eNote 16

Gradienter og tangentplaner

I denne eNote vil vi fokusere lidt nærmere på den geometriske analyse og inspektion af funktioner af to variable. Vi vil især studere sammenhængen mellem gradientvektorerne i (x, y)*-planen og tangentplanerne i* (x, y, z)*-rummet. Vi vil se på parameterfremstillinger for – og normalvektorer til – tangentplanerne for grafen for en funktion* $f(x, y)$ *af to variable via det approksimerende førstegradspolynomium for* $f(x, y)$*. De partielle afledede er i hele eNoten de grundlæggende ingredienser. Et globalt resultat om de partielle afledede er at gradienten kan benyttes til at bestemme funktionen overalt i et sammenhængende område hvis vi blot kender funktionsværdien i et enkelt punkt. Kurver i* (x, y)*-planen kan løftes til graf-fladen for* $f(x, y)$*, og vi vil vise, at alle tangenterne for enhver kurve igennem et givet punkt på graf-fladen er indeholdt i tangentplanen for fladen i det punkt.*

16.1 Gradienterne bestemmer funktionen

For funktioner af én variabel ved vi, at vi kan finde og rekonstruere funktionen $f(x)$ ud fra den afledede $f'(x) = q(x)$ og ud fra værdien af $f(x)$ i blot ét punkt x_0. Vi skal 'bare' integrere og finde en stamfunktion til $q(x)$. Stamfunktionen er så den ønskede funktion $f(x)$ pånær en konstant, der til sidst kan bestemmes ud fra kendskabet til $f(x_0)$. Det samme er tilfældet for funktioner af to variable.

Selv om vi kun kender de partielle afledede, dvs. de sædvanlige afledede af hjælpefunktionerne $f_1(x, y_0)$ og $f_2(x_0, y)$, i de to *koordinatakseretninger*, så er de faktisk tilstrækkelige til at rekonstruere funktionen. Men for at kunne integrere og rekonstruere funktionen ud fra gradientvektorfeltet har vi brug for, at det område vi betragter i (x, y)-planen er sammenhængende:

|||| Definition 16.1 Sammenhængende mængde

En mængde M i planen siges at være ***kurve-sammenhængende*** eller blot ***sammenhængende*** hvis ethvert punkt i M kan forbindes med ethvert andet punkt i M via en differentiabel parametriseret kurve $\mathbf{r}(u) = (p(u), q(u))$, hvor $u \in]\alpha, \beta[$.

|||| Eksempel 16.2 Stjerneformede mængder er sammenhængende

Enhver stjerneformet mængde i (x, y)-planen er kurvesammenhængende. Vi kan forbinde to givne punkter via rette linjestykker til stjernepunktet, hvor der så imidlertid typisk vil optræde et 'knæk'. Overvej, hvorfor det ikke er et problem.

Vi har så følgende sætning, som vi vil give et konstruktivt bevis for:

|||| Sætning 16.3 Gradientvektorfeltet giver funktionen pånær en konstant

Antag, at vi kender gradientvektorfeltet $\boldsymbol{\nabla} f(x, y)$ for en funktion $f(x, y)$ overalt i et åbent kurvesammenhængende område i definitionsmængden. Og antag, at vi kender funktionsværdien i et enkelt punkt (x_0, y_0). Så kan vi rekonstruere alle funktionsværdierne for $f(x, y)$ i hele området.

|||| Bevis

Vi bruger kædereglen fra eNote 15 på den sammensatte funktion $h(u) = f(\mathbf{r}(u))$ hvor $\mathbf{r}(u)$, $u \in]u_0, u_1[$, er en vilkårlig differentiabel kurve fra $(x_0, y_0) = \mathbf{r}(u_0)$ til $(x_1, y_1) = \mathbf{r}(u_1)$ og får derved:

$$h'(u) = \mathbf{r}'(u) \cdot \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}(u)) \quad . \tag{16-1}$$

Heraf følger, at $h(u)$ er en stamfunktion til funktionen på højresiden af ovenstående ligning:

$$h(u_1) - h(u_0) = \int_{u_0}^{u_1} \mathbf{r}'(u) \cdot \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}(u))\, du \quad . \tag{16-2}$$

Men da

$$\begin{aligned} h(u_0) &= f(\mathbf{r}(u_0)) = f(x_0, y_0) \quad , \\ h(u_1) &= f(\mathbf{r}(u_1)) = f(x_1, y_1) \quad , \end{aligned} \tag{16-3}$$

får vi dermed

$$f(x_1, y_1) = f(x_0, y_0) + \int_{u_0}^{u_1} \mathbf{r}'(u) \cdot \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}(u))\, du \quad , \tag{16-4}$$

og det var præcis det vi skulle – rekonstruere værdien af $f(x, y)$ i punktet (x_1, y_1) ud fra værdien af $f(x, y)$ i punktet (x_0, y_0) og gradientvektorfeltet.

■

Som en direkte konsekvens af sætning 16.3 og beviset for den, især ligning (16-4), har vi

|||| Sætning 16.4 Nul gradient giver konstant funktion

Hvis en funktion $f(x,y)$ har gradienten $\nabla f(x,y) = (0,0)$ overalt i et åbent kurve-sammenhængende område, så er funktionen konstant i hele området.

Bemærk, at det er ligegyldigt hvilken kurve man vælger at integrere langs for at finde funktionsværdien i endepunktet. Hvis man har mulighed for det vil man naturligvis vælge den simpleste kurve til formålet. Det gør vi i følgende eksempel:

|||| Eksempel 16.5 Bestemmelse af funktionen ud fra de partielle afledede

Vi vil bestemme funktionen $f(x,y)$ udelukkende ud fra kendskab til en given funktionsværdi $f(0,0) = 0$ samt kendskab til gradientvektorfeltet i (x,y)-planen:

$$\nabla f(x,y) = (6\,x + 10\,y^7\,,\ 21\,y^2 + 70\,x\,y^6) \quad . \tag{16-5}$$

Lad $\mathbf{r}(u)$ være en parameterfremstilling for det *rette linjestykke* i (x,y)-planen fra $(x_0,y_0) = (0,0)$ til et vilkårligt andet punkt $(x_1,y_1$ i (x,y)-planen:

$$\mathbf{r}(u) = (0,0) + u\cdot(x_1,y_1) = (u\,x_1, u\,y_1) \quad , \quad \text{hvor } u \in \,]0,1[\quad , \tag{16-6}$$

sådan at

$$\mathbf{r}'(u) = (x_1,y_1) \quad ,$$

$$\nabla f(\mathbf{r}(u)) = (6ux_1 + 10u^7y_1^7\,,\ 21u^2y_1^2 + 70u^7x_1y_1^6) \quad , \tag{16-7}$$

$$\mathbf{r}'(u)\cdot\nabla f(\mathbf{r}(u)) = 6ux_1^2 + 10u^7x_1y_1^7 + 21u^2y_1^3 + 70u^7x_1y_1^7 \quad .$$

Heraf får vi så ved at benytte (16-4), at

$$\begin{aligned} f(x_1,y_1) &= 0 + \int_0^1 \left(6ux_1^2 + 10u^7x_1y_1^7 + 21u^2y_1^3 + 70u^7x_1y_1^7\right)\,du \\ &= x_1^2\int_0^1 6u\,du \;+\; 80x_1y_1^7\int_0^1 u^7\,du \;+\; 21y_1^3\int_0^1 u^2\,du \\ &= 3x_1^2 + 10x_1y_1^7 + 7y_1^3 \quad . \end{aligned} \tag{16-8}$$

Vi får derfor den rekonstruerede funktion:

$$f(x,y) = 3\,x^2 + 7\,y^3 + 10\,x\,y^7 \quad . \tag{16-9}$$

Vi kan for en ordens skyld gøre prøve og undersøge, om denne funktion faktisk er 0 i $(0,0)$ (det er den) og desuden har det korrekte gradientvektorfelt, som er givet ved ligning (16-5) (det har den).

|||| Opgave 16.6

En funktion $f(x,y)$ vides at være differentiabel i hele $\mathbb{R}^2$ med $f(1,0) = 1$ og

$$\nabla f(x,y) = (\cos(y), -x\,\sin(y)) \quad . \tag{16-10}$$

Bestem $f(x,y)$ i ethvert (x,y).

16.1.1 Gradientvektorfelter

Gradientvektoren for en funktion af to variable $f(x,y)$ indeholder information om den lokale tilvækst af funktionen omkring ethvert punkt (x_0, y_0):

|||| Sætning 16.7 Gradienten udpeger retningen med størst tilvækst

Lad $f(x,y)$ betegne en funktion af to variable, der har en egentlig gradientvektor i et punkt (x_0, y_0), dvs. $\nabla f(x_0,y_0) \neq \mathbf{0}$. Der gælder så:

- Den retningsafledede $f'((x_0,y_0);\mathbf{e})$ af $f(x,y)$ i punktet (x_0,y_0) er *størst* i den retning $\mathbf{e}$ som er bestemt ved gradientvektoren $\nabla f(x_0,y_0)$, dvs. for

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_{max} = \frac{\nabla f(x_0,y_0)}{|\,\nabla f(x_0,y_0)\,|} \tag{16-11}$$

- Den retningsafledede $f'((x_0,y_0);\mathbf{e})$ af $f(x,y)$ er *mindst* i den retning som er bestemt ved minus gradientvektoren i punktet:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_{min} = -\frac{\nabla f(x_0,y_0)}{|\,\nabla f(x_0,y_0)\,|} \tag{16-12}$$

- Den retningsafledede er 0 i hver af de to (niveaukurve-)retninger der er vinkelrette på gradientvektoren.

|||| Bevis

Vi lader $\mathbf{g}$ betegne den enhedsvektor, der angiver gradientens *retning*:

$$\mathbf{g} = \frac{\nabla f(x_0,y_0)}{|\nabla f(x_0,y_0)|} \quad . \tag{16-13}$$

Enhver (anden) enheds-retningsvektor $\mathbf{e}$ i planen kan derefter 'opløses' efter $\mathbf{g}$ på følgende måde

$$\mathbf{e} = \cos(\varphi) \cdot \mathbf{g} + \sin(\varphi) \cdot \mathbf{g}^{\perp} \quad , \tag{16-14}$$

hvor φ er vinklen mellem de to enhedsvektorer $\mathbf{e}$ og $\mathbf{g}$, og hvor $\mathbf{g}^{\perp}$ betegner den ortogonale (tvær-)vektor til $\mathbf{g}$. Så er den retningsafledede af $f(x,y)$ i punktet (x_0, y_0):

$$\begin{aligned} f'((x_0,y_0);\mathbf{e}) &= \boldsymbol{\nabla} f(x_0,y_0) \bullet \mathbf{e} \\ &= (|\boldsymbol{\nabla} f(x_0,y_0)| \cdot \mathbf{g}) \bullet \mathbf{e} \\ &= (|\boldsymbol{\nabla} f(x_0,y_0)| \cdot \mathbf{g}) \bullet \left(\cos(\varphi) \cdot \mathbf{g} + \sin(\varphi) \cdot \mathbf{g}^{\perp}\right) \\ &= |\boldsymbol{\nabla} f(x_0,y_0)| \cdot \cos(\varphi) \cdot \left(\mathbf{g} \bullet \mathbf{g} + \mathbf{g} \bullet \mathbf{g}^{\perp}\right) \\ &= |\boldsymbol{\nabla} f(x_0,y_0)| \cdot \cos(\varphi) \cdot (1+0) \\ &= |\boldsymbol{\nabla} f(x_0,y_0)| \cdot \cos(\varphi) \quad . \end{aligned} \tag{16-15}$$

Da $\cos(\varphi)$ er størst (med værdien 1) når $\varphi = 0$ (dvs. når $\mathbf{e}$ og $\mathbf{g}$ peger i *samme* retning) og da $\cos(\varphi)$ er mindst (med værdien -1) når $\varphi = \pi$ (dvs. når $\mathbf{e}$ og $\mathbf{g}$ peger i *modsatte* retninger), og da $\cos(\varphi)$ er 0 når $\varphi = \pi/2$ (dvs. når $\mathbf{e}$ og $\mathbf{g}$ er ortogonale retninger), så følger de tre påstande i sætningen. Den sidste påstand i sætningen kender vi allerede fra eNote 15 hvor vi så, at den retningsafledede er 0 i de retninger som står vinkelret på gradientvektoren.

■

Hvis vi står i punktet (x_0, y_0) i (x,y)-planen og ønsker at flytte til nabo-punkter med *højere funktionsværdier* $f(x,y)$, så er det mest effektivt at gå i den retning, som gradienten af $f(x,y)$ udpeger i punktet, altså i retningen med enheds-retningsvektor $\boldsymbol{\nabla} f(x_0,y_0)/|\boldsymbol{\nabla} f(x_0,y_0)|$.

Hvis vi ønsker at flytte til nabo-punkter med *lavere funktionsværdier*, så er det mest effektivt at gå i den modsatte retning af gradienten i (x_0, y_0).

Hvis vi ønsker at bevæge os til nabopunkter med *samme funktionsværdi* $f(x_0,y_0)$ så skal vi blot gå langs den niveaukurve $\mathcal{K}_{f(x_0,y_0)}$ for $f(x,y)$ som går igennem (x_0,y_0) (!) – det svarer (lokalt) til at gå i en af de to (niveaukurve-)retninger, der er bestemt ved en vektor, som er *vinkelret* på gradientvektoren i punktet.

|||| Eksempel 16.8 Geometrisk analyse af en funktion af to variable

En funktion er givet ved

$$f(x,y) = 3 + 2\,\mathrm{e}^{-x^2-2y^2} \quad . \tag{16-16}$$

De partielle afledede af $f(x,y)$ i (x,y) er så

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= -4x\mathrm{e}^{-x^2-2y^2} \\ f'_y(x,y) &= -8y\mathrm{e}^{-x^2-2y^2} \quad . \end{aligned} \tag{16-17}$$

Gradientvektorfeltet er derfor

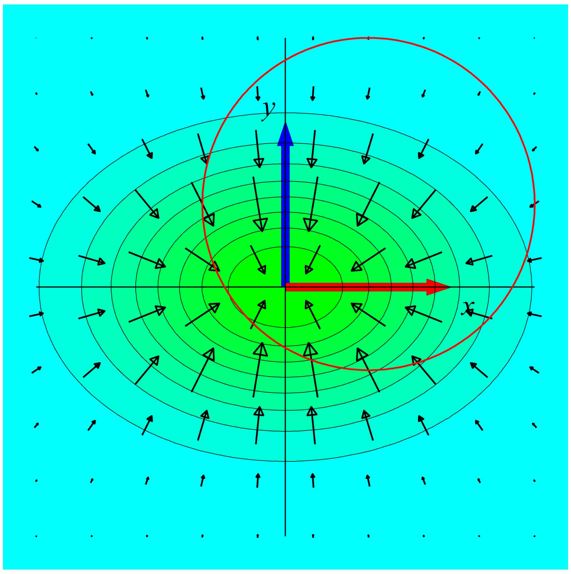
$$\nabla f(x,y) = \left(-4x\mathrm{e}^{-x^2-2y^2}\,,\ -8y\mathrm{e}^{-x^2-2y^2}\right) \quad . \tag{16-18}$$

Dette vektorfelt er skitseret i figur 16.1 sammen med niveaukurverne for $f(x,y)$ og sammen med en kurve (en cirkel) med parameterfremstillingen

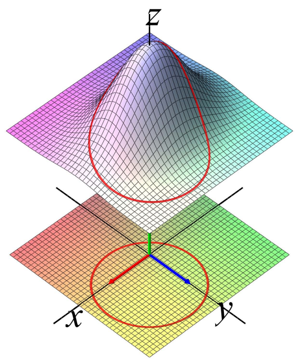
$$\mathbf{r}(u) = \left(\frac{1}{2} + \cos(u)\,,\ \frac{1}{2} + \sin(u)\right) \quad , \quad \text{hvor} \quad u \in \,]-\pi,\pi[\quad . \tag{16-19}$$

Bemærk, at gradientvektorfeltet overalt er vinkelret på niveaukurverne, og at de alle peger ind mod midten, hvor funktionsværdierne er størst – se grafen for funktionen i figur 16.2.

Bemærk også, at der på cirklen er præcis to punkter, hvor gradienten står vinkelret på cirklen. I de punkter har den sammensatte højde-funktion $h(u) = f(\mathbf{r}(u))$ derfor den afledede $h'(u) = 0$. Cirklen har i de punkter samme tangent som de respektive niveaukurver igennem de to punkter. Vi kan bestemme de to punkter på cirklen ved at bestemme de to værdier af u som løser ligningen $h'(u) = \nabla f(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) = 0$.



Figur 16.1: Niveaukurver og gradientvektorfelt for funktionen $f(x,y) = 3 + 2\,\mathrm{e}^{-x^2-2y^2}$.



Figur 16.2: Grafen i (x,y,z)-rummet for $f(x,y) = 3 + 2\,\mathrm{e}^{-x^2-2y^2}$.

|||| Opgave 16.9

Bestem gradientvektorfelterne for følgende funktioner og skitser vektorfelterne ved at tegne et passende antal af gradientvektorerne $\boldsymbol{\nabla} f(x_0, y_0)$ med forskellige fodpunkter (x_0, y_0) i (x,y)-planen:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3x + y \quad , \\ f(x,y) &= x^2 + y^2 \quad , \\ f(x,y) &= y \cdot \mathrm{e}^x \quad . \end{aligned} \tag{16-20}$$

Hvis vi bevæger os på cirklen i (x, y)-planen i figur 16.1 (for eksempel i positiv omløbsretning) og samtidig holder øje med hvilke niveau-kurver der krydses undervejs vil vi kunne afgøre, om vi bevæger os mod stigende eller faldende funktionsværdier – dels ved at holde øje med farveskiftet og dels ved at se, om projektionen af gradientvektoren ind på bevægelsesretningen (den retningsafledede) er positiv eller negativ; hvis projektionen er positiv er vi på vej mod større funktionsværdier, hvis projektionen er negativ er vi på vej mod mindre funktionsværdier. Det samme kan naturligvis ses på grafen for funktionen, hvor det på ethvert sted på den løftede kurve er klart om vi er på vej opad eller nedad på graf-fladen.

16.2 Løftede kurver på graf-flader

Motiveret af graf-fladen med den løftede cirkel i figur 16.2 og motiveret af analysen i eksempel 16.8 vil vi nu helt generelt definere og undersøge løftede kurver:

|||| Definition 16.10 Løftede kurver

Vi lader $f(x, y)$ betegne en funktion af to variable og lader $\mathbf{r}(u)$ betegne en differentiabel parametriseret kurve i (x, y)-planen:

$$\mathbf{r}(u) = (p(u), q(u)) \quad , \quad \text{hvor } u \in \,]\alpha, \beta[\quad , \tag{16-21}$$

og hvor $p(u)$ og $q(u)$ betegner to differentiable funktioner af én variabel u.

Den ***løftede kurve*** som hører til den plane kurve $\mathbf{r}(u)$ defineres til at være følgende kurve i (x, y, z)-rummet:

$$\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{r}}(f) \quad : \quad \widetilde{\mathbf{r}}(u) = (p(u), q(u), f(p(u), q(u))) \quad , \quad \text{hvor } u \in \,]\alpha, \beta[\quad . \tag{16-22}$$

Den løftede kurve $\widetilde{\mathbf{r}}(u)$ er en rumlig kurve, som ligger på graf-fladen $\mathcal{G}(f)$ for funktionen $f(x, y)$.

Projektionen (lodret, langs z-aksen) af $\widetilde{\mathbf{r}}(u)$ på (x, y)-planen er naturligvis den plane kurve $\mathbf{r}(u)$.

De løftede kurver $\widetilde{\mathbf{r}}(u)$ har tangentvektorer og tangentlinjer i rummet – og de må jo afhænge dels af kurven $\mathbf{r}(u)$ i (x, y)-planen og dels af funktionen $f(x, y)$. Følgende udtryk fås direkte ud fra kædereglen for funktionen $f(x, y)$ langs kurven $\mathbf{r}(u)$ – dvs. kædereglen for den sammensatte funktion $h(u) = f(\mathbf{r}(u)) = f(p(u), q(u))$:

|||| Sætning 16.11 Tangenter for løftede kurver

Den u-afledede af den løftede kurve $\widetilde{\mathbf{r}}(u)$ er givet ved de u-afledede af de tre koordinatfunktioner:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{r}}'(u) &= \left(p'(u), q'(u), \frac{d}{du}f(p(u), q(u))\right) \\ &= (p'(u), q'(u), h'(u)) \\ &= (p'(u), q'(u), \boldsymbol{\nabla} f(p(u), q(u)) \cdot (p'(u), q'(u))) \quad .\end{aligned} \tag{16-23}$$

Tangenten til den løftede kurve på graf-fladen for $f(x, y)$ er derfor bestemt ved følgende udtryk i et givet kurvepunkt $\widetilde{\mathbf{r}}(u_0) = (p(u_0), q(u_0), f(p(u_0), q(u_0)) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$\begin{aligned}\widetilde{L}_{u_0} \; : \; \widetilde{\mathbf{T}}(t) &= \widetilde{\mathbf{r}}(u_0) + t \cdot \widetilde{\mathbf{r}}'(u_0) \\ &= (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \\ &\quad\; t \cdot (p'(u_0), q'(u_0), \boldsymbol{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot (p'(u_0), q'(u_0))) \quad ,\end{aligned} \tag{16-24}$$

hvor parameteren t gennemløber hele $\mathbb{R}$.

16.2.1 Løftede koordinat-kurver

Koordinatkurverne i (x, y)-planen er de særligt simple kurver (rette linjer), som er parallelle med koordinatakserne. Igennem punktet (x_0, y_0) har vi følgende to:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1(u) &= (u, y_0) \quad \text{hvor } u \in \mathbb{R} \quad , \\ \mathbf{r}_2(u) &= (x_0, u) \quad \text{hvor } u \in \mathbb{R} \quad .\end{aligned} \tag{16-25}$$

De har derfor også særligt simple løft til graf-fladen for en given funktion $f(x, y)$:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{r}}_1(u) &= (u, y_0, f(u, y_0)) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad , \\ \widetilde{\mathbf{r}}_2(u) &= (x_0, u, f(x_0, u)) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad ,\end{aligned} \tag{16-26}$$

med særligt simple u-afledede for ethvert u:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{r}}_1'(u) &= (1, 0, f_x'(u, y_0)) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad , \\ \widetilde{\mathbf{r}}_2'(u) &= (0, 1, f_y'(x_0, u)) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad .\end{aligned} \tag{16-27}$$

Tangenterne i punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ til de løftede koordinatkurver er derfor også rimeligt simple:

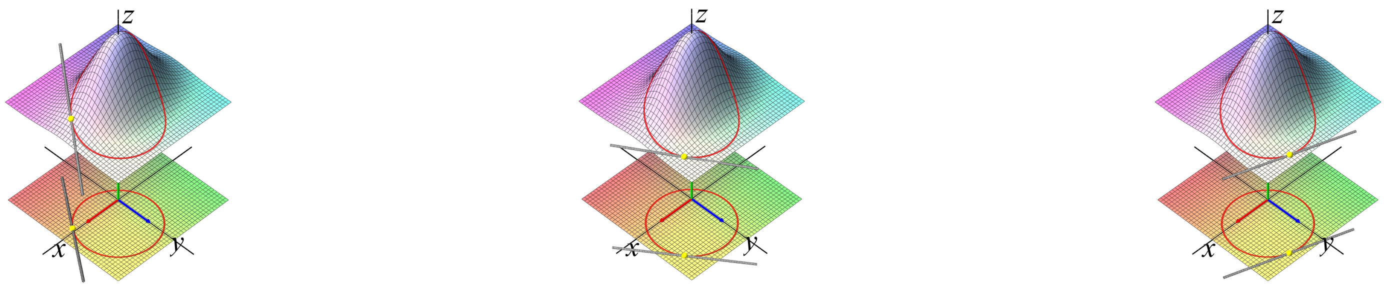
$$\begin{aligned}\widetilde{L}_1 &: \quad (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t \cdot (1, 0, f'_x(x_0, y_0)) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ \widetilde{L}_2 &: \quad (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t \cdot (0, 1, f'_y(x_0, y_0)) \quad , \quad t \in \mathbb{R}\end{aligned} \tag{16-28}$$

|||| Opgave 16.12

Bestem (for ethvert punkt (x_0, y_0) i (x, y)-planen) tangenterne til de løftede koordinatkurver igennem graf-fladepunktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ for funktionerne:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= 3x + y \quad , \\ f(x, y) &= x^2 + y^2 \quad , \\ f(x, y) &= y \cdot e^x \quad .\end{aligned} \tag{16-29}$$

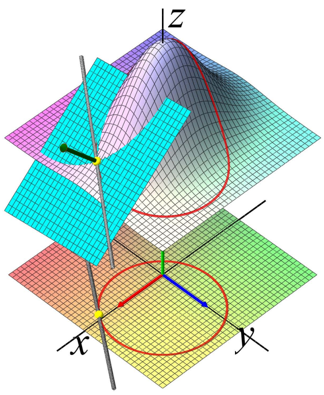
I figurerne 16.3 ses den løftede cirkel og graf-fladen for funktionen $f(x, y)$ fra eksempel 16.8. Den løftede kurves tangenter er indtegnet i et par udvalgte punkter. Bemærk, at de rumlige tangenter til den løftede kurve projicerer ned på de tilsvarende tangenter til cirklen i (x, y)-planen – som det også følger af ligning (16-24).



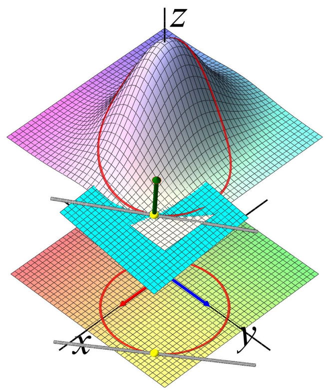
Figur 16.3: Grafen for $f(x, y) = 3 + 2\,e^{-x^2-2y^2}$ med udvalgte tangenter til en løftet cirkel.

Graf-fladens tangentplan i et givet punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ er jo selv graf-fladen for det approksimerende første-gradspolynomium for $f(x, y)$ med udviklingspunktet (x_0, y_0) og er derfor uafhængig af hvilken kurve vi måtte finde på at løfte op på graf-fladen igennem punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$! Ikke desto mindre ser det i figurerne ud til, at *kurvens tangenter* ligger helt indeholdt i de respektive tangentplaner.

Den inspektion giver derfor anledning til følgende formodning, som vi vil vise rigtigheden af i sætning 16.13 nedenfor: Enhver tangent til enhver løftet kurve igennem et givet punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ligger i tangentfladen for $f(x, y)$ i punktet. Og omvendt: Enhver ret linje i tangentplanen som går igennem punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ er tangent til en eller anden løftet kurve som går igennem punktet.



Figur 16.4: Grafen for $f(x, y) = 3 + 2\,\mathrm{e}^{-x^2-2y^2}$ og tangentplanen igennem et udvalgt punkt på den løftede cirkel, se figur 16.2.



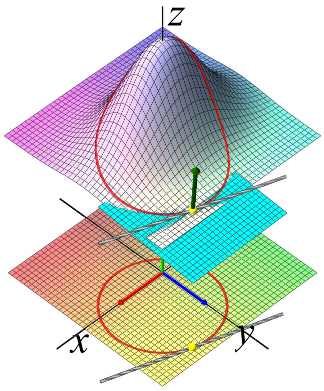
Figur 16.5: Grafen for $f(x,y) = 3 + 2\,\mathrm{e}^{-x^2-2y^2}$ og tangentplanen igennem et andet udvalgt punkt på den løftede cirkel, se figur 16.2.

|||| Sætning 16.13 Tangenterne ligger i tangentplanen

Lad $f(x,y)$ være en differentiabel funktion af to variable og lad $\widetilde{\mathbf{r}}(u)$ betegne en løftet kurve igennem punktet $\widetilde{\mathbf{r}}(u_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ på graf-fladen $\mathcal{G}(f)$. Så er tangenten til den løftede kurve indeholdt i tangentplanen til $\mathcal{G}(f)$ for $f(x,y)$.

Med andre ord: Ethvert punkt (x,y,z) som ligger på tangenten $\widetilde{L}_{u_0}$ tilfredsstiller også tangentplanens ligning:

$$z = P_{1,(x_0,y_0)}(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \quad . \quad (16\text{-}30)$$



Figur 16.6: Grafen for $f(x,y) = 3 + 2\,\mathrm{e}^{-x^2-2y^2}$ og tangentplanen igennem et tredje udvalgt punkt på den løftede cirkel, se figur 16.2.

|||| Bevis

Vi skal blot indse, at tangentvektoren $\widetilde{\mathbf{r}}\,'(u_0)$ er vinkelret på en normalvektor til tangentplanen. En sådan normalvektor konstrueres i næste afsnit (se nedenfor):

$$\mathbf{N}_{(x_0,y_0)}(f) = (-f'_x(x_0,y_0), -f'_y(x_0,y_0), 1) \quad , \tag{16-31}$$

og da

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{r}}\,'(u_0) &= (p'(u_0), q'(u_0), \boldsymbol{\nabla} f(p(u_0), q(u_0)) \cdot (p'(u_0), q'(u_0))) \\ &= \Big(p'(u_0), q'(u_0), \Big(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)\Big) \cdot (p'(u_0), q'(u_0))\Big) \quad ,\end{aligned} \tag{16-32}$$

får vi ortogonaliteten ved at beregne skalarproduktet:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{r}}\,'(u_0) \cdot \mathbf{N}_{(x_0,y_0)}(f) &= -f'_x(x_0,y_0) \cdot p'(u_0) - f'_y(x_0,y_0) \cdot q'(u_0) \\ &\qquad + 1 \cdot \Big(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)\Big) \cdot (p'(u_0), q'(u_0)) \\ &= 0 \quad .\end{aligned} \tag{16-33}$$

16.3 Gradienten bestemmer normalvektoren

En plan i rummet med ligningen

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0 \tag{16-34}$$

har en normalvektor $\mathbf{N} = (a, b, c)$ som altså fås direkte fra koefficienterne til x, y, og z i ligningen. Vi kan nu skrive ligningen for tangentplanen for graf-fladen for $f(x, y)$ i punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)$ på netop den form således:

$$\begin{aligned}
& z = P_{1,(x_0,y_0)}(x, y) \quad , \\
& z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \quad , \\
& \text{som er ækvivalent med:} \\
& -f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) - f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + z - f(x_0, y_0) = 0 \quad , \\
& \text{og dermed:} \\
& -f'_x(x_0, y_0) \cdot x - f'_y(x_0, y_0) \cdot y + z + d = 0 \quad ,
\end{aligned} \tag{16-35}$$

hvor $d = x_0 \cdot f'_x(x_0, y_0) + y_0 \cdot f'_y(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)$.

Normalvektoren til tangentplanen aflæses direkte af den sidste ligning i (16-35):

$$\mathbf{N}_{(x_0,y_0)}(f) = (-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1) \quad . \tag{16-36}$$

En normalvektor til tangentplanen for graf-fladen for $f(x, y)$ kan altså 'bygges' af de samme ingredienser som gradienten til $f(x, y)$ – de partielle afledede. Læg dog mærke til minusserne og 1-tallet. Og bemærk, at gradienten er en vektor i planen, normalvektoren er en vektor i rummet.

En alternativ udledning af normalvektorens koordinater fås på følgende måde: Hvis vi kan finde to lineært uafhængige vektorer i tangentplanen, så er deres krydsprodukt en normalvektor til planen.

Vi kender altid to *lineært uafhængige vektorer i tangentplanen* igennem $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, nemlig tangentvektorerne til de løftede koordinatkurver igennem punktet, dvs.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{r}}'_1(x_0) &= (1, 0, f'_x(x_0, y_0)) \quad , \\
\widetilde{\mathbf{r}}'_2(y_0) &= (0, 1, f'_y(x_0, y_0)) \quad .
\end{aligned} \tag{16-37}$$

En normalvektor til tangentplanen er derfor

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{(x_0,y_0)}(f) &= \widetilde{\mathbf{r}}'_1(x_0) \times \widetilde{\mathbf{r}}'_2(y_0) \\ &= (-f'_x(x_0,y_0)\,,\ -f'_y(x_0,y_0), 1) \end{aligned} \tag{16-38}$$

- altså præcis den samme normalvektor som fundet ovenfor.

De to tangentvektorer $\widetilde{\mathbf{r}}'_1(x_0)$ og $\widetilde{\mathbf{r}}'_2(y_0)$ giver os ligeledes en ***parameterfremstilling for tangentplanen***:

|||| Sætning 16.14 Parameterfremstilling for tangentplaner

Tangentplanen igennem punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ på graf-fladen $\mathcal{G}(f)$ for funktionen $f(x,y)$ har parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(x_0,y_0)}(f)\ :\ \mathbf{T}(t_1,t_2) &= (x_0, y_0, f(x_0,y_0)) + t_1 \cdot \widetilde{\mathbf{r}}'_1(x_0) + t_2 \cdot \widetilde{\mathbf{r}}'_2(y_0) \\ &= (x_0, y_0, f(x_0,y_0)) + t_1 \cdot (1, 0, f'_x(x_0,y_0)) + t_2 \cdot (0, 1, f'_y(x_0,y_0))\ , \end{aligned} \tag{16-39}$$

hvor $t_1 \in \mathbb{R}$ og $t_2 \in \mathbb{R}$.

|||| Eksempel 16.15 Løftede koordinatkurver

Enhedsnormalvektoren i retningen $\mathbf{N}$ til de tangentplaner, der er vist i figurerne 16.4, 16.5, 16.6 er også indtegnet på de figurer. Desuden ses koordinatkurverne i (x,y)-planen samt de løftede koordinatkurver på graf-fladerne, dels for funktionen $f(x,y)$ og dels for de respektive approksimerende førstegradspolynomier (tangentplanerne).

|||| Eksempel 16.16 Funktioner af én variabel

Enhver funktion af én variabel kan betragtes som en funktion af to variable. Vi må forvente, at niveau-kurverne, gradientvektorfelterne, tangentplanerne, etc. er forholdsvis simple for sådanne funktioner. Vi ser på nogle eksempler, der viser det:

1. Funktionen $f(x,y) = x^2$ har følgende gradientfelt, tangentplaner, og normalvektorer:

$$\begin{aligned} & & \boldsymbol{\nabla} f(x,y) &= (2x, 0)\quad , \\ \mathcal{T}_{(x_0,y_0)}(f) &\ :\ & \mathbf{T}(t_1,t_2) &= (x_0 + t_1\,,\ y_0 + t_2\,,\ x_0^2 + 2x_0 \cdot t_1)\quad , \\ & & \mathbf{N}_{(x_0,y_0)}(f) &= (-2x_0, 0, 1)\quad . \end{aligned} \tag{16-40}$$

   Se figur 16.7 hvor niveu-kurverne, gradientvektorfeltet, og graf-fladen er vist for funktionen.

2. Funktionen $f(x,y) = x^3$ har

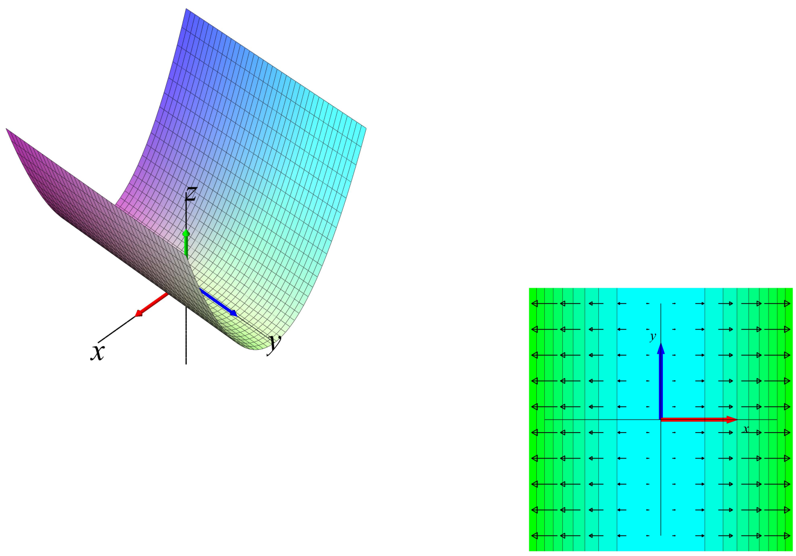
$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (3x^2, 0) \quad , \\ \mathcal{T}_{(x_0,y_0)}(f) \quad : \quad \mathbf{T}(t_1,t_2) &= (x_0 + t_1\,,\; y_0 + t_2\,,\; x_0^3 + 3x_0^2 \cdot t_1) \quad , \\ \mathbf{N}_{(x_0,y_0)}(f) &= (-3x_0^2, 0, 1) \quad . \end{aligned} \tag{16-41}$$

Se figur 16.8 hvor kun niveu-kurverne og gradientvektorfeltet er vist. Sammenlign med niveaukurver og gradientvektorfeltet for $f(x,y) = x^2$ i figur 16.7.

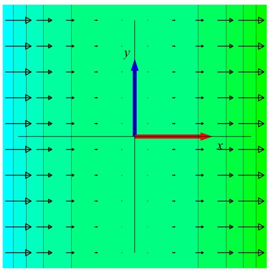
3. Funktionen $f(x,y) = \cos(3x)$ har

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (-3\sin(3x), 0) \quad , \\ \mathcal{T}_{(x_0,y_0)}(f) \quad : \quad \mathbf{T}(t_1,t_2) &= (x_0 + t_1\,,\; y_0 - t_1 \cdot 3\sin(x_0) + t_2\,,\; \cos(3x_0)) \quad , \\ \mathbf{N}_{(x_0,y_0)}(f) &= (3\sin(3x_0), 0, 1) \quad . \end{aligned} \tag{16-42}$$

Se figur 16.9. Sammenlign med figur 16.10. Inspektion af grafen og af niveaukurverne for funktionen i 16.10 leder til den ide, at man måske ved at dreje koordinatsystemet – og dermed skifte koordinater i planen – også kan beskrive den funktion som en funktion af én variabel. Det er da også tilfældet, idet den viste funktion er $f(x,y) = \cos(3x + 3y)$.



Figur 16.7: Grafen for $f(x,y) = x^2$ samt tilhørende niveaukurver og gradientvektorfelt i (x,y)-planen.

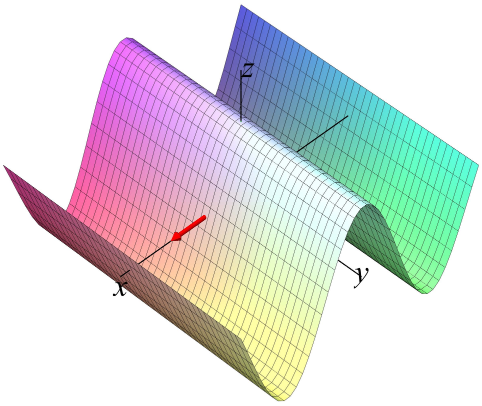


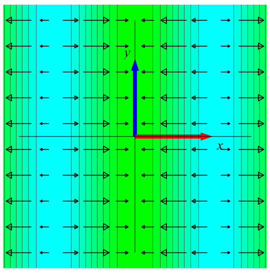
Figur 16.8: Niveaukurver og gradientvektorfelt for $f(x,y) = x^3$.

|||| Opgave 16.17

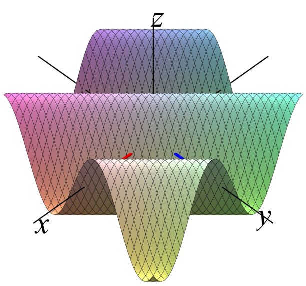
Bestem enheds-normalvektoren til tangentplanerne igennnem punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)$ på graf-fladerne for enhver af følgende funktioner for ethvert punkt (x_0, y_0) i (x, y)-planen.

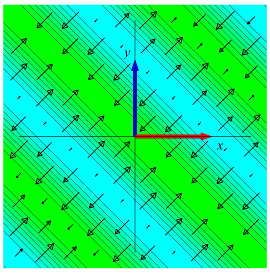
$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3x + y \\ f(x,y) &= x^2 + y^2 \\ f(x,y) &= y \cdot \mathrm{e}^x \quad . \end{aligned} \tag{16-43}$$





Figur 16.9: Grafen, niveaukurver, og gradientvektorfelt for $f(x, y) = \cos(3x)$.





Figur 16.10: Grafen, niveaukurver, og gradientvektorfelt for $f(x, y) = \cos(3x + 3y)$.

16.4 Opsummering

De partielle afledede af en funktion af to variable har forskellige geometriske iklædninger, som er særdeles nyttige at bruge ved beskrivelse og analyse af funktionerne. Gradientvektorfeltet – der jo har de partielle afledede som koordinatfunktioner – indeholder (næsten) al information om funktionen. I denne eNote har vi arbejdet med følgende:

- Gradienten udpeger i ethvert punkt den retning hvori funktionen lokalt vokser mest og den (modsatte) retning hvori funktionen aftager mest.

- Længden af gradienten for $f(x,y)$ i punktet $(x_0, y_0))$ er værdien af den største retningsafledede af $f(x,y)$ i punktet, og den tilsvarende negative værdi er værdien af den mindste retningsafledede i punktet.

- Gradientvektorfeltet for $f(x,y)$ er overalt ortogonal på niveaukurverne for $f(x,y)$.

- De løftede kurver på graf-fladen for en funktion har tangenter, der er helt indeholdt i tangentplanen til graf-fladen.

- Tangentplanen til graf-fladen for funktionen $f(x,y)$ i et givet punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ har en normalvektor, der er 'bygget' op af de partielle afledede:

$$\mathbf{N}_{(x_0,y_0)}(f) = (-f'_x(x_0,y_0)\,,\ -f'_y(x_0,y_0), 1) \quad .$$

- Tangentplanen til graf-fladen for funktionen $f(x,y)$ i et givet punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ er repræsenteret dels ved ligningen

$$z = P_{1,(x_0,y_0)}(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

  og dels ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{(x_0,y_0)}(f) \ :\ \mathbf{T}(t_1,t_2) &= (x_0,y_0,f(x_0,y_0)) + t_1\cdot\widetilde{\mathbf{r}}'_1(x_0) + t_2\cdot\widetilde{\mathbf{r}}'_2(y_0)\\ &= (x_0,y_0,f(x_0,y_0)) + t_1\cdot(1,0,f'_x(x_0,y_0)) + t_2\cdot(0,1,f'_y(x_0,y_0))\ ,\end{aligned}$$

  hvor $t_1 \in \mathbb{R}$ og $t_2 \in \mathbb{R}$.