal}_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v . \quad (23-24)$$

Da ovenstående sum er en dobbelt integralsum for den kontinuerte funktion $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$ over parameter-rektanglet $[a, b] \times [c, d]$ får vi i grænsen, hvor n og m begge går mod uendelig (jf. eNote ??):

$$\text{Areal}_{\text{app}}(n, m) \rightarrow \text{Areal} = \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) du dv = \int_{F_{\mathbf{r}}} 1 d\mu \quad \text{for } n, m \rightarrow \infty . \quad (23-25)$$

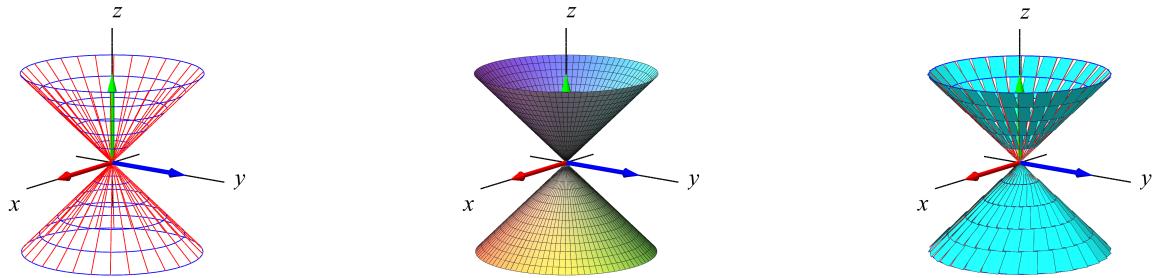
Dette er begrundelsen for definitionen af arealet af en parametriseret flade som angivet ovenfor, nemlig som fladeintegralet af den konstante funktion 1.

||| Opgave 23.14

Vis, at den givne parameterfremstilling i figur 23.4 hverken er regulær eller entydig i det givne parameterområde. Overvej, om der findes en regulær parameterfremstilling for keglefladen.

||| Opgave 23.15

Hvorfor er de approksimerende parallelogrammer på den øvre halvdel af keglefladen i figur 23.4 mindre end de tilsvarende parallelogrammer (med samme afstand til toppunktet) på den nedre halvdel?



Figur 23.4: Kegle-fladen er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u)$, $u \in [-1, 1]$, $v \in [-\pi, \pi]$. Et system af koordinatkurver på fladen er vist til venstre og de tilsvarende areal-approksimerende parallelogrammer er vist til højre.

||| Opgave 23.16

Vis, at de approksimerende parallelogrammer i figur 23.5 alle er kvadrater.

Massen af en flade

Hvis vi nu antager, at hvert enkelt parallelogram i (23-22) tildeles en konstant massetæthed givet ved værdien af funktionen $f(x, y, z)$ i parallelogrammets kontaktpunkt med fladen, så får vi massen af det (i, j) 'te parallelogram :

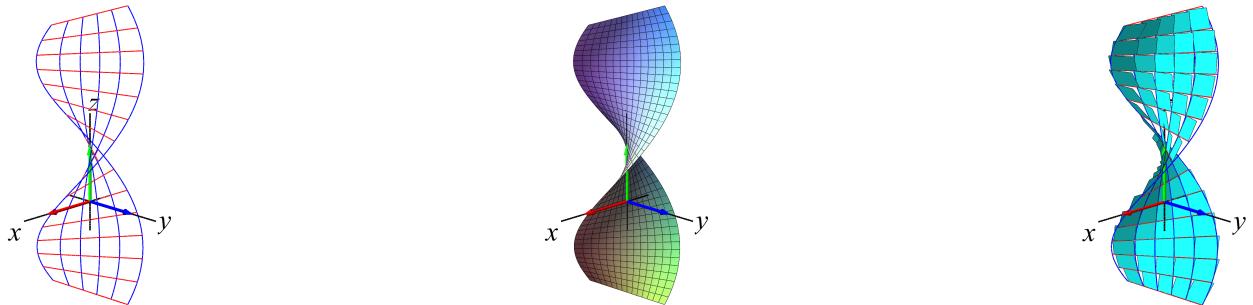
$$\begin{aligned}\Delta M_{ij} &= f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j), z(u_i, v_j)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v \\ &= f(\mathbf{r}(u_i, v_j)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v .\end{aligned}\quad (23-26)$$

Den totale masse af hele systemet af parallelogrammer er derfor følgende, som er en god approksimation til massen af hele fladen når denne gives massetætheden $f(\mathbf{r}(u, v))$ i punktet $\mathbf{r}(u, v)$.

$$M_{\text{app}}(n, m) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \Delta M_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}(u_i, v_j)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v . \quad (23-27)$$

Dette er en dobbelt integralsum for den kontinuerte funktion $f(\mathbf{r}(u, v)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$ over parameter-rektanglet $[a, b] \times [c, d]$. Vi får altså i grænsen, hvor n og m går mod uendelig:

$$M_{\text{app}}(n, m) \rightarrow M = \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) du dv \quad \text{for } n, m \rightarrow \infty . \quad (23-28)$$



Figur 23.5: Denne vindelflade er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v) = (\sinh(u) \cos(v), \sinh(u) \sin(v), v)$. Figuren viser også en approksimation af fladen med parallelogrammer, som faktisk alle er kvadrater af forskellig størrelse. Se opgave 23.16.

Dermed har vi motiveret definitionen af massen af en parametreret flade med massætheden $f(\mathbf{r}(u, v))$ og dermed også den generelle definition af fladeintegralet, definition 23.2.

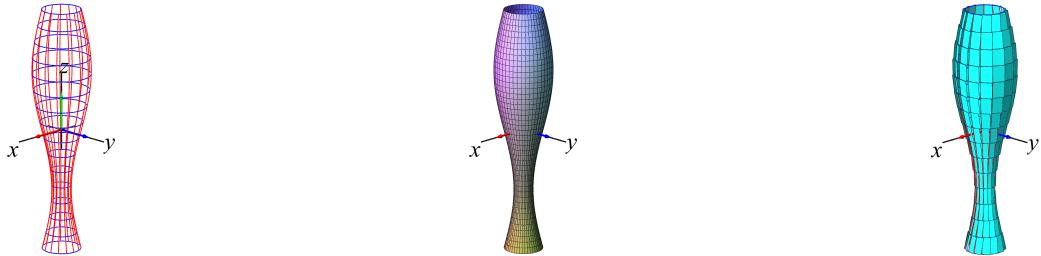
23.1.2 Omdrejningsflader

Omdrejningsflader er de specielle flader, der fremkommer ved at dreje en plan kurve omkring en ret linje (omdrejningsaksen) som også ligger i samme plan. Kurven kaldes en *profil-kurve* eller en *frembringer-kurve*. Det antages, at profilkurven ikke skærer omdrejningsaksen. Profilkurven vælges typisk i (x, z) -planen og drejes om z -aksen i et (x, y, z) -koordinatsystem. Profil-kurven kan så repræsenteres ved en parameterfremstilling således:

$$G_p : \quad \mathbf{p}(u) = (g(u), 0, h(u)) \in \mathbb{R}^3 , \quad u \in [a, b] , \quad (23-29)$$

hvor $g(u) > 0$ og $h(u)$ er givne funktioner af parameteren u . Den omdrejningsflade, der fremkommer ved at dreje G_p en hel gang omkring z -aksen har derfor parameterfremstillingen:

$$FG_r : \quad \mathbf{r}(u, v) = (g(u) \cos(v), g(u) \sin(v), h(u)) , \quad u \in [a, b] , \quad v \in [-\pi, \pi] . \quad (23-30)$$



Figur 23.6: Omdrejnings-fladen her er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v) = (g(u) \cos(v), g(u) \sin(v), h(u))$, $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [-\pi, \pi]$, hvor $g(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin(u)$ og $h(u) = u$.

||| Opgave 23.17

Vis, at Jacobifunktionen $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$ for parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v)$ for den generelle omdrejningsflade $FG_{\mathbf{r}}$ i (23-30) er givet ved

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = g(u) \sqrt{(h'(u))^2 + (g'(u))^2} . \quad (23-31)$$

||| Eksempel 23.18 Torus-arealet

En given torus er parametreret på følgende måde:

$$\mathcal{T} : \mathbf{r}(u, v) = (g(u) \cos(v), g(u) \sin(v), h(u)), \quad u \in [-\pi, \pi], \quad v \in [-\pi, \pi] , \quad (23-32)$$

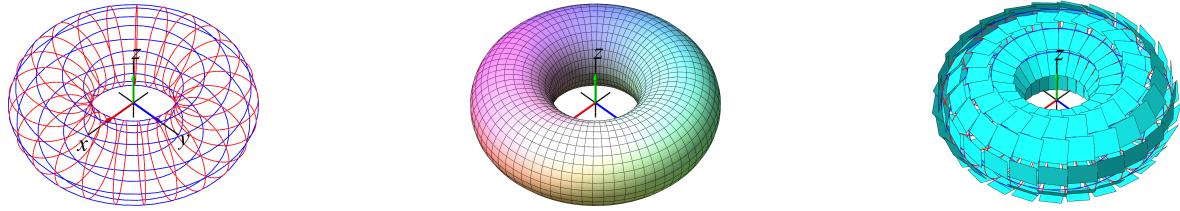
hvor $g(u) = 2 + \cos(u)$ og $h(u) = \sin(u)$.

Jacobifunktionen er

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = g(u) \sqrt{(h'(u))^2 + (g'(u))^2} = 2 + \cos(u) , \quad (23-33)$$

så arealet af denne torus er simpelthen:

$$\text{Arealet}(\mathcal{T}) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2 + \cos(u)) du dv = 8\pi^2 . \quad (23-34)$$



Figur 23.7: Denne såkaldte torus er omdrejningsfladen givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v) = (g(u) \cos(v), g(u) \sin(v), h(u))$, $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [-\pi, \pi]$, hvor nu $g(u) = 2 + \cos(u)$ og $h(u) = \sin(u)$.

Hvis vi 'belaster' denne torus med en vægtfunktion, massetæthed, givet ved funktionen $f(x, y, z) = 2 + z$ får vi den totale vægt af torusen:

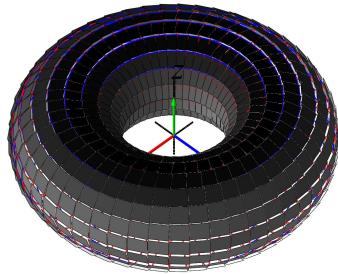
$$M(\mathcal{T}) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2 + \sin(u)) \cdot (2 + \cos(u)) du dv = 16\pi^2 . \quad (23-35)$$

23.2 Rum-integraler

Et parametriseret rumligt område er på samme måde som kurver og flader givet ved en parameterfremstilling, nu med følgende form hvor de tre koordinatfunktioner x , y , og z nu er funktioner af de ialt 3 parameter-variable u , v , og w :

$$\Omega_r : \quad \mathbf{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \in \mathbb{R}^3 , \quad (23-36)$$

$$u \in [a, b] , \quad v \in [c, d] , \quad w \in [h, l] .$$



Figur 23.8: Denne torus er den samme som i figur 23.7, men er her givet vægtfunktionen $f(x, y, z) = 2 + z$. Den totale masse af den vægtede torus er $M = 16\pi^2$.

||| Definition 23.19 Rumintegral

Lad $f(x, y, z)$ betegne en kontinuert funktion i \mathbb{R}^3 . Rumintegralet af funktionen $f(x, y, z)$ over det parametrerede rumlige område Ω_r defineres ved

$$\int_{\Omega_r} f d\mu = \int_h^l \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v, w)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) du dv dw , \quad (23-37)$$

hvor Jacobi-funktionen $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w)$ nu er givet ved

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) = |(\mathbf{r}'_u(u, v, w) \times \mathbf{r}'_v(u, v, w)) \cdot \mathbf{r}'_w(u, v, w)| . \quad (23-38)$$

Det vil sige, $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w)$ er volumenet (her beregnet som et rumprodukt) af det parallelepipedum, der på stedet $\mathbf{r}(u, v, w)$ udspændes af de tre koordinatkurve-tangentvektorer $\mathbf{r}'_u(u, v, w)$, $\mathbf{r}'_v(u, v, w)$ og $\mathbf{r}'_w(u, v, w)$.

||| Opgave 23.20

Vis, at Jacobifunktionen $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w)$ også kan findes som den numeriske værdi af determinanten af den matrix, der som søjler har koordinaterne for de tre vektorer $\mathbf{r}'_u(u, v, w)$, $\mathbf{r}'_v(u, v, w)$ og $\mathbf{r}'_w(u, v, w)$.

||| Definition 23.21 Regulær parameterfremstilling

Parameterfremstillingen i (23-36) kaldes en *regulær parameterfremstilling* hvis $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) > 0$ for alle $u \in [a, b]$, $v \in [c, d]$, $w \in [h, l]$.

||| Definition 23.22 En-entydig parameterfremstilling

Som for kurver og flader vil vi kalde parameterfremstillingen i (23-36) en-entydig hvis forskellige punkter i definitionsmængden afbildes i forskellige punkter i billedmængden.

||| Definition 23.23 Rumfang, volumen

Volumenet eller rumfanget af det rumlige område

$$\Omega_{\mathbf{r}} : \quad \mathbf{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \quad , \quad (23-39)$$

hvor

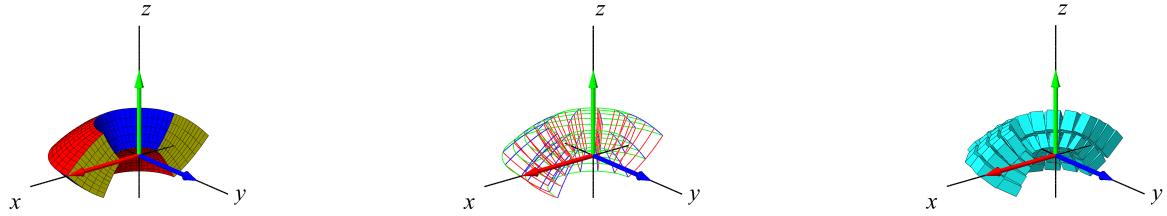
$$u \in [a, b] \quad , \quad v \in [c, d] \quad , \quad \text{og} \quad w \in [h, l] \quad , \quad (23-40)$$

defineres som rumintegralet af den konstante funktion 1:

$$\text{Vol}(\Omega_{\mathbf{r}}) = \int_{\Omega_{\mathbf{r}}} 1 \, d\mu = \int_h^l \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) \, du \, dv \, dw \quad . \quad (23-41)$$

||| Opgave 23.24

Vis, at parameterfremstillingen i figur 23.9 er regulær og en-entydig.



Figur 23.9: Billeder af det rumlige område givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v, w) = (uv \cos(w), uv \sin(w), \frac{1}{2}(u^2 - v^2))$, $u \in [\frac{1}{2}, 1]$, $v \in [\frac{1}{2}, 1]$, $w \in [\pi, 2\pi]$.

23.2.1 Motivering af rumintegralet

Intervallerne $[a, b]$, $[c, d]$ og $[h, l]$ inddeltes i henholdsvis n , m og q lige store dele. Så har hvert u -delinterval længden $\delta_u = (b - a)/n$, hvert v -delinterval har længden $\delta_v = (d - c)/m$ og hvert w -interval har længden $\delta_w = (l - h)/q$. Tilsvarende bliver delepunkternes koordinater i (u, v, w) -parameterområdet (som her er det retvinklede 'kasse-område' $[a, b] \times [c, d] \times [h, k]$ i \mathbb{R}^3).

$$\begin{aligned}
 (u_1, v_1, w_1) &= (a, c, h), \\
 &\dots \\
 (u_i, v_j, w_k) &= (a + (i-1)\delta_u, c + (j-1)\delta_v, h + (k-1)\delta_w), \\
 &\dots \\
 (b, d, l) &= (a + n\delta_u, c + m\delta_v, h + q\delta_w) .
 \end{aligned} \tag{23-42}$$

Med hvert af disse faste punkter (u_i, v_j, w_k) som udviklingspunkt kan vi igen bruge Taylors grænseformel for hver af de 3 koordinat-funktioner for

$$\mathbf{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

til første orden og med tilhørende epsilon-funktioner:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v, w) = & \mathbf{r}(u_i, v_j, w_k) \\ & + \mathbf{r}'_u(u_i, v_j, w_k) \cdot (u - u_i) \\ & + \mathbf{r}'_v(u_i, v_j, w_k) \cdot (v - v_j) \\ & + \mathbf{r}'_w(u_i, v_j, w_k) \cdot (w - w_k) \\ & + \rho_{ijk} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{ijk}(u - u_i, v - v_j, w - w_k) , \end{aligned} \quad (23-43)$$

hvor $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$, $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$, $w \in [w_k, w_k + \delta_w]$. Afstanden mellem det variable punkt (u, v, w) og det faste punkt (u_i, v_j, w_k) i parameterområdet betegnes med ρ_{ijk} og vi har som før $\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk}(u - u_i, v - v_j, w - w_k) \rightarrow \mathbf{0}$ for $(u - u_i, v - v_j, w - w_k) \rightarrow (0, 0, 0)$.

Hvert parameter-delområde eller delkasse $[u_i, u_i + \delta_u] \times [v_j, v_j + \delta_v] \times [w_k, w_k + \delta_w]$ afbildes på det rumlige billed-område $\mathbf{r}(u, v, w)$, $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$, $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$, $w \in [w_k, w_k + \delta_w]$ i billedrummet og dette område kan vi approksimere med den lineære del af udtrykket i (23-43), som fås ved at fjerne $\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk}$ -bidraget fra højre side i (23-43):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{app}}_{ijk}(u, v, w) = & \mathbf{r}(u_i, v_j, w_k) \\ & + \mathbf{r}'_u(u_i, v_j, w_k) \cdot (u - u_i) \\ & + \mathbf{r}'_v(u_i, v_j, w_k) \cdot (v - v_j) \\ & + \mathbf{r}'_w(u_i, v_j, w_k) \cdot (w - w_k) , \end{aligned} \quad (23-44)$$

hvor vi stadig har at $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$, $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$, $w \in [w_k, w_k + \delta_w]$. Disse lineære rumlige approksimationer er parallelepipeda, som udspændes af de tre tangentvektorer $\mathbf{r}'_u(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_u$, $\mathbf{r}'_v(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_v$ og $\mathbf{r}'_w(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_w$.

Volumen

Hvert enkelt af de i alt $n m q$ approksimerende parallelepipeda har et volumen. Volumenet af det (i, j, k) 'te parallelepipedum er den numeriske værdi af rumproduktet af de tre vektorer, der udspænder det pågældende parallelepipedum:

$$\begin{aligned} \Delta \text{Vol}_{ijk} = & |((\mathbf{r}'_u(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_u) \times (\mathbf{r}'_v(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_v)) \cdot (\mathbf{r}'_w(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_w)| \\ = & \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_u \cdot \delta_v \cdot \delta_w . \end{aligned} \quad (23-45)$$

||| Opgave 23.25

Bevis denne påstand: Volumenet af et parallelepipedum er den numeriske værdi af rumproduktet af de tre udspændende vektorer.

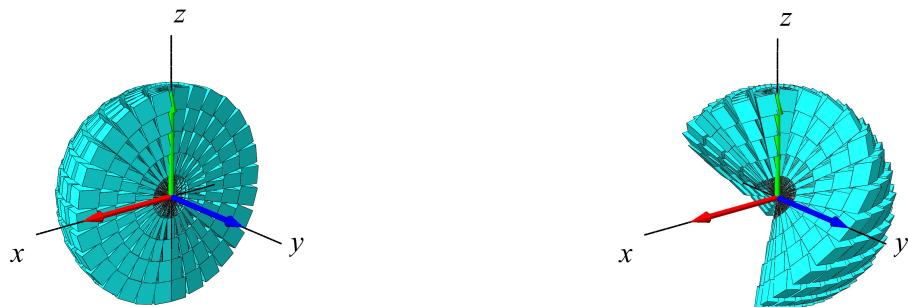
Summen af de ialt $n m q$ volumener er en god approksimation til volumenet af hele det rumlige område, således at vi har

$$\begin{aligned} \text{Vol}_{\text{app}}(n, m, q) &= \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \Delta \text{Vol}_{ijk} \\ &= \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \text{Jacobi}_r(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_u \delta_v \delta_w . \end{aligned} \quad (23-46)$$

Da ovenstående sum er en tredobbelts integralsum for den kontinuerte funktion af de tre variable, $\text{Jacobi}_r(u, v, w)$, over parameter-kassen $[a, b] \times [c, d] \times [h, l]$ får vi i grænsen, hvor n, m og q alle går mod uendelig:

$$\text{Vol}_{\text{app}}(n, m, q) \rightarrow \text{Vol} = \int_h^l \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_r(u, v, w) du dv dw \quad \text{for } n, m, q \rightarrow \infty . \quad (23-47)$$

Dette er begrundelsen for definitionen af volumenet af et parametriseret område i rummet som angivet ovenfor, nemlig som rumintegralet af den konstante funktion 1.



Figur 23.10: To forskellige delvise kugle-fyldninger med parallelepiped. Se Opgave 23.26.

||| Opgave 23.26

Kugle-parameterfremstillingerne i figur 23.10 er henholdsvis følgende:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1(u, v, w) &= [w \sin(u) \cos(v), w \sin(u) \sin(v), w \cos(u)] \\ \mathbf{r}_2(u, v, w) &= [w \sin(v) \cos(u+v), w \sin(v) \sin(u+v), w \cos(v)],\end{aligned}$$

hvor parameterintervallerne i begge tilfælde er givet ved:

$$u \in [-\pi, 0], \quad v \in [0, \pi], \quad w \in [0, 1] .$$

Bestem Jacobi-funktionerne for hver af de to parameterfremstillinger, og vis, at begge de viste rumlige områder har volumenet $2\pi/3$, altså præcis halvdelen af hele enheds-kuglens volumen.

Masser

Hvis vi nu antager, at hvert enkelt parallelepipedum givet ved (23-44) tildeles en konstant massetæthed som er givet ved værdien af funktionen $f(x, y, z)$ på stedet $\mathbf{r}(u_i, v_j, w_k)$, så bliver massen af det (i, j, k) 'te parallelepipedum:

$$\begin{aligned}\Delta M_{ijk} &= f(x(u_i, v_j, w_k), y(u_i, v_j, w_k), z(u_i, v_j, w_k)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_u \delta_v \delta_w \\ &= f(\mathbf{r}(u_i, v_j, w_k)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_u \delta_v \delta_w .\end{aligned}\tag{23-48}$$

Den totale masse af hele systemet af appproximerende parallelepipeda er derfor følgende, som nødvendigvis er en god approksimation til massen af hele det rumlige område:

$$\begin{aligned}M_{app}(n, m, q) &= \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \Delta M_{ijk} \\ &= \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}(u_i, v_j, w_k)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_u \delta_v \delta_w .\end{aligned}\tag{23-49}$$

Dette er en tredobbelts integralsum for den kontinuerte funktion $f(\mathbf{r}(u, v, w)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w)$ over parameter-kassen $[a, b] \times [c, d] \times [h, l]$. Vi får i grænsen, hvor n, m og q går mod uendelig:

$$\begin{aligned}M_{app}(n, m, q) \rightarrow M &= \int_h^l \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v, w)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) du dv dw \\ \text{for } n, m, q \rightarrow \infty &.\end{aligned}\tag{23-50}$$

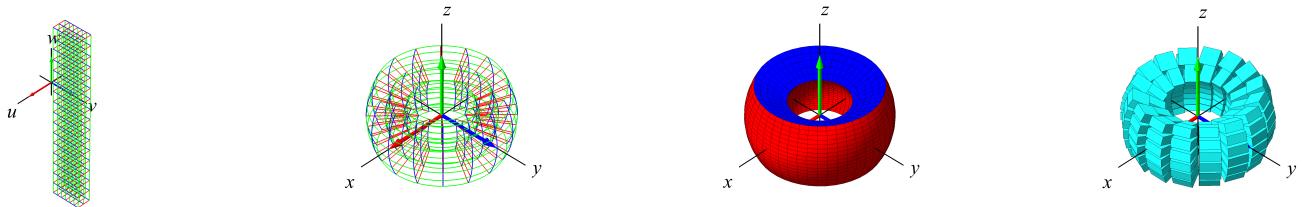
Dermed har vi motiveret definitionen af massen af et parametreret område med massetæden $f(\mathbf{r}(u, v, w))$ og dermed også den generelle definition 23.19 af rumintegralet.

||| Opgave 23.27

I figur 23.11 betragtes følgende parametrisering af et rumligt område:

$$\mathbf{r}(u, v, w) = (u \sin(v) \cos(w), u \sin(v) \sin(w), u \cos(v)) , \quad (23-51)$$

hvor $u \in [1/2, 1]$, $v \in [\pi/3, 2\pi/3]$, og $w \in [-\pi, \pi]$. Ved afbildning af det kasseformede parameterområde forventes ialt 6 sideflader for billed-mængden, dvs. for det rumlige område, der fremkommer ved parameterfremstillingen. Vi ser på figuren kun tre af de 6 sideflader. Hvor er de andre og hvordan ser de ud?



Figur 23.11: Dette *rumlige* område er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v, w) = (u \sin(v) \cos(w), u \sin(v) \sin(w), u \cos(v))$, $u \in [1/2, 1]$, $v \in [\pi/3, 2\pi/3]$, $w \in [-\pi, \pi]$. Parameterkassen, koordinatkurverne, billede af det rumlige område ved parameterfremstillingen og et system af volumen-approksimerende parallellepipida er vist.

||| Eksempel 23.28 Rumfang af massiv ellipsoide

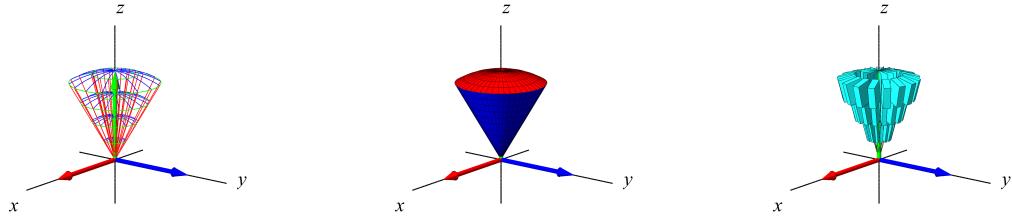
En massiv ellipsoide med halvakser a , b , og c har en parameterfremstilling:

$$\mathbf{r}(u, v, w) = (a u \sin(v) \cos(w), b u \sin(v) \sin(w), c u \cos(v)) , \quad (23-52)$$

hvor $u \in [0, 1]$, $v \in [0, \pi]$ og $w \in [-\pi, \pi]$.

Jacobi-funktionen for denne parametrisering er $\text{Jacobi}(u, v, w) = abc u^2 \sin(v)$, og deraf følger volumenet ved tredobbelts integration:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega_{\mathbf{r}}) &= \int_{\Omega_{\mathbf{r}}} 1 d\mu \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) du dv dw \\ &= abc \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 u^2 \sin(v) du dv dw \\ &= \frac{4}{3}\pi abc . \end{aligned} \quad (23-53)$$



Figur 23.12: Dette rumlige område er et 'rumvinkel'-udsnit af kuglefladen repræsenteret ved $\mathbf{r}(u, v, w) = (u \sin(v) \cos(w), u \sin(v) \sin(w), u \cos(v))$, $u \in [0, 1]$, $v \in [0, \pi/6]$, $w \in [-\pi, \pi]$.

For en massiv kugle B_a med radius a får vi derfor rumfanget

$$\text{Vol}(B_a) = \frac{4}{3}\pi \cdot a^3 . \quad (23-54)$$

||| Eksempel 23.29 Graf-flade-afgrænset rumligt område

En positiv funktion $h(x, y)$ af to variable (x, y) har en grafflade, der over et givet område P i (x, y) -planen afgrænsler et rumligt område. Det er let at parametrise det rumlige område, når først det plane område er parametriseret.

Hvis det plane område er givet ved et rektangel $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ har vi parameterfremstillingen for det rumlige område:

$$\Omega_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u, v, w) = (u, v, w \cdot h(u, v)) , \quad (u, v) \in [a, b] \times [c, d] , \quad w \in [0, 1] . \quad (23-55)$$

Jacobifunktionen er særlig simpel:

$$\begin{aligned} \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) &= |((1, 0, w \cdot h'_u(u, v)) \times (0, 1, w \cdot h'_v(u, v))) \cdot (0, 0, h(u, v))| \\ &= |((1, 0, *) \times (0, 1, **)) \cdot (0, 0, h(u, v))| \\ &= h(u, v) . \end{aligned} \quad (23-56)$$

Rumfanget af det rumlig område, som graf-fladen afgrænser sammen med det plane område i (x, y) -planen er derfor:

$$\text{Vol}(\Omega_{\mathbf{r}}) = \int_0^1 \int_c^d \int_a^b h(u, v) du dv dw = \int_c^d \int_a^b h(u, v) du dv . \quad (23-57)$$

Hvis det plane område P i (x, y) -planen ikke er et rektangel som ovenfor, må vi først parametrisere P . Vi antager derfor nu, at det plane område P er billede af et rektangulært parameterområde ved en vektorfunktion $\hat{\mathbf{r}}$:

$$P : \hat{\mathbf{r}}(u, v) = (\xi(u, v), \eta(u, v)) , u \in [a, b] , v \in [c, d] , \quad (23-58)$$

hvor $\xi(u, v)$ og $\eta(u, v)$ er givne funktioner af u og v . Så er det rumlige område imellem P og graffladen for $h(x, y)$ givet ved parameterfremstillingen:

$$\Omega_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u, v, w) = (\xi(u, v), \eta(u, v), w \cdot h(\xi(u, v), \eta(u, v))) , \quad (23-59)$$

hvor $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$ og $w \in [0, 1]$ med tilhørende Jacobi-funktion:

$$\begin{aligned} \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) &= \\ &= |((\xi'_u(u, v), \eta'_u(u, v), *) \times (\xi'_v(u, v), \eta'_v(u, v), **)) \cdot (0, 0, h(\xi(u, v), \eta(u, v))))| \quad (23-60) \\ &= h(\xi(u, v), \eta(u, v)) \cdot \text{Jacobi}_{\hat{\mathbf{r}}}(u, v) . \end{aligned}$$

Rumfanget af det rumlig område, som graf-fladen afgrænser sammen med det plane område i (x, y) -planen er derfor i denne mere generelle situation:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega_{\mathbf{r}}) &= \int_0^1 \int_c^d \int_a^b h(\xi(u, v), \eta(u, v)) \cdot \text{Jacobi}_{\hat{\mathbf{r}}}(u, v) du dv dw \\ &= \int_c^d \int_a^b h(\xi(u, v), \eta(u, v)) \cdot \text{Jacobi}_{\hat{\mathbf{r}}}(u, v) du dv . \end{aligned} \quad (23-61)$$

||| Eksempel 23.30 Planetariet

Rumfanget i en cylinder mellem to plane afskæringer (se figur 23.13) er bestemt ved parameterfremstillingen:

$$\Omega_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u, v, w) = (\xi(u, v), \eta(u, v), w \cdot h(\xi(u, v), \eta(u, v))) , \quad (23-62)$$

hvor højdefunktionen er $h(x, y) = 2 - x - y$, parametrene er $(u, v) \in [0, 1] \times [-\pi, \pi]$, $w \in [0, 1]$, og det cirkulære grundareal er givet ved

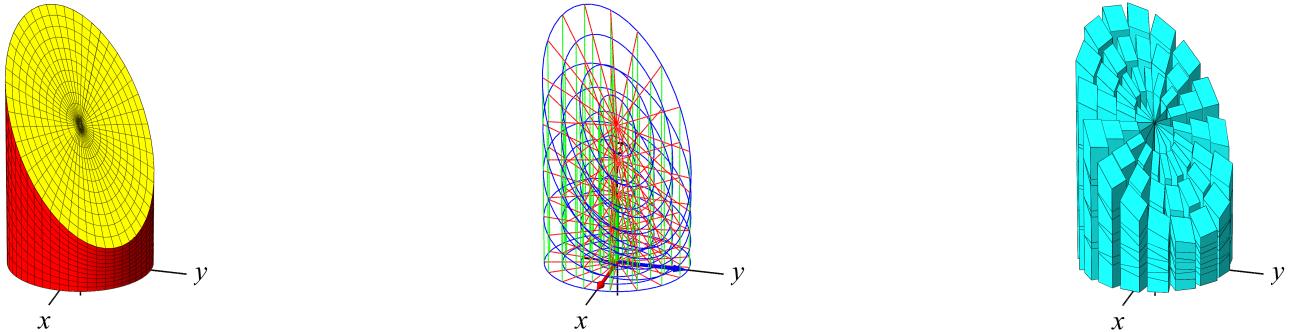
$$P : \hat{\mathbf{r}}(u, v) = (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v)) , u \in [0, 1] , v \in [-\pi, \pi] \quad (23-63)$$

med Jacobi-funktionen

$$\text{Jacobi}_{\hat{\mathbf{r}}}(u, v) = u , \quad (23-64)$$

således at

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega_{\mathbf{r}}) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 h(\xi(u, v), \eta(u, v)) \cdot \text{Jacobi}_{\hat{\mathbf{r}}}(u, v) du dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 (2 - u \cdot \cos(v) - u \cdot \sin(v)) \cdot u du dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 (2u - u^2 \cdot \cos(v) - u^2 \cdot \sin(v)) du dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} ([u^2]_{u=0}^{u=1} - [\frac{1}{3}u^3]_{u=0}^{u=1} \cdot \cos(v) - [\frac{1}{3}u^3]_{u=0}^{u=1} \cdot \sin(v)) dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \cos(v) - \frac{1}{3} \cdot \sin(v)\right) dv \\ &= 2 \cdot \pi . \end{aligned} \quad (23-65)$$



Figur 23.13: Planetariet er afgrænset af graffladen for $f(x, y) = 2 - x - y$ over en cirkulær grundplan i (x, y) -planen med radius 1 og centrum i $(0, 0)$. Rumfanget er 2π .

Bemærk, at det rumfang også vha. symmetri kan findes meget lettere som halvdelen af rumfanget af den cylinder, der har samme grundflade og er skåret vinkelret i højden 4.

23.3 Omdrejningslegemer

Omdrejningslegemer er de specielle rumlige områder, der fremkommer ved at dreje et plant område (f.eks. defineret i (x, z) -planen) omkring en omdrejningsakse i samme plan (z -aksen), som antages at ligge udenfor området. Jævnfør definitionen af omdrejningsflader i afsnit 23.1.2.

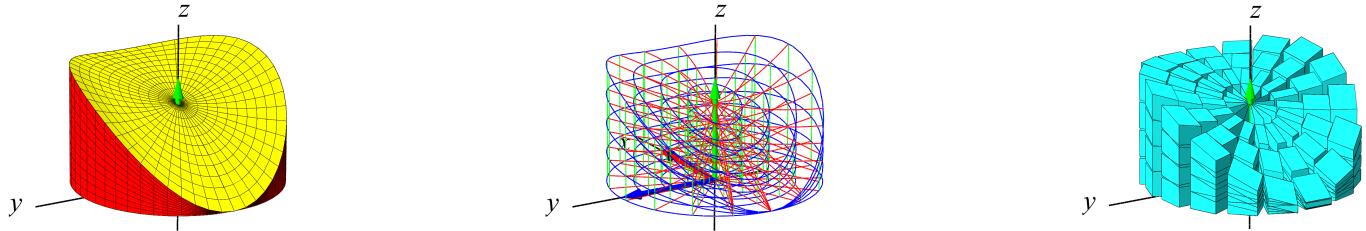
Det plane område - profilområdet - repræsenteres ved en parameterfremstilling således:

$$P_r : \quad \mathbf{r}(u, v) = (g(u, v), 0, h(u, v)) \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad u \in [a, b] \quad , \quad v \in [c, d] \quad , \quad (23-66)$$

hvor $g(u, v) > 0$ og $h(u, v)$ er givne funktioner af parametrene u og v . Det rumlige område, det legeme, der fremkommer ved at dreje profilområdet en hel gang omkring z -aksen har derfor parameterfremstillingen:

$$\Omega P_r : \quad \mathbf{r}(u, v, w) = (g(u, v) \cos(w), g(u, v) \sin(w), h(u, v)) \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad u \in [a, b] \quad , \quad v \in [c, d] \quad , \quad w \in [-\pi, \pi] \quad . \quad (23-67)$$

Figur 23.9 viser halvdelen af et omdrejningslegeme. Figur 23.11 viser overfladen af et omdrejningslegeme defineret ved brug af kuglekoordinater. Cylinder-koordinater i



Figur 23.14: Et 'planetarium' med en lidt mere kompliceret tag-graf-flade; den benyttede funktion er her $f(x, y) = y^2 - x^2 + 2x + 3$. Rumfanget er ca. 2.36.

rummet giver tilsvarende velkendte omdrejningslegemer som f.eks. det, der er vist i figur 23.15.

||| Opgave 23.31

Vis, at Jacobifunktionen $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w)$ for parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v, w)$ for det generelle omdrejningslegeme $\Omega P_{\mathbf{r}}$ i (23-67) er givet ved

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) = g(u, v) |g'_u(u, v) h'_v(u, v) - h'_u(u, v) g'_v(u, v)| . \quad (23-68)$$

||| Opgave 23.32

En omdrejnings-flaske (eller -fad?) er (pånær bunden) givet ved sin profilkurves parameterfremstilling i (x, z) -planen således:

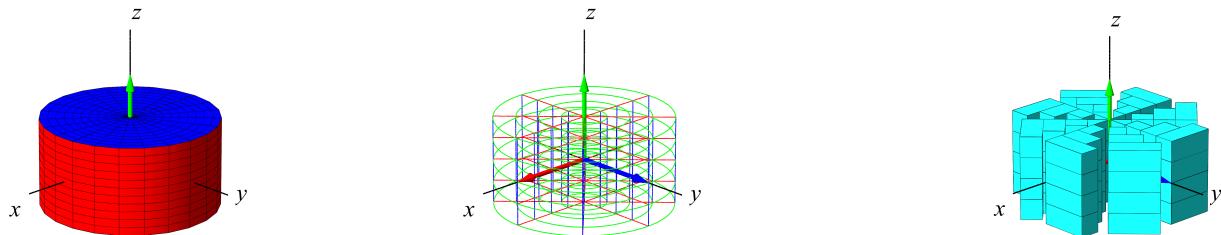
$$G_{\mathbf{r}} : \quad \mathbf{r}(u) = (g(u), 0, h(u)) \in \mathbb{R}^3 , \quad u \in [0, 1] , \quad (23-69)$$

hvor

$$\begin{aligned} g(u) &= 2(R_1 - R_2)u^3 + 3(R_2 - R_1)u^2 + R_1 \\ h(u) &= Hu \end{aligned} , \quad (23-70)$$

for passende valg af *positive* konstanter R_1 , R_2 , og H .

1. Plot forskellige versioner af disse omdrejningsflader, se f.eks. figur 23.16.



Figur 23.15: Cylinderkoordinatiseret rumligt område givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v, w) = (g(u, v) \cos(w), g(u, v) \sin(w), h(u, v))$, $u \in [0, \frac{1}{2}]$, $v \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $w \in [-\pi, \pi]$, hvor $g(u, v) = u$ og $h(u, v) = v$.

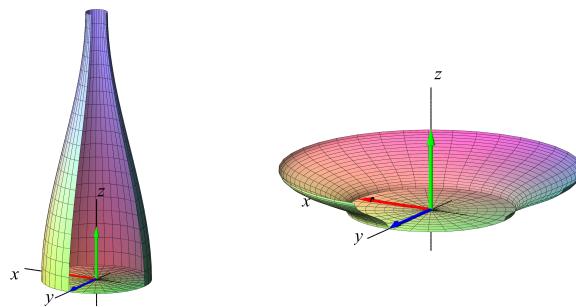
2. Vis, at omdrejningsfladen står vinkelret på (x, y) -planen for ethvert valg af positive konstanter R_1, R_2 , og H .
3. Hvor meget rumfang (vand, f.eks.) kan omdrejningsfladen 'indeholde' for givne værdier af positive konstanter R_1, R_2 , og H ?
4. Hvad er arealet af overfladen af omdrejningsfladen + bund for givne værdier af positive konstanter R_1, R_2 , og H ?
5. Hvilke(t) valg af konstanter giver mest rumfang i forhold til det totale overfladeareal?

23.4 Flere arkitektonisk motiverede rumlige områder

||| Opgave 23.33

Inspireret af Malmø's Turning Torso er det en interessant opgave at finde rumfang og overfladeareal af forskellige 'snoede' bygningsværker:

1. Find en parameterfremstilling for det rumlige område, der er vist i figur 23.17 til venstre. Vælg selv dimensionerne på din bygning, dvs. grundflade og højde. Vink: De opadgående sidelinjer er skruelinjer, se eksempel 22.3 i eNote 22 .
2. Hvad er rumfanget af din bygning?
3. Hvad er overfladearealet af bygningens sidevægge?

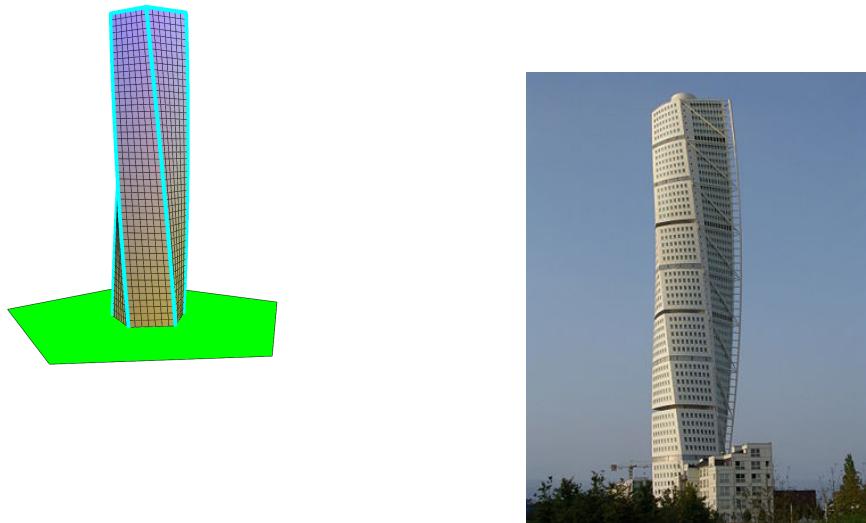


Figur 23.16: Dele af henholdsvis omdrejnings-flaske og -fad, se Opgave 23.32.

4. Med fastholdt højde og tværsnitsfigur: Vis, at rumfanget er uafhængig af drejningstal-let (det antal gange tværsnitsfiguren drejes fra bund til top - for Torsoen er drejningstal-let $1/5$). Hvordan afhænger overfladearealet af drejningstallet? Med hvilket drejnings-tal fås det største volumen i forhold til det totale overfladeareal (af sidevæggene)?

||| Opgave 23.34

Find parameterfremstillinger af de to (højeste) tårne der vises i figur 23.18. Vælg selv dimen-sionerne. Vink: Tåret i venstre billede har elliptiske tværsnit. Find rumfang og overfladeare-al for hver af bygningerne.



Figur 23.17: Fem-kantet Turning Torso model og 'the real thing in Malmö'.



Figur 23.18: Chinese-Canadian projekt.

23.5 Opsummering

Vi har i denne eNote opstillet de begreber og metoder der gør det muligt at beregne (vægtede) arealer og rumfang af henholdsvis flader og rumlige områder – for så vidt de er givet ved parameterfremstillinger ud fra rektangulære og kasseformede parameterområder. En række eksempler og opgaver viser hvordan meget forskellige flader og områder kan parametriskes ved rimeligt simple vektorfunktioner $\mathbf{r}(u, v)$ og $\mathbf{r}(u, v, w)$.

Når først en relevant parametrisering er opstillet er 'resten' kun et spørgsmål om at beregne den tilhørende Jacobifunktion $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$ eller $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w)$, gange den med en eventuel vægtfunktion $f(x, y, z)$ restringeret til parametriseringens billedmængde i rummet, og til sidst beregne dobbelt- eller tredobbelts- integralet af dette produkt over parameter-rektanglet eller parameter-kassen:

- For en flade $F_{\mathbf{r}}$ med parameterfremstillingen

$$F_{\mathbf{r}} : \quad \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad u \in [a, b] \quad , \quad v \in [c, d] \quad (23-71)$$

er integralet af (vægt-)funktionen $f(x, y, z)$ over fladen givet ved:

$$\int_{F_{\mathbf{r}}} f \, d\mu = \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v)) \, \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) \, du \, dv \quad , \quad (23-72)$$

hvor Jacobifunktionen $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| \quad (23-73)$$

er arealet af det parallelogram, der på stedet $\mathbf{r}(u, v)$ udspændes af de to tangentvektorer $\mathbf{r}'_u(u, v)$ og $\mathbf{r}'_v(u, v)$ til de respektive koordinatkurver igennem punktet $\mathbf{r}(u, v)$ på fladen.

- Specielt er arealet af $F_{\mathbf{r}}$ bestemt ved:

$$\text{Areal}(F_{\mathbf{r}}) = \int_{F_{\mathbf{r}}} 1 \, d\mu = \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) \, du \, dv \quad . \quad (23-74)$$

- For et rumligt område $\Omega_{\mathbf{r}}$ med parameterfremstillingen

$$\Omega_{\mathbf{r}} : \quad \mathbf{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \quad , \quad (23-75)$$

hvor $u \in [a, b]$, $v \in [c, d]$, og $w \in [h, l]$ er integralet af (vægt-)funktionen $f(x, y, z)$ over området givet ved:

$$\int_{\Omega_{\mathbf{r}}} f \, d\mu = \int_h^l \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v, w)) \, \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) \, du \, dv \, dw \quad , \quad (23-76)$$

hvor Jacobi-funktionen $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w)$

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) = |(\mathbf{r}'_u(u, v, w) \times \mathbf{r}'_v(u, v, w)) \cdot \mathbf{r}'_w(u, v, w)| \quad (23-77)$$

er volumenet af det parallelepipedum, der på stedet $\mathbf{r}(u, v, w)$ udspændes af de tre tangentvektorer $\mathbf{r}'_u(u, v, w)$, $\mathbf{r}'_v(u, v, w)$, og $\mathbf{r}'_w(u, v, w)$ til de respektive koordinatkurver igennem punktet $\mathbf{r}(u, v, w)$ i det rumlige område.

- Specielt er rumfanget af $\Omega_{\mathbf{r}}$ bestemt ved:

$$\text{Vol}(\Omega_{\mathbf{r}}) = \int_{\Omega_{\mathbf{r}}} 1 d\mu = \int_h^l \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) du dv dw . \quad (23-78)$$