

|||| eNote 20

Andengrads ligninger i to og tre variable

I denne eNote vil vi igen beskæftige os med andengradspolynomierne i to og tre variable som også er behandlet og undersøgt med forskellige teknikker i henholdsvis eNote ?? og eNote ???. Ved den indledende behandling af funktioner af to variable definerede vi niveau-mængderne $\mathcal{K}_c(f)$ for funktioner $f(x, y)$ af to variable, se eNote ???. Vi skal se i denne eNote, at for andengradspolynomier i to variable er niveau-mængderne typisk velkendte kurver i (x, y) -planen som for eksempel ellipser og hyperbler og det er formålet med denne eNote at vise hvilke typer niveaukurver der optræder for givne ligninger. Vi vil dertil i udstrakt grad benytte den reduktionsmetode, der er udviklet i eNote ???. Den virker for andengradspolynomier af både to og tre (og flere) variable, og som vi skal se, kan de tilhørende niveau-kurver og -flader identificeres ud fra en kort navneliste. Niveaukurverne for andengradspolymier i to variable og niveaufladerne for andengradspolynomier i tre variable kendes klassisk under navnene henholdsvis **keglesnit** og **keglesnitsflader**.

20.1 Andengrads ligninger i to variable

Fra eNote ?? ved vi fra inspektion af de viste niveaukurver, at der typisk optræder ellipser og hyperbler eller ellipse-lignende og hyperbel-lignende kurver som niveaukurver for funktioner af to variable – især omkring stationære punkter. Det er ikke nogen tilfældighed; andengradspolynomier har netop sådanne niveaukurver. Og passende valgte andengradspolynomier er jo samtidig gode approksimationer til givne glatte funktioner af to variable.

I det følgende vil vi med nogle eksempler gennemgå standardmetoden til reduktion af de ligninger, der fremkommer når vi vil finde de punkter i \mathbb{R}^2 for hvilke et givet andengradspolynomium er 0, altså netop de punkter, der udgør niveau-mængden $\mathcal{K}_0(f)$ for $f(x, y)$.

||| Eksempel 20.1 Ellipse

For et andengradspolynomium $f(x, y)$ bestemmer vi følgende ingredienser til reduktion af polynomiet på præcis den måde som er gennemgået i eNote ???. Vi har specielt igen brug for den positive ortogonale substitutionsmatrix \mathbf{Q} som diagonaliserer matricen $\frac{1}{2} \cdot \mathbf{H}f(x, y)$ for derved at opnå et udtryk for $f(x, y)$ som ikke indeholder produktled – nu i de nye koordinater \tilde{x} og \tilde{y} . Resultatet af reduktionen er $\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y})$ som vist nedenfor:

$$f(x, y) = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot x \cdot y - 8 \cdot x - 10 \cdot y + 13 .$$

$$\nabla f(x, y) = (4 \cdot x + 2 \cdot y - 8, 2 \cdot x + 4 \cdot y - 10) .$$

$$\frac{1}{2} \cdot \mathbf{H}f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (20-1)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} .$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= 3 \cdot \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 9 \cdot \sqrt{2} \cdot \tilde{x} - \sqrt{2} \cdot \tilde{y} + 13 \\ &= 3 \cdot \left(\tilde{x} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 + \left(\tilde{y} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 - 1 . \end{aligned}$$

Den sidste ligning i ovenstående beregning af det reducerede andengradspolynomium $\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y})$ fremkommer ved *kvadratkomplettering*. Den kan foretages for \tilde{x} -leddene først og dernæst for \tilde{y} -leddene. For de førstnævnte foregår det sådan:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \tilde{x}^2 - 9 \cdot \sqrt{2} \cdot \tilde{x} &= 3 \cdot (\tilde{x}^2 - 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \tilde{x}) \\ &= 3 \cdot \left(\left(\tilde{x} - \frac{3}{2} \sqrt{2} \right)^2 - \frac{9}{2} \right) . \end{aligned} \quad (20-2)$$

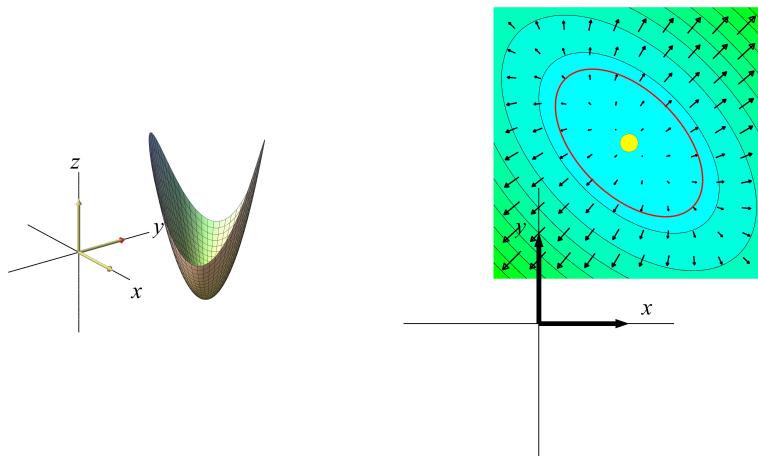
Den andengrads ligning som giver niveaukurven $\mathcal{K}_0(f)$ er nu bestemt ved hver af følgende ækvivalente ligninger:

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 &= \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \left(\frac{\tilde{x} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \right)^2 + \left(\tilde{y} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 &= 1 . \end{aligned} \quad (20-3)$$

Denne sidste ligning fremstiller en *ellipse* med centrum i $e\mathbf{C} = (x_0, y_0) = (1, 2)$ (med hensyn

til de gamle koordinater) svarende til $\nabla \mathbf{C} = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = (\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}, \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2})$ (med hensyn til de nye koordinater) og halvakserne $\frac{1}{\sqrt{3}}$ og 1, se figurerne 20.1 og 20.2. Det nye koordinatsystem fremkommer ved drejning af det gamle koordinatsystem med drejningsvinklen $\phi = \pi/4$.

Funktionen $f(x, y)$ har et stationært punkt i centrum for ellipsen, hvor funktionsværdien er -1 . Hesse-matricen er positiv definit og derfor er det stationære punkt et egentligt lokalt minimumspunkt. Der er tydeligvis tale om et globalt minimumspunkt.



Figur 20.1: Grafen for funktionen $f(x, y) = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot x \cdot y - 8 \cdot x - 10 \cdot y + 13$ samt niveaukurver og gradientvektorfelt for funktionen. Bemærk specielt niveaukurven svarende til niveau 0, som er den ellipse vi analyserer i eksempel 20.1.

||| Eksempel 20.2 Ellipse

$$f(x, y) = 29 \cdot x^2 + 36 \cdot y^2 + 24 \cdot x \cdot y - 152 \cdot x - 336 \cdot y + 620 \quad .$$

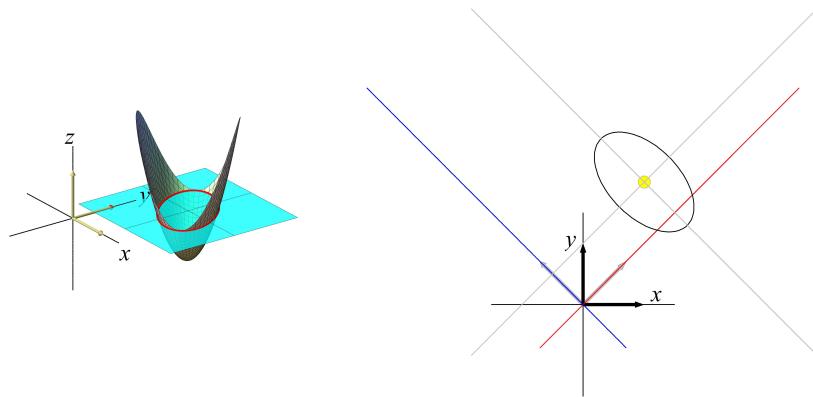
$$\nabla f(x, y) = (58 \cdot x + 24 \cdot y - 152, 72 \cdot y + 24 \cdot x - 336) \quad .$$

$$\frac{1}{2} \cdot \mathbf{H}f(x, y) = \begin{bmatrix} 29 & 12 \\ 12 & 36 \end{bmatrix} \quad .$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \quad . \tag{20-4}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \quad .$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= 45 \cdot \tilde{x}^2 + 20 \cdot \tilde{y}^2 - 360 \cdot \tilde{x} - 80 \cdot \tilde{y} + 620 \\ &= 45 \cdot (\tilde{x} - 4)^2 + 20 \cdot (\tilde{y} - 2)^2 - 180 \quad . \end{aligned}$$



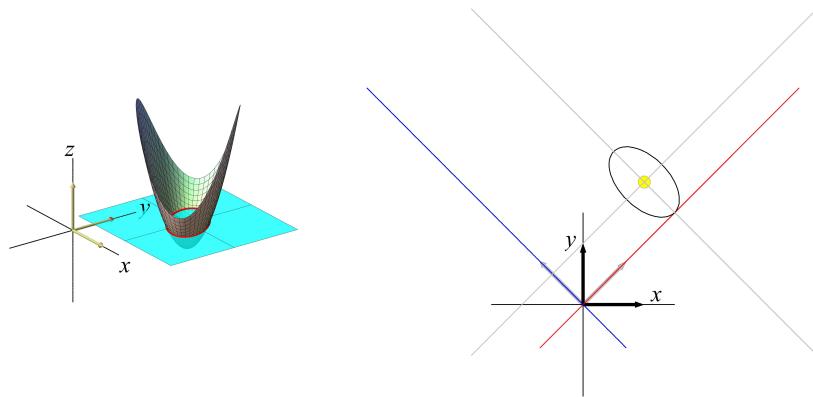
Figur 20.2: Grafen for funktionen med den elliptiske niveaukurve i niveau 0 for funktionen i eksempel 20.1.

Den andengradslingning som giver niveaukurven $\mathcal{K}_0(f)$ er derfor givet ved hver enkelt af følgende ækvivalente ligninger:

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 &= \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \left(\frac{\tilde{x}-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{y}-2}{3}\right)^2 &= 1 \quad . \end{aligned} \quad (20-5)$$

Dette er ligningen for en *ellipse* med centrum i $e\mathbf{C} = (x_0, y_0) = (4/5, 22/5)$ (med hensyn til de gamle koordinater) svarende til $v\mathbf{C} = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = (4, 2)$ (med hensyn til de nye koordinater) og halvakserne 2 og 3, se figur 20.4. Det nye koordinatsystem fremkommer ved drejning af det gamle koordinatsystem med drejningsvinklen $\phi = \arccos(3/5)$.

Andengradspolynomiet $f(x, y)$ har et stationært punkt i centrum med værdien -180 . Hessematricen er positiv definit og derfor er det stationære punkt et egentligt lokalt minimumspunkt med minimumsværdi -180 . Der er igen tydeligvis tale om et globalt minimumspunkt.



Figur 20.3: Grafen for den funktion, der blot er løftet $1/2$ i forhold til værdierne for funktionen i eksempel 20.1. Niveaukurven $\mathcal{K}_0(f)$ i niveau 0 er tilsvarende *mindre* med tilsvarende mindre halvakser, men den er orienteret efter de samme akseretninger.

||| Eksempel 20.3 Hyperbel

Vi ser igen på eksempel ?? fra eNote ?? som handler om andengradspolynomiet $f(x, y)$ med følgende data:

$$f(x, y) = 11 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 - 24 \cdot x \cdot y - 20 \cdot x + 40 \cdot y - 60 .$$

$$\nabla f(x, y) = (22 \cdot x - 24 \cdot y - 20, -24 \cdot x + 8 \cdot y + 40) .$$

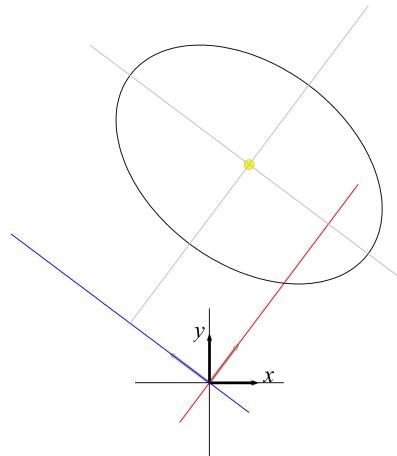
$$\frac{1}{2} \cdot \mathbf{H}f(x, y) = \begin{bmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} .$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} .$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} , \quad \text{hvor } \varphi = -\arcsin(3/5) .$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= 20 \cdot \tilde{x}^2 - 5 \cdot \tilde{y}^2 - 40 \cdot \tilde{x} + 20 \cdot \tilde{y} - 60 \\ &= 20 \cdot (\tilde{x} - 1)^2 - 5 \cdot (\tilde{y} - 2)^2 - 60 . \end{aligned} \tag{20-6}$$

Den andengrads ligning som giver niveaukurven $\mathcal{K}_0(f)$ er derfor givet ved hver af følgende



Figur 20.4: Niveaukurven $\mathcal{K}_0(f)$ for andengradspolynomiet $f(x, y) = 29 \cdot x^2 + 36 \cdot y^2 + 24 \cdot x \cdot y - 152 \cdot x - 336 \cdot y + 620$ fra eksempel 20.2.

ligninger:

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 &= \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \left(\frac{\tilde{x} - 1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{\tilde{y} - 2}{2 \cdot \sqrt{3}}\right)^2 &= 1 \quad . \end{aligned} \quad (20-7)$$

Ligningerne fremstiller en *hyperbel* med centrum i $e\mathbf{C} = (x_0, y_0) = (2, 1)$ (med hensyn til de gamle koordinater) svarende til $v\mathbf{C} = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = (1, 2)$ (med hensyn til de nye koordinater) og halvakserne $\sqrt{3}$ og $2 \cdot \sqrt{3}$. Det nye koordinatsystem fremkommer ved drejning af det gamle koordinatsystem med drejningsvinklen $\phi = -\arcsin(3/5)$.

Funktionen har et stationært punkt i centrum med værdien -60 . Hesse-matricen er indefinit og derfor er det stationære punkt hverken et lokalt minimumspunkt eller maksimumspunkt.

||| Eksempel 20.4 Hyperbel

En anden hyperbel er givet ved $\mathcal{K}_0(f)$ for følgende andengradspolynomium:

$$f(x, y) = -\frac{5}{4} \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot y^2 + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot x \cdot y + 5 \cdot x - 3 \cdot \sqrt{3} \cdot y - \frac{21}{4} .$$

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{5}{2} \cdot x + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot y + 5, \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y - 3 \cdot \sqrt{3} \right) .$$

$$\frac{1}{2} \cdot \mathbf{H}f(x, y) = \begin{bmatrix} -5/2 & 3 \cdot \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 1/4 \end{bmatrix} .$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} . \quad (20-8)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} .$$

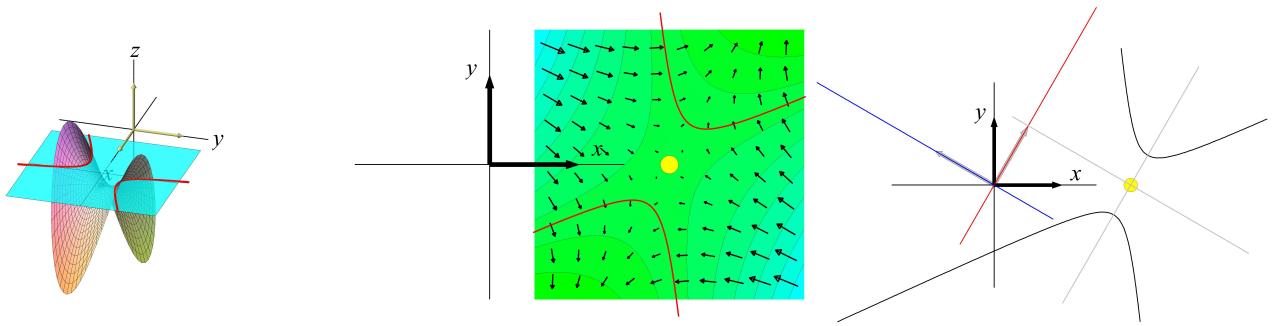
$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \tilde{x}^2 - 2 \cdot \tilde{y}^2 - 2 \cdot \tilde{x} - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \tilde{y} - \frac{21}{4} \\ &= (\tilde{x} - 1)^2 - 2 \cdot (\tilde{y} + \sqrt{3})^2 - \frac{1}{4} . \end{aligned}$$

Den andengradslingning som giver niveaukurven $\mathcal{K}_0(f)$ er derfor givet ved hver af følgende ækvivalente ligninger, hvor den sidste fås ved kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 &= \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \\ \left(\frac{\tilde{x} - 1}{\frac{1}{2}} \right)^2 - \left(\frac{\tilde{y} + \sqrt{3}}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} \right)^2 &= 1 . \end{aligned} \quad (20-9)$$

Det er en *hyperbel* med centrum i $e\mathbf{C} = (x_0, y_0) = (2, 0)$ (med hensyn til de gamle koordinater) svarende til $v\mathbf{C} = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = (1, -\sqrt{3})$ (med hensyn til de nye koordinater) og halvakserne $1/2$ og $1/(2 \cdot \sqrt{2})$, se figur 20.5. Det nye koordinatsystem fremkommer ved drejning af det gamle koordinatsystem med drejningsvinklen $\phi = \frac{\pi}{3}$.

Funktionen har et stationært punkt i centrum med værdien $-1/4$. Hesse-matricen er indefinit og derfor er det stationære punkt hverken et lokalt minimumspunkt eller maksimumspunkt, som det også tydeligt fremgår af figur 20.5.



Figur 20.5: Grafen for funktionen fra eksempel 20.4 med snit i niveau 0, gradientfelt, niveaumængder og specielt niveaukurven $\mathcal{K}_0(f)$.

20.2 Andengrads ligninger i tre variable

For andengradspolynomier $f(x, y, z)$ i tre variable kan vi gennemføre samme analyse som ovenfor men nu af de niveaumængder i rummet, dvs. de niveau-flader der fremkommer ved at sætte $f(x, y, z) = 0$. Vi viser metoden via nogle eksempler:

||| Eksempel 20.5 Ellipsoide

Et andengradspolynomium i tre variable undersøges:

$$f(x, y, z) = 7 \cdot x^2 + 6 \cdot y^2 + 5 \cdot z^2 - 4 \cdot x \cdot y - 4 \cdot y \cdot z - 2 \cdot x + 20 \cdot y - 10 \cdot z + 15 \quad .$$

$$\nabla f(x, y, z) = (14 \cdot x - 4 \cdot y - 2, -4 \cdot x + 12 \cdot y - 4 \cdot z + 20, -4 \cdot y + 10 \cdot z - 10) \quad .$$

$$\frac{1}{2} \cdot \mathbf{H}f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad .$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad .$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix} \quad .$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= 9 \cdot \tilde{x}^2 + 6 \cdot \tilde{y}^2 + 3 \cdot \tilde{z}^2 - 18 \cdot \tilde{x} - 12 \cdot \tilde{y} - 6 \cdot \tilde{z} + 15 \\ &= 9 \cdot (\tilde{x} - 1)^2 + 6 \cdot (\tilde{y} - 1)^2 + 3 \cdot (\tilde{z} - 1)^2 - 3 \quad . \end{aligned} \tag{20-10}$$

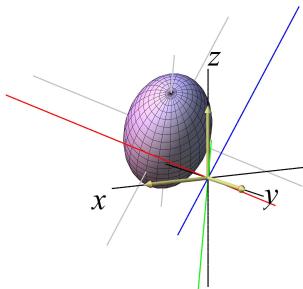
Den andengradslingning som giver niveaufladen $\mathcal{K}_0(f)$ er derfor givet ved hver af følgende ækvivalente ligninger:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = 0 &= \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ \left(\frac{\tilde{x} - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{y} - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right)^2 + (\tilde{z} - 1)^2 &= 1 \quad . \end{aligned} \tag{20-11}$$

Det er ligningen for en *ellipsoide* med centrum i $e\mathbf{C} = (x_0, y_0, z_0) = (-1/3, -5/3, 173)$ (med hensyn til de gamle koordinater) svarende til $v\mathbf{C} = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0) = (1, 1, 1)$ (med hensyn til de nye koordinater) og halvakserne $\frac{1}{\sqrt{3}}$ og $\frac{1}{\sqrt{2}}$, og 1, se figur 20.6 og navnetabellen i afsnit 20.3. Det nye koordinatsystem fremkommer ved rotation af det gamle koordinatsystem med den positive ortogonale substitution \mathbf{Q} .



Funktionen $f(x, y, z)$, som er undersøgt i eksempel 20.5, har et *stationært punkt* i det fundne centrum med værdien -3 . Hesse-matricen er positiv definit og derfor er det stationære punkt for $f(x, y, z)$ i rummet et egentligt lokalt minimumspunkt, et globalt minimumspunkt.



Figur 20.6: Niveaufladen $\mathcal{K}_0(f)$ for den funktion som er analyseret i eksempel 20.5. Det nye roterede koordinatsystem hvori ellipsoiden har reduceret form er antydet med den røde \tilde{x} -akse, blå \tilde{y} -akse, og grønne \tilde{z} -akse.



Hvis vi kunne tegne grafen for funktionen $f(x, y, z)$ i det 4-dimensionale (x, y, z, w) -rum, dvs. hvis vi betragtede mængden af de punkter i \mathbb{R}^4 der kan skrives på formen $(x, y, z, f(x, y, z))$ når (x, y, z) gennemløber (x, y, z) -rummet i \mathbb{R}^4 , så vil niveaufladen for $f(x, y, z)$ være den mængde vi får i (x, y, z) -rummet ved at sætte $w = 0$, altså netop $f(x, y, z) = 0$.

||| Eksempel 20.6 Hyperboloide med ét net

$$f(x, y, z) = x^2 + 2 \cdot y^2 + z^2 + 2 \cdot x - 4 \cdot y + 2 \cdot z - 4 \cdot x \cdot z - 1 .$$

$$\nabla f(x, y, z) = (2 \cdot x - 4 \cdot z + 2, -4 \cdot y - 4, -4 \cdot x + 2 \cdot z + 2) .$$

$$\frac{1}{2} \cdot \mathbf{H}f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$
(20-12)

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} .$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= 3 \cdot \tilde{x}^2 + 2 \cdot \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 - 4 \cdot \tilde{y} - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \tilde{z} - 1 \\ &= 3 \cdot \tilde{x}^2 + 2 \cdot (\tilde{y} - 1)^2 - (\tilde{z} + \sqrt{2})^2 - 1 .\end{aligned}\quad (20-13)$$

Den andengradslingning som giver niveaufladen $\mathcal{K}_0(f)$ er derfor givet ved hver af følgende ækvivalente ligninger:

$$\begin{aligned}f(x, y, z) = 0 &= \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ \left(\frac{\tilde{x}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{y} - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2 - (\tilde{z} + \sqrt{2})^2 &= 1 .\end{aligned}\quad (20-14)$$

Ligningerne repræsenterer en *hyperboloide med ét net* der har centrum i $e\mathbf{C} = (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ (med hensyn til de gamle koordinater) svarende til $v\mathbf{C} = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = (0, 1, -\sqrt{2})$ (med hensyn til de nye koordinater) og halvakserne $\frac{1}{\sqrt{3}}$ og $\frac{1}{\sqrt{2}}$, og 1, se figur 20.7 og navnetabellen i afsnit 20.3. Det nye koordinatsystem fremkommer ved rotation af det gamle koordinatsystem med den positive ortogonale substitution \mathbf{Q} .



Funktionen $f(x, y, z)$, som er undersøgt i eksempel 20.6, har et *stationært punkt* i det fundne centrum med værdien -1 . Hesse-matricen er indefinit og derfor er det stationære punkt for $f(x, y, z)$ i rummet hverken minimumspunkt eller maksimumspunkt.

||| Eksempel 20.7 Hyperboloide med to net

Et andengradspolynomium $f(x, y, z)$ er givet ved følgende data:

$$f(x, y, z) = -x^2 + \frac{1}{2} \cdot y^2 + \frac{1}{2} \cdot z^2 + 2 \cdot x + 4 \cdot y + 4 \cdot z - 5 \cdot y \cdot z - 6 .$$

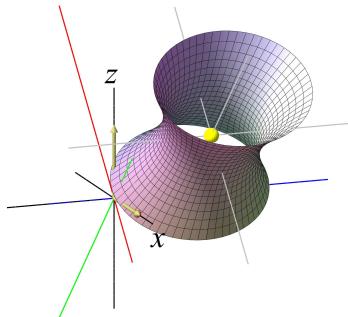
$$\nabla f(x, y, z) = (-2 \cdot x + 2, y - 5 \cdot z + 4, -5 \cdot y + z + 4) .$$

$$\frac{1}{2} \cdot \mathbf{H}f(x, y, z) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & -5/2 & 1/2 \end{bmatrix} .$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \quad (20-15)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} .$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= 3 \cdot \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - 2 \cdot \tilde{z}^2 + 2 \cdot \tilde{y} + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \tilde{z} - 6 \\ &= 3 \cdot \tilde{x}^2 - (\tilde{y} - 1)^2 - 2 \cdot (\tilde{z} - \sqrt{2})^2 - 1 .\end{aligned}$$



Figur 20.7: Niveaufladen $\mathcal{K}_0(f)$ for funktionen som analyseres i eksempel 20.6.

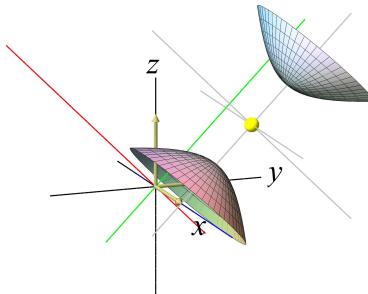
Den andengrads ligning som giver niveaufladen $\mathcal{K}_0(f)$ er derfor givet ved:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = 0 &= \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ \left(\frac{\tilde{x}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^2 - (\tilde{y} - 1)^2 - \left(\frac{\tilde{z} - \sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2 &= 1 \quad . \end{aligned} \quad (20-16)$$

Det er ligningen for en *hyperboloid med to net* der har centrum i $e\mathbf{C} = (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ (med hensyn til de gamle koordinater) svarende til $v\mathbf{C} = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = (0, 1, \sqrt{2})$ (med hensyn til de nye koordinater) og halvakserne $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ og 1 – se figur 20.8.

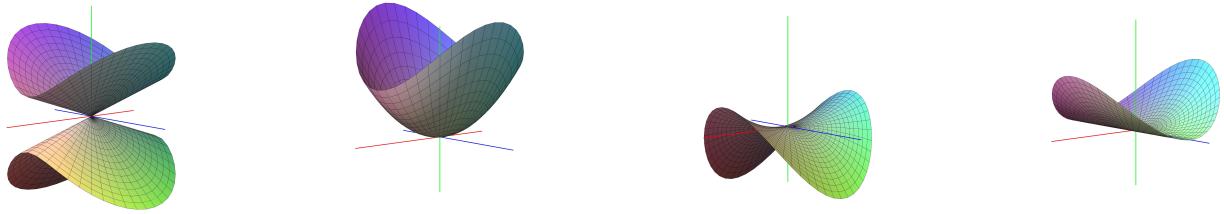
20.3 Navnetabel for andengradspolynomiers niveauflader

De maksimalt reducerede udtryk for andengradspolynomiers niveauflader præsenteres her under antagelse af at eventuelt centrum (eller såkaldt toppunkt) optræder i $v\mathbf{C} = (0, 0, 0)$. For en given konkret niveauflade kan navnet aflæses fra tabellen; beliggenheden angives med koordinaterne for det fundne centrum \mathbf{C} for niveaufladen; orienteringen angives ved den fundne substitutionsmatrix \mathbf{Q} og størrelsen af niveaufladen angives ved de enkelte halvakter a, b , og c , eller p og k i de enkelte tilfælde for så vidt de optræder i den reducerede ligning for niveaufladen.



Figur 20.8: En hyperboloide med to net er niveaufladen $\mathcal{K}_0(f)$ for den funktion, der analyseres i eksempel 20.7.

Ligning	Navn	Punktet $(0,0,0)$	Eksempel
$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} + \frac{\tilde{z}^2}{c^2} = 1$	ellipsoide	centrum	20.5
$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} - \frac{\tilde{z}^2}{c^2} = 1$	hyperboloide med ét net	centrum	20.6
$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2} - \frac{\tilde{z}^2}{c^2} = 1$	hyperboloide med to net	centrum	20.7
$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} - \frac{\tilde{z}^2}{c^2} = 0$	keglesnitskegleflade	centrum	fig 20.9
$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = \tilde{z}$	elliptisk paraboloide	toppunkt	fig 20.9
$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = \tilde{z}$	hyperbolsk paraboloide	toppunkt	fig 20.9
$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} = p \cdot \tilde{z}$	parabolsk cylinderflade	toppunkt	fig 20.9
$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1$	elliptisk cylinderflade	centrum	
$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1$	hyperbolsk cylinderflade	centrum	
$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} + \frac{\tilde{z}^2}{c^2} = 0$	punktet $(0,0,0)$	"centrum"	
$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 0$	\tilde{z} -aksen		
$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 0$	to planer gennem \tilde{z} -aksen		
$\tilde{x}^2 = k > 0$	to planer parallelle med (\tilde{y}, \tilde{z}) -planen		
$\tilde{x}^2 = 0$	(\tilde{y}, \tilde{z}) -planen		



Figur 20.9: En keglesnitskegleflade, en elliptisk paraboloide, en hyperbolsk paraboloide, og en parabolsk cylinderflade.

||| Opgave 20.8

Vis, at listen i navnetabellen over niveauflader for andengradspolynomier i tre variable er komplet; dvs. enhver totalt reduceret andengradsaligning i tre variable (som indeholder mindst én af de variable \tilde{x} , \tilde{y} , eller \tilde{z} med grad 2) er at finde på listen.

||| Opgave 20.9

Vis, at enhver totalt reduceret andengradsaligning i to variable fremkommer af tabellen over totalt reducerede andengradsaligninger i tre variable ved at sætte $\tilde{z} = 0$.

20.4 Parametrising af en ellipsoide

Vi vil her kort skitsere hvordan man kan *parametrise* en niveauflade for et andengrads-polynomium i tre variable med henblik på at kunne plotte og undersøge dens øvrige geometriske egenskaber. Som eksempel vil vi benytte en ellipsoide med givet (eller fundet) centrum \mathbf{C} , givne halvakser (aflæst fra diaognalmatricen Λ), og givne orienteringsvektorer $e\mathbf{v}_1, e\mathbf{v}_2$, og $e\mathbf{v}_3$ (fra den positive ortogonale substitutionsmatrix \mathbf{Q}) – altså netop ud fra de data der bestemmes via reduktionsanalysen eksemplificeret ovenfor.

Vi antager for eksemplets skyld, at der her er tale om en ellipsoide, således at $\mathbf{A} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{H}f(x, y, z)$ er positiv definit, dvs. alle tre egenværdier λ_1, λ_2 , og λ_3 er positive for $\mathbf{A} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{H}f(x, y, z)$. Tilsvarende konstruktion kan gennemføres for enhver af de andre niveauflader.

Vi antager, at ellipsoidens ligning i reduceret form er givet ved

$$\lambda_1 \cdot (\tilde{x} - \tilde{x}_0)^2 + \lambda_2 \cdot (\tilde{y} - \tilde{y}_0)^2 + \lambda_3 \cdot (\tilde{z} - \tilde{z}_0)^2 = d^2 \quad , \quad (20-17)$$

hvor d er en positiv konstant og hvor ${}_v\mathbf{C} = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0)$ er koordinaterne for ellipsoidens centrum med hensyn til det nye koordinatsystem, således at centerkoordinaterne med hensyn til det gamle system er givet ved: ${}_e\mathbf{C} = \mathbf{Q} \cdot {}_v\mathbf{C}$. Vi har altså følgende ingredienser til rådighed til konstruktionen af ellipsoiden:

$$\begin{aligned} {}_e\mathbf{C} &= (C_1, C_2, C_3) \\ a &= \frac{d}{\sqrt{\lambda_1}} \\ b &= \frac{d}{\sqrt{\lambda_2}} \\ c &= \frac{d}{\sqrt{\lambda_3}} \\ \mathbf{Q} &= \left[\begin{array}{ccc} {}_e\mathbf{v}_1 & {}_e\mathbf{v}_2 & {}_e\mathbf{v}_3 \end{array} \right] \quad . \end{aligned} \tag{20-18}$$

Vi vil udelukkende betragte koordinater, der refererer til den sædvanlige basis e i (\mathbb{R}^n, \cdot) . En kugleflade S_1 med radius 1 og centrum i $(0, 0, 0)$ kan beskrives som mængden af de punkter (x, y, z) , der har afstanden 1 til $(0, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} \rho_{(0,0,0)}(x, y, z) &= 1 \quad , \quad \text{som er ækvivalent med} \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= 1 \quad , \quad \text{eller} \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \quad . \end{aligned} \tag{20-19}$$

Kuglefladen kan også præsenteres ved hjælp af *geografiske koordinater* u og v , hvor $u \in [0, \pi]$ og $v \in [-\pi, \pi]$:

$$\mathcal{S} : (x, y, z) = \mathbf{r}(u, v) = (\sin(u) \cdot \cos(v), \sin(u) \cdot \sin(v), \cos(u)) \quad . \tag{20-20}$$

Når u og v gennemløber deres respektive intervaller $u \in [0, \pi]$ og $v \in [-\pi, \pi]$ så får vi punkter $(x, y, z) = \mathbf{r}(u, v)$ på kuglefladen – og alle punkterne rammes. Lad os se på den første af de to påstande, altså at alle punkterne $\mathbf{r}(u, v)$ ligger på kuglefladen. Indsæt $x = \sin(u) \cdot \cos(v)$, $y = \sin(u) \cdot \sin(v)$, og $z = \cos(u)$ i kuglens ligning 20-19:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \sin^2(u) \cdot \cos^2(v) + \sin^2(u) \cdot \sin^2(v) + \cos^2(u) \\ &= \sin^2(u) \cdot (\sin^2(u) + \cos^2(u)) + \cos^2(u) \\ &= \sin^2(u) + \cos^2(u) = 1 \quad , \end{aligned} \tag{20-21}$$

så alle punkterne der fremstilles på formen $\mathbf{r}(u, v)$ ligger på kuglefladen.

||| Opgave 20.10

Vis, at den anden påstand om $\mathbf{r}(u, v)$ også er rigtig, altså at alle punkter på kuglefladen 'rammes' af $\mathbf{r}(u, v)$ når u og v gennemløber intervallerne $u \in [0, \pi]$ og $v \in [-\pi, \pi]$. Findes der punkter på kuglefladen som rammes mere end én gang? Beskriv i så fald den punktmængde og hvor 'mange gange' de punkter rammes.

Vi skalerer kuglefladen med de tre egenværdier i hver koordinatakseretning og får dermed en fremstilling af en ellipsoide med de korrekte, ønskede, halvakter:

$$\mathbf{r}_1(u, v) = \left(\frac{d}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot \sin(u) \cdot \cos(v), \frac{d}{\sqrt{\lambda_2}} \cdot \sin(u) \cdot \sin(v), \frac{d}{\sqrt{\lambda_3}} \cdot \cos(u) \right) , \quad (20-22)$$

hvor $u \in [0, \pi], v \in [-\pi, \pi]$ således at ethvert punkt x, y, z som rammes af afbildningen $\mathbf{r}_1(u, v)$ nu tilfredsstiller:

$$\lambda_1 \cdot x^2 + \lambda_2 \cdot y^2 + \lambda_3 \cdot z^2 = d^2$$

$$\left(\frac{x}{\frac{d}{\sqrt{\lambda_1}}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{d}{\sqrt{\lambda_2}}} \right)^2 + \left(\frac{z}{\frac{d}{\sqrt{\lambda_3}}} \right)^2 = 1 \quad (20-23)$$

eller, hvis vi benytter halvaksebetegnelserne a, b , og c :

$$\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 = 1 , \quad (20-24)$$

som netop er ligningen for en standard ellipsoide med de ønskede halvakter men konstrueret i (x, y, z) -systemet. De punkter der fremstilles ved $\mathbf{r}_1(u, v)$ ligger alle på denne ellipsoide.

Til sidst roterer vi ellipsoiden med rotationsmatricen \mathbf{Q} og parallelforskyder til det korrekte ønskede centrum:

$$\mathbf{r}_2(u, v) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_1(u, v) + \mathbf{C} . \quad (20-25)$$

Alle de punkter, der har stedvektorer givet ved $\mathbf{r}_2(u, v)$ ligger nu på den ønskede ellipsoide og alle punkterne på ellipsoiden rammes når $u \in [0, \pi], v \in [-\pi, \pi]$.

||| Eksempel 20.11 Ellipsoide parametrisering

En konkret ellipsoide er givet ved følgende data, som stammer fra en undersøgelse af andengradspolynomiet

$$f(x, y, z) = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot z^2 - 2 \cdot x - 4 \cdot y - 2 \cdot z - 2 \cdot x \cdot z + 3 : \quad (20-26)$$

$$\begin{aligned} {}_e\mathbf{C} &= (1, 1, 1) \\ a &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ b &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c &= 1 \\ \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (20-27)$$

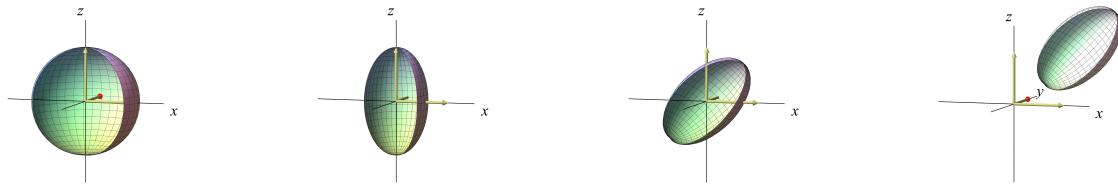
Vi vil konstruere en parameterfremstilling på formen $\mathbf{r}_2(u, v)$ som i (20-25) for den givne ellipsoide. Den skalerede kugleflade er givet ved:

$$\mathbf{r}_1(u, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin(u) \cdot \cos(v), \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin(u) \cdot \sin(v), \cos(u) \right) \quad (20-28)$$

og den \mathbf{Q} -roterede skalerede kugleflade parallelforskudt til punktet $(1, 1, 1)$ får derefter parameterfremstillingen:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2(u, v) &= \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sin(u) \cdot \cos(v) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos(u) + 1, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin(u) \cdot \sin(v) + 1, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sin(u) \cdot \cos(v) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos(u) + 1 \right) . \end{aligned} \quad (20-29)$$

Konstruktionen er antydet i figur 20.10.



Figur 20.10: Konstruktion af ellipsoiden fra eksempel 20.11 ud fra data om beliggenhed, akser, og rotationsmatrix.

||| Eksempel 20.12 Ellipsoidedata

Den konstruerede ellipsoide i eksempel 20.11 er 0-niveaufladen for andengradspolynomiet med følgende data:

$$f(x, y, z) = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot z^2 - 2 \cdot x - 4 \cdot y - 2 \cdot z - 2 \cdot x \cdot z + 3 .$$

$$\nabla f(x, y, z) = (4 \cdot x - 2 \cdot z - 2, 4 \cdot y - 4, -2 \cdot x + 4 \cdot z - 2) .$$

$$\frac{1}{2} \cdot \mathbf{H}f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (20-30)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} .$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= 3 \cdot \tilde{x}^2 + 2 \cdot \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 - 4 \cdot \tilde{y} + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \tilde{z} + 3 \\ &= 3 \cdot \tilde{x}^2 + 2 \cdot (\tilde{y} - 1)^2 + (\tilde{z} + \sqrt{2})^2 - 1 . \end{aligned}$$

Den andengrads ligning som giver niveaufladen $\mathcal{K}_0(f)$ er derfor givet ved ligningen:

$$\left(\frac{\tilde{x}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{y} - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right)^2 + (\tilde{z} + \sqrt{2})^2 = 1 , \quad (20-31)$$

hvorfra vi aflæser de ovenfor givne halvakser $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, og $c = 1$ samt centerkoordinaterne $v(\mathbf{C}) = (0, 1, -\sqrt{2})$ som via substitutionsmatricen \mathbf{Q} svarer til koordinaterne $e(\mathbf{C}) = (1, 1, 1)$ med hensyn til standard-basis e .

20.5 Opsummering

Hovedresultatet i denne eNote er en identifikation – via en række konkrete eksempler – af de mulige niveaukurver og -flader for andengradspolynomier i to og tre variable. Metoden er reduktionsmetoden for kvadratiske former og andengradspolynomier, som er indført i eNote ???. Baseret på samme metode angives en strategi til parametrisering og præsentation af de enkelte niveauflader for funktioner af tre variable.