01005 eNotesamling E2011

27. november 2011

Indhold

eNote 1

Talrummet $\mathbb{R}^n$

Denne eNote handler om talrummet $\mathbb{R}^n$, der er fundamentalt at forstå for at følge med i eNoterne om Lineær Algebra.

1.1 Talrummet $\mathbb{R}^n$

Talrummet $\mathbb{R}^n$ består af alle ordnede talsæt som indeholder n elementer. Fx er $(1,4,5)$ og $(1,5,4)$ to forskellige talsæt som tilhører $\mathbb{R}^3$. Mere formelt kan vi opskrive skrive $\mathbf{R}^n$ på mængdeform således:

$$\mathbf{R}^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \,|\, a_i \in \mathbf{R}\} . \tag{1-1}$$

Vi indfører addition af elementer i $(a_1, a_2, ..., a_n)$ og multiplikation af et element i $\mathbb{R}^n$ med et reelt tal ved følgende definition:

Definition 1.1

Lad $(a_1, a_2, ..., a_n)$ og $(b_1, b_2, ..., b_n)$ være elementer i $\mathbb{R}^n$ og lad k være et reelt tal (en *skalar*). *Summen* af talsættene defineres ved ligningen

$$(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n), \tag{1-2}$$

og *produktet* af $(a_1, a_2, ..., a_n)$ med k ved

$$k \cdot (a_1, a_2, ..., a_n) = (a_1, a_2, ..., a_n) \cdot k = (k \cdot a_1, k \cdot a_2, ..., k \cdot a_n). \tag{1-3}$$

Addition og multiplikation med skalar foregår således pladsvis.

Eksempel 1.2

Et eksempel på addition af to talsæt i $\mathbb{R}^4$ er $(1,2,3,4) + (2,1,-2,-5) = (3,3,1,-1)$.

|||| Eksempel 1.3

Et eksempel på multiplikation af tallet 5 med et talsæt i $\mathbb{R}^3$ er $5 \cdot (2,4,5) = (10,20,25)$.

Som kort notation for talsæt vil vi bruge små **fede** bogstaver, vi kan for eksempel skrive

$$\mathbf{a} = (3,2,1) \;\text{ eller }\; \mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)\,.$$

For talsættet $(0,0,...,0)$, som kaldes *nulelementet* i $\mathbb{R}^n$, benyttes skrivemåden

$$\mathbf{0} = (0,0,...,0)\,.$$

Når man skal foretage mere sammensatte regneopgaver i talrummene, får man brug for de følgende regneregler.

|||| Sætning 1.4

Med de i definition 1.1 indførte regneoperationer opfylder talrummet $\mathbb{R}^n$ for enhver værdi af n de følgende otte regneregler:

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (addition er kommutativ)
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (addition er associativ)
3. Der findes *neutralt element* for addition betegnet $\mathbf{0}$ således at $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ for alle $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$
4. Til ethvert $\mathbf{a}$ findes et *modsat element* $-\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ således at $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
5. $k_1(k_2\mathbf{a}) = (k_1k_2)\mathbf{a}$ (produkt med skalarer er associativt)
6. $(k_1 + k_2)\mathbf{a} = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{a}$ (distributiv regel)
7. $k_1(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k_1\mathbf{a} + k_1\mathbf{b}$ (distributiv regel)
8. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ (1 er neutral i produkt med skalar)

|||| Bevis

Alle regneregler bevises ved simpel udregning. Lad os som eksempel se på regel 2 og regel 5 i $\mathbb{R}^2$.

- Der er givet talsættene $\mathbf{a} = (1,1)$, $\mathbf{b} = (2,0)$ og $\mathbf{c} = (0,3)$. Først bruger vi venstresiden og derefter højresiden i regneregel 2:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= \big((1,1) + (2,0)\big) + (0,3) = (3,1) + (0,3) = (3,4)\\ \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= (1,1) + \big((2,0) + (0,3)\big) = (1,1) + (2,3) = (3,4)\,.\end{aligned}$$

- Der er givet talsættet $\mathbf{a} = (1, -4)$ og skalarerne $k_1 = -2$ og $k_2 = 3$. Først bruger vi venstresiden og derefter højresiden i regneregel 5:

$$\begin{aligned} k_1(k_2\mathbf{a}) &= -2(3(1,-4)) = -2(3,-12) = (-6,24) \\ (k_1k_2)\mathbf{a} &= (-2\cdot 3)(1,-4) = (-6)(1,-4) = (-6,24)\,. \end{aligned}$$

Regnereglerne 2 og 5 er altså opfyldte for de valgte eksempler, og det er klart at de også er det i alle andre eksempler, og også for andre valg af n i $\mathbb{R}^n$.

■

1.2 Om $\mathbb{R}^n$ opfattet som et vektorrum

Talrummene er typiske eksempler på vektorrum, se om dette i eNote. Når vi tænker på et talsæt som en vektor, skriver man det ofte som en ***søjlevektor***. Man har da to ækvivalente skrivemåder, her med et eksempel fra $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{v} = (1,2,3,4) \;\text{ og }\; \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Hvis man i en bestemt sammenhæng har brug for at opfatte talsættet som en ***rækkevektor*** udfører man en såkaldt transponering som ændrer en søjlevektor til en rækkevektor (og omvendt), den har symbolet T:

$$\mathbf{v}^\top = (1,2,3,4)^\top = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

eNote 2

Lineære ligningssystemer

Denne eNote handler om lineære ligningssystemer, om metoder til at beskrive dem og løse dem, og om hvordan man kan få overblik over løsningsmængdernes struktur. Noten kan læses uden særlige forudsætninger, dog bør man også kende til talrummet $\mathbb{R}^n$, *se eNote.*

2.1 Lineære ligninger

En ***lineær ligning*** med n ubekendte er en ligning af formen

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = b\,. \tag{2-1}$$

Tallene $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kaldes *koefficienterne* og tallet b kaldes *højresiden*. Koefficienterne og højresiden betragtes som kendte tal, mens $x_1, x_2, \ldots x_n$ er de ubekendte. Ligningen kaldes *homogen*, hvis $b = 0$, ellers *inhomogen*.

Definition 2.1 Løsning til en lineær ligning

Ved en *løsning* til ligningen

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = b\,. \tag{2-2}$$

forstås et talsæt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ der ved indsættelse i ligningen får den til at passe, det vil sige at venstresiden er lig med højresiden.

Ved ***den fuldstændige løsning*** eller blot ***løsningsmængden*** forstås alle tænkelige løsninger til ligningen samlet i én mængde.

|||| Eksempel 2.2 Ligning for en ret linie i planen

Et eksempel på en lineær ligning er ligningen for en ret linie i (x, y)-planen:

$$y = 2\,x + 5\,. \tag{2-3}$$

Her fremstår y isoleret på venstresiden, og koefficenterne 2 og 5 har velkendte geometriske fortolkninger. Men ligningen kunne også skrives som

$$-2\,x_1 + 1\,x_2 = 5 \tag{2-4}$$

hvor x og y er erstattet af de mere generelle navne for ubekendte x_1 og x_2, og hvor ligningen er opskrevet på systematisk form (se (2-1)).

Løsningsmængden for ligning (2-3) er selvfølgelig koordinatsættene for samtlige punkter på linjen - ved indsættelse vil de jo opfylde ligningen!

|||| Eksempel 2.3 Trivielle og inkonsistente ligninger

Den lineære ligning

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; 0 = 0 \tag{2-5}$$

hvor alle koefficienterne samt højresiden er 0, er et eksempel på en ***triviel*** ligning. Ligningens løsningsmængde består af alle $\mathbf{x} = (x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

Hvis alle ligningens koefficienter er 0, men højresiden er forskellig fra 0, opstår en ***inkonsistent*** ligning, som ingen løsninger har, det gælder fx ligningen

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1 \;\;\Leftrightarrow\;\; 0 = 1\,. \tag{2-6}$$

Når man undersøger lineære ligninger, kan man benytte de sædvanlige ***omformningsregler*** for ligninger: Man ændrer ikke ved løsningsmængden for ligningen, hvis man lægger den samme størrelse til på begge sider af lighedstegnet, og man ændrer heller ikke ved løsningsmængden hvis man ganger på begge sider af lighedstegnet med en konstant som er forskellig fra 0.

Alle konsistente lineære ligninger som har mindst to ubekendte, har uendeligt mange løsninger. Det følgende eksempel viser hvordan man i så fald kan opskrive løsningsmængden.

|||| Eksempel 2.4 Uendeligt mange løsninger på standard-parameterform

Vi opstiller en inhomogen lineær ligning med tre ubekendte:

$$2\,x_1 - x_2 + 4\,x_3 = 5\,. \tag{2-7}$$

Ved indsættelse af $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ og $x_3 = 1$ i ligning (2-7) ses at $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$ er en løsning. Men hermed har vi ikke fundet den fuldstændige løsning, da vi for eksempel kan konstatere at $\mathbf{x} = (\frac{1}{2}, 0, 1)$ også er en løsning. Hvordan kan vi angive hele løsningsmængden?

Lad os starte med at isolere x_1:

$$x_1 = \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2}\, x_2 - 2\, x_3\,. \tag{2-8}$$

Til ethvert valg af en talværdi for x_2 og en talværdi x_3 svarer der netop én ny værdi af x_1. Lad os fx sætte $x_2 = 1$ og $x_3 = 4$, så får vi $x_1 = -5$. Det betyder at talsættet $(-5, 1, 4)$ er en løsning. Vi kan derfor betragte x_2 og x_3 som *frie parametre*, der fastlægger værdien af x_1, og **omdøber** derfor x_2 og x_3 til parameter-navnene s henholdsvis t. Nu kan vi opskrive den fuldstændige løsning for ligning (2-7) på følgende ***standard-parameterform***:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ hvor } s, t \in \mathbb{R}\,. \tag{2-9}$$

Bemærk at parameterfremstillingens midterste ligning $x_2 = 0 + s \cdot 1 + t \cdot 0$ sådan set blot udtrykker navneskiftet $x_2 \rightarrow s$.

Hvis vi opfatter ligning (2-7) som ligningen for en plan i rummet, så angiver ligning (2-9) en *parameterfremstilling* for den samme plan, hvor første søjlevektor på højresiden angiver *begyndelsespunktet* i planen, og de to sidste søjlevektorer er *retningsvektorer*. Dette er beskrevet nærmere i eNote, som hedder "Geometriske vektorer".

2.2 System af lineære ligninger

Et ***lineært ligningssystem*** bestående af m lineære ligninger med n ubekendte skrives på formen

$$\begin{matrix} a_{11} \cdot x_1 + & a_{12} \cdot x_2 + \ldots + & a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + & a_{22} \cdot x_2 + \ldots + & a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1} \cdot x_1 + & a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + & a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{matrix} \tag{2-10}$$

Ligningssystemet har m *rækker*, som hver indeholder en ligning. De n ubekendte, som betegnes x_1, x_2, ... x_n , optræder i hver af de m ligninger. Koefficienten til x_j i ligningens række nummer i betegnes a_{ij}. Ligningssystemet kaldes *homogent*, hvis alle de m højresiders b_i er lig med 0, i modsat fald *inhomogent*.

|||| Definition 2.5 Løsning til et lineært ligningssystem

Ved en *løsning* til det lineære ligningssystem

$$\begin{array}{c} a_{11} \cdot x_1 + \; a_{12} \cdot x_2 + \ldots + \; a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + \; a_{22} \cdot x_2 + \ldots + \; a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{array} \tag{2-11}$$

forstås et talsæt $\mathbf{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots\, x_n) \in \mathbb{R}^n$ der ved indsættelse får alle de m lineære ligninger i systemet til at passe.

Ved ***den fuldstændige løsning*** eller blot ***løsningsmængden*** forstås alle tænkelige løsninger samlet i én mængde. En enkelt løsning betegnes ofte som en ***partikulær*** løsning.

|||| Eksempel 2.6 Homogent lineært ligningssystem

Der er givet et homogent lineært ligningssystem af to ligninger med fire ubekendte:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2\,x_3 + x_4 &= 0 \\ 2\,x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned} \tag{2-12}$$

Vi vil undersøge om talsættene $\mathbf{x} = (1, 1, 2, -6)$ og $\mathbf{y} = (3, 0, 1, -5)$ er partikulære løsninger til ligningerne (2-12). Ved indsættelse af $\mathbf{x}$ får vi

$$\begin{array}{c} 1 + 1 + 2 \cdot 2 - 6 = 0 \\ 2 \cdot 1 - 1 - 2 - 6 = 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{r} 0 = 0 \\ -7 = 0 \end{array} \tag{2-13}$$

Da $\mathbf{x}$ kun er løsning til den første af de to ligninger, er $\mathbf{x}$ ikke en løsning til ligningssystemet.

Ved indsættelse af $\mathbf{y}$ får vi

$$\begin{array}{c} 3 + 0 + 2 \cdot 1 - 5 = 0 \\ 2 \cdot 3 - 0 - 1 - 5 = 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{r} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \tag{2-14}$$

Da $\mathbf{y}$ er løsning til begge de to ligninger, er $\mathbf{y}$ en partikulær løsning til ligningssystemet.

Løsningsmængden til et lineært ligningssystem er ***fællesmængden*** af løsningsmængderne til hver af de ligninger som indgår i systemet.

2.3 Koefficientmatrix og totalmatrix

Når man skal undersøge et lineært ligningssystem er det ofte bekvemt at benytte sig af *matricer*. En ***matrix*** er et rektangulært talskema som består af et vist antal rækker og søjler. For eksempel har matricen **M**, givet ved

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 8 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \tag{2-15}$$

to rækker og tre søjler. De seks tal kaldes matricens ***elementer***. Matricens ***diagonal*** består af de elementer, hvis rækkenummer er lig med søjlenummer. I **M** består diagonalen således af elementerne 1 og 3.

Ved *koefficientmatricen* **A** til ligningssystemet (2-11) forstås den matrix hvis første række består af koefficienterne til den første ligning, hvis anden række består af koefficienterne til den anden ligning, kort sagt den følgende matrix med m rækker og n søjler:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2-16}$$

Ligningssystemets *totalmatrix* **T** fremkommer ved at man i koeffecientmatricens højre side tilføjer en ny søjle som består af ligningssystemets højresider b_i. **T** har dermed m rækker og $n+1$ søjler. Hvis vi samler højresiderne b_i i en søjlevektor **b**, som vi kalder *ligningssystemets højreside*, er **T** sammensat således hvor den lodrette hjælpelinje symboliserer systemets lighedstegn:

$$\mathbf{T} = \left[\, \mathbf{A} \,\middle|\, \mathbf{b} \,\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{2-17}$$

Den lodrette hjælpelinje før sidste søjle i (2-17) har blot den pædagogiske funktion at skabe klarere overblik. Man kan vælge at udelade linjen hvis det i sammenhængen ikke kan føre til misforståelser.

|||| Eksempel 2.7 Koefficientmatrix, højresider og totalmatrix

For det følgende lineære ligningssystem af 3 ligninger med 3 ubekendte

$$\begin{aligned} -x_2 + \ \ x_3 &= 2 \\ 2x_1 + \ 4x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + \ 4x_2 + \ \ x_3 &= 9 \end{aligned} \tag{2-18}$$

har vi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right] \tag{2-19}$$

Bemærk at det 0 som er placeret øverst til venstre i **A** og **T**, angiver at koefficienten til x_1 i ligningssystemets øverste række er 0.

Det smarte ved en koefficientmatrix (og en totalmatrix) er at vi ikke behøver at skrive de ubekendte op. Koefficienternes entydige placering i matricen gør at vi ikke er i tvivl om hvilken af de ubekendte hver af dem hører til. Vi har fjernet overflødig information!

2.4 Reduktion af lineære ligningssystemer

Lineære ligningssystemer kan reduceres, det vil sige gøres enklere, ved hjælp af en metode der kaldes Gauss-elimination. Metoden har flere forskellige varianter, og den særlige variant der benyttes i disse eNoter, går under navnet ***GaussJordan-elimination***. Det algebraiske grundlag for alle varianterne er at man kan omforme et lineært ligningssystem ved såkaldte ***rækkeoperationer*** uden at man derved ændrer på ligningssystemets løsningsmængde. Når ligningssystemet er reduceret mest muligt, er det som regel nemt at aflæse og opskrive dets løsningsmængde.

|||| Sætning 2.8 Rækkeoperationer

Man ændrer ikke på et lineært ligningssystems løsningsmængde hvis man omformer ligningssystemet ved en af de følgende tre ***rækkeoperationer***:

ro_1: Lader to af ligningerne bytte række.

ro_2: Ganger en af ligningerne med en konstant som ikke er 0.

ro_3: Til en ligning lægger en af de øvrige ligninger ganget med en konstant.

Vi fastlægger her en kort notation for hver af de tre rækkeoperationer:

ro_1: $R_i \leftrightarrow R_j$: Ligningen i række i ombyttes med ligningen i række j.

ro_2: $k \cdot R_i$: Ligningen i række i ganges med k.

ro_3: $R_j + k \cdot R_i$: Til ligningen i række j lægges ligningen i række i ganget med k.

|||| Eksempel 2.9 Rækkeoperationerne

Vi eksemplificerer ro_1: Betragt ligningssystemet nedenfor til venstre. Vi ombytter ligningerne i de to rækker, hvorved vi har udført $R_1 \leftrightarrow R_2$.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -3 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= -3 \end{aligned} \tag{2-20}$$

Systemet til højre har samme løsningsmængde som systemet til venstre.

Vi eksemplificerer ro_2: Betragt ligningssystemet nedenfor til venstre. Vi ganger ligningen i den anden række med 5, hvorved vi har udført $5 \cdot R_2$:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -3 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -3 \\ 5\,x_1 + 5\,x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2-21}$$

Systemet til højre har samme løsningsmængde som systemet til venstre.

Vi eksemplificerer ro$_3$: Betragt ligningssystemet nedenfor til venstre. Til ligningen i dets nederste række lægger vi ligningen i den øverste række ganget med 2. Vi har dermed udført $R_2 + 2 \cdot R_1$:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -3 \\ x_1 + \ \ x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -3 \\ 3x_1 + 5x_2 &= -6 \end{aligned} \tag{2-22}$$

Systemet til højre har samme løsningsmængde som systemet til venstre.

Pilen, $\rightarrow$, som er brugt i de tre eksempler, indikerer at en (eller flere) rækkeoperation(er) har fundet sted.

|||| Bevis

Første del af beviset for sætning 2.8 er enkelt: Da løsningsmængden for et ligningssystem er identisk med *fællesmængden* F af løsningsmængderne til hver af de ligninger der indgår i systemet, ændres F naturligvis ikke ved at ligningernes rækkefølge ændres. Derfor er ro$_1$ tilladt.

At de to sidste rækkeoperationer heller ikke ændrer ligningssystemets løsningsmængde kan forklares ud fra sædvanlige *omformningsregler* for én ligning på følgende måde:

Da én lignings løsningsmængde ikke ændres ved at den ganges med en konstant $k \neq 0$, vil F ikke kunne påvirkes af at en af ligningerne i et ligningssystem erstattes af ligningen selv ganget med en konstant forskellig fra 0. Derfor er ro$_2$ tilladt.

Lad os til sidst kalde de to ligninger ro$_3$ handler om, for henholdsvis a og b. Vi ganger a med en konstant k og opnår herved en ny ligning a_2. Når vi herefter lægger a_2 til b, opnår vi igen en ny ligning c. Vi skal vise at løsningsmængden $L(a, c)$ for ligningssystemet bestående af a og c er identisk med løsningsmængden $L(a, b)$ for ligningssystemet bestående af a og b. Dette er klart hvis $k = 0$, da b og c i så fald er identiske. Vi indskrænker os i det følgende til $k \neq 0$. Antag først at talsættet $\mathbf{x}$ tilhører $L(a, b)$. Så er $\mathbf{x}$ en løsning til både a og b. $\mathbf{x}$ er også en løsning til a_2, da a_2 jo er fremkommet af a ved gangning af a med en konstant der ikke er 0. Men så er $\mathbf{x}$ også en løsning til c. For at indse dette indsætter vi $\mathbf{x}$ i både a_2 og b. Så er venstresiden af a_2 lig med højresiden af a_2, og venstresiden af b lig med højresiden af b. Og derved er summen af venstresiderne af a_2 og b lig med summen af højresiderne af a_2 og b. Hvilket er det samme som at venstresiden af c er lig med højresiden af c når $\mathbf{x}$ er indsat i c. Altså er $\mathbf{x}$ en løsning til c, og derved er det vist at $\mathbf{x}$ tilhører $L(a, c)$. Antag herefter at talsættet $\mathbf{x}$ tilhører $L(a, c)$. Så kan vi med helt tilsvarende argumenter vise at $\mathbf{x}$ også tilhører $L(a, b)$ (detaljerne overlades til læseren). Derfor er $L(a, c)$ identisk med $L(a, b)$. Og derfor må løsningsmængden for hele det givne ligningssystem være den samme som for det ligningssystem der fremkommer når ligning b erstattes af ligning c, hvorfor det er vist at ro$_3$ er tilladt.

■

Af sætning 2.8 får vi umiddelbart:

|||| Følgesætning 2.10

Man ændrer ikke på et lineært ligningssystems løsningsmængde hvis man omformer det et vilkårligt antal gange og i en vilkårlig rækkefølge ved hjælp af de tre rækkeoperationer.

Vi er nu rede til at benytte de tre rækkeoperationer til at reducere et lineært ligningssystem. Vi følger i det følgende eksempel principperne i *GaussJordan-elimination*, og vil senere i afsnit 2.5 give en præcis karakteristik af denne metode.

|||| Eksempel 2.11 GaussJordan-elimination

Vi betragter nedenfor til venstre et lineært ligningssystem, som består af tre ligninger hvori der indgår de tre ubekendte x_1, x_2 og x_3. Til højre er ligningssystemets *totalmatrix* opskrevet:

$$\begin{aligned} -x_2+x_3&=2\\ 2x_1+4x_2-2x_3&=2\\ 3x_1+4x_2+x_3&=9 \end{aligned} \qquad \mathbf{T}=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & -2 & 2\\ 3 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right] \tag{2-23}$$

Ideen i reduktionen er gennem rækkeoperationerne at opnå følgende situation: x_1 er den eneste af de ubekendte som optræder i ligningssystemets øverste række, x_2 er den eneste der optræder i anden række, og x_3 er den eneste der optræder i tredje række. Hvis dette er muligt, er ligningssystemet ikke blot reduceret, men også løst! Vi går frem efter en række trin, som følger GaussJordan-algoritmen. Samtidig ser vi på rækkeoperationernes indvirkning på totalmatricen.

Først ønsker vi at den ligning som opføres i den øverste række, faktisk indeholder x_1, og at x_1 har koefficienten 1. Det kan vi opnå i to trin. Vi ombytter de to øverste ligninger, og ganger derefter den ligning som nu står i øverste række, med $\frac{1}{2}$. Kort sagt

$$\begin{gathered} R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \text{og} \quad \frac{1}{2}\cdot R_1\ : \\ \begin{aligned} x_1+2x_2-x_3&=1\\ -x_2+x_3&=2\\ 3x_1+4x_2+x_3&=9 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right] \end{gathered} \tag{2-24}$$

Nu fjerner vi alle andre forekomster af x_1. I dette eksempel er der kun én forekomst der skal fjernes, nemlig i række 3. Det opnås således: Vi ganger ligningen i række 1 med tallet -3 og lægger dette produkt til ligningen i række 3, kort sagt

$$\begin{gathered} R_3-3\cdot R_1\ : \\ \begin{aligned} x_1+2x_2-x_3&=1\\ -x_2+x_3&=2\\ -2x_2+4x_3&=6 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right] \end{gathered} \tag{2-25}$$

Vi har nu opnået at x_1 som ønsket kun optræder i række 1. Der skal den blive! Arbejdet med x_1 er afsluttet. Dette svarer til at der øverst i totalmatricens første søjle er et 1-tal og under 1-tallet kun 0-er. Det vil sige at arbejdet med første søjle er færdiggjort!

De næste omforminger skal undersøge om vi på samme måde kan sikre at variablen x_2 kun er repræsenteret i række 2. Først sørger vi lige for at koefficienten for x_2 i række 2 skifter koefficient fra -1 til 1 med operationen

$$(-1) \cdot R_2 : \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= -2 \\ -2x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right] \tag{2-26}$$

Nu kan vi fjerne forekomsterne af x_2 fra række 1 og række 3 med operationerne

$$R_1 - 2 \cdot R_2 \quad \text{og} \quad R_3 + 2 \cdot R_2 : \qquad \begin{aligned} x_1 + x_3 &= 5 \\ x_2 - x_3 &= -2 \\ 2x_3 &= 2 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \tag{2-27}$$

Herefter er arbejdet med x_2 afsluttet, hvilket svarer til at der i række 2 i totalmatricens anden søjle er et 1-tal, og 0 ovenfor og nedenunder. Denne søjle må ikke ændres ved efterfølgende operationer.

Til sidst ønsker vi at variablen x_3 er repræsenteret i række 3 med koefficienten 1, og at x_3 fjernes fra række 1 og række 2. Det kan vi opnå vi i to trin. Først

$$\frac{1}{2} \cdot R_3 : \qquad \begin{aligned} x_1 + x_3 &= 5 \\ x_2 - x_3 &= -2 \\ x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \tag{2-28}$$

Derefter

$$R_1 - R_3 \quad \text{og} \quad R_2 + R_3 : \qquad \begin{aligned} x_1 &= 4 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \tag{2-29}$$

Nu optræder x_3 kun i række 3. Det svarer til at der i række 3 i totalmatricens tredje søjle er et 1-tal, og 0-er i de andre rækker i denne søjle. Vi har nu gennemført en *fuldstændig reduktion* af ligningssystemet, og vi kan af dette resultat konkludere at der findes netop én løsning til det ligningssystem vi har arbejdet med, nemlig:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (4, -1, 1). \tag{2-30}$$

Lad os huske hvad en løsning er: Et talsæt der får alle ligningerne i ligningssystemet til at passe! Lad os eftervise at formel (2-30) faktisk er en løsning til ligningssystemet i ligning (2-23):

$$\begin{aligned} -(-1)+1 &= 2 \\ 2\cdot 4+4\cdot(-1)-2\cdot 1 &= 2 \\ 3\cdot 4+4\cdot(-1)+1 &= 9 \end{aligned}$$

Som forventet passer alle tre ligninger!

I (2-29) har ligningssystemets totalmatrix efter rækkeoperationerne opnået en særlig smuk form med tre såkaldt ledende 1-taller i ***diagonalen*** og 0-er alle andre steder. Man siger at den omformede matrix er en *trappematrix*, idet de ledende 1-taller danner en trappe man kan gå nedad fra venstre mod højre! Det er dog ikke altid muligt at få trappens 1-taller til at følge en ret linje, men mindre kan også gøre det! Ofte må man flytte sig mere end én søjle mod højre for at finde næste trin. Den generelle lidt kringlede definition følger herunder.

|||| Definition 2.12 Trappematrix

Et lineært ligningssystem kaldes et ***fuldstændigt reduceret ligningssystem***, hvis dets tilhørende totalmatrix er en ***trappematrix***. En matrix er en trappematrix, hvis den opfylder de følgende fire betingelser:

1. Det første tal i en række, som ikke er et 0, skal være et 1-tal. Det kaldes for rækkens ***ledende 1-tal***.
2. I to på hinanden følgende rækker, som begge har et ledende 1-tal, står den øverste rækkes ledende 1-tal længere til venstre end den følgende rækkes ledende 1-tal (trappen går nedad fra venstre mod højre).
3. I en søjle hvori der optræder et ledende 1-tal, består de øvrige elementer i søjlen udelukkende af 0-er.
4. Eventuelle rækker som udelukkende består af 0-er, er placeret i bunden af matricen.

Definitionen på en trappematrix fra Definition betegnes i den internationale litteratur som, at matricen har *reduced row echelon form*.

|||| Eksempel 2.13 Trappematricer

Betragt de følgende tre matricer

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2-31}$$

De tre viste matricer er alle trappematricer. De ledende 1-taller betragtes som trappens "trin". I $\mathbf{A}$ er trinene smukt placeret i *diagonalen*. $\mathbf{B}$ har kun to ledende 1-taller, og man må gå to søjler mod højre for at komme fra første til andet trin. I $\mathbf{C}$ har trappen kun ét trin.

|||| Eksempel 2.14

Ingen af de følgende fire matricer er trappematricer, idet hver af dem strider mod netop én af reglerne i definition 2.12. Det overlades til læseren at afgøre hvilken!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2-32}$$

Der gælder nu følgende vigtige sætning om forholdet mellem en matrix og den trappematrix som den kan omformes til ved hjælp af rækkeoperationer:

|||| Sætning 2.15 Trappeform

Hvis en given matrix $\mathbf{M}$ ved to forskellige serier af rækkeoperationer er blevet omformet til en trappematrix, så er de to fremkomne trappematricer identiske.

Den unikke trappematrix som en given matrix $\mathbf{M}$ kan omformes til ved hjælp af rækkeoperationer, kaldes matricens ***trappeform***, og den har symbolet $\operatorname{trap}(\mathbf{M})$.

|||| Bevis

Vi benytter følgende model over de seks matricer som introduceres i løbet af beviset:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & \xleftarrow{f_1} & \mathbf{M} & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{B} \\ & & \downarrow & & \\ \mathbf{A}_1 & \xleftarrow{f_1} & \mathbf{M}_1 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{B}_1 \end{array} \tag{2-33}$$

Antag at en matrix $\mathbf{M}$ ved to forskellige serier af rækkeoperationer f_1 og f_2 er blevet omformet til to forskellige trappematricer $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$. Lad søjle nummer k være den første søjle i $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ hvor de to matricer afviger fra hinanden. Vi danner nu en ny matrix $\mathbf{M}_1$ ud af $\mathbf{M}$ ved at fjerne alle de søjler som står til højre for søjle nummer k i $\mathbf{M}$, samt alle de søjler til venstre for søjle nummer k i $\mathbf{M}$ som svarer til de søjler til venstre for søjle nummer k i $\mathbf{A}$ (og $\mathbf{B}$) der ikke indeholder et ledende 1-tal.

Nu omformer vi $\mathbf{M}_1$ ved rækkeoperationsfølgerne f_1 og f_2, og de matricer der dannes herved kalder vi for $\mathbf{A}_1$ henholdsvis $\mathbf{B}_1$. Da vil $\mathbf{A}_1$ nødvendigvis være den samme matrix, som vil fremkomme hvis vi fra $\mathbf{A}$ fjerner alle de søjler, der svarer til dem vi fjernede fra $\mathbf{M}$ for at opnå $\mathbf{M}_1$. Og det samme forhold er der mellem $\mathbf{B}_1$ og $\mathbf{B}$. $\mathbf{A}_1$ og $\mathbf{B}_1$ vil derfor have ledende 1-taller i diagonalen i alle søjler på nær den sidste søjle, som er den første søjle hvor de to matricer er forskellige fra hinanden. I denne sidste søjle er der to muligheder: Enten har én af matricerne et ledende 1-tal i denne søjle eller også har ingen af dem det. Et eksempel på hvordan situationen i det første tilfælde kunne være, er:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-34}$$

Vi fortolker nu $\mathbf{M}_1$ som totalmatrix for et lineært ligningssystem $\mathcal{L}$. Både $\mathbf{A}_1$ og $\mathbf{B}_1$ vil da repræsentere et fuldstændigt reduceret ligningssystem der skal have samme løsningsmængde som $\mathcal{L}$. Men dette fører til en modstrid, da det ene af de fuldstændigt reducerede systemer indeholder en inkonsistent ligning, mens det andet vil have netop én løsning. Vi kan derfor udelukke at en af $\mathbf{A}_1$ og $\mathbf{B}_1$ indeholder et ledende 1-tal i sidste søjle.

Vi undersøger nu den anden mulighed; at ingen af $\mathbf{A}_1$ og $\mathbf{B}_1$ indeholder et ledende 1-tal i sidste søjle. Situationen kunne da fx være således:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-35}$$

Både det fuldstændigt reducerede ligningssystem som repræsenteres af $\mathbf{A}_1$, og det der repræsenteres af $\mathbf{B}_1$, vil i dette tilfælde have netop én løsning. Men da den sidste søjle er forskellige i de to matricer, vil løsningen for $\mathbf{A}_1$'s ligningssystem være forskellig fra løsningen for $\mathbf{B}_1$'s ligningssystem, hvorved vi igen er havnet i en modstrid.

Vi kan herefter konkludere at antagelsen om at $\mathbf{M}$ kan omformes til to forskellige trappematricer, ikke kan være rigtig. Ergo hører der til $\mathbf{M}$ en unik trappematrix: trap($\mathbf{M}$).

■

Fra sætning 2.15 får vi relativt nemt det næste resultat om matricer som ved hjælp af rækkeoperationer kan omformes til hinanden:

|||| Følgesætning 2.16

Hvis en matrix $\mathbf{M}$ ved en vilkårlig serie af rækkeoperationer er blevet omformet til matricen $\mathbf{N}$, så gælder der at

$$\operatorname{trap}(\mathbf{N}) = \operatorname{trap}(\mathbf{M}). \tag{2-36}$$

|||| Bevis

Lad s være en serie af rækkeoperationer der omformer matricen $\mathbf{M}$ til matricen $\mathbf{N}$, og lad t være serie af rækkeoperationer der omformer $\mathbf{N}$ til $\operatorname{trap}(\mathbf{N})$. Så vil den serie rækkeoperationer der består af s efterfulgt af t, omforme $\mathbf{M}$ til $\operatorname{trap}(\mathbf{N})$. Men da $\mathbf{M}$ ifølge sætning 2.15 har en unik trappeform, må $\operatorname{trap}(\mathbf{M})$ være lig med $\operatorname{trap}(\mathbf{N})$.

■

Hvis vi i den foregående følgesætning opfatter **M** og **N** som totalmatricer for to lineære ligningssystemer, så følger umiddelbart af definition (2.12):

|||| Følgesætning 2.17

Hvis to lineære ligningssystemer kan omformes til hinanden ved hjælp af rækkeoperationer, så er de på fuldstændigt reduceret form (efter udeladelse af eventuelle trivielle ligninger) identiske.

2.5 GaussJordan-elimination

Vi er nu i stand til præcist at indføre den eliminationsmetode, der benyttes i disse eNoter.

|||| Definition 2.18 GaussJordan elimination

Et lineært ligningssystem er reduceret fuldstændigt ved ***GaussJordan-elimination***, når dets tilhørende totalmatrix efter brug af de tre rækkeoperationer (se sætning 2.8) er bragt på trappeform (se sætning 2.15) efter følgende fremgangsmåde:

Vi går frem fra venstre mod højre: Først ordnes totalmatricens første søjle så den ikke strider mod trappeformen, dernæst ordnes den anden søjle så den ikke strider mod trappeformen og så videre, indtil og med den sidste søjle i totalmatricen.

Dette er altid muligt!

Når man skal reducere lineære ligningssystemer, er man fri til at afvige fra GaussJordan-metoden hvis det i situationen skønnes nemmere. Hvis man ved andre følger af rækkeoperationer har nået fuldstændigt reduceret form (trappeform), er det jo den samme form som man ville have opnået ved strikt at have fulgt GaussJordan-metoden. Dette fremgår af følgesætning 2.17.

I eksempel 2.11 var det muligt direkte at aflæse løsningen ud fra det fuldstændigt reducerede ligningssystem. I det efterfølgende hovedeksempel er situationen lidt mere kompliceret, hvilket hænger sammen med at ligningssystemet har uendeligt mange løsninger.

|||| Eksempel 2.19 GaussJordan-elimination

Vi vil reducere dette system af fire lineære ligninger med fem ubekendte:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 9 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 3 \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 6x_5 &= 5 \\ 4x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 10x_4 + 22x_5 &= 32 \end{aligned} \tag{2-37}$$

Vi opskriver ligningssystemets totalmatrix:

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 14 & 8 & 10 & 22 & 32 \end{array}\right] \tag{2-38}$$

I det følgende reducerer vi ligningssystemet ved hjælp af de tre rækkeoperationer. Det vil vi gøre ved udelukkende at betragte omformningerne på ligningssystemets totalmatrix!

$$R_2 - 2 \cdot R_1\,, \quad R_3 - 3 \cdot R_1 \quad \text{og} \quad R_4 - 4 \cdot R_1:$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 & -15 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & -9 & -22 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 2 & -4 \end{array}\right] \tag{2-39}$$

Herefter er vi færdige med behandlingen af 1. søjle!

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \text{og} \quad (-1) \cdot R_2:$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 9 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 & -15 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 2 & -4 \end{array}\right] \tag{2-40}$$

$$R_1 - 3 \cdot R_2 \quad \text{og} \quad R_4 - 2 \cdot R_2:$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -11 & -22 & -57 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 9 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & -16 & -48 \end{array}\right] \tag{2-41}$$

Arbejdet med den anden søjle er nu afsluttet. Herefter følger en afvigelse fra standardsituationen hvor man skaffer 1-taller i diagonalen. Det er nemlig ikke muligt at skaffe et ledende 1-tal som tredje element i den tredje række. Vi må *ikke* bytte række 1 og række 3, for så ændrer vi jo den første søjle som er færdigbehandlet. Dermed er vi også færdige med søjle tre (2-tallet i øverste række kan ikke fjernes). For at fortsætte reduktionen går vi videre til det fjerde element i række tre, hvor det *er* muligt at skaffe et ledende 1-tal.

$$-\tfrac{1}{5} \cdot R_3:$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -11 & -22 & -57 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 9 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & -16 & -48 \end{array}\right] \tag{2-42}$$

$$R_1 + 11 \cdot R_3\,, \quad R_2 - 5 \cdot R_3 \quad \text{og} \quad R_4 + 16 \cdot R_3:$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & -11 & -24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{2-43}$$

Herefter er GaussJordan-eliminationen afsluttet, og vi kan opskrive det fuldstændigt reducerede ligningssystem:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 0x_4 - 11x_5 &= -24 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 4x_5 &= 7 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 1x_5 &= 3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 0 \end{aligned} \tag{2-44}$$

I første omgang kan vi konstatere at det oprindelige ligningssystem faktisk er blevet reduceret (gjort mere enkelt) ved at mange af ligningssystemets koefficienter er udskiftet med 0-er. Men dertil kommer at systemet med fire ligninger nu kan erstattes af et system bestående af 3. Den sidste række er nemlig en ***triviel*** ligning der har hele $\mathbb{R}^5$ som sin løsningsmængde. Det ændrer derfor ikke på ligningssystemets løsningsmængde, at den sidste ligning udelades af det reducerede system (idet fællesmængden af løsningsmængderne for hver af de fire ligninger, er lig med fællesmængderne af løsningsmængderne for de første tre). Helt enkelt kan vi derfor opskrive det fuldstændigt reducerede ligningssystem således:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 - 11x_5 &= -24 \\ x_2 + 4x_5 &= 7 \\ x_4 + x_5 &= 3 \end{aligned} \tag{2-45}$$

Men hvordan kommer vi videre fra det reducerede ligningssystem til at indse hvad løsningsmængden er og til at kunne angive den på en overskuelig form? Vi genoptager diskussionen af dette eksempel senere, se eksempel. Inden da får vi brug for at indføre begrebet *rang*.

2.6 Begrebet rang

I eksempel 2.19 er et lineært ligningssystem bestående af 4 ligninger med 5 ubekendte blevet reduceret fuldstændigt, hvorefter der kun resterer 3 ligninger, se ligning (2-45), idet den trivielle ligning $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0$ er udeladt da den blot udtrykker at $0 = 0$. At et reduceret ligningssystem indeholder en triviel ligning, er ensbetydende med at trappeformen af dens totalmatrix indeholder en 0-række, som i ligning (2-43). Dette giver anledning til de følgende definitioner.

|||| Definition 2.20 Rang

- Ved ***rangen*** ρ af et *lineært ligningssystem* forstås antallet af ***ikke-trivielle*** ligninger i det fuldstændigt reducerede ligningssystem.
- Ved ***rangen*** ρ af en *matrix* forstås antallet af rækker, som ikke er ***0-rækker***, i matricens trappeform. Rangen svarer dermed til antallet af ledende 1-taller i matricens trappeform.

Af definition 2.20 og følgesætning 2.17 samt følgesætning 2.16 får vi direkte:

|||| Sætning 2.21 Rang og rækkeoperationer

- To ligningssystemer som kan omformes til hinanden ved hjælp af rækkeoperationer, har samme rang.
- To matricer som kan omformes til hinanden ved hjælp af rækkeoperationer, har samme rang.

Det følger af sætning 2.21 at man aldrig med rækkeoperationer kan omforme et lineært ligningssystem, så det indeholder færre ikke-trivielle ligninger end det gør, når det er fuldstændigt reduceret.

Rangen af et lineært ligningssystem er altid lig med rangen af ligningssystemets *totalmatrix*, det fremgår umiddelbart af definitionen på rang, se definition 2.20. Men det er ikke givet at et ligningssystem har den samme rang som dets *koefficientmatrix*, se eksempel 2.22.

|||| Eksempel 2.22 Matricers rang

En matrix $\mathbf{M}$ med 3 rækker og 4 søjler er bragt på trappeform således:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 & -2 \\ -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \operatorname{trap}(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-46}$$

Da $\operatorname{trap}(\mathbf{M})$ ikke indeholder 0-rækker, er $\rho(\mathbf{M}) = 3$.

En matrix $\mathbf{N}$ med 5 rækker og 3 søjler er bragt på trappeform således:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & -7 \\ 2 & -1 & -8 \\ 3 & 1 & -7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \operatorname{trap}(\mathbf{N}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-47}$$

Da $\operatorname{trap}(\mathbf{N})$ indeholder tre rækker som ikke er 0-rækker, er $\rho(\mathbf{N}) = 3$.

Hvis vi fortolker $\mathbf{M}$ og $\mathbf{N}$ som totalmatricer for lineære ligningssystemer, ser vi i begge tilfælde at rangen af de tilsvarende koefficientmatricer er 2, altså mindre end rangen af totalmatricerne.

Vi vil nu undersøge relationen mellem rang og antallet af rækker og søjler. Først bemærker vi at det direkte af definition 2.20 følger, at rangen af en matrix aldrig kan være større end antallet af matricens rækker.

I eksempel 2.22 er rangen af $\mathbf{M}$ lig med antallet af rækker i $\mathbf{M}$, mens rangen af $\mathbf{N}$ er mindre end antallet af rækker i $\mathbf{N}$.

Men rangen af en matrix kan heller ikke være større end antallet af søjler. Rangen er nemlig lig med antallet af ledende 1-taller i matricens trappeform. Og hvis trappeformen af matricen indeholder flere ledende 1-taller end der er søjler, så må der være mindst én søjle der indeholder mere end et ledende 1-tal. Men dette strider mod betingelse nr. 3 i definition 2.12.

I eksempel 2.22 er rangen af $\mathbf{M}$ mindre end antallet af søjler i $\mathbf{M}$, mens rangen $\mathbf{N}$ er lig med antallet af søjler i $\mathbf{N}$.

Vi opsummerer de ovenstående iagttagelser i følgende sætning:

|||| Sætning 2.23 Rang, rækker og søjler

For en matrix $\mathbf{M}$ med m rækker og n søjler gælder der at

$$\rho(\mathbf{M}) \leq \min\{m, n\}. \tag{2-48}$$

2.7 Fra trappeform til løsningsmængde

I visse tilfælde kan man umiddelbart aflæse løsningsmængden for et lineært ligningssystem, når dets totalmatrix er bragt på trappeform. Det gælder når ligningssystemet ingen løsninger har, eller når det har netop én løsning. Hvis ligningssystemet har uendeligt mange løsninger, er der stadig et arbejde der skal gøres før man klart kan karakterisere løsningsmængden, hvilket med fordel kan opnås ved at bringe den på standard-parameterform. Begrebet rang viser sig velegnet til at give et overblik over forskellige former for løsningsmængder.

2.7.1 Når $\rho(\mathbf{A}) < \rho(\mathbf{T})$

Totalmatricen $\mathbf{T}$ for et lineært ligningssystem har det samme antal rækker som ligningssystemets koefficientmatrix $\mathbf{A}$, men én søjle mere, som indeholder ligningernes højresider. Der foreligger derfor to muligheder. Enten har vi $\rho(\mathbf{T}) = \rho(\mathbf{A})$, eller også er $\rho(\mathbf{T}) = \rho(\mathbf{A}) + 1$, svarende til at sidste søjle i $\mathrm{trap}(\mathbf{T})$ indeholder et ledende 1-tal. Konsekvensen af den sidste mulighed undersøges i eksempel.

|||| Eksempel 2.24 Inkonsistent ligning (ingen løsning)

Totalmatricen for et lineært ligningssystem bestående af tre ligninger med to ubekendte er bragt på trappeformen

$$\mathrm{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{2-49}$$

Ligningssystemet er dermed blevet reduceret til

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 &= 1 \\ 0x_1 + 0x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2-50}$$

Bemærk her at ligningen i anden række er *inkonsistent*, og at den derfor ingen løsninger har. Da ligningssystemets løsningsmængde er fællesmængden af de enkelte ligningers løsningsmængde, har ligningssystemet ingen løsninger overhovedet.

Lad os betragte trappeformen af ligningssystemets koefficientmatrix

$$\operatorname{trap}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-51}$$

Vi bemærker at $\rho(\mathbf{A}) = 1$. Den er altså mindre end $\rho(\mathbf{T}) = 2$, og dette skyldes lige præcis det reducerede ligningssystems inkonsistente ligning.

Overvejelserne i eksempel 2.24 generaliseres til følgende sætning.

|||| Sætning 2.25 Når $\rho(\mathbf{A}) < \rho(\mathbf{T})$

Hvis det for et lineært ligningssystems koefficientmatrix **A** og totalmatrix **T** gælder at

$$\rho(\mathbf{A}) < \rho(\mathbf{T}), \tag{2-52}$$

så indeholder det fuldstændigt reducerede ligningssystem en inkonsistent ligning. Ligningssystemet har derfor ingen løsninger.

Hvis $\operatorname{trap}(\mathbf{T})$ har en række af formen $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$, så har ligningssystemet ingen løsninger.

|||| Opgave 2.26

Bestem trappeformen af totalmatricen for det følgende lineære ligningssystem, og bestem ligningssystemets løsningsmængde.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ -2x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 &= 3 \end{aligned} \tag{2-53}$$

2.7.2 Når $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T}) =$ antal ubekendte

Lad os kalde antallet af ubekendte i et givet lineært ligningssystem for n. Så må der ud fra den måde hvorpå koefficientmatricer dannes, være n søjler i **A**.

Vi antager endvidere at der i det givne eksempel gælder $\rho(\mathbf{A}) = n$. Så indeholder $\text{trap}(\mathbf{A})$ præcis n ledende 1-taller. De ledende 1-taller må derfor være placeret i ***diagonalen*** i $\text{trap}(\mathbf{A})$, og der er lutter 0-er på de øvrige pladser i $\text{trap}(\mathbf{A})$.

Endelig antager vi at der i det givne eksempel også gælder at $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T})$. Så kan løsningsmængden umiddelbart aflæses af $\text{trap}(\mathbf{T})$. Den første række i $\text{trap}(\mathbf{T})$ vil nemlig svare til en ligning hvor den første ubekendte har koefficienten 1, mens alle de andre har koefficienten 0. Den første ubekendtes værdi er derfor lig med det sidste element i første række (højresiden). På samme måde med de øvrige rækker, den i-te række svarer til en ligning hvor den i-te ubekendte er den eneste ubekendte, hvorfor dens værdi er lig med det sidste element i den i-te række. Da der til hver ubekendt svarer én bestemt værdi, og da $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T})$ sikrer at det fuldstændigt reducerede ligningssystem ingen inkonsistente ligninger indeholder, så har det givne ligningssystem netop én løsning.

|||| Eksempel 2.27 Netop én løsning

Totalmatricen for et lineært ligningssystem bestående af tre ligninger med to ubekendte er bragt på trappeformen

$$\text{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{2-54}$$

Vi betragter trappeformen af ligningssystemets koefficientmatrix

$$\text{trap}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-55}$$

som har et ledende 1-tal i hver søjle og 0-er på alle andre pladser. Vi bemærker endvidere at $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T}) = 2$.

Ud fra $\text{trap}(\mathbf{T})$ kan vi opskrive det fuldstændigt reducerede ligningssystem

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0x_2 &= -3 \\ 0x_1 + 1x_2 &= 5 \\ 0x_1 + 0x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2-56}$$

hvilket viser at ligningssystemet har én løsning, nemlig $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (-3, 5)$.

De foregående observationer kan opsamles i den efterfølgende sætning.

|||| Sætning 2.28 Når $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T}) =$ antal ubekendte

Hvis der for et lineært ligningssystems koefficientmatrix $\mathbf{A}$ og totalmatrix $\mathbf{T}$ gælder:

$$\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T}) = \text{antal ubekendte}, \tag{2-57}$$

så har ligningssystemet netop én løsning, som umiddelbart kan aflæses af $\text{trap}(\mathbf{T})$.

2.7.3 Når $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T}) <$ antal ubekendte

Vi er nu rede til at genoptage diskussionen af vores hovedeksempel 2.19 et ligningssystem med 5 ubekendte, hvor vi fandt frem til at det fuldstændigt reducerede ligningssystem består af 3 ikke-trivielle ligninger. Lad os nu finde løsningsmængden og undersøge dens struktur!

|||| Eksempel 2.29 Uendeligt mange løsninger

I eksempel 2.19 blev totalmatricen $\mathbf{T}$ for et ligningssystem af 4 ligninger med 5 ubekendte reduceret til

$$\operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & -11 & -24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{2-58}$$

Det ses heraf at $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T}) = 3$, det vil sige mindre end 5, som er antallet af de ubekendte.

Ud fra $\operatorname{trap}(\mathbf{T})$ opskriver vi det fuldstændigt reducerede ligningssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 - 11x_5 &= -24 \\ x_2 + 4x_5 &= 7 \\ x_4 + x_5 &= 3 \end{aligned} \tag{2-59}$$

Ligningssystemet har uendeligt mange løsninger. Til ethvert valg af talværdier for x_3 og x_5 kan man finde netop én ny værdi af de øvrige ubekendte x_1, x_2 og x_4. Det kan vi tydeliggøre ved at isolere x_1, x_2 og x_4 på følgende måde

$$\begin{aligned} x_1 &= -24 - 2x_3 + 11x_5 \\ x_2 &= 7 - 4x_5 \\ x_4 &= 3 - x_5 \end{aligned} \tag{2-60}$$

Hvis vi for eksempel vælger $x_3 = 1$ og $x_5 = 2$, kan vi se at ligningssystemet har løsningen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-4, -1, 1, 1, 2)$. Vi kan derfor betragte x_3 og x_5 som *frie parametre*, der fastlægger betydningen af de tre øvrige ubekendte, og omdøber derfor på højresiden x_3 og x_5 til parameternavnene t_1 henholdsvis t_2. Herefter kan vi opskrive løsningsmængden således:

$$\begin{aligned} x_1 &= -24 - 2t_1 + 11t_2 \\ x_2 &= 7 - 4t_2 \\ x_3 &= t_1 \\ x_4 &= 3 - t_2 \\ x_5 &= t_2 \end{aligned} \tag{2-61}$$

eller mere overskueligt på *standard-parameterform*:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{hvor} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \tag{2-62}$$

Med et geometrisk inspireret sprogbrug vil vi kalde vektoren $(-24, 7, 0, 3, 0)$ for løsningsmængdens *begyndelsespunkt* og de to vektorer $(-2, 0, 1, 0, 0)$ og $(11, -4, 0, -1, 1)$ for dens *retningsvektorer*. Hvis vi kalder begyndelsespunktet for $\mathbf{x}_0$ og retningsvektorerne for $\mathbf{v}_1$ henholdsvis $\mathbf{v}_2$, kan vi opskrive parameterfremstillingen således:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \quad \text{hvor} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \tag{2-63}$$

Da løsningsmængden har to frie parametre svarende til to retningsvektorer, siger man at den har en *dobbelt-uendelighed* af løsninger.

Linje 3 og 5 i (2-62) udtrykker blot at $x_3 = t_1$ og $x_5 = t_2$.

Lad os, inspireret af eksempel 2.29, formulere en generel fremgangsmåde til at bringe løsningsmængden på standard-parameterform ud fra det fuldstændigt reducerede ligningssystem:

|||| Metode 2.30 Fra totalmatrix til løsning på standard-parameterform

Vi betragter et lineært ligningssystem med n ubekendte som har koefficientmatricen $\mathbf{A}$ og totalmatricen $\mathbf{T}$. Det forudsættes desuden

$$\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T}) = k < n. \tag{2-64}$$

Ligningssystemets løsningsmængde bringes på standard-parameterform således:

1. Vi finder $\operatorname{trap}(\mathbf{T})$ og opskriver herudfra det fuldstændigt reducerede ligningssystem (som gjort i (2-59)).

2. I hver af de k ikke-trivielle ligninger i det fuldstændigt reducerede ligningssystem isolerer vi den *førststående* ubekendte på venstresiden (som gjort i (2-60)).

3. Vi har hermed isoleret i alt k forskellige ubekendte på venstresiden af det samlede system. De øvrige i $(n-k)$ ubekendte, som nu findes på højresiden, *omdøbes* til parameternavnene $t_1, t_2, \ldots, t_{n-k}$.

4. Nu kan vi opskrive løsningsmængden på *standard-parameterform*:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{x}_0 + t_1\,\mathbf{v}_1 + t_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + t_{n-k}\,\mathbf{v}_{n-k}\,, \tag{2-65}$$

   hvor vektoren $\mathbf{x}_0$ angiver parameterfremstillingens *begyndelsespunkt*, mens $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-k}$ er dens *retningsvektorer* (som gjort i (2-62)).

Bemærk at de reelle tal $t_1, t_2, \ldots, t_{n-k}$ kan vælges frit. Uanset valg vil ligning (2-65) være en gyldig løsning. De kaldes derfor for ***frie parametre***.

Hvis man har fulgt GaussJordan-eliminationens algoritme til punkt og prikke, når man frem til et bestemt begyndelsespunkt og et bestemt sæt af retningsvektorer for løsningsmængden, se ligning (2-65). Men løsningsmængden kan opskrives med et andet valg af begyndelsespunkt (hvis ligningssystemet er inhomogent), og med et andet valg af retningsvektorer. Dog vil retningsvektorernes *antal* altid være $(n-k)$.

Der findes eksempler på løsningsmængder hvor en eller flere af de ubekendte har fastlåste værdier. I det følgende eksempel har den frie parameter kun betydning for én af de ubekendte. De to andre er fastlåste:

|||| Eksempel 2.31 Uendeligt mange løsninger med en fri parameter

For et givet lineært ligningssystem har man fundet at

$$\operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \tag{2-66}$$

Vi konstaterer at $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T}) = 2 < n = 3$. Der er derfor én fri parameter. Løsningsmængden opskrives:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-67}$$

hvor t er en reel konstant der kan vælges frit.

Vi opsummerer det forudgående i denne sætning:

|||| Sætning 2.32 Når $\rho(\mathrm{A}) = \rho(\mathrm{T}) <$ antal ubekendte

Hvis det for et lineært ligningssystem med n ubekendte og med koefficientmatrix $\mathbf{A}$ og totalmatrix $\mathbf{T}$ gælder at

$$\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T}) = k < n \tag{2-68}$$

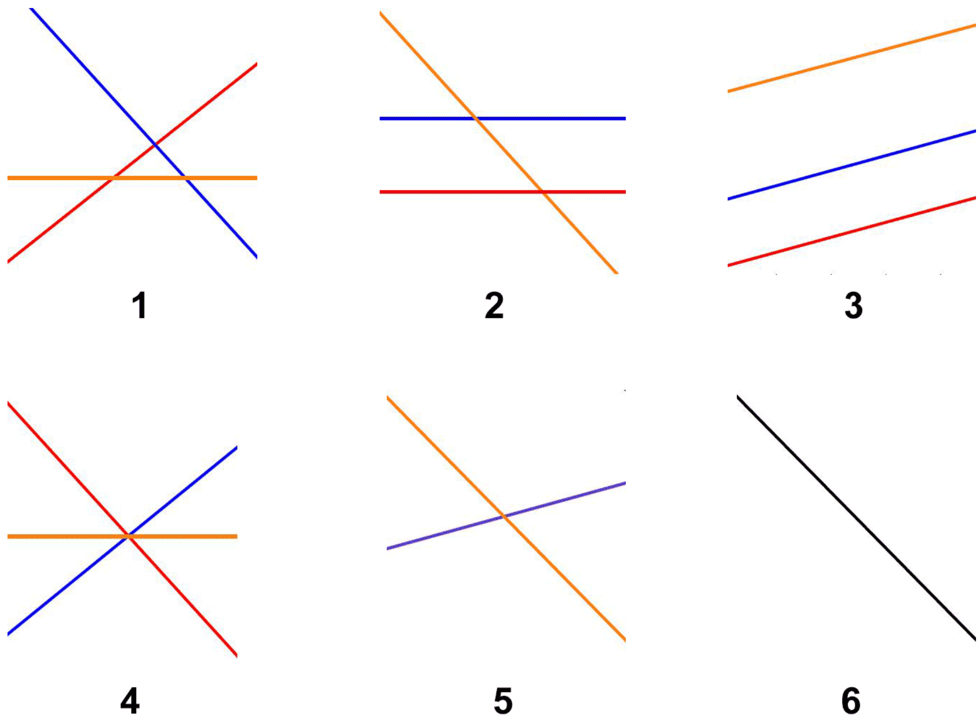
så har ligningssystemet uendeligt mange løsninger, som kan opskrives på standard-parameterform med begyndelsespunkt og $(n-k)$ retningsvektorer.

2.8 Om antallet af løsninger

Lad os betragte et system bestående af tre lineære ligninger med to ubekendte:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y &= c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y &= c_2 \\ a_3 \cdot x + b_3 \cdot y &= c_3 \end{aligned} \tag{2-69}$$

Vi har tidligere understreget at løsningsmængden for et ligningssystem er ***fællesmængden*** af løsningsmængderne for hver af de ligninger der indgår i systemet. Lad os nu fortolke det givne ligningssystem som ligninger for tre rette linjer i et koordinatsystem i planen. Løsningsmængden for ligningssystemet svarer da til mængden af de punkter som er *fælles* for alle de tre linjer. For at besvare spørgsmålet om "antallet" af løsninger, tegner vi de væsensforskellige situationer der findes i figur 2.1. I situation 2 er to af



Figur 2.1: Her illustreres at der er seks forskelligartede muligheder for løsninger til tre ligninger med to ubekendte.

linjerne parallelle, og i situation 3 er alle tre linjer parallelle. Der er derfor ingen fælles punkter for alle de tre linjer i situationerne 1, 2 og 3. I situation 5 er to af linjerne sammenfaldende (blå og røde linje falder sammen i lilla linje). Der er derfor netop ét fælles punkt i situationerne 4 og 5. I situation 6 er alle tre linjer sammenfaldende (giver sort linje). Der er derfor i denne situation uendeligt mange fællespunkter.

Eksemplet med de tre ligninger med to ubekendte illustrerer den følgende sætning som følger af vores studium af løsningsmængder i det foregående afsnit, se sætningerne 2.25, 2.28 og 2.32:

|||| Sætning 2.33 Bemærkning om antal løsninger

Et lineært ligningssystem har enten ingen, eller én eller uendeligt mange løsninger. Andre muligheder findes ikke.

2.9 Løsningsmængders lineære struktur

I dette afsnit vil vi gå lidt dybere ned i spørgsmålet om *strukturen* af løsningsmængder for lineære ligningssystemer. Det er i særlig grad vigtigt at bemærke sammenhængen mellem løsningsmængden for et inhomogent ligningssystem og løsningsmængden for *det tilsvarende homogene ligningssystem*. Vi starter med at undersøge homogene ligningssystemer.

2.9.1 Homogene ligningssystemers egenskaber

Et homogent lineært ligningssystem af m lineære ligninger med n ubekendte skrives på formen

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + \; a_{12}\cdot x_2 + \ldots + \; a_{1n}\cdot x_n &= 0 \\ a_{21}\cdot x_1 + \; a_{22}\cdot x_2 + \ldots + \; a_{2n}\cdot x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n &= 0 \end{aligned} \tag{2-70}$$

En oplagt egenskab ved systemet (2-70) er at $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T})$ (fordi højresiderne er lutter nuller). Systemet har derfor mindst én løsning - det følger af sætning 2.28. Vi kan da også straks finde en løsning, nemlig 0-vektoren, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. At den er en løsning fremgår jo af, at når vi erstatter alle de n ubekendte i systemet med tallet 0, så består systemet nemlig af m ligninger af form $0 = 0$.

I den følgende sætning beskriver vi en vigtig egenskab ved strukturen af løsningsmængden for homogene lineære ligningssystemer.

|||| Sætning 2.34 Løsninger til homogent system

Lad L_{hom} betegne løsningsmængden for et homogent lineært ligningssystem. Hvis

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n) \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots y_n) \tag{2-71}$$

er to vilkårlige løsninger, og k er et vilkårligt reelt tal, så vil både summen

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n) \tag{2-72}$$

og produktet

$$k \cdot \mathbf{x} = (k \cdot x_1, k \cdot x_2, \ldots k \cdot x_n) \tag{2-73}$$

tilhøre L_{hom}.

|||| Bevis

Sætningen indeholder to dele som bevises hver for sig:

1. Hvis
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \quad \text{for ethvert} \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2-74}$$
og
$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n = 0 \quad \text{for ethvert} \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2-75}$$
så fås ved addition af de to ligninger og efterfølgende faktorisering med hensyn til koefficienterne
$$a_{i1}(x_1 + y_1) + a_{i2}(x_2 + y_2) + \cdots + a_{in}(x_n + y_n) = 0 \quad \text{for ethvert} \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2-76}$$
hvilket viser at $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ er en løsning.

2. Hvis
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \quad \text{for ethvert} \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2-77}$$
og k er et vilkårligt reelt tal, så fås ved multiplikation på begge sider med k og efterfølgende faktorisering med hensyn til koefficienterne
$$a_{i1}(k \cdot x_1) + a_{i2}(k \cdot x_2) + \cdots + a_{in}(k \cdot x_n) = 0 \quad \text{for ethvert} \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2-78}$$
hvilket viser at $k \cdot \mathbf{x}$ er en løsning.

■

|||| Bemærkning 2.35

Hvis man tager et vilkårligt antal løsninger fra L_{hom}, ganger dem med vilkårlige konstanter og lægger disse produkter sammen, så vil denne ***linearkombination*** af løsninger også selv være en løsning. Dette er en konsekvens af sætning 2.34.

Det er interessant at studere sammenhængen mellem de her udviklede egenskaber for L_{hom} og den løsningsstruktur for generelle lineære ligningssystemer med rang mindre end antal ubekendte, som vi nåede frem til ved hjælp af GaussJordan-elimination i metode 2.30:
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1\,\mathbf{v}_1 + t_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + t_{n-k}\,\mathbf{v}_{n-k}\,. \tag{2-79}$$
Højresiderne i et vilkårligt homogent ligningssystem består af lutter 0-er, og da disse 0-er ikke vil blive ændret ved de rækkeoperationer der fører frem til fuldstændigt reduceret form, vil L_{hom} altid have begyndelsespunktet $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Herved har vi (igen) set at 0-vektoren altid er en løsningsmulighed for et vilkårligt homogent ligningssystem.

Vi kan derfor præcisere løsningsformlen for homogene systemer således:
$$\mathbf{x} = t_1\,\mathbf{v}_1 + t_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + t_{n-k}\,\mathbf{v}_{n-k}\,. \tag{2-80}$$

Bemærk at sætning 2.34 bekræftes af formlen (2-80). Vælger man nemlig to vektorer på formen (2-80), så kan deres sum (efter faktorisering) skrives på den selv samme form. Og det samme kan produktet af en konstant og en vektor på formen (2-80).

2.9.2 Struktursætningen

Vi skal nu betragte en afgørende relation mellem et inhomogent lineært ligningssystem af formen

$$\begin{array}{c} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{array} \tag{2-81}$$

og *det tilhørende homogene ligningssystem*, hvorved menes ligningerne (2-81) efter at alle dets højresider b_i er udskiftet med 0. Løsningsmængden for det inhomogene ligningssystem kaldes L_{inhom} og løsningsmængden for det tilhørende homogene ligningssystem for L_{hom}.

|||| Sætning 2.36 Struktursætningen

Hvis der er fundet bare en enkelt løsning (en såkaldt ***partikulær*** løsning) $\mathbf{x}_0$ til et inhomogent lineært ligningssystem, så kan L_{inhom} findes som summen af $\mathbf{x}_0$ og L_{hom}.

Der gælder med andre ord

$$L_{inhom} = \left\{ \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y} \;\middle|\; \mathbf{y} \in L_{hom} \right\}. \tag{2-82}$$

eller kort skrevet

$$L_{inhom} = \mathbf{x}_0 + L_{hom}. \tag{2-83}$$

|||| Bevis

Bemærk at sætningen rummer to påstande. Den ene er at summen af $\mathbf{x}_0$ og en vilkårlig vektor fra L_{hom} tilhører L_{inhom}. Den anden er at en vilkårlig vektor fra L_{inhom} kan skrives som summen af $\mathbf{x}_0$ og en vektor fra L_{hom}. Vi beviser de to påstande hver for sig:

1. Antag $\mathbf{y} \in L_{hom}$. Vi ønsker at vise at

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y} = (x_{0_1} + y_1, x_{0_2} + y_2, \ldots, x_{0_n} + y_n) \in L_{inhom}. \tag{2-84}$$

Da

$$a_{i1}x_{0_1} + a_{i2}x_{0_2} + \cdots + a_{in}x_{0_n} = b_i \quad \text{for ethvert} \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2-85}$$

og

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n = 0 \quad \text{for ethvert} \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2-86}$$

så fås ved addition af de to ligninger og efterfølgende faktorisering med hensyn til koefficienterne

$$a_{i1}(x_{0_1} + y_1) + \cdots + a_{in}(x_{0_n} + y_n) = b_i \quad \text{for ethvert} \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2-87}$$

hvilket viser det ønskede.

2. Antag at $\mathbf{x} \in L_{inhom}$. Vi ønsker at vise at der findes en vektor $\mathbf{y} \in L_{hom}$ der opfylder at

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}. \tag{2-88}$$

Da både $\mathbf{x}$ og $\mathbf{x}_0$ tilhører L_{inhom} gælder at

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \quad \text{for ethvert} \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2-89}$$

og

$$a_{i1}x_{0_1} + a_{i2}x_{0_2} + \cdots + a_{in}x_{0_n} = b_i \quad \text{for ethvert} \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2-90}$$

Når vi fra den øverste ligning trækker den nederste, får vi efter faktorisering

$$a_{i1}(x_1 - x_{0_1}) + \cdots + a_{in}(x_n - x_{0_n}) = 0 \quad \text{for ethvert} \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2-91}$$

hvilket viser at den vektor $\mathbf{y}$ som defineres ved $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, tilhører L_{hom} og opfylder det ønskede: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$.

■

Lad os perspektivere denne sætning ved hjælp af løsningsstrukturen for generelle lineære ligningssystemer med rang mindre end antal ubekendte, som vi nåede frem til ved hjælp af metode:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1\,\mathbf{v}_1 + t_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + t_{n-k}\,\mathbf{v}_{n-k}\,. \tag{2-92}$$

Ved at sætte alle de frie parametre $t_1, t_2, \ldots, t_n$ lig med 0, ses det at $\mathbf{x}_0$ er en partikulær løsning til det givne ligningssystem. Linearkombinationen $t_1\,\mathbf{v}_1 + t_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + t_{n-k}\,\mathbf{v}_{n-k}$ er løsningsmængden for det tilsvarende homogene ligningssystem, se ligning (2-80).

Bemærk at sætning 2.36 bekræftes af formlen (2-92) i den forstand, at der i hvert fald findes ét begyndelsespunkt $\mathbf{x}_0$ således at $L_{inhom} = \mathbf{x}_0 + L_{hom}$, nemlig det begyndelsespunkt der fremkommer af GaussJordan-eliminationen. Men sætning 2.36 går et skridt videre idet den siger at en vilkårlig løsning til det inhomogene system kan benyttes som begyndelsespunkt.

2.10 Opsummering

Vi ser på lineære ligningssystemer, indfører metoder til at beskrive og løse dem, og vi analyserer løsningsmængdernes struktur.

- Et ***lineært ligningssystem*** bestående af m lineære ligninger med n ubekendte skrives på formen

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n &= b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2-93}$$

- Ligningssystemet kan have ingen løsninger, netop én løsning eller uendeligt mange løsninger, andre muligheder findes ikke.

- Ligningssystemets koefficientmatrix $\mathbf{A}$, dets højreside $\mathbf{b}$ og dets totalmatrix $\mathbf{T}$ defineres ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{T} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

- Ved hjælp af tre typer af ***rækkeoperationer*** kan ligningssystemet reduceres fuldstændigt, svarende til at $\mathbf{T}$ omformes til en *trappematrix* $\mathrm{trap}(\mathbf{T})$. Ligningssystemets (og trappematricens) *rang* er antallet af ikke 0-rækker i $\mathrm{trap}(\mathbf{T})$.

- Hvis $\mathrm{trap}(\mathbf{T})$ indeholder en række af formen $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$ har ligningssystemet ingen løsninger, i modsat fald kan løsningsmængden skrives på formen:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1\,\mathbf{v}_1 + t_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + t_{n-k}\,\mathbf{v}_{n-k}\,. \tag{2-94}$$

  hvor n er antallet af ubekendte, og $k \leq n$ er systemets rang. Hvis ligningssystemets er inhomogent, er *begyndelsespunktet* $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$, og løsningsmængden til det tilsvarende homogene ligningssystem er da alle tænkelige ***linearkombinationer*** af de $(n-k)$ *retningsvektorer*:

$$\mathbf{x} = t_1\,\mathbf{v}_1 + t_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + t_{n-k}\,\mathbf{v}_{n-k}\,, \tag{2-95}$$

  hvor $t_1, t_2, \ldots, t_{n-k} \in \mathbb{R}\,.$

eNote 3

Matricer og Matrixalgebra

Denne note giver en grundlæggende viden om matricer og diverse regneregler og metoder introduceres. Noten kan læses uden andet grundlag end gymnasiet, men det kan være en idé, at være bekendt med talrummet $\mathbb{R}^n$, som beskrives i eNote.

En ***matrix*** er en form for talskema. Her er et eksempel på en matrix kaldet $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \tag{3-1}$$

En matrix karakteriseres ved antallet af *rækker* og *søjler*, og matricen $\mathbf{M}$ kaldes derfor en 2×3 matrix. Matricen $\mathbf{M}$ siges at indeholde $2 \cdot 3 = 6$ *elementer*. Udover rækker, søjler og elementer har matricer en række andre begreber tilknyttet. For at beskrive dem opstilles en generel matrix, her kaldet $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{3-2}$$

Matricen $\mathbf{A}$ har således m rækker og n søjler, og man kan ligeledes skrive $\mathbf{A}_{m \times n}$ eller $m \times n$ *matricen* $\mathbf{A}$. Matricen $\mathbf{A}$ siges også at være *af typen* $m \times n$.

En matrix, som kun har én søjle ($n = 1$), kaldes en *søjlematrix*. Tilsvarende kaldes en matrix med kun én række ($m = 1$) en *rækkematrix*.

En matrix med lige mange rækker og søjler ($m = n$), kaldes en *kvadratisk matrix*. Se eNote.

Er alle elementerne i en matrix reelle tal, kaldes matricen for en *reel matrix*. Mængden af disse matricer betegnes $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Matricen, hvis alle elementer er lig med 0, kaldes *nulmatricen* uanset type, og betegnes $\mathbf{0}$ eller evt. $\mathbf{0}_{m \times n}$. Enhver anden matrix kaldes en *egentlig matrix*.

3.1 Matrixsum og produkt af matrix med skalar

Det er muligt at lægge to matricer sammen, hvis de er af samme type. Man lægger da elementerne sammen pladsvis og danner derved en ny matrix af samme type. Ligeså kan man gange en matrix med en skalar (et tal), det sker ved at gange alle elementerne med skalaren.

|||| Definition 3.1 Matrixsum og produkt med skalar

Givet er en skalar $k \in \mathbb{R}$ og to reelle matricer $\mathbf{A}_{m\times n}$ og $\mathbf{B}_{m\times n}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \tag{3-3}$$

Summen af matricerne defineres således:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \tag{3-4}$$

Summen er kun defineret, når matricerne er af samme type.

Produktet af matricen $\mathbf{A}$ med skalaren k defineres således:

$$k\mathbf{A} = \mathbf{A}k = \begin{bmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & \dots & k\cdot a_{1n} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & \dots & k\cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k\cdot a_{m1} & k\cdot a_{m2} & \dots & k\cdot a_{mn} \end{bmatrix} \tag{3-5}$$

Produktet defineres ens uanset placeringen af skalaren i forhold til matricen ($k\mathbf{A} = \mathbf{A}k$).

Som følge af definition 3.1 er det oplagt, hvordan *differensen* $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ mellem de to matricer $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er defineret. Man kan lave følgende lille, men smarte, omskrivning:

$$\mathbf{A}-\mathbf{B} = \mathbf{A}+(-1)\mathbf{B}. \tag{3-6}$$

Differensen er derfor lige så intuitiv som summen af to matricer: Man trækker $\mathbf{B}$ fra $\mathbf{A}$ elementvis. Differensen er naturligvis også kun defineret af to matricer af samme type.

Eksempel 3.2 Simple matrixoperationer

Givet er de to matricer **A** og **B** således:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 9 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{3-7}$$

Matricerne er begge af typen 2×2. Vi ønsker at bestemme en tredje og fjerde matrix $\mathbf{C} = 4\mathbf{A}$ og $\mathbf{D} = 2\mathbf{A} - \mathbf{B}$. Dette kan gøres ved hjælp af sætning 3.1.

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = 4\mathbf{A} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4\cdot 4 & 4\cdot(-1) \\ 4\cdot 8 & 4\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ 32 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D} = 2\mathbf{A} - \mathbf{B} = 2\mathbf{A} + (-1)\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 16 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -9 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -5 \\ 7 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-8}$$

I følgende sætning opsummeres de regneregler, der gælder for sum af matricer og produkt med skalar.

Sætning 3.3 Regneregler for matrixsum og produkt med skalar

For vilkårlige matricer **A**, **B** og **C** i $\mathbb{R}^{m\times n}$ og ligeledes vilkårlige reelle tal k_1 og k_2 gælder følgende regneregler:

1.	$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$	Addition er kommutativ
2.	$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$	Addition er associativ
3.	$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$	$\mathbf{0}$ er en neutral matrix for addition i $\mathbb{R}^{m\times n}$
4.	$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}$	Alle matricer i $\mathbb{R}^{m\times n}$ har en modsat matrix
5.	$k_1(k_2\mathbf{A})=(k_1k_2)\mathbf{A}$	Produkt af matrix med skalarer er associativ
6.	$(k_1+k_2)\mathbf{A}=k_1\mathbf{A}+k_2\mathbf{A}$	De distributive regler gælder
7.	$k_1(\mathbf{A}+\mathbf{B})=k_1\mathbf{A}+k_1\mathbf{B}$	
8.	$1\mathbf{A}=\mathbf{A}$	Skalaren 1 er neutral i produkt med matrix

Her er et eksempel, der efterviser en af regnereglerne, som står i sætning 3.3. Bagefter perspektiveres konklusionen af eksemplet.

Eksempel 3.4 Eftervisning af regneregel

Givet er de to matricer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \tag{3-9}$$

samt konstanterne k_1 og k_2. Vi prøver nu som eksempel at eftervise de distributive regler, som står i sætning 3.3. Først haves:

$$\begin{aligned} (k_1+k_2)\mathbf{A} = (k_1+k_2)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (k_1+k_2)a_{11} & (k_1+k_2)a_{12} \\ (k_1+k_2)a_{21} & (k_1+k_2)a_{22} \end{bmatrix} \\ k_1\mathbf{A}+k_2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k_1a_{11} & k_1a_{12} \\ k_1a_{21} & k_1a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2a_{11} & k_2a_{12} \\ k_2a_{21} & k_2a_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_1a_{11}+k_2a_{11} & k_1a_{12}+k_2a_{12} \\ k_1a_{21}+k_2a_{21} & k_1a_{22}+k_2a_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-10}$$

Sættes a_{11}, a_{12}, a_{21} og a_{22} uden for parentes i hvert af elementerne i det sidste udtryk, ses det at $(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$ i dette tilfælde. Det at sætte a-elementerne uden for parentes er netop at bruge den distributive regel for de reelle tal.

Den anden distributive regel efterprøves på de givne matricer og konstanter:

$$\begin{aligned} k_1(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= k_1\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1(a_{11}+b_{11}) & k_1(a_{12}+b_{12}) \\ k_1(a_{21}+b_{21}) & k_1(a_{22}+b_{22}) \end{bmatrix} \\ k_1\mathbf{A}+k_1\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} k_1a_{11} & k_1a_{12} \\ k_1a_{21} & k_1a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1b_{11} & k_1b_{12} \\ k_1b_{21} & k_1b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1a_{11}+k_1b_{11} & k_1a_{12}+k_1b_{12} \\ k_1a_{21}+k_1b_{21} & k_1a_{22}+k_1b_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-11}$$

Sættes k_1 uden for parentes i hvert af elementerne i matricen i det sidste udtryk, ses det at den anden distributive regel også gælder i dette tilfælde: $k_1(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = k_1\mathbf{A} + k_1\mathbf{B}$. Den distributive regel for de reelle tal bruges altså endnu en gang elementvist.

Som i eksempel 3.4 kan man på tilsvarende vis eftervise de øvrige regneregler i sætning 3.3. Det vil dog ikke blive gjort her.

Regnereglerne ligner til forveksling de tilsvarende for de reelle tal. Det gør de, fordi operationerne med matricerne indtil videre sker elementvis. Derfor er det muligt at bruge de reelle tals regneregler i hvert af matricernes elementer. Andre matrixoperationer sker dog ikke på samme elementvise facon, hvorfor man skal være på vagt, når man opererer med matricer. Mere om det i næste afsnit.

3.2 Matrix-vektorproduktet og matrix-matrixproduktet

I dette afsnit beskrives produktet af en matrix med en vektor og dernæst produktet af en matrix med en anden matrix.

En vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ kan opskrives på samme måde som en søjlematrix, og kaldes i så fald for en *søjlevektor*:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \tag{3-12}$$

Man kan på den måde opdele en matrix $\mathbf{A}_{m\times n}$ i dens søjlevektorer. Det skrives på følgende vis:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} & \ldots & \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-13}$$

Der er altså n søjlevektorer med hver m elementer.

Læg mærke til at de firkantede parenteser rundt om søjlevektorerne kan fjernes uden videre! Det kan man i alle de sammenhænge med matricer, hvor dobbelt firkantede parenteser forekommer. Det vil altid være de inderste parenteser, som fjernes. Der er på den måde ingen forskel på de to udtryk, man vil dog altid foretrække det sidste udtryk, fordi det er mest overskueligt.

Vi definerer nu et produkt af en matrix og en vektor, hvor matricen har ligeså mange søjler, som vektoren har elementer:

|||| Definition 3.5 Matrix-vektorprodukt

Lad $\mathbf{A}$ være en vilkårlig matrix i $\mathbb{R}^{m\times n}$, og lad $\mathbf{v}$ være en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^n$.

Matrix-vektorproduktet af $\mathbf{A}$ med $\mathbf{v}$ er defineret således:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \dots + v_n\mathbf{a}_n \end{bmatrix} \tag{3-14}$$

Resultatet er en søjlevektor med m elementer. Resultatet er summen af produkterne af matricens k'te søjle og søjlevektorens k'te element for alle $k = 1, 2, \dots, n$.

Der skal være lige mange søjler i matricen, som der er rækker i søjlevektoren, her n.

Læg mærke til rækkefølgen i matrix-vektorproduktet: først matrix, derefter vektor! Det er ikke et vektor-matrixprodukt så at sige. Antallet af søjler og rækker vil ikke passe sammen i den anden konfiguration medmindre matricen er af typen 1×1.

|||| Eksempel 3.6 Matrix-vektorprodukt

Givet er følgende matrix og vektor (søjlevektor):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{3-15}$$

Vi danner nu matrix-vektorproduktet af $\mathbf{A}$ med $\mathbf{v}$ ved hjælp af definition 3.5:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} b \\ e \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a + 4b - c \\ 3d + 4e - f \end{bmatrix} \tag{3-16}$$

Er $\mathbf{A}$ givet på denne måde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \tag{3-17}$$

har man da produktet

$$\mathbf{Av} = \begin{bmatrix} 3\cdot(-1)+4\cdot 2-6 \\ 3\cdot 2+4\cdot 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{3-18}$$

Det ses, at resultatet (i begge tilfælde) er en søjlevektor med lige så mange rækker, som matricen $\mathbf{A}$ har rækker.

|||| Opgave 3.7 Matrix-vektorprodukt

Dan matrix-vektorproduktet $\mathbf{A}$ med $\mathbf{x}$ i ligningen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, når det er givet at

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{3-19}$$

Er det noget du er stødt på før? Hvor kommer det fra?

Som det er nævnt kan en matrix betragtes som søjlevektorer stillet op efter hinanden. På den måde kan man udvide matrix-vektorproduktet til et matrix-matrixprodukt, fordi det ligeså "bare" vil være flere matrix-vektorprodukter efter hinanden. Man vil da få en matrix som resultat i stedet for en vektor.

|||| Definition 3.8 Matrix-matrixprodukt

Lad $\mathbf{A}$ være en vilkårlig matrix i $\mathbb{R}^{m\times n}$, og lad $\mathbf{B}$ være en vilkårlig matrix i $\mathbb{R}^{n\times p}$.

Matrix-matrixproduktet eller bare ***matrixproduktet*** af $\mathbf{A}$ med $\mathbf{B}$ er defineret på denne måde:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Ab}_1 & \mathbf{Ab}_2 & \dots & \mathbf{Ab}_p \end{bmatrix} \tag{3-20}$$

Resultatet er en matrix af typen $m \times p$. Den k'te søjle i resultatmatricen er et matrix-vektorprodukt af den førststående matrix (her $\mathbf{A}$) med den k'te søjlevektor i den sidststående matrix (her $\mathbf{B}$), jf. definition 3.5.

Der skal være lige mange søjler i den førststående matrix, som der er rækker i den sidststående matrix.

Det er meget ofte at der **ikke** er følgende sammenhæng: $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$! Faktorernes orden er ikke ligegyldig, når der er tale om et matrix-matrixprodukt! Tilsvarende er det ofte overhovedet ikke muligt at lave matrix-matrixproduktet begge veje, fordi typerne af matricerne skal passe sammen på den måde, som er beskrevet i definition 3.8.

|||| Eksempel 3.9 Matrix-matrixprodukt én vej

Givet er de to matricer $\mathbf{A}_{2\times 2}$ og $\mathbf{B}_{2\times 3}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 3 \\ 2 & 9 & -9 \end{bmatrix} \tag{3-21}$$

Vi ønsker at danne matrix-matrixproduktet af **A** med **B**. Dette gøres ved hjælp af definition 3.8.

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= \left[\begin{bmatrix}4 & 5\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-8\\2\end{bmatrix} \;\; \begin{bmatrix}4 & 5\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix} \;\; \begin{bmatrix}4 & 5\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-9\end{bmatrix}\right]\\ &= \begin{bmatrix}4\cdot(-8)+5\cdot 2 & 4\cdot 3+5\cdot 9 & 4\cdot 3+5\cdot(-9)\\ -8+2\cdot 2 & 3+2\cdot 9 & 3+2\cdot(-9)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-22 & 57 & -33\\ -4 & 21 & -15\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3-22}$$

NB: Det er *ikke* muligt at danne matrix-matrixproduktet **BA**, fordi der ikke er lige så mange søjler i **B**, som der er rækker i **A** ($3 \neq 2$).

|||| Eksempel 3.10 Matrix-matrixprodukt to veje

Givet er de to matricer $\mathbf{A}_{2\times 2}$ og $\mathbf{B}_{2\times 2}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}3 & 2\\-5 & 1\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}4 & 4\\-1 & 0\end{bmatrix} \tag{3-23}$$

Begge matrix-matrixprodukterne **AB** og **BA** beregnes. Til det bruges definition 3.8.

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= \left[\begin{bmatrix}3 & 2\\-5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix} \;\; \begin{bmatrix}3 & 2\\-5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}\right]\\ &= \begin{bmatrix}3\cdot 4+2\cdot(-1) & 3\cdot 4+2\cdot 0\\ -5\cdot 4+1\cdot(-1) & -5\cdot 4+1\cdot 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10 & 12\\-21 & -20\end{bmatrix}\\ \mathbf{BA} &= \left[\begin{bmatrix}4 & 4\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix} \;\; \begin{bmatrix}4 & 4\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right]\\ &= \begin{bmatrix}4\cdot 3+4\cdot(-5) & 4\cdot 2+4\\ -1\cdot 3 & -1\cdot 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-8 & 12\\-3 & -2\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3-24}$$

Der gælder altså at $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, hvilket er typisk for matrix-matrixprodukter.

Her opsummeres de regneregler, der gælder for matrix-matrixprodukter og matrix-summer. Fordi matrix-vektorproduktet er et særtilfælde af matrix-matrixproduktet, er reglerne også gældende for dem.

|||| Sætning 3.11 Regneregler for matrixsum og -produkt

For vilkårlige matricer **A**, **B** og **C** og ligeledes et vilkårligt reelt tal k gælder følgende regneregler, såfremt de respektive matrix-matrixprodukter kan dannes:

$$\begin{aligned}&(k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B}) = k(\mathbf{AB}) && \text{Produkt med skalar er associativ}\\ &\left.\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= \mathbf{AB}+\mathbf{AC}\\ (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} &= \mathbf{AC}+\mathbf{BC}\end{aligned}\right\} && \text{De distributive regler gælder}\\ &\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} && \text{Matrix-matrixprodukter er associative}\end{aligned}$$

På samme måde som med regnereglerne i sætning 3.3 efterprøves som eksempel den sidste regneregel i sætning 3.11:

|||| Eksempel 3.12 Er matrixprodukter associative?

Den sidste regneregel i sætning 3.11 efterprøves på disse tre matricer:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \tag{3-25}$$

Først udregnes **AB** og **BC**:

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 13 \\ -9 & -6 & 25 \end{bmatrix} \\ \mathbf{BC} &= \left[\begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} -17 & 16 \\ 7 & -21 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-26}$$

Dernæst bestemmes $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ og $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{BC}) &= \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -17 \\ 7 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ -21 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} -3 & -26 \\ -23 & -36 \end{bmatrix} \\ (\mathbf{AB})\mathbf{C} &= \left[\begin{bmatrix} -3 & -2 & 13 \\ -9 & -6 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} -3 & -2 & 13 \\ -9 & -6 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} -3 & -26 \\ -23 & -36 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-27}$$

Vi kan se, at $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$, og det derfor er ligemeget, hvilket af matrixprodukterne, **AB** og **BC**, man udregner først. Det gælder for alle matricer.

På samme måde som det er vist i eksempel 3.12, kan man eftervise resten af regnereglerne. Ved at bruge mere "generelle" matricer kan man også bevise dem på rigtig vis.

|||| Opgave 3.13 Eftervisning af regneregel

Eftervis 1. regneregel i sætning 3.11 med de to reelle matricer $\mathbf{A}_{2\times 2}$ og $\mathbf{B}_{2\times 2}$ og konstanten k.

3.3 Transponering af matrix

Ved at bytte om på rækker og søjler i en matrix, fremkommer matricens ***transponerede matrix***, som i dette eksempel:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad \text{har den transponerede} \quad \mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} \tag{3-28}$$

$\mathbf{A}^\top$ læses '**A** *transponeret*'. Man har da også, at $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$. Her er en nyttig regneregel for transponeret matrix-matrixprodukt.

|||| Sætning 3.14 Transponering af matrix

Lad der være givet to vilkårlige matricer $\mathbf{A}_{m\times n}$ og $\mathbf{B}_{n\times p}$. Man danner de transponerede matricer, $\mathbf{A}^\top$ henholdsvis $\mathbf{B}^\top$, ved at bytte om på søjler og rækker i de respektive matricer.

At transponere matrix-matrixproduktet $\mathbf{AB}$ er det samme som at lave matrix-matrixproduktet af $\mathbf{B}^\top$ med $\mathbf{A}^\top$:

$$(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top \tag{3-29}$$

I følgende eksempel afprøves sætning 3.14.

|||| Eksempel 3.15 Eftervisning af transponeringsregel

Givet er de to matricer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \tag{3-30}$$

Man har da at

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 - 6\cdot 6 & 6\cdot 3 \\ 7\cdot 9 - 3\cdot 1 - 2\cdot 6 & 7\cdot 1 + 2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35 & 18 \\ 48 & 13 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-31}$$

Vi prøver nu at lave matrix-matrixproduktet $\mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$, og vi har at

$$\mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B}^\top = \begin{bmatrix} 9 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{3-32}$$

så

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top &= \left[\begin{bmatrix} 9 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 - 6\cdot 6 & 9\cdot 7 - 1\cdot 3 - 6\cdot 2 \\ 3\cdot 6 & 1\cdot 7 + 3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35 & 48 \\ 18 & 13 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-33}$$

De to resultater ser ens ud:

$$\begin{bmatrix} -35 & 18 \\ 48 & 13 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} -35 & 48 \\ 18 & 13 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top\,, \tag{3-34}$$

hvilket stemmer med sætning 3.14.

Opgave 3.16 Matrixprodukt og transponering

Givet er matricerne

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-35}$$

Udregn følgende, hvis det er muligt:

a) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$, b) $2\mathbf{A}^\top - 3\mathbf{B}^\top$, c) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}^\top$, d) $\mathbf{AB}$,

e) $\mathbf{AB}^\top$, f) $\mathbf{BA}^\top$, g) $\mathbf{B}^\top\mathbf{A}$, h) $\mathbf{A}^\top\mathbf{B}$.

3.4 Opsummering

- Matricer er talskemaer som er karakteriseret ved antallet af *søjler* og *rækker*, der angiver *typen* af matricen. En plads i en matrix kaldes et *element*.

- Typen af en matrix betegnes således: $\mathbf{A}_{m\times n}$. Matricen $\mathbf{A}$ har m rækker og n søjler.

- Matricer kan ganges med en skalar ved at gange skalaren på hvert element i matricen.

- Matricer kan lægges sammen, hvis de er af samme type. Det sker elementvist.

- Matrix-vektorproduktet, af $\mathbf{A}_{m\times n}$ med vektoren $\mathbf{v}$ med n elementer, er defineret således:

$$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 v_1 + \mathbf{a}_2 v_2 + \dots + \mathbf{a}_n v_n \end{bmatrix}, \tag{3-36}$$

  hvor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ er *søjlevektorerne* i $\mathbf{A}$.

- Matrix-matrixproduktet (eller bare matrixproduktet) er defineret som en række af matrix-vektorprodukter:

$$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times p} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{b}_1 & \mathbf{A}\mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{b}_p \end{bmatrix} \tag{3-37}$$

- Der findes flere regneregler for både summer af matricer, produkter af matricer og produkter af matricer med skalarer, se sætning 3.3 og sætning 3.11.

- Den *transponerede* $\mathbf{A}^\top$ til en matrix $\mathbf{A}$ bestemmes ved at bytte om på søjler og rækker i matricen.

eNote 4

Kvadratiske matricer

I denne eNote introducerer vi kvadratiske matricer, som blandt andet bruges i det såkaldte egenværdiproblem (eventuelt i sammenhæng med differentialligninger) og basisskifte. Desuden ligger denne note lige forud for eNote, som omhandler determinanter af kvadratiske matricer. Det forudsættes at man kender til de basale matrixoperationer, se for eksempel eNote.

Kvadratiske matricer er ganske enkelt matricer, som har *lige mange rækker og søjler*, så de er af typen $n \times n$. Noten her vil introducere nogle af de grundlæggende operationer, der findes med kvadratiske matricer.

En kvadratisk $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ ser således ud:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{4-1}$$

Elementer $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ siges at stå i ***hoveddiagonalen*** eller bare *diagonalen* i $\mathbf{A}$.

En kvadratisk matrix $\mathbf{D}$, som kun har elementer forskellige fra nul i hoveddiagonalen, kaldes en ***diagonalmatrix***, og man kan betegne den $\mathbf{D} = \mathbf{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

En ***symmetrisk matrix*** $\mathbf{A}$ er en kvadratisk matrix, som er lig sin egen transponerede, altså $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$.

En kvadratisk matrix kaldes ***regulær***, hvis den har fuld rang, det vil sige at $\rho(\mathbf{A}_{n\times n}) = n$. En kvadratisk matrix kaldes derimod ***singulær***, hvis den ikke har fuld rang, det vil sige at $\rho(\mathbf{A}_{n\times n}) < n$.

Den kvadratiske matrix, som har 1-taller i hoveddiagonalen og nuller ellers, kaldes for ***enhedsmatricen*** uanset antallet af rækker og søjler. Enhedsmatricen betegnes med $\mathbf{E}$. Man har altså, at

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{4-2}$$

I udenlandsk litteratur kaldes enhedsmatricen ofte for **I** (identity matrix).

Enhedsmatricen er den eneste matrix, som opfylder følgende sammenhænge:

$$\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A} \tag{4-3}$$

for en vilkårlig kvadratisk matrix **A**. Enhedsmatricen er på den måde "matricernes 1-tal": man ændrer ikke på en skalar ved at gange med 1, ligesom man ikke ændrer på en matrix ved at lave matrixproduktet af matricen med enhedsmatricen.

|||| Bevis

Enhedsmatricen er den eneste matrix, hvor sammenhængene $\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$ gælder for en vilkårlig matrix **A**.

Man kan forestille sig en anden matrix **D**, hvor samme sammenhænge var gældende, altså at $\mathbf{AD} = \mathbf{DA} = \mathbf{A}$ for en vilkårligt matrix **A**. Denne vilkårlige matrix kunne være enhedsmatricen, og sammenfatter man så de to ligninger får man: $\mathbf{D} = \mathbf{ED} = \mathbf{DE} = \mathbf{E}$.

Da $\mathbf{E} = \mathbf{D}$, findes der altså ikke andre matricer end enhedsmatricen **E**, der er neutralt element for matrixproduktet.

■

4.1 Invers matrix

Det er ikke muligt at dividere med matricer, men enhedsmatricen kan hjælpe med at komme frem til en lignende operation.

At dividere med en skalar er det samme som at gange med dens reciprokke. Derfor kan vi koncentrere os om at finde den reciprokke, da matrixproduktet allerede er defineret. Den reciprokke til en skalar $a \neq 0$ opfylder følgende ligning: $a \cdot x = 1$, hvor x er den reciprokke. Man kan omskrive det til, at $x = a^{-1}$. Læg mærke til, at man ikke kan bestemme den reciprokke, hvis $a = 0$. Et tilsvarende kriterium findes for kvadratiske matricer. Til at bestemme den "reciprokke matrix" til en matrix **A**, kaldet den inverse matrix, opstilles en *matrixligning* svarende til $a \cdot x = 1$ for en skalar:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{E} \tag{4-4}$$

En sådan ligning kaldes en *matrixligning*, netop fordi den ubekendte **X** er en matrix. Hvis der findes en løsning til **X** betegnes den $\mathbf{A}^{-1}$ og kaldes den ***inverse matrix*** til **A**. Vi ønsker altså at finde en bestemt matrix kaldet $\mathbf{A}^{-1}$, som netop opfylder at matrixproduktet af **A** med den giver enhedsmatricen.

Det er dog ikke alle kvadratiske matricer, hvortil man kan finde den inverse, ligesom man ikke kan bestemme den reciprokke til $a = 0$. Det postuleres i følgende sætning.

|||| Sætning 4.1 Invers matrix

En kvadratisk matrix $\mathbf{A}_{n\times n}$ har en invers matrix $\mathbf{A}^{-1}$, der opfylder $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$, hvis og kun hvis $\mathbf{A}$ er regulær.

Den inverse matrix bestemmes entydigt ved matrixligningen $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{E}$, hvor $\mathbf{X}$ er den ubekendte.

En regulær matrix svarer altså til, at $a \neq 0$.

I den følgende metode forklares, hvordan man løser den før beskrevne matrixligning (4-4), og derved finder den inverse, såfremt matricen er regulær.

|||| Metode 4.2 At bestemme den inverse matrix

Man bestemmer den inverse matrix, betegnet $\mathbf{A}^{-1}$, til den regulære kvadratiske matrix $\mathbf{A}$ ved hjælp af *matrixligningen*

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{E}. \tag{4-5}$$

Ligningen løses med hensyn til den ubekendte $\mathbf{X}$ på følgende måde:

1. Totalmatricen $\mathbf{T} = \left[\,\mathbf{A} \;\middle|\; \mathbf{E}\,\right]$ opstilles.

2. Ved sædvanlig GaussJordan-elimination bestemmes trappeformen af $\mathbf{T}$: $\mathrm{trap}(\mathbf{T})$, hvor man i første omgang kan ignorere placeringen af den lodrette streg.

3. Ved eliminationen dannes til slut enhedsmatricen på venstre side af den lodrette streg, mens løsningen (den inverse til $\mathbf{A}$) kan aflæses på højre side: $\mathrm{trap}(\mathbf{T}) = \left[\,\mathbf{E} \;\middle|\; \mathbf{X}\,\right] = \left[\,\mathbf{E} \;\middle|\; \mathbf{A}^{-1}\,\right]$.

|||| Eksempel 4.3 Invers matrix

Vi ønsker at finde den inverse matrix $\mathbf{A}^{-1}$ til matricen $\mathbf{A}$, som er givet således:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -16 & 9 & -10 \\ 9 & -5 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4-6}$$

Dette kan gøres ved hjælp af metode 4.2. Først opstilles totalmatricen:

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{rrr|rrr} -16 & 9 & -10 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{4-7}$$

Nu danner vi det ledende 1-tal i første række: Først rækkeoperationen $R_1 + R_2$ og derefter

$R_1 + 4 \cdot R_3$. Det giver

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -7 & 4 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & -5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 9 & -5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{4-8}$$

Så fjernes tallene i 1. søjle af 2. og 3. række: $R_2 - 9 \cdot R_1$ og $R_3 - 2 \cdot R_1$. Endvidere byttes 2. og 3. række: $R_2 \leftrightarrow R_3$. Vi får da

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 6 & -9 & -8 & -36 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -2 & -7 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -2 & -7 \\ 0 & -5 & 6 & -9 & -8 & -36 \end{array}\right] \tag{4-9}$$

Nu ændrer vi fortegnet på række 2: $(-1) \cdot R_2$ og derefter fjernes tallet i 2. søjle af 3. række: $R_3 + 5 \cdot R_2$.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & -5 & 6 & -9 & -8 & -36 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \tag{4-10}$$

Sidste skridt er da umiddelbar: $R_2 + R_3$:

$$\operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \tag{4-11}$$

Det ses, at $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T}) = 3$, altså har $\mathbf{A}$ fuld rang, og derfor kan man aflæse den inverse til $\mathbf{A}$ på højresiden af den lodrette streg:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \tag{4-12}$$

Læg mærke til, at venstresiden af totalmatricen er enhedsmatricen. Den er altså "flyttet" fra højre til venstre side af lighedstegnene (den lodrette streg).

Til sidst kontrollerer vi, om $\mathbf{A}^{-1}$ opfylder $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} -16 & 9 & -10 \\ 9 & -5 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{bmatrix} -16 & 9 & -10 \\ 9 & -5 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} -16 & 9 & -10 \\ 9 & -5 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} -16 & 9 & -10 \\ 9 & -5 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} -16+27-10 & -16+36-20 & -64+54+10 \\ 9-15+6 & 9-20+12 & 36-30-6 \\ 2-3+1 & 2-4+2 & 8-6-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E} \end{aligned} \tag{4-13}$$

Det passer!

Som man kan se i næste eksempel, så kan man bruge den inverse til at løse matrixligninger med kvadratiske matricer. I matrixligninger kan man nemlig også *bytte rundt på led* og *gange med skalare* for at isolere den ubekendte ligesom i normale ligninger. Ydermere kan man *gange igennem* med matricer – dette kan enten gøres fra højre eller venstre på alle leddene i ligningen, hvilket giver forskellige resultater.

|||| Eksempel 4.4 Matrixligning

Vi ønsker at løse matrixligningen

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} - \mathbf{CX} \tag{4-14}$$

hvor

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 9 & 5 & -5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & -12 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -12 & 7 & -9 \\ 0 & -10 & 11 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix} \tag{4-15}$$

Først reduceres ligningen så meget som muligt, se eventuelt sætning, uden at bruge værdierne:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} - \mathbf{CX} \Leftrightarrow \mathbf{AX} + \mathbf{CX} = \mathbf{B} - \mathbf{CX} + \mathbf{CX} \Leftrightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{C})\mathbf{X} = \mathbf{B} \tag{4-16}$$

Da $\mathbf{X}$ er den ubekendte, vil vi prøve at isolere den helt. Er $(\mathbf{A} + \mathbf{C})$ en regulær matrix, kan man gange med den inverse til $(\mathbf{A} + \mathbf{C})$ fra venstre på begge sider af lighedstegnet. Altså:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{C})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{C})\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{C})^{-1}\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{EX} = \mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{C})^{-1}\mathbf{B}\,, \tag{4-17}$$

fordi $(\mathbf{A} + \mathbf{C})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{C}) = \mathbf{E}$ ifølge definitionen på inverse matricer. Vi laver nu matrixsummen $\mathbf{A} + \mathbf{C}$ og ser om matricen er regulær:

$$\mathbf{A} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 9 & 5 & -5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 7 & -9 \\ 0 & -10 & 11 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 9 & -10 \\ 9 & -5 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4-18}$$

Den inverse til denne matrix er allerede bestemt i eksempel 4.3, og den del af proceduren springes derfor over. $\mathbf{X}$ kan da bestemmes:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{C})^{-1}\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} -16 & 9 & -10 \\ 9 & -5 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & -12 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & -12 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & -11 & 5 \\ 62 & -45 & 20 \\ 11 & -23 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4-19}$$

Dette leder frem til følgende regneregler omkring kvadratiske matricer.

|||| Sætning 4.5 Regneregler ved invers matrix

For de regulære kvadratiske matricer $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$ gælder der følgende regneregler:

1. Den inverse til den inverse af en matrix er lig matricen selv:

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A} \tag{4-20}$$

2. Den transponerede til en invers matrix er det samme som den inverse transponerede matrix:

$$(\mathbf{A}^{\top})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\top} \tag{4-21}$$

   $\mathbf{A}^{\top}$ er regulær, hvis og kun hvis $\mathbf{A}$ er regulær.

3. I matrixligninger kan man gange igennem med den inverse til en matrix. Dette kan gøres enten fra højre eller venstre på begge sider af lighedstegnet:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad \text{og} \quad \mathbf{XC} = \mathbf{D} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{DC}^{-1} \tag{4-22}$$

4. Den inverse til et matrixprodukt af to matricer er lig produktet af de tilsvarende inverse matricer i omvendt rækkefølge:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \tag{4-23}$$

   $\mathbf{AB}$ er regulær, hvis og kun hvis både $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er regulære.

Den første regneregel (4-20) i sætning 4.5 bygger på noget, som indtil videre ikke er konstateret: Den inverse til en (regulær) matrix er også regulær! Det vil sige, at det også er muligt at finde den inverse til denne matrix. Regnereglen påpeger så, at den inverse til den inverse til en matrix er lig matricen selv.

På samme måde er den transponerede af en regulær matrix også regulær, hvilket udnyttes i den anden regneregel, (4-21).

Herunder afprøves en af reglerne i et eksempel. Regnereglen i ligning (4-22) er allerede blevet brugt i eksempel 4.4.

|||| Eksempel 4.6 Eftervisning af regneregel ved invers matrix

Givet er de to kvadratiske matricer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{4-24}$$

Vi ønsker at afprøve den sidste regneregel i sætning 4.5, nemlig at $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. Først bestemmes $\mathbf{A}^{-1}$ og $\mathbf{B}^{-1}$ ved hjælp af metode 4.2.

$$[\,\mathbf{A} \mid \mathbf{E}\,] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 10 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \tag{4-25}$$

På samme måde med **B**:

$$\left[\,\mathbf{B}\mid\mathbf{E}\,\right]=\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\2&3&0&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&1&-2&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&3&-1\\0&1&-2&1\end{array}\right] \tag{4-26}$$

Da det er lykkedes at få enhedsmatricen på venstresiden af stregen i begge tilfælde, har vi nu at

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{2}&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\quad\text{og}\quad\mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1\\-2&1\end{bmatrix} \tag{4-27}$$

$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ bestemmes:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}=\left[\begin{bmatrix}3&-1\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{5}{2}\\\frac{3}{2}\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}3&-1\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}-9&\frac{7}{2}\\\frac{13}{2}&-\frac{5}{2}\end{bmatrix} \tag{4-28}$$

På den anden side af lighedstegnet i regnereglen haves i første omgang **AB**:

$$\mathbf{AB}=\left[\begin{bmatrix}2&4\\6&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}2&4\\6&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}10&14\\26&36\end{bmatrix} \tag{4-29}$$

Nu bestemmes den inverse til **AB**:

$$\left[\,\mathbf{AB}\mid\mathbf{E}\,\right]=\left[\begin{array}{cc|cc}10&14&1&0\\26&36&0&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1&\frac{7}{5}&\frac{1}{10}&0\\0&-\frac{2}{5}&-\frac{13}{5}&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&-9&\frac{7}{2}\\0&1&\frac{13}{2}&-\frac{5}{2}\end{array}\right] \tag{4-30}$$

Vi har altså, at

$$(\mathbf{AB})^{-1}=\begin{bmatrix}-9&\frac{7}{2}\\\frac{13}{2}&-\frac{5}{2}\end{bmatrix}, \tag{4-31}$$

Sammenlignes ligning (4-28) og (4-31) ses, at der er fuldstændig lighed: $(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

|||| Opgave 4.7 Invers matrix

Givet er matricerne

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\2&3\end{bmatrix}\quad\text{og}\quad\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3&2&1\\0&1&2\end{bmatrix} \tag{4-32}$$

a) Bestem $(\mathbf{BA})^{-1}$.

b) Vis, at **AB** ikke er regulær, og man derfor ikke kan bestemme $(\mathbf{AB})^{-1}$.

|||| Opgave 4.8 Invers matrix

Givet er matricerne

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&3\\1&1\end{bmatrix},\quad\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix},\quad\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-1&3\\1&-2\end{bmatrix}\quad\text{og}\quad\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix} \tag{4-33}$$

a) Udregn **AC**, **BD** og **DC**.

b) Angiv, hvis det er muligt, $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}$ og $(\mathbf{AB})^{-1}$.

c) Er det muligt at sige, om $(\mathbf{AB})^{-1}$ findes efter at have prøvet at bestemme $\mathbf{A}^{-1}$ og $\mathbf{B}^{-1}$? Hvis ja, hvordan?

4.2 Potenser af matricer

Vi har nu set, hvordan den inverse til en regulær matrix bestemmes, og vi siger, at den har potensen -1. Tilsvarende defineres her vilkårlige heltallige ***potenser af kvadratiske matricer***.

|||| Definition 4.9 Potens af matrix

For en vilkårlig kvadratisk matrix $\mathbf{A}$ defineres følgende naturlige potenser:

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E} \quad \text{og} \quad \mathbf{A}^n = \overbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}^{n \text{ gange}}, \text{ for } n \in \mathbb{N} \tag{4-34}$$

For en vilkårlig **regulær** kvadratisk matrix $\mathbf{B}$ defineres yderligere de negative potenser:

$$\mathbf{B}^{-n} = (\mathbf{B}^{-1})^n = \overbrace{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\cdots\mathbf{B}^{-1}}^{n \text{ gange}}, \text{ for } n \in \mathbb{N} \tag{4-35}$$

Som følge af definitionen på potenserne, kan nogle regneregler opskrives.

|||| Sætning 4.10 Regneregler for potenser af matricer

For en vilkårlig kvadratisk matrix $\mathbf{A}$ og to vilkårlige ikke negative heltal a og b gælder følgende potensregneregler

$$\mathbf{A}^a\mathbf{A}^b = \mathbf{A}^{a+b} \quad \text{og} \quad (\mathbf{A}^a)^b = \mathbf{A}^{ab} \tag{4-36}$$

Er $\mathbf{A}$ regulær, gælder disse regneregler også for negative heltal a og b.

Herunder er et eksempel på to (simple) matricer, som har nogle pudsige egenskaber. Egenskaberne er *ikke* typiske for matricer, og der findes slet ikke nogle tilsvarende skalarer.

|||| Eksempel 4.11 To pudsige matricer mht. potenser

Givet er matricerne

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \tag{4-37}$$

Med hjælp fra både definition 4.9 og sætning 4.10 laves følgende udregninger. $\mathbf{A}^2$ bestemmes:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E} \tag{4-38}$$

Ifølge tilføjelsen til den fjerde regneregel i sætning 4.5 er $\mathbf{A}$ da regulær, og desuden er $\mathbf{A} =$

$\mathbf{A}^{-1}$. Det giver

$$
\begin{array}{ll}
\vdots & \vdots \\
\mathbf{A}^{-3} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^2)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} & \mathbf{A}^{-2} = (\mathbf{A}^2)^{-1} = \mathbf{E} \\
\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} & \mathbf{A}^{0} = \mathbf{E} \\
\mathbf{A}^{1} = \mathbf{A} & \mathbf{A}^{2} = \mathbf{E} \\
\vdots & \vdots
\end{array}
\tag{4-39}
$$

Alle ulige potenser af $\mathbf{A}$ giver altså $\mathbf{A}$ selv, mens de lige potenser giver enhedsmatricen:

$$
\mathbf{A}^{2n} = \mathbf{E} \;\text{ og }\; \mathbf{A}^{2n+1} = \mathbf{A} \;\text{ for }\; n \in \mathbb{Z} \tag{4-40}
$$

$\mathbf{B}^2$ udregnes:

$$
\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{4-41}
$$

Ifølge samme regneregel er $\mathbf{B}$ singulær. Man har da, at

$$
\mathbf{B}^0 = \mathbf{E}\,,\; \mathbf{B}^1 = \mathbf{B}\,,\; \mathbf{B}^2 = \mathbf{0}\,,\; \mathbf{B}^n = \mathbf{0} \;\text{ for }\; n \geq 2 \tag{4-42}
$$

4.3 Opsummering

- Kvadratiske matricer er matricer med lige mange rækker og søjler.

- Enhedsmatricen **E** er en kvadratisk matrix med ettaller i diagonalen og nuller ellers:
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{4-43}$$

- Hvis en kvadratisk matrix har fuld rang, kaldes den regulær, ellers kaldes den singulær.

- En kvadratisk matrix, som kun har tal forskellige fra nul i diagonalen, kaldes en diagonalmatrix.

- En kvadratisk matrix, som er lig sin egen transponerede, kaldes en symmetrisk matrix.

- Til en regulær matrix **A** findes den inverse, betegnet $\mathbf{A}^{-1}$, der opfylder at
$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E} \tag{4-44}$$
Den inverse kan bestemmes ved hjælp af metode 4.2.

- Der findes regneregler med kvadratiske og inverse matricer, se sætning 4.5.

- Potenser af kvadratiske matricer er defineret, se definition 4.9. Dertil findes også nogle regneregler.

- Inverse matricer bruges for eksempel i forbindelse med *basisskifte* og *egenværdiproblemet*. Desuden defineres *determinanten* af en kvadratisk matrix i eNote.

eNote 5

Determinanter

I denne eNote ser vi på ***kvadratiske matricer****; deres type er altså $n \times n$ for $n \geq 2$, se eNote. Det er en fordel, men ikke absolut nødvendigt, at kende determinantbegrebet for (2×2)-matricer på forhånd. Matrix-algebraen fra eNote forudsættes bekendt (sum, produkt, transponering, invers, af matricer), samt den generelle løsningsmetode for lineære ligningssystemer fra eNote.*

Determinanten af en reel *kvadratisk* $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$ er et reelt tal, som vi betegner med $\det(\mathbf{A})$ eller nogen gange kort med $|\mathbf{A}|$. Determinanten af en matrix kan betragtes som et mål for, hvor meget matricen 'vejer' - med fortegn; det vil vi illustrere visuelt og geometrisk for (2×2)-matricer og for (3×3)-matricer i eNote.

Determinanten er en ganske bestemt *funktion* af de i alt n^2 tal, der står som elementer i en $(n \times n)$-matrix.

For at definere – og derefter beregne – determinant-værdien af $(n \times n)$-matricer direkte ud fra de n^2 elementer i hver af matricerne har vi brug for to ting: Dels den velkendte determinant-formel for (2×2)-matricer (se definition 5.1 nedenfor) og dels en metode til at snitte en vilkårlig $(n \times n)$-matrix op i (2×2)-matricer og derved definere og beregne vilkårlige determinanter ud fra determinanterne af disse (2×2)-matricer.

5.1 Determinanter af $(2 \times 2)-$matricer

|||| Definition 5.1 Determinanter af $(2 \times 2)-$matricer

Lad $\mathbf{A}$ være den vilkårlige $(2 \times 2)-$matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \tag{5-1}$$

Så er determinanten af $\mathbf{A}$ defineret ved:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \,. \tag{5-2}$$

|||| Opgave 5.2 Invers $(2 \times 2)-$matrix

Husk, at den inverse matrix $\mathbf{A}^{-1}$ til en regulær matrix $\mathbf{A}$ har den karakteristiske egenskab at $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$. Vis direkte ud fra (5-1) og (5-2), at den inverse matrix $\mathbf{A}^{-1}$ til en $(2 \times 2)-$matrix $\mathbf{A}$ kan udtrykkes på følgende måde (når altså $\det(\mathbf{A}) \neq 0$) :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \tag{5-3}$$

|||| Opgave 5.3 Regneregler for $(2 \times 2)-$matricer

For generelle kvadratiske matricer gælde en række fundamentale determinant-regneregler, som vil blive præsenteret i sætning 5.20 nedenfor. Tjek allerede nu de tre første ligninger i sætning 5.20 for (2×2)-matricer $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$. Brug direkte udregning af begge sider af ligningerne ved hjælp af (5-2).

5.2 Snit-matricer

|||| Definition 5.4 Snitmatricer

For en $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$ defineres $(i,j)-$snitmatricen $\widehat{\mathbf{A}}_{ij}$ som den $((n-1) \times (n-1))$-undermatrix af $\mathbf{A}$, der fremkommer ved at slette hele række i og hele søjle j fra matricen $\mathbf{A}$.

Hver enkelt af de i alt n^2 snit-matricer $\widehat{\mathbf{A}}_{ij}$ (hvor $1 \leq i \leq n$ og $1 \leq j \leq n$) er mindre end $\mathbf{A}$, de har typen $(n-1) \times (n-1)$ og derfor kun $(n-1)^2$ elementer.

|||| Eksempel 5.5 Snitmatricerne for en $(3 \times 3)-$matrix

En (3×3)-matrix $\mathbf{A}$ har i alt 9 stk. (2×2)-snitmatricer $\widehat{\mathbf{A}}_{ij}$. For eksempel, hvis

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \tag{5-4}$$

så er de 9 snitmatricer hørende til $\mathbf{A}$ givet ved:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{A}}_{11} &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, & \widehat{\mathbf{A}}_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \widehat{\mathbf{A}}_{13} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \\ \widehat{\mathbf{A}}_{21} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, & \widehat{\mathbf{A}}_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \widehat{\mathbf{A}}_{23} &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \\ \widehat{\mathbf{A}}_{31} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, & \widehat{\mathbf{A}}_{32} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, & \widehat{\mathbf{A}}_{33} &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{5-5}$$

Deres respektive determinanter er determinanter af $(2 \times 2)-$matricer, og kan hver for sig direkte beregnes ud fra definitionen 5.1 ovenfor:

$$\begin{aligned} &\det(\widehat{\mathbf{A}}_{11}) = -7\,, \det(\widehat{\mathbf{A}}_{12}) = 1\,, \quad \det(\widehat{\mathbf{A}}_{13}) = 5\,, \\ &\det(\widehat{\mathbf{A}}_{21}) = -3\,, \det(\widehat{\mathbf{A}}_{22}) = 0\,, \quad \det(\widehat{\mathbf{A}}_{23}) = 0\,, \\ &\det(\widehat{\mathbf{A}}_{31}) = 1\,, \quad \det(\widehat{\mathbf{A}}_{32}) = -1\,, \det(\widehat{\mathbf{A}}_{33}) = -2\,. \end{aligned} \tag{5-6}$$

5.3 Induktiv definition af determinanter

Determinanten af en 3×3 matrix kan nu defineres ud fra determinanterne af 3 af sine 9 snitmatricer, og generelt: Determinanten af en $n \times n$ matrix defineres ved hjælp af determinanterne af de n snitmatricer der hører til en (frit valgt men fast) række r på følgende måde, som naturligt nok kaldes ***opløsning efter*** r***-te række***:

|||| Definition 5.6 Determinanter defineres ved opløsning

For en vilkårlig værdi af rækkeindeks r defineres determinanten af en given $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$ induktivt på følgende måde:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{r+j} a_{rj} \det(\widehat{\mathbf{A}}_{rj}) \quad . \tag{5-7}$$

Vi benytter her og senere følgende korte skrivemåder og notationer for summer og produkter af mange led, f.eks. n givne reelle tal $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n$:

$$
\begin{aligned}
c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} + c_n &= \sum_{i=1}^{n} c_i \;, \quad \text{og} \\
c_1 \cdot c_2 \cdot \cdots \cdot c_{n-1} \cdot c_n &= \prod_{i=1}^{n} c_i \quad .
\end{aligned}
\tag{5-8}
$$

|||| Eksempel 5.7 Opløsning af en determinant efter 1. række

Vi vil benytte definition 5.6 direkte til at beregne determinanten af den matrix $\mathbf{A}$ som er givet i eksempel 5.5. Vi vælger $r = 1$ og har så brug for de tre snitmatrix-determinanter, $\det(\widehat{\mathbf{A}}_{11}) = -7$, $\det(\widehat{\mathbf{A}}_{12}) = 1$, og $\det(\widehat{\mathbf{A}}_{13}) = 5$, som vi allerede har udregnet ovenfor i eksempel 5.5:

$$
\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\widehat{\mathbf{A}}_{1j}) \\
&= (-1)^{1+1} \cdot 0 \cdot \det(\widehat{\mathbf{A}}_{11}) + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \det(\widehat{\mathbf{A}}_{12}) + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det(\widehat{\mathbf{A}}_{13}) \\
&= 0 - 2 + 5 = 3 \quad .
\end{aligned}
\tag{5-9}
$$

Læg mærke til, at snitmatricernes determinanter skal ganges med det element i $\mathbf{A}$ som står på plads (r, j) og med fortegns-faktoren $(-1)^{r+j}$ før de lægges sammen. Og læg mærke til, at snitmatricernes determinanter jo selv kan 'trævles op' til en bestemmelse af determinanter af endnu mindre matricer, således at vi til sidst ender med 'kun' at skulle bestemme vægtede summer af determinanter af $(2 \times 2)-$matricer!

|||| Opgave 5.8 Valg af 'opløsningsrække' er ligegyldig

Vis direkte ved beregning, at vi får samme værdi for determinanten ved at bruge en af de andre to rækker til opløsningen af determinanten i eksempel 5.5.

|||| Definition 5.9 Alternativ: Opløsning efter søjle

Determinanten af en given $(n \times n)-$matrix $\mathbf{A}$ kan alternativt defineres induktivt ved opløsning efter en vilkårlig valgt *søjle* :

$$
\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+s} a_{is} \det(\widehat{\mathbf{A}}_{is}) \quad . \tag{5-10}
$$

Her er opløsningen udtrykt ved opløsning efter søjle s.

Som det er antydet allerede med definitionerne og som vist i det konkrete tilfælde med matricen i eksempel 5.5, er det ligegyldigt, hvilken række (eller søjle) man opløser efter:

|||| Sætning 5.10 Valg af opløsnings-række eller -søjle er ligegyldig

De to definitioner, 5.6 og 5.9, af determinanten af en kvadratisk matrix giver samme værdi og er uafhængige af valg af række hhv. søjle til de respektive opløsninger.

|||| Opgave 5.11 Valg af 'opløsningssøjle' er ligegyldig

Vis direkte ved beregning, at vi får samme værdi for determinanten i 5.5 ved at bruge søjleopløsning efter en vilkårlig af de tre søjler i $\mathbf{A}$.

Det er selvsagt smartest at opløse efter en række, eller en søjle, som indeholder en masse 0'er.

|||| Opgave 5.12 Determinanter af nogle større matricer

Benyt de ovenfor givne anvisninger og resultater til at finde determinanten af hver af følgende matricer:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 7 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 1 & 9 \end{bmatrix}. \tag{5-11}$$

Hvis der er mange 0'er i en matrix, så er det meget lettere at beregne dens determinant! Specielt hvis alle elementer i en række (henholdsvis søjle) er 0 pånær ét element, så er det klart smartest at opløse efter den række (henholdsvis søjle). Og det er tilladt at 'skaffe' sig en masse 0'er ved de velkendte rækkeoperationer, hvis man blot holder øje med, hvilke konstanter der divideres med og hvor mange gange der byttes om på rækkerne. Se sætning 5.16 og eksempel 5.17 nedenfor.

5.4 Beregningstekniske egenskaber ved determinanter

Vi samler her nogle af de vigtigste redskaber, som ofte benyttes til beregning og inspektion af determinanter af matricer.

Det er ikke svært at vise følgende sætning, f.eks. direkte ved først at opløse efter første søjle eller efter første række, hvorefter mønsteret viser sig:

Sætning 5.13 Matricer med 0 over eller under diagonalen

Hvis en $(n \times n)-$matrix har lutter 0'er over eller under diagonalen, så er determinanten givet ved produktet af diagonalelementerne.

Specielt har vi derfor:

Sætning 5.14 Determinanten af en diagonalmatrix

Lad $\mathbf{\Lambda}$ betegne en $(n \times n)$-***diagonalmatrix*** med diagonal-elementerne $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ og ellers med 0'er udenfor diagonalen:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} . \tag{5-12}$$

Så er determinanten

$$\det(\mathbf{\Lambda}) = \lambda_1 \, \lambda_2 \cdots \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{5-13}$$

Opgave 5.15 Determinanten af en bi-diagonalmatrix

Bestem determinanten af $(n \times n)-$ ***bi-diagonal-matricen*** med vilkårligt givne værdier $\mu_1, \ldots, \mu_n$ i bidiagonalen og 0'er udenfor:

$$\mathbf{M} = \mathbf{bidiag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \mu_1 \\ 0 & \cdots & \mu_2 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ \mu_n & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{5-14}$$

For generelle matricer og derfor også for kvadratiske matricer gælder som bekendt fra eNote, at de kan omformes til trappeform ved brug af rækkeoperationer. Hvis man holder godt øje med, hvad der sker ved hvert skridt i den omformning, så kan determinanten af matricen direkte aflæses ud fra processen. Determinanten af en matrix opfører sig nemlig 'pænt' selvom der udføres rækkeoperationer på matricen:

|||| Sætning 5.16 Rækkeoperationers indflydelse på determinanten

Determinanten har følgende egenskaber:

1. Hvis alle elementer i en række i $\mathbf{A}$ er 0, så er determinanten 0, $\det(\mathbf{A}) = 0$.
2. Hvis to rækker ombyttes i $\mathbf{A}$, $R_i \leftrightarrow R_j$, så skifter determinanten fortegn.
3. Hvis alle elementerne i en række i $\mathbf{A}$ ganges med en konstant k, $k \cdot R_i$, så bliver determinanten ganget med k.
4. Hvis to rækker i en matrix $\mathbf{A}$ er ens, så er $\det(\mathbf{A}) = 0$.
5. En rækkeoperation af typen $R_j + k \cdot R_i$ hvor $i \neq j$ ændrer ikke determinanten.

Som antydet ovenfor følger det af disse egenskaber ved determinantfunktionen, at den velkendte reduktion af en given matrix $\mathbf{A}$ til trappeform, $\mathrm{trap}(\mathbf{A})$, via rækkeoperationer som beskrevet i eNote, faktisk *indeholder* en helt eksplicit beregning af determinanten af $\mathbf{A}$. Vi illustrerer med et simpelt eksempel:

|||| Eksempel 5.17 Inspektion af determinant ved reduktion til trappeform

Vi betragter $(3 \times 3)-$matricen $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$ fra eksempel 5.5:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \tag{5-15}$$

Vi reducererden til trappeform på sædvanlig måde med Gauss–Jordan rækkeoperationer og holder hele tiden øje med, hvad der sker med determinanten ved at bruge reglerne fra 5.16 (og ved eventuelt derudover at checke dem med direkte udregninger):
Operation: Ombyt række 1 og række 2, $R_1 \leftrightarrow R_2$: Determinanten skifter fortegn :

$$\det(\mathbf{A}_2) = -\det(\mathbf{A}_1) \quad : \tag{5-16}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \tag{5-17}$$

Operation: $\frac{1}{2}R_2$, række 2 ganges med $\frac{1}{2}$: Determinanten ganges med $\frac{1}{2}$:

$$\det(\mathbf{A}_3) = \frac{1}{2}\det(\mathbf{A}_2) = -\frac{1}{2}\det(\mathbf{A}_1) \quad : \tag{5-18}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \tag{5-19}$$

Operation: $R_1 - 3R_2$: Determinanten uændret:

$$\det(\mathbf{A}_4) = \det(\mathbf{A}_3) = \frac{1}{2}\det(\mathbf{A}_2) = -\frac{1}{2}\det(\mathbf{A}_1) \quad : \tag{5-20}$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \tag{5-21}$$

Operation: $R_3 - 5R_2$: Determinanten uændret:

$$\det(\mathbf{A}_5) = \det(\mathbf{A}_4) = \det(\mathbf{A}_3) = \frac{1}{2}\det(\mathbf{A}_2) = -\frac{1}{2}\det(\mathbf{A}_1) \ : \tag{5-22}$$

$$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{bmatrix} \tag{5-23}$$

Determinanten er nu diagonal-produktet fordi alle elementerne under diagonalen er 0, se sætning 5.13. Ialt har vi derfor:

$$-\frac{3}{2} = \det(\mathbf{A}_5) = \det(\mathbf{A}_4) = \det(\mathbf{A}_3) = \frac{1}{2}\det(\mathbf{A}_2) = -\frac{1}{2}\det(\mathbf{A}_1) \ : \tag{5-24}$$

Heraf direkte – ved at læse 'baglæns':

$$-\frac{1}{2}\det(\mathbf{A}_1) = -\frac{3}{2}\,, \tag{5-25}$$

således at

$$\det(\mathbf{A}_1) = 3\,. \tag{5-26}$$

Derudover har vi følgende sammenhæng mellem rang og determinant; determinanten afslører simpelthen, om matricen er singulær eller regulær:

|||| Sætning 5.18 Rang versus determinant

Rangen af en kvadratformet $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$ er skarpt mindre end n hvis og kun hvis determinanten af $\mathbf{A}$ er 0. Med andre ord, $\mathbf{A}$ er singulær hvis og kun hvis $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Hvis en matrix indeholder en variabel, en parameter, så er determinanten af matricen en funktion af denne parameter; i anvendelserne af matrix-algebra er det ofte ret afgørende at kunne finde nulpunkterne for den funktion – netop fordi den tilhørende matrix er singulær for de værdier af parameteren, så der måske ikke findes en (entydig) løsning til det tilsvarende lineære ligningssystem der har matricen som koefficientmatrix.

|||| Opgave 5.19 Determinant af matrix med variabel

Givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & 0 & a^2 & a^3 \\ 1 & a & a & a^3 \\ 1 & a & a^2 & a \end{bmatrix}, \text{ hvor } a \in \mathbb{R}. \tag{5-27}$$

1. Bestem determinanten af $\mathbf{A}$ som et polynomium i a.
2. Bestem rødderne i dette polynomium.
3. Find rangen af $\mathbf{A}$ for $a \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Hvad har rangen med de fundne rødder i determinanten at gøre?
4. Find rangen af $\mathbf{A}$ for alle a.

|||| Sætning 5.20 Regneregler for determinanter

Lad $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ betegne to $(n \times n)-$matricer. Så gælder:

1. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top)$
2. $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$
3. $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det(\mathbf{A}))^{-1}$, når blot $\mathbf{A}$ er regulær, altså $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
4. $\det(\mathbf{A}^k) = (\det(\mathbf{A}))^k$, for alle $k \geq 1$.
5. $\det(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})$, når blot $\mathbf{B}$ er regulær, det vil sige $\det(\mathbf{B}) \neq 0$.

|||| Opgave 5.21

Bevis de 3 sidste ligninger i sætning 5.20 ved at bruge ligningen $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$.

|||| Opgave 5.22 Determinanten af en sum er ikke determinantsummen

Vis med et simplest muligt eksempel, at determinant-funktionen det() *ikke* er additiv, altså find to $(n \times n)-$matricer $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ således at

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B}) \, . \tag{5-28}$$

|||| Opgave 5.23 Brug af regnereglerne for determinanter

Lad a betegne et reelt tal. Der er givet følgende matricer:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} . \tag{5-29}$$

1. Find $\det(\mathbf{A})$ og $\det(\mathbf{B})$.
2. Find $\det(\mathbf{A}\,\mathbf{B})$ og $\det\left((\mathbf{A}^\top\mathbf{B})^4\right)$.
3. Angiv de værdier af a, for hvilke $\mathbf{A}$ er regulær og find for disse værdier af a udtrykket for $\det(\mathbf{A}^{-1})$.

5.5 Advanced: Det karakteristiske polynomium

Materialet i dette afsnit hører beregningsteknisk naturligt hjemme i denne eNote om determinanter, men det er først senere – ved løsning af de såkaldte egenværdiproblemer, at vi virkelig får brug for de karakteristiske polynomier.

For en given kvadratformet matrix $\mathbf{A}$ defineres den tilhørende ***karakteristiske matrix*** og det tilhørende ***karakteristisk polynomium*** på følgende måde:

|||| Definition 5.24 Den karakteristiske matrix

Lad $\mathbf{A}$ være en $(n \times n)-$matrix. Den tilhørende *karakteristiske matrix* er følgende matrix-funktion af den reelle variable λ:

$$\mathbf{K_A}(\lambda) = \mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}\;,\;\text{hvor } \lambda \in \mathbb{R}\;, \tag{5-30}$$

hvor $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{n\times n} = \mathbf{diag}(1, 1, ..., 1)$ er $(n \times n)-$enhedsmatricen.

|||| Eksempel 5.25 En karakteristisk matrix

Givet en $(3 \times 3)-$matrix $\mathbf{A}$ ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} . \tag{5-31}$$

Så er

$$\mathbf{K_A}(\lambda) = \mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} . \tag{5-32}$$

Det tilhørende ***karakteristiske polynomium*** for matricen $\mathbf{A}$ er dernæst følgende reelle polynomium af variablen λ:

|||| Definition 5.26 Det karakteristiske polynomium

Givet den kvadratiske matrix $\mathbf{A}$, så defineres det karakteristiske polynomium for $\mathbf{A}$ således:

$$\mathcal{K}_\mathbf{A}(\lambda) = \det(\mathbf{K_A}(\lambda)) = \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E})\;,\;\text{hvor } \lambda \in \mathbb{R}\;. \tag{5-33}$$

|||| Eksempel 5.27 Et karakteristisk polynomium

Med **A** som i eksempel 5.25 får vi følgende karakteristiske polynomium for **A** ved at opløse den karakteristiske matrix efter sidste søjle:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (-1)^{3+3}(2-\lambda)\det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)\;.\end{aligned} \tag{5-34}$$

Det karakteristiske polynomium for **A** har altså rødderne 1, 2, og 3.

Det karakteristiske polynomium $\mathcal{K}_{\mathbf{A}}(\lambda)$ – og især de λ-værdier for hvilke $\mathcal{K}_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$, altså rødderne i polynomiet – spiller en afgørende rolle for forståelsen af og anvendelsen af **A**-matricens operative egenskaber, som vil blive beskrevet i eNoten om egenværdier og egenvektorer. Rødderne i det karakteristiske polynomium for en matrix kaldes matricens egenværdier.

|||| Opgave 5.28 Graden af det karakteristiske polynomium

Argumentér for, at det karakteristiske polynomium $\mathcal{K}_{\mathbf{A}}(\lambda)$ for en $(n \times n)-$matrix **A** er et polynomium i λ af graden n.

|||| Opgave 5.29 Nogle karakteristiske polynomier og deres rødder

Bestem de karakteristiske polynomier for følgende matricer og find alle reelle rødder i hvert af polynomierne:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\;,\; \mathbf{A}_2 = \mathbf{diag}(a_1, a_2, a_3)\;,\; \mathbf{A}_3 = \mathbf{bidiag}(b_1, b_2, b_3)\;. \tag{5-35}$$

|||| Opgave 5.30 Find matricer med givne karakter-egenskaber

Konstruér to (4×4)-matricer **A** og **B** sådan, at den ene har lutter reelle rødder i sit karakteristiske polynomium, og sådan at den anden ikke har nogen som helst reelle rødder i sit karakteristiske polynomium.

5.6 Advanced: Cramer's løsningsmetode

Hvis **A** er en regulær $n \times n$ matrix og $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)$ er en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^n$, så findes der (som det også er bekendt fra eNote (regulær koefficientmatrix)) præcis én løsning $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ til det lineære ligningssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ og vi har i den eNote fundet metoder til at finde løsningen.

Cramer's metode til løsning af sådanne ligningssystemer er en *direkte* metode. Den består essentielt i at udregne passende determinanter af matricer, der konstrueres ud fra **A** og **b** og så skrive løsningen ned direkte ud fra de beregnede determinanter.

|||| Sætning 5.31 Cramer's løsningsformel

Lad **A** være en regulær $n \times n$ matrix og lad $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)$ betegne en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^n$. Så findes der (som det også er bekendt fra eNote (regulær koefficient-matrix)) præcis én løsning $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ til det lineære ligningssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \,, \tag{5-36}$$

og elementerne i den løsning er givet ved:

$$x_j = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \det(\mathbf{A}\dagger_j^{\mathbf{b}}) \,, \tag{5-37}$$

hvor $\mathbf{A}\dagger_j^{\mathbf{b}}$ betegner den $(n \times n)-$matrix, der fremkommer ved at erstatte søjle j i **A** med **b**.

|||| Forklaring 5.32 Hvad † betyder

Hvis **A** er følgende matrix (fra eksempel 5.5)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \,, \tag{5-38}$$

og hvis vi lader $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, så er

$$\mathbf{A}\dagger_1^{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} b_1 & 2 & 1 \\ b_2 & 3 & 2 \\ b_3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \,, \; \mathbf{A}\dagger_2^{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 1 \\ 1 & b_2 & 2 \\ 0 & b_3 & 1 \end{bmatrix} \,, \; \mathbf{A}\dagger_3^{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & b_1 \\ 1 & 3 & b_2 \\ 0 & 5 & b_3 \end{bmatrix} \,. \tag{5-39}$$

|||| Opgave 5.33 Brug af Cramer's løsningsformel

Hvis vi specielt lader $\mathbf{A}$ være den samme matrix som ovenfor og nu helt konkret lader $\mathbf{b} = (1, 3, 2)$, så får vi ved at indsætte $\mathbf{b}$ i (5-39) og dernæst udregne de relevante determinanter:

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}\dagger_1^{\mathbf{b}}) &= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4 \\
\det(\mathbf{A}\dagger_2^{\mathbf{b}}) &= \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \\
\det(\mathbf{A}\dagger_3^{\mathbf{b}}) &= \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}\right) = 1 \, .
\end{aligned} \tag{5-40}$$

Da vi også kender $\det(\mathbf{A}) = 3$ har vi nu konstrueret løsningen til ligningssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, via (5-37):

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{3} \cdot 4, \frac{1}{3} \cdot 1, \frac{1}{3} \cdot 1\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \, . \tag{5-41}$$

1. Tjek ved direkte indsættelse, at $\mathbf{x}$ er en løsning til $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
2. Bestem $\mathbf{A}^{-1}$ og brug den direkte til løsning af ligningssystemet.
3. Løs ligningssystemet ved reduktion af totalmatricen til trappeform som øvet i eNote og efterfølgende aflæsning af løsningen.

For at vise hvad der faktisk foregår i Cramer's løsningsformel definerer vi først den ***adjungerede matrix*** for en matrix $\mathbf{A}$:

|||| Definition 5.34 Den adjungerede matrix

Den adjungerede matrix $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$ defineres ved de elementer, som benyttes i definitionen 5.6 af determinanten for $\mathbf{A}$:

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det(\widehat{\mathbf{A}}_{11}) & \cdot & \cdot & (-1)^{1+n}\det(\widehat{\mathbf{A}}_{1n}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-1)^{n+1}\det(\widehat{\mathbf{A}}_{n1}) & \cdot & \cdot & (-1)^{n+n}\det(\widehat{\mathbf{A}}_{nn}) \end{bmatrix}^{\top} \tag{5-42}$$

Med andre ord: elementet på plads (j, i) i den adjungerede matrix $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$ er den fortegns-modificerede determinant af $(i, j)-$snitmatricen, altså: $(-1)^{i+j}\det(\widehat{\mathbf{A}}_{ij})$. Bemærk transponeringen i (5-42).

Eksempel 5.35 En adjungeret matrix

Matricen **A** i eksempel 5.5 har følgende adjungerede matrix:

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -7 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad . \tag{5-43}$$

Den fås direkte ud fra tidligere beregning af snitmatrix-determinanterne, idet vi husker, dels at de enkelte elementer skal have et fortegn, der afhænger af 'pladsen', og dels at udtrykket (5-42) involverer en transponering.

$$\begin{aligned} &\det(\widehat{\mathbf{A}}_{11}) = -7\,, \det(\widehat{\mathbf{A}}_{12}) = 1\,, \quad \det(\widehat{\mathbf{A}}_{13}) = 5\,, \\ &\det(\widehat{\mathbf{A}}_{21}) = -3\,, \det(\widehat{\mathbf{A}}_{22}) = 0\,, \quad \det(\widehat{\mathbf{A}}_{23}) = 0\,, \\ &\det(\widehat{\mathbf{A}}_{31}) = 1\,, \quad \det(\widehat{\mathbf{A}}_{32}) = -1\,, \det(\widehat{\mathbf{A}}_{33}) = -2\,. \end{aligned} \tag{5-44}$$

Opgave 5.36 Adjungeret versus invers matrix

Vis, at alle kvadratiske matricer **A** opfylder følgende

$$\mathbf{A}\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\mathbf{E} \tag{5-45}$$

sådan, at den inverse matrix til **A** (som jo findes netop hvis $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ kan findes på følgende måde:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\operatorname{adj}(\mathbf{A}) \quad . \tag{5-46}$$

Vink: Opgaven er ikke helt nem. Det anbefales, at man først øver sig på en (2×2)-matrix. Nullerne i enhedsmatricen i ligning (5-45) fås ved at bruge den egenskab, at determinanten af en matrix med to ens søjler er 0.

Beviset for sætning 5.31 er nu ganske kort:

|||| Bevis

Ved at gange på begge sider af ligningen (5-36) med $\mathbf{A}^{-1}$, og ved at betegne elementerne i $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$ med α_{ij}, fås:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\operatorname{adj}(\mathbf{A})\mathbf{b} \\
&= \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \cdot & \alpha_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ji}b_i \\
&= \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}b_i\det(\widehat{\mathbf{A}}_{ij}) \\
&= \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\det(\mathbf{A}\dagger_j^{\mathbf{b}})\ ,
\end{aligned}
\tag{5-47}
$$

hvor vi til etablering af det sidste lighedstegn har benyttet, at

$$
\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}b_i\det(\widehat{\mathbf{A}}_{ij})
\tag{5-48}
$$

lige præcis er opløsningen af $\det(\mathbf{A}\dagger_j^{\mathbf{b}})$ efter *søjle* nummer j, altså $\mathbf{b}$-søjlen i $\det(\mathbf{A}\dagger_j^{\mathbf{b}})$, se definitionen i ligning (5-10).

■

5.7 Opsummering

- Determinanten af en *kvadratisk matrix med reelle elementer* er et reelt tal, som beregnes ud fra de n^2 elementer i matricen, enten ved række- eller søjle-opløsning eller via inspektion af Gauss-Jordan processen til trappeform. Ved opløsning er ideen at bruge en række eller en søjle i matricen med mange 0-elementer. O-pløsningen efter f.eks. række nummer r foregår induktivt efter følgende formel, som udtrykker determinanten som en sum af 'mindre' determinanter (med passende fortegn), se definition 5.6:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{r+j} a_{rj} \det(\widehat{\mathbf{A}}_{rj}) \quad , \tag{5-49}$$

  hvor $\widehat{\mathbf{A}}_{rj}$ er den undermatrix, ´dvs. den snitmatrix, der fremkommer ved at fjerne række r og søjle j fra matricen $\mathbf{A}$, se definition 5.4.

- Der findes bekvemme regneregler for beregning af determinanter af produkter af matricer, determinanten af den inverse matrix, og determinanten af den transponerede matrix. Se sætning 5.20. De vigtigste regneregler er produkt-formlen

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$$

  og transponerings-formlen

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top) \quad .$$

- Determinanten af en kvadratisk matrix, der indeholder en variabel, er en funktion af den variable. Det karakteristiske polynomium er en sådan meget vigtig funktion: $\mathcal{K}_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ er et n'te grads polynomium i den variable λ, se definition 5.26.

- Cramer's løsningsformel giver den direkte vej (via beregning af determinanter) til løsningen af et inhomogent lineært ligningssystem med regulær koefficientmatrix, se sætning 5.31. Hvis ligningssystemet er

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \; , \tag{5-50}$$

  så er løsningen givet ved:

$$x_j = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \det(\mathbf{A}\dagger_j^{\mathbf{b}}) \quad , \tag{5-51}$$

  hvor $\mathbf{A}\dagger_j^{\mathbf{b}}$ betegner den matrix der fremkommer ved at erstatte søjle j i matricen $\mathbf{A}$ med $\mathbf{b}$.

eNote 6

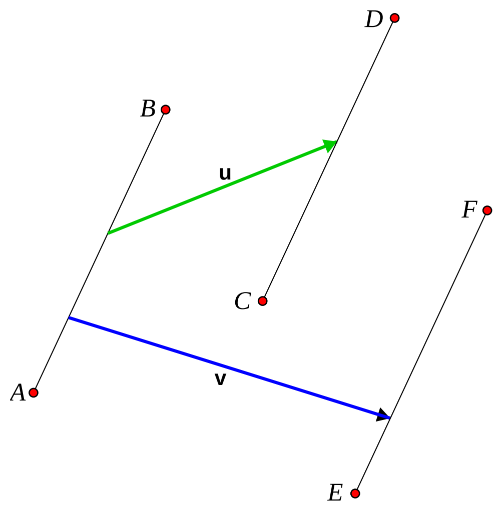
Geometriske vektorer

Formålet med denne note er at give en introduktion til geometriske vektorer i planen og rummet, som sigter mod at introducere en række af de metoder der gør sig gældende i den generelle vektorrumsteori. Nøglebegreberne er her basis og koordinater. Noten forudsætter kendskab til elementær plan- og rumgeometri, til lineære ligningssystemer som beskrevet i eNote og til matrixalgebra som beskrevet i eNote.

Ved en ***geometrisk vektor*** i planen eller rummet forstås et sammenhørende par bestående af en *længde* og en *retning*. Geometriske vektorer skrives med små fede bogstaver, for eksempel $\mathbf{v}$. En vektor kan repræsenteres af et ***orienteret linjestykke*** med et givet begyndelsespunkt og endepunkt. Hvis vektoren $\mathbf{v}$ er repræsenteret af det orienterede linjestykke fra begyndelsespunktet A til endepunktet B, benytter vi skrivemåden $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$. Alle orienterede linjestykker som har samme længde og retning som det orienterede linjestykke fra A til B, er også repræsentanter for $\mathbf{v}$.

Eksempel 6.1 Parallelforskydninger ved hjælp af vektorer

Geometriske vektorer kan benyttes til at angive ***parallelforskydninger*** i planen eller rummet. På figur 6.1 er linjestykket CD fremkommet af linjestykket AB ved at alle punkterne på AB er blevet forskudt med vektoren $\mathbf{u}$. På samme måde er linjestykket EF fremkommet af AB ved parallelforskydning med vektoren $\mathbf{v}$.



Figur 6.1: Parallelforskydning ved hjælp af vektorer

Der gælder at $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, men bemærk for eksempel også at $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{FE}$.

I det følgende forudsætter vi at der er valgt et *enhedslinjestykke*, det vil sige et linjestykke der tillægges længden 1. Ved $|\mathbf{v}|$ forstås længden af vektoren $\mathbf{v}$ set i forhold til længden af enhedslinjestykket, det vil sige et reelt tal. Alle vektorer som har samme længde som enhedslinjestykket kaldes ***enhedsvektorer***.

Af praktiske grunde indføres der en vektor uden længde og retning, den kaldes ***nulvektoren*** og skrives $\mathbf{0}$. For ethvert punkt A gælder der at $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$. En vektor, som ikke nulvektoren, kaldes for en *egentlig* vektor.

Det er ofte praktisk at benytte et fælles begyndelsespunkt når forskellige vektorer skal repræsenteres af orienterede linjestykker. Man vælger derfor et fast punkt O, kaldet *origo*, og betragter de repræsentanter for vektorerne som har O som sit begyndelsespunkt. Vektorer som er repræsenteret på denne måde kaldes ***stedvektorer***, fordi der til enhver given vektor $\mathbf{v}$ hører ét unikt punkt (eller sted) P der opfylder at $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$. Tilsvarende hører der til ethvert punkt Q én unik vektor $\mathbf{u}$ således at $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{u}$.

Ved *vinklen mellem to egentlige vektorer i planen* forstår man vinklen mellem deres repræsentanter udgående fra O. Hvis en vektor $\mathbf{v}$ i planen drejes vinklen $\pi/2$ mod uret, fremkommer en ny vektor der kaldes $\mathbf{v}$'s tværvektor, den betegnes $\widehat{\mathbf{v}}$.

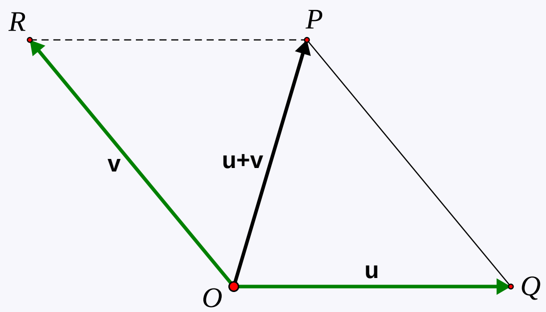
Ved *vinklen mellem to egentlige vektorer i rummet* forstås vinklen mellem mellem deres repræsentanter udgående fra O i den plan som indeholder repræsentanterne.
Det giver god og brugbar mening "at lægge vektorer sammen", man skal da både respektere vektorernes længde og deres retning. Vi vil derfor i det følgende indføre nogle regneoperationer for geometriske vektorer. I første omgang drejer det sig om de to *lineære regneoperationer*, addition af vektorer og multiplikation af vektor med en skalar (et reelt tal). Senere skal vi se på tre forskellige måder at multiplicere vektorer med hinanden på, nemlig *prikprodukt*, og for rumvektorer *krydsprodukt* og et *rumprodukt*.

6.1 Addition og multiplikation med skalar

|||| Definition 6.2 Addition

Der er givet to vektorer i planen eller rummet, $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Summen $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ fastlægges ved følgende metode:

- Vi vælger origo O og afsætter stedvektorerne $\mathbf{u} = \overrightarrow{OQ}$ og $\mathbf{v} = \overrightarrow{OR}$.
- Ved parallelforskydning af linjestykket OR med $\mathbf{u}$ fremkommer linjestykket QP.
- $\overrightarrow{OP}$ er da stedvektor for summen af $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, kort sagt $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$.



Figur 6.2: Addition af to vektorer

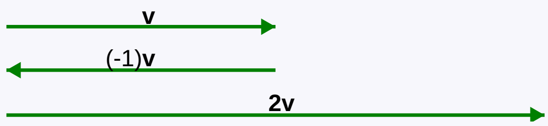
I fysik taler man om "kræfternes parallelogram": Hvis objektet O er påvirket af kræfterne $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, kan den *resulterende kraft* bestemmes som sumvektoren $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, hvis retning angiver den resulterende krafts retning, og hvis længde angiver kraftens størrelse. Hvis specielt $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ har samme længde, men modsat retning, er den resulterende kraft lig med $\mathbf{0}$-vektoren.

Vi indfører herefter multiplikation af vektor med skalar:

|||| Definition 6.3 Multiplikation med skalar

Der er givet en vektor $\mathbf{v}$ i planen eller rummet og en skalar k. Hvis $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, sætter vi $k\mathbf{v} = \mathbf{v}k = \mathbf{0}$. I modsat forstås der ved produktet $k\mathbf{v}$ følgende:

- Hvis $k > 0$, så er $k\mathbf{v} = \mathbf{v}k$ den vektor som har samme retning som $\mathbf{v}$, og som er k gange så lang som $\mathbf{v}$.
- Hvis $k = 0$, så er $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- Hvis $k < 0$, så er $k\mathbf{v} = \mathbf{v}k$ den vektor som har den *modsatte retning* af $\mathbf{v}$, og som er $-k = |\,k\,|$ gange så lang som $\mathbf{v}$.

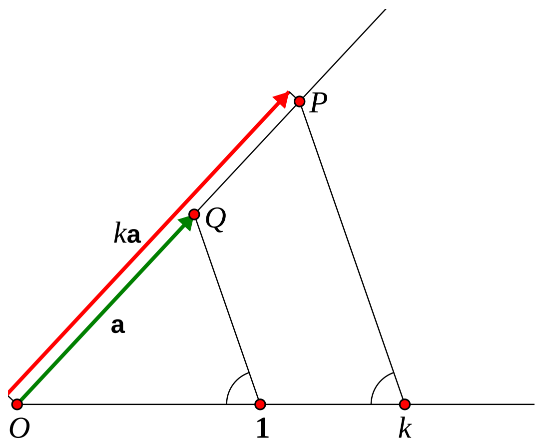


Figur 6.3: Multiplikation af $\mathbf{v}$ med -1 og 2

Ved $-\mathbf{u}$ forstås vektoren $(-1)\mathbf{u}$, og ved $-5\,\mathbf{v}$ vektoren $(-5)\,\mathbf{v}$.

|||| Eksempel 6.4 Geometrisk multiplikation

Der er givet en vektor $\mathbf{a}$ og et linjestykke med længden k, vi ønsker at konstruere vektoren $k\mathbf{a}$.



Figur 6.4: Multiplikation af vektor med vilkårlig skalar

Først afsættes $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{a}$. Derefter indlægges der med O som begyndelsespunkt en målelinje (lineal) som ikke er parallel med $\mathbf{a}$, og hvor tallene 1 og k er afsat. Trekanten OkP tegnes så den er ensvinklet med trekanten $O1Q$. Da de to trekanter er ensvinklede, må der gælde at $k\mathbf{a} = \overrightarrow{OP}$.

Opgave 6.5

Der er på et stykke papir givet to parallelle vektorer **a** og **b** samt en målelinje. Find ved konstruktion et linjestykke som har længden k, og som opfylder at $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$.

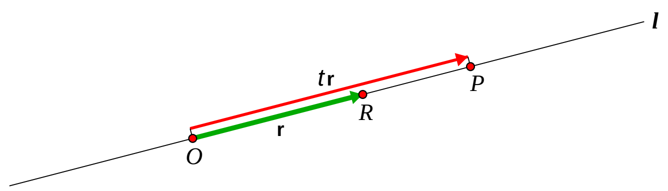
Opgave 6.6

Der er på papiret givet en egentlig vektoren **v**, og der er givet en målelinje (lineal). Tegn vektoren $\frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$.

Parameterfremstillinger for rette linjer i planen eller rummet opstilles ved hjælp af egentlige vektorer. Nedenfor giver vi først et eksempel på en linje der går gennem origo, dernæst et eksempel på en linje der ikke gør det.

Eksempel 6.7 Parameterfremstilling for ret linje

Der er givet en ret linje l som går gennem origo, vi ønsker at beskrive linjen ved hjælp af en ***parameterfremstilling***:



Figur 6.4: Parameterfrestilling for linje gennem origo

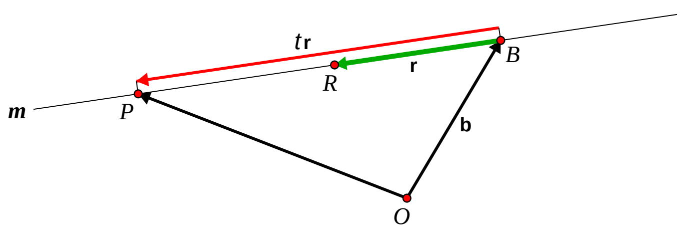
Der vælges et punkt R på l som ikke er det samme som origo. Vektoren $\mathbf{r} = \overrightarrow{OR}$ kaldes en ***retningsvektor*** for l. Til ethvert punkt P på l svarer der netop et reelt tal t der opfylder at $\overrightarrow{OP} = t\mathbf{r}$. Og når t *gennemløber* de reelle tal fra $-\infty$ til $+\infty$, vil P *gennemløbe* hele l i den retning som er bestemt ved **r**. Man siger at

$$\{\, P \mid \overrightarrow{OP} = t\mathbf{r} \text{ hvor } t \in \mathbb{R} \,\}$$

er en parameterfremstilling for l.

Eksempel 6.8 Parameterfremstilling for ret linje

Linjen m går ikke gennem origo, vi ønsker at beskrive m ved hjælp af en parameterfremstilling:



Figur 6.5: Parameterfremstilling for linje

Først vælges et *begyndelsespunkt* B på m, og vi sætter $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$. Dernæst vælges et punkt $R \in m$ som ikke er det samme som B. Vektoren $\mathbf{r} = \overrightarrow{BP}$ er da en retningsvektor for m. Til ethvert punkt P på m svarer der netop ét reelt tal t der opfylder at $\overrightarrow{OP} = \mathbf{b} + t\mathbf{r}$. Og når t *gennemløber* de reelle tal fra -∞ til +∞, vil P *gennemløbe* hele m i den retning som er bestemt ved $\mathbf{r}$. Man siger at

$$\{\, P \mid \overrightarrow{OP} = \mathbf{b} + t\mathbf{r} \text{ hvor } t \in \mathbb{R} \,\}$$

er en parameterfremstilling for m.

Parameterfremstillinger kan også bruges til at beskrive linjestykker, det er emnet for den følgende opgave.

|||| Opgave 6.9

Betragt situationen i eksempel 6.8. Indtegn det orienterede linjestykke som har parameterfremstillingen

$$\{\, P \mid \overrightarrow{OP} = \mathbf{b} + t\mathbf{b}, \text{ hvor } t \in [\,-1; 2\,] \,\}.$$

Vi får brug for mere avancerede regneregler for addition af geometriske vektorer og multiplikation af geometriske vektorer med skalarer end dem vi har givet eksempler for ovenfor. De ridses op i den følgende sætning, og vi diskuterer bagefter eksempler på hvordan de kan begrundes ud de allerede definerede regneoperationer og sætninger kendt fra elementær geometri.

|||| Sætning 6.10 Regneregler

For vilkårlige geometriske vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ og for vilkårlige reelle tal k_1 og k_2 gælder følgende regneregler:

1.	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	Addition er kommutativ
2.	$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$	Addition er associativ
3.	$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$	Nulvektoren er neutral ved addition
4.	$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$	Alle geometriske vektorer har en modsat vektor
5.	$k_1(k_2\mathbf{u}) = (k_1k_2)\mathbf{u}$	Produkt med skalarer er associativ
6.	$(k_1 + k_2)\mathbf{u} = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{u}$	De distributive regler gælder
7.	$k_1(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k_1\mathbf{u} + k_1\mathbf{v}$	
8.	$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$	Skalaren 1 er neutral i produkt med vektorer

Det er ikke nødvendigt at indføre højtidelige definitioner for *subtraktion* af vektorer og *division* af vektor med skalar, vi kan nemlig betragte dem som varianter af addition og multiplikation med skalar i kraft af omskrivningerne:

$$\text{Subtraktion :} \qquad \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$$

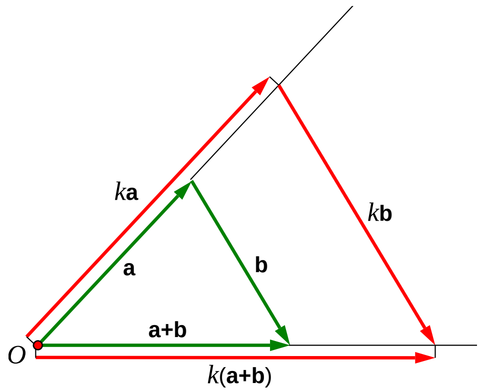
$$\text{Division med skalar :} \qquad \frac{\mathbf{v}}{k} = \frac{1}{k} \cdot \mathbf{v}$$

Regnereglerne i sætning 6.10 kan illustreres/eftervises ved hjælp af geometriske konstruktioner. Lad os som eksempel tage den første regel, den kommutative lov. Her behøver vi blot igen at rette blikket mod figur 6.2 i definition 6.2, hvor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ er konstrueret. Hvis vi nu konstruerer $\mathbf{v} + \mathbf{u}$, skal vi parallelforskyde linjestykket OQ med v og betragte det fremkomne linjestykke RP_2. Der må gælde at parallelogrammet $OQPR$ er identisk med parallelogrammet OQP_2R hvorfor $P_2 = P$ og dermed $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

I de følgende to opgaver opfordres læseren til selv at redegøre for to af de andre regneregler.

|||| Opgave 6.11

Gør ved hjælp af figur 6.6 rede for regnereglen $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$.



Figur 6.6

|||| Opgave 6.12

Tegn en figur som illustrerer regnereglen $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

6.2 Linearkombinationer

En pointe ved regnereglen $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ fra sætning 6.10 er at man udelade parenteser når man skal addere en række vektorer, da det ingen betydning har for den resulterende vektor, i hvilken rækkefølge man har lagt vektorerne sammen. Dette er baggrunden *linearkombinationer* hvor et sæt af vektorer er multipliceret med skalarer og derefter er opskrevet som en sum.

|||| Definition 6.13 Linearkombination

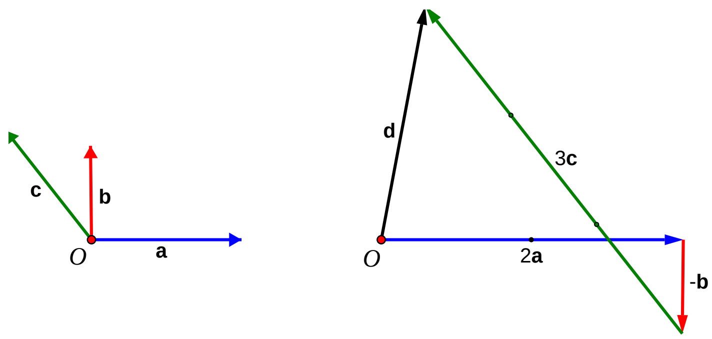
Når der er givet reelle tal $k_1, k_2, \ldots, k_n$ og i planen eller rummet vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ så kaldes summen

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n$$

en ***linearkombination*** af de n givne vektorer.

Hvis alle koefficienterne $k_1, \cdots, k_n$ er lig med 0, kaldes linearkombinationen *uegentlig*, men hvis blot én af dem er forskellig fra 0, er den *egentlig*.

|||| Eksempel 6.14 Konstruktion af en linearkombination

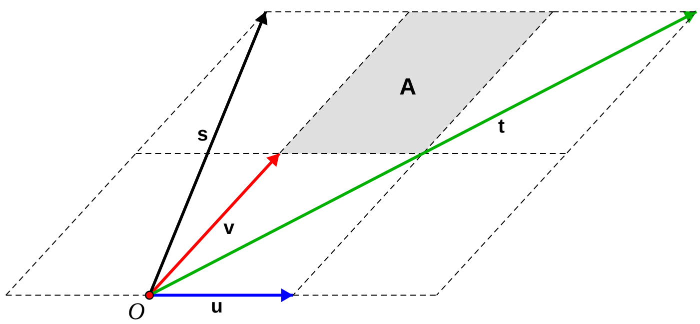


Figur 6.7: Konstruktion af linearkombination

På figur 6.7 til venstre er vektorerne **a**, **b** og **c** indtegnet. På figuren til højre har vi konstrueret linearkombinationen $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$.

|||| Opgave 6.15

Der er i planen givet vektorerne **u**, **v**, **s** og **t**, samt parallelogrammet A, se figur 6.8.



Figur 6.8: Linearkombinationer

1. Opskriv **s** som en linearkombination af **u** og **v**.
2. Vis at **v** kan udtrykkes ved linearkombinationen $\mathbf{v} = \frac{1}{3}\mathbf{s} + \frac{1}{6}\mathbf{t}$.

3. Indtegn linearkombinationen $\mathbf{s} + 3\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

4. Bestem reelle tal a, b, c og d således at A kan beskrives ved *parameterfremstillingen*

$$A = \{\, P \mid \overrightarrow{OP} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} \text{ hvor } x \in [\, a;\, b\,] \text{ og } y \in [\, c;\, d\,] \}\,.$$

6.3 Lineær afhængighed og lineær uafhængighed

Hvis to vektorer kan bringes til at ligge på den samme rette linje, siger man at de er *lineært afhængige*. Det er klart at to egentlige vektorer er lineært afhængige hvis de er parallelle, i modsat fald er de *lineært uafhængige*. Mere præcist kan vi sig om vektorerne $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ at de er lineært afhængige hvis den ene af dem fremkommer af den anden ved multiplation med en skalar, hvis der for eksempel findes et tal k, så $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$. Denne oprindelige betydning af begreberne lineær afhængighed og uafhængighed ønsker vi at generalisere sådan at begreberne kan bruges om et vilkårligt sæt af vektorer. Hvis en vektor i et sæt kan skrives som en linearkombination af de øvrige, er vektorerne lineært afhængige, se den følgende definition.

|||| Definition 6.16 Lineær afhængighed og uafhængighed

Et sæt af vektorer $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ kaldes ***lineært afhængigt*** hvis mindst én af vektorerne kan skrives som en linearkombination af de øvrige, for eksempel

$$\mathbf{v}_1 = k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n.$$

Hvis ingen af vektorerne kan skrives som en linearkombination af de øvrige, kaldes sættet for ***lineært uafhængigt***.

NB: Et sæt som kun består af én vektor, kaldes for lineært afhængigt hvis vektoren er $\mathbf{0}$-vektoren, og ellers lineært uafhængigt.

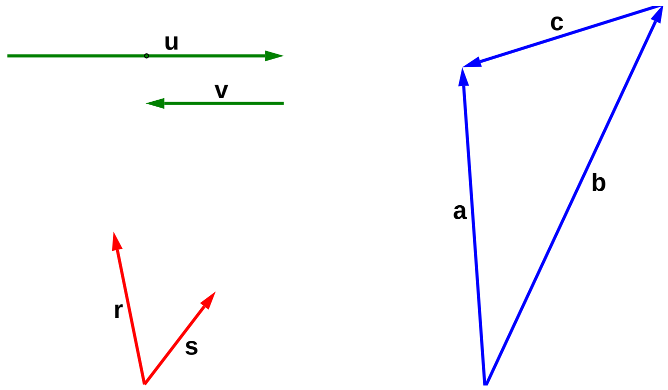
|||| Eksempel 6.17 Lineært afhængigt sæt

Ethvert vektorsæt som indeholder nul-vektoren, er det lineært afhængigt. Betragt for eksempel sættet $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{0}, \mathbf{w})$. Det er oplagt at nul-vektoren kan skrives som linearkombination af de øvrige tre vektorer:

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w}\,,$$

hvor nul-vektoren er skrevet som en linearkombination af de øvrige vektorer i sættet.

|||| Opgave 6.18



Figur 6.9

Undersøg for hvert at vektorsættene $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ og $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ om de er lineært uafhængige, og skriv i modsat fald en af vektorerne i sættet som en linearkombination af de øvrige.

|||| Opgave 6.19

Gør rede for at tre vektorer i rummet er lineært afhængige, hvis og hvis de kan bringes til at ligge i den samme plan. Hvilke betingelser må tre vektorer i rummet opfylde for at de er lineært uafhængige?

|||| Opgave 6.20

Overvej det maksimale antal vektorer er som et vektorsæt i planen kan rumme, hvis sættet skal være lineært uafhængigt. Samme spørgsmål for rummet.

Når man skal undersøge om et sæt af vektorer er lineært afhængigt, kan det være uhensigtsmæssigt at man ikke på forhånd ved hvilken af dem der eventuelt er en linearkombination af de øvrige. Det kan da være nemmere at bruge den følgende sætning:

|||| Sætning 6.21 Lineær afhængighed og uafhængighed

At et vektorsæt $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ er lineært afhængigt, er ensbetydende med at nulvektoren kan skrives som en egentlig linearkombination af vektorerne. Der skal altså findes reelle tal $k_1, k_2, \ldots, k_n$ som ikke alle er lig med 0, og som opfylder

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}\,. \tag{6-1}$$

|||| Bevis

Vi antyder beviset ved hjælp af et par eksempler.

Antag det er vist at sættet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er lineært afhængigt fordi

$$\mathbf{c} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}.$$

Men så kan nul-vektoren fremstillet ved linearkombinationen

$$2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Antag omvendt at

$$2\mathbf{u} - 2\mathbf{v} + 3\mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

så har vi (for eksempel) at

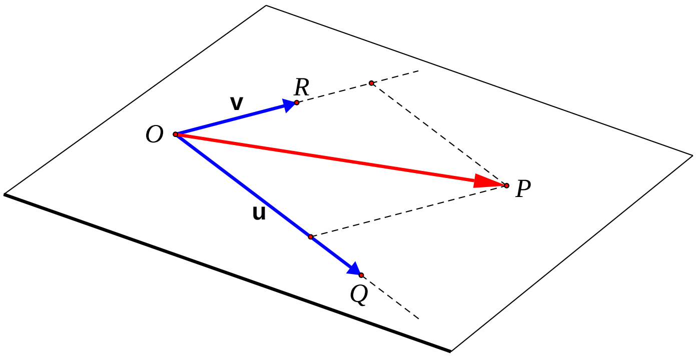
$$\mathbf{w} = -\frac{2}{3}\mathbf{u} + \frac{2}{3}\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

■

Parameterfremstillinger for planer i rummet opstilles ved hjælp af to lineært uafhængige vektorer. Nedenfor giver vi først et eksempel på en plan der indeholder origo, dernæst et eksempel på en plan der ikke indeholder origo.

|||| Eksempel 6.22 Parameterfremstilling for plan

Der er givet en plan i rummet som går gennem origo, se figur 6.10. Vi ønsker at beskrive planen ved hjælp af en ***parameterfremstilling***.



Figur 6.10: En plan i rummet gennem origo

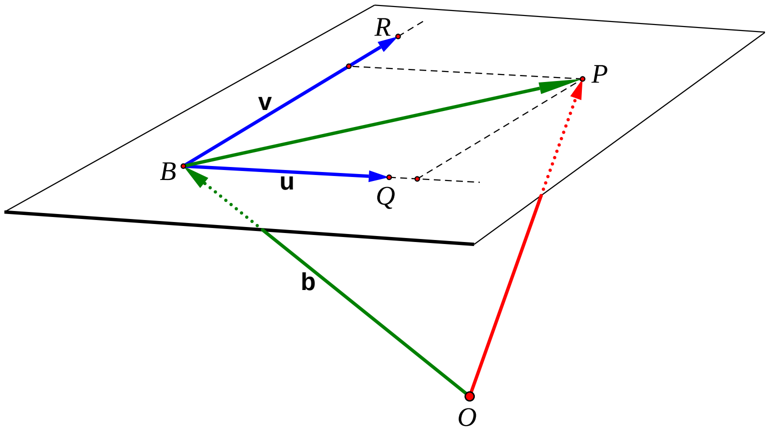
På den givne plan vælges to punkter Q og R som ikke er origo, og som ikke ligger på en fælles linje gennem origo. Vektorerne $\mathbf{u} = \overrightarrow{OQ}$ og $\mathbf{v} = \overrightarrow{OR}$ vil da være lineært uafhængige, og kaldes for planens ***retningsvektorer***. Til ethvert punkt P på planen findes der netop ét reelt talpar (s, t) således at $\overrightarrow{OP} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$, og man siger at

$$\{P \mid \overrightarrow{OP} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}\,;\ (s,t) \in \mathbb{R}^2\}$$

er en parameterfremstilling af den givne plan.

|||| Eksempel 6.23 Parameterfremstilling for plan

En plan i rummet går ikke gennem origo, vi ønsker at beskrive den ved hjælp af en parameterfremstilling.



Figur 6.11: En plan i rummet

Først vælges der et begyndelsespunkt B på planen, og vi sætter $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$. Dernæst vælges der to lineært uafhængige retningsvektorer $\mathbf{u} = \overrightarrow{BQ}$ og $\mathbf{v} = \overrightarrow{BR}$ hvor Q og R ligger på planen. Til ethvert punkt P på planen findes der så netop ét reelt talpar (s, t), således at

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = \mathbf{b} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}\,,$$

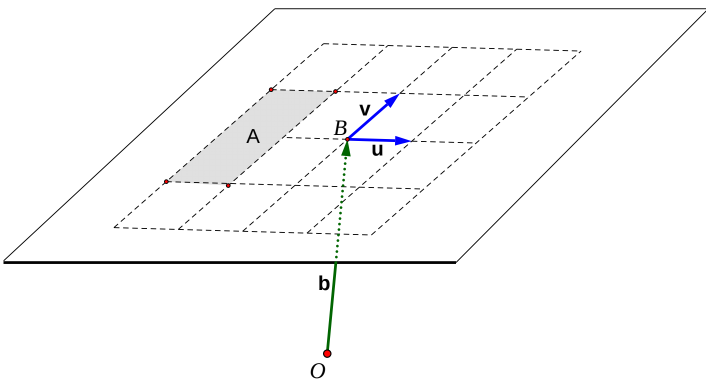
og man siger at

$$\{P \mid \overrightarrow{OP} = \mathbf{b} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}\,;\ (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

er en parameterfremstilling for den givne plan.

|||| Opgave 6.24

Giv en parameterfremstilling for det i planen liggende parallelogram A:



Figur 6.12

6.4 De sædvanlige baser i planen og rummet

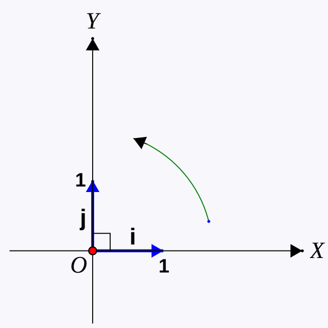
I den *analytiske geometri* viser man hvordan tal og ligninger kan beskrive geometriske objekter og fænomener, herunder vektorer. Her er begrebet koordinater afgørende. Det handler om hvordan vi kan fastlægge de geometriske objekters placering i rummet og i forhold til hinanden ved hjælp af tal og talsæt. For at få grundlaget i orden skal vi vælge et vist antal vektorer, som vi udnævner til ***basisvektorer***. Basisvektorerne ***ordnes***, det vil sige forsynes med en bestemt rækkefølge, og de udgør derefter en ***basis***. Når en basis er givet, kan alle vektorer beskrives ved hjælp af koordinater, som vi samler i såkaldte koordinatvektorer. Hvordan hele denne procedure foregår, udfolder vi først gennem de sædvanlige ortonormale baser i planen og rummet. Senere kommer vi ind på at det ofte kan være hensigtsmæssigt at benytte andre baser end de sædvanlige, og hvordan relationen mellem en vektors koordinater er i forskellige baser.

|||| Definition 6.25 Standardbasen i planen

Ved ***standardbasis*** eller ***e-basis*** for de geometriske vektorer i planen forstås et ordnet sæt af to vektorer $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ som opfylder:

- $\mathbf{i}$ og $\mathbf{j}$ har begge længden 1.
- $\mathbf{i}$ og $\mathbf{j}$ er ortogonale.
- Stedvektoren for $\mathbf{j}$ fremkommer når stedvektoren for $\mathbf{i}$ drejes omkring origo med vinklen $\frac{\pi}{2}$ mod uret.

Når $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ er en e-basis, forstås ved et $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$-koordinatsystem et sædvanligt (X, Y)-koordinatsystem hvor X-aksen har origo som startpunkt og $\mathbf{i}$ som retningsvektor, mens Y-aksen har origo som startpunkt og $\mathbf{j}$ som retningsvektor.



Figur 6.13: Standardbasen i planen

|||| Sætning 6.26 En vektors e-koordinater

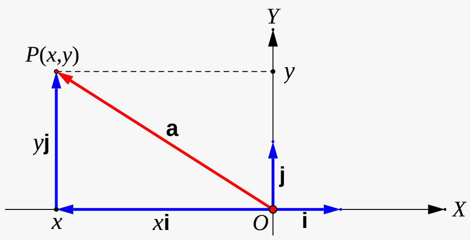
Når $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ er en e-basis, kan enhver vektor $\mathbf{v}$ i planen på netop én måde skrives som en linearkombination af $\mathbf{i}$ og $\mathbf{j}$:

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Koefficienterne x og y i linearkombinationen kaldes for $\mathbf{v}$'s *koordinater med hensyn til e-basis*, eller kortere $\mathbf{v}$'s e-koordinater, og de samles i en ***koordinatvektor*** med følgende skrivemåde:

$$_{\mathrm{e}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

|||| Bemærkning 6.27 Et punkts koordinater



Figur 6.14

På figuren er der i et $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$-koordinatsystem afsat en vilkårlig vektor $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP}$. Da $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, og da $|x\mathbf{i}| = |x|$ og $|y\mathbf{j}| = |y|$, ser vi at koordinaterne for $\mathbf{a}$ med hensyn til e-basis er identiske med koordinaterne for punktet P, endepunktet for $\mathbf{a}$'s stedvektor. Et punkt har kort sagt de samme koordinater som dets tilhørende stedvektor.

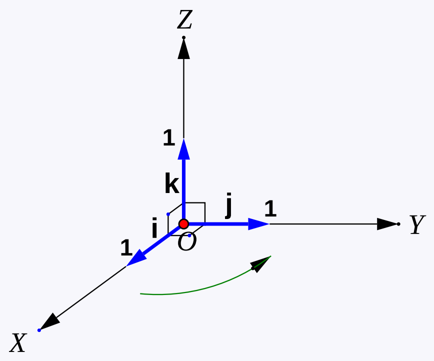
Indføringen af sædvanlig ortonormal basis og koordinater for vektorer i rummet foregår som en simpel udvidelse af den tilsvarende i planen.

|||| Definition 6.28 Standardbasen i rummet

Ved ***standardbasis*** eller ***e-basis*** for de geometriske vektorer i rummet forstås et ordnet sæt af tre vektorer $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ som opfylder:

- $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$ har alle længden 1.
- $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$ er parvist ortogonale.
- Når $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$ afsættes ud fra origo, og når vi betragter $\mathbf{i}$ og $\mathbf{j}$ fra endepunktet af $\mathbf{k}$, så overgår $\mathbf{i}$ i $\mathbf{j}$, når $\mathbf{i}$ drejes omkring origo med vinklen $\frac{\pi}{2}$ mod uret.

Når $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ er en e-basis, forstås ved et $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$-koordinatsystem et sædvanligt (X, Y, Z)-koordinatsystem hvor X-aksen har origo som startpunkt og $\mathbf{i}$ som retningsvektor, Y-aksen har origo som startpunkt og $\mathbf{j}$ som retningsvektor, og Z-aksen har origo som startpunkt og $\mathbf{k}$ som retningsvektor.



Figur 6.15: Standardbasen i rummet

|||| Sætning 6.29 En vektors e-koordinater

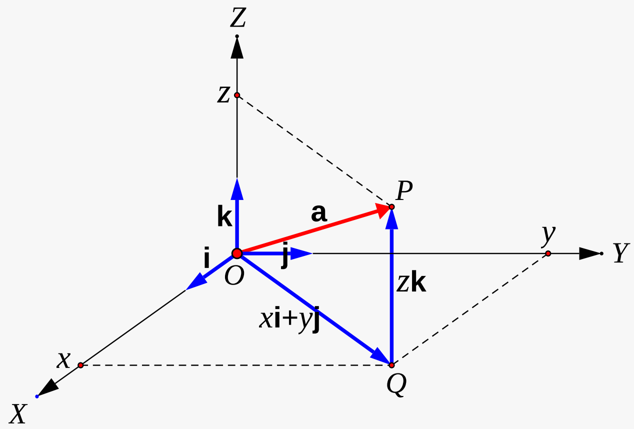
Når $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ er en e-basis, kan enhver vektor $\mathbf{v}$ i rummet på netop én måde skrives som en linearkombination af $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Koefficienterne x, y og z i linearkombinationen kaldes for $\mathbf{v}$'s *koordinater med hensyn til e-basis*, eller kortere $\mathbf{v}$'s e-koordinater, og de samles i en ***koordinatvektor*** med følgende skrivemåde:

$${}_{\mathrm{e}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

|||| **Bemærkning 6.30 Et punkts koordinater**

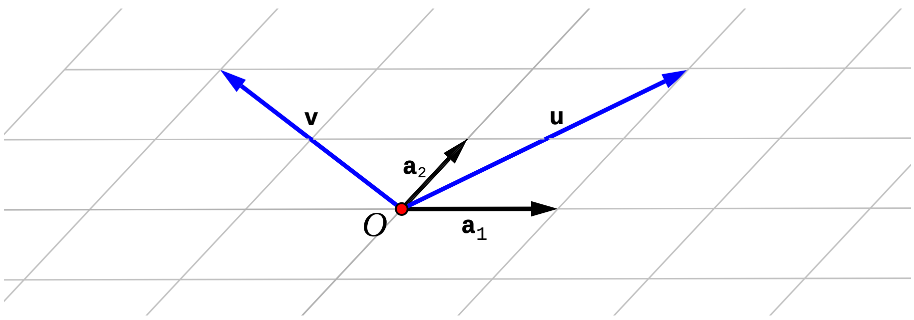


Figur 6.16

På figuren er der i et $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$-koordinatsystem afsat en vilkårlig vektor $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP}$. Da $\mathbf{a} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, og da $|x\mathbf{i}| = |x|$, $|y\mathbf{j}| = |y|$ og $|z\mathbf{j}| = |z|$, ser vi at koordinaterne for $\mathbf{a}$ med hensyn til e-basis er identiske med koordinaterne for punktet P, endepunktet for $\mathbf{a}$'s stedvektor. Et punkt har kort sagt de samme koordinater som dets tilhørende stedvektor.

6.5 Vilkårlige baser i planen og rummet

Hvis der i planen er givet to lineært uafhængige vektorer, er det muligt at skrive enhver anden vektor i planen som en linearkombination af de to givne vektorer. På figur 6.17 betragter vi som eksempel de to lineært uafhængige vektorer $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ samt to andre vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$:



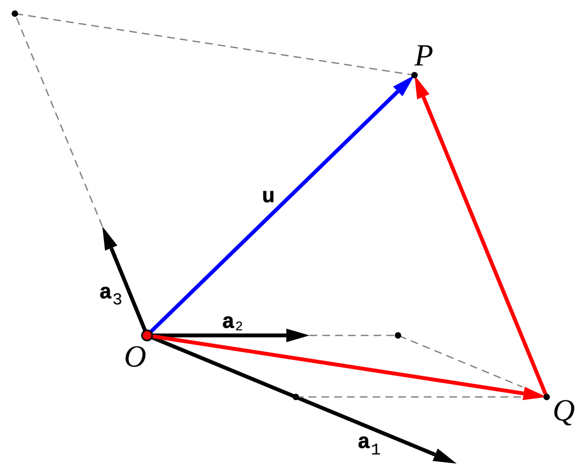
Figur 6.17: Koordinatsystem i planen med basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$

Vi ser at $\mathbf{u} = 1\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{v} = -2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$. Disse linearkombinationer er entydige, idet $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ ikke kan skrives som linearkombination af $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ ved at benytte andre koefficienter end dem der her indgår. Enhver anden vektor i planen kan på tilsvarende vis skrives som en linearkombination af $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$, man siger at de to vektorer ***udspænder*** hele planen.

Dette gør det muligt at generalisere begrebet basis. I stedet for standard e-basis kan vi vælge at benytte vektorsættet $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ som en basis for vektorerne i planen, og vi kalder i så fald koefficenterne i linearkombinationerne ovenfor for *koordinaterne* for $\mathbf{u}$ henholdsvis $\mathbf{v}$ *med hensyn til basen* a hvilket skrives således:

$$_{\mathrm{a}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ og } {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{6-2}$$

For mængden af geometriske vektorer i rummet går vi frem på tilsvarende måde. Er der givet tre lineært uafhængige vektorer, kan enhver vektor i rummet på entydig vis skrives som en linearkombination af de tre givne vektorer. De *udspænder* hele rummet. Vi kan derfor vælge de tre vektorer som en basis for rumvektorerne, og udtrykke en vilkårlig rumvektor ved hjælp af koordinater med hensyn til denne basis. En fremgangsmåde til at bestemme koordinaterne er vist på figur 6.18, hvor der er givet en a-basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ samt en vilkårlig vektor $\mathbf{u}$.



Figur 6.18: Koordinatsystem med basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$

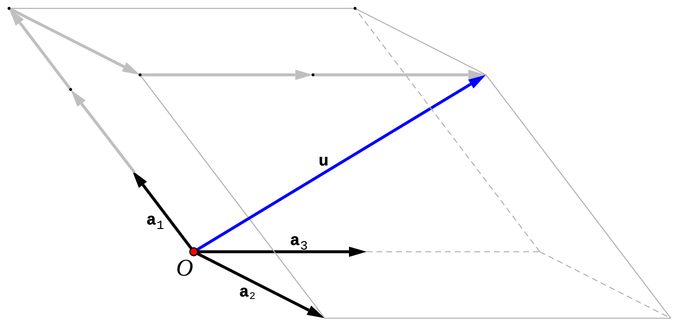
Gennem endepunktet P for $\mathbf{u}$ trækkes en linje som er parallel med $\mathbf{a}_3$, og det punkt hvor denne linje skærer den plan der indeholder $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$, betegnes Q. Der findes da to tal k_1 og k_2 så $\overrightarrow{OQ} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2$ fordi $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ udgør en basis i den plan som indeholder $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$. Endvidere findes der et tal k_3, så $\overrightarrow{QP} = k_3\mathbf{a}_3$ da $\overrightarrow{QP}$ og $\mathbf{a}_3$ er parallelle. Men så har vi

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + k_3\mathbf{a}_3 .$$

$\mathbf{u}$ har dermed koordinatsættet (k_1, k_2, k_3) med hensyn til basis a.

|||| Eksempel 6.31 Koordinater med hensyn til en vilkårlig basis

I rummet er der givet tre lineært uafhængige vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ som vist på figur 6.19.



Figur 6.19: Koordinatsystem med basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$

Da $\mathbf{u}$ kan skrives som en linearkombination af $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ på følgende måde

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{a}_1, +\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3\,, \tag{6-3}$$

så har $\mathbf{u}$ koordinaterne $(3, 1, 2)$ med hensyn til basen a givet ved $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ hvilket kort skrives således

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{6-4}$$

Vi samler overvejelserne om vilkårlige baser ovenfor i den følgende mere formelle defintion:

|||| Definition 6.32 Vektorers koordinater med hensyn til en basis

- Ved en basis a for de geometriske vektorer i planen forstås et vilkårligt ordnet sæt af to lineært uafhængige vektorer $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$. Lad en vilkårlig vektor $\mathbf{u}$ være bestemt ved linearkombinationen $\mathbf{v} = x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2$. Koefficienterne x og y kaldes for $\mathbf{u}$'s *koordinater med hensyn til basis a*, eller kortere $\mathbf{u}$'s a-koordinater, og de samles i en *koordinatvektor* med følgende skrivemåde:

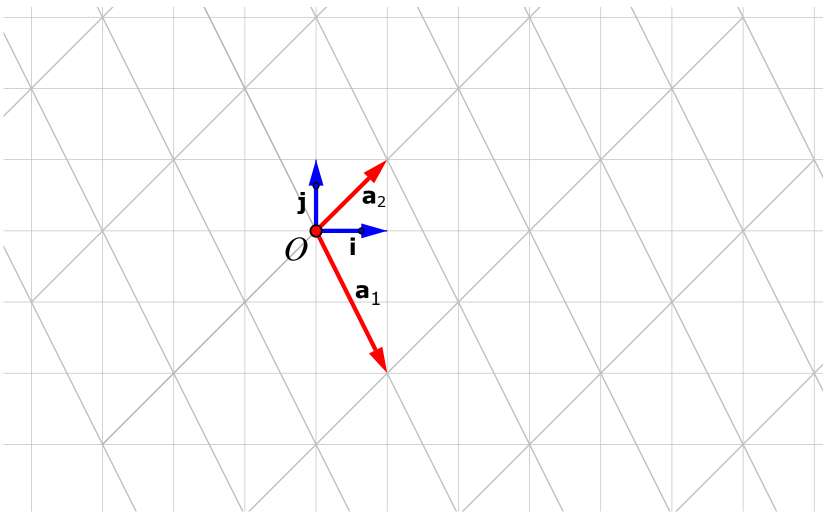
$$_{\mathrm{a}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{6-5}$$

- Ved en basis b for de geometriske vektorer i rummet forstås et vilkårligt ordnet sæt af tre lineært uafhængige vektorer $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Lad en vilkårlig vektor $\mathbf{v}$ være bestemt ved linearkombinationen $\mathbf{v} = x\mathbf{b}_1 + y\mathbf{b}_2 + z\mathbf{b}_3$. Koefficienterne x, y og z kaldes for $\mathbf{v}$'s *koordinater med hensyn til basis a*, eller kortere $\mathbf{v}$'s a-koordinater, og de samles i en *koordinatvektor* med følgende skrivemåde:

$$_{\mathrm{b}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{6-6}$$

En given vektors koordinatsæt ændres når man skifter valgt basis. Denne afgørende pointe tager vi hul på i den følgende opgave.

|||| Opgave 6.33



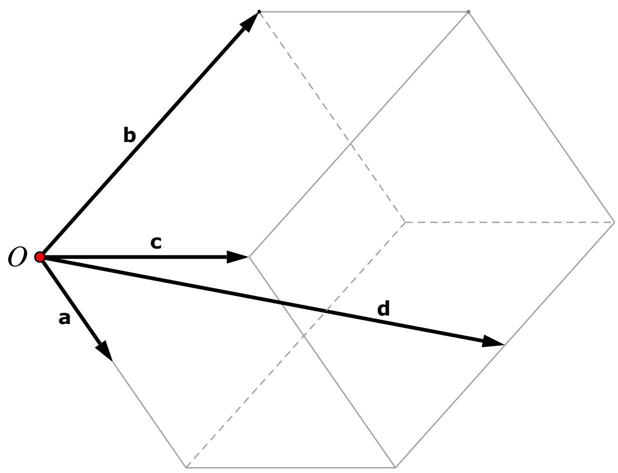
Figur 6.20: Basisskifte

På figur 6.20 er der i planen givet standard e-basen $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ samt en a-basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$.

1. En vektor $\mathbf{u}$ har koordinaterne $(5, -1)$ med hensyn til e-basen. Bestem $\mathbf{u}$'s a-koordinater.

2. En vektor $\mathbf{v}$ har koordinaterne $(-1, -2)$ med hensyn til a-basen. Bestem $\mathbf{v}$'s e-koordinater.

|||| Opgave 6.34



Figur 6.21

1. Det fremgår af figur 6.21, at $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ er lineært uafhængige. En basis m er derfor givet ved $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Bestem koordinatvektoren ${}_{\mathrm{m}}\mathbf{d}$.

2. Det fremgår også af figuren, at $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})$ er en basis, lad os kalde den n. Bestem koordinatvektoren ${}_{\mathrm{n}}\mathbf{c}$.

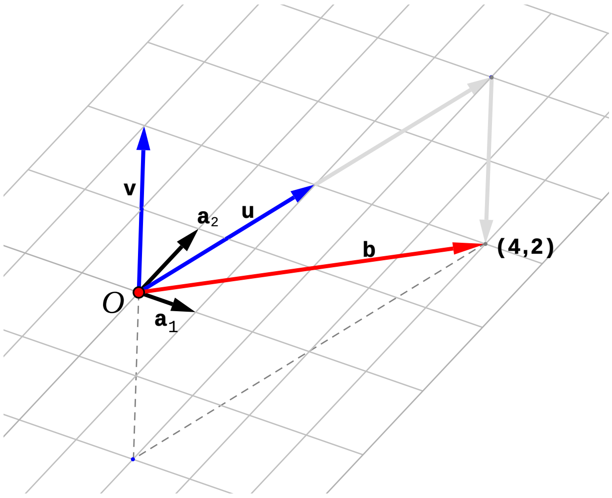
3. Indtegn med origo som begyndelsespunkt den vektor $\mathbf{u}$ som har m-koordinaterne

$$ {}_{\mathrm{m}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} . $$

6.6 Vektorregning ved hjælp af koordinater

Når man har valgt en basis for de geometriske vektorer i planen (eller i rummet), så kan alle vektorer beskrives og fastlægges ved hjælp af deres koordinater med hensyn til den valgte basis. Til de to regneoperationer, addition og multiplikation med skalar som tidligere er indført i denne eNote ved geometrisk konstruktion, får vi hermed et særdeles praktisk alternativ. I stedet for at udføre de geometriske regne-konstruktioner kan vi blot gennemføre taludregninger med de koordinater der svarer til den valgte basis.

Vi illustrerer dette med et eksempel fra planen hvor der er givet en basis a ved $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ samt to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ afsat ud fra O, se figur 6.22. Opgaven består i at bestemme vektoren $\mathbf{b} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}$, og vi vil gøre det på to forskellige metoder.



Figur 6.22: Linearkombination bestemt vha. koordinater

Metode 1 (geometrisk): Først udfører vi regneoperationerne som defineret i 6.2 og 6.3, jævnfør de grå hjælpevektorer i figur 6.22.

Metode 2 (algebraisk): Vi aflæser koordinaterne for $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ og udfører regneoperationerne direkte på koordinaterne:

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b} = 2\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{u} - {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = 2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}. \tag{6-7} $$

Herefter kan $\mathbf{b}$ tegnes direkte ud fra dens koordinater $(4, 2)$ med hensyn til basen a.

At vi har ret til at følge denne fremgangsmåde fremgår af den følgende sætning.

|||| Sætning 6.35 Grundlæggende koordinat-regneregler

I planen eller rummet er der givet to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ samt et reelt tal k. Der er endvidere valgt en vilkårlig basis a. De to regneoperationer $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ og $k\,\mathbf{u}$ kan da udføres ved hjælp af koordinater således:

1. ${}_{\mathrm{a}}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = {}_{\mathrm{a}}\mathbf{u} + {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v}$
2. ${}_{\mathrm{a}}(k\mathbf{u}) = k\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{u}$

Sagt med ord: Koordinaterne for en vektorsum fås ved at lægge koordinaterne for addenderne sammen. Og koordinaterne for en vektor ganget med et tal er vektorens koordinater ganget med tallet.

|||| Bevis

Vi gennemfører beviset for mængden af de geometriske rumvektorer. Antag at koordinaterne for **u** og **v** med hensyn til den valgte basis a er givet ved

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \text{ og } {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}. \tag{6-8} $$

Vi har da

$$ \mathbf{u} = u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + u_3\mathbf{a}_3 \text{ og } \mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3 \tag{6-9} $$

og dermed i følge associativ og distributiv regneregel, se 6.10

$$ \begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + u_3\mathbf{a}_3) + (v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3) \\ &= (u_1 + v_1)\mathbf{a}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{a}_2 + (u_3 + v_3)\mathbf{a}_3 \end{aligned} \tag{6-10} $$

hvilket medfører at

$$ {}_{\mathrm{a}}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = {}_{\mathrm{a}}\mathbf{u} + {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} \tag{6-11} $$

hvorefter første del af beviset er fuldført. Ved anden del af beviset benytter vi igen en distributiv regneregel, se 6.10:

$$ k\mathbf{u} = k(u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + u_3\mathbf{a}_3) = (k \cdot u_1)\mathbf{a}_1 + (k \cdot u_2)\mathbf{a}_2 + (k \cdot u_3)\mathbf{a}_3 \tag{6-12} $$

hvilket medfører at

$$ {}_{\mathrm{a}}(k\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} k \cdot u_1 \\ k \cdot u_2 \\ k \cdot u_1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = k\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{u} \tag{6-13} $$

hvorefter anden del af beviset er fuldført.

■

Sætning 6.6 gør det muligt at gennemføre mere komplicerede regneopgaver ved hjælp af koordinater, se det følgende eksempel.

|||| Eksempel 6.36 Koordinatvektor for en linearkombination

De tre plane vektorer **a**, **b** og **c** har følgende koordinatvektorer med hensyn til en valgt basis v:

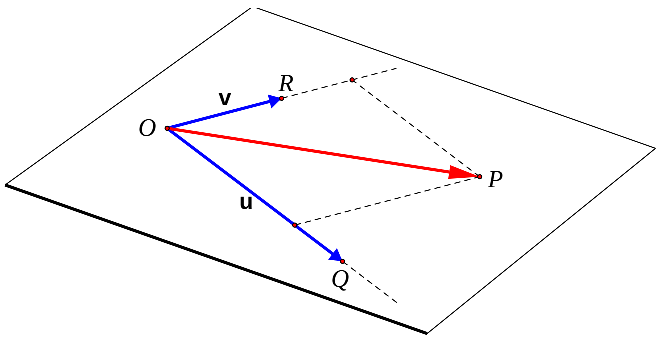
$$ {}_{\mathrm{v}}\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ {}_{\mathrm{v}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } {}_{\mathrm{v}}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{6-14} $$

Opgave: Bestem koordinatvektoren for $\mathbf{d} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ med hensyn til basis v.
Løsning:

$$ \begin{aligned} {}_{\mathrm{v}}\mathbf{d} &= {}_{\mathrm{v}}(\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}) \\ &= {}_{\mathrm{v}}(\mathbf{a} + (-2)\mathbf{b} + 3\mathbf{c}) \\ &= {}_{\mathrm{v}}\mathbf{a} + {}_{\mathrm{v}}(-2\mathbf{b}) + {}_{\mathrm{v}}(3\mathbf{c}) \\ &= {}_{\mathrm{v}}\mathbf{a} - 2\,{}_{\mathrm{v}}\mathbf{b} + 3\,{}_{\mathrm{v}}\mathbf{c} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -3 \end{bmatrix}. \end{aligned} $$

Her opnås det tredje lighedstegn ved første del af sætning 6.6 og det fjerde lighedstegn ved anden del af denne sætning.

|||| Eksempel 6.37 En plans parameterfremstilling i koordinater



Figur 6.23: En plan i rummet

Planen gennem origo som er vist på figur 6.23, har i følge eksempel 6.22 parameterfremstillingen

$$ \{P \mid \overrightarrow{OP} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}\,;\ (s,t) \in \mathbb{R}^2\}. \tag{6-15} $$

Antag at der i rummet er givet en basis a og at

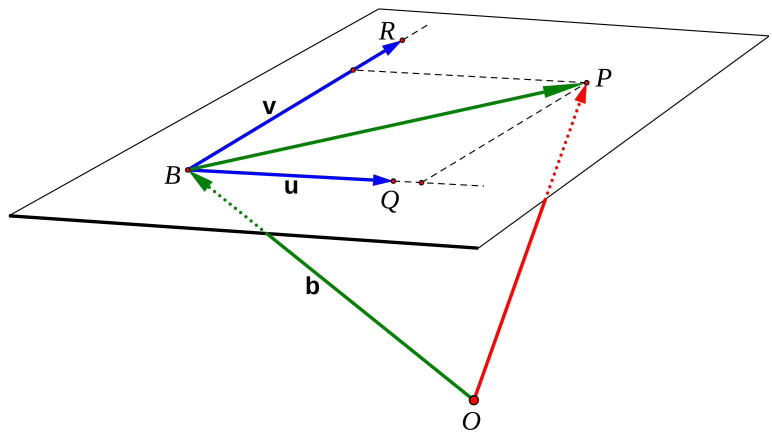
$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \text{ og } {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}. $$

Parameterfremstillingen (6-15) kan da skrives på koordinatform således:

$$ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \tag{6-16} $$

hvor ${}_{\mathrm{a}}\overrightarrow{OP} = (x,y,z)$ og $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

|||| Eksempel 6.38 En plans parameterfremstilling i koordinater



Figur 6.24: En plan i rummet

Planen som er vist på figur 6.24, har i følge eksempel 6.23 parameterfremstillingen

$$\{P \mid \overrightarrow{OP} = \mathbf{b} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}\,;\ (s,t) \in \mathbb{R}^2\}. \tag{6-17}$$

Antag at der i rummet er givet en basis a og at

$$_{\mathrm{a}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},\ _{\mathrm{a}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \text{ og } _{\mathrm{a}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Parameterfremstillingen (6-17) kan da skrives på koordinatform således:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \tag{6-18}$$

hvor $_{\mathrm{a}}\overrightarrow{OP} = (x,y,z)$ og $(s,t) \in \mathbb{R}^2$

6.7 Vektorligninger og matrixalgebra

En lang række problemer vedrørende vektorer fører til vektorligninger. Hvis vi ønsker at løse ligningerne ved hjælp af vektorernes koordinater med hensyn til en given basis, opstår der lineære ligningssystemer. Problemerne kan da løses ved hjælp af matrixmetoder der ligger i forlængelse af eNote. Det viser vi eksempler på i dette afsnit, som opsummeres ved hjælp af begrebet *koordinatmatricer*, se den sfsluttende opgave 6.42.

|||| Eksempel 6.39 Om en vektor er en linearkombination af andre vektorer

Der er i rummet givet en basis a og tre vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ og $\mathbf{p}$ som med hensyn til basis a har koordinaterne

$$_{\mathrm{a}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \ _{\mathrm{a}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ og } \ _{\mathrm{a}}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Opgave: Undersøg om $\mathbf{p}$ er en linearkombination af $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.

Løsning: Vi skal undersøge om der findes koefficienter k_1, k_2, således at

$$k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v} = \mathbf{p}.$$

Vi opstiller den tilsvarende koordinatvektorligning

$$k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

som er ækvivalent med det følgende lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} 2k_1 + k_2 &= 0 \\ k_1 + 4k_2 &= 7 \\ 5k_1 + 3k_2 &= 1 \end{aligned} \tag{6-19}$$

Vi ser på ligningssystemets totalmatrix $\mathbf{T}$ og angiver (uden mellemregninger) matricens trappeform:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6-20}$$

Vi ser at ligningssystemet har netop én løsning, $k_1 = -1$ og $k_2 = 2$, hvorfor der åbenbart gælder

$$-1\mathbf{u} + 2\mathbf{v} = \mathbf{p}.$$

|||| Eksempel 6.40 Om et vektorsæt er lineært afhængigt

Der er i rummet givet en basis v og tre vektorer $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ som med hensyn til den givne basis har koordinaterne

$$_{\mathrm{v}}\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \ _{\mathrm{v}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ og } \ _{\mathrm{v}}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Opgave: Undersøg om vektorsættet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er lineært afhængigt.

Løsning: Vi kan i følge sætning 6.21 undersøge om der findes en egentlig linearkombination

$$k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b} + k_3\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Vi ser på den tilsvarende koordinatvektorligning

$$k_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

som er ækvivalent med det følgende homogene lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} 5k_1 + k_2 + 2k_3 &= 0 \\ k_1 + 3k_3 &= 0 \\ 3k_1 + 4k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned} \tag{6-21}$$

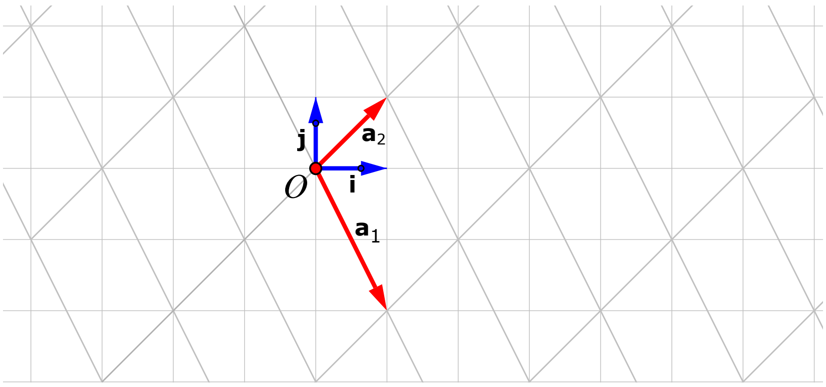
Vi opstiller ligningssystemets totalmatrix $\mathbf{T}$ og angiver (uden mellemregninger) matricens trappeform:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6-22}$$

Vi ser at ligningssystemet kun har nulløsningen $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ og $k_3 = 0$. Det undersøgte vektorsæt $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er derfor lineært uafhængigt. Man ville derfor kunne vælge $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ som en ny basis for mængden af rumvektorer.

I det følgende eksempel genoptager vi diskussionen om forholdet mellem koordinater og basisskifte fra opgave 6.33

|||| Eksempel 6.41 De nye koordinater når der skiftes basis



Figur 6.25: Basisskifte

På figur 6.25 er der i planen givet standard e-basen $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ samt en a-basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$. Når der skiftes basis, ændres givne vektorers koordinater. Her opstiller vi en systematisk metode til at udtrykke ændringen i koordinater ved hjælp af et matrixvektorprodukt. Først aflæser vi a-basisvektorernes e-koordinater:

$$_{\mathrm{e}}\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ og } {}_{\mathrm{e}}\mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{6-23}$$

1. *Opgave*: Antag at en vektor $\mathbf{v}$ har koordinatsættet $_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$. Bestem e-koordinaterne for $\mathbf{v}$.

   Løsning: Vi har at $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$ og dermed i følge sætning 6.35:

$$_{\mathrm{e}}\mathbf{v} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Hvis vi sætter $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, udtrykkes $\mathbf{v}$'s e-koordinater ved matrixvektorproduktet

$$_{\mathrm{e}}\mathbf{v} = \mathbf{M} \cdot {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} \tag{6-24}$$

2. *Opgave*: Antag at en vektor $\mathbf{u}$ har koordinatsættet $_{\mathrm{e}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$. Bestem a-koordinaterne for $\mathbf{u}$.

Løsning: Vi ganger fra venstre på begge sider af 6-24 med den inverse matrix til $\mathbf{M}$, og får udtrykt a-koordinaterne for $\mathbf{u}$ ved matrixvektorproduktet:

$$_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = \mathbf{M}^{-1} \cdot {}_{\mathrm{e}}\mathbf{v} \tag{6-25}$$

|||| Opgave 6.42

Ved en ***koordinatmatrix*** med hensyn til en given basis a for et sæt af vektorer forstår man den matrix der opstår når man sætter vektorernes a-koordinatsøjler sammen til en matrix. Beskriv matricen $\mathbf{T}$ i eksempel 6.39 og 6.40 og matricen $\mathbf{M}$ i 6.41 som koordinatmtaricer.

6.8 Sætninger om vektorer i standard e-baser

I dette afsnit arbejder vi med standard-koordinatsystemer, både i planen og rummet. Vi indfører to forskellige multiplikationer mellem vektorer, prikproduktet der både defineres i planen og rummet, og krydsproduktet der kun defineres i rummet. Vi ser på geometriske anvendelser af disse multiplikationsformer og på geometriske fortolkninger af determinanter.

6.8.1 Prikproduktet af to vektorer

|||| Definition 6.43 Prikprodukt i planen

I planen er der givet to vektorer $_{\mathrm{e}}\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ og $_{\mathrm{e}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Ved *prikproduktet* (eller *skalarproduktet*) af $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ forstås tallet

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \,. \tag{6-26}$$

|||| Definition 6.44 Prikprodukt i rummet

I rummet er der givet to vektorer ${}_e\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ og ${}_e\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$. Ved *prikproduktet* (eller *skalarproduktet*) af $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ forstås tallet

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \,. \tag{6-27}$$

For prikproduktet mellem to vektorer gælder de følgende regneregler.

|||| Sætning 6.45 Regneregler for prikprodukt

Givet tre vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ i planen eller rummet samt tallet k. Der gælder:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (kommutativ regel)
2. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ (associativ regel)
3. $(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
4. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$
5. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

|||| Bevis

Reglerne 1, 2, 3 følger af simpel koordinatudregning. Regel 4 følger af Pythagoras' sætning, og regel 5 er en direkte følge af reglerne 1, 2 og 4.

■

I de efterfølgende tre sætninger ser vi på geometriske anvendelser af prikproduktet.

|||| Sætning 6.46 Længde af en vektor

Lad $\mathbf{v}$ være en vilkårlig vektor i planen eller rummet. Længden af $\mathbf{v}$ opfylder

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \,. \tag{6-28}$$

|||| Bevis

Sætningen følger umiddelbart af regneregel 4 i 6.45

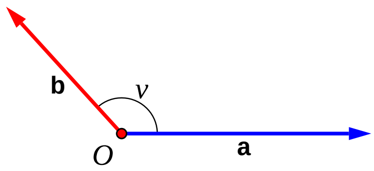
■

|||| Eksempel 6.47 Længde af en vektor

Givet vektoren $\mathbf{v}$ i rummet og at ${}_e\mathbf{v} = (1, 2, 3)$. Vi har da

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}\,.$$

Den efterfølgende sætning handler om vinklen mellem to vektorer, se figur 6.26.



Figur 6.26

|||| Sætning 6.48 Vinkel mellem vektorer

I planen eller rummet er der givet vektorerne $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$. Vinklen v mellem $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ opfylder

$$\cos(v) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \tag{6-29}$$

|||| Bevis

Sætningen kan vises ud fra cosinus-relationen. Undervejs får man også brug for regel 5 i sætning 6.45. Detaljerne overlades til læseren.

■

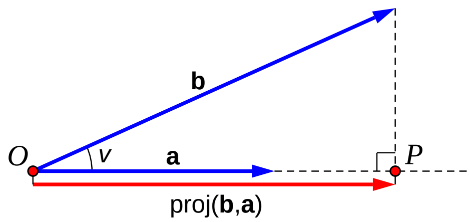
Af sætningen ovenfor følger umiddelbart denne sætning:

|||| Følgesætning 6.49 Vinklers størrelsesforhold

Betragt situationen i figur 6.26. Der gælder

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \text{vinkel}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\pi}{2}$
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0 \Leftrightarrow \text{vinkel}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < \frac{\pi}{2}$
3. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0 \Leftrightarrow \text{vinkel}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) > \frac{\pi}{2}$

De to følgende sætninger er tilegnet ***ortogonale projektioner***. På figur 6.27 er der i planen eller rummet afsat to vektorer **a** og **b** ud fra origo.



Figur 6.27

Betragt det vinkelrette nedfældningspunkt P af **b**'s endepunkt på den linje som indeholder **a**. Ved den ortogonale projektion af **b** på **a** forstås vektoren $\text{proj}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \overrightarrow{OP}$.

|||| Sætning 6.50 Længen af en projektion

Givet to egentlige vektorer **a** og **b** i planen eller rummet. Om længden af den ortogonale projektion af **b** på **a** gælder:

$$|\text{proj}(\mathbf{b}, \mathbf{a})| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} \tag{6-30}$$

|||| Bevis

Ved brug af kendt sætning vedrørende retvinklede trekanter samt 6.48 fås

$$|\text{proj}(\mathbf{b}, \mathbf{a})| = |\cos(v)|\,|b| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\,.$$

■

|||| Sætning 6.51 Formel for projektionsvektor

Givet to egentlige vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ i planen eller rummet. Om den ortogonale projektion af $\mathbf{b}$ på $\mathbf{a}$ gælder:

$$\operatorname{proj}(\mathbf{b},\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\,\mathbf{a}\,. \tag{6-31}$$

|||| Bevis

Hvis $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er ortogonale er sætningen klart opfyldt da projektion da er nul-vektoren. I modsat fald, lad $sign(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ betegne fortegnet for $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. Der gælder at $sign$ er positiv netop når $\mathbf{a}$ og $\operatorname{proj}(\mathbf{b},\mathbf{a})$ er ensrettede og negativ netop når de er modsatrettede. Vi får derfor

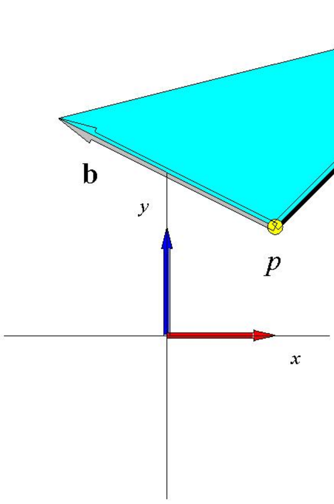
$$\operatorname{proj}(\mathbf{b},\mathbf{a}) = sign(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot|\operatorname{proj}(\mathbf{b},\mathbf{a})|\,\frac{\mathbf{a}}{|a|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\,\mathbf{a}\,,$$

hvor vi undervejs har benyttet 6.50, og at $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ er en enhedsvektor pegende i $\mathbf{a}$'s retning.

■

6.8.2 Geometrisk tolkning af determinant af 2×2 matrix

En trekant $\triangle = \triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b})$ er bestemt ved to vektorer afsat ud fra et fælles begyndelelsespunkt, se trekant $\triangle = \triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b})$, se figur 6.28.



Figur 6.28: En trekant udspændt af to vektorer i planen

Arealet af en trekant er som bekendt halvdelen af grundlinjen gange højden. Vi kan vælge længden $|\mathbf{a}|$ af $\mathbf{a}$ som grundlinje. Og højden i trekanten er

$$|\mathbf{b}|\sin(\theta) = \frac{|\mathbf{b}\cdot\widehat{\mathbf{a}}|}{|\widehat{\mathbf{a}}|}\,, \tag{6-32}$$

hvor θ er vinklen mellem de to vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, og hvor $\widehat{\mathbf{a}}$ betegner ***tværvektoren*** i planen til $\mathbf{a}$, dvs. i koordinater har vi $\widehat{\mathbf{a}} = (-a_2, a_1)$. Derfor er arealet:

$$
\begin{aligned}
\text{Areal}(\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})) &= \frac{1}{2}|\mathbf{b} \cdot \widehat{\mathbf{a}}| \\
&= \frac{1}{2}|a_1 b_2 - a_2 b_1| \\
&= |\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}| \\
&= \frac{1}{2}|\ \det\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\right)\ | \\
&= \frac{1}{2}|\ \det\left([\mathbf{a}\ \mathbf{b}]\right)\ |\ .
\end{aligned}
\tag{6-33}
$$

Vi har hermed vist sætningen:

|||| Sætning 6.52 Areal af trekant ved determinant

Arealet af trekant $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ er den numeriske værdi af den halve determinant af den 2×2 matrix, der fås ved at sætte $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ ind som søjler i matricen.

6.8.3 Krydsprodukt og rumprodukt

Krydsproduktet af to vektorer og *rumproduktet* af tre vektorer indføres ved hjælp af determinanter:

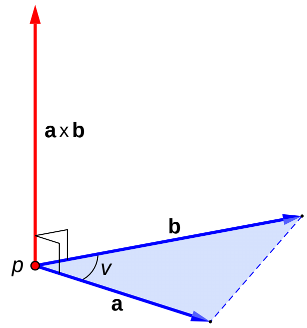
|||| Definition 6.53 Krydsprodukt

I rummet er der givet to vektorer ${}_e\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ og ${}_e\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

Ved *krydsproduktet* (eller *vektorproduktet*) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ af $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ forstås vektoren $\mathbf{v}$ givet ved

$$
{}_e\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \det\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \\ \det\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix} \\ \det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}
\tag{6-34}
$$

Krydsproduktet har en markant geometrisk betydning, sammenhold figur 6.29 og den efterfølgende sætning:



Figur 6.29

|||| Sætning 6.54 Areal af trekant ved krydsprodukt

For to lineært uafhængige vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ som har den mellemliggende vinkel v, opfylder krydsproduktet $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ er ortogonal på både $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$.
2. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 2 \cdot \text{Areal}(\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}))$.
3. Vektorsættet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ er i højrestilling.

|||| Definition 6.55 Rumprodukt

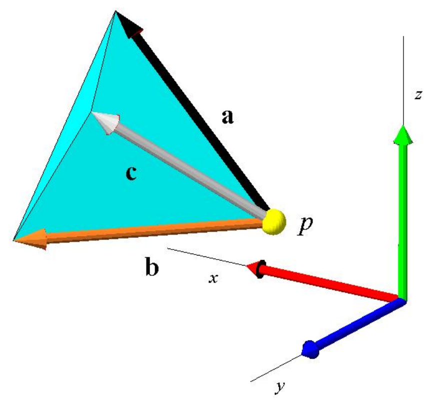
Rumproduktet $\text{Rum}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ af tre vektorer ${}_e\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, ${}_e\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ og ${}_e\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$

defineres ved:

$$
\begin{aligned}
\text{Rum}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \\
&= (c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \right) \\
&= \det\left([{}_e\mathbf{a}\ {}_e\mathbf{b}\ {}_e\mathbf{c}] \right) \quad .
\end{aligned} \tag{6-35}
$$

6.8.4 Geometrisk tolkning af determinant af 3×3 matrix

Fra elemtær rumgeometri vides at rumfanget af et tetraeder er en tredjedel af grundfladens areal gange højden. Betragt tetraederet $\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ udspændt af vektorerne $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ afsat udfra punktet p, på figur 6.30.



Figur 6.30: Et tetraeder udspændt af tre vektorer i rummet

Arealet af grundfladen, $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ har vi bestemt i del 2 af sætning 6.54.

Højden kan vi dernæst bestemme som skalarproduktet af den sidste kant-vektor $\mathbf{c}$ med en enhedsvektor, som står vinkelret på grundtrekanten.

Men $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ står netop vinkelret på grundtrekanten (fordi krydsproduktet er vinkelret på grundtrekantens kant-vektorer, se del 2 af sætning (6.54), så den kan vi bruge:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) &= |\frac{1}{3}\text{Areal}(\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}))\frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}| \\ &= \frac{1}{6}|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| \end{aligned} \tag{6-36}$$

hvor vi har benyttet del 2 af sætning 6.54.

Ved at sammenholde dette med definition på *rumprodukt*, se 6.55, får vi nu rumfanget af et tetraeder skrevet kort på 'determinant-form':

|||| Sætning 6.56 Rumfang af tetraeder ved rumprodukt

Rumfanget af tetraederet $\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er:

$$\text{Vol}(\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) = \frac{1}{6}|\det([\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}])| \quad . \tag{6-37}$$

Et tetraeder har rumfang 0, er kollapset, netop når determinanten i (6-37) er 0, og det forekommer præcist når en af vektorerne kan skrives som en linearkombination af de to andre (hvorfor det?).

|||| Definition 6.57 Regulært tetraeder

Et ***regulært tetraeder*** er et tetraeder, der har et egentligt rumfang, altså et rumfang, der er skarpt større end 0.

|||| Opgave 6.58

Lad $\mathbf{A}$ betegne en (2×2)-matrix med søjlevektorerne $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{A} = [\,\mathbf{a}\ \mathbf{b}\,] \quad . \tag{6-38}$$

Vis, at determinanten af $\mathbf{A}$ er 0 hvis og kun hvis søjle-vektorerne $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er lineært afhængige i $\mathbb{R}^2$.

|||| Opgave 6.59

Lad $\mathbf{A}$ betegne en $(3 \times 3)-$matrix med søjlevektorerne $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, og $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{A} = [\,\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}\,] \quad . \tag{6-39}$$

Vis, at determinanten af $\mathbf{A}$ er 0 hvis og kun hvis søjle-vektorerne $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ udgør et lineært afhængigt system af vektorer i $\mathbb{R}^3$.

|||| Opgave 6.60

Benyt de geometriske tolkninger af determinanten ovenfor til at vise, at der gælder følgende Hadamard's ulighed for $(2 \times 2)-$matricer og for $(3 \times 3)-$matricer (faktisk er uligheden rigtig for alle kvadratiske matricer):

$$(\det(\mathbf{A}))^2 \leq \prod_j^n \left(\sum_i^n a_{ij}^2 \right) \quad . \tag{6-40}$$

Hvornår gælder der lighedstegn i (6-40)?

eNote 7

Vektorrum

I denne eNote opstilles en generel teori for alle matematiske mængder hvor der er defineret addition og multiplikation med skalar, og som opfylder de samme regneregler som geometriske vektorer i planen og rummet. Det vises hvordan man ved hjælp af begreberne basis og koordinater kan forenkle og standardisere løsningen af opgaver der er fælles for alle disse mængder som kaldes vektorrum. Kendskab til eNote om geometriske vektorer er en fordel, og der forudsættes kendskab til løsningsmængder for lineære ligningssystemer, se eNote, til elementær matrixalgebra og til et par vigtige resultater angående determinanter.

7.1 Generalisering af begrebet vektor

Begrebet vektor kommer fra plan- og rumgeometrien hvor det betegner et sammenhørende par af en længde og en retning. Vektorer kan repræsenteres af orienterede linjestykker hvorefter det er muligt at definere to geometriske regneoperationer: *addition* af vektorer og *multiplikation* af vektorer *med tal* (skalar). Til brug ved lidt mere sammensatte regneoperationer beviser man otte regneregler der handler om de to indførte regneoperationer.

I mange andre mængder af matematiske objekter har man brug for at definere addition af objekterne og multiplikation af et objekt med en skalar. Det er der et eksempel på i eNote om talrummet $\mathbb{R}^n$ og i eNote om matrixmængden $\mathbb{R}^{m\times n}$. Det bemærkelsesværdige er, at de *regneregler* for addition og multiplikation med skalar, som det er muligt at bevise inden for hver af disse mængder, er de samme som de regneregler der gælder for geometriske vektorer i planen og rummet! Man siger derfor: Lad os lave en *teori* der gælder for alle de mængder hvor der kan defineres addition og multiplikation med skalar, og hvor de otte regneregler kendt fra geometrien gælder. Man foretager hermed en *generalisering* af læren om geometriske vektorer, og enhver mængde der omfattes af teoriens betingelser, kalder derfor for et *vektorrum*.

I eNote om de geometriske vektorer går man et skridt videre ved at indføre en *basis* for vektorerne hvorefter vektorerne er bestemt ved deres *koordinater* med hensyn til den givne basis. Fordelen er at man derved kan erstatte geometrisk vektorregning med regning med vektorernes koordinater. Det viser sig, at det også er muligt at overføre disse geometriske begreber og metoder til mange af de andre mængder af matematiske objekter som har addition og multiplikation med skalar.

Når vi i det følgende undersøger vektorrum abstrakt, betyder det at vi ser hvilke begreber, metoder og konsekvenser der kan drages af de fælles regneregler, idet vi ser bort fra den konkrete betydning af de indgående objekter og den konkrete betydning af addition og multiplikation med skalar. Man får derved generelle metoder gældende for *enhver* mængde af den ovennævnte art. Når man i en bestemt arbejdsopgave er tilbage i et konkret vektorrum, må man *fortolke* hvad de opnåede resultater betyder i denne særlige sammenhæng. Fremgangsmåden kaldes *den aksiomatiske metode*. Med henblik på alt dette fremlægger vi nu den abstrakte definition af vektorrum.

Definition 7.1 Vektorrum

Lad V være en mængde af matematiske elementer hvor der er defineret to regneoperationer:

I. *Addition* der ud fra to elementer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ i V danner et objekt $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ som også tilhører V.

II. *multiplikation med skalar* der ud fra ethvert $\mathbf{a} \in V$ og enhver skalar k danner et objekt betegnet $k\mathbf{a}$ eller $\mathbf{a}k$ som også tilhører V.

V kaldes et ***vektorrum*** og elementerne i V for ***vektorer*** hvis de følgende otte regneregler er opfyldt:

1.	$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$	Addition er kommutativ
2.	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$	Addition er associativ
3.	$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$	I V findes findes $\mathbf{0}$ som er *neutral* mht. addition
4.	$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$	Til ethvert $\mathbf{a} \in V$ findes et *modsat objekt* $-\mathbf{a} \in V$
5.	$k_1(k_2\mathbf{a})=(k_1k_2)\mathbf{a}$	Produkt med skalarer er associativ
6.	$(k_1+k_2)\mathbf{a}=k_1\mathbf{a}+k_2\mathbf{a}$	De distributive regler gælder
7.	$k_1(\mathbf{a}+\mathbf{b})=k_1\mathbf{a}+k_1\mathbf{b}$	
8.	$1\mathbf{a}=\mathbf{a}$	Skalaren 1 er *neutral* i produkt med vektorer

Oftest forstås der ved skalaren k i definition 7.1 et vilkårligt reelt tal, og man taler da om V som et ***vektorrum over de reelle tal***. I tilfældet at k betegner et vilkårligt komplekst tal, tales tilsvarende om ***vektorrum over de komplekse tal***. Hvis intet andet er nævnt, betyder et vektorrum i disse eNoter et vektorrum over de reelle tal.

Kravene I og II i definition 7.1 om at resultatet af addition og af multiplikation med skalar selv skal være et element i V, kaldes for ***stabilitetskravene***. V skal altså være stabil med hensyn til de to regnearter.

Det er ikke nødvendigt at indføre højtidelige definitioner for *subtraktion* af vektorer og *division* af vektor med skalar, vi kan nemlig betragte dem som varianter af addition og multiplikation med skalar i kraft af omskrivningerne:

$$\text{Subtraktion :} \qquad \mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-1)\mathbf{b}$$

$$\text{Division med skalar :} \qquad \frac{\mathbf{a}}{k}=\frac{1}{k}\cdot\mathbf{a}$$

Mængden af geometriske vektorer i planen og mængden af geometriske vektorer i rummet er naturligvis de mest oplagte eksempler på vektorrum, da de otte regneregler i definition 7.1 er opstillet ud fra de tilvarende regneregler for geometriske vektorer. Men lad os lige tjekke *stabilitetskravene*. Er summen af to vektorer i planen selv en vektor i planen? Og er en vektor i planen ganget med et tal selv en vektor i planen? Ud fra definitionen på de to regnearter (se definition og definition), er svaret oplagt ja, derfor er mængden af vektorer i planen et vektorrum. På samme måde ses at mængden af vektorer i rummet er et vektorrum.

|||| Eksempel 7.2 Matricer som vektorer

For et vilkårligt valg af to naturlige tal m og n er $\mathbb{R}^{m\times n}$ (det vil sige mængden af $m\times n$-matricer) et vektorrum.

Betragt for eksempel $\mathbb{R}^{2\times 3}$. Hvis vi lægger to matricer af denne type sammen, får vi en ny matrix af samme type, og hvis vi ganger en 2×3-matrix med et tal, får vi også en ny 2×3-matrix (se definition). Dermed er stabilitetskravene opfyldte. At $\mathbb{R}^{2\times 3}$ desuden opfylder de otte regneregler, fremgår af sætning.

|||| Opgave 7.3

Gør rede for at der for ethvert naturligt n gælder at talrummet $\mathbb{R}^n$ er et vektorrum. Husk også at tænke over tilfældet $n=1$!

I de følgende to eksempler skal vi se at den geometrisk inspirerede vektorumsteori overraskende nok kan bringes i spil på velkendte mængder af *funktioner*. Matematikhistorikere har i den forbindelse talt om *den matematiske analyses geometrisering*!

|||| Eksempel 7.4 Polynomier som vektorer

Mængden af reelle polynomier af højst n'te grad betegnes $P_n(\mathbb{R})$. Et element $P(x)$ i $P_n(\mathbb{R})$ har altså formen

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \tag{7-1}$$

hvor koefficienterne $a_0, a_1, \cdots a_n$ er vilkårlige reelle tal. Addition af to polynomier i $P_n(\mathbb{R})$ defineres ved parvis addition af koefficienter der hører til samme grad af den variable, og multiplikation af et polynomium i $P_n(\mathbb{R})$ med et tal k defineres som multiplikation af hver af koefficienterne med k. Som eksempel på de to regneoperationer ser vi på to polynomier fra $P_3(\mathbb{R})$:

$$P(x)=1-2x+x^3=1-2x+0x^2+1x^3$$

og

$$Q(x) = 2 + 2x - 4x^2 = 2 + 2x - 4x^2 + 0x^3.$$

Ved summen af $P(x)$ og $Q(x)$ forstår vi polynomiet $R(x) = P(x) + Q(x)$ givet ved

$$R(x) = (1+2) + (-2+2)x + (0-4)x^2 + (1+0)x^3 = 3 - 4x^2 + x^3$$

og ved multiplikation af $P(x)$ med skalaren $k = 3$ forstår vi polynomiet $S(x) = 3P(x)$ givet ved

$$S(x) = (3 \cdot 1) + (3 \cdot (-2))x + (3 \cdot 0)x^2 + (3 \cdot 1)x^3 = 3 - 6x + 3x^3.$$

Vi vil nu argumentere for at $P_n(\mathbb{R})$ med de indførte regneoperationer er et vektorrum! At $P_n(\mathbb{R})$ overholder *stabilitetskravene* følger af at summen af to polynomier af højst n'te grad selv er et polynomium af højst n'te grad, og at multiplikation af et polynomium af højst n'te grad med et reelt tal igen giver et polynomier af højst n'te grad. Betingelserne 1, 2 og 5 - 8 i definition 7.1 er opfyldte, fordi de samme regneregler gælder for de udregninger på polynomiernes koefficienter som regneoperationerne er defineret ved. Endelig er betingelse 3 og 4 opfyldt, idet polynomiet

$$P(x) = 0 + 0x + \cdots 0x^n = 0$$

udfylder rollen som *nulvektor*, og idet *den modsatte vektor* til $P(x) \in P_n(\mathbb{R})$ er givet ved polynomiet

$$-P(x) = -a_0 - a_1 x - \cdots - a_n x^n.$$

|||| Opgave 7.5

Gør rede for at $P(\mathbb{R})$, det vil sige mængden af reelle polynomier, er et vektorrum.

|||| Eksempel 7.6 Kontinuerte funktioner som vektorer

Mængden af kontinuerte reelle funktioner på et givet interval $I \in \mathbb{R}$ betegnes $C^0(I)$. Additionen $m = f + g$ af to funktioner f og g i $C^0(I)$ defineres ved

$$m(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ for ethvert } x \in I$$

og multiplikationen $n = k \cdot f$ af funktionen f med et reelt tal k ved

$$n(x) = (k \cdot f)(x) = k \cdot f(x) \text{ for ethvert } x \in I\,.$$

Vi vil nu argumentere for at $C^0(I)$ med de indførte regneoperationer er et vektorrum. Da $f + g$ og $k \cdot f$ er kontinuerte funktioner, ser vi at $C^0(I)$ opfylder de to stabilitetskrav. Endvidere: Der findes en funktion, der udfylder rollen som nulvektor, nemlig nulfunktionen, det vil sige den funktion som antager værdien 0 for alle $x \in I$, og den modsatte vektor til $f \in C^0(I)$ er vektoren $(-1)f$ der også skrives $-f$, og som for alle $x \in I$ har værdien $-f(x)$. Herefter er det klart at $C^0(I)$ med de indførte regneoperationer opfylder alle 8 betingelser i definition 7.1, og $C^0(I)$ er dermed et vektorrum.

7.2 Linearkombinationer og udspændinger

En pointe ved regneregler som $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$ og $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ fra definition 7.1 er at man udelade parenteser når man skal addere en række vektorer, da det ingen betydning har for den resulterende vektor, i hvilken rækkefølge man har lagt vektorerne sammen parvist. Dette er baggrunden for *linearkombinationer* hvor et sæt af vektorer er multipliceret med skalarer og derefter er opskrevet som en sum.

|||| Definition 7.7 Linearkombination

Når der i et vektorrum V er givet p vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$, og der er valgt vilkårlige skalarer $k_1, k_2, \ldots, k_p$, så kaldes summen

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_p\mathbf{v}_p$$

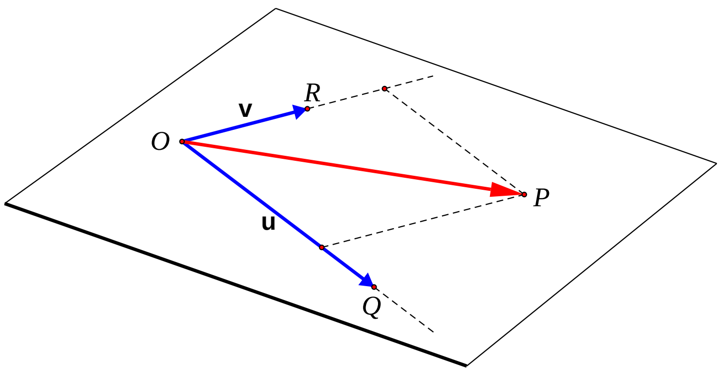
en ***linearkombination*** af de p givne vektorer.

Hvis alle koefficienterne $k_1, \cdots, k_p$ er lig med 0, kaldes linearkombinationen *uegentlig*, men hvis blot én af dem er forskellig fra 0, er den *egentlig*.

I definition 7.7 omtales blot en enkelt linearkombination. I mange sammenhænge har det interesse at se på den samlede mængde af mulige linearkombinationer af givne vektorer. Mængden kaldes for *udspændingen* af vektorerne. Betragt for eksempel den plan i rummet, som går gennem origo og indeholder stedvektorerne for to ikke parallelle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Planen kan betragtes som udspændingen af de to vektorer idet stedvektoren

$$\overrightarrow{OP} = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}$$

"gennemløber" alle punkter P i planen, når k_1 og k_2 antager alle tænkelige reelle værdier, se figur 7.1.



Figur 7.1: $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ udspænder en plan i rummet

Definition 7.8 Udspænding og span

Ved ***udspændingen*** af et givet sæt vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ i et vektorrum V forstås den samlede mængde af alle tænkelige linearkombinationer af vektorerne. Udspændingen af de p vektorer skrives kort

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}\,.$$

Eksempel 7.9 Linearkombination og span

Vi betragter i vektorrummet $\mathbb{R}^{2\times 3}$ de tre matricer/vektorer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \tag{7-2}$$

Et eksempel på en linearkombination af de tre vektorer er

$$2\mathbf{A} + 0\,\mathbf{B} + (-1)\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7-3}$$

Vi har dermed lov til at skrive

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \text{span}\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}\,. \tag{7-4}$$

7.3 Lineær afhængighed og lineær uafhængighed

To geometriske vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lineært afhængige, hvis de er parallelle, det vil sige hvis der findes et tal k, så $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$. Mere generelt er et vilkårligt sæt af vektorer lineært afhængige, hvis en af vektorerne er en linearkombination af de øvrige. Dette begreb ønsker vi at overføre til vektorrumsteorien, se den følgende definition.

|||| Definition 7.10 Lineær afhængighed og uafhængighed

Et sæt bestående af p vektorer $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$ i et vektorrum V er ***lineært afhængigt*** hvis mindst én af vektorerne kan skrives som en linearkombination af de øvrige, hvis for eksempel

$$\mathbf{v}_1 = k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 + \cdots + k_p\mathbf{v}_p\,.$$

Hvis ingen af vektorerne kan skrives som en linearkombination af de øvrige, kaldes sættet ***lineært uafhængigt***.

NB: Hvis vektorsættet kun består af en enkelt vektor, kaldes sættet lineært afhængigt, hvis det består af 0-vektoren, og ellers lineært uafhængigt.

|||| Eksempel 7.11 Lineær afhængighed

Ethvert vektorsæt som indeholder nul-vektoren, er lineært afhængigt! Betragt for eksempel sættet $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{0}, \mathbf{w})$, her kan nul-vektoren jo helt trivielt skrives som en linearkombination af de tre andre vektorer i sættet:

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w}\,,$$

hvor nul-vektoren er skrevet som en linearkombination af de øvrige vektorer i sættet.

|||| Eksempel 7.12 Lineær afhængighed

Betragt i vektorrummet $\mathbb{R}^{2\times 3}$ de tre matricer/vektorer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \tag{7-5}$$

$\mathbf{C}$ kan skrives som en linearkombination af $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ da der gælder at

$$\mathbf{C} = 3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}\,.$$

Derfor er $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$ lineært afhængige.

Derimod er sættet bestående af $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ lineært uafhængigt, da de to vektorer ikke er ”parallelle”, idet der tydeligvis ikke findes et tal k således at $\mathbf{B} = k\mathbf{A}$. Ligeså med sættene $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ og $(\mathbf{B}, \mathbf{C})$.

Når man skal undersøge om et sæt af vektorer er lineært afhængigt, så opstår der ved brug definition 7.10 spørgsmålet *hvilken* af sættets vektorer der evt. er en linearkombination af de øvrige. Hvor skal undersøgelsen starte? Dilemmaet kan undgås hvis man i stedet for definitionen bruger den følgende sætning:

|||| Sætning 7.13 Lineær afhængighed og uafhængighed

At et vektorsæt $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$ i et vektorrum V er lineært afhængigt, er ensbetydende med at nul-vektoren kan skrives som en egentlig linearkombination af vektorerne. Der skal altså findes skalarer $k_1, k_2, \ldots, k_p$ som ikke alle er lig med 0, og som opfylder

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}\,. \tag{7-6}$$

I modsat fald er vektorerne lineært uafhængige.

|||| Bevis

Antag først at $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$ er lineært afhængige, så kan én af dem skrives som en linearkombination af de øvrige, for eksempel er

$$\mathbf{v}_1 = k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 + \cdots + k_p\mathbf{v}_p\,. \tag{7-7}$$

Men dette er ensbetydende med at

$$\mathbf{v}_1 - k_2\mathbf{v}_2 - k_3\mathbf{v}_3 - \cdots - k_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}\,, \tag{7-8}$$

hvorved nul-vektoren er skrevet som en linearkombination af vektorsættet hvor mindst én af koefficienterne ikke er 0, da vi jo har koefficienten 1 til $\mathbf{v}_1$.

Antag omvendt at nul-vektoren er skrevet som en egentlig linearkombination af vektorsættet, hvor for eksempel koefficienten k_1 til $\mathbf{v}_1$ er forskellig fra 0. Så har vi

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v}_1 = (-1)\frac{k_2}{k_1}\mathbf{v}_2 + \cdots + (-1)\frac{k_p}{k_1}\mathbf{v}_p\,. \tag{7-9}$$

Hermed er $\mathbf{v}_1$ skrevet som en linearkombination af de øvrige vektorer, og beviset er fuldført.

■

|||| Eksempel 7.14 Lineær afhængighed

I talrummet $\mathbb{R}^4$ er der givet vektorerne $\mathbf{a} = (1,3,0,2)$, $\mathbf{b} = (-1,9,0,4)$ og $\mathbf{c} = (2,0,0,1)$. Da der gælder

$$3\mathbf{a} - \mathbf{b} - 2\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

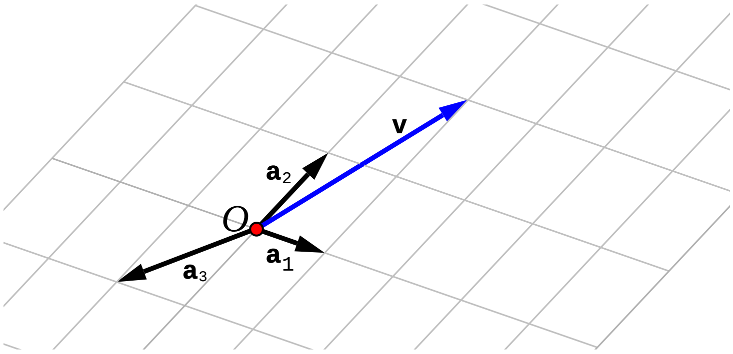
er nul-vektoren skrevet som en egentlig linearkombination af de tre vektorer. De er derfor lineært afhængige.

7.4 Basis og dimension for et vektorrum

En afgørende begrundelse for at indføre en basis i et vektorrum er at alle vektorer i vektorrummet derefter kan beskrives ved hjælp af koordinater. I et senere afsnit vises det hvordan man kan forenkle og standardisere regneopgaver med vektorer når man benytter koordinater. Men i dette afsnit vil vi diskutere de krav, man må stille til en basis og undersøge de teoretiske konsekvenser af kravene.

En basis for et vektorrum består af et vist antal vektorer opskrevet i en bestemt rækkefølge. En afgørende opgave for basisvektorerne er at udspænde hele vektorrummet, men mere præcist ønsker vi dette job udført af *så få vektorer som muligt*. I så fald viser det sig nemlig at alle vektorer i vektorrummet *på entydig vis* kan skrives som en linearkombination af basisvektorerne. Og det er netop *koefficienterne* i den entydige linearkombination vi vil bruge som koordinater.

Lad os tage udgangspunkt i nogle karakteristiske egenskaber ved baser for de geometriske vektorer i planen.



Figur 7.2: Koordinatsystem i planen med basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$

Betragt vektorsættet $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ på figur 7.2, ingen tvivl om at enhver anden vektor i planen kan skrives som en linearkombination af de tre vektorer. Men linearkombinationen er ikke entydig, for eksempel kan vektoren $\mathbf{v}$ skrives på disse to måder

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 - 1\mathbf{a}_3$$
$$\mathbf{v} = 1\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3 .$$

Problemet er at a-vektorerne er lineært afhængige, for eksempel er $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$. Men hvis vi fjerner en af dem, for eksempel $\mathbf{a}_3$, er sættet lineært uafhængigt, og der er så kun én skrivemåde

$$\mathbf{v} = 1\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 .$$

Vi kan opsummere de karakteristiske egenskaber for en basis for de geometriske vektorer i planen således: (1) enhver basis må bestå af lineært uafhængige vektorer, (2) enhver basis må indeholde netop to vektorer (hvis der er flere end to, er de lineært afhængige, hvis der er færre end to, udspænder de ikke hele vektorrummet), og (3) *ethvert* sæt bestående af to lineært uafhængige vektorer er en basis. Disse egenskaber lader sig overføre til alle andre vektorrum. Det tager vi hul på nu, og vi starter med den generelle definition af en basis.

|||| Definition 7.15 Basis

Ved en ***basis*** for et vektorrum V forstås et ordnet sæt $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ af vektorer fra V som opfylder:

1. $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ udspænder V .

2. $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ er lineært uafhængigt.

Her bør vi stoppe op og sørge for at definition 7.15 faktisk opfylder vores entydighedskrav til en basis. Dette fastslås i den følgende sætning.

|||| Sætning 7.16 Entydighedssætningen

Hvis der i et vektorrum V er givet en basis, kan enhver vektor i V skrives som en *unik* linearkombination af basisvektorerne.

|||| Bevis

Vi giver idéen i beviset ved at se på et vektorrum V som har en basis bestående af tre basisvektorer $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ og antager at $\mathbf{v}$ er en vilkårlig vektor i V som på to måder kan skrives som linearkombination af basisvektorerne. Vi kan da opstille to ligninger

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b} + k_3\mathbf{c} \\ \mathbf{v} &= k_4\mathbf{a} + k_5\mathbf{b} + k_6\mathbf{c} \end{aligned} \tag{7-10}$$

Ved at trække den nederste ligning i (7-10) fra den øverste opnår vi ligningen

$$\mathbf{0} = (k_1 - k_4)\mathbf{a} + (k_5 - k_2)\mathbf{b} + (k_3 - k_6)\mathbf{c}\,. \tag{7-11}$$

Da $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ er lineært uafhængige, kan nul-vektoren kun skrives som en uegentlig linearkombination af dem, derfor er hver af koefficienterne i (7-10) lig med 0, hvilket medfører at $k_1 = k_4$, $k_2 = k_5$ og $k_3 = k_6$. Men så er de to måder $\mathbf{v}$ har været skrevet som linearkombination af basisvektorerne på, i virkeligheden den samme, der findes kun én måde!

Dette ræsonnement lader sig umiddelbart udvide til en basis som består af et vilkårligt antal basisvektorer.

■

Vi vender nu tilbage til det faktum at enhver basis for de geometriske vektorer i planen altid indeholder *to* lineært uafhængige basisvektorer, og at der tilsvarende for geometriske vektorer i rummet gælder at en basis må bestå af *tre* lineært uafhængige basisvektorer. Det viser sig at det faste antal basisvektorer er en egenskab ved alle vektorrum der har en basis, og dette gør det muligt at tale om *dimensionen* af et vektorrum som har en basis. For at bevise at egenskaben findes, får vi brug for en hjælpesætning.

|||| Hjælpesætning 7.17

Hvis et vektorrum V har en basis bestående af n basisvektorer, så vil ethvert sæt fra V som indeholder mere end n vektorer, være lineært afhængigt.

|||| Bevis

Vi viser idéen i beviset ved at betragte et vektorrum V som har en basis af to vektorer $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, og undersøger tre vilkårlige vektorer $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ og $\mathbf{e}$ fra V. Vi viser at de tre vektorer nødvendigvis må være lineært afhængige.

Da $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er en basis for V, kan vi opstille tre ligninger

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= d_1\mathbf{a} + d_2\mathbf{b} \\ \mathbf{e} &= e_1\mathbf{a} + e_2\mathbf{b} \end{aligned} \tag{7-12}$$

Betragt endvidere nul-vektoren opskrevet ved følgende linearkombination

$$x_1\mathbf{c} + x_2\mathbf{d} + x_3\mathbf{e} = \mathbf{0}\,, \tag{7-13}$$

der ved indsættelse af ligningerne (7-12) i (7-13) er ensbetydende med

$$(x_1c_1 + x_2d_1 + x_3e_1)\mathbf{a} + (x_1c_2 + x_2d_2 + x_3e_2)\mathbf{b} = \mathbf{0}\,. \tag{7-14}$$

Da nulvektoren kun kan opnås som en linearkombination af $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, hvis hver af koefficienterne er lig med 0, er (7-14) ensbetydende med følgende ligningssystem

$$\begin{aligned} c_1x_1 + d_1x_2 + e_1x_3 &= 0 \\ c_2x_1 + d_2x_2 + e_2x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{7-15}$$

Dette er et homogent lineært ligningssystem hvor antallet af ligninger er mindre end antallet af ubekendte. Ligningssystemet har derfor uendeligt mange løsninger, hvilket betyder at (7-14) ikke kun er opnåelig under betingelsen af $x_1 = 0, x_2 = 0$ og $x_3 = 0$. Dermed er det vist at sættet $(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$ er lineært afhængigt.

Generelt: Antag nu at basen for V består af n vektorer, og at der givet m vektorer fra V hvor $m > n$. Ved at følge samme fremgangsmåde som ovenfor opstår der et homogent lineært ligningssystem bestående af n ligninger med m ubekendte som, fordi $m > n$, ligeledes har uendeligt mange løsninger. Derved vises det at de m vektorer er lineært afhængige.

■

Og så er vi klar til at fremsætte den følgende vigtige sætning:

|||| Sætning 7.18 Antal af basisvektorer

Hvis et vektorrum V har en basis bestående af n basisvektorer, så vil enhver basis for V ligeledes bestå af n basisvektorer.

|||| Bevis

Antag at V har to baser med forskelligt antal basisvektorer. Vi kalder basen med færrest basisvektorer for a og den med flest for b. I følge 7.17 må b-basisvektorerne være lineært afhængige, og dette er i modstrid med at de udgør en basis. Antagelsen om at V kan have to baser med forskelligt antal basisvektorer, må derfor være forkert.

■

At antallet af basisvektorer i følge sætning 7.18 er en *egenskab* ved vektorrum som har en basis, motiverer indførelsen af begrebet dimension:

|||| Definition 7.19 Dimension

Ved dimensionen af et vektorrum V som har en basis b, forstås antallet af basisvektorer i b. Hvis dette antal er n, siger man at V er n-dimesionalt og skriver

$$\dim(V) = n\,. \tag{7-16}$$

|||| Eksempel 7.20 Dimension af geometriske vektorrum

Heldigvis bekræfter definition 7.19 en intuitiv fornemmelse af at mængden af geometriske vektorer i planen har dimensionen to, og at mængden af geometriske vektorer i rummet har dimensionen tre!

|||| Eksempel 7.21 Standard e-basis for talrum

En vilkårlig vektor $\mathbf{v} = (a, b, c, d)$ i $\mathbb{R}^4$ kan på oplagt måde skrives som en linearkombination af fire særlige vektorer i $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{v} = a\,(1,0,0,0) + b\,(0,1,0,0) + c\,(0,0,1,0) + d\,(0,0,0,1)\,. \tag{7-17}$$

Vi sætter $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,0)$ og $\mathbf{e}_4 = (0,0,0,1)$ og konstaterer ved hjælp af (7-17) at e-sættet $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ udspænder $\mathbb{R}^4$.

Da det endvidere ses at ingen af vektorerne i e-sættet kan skrives som en linearkombination af de øvrige, er sættet lineært uafhængigt, og $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ er dermed en basis for $\mathbb{R}^4$. Denne særlige basis kaldes ***standard e-basen*** for $\mathbb{R}^4$. Da antallet af basisvektorer i standard e-basen er fire, er $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$.

Dette kan umiddelbart generaliseres til $\mathbb{R}^n$: For ethvert n er e-sættet $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ hvor

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0),\ \mathbf{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ldots,\mathbf{e}_n = (0,0,0,\ldots,1)$$

en basis for $\mathbb{R}^n$. Denne særlige basis kaldes ***standard e-basen*** for $\mathbb{R}^n$. Det bemærkes at $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

|||| Eksempel 7.22 Standard e-basis for matrix-rum

Ved ***standard e-basen*** for vektorrummet $\mathbb{R}^{2\times 3}$, forstås matrixsættet

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \tag{7-18}$$

På samme måde defineres en *standard e-basis* for et vilkårligt matrixrum $\mathbb{R}^{m\times n}$.

|||| Opgave 7.23

Gør rede for at det matrixsæt, der i eksempel 7.22 omtales som standard e-basis for $\mathbb{R}^{2\times 3}$, faktisk er en basis for dette vektorrum.

|||| Eksempel 7.24 *Monomiebasen* for polynomiumsrum

I vektorrummet $P_2(\mathbb{R})$ af reelle polynomier af højst 2. grad er vektorsættet $(1, x, x^2)$ en basis. Det ses på følgende måde.

1. Ethvert polynomium $P(x) \in P_2(\mathbb{R})$ kan skrives på formen

   $$P(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \,,$$

   det vil sige som en linearkombination af de tre vektorer i sættet.

2. Vektorsættet $(1, x, x^2)$ er lineært uafhængigt, idet ligningen

   $$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 = 0 \text{ for ethvert } x$$

   i følge ***identitetssætningen for polynomier*** kun er opfyldt hvis alle koefficienterne a_0, a_1 og a_2 er lig med 0 .

Sættet $(1, x, x^2)$ kaldes ***monomiebasen*** eller ***standard m-basen*** for $P_2(\mathbb{R})$, og der gælder $\dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$.

For ethvert n er sættet $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ en basis for $P_n(\mathbb{R})$, den kaldes *monomiebasen* eller *standard m-basen* for $P_n(\mathbb{R})$. Der gælder derfor $\dim(P_n(\mathbb{R})) = n + 1$.

I mængden af plane geometriske vektorer kan man vælge et *ethvert* ordnet par af to lineært uafhængige vektorer som basis. Tilsvarende udgør i rummet *ethvert* sæt af tre lineært uafhængige vektorer en basis. Vi slutter afsnittet af med en videreførsel af dette til generelle n-dimensionale vektorrum:

|||| Sætning 7.25 Tilstrækkelige betingelser for basis

I et n-dimensionalt vektorrum V udgør et vilkårligt ordnet sæt af n lineært uafhængige vektorer fra V en basis for V .

|||| Bevis

Da V er forudsat n-dimensionalt, må det have en basis b bestående af n basisvektorer. Lad a-sættet $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n)$ være et vilkårligt lineært uafhængigt sæt af vektorer fra V. Sættet er da en basis for V hvis det udspænder V. Antag at dette ikke er tilfældet, og lad $\mathbf{v}$ være en vektor i V som ikke tilhører $\mathrm{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\}$. Så må $(\mathbf{v}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n)$ være lineært uafhængigt, men dette er i modstrid med sætning 7.17 da der er $n+1$ vektorer i sættet. Derfor er antagelsen om at a-sættet ikke udspænder V forkert, og det må følgelig være en basis for V.

■

|||| Opgave 7.26

I rummet er der givet to geometriske vektorer $\mathbf{a} = (1, -2, 1)$ og $\mathbf{b} = (2, -2, 0)$. Bestem en vektor $\mathbf{c}$ således at sættet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er en basis for mængden af rumvektorer.

|||| Opgave 7.27

Betragt i det 4-dimensionale vektorrum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ vektorerne

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7-19}$$

Gør rede for at $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ er et lineært uafhængigt sæt, og supplér sættet op med en 2×2 matrix $\mathbf{D}$ således at $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ er en basis for $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

7.5 Vektorregning ved hjælp af koordinater

Koordinater hænger snævert sammen med begrebet basis. Når der i et vektorrum er valgt en basis, kan enhver vektor i vektorrummet beskrives ved hjælp af dens koordinater med hensyn til den valgte basis. Vi får hermed et særdeles praktisk alternativ til regneoperationerne addition og multiplikation med skalar, som det oprindeligt er defineret ud fra det konkrete vektorrums anatomi. I stedet for at udføre de særligt definerede regneoperationerne kan vi blot gennemføre taludregninger med de koordinater der svarer til den valgte basis. Det viser sig endda at vi kan forenkle og standardisere løsningen af typiske opgaver som er fælles for alle vektorrum. Men først giver vi en formel indføring af koordinater med hensyn til en valgt basis.

|||| Definition 7.28 Koordinater mht. given basis

I et n-dimensionalt vektorrum V er der givet a-basen $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ samt en vektor $\mathbf{x}$. Vi betragter den unikke linearkombination af basisvektorerne som $\mathbf{x}$ i følge sætning 7.16 kan opskrives ved:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n \,. \tag{7-20}$$

Koefficienterne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i (7-20) kaldes for $\mathbf{v}$'s *koordinater med hensyn til basen* a, eller kortere $\mathbf{v}$'s a-koordinater, og de samles i en *a-koordinatvektor* med følgende skrivemåde:

$$_{\mathrm{a}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} . \tag{7-21}$$

|||| Eksempel 7.29 Koordinater mht. en ny basis

I talrummet $\mathbb{R}^3$ er der givet en basis a ved $\big((0,0,1),(1,2,0),(1,-1,1)\big)$. Endvidere er der givet vektoren $\mathbf{v} = (7,2,6)$. Da der gælder

$$2\cdot(0,0,1) + 3\cdot(1,2,0) + 4\cdot(1,-1,1) = (7,2,6)$$

ser vi at

$$_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} .$$

Vektoren $(7,2,6)$ har dermed a-koordinaterne $(2,3,4)$.

For at kunne jonglere med mange vektorers koordinater i diverse regneopgaver får vi brug for følgende vigtige sætning.

|||| Sætning 7.30 Koordinatsætningen

I et vektorrum V er der givet to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ samt et reelt tal k. Der er endvidere valgt en vilkårlig basis a. De to regneoperationer $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ og $k\,\mathbf{u}$ kan da udføres ved hjælp af a-koordinaterne således:

1. $_{\mathrm{a}}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = {}_{\mathrm{a}}\mathbf{u} + {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v}$
2. $_{\mathrm{a}}(k\mathbf{u}) = k\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{u}$

Sagt med ord: Koordinaterne for en vektorsum fås ved at lægge koordinaterne for vektorerne sammen, og koordinaterne for en vektor ganget med et tal er vektorens koordinater ganget med tallet.

Bevis. Se beviset for den tilsvarende sætning for geometriske vektorer i rummet, sætning. Beviset for det generelle tilfælde fås som en simpel udvidelse. □

|||| Eksempel 7.31 Vektorregning ved hjælp af koordinater

Vi udfører nu en vektorregning ved hjælp af koordinater. Eksemplet er ikke specielt matematisk interessant, men vi gennemfører det detaljeret for at demonstrere teknikken i sætning 7.30.

Der er givet tre polynomier i vektorrummet $P_2(\mathbb{R})$:

$$R(x) = 2 - 3x - x^2\,, S(x) = 1 - x + 3x^2 \text{ og } T(x) = x + 2x^2\,.$$

Opgaven går ud på at bestemme polynomiet $P(x) = 2R(x) - S(x) + 3T(x)$. Vi vælger at udføre den ved hjælp af koordinaterne for polynomierne med hensyn til ***standard m-basis*** for $P_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
{}_{\mathrm{m}}P(x) &= {}_{\mathrm{m}}\big(2R(x) - S(x) + 3T(x)\big) \\
&= {}_{\mathrm{m}}(2R(x)) + {}_{\mathrm{m}}(-S(x)) + {}_{\mathrm{m}}(3T(x)) \\
&= 2\,{}_{\mathrm{m}}R(x) - {}_{\mathrm{m}}S(x) + 3\,{}_{\mathrm{m}}T(x) \\
&= 2\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Nu oversætter vi tilbage fra den fundne koordinatvektor til det ønskede polynomium:

$$P(x) = 3 - 2x + x^2\,.$$

7.6 Om brug af koordinatmatricer

Når man giver sig i kast med opgaver om vektorer og benytter sig af deres koordinater med hensyn til en given basis, fører det meget ofte til at man opstiller et lineært ligningssystem og løser opgaven ved hjælp af matrixregning. En matrix påkalder sig særlig opmærksomhed, nemlig den der fremkommer når man sætter nogle vektorers koordinatsøjler sammen til en *koordinatmatrix*:

|||| Forklaring 7.32 Koordinatmatrix for vektorsæt

Hvis der i et n-dimensionalt vektorrum V findes en basis a, og der er givet et ordnet sæt af m vektorer, opstår sættets ***a-koordinatmatrix*** ved at man i den givne rækkefølge stiller vektorernes a-koordinatsøjler sammen til en $m \times n$ matrix.

Tag for eksempel et sæt bestående af tre vektorer i $\mathbb{R}^2$: $\big((1,2),(3,4),(5,6)\big)$. Sættets koordinatmatrix med hensyn til standard e-basen for $\mathbb{R}^2$ er 2×3-matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Vi vil nu vise hvordan koordinatmatricer opstår igennem en række eksempler som vi for afvekslingens skyld tager fra forskellige vektorrum. Metoderne lader sig umiddelbart bruge på andre vektorrumstyper, og efter hvert eksempel gengiver vi metoden i en koncentreret og generel form.

Det er vigtigt for din samlede forståelse af vektorrumsteorien at du selv øver dig i og indser hvordan koordinatmatricer faktisk opstår når man er i gang med typiske opgaver.

7.6.1 Om en vektor er linearkombination af andre vektorer

Der er i $\mathbb{R}^4$ givet fire vektorer

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (1,1,1,1) \\ \mathbf{a}_2 &= (1,0,0,1) \\ \mathbf{a}_3 &= (2,3,1,4) \\ \mathbf{b} &= (2,-2,0,1) \end{aligned}$$

Opgave: Undersøg om $\mathbf{b}$ er en linearkombination af $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$.

Løsning: Vi skal undersøge om der findes $x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbb{R}$ således at

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}\,. \tag{7-22}$$

Ved hjælp af sætning 7.30 kan vi omskrive (7-22) til e-koordinatvektorligningen

$$x_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}2\\3\\1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$$

som er ensbetydende med det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_3 &= -2 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Vi opstiller ligningssystemets totalmatrix og angiver (uden mellemregninger) dens trappeform

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7-23}$$

Af (7-23) ses det at rangen af ligningssystemets kofficientmatrix er 3, mens rangen af totalmatricen er 4. Ligningssystemet har derfor ingen løsninger. Dette medfører at (7-22) ikke kan løses. Vi konkluderer

$$\mathbf{b} \notin \operatorname{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}.$$

|||| Metode 7.33 Linearkombination

Man kan afgøre om en given vektor $\mathbf{b}$ er en linarkombination af andre vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p$ ved at løse det lineære ligningssystem hvis totalmatrix er identisk med koordinatmatricen for $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p, \mathbf{b})$ med hensyn til en given basis.

NB: Generelt kan der være ingen, eller én eller uendeligt mange måder hvorpå vektoren kan skrives som linearkombinationer af de øvrige.

7.6.2 Om vektorer er lineært afhængige

Vi betragter i vektorrummet $\mathbb{R}^{2\times 3}$ de tre matricer:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \tag{7-24}$$

Opgave: Undersøg om de tre matricer er lineært afhængige.

Løsning: Vi benytter sætning 7.13 og forsøger at finde tre reelle tal x_1, x_2 og x_3 som ikke alle er lig med 0, men som opfylder

$$x_1\mathbf{A} + x_2\mathbf{B} + x_3\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7-25}$$

Ved hjælp af sætning 7.30 kan vi omskrive (7-25) til e-koordinatvektorligningen

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

som er ensbetydende med det homogene lineære ligningssystem hvis totalmatrix her opstilles sammen med dens trappeform (mellemregninger udelades):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7-26}$$

Af (7-26) ses at såvel ligningssystems koefficientmatrix som dets totalmatrix har rangen 2, og da antallet af ubekendte er større, nemlig 3, konkluderer vi at ligningen (7-25) har uendeligt mange løsninger, se sætning. Derfor er de tre matricer lineært afhængige, for eksempel kan man af $\operatorname{trap}(\mathbf{T})$ udlede at

$$-3\mathbf{A} + 2\mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

|||| Metode 7.34 Lineær afhængighed eller uafhængighed

Man kan afgøre om vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ er lineært afhængige ved at løse det homogene lineære ligningssystem hvis totalmatrix er identisk med koordinatmatricen for $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p, \mathbf{0})$ med hensyn til en given basis.

NB: Da ligningssystemet er homogent, er der én løsning eller uendeligt mange løsninger. Hvis rangen af koordinatmatricen er lig med p, er der én løsning, denne løsning må være nul-løsningen, og de p vektorer er derfor lineært uafhængige. Hvis rangen af koordinatmatricen er mindre end p, er der uendeligt mange løsninger. Der findes altså andre løsninger end nulløsningen, og de p vektorer er derfor lineært afhængige.

7.6.3 Om et sæt af vektorer er en basis

I et n-dimensionalt vektorrum kræves der n basisvektorer, se sætning 7.18. Når man bliver spurgt om et forelagt sæt af vektorer kan være en basis, kan man straks slutte at dette ikke er tilfældet hvis antallet af vektorer i sættet er mindre end eller større end n. Men hvis der *er* n vektorer i sættet, behøver man ifølge sætning 7.25 kun undersøge om sættet er lineært uafhængigt, og her har vi allerede metode 7.34 at gå frem efter. Vi kan dog på en interessant måde videreudvikle metoden, idet vi kan bringe determinanten af vektorsættets koordinatmatrix i spil!

Lad os for eksempel undersøge om polynomierne

$$P_1(x) = 1 + 2x^2,\; P_2(x) = 2 - x + x^2 \;\text{ og }\; P_3(x) = 2x + x^2$$

udgør en basis for $P_2(\mathbb{R})$. Da $\dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$, er antallet af polynomier i orden. For at undersøge om de også er lineært uafhængige, benytter vi deres koordinatvektorer med hensyn til ***monomiebasen*** og opstiller ligningen

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

som, hvis der er lineært uafhængigt, kun må løsningen $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Ligningen er ensbetydende med et homogent lineært ligningssystem bestående af 3 ligninger med 3 ubekendte. Systemets koefficientmatrix og totalmatrix er:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Som for ethvert homogent lineært ligningssystem består totalmatricens højreside af lutter 0'er, derfor er det på forhånd givet at $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T})$, og at der *er* løsninger. Der er én løsning netop når $\rho(\mathbf{A})$ er lig med antallet af ubekendte, det vil sige 3. Og denne løsning må da være nul-løsningen $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ idet L_{hom} altid indeholder nul-løsningen.

Her kan vi udnytte at $\mathbf{A}$ er en kvadratisk matrix og dermed har en *determinant*. $\mathbf{A}$ har fuld rang, netop når den er *regulær*, det vil sige $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Da udregning viser at $\det(\mathbf{A}) = 5$ kan vi konkludere at $\big(P_1(x), P_2(x), P_3(x)\big)$ udgør en basis for $P_2(\mathbb{R})$.

|||| Metode 7.35 Bevis for basis

Når man i et n-dimensionalt vektorrum V skal afgøre om et vektorsæt bestående af n vektorer $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ er en basis for V, behøver man blot undersøge om sættet er lineært uafhængigt. En særlig mulighed for at undersøge dette opstår ved at vektorsættets koordinatmatrix er en kvadratisk $n \times n$ matrix:

Sættet udgør en basis for V netop når determinanten af sættets koordinatmatrix med hensyn til en basis a er forskellig fra 0, kort sagt

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) \text{ er en basis} \Leftrightarrow \det\big(\begin{bmatrix} {}_a\mathbf{v}_1 & {}_a\mathbf{v}_2 & \cdots & {}_a\mathbf{v}_n \end{bmatrix}\big) \neq 0\,. \tag{7-27}$$

7.6.4 At finde de nye koordinater når der skiftes basis

Et teknisk problem af afgørende betydning for videregående brug af lineær algebra, er at kunne udregne nye koordinater for en vektor når der vælges ny basis. I den sammenhæng får en særlig *basisskiftematrix* en vigtig rolle. Vi demonstrerer nu hvordan basismatricer opstår.

I et 3-dimensionalt vektorrum V er der givet en basis a. Der vælges nu en ny basis b som er bestemt ved basisvektorernes a-koordinater:

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \; \text{og} \; {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}. $$

Opgave 1: Bestem a-koordinaterne for en vektor $\mathbf{v}$ som er givet ved b-koordinater således:

$$ {}_{\mathrm{b}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}. \tag{7-28} $$

Løsning: Udtrykket (7-28) svarer til vektorligningen

$$ \mathbf{v} = 5\mathbf{b}_1 - 4\mathbf{b}_2 - 1\mathbf{b}_3 $$

som vi nedenfor først omsætter til en a-koordinatvektorligning, hvis højreside vi vælger at omskrive til et matrix-vektorprodukt, før vi til sidst udregner facit:

$$ \begin{aligned} {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} &= 5\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}. \end{aligned} $$

Bemærk at 3×3-matricen i den sidste ligning er koordinatmatricen for b-basisvektorerne med hensyn til a-basen. Den spiller en vigtig rolle, da vi åbenbart kan finde a-koordinaterne for $\mathbf{v}$ ved at gange den med b-koordinatervektoren for $\mathbf{v}$! Matricen får derfor betegnelsen *basisskiftematrix*, dens egenskab er at den oversætter b-koordinater til a-koordinater, og den tildeles symbolet ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}$. Koordinatskifterelationen kan da skrives på denne bekvemme måde

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\, {}_{\mathrm{b}}\mathbf{v}. \tag{7-29} $$

Opgave 2: Bestem b-koordinaterne for en vektor $\mathbf{u}$ som er givet ved a-koordinaterne således:

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{7-30} $$

Løsning: Da ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}$ er koordinatmatrix for en basis er den *regulær* og har dermed en invers matrix. Vi kan derfor benytte koordinatskifterelationen (7-29) således:

$$ \begin{aligned} {}_{\mathrm{a}}\mathbf{u} &= {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\, {}_{\mathrm{b}}\mathbf{u} \;\Leftrightarrow \\ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}^{-1}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{u} &= {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}^{-1}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\, {}_{\mathrm{b}}\mathbf{u} \;\Leftrightarrow \\ {}_{\mathrm{b}}\mathbf{u} &= {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}^{-1}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{u} \;\Leftrightarrow \\ {}_{\mathrm{b}}\mathbf{u} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}. \end{aligned} $$

|||| **Metode 7.36 Koordinatskifte ved basisskifte**

Når der i et vektorrum er der givet en basis a, og når en ny basis b kendes ud fra dens basisvektorers a-koordinater, opstilles ***basisskiftematricen*** ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}$ som er identisk med a-koordinatmatricen for b-basisvektorerne.

1. Hvis b-koordinaterne for en vektor $\mathbf{v}$ er kendte, kan dens a-koordinater findes ved matrix-vektorproduktet:

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\, {}_{\mathrm{b}}\mathbf{v}\,. $$

2. Hvis det omvendt er a-koordinaterne for $\mathbf{v}$ som er kendte, kan dens b-koordinater findes ved matrix-vektorproduktet:

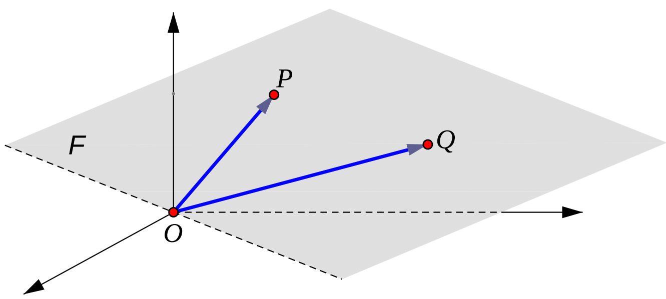
$$ {}_{\mathrm{b}}\mathbf{v} = {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}{}^{-1}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v}\,. $$

   Kort sagt er den basisskiftematrix der oversætter a-koordinater til b-koordinater, den inverse til den basisskiftematrix der oversætter b-koordinater til a-koordinater:

$$ {}_{\mathrm{b}}\mathbf{M}_{\mathrm{a}} = ({}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}})^{-1}\,. $$

7.7 Underrum

Ofte kommer man ud for at en delmængde af et vektorrum i sig selv er et vektorrum. På figur 7.3 ses to stedvektorer $\overrightarrow{OP}$ og $\overrightarrow{OQ}$ som udspænder planen F:



Figur 7.3: En plan gennem origo fortolket som et *underrum* i rummet

Da $\operatorname{span}\{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\}$ kan betragtes som et selvstændigt (2-dimensionalt) vektorrum, omtales det som et *underrum* i det (3-dimensionale) vektorrum af stedvektorer i rummet.

|||| Definition 7.37 Underrum

En delmængde U af et vektorum V kaldes et ***underrum*** i V hvis det i sig selv er et vektorrum.

I ethvert vektorrum V kan man straks udpege to underrum:
1) V er selv et underrum i V.
2) Mængden $\{\mathbf{0}\}$ er et underrum i V.
Disse underrum kaldes de *trivielle* underrum i V.

Når man skal tjekke om en delmængde er et underrum, behøver man kun at undersøge om stabilitetskravene er opfyldte. Dette fremgår af følgende sætning.

|||| Sætning 7.38 Tilstrækkelige betingelser for underrum

En delmængde U af et vektorum V er et underrum i V hvis U er *stabil* med hensyn til addition og multiplikation med skalar. Det betyder

1. Summen af to vektorer fra U tilhører også U.

2. Produktet af en vektor i U med en skalar tilhører også U.

|||| Bevis

Da U opfylder de to stabilitetskrav i definition 7.1, mangler vi blot at argumentere for at U også overholder de otte regneregler i definitionen. Men dette er klart, da alle vektorer i U også er vektorer i V hvor de gælder.

■

|||| Eksempel 7.39 Basis for et underrum

Vi betragter en delmængde M_1 af $\mathbb{R}^{2\times 2}$, som består af alle matricer af typen

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \tag{7-31}$$

hvor a og b er vilkårlige reelle tal. Vi prøver at lægge to matricer af typen (7-31) sammen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

og vi ganger en af typen (7-31) med en skalar

$$-3\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}.$$

I begge tilfælde er den resulterende matrix af typen (7-31), og det er klart at det samme ville være tilfældet hvis vi havde brugt andre. M_1 opfylder derfor stabilitetskravene for et vektorrum. Det følger derfor af sætning 7.38 at M_1 er et underrum i $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Bemærk endvidere at M_1 udspændes af to lineært uafhængige 2×2 matricer idet

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Derfor er M_1 et 2-dimensionalt underrum i $\mathbb{R}^{2\times 2}$, og en mulig basis for M_1 er givet ved

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

|||| Eksempel 7.40 Delmængde som ikke er et underrum

Delmængden M_2 af $\mathbb{R}^{2\times 2}$ består af alle matricer af typen

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a\cdot b & 0 \end{bmatrix} \tag{7-32}$$

hvor a og b er vilkårlige reelle tal. Vi prøver at lægge to matricer af typen (7-32) sammen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

og vi ganger en af typen (7-31) med en skalar

$$3\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

I ingen af tilfældene er den resulterende matrix af typen (7-32). M_2 kan derfor ikke være et underrum i $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

7.7.1 Om udspændinger som underrum

|||| Sætning 7.41 Udspændinger er underrum

For vilkårlige vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p$ i et vektorrum V er $\operatorname{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ et underrum i V.

|||| Bevis

Stabilitetskravene er opfyldt fordi 1) summen af to linearkombinationer af de p vektorer selv er en linearkombination af dem og 2) en linearkombination af de p vektorer ganget med en skalar selv er en linearkombination af dem. Resten følger af sætning 7.38.

■

Løsningsmængden L_{hom} for et homogent lineært ligningssystem med n ubekendte er altid et underrum i talrummet $\mathbb{R}^n$, og dimensionen af underrummet er det samme som antallet af frie parametre i L_{hom}. Det viser vi et eksempel på nedenfor.

|||| Eksempel 7.42 L_{hom} er et underrum

Det følgende homogene lineære ligningssystem af 3 ligninger med 5 ubekendte

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_3 - 11\,x_5 &= 0 \\ x_2 + 4\,x_5 &= 0 \\ x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

har løsningmængden (mellemregninger udelades):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{hvor } t_1, t_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{7-33}$$

Vi ser her at L_{hom} er en udspænding af to vektorer i $\mathbb{R}^5$. Den er da i følge sætning 7.41 et underrum i $\mathbb{R}^5$. Da de to vektorer endvidere klart er lineært uafhængige, er L_{hom} et 2-dimensionalt underrum i $\mathbb{R}^5$ som har basen

$$\big(\,(-2,0,1,0,0)\,,(11,-4,0,-1,1)\,\big)\,.$$

Igennem det følgende eksempel vil vi udarbejde en metode for hvordan man kan skaffe en basis for det underrum som udspændes af et antal givne vektorer i et vektorrum.

Betragt i $\mathbf{R}^3$ fire vektorer

$$\mathbf{v}_1 = (1,2,1),\ \mathbf{v}_2 = (3,0,-1),\ \mathbf{v}_3 = (-1,4,3) \text{ og } \mathbf{v}_4 = (8,-2,-4)\,.$$

Vi ønsker at bestemme en basis for underrummet

$$U = \text{span}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}\ .$$

Lad $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ være en vilkårlig vektor som tilhører U. Vi har dermed forudsat at den følgende vektorligning har en løsning:

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{b}\,. \tag{7-34}$$

Ved indsættelse af koordinatvektorerne for de fem vektorer i (7-34), ses det at (7-34) er ækvivalent med et inhomogent lineært ligningssystem som har totalmatricen:

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 8 & b_1 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & b_2 \\ 1 & -1 & 3 & -4 & b_3 \end{array}\right] \Rightarrow \text{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & c_1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{7-35}$$

c_1 står for det tal som b_1 er blevet omformet til efter de rækkeoperationer der har ført til $\operatorname{trap}(\mathbf{T})$. Tilsvarende med c_2. Bemærk at b_3 efter rækkeoperationerne skal være omformet til 0, ellers kunne $\mathbf{b}$ jo ikke være en løsning som forudsat.

Men det er især de ledende 1-taller i $\operatorname{trap}(\mathbf{T})$ vi skal være opmærksomme på! De viser nemlig at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ udspænder hele U, og at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uafhængige. Begge ting kan vi overbevise os om ved igen at betragte ligningen (7-34).

For det første: Antag at vi kun havde spurgt om $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ udspænder hele U. Så skulle vi have udeladt leddene med $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ fra (7-34), og så havde vi fået:

$$\operatorname{trap}(\mathbf{T}_2) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

som viser at $c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{b}$, og at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ dermed udspænder hele U.

For det andet: Antag at vi havde spurgt om $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uafhængige. Så skulle vi have udeladt leddene med $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ fra (7-34), og sat $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Og så havde vi fået:

$$\operatorname{trap}(\mathbf{T}_3) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

som viser at nul-vektoren kun kan skrive som linearkombination af $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ hvis begge koefficienterne x_1 og x_2 er 0. Og dermed viser at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uafhængige. Samlet er det vist at $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ er en basis for U.

Konklusionen er at en basis for U kan udpeges ved hjælp af de ledende 1-taller i $\operatorname{trap}(\mathbf{T})$, se (7-35). Højresiden i $\operatorname{trap}(\mathbf{T})$ indgik i vores argumentaion, men ses nu at være uden praktisk betydning. Vi kan derfor opsummere resultatet på følgende metode:

|||| **Metode 7.43 Om at udtynde et span til en basis**

Når man i et vektorrum V, hvori der er valgt en basis a, skal finde en basis for underrummet

$$U = \text{span}\left\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\right\}$$

kan alt aflæses af

$$\text{trap}\left(\left[\,{}_a\mathbf{v}_1 \quad {}_a\mathbf{v}_2 \quad \ldots \quad {}_a\mathbf{v}_p\,\right]\right). \tag{7-36}$$

Hvis der i den i'te søjle i (7-36) ikke optræder et ledende 1-tal, så fjernes $\mathbf{v}_i$ fra sættet $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$. Det således udtyndede vektorsæt er en basis for U.

Da antallet af ledende 1-taller i (7-36) er lig med antallet af basisvektorer i den valgte basis for U, følger det at

$$\text{Dim}(U) = \rho\left(\text{trap}\left(\left[\,{}_a\mathbf{v}_1 \quad {}_a\mathbf{v}_2 \quad \ldots \quad {}_a\mathbf{v}_p\,\right]\right)\right). \tag{7-37}$$

7.7.2 Uendeligt-dimensionale vektorrum

Inden vi afslutter denne eNote, der har dyrket brugen af baser og koordinater, må vi indrømme at det ikke er alle vektorrum som har en basis. Der findes nemlig ***uendeligt-dimensionale vektorrum***!

Det kan vi indse gennem det følgende eksempel:

|||| **Eksempel 7.44 Uendelig-dimensionalt vektorrum**

Alle polynomier i vektorrummet $P_n(\mathbb{R})$ er kontinuerte funktioner, derfor er $P_n(\mathbb{R})$ et n-dimensionalt underrum i vektorrummet $C^0(\mathbb{R})$ af alle reelle kontinuerte funktioner. Betragt nu $P(\mathbb{R})$, mængden af reelle polynomier, som med samme begrundelse også er et underrum i $C^0(\mathbb{R})$. Men $P(\mathbb{R})$ må være *uendelig-dimensionalt*, da den for ethvert n har $P_n(\mathbb{R})$ som underrum. Af samme grund må også $C^0(\mathbb{R})$ være uendeligt-dimensionalt.

|||| **Opgave 7.45**

Ved $C^1(\mathbb{R})$ forstås mængden af alle differentiable funktioner, der har $\mathbb{R}$ som definitionsmængde, og som har kontinuert afledet på $\mathbb{R}$.

Gør rede for at $C^1(\mathbb{R})$ er et uendeligt-dimensionalt underrum i $C^0(\mathbb{R})$.

eNote 8

Lineære Afbildninger

Denne eNote undersøger en vigtig type af afbildninger mellem vektorrum, nemlig lineære afbildninger. Det vises at kernen og billedrummet for lineære afbildninger er underrum i henholdsvis definitionsrummet og dispositionsrummet. Når der er valgt basis i definitionsrummet og i dispositionsrummet, kan spørgsmål vedrørende lineære afbildninger standardiseres, idet en lineær afbildning udtrykkes som et produkt mellem en såkaldt afbildningsmatrix og koordinaterne for de vektorer der ønskes afbildet. Da afbildningsmatricer afhænger af de to valgte baser, beskrives det hvordan afbildningsmatricerne ændres når en af baserne eller de begge udskiftes med andre. Forudsætninger for eNoten er viden om lineære ligningssystemer, se eNote, matrixalgebra, se eNote og vektorrum, se eNote.

8.1 Om afbildninger

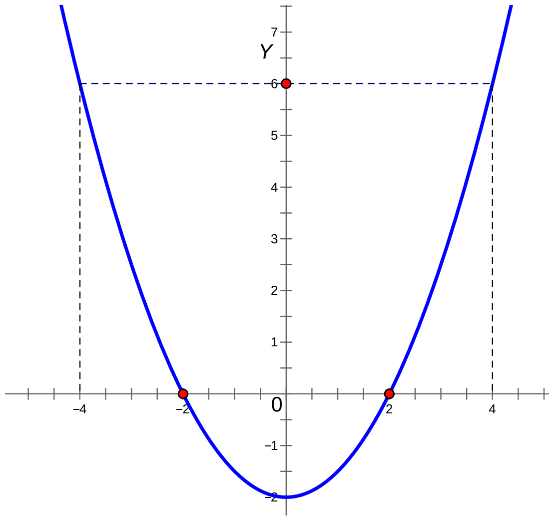
En afbildning er en forskrift f der til et element i en mængde A knytter et element i en mængde B, og forskriften skrives $f : A \rightarrow B$. A kaldes ***definitionsmængden*** og B ***dispositionsmængden***, og de kan være hvad som helst blot de er veldefinerede.

CPR-nummerering er en afbildning af mængden af statsborgere i Danmark ind i $\mathbb{R}^{10}$. Bemærk at der er en 10-dobbelt uendelig af elementer i dispositionsmængden $\mathbb{R}^{10}$, så vi har heldigvis kun brug for en meget lille delmængde af dem, ca fem millioner. De elementer i $\mathbb{R}^{10}$ som på et givet tidspunkt er i brug, er ***billedmængden*** for CPR-afbildningen.

En enkel type af afbildninger er elementære funktioner af typen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pilen udtrykker her at f til ethvert reelt tal x knytter et andet reelt tal $y = f(x)$. Betragt for eksempel funktionen:

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\,. \tag{8-1}$$

Her har forskriften form af en regneprocedure: Sæt tallet i anden, gang det med en halv og træk 2 fra. Elementære funktioner har en stor fordel ved at deres graf $\{\,(x,y)\,|\,y = f(x)\,\}$ kan tegnes og give et særligt overblik over afbildningen:



Figur 8.1: Graf for elementær funktion

Typiske spørgsmål i forbindelse med elementære funktioner, kommer igen i forbindelse med mere avancerede afbildninger. Lad os derfor indledningsvist kigge på nogle af de vigtigste:

1. Bestem nulpunkterne for f. Det betyder at vi skal finde alle x for hvilke $f(x) = 0$. I eksemplet er svaret $x = -2$ og $x = 2$.

2. Løs for et givet b ligningen $f(x) = b$. I eksemplet er $x = -4$ og $x = 4$ samtlige løsninger på $f(x) = 6$.

3. Bestem billedmængden (= værdimængden) for f. Vi skal finde alle de b for hvilke ligningen $f(x) = b$ har en løsning. I eksemplet er billedmængden $[\,-2; \infty\,[$.

I denne eNote ser vi på defintionsmængder, dispositionsmængder og billedmængder som er *vektorrum*. Derfor præciseres mængdebegreberne til definitions*rum*, dispositions*rum* og billed*rum*. En afbildning $f : V \to W$ knytter til enhver vektor $\mathbf{x}$ i *definitionsrummet* V en vektor $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ i *dispositionsrummet* W. Alle de vektorer i W som er billede af en vektor i V udgør *billedrummet*.

|||| Eksempel 8.1 Afbildning fra vektorrum til vektorrum

En afbildning $g : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ er givet ved

$$\mathbf{Y} = g(\mathbf{X}) = \mathbf{X}\mathbf{X}^\top . \tag{8-2}$$

Der gælder for eksempel at

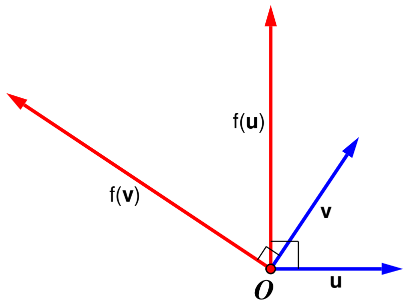
$$g\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

8.2 Eksempler på lineære afbildninger i planen

Vi undersøger i det følgende en afbildning f der har mængden af geometriske vektorer i planen som både definitionsrum og dispositionsrum. Afbildningen er givet ved

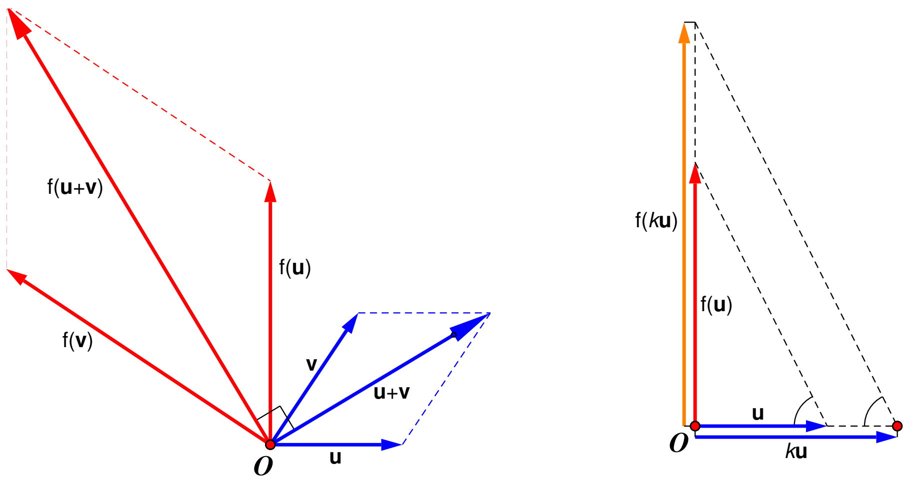
$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = 2\,\hat{\mathbf{x}}\,. \tag{8-3}$$

Til enhver vektor i planen er der altså knyttet dens *tværvektor* $\hat{\mathbf{x}}$ multipliceret med 2. På figur 8.2 er der tegnet to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ og deres billeder $f(\mathbf{u})$ og $f(\mathbf{v})$.



Figur 8.2: To vektorer (blå) og deres billeder (røde).

Figur 8.2 giver anledning til et par interessante spørgsmål: Hvordan afbildes sumvektoren $\mathbf{u}+\mathbf{v}$? Mere præcist: Hvordan forholder billedvektoren $f(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ sig til de to billedvektorer $f(\mathbf{u})$ og $f(\mathbf{v})$? Og hvad er relationen mellem billedvektorerne $f(k\mathbf{u})$ og $f(\mathbf{u})$??



Figur 8.3: Konstruktion af $f(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ og $f(k\mathbf{u})$.

Som antydet på figur 8.3 opfylder f to meget enkle regler:

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \;\text{ og }\; f(k\mathbf{u}) = k\,f(\mathbf{u})\,. \tag{8-4}$$

Ved hjælp af af de velkendte regneregler for tværvektorer

1. $\widehat{\mathbf{u}+\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{v}}$.

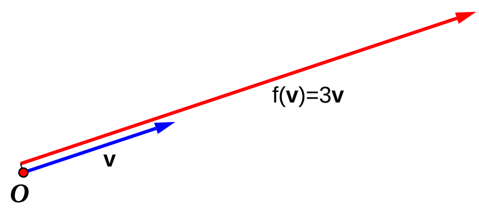
2. $\widehat{k\mathbf{u}} = k\hat{\mathbf{u}}$.

kan vi nu bekræfte påstanden (8-4) :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= 2\widehat{\mathbf{u}+\mathbf{v}} = 2(\hat{\mathbf{u}}+\hat{\mathbf{v}}) = 2\hat{\mathbf{u}}+2\hat{\mathbf{v}} \\ &= f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v})\,. \\ f(k\mathbf{u}) &= 2\widehat{k\mathbf{u}} = 2k\hat{\mathbf{u}} = k(2\hat{\mathbf{u}}) \\ &= k\,f(\mathbf{u})\,. \end{aligned}$$

|||| Opgave 8.2

En afbildning f_1 af plane vektorer er givet ved $f_1(\mathbf{v}) = 3\mathbf{v}$, se figur 8.4:

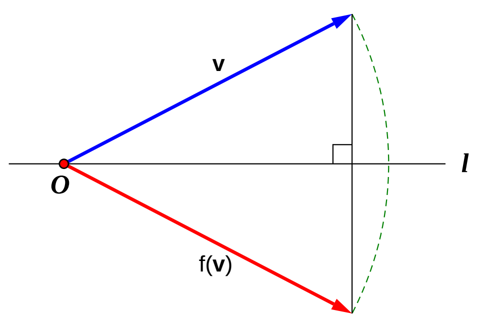


Figur 8.4: Skalering af vektor

Tegn en figur der demonstrerer at f_1 opfylder reglerne (8-4) .

|||| Opgave 8.3

I planen er der givet en linje l gennem Origo. En afbildning f_2 spejler vektorer afsat ud fra Origo i l , se figur 8.5:

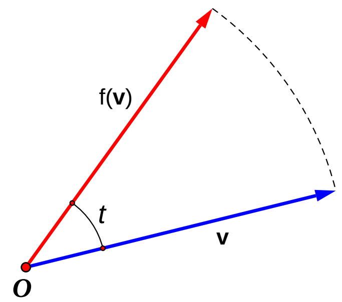


Figur 8.5: Spejling af vektor

Tegn en figur der demonstrerer at f_2 opfylder reglerne (8-4) .

|||| Opgave 8.4

En afbildning f_3 drejer vektorer afsat ud fra Origo vinklen t omkring Origo mod uret, se figur 8.6:



Figur 8.6: Drejning af vektor

Tegn en figur der demonstrerer at f_3 opfylder reglerne (8-4) .

Alle afbildninger der har været berørt i dette afsnit er *lineære*, fordi de opfylder (8-4) . Vi tager nu spørgsmålet om lineære afbildninger mellem vektorrum op til generel behandling.

8.3 Lineære afbildninger

|||| Definition 8.5 Lineær afbildning

Lad V og W være to vektorrum. En afbildning $f : V \to W$ kaldes ***lineær*** hvis den for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ og alle skalarer k opfylder de følgende to *linearitetsbetingelser*:

$$L_1: \quad f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})\,.$$
$$L_2: \quad f(k\mathbf{u}) = k\,f(\mathbf{u})\,.$$

V kaldes *definitionsrummet* og W *dispositionsrummet* for f .

Ved at sætte $k = 0$ i linearitetsbetingelsen L_2 i definition 8.5 , ses det at

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\,. \tag{8-5}$$

Der gælder med andre ord for enhver lineær afbildning $f : V \to W$ at nul-vektoren i V afbildes i nul-vektoren i W .

Billedet af en linearkombination bliver på en meget enkel måde en linearkombination af billederne af de vektorer der indgår i den givne linearkombination:

$$f(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_p\mathbf{v}_p) = k_1 f(\mathbf{v}_1) + k_2 f(\mathbf{v}_2) + \ldots + k_p f(\mathbf{v}_p)\,. \tag{8-6}$$

Dette resultat fås ved gentagen anvendelse af L_1 og L_2.

|||| Eksempel 8.6 Lineær afbildning

En afbildning $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ er givet ved forskriften

$$f(x_1, x_2) = (0, x_1, x_2, x_1 + x_2)\,. \tag{8-7}$$

$\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^4$ er vektorrum, og vi undersøger om f er lineær vektorrumsafbildning? Vi tester først venstresiden og højresiden af L_1 med vektorerne $(1, 2)$ og $(3, 4)$:

$$\begin{aligned} f(\,(1,2) + (3,4)\,) &= f(4,6) = (0,4,6,10)\,. \\ f(1,2) + f(3,4) &= (0,1,2,3) + (0,3,4,7) = (0,4,6,10)\,. \end{aligned}$$

Dernæst testes L_2 med vektoren (2,3) og skalaren 5:

$$\begin{aligned} f(\,5\cdot(2,3)\,) &= f(10,15) = (0,10,15,25)\,. \\ 5\cdot f(2,3) &= 5\cdot(0,2,3,5) = (0,10,15,25)\,. \end{aligned}$$

Undersøgelsen tyder på at f er lineær. Dette vises nu generelt. Først testes L_1:

$$\begin{aligned} f(\,(a,b) + (c,d)\,) &= f(a+c, b+d) = (0, a+c, b+d, a+b+c+d)\,. \\ f(a,b) + f(c,d) &= (0,a,b,a+b) + (0,c,d,c+d) = (0, a+c, b+d, a+b+c+d)\,. \end{aligned}$$

Dernæst testes L_2:

$$\begin{aligned} f(\,k\cdot(a,b)\,) &= f(k\cdot a, k\cdot b) = (0, k\cdot a, k\cdot b, k\cdot a + k\cdot b)\,. \\ k\cdot f(a,b) &= k\cdot(0,a,b,a+b) = (0, k\cdot a, k\cdot b, k\cdot a + k\cdot b)\,. \end{aligned}$$

Det ses at f opfylder begge linearitetsbetingelser, derfor er lineær.

|||| Eksempel 8.7 Afbildning som ikke er lineær

I eksempel 8.1 betragtede vi afbildningen $g : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ givet ved

$$\mathbf{Y} = g(\mathbf{X}) = \mathbf{X}\mathbf{X}^{\top}\,. \tag{8-8}$$

At denne afbildning *ikke* er lineær, kan man dokumentere ved at finde et eksempel hvor enten L_1 eller L_2 ikke gælder. Nedenfor er fundet en matrix $\mathbf{X}$ som ikke opfylder $g(2\mathbf{X}) = 2\,g(\mathbf{X})$:

$$g\left(2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right) = g\left(\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}.$$

Men

$$2\,g\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right)=2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

Derfor opfylder g ikke linearitetsbetingelse L_2, og g er derfor ikke lineær.

|||| Eksempel 8.8 Lineær afbildning

Der er givet en afbildning $f : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ved forskriften

$$f\big(\,P(x)\,\big) = P'(1)\,. \tag{8-9}$$

Til ethvert andengradspolynomium er altså knyttet dets tangenthældning i $x = 1$. Et vilkårligt andengradspolynomium P kan opskrives ved $P(x) = ax^2 + bx + c$. Da $P'(x) = 2ax + b$ har vi:

$$f\big(\,P(x)\,\big) = 2a + b\,.$$

Hvis vi sætter $P_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ og $P_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, får vi

$$\begin{aligned} f\big(\,P_1(x) + P_2(x)\,\big) &= f\big(\,(a_1+a_2)x^2 + (b_1+b_2)x + (c_1+c_2)\,\big)\\ &= \big(\,2(a_1+a_2) + (b_1+b_2)\,\big)\\ &= (2a_1+b_1) + (2a_2+b_2)\\ &= f\big(\,P_1(x)\,\big) + f\big(\,P_2(x)\,\big)\,. \end{aligned}$$

Endvidere:

$$\begin{aligned} f\big(\,k\cdot P(x)\,\big) &= f\big(\,k\cdot ax^2 + k\cdot bx + k\cdot c\,\big)\\ &= (2k\cdot a + k\cdot b) = k\cdot(2a+b)\\ &= k\cdot f\big(\,P(x)\,\big)\,. \end{aligned}$$

Det er hermed vist at f opfylder linearitetsbetingelserne L_1 og L_2, og at f dermed er en lineær afbildning.

|||| Opgave 8.9

Ved $C^\infty(\mathbb{R})$ forstås vektorrummet som består af alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som kan differentieres et vilkårligt antal gange. Et eksempel (blandt uendeligt mange) er funktionen $f(x) = \sin(x)$. Betragt afbildningen $\mathrm{D} : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ som til en funktion $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ knytter dens afledede:

$$\mathrm{D}\big(\,f(x)\,\big) = f'(x)\,.$$

Vis at D er en lineær afbildning.

8.4 Kerne og billedrum

Nulpunkterne for en elementær funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er alle de reelle tal x som opfylder $f(x) = 0$. Det tilsvarende begreb for lineære afbildninger kaldes *kernen*. Billedmængden (eller værdimængden) for en elementær funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er alle de reelle tal b, hvortil der findes et reelt tal x således at $f(x) = b$. Det tilsvarende begreb for lineære afbildninger kaldes *billedrummet*. Lad os straks retfærdiggøre at ordet *rum* optræder her. Såvel kernen som billedrummet for en lineær afbildning er underrum. Kernen er et underrum i definitionsmængden og billedrummet er et underrum i dispositionsrummet. Dette vil blive uddybet nedenfor.

|||| Definition 8.10 Kerne og billedrum

Ved ***kernen*** for en lineær afbildning $f : V \to W$ forstås mængden:

$$\ker(f) = \{\, \mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in W \,\} . \tag{8-10}$$

Ved ***billedrummet*** for f forstås mængden:

$$f(V) = \{\, \mathbf{b} \in W \mid \text{Der findes mindst et } \mathbf{x} \in V \text{ hvor } f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \,\} . \tag{8-11}$$

|||| Sætning 8.11 Kernen og billedrummet er underrum

Lad $f : V \to W$ være en lineær afbildning. Der gælder:

1. Kernen for f er et underrum i V.
2. Billedrummet $f(V)$ er et underrum i W.

|||| Bevis

1) Vi skal vise at kernen for f opfylder stabilitetskravene, se sætning. Antag at $\mathbf{x}_1 \in V$ og $\mathbf{x}_2 \in V$, og at k er en vilkårlig skalar. Da der (med brug af L_1) gælder:

$$f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} ,$$

er kernen for f stabil med hensyn til addition. Da der endvidere (med brug af L_2) gælder:

$$f(k\mathbf{x}_1) = k\, f(\mathbf{x}_1) = k\,\mathbf{0} = \mathbf{0} ,$$

er kernen for f også stabil med hensyn til multiplikation med skalar. Samlet er det dermed vist at kernen for f er et underrum i V.

2) Vi skal vise at billedrummet $f(V)$ opfylder stabilitetskravene. Antag at $\mathbf{b}_1 \in f(V)$ og $\mathbf{b}_2 \in f(V)$, og at k er en vilkårlig skalar. Der findes ifølge definitionen, se (8.10), vektorer $\mathbf{x}_1 \in V$ og $\mathbf{x}_2 \in V$ der opfylder $f(\mathbf{x}_1) = \mathbf{b}_1$ og $f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_2$. Vi skal vise at der findes et $\mathbf{x} \in V$ så $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$. Det gør der, for vi kan blot tage $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ så gælder

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 .$$

Hermed er det vist at $f(V)$ er stabil med hensyn til addition. Vi skal nu på lignende måde vise at der findes et $\mathbf{x} \in V$ så $f(\mathbf{x}) = k\mathbf{b}_1$. Her vælger vi $\mathbf{x} = k\mathbf{x}_1)$, så gælder der

$$f(\mathbf{x}) = f(k\mathbf{x}_1) = kf(\mathbf{x}_1) = k\mathbf{b}_1\,,$$

hvoraf det fregår at $f(V)$ er stabil med hensyn til multiplikation med skalar. Samlet er det vist at $f(V)$ er et underrum i W.

■

Men hvorfor er det så interessant at kernen og billedrummet for en lineær afbildning er underrum? Svaret er at det bliver enklere at beskrive dem, når vi ved at de har vektorrumsegenskaber og dermed på forhånd kender deres struktur. Særlig elegant er det når vi kan bestemme kernen og billedmængden ved at angive en basis for dem. Dette forsøger vi i de næste to eksempler.

|||| Eksempel 8.12 Bestemmelse af kerne og billedrum

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to R^2$ er givet ved forskriften:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3\,, -x_1 - 2x_2 - x_3)\,. \tag{8-12}$$

Vi ønsker at bestemme kernen for f og billedrummet $f(\mathbb{R}^3)$. Bemærk at det er oplyst at f er lineær, det behøver vi derfor ikke undersøge.

Bestemmelse af kernen:
Vi skal løse ligningen

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{8-13}$$

Dette er et lineært ligningssystem bestående af to ligninger med tre ubekendte. Det har totalmatricen

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{trap}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser at ligningssystemet har løsningsmængden

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Løsningsmængden er udspændt af to lineært uafhængige vektorer. Vi kan derfor konkludere at kernen for f er et 2-dimensionalt underrum i $\mathbb{R}^3$ som kan karakteriseres præcist ved en basis:

$$\text{Basis for kernen}: \big(\,(-2,1,0), (-1,0,1)\,\big)\,.$$

Bestemmelse af billedrummet:
Vi skal finde alle de $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ for hvilke følgende ligning har en løsning:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \tag{8-14}$$

Dette er et lineært ligningssystem bestående af to ligninger med tre ubekendte. Det har totalmatricen

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & b_1 \\ -1 & -2 & -1 & b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

Hvis $b_1 + b_2 = 0$, det vil sig hvis $b_1 = -b_2$, har ligningssystemet uendeligt mange løsninger. Hvis derimod $b_1 + b_2 \neq 0$ er der ingen løsninger. Alle de $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ som er billeder af mindst et $\mathbf{x} \in R^3$ har åbenbart formen:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi konkluderer at $f(V)$ er et 1-dimensionalt underrum i $\mathbb{R}^2$ som kan karakteriseres præcist ved en basis:

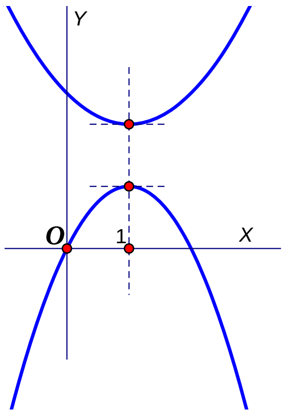
$$\text{Basis for billedrummet} : \big((-1, 1) \big).$$

|||| Eksempel 8.13 Bestemmelse af kerne og billedrum

I eksempel 8.8 blev det vist at afbildningen $f : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ givet ved forskriften

$$f\big(P(x)\big) = P'(1). \tag{8-15}$$

er lineær. Kernen for f består af alle andengradspolynomier der opfylder $P'(1) = 0$. Grafen for et par stykker af dem er vist på figur 8.7:



Figur 8.7: To vektorer i kernen

Bestemmelse af kernen:
Idet $P'(x) = 2ax + b$ får vi at $P(x) \in \ker(f)$ hvis og kun hvis

$$P'(1) = 2a + b = 0,$$

det vil sig hvis og kun hvis

$$b = -2a.$$

Et andengradspolynomium tilhører derfor kernen for f hvis og kun hvis det har forskriften

$$P(x) = ax^2 - 2ax + c = a \cdot (x^2 - 2x) + c \cdot 1.$$

Vi ser at kernen er udspændt af de to lineært uafhængige polynomier $(x^2 - 2x)$ og 1, og konkluderer at $(\, x^2 - 2x\,,\,1\,)$ er en basis for kernen. Hermed er $\ker(f)$ bestemt.

Bestemmelse af billedrummet:
For ethvert $k \in \mathbb{R}$ findes der andengradspolynomier $P(x)$ som opfylder $P'(1) = k$. Det gør for eksempel $P(x) = 0x^2 + kx + 0 = kx$. Vi konkluderer at billerummet $f\big(\,P_2(\mathbb{R})\,\big) = \mathbb{R}$.

8.5 Afbildningsmatrix

Alle lineære afbildninger fra et endeligt dimensionalt definitionsrum V til et endeligt dispositionsrum W lader sig beskrive ved hjælp af en *afbildningsmatrix*. Det handler dette afsnit om. Forudsætningen er blot at der vælges en basis for både V og W, og at vi overgår fra vektorregning til regning med vektorernes koordinater med hensyn til de valgte baser. Den store fordel ved dette setup er at vi kan opstille generelle regnemetoder for alle lineære afbildninger mellem endeligt-dimensionale vektorrum. Det ser vi på senere afsnit, se afsnit 8.6. Her drejer det sig hvordan man opstiller afbildningsmatricerne.

Vi begynder med at betragte en afbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ som har form af et matrix-vektorprodukt:

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}\,. \tag{8-16}$$

Da det fremgår at $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ giver forskriften (8-16) mening netop når $\mathbf{A}$ er en $m \times n-$matrix. Ved at benytte regneregler for matrixprodukt, se sætning, opnår vi for ethvert valg af $\mathbf{x}_1\,, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ og enhver skalar k:

$$f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{A}\,(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2)\,,$$

$$f(k\mathbf{x}_1) = \mathbf{A}\,(k\mathbf{x}_1) = k(\mathbf{A}\,\mathbf{x}_1) = kf(\mathbf{x}_1)\,.$$

Vi ser at afbildningen opfylder linearitetsbetingelserne L_1 og L_2. Enhver afbildning af formen (8-16) er derfor lineær.

|||| Eksempel 8.14 Afbildning ved hjælp af matrix

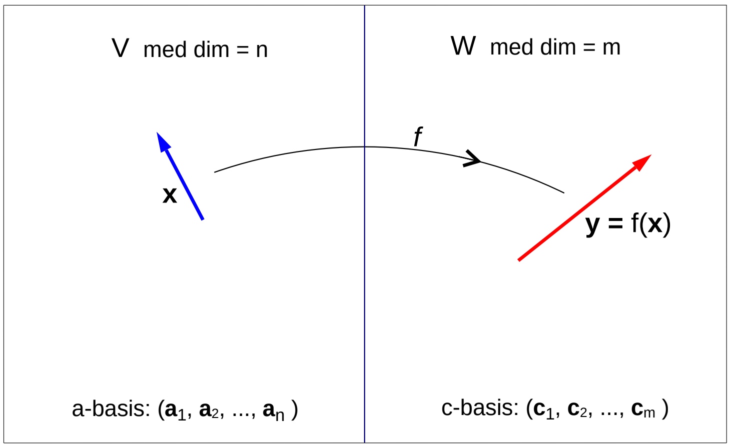
Formlen:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix}$$

angiver en lineær afbildning fra vektorrummet $\mathbb{R}^2$ til vektorrummet $\mathbb{R}^3$.

Men også det modsatte gælder: Enhver lineær afbildning mellem endeligt-dimensionale vektorrum kan skrives som et matrix-vektorprodukt på formen (8-16) hvis vi erstatter $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ med deres koordinatar med hensyn til en valgt basis i definitionsrummet henholdsvis dispositionsrummet. Dette viser vi i det følgende.

Vi betragter nu en lineær afbildning $f : V \to W$ hvor V er et n-dimensionalt og W et m-dimensionalt vektorrum, se figur 8.8:



Figur 8.8: Lineær afbildning

For V er der valgt en basis a og for W en basis c. Det betyder at en given vektor $\mathbf{x} \in V$ kan skrives som en unik linearkombination af a-basisvektorerne, og at billedet $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ kan skrives som en unik linearkombination af c-basisvektorerne:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n \text{ og } \mathbf{y} = y_1\mathbf{c}_1 + y_2\mathbf{c}_2 + \cdots + y_m\mathbf{c}_m\,.$$

Det betyder at $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ er koordinatsæt for $\mathbf{x}$ med hensyn til a-basis, og at $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ er koordinatsæt for $\mathbf{y}$ med hensyn til c-basis.

Vi stiller nu spørgsmålet: Hvordan kan vi beskrive relationen mellem a-koordinatvektoren for vektor $\mathbf{x} \in V$ og c-koordinatvektoren for billedvektoren $\mathbf{y}$? Vi er med andre ord på jagt efter relationen mellem:

$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \text{ og } {}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Dette udvikler vi gennem de følgende omskrivninger hvor vi først, ved hjælp af L_1 og L_2, får opskrevet $\mathbf{y}$ som en linearkombination af billederne af a-vektorerne.

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= f(\mathbf{x}) \\ &= f(x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n) \\ &= x_1 f(\mathbf{a}_1) + x_2 f(\mathbf{a}_2) + \cdots + x_n f(\mathbf{a}_n)\,. \end{aligned}$$

Herefter kan vi undersøge koordinatvektoreren for $\mathbf{y}$ med hensyn til c-basis, idet vi først bruger koordinatsætningen, se sætning, og derefter definitionen på matrixvektor-produkt, se definition.

$$\begin{aligned} {}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} &= {}_{\mathrm{c}}\big(\, x_1 f(\mathbf{a}_1) + x_2 f(\mathbf{a}_2) + \cdots + x_n f(\mathbf{a}_n)\,\big) \\ &= x_1\, {}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_1) + x_2\, {}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_2) + \cdots + x_n\, {}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_n) \\ &= \big[\, {}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_1) \quad {}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_2) \quad \cdots \quad {}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_n)\,\big]\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{x}\,. \end{aligned}$$

Matricen $\left[\, {}_{c}f(\mathbf{a}_1) \quad {}_{c}f(\mathbf{a}_2) \quad \cdots \quad {}_{c}f(\mathbf{a}_n) \,\right]$ i den sidste ligning kaldes *afbildningsmatricen* for f med hensyn til a-basis i V og c-basis i W.

Vi har hermed opnået dette vigtige resultat: Koordinatvektoren ${}_{c}\mathbf{y}$ kan opnås ved at man ganger afbildningsmatricen med koordinatvektoren ${}_{a}\mathbf{x}$. Resultaterne opsummerer vi nu i det følgende.

|||| Definition 8.15 Afbildningsmatrix

Lad $f : V \to W$ være en lineær afbildning fra et n-dimensionalt vektorrum V til et m-dimensionalt vektorrum W. Ved ***afbildningsmatricen*** for f med hensyn til basis a i V og basis c i W forstås $m \times n$-matricen:

$$ {}_{c}\mathbf{F}_{a} = \left[\, {}_{c}f(\mathbf{a}_1) \quad {}_{c}f(\mathbf{a}_2) \quad \cdots \quad {}_{c}f(\mathbf{a}_n) \,\right]. \tag{8-17}$$

Afbildningsmatricen for f består dermed af de n c-koordinatvektorer for billederne ved f af de n a-basisvektorer i V.

Hovedopgaven for en afbildningsmatrix er naturligvis at kunne bestemme billeder i W af vektorer i V, og den legitimeres af den følgende sætning som er en opsummering af undersøgelserne ovenfor.

|||| Sætning 8.16 Hovedsætning om afbildningsmatrix

Lad V være et n-dimensionalt vektorrum med valgt basis a og W et m-dimensionalt vektorrum med valgt basis c.

1. For en lineær afbildning $f : V \to W$ gælder at hvis $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ er billedet af en vilkårlig vektor $\mathbf{x} \in V$, så gælder der:

$$ {}_{c}\mathbf{y} = {}_{c}\mathbf{F}_{a}\, {}_{a}\mathbf{x} \tag{8-18}$$

   hvor ${}_{c}\mathbf{F}_{a}$ er afbildningsmatricen for f hensyn til basis a i V og basis c i W.

2. Antag omvendt at billederne $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ for en afbildning $g : V \to W$ kan fås på koordinatform ved

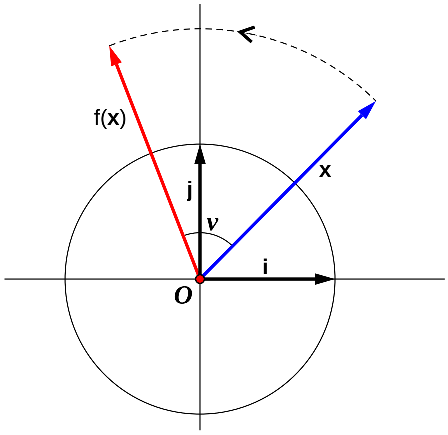
$$ {}_{c}\mathbf{y} = {}_{c}\mathbf{G}_{a}\, {}_{a}\mathbf{x} \tag{8-19}$$

   hvor ${}_{c}\mathbf{G}_{a} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, så er g lineær, og ${}_{c}\mathbf{G}_{a}$ er afbildningsmatricen for g hensyn til basis a i V og basis c i W..

Herefter følger tre eksempler på opstilling og elementær brug af afbildningsmatricer.

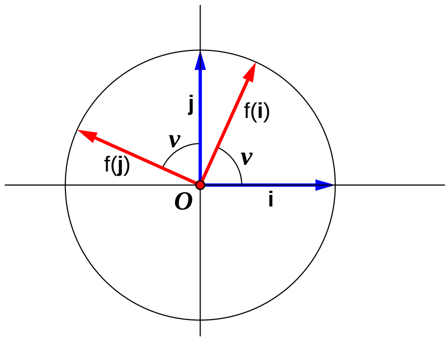
|||| Eksempel 8.17 Opstilling og brug af afbildningsmatrix

Drejning af plane vektorer afsat ud fra Origo er et enkelt eksempel på en lineær afbildning, se opgave 8.4. Lad v være en vilkårlig vinkel, og lad f være den lineære afbildning der drejer en vilkårlig vektor vinkel v omkring Origo mod uret, se figur 8.9.



Figur 8.9: Lineær drejning omkring Origo

Vi ønsker at bestemme afbildningsmatricen for f med hensyn til standardbasen for vektorer i planen. Vi har derfor brug for billederne af basisvektorerne $\mathbf{i}$ og $\mathbf{j}$, se figur 8.10.



Figur 8.10: Bestemmelse af afbildningsmatrix

Det ses at $f(\mathbf{i}) = (\cos(v), \sin(v))$ og $f(\mathbf{j}) = (-\sin(v), \cos(v))$. Den ønskede afbildningsmatrix er derfor

$$ {}_{\mathrm{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{bmatrix}. $$

Koordinaterne for billedet $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ af en given vektor $\mathbf{x}$ fås dermed ud fra ligningen:

$$ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. $$

|||| Eksempel 8.18 Opstilling og brug af afbildningsmatrix

I et 3-dimensionalt vektorrum V er der valgt en basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, og i et 2-dimensionalt vektorrum W er der valgt en basis $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$. En lineær afbildning $f : V \to W$ opfylder at:

$$f(\mathbf{a}_1) = 3\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\,,\ \ f(\mathbf{a}_2) = 6\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2 \ \text{ og } \ f(\mathbf{a}_3) = -3\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\,. \tag{8-20}$$

Vi ønsker at finde billedet ved f af vektoren $\mathbf{v} = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \in V$ ved hjælp af afbildningsmatricen ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$. Afbildningsmatricen opstilles nemt da vi allerede fra (8-20) kender billederne af basisvektorerne i V:

$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = \left[\, {}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_1) \quad {}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_2) \quad {}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_3) \,\right] = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Da $\mathbf{v}$ har koordinatsættet $(1,2,1)$ med hensyn til a-basis, finder vi koordinatvektoren for $f(\mathbf{v})$ således:

$${}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{v}) = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vi har hermed fundet $f(\mathbf{v}) = 12\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2$.

|||| Eksempel 8.19 Opstilling af brug af afbildningsmatrix

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ er givet ved:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 \end{bmatrix}. \tag{8-21}$$

Lad os bestemme afbildningsmatricen for f med hensyn til standard e-basis i $\mathbb{R}^4$ og standard e-basis i $\mathbb{R}^3$. Først finder vi billederne af de fire e-basisvektorer i $\mathbb{R}^4$ ved hjælp af forskriften (8-21):

$$f(1,0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \ f(0,1,0,0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix},$$
$$f(0,0,1,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},\ \ f(0,0,0,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vi kan nu opstille afbildningsmatricen for f:

$${}_{\mathrm{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}. \tag{8-22}$$

Vi ønsker at finde billedet $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ af vektoren $\mathbf{x} = (1,1,1,1)$. Til rådighed har vi naturligvis forskriften (8-21), men vi vælger at finde billedet ved hjælp af afbildningsmatricen:

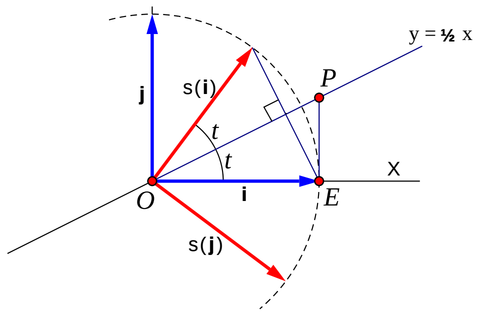
$${}_{\mathrm{e}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{e}}\,{}_{\mathrm{e}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vi har hermed fundet ${}_{\mathrm{e}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{e}}f(1,1,1,1) = (4,2,-1)$.

|||| Opgave 8.20

I planen er der givet et sædvanligt $(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$-koordinatsystem, og alle vektorer tænkes afsat ud fra Origo. Spejling af vektorer i linjen $y = \frac{1}{2}x$ er en lineær afbildning, lad os kalde den s .

Bestem $s(\mathbf{i})$ og $s(\mathbf{j})$, opstil afbildningsmatricen ${}_{\mathrm{e}}\mathbf{S}_{\mathrm{e}}$ for s og bestem et udtryk for spejlingen af en vilkårlig plan vektor $\mathbf{v}$ med e-koordinaterne (v_1, v_2) . Figur 8.11 indholder nogle hints til bestemmelse af $s(\mathbf{i})$. Gå frem på tilsvarende vis med $s(\mathbf{j})$.



Figur 8.11: Spejling af standardbasisvektorer.

8.6 Om brug af afbildningsmatricer

Afbildningsmatricer er et meget perspektivrigt redskab. Det tillader os at oversætte spørgsmål om lineære afbildninger mellem vektorrum til spørgsmål om matricer og koordinatvektorer som vi umiddelbart kan regne på. Metoderne forudsætter blot at der er valgt en basis i hvert af vektorrummene, og at den afbildningsmatrix som hører til de to baser, er opstillet. Sådan kan vi reducere spørgsmål af så forskellig karakter som at finde polynomier med visse egenskaber, at finde resultatet af en geometrisk konstruktion og at løse differentialligninger, til spørgsmål der kan undersøges ved hjælp af matrixalgebra.

Som gennemgående eksempel ser vi på en lineær afbildning $f : V \rightarrow W$ hvor V er et 4-dimensionalt vektorrum med valgt basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$, og hvor W er et 3-dimensionalt vektorrum med valgt basis $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$. Afbildningsmatricen for f er:

$$ {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} . \tag{8-23} $$

8.6.1 At finde kernen for *f*

Når man skal finde kernen for f, skal man finde alle $\mathbf{x} \in V$ som afbildes i $\mathbf{0} \in W$. Det vil sige at man skal løse vektorligningen

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\,.$$

Denne ligning er ifølge sætning 8.16 ensbetydende med matrixligningen

$$\begin{aligned} & {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{0} \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

som svarer til et homogene lineære ligningssystem med totalmatricen:

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -1 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathrm{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Det ses at løsningsmængden er udspændt af to lineært uafhængige vektorer: $(-2, 1, 1, 0)$ og $(1, -3, 0, 1)$. Lad $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være de to vektorer i V, som er bestemt ved a-koordinater således:

$${}_{\mathrm{a}}\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 1, 0) \;\text{ og }\; {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v}_2 = (1, -3, 0, 1)\,.$$

Så er $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ en basis for kernen for f, og kernen for f har dimensionen 2.

Pointe: Antallet $n = 4$ af ubekendte i det løste ligningssystem er pr. definition lig med antallet af søjler i ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$ som igen er lig med $\dim(V)$, se definition 8.15. Endvidere bemærkes at ligningssystemets koefficientmatrix er identisk med ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$. Hvis rangen af koefficientmatricen er k, ved vi at løsningsmængden og dermed kernen er udspændt af $(n - k)$ lineært uafhængige retningsvektorer hvor k er rangen af koefficientmatricen. Derfor har vi:

$$\dim(\text{kernen}) = n - \rho\left({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\right) = 4 - 2 = 2\,.$$

|||| Metode 8.21 Bestemmelse af kernen

I et vektorrum V er der valgt en basis a, og i et vektorrum W er der valgt en basis c. Kernen for en lineær afbildning $f : V \to W$, er identisk med løsningsmængden for det homogene lineære ligningssystem som har totalmatricen

$$\mathbf{T} = \left[\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} \mid {}_{\mathrm{c}}\mathbf{0} \,\right].$$

Kernen er et underrum i V, og dens dimension er bestemt ved:

$$\dim(\ker(f)) = \dim(V) - \rho\left({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\right). \tag{8-24}$$

8.6.2 At løse vektorligningen *f(x) = b*

Hvordan kan man afgøre om en vektor $\mathbf{b} \in W$ tilhører billedrummet for en given lineære afbildning. Spørgsmålet er om der findes (mindst) et $\mathbf{x} \in V$ som afbildes i $\mathbf{b}$, og det kan udvides til hvordan man kan bestemme alle $\mathbf{x} \in V$ med denne egenskab som afbildes i $\mathbf{b}$.

Vi betragter igen den lineære afbildning $f : V \rightarrow W$ der er repræsenteret af afbildningsmatricen (8-23), og vælger som eksempel den vektor $\mathbf{b} \in W$ som har c-koordinaterne $(1, 2, 3)$. Vi skal løse vektorligningen

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\,.$$

Regner vi i koordinater svarer vektorligningen til følgende matrixligning

$$_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{b}$$

det vil sige matrixligningen

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

som svarer til et inhomogent lineært ligningssystem med totalmatricen:

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right]$$

som ved GaussJordan-elimination reduceres til

$$\mathrm{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Da rangen af totalmatricen her er større end rangen af koefficientmatricen, har det inhomogene ligningssystem ingen løsninger. Vi har altså fundet en vektor i W som ingen “originalvektor” har i V. Bemærk at *hvis* der havde været løsninger, så kunne den skrives op på strukturformen $L_{inhom} = \mathbf{x}_0 + L_{hom}$. Det vil i denne sammenhæng sige en partikulær løsning plus kernen for f.

|||| Metode 8.22 Løsning af vektorligningen *f(x) = b*

I et vektorrum V er der valgt en basis a, og i et vektorrum W er der valgt en basis c. For en lineær afbildning $f : V \to W$, og en egentlig vektor $\mathbf{b} \in W$ kan ligningen

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

løses ved hjælp af det inhomogene lineære ligningssystem som har totalmatricen

$$\mathbf{T} = \left[\, {}_c\mathbf{F}_a \mid {}_c\mathbf{b} \,\right]$$

Hvis der findes løsninger, og $\mathbf{x}_0$ er én af disse løsninger, kan hele løsningsmængden opskrives som:

$$\mathbf{x}_0 + \ker(f)\,.$$

8.6.3 At bestemme billedrummet

Vi har ovenfor fundet at billedrummet for en lineær afbildning er et underrum i dispositionsrummet, se sætning 8.11. Hvordan kan dette underrum afgrænses og karakteriseres? Det mest enkle og bekvemme er at finde en basis for underrummet!

Vi betragter igen den lineære afbildning $f : V \to W$ der er repræsenteret af afbildningsmatricen (8-23). Da der er valgt basen $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ for V, kan vi opskrive samtlige vektorer i V på én gang:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4\,,$$

idet vi tænker os at x_1, x_2, x_3 og x_4 gennemløber alle tænkelige kombinationer af reelle værdier. Men så kan samtlige billeder i W af vektorer i V opskrives ved:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4) \\ &= x_1 f(\mathbf{a}_1) + x_2 f(\mathbf{a}_2) + x_3 f(\mathbf{a}_3) + x_4 f(\mathbf{a}_4)\,, \end{aligned}$$

hvor vi har brugt L_1 og L_2, og hvor vi fortsat tænker os at x_1, x_2, x_3 og x_4 gennemløber alle tænkelige kombinationer af reelle værdier. Men så er:

$$f(V) = \operatorname{span}\{\, f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), f(\mathbf{a}_3), f(\mathbf{a}_4) \,\}\,.$$

Billedrummet udspændes altså af a-basisvektorernes billeder! Men så kan vi efter ifølge metode i eNote 7 bestemme en basis for billedrummet ved at finde de ledende 1-taller i trappeformen af

$$\left[\, {}_c\mathbf{f}(\mathbf{a}_1) \quad {}_c\mathbf{f}(\mathbf{a}_2) \quad {}_c\mathbf{f}(\mathbf{a}_3) \quad {}_c\mathbf{f}(\mathbf{a}_4) \,\right].$$

Dette er jo afbildningsmatricen for f med hensyn til de valgte baser

$$ {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} $$

som ved GaussJordan-elimination reduceres til

$$ \operatorname{trap}({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. $$

Til de to ledende 1-taller i $\operatorname{trap}({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}})$ svarer de to første søjler i ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$. Vi konkluderer således:

Lad $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2$ være de to vektorer i W, som er bestemt ved c-koordinater således:

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{w}_1 = (1,2,1) \text{ og } {}_{\mathrm{a}}\mathbf{w}_2 = (3,0,-1). $$

Så er $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ en basis for billedrummet $f(V)$.

|||| Metode 8.23 Bestemmelse af billedrummet

I et vektorrum V er der valgt en basis a, og i et vektorrum W er der valgt en basis c. Billedrummet $f(V)$ for en lineær afbildning $f : V \rightarrow W$, kan findes ud fra

$$ \operatorname{trap}({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}) \tag{8-25} $$

på følgende måde: Hvis der i den i'te søjle i (8-25) ikke er et ledende 1-tal, så fjernes $f(\mathbf{a}_i)$ fra vektorsættet $\left(f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \ldots, f(\mathbf{a}_n)\right)$. Når dette vektorsæt på denne måde er udtyndet, udgør det en basis for $f(V)$.

Da antallet af ledende 1-taller i (8-25) er lig med antallet af basisvektorer i den valgte basis for $f(V)$, følger det at

$$ \dim(f(V)) = \rho\left({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\right). \tag{8-26} $$

8.7 Dimensionssætningen

I det foregående afsnits metode 8.21 fandt vi følgende udtryk for dimensionen af kernen for en lineær afbildning $f : V \rightarrow W$:

$$ \dim(\ker(f)) = \dim(V) - \rho\left({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\right). \tag{8-27} $$

Og i metode 8.23 et tilsvarende udtryk for billedrummet $f(V)$:

$$ \dim(f(V)) = \rho\left({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\right). \tag{8-28} $$

Ved at sammensætte (8-27) og (8-28) opnås en bemærkelsesværdig enkel sammenhæng mellem definitionsrummet, kernen og billedrummet for en lineær afbildning:

|||| Sætning 8.24 Dimensionssætningen

Lad V og W være to endeligt-dimensionale vektorrum. For en lineær afbildning $f : V \rightarrow W$ gælder:

$$\dim(V) = \dim(\,\ker(f)\,) + \dim(\,f(V)\,)\,.$$

Her er nogle umiddelbare konsekvenser af sætning 8.24:

Billedrummet for en lineær afbildning kan aldrig have højere dimension end definitionsrummet.

Hvis kernen kun indeholder $\mathbf{0}$-vektoren, bevarer billedrummet definitionsrummets dimension.

Hvis kernen har dimensionen $p > 0$, så "forsvinder" der gennem afbildningen p dimensioner.

|||| Opgave 8.25

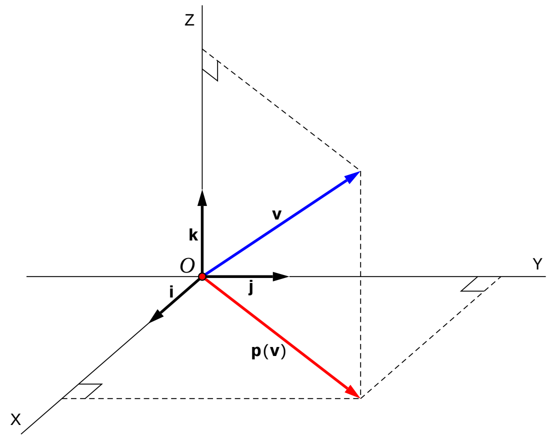
En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ har med hensyn til standardbasen i $\mathbb{R}^3$ afbildningsmatricen

$$_{\mathrm{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det oplyses at kernen for f har dimensionen 1. Find straks, ved hovedregning, en basis for $f(V)$.

|||| Opgave 8.26

I rummet er der givet et standard $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$-koordinatsystem. Alle vektorer tænkes afsat ud fra Origo. Afbildningen p projicerer vektorer ned i (X,Y)-planen i rummet, se figur 8.12 .



Figur 8.12: Projektion ned i (X,Y)-planen

Vis at p er lineær, og opstil afbildningsmatricen ${}_{\mathrm{e}}\mathbf{P}_{\mathrm{e}}$ for p. Bestem en basis for projektionens kerne og billedrum. Tjek at dimensionssætningen er opfyldt.

8.8 Ændring af afbildningsmatricen når der skiftes basis

Afbildningsmatricen for en lineær afbildning $f : V \rightarrow W$ kan kun opstilles når der er valgt en basis i V og en basis i W. Med afbildningsmatricens symbol ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$ viser vi netop at dens grundlag er en given basis a i V og en given basis c i W.

Ofte ønsker man at skifte basen i V eller basen i W. I det første tilfældes ændres koordinaterne for de vektorer $\mathbf{x} \in V$ der skal afbildes, mens koordinaterne for deres billeder $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ er uforandrede. I det andet tilfælde er omvendt. Her er koordinaterne for $\mathbf{x}$ er de samme, mens billedets koordinaterne skifter. Hvis der skiftes basis i både i V og W, så ændres koordinaterne både for $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$.

I dette afsnit opstilles metoder til at ændre en given afbildningsmatrix, når der skiftes basis i enten definitionsrummet, dispositionsrummet eller i dem begge. Først viser vi hvordan en vektors koordinater skifter, når der skiftes basis i vektorrummet (som nærmere beskrevet i metode i eNote 7.)

Antag at der er i V er givet en a-basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$, og at der vælges en ny b-basis $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$ i V. Hvis en vektor $\mathbf{x}$ har b-koordinatvektoren ${}_{\mathrm{b}}\mathbf{x}$, så kan dens a-koordinatvektor udregnes ved matrixvektor-produktet

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\, {}_{\mathrm{b}}\mathbf{v} \tag{8-29}$$

hvor *basisskiftematricen* ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}$ er givet ved

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} = \left[\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_1 \quad {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_2 \quad \ldots \quad {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_n \,\right] . \tag{8-30}$$

Vi viser nu to eksempler på brug af (8-30). I det første er det de "nye" koordinater der er givne hvorefter de "gamle" beregnes. I det andet er det omvendt: de "gamle" kendes, og de "nye" bestemmes.

|||| Eksempel 8.27 Fra nye koordinater til gamle

I et 3-dimensionalt vektorrum V er der givet en basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, hvorefter der vælges en ny basis bestående af vektorerne

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3,\ \mathbf{b}_2 = 2\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \ \text{ og }\ \mathbf{b}_3 = -3\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3\,.$$

Opgave: Bestem koordinatvektoren ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{x}$ for $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 3\mathbf{b}_3\,.$

Løsning: Først ser vi at

$$ {}_{\mathrm{b}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \ \text{ og }\ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{8-31}$$

Herefter får vi

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} = {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\, {}_{\mathrm{b}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}. \tag{8-32}$$

|||| Eksempel 8.28 Fra gamle koordinater til nye

I et 2-dimensionalt vektorrum W er der givet en basis $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$, hvorefter der vælges en ny basis bestående af vektorerne

$$\mathbf{d}_1 = 2\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \ \text{ og }\ \mathbf{d}_2 = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\,.$$

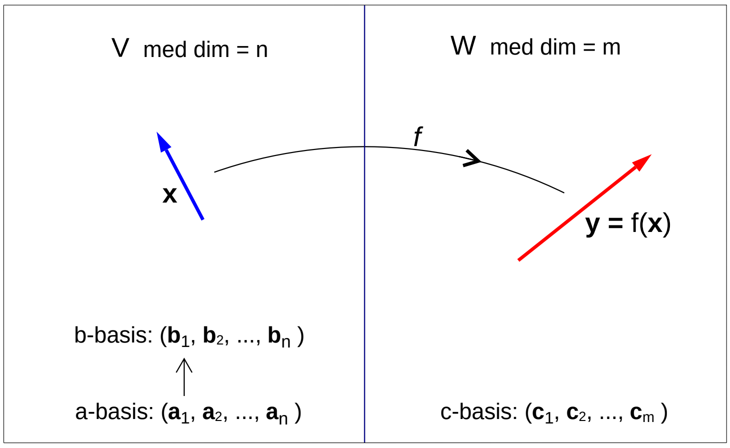
Opgave: Bestem koordinatvektoren ${}_{\mathrm{d}}\mathbf{y}$ for $\mathbf{y} = 10\mathbf{c}_1 + 6\mathbf{c}_2\,.$

Løsning: Først ser vi at

$$ {}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} \ \text{ og }\ {}_{\mathrm{c}}\mathbf{M}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}} = ({}_{\mathrm{c}}\mathbf{M}_{\mathrm{d}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{8-33}$$

$$ {}_{\mathrm{d}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{8-34}$$

8.8.1 Basisskifte i definitionsrummet



Figur 8.12: Lineær afbildning

På figur 8.12 er der givet en lineær afbildning $f : V \to W$ som med hensyn til a-basis i V og c-basis i W har en afbildningsmatrix ${}_c\mathbf{F}_a$. Vi skifter basis i V fra a-basis til b-basis. Afbildningsmatricen for f har nu symbolet ${}_c\mathbf{F}_b$. Lad os finde den. Ligningen

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

oversættes til koordinater og omformes:

$${}_c\mathbf{y} = {}_c\mathbf{F}_a\,{}_a\mathbf{x} = {}_c\mathbf{F}_a\,({}_a\mathbf{M}_b\,{}_b\mathbf{x}) = ({}_c\mathbf{F}_a\,{}_a\mathbf{M}_b)\,{}_b\mathbf{x}\,.$$

Heraf kan vi udlede at afbildningsmatricen for f med hensyn til b-basis i V og c-basis i W dannes ved et matrixprodukt:

$${}_c\mathbf{F}_b = {}_c\mathbf{F}_a\,{}_a\mathbf{M}_b\,. \tag{8-35}$$

|||| Eksempel 8.29 Ændring af afbildningsmatrix

Vi betrager det 3-dimensionale vektorrum V som er behandlet i eksempel 8.27, og det 2-dimensionale vektorrum W som er behandlet i eksempel 8.28. En lineær afbildning $f : V \to W$ er givet ved afbildningsmatricen:

$${}_c\mathbf{F}_a = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Opgave: Bestem $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ hvor $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 3\mathbf{b}_3$.

Løsning: Vi afprøver to forskellige veje. 1) Vi bruger a-koordinaterne $\mathbf{x}$ som fundet i (8-31):

$${}_c\mathbf{y} = {}_c\mathbf{F}_a\,{}_a\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

2) Vi ændrer afbildningsmatricen for f :

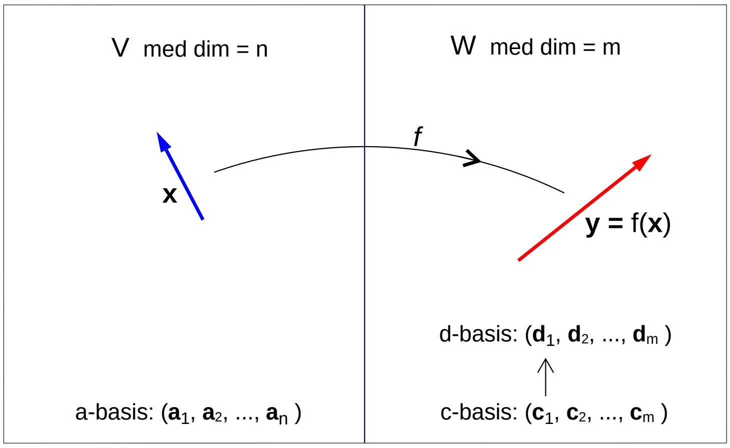
$${}_c\mathbf{F}_b = {}_c\mathbf{F}_a\,{}_a\mathbf{M}_b = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Så kan vi direkte bruge de givne b-koordinater for $\mathbf{x}$:

$$ {}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}}\, {}_{\mathrm{b}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}. $$

I begge tilfælde får vi $\mathbf{y} = 10\mathbf{c}_1 + 6\mathbf{c}_2$.

8.8.2 Basisskifte i dispositionsrummet



Figur 8.13: Lineær afbildning

På figur 8.13 er der givet en lineær afbildning $f : V \to W$ som med hensyn til a-basis i V og b-basis i W har en afbildningsmatrix ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$. Vi skifter basis i W fra c-basis til d-basis. Afbildningsmatricen for f har nu symbolet ${}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$. Lad os finde den. Ligningen

$$ \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) $$

oversættes til matrixligningen

$$ {}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} $$

som er ensbetydende med

$$ {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}} \left({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} \right) $$

hvoraf fås

$$ {}_{\mathrm{d}}\mathbf{y} = \left({}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} \right) {}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} \,. $$

Heraf udleder vi at afbildningsmatricen for f med hensyn til a-basis i V og d-basis i W dannes ved et matrixprodukt:

$$ {}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} \,. \tag{8-36} $$

|||| Eksempel 8.30 Ændring af afbildningsmatrix

Vi betrager det 3-dimensionale vektorrum V som er behandlet i eksempel 8.27, og det 2-dimensionale vektorrum W som er behandlet i eksempel 8.28. En lineær afbildning $f : V \to W$ er givet ved afbildningsmatricen:

$$
{}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}.
$$

Opgave: Givet vektoren $\mathbf{x} = -4\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3$. Bestem billedet $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ som en linearkombination af $\mathbf{d}_1$ og $\mathbf{d}_2$.

Løsning: Vi afprøver to forskellige veje.
1) Vi bruger den givne afbildningsmatrix:

$$
{}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}.
$$

Og oversætter resultatet til d-koordinater ved hjælp af (8-34):

$$
{}_{\mathrm{d}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

2) Vi ændrer afbildningsmatricen for f ved hjælp af (8-33):

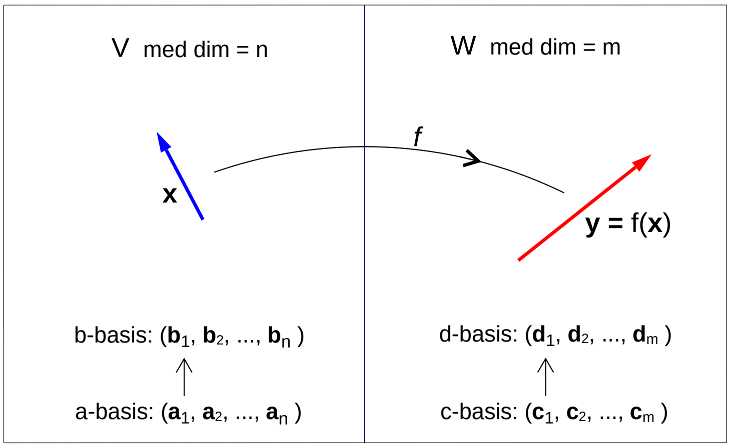
$$
{}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}.
$$

Så kan vi direkte aflæse d-koordinaterne:

$$
{}_{\mathrm{d}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}.
$$

I begge tilfælde får vi $\mathbf{y} = 4\mathbf{d}_1 + 2\mathbf{d}_2$.

8.8.3 Basisskifte i både definitions- og dispositionsrummet



Figur 8.14: Lineær afbildning

På figur 8.14 er der er givet en lineær afbildning $f : V \to W$ som med hensyn til a-basis i V og c-basis i W har afbildningsmatricen ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$. Vi skifter basis i V fra a-basis til b-basis, og i W fra c-basis til d-basis. Afbildningsmatricen for f har nu symbolet ${}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}}$ .Lad os finde den. Ligningen

$$y = f(\mathbf{x})$$

svarer i koordinater til

$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{x}$$

som er ensbetydende med

$${}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\,{}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\left({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\left({}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\,{}_{\mathrm{b}}\mathbf{x}\right)\right)$$

hvoraf fås

$${}_{\mathrm{d}}\mathbf{y} = \left({}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\,{}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\right){}_{\mathrm{b}}\mathbf{x}\,.$$

Heraf udleder vi at afbildningsmatricen for f med hensyn til b-basis i V og d-basis i W dannes ved et matrixprodukt:

$${}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\,{}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\,. \qquad (8\text{-}37)$$

|||| Eksempel 8.31 Ændring af afbildningsmatrix

Vi betrager det 3-dimensionale vektorrum V som er behandlet i eksempel 8.27, og det 2-dimensionale vektorrum W som er behandlet i eksempel 8.28. En lineær afbildning $f : V \to W$ er givet ved afbildningsmatricen:

$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Opgave: Givet vektoren $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 3\mathbf{b}_3$. Bestem $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ som en linearkombination af $\mathbf{d}_1$ og $\mathbf{d}_1$.

Løsning: Vi ændrer afbildningsmatricen ved hjælp af (8-33) og (8-31):

$$ {}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\,{}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. $$

Så kan vi direkte bruge de givne b-koordinater og direkte aflæse d-koordinaterne:

$$ {}_{\mathrm{d}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}}\,{}_{\mathrm{b}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}. $$

Konklusion: $\mathbf{y} = 4\mathbf{d}_1 + 2\mathbf{d}_2$.

Basisskiftet viser sig at være ganske praktisk. Med den nye afbildningsmatrix ${}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}}$ er det meget nemmere at udregne billedvektorer: man lægger blot første- og tredjekoordinaten fra den givne vektor sammen og beholder andenkoordinaten!

8.8.4 Opsummering vedrørende basisskifte

Vi samler resultaterne vedrørende basisskifte i de foregående underafsnit i den følgende metode:

|||| Metode 8.32 Ændring af afbildningsmatrix ved basisskifte

I vektorrummet V er der givet en basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ og en ny basis $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$. I vektorrummet W er der givet en basis $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m)$ og en ny basis $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_m)$.

Hvis f er en lineær afbildning $f : V \to W$ som med hensyn til a-basis i V og c-basis i W har afbildningsmatricen ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$, så gælder:

1. Afbildningsmatricen for f med hensyn til b-basis i V og c-basis i W er
$$ {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} \,. \tag{8-38} $$

2. Afbildningsmatricen for f med hensyn til a-basis i V og d-basis i W er
$$ {}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = ({}_{\mathrm{c}}\mathbf{M}_{\mathrm{d}})^{-1}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} \; = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} \,. \tag{8-39} $$

3. Afbildningsmatricen for f : med hensyn til b-basis i V og d-basis i W er
$$ {}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}} = ({}_{\mathrm{c}}\mathbf{M}_{\mathrm{d}})^{-1}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} \; = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} \,. \tag{8-40} $$

I de tre formler har vi brugt basisskiftematricerne:

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_1 & {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_2 & \cdots & {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_n \end{bmatrix} \;\text{ og }\; {}_{\mathrm{c}}\mathbf{M}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} {}_{\mathrm{c}}\mathbf{d}_1 & {}_{\mathrm{c}}\mathbf{d}_2 & \cdots & {}_{\mathrm{c}}\mathbf{d}_m \end{bmatrix} . $$

eNote 9

Egenværdier og egenvektorer

Denne note indfører begreberne egenværdier og egenvektorer for lineære afbildninger i vilkårlige generelle vektorrum og går derefter i dybden med egenværdier og egenvektorer til kvadratiske matricer. Noten bygger derfor på viden omkring generelle vektorrum, se eNote, på viden om algebra med matricer, se eNote og eNote, og på viden om lineære afbildninger se eNote.

9.1 Egenværdiproblemet for lineære afbildninger

9.1.1 Indledning

I denne eNote betragter vi lineære afbildninger af typen

$$f : V \to V \tag{9-1}$$

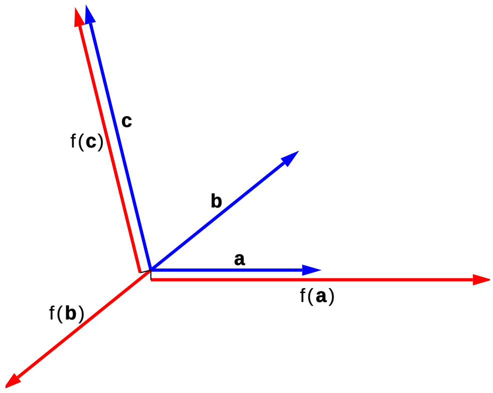
det vil sige lineære afbildninger hvor *definitionsrummet* og *dispositionsrummet* er det samme vektorrum. Dette åbner op for et særligt fænomen, at en vektor kan være identisk med sin billedvektor:

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\,. \tag{9-2}$$

Vektorer af denne type kaldes *fiksvektorer* for f. Mere generelt er vi på jagt efter *egenvektorer*, det vil sige vektorer som er proportionale med deres billedvektorer. Man taler i denne forbindelse om *egenværdiproblemet*: at finde en skalar λ og en egentlig vektor $\mathbf{v}$ som opfylder vektorligningen:

$$f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\,. \tag{9-3}$$

Hvis λ er en skalar og $\mathbf{v}$ en egentlig vektor som opfylder 9-3 kaldes proportionalitetfaktoren λ en *egenværdi* for f og $\mathbf{v}$ en til λ hørende *egenvektor*. Lad os som eksempel tage en lineær afbildning $f : G_3 \to G_3$, det vil sige en lineær afbildning af mængden af rumvektorer ind sig selv, som afbilder tre givne vektorer som vist på figur 9.1.



Figur 9.1: Tre egenvektorer i rummet og deres billedvektorer.

Som antydet på figuren 9.1 er $f(\mathbf{a}) = 2\mathbf{a}$. Derfor er 2 en egenværdi for f med tilhørende egenvektor $\mathbf{a}$. Da endvidere $f(\mathbf{b}) = -\mathbf{b}$, er også -1 en egenværdi for f med tilhørende egenvektor $\mathbf{b}$. Og da endelig $f(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$, er 1 en egenværdi for f med tilhørende egenvektor $\mathbf{c}$. Specielt er $\mathbf{c}$ en fiksvektor for f.

At løse egenværdiproblemer for lineære afbildninger er en af de mest afgørende problemstillinger i ingeniørmæssige anvendelser af lineær algebra. Dette hænger snævert sammen med at en lineær afbildning, hvis afbildningsmatrix med hensyn til en given basis er en *diagonalmatrix*, er særlig enkel at overskue og arbejde med. Og her gælder der den komfortable regel, at hvis man vælger en basis bestående af egenvektorer for afbildningen, så bliver afbildningsmatricen automatisk en diagonalmatrix.

I det følgende eksempel illustrerer vi disse pointer ved hjælp af lineære afbildninger i planen.

|||| Eksempel 9.1 Egenværdier og egenvektorer i planen

Vektorrummet af vektorer i planen har symbolet $G_2(\mathbb{R})$. Vi betragter en lineær afbildning

$$f : G_2(\mathbb{R}) \rightarrow G_2(\mathbb{R}) \tag{9-4}$$

af mængden af plane vektorer ind i sig selv, som med hensyn til en given basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ har følgende diagonalmatrix som afbildningsmatrix:

$$_{\mathrm{a}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} . \tag{9-5}$$

Da der gælder at

$$_{\mathrm{a}}f(\mathbf{a}_1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og

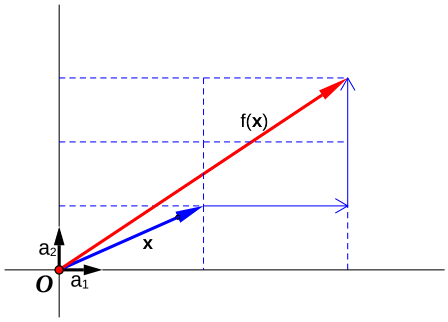
$$_{\mathrm{a}}f(\mathbf{a}_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

har vi at $f(\mathbf{a}_1) = 2\mathbf{a}_1$ og $f(\mathbf{a}_2) = 3\mathbf{a}_2$. Begge basisvektorer er altså egenvektorer for f , idet $\mathbf{a}_1$ tilhører egenværdien 2 , og $\mathbf{a}_2$ tilhører egenværdien 3 . Egenværdierne er diagonalelementerne i ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$.

Vi betragter nu en vilkårlig vektor $\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2$ og finder dens billedvektor:

$$ {}_{\mathrm{a}}f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 3x_2 \end{bmatrix}. $$

Ved afbildningen bliver x_1-koordinaten ganget med egenværdien 2, mens x_2-koordinaten bliver ganget med egenværdien 3. Geometrisk betyder dette at hele planen ved afbildningen "strækkes" først med faktoren 2 i retningen $\mathbf{a}_1$ og dernæst faktoren 3 i retningen $\mathbf{a}_2$, se virkningen på en vilkårligt valgt vektor $\mathbf{x}$ på figur 9.2.

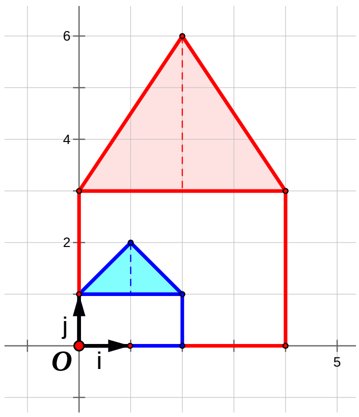


Figur 9.2: Vektoren $\mathbf{x}$ strækkes vandret med faktor 2 og lodret med faktor 3.

På figur 9.3 har vi valgt standardbasen $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ og illustrerer hvordan den lineære afbildning g som har afbildningsmatricen

$$ {}_{\mathrm{e}}\mathbf{G}_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, $$

afbilder det "blå hus" over i det "røde hus" ved at alle stedvektorer til punkter i "blå hus" strækkes med faktoren 2 i vandret retning og med faktoren 3 i lodret retning.

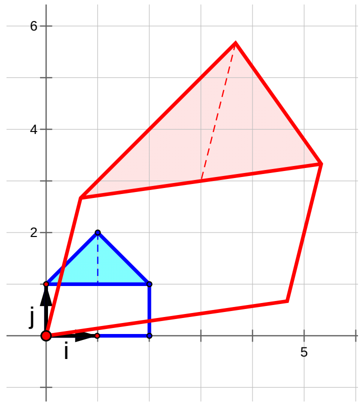


Figur 9.3: Det blå hus strækkes vandret med faktor 2 og lodret med faktor 3.

Vi undersøger nu en anden lineær afbildning h hvis afbildningsmatrix med hensyn til standardbasen ikke er en diagonalmatrix:

$$ {}_{\mathrm{e}}\mathbf{H}_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} 7/3 & 2/3 \\ 1/3 & 8/3 \end{bmatrix}. $$

Her kan man ikke straks afgøre om afbildningen er sammensat af to strækninger i to givne retninger. Og man får ikke umiddelbart hints ved at afbilde det blå hus fra figur 9.4 ved hjælp af h :



Figur 9.4: Hus

Men faktisk er det også i tilfældet h muligt at vælge en basis som består af to lineært uafhængige egenvektorer for h. Lad nemlig $\mathbf{b}_1$ være givet ved e-koordinaterne $(2,-1)$ og $\mathbf{b}_2$ ved e-koordinaterne $(1,1)$. Så gælder der

$$ {}_{\mathrm{e}}h(\mathbf{b}_1) = \begin{bmatrix} 7/3 & 2/3 \\ 1/3 & 8/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} $$

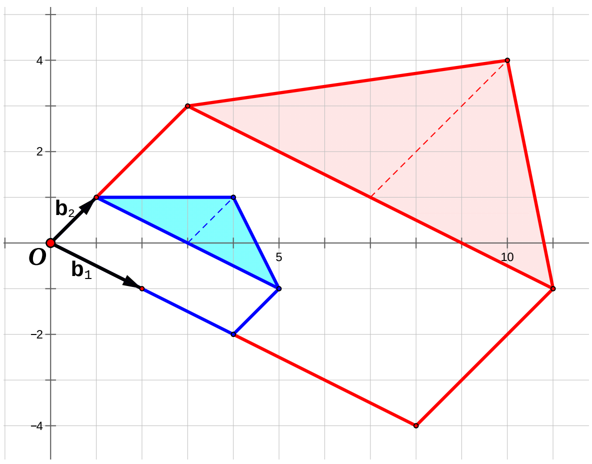
og

$$ {}_{\mathrm{e}}h(\mathbf{b}_2) = \begin{bmatrix} 7/3 & 2/3 \\ 1/3 & 8/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. $$

Der gælder med andre ord at $h(\mathbf{b}_1) = 2\mathbf{b}_1$ og $h(\mathbf{b}_2) = 3\mathbf{b}_2$. Vi ser at $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$ er egenvektorer for h, og når vi vælger $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ som basis, får afbildningsmatricen for h med hensyn til denne basis formen:

$$ {}_{\mathrm{b}}\mathbf{G}_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. $$

Det viser sig dermed overraskende at afbildningsmatricen for h også kan skrives på formen (9-5). Afbildningen h er også sammensat af to strækninger med faktorerne 2 og 3. Blot er de to stræknings*retninger* nu bestemt ved egenvektorerne $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$. Dette ses tydeligere hvis vi afbilder et nyt blåt hus hvis hovedlinjer er parallelle med b-basisvektorerne:



Figur 9.5: Det blå hus strækkes med faktor 2 hhv. faktor 3 i egenvektorernes retning

Vi har hermed eksemplificeret: Hvis man kan finde to lineært uafhængige egenvektorer for en lineær afbildning i planen er det muligt

1. at skrive dens afbildningsmatrix på diagonalform ved at vælge egenvektorerne som basis
2. at beskrive afbildningen som strækninger i egenvektorernes retninger med deres tilhørende egenværdier som strækningsfaktorer.

9.1.2 Egenværdier og deres tilhørende egenvektorer

Egenværdiproblemet for en lineær afbildning går i korthed ud på at besvare spørgsmålet: findes der egentlige vektorer hvis billedvektor er proportionale med vektoren selv. Det korte svar er at det kan man ikke svare generelt på, det afhænger af den enkelte afbildning. I det følgende forsøger vi at indkredse hvad vi faktisk kan sige generelt om egenværdiproblemet .

|||| Definition 9.2 Egenværdi og egenvektor

Lad $f : V \to V$ være en lineær afbildning af vektorrummet V ind i sig selv. Hvis der findes en egentlig vektor $\mathbf{v} \in V$ og en skalar λ, således at

$$f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}\,, \tag{9-6}$$

så kaldes proportionalitetsfaktoren λ for en *egenværdi* for f, mens $\mathbf{v}$ kaldes for en *egenvektor* som hører til λ.

Hvis det ikke i definition 9.2 var krævet at der skulle findes en *egentlig* vektor som opfylder $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$, ville enhver skalar λ være en egenværdi, idet der jo for enhver skalar λ gælder $f(\mathbf{0}) = \lambda\,\mathbf{0}$. Men bemærk at *hvis* λ er en egenværdi, så *er* nul-vektoren en egenvektor hørende til k.

Tallet 0 kan godt være en egenværdi. Det kræver blot at der findes en egentligt vektor $\mathbf{v}$ som opfylder $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, da vi så har $f(\mathbf{v}) = 0\mathbf{v}$.

Hvis en lineær afbildning f har blot én egenvektor $\mathbf{v}$, så har den uendeligt mange egenvektorer. Dette er en simpel konsekvens af den følgende sætning.

|||| Sætning 9.3 Underrum af egenvektorer

Hvis λ er en egenværdi for en lineær afbildning $f : V \to V$, så er mængden af egenvektorer som hører til λ, et underrum i V.

|||| Bevis

Lad $f : V \to V$ være en lineær afbildning af vektorrummet V ind i sig selv, og antag at λ er en egenværdi for f . Vi skal vise at mængden af egenvektorer som hører til λ, opfylder de to stabilitetskrav for underrum, se sætning. Lad k være en vilkårlig skalar, og lad $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være to vilkårlige egenvektorer som hører til λ. Så gælder der under anvendelse af L_1:

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})\,.$$

Sumvektoreren $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ er dermed en egenvektor hørende til λ , og vi har hermed vist at egenvektorerne hørende til λ opfylder stabilitetskravet vedrørende addition. Endvidere gælder der under anvendelse af L_2:

$$f(k\mathbf{u}) = kf(\mathbf{u}) = k(\lambda\mathbf{u}) = \lambda(k\mathbf{u})\,.$$

Hermed vist at egenvektorerne hørende til λ også opfylder stabilitetskravet vedrørende multiplikation med skalar. Samlet er det vist at mængden af egenvektorer som hører til en given egenværdi λ, er et underrum i definitionsrummet.

■

Sætning 9.3 giver anledning til den følgende definition:

|||| Definition 9.4 Egenvektorrum

Lad $f : V \to V$ være en lineær afbildning af vektorrummet V ind i sig selv, og lad λ være en egenværdi for f .

Ved *egenvektorrummet* (eller kort *egenrummet*) E_λ hørende til λ forstås underrummet af egenvektorer som hører til hører til λ :

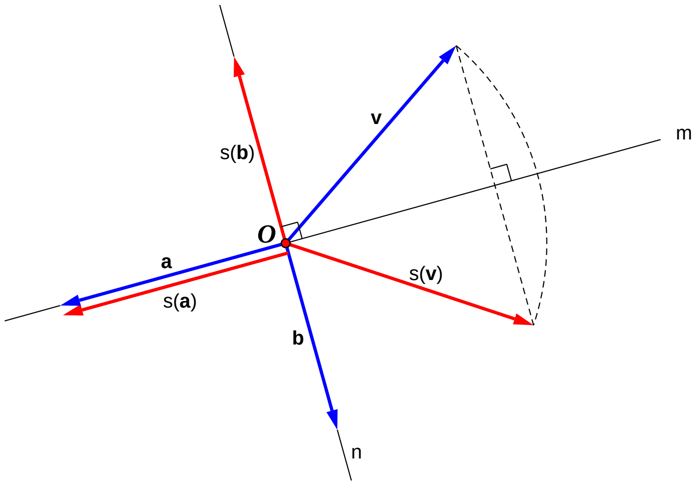
$$E_\lambda = \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}\,.$$

Hvis E_λ er endeligt-dimensionalt, kaldes $\dim(E_\lambda)$ for den *geometriske multiplicitet* af λ , betegnet $\mathrm{gm}(\lambda)$.

I det følgende eksempel betragtes en lineær afbildning som har to egenværdier, begge med geometrisk multiplicitet 1 .

|||| Eksempel 9.5 Egenrum for spejling

I planen er der tegnet en ret linje m gennem Origo. Med s betegnes den lineære afbildning der afbilder en vektor $\mathbf{v}$, afsat ud fra Origo, i dens spejling $s(\mathbf{v})$ i m, se figur 9.5:



Figur 9.5: Egenværdiproblemet for spejling i m.

Lad $\mathbf{a}$ være en vilkårlig egentlig vektor som ligger på m. Da der gælder

$$s(\mathbf{a}) = \mathbf{a} = 1 \cdot \mathbf{a}$$

er 1 en egenværdi for s. Egenrummet E_1 er mængden af vektorer som ligger på m.

Vi tegner nu en ret linje n gennem Origo, vinkelret på m. Lad $\mathbf{b}$ være en vilkårlig egentlig vektor som ligger på n. Da der gælder

$$s(\mathbf{b}) = -\mathbf{b} = (-1) \cdot \mathbf{b},$$

er -1 en egenværdi for s. Egenrummet E_{-1} er mængden af vektorer som ligger på n.

At ikke alle lineære afbildninger har egenværdier og dermed egenvektorer, fremgår af det følgende eksempel.

|||| Eksempel 9.6

Lad os undersøge egenværdiproblemet for den lineære afbildning $f : G_2 \to G_2$ som til en egentlig vektor $\mathbf{v}$ i planen knytter dens tværvektor:

$$f(\mathbf{v}) = \widehat{\mathbf{v}}.$$

Da en egentlig vektor $\mathbf{v}$ aldrig kan være proportional (parallel) med sin tværvektor, må der for ethvert valg af en skalar λ nødvendigvis gælde at

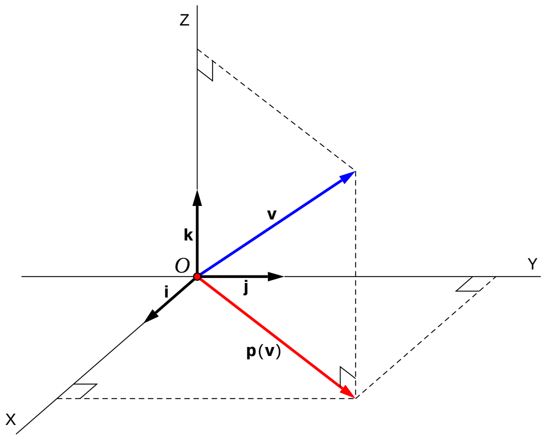
$$\widehat{\mathbf{v}} \neq \lambda \mathbf{v}.$$

Derfor findes der ikke egenværdier og dermed heller ikke egenvektorer for f.

Af den følgende opgave fremgår blandt andet at dimensionen af et egenvektorrum meget vel kan være større end 1.

|||| Opgave 9.7

I rummet er der givet et standard $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$-koordinatsystem. Alle vektorer tænkes afsat ud fra Origo. Afbildningen p projicerer vektorer ned i (X, Y)-planen i rummet, se figur 9.6.



Figur 9.6: Egenværdiproblemet for projektion ned i (X, Y)-planen.

Det er vist i opgave, at p er lineær. Bestem samtlige egenværdier og de egenrum der hører til egenværdierne, udelukkende ved hovedregning (grubling).

|||| Eksempel 9.8 Egenværdiproblem for differentiation

Vi betragter den lineære afbildning $f : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty$ som er givet ved

$$f(x(t)) = x'(t)\,.$$

Lad λ være en vilkårlig skalar. Da der gælder

$$f(\mathrm{e}^{\lambda t}) = \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t}\,,$$

er λ en egenværdi for f, og $\mathrm{e}^{\lambda t}$ er en egenvektor som hører til λ.

Da samtlige løsninger til differentialligningen

$$x'(t) = \lambda x(t)$$

er givet ved $k \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$, hvor k er et vilkårligt reelt tal, er egenrummet hørende til λ bestemt ved

$$E_\lambda = \left\{\, k \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} \;\middle|\; k \in \mathbb{R} \,\right\}\,.$$

9.1.3 Teoretiske pointer

Den følgende hjælpesætning giver et vigtigt resultat for lineære afbildninger af vektorrum ind i sig selv. Den gælder uanset om det betragtede vektorrum har endelig dimension eller ej.

|||| Hjælpesætning 9.9

Lad $f : V \to V$ være en lineær afbildning af et vektorrum V ind i sig selv, og antag

1. at f har en række egenværdier med tilhørende egenrum,
2. at der udvælges nogle af egenrummmene, og inden for hvert af de udvalgte egenrum udvælges nogle lineært uafhængige vektorer,
3. og at alle de således udvalgte vektorer sættes sammen til ét vektorsæt v .

Så er v et lineært uafhængigt vektorsæt.

|||| Bevis

Lad $f : V \to V$ være en lineær afbildning, og lad v være et vektorsæt der er sammensat i overensstemmelese med punkt 1. til 3. i hjælpesætning 9.9. Vi skal vise et v er lineært uafhængigt. Den røde tråd i beviset er at vi antager det modsatte, det vil sige at v er lineært afhængigt, og viser at dette fører til en modstrid.

Vi udtynder først v til en basis for $\text{span}\{v\}$. Der må da være mindst én vektor i v som ikke er med i basen. Vi vælger en af slagsen, lad os kalde den $\mathbf{x}$. Nu skriver vi $\mathbf{x}$ som en linearkombination af basisvektorerne, idet vi udelader de trivielle led, det vil sige dem som har koefficienten 0:

$$\mathbf{x} = k_1\mathbf{v}_1 + \cdots + k_m\mathbf{v}_m \tag{9-7}$$

Vi kalder egenværdien der hører til $\mathbf{x}$ for λ, og egenværdierne hørende til $\mathbf{v}_i$ for λ_i. Vi kan ud fra (9-7) opnå et udtryk for $\lambda\mathbf{x}$ på to forskellige måder, dels ved at gange (9-7) med λ, dels ved at finde billedet ved f af højre- og venstresiden i (9-7):

$$\begin{aligned}\lambda\mathbf{x} &= \lambda k_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda k_m\mathbf{v}_m\\ \lambda\mathbf{x} &= \lambda_1 k_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m k_m\mathbf{v}_m\end{aligned}$$

Ved subtraktion af den øverste ligning med den nederste medfører dette:

$$\mathbf{0} = k_1(\lambda - \lambda_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + k_m(\lambda - \lambda_m)\mathbf{v}_m\,. \tag{9-8}$$

Hvis alle koefficienterne til vektorerne på højresiden af (9-8) er lig med nul, må $\lambda = \lambda_i$ for alle $i = 1, 2, \ldots, m$. Men så er $\mathbf{x}$ og alle basisvektorerne $\mathbf{v}_i$ valgt fra det samme egenvektorrum, og de skulle derfor som samlet sæt være lineært uafhængige, sådan er de valgt. Dette strider mod at $\mathbf{x}$ er en linearkombination af basisvektorerne.

Derfor må mindst én koefficienterne i (9-8) være forskellig fra 0. Men så er nul-vektoren opskrevet som en egentlig linearkombination af basisvektorerne. Dette strider mod kravet om at en basis er lineært uafhængig.

Konklusion: antagelsen om at v er et lineært afhængigt vektorsæt, fører nødvendigvis til en modstrid. Derfor er v lineært uafhængigt.

■

|||| Eksempel 9.10 Egenvektorers lineære uafhængighed

En lineær afbildning $f : V \to V$ har tre egenværdier λ_1, λ_2 og λ_3 som har de geometriske multipliciteter 2, henholdsvis 1 og 3. Vektorsættet $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ er en basis for E_{λ_1}, $(\mathbf{b})$ er en basis for E_{λ_2}, og $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ er en basis for E_{λ_2}, . Så følger det af hjælpesætning 9.9 at ehvert udvalg af de seks basisvektorer er et lineært uafhængigt vektorsæt.

Værdien af hjælpesætning 9.9 viser sig ved at den direkte fører til de følgende vigtige resultater:

|||| Sætning 9.11 Generelle egenskaber

Lad V være et vektorrum med $\dim(V) = n$, og lad $f : V \to V$ være en lineær afbildning af V ind i sig selv. Der gælder:

1. Egentlige egenvektorer som hører til forskellige egenværdier for f, er lineært uafhængige.

2. f kan højst have n forskellige egenværdier.

3. Hvis f har n forskellige egenværdier, findes der en basis for V bestående af egenvektorer for f.

4. Summen af de geometriske multipliciteter af egenværdierne for f kan højst være n.

5. Hvis og kun hvis summen af de geometriske multipliciteter af egenværdierne for f er lig med n, findes der en basis for V bestående af egenvektorer for f.

|||| Opgave 9.12

Det første punkt i sætning 9.11 er et simpelt specialtilfælde af hjælpesætning 9.9 og følger derfor umiddelbart af hjælpesætningen. Det andet punkt kan bevises således:

Antag at en lineær afbildning har k forskellige egenværdier. Vi vælger en egentlig vektor fra hvert af de k egenrum. Sættet af de k valgte vektorer er da i følge hjælpesætning 9.9 lineært uafhængigt, og k må derfor være mindre end eller lig med vektorrummets dimension (se hjælpesætning).

Gør på tilsvarende vis rede for hvordan de tre sidste punkter i sætning 9.11 følger af hjælpesætning 9.9.

Motiveret af sætning 9.11 indfører vi begrebet egenbasis:

|||| Definition 9.13 Egenvektorbasis

Lad $f : V \to V$ være en lineær afbildning af et endeligt-dimensionalt vektorrum V ind i sig selv.

Ved en *egenvektorbasis*, eller kort *egenbasis*, for V med hensyn til f forstås en basis bestående af egenvektorer for f .

Herefter kan vi præsenterer dette afsnits hovedresultat:

|||| Sætning 9.14 Hovedsætning

Lad $f : V \to V$ være en lineær afbildning af et nt-dimensionalt vektorrum V ind i sig selv, og lad $v = (\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n)$ være en basis for V . Der gælder da:

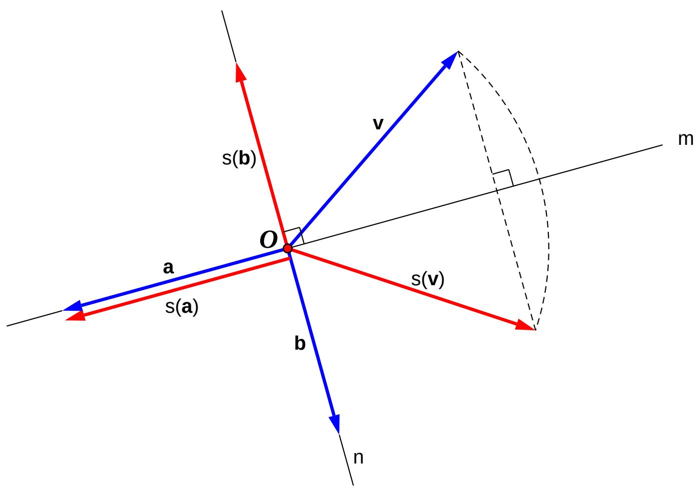
1. Afbildningningsmatricen ${}_{\mathrm{v}}\mathbf{F}_{\mathrm{v}}$ for f med hensyn til v er en diagonalmatrix hvis og kun hvis v er en egenbasis for V med hensyn til f .

2. Antag at v er en egenbasis V med hensyn til f , og $\mathbf{\Lambda}$ betegne den diagonalmatrix som er afbildningsmatrix for f med hensyn til v . Rækkefølgen af diagonalelementerne i $\mathbf{\Lambda}$ er da bestemt ud fra den valgte basis således: Basisvektoren $\mathbf{v}_i$ hører til den egenværdi λ_i som står i den i'te søjle i $\mathbf{\Lambda}$.

Vi udskyder beviset for denne sætning til eNote om diagonalisering.

|||| Eksempel 9.15 Diagonalmatrix for spejling

Lad os igen betragte situationen i eksempel 9.5, hvor vi betragtede afbildningen s som spejler vektorer afsat ud fra Origo i linjen m :



Vi fandt at $\mathbf{a}$ er en egenvektor som hører til egenværdien 1 , og at $\mathbf{b}$ er en egenvektor som hører til egenværdien -1 . Da planen har dimensionen 2 følger det af sætning 9.14 at hvis vi vælger basen $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, så har f den følgende afbildningsmatrix med hensyn til denne basis:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

|||| Eksempel 9.16 Lineær afbildning uden egenværdier

I eksempel 9.6 fandt vi at afbildningen “tværvektor” i $(G_2, \mathbb{R})$ ingen egenværdier har. Der findes derfor ingen egenbasis for afbildningen, og den kan derfor ikke beskrives ved en diagonalmatrix. for denne afbildning.

|||| Eksempel 9.17 Diagonalisering af kompleks afbildning

Lad $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ være en lineær afbildning som opfylder

$$f(z_1, z_2) = (-z_2, z_1).$$

Da der gælder:

$$f(i,1) = (-1,i) = i\,(i,1) \quad \text{og} \quad f(-i,1) = (-1,-i) = (-i)(-i,1),$$

ses at i er en egenværdi for f med en tilhørende egenvektor $(i, 1)$, og at $-i$ er en egenværdi for f med en tilhørende egenvektor $(-i, 1)$.

Da $(i, 1)$ og $(-i, 1)$ er lineært uafhængige, er $\big((i,1), (-i,1)$ en egenbasis for $\mathbb{C}^2$ med hensyn til f . Afbildningsmatricen for f med hensyn til denne basis er i følge sætning 9.14´

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

|||| Opgave 9.18

Betragt igen situationen i eksempel 9.7. Vælg to forskellige egenbaser (baser bestående af egenvektorer for p), og bestem i hvert af de to tilfælde den diagonalmatrix som bliver afbildningsmatrix for p med hensyn til den valgte basis.

9.2 Egenværdiproblemet for kvadratiske matricer

Når en lineær afbildning $f : V \to V$ afbilder et n-dimensionalt vektorrum V ind i vektorrummet selv, bliver afbildningsmatricen for f med hensyn til en vilkårligt valgt basis a en *kvadratisk* matrix. Egenværdiproblemet $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ er da ækvivalent med matrixligningen:

$$_{\mathrm{a}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} \cdot {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = \lambda \cdot {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v}\,. \tag{9-9}$$

Dette giver os anledning til formulere et egenværdiproblem for kvadratiske matricer generelt, det vil sige uden at vi nødvendigvis behøver at tænke på den kvadratiske matrix som en afbildningsmatrix. Vi vil opstille stanardiserede måder at gå frem på, når man egenværdier og egenvektorer for kvadratiske matricer søges bestemt. Dermed fås samtidigt, i kraft af (9-9), metoder til at finde egenværdier og egenvektorer for alle lineære afbilninger af vektorrum ind i sig, der kan beskrives ved hjælp af afbildningsmatricer.

Først præciserer vi hvad der forstås ved egenværdiproblemet for en kvadratisk matrix.

|||| Definition 9.19 Egenværdiproblemet for matricer

At løse egenværdiproblemet for en kvadratisk reel $n \times n$-matrix $\mathbf{A}$ vil sige at finde en skalar λ og en egentligt vektor $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ som opfylder ligningen:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}\,. \tag{9-10}$$

Opfyldes denne ligning for et par af λ og $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, kaldes λ for en *egenværdi* for $\mathbf{A}$ og $\mathbf{v}$ en til λ hørende *egenvektor* for $\mathbf{A}$.

|||| Eksempel 9.20 Egenværdiproblem for kvadratisk matrix

Det ønskes undersøgt om $\mathbf{v}_1 = (2,3)$, $\mathbf{v}_2 = (4,4)$ og $\mathbf{v}_3 = (2,-1)$ er egenvektorer for $\mathbf{A}$ givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \tag{9-11}$$

Til dette opstilles egenværdiproblemet, som beskrevet i definition 9.19.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} = 2 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{A}\mathbf{v}_3 &= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix} \neq \lambda \cdot \mathbf{v}_3\,. \end{aligned} \tag{9-12}$$

Af dette ses at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er egenvektorer for $\mathbf{A}$. $\mathbf{v}_1$ hører til egenværdien 1, og $\mathbf{v}_2$ hører til egenværdien 2.

Endvidere ses at $\mathbf{v}_3$ ikke er en en egenvektor for $\mathbf{A}$.

|||| Eksempel 9.21 Egenværdiproblem for kvadratisk matrix

Givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Da

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

er 0 en egenværdi for $\mathbf{A}$ og $(1, 1)$ er en til 0 hørende egenvektor for $\mathbf{A}$.

|||| Eksempel 9.22 Egenværdiproblem for kvadratisk matrix

Givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix},$$

er i en kompleks egenværdi for $\mathbf{A}$ og $(-i, 1)$ er en til i hørende kompleks egenvektor for $\mathbf{A}$.

Til brug for de følgende undersøgelser knytter vi nogle vigtige kommentarer til definition 9.19 .

Først bemærker vi at selv om den kvadratiske matrix $\mathbf{A}$ i definition 9.19 er reel, er man ofte interesseret i ikke kun at finde reelle løsninger til ligningen (9-10), men generelt komplekse løsninger. Der søges med andre ord en skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ og en vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, der opfylder (9-10).

Det kan derfor være hensigtsmæssigt at opfatte venstresiden i (9-10) som en afbildning $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ givet ved:

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\,\mathbf{v}\,.$$

Denne afbildning er lineær. Lad nemlig $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ og $k \in \mathbb{C}$. Der gælder da ifølge sædvanlige regneregler for matricer

$$\begin{aligned} &1. \quad f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{A}\,(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{A}\,\mathbf{u} + \mathbf{A}\,\mathbf{v} \\ &2. \quad f(k\,\mathbf{u}) = \mathbf{A}(k\,\mathbf{u}) = k(\mathbf{A}\,\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Hermed er lineariteten vist. Da egenværdiproblemet $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ i dette tilfælde er *identisk* med egenværdiproblemet $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, kan det sluttes at resultaterne opnået i afsnit 9.1 for egenværdiproblemet i almindelighed, umiddelbart kan overføres til egenværdiproblemet for matricer. Lad os således straks karakterisere mængden af egenvektorer der hører til en given egenværdi for en kvadratisk, reel matrix, sammenlign med sætning 9.3.

|||| Sætning 9.23 Underrum af egenvektorer

Lad λ være en reel eller kompleks egenværdi for en reel $n \times n$-matrix $\mathbf{A}$. Der gælder da at mængden af komplekse egenvektorer for $\mathbf{A}$ hørende til λ, er et underrum i $\mathbb{C}^n$.

Hvis man kun er interesseret i reelle løsninger på egenværdiproblemet for reelle kvadratiske matricer, kan man alternativt opfatte venstresiden i (9-10) som en reel afbildning $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ givet ved:

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\,\mathbf{v}\,.$$

Denne afbildning er naturligvis også lineær. Vi opnår herved følgende variant af sætning 9.23:

|||| **Sætning 9.24 Underrum af egenvektorer**

Lad λ være en reel egenværdi for en reel $n \times n$-matrix $\mathbf{A}$. Der gælder da at mængden af reelle egenvektorer for $\mathbf{A}$ hørende til λ, er et underrum i $\mathbb{R}^n$.

I lyset af sætning 9.24 og sætning 9.24 indfører vi begrebet egenvektorrum, sammenlign med definition 9.4.

|||| **Definition 9.25 Egenvektorrum**

Lad $\mathbf{A}$ være en kvadratisk, reel matrix, og lad λ være en egenværdi for $\mathbf{A}$.

Underrummet af alle de til λ hørende egenvektorer kaldes ***egenvektorrummet*** (eller kort ***egenrummet***) hørende til λ og betegnes E_λ .

Efter at vi nu har opridset de grundlæggende strukturelle rammer for egenværdiproblemet for kvadratiske matricer, vil vi i de to følgende delafsnit helt elementært undersøge, hvordan man overhovedet kan gå i gang med at finde egenværdier og egenvektorer for kvadratiske matricer.

9.2.1 At finde egenværdierne for en kvadratisk matrix

Vi ønsker at bestemme de egenværdier, som hører til en reel $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$. Udgangspunktet er som nævnt ligningen

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\,, \tag{9-13}$$

I første omgang sætter vi $\lambda\mathbf{v}$ over på venstresiden af lighedstegnet, hvorefter $\mathbf{v}$ "tages uden for parentes". Det kan gøres fordi $\mathbf{v} = \mathbf{E}\,\mathbf{v}$ hvor $\mathbf{E}$ er enhedsmatricen:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{E}\mathbf{v} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}\,. \tag{9-14}$$

Den sidste ligning i (9-14) svarer til et homogent lineært ligningssystem bestående af n ligninger med de n ubekendte $v_1, \ldots, v_n$, som er elementerne i $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. Det er dog ikke muligt straks at løse ligningssystemet, netop fordi vi ikke kender λ. Vi er nødt til at arbejde videre med ligningssystemets koefficientmatrix, som tildeles et særligt symbol:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$$

og kaldes ***den karakteristiske matrix*** for $\mathbf{A}$.

Da det er et homogent lineært ligningssystem, som skal løses, er der som udgangspunkt to muligheder for løsningsstrukturen. Enten er den karakteristiske matrix *regulær*, og så er den eneste løsning $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Eller også er matricen *singulær*, og der vil findes uendeligt mange løsninger $\mathbf{v}$. Men da definition 9.19 kræver at $\mathbf{v}$ skal være en egentlig vektor, altså en vektor forskellig for nulvektoren, må den karakteristiske matrix være singulær. For at undersøge om dette gælder, tages determinanten af den karakteristiske matrix. Den er nul netop når matricen er singulær:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0\,. \tag{9-15}$$

Bemærk at venstresiden i (9-15) er et polynomium med λ som variabel. Polynomiet tildeles et særligt symbol:

$$K_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{K}_{\mathbf{A}}(\lambda))$$

og kaldes ***det karakteristiske polynomium*** for $\mathbf{A}$.

Den ligning der fremkommer når det karakteristiske polynomium sættes lig nul

$$K_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{K}_{\mathbf{A}}(\lambda))$$

kaldes ***karakterligningen*** for $\mathbf{A}$.

Ved hjælp af udregningsmetoden for determinant kan det indses at det karakteristiske polynomium altid er et n'te gradspolynomium. Se også de efterfølgende eksempler. Hovedpointen er at rødderne i det karakteristiske polynomium (løsningerne til karakterligningen) er egenværdierne for matricen, fordi egenværdierne netop opfylder, at den karakteristiske matrix er singulær.

|||| Eksempel 9.26 Egenværdier for 2×2 matricer

Givet to matricer $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}. \tag{9-16}$$

Vi ønsker at bestemme egenværdierne for $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$.

Først betragtes $\mathbf{A}$. Dens karakteristiske matrix opskrives:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{A}}(\lambda) = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 3 & -1-\lambda \end{bmatrix}. \tag{9-17}$$

Nu bestemmes det karakteristiske polynomium:

$$\begin{aligned} K_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{K}_{\mathbf{A}}(\lambda)) &= \det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 3 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (4-\lambda)(-1-\lambda) - (-2)\cdot 3 = \lambda^2 - 3\lambda + 2\,. \end{aligned} \tag{9-18}$$

Polynomiet har som forventet graden 2. Karakterligningen kan opskrives og løsningerne til den kan bestemmes:

$$K_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 1 \;\text{ eller }\; \lambda = 2\,. \tag{9-19}$$

Altså har $\mathbf{A}$ to egenværdier: $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_1 = 2$.

Den samme teknik bruges for at bestemme eventuelle egenværdier til $\mathbf{B}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{K_B}(\lambda) &= \mathbf{B} - \lambda\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \\
K_{\mathbf{B}}(\lambda) &= \det(\mathbf{K_B}(\lambda)) = \det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) \\
&= (-1-\lambda)(3-\lambda) - 4\cdot(-2) = \lambda^2 - 2\lambda + 5 \,.
\end{aligned} \tag{9-20}$$

Der er i dette tilfælde ingen reelle løsninger til $K_{\mathbf{B}}(\lambda) = 0$, fordi diskriminanten $d = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = -16 < 0$, og derfor har $\mathbf{B}$ ingen reelle egenværdier. Men den har to komplekse egenværdier. Vi tager den komplekse "værktøjskasse" frem: Diskriminanten kan omkrives til $d = (4i)^2$, hvilket giver de to komplekse løsninger

$$\lambda = \frac{2 \pm 4i}{2} \;\Leftrightarrow\; \lambda = 1 + 2i \;\text{ og }\; \bar{\lambda} = 1 - 2i \tag{9-21}$$

Altså har $\mathbf{B}$ to komplekse egenværdier: $\lambda_1 = 1 + 2i$ og $\lambda_2 = 1 - 2i$.

I den følgende sætning opsummeres konklusionerne i dette delafsnit.

|||| Sætning 9.27 Det karakteristiske polynomium

For den kvadratiske reelle $n \times n$-matrix $\mathbf{A}$ betragtes

1. *Den karakteristiske matrix* $\mathbf{K_A}(\lambda) = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$.
2. *Det karakteristiske polynomium* $K_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{K_A}(\lambda)) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$.
3. *Karakterligningen* $K_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$.

Der gælder:

1. Det karateristiske polynoium er et n'te gradspolynomium med den variable λ , og karakterligningen er tilsvarende en n'te gradsligning med den ubekendte λ .

2. Rødderne i det karakteristiske polynomium (løsningerne for karakterligningen) er samtlige egenværdier for $\mathbf{A}$.

9.2.2 At finde egenvektorerne for en kvadratisk matrix

Efter at egenværdierne til en reel $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ er bestemt, er det muligt at bestemme de tilhørende egenvektorer. Proceduren tager udgangspunkt i ligningen

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0} \,, \tag{9-22}$$

som vi nåede frem til i (9-14). Da egenværdierne nu er kendte, kan det til (9-22) svarende homogene lineære ligningssystem løses med hensyn til n ubekendte $v_1, \ldots, v_n$ som er elementerne i $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. Vi skal blot indsætte egenværdierne efter tur. Som allerede nævnt er den karakteristiske matrix singulær, når den indsatte λ er en egenværdi. Derfor findes der uendeligt mange løsninger til ligningssystemet. At finde disse svarer til at finde samtlige egenvektorer $\mathbf{v}$ der hører til λ.

I den følgende metode sammenfattes opgaven med at bestemme egenværdier og tilhørende egenvektorer for en kvadratisk matrix.

|||| Metode 9.28 Bestemmelse af egenvektorer

Samtlige (reelle eller komplekse) egenværdier λ for den kvadratiske matrix $\mathbf{A}$ findes som løsningerne til ***karakterligningen*** for $\mathbf{A}$:

$$K_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0\,. \tag{9-23}$$

Derefter kan egenvektorerne $\mathbf{v}$ tilhørende hver enkelt egenværdi λ bestemmes. De er løsningerne til det følgende lineære ligningssystem

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}\,, \tag{9-24}$$

når egenværdien λ er indsat. $\mathbf{E}$ er enhedsmatricen.

Metode 9.28 udfoldes i de følgende tre eksempler, der også giver os anledning til, i forlængelse af sætning 9.23 og sætning 9.24, at karakterisere mængden af egenvektorer der tilhører en given egenværdi.

|||| Eksempel 9.29 Egenværdiers tilhørende egenvektorer

Givet den kvadratiske matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{9-25}$$

Vi ønsker at bestemme egenværdier og egenvektorer til $\mathbf{A}$ og bruger metode 9.28. Først findes den karakteristiske matrix:

$$\mathbf{K_A}(\lambda) = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \tag{9-26}$$

Dernæst opstilles det karakteristiske polynomium:

$$\begin{aligned} K_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 \cdot 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3\,. \end{aligned} \tag{9-27}$$

Karakterligningen, som er $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, har løsningerne $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 3$, der er samtlige reelle egenværdier til $\mathbf{A}$.

For at bestemme de til λ_1 hørende egenvektorer indsættes λ_1 i $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{v}=\mathbf{0}$, hvorefter vi løser det hertil svarende lineære ligningssystem som har totalmatricen:

$$\mathbf{T}=[\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E}\,|\,\mathbf{0}\,]=\left[\begin{array}{cc|c}2-1 & 1 & 0\\ 1 & 2-1 & 0\end{array}\right]. \tag{9-28}$$

Ved GaussJordan-elimination fås

$$\mathrm{trap}(\mathbf{T})=\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right] \tag{9-29}$$

Der er altså uendeligt mange løsninger $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$, da der kun er én ikke-triviel ligning: $v_1+v_2=0$. Ønsker man blot én egentlig egenvektor tilhørende egenværdien λ_1, kan v_2 sættes til 1, og man får egenvektoren $\mathbf{v}_1=(-1,1)$. Samtlige reelle egenvektorer hørende til λ_1 kan da opskrives som

$$\mathbf{v}=t\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\ t\in\mathbb{R}\,. \tag{9-30}$$

Dette er et én-dimensionalt underrum i $\mathbb{R}^2$, nemlig egenrummet som hører til egenværdien 1 som vi også kan angive således:

$$E_1=\mathrm{span}\{(-1,1)\}\,. \tag{9-31}$$

Nu indsættes λ_2 i $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{v}=\mathbf{0}$, hvorefter vi løser det hertil svarende lineære ligningssystem som har totalmatricen

$$\mathbf{T}=[\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E}\,|\,\mathbf{0}\,]=\left[\begin{array}{cc|c}2-3 & 1 & 0\\ 1 & 2-3 & 0\end{array}\right]. \tag{9-32}$$

Ved GaussJordan-elimination fås

$$\mathrm{trap}(\mathbf{T})=\left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]. \tag{9-33}$$

Heraf ses at $\mathbf{v}_2=(1,1)$ er en egenvektor tilhørende egenværdien λ_2. Samtlige reelle egenvektorer hørende til λ_1 kan opskrives som

$$\mathbf{v}=t\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ t\in\mathbb{R}\,. \tag{9-34}$$

Dette er et én-dimensionalt underrum i $\mathbb{R}^2$ som vi også kan angive ved:

$$E_3=\mathrm{span}\{(-1,1)\}\,. \tag{9-35}$$

Der vil nu blive ført kontrol: Når $\mathbf{v}_1=(-1,1)$ afbildes med $\mathbf{A}$, vil billedvektoren da udelukkende være en skalering (længdeændring) af $\mathbf{v}_1$?

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\mathbf{v}_1\,. \tag{9-36}$$

Det passer! Man kan oven i købet se, at egenværdien er 1 .

Nu kontrolleres $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=3\cdot\mathbf{v}_2\,. \tag{9-37}$$

$\mathbf{v}_2$ er altså som forventet også en egenvektor, og egenværdien er 3.

|||| Eksempel 9.30 Komplekse egenværdier og egenvektorer

I eksempel 9.26 er der givet en matrix **B** med

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \tag{9-38}$$

som ingen reelle egenværdier har. Men vi fandt to komplekse egenværdier, $\lambda_1 = 1 + 2i$ og $\lambda_2 = 1 - 2i$.

Vi indsættes λ_1 i $(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, hvorefter vi løser det hertil svarende lineære ligningssystem som har totalmatricen

$$\mathbf{T} = [\mathbf{B} - \lambda_1\mathbf{E} \,|\, \mathbf{0}\,] = \left[\begin{array}{cc|c} -1-(1+2i) & 4 & 0 \\ -2 & 3-(1+2i) & 0 \end{array}\right] \tag{9-39}$$

Ved GaussJordan-elimination fås

$$\mathrm{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{9-40}$$

Dette svarer til én ikke-triviel ligning $v_1 + (-1+i)v_2 = 0$, og sættes $v_2 = s$, ser vi at samtlige komplekse egenvektorer hørende til λ_1 er givet ved

$$\mathbf{v} = s \cdot \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}, \; s \in \mathbb{C}\,. \tag{9-41}$$

Dette er et én-dimensionalt underrum i $\mathbb{C}^2$, nemlig egenrummet hørende til egenværdien $1 + 2i$ som vi også kan angive ved:

$$E_{1+2i} = \mathrm{span}\{(1-i, 1)\}\,. \tag{9-42}$$

Tilsvarende kan samtlige komlekse løsninger hørende til λ_2 findes, de er givet ved

$$\mathbf{v} = s \cdot \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}, \; s \in \mathbb{C}\,. \tag{9-43}$$

Dette er et én-dimensionalt underrum i $\mathbb{C}^2$ som vi også kan angive ved:

$$E_{1-2i} = \mathrm{span}\{(1+i, 1)\}\,. \tag{9-44}$$

I det følgende eksempel finder vi egenværdier og tilhørende egenrum for en 3×3-matrix. Det viser sig at der i dette tilfælde hører et to-dimensionalt egenrum til en af egenværdierne.

|||| Eksempel 9.31 Egenværdi med multiplicitet 2

Givet matricen **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 4 & -5 & 4 \\ -4 & -1 & -10 \end{bmatrix} \tag{9-45}$$

Vi ønsker i første omgang at bestemme egenværdierne til **A** og bruger metode 9.28.

$$\det\left(\begin{bmatrix} 6-\lambda & 3 & 12 \\ 4 & -5-\lambda & 4 \\ -4 & -1 & -10-\lambda \end{bmatrix}\right) = -\lambda^3 - 9\lambda^2 + 108 = -(\lambda-3)(\lambda+6)^2 = 0 \quad \text{(9-46)}$$

Af den sidste faktorisering ses at **A** har to forskellige egenværdier. Egenværdien $\lambda_1 = -6$ er en dobbeltrod i karakterligningen, mens egenværdien $\lambda_2 = 3$ er en enkeltrod.

Nu bestemmes egenvektorrummet tilhørende $\lambda_1 = -6$, se sætning 9.23:

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{ccc|c} 6-(-6) & 3 & 12 & 0 \\ 4 & -5-(-6) & 4 & 0 \\ -4 & -1 & -10-(-6) & 0 \end{array}\right] \rightarrow \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 12 & 3 & 12 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{aligned} \quad \text{(9-47)}$$

Her er kun én ikke-triviel ligning: $4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$. Sættes x_1 og x_3 til de to frie parametre s og t fås samtlige reelle egenvektorer til egenværdien -6 ved:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \; s, t \in \mathbb{R}\,. \quad \text{(9-48)}$$

Dette er et to-dimensionalt underrum i $\mathbb{R}^3$ som vi også kan angive ved:

$$E_{-6} = \operatorname{span}\{(1,-4,0),(0,-4,1)\}\,. \quad \text{(9-49)}$$

Det er dermed muligt at finde to lineært uafhængige egenvektorer til λ_1. Hvad med antallet af lineært uafhængige egenvektorer for $\lambda_2 = 3$?

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{ccc|c} 6-3 & 3 & 12 & 0 \\ 4 & -5-3 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & -10-3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 12 & 0 \\ 4 & -8 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & -13 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{aligned} \quad \text{(9-50)}$$

Her er to ikke-trivielle ligninger: $x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$ og $x_2 + x_3 = 0$. Sættes $x_3 = s$ til den frie parameter, fås samtlige reelle egenvektorer til egenværdien 3 ved

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; s \in \mathbb{R}\,. \quad \text{(9-51)}$$

Dette er et én-dimensionalt underrum i $\mathbb{R}^3$ som vi også kan angive ved:

$$E_3 = \operatorname{span}\{(1,-4,0),(0,-4,1)\}\,. \quad \text{(9-52)}$$

Det er altså kun muligt at finde én lineært uafhængig egenvektor til λ_2.

|||| Opgave 9.32

Givet den kvadratiske matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} . \tag{9-53}$$

1. Bestem samtlige egenværdier $\mathbf{A}$.
2. Bestem for hver af egenværdierne det tilhørende egenrum.
3. Opskriv mindst 3 egenvektorer tilhørende hver egenværdi. De må gerne være lineært afhængige.

9.2.3 Algebraisk og geometrisk multiplicitet

Som det fremgår af eksempel 9.31 er det både vigtigt at være opmærksom på om en egenværdi er enkeltrod eller flerdobbeltrod i karakterligningen for en kvadratisk, reel matrix og på dimensionen af det tilhørende egenrum. I dette delafsnit undersøges relationen mellem de to fænomener. Det giver anledning til de følgende definitioner.

|||| Definition 9.33 Algebraisk og geometrisk multiplicitet

Lad $\mathbf{A}$ være en kvadratisk, reel matrix, og lad λ være en egenværdi for $\mathbf{A}$.

1. λ siges at have ***den algebraiske multiplicitet*** n, når λ er en n-dobbeltrod i karakterligningen til den kvadratiske matrix $\mathbf{A}$. Dette betegnes $\mathrm{am}(\lambda) = n$.

2. λ siges at have ***den geometriske multiplicitet*** m, når dimensionen af det til λ hørende egenvektorrum er m. Dette betegnes $\mathrm{gm}(\lambda) = m$. Der gælder med andre ord: $\dim(E_\lambda) = \mathrm{gm}(\lambda)$.

Det er ikke altid at $\mathrm{am}(\lambda) = \mathrm{gm}(\lambda)$. Dette tages op i sætning 9.34.

Den følgende sætning viser nogle vigtige egenskaber vedrørende algebraisk og geometrisk multiplicitet for egenværdier for kvadratiske matricer, sammenlign med sætning 9.11.

Sætning 9.34 Egenskaber for multipliciteter

Givet en reel $n \times n$-matrix $\mathbf{A}$.

1. $\mathbf{A}$ har højst n forskellige reelle egenværdier, og også summen af de reelle egenværdiers algebraiske multipliciteter er højst n .

2. $\mathbf{A}$ har højst n forskellige komplekse egenværdier, men summen af de komplekse egenværdiers algebraiske multipliciteter er lig med n .

3. Er λ en reel eller kompleks egenværdi for $\mathbf{A}$, gælder der:

$$1 \leq \mathrm{gm}(\lambda) \leq \mathrm{am}(\lambda) \leq n \qquad (9\text{-}54)$$

   Det vil sige, at den geometriske multiplicitet af en egenværdi mindst vil være 1, den vil være mindre eller lig med den algebraiske multiplicitet af egenværdien, som igen vil være mindre eller lig antallet af søjler og rækker i $\mathbf{A}$.

Opgave 9.35

Kontroller, at alle tre punkter i sætning 9.34 er gældende for egenværdierne og egenvektorerne i eksempel 9.31.

Lad os kytte nogle kommentarer til 9.34:

Punkt 1 og 2 følger direkte af læren om polynomier. Det karakteristiske polynomium for en reel $n \times n$-matrix $\mathbf{A}$ er et n'te gradspolynomium, og det har højst n forskellige reelle såvel som komplekse rødder. Endvidere er summen af de reelle rødders multiplicitet højst n , mens summen af de komplekse rødders multiplicitet er lig med n ,.

Vi har tidligere vist at der for enhver lineær afbildning af et n-dimensionalt vektorrum ind i sig selv gælder at summen af de geometriske multipliciteter af egenværdierne for f kan højst kan være n , se sætning 9.11. Bemærk at dette direkte kan udledes af udsagnene om mulipliciteter i sætning 9.34.

Som noget nyt interessant påstås det i punkt 3 at den geometriske multiplicitet for en enkelt egenværdi kan være mindre end den algebraiske multiplicitet. Det kommer der eksempel på i det følgende opsamlende eksempel 9.36. Og videre at den geometriske multiplicitet af en enkelt egenværdi ikke kan være større end den algebraiske. Beviset for punkt 3 i sætning 9.34 udelades.

|||| Eksempel 9.36 Goemetrisk multiplicitet mindre end algebraisk

Givet er matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -9 & 10 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \tag{9-55}$$

Egenværdierne til $\mathbf{A}$ bestemmes:

$$\det\left(\begin{bmatrix} -9-\lambda & 10 & 0 \\ -3 & 1-\lambda & 5 \\ 1 & -4 & 6-\lambda \end{bmatrix}\right) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 7\lambda - 4 = -(\lambda+4)(\lambda-1)^2 = 0\,. \tag{9-56}$$

Af faktoriseringen før sidste lighedstegn fås, at $\mathbf{A}$ har to forskellige egenværdier: $\lambda_1 = -4$ og $\lambda_2 = 1$. Desuden er $\mathrm{am}(-4) = 1$ og $\mathrm{am}(1) = 2$, som det også fremgår af faktoriseringen.

Egenvektorrummet til $\lambda_1 = -4$ bestemmes ved at løse $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

$$\begin{gathered} \left[\begin{array}{ccc|c} -9-(-4) & 10 & 0 & 0 \\ -3 & 1-(-4) & 5 & 0 \\ 1 & -4 & 6-(-4) & 0 \end{array}\right] \rightarrow \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{gathered} \tag{9-57}$$

Der er to ikke-trivielle ligninger: $v_1 - 2v_2 = 0$ og $v_2 - 5v_3 = 0$. Sættes v_3 til den frie parameter ses at samtlige til λ_1 hørende reelle egenvektorer kan angives ved

$$E_{-4} = \left\{\, s \cdot (10,5,1) \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \,\right\} = \mathrm{span}\{(10,5,1)\}\,. \tag{9-58}$$

Man har at $\mathrm{gm}(-4) = \dim(E_{-4}) = 1$, og at en egenvektor til λ_1 er $\mathbf{v}_1 = (10,5,1)$. Det ses at $\mathrm{gm}(-4) = \mathrm{am}(-4)$.

Det tilsvarende gøres for $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{gathered} \left[\begin{array}{ccc|c} -9-1 & 10 & 0 & 0 \\ -3 & 1-1 & 5 & 0 \\ 1 & -4 & 6-1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{gathered} \tag{9-59}$$

Her er der igen to ikke-trivielle ligninger: $v_1 - v_2 = 0$ og $3v_2 - 5v_3 = 0$. Sættes $v_3 = 3s$ at samtlige til λ_2 hørende reelle egenvektorer kan angives ved

$$E_1 = \left\{\, s \cdot (5,5,3) \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \,\right\} = \mathrm{span}\{(5,5,3)\}\,. \tag{9-60}$$

Det giver følgende resultater: $\mathrm{gm}(1) = \dim(E_1) = 1$, og at en egenvektor til $\lambda_2 = \lambda_3$ er $\mathbf{v}_2 = (5,5,3)$. Desuden ses det, at $\mathrm{gm}(1) < \mathrm{am}(1)$.

9.2.4 Mere om den komplekse problemstilling

Vi vil bruge matricen

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}. \tag{9-61}$$

fra eksempel 9.30 til at præcisere nogle særlige fænomener for kvadratiske, reelle matricer, når deres egenværdiproblem studeres i kompleks ramme.

Vi fandt at $\mathbf{B}$ har egenværdierne, $\lambda_1 = 1 + 2i$ og $\lambda_2 = 1 - 2i$. Der gælder således at egenværdierne er hinandens konjugerede tal. En anden bemærkelsesværdig ting i eksempel 9.30 er at hvor

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor for $\lambda_1 = 1 + 2i$, der er den konjugerede vektor

$$\overline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}$$

en egenvektor for $\lambda_2 = 1 - 2i$. Begge dele er eksempler på generelle regler:

|||| Sætning 9.37 Konjugerede egenværdier og egenvektorer

For en kvadratisk, reel matrix $\mathbf{A}$ gælder:

1. Hvis λ er en kompleks egenværdi for $\mathbf{A}$ med rektangulær form $\lambda = a + ib$, så er også $\overline{\lambda} = a - ib$ en egenværdi for $\mathbf{A}$.

2. Hvis $\mathbf{v}$ er en egenvektor for $\mathbf{A}$ hørende til den komplekse egenværdi λ, så er den konjugerede vektor $\overline{\mathbf{v}}$ en egenvektor for $\mathbf{A}$ hørende til den konjugerede egenværdi $\overline{\lambda}$.

|||| Bevis

Første del af sætning 9.37 følger af læren om polynomier. Det karakteriske polynomium for en kvadratisk, reel matrix er et polynomium med reelle koefficienter. Derom vides at rødderne for polynomiet altid optræder i konjugerende par. Anden del af beviset medtages i næste version af denne eNote.

■

Ved *sporet* for en kvadratisk matrix forstås summen af diagonalelementerne. Sporet af $\mathbf{B}$ er dermed $-1 + 3 = 2$. Læg nu mærke til at summen af egenværdierne for $\mathbf{B}$ er $(1-i) + (1+i) = 2$, altså det samme som sporet af $\mathbf{B}$. Også dette er et generelt fænomen, som her anføres uden bevis:

|||| Sætning 9.38 Sporet

For en kvadratisk, reel matrix $\mathbf{A}$ gælder, at sporet af $\mathbf{A}$, det vil sige summen af diagonalelementerne i $\mathbf{A}$ er lig med summen af alle (reelle som komplekse) egenværdier for $\mathbf{A}$, idet hver egenværdi indgår i summen det antal gange som svarer til egenværdiens algebraiske multiplicitet.

|||| Opgave 9.39

I eksempel 9.31 fandt vi at det karakteristiske polynomium for matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 4 & -5 & 4 \\ -4 & -1 & -10 \end{bmatrix}$$

har dobbeltroden -6 og enkeltroden 3. Eftervis at sætning 9.38 gælder i dette tilfælde.

eNote 10

Similaritet og diagonalisering

I denne note forklares, hvordan nogle kvadratiske matricer kan diagonaliseres ved hjælp af egenvektorer. Det forudsættes derfor at man ved, hvordan egenværdier og egenvektorer til en kvadratisk matrix bestemmes og desuden er bekendt med tilhørende begreber, så som algebraisk og geometrisk multiplicitet.

Hvis vi betragter en lineær afbildning $f : V \rightarrow V$ af et n-dimensionalt vektorrum V ind i sig selv, så vil afbildningsmatricen for f med hensyn til en vilkårlig basis for f være en kvadratisk, $n \times n$ matrix. Er der givet to baser a og b for V, er relationen mellem de tilsvarende afbildningsmatricer ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$ henholdsvis ${}_{\mathrm{b}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}}$ givet ved

$$ {}_{\mathrm{b}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}} = ({}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}})^{-1} \cdot {}_{\mathrm{a}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} \cdot {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} \tag{10-1} $$

hvor ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_1 & {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_2 & \cdots & {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_n \end{bmatrix}$ er basisskiftematricen der skifter fra b til a koordinater.

Af særlig interesse er det, hvis der findes en basis v bestående af egenvektorer for f. Lad nemlig a være en vilkårlig basis for V, med hensyn til hvilken f har afbildningsmatricen $\mathbf{F}$, og lad v være en egenvektorbasis for V med hensyn til f. Det fremgår da af sætning i eNote 9 at afbildningsmatricen for f med hensyn til v-basis er en diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ hvis diagonalelementer er egenværdierne for f. Hvis $\mathbf{V}$ betegner basisskiftematricen, som skifter fra v-koordinater til a-koordinatvektorerne, vil $\mathbf{\Lambda}$ ifølge (10-1) fremkomme således

$$ \mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1} \cdot {}_{\mathrm{a}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} \cdot \mathbf{V}\,. \tag{10-2} $$

Formel 10-1 og formel 10-2 inspirer naturligt til spørgsmål der tager udgangspunkt i kvadratiske matricer: Hvilke betingelser skal være opfyldt for at to givne kvadratiske matricer kan fortolkes som afbildningsmatricer for den samme lineære afbildning med hensyn til to forskellige baser? Og hvilke betingelser skal en kvadratisk matrix opfylde for at den er afbildningsmatrix for en lineær afbildning, som i en anden basis har en diagonalmatrix som afbildningsmatrix? Vi studerer først disse spørgsmål i en ren matrixalgebra-opsætning, og vender i sidste delafsnit tilbage til afbildningssynsvinklen. Til dette formål indføres nu begrebet similære matricer.

10.1 Similære matricer

|||| Definition 10.1 Similære matricer

Givet $n \times n$-matricerne $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$. Man siger at $\mathbf{A}$ er *similær med* $\mathbf{B}$ hvis der findes en regulær matrix $\mathbf{M}$ således at

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{M}\,. \tag{10-3}$$

|||| Eksempel 10.2 Similære matricer

Givet matricerne $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 21 \\ -3 & -10 \end{bmatrix}$.

Matricen $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ er regulær og har den inverse matrix $\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Betragt følgende udregning:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 21 \\ -3 & -10 \end{bmatrix}.$$

Den viser at $\mathbf{A}$ er similær med $\mathbf{B}$.

Hvis $\mathbf{A}$ at være similær med $\mathbf{B}$, så er $\mathbf{B}$ også similær med $\mathbf{A}$,. Hvis vi nemlig sætter $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}$, så er $\mathbf{N}$ regulær, og

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{M} \Leftrightarrow \mathbf{M}\,\mathbf{B}\,\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{N}^{-1}\,\mathbf{B}\,\mathbf{N}\,,$$

Derfor bruger man også talemåden: $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er *similære matricer* .

|||| Sætning 10.3 Similaritet er transitivt

Lad $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$ være $n \times n$-matricer. Hvis $\mathbf{A}$ er similær med $\mathbf{B}$, og $\mathbf{B}$ er similær med $\mathbf{C}$, så er $\mathbf{A}$ similær med $\mathbf{C}$.

|||| Opgave 10.4

Bevis sætning 10.3.

Om egenværdierne for similære matricer gælder følgende sætning.

|||| Sætning 10.5 Similaritet og egenværdier

Hvis $\mathbf{A}$ er similær med $\mathbf{B}$, har de to matricer identiske egenværdier med de samme tilhørende algebraiske og geometriske multipliciteter.

|||| Bevis

At $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ har de samme egenværdier med de samme tilhørende algebraiske multipliciteter de har det samme karakteristiske polynomium: Lad $\mathbf{M}$ være en regulær matrix der opfylder $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$, og lad som sædvanlig $\mathbf{E}$ betegne enhedsmatricen af samme kvadratiske form som de tre nævnte matricer. Så gælder:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) &= \det(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} - \lambda\mathbf{M}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{M}) \\ &= \det(\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{M}) \\ &= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\,. \end{aligned} \tag{10-4}$$

Hermed vist at de to matricer har samme karakteristiske polynomium og dermed de samme egenværdier med de samme tilhørende algebraiske multipliciteter. At de har samme egenværdier fremgår i øvrigt af sætning 10.13, som vi viser nedenfor: Når $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ kan repræsentere den samme lineære afbildning f med hensyn til to forskellige baser, har de identiske egenværdier, nemlig egenværdierne for f.

Men egenværdierne har også de samme geometriske multipliciteter. Dette følger af at egenrummene for $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ med hensyn til enhver af egenværdierne kan fortolkes som to forskellige koordinatfremstillinger for dette samme egenrum, nemlig egenrummet for f med hensyn til den pågældende egenværdi

■

Læg mærke til at sætning 10.5 siger at to similære matricer har samme egenværdier, men ikke omvendt: at to matricer, som har samme egenværdier, er similære. Der er en forskel, og kun det første udsagn er sandt.

To similære matricer $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ har samme egenværdier, men en egenvektor for den ene er i almindelighed ikke egenvektor for den anden. Men der gælder at hvis $\mathbf{v}$ er en egenvektor for $\mathbf{A}$ tilhørende egenværdien λ, så er $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}$ en egenvektor for $\mathbf{B}$ tilhørende egenværdien λ, hvor $\mathbf{M}$ er den regulære matrix der opfylder $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$. Der gælder nemlig:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{M}^{-1}\lambda\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{v})\,. \tag{10-5}$$

|||| Opgave 10.6

Gør rede for at to kvadratiske $n \times n$-matricer er similære, hvis de har identiske egenværdier med samme tilhørende geometriske multipliciteter, og at summen af de geometriske multipliciteter er n.

10.2 Diagonalisering af matricer

Betragt en matrix $\mathbf{A}$ og en regulær matrix $\mathbf{V}$ som er givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{10-6}$$

Da der gælder at

$$\mathbf{V}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

besidder $\mathbf{A}$ en særlig egenskab: den er similær med en diagonalmatrix, nemlig diagonalmatricen

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Man siger i den forbindelse at $\mathbf{A}$ er blevet ***diagonaliseret ved similartransformation***.

Vi vil nu for en vilkårlig given kvadratisk matrix $\mathbf{A}$ stille spørgsmålet om den kan diagonaliseres ved similartransformation eller ej. Vi opstiller derfor ligningen

$$\mathbf{V}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda},$$

hvor $\mathbf{V}$ er en regulær matrix og $\mathbf{\Lambda}$ en diagonalmatrix. Vi beviser nedenfor at ligningen har en løsning netop hvis søjlerne i $\mathbf{V}$ er lineært uafhængige egenvektorer for $\mathbf{A}$, og diagonalelelementerne i $\mathbf{\Lambda}$ er egenværdierne for $\mathbf{A}$ opført således at den i-te søjle i $\mathbf{V}$ er egenvektor hørende til egenværdien den i-te søjle i $\mathbf{\Lambda}$.

Vi bemærker at dette er i overensstemmelse med eksempel-matricerne i (10-6) ovenfor:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10-7}$$

og

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{10-8}$$

Vi ser i (10-7) at første søjle i $\mathbf{V}$ som forventet er egenvektor for $\mathbf{A}$ hørende til det første diagonalelement i $\mathbf{\Lambda}$, og vi ser i (10-8) at den anden søjle i $\mathbf{V}$ er egenvektor hørende til det andet diagonalelement i $\mathbf{\Lambda}$.

|||| Sætning 10.7 Diagonalisering ved similartransformation

Hvis en kvadratisk matrix $n \times n$-matrix $\mathbf{A}$ har n lineært uafhængige egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ respektivt tilhørende de n (ikke nødvendigvis forskellige) egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ kan den diagonaliseres ved similartransformationen

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}\,, \tag{10-9}$$

hvor

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,. \tag{10-10}$$

Hvis $\mathbf{A}$ ikke har n lineært uafhængige egenvektorer, kan den ikke diagonaliseres ved similartransformation.

|||| Bevis

Antag at $\mathbf{A}$ har n lineært uafhængige egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, og at $\mathbf{v}_i$ for $i = 1 \ldots n$ hører til egenværdien λ_i. Så gælder de følgende n ligninger:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1 \quad , \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_n = \lambda_n\mathbf{v}_n \tag{10-11}$$

De n ligninger kan samles i et ligningssystem:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \mathbf{A}\mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1\lambda_1 & \mathbf{v}_2\lambda_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\lambda_n \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow\ &\mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow\ &\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda} \end{aligned} \tag{10-12}$$

Nu er alle egenvektorerne indsat (lodret efter hinanden) i matricen $\mathbf{V}$ i samme rækkefølge som egenværdierne er i diagonalen af matricen $\mathbf{\Lambda}$, som udenfor diagonalen kun indeholder nuller. Da egenvektorerne er lineært uafhængige er matricen $\mathbf{V}$ regulær. Derfor findes den inverse $\mathbf{V}^{-1}$, og den ganges på fra venstre på begge sider af lighedstegnet:

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda} \ \Leftrightarrow \ \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}\,. \tag{10-13}$$

Hermed er første del af af sætningen vist. Antag omvendt at $\mathbf{A}$ kan diagonaliseres ved en similartransformation. Så findes der en regulær matrix $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$ og en diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$ således at

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}\,. \tag{10-14}$$

Hvis vi nu gentager omformingerne i første del af beviset blot i modsat rækkefølge, ses det at (10-14) er ensbetydende med de følgende n ligninger:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1 \quad , \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_n = \lambda_n\mathbf{v}_n \tag{10-15}$$

hvoraf det fremgår at $\mathbf{v}_i$ for $i = 1 \ldots n$ er en egenvektor for $\mathbf{A}$ tilhørende egenværdien λ_i.

Diagonalisering ved similartransformation kan derfor kun opnås på den måde der er omtalt i sætningens første del.

■

Den følgende sætning kan være til stor hjælp når man i forskellige sammenhænge undersøger om matricer kan diagonaliseres ved similartransformation. Hovedresultatet har vi allerede givet i sætning 10.7, men her forfines betingelserne idet vi trækker på tidligere viste sætninger om egenværdiproblemet for lineære afbildninger og matricer.

|||| Sætning 10.8 Matricers diagonaliserbarhed

For en given $n \times n$-matrix $\mathbf{A}$ gælder:

$\mathbf{A}$ kan diagonaliseres ved similartransformation

1. hvis der findes n forskellige egenværdier for $\mathbf{A}$.
2. hvis summen af egenværdiernes geometriske multipliciteter er n .

$\mathbf{A}$ kan *ikke* diagonaliseres ved similartransformation

3. hvis summen af egenværdiernes geometriske multipliciteter er mindre end n .
4. hvis der findes blot én egenværdi λ med $\operatorname{gm}(\lambda) < \operatorname{am}(\lambda)$.

|||| Bevis

Ad. 1. Hvis der vælges en egentlig egenvektor fra hvert af de n egenrum, følger det af hjælpesætning at det samlede sæt af n egenvektorer er lineært uafhængigt. Derfor kan $\mathbf{A}$ ifølge sætning 10.7 diagonaliseres ved similartransformation.

Ad. 2: Hvis der vælges en basis for hvert af egenrummene, så er det samlede sæt af de valgte n egenvektorer ifølge hjælpesætning lineært uafhængigt. Derfor kan $\mathbf{A}$ ifølge sætning 10.7 diagonaliseres ved similartransformation .

Ad. 3: Hvis summen af de geometriske multipliciteter er mindre en n, findes der ikke n lineært uafhængige egenvektorer for. Derfor kan $\mathbf{A}$ ifølge sætning 10.7 ikke diagonaliseres ved similartransformation.

Ad. 4: Da der i følge sætning pkt. 1 gælder at summen af de algebraiske multipliciteter højst er n, og da der ifølge samme sætning pkt. 2 for enhver egenværdi λ gælder at $\operatorname{gm}(\lambda) \leq \operatorname{am}(\lambda)$, kan summen af de geometriske multipliciteter ikke blive n, hvis blot én af egenværdiernes geometriske multiplicitet er mindre end dens algebraiske. Derfor kan $\mathbf{A}$ ifølge det i netop beviste ikke diagonaliseres ved similartransformation.

■

Et typisk særtilfælde er at en kvadratisk $n \times n$-matrix har i alt n forskellige egenværdier. Sætning 10.8 pkt. 1 sikrer at alle matricer af denne type kan diagonaliseres ved similartransformation.

I de følgende eksempler skal vi se, hvordan man konkret kan undersøge om diagonalisering ved similartransformation er mulig og i givet fald gennemføre den.

|||| Eksempel 10.9

Den kvadratiske matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 10 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \tag{10-16}$$

har egenværdierne $\lambda_1 = 4$ og $\lambda_2 = 15$. $\mathbf{v}_1 = (-2, 0, 1)$ og $\mathbf{v}_2 = (-3, 1, 0)$ er lineært uafhængige vektorer der hører til λ_1 og $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 2)$ er en egentlig egenvektor der hører til λ_2. Det samlede sæt af de tre nævnte egenvektorer er lineært uafhængigt ifølge hjælpesætning. Det er derfor ifølge sætning 10.7 muligt at diagonalisere $\mathbf{A}$, fordi der findes $n = 3$ lineært uafhængige egenvektorer. Man kan derfor skrive at $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$, hvor

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{10-17}$$

10.3 Kompleks diagonalisering

Hvad vi indtil nu har sagt om similære matricer gælder generelt for kvadratiske, *komplekse* matricer. Grundligningen for diagonalisering ved similartransformation:

$$\mathbf{V}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda},$$

skal derfor forstås i bredest mulig forstand, hvor matricerne $\mathbf{A}$, $\mathbf{V}$ og $\mathbf{\Lambda}$ er komplekse $n \times n$-matricer. Indtil nu har vi indskrænket os til reelle eksempler, det vil sige eksempler hvor det har været muligt at opfylde grundligningen (10.3)med reelle matricer. Vi vil i det følgende beskæftige os med en særlig situation, som er typisk i tekniske anvendelser af diagonalisering: Til en given *reel* $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ søges en regulær matrix $\mathbf{M}$ og en diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ som opfylder grundligningen i bred ramme hvor $\mathbf{M}$ og $\mathbf{\Lambda}$ muligvis er komplekse (ikke reelle) $n \times n$ matricer.

Det følgendee eksempel viser en reel 3×3 matrix som ikke kan diagonaliseres reelt fordi dens karakteristiske polynomium kun har én reel rod. Til gengæld kan den diagonailseres komplekst.

|||| Eksempel 10.10 Kompleks diagonalisering af reel matrix

Den kvadratiske matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{10-18}$$

har egenværdierne $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -i$. og $\lambda_3 = i$. $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$ er en egentlig egenvektor der hører til λ_1, $\mathbf{v}_2 = (-2 + i, i, 1)$ en egentlig egenvektor der hører til λ_2, og $\mathbf{v}_3 = (-2 - i, -i, 1)$ er lineært uafhængige vektorer der hører til λ_3. Det samlede sæt af de tre nævnte egenvektorer er lineært uafhængigt ifølge hjælpesætning. Det er derfor ifølge sætning 10.7 muligt at diagonalisere $\mathbf{A}$. Man kan derfor skrive $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$, hvor

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2+i & -2-i \\ 0 & i & -i \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{10-19}$$

Det næste eksempel viser en reel, kvadratisk matrix som ikke kan diagonaliseres, hverken reelt eller komplekst.

|||| Eksempel 10.11 Ikke-diagonaliserbar kvadratisk matrix

Givet den kvadratiske matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \tag{10-20}$$

og $\mathbf{A}$ har egenværdierne $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_3 = 5$. Egenværdien 3 har den algebraiske multiplicitet 2, men der kun vælges én lineært uafhængig egenvektor, for eksempel $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0)$. Egenværdien har altså geometrisk multiplicitet 1. Derfor er det ifølge sætning 10.7 ikke muligt at diagonalisere $\mathbf{A}$ ved similartransformation.

|||| Opgave 10.12

Til matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \tag{10-21}$$

ønskes følgende bestemt:

1. Alle egenværdier og deres algebraiske multipliciteter.
2. Samtlige tilhørende lineært uafhængige egenvektorer og derved egenværdiernes geometriske multipliciteter.
3. Hvis det er muligt, skal $\mathbf{A}$ diagonaliseres: Bestem en diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ og en regulær matrix $\mathbf{V}$, hvorom der gælder, at $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}$. Hvilke krav er der for at diagonaliseringen kan lade sig gøre? Hvilke tal og vektorer indgår i $\mathbf{\Lambda}$ og $\mathbf{V}$?

10.4 Diagonalisering af lineære afbildninger

I indledningen til den eNote stillede vi spørgsmålet: Hvilke betingelser skal være opfyldt for at to givne kvadratiske matricer kan fortolkes som afbildningsmatricer for den samme lineære afbildning med hensyn til to forskellige baser? Svaret er enkelt:

|||| Sætning 10.13 Similære matricer som afbildningsmatricer

Der er givet et n-dimensionalt vektorrum V. To $n \times n$ matricer $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er afbildningsmatricer for den samme lineære afbildning $f : V \to V$ med hensyn til to forskellige baser for V, hvis og kun hvis $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er similære.

|||| Opgave 10.14

Bevis sætning 10.13

I indledningen spurgte vi også: Og hvilke betingelser skal en kvadratisk matrix opfylde for at den er afbildningsmatrix for en lineær afbildning, som i en anden basis har en diagonalmatrix som afbildningsmatrix? Svaret fremgår af sætningsaet.diag kombineret med sætning 10.13: Matricen skal have n lineært uafhængige egenvektorer.

Vi slutter eNoten af med et eksempel på diagonalisering af en lineær afbildning, det vil sige finder en passende basis med hensym til hvilken der afbildningsmatrix er en diagonalmatrix.

|||| Eksempel 10.15 Diagonalisering af lineær afbildning

En lineær afbildning $f : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ er givet med følgende afbildningsmatrix med hensyn til standard monomiebasis m:

$$_{\mathrm{m}}\mathbf{F}_{\mathrm{m}} = \begin{bmatrix} -17 & -21 \\ 14 & 18 \end{bmatrix} \tag{10-22}$$

Det betyder, at $f(1) = -17 + 14x$ og $f(x) = -21 + 18x$. Det ønskes undersøgt, om der findes en (reel) egenbasis for f og i bekræftende tilfælde, hvordan afbildningsmatricen ser ud med hensyn til denne basis, og hvad basisvektorerne er.

Egenværdierne til $_{\mathrm{m}}\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$ bestemmes:

$$\det\left(\begin{bmatrix} -17-\lambda & -21 \\ 14 & 18-\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - \lambda - 12 = (\lambda+3)(\lambda-4) = 0\,. \tag{10-23}$$

Det er allerede nu muligt at bekræfte, at der findes en reel egenbasis til f, da der findes $2 = \dim(P_2(\mathbb{R}))$ egenværdier, nemlig $\lambda_1 = -3$ og $\lambda_2 = 4$, som hver har algebraisk multiplicitet 1. Egenvektorer til λ_1 bestemmes:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -17+3 & -21 & 0 \\ 14 & 18+3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{10-24}$$

Det giver en egenvektor $_{\mathrm{m}}\mathbf{v}_1 = (-3, 2)$, hvis den frie parameter sættes til 2. Tilsvarende fås den anden egenvektor:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -17-4 & -21 & 0 \\ 14 & 18-4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{10-25}$$

Det giver en egenvektor ${}_{\mathrm{m}}\mathbf{v}_2 = (-1, 1)$, hvis den frie parameter sættes til 1.

Der findes altså en reel egenbasis v til f, der er givet med basisvektorerne ${}_{\mathrm{m}}\mathbf{v}_1$ og ${}_{\mathrm{m}}\mathbf{v}_2$. Vi har da at

$$
{}_{\mathrm{m}}\mathbf{M}_{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad {}_{\mathrm{v}}\mathbf{F}_{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{10-26}
$$

Basen består af vektorerne $\mathbf{v}_1 = -3 + 2x$ og $\mathbf{v}_2 = -1 + x$ og afbildningen er meget "simpel" med hensyn til denne basis.

Man kan gøre prøve med afbildningen af $\mathbf{v}_1$:

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{v}_1) &= f(-3 + 2x) = -3 \cdot f(1) + 2 \cdot f(x) \\
&= -3 \cdot (-17 + 14x) + 2 \cdot (-21 + 18x) \\
&= 9 - 6x = -3(-3 + 2x) = -3\mathbf{v}_1
\end{aligned} \tag{10-27}
$$

Det passer!

eNote 11

Lineære differentialligningers karakter og lineære 1. ordens differentialligninger

I denne note introduceres lineære differentialligninger, som er en speciel (og bekvem) form for differentialligninger. Endvidere ses på en type af lineære differentialligninger, hvor den ukendte funktion og dens første afledede indgår, såkaldte 1. ordens lineære differentialligninger.

Noten bygger på kendskab om lineære afbildninger. Noten er udgangspunkt for de to følgende noter eNote og eNote.

Forklaring 11.1 Hvad er en differentialligning?

En differentialligning er en ligning, hvor en funktion er den ukendte. Det er altså den, som vi ønsker at bestemme. Differentialligninger optræder naturligt bl.a. i mange fysiske, mekaniske, kemiske og elektromagnetiske problemer, hvorfor det er et vigtigt emne. Her er et eksempel på en (lineær) differentialligning:

$$x'(t) + 2x(t) = 30 + 8t \tag{11-1}$$

I en differentialligning optræder den ukendte funktion (f.eks. $x(t)$) sammen med nogen af dens differentialkvotienter af vilkårlige ordner (f.eks. $x'(t)$ eller $x'''(t)$), som også er funktioner. Altså har vi en ligning med flere ubekendte – både funktionen selv og dens differentialkvotienter. Men fordi der er en klar sammenhæng mellem funktionen og dens differentialkvotienter, er det muligt at løse ligningen og bestemme funktionen. I overstående tilfælde er løsningen som følger:

$$x(t) = 13 + 4t + ce^{-2t} \tag{11-2}$$

At løsningen har denne form, og hvordan vi er kommet frem til resultatet, handler denne note om.

Differentialligninger kan nogle gange løses på forskellige måder. F.eks. kan nogle differentialligninger løses på samme måde, som man løser en normal "én ligning med én ukendt" (f.eks. $2y + 3 = -1$). Her bytter man om på led i ligningen. Andre gange opstilles en løsningsformel, hvor forarbejdet allerede er gjort.

Løsningen til en differentialligning fungerer på samme måde som en løsning til en normal ligning, og man kan derfor "gøre prøve". Løsningen skal passe ind i differentialligningen. I tilfældet ovenfor kan man differentiere løsningen, og differentialkvotienten er $x'(t) = 4 - 2ce^{-2t}$. Indsættes den sammen med udtrykket for $x(t)$ i differentialligningen, er det muligt at se, om løsningen passer. Prøv selv.

Lineære differentialligninger har ikke kun én løsning. De har faktisk uendelig mange. De kan dog opskrives på en måde, så man ved ét udtryk kan opstille den såkaldte ***fuldstændige løsningsmængde***. Den fuldstændige løsningsmængde er ikke nogen funktion, men en samling af uendelig mange funktioner – og derfor heller ikke nogen entydig funktion, hvilket bl.a. betyder, at det ikke er muligt at tegne grafen for den fuldstændige løsning. Hvordan man behandler det problem, kommer vi til senere.

Nogle gange kan det være hensigtsmæssigt at bruge komplekse tal i differentialligningers løsningsproces, hvilket leder til komplekse løsninger. Disse løsninger kan imidlertid ikke bruges konkret – hvorfor løsningerne transformeres til reelle løsninger. De komplekse tal bliver derfor kun brugt som et værktøj.

11.1 Linearitet og løsningsstruktur

Inden vi skal i gang med at behandle de enkelte typer af lineære differentialligninger, betragtes de generelt under ét. Dette gøres for at vise, hvad det vil sige, at en differentialligning er lineær, og hvilken form løsninger til sådanne differentialligninger har.

En vilkårlig lineær differentialligning kan skrives på formen

$$f(x(t)) = q(t), \quad t \in I, \tag{11-3}$$

hvor $q : I \to \mathbb{R}$ er en funktion af t og kaldes ***højresiden***, og $x : I \to \mathbb{R}$ er den ukendte funktion, man ønsker at bestemme. $f : C^n \to C^{n-p}$ er en lineær afbildning af $x(t)$. Netop når f er en lineær afbildning, er differentialligningen lineær. Værdierne af heltallene n og p, hvorom der gælder at $0 \leq p \leq n$, kommer an på den enkelte differentialligning. Højresiden indeholder alle led i ligningen, hvor funktionen $x(t)$ eller dens afledede ikke indgår.

Følgende definition er en gentagelse af en allerede kendt definition i lineær afbildning (se definition). Med den er det muligt at afgøre, om f er en lineær afbildning, og derfor om differentialligningen $f(x(t)) = q(t)$ er lineær.

|||| Definition 11.2 Lineære differentialligninger

En differentialligning $f(x(t)) = q(t)$ er lineær, hvis ligningens venstreside $f(x(t))$ opfylder begge linearitetsbetingelser:

1. $f(x_1(t) + x_2(t)) = f(x_1(t)) + f(x_2(t))$,
2. $f(k \cdot x(t)) = k \cdot f(x(t))$,

altså hvis $f : C^n \to C^{n-p}$ er en lineær afbildning. $x(t), x_1(t), x_2(t)$ er løsninger til differentialligningen og $k \in \mathbb{C}$ er en konstant. Værdierne af heltallene n og p, hvor $0 \leq p \leq n$, kommer an på den enkelte differentialligning. Definitionen er analog med den tilsvarende definition for lineære afbildinger.

|||| Eksempel 11.3 Lineære differentialligninger?

Givet er følgende to differentialligninger:

$$1. \qquad x''(t) + x^2(t) = -4t \tag{11-4}$$

$$2. \qquad (t-1)x'(t) - t^2x(t) + 3 = 0 \tag{11-5}$$

Det undersøges, om de to differentialligninger er lineære ved hjælp af definition 11.2. På grund af overskueligheden skrives $x(t)$ blot som x videre i dette eksempel.

Først undersøges det, om $f(x_1 + x_2) - (f(x_1) + f(x_2))$ er lig nul, og derefter om $f(k \cdot x) - k \cdot f(x)$ er lig nul.

1) Ligning (11-4) betragtes først, og $q(t) = -4t$, så $f(x) = x'' + x^2$.

$$(x_1 + x_2)'' + (x_1 + x_2)^2 - (x_1'' + x_1^2 + x_2'' + x_2^2) = 2x_1x_2 \neq 0 \tag{11-6}$$

$x''(t) + x^2(t) = -4t$ er altså en ikke-lineær differentialligning.

2) Ligning (11-5) kan omskrives til $f(x(t)) = q(t)$, og har derfor $f(x) = (t-1)x' - t^2x$ og $q(t) = -3$. f afprøves nu med det første kriterium:

$$\begin{gathered}(t-1)(x_1 + x_2)' - t^2(x_1 + x_2) - \\ ((t-1)x_1' - t^2x_1' + (t-1)x_2 - t^2x_2) = 0\end{gathered} \tag{11-7}$$

Første kriterium er opfyldt. Hvad med det andet?

$$(t-1)(kx)' - t^2(kx) - k((t-1)x' - t^2x) = 0 \tag{11-8}$$

Andet kriterium er ligeså opfyldt og differentialligningen $(t-1)x'(t) - t^2x(t) + 3 = 0$ er derfor lineær.

i Ved at kigge på en differentialligning, er det med lidt øvelse muligt at se, om den er lineær eller ej: For eksempel hvis der optræder potenser, logaritmer eller opløftninger af $x(t)$ er differentialligningen ikke lineær.

Løsningen til en lineær differentialligning er opbygget på samme måde som løsningen til en lineær ligning. Løsningen er en sum af ligningens kerne (den fuldstændige løsningsmængde til den tilsvarende homogene ligning) og en partikulær løsning til den inhomogene ligning. I lineære ligninger er kernen enten nulvektoren eller flerdimensionel. I lineære differentialligninger har kernen altid flere dimensioner. Det vil sige, at differentialligningens løsningsmængde er entydig og flerdimensionel, men udspænder uendelig mange funktioner, og derfor samlet set ikke er en entydig funktion.

Herunder er en sætning, der ligesom definitionen ovenfor, gentager, hvad vi allerede ved om sådanne lineære afbildninger og lineære ligninger, og er her specificeret til differentialligninger. Den skal dels give et overblik over, hvordan vi kan gribe en differentialligning an og løse den, og dels sætte nogle enkelte begreber på plads.

|||| Sætning 11.4 Løsningsstruktur

Den lineære differentialligning

$$f(x(t)) = q(t), \quad t \in I, \tag{11-9}$$

kaldes ***inhomogen***, når $q(t) \neq 0$. $f : C^n \to C^{n-p}$ er en lineær afbildning og $q : I \to \mathbb{R}$ kaldes ***højresiden***. Den tilsvarende differentialligning

$$f(x(t)) = 0, \quad t \in I, \tag{11-10}$$

kaldes ***homogen***.

Den fuldstændige løsningsmængde L_{inhom} til den inhomogene differentialligning har formen

$$L_{inhom} = x_0(t) + L_{hom}, \tag{11-11}$$

hvorom der gælder følgende:

- $x_0(t)$ er en ***partikulær løsning*** til den *inhomogene* differentialligning.
- L_{hom} er den *fuldstændige løsningsmængde* til den tilsvarende *homogene* differentialligning.

Additionen i ligning (11-11) betyder, at den fuldstændige løsningsmængde til den inhomogene ligning er lig den partikulære løsning til den inhomogene ligning adderet med samtlige funktioner udspændt af den fuldstændige løsningsmængde til den homogene ligning.

Sætningen er en følge af, at f er en lineær afbildning og behøver derfor ikke et bevis i denne sammenhæng.

Læg mærke til at $x_0(t)$ er en funktion, hvorimod L_{hom} og L_{inhom} er mængder af funktioner.

For at give et overblik over, hvordan notationen er omkring sammenspillet mellem løsninger i form af funktioner og mængder, gives her et eksempel 11.5. Det er vigtigt, at forstå denne notation, fordi den bliver brugt i resten af noten.

Eksempel 11.5 Løsningsstruktur

Givet er den lineære inhomogene differentialligning

$$x'(t) + 2x(t) = 30 + 8t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{11-12}$$

Tilsvarende findes den homogene differentialligning

$$x'(t) + 2x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{11-13}$$

som har den fuldstændige løsningsmængde L_{hom} bestående af følgende funktioner for alle $c \in \mathbb{R}$:

$$x(t) = ce^{-2t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{11-14}$$

Hvordan vi er kommet frem til løsningen, er ikke relevant i denne sammenhæng (gør eventuelt selv prøve). En anden måde at skrive præcis det samme er som følger

$$L_{hom} = \left\{ ce^{-2t} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\}. \tag{11-15}$$

Det læses sådan: Den fuldstændige homogene løsningsmængde L_{hom} er lig mængden af alle funktionerne ce^{-2t}, hvorom der gælder, at $t \in \mathbb{R}$ og $c \in \mathbb{R}$. Begge skrivemåderne vil blive brugt.

En partikulær løsning til den inhomogene differentialligning er

$$x_0(t) = 13 + 4t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{11-16}$$

Læg mærke til at den partikulære løsning er en funktion og ikke en mængde af funktioner – heraf kommer navnet 'partikulær'. Det er nu muligt at opstille den fuldstændige løsningsmængde til den inhomogene differentialligning ved hjælp af sætning 11.4:

$$\begin{aligned} L_{inhom} = x_0(t) + L_{hom} &= 13 + 4t + \left\{ ce^{-2t} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ 13 + 4t + ce^{-2t} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned} \tag{11-17}$$

Det læses således: L_{inhom} er mængden af $13 + 4t + ce^{-2t}$, hvorom der gælder, at $t \in \mathbb{R}$ og $c \in \mathbb{R}$.
Tilsvarende kan man skrive følgende: Den fuldstændige løsningsmængde L_{inhom} til den inhomogene differentialligning er lig mængden af følgende funktioner for alle $c \in \mathbb{R}$:

$$x(t) = 13 + 4t + ce^{-2t}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{11-18}$$

Når man skriver løsningerne som funktionsudtryk er den arbitrære konstant (her c) så at sige valgt. Den kan ikke være alle reelle tal på én gang. Skrevet som mængde er den arbitrære konstant netop alle reelle tal på én gang, hvorfor løsningen er en hel mængde af funktioner. Det er den primære grund til at opskrive de fuldstændige løsninger som mængder og ikke som funktioner.

11.2 1. ordens lineære differentialligninger

Vi betragter nu den 1. ordens lineære differentialligninger, der kan udtrykkes således:

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t), \quad t \in I, \tag{11-19}$$

hvor funktionerne $p : I \to \mathbb{R}$ og $q : I \to \mathbb{R}$. Det overlades til læseren at vise, at differentialligningen er lineær. Læg mærke til, at koefficienten til $x(t)$, kaldet $p(t)$, er en funktion af t og ikke nødvendigvis en konstant. Det samme er gældende for $q(t)$. Hvis højresiden, $q(t)$, er forskellig fra nul er differentialligningen inhomogen, ellers homogen. Er der i et praktisk tilfælde en koefficient til $x'(t)$ forskellig fra nul, divideres ligningen igennem med denne konstant, for at få et udtryk ækvivalent med ovenstående.

Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsningsmængde L_{inhom}, hvilket gøres generelt i nedenstående løsningsformel, som populært kaldes ***Panserformlen***.

|||| Sætning 11.6 Panserformlen

Den 1. ordens lineære differentialligning, som har formen

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t), \quad t \in I, \tag{11-20}$$

hvor $p : I \to \mathbb{R}, q : I \to \mathbb{R}$, har den fuldstændige løsningsmængde L_{inhom} bestående af følgende funktioner for alle de arbitrære konstanter $c \in \mathbb{R}$:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-P(t)} \left(\int \mathrm{e}^{P(t)} q(t) dt + c \right), \quad t \in I, \tag{11-21}$$

hvor $P(t) = \int p(t)dt$.

Bemærk specielt den fuldstændige løsningsmængde L_{hom} til den tilsvarende homogene differentialligning, hvor $q(t) = 0$, så $x'(t) + p(t)x(t) = 0$, som består af følgende funktioner for alle de arbitrære konstanter $c \in \mathbb{R}$:

$$x(t) = c \cdot \mathrm{e}^{-P(t)}, \quad t \in I. \tag{11-22}$$

|||| Bevis

I den inhomogene differentialligning (11-20) indgår funktionen $p(t)$, og vi indfører en vilkårlig stamfunktion til denne, så $P(t) = \int p(t)dt$. Man får den idé at gange ligningen igennem med $\mathrm{e}^{P(t)}$ og betragter derefter venstresiden:

$$\mathrm{e}^{P(t)}x'(t) + \mathrm{e}^{P(t)}p(t)x(t) = \mathrm{e}^{P(t)}q(t) \tag{11-23}$$

Med et vågent øje lægger man mærke til, at venstresiden er en differentialkvotient til et produkt af to bestemte funktioner, nemlig $\mathrm{e}^{P(t)}x(t)$, fordi man ved hjælp af produktreglen får følgende:

$$\begin{aligned}(e^{P(t)}x(t))' &= e^{P(t)}x'(t) + (e^{P(t)})'x(t) \\ &= e^{P(t)}x'(t) + e^{P(t)}p(t)x(t)\end{aligned} \tag{11-24}$$

Det er altså muligt at erstatte venstresiden af (11-23) med $(e^{P(t)}x(t))'$, hvilket giver

$$(e^{P(t)}x(t))' = e^{P(t)}q(t). \tag{11-25}$$

Integreres begge sider med hensyn til t fås:

$$e^{P(t)}x(t) = \int e^{P(t)}q(t)dt + c, \tag{11-26}$$

hvor $c \in \mathbb{R}$ er en arbitrær konstant. Ganges på begge sider med $e^{-P(t)}$ fås løsningsformlen, nemlig Panserformlen:

$$x(t) = e^{-P(t)}\left(\int e^{P(t)}q(t)dt + c\right), \quad t \in I. \tag{11-27}$$

Den fuldstændige løsningsmængde består af overstående funktioner for alle $c \in \mathbb{R}$.

Bemærk at integralet i $P(t) = \int p(t)dt$ er vilkårligt. Det er således lige meget, hvilke grænser man sætter på integralet. Et eksempel på grænser kunne være fra 0 til t (og skifte integrationsvariablen til u). Udtrykkene vil måske se forskellige ud, alt efter hvilke grænser man sætter på, men vilkårligheden "ophæves" af den arbitrære konstant, som i forvejen udtrykker netop dette spænd af løsninger. Derfor er løsningen ikke eksakt, men en løsnings*mængde*.

■

|||| Eksempel 11.7 Løsning med Panserformlen

Givet er differentialligningen

$$x'(t) + \frac{2}{t}x(t) = 8t - \frac{10}{t}, \quad t > 0. \tag{11-28}$$

Med Panserformlen, sætning 11.6, er det muligt at finde den fuldstændige løsningsmængde L_{inhom}. Vi har $p(t) = \frac{2}{t}$ og $q(t) = 8t - \frac{10}{t}$. Først bestemmes $P(t)$:

$$P(t) = \int p(t)dt = \int \frac{2}{t}dt = 2\ln t \tag{11-29}$$

Vi har da

$$e^{-P(t)} = e^{-2\ln t} = e^{\ln(t^{-2})} = t^{-2} = \frac{1}{t^2} \tag{11-30}$$

Af dette følger, at $e^{P(t)} = t^2$. Nu bruges Panserformlen:

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-P(t)}\left(\int e^{P(t)}q(t)dt + c\right) \\ &= \frac{1}{t^2}\left(\int t^2\left(8t - \frac{10}{t}\right)dt + c\right) \\ &= \frac{1}{t^2}\left(\int (8t^3 - 10t)dt + c\right) \\ &= \frac{1}{t^2}\left(2t^4 - 5t^2 + c\right) \\ x(t) &= 2t^2 - 5 + \frac{c}{t^2}, \quad t > 0.\end{aligned} \tag{11-31}$$

Den fuldstændige løsningsmængde L_{inhom} består af de overstående funktioner, hvor alle $c \in \mathbb{R}$. Man kan ligeså skrive det sådan:

$$L_{inhom} = \left\{ 2t^2 - 5 + \frac{c}{t^2} \;\middle|\; t > 0, c \in \mathbb{R} \right\}. \tag{11-32}$$

11.2.1 Eksistens og entydighed

Vi ser på den 1. ordens lineære differentialligning, som har formen

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t), \quad t \in I, \tag{11-33}$$

og kan løses med sætning 11.6. I sætningen indgår den arbitrære konstant c, som angiver, at der er uendeligt mange funktioner, som er løsninger til differentialligningen, og de udspænder en løsningsmængde. Ofte er man kun interesseret i netop én løsning – altså én funktion – som opfylder nogle betingelser. En sådan betingelse kaldes en ***begyndelsesværdibetingelse***. En begyndelsesværdibetingelse kan for eksempel være at kende funktionsværdien i $t = 0$. Det beskrives i følgende sætning 11.9 om ***eksistens og entydighed***.

|||| Forklaring 11.8 Hvad er eksistens og entydighed?

Eksistens og entydighed er et todelt begreb, som navnet antyder. Samlet handler det om, hvorvidt der findes løsninger til differentialligninger og om disse er entydige.

Første del, om **eksistens**, er forholdsvis ligetil: Findes der en løsning til ligningen? Hvis ja, *eksisterer* løsningen. Nogle gange finder man ud af, at løsningen eksisterer ved at bestemme den. Andre gange er det muligt at finde ud af, at løsningen eksisterer uden at kunne bestemme den. At udføre sådanne eksistensbeviser er ikke en del af denne note.

Anden del, omhandlende **entydighed**, er en smule mere komplekst. Vi har før lært, at når man løser lineære ligninger vil løsningen nogle gange indeholde frihedsgrader (frie variable). Det betyder, at der ikke kun er en enkelt løsning, men uendeligt mange. Med lineære differentialligninger udspænder de fuldstændige løsningsmængder altid uendelig mange løsningsfunktioner. Vi har altså ikke en entydig funktion.

En ikke entydig løsning er i mange praktiske tilfælde ikke brugbar – det er ikke muligt at få entydige funktionsværdier, og man kan ikke tegne grafen for funktionen.

I dette afsnit har vi set på løsningen til 1. ordens differentialligninger, der ved hjælp af sætning 11.6 ser således ud:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-P(t)} \left(\int \mathrm{e}^{P(t)} q(t) dt + c \right) . \tag{11-34}$$

For alle $c \in \mathbb{R}$ udgør disse funktioner den fuldstændige løsningsmængde og ikke en entydig funktion. Konstanten c udtrykker graden af frihed, som funktioner, der er løsninger til differentialligningen, må have. c bliver derfor kaldt en ***arbitrær konstant***. 'Arbitrær' betyder vilkårlig. Funktionsværdien $x(t)$ er ikke entydig, før vi har bestemt c.

Man gør løsningen entydig ved hjælp af såkaldte *begyndelsesværdibetingelser* eller *randværdibetingelser*. En begyndelsesværdibetingelse er i denne sammenhæng et sæt af to tal, der kæder én værdi af t (kaldet t_0) sammen med den tilsvarende funktionsværdi x (kaldet x_0). Man skal kende begge værdier. Med dem er det muligt at opstille en ligning og bestemme c. Man får derved en løsning, kaldet en ***betinget løsning***, som er en entydig funktion. Det er nu muligt at beregne funktionsværdier og tegne grafen for funktionen.

I andre sammenhænge kan der optræde flere tal i et sæt af begyndelsesværdibetingelser for at få entydige, betingede løsningsfunktioner.

|||| Sætning 11.9 Eksistens og entydighed

Til ethvert talsæt (t_0, x_0) findes der netop én (betinget) løsning $x_{bet}(t)$ til differentialligningen

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t), \quad t \in I, \tag{11-35}$$

hvor $p : I \to \mathbb{R}$ og $q : I \to \mathbb{R}$, således at

$$x_{bet}(t_0) = x_0 \tag{11-36}$$

(t_0, x_0) kaldes en enkelt ***begyndelsesværdibetingelse***.

|||| Bevis

Vi har, fra sætning 11.6, at løsningen til differentialligningen (11-35) er af formen

$$x(t) = \mathrm{e}^{-P(t)} \left(\int \mathrm{e}^{P(t)} q(t) dt + c \right) , \tag{11-37}$$

hvor integralet er ubestemt. Det ubestemte integral indeholder samtlige bestemte integraler, og derfor må følgende bestemte integral også være en løsning til differentialligningen:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-P(t)} \left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{P(u)} q(u) du + c \right) , \tag{11-38}$$

Integrationsvariablen må ikke være den samme som variablen i grænserne, hvorfor integrationsvariablen er skiftet til u.

Begyndelsesværdibetingelsen $x_{bet}(t_0) = x_0$ er givet, og denne indsættes i ligningen.

$$x_0 = \mathrm{e}^{-P(t_0)} \left(\int_{t_0}^{t_0} \mathrm{e}^{P(u)} q(u) du + c \right) = \mathrm{e}^{-P(t_0)} (0 + c) \tag{11-39}$$

Med en hurtig omskrivning, finder vi ud af, der er kun er én løsning for c.

$$c = \mathrm{e}^{P(t_0)} x_0 \tag{11-40}$$

Derfor er der netop kun én løsning $x_{bet}(t)$, der opfylder kravene, og sætningen er vist.

Læg mærke til, at udtrykket for den arbitrære konstant c i ligning (11-40) kun er gældende for netop dette valg af integral. Derfor er det ikke muligt at løse en opgave om entydighed og bestemme c ved at bruge dette udtryk.

■

|||| Eksempel 11.10 Entydig, betinget løsning

I eksempel 11.7 fandt vi den fuldstændige løsningsmængde til differentialligningen

$$x'(t) + \frac{2}{t} x(t) = 8t - \frac{10}{t}, \quad t > 0, \tag{11-41}$$

nemlig $L_{inhom} = \{2t^2 - 5 + c/t^2 \mid t > 0, c \in \mathbb{R}\}$.

Med sætning 11.9 og begyndelsesværdibetingelsen $(t_0, x_0) = (1, 2)$ kan man bestemme en entydig løsning, her kaldet $x_{bet}(t)$, med $x_{bet}(1) = 2$. $x_{bet}(t)$ udtrækkes af den fuldstændige løsningsmængde, og begyndelsesværdibetingelsen indsættes for at bestemme c.

$$x_0 = 2t_0^2 - 5 + \frac{c}{t_0^2} \Leftrightarrow 2 = 2 \cdot 1^2 - 5 + \frac{c}{1^2} \Leftrightarrow c = 5 \tag{11-42}$$

Derfor er den entydige og betingede løsningsfunktion til differentialligningen givet ved

$$x_{bet}(t) = 2t^2 - 5 + \frac{5}{t^2}, \quad t > 0\,. \tag{11-43}$$

11.2.2 Løsningsstrukturen til 1. ordens differentialligninger

I nogle tilfælde kan det være svært at bruge sætning 11.6 til at løse en 1. ordens differentialligning, fordi den indeholder integralet $\int \mathrm{e}^{P(t)} q(t) dt$, som kan være "grimt" og svært at bestemme. Hvis differentialligningen derimod har et "pænt" udseende, kan man gætte sig til en enkelt løsning til differentialligningen og samtidig bestemme samtlige løsninger til den tilsvarende homogene ligning ved hjælp af ligning (11-22) i samme sætning. Det bygger på den grundlæggende struktursætning for løsninger til lineære differentialligninger 11.4 og munder ud i følgende metode omhandlende ***løsningsstrukturen*** af den lineære 1. ordens differentialligning.

|||| Metode 11.11 1. ordens løsningsstruktur

Den fuldstændige løsningsmængde L_{inhom} til den lineære 1. ordens differentialligning

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t), \quad t \in I, \tag{11-44}$$

kan ved hjælp af sætning 11.4 opdeles i to:

1. Den fuldstændige løsningsmængde L_{hom} til den tilsvarende homogene ligning, for eksempel bestemt ved hjælp af sætning 11.6.
2. En partikulær løsning til den inhomogene ligning $x_0(t)$, for eksempel bestemt med et gæt.

Strukturen af løsningen er da

$$L_{inhom} = x_0(t) + L_{hom} = \left\{ x_0(t) + ce^{-P(t)} \;\middle|\; t \in I, c \in \mathbb{R} \right\}, \tag{11-45}$$

hvor $P(t) = \int p(t)dt$.

|||| Eksempel 11.12 Løsningen opdeles

Den lineære 1. ordens differentialligning

$$x'(t) + 2x(t) = 30 + 8t, \quad t \in \mathbb{R} \tag{11-46}$$

har den fuldstændige løsningsmængde

$$L_{inhom} = \left\{ 13 + 4t + ce^{-2t} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\}. \tag{11-47}$$

Ifølge metode 11.11 om strukturen (og sådan set også sætning 11.4) kan løsningen deles op i den fuldstændige løsningsmængde L_{hom} til den homogene ligning og en partikulær løsning $x_0(t)$ til inhomogene ligning. Dette er vel at mærke også gældende, selvom løsningen er fundet ved hjælp af sætning 11.6. Man kan umiddelbart finde de to udtryk ud fra funktionsudtrykket ovenfor:

$$\begin{aligned} &L_{hom} = \left\{ ce^{-2t} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{og} \\ &x_0(t) = 13 + 4t, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{11-48}$$

|||| Eksempel 11.13 Løsning ved hjælp af gæt

Givet er differentialligningen

$$x'(t) + \frac{1}{2+2t}x(t) = \frac{12t-1}{1+t}, \quad t > -1. \tag{11-49}$$

Denne differentialligning har samme form som ligningen omtalt i metode 11.11, hvorfor vi bruger denne løsningsmetode. Man kunne lige vel have prøvet at bruge sætning 11.6, men der er en idé i at bruge den anden metode, og det gøres der rede for her.

Når sætning 11.6 bruges, bestemmes $P(t)$ og $\mathrm{e}^{P(t)}$. $p(t)$ aflæses af differentialligningen, og vi har følgende:

$$P(t) = \int \frac{1}{2+2t}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}dt = \frac{1}{2}\ln(1+t), \tag{11-50}$$

og

$$\mathrm{e}^{P(t)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln(1+t)} = \sqrt{1+t}\,. \tag{11-51}$$

I Panserformlen indgår integralet $\int \mathrm{e}^{P(t)}q(t)dt$, som i dette tilfælde ser således ud:

$$\int \sqrt{1+t}\cdot\frac{12t-1}{1+t}dt = \int \frac{12t-1}{\sqrt{1+t}}dt \tag{11-52}$$

Det er ikke nemt at bestemme dette integral. Derfor tyer vi til helt andre midler og bruger metode 11.11.

1) Først bestemmes en partikulær løsning $x_0(t)$ til den inhomogene ligning. For at gøre dette ganges differentialligningen (11-49) igennem med $1+t$:

$$(1+t)x'(t) + \frac{1}{2}x(t) = 12t-1 \tag{11-53}$$

Ud fra differentiallignings form ses det, at et førstegradspolynomium er en partikulær løsning. Dette kan konkluderes, fordi højresiden er et førstegradspolynomium, faktoren foran $x'(t)$ højst har graden én, og faktoren foran $x(t)$ har graden nul. Vi gætter altså på løsningen $x_0(t) = at+b$, og vi skal nu bestemme de to konstanter a og b, hvilket gøres ved indsættelse. Vi har desuden $x_0'(t) = a$.

$$\begin{aligned} (1+t)a + \frac{1}{2}(at+b) &= 12t-1 \Leftrightarrow \\ \left(\frac{3}{2}a - 12\right)t + \left(a + \frac{1}{2}b + 1\right) &= 0 \end{aligned} \tag{11-54}$$

For at denne ligning kan være opfyldt for ethvert $t \in \mathbb{R}$, må der gælde at $\frac{3}{2}a - 12 = 0$ og $a + \frac{1}{2}b + 1 = 0$, hvilket giver $a = 8$ og $b = -18$. En partikulær løsning til den inhomogene differentialligning er derfor $x_0(t) = 8t - 18$. Det var altså muligt at bestemme en løsning ved hjælp af et 'gæt'.

2) Nu bestemmes den fuldstændige løsningsmængde L_{hom} til den tilsvarende homogene ligning:

$$x'(t) + \frac{1}{2+2t}x(t) = 0 \tag{11-55}$$

Dette kan gøres ved brug af ligning (11-22) i sætning 11.6. Vi skal bruge $\mathrm{e}^{-P(t)}$, men da vi allerede kender $\mathrm{e}^{P(t)}$ fra ligning (11-51), har vi nemt, at

$$\mathrm{e}^{-P(t)} = \frac{1}{\sqrt{1+t}} \tag{11-56}$$

Den fuldstændige løsningsmængde L_{hom} til den homogene differentialligning er

$$\begin{aligned} L_{hom} &= \left\{ c\mathrm{e}^{-P(t)} \;\middle|\; t > -1, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \frac{c}{\sqrt{1+t}} \;\middle|\; t > -1, c \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned} \tag{11-57}$$

Den fuldstændige løsningsmængde L_{inhom} til den inhomogene differentialligning (11-49) er så givet ved

$$\begin{aligned} L_{inhom} &= x_0(t) + L_{hom} \\ &= \left\{ 8t - 18 + \frac{c}{\sqrt{1+t}} \;\middle|\; t > -1, c \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned} \tag{11-58}$$

I eksempel 11.12 fandt vi ud af, at uanset om vi bruger strukturmetoden 11.11 eller Panserformlen, sætning 11.6, er det altid muligt at dele løsningen op i to: løsningen til den homogene henholdsvis inhomogene differentialligning. Kombineres dette med, hvad vi har lært om entydighed, kan vi komme frem til en generel fremgangsmåde for løsning af lineære differentialligninger, som står i nedenstående info-boks og er illustreret i figur 11.1.

Når man løser en lineær differentialligning (ikke nødvendigvis en af 1. orden), er det meget ofte således, at man er interesseret i en entydig og betinget løsning, altså en løsning, der opfylder et sæt af begyndelsesværdibetingelser. Man kan dog ikke gå den direkte vej til denne løsning, men er nødt til at gå over tre trin først:

1) den fuldstændige løsningsmængde til den homogene ligning, 2) en partikulær løsning til den inhomogene ligning (hvis $q(t) \neq 0$), hvilket giver 3) den fuldstændige løsningsmængde til den inhomogene ligning. Med denne løsning og en "tilpas mængde" af begyndelsesværdibetingelser kan man endelig bestemme den betingede løsning. Læg mærke til at den partikulære løsning ikke nødvendigvis er den ønskede betingede løsning, også selvom den er entydig. Løsningsfremgangsmåden er illustreret nedenfor.

$$\begin{tikzcd}
 & L_{hom} \arrow[dr] & & \text{Begyndelsesværdibetingelser} \arrow[d] \\
f(x(t)) = q(t) \arrow[ur] \arrow[dr] & & L_{inhom} \arrow[r] & x_{bet}(t) \\
 & x_0(t) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Figur 11.1: Forløbet ved løsning af en lineær differentialligning

Herunder kommer et eksempel, der viser hvordan det er muligt "gå baglæns" i proceduren vist i figur 11.1. Løsningen til en 1. ordens differentialligning er givet, men hvordan ser differentialligningen egentlig ud?

|||| Eksempel 11.14 Fra løsning til differentialligning

Givet er den fuldstændige løsningsmængde til en lineær 1. ordens inhomogen differentialligning

$$L_{inhom} = \left\{ te^{-5t} + ct \;\middle|\; t > 0, c \in \mathbb{R} \right\} \tag{11-59}$$

Vi ønsker at bestemme den tilhørende differentialligning, som har formen

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t)\,. \tag{11-60}$$

Altså skal $p(t)$ og $q(t)$ bestemmes.

Først betragtes den tilsvarende homogene differentialligning. Løsningen til denne kan spottes i ligning (11-59). Der gælder således at $L_{hom} = \left\{ ct \mid t > 0, c \in \mathbb{R} \right\}$. Endvidere vides at den homogene differentialligning generelt ser således ud

$$x'(t) + p(t)x(t) = 0 \tag{11-61}$$

$x(t) = ct$ er en løsning til denne differentialligning, og derfor kan $p(t)$ bestemmes. Vi har også at $x'(t) = c$.

$$c + p(t)ct = 0 \Leftrightarrow p(t) = -\frac{1}{t} \tag{11-62}$$

Da vi nu kender $p(t)$ mangler vi kun at bestemme højresiden $q(t)$ i den oprindelige inhomogene differentialligning. $x(t) = te^{-5t} + ct$ er en løsning til denne differentialligning, hvilket ses af ligning (11-59). Vi har også at $x'(t) = e^{-5t} - 5te^{-5t} + c$. Udtrykkene for $x(t)$ og $x'(t)$ indsættes i den generelle differentialligning, hvor vi nu også ved at $p(t) = -1/t$.

$$e^{-5t} - 5te^{-5t} + c - \frac{1}{t} \cdot \left(te^{-5t} + ct\right) = q(t) \Leftrightarrow q(t) = -5te^{-5t} \tag{11-63}$$

Da nu både $p(t)$ og $q(t)$ er bestemt er hele differentialligningen bestemt:

$$x'(t) - \frac{1}{t}x(t) = -5te^{-5t} \tag{11-64}$$

11.3 Opsummering

I denne note er lineære differentialligninger blevet betragtet generelt for at kunne identificere og behandle dem. Dernæst er en bestemt type af lineære differentialligninger blevet gennemgået yderligere, nemlig de 1. ordens differentialligninger.

- En lineær differentialligning kan skrives på formen

$$f(x(t)) = q(t)\,, \tag{11-65}$$

hvor $x(t)$ er den ukendte funktion, man ønsker at bestemme, f er en lineær afbildning og $q(t)$ kaldes *højresiden*.

- Alle lineære differentialligninger har uendelig mange løsninger, som kan skrives på mængdeform, kaldet L_{inhom} henholdsvis L_{hom}, alt efter om differentialligningen er *inhomogen*, hvor $q(t) \neq 0$, henholdsvis *homogen*, hvor $q(t) = 0$. Se sætning 11.4.

- Fuldstændige løsninger til alle lineære differentialligninger har samme struktur:

$$L_{inhom} = x_0(t) + L_{hom}\,, \tag{11-66}$$

hvor L_{inhom} er den fuldstændige løsning til differentialligningen $f(x(t)) = q(t)$, L_{hom} er den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene differentialligning $f(x(t)) = 0$, og $x_0(t)$ er en *partikulær* løsning til den inhomogene differentialigning.

- Den lineære 1. ordens differentialligning har formen

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t)\,, \tag{11-67}$$

og har en konkret løsningsformel, kaldet *Panserformlen*, se sætning 11.6.

- For at bestemme en enkelt, såkaldt entydig og betinget, løsning til en lineær differentialligning er det nødvendigt at kende en "tilpas mængde" af *begyndelsesværdibetingelser*. I 1. ordens differentialligninger er således nødvendigt at kende en enkelt begyndelsesværdibetingelse. Denne problematik bunder i *eksistens og entydighed*, se sætning 11.9.

eNote 12

Lineære 1. ordens differentialligningssystemer

Denne eNote beskriver 1. ordens differentialligningssystemer og viser, hvordan de kan løses. eNoten er i forlængelse af eNote, der beskriver lineære differentialligninger generelt. Det er derfor en god idé at have læst den først. Desuden bruges egenværdier og -vektorer i løsningsproceduren, se eNote og eNote.

Vi vil her kigge på lineære koblede homogene differentialligninger af 1. orden med konstante koefficienter (se eventuelt forklaring 12.1). En sådan samling af ***koblede differentialligninger*** kaldes et ***differentialligningssystem***. Et differentialligningssystem af 1. orden med n ligninger ser principielt således ud:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1'(t) & = & a_{11}x_1(t) & + & a_{12}x_2(t) & + & \ldots & + & a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) & = & a_{21}x_1(t) & + & a_{22}x_2(t) & + & \ldots & + & a_{2n}x_n(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ x_n'(t) & = & a_{n1}x_1(t) & + & a_{n2}x_2(t) & + & \ldots & + & a_{nn}x_n(t) \end{array} \tag{12-1}$$

I systemets venstreside er differentialkvotienterne af de n ukendte funktioner $x_1(t)$, $x_2(t)$, . . ., $x_n(t)$ linet op. Mens hver højreside er en linearkombination af de n ukendte funktioner. Koefficienterne (a'erne) er reelle konstanter. I matrix-format kan systemet skrives således:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{12-2}$$

Endnu mere kompakt skrives det

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{12-3}$$

A kaldes ***systemmatricen***. Det er nu målet at løse et sådant differentialligningssystem, altså bestemme $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$.

|||| **Forklaring 12.1 Hvad er et differentialligningssystem?**

Differentialligningssystemer er samlinger af differentialligninger. Grunden til, at man ikke betragter differentialligningerne enkeltvis, er, at de ikke kan løses hver for sig, fordi de samme ukendte funktioner optræder i flere ligninger. Altså er ligningerne *koblede*. En enkelt differentialligning fra et system kan for eksempel se således ud:

$$x_1'(t) = 4x_1(t) - x_2(t) \tag{12-4}$$

Det er ikke muligt at bestemme hverken $x_1(t)$ eller $x_2(t)$, da der er to ukendte funktioner, men kun én differentialligning.

For at kunne løse et sådant system fuldt ud, skal man have lige så mange ligninger, som man har ukendte funktioner (med deres tilhørende afledede). Den anden ligning i systemet kunne derfor være:

$$x_2'(t) = -6x_1(t) + 2x_2(t) \tag{12-5}$$

Vi har nu lige så mange ligninger (to), som vi har ukendte funktioner (to), og det er nu muligt at bestemme både $x_1(t)$ og $x_2(t)$.

For overskuelighedens skyld skriver man differentialligningssystemer på matrixform. Systemet ovenfor ser således ud:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{12-6}$$

Ser man bort fra, at det er vektorer og matricer, der opereres med, ligner ligningssystemet noget, vi har set før: $x'(t) = A \cdot x(t)$, som man allerede kunne løse i gymnasiet. Løsningen til denne differentialligning er triviel: $x(t) = ce^{At}$, hvor c er en arbitrær konstant. Nedenfor finder vi ud af, at løsningen til det tilsvarende system af differentialligninger er sammenlignelig med $x(t) = ce^{At}$.

Vi løser nu differentialligningssystemet i følgende sætning. Sætningen indeholder forudsætninger, der ikke altid er opfyldte. De særtilfælde hvor sætningen ikke gælder, undersøges senere. Beviset for sætningen indeholder en meget kendt og brugt metode, kaldet ***diagonaliseringsmetoden***.

Sætning 12.2

Et lineært differentialligningssystem bestående af n ligninger med i alt n ukendte funktioner er givet ved

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{12-7}$$

Hvis $\mathbf{A}$ har n lineært uafhængige egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ tilhørende (ikke nødvendigvis forskellige) egenværdier, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, er systemets fuldstændige løsningsmængde bestemt ved

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n \mathrm{e}^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{12-8}$$

hvor $c_1, c_2, \ldots, c_n$ er vilkårlige komplekse konstanter:

Læg mærke til, at det ikke altid er muligt, at finde n lineært uafhængige egenvektorer. Derfor kan man ikke altid bruge sætning 12.2 til løsning af differentialligningssystemer af 1. orden.

I sætningen er angivet den fuldstændige komplekse løsningsængde for differentialligningssystemet. Den fuldstændige reelle løsningsængde kan derefter findes som den reelle delmængde af den komplekse løsningsmængde.

Bevis

Vi gætter på, at en løsning til differentialligningssystemet $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ er en vektor $\mathbf{v}$ ganget på $\mathrm{e}^{\lambda t}$, hvor λ er en konstant, så $\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}$. Vi har da den differentierede

$$\mathbf{x}'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}. \tag{12-9}$$

Sættes dette udtryk for $\mathbf{x}'(t)$ ind i ligning (12-7) sammen med udtrykket for $\mathbf{x}(t)$ fås:

$$\lambda \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = 0 \tag{12-10}$$

$\mathrm{e}^{\lambda t}$ er forskellig for nul for ethvert $t \in \mathbb{R}$, hvorfor det kan divideres ud. Denne ligning er et egenværdiproblem. λ er en egenværdi til $\mathbf{A}$ og $\mathbf{v}$ er den tilhørende egenvektor. De kan begge bestemmes. Det er nu lykkedes os at finde ud af, at $\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}$ er én løsning til differentialligningssystemet, når λ er en egenværdi og $\mathbf{v}$ den tilhørende egenvektor til $\mathbf{A}$.

Til at bestemme den fuldstændige løsningsmængde bruges den såkaldte ***diagonaliseringsmetode***:

Vi antager, at $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{n\times n}$ har n lineært uafhængige (reelle eller komplekse) egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ hørende til egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Vi indfører nu den regulære matrix $\mathbf{V}$, som indeholder alle egenvektorerne:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \tag{12-11}$$

Endvidere indføres funktionen $\mathbf{y}$, så $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$, således at

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\mathbf{y}(t) \tag{12-12}$$

Vi har da, at $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{V}\mathbf{y}'(t)$. Indsættes disse udtryk for $\mathbf{x}(t)$ og $\mathbf{x}'(t)$ i ligning (12-7), fås

$$\mathbf{V}\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{y}(t) \Leftrightarrow \mathbf{y}'(t) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{y}(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{y}(t), \tag{12-13}$$

hvor $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$ er en diagonalmatrix med egenværdierne tilhørende $\mathbf{A}$.

Vi har nu ligningen $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{y}(t)$, der kan skrives på følgende måde:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) &= \lambda_2 y_2(t) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= \lambda_n y_n(t) \end{aligned} \tag{12-14}$$

da $\mathbf{\Lambda}$ kun har elementer forskellig fra nul i diagonalen. Dette ligningssystem er ikke koblet: I hver ligning optræder kun én funktion og dens afledede. Derfor kan man løse dem enkeltvis, og den fuldstændige løsningsmængde til hver ligning er $y(t) = ce^{\lambda t}$ for alle $c \in \mathbb{C}$. Samlet giver det den fuldstændige løsningsmængde bestående af nedenstående funktioner for alle $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \tag{12-15}$$

Da vi nu har løsningen $\mathbf{y}(t)$ kan vi også finde løsningen $\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\mathbf{y}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n \,. \end{aligned} \tag{12-16}$$

Vi har nu fundet den fuldstændige komplekse løsningsmængde til ligningssystemet i ligning (12-7) som består af funktionerne $\mathbf{x}(t)$ for alle $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$.

■

Eksempel 12.3

Der er givet differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \ \ x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) \end{aligned} \tag{12-17}$$

som på matrixform skrives som

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t). \tag{12-18}$$

Det kan vises, at $\mathbf{A}$ har egenværdierne $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_2 = -2$ med de tilhørende egenvektorer $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ og $\mathbf{v}_2 = (2, -3)$ (prøv selv!). Derfor er den fuldstændige reelle løsningsmængde til differentialligningssystemet givet ved nedenstående funktioner for alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \mathrm{e}^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{-2t} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{12-19}$$

Løsningen er fundet ved brug af sætning 12.2. En anden måde at opskrive løsningsmængden på er ved at skille ligningssystemet ad, så

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 \mathrm{e}^{3t} + 2c_2 \mathrm{e}^{-2t} \\ x_2(t) &= c_1 \mathrm{e}^{3t} - 3c_2 \mathrm{e}^{-2t} \end{aligned} \tag{12-20}$$

udgør løsningsmængden, hvor $t \in \mathbb{R}$, for alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

12.1 To koblede differentialligninger

Givet et lineært homogent 1. ordens differentialligningssystem med konstante koefficienter med n ligninger og n ukendte funktioner

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \,. \quad t \in \mathbb{R} \tag{12-21}$$

Hvis systemmatricen $\mathbf{A}$ har n lineært uafhængige egenvektorer, kan systemets reelle løsningsmængde findes ved hjælp af sætning 12.2. Hvis egenværdierne er reelle, kan den reelle løsningsmængde umiddelbart opskrives efter sætningens formel (12-8), hvor de de n tilhørende lineært uafhængigge egenvektorer er reelle, og de arbitrære konstanter angives som reelle. Hvis systemmatricen har egenværdier som ikke er reelle, kan den reelle løsningsmænde finde2 ved at uddrage den reelle delmængde af den komplekse løsningsmængde. Også i dette tilfælde vil løsningsmængden kunne opskrives som en linearkombination af n lineært uafhængige reelle løsninger til differentialligningssystem.

Tilbage har vi særtilfældet, hvor systemmatricen ikke har n lineært uafhængige egenvektorer. Også her vil den reelle løsningsmængde være en linearkombination af n lineært uafhængige reelle løsninger til differentialligningssystemet. Her kan diagonaliseringsmetoden af gode grunde ikke benyttes, og man må bruge andre metoder.

I dette afsnit gennemgår vi de nævnte tre tilfælde for systemer der består af $n = 2$ koblede differentialligninger med 2 ukendte funktioner.

|||| Metode 12.4

Den fuldstændige reelle løsningsmængde til differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{12-22}$$

bestående af $n = 2$ ligninger med 2 ukendte funktioner, kan opskrives som

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{u}_1(t) + c_2\mathbf{u}_2(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{12-23}$$

hvor $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ er reelle lineært uafhængige partikulære løsninger og $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Bestem først egenværdierne til $\mathbf{A}$. For rødderne i det karakteristiske polynomium $\mathbf{A}$ foreligger der tre muligheder:

- **To reelle enkeltrødder.** I så fald har begge egenværdier λ_1 og λ_2 algebraisk multiplicitet 1 og geometrisk multiplicitet 1, og vi kan sætte

  $$\mathbf{u}_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 \quad \text{og} \quad \mathbf{u}_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2, \tag{12-24}$$

  hvor $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er egentlige egenvektorer tilhørende λ_1 og λ_2 respektivt.

- **To komplekse rødder.** De to egenværdier λ og $\bar{\lambda}$ er da hinandens konjugerede komplekse tal. Vi bestemmer da $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ ved hjælp af metode 12.5.

- **En dobbeltrod.** Her har egenværdien λ algebraisk multiplicitet 2. Hvis den geometriske multiplicitet af λ er 1, bestemmes $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ ved hjælp af metode 12.7.

Ved den første mulighed i metode 12.4 med to forskellige reelle egenværdier, kan man udmiddelbart benytte sætning 12.2, idet de arbitrære konstanter vælges som reelle, se eksempel 12.3.

Nu følger metoden, der tager sig af tilfældet med to komplekse egenværdier.

|||| Metode 12.5

To lineært uafhængige reelle løsninger til differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{12-25}$$

hvor $\mathbf{A}$ har det komplekse egenværdipar $\lambda = \alpha + \beta i$ og $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ med tilhørende egenvektorer $\mathbf{v}$ og $\bar{\mathbf{v}}$, er

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(t) &= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}\right) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)\mathrm{Re}(\mathbf{v}) - \sin(\beta t)\mathrm{Im}(\mathbf{v})\right) \\ \mathbf{u}_2(t) &= \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}\right) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(\sin(\beta t)\mathrm{Re}(\mathbf{v}) + \cos(\beta t)\mathrm{Im}(\mathbf{v})\right) \end{aligned} \tag{12-26}$$

Beviset medtages i næste version af denne eNote.

|||| Eksempel 12.6

Givet differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{12-27}$$

Vi ønsker at bestemme den fuldstændige reelle løsningsmængde.

Egenværdierne er bestemt til $\lambda = 1 + i$ henholdsvis $\bar{\lambda} = 1 - i$ med de tilhørende egenvektorer $\mathbf{v} = (-i, 1)$ henholdsvis $\bar{\mathbf{v}} = (i, 1)$. Det ses, at der er to komplekse egenværdier og dertil to komplekse egenvektorer. Med $\lambda = 1 + i$ haves

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Re}(\mathbf{v}) + i\mathrm{Im}(\mathbf{v}) \tag{12-28}$$

Bruges metode 12.5 har vi da de to løsninger:

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathrm{e}^t\left(\cos(t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \sin(t)\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{e}^t\begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \tag{12-29}$$

$$\mathbf{u}_2(t) = \mathrm{e}^t\left(\sin(t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \cos(t)\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{e}^t\begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} \tag{12-30}$$

Den fuldstændige reelle løsningsmængde til differentialligningssystemet (12-27) er da givet ved følgende funktioner for alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{u}_1(t) + c_2\mathbf{u}_2(t) = \mathrm{e}^t\left(c_1\begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}\right), \quad t \in \mathbb{R} \tag{12-31}$$

fundet ved hjælp af metode 12.4.

Endelig beskrives metoden der kan bruges, hvis systemmatricen har egenværdien λ med $\mathrm{am}(\lambda) = 2$ og $\mathrm{gm}(\lambda) = 1$, dvs. hvor diagonalisering ikke mulig.

|||| Metode 12.7

Hvis systemmatricen **A** til differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{12-32}$$

har en egenværdi λ med algebraisk multiplicitet 2, men det tilhørende egenvektorrum kun har geometrisk multiplicitet 1, findes to lineært uafhængige løsninger til differentialligningssystemet af formen:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(t) &= \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v} \\ \mathbf{u}_2(t) &= t\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v} + \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{b}, \end{aligned} \tag{12-33}$$

hvor **v** er egenvektoren tilhørende egenværdien λ, og **b** er løsning til nedenstående lineære ligningssystem:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{b} = \mathbf{v} \tag{12-34}$$

|||| Bevis

Det er åbenlyst, at den ene løsning til differentialligningssystemet er $\mathbf{u}_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}$. Det svære er at finde endnu en løsning.

Vi gætter på en løsning af formen

$$\mathbf{u}_2(t) = t\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v} + \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{b} = \mathrm{e}^{\lambda t}(t\mathbf{v} + \mathbf{b}), \tag{12-35}$$

hvor **v** er en egenvektor tilhørende λ. Vi har da

$$\mathbf{u}_2{}'(t) = (\mathrm{e}^{\lambda t} + \lambda t\mathrm{e}^{\lambda t})\mathbf{v} + \lambda\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{b} = \mathrm{e}^{\lambda t}((1+\lambda t)\mathbf{v} + \lambda\mathbf{b}) \tag{12-36}$$

Vi kontrollerer, om $\mathbf{u}_2(t)$ er en løsning ved at indsætte det i $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2{}'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{u}_2(t) \Leftrightarrow \\ (1+\lambda t)\mathbf{v} + \lambda\mathbf{b} &= \mathbf{A}(t\mathbf{v} + \mathbf{b}) \Leftrightarrow \\ t(\lambda\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{v}) + (\mathbf{v} + \lambda\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{b}) &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ \lambda\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{v} + \lambda\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{b} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{12-37}$$

Den første ligning kan nemt omformes til $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, og den ses at være sand, da **v** er en egenvektor tilhørende λ. Den anden ligning omformes:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \lambda\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{b} &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ \mathbf{A}\mathbf{b} - \lambda\mathbf{b} &= \mathbf{v} \Leftrightarrow \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{b} &= \mathbf{v} \end{aligned} \tag{12-38}$$

Hvis **b** opfylder det foreskrevne ligningssystem, vil $\mathbf{u}_2(t)$ også være en løsning til differentialligningssystemet. Vi har nu fundet to løsninger, og vi skal finde ud af, om de er lineært uafhængige. Dette gøres ved et normalt linearitetskriterium: Hvis ligningen $k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ kun har løsningen $k_1 = k_2 = 0$ er $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ lineært uafhængige.

$$\begin{aligned} k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 &= \mathbf{0} \Rightarrow \\ k_1 e^{\lambda t}\mathbf{v} + k_2(te^{\lambda t}\mathbf{v} + \mathbf{b}e^{\lambda t}) &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ t(k_2\mathbf{v}) + (k_1\mathbf{v} + k_2\mathbf{b}) &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ k_2\mathbf{v} = \mathbf{0} \wedge k_1\mathbf{v} + k_2\mathbf{b} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{12-39}$$

Da $\mathbf{v}$ er en egenvektor, er den forskellig fra nulvektoren, og derfor er $k_2 = 0$ ifølge den første ligning. Den anden ligning er derved blevet reduceret til $k_1\mathbf{v} = \mathbf{0}$, og med samme argument haves $k_1 = 0$. Derfor er de løsninger lineært uafhængige, og metoden er nu bevist.

■

|||| Eksempel 12.8

Givet differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 16 & -1 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t). \tag{12-40}$$

Egenværdierne bestemmes for $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 16-\lambda & -1 \\ 4 & 12-\lambda \end{vmatrix} &= (16-\lambda)(12-\lambda) + 4 \\ &= \lambda^2 - 28\lambda + 192 = (\lambda - 14)^2 = 0 \end{aligned} \tag{12-41}$$

Der er altså kun én egenværdi, nemlig $\lambda = 14$, selvom det er et 2×2-system. Egenvektorerne bestemmes:

$$\mathbf{A} - 14\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 16-14 & -1 \\ 4 & 12-14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{12-42}$$

Man har da egenvektoren $(\frac{1}{2}, 1)$, eller $\mathbf{v} = (1, 2)$. Vi må altså konstatere, at egenværdien λ har algebraisk multiplicitet 2, men at det tilhørende vektorrum har geometrisk multiplicitet 1. For at bestemme to uafhængige løsninger til differentialligningssystemet kan metode 12.7 bruges.

Først løses følgende ligningssystem:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{b} = \mathbf{v} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{12-43}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{12-44}$$

Dette giver $\mathbf{b} = (1, 1)$, hvis den frie variabel sættes til 1. De to løsninger er da

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(t) &= e^{14t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_2(t) &= te^{14t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + e^{14t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{12-45}$$

Ved hjælp af metode 12.4 kan den fuldstændige løsningsmængde bestemmes til at være følgende funktioner for alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{u}_1(t) + c_2\mathbf{u}_2(t) = c_1 e^{14t}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + c_2 e^{14t}\left(t\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right). \tag{12-46}$$

12.2 n-dimensionalt løsningsrum

I det foregående afsnit har vi betragtet koblede systemer bestående af to lineære ligningssystemer med to ukendte funktioner. Løsningsrummet er to-dimensionalt, idet det kan opskrives som en linearkombination af to lineært uafhængige løsninger. Dette kan generaliseres til vilkårlige systemer med $n \geq 2$ koblede lineære differentialligninger med n ukendte funtioner: Løsningsmængden er en linearkombination af netop n lineært uafhængige løsninger. Dette formuleres i generel form i følgende sætning.

|||| Sætning 12.9

Givet det lineære homogene 1. ordens differentialligningssystem med konstante reelle koefficienter

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{12-47}$$

bestående af n ligninger og med i alt n ukendte funktioner. Den fuldstændige reelle løsningsmængde til systemet er n-dimensionalt kan opskrives ved

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{u}_1(t) + c_2\mathbf{u}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{u}_n(t), \tag{12-48}$$

hvor $\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \ldots, \mathbf{u}_n(t)$ er lineært uafhængige reelle løsninger til differentialligningssystemet, og $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Herunder er et eksempel med et koblet system af tre differentiallinger, der eksemplificerer sætning 12.9.

|||| Eksempel 12.10 Advanced

Givet differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix}-9 & 10 & 0\\-3 & 1 & 5\\1 & -4 & 6\end{bmatrix}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{12-49}$$

Vi ønsker at bestemme den fuldstændige reelle løsningsmængde til differentialligningssystemet. Egenværdierne og egenvektorene kan bestemmes og er som følger:

$$\lambda_1 = -4 \quad : \quad \mathbf{v}_1 = (10, 5, 1)$$
$$\lambda_2 = 1 \quad : \quad \mathbf{v}_2 = (5, 5, 3)$$

Desuden har λ_2 algebraisk multiplicitet 2, men det tilhørende egenvektorrum har geometrisk multiplicitet 1. Fordi $n = 3$ skal vi bruge 3 lineært uafhængige løsninger til at danne den fuldstændige løsningsmængde, som set i sætning 12.9. Egenværdierne betragtes hver for sig:

1) Den første egenværdi, $\lambda_1 = -4$, har både geometrisk og algebraisk multiplicitet lig 1. Det giver netop én løsning

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 = \mathrm{e}^{-4t}\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12-50}$$

2) Den anden egenværdi, $\lambda_2 = 1$, har algebraisk multiplicitet 2, men geometrisk multiplicitet 1. Derfor kan vi bruge metode 12.7 til at finde to løsninger. Først bestemmes $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E})\mathbf{b} = \mathbf{v}_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{12-51}$$

En partikulær løsning til dette ligningssystem er $\mathbf{b} = (0, \frac{1}{2}, 1)$. Med denne viden har vi yderligere to lineært uafhængige løsninger til differentialligningssystemet:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 = \mathrm{e}^{t}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_3(t) &= t\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathbf{b} = t\mathrm{e}^{t}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{12-52}$$

Det er op til læseren at vise, at de tre løsninger er lineært uafhængige.

Ifølge metode 12.9 er den fuldstændige reelle løsningsmængde udgjort af følgende linearkombination for alle $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + c_3\mathbf{x}_3(t) \tag{12-53}$$

Dette giver altså

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathrm{e}^{-4t}\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\mathrm{e}^{t}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3\left(t\mathrm{e}^{t}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right) \tag{12-54}$$

hvor $t \in \mathbb{R}$ og alle $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

12.3 Eksistens og entydighed af løsninger

Ifølge struktursætningen 12.9 indeholder den fuldstændige løsningsmængde til et differentialligningssystem med n ligninger n arbitrære konstanter. Hvis man har n ***begyndelsesværdibetingelser***, så kan konstanterne bestemmes, og vi får da en entydig løsning. Dette formuleres i følgende ***eksistens- og entydighedssætning***.

|||| Sætning 12.11

Et 1. ordens differentialligningssystem bestående af n ligninger og n ukendte funktioner med konstante koefficienter er givet ved

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad t \in I\,. \tag{12-55}$$

For ethvert $t_0 \in I$ og ethvert talsæt $\mathbf{y}_0 = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ findes der netop én løsning $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t) \ldots, x_n(t)\,)$ der opfylder begyndelsesværdibetingelsen

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}_0\,, \tag{12-56}$$

hvilket vil sige at

$$x_1(t_0) = y_1,\ x_2(t_0) = y_2,\ \ldots,\ x_n(t_0) = y_n. \tag{12-57}$$

Beviset udelades.

|||| Eksempel 12.12

I eksempel 12.3 fandt vi den fuldstændige løsningsmængde til differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{12-58}$$

nemlig

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{12-59}$$

Vi ønsker nu at bestemme den entydige løsning $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ som opfylder begyndelsesværdibetingelsen $\mathbf{x}(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (6, 6)$. Dette giver ligningssystemet

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = c_1 e^0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^0 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \tag{12-60}$$

Med sædvanlig GaussJordan-elimination fås

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{12-61}$$

Man får altså løsningen $(c_1, c_2) = (6, 0)$, og den entydige og betingede løsning er derfor

$$\mathbf{x}(t) = 6e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{12-62}$$

hvilket er det samme som at

$$x_1(t) = 6e^{3t} \quad x_2(t) = 6e^{3t}\,. \tag{12-63}$$

I dette særtilfælde er de to funktioner altså identiske.

12.4 Omformning af lineære n-te ordens homogene differentialligninger til et 1. ordens differentialligningssystem

Med lidt snilde er det muligt at omforme en vilkårlig homogen n-te ordens differentialligning med konstante koefficienter til et differentialligningssystem, som kan løses ved hjælp af denne note.

|||| Metode 12.13

En n-te ordens lineær differentialligning,

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + a_{n-2}x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0 \qquad (12\text{-}64)$$

for $t \in \mathbb{R}$, kan omformes til et 1. ordens differentialligningssystem, og systemet vil se således ud:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad (12\text{-}65)$$

og $x_1(t) = x(t)$.

Beviset for denne omskrivning er simpelt og giver god forståelse for omformningen.

|||| Bevis

Lad der være givet en n-te ordens differentialligning som i ligning (12-64). Vi indfører n funktioner på denne måde:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= x_1'(t) &&= x'(t) \\ x_3(t) &= x_2'(t) &&= x''(t) \\ &\vdots &&\vdots \\ x_{n-1}(t) &= x_{n-2}'(t) &&= x^{(n-2)}(t) \\ x_n(t) &= x_{n-1}'(t) &&= x^{(n-1)}(t) \end{aligned} \qquad (12\text{-}66)$$

Disse nye udtryk indsættes i differentialligningen (12-64):

$$x_n'(t) + a_{n-1}x_n(t) + a_{n-2}x_{n-1}(t) + \ldots + a_1 x_2(t) + a_0 x_1(t) = 0 \qquad (12\text{-}67)$$

Denne ligning kan sammen nu med ligningerne (12-66) skrives op på matrixform.

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad (12\text{-}68)$$

Metoden er nu bevist.

■

|||| Eksempel 12.14

Givet en lineær differentialligning af 3. orden med konstante koefficienter:

$$x'''(t) - 4x''(t) - 7x'(t) + 10x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{12-69}$$

Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsningsmængde. Derfor indføres funktionerne

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= x_1'(t) = x'(t) \\ x_3(t) &= x_2'(t) = x''(t) \end{aligned} \tag{12-70}$$

På denne måde kan vi omskrive differentialligningen til

$$x_3'(t) - 4x_3(t) - 7x_2(t) + 10x_1(t) = 0 \tag{12-71}$$

Og vi kan da samle de tre sidste ligninger i et ligningssystem.

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_3(t) \\ x_3'(t) &= -10x_1(t) + 7x_2(t) + 4x_3(t) \end{aligned} \tag{12-72}$$

Det skrives på matrixform på denne måde:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & 7 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \tag{12-73}$$

Egenværdierne bestemmes til at være $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ og $\lambda_3 = 5$. Den fuldstændige løsningsmængde til differentialligningssystemet er ifølge sætning 12.2 givet ved følgende funktioner for alle de arbitrære konstanter $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathrm{e}^{-2t}\mathbf{v}_1 + c_2\mathrm{e}^{t}\mathbf{v}_2 + c_3\mathrm{e}^{5t}\mathbf{v}_3, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{12-74}$$

hvor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ er respektive egenvektorer.

Vi skal imidlertid kun bruge løsningsmængden til $x_1(t) = x(t)$, hvorfor den tages ud af systemet. Desuden indfører vi nu tre nye arbitrære konstanter $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, der skal gøre det ud for produkterne mellem c'erne og egenvektorernes førstekoordinat. Resultatet bliver således

$$x(t) = x_1(t) = k_1\mathrm{e}^{-2t} + k_2\mathrm{e}^{t} + k_3\mathrm{e}^{5t}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{12-75}$$

Dette udgør den fuldstændige løsningsmængde til differentialligningen (12-69). Hvis førstekoordinaten i $\mathbf{v}_1$ er 0 sættes $k_1 = 0$, i modsat fald kan k_1 være et vilkårligt reelt tal. På samme måde med k_2 og k_3.

eNote 13

Lineære 2. ordens differentialligninger med konstante koefficienter

I forlængelse af eNote og eNote om differentialligninger, kommer nu denne eNote omkring 2. ordens differentialligninger. Dele af bevisførelser m.m. læner sig op af de foregående noter, hvorfor det forudsættes, at man har kendskab til dem. Endvidere benyttes de komplekse tal.

Lineære 2. ordens differentialligninger med konstante koefficienter har følgende udseende:

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t), \quad t \in I, q : I \to \mathbb{R} \tag{13-1}$$

$a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ er konstante koefficienter til $x(t)$ henholdsvis $x'(t)$. Højresiden $q(t)$ er en kontinuert reel funktion, hvis definitionsmængde er et interval I (som undertiden er hele $\mathbb{R}$). Differentialligningen kaldes homogen hvis $q(t) = 0$ for alle $t \in I$ og i modsat fald inhomogen.

At denne type differentialligning er lineær, vises ved at dens venstreside opfattet som en afbildning $f : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ givet ved

$$f(\,x(t)\,) = x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) \tag{13-2}$$

opfylder linearitetskravene L_1 og L_2 . Den fremgangsmetode der benyttes i denne eNote til at løse den inhomogene differentialligning, udnytter denne egenskab.

|||| **Metode 13.1 Løsninger og deres struktur**

1. Den fuldstændige løsningsmængde L_{hom} for en homogen lineær 2. ordens differentialligning

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0, \quad t \in I \tag{13-3}$$

hvor $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, kan bestemmes ved hjælp af sætning 13.2.

2. Den fuldstændige løsningsmængde L_{inhom} for en inhomogen lineær 2. ordens differentialligning

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t), \quad t \in I, \, q : I \to \mathbb{R}, \tag{13-4}$$

hvor $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, kan ved hjælp af sætning opdeles i to:

(a) Først bestemmes den fuldstændige løsningsmængde L_{hom} til den *tilsvarende homogene differentialligning*. Denne fremkommer ved at man i (13-4) erstatter $q(t)$ med 0.

(b) Dernæst bestemmes en partikulær løsning $x_0(t)$ til (13-4) for eksempel ved at gæt. Se angående dette afsnit 13.2.

Den fuldstændige løsning har da følgende struktur

$$L_{inhom} = x_0(t) + L_{hom}. \tag{13-5}$$

13.1 Den homogene differentialligning

Vi betragter nu den lineære homogene 2. ordens differentialligning

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{13-6}$$

hvor a_0 og a_1 er reelle konstanter. Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsningsmængde. Det kan gøres ved hjælp af eksakte formler, som afhængiger af ligningens udseende.

|||| Sætning 13.2 Løsning til den homogene ligning

Den homogene differentialligning

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{13-7}$$

har den såkaldte ***karakterligning***

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0. \tag{13-8}$$

Typen af rødder til denne ligning afgør udseendet af den fuldstændige løsningsmængde L_{hom} til den homogene differentialligning.

- **To forskellige reelle rødder** λ_1 og λ_2 giver løsningen

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-9}$$

- **To komplekse rødder** $\lambda = \alpha \pm \beta i$ giver den reelle løsning

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-10}$$

- **Dobbeltroden** λ giver løsningen

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-11}$$

For alle tre tilfælde gælder, at de respektive funktioner for alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ udgør den fuldstændige løsningsmængde L_{hom}.

I afsnit gennemgås teorien for at omforme netop denne type differentialligning til et system af 1. ordens differentialligninger. Det er en brugbar metode her. Systemet vil da se således ud:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{13-12}$$

hvor $x_1(t) = x(t)$ og $x_2(t) = x_1'(t) = x'(t)$. Vi kan nu bruge teorien i det nævnte afsnit til at løse problemet.

|||| Bevis

Den homogene 2. ordens lineære differentialligning (13-7) omformes til et 1. ordens differentialligningsystem:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{13-13}$$

hvor $x_1(t) = x(t)$ er den søgte løsning, som udgør den fuldstændige løsningsmængde. Bevisførelsen tager udgangspunkt i sætningerne og metoderne i afsnit. Til det skal man bruge egenværdierne til systemmatricen **A**:

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \tag{13-14}$$

hvilket netop er karakterligningen tilhørende differentialligningen, og λ er egenværdier til systemmatricen **A**. Røddernes udseende i denne ligning er afgørende for løsningen $x(t) = x_1(t)$, hvilket giver følgende tre delbeviser:

Første del
Karakterligningen har to forskellige reelle rødder: λ_1 og λ_2. Ved hjælp af metode findes derved to lineært uafhængige løsninger $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}$ og $\mathbf{u}_2(t) = \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$, hvor $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er egenvektorer tilhørende de to egenværdier respektivt. Den fuldstændige løsning er da udspændt af:

$$\mathbf{x}(t) = k_1\mathbf{u}_1(t) + k_2\mathbf{u}_2(t) = k_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + k_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2, \tag{13-15}$$

for alle $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Førstekoordinaten $x_1(t) = x(t)$ er den søgte løsning:

$$x_1(t) = x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{13-16}$$

der for alle de arbitrære konstanter $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ udgør den fuldstændige løsningsmængde. c_1 og c_2 er to nye indførte arbitrære konstanter og de er produktet mellem k-konstanterne og egenvektorernes førstekoordinat: $c_1 = k_1 v_{1_1}$ og $c_2 = k_2 v_{2_1}$.

Anden del
Karakterligningen har det komplekse rodpar $\lambda = \alpha + \beta i$ og $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$. Den fuldstændige løsningsmængde er mulig at finde med metode.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= k_1\mathbf{u}_1(t) + k_2\mathbf{u}_2(t) \\ &= k_1 e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)\mathrm{Re}(\mathbf{v}) - \sin(\beta t)\mathrm{Im}(\mathbf{v})\right) + k_2 e^{\alpha t}\left(\sin(\beta t)\mathrm{Re}(\mathbf{v}) + \cos(\beta t)\mathrm{Im}(\mathbf{v})\right) \\ &= e^{\alpha t}\cos(\beta t)\cdot\left(k_1\mathrm{Re}(\mathbf{v}) + k_2\mathrm{Im}(\mathbf{v})\right) + e^{\alpha t}\sin(\beta t)\cdot\left(-k_1\mathrm{Im}(\mathbf{v}) + k_2\mathrm{Re}(\mathbf{v})\right). \end{aligned} \tag{13-17}$$

v er en egenvektor tilhørende λ og k_1 og k_2 er arbitrære konstanter. Førstekoordinaten $x_1(t) = x(t)$ er den søgte løsning, og er med ovenstående givet ved

$$x_1(t) = x(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t). \tag{13-18}$$

For alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ udgør $x(t)$ den fuldstændige løsningsmængde. c_1 og c_2 er to nye indførte arbitrære konstanter, som er givet ved $c_1 = k_1\mathrm{Re}(v_1) + k_2\mathrm{Im}(v_1)$ og $c_2 = -k_1\mathrm{Im}(v_1) + k_2\mathrm{Re}(v_1)$. v_1 er førstekoordinaten til **v**.

Tredje del
Karakterligningen har dobbeltroden λ. Pga. systemmatricens udseende (matricen er ækvivalent med en øvre trekantsmatrix) er det muligt at se, at den geometriske multiplicitet af det tilhørende egenvektorrum er 1, og det er da muligt at bruge metode til at finde den fuldstændige løsning.

$$\mathbf{x}(t) = k_1\mathbf{u}_1(t) + k_2\mathbf{u}_2(t) = k_1 e^{\lambda t}\mathbf{v} + k_2(te^{\lambda t}\mathbf{v} + e^{\lambda t}\mathbf{b}) = e^{\lambda t}(k_1\mathbf{v} + k_2\mathbf{b}) + k_2 te^{\lambda t}\mathbf{v}, \tag{13-19}$$

hvor **v** er en egenvektor tilhørende λ, **b** er løsning til ligningssystemet $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{b} = \mathbf{v}$ og k_1, k_2 er to arbitrære konstanter. Udtages førstekoordinaten, fås

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 te^{\lambda t}, \tag{13-20}$$

der for alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ udgør den fuldstændige løsningsmængde. c_1 og c_2 er to nye indførte arbitrære konstanter, givet ved $c_1 = k_1 v_1 + k_2 b_1$ og $c_2 = k_2 v_1$, hvor v_1 er førstekoordinaten i $\mathbf{v}$, ligesom b_1 er førstekoordinaten i $\mathbf{b}$.
Alle de tre forskellige tilfælde af rødder i karakterligningen er nu gennemgået, og sætningen er derfor bevist.

Læg mærke til, at det også er muligt at nå frem til karakterligningen ved at gætte på en løsning til differentialligningen med formen $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Man får da følgende:

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t} + a_1 \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} + a_0 \mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \tag{13-21}$$

Divideres denne ligning igennem med $\mathrm{e}^{\lambda t}$, der er forskelligt fra nul for ethvert t, fremkommer karakterligningen.

■

|||| Eksempel 13.3 Løsning til homogen ligning

Givet den homogene differentialligning

$$x''(t) + x'(t) - 20x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{13-22}$$

som har karakterligningen

$$\lambda^2 + \lambda - 20 = 0. \tag{13-23}$$

Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsningsmængde L_{hom} til denne homogene differentialligning.

Karakterligningen har rødderne $\lambda_1 = -5$ og $\lambda = 4$, idet $-5 \cdot 4 = -20$ og $-(-5+4) = 1$ er karakterligningens koefficienter. Derfor er den fuldstændige løsningsmængde til den homogene differentialligning

$$L_{hom} = \left\{ c_1 \mathrm{e}^{-5t} + c_2 \mathrm{e}^{4t}, t \in \mathbb{R} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}, \tag{13-24}$$

som er fundet ved hjælp af sætning 13.2.

|||| Eksempel 13.4 Løsning til homogen ligning

Givet er den homogene 2. ordens differentialligning med konstante koefficienter

$$x''(t) - 8x'(t) + 16x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-25}$$

Vi ønsker at bestemme L_{hom}, som er den fuldstændige løsningsmængde til denne homogene differentialligning. Karakterligningen er

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 4)^2 = 0 \tag{13-26}$$

Vi har altså dobbeltroden $\lambda = 4$, og den fuldstændige løsningsmængde er udgjort af følgende funktioner for alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$x(t) = c_1 \mathrm{e}^{4t} + c_2 t \mathrm{e}^{4t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-27}$$

Resultatet er bestemt ved hjælp sætning 13.2.

Som det ses er det forholds trivielt at bestemme løsningen til den homogene differentialligning. Det er oven i købet muligt at bestemme differentialligningen, hvis man har løsningen, altså “gå baglæns”. Det illustreres i nedenstående eksempel.

|||| Eksempel 13.5 Fra løsning til ligning

Løsningen til en differentialligning kendes:

$$x(t) = c_1 e^{2t}\cos(7t) + c_2 e^{2t}\sin(7t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{13-28}$$

som for de arbitrære konstanter c_1, c_2 udgør den fuldstændige løsningsmængde.

Siden løsningen udelukkende indeholder led med arbitrære konstanter, må differentialligningen være homogen. Endvidere ses, at løsningsstrukturen ligner den i ligning (13-10) i sætning 13.2. Det betyder, at karakterligningen til den 2. ordens differentialligning har to komplekse rødder: $\lambda = 2 \pm 7i$. Karakterligningen sættes op:

$$\begin{aligned}(\lambda - 2 + 7i)(\lambda - 2 - 7i) = (\lambda - 2)^2 - (7i)^2 = \\ \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 49 = \lambda^2 - 4\lambda + 53 = 0\end{aligned} \tag{13-29}$$

Direkte ud fra karakterligningens koefficienter kan differentialligningen opstilles:

$$x''(t) - 4x'(t) + 53x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-30}$$

Det ses også af sætning 13.2.

13.2 Den inhomogene ligning

I dette afsnit ønsker vi at bestemme en partikulær løsning $x_0(t)$ til den inhomogene differentialligning

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t), \quad t \in I, q : I \to \mathbb{R}. \tag{13-31}$$

Vi ønsker at finde en partikulær løsning, fordi den indgår i den fuldstændige løsningsmængde L_{inhom} sammen med den fuldstændige løsningsmængde L_{hom} til den tilsvarende homogene differentialligning jævnfør metode 13.1.

I denne eNote bruges ikke nogen konkret løsningsformel, i stedet bruges forskellige metoder, alt efter formen af $q(t)$. Generelt kan man sige, at den partikulære løsning $x_0(t)$ har en form som ligner $q(t)$, hvilket fremgår af følgende metoder. Læg mærke til, at disse metoder dækker nogle ofte forekommende former på $q(t)$, men ikke alle.

Endvidere vil et begrebet *superpositionsprincippet* blive behandlet. Superposition er en grundlæggende egenskab ved lineære ligninger og lineære differentialligninger. Pointen er at opsplitte en differentialligning i flere, hvor venstresiderne er ens, mens summen af højresiderne er lig den oprindelige differentiallignings højreside. Hvis den oprindelige differentialligning har højresiden $q(t) = \sin(2t) + 2t^2$, kan det være en ide, at opdele differentialligningen i to, hvor højresiderne bliver $q_1(t) = \sin(2t)$ henholdsvis $q_2(t) = 2t^2$. De to differentialligninger er nemmere at bestemme partikulære løsninger til. En partikulær løsning til den egentlige differentialligning vil da være summen af de to partikulære løsninger.

Slutteligt vil *den komplekse gættemetode* blive introduceret. Den komplekse gættemetode kan bruges, hvis højresiden $q(t)$ i differentialligningen er realdelen af et simplere komplekst udtryk. Det kunne for eksempel være, at $q(t) = e^t \sin(3t)$, som er realdelen af $-ie^{(1+3i)t}$. Det er nemmere at finde en løsning til en differentialligning, hvor højresiden er simpel, og derfor løses den tilsvarende komplekse ligning i stedet. Løsningerne til den reelle differentialligning og den tilsvarende komplekse differentialligning er nært forbundet.

13.2.1 Generelle løsningsmetoder

|||| Metode 13.6 Polynomium

En partikulær løsning $x_0(t)$ til den inhomogene differentialligning

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t), \quad t \in I, \tag{13-32}$$

hvor q er et n-te grads polynomium, er også et polynomium af højst grad n:

$$x_0(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \ldots + b_1 t + b_0, \quad t \in I, \tag{13-33}$$

hvor $b_0, b_1, \ldots, b_n$ bestemmes ved indsættelse af udtrykket for $x_0(t)$ som løsning i den inhomogene differentialligning.

|||| Eksempel 13.7 Polynomium

Givet er den inhomogene 2. ordens differentialligning med konstante koefficienter

$$x''(t) - 3x'(t) + x(t) = 2t^2 - 16t + 25, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-34}$$

Vi ønsker at bestemme en partikulær løsning $x_0(t)$ til den inhomogene differentialligning. Da højresiden er et andengradspolynomium, er denne løsning også et polynomium af højst grad 2 jævnfør metode 13.6, altså er

$$x_0(t) = b_2 t^2 + b_1 t + b_0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-35}$$

Koefficienterne bestemmes ved at indsætte udtrykket i differentialligningen sammen med $x_0'(t) = 2b_2 t + b_1$ og $x_0''(t) = 2b_2$.

$$\begin{aligned} 2b_2 - 3(2b_2 t + b_1) + b_2 t^2 + b_1 t + b_0 = 2t^2 - 16t + 25 \Leftrightarrow \\ (b_2 - 2)t^2 + (-6b_2 + b_1 + 16)t + (2b_2 - 3b_1 + b_0 - 25) = 0 \Leftrightarrow \\ b_2 - 2 = 0 \;\text{ og }\; -6b_2 + b_1 + 16 = 0 \;\text{ og }\; 2b_2 - 3b_1 + b_0 - 25 = 0 \end{aligned} \tag{13-36}$$

Den første ligning giver nemt $b_2 = 2$, hvilket indsat i den anden ligning giver $b_1 = -4$. Slutteligt giver dette i den sidste ligning, at $b_0 = 9$. Derfor er en partikulær løsning til ligning (13-34) givet ved

$$x_0(t) = 2t^2 - 4t + 9, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-37}$$

|||| Metode 13.8 Trigonometrisk

En partikulær løsning $x_0(t)$ til den inhomogene differentialligning

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t), \quad t \in I, \tag{13-38}$$

hvor $q(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$, har samme form:

$$x_0(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t), \quad t \in I, \tag{13-39}$$

hvor A og B bestemmes ved at indsætte udtrykket for $x_0(t)$ som løsning i den inhomogene differentialligning.

Det er også muligt at bestemme en partikulær løsning til en differentialligning som den i metode 13.8 ved hjælp af *den komplekse gættemetode*. Se derfor eventuelt afsnit 13.2.3.

|||| Eksempel 13.9 Trigonometrisk

Givet er differentialligningen

$$x''(t) + x'(t) - x(t) = -20\sin(3t) + 6\cos(3t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-40}$$

En partikulær løsning $x_0(t)$ til differentialligningen ønskes bestemt. Ved hjælp af metode 13.8 er en partikulær løsning

$$x_0(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) = A\sin(3t) + B\cos(3t). \tag{13-41}$$

Vi har desuden

$$\begin{aligned} x_0'(t) &= 3A\cos(3t) - 3B\sin(3t) \\ x_0''(t) &= -9A\sin(3t) - 9B\cos(3t) \end{aligned} \tag{13-42}$$

Dette indsættes i differentialligningen.

$$\begin{gathered} (-9A\sin(3t) - 9B\cos(3t)) + (3A\cos(3t) - 3B\sin(3t)) - (A\sin(3t) + B\cos(3t)) \\ = -20\sin(3t) + 6\cos(3t) \Leftrightarrow \\ (-9A - 3B - A + 20)\sin(3t) + (-9B + 3A - B - 6)\cos(3t) = 0 \Leftrightarrow \\ -9A - 3B - A + 20 = 0 \text{ og } -9B + 3A - B - 6 = 0 \end{gathered} \tag{13-43}$$

Dette er to ligninger med to ubekendte. Indsættes $A = -\frac{3}{10}B + 2$ fra den første ligning i den anden fås

$$-9B + 3\left(-\frac{3}{10}B + 2\right) - B - 6 = 0 \Leftrightarrow -10B - \frac{9}{10}B = 0 \Leftrightarrow B = 0 \tag{13-44}$$

Af dette fås $A = 2$, og en partikulær løsning til differentialligningen er da

$$x_0(t) = 2\sin(3t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-45}$$

Læg mærke til at tallet $\omega = 3$ er det samme under både cosinus og sinus i eksempel 13.9, hvilket også er det eneste metode 13.8 faciliterer. Hvis der optræder to forskellige tal er metode 13.8 ikke brugbar, for eksempel $q(t) = 3\sin(t) + \cos(10t)$. Det er *superpositionsprincippet* eller *den komplekse gættemetode* til gengæld, og dette bliver beskrevet i afsnit 13.2.2 og afsnit 13.2.3.

|||| Metode 13.10 Eksponentialfunktion

En partikulær løsning $x_0(t)$ til den inhomogene differentialligning

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t), \quad t \in I, \tag{13-46}$$

hvor $q(t) = \beta e^{\alpha t}$ og $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, er også en eksponentialfunktion:

$$x_0(t) = \gamma e^{\alpha t}, \quad t \in I, \tag{13-47}$$

hvor γ bestemmes ved indsættelse af udtrykket for $x_0(t)$ som løsning i den inhomogene differentialligning. Det præciseres, at α ikke må være rod i differentialligningens karakterligning.

Som det kommenteres til sidst i metode 13.10 må eksponenten α ikke være rod i karakterligningen. Hvis det er tilfældet vil gættet være en løsning til den tilsvarende homogene differentialligning jævnfør sætning 13.2. Dette er et gennemgående “problem” i alle ordener af differentialligninger.

|||| Eksempel 13.11 Eksponentialfunktion

Givet er differentialligningen

$$x''(t) + 11x'(t) + 5x(t) = -20e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-48}$$

Vi ønsker at bestemme en partikulær løsning $x_0(t)$ til differentialligningen. Ifølge metode 13.10 er en partikulær løsning givet ved $x_0(t) = \gamma e^{\alpha t} = \gamma e^{-t}$. Vi ved endnu ikke om $\alpha = -1$ er rod i karakterligningen, men hvis det går godt med at finde γ, er den ikke. Vi har $x_0'(t) = -\gamma e^{-t}$ og $x_0''(t) = \gamma e^{-t}$, og dette indsættes i differentialligningen:

$$\gamma e^{-t} + 11(-\gamma e^{-t}) + 5\gamma e^{-t} = -20e^{-t} \Leftrightarrow -5\gamma = -20 \Leftrightarrow \gamma = 4 \tag{13-49}$$

Det er altså lykkedes at bestemme γ, og derfor haves en partikulær løsning til differentialligningen:

$$x_0(t) = 4e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-50}$$

|||| Metode 13.12 Uheldig eksponentialfunktion

En partikulær løsning $x_0(t)$ til den inhomogene differentialligning

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t), \quad t \in I, \tag{13-51}$$

hvor $q(t) = \beta e^{\lambda t}$, $\beta \in \mathbb{R}$ og λ er rod i differentialligningens karakterligning, har følgende form:

$$x_0(t) = \gamma t e^{\lambda t}, \quad t \in I, \tag{13-52}$$

hvor γ bestemmes ved indsættelse af udtrykket for $x_0(t)$ som løsning i den inhomogene differentialligning.

|||| Eksempel 13.13 Uheldig eksponentialfunktion

Givet er differentialligningen

$$x''(t) - 7x'(t) + 10x(t) = -3e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-53}$$

Vi ønsker at bestemme en partikulær løsning til differentialligningen. Vi prøver først at bruge metode 13.10, og gætter på en løsning af formen $x_0(t) = \gamma e^{\alpha t} = \gamma e^{2t}$. Man har da $x_0'(t) = 2\gamma e^{2t}$ og $x_0''(t) = 4\gamma e^{2t}$, hvilket ved indsættelse i differentialligningen giver

$$4\gamma e^{2t} - 7 \cdot 2\gamma e^{2t} + 10\gamma e^{2t} = -3e^{2t} \Leftrightarrow 0 = -3 \tag{13-54}$$

Det ses at γ ikke optræder i den sidste ligning, og at ligningen iøvrigt er usand. Derfor må $\alpha = \lambda$ være rod i det karakterligningen. Karakterligningen ser således ud:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \tag{13-55}$$

Denne andengradsligning har rødderne 2 og 5, da $2 \cdot 5 = 10$ og $-(2+5) = -7$. Det passer altså, at $\alpha = 2$ er rod.

På grund af overstående bruges nu metode 13.12, og vi gætter på en løsning af formen $x_0(t) = \gamma t e^{\lambda t} = \gamma t e^{2t}$. Vi har da

$$\begin{aligned} x_0'(t) &= \gamma e^{2t} + 2\gamma t e^{2t} \\ x_0''(t) &= 2\gamma e^{2t} + 2\gamma e^{2t} + 4\gamma t e^{2t} = 4\gamma e^{2t} + 4\gamma t e^{2t} \end{aligned} \tag{13-56}$$

Dette indsættes i differentialligningen for at bestemme γ.

$$\begin{aligned} 4\gamma e^{2t} + 4\gamma t e^{2t} - 7(\gamma e^{2t} + 2\gamma t e^{2t}) + 10\gamma t e^{2t} = -3e^{2t} \ \Leftrightarrow \\ (4\gamma - 14\gamma + 10\gamma)t + (4\gamma - 7\gamma + 3) = 0 \ \Leftrightarrow \\ \gamma = 1 \end{aligned} \tag{13-57}$$

Det er nu lykkedes at finde γ, og derfor er en partikulær løsning til differentialligningen

$$x_0(t) = t e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-58}$$

13.2.2 Superpositionsprincippet

Inden for alle typer af lineære differentialligninger findes konceptet ***superpositionsprincippet***. Vi gennemgår det her for 2. ordens lineære differentialligninger med konstante koefficienter. Superpositionsprincippet bruges her til at bestemme en partikulær løsning til den inhomgene differentialligning, når højresiden ($q(t)$) er en kombination (addition) af flere typer af funktioner, f.eks. en sinusfunktion lagt sammen med et polynomium.

|||| Sætning 13.14 Superpositionsprincippet

Hvis $x_{0_i}(t)$ er en partikulær løsning til den inhomogene differentialligning

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q_i(t) \tag{13-59}$$

for ethvert $i = 1, \ldots, n$, er

$$x_0(t) = x_{0_1}(t) + x_{0_2}(t) + \ldots + x_{0_n}(t) \tag{13-60}$$

en partikulær løsning til

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t) = q_1(t) + q_2(t) + \ldots + q_n(t), \tag{13-61}$$

hvor højresiderne q og $q_1, q_2, \ldots, q_n$ er kontinuerte funktioner i et interval I.

|||| Bevis

Superposition er en følge af at differentialligningerne er lineære. Vi gennemfører her et generelt bevis for alle typer af lineære differentialligninger.

Venstresiden af en differentialligning kaldes $f(x(t))$. Vi opstiller nu n differentialligninger:

$$f(x_{0_1}(t)) = q_1(t),\ f(x_{0_2}(t)) = q_2(t),\ \ldots,\ f(x_{0_n}(t)) = q_n(t) \tag{13-62}$$

hvor $x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0_n}$ er partikulære løsninger til de respektive inhomogene differentialligninger. Vi definerer nu $x_0 = x_{0_1} + x_{0_2} + \ldots + x_{0_n}$ og indsætter denne i venstresiden:

$$\begin{aligned} f(x_0(t)) &= f(x_{0_1}(t) + x_{0_2}(t) + \ldots + x_{0_n}(t)) \\ &= f(x_{0_1}(t)) + f(x_{0_2}(t)) + \ldots + f(x_{0_n}(t)) \\ &= q_1(t) + q_2(t) + \ldots + q_n(t) \end{aligned} \tag{13-63}$$

På højresiden fås en sum af funktionerne $q_1, q_2, \ldots, q_n$, som kaldes for q. Sætningen er da bevist.

■

|||| Eksempel 13.15 Superposition

Givet er den inhomgene differentialligning

$$x''(t) - x'(t) - 3x(t) = 9e^{4t} + 3t - 14, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-64}$$

Vi ønsker at bestemme en partikulær løsning $x_0(t)$ til differentialligningen. Det ses, at højresiden er en kombination af en eksponentialfunktion ($q_1(t) = 9e^{4t}$) og et polynomium ($q_2(t) = 3t - 14$). Derfor bruges superpositionsprincippet 13.14 og differentialligningen opsplittes i to dele.

$$x''(t) - x'(t) - 3x(t) = 9e^{4t} = q_1(t) \tag{13-65}$$
$$x''(t) - x'(t) - 3x(t) = 3t - 14 = q_2(t) \tag{13-66}$$

Først behandles ligning (13-65), hvortil vi skal bruge metode 13.10. En partikulær løsning er da af formen $x_{0_1}(t) = \gamma e^{\alpha t} = \gamma e^{4t}$. Vi har $x'_{0_1}(t) = 4\gamma e^{4t}$ og $x''_{0_1}(t) = 16\gamma e^{4t}$. Dette indsættes i ligningen.

$$16\gamma e^{4t} - 4\gamma e^{4t} - 3\gamma e^{4t} = 9e^{4t} \Leftrightarrow \gamma = 1 \tag{13-67}$$

Derfor er $x_{0_1}(t) = e^{4t}$.

Nu behandles ligning (13-66), hvor en partikulær løsning er et polynomium af højst grad 1, jf. metode 13.6, altså er $x_{0_2}(t) = b_1 t + b_0$. Derfor er $x'_{0_2}(t) = b_1$ og $x''_{0_2}(t) = 0$. Dette indsættes i differentialligningen.

$$0 - b_1 - 3(b_1 t + b_0) = 3t - 14 \Leftrightarrow (-3b_1 - 3)t + (-b_1 - 3b_0 + 14) = 0 \tag{13-68}$$

Vi har således to ligninger med to ubekendte, og vi finder, at $b_1 = -1$, og derfor er $b_0 = 5$. Altså er en partikulær løsning $x_{0_2}(t) = -t + 5$. Den samlede partikulære løsning til (13-64) findes da som summen af de to allerede fundne partikulære løsninger til de to opsplittede ligninger:

$$x_0(t) = x_{0_1}(t) + x_{0_2}(t) = e^{4t} - t + 5, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-69}$$

13.2.3 Den komplekse gættemetode

Den komplekse gættemetode benyttes når det er bekvemt at omskrive differentialligningens højreside til en kompleks højreside, således at den givne reelle højreside er realdelen af den komplekse.

Er højresiden for eksempel $2e^{2t}\cos(3t)$, og man til denne lægger $i(-2e^{2t}\sin(3t))$, fås

$$2e^{2t}(\cos(3t) - i\sin(3t)) = 2e^{(2-3i)t}. \tag{13-70}$$

Her gælder der klart nok at $\mathrm{Re}(2e^{(2-3i)t}) = 2e^{2t}\cos(3t)$. Man finder nu en kompleks partikulær løsning til differentialligningen med den komplekse højreside. Den ønskede reelle partikulære løsning til den oprindelige differentialligning er da realdelen af den fundne komplekse løsning.

Bemærk at denne metode kan kun benyttes fordi differentialligningen er lineær. Det er netop lineariteten der sikrer at realdelen af den fundne komplekse løsning er den ønskede reelle løsning. Dette vises ved at vi opfatter differentialligningens venstreside som en lineær afbildning $f(z(t))$ i mængden af komplekse funktioner af en reel variabel og bruger følgende generelle sætning:

|||| Sætning 13.16

Der er givet en lineær afbildning $f : (C^\infty(\mathbb{R}), \mathbb{C}) \to (C^\infty(\mathbb{R}), \mathbb{C})$ og ligningen

$$f(z(t))) = s(t)\,. \tag{13-71}$$

Hvis vi sætter $z(t)$ og $s(t)$ på rektangulær form ved $z(t) = x(t) + i \cdot y(t)$ og $s(t) = q(t) + i \cdot r(t)$, så gælder der at (13-71) sand hvis og kun hvis

$$f(x(t)) = q(t) \quad \text{og} \quad f(y(t)) = r(t)\,. \tag{13-72}$$

|||| Bevis

Givet er funktionen $z(t)$ og Lad den lineære afbildning f og funktionerne $z(t)$ og $s(t)$ være givet som i sætning 13.16. Som følge af egenskaberne ved lineære afbildninger, se definition, gælder der følgende:

$$\begin{aligned} f(z(t)) = s(t) &\Leftrightarrow \\ f(x(t) + i \cdot y(t)) = q(t) + i \cdot r(t) &\Leftrightarrow \\ f(x(t)) + i \cdot f(y(t)) = q(t) + i \cdot r(t) &\Leftrightarrow \\ f(x(t)) = q(t) \ \text{ og } \ f(y(t)) = r(t)\,. & \end{aligned} \tag{13-73}$$

Sætningen er dermed bevist.

■

|||| Metode 13.17 Den komplekse gættemetode

En partikulær løsning $x_0(t)$ til den reelle inhomogene differentialligning

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{13-74}$$

hvor a_0 og a_1 er reelle koefficienter og

$$q(t) = \mathrm{Re}\Big((a+bi)\mathrm{e}^{(\alpha+\omega i)t}\Big) = a\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\omega t) - b\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\omega t), \tag{13-75}$$

bestemmes i første omgang ved at finde den tilsvarende komplekse partikulære løsning til følgende komplekse differentialligning

$$z''(t) + a_1 z'(t) + a_0 z(t) = (a+bi)\mathrm{e}^{(\alpha+\omega i)t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{13-76}$$

Den komplekse partikulære løsning har formen $z_0(t) = (c+di)\mathrm{e}^{(\alpha+\omega i)t}$, hvor c og d bestemmes ved indsættelse af $z_0(t)$ i differentialligningen (13-76).

Efterfølgende er en partikulær løsning til differentialligningen (13-74) givet ved

$$x_0(t) = \mathrm{Re}(z_0(t)) \,. \tag{13-77}$$

En afgørende grund til at man benytter den komplekse gættemetoder, er at det er så enkelt at differentiere eksponentialfuntionen, selv når den er kompleks.

|||| Eksempel 13.18 Den komplekse gættemetode

Givet er en 2. ordens inhomogene differentialligning:

$$x''(t) - 2x'(t) - 2x(t) = 19\mathrm{e}^{4t}\cos(t) - 35\mathrm{e}^{4t}\sin(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-78}$$

Vi ønsker at bestemme en partikulær løsning til denne differentialligning. Det er oplagt at bruge *den komplekse gættemetode* i metode 13.17. Det ses i første omgang at der gælder følgende omkring højresiden:

$$q(t) = 19\mathrm{e}^{4t}\cos(t) - 35\mathrm{e}^{4t}\sin(t) = \mathrm{Re}\Big((19+35i)\mathrm{e}^{(4+i)t}\Big) \,. \tag{13-79}$$

Vi skal nu i stedet finde en kompleks partikulær løsning til denne differentialligning

$$z''(t) - 2z'(t) - 2z(t) = (19+35i)\mathrm{e}^{(4+i)t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-80}$$

ved at gætte på at $z_0(t) = (c+di)\mathrm{e}^{(4+i)t}$ er en løsning. Vi har også

$$\begin{aligned} z_0'(t) &= (c+di)(4+i)\mathrm{e}^{(4+i)t} = (4c-d+(c+4d)i)\,\mathrm{e}^{(4+i)t} \quad \text{og} \\ z_0''(t) &= (4c-d+(c+4d)i)(4+i)\mathrm{e}^{(4+i)t} = (15c-8d+(8c+15d)i)\mathrm{e}^{(4+i)t} \end{aligned} \tag{13-81}$$

Disse udtryk indsættes i den komplekse differentialligning for at bestemme c og d:

$$\begin{aligned}(15c - 8d + (8c + 15d)i)\mathrm{e}^{(4+i)t} - 2(4c - d + (c + 4d)i)\mathrm{e}^{(4+i)t} - 2(c + di)\mathrm{e}^{(4+i)t} \\ = (19 + 35i)\mathrm{e}^{(4+i)t} \Leftrightarrow \\ 15c - 8d + (8c + 15d)i - 2(4c - d + (c + 4d)i) - 2(c + di) = 19 + 35i \Leftrightarrow \\ 5c - 6d + (6c + 5d)i = 19 + 35i \Leftrightarrow \\ 5c - 6d = 19 \;\text{ og }\; 6c + 5d = 35\end{aligned} \tag{13-82}$$

Dette er to ligninger med to ubekendte. Ligningssystemets totalmatrix opskrives:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & -6 & 19 \\ 6 & 5 & 35 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{6}{5} & \frac{19}{5} \\ 0 & \frac{61}{5} & \frac{61}{5} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]. \tag{13-83}$$

Vi har altså at $c = 5$ og $d = 1$, hvilket giver $z_0(t) = (5 + i)\mathrm{e}^{(4+i)t}$. En partikulær løsning til differentialligning (13-78) er derfor

$$x_0(t) = \mathrm{Re}(z_0(t)) = \mathrm{Re}\Big((5 + i)\mathrm{e}^{(4+i)t}\Big) = 5\mathrm{e}^{4t}\cos(t) - \mathrm{e}^{4t}\sin(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-84}$$

13.3 Eksistens og entydighed

Vi formulerer her en sætning om ***eksistens og entydighed*** for differentialligninger af 2. orden med konstante koefficienter. Vi har behov for to *begyndelsesværdibetingelser*, funktionens værdi og den aflededes værdi i den valgte begyndelsesværdi.

|||| Sætning 13.19 Eksistens og entydighed

Til ethvert talsæt (t_0, x_0, v_0) (*dobbelt begyndelsesværdibetingelse*), findes netop én løsning $x(t)$ til differentialligningen

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t), \quad t \in I, q : I \to \mathbb{R}, \tag{13-85}$$

således at

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{og} \quad x_0'(t_0) = v_0, \tag{13-86}$$

hvor $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}$ og $v_0 \in \mathbb{R}$.

|||| Eksempel 13.20 Eksistens og entydighed

Givet differentialligningen

$$x''(t) - 5x'(t) - 36x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-87}$$

Det ses at differentialligningen er homogen. Den har karakterligningen

$$\lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0. \tag{13-88}$$

Vi ønsker at bestemme en funktion $x(t)$, som er løsning til differentialligningen og har begyndelsesværdibetingelsen $(t_0, x_0, v_0) = (0, 5, 6)$. Karakterligningen har rødderne $\lambda_1 = -4$ og $\lambda_2 = 9$, da $-4 \cdot 9 = -36$ og $-(9 + (-4)) = 5$ er ligningens koefficienter. Derfor er den fuldstændige løsningsmængde til den homogene differentialligning (ved hjælp af sætning 13.2) udspændt af følgende funktioner for alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{9t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-89}$$

Man har da

$$x'(t) = -4c_1 e^{-4t} + 9c_2 e^{9t} \tag{13-90}$$

Indsættes begyndelsesværdibetingelsen ($x(0) = 5$ og $x'(0) = 6$) i de to ligninger, kan man løse for (c_1, c_2).

$$\begin{aligned} 5 &= c_1 + c_2 \\ 6 &= -4c_1 + 9c_2 \end{aligned} \tag{13-91}$$

da $e^0 = 1$. Indsættes $c_2 = 5 - c_1$ i den anden ligning fås

$$6 = -4c_1 + 9(5 - c_1) = -13c_1 + 45 \Leftrightarrow c_1 = \frac{6 - 45}{-13} = 3 \tag{13-92}$$

Derfor er $c_2 = 5 - 3 = 2$, og den betingede løsning er

$$x(t) = 3e^{-4t} + 2e^{9t}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{13-93}$$

Læg mærke til, at man godt kan bestemme en entydig og betinget løsning til en homogen differentialligning, som i dette tilfælde. Højresiden behøver ikke være forskellig fra nul. Den fuldstændige løsningsmængde til differentialligningen er nemlig $L_{inhom} = L_{hom}$, da $x_0(t) = 0$.

Herunder er et eksempel som gennemgår hele løsningsproceduren for en inhomogen differentialligning med en dobbelt begyndelsesværdibetingelse. Efter det kommer et eksempel, hvor formålet er at finde en differentialligning, hvor den fuldstændige løsningsmængde er opgivet. Den falder derfor i tråd med eksempel 13.5, og nu er der også en højreside forskellig fra nul.

|||| Eksempel 13.21 Opsamlende eksempel

Givet differentialligningen

$$x''(t) + 6x'(t) + 5x(t) = 20t^2 + 48t + 13, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-94}$$

Vi bestemmer den fuldstændige løsningsmængde L_{inhom}. Derefter skal den betingede løsning $x(t)$ som opfylder begyndelsesværdibetingelserne $(t_0, x_0, v_0) = (0, 5, -8)$, bestemmes.

Først løses den tilsvarende homogene differentialligning, og karakterligningen ser således ud:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0 \tag{13-95}$$

Denne har rødderne $\lambda_1 = -5$ og $\lambda_2 = -1$, da $(\lambda+5)(\lambda+1) = \lambda^2+6\lambda+5$. Da disse rødder er reelle og forskellige, jævnfør sætning 13.2, er den fuldstændige homogene løsningsmængde givet ved

$$L_{hom} = \left\{ c_1 \mathrm{e}^{-5t} + c_2 \mathrm{e}^{-t} \,, t \in \mathbb{R} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}. \tag{13-96}$$

Nu bestemmes en partikulær løsning til den inhomogene ligning. Da højresiden er et andengradspolynomium gætter vi på, at $x_0(t) = b_2 t^2 + b_1 t + b_0$, ved hjælp af metode 13.6. Vi har da, at $x_0'(t) = 2b_2 t + b_1$ og $x_0''(t) = 2b_2$. Dette indsættes i differentialligningen.

$$\begin{aligned}
2b_2 + 6(2b_2 t + b_1) + 5(b_2 t^2 + b_1 t + b_0) = 20t^2 + 48t + 13 \Leftrightarrow \\
(5b_2 - 20)t^2 + (12b_2 + 5b_1 - 48)t + (2b_2 + 6b_1 + 5b_0 - 13) = 0 \Leftrightarrow \\
5b_2 - 20 = 0 \;\text{ og }\; 12b_2 + 5b_1 - 48 = 0 \;\text{ og }\; 2b_2 + 6b_1 + 5b_0 - 13 = 0
\end{aligned} \tag{13-97}$$

Den første ligning giver nemt $b_2 = 4$. Indsættes det i den anden ligning fås ved lidt hovedregning $b_1 = 0$. Til sidst i den tredje ligning får man $b_0 = 1$. En partikulær løsning til den inhomogene differentialligning er derfor

$$x_0(t) = 4t^2 + 1, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-98}$$

Ifølge struktursætningen, for eksempel metode 13.1, er den fuldstændige løsningsmængde til den inhomogene differentialligning givet ved

$$L_{inhom} = x_0(t) + L_{hom} = \left\{ 4t^2 + 1 + c_1 \mathrm{e}^{-5t} + c_2 \mathrm{e}^{-t} \,, t \in \mathbb{R} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} \tag{13-99}$$

Vi bestemmer nu den løsning der opfylder de givne begyndelsesværdibetingelser. En vilkårlig løsning har formen

$$x(t) = 4t^2 + 1 + c_1 \mathrm{e}^{-5t} + c_2 \mathrm{e}^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-100}$$

Nu bestemmes den afledede.

$$x'(t) = 8t - 5c_1 \mathrm{e}^{-5t} - c_2 \mathrm{e}^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-101}$$

Indsættes $x(0) = 5$ og $x'(0) = -8$ fås de to ligninger

$$\begin{aligned}
5 &= c_1 + c_2 + 1 \\
-8 &= -5c_1 - c_2
\end{aligned} \tag{13-102}$$

Indsættes $c_1 = 4 - c_2$ fra den første ligning i den anden fås

$$-8 = -5(4 - c_2) - c_2 \Leftrightarrow -8 + 20 = 4c_2 \Leftrightarrow c_2 = 3 \tag{13-103}$$

Det giver $c_1 = 1$, og den betingede løsning er derfor

$$x(t) = \mathrm{e}^{-5t} + 3\mathrm{e}^{-t} + 4t^2 + 1, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-104}$$

|||| Eksempel 13.22 Fra løsning til ligning

Givet den fuldstændige løsning til en lineær 2. ordens differentialligning med konstante koefficienter:

$$L_{inhom} = \left\{ c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t} - \tfrac{1}{2}\sin(2t)\,, t \in \mathbb{R} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} \tag{13-105}$$

Det er nu formålet at opstille differentialligningen, som generelt har dette udseende:

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t) \tag{13-106}$$

Vi skal altså bestemme a_1, a_0 og $q(t)$.

I første omgang splittes løsningen op i en partikulær løsning og den fuldstændige homogene løsningsmængde:

$$x_0(t) = -\tfrac{1}{2}\sin(2t),\ t \in \mathbb{R} \quad \text{og} \quad L_{hom} = \left\{ c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}\ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} \tag{13-107}$$

Nu betragtes den fuldstændige homogene løsning. Udseendet på denne stemmer overens med den første situation i sætning 13.2. Karakterligningen har altså to reelle rødder, og de er $\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = 2$. Karakterligningen er derfor

$$(\lambda + 2)(\lambda - 2) = \lambda^2 - 4 = 0 \tag{13-108}$$

Dette afgør koefficienterne på venstresiden af differentialligningen: $a_1 = 0$ og $a_0 = -4$. Differentialligningen ser altså indtil videre således ud:

$$x''(t) - 4x(t) = q(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-109}$$

Da $x_0(t)$ er en partikulær løsning til den inhomogene differentialligning kan højresiden $q(t)$ bestemmes ved at indsætte $x_0(t)$. Vi har, at $x_0''(t) = 2\sin(t)$.

$$\begin{aligned} x_0''(t) - 4x_0(t) &= q(t) \;\Leftrightarrow \\ 2\sin(t) - 4(-\tfrac{1}{2}\sin(2t)) &= q(t) \;\Leftrightarrow \\ 4\sin(t) &= q(t) \end{aligned} \tag{13-110}$$

Nu er samtlige ukendte i differentialligningen bestemt:

$$x''(t) - 4x(t) = 4\sin(2t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-111}$$

I dette notesystem beskæftiger vi os ikke med systemer af 2. ordens homogene lineære differentialligninger med konstante koefficienter. Det skal dog tilføjes at vi allerede med den gennemgåede teori og lidt snilde kan løse sådanne problemer. Hvis vi har et system af 2. ordens homogene differentialligninger, kan vi betragte hver differentialligning for sig. Ved hjælp af afsnit kan en sådan ligning omformes til 2 ligninger af 1. orden. Gøres det med alle differentialligningerne i systemet, ender vi med dobbelt så mange differentialligninger, nu af 1. orden. Dette nye system kan vi løse med den gennemgåede teori i eNote. Systemer af 2. ordens homogene lineære differentialligninger findes mange steder i mekanisk fysik, kemi, elektromagnetisme m.fl.

13.4 Opsummering

I denne note skrives lineære 2. ordens differentialligninger med konstante koefficienter, som generelt har dette udseende:

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t) \tag{13-112}$$

- Disse differentialligninger løses ved først at bestemme den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene differentialligning og derefter lægge den sammen med en partikulær løsning til den inhomogene differentialligning, se metode 13.1.

- Den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene differentialligning bestemmes ved at finde rødderne til differentialligningens *karakterligning*:

  $$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{13-113}$$

  Der er principielt tre udfald, se sætning 13.2.

- En partikulær løsning bestemmes ved at "gætte" på en løsning, som har samme udseende som højresiden $q(t)$. Er $q(t)$ for eksempel et polynomium er $x_0(t)$ også et polynomium af højst samme grad. I noten gives mange eksempler på udseender, se afsnit 13.2.

- Specielt findes *den komplekse gættemetode* til at bestemme den partikulære løsning $x_0(t)$. Den komplekse gættemetode kan bruges, når højresiden har dette udseende:

  $$q(t) = \mathrm{Re}\Big((a+bi)\mathrm{e}^{(\alpha+\omega i)t}\Big) = a\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\omega t) - b\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\omega t). \tag{13-114}$$

  Løsningen bestemmes da ved at omdanne differentialligningen til den tilsvarende komplekse form, se metode 13.17.

- Endvidere introduceres *superpositionsprincippet*, som er et generelt princip, der findes indenfor alle typer af lineære differentialligninger. Ideen er at to partikulære løsninger kan lægges sammen. Når de sættes ind i differentialligningen vil de ikke have nogen indflydelse på hinanden, hvorfor højresiden ligeså vil kunne deles i to led, der hver tilhører en af de to løsninger. Det kan bruges til at bestemme partikulære løsning, når højresiden er en sum af for eksempel en sinusfunktion og et polynomium. Se for eksempel eksempel 13.15.

- Endvidere formuleres en *eksistens- og entydighedssætning*, se sætning 13.19. Her står at man skal bruge to *begyndelsesværdibetingelser* for at bestemme en entydig og betinget løsning til en 2. ordens differentialligning.

eNote 14

Elementære funktioner

I denne eNote vil vi dels repetere nogle af de basale egenskaber for et udvalg af de (fra gymnasiet) velkendte funktioner $f(x)$ af én reel variabel x, og dels introducere enkelte nye funktioner, som typisk optræder i mangfoldige sammenhænge. De grundlæggende spørgsmål vedrørende enhver funktion drejer sig typisk om følgende: Hvordan og for hvilke x er funktionen defineret*? Hvilke værdier af $f(x)$ får vi når vi bruger funktionen på elementerne x i definitionsmængden? Er funktionen* kontinuert*? Hvad er* differentialkvotienten *$f'(x)$ af funktionen – hvis den eksisterer? Som noget nyt vil vi indføre en meget stor* klasse *af funktioner,* ***epsilon-funktionerne****, som betegnes med fællesbetegnelsen $\varepsilon(x)$ og som vi gennemgående vil benytte til at beskrive kontinuitet og differentiabilitet – også af funktioner af flere variable, som vil blive indført og analyseret i de efterfølgende eNoter.*

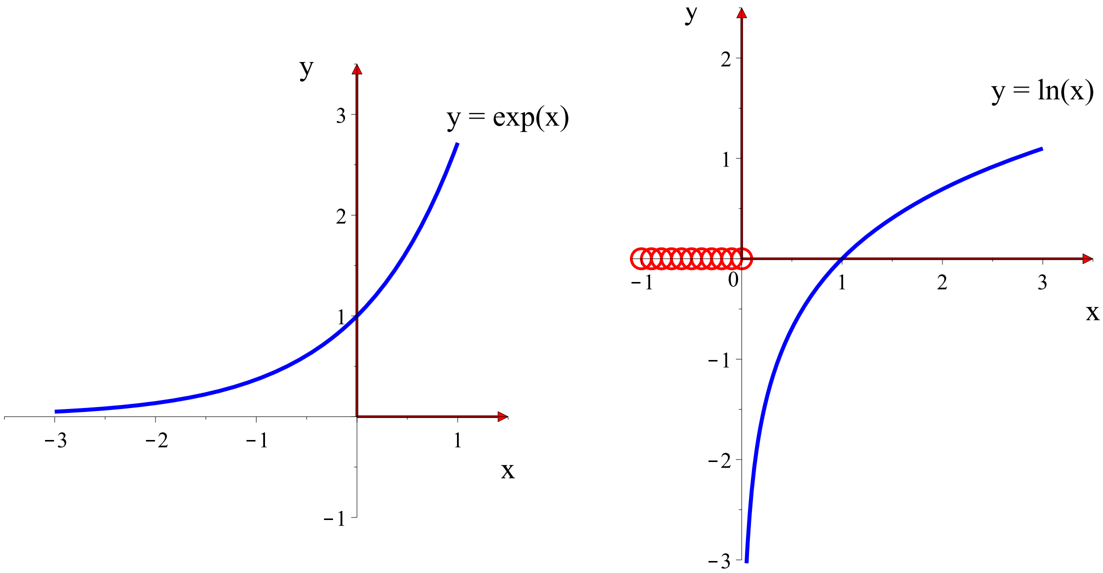
14.1 Definitionsmængde og værdimængde

Ved beskrivelsen af en reel funktion $f(x)$ anføres dels de reelle tal x, hvor funktionen er defineret, og dels de værdier, som kan fås ved at benytte funktionen på defintionsmængden. ***Definitionsmængden*** kalder vi $\mathcal{D}m(f)$ og ***værdimængden*** kalder vi $\mathcal{V}m(f)$.

Eksempel 14.1 Nogle definitionsmængder og værdimængder

Her er definitonsmængder og tilhørende værdimængder for nogle velkendte funktioner.

$$
\begin{array}{lll}
f_1(x) = \exp(x) & , \ \mathcal{D}m(f_1) = \mathbb{R} =]-\infty,\infty[& , \ \mathcal{V}m(f_1) =]0,\infty[\\
f_2(x) = \ln(x) & , \ \mathcal{D}m(f_2) =]0,\infty[& , \ \mathcal{V}m(f_2) = \mathbb{R} =]-\infty,\infty[\\
f_3(x) = \sqrt{x} & , \ \mathcal{D}m(f_3) = [0,\infty[& , \ \mathcal{V}m(f_3) = [0,\infty[\\
f_4(x) = x^2 & , \ \mathcal{D}m(f_4) = \mathbb{R} =]-\infty,\infty[& , \ \mathcal{V}m(f_4) = [0,\infty[\\
f_5(x) = x^7 + 8x^3 + x - 1 & , \ \mathcal{D}m(f_5) = \mathbb{R} =]-\infty,\infty[& , \ \mathcal{V}m(f_5) = \mathbb{R} =]-\infty,\infty[\\
f_6(x) = \exp(\ln(x)) & , \ \mathcal{D}m(f_6) =]0,\infty[& , \ \mathcal{V}m(f_6) =]0,\infty[\\
f_7(x) = \sin(1/x) & , \ \mathcal{D}m(f_7) =]-\infty,0[\cup]0,\infty[& , \ \mathcal{V}m(f_7) = [-1,1] \\
f_8(x) = |x|/x & , \ \mathcal{D}m(f_8) =]-\infty,0[\cup]0,\infty[& , \ \mathcal{V}m(f_8) = \{-1\}\cup\{1\}
\end{array}
\tag{14-1}
$$



Figur 14.1: Den velkendte eksponentialfunktion $e^x = \exp(x)$ og den naturlige logaritmefunktion $\ln(x)$. De røde cirkler på den negative x-akse og i 0 indikerer, at logaritmefunktionen ikke er defineret i $]-\infty, 0]$.

Funktionen $f_8(x)$ i eksempel 14.1 er defineret ud fra $|x|$, som betegner den numeriske værdi af x, dvs.

$$|x| = \begin{cases} x > 0\,, & \text{for} \quad x > 0 \\ 0\,, & \text{for} \quad x = 0 \\ -x > 0\,, & \text{for} \quad x < 0 \quad . \end{cases} \tag{14-2}$$

Heraf følger definitionsmængde og værdimængde for $f_8(x)$ direkte.

|||| Eksempel 14.2 Tangens

Funktionen

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \tag{14-3}$$

har definitionsmængden $\mathcal{D}m(f) = \mathbb{R} \setminus A$, hvor A betegner de reelle tal x, hvor nævneren $\cos(x)$ er 0, dvs.

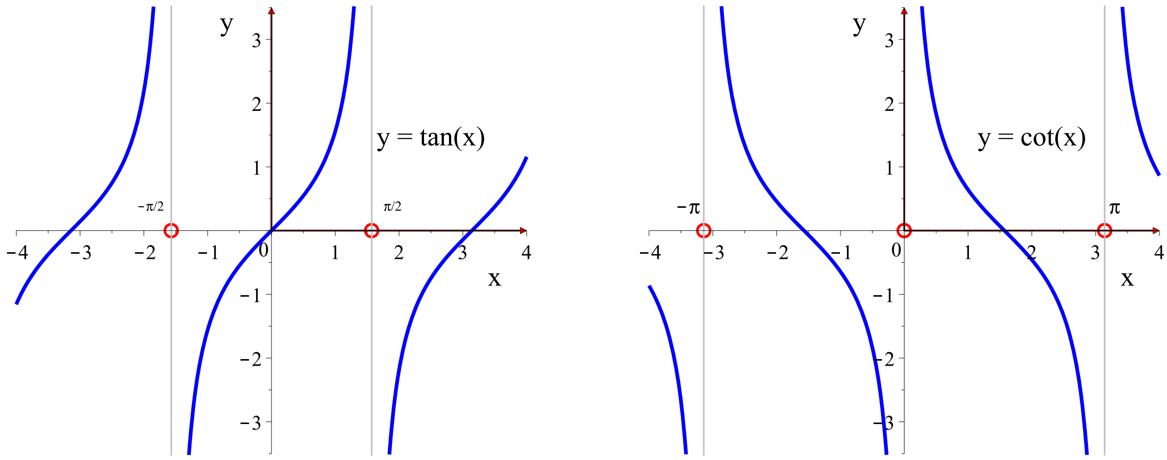
$$\mathcal{D}m(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \mid \cos(x) = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{(\pi/2) + p \cdot \pi\,, \text{hvor } p \text{ er et helt tal}\} \quad . \tag{14-4}$$

Værdimængden $\mathcal{V}m(f)$ er alle de reelle tal, se figur 14.2.

|||| Opgave 14.3

Lad $g(x)$ betegne den reciprokke funktion til funktionen $\tan(x)$:

$$g(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \tag{14-5}$$



Figur 14.2: Graferne for funktionerne $\tan(x)$ og $\cot(x)$.

Bestem definitionsmængden for $g(x)$ og skriv den på samme måde som for $\tan(x)$ ovenfor, se figur 14.2.

14.1.1 Udvidelser af definitionsmængden til hele $\mathbb{R}$

En funktion $f(x)$, som ikke er defineret i alle reelle tal, kan kan let *udvides* til en funktion $\widehat{f}(x)$ som har $\mathcal{D}m(\widehat{f}) = \mathbb{R}$. Det kan for eksempel gøres ved hjælp af en ***tuborgparentes*** på følgende måde:

Definition 14.4

Givet en funktion $f(x)$ med $\mathcal{D}m(f) \neq \mathbb{R}$, så definerer vi 0-***udvidelsen*** af $f(x)$ ved:

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x)\,, & \text{for} \quad x \in \mathcal{D}m(f) \\ 0\,, & \text{for} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{D}m(f) \end{cases} . \tag{14-6}$$

Det er klart, at afhængig af anvendelsen kan man plombere og udvide definitionsmængden for $f(x)$ på mange andre måder end ved at vælge konstanten 0 som værdi for den udvidede funktion i de punkter hvor den oprindelige funktion ikke er defineret.

Værdimængden $\mathcal{V}m(\widehat{f})$ for den 0-udvidede funktion er naturligvis den oprindelige værdimængde for $f(x)$ forenet med værdien 0, dvs. $\mathcal{V}m(\widehat{f}) = \mathcal{V}m(f) \cup \{0\}$.

Vi vil herefter typisk – medmindre andet nævnes helt tydeligt – antage, at de funktioner vi betragter er definerede i hele $\mathbb{R}$ (eventuelt ved hjælp af en udvidelseskonstruktion) som ovenfor.

14.2 Epsilon-funktioner

Vi indfører en særlig klasse af funktioner, som vi vil benytte til at definere det vigtige begreb kontinuitet for funktioner.

|||| Definition 14.5 Epsilon-funktioner

Enhver funktion $\varepsilon(x)$ som er defineret i et åbent interval der indeholder 0, og som antager værdien $\varepsilon(0) = 0$ i $x = 0$ og derudover går imod 0 når x går imod 0 kaldes en ***epsilon-funktion*** af x. Epsilon-funktioner er altså karakteriserede ved egenskaberne:

$$\varepsilon(0) = 0 \quad \text{og} \quad \varepsilon(x) \to 0 \quad \text{for} \quad x \to 0 \quad . \tag{14-7}$$

Den sidste betingelse er ækvivalent med, at den numeriske værdi af $\varepsilon(x)$ kan gøres så lille som ønsket ved blot at vælge den numeriske værdi af x tilstrækkelig lille. Helt præcis betyder betingelsen: For ethvert helt tal $k > 0$ findes der et helt tal $K > 0$ sådan at $|\varepsilon(x)| < 1/k$ for alle x med $|x| < 1/K$.

Mængden af epsilon-funktioner er meget stor:

|||| Eksempel 14.6 Epsilon-funktioner

Her er nogle simple eksempler på epsilon-funktioner:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x) &= x \\ \varepsilon_2(x) &= |x| \\ \varepsilon_3(x) &= \ln(1+x) \\ \varepsilon_4(x) &= \sin(x) \quad . \end{aligned} \tag{14-8}$$

Egenskaben 'at være en epsilon-funktion' er ret stabil: Produktet af en epsilon-funktion med en vilkårlig anden funktion, der blot er begrænset, er også en epsilon-funktion. Summen og produktet af to epsilon-funktioner er igen epsilon-funktioner. Den numeriske værdi af en epsilon-funktion er en epsilon-funktion.

Funktioner der er 0 andre steder end i $x = 0$ kan også give anledning til epsilon-funktioner:

Hvis en funktion $g(x)$ har egenskaberne $g(x_0) = 0$ og $g(x) \to 0$ for $x \to x_0$, så er $g(x)$ en epsilon-funktion af $x - x_0$, dvs. vi kan skrive $g(x) = \varepsilon_g(x - x_0)$.

|||| Opgave 14.7

Vis, at 0-udvidelsen $\widehat{f_8}(x)$ af funktionen $f_8(x) = |x|/x$ *ikke* er en epsilon-funktion. Vink: Hvis vi vælger $k = 10$ så findes der helt klart *ikke* nogen værdi af K sådan at

$$|f_8(x)| = |\,|x|/x\,| = 1 < \frac{1}{10} \quad , \quad \text{for alle } x \text{ med} \quad |x| < \frac{1}{K} \quad . \tag{14-9}$$

Tegn grafen for $\widehat{f_8}(x)$. Den kan ikke tegnes uden at 'løfte blyanten fra papiret'!

|||| Opgave 14.8

Vis, at 0-udvidelsen af funktionen $f(x) = \sin(1/x)$ *ikke* er en epsilon-funktion.

14.3 Kontinuerte funktioner

Vi kan nu formulere ***kontinuitetsbegrebet*** ved hjælp af epsilon-funktioner:

|||| Definition 14.9 Kontinuitet

En funktion $f(x)$ er kontinuert i x_0 hvis der eksisterer en epsilon-funktion $\varepsilon_f(x - x_0)$ således at følgende gælder i et åbent interval der indeholder x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \varepsilon_f(x - x_0) \quad . \tag{14-10}$$

Hvis $f(x)$ er kontinuert i alle x_0 i et givet åbent interval i $\mathcal{D}m(f)$, så siger vi at $f(x)$ er kontinuert i intervallet.

Læg mærke til, at selv om det klart, hvad epsilon-funktionen helt præcist er i definitionen 14.9, nemlig $f(x) - f(x_0)$, så er den eneste egenskab vi er interesserede i følgende: $\varepsilon_f(x - x_0) \to 0$ for $x \to 0$, sådan at $f(x) \to f(x_0)$ for $x \to x_0$, altså præcis som vi kender kontinuitets-begrebet fra gymnasiet!

|||| Opgave 14.10

Alle epsilon-funktioner er herefter per definition kontinuerte i $x_0 = 0$ (med værdien 0 i $x_0 = 0$). Konstruér en epsilon-funktion, som *ikke* er kontinuert i nogen som helst af punkterne $x_0 = 1/n$ hvor $n = 1, 2, 3, 4, \cdots$.

Selvom epsilon-funktions-begrebet er helt fundamentalt for definitionen af kontinuitet (og, som vi skal se nedenfor, for definitionen af differentiabilitet), så behøver epsilonfunktionerne altså ikke selv at være kontinuerte andre steder end netop i $x_0 = 0$.

|||| Opgave 14.11

Vis, at 0-udvidelsen $\widehat{f}(x)$ af funktionen $f(x) = |x-7|/(x-7)$ *ikke* er kontinuert i $\mathbb{R}$.

14.4 Differentiable funktioner

|||| Definition 14.12 Differentiabilitet

En funktion $f(x)$ er differentiabel i $x_0 \in \mathcal{D}m(f)$ hvis der findes en konstant a og en epsilon-funktion $\varepsilon_f(x-x_0)$ sådan at

$$f(x) = f(x_0) + a\cdot(x-x_0) + (x-x_0)\cdot\varepsilon_f(x-x_0) \quad . \tag{14-11}$$

Det er det tal a, vi kalder $f'(x_0)$ og det er veldefineret i den forstand, at hvis $f(x)$ i det hele taget *kan* fremstilles på ovenstående form (altså hvis $f(x)$ er differentiabel i x_0), så er der én og kun én værdi for a, som gør formlen rigtig. Med denne definition af ***differentialkvotienten*** $f'(x_0)$ af $f(x)$ i x_0 har vi altså:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + (x-x_0)\cdot\varepsilon_f(x-x_0) \quad . \tag{14-12}$$

Hvis $f(x)$ er differentiabel i alle x_0 i et givet åbent interval i $\mathcal{D}m(f)$, så siger vi naturligvis, at $f(x)$ er differentiabel i intervallet. Vi skriver ofte differentialkvotienten af $f(x)$ i x på følgende alternative måde:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) \quad . \tag{14-13}$$

|||| Forklaring 14.13 Differentialkvotienten er entydig

Vi vil vise, at der kun findes én værdi af a, som kan opfylde ligningen (14-11). Antag nemlig, at der var to forskellige værdier, a_1 og a_2 som opfylder ligning (14-11) med muligvis to forskellige epsilon-funktioner:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + a_1\cdot(x-x_0) + (x-x_0)\cdot\varepsilon_1(x-x_0) \\ f(x) &= f(x_0) + a_2\cdot(x-x_0) + (x-x_0)\cdot\varepsilon_2(x-x_0) \quad . \end{aligned} \tag{14-14}$$

Ved at trække nederste ligning i (14-14) fra den øverste ligning får vi så:

$$0 = 0 + (a_1-a_2)\cdot(x-x_0) + (x-x_0)\cdot(\varepsilon_1(x-x_0) - \varepsilon_2(x-x_0)) \quad , \tag{14-15}$$

således at

$$a_1 - a_2 = \varepsilon_1(x-x_0) - \varepsilon_2(x-x_0) \tag{14-16}$$

for alle $x \neq x_0$ – og det kan klart ikke være rigtigt; højresiden går jo imod 0 når x går imod x_0! Antagelsen ovenfor, altså at $a_1 \neq a_2$, er derfor forkert. De to konstanter a_1 og a_2 må være ens, og det var det vi skulle indse.

Ovenstående definition er helt ækvivalent med den vi kender fra gymnasiet. Hvis vi nemlig først trækker $f(x_0)$ fra begge sider af lighedstegnet i ligning (14-12) og dernæst dividerer med $(x - x_0)$ får vi

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \varepsilon_f(x - x_0) \to f'(x_0) \quad \text{for} \quad x \to x_0 \quad , \tag{14-17}$$

altså den velkendte grænseværdi for *kvotienten* mellem funktionstilvæksten $f(x) - f(x_0)$ og x-tilvæksten $x - x_0$. Grunden til, at vi ikke bruger denne kendte definition af $f'(x_0)$ er den simple, at for funktioner af flere variable giver kvotient-brøken ikke mening – men mere om det i en senere eNote.

|||| Sætning 14.14 Differentiabel medfører kontinuert

Hvis en funktion $f(x)$ er differentiabel i x_0, så er $f(x)$ også kontinuert i x_0.

|||| Bevis

Vi har at

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_f(x - x_0) \\ &= f(x_0) + \left[f'(x_0) \cdot (x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_f(x - x_0)\right] , \end{aligned} \tag{14-18}$$

og da den kantede parentes på højre side er en epsilon-funktion af $(x - x_0)$ så er $f(x)$ kontinuert i x_0.

■

Men det omvendte gælder ikke – her er et eksempel, der viser det:

|||| Eksempel 14.15 Kontinuert men ikke differentiabel

Funktionen $f(x) = |x|$ er kontinuert men ikke differentabel i $x_0 = 0$. Funktionen er selv en epsilon-funktion og $f(x)$ er derfor kontinuert i 0. Men antag nu, at der findes en konstant a og en epsilon-funktion $\varepsilon_f(x - x_0)$ sådan at

$$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_f(x - x_0) \quad . \tag{14-19}$$

Det vil sige, at så skulle der gælde:

$$|x| = 0 + a \cdot x + x \cdot \varepsilon_f(x) \tag{14-20}$$

og dermed for alle $x \neq 0$:

$$\frac{|x|}{x} = a + \varepsilon_f(x) \quad . \tag{14-21}$$

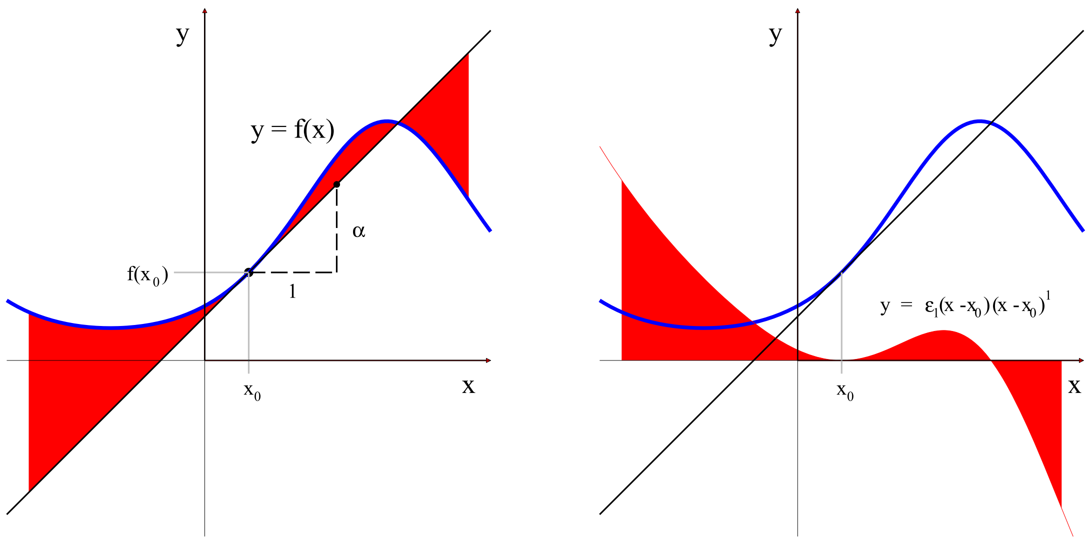
Det kan ikke lade sig gøre, for så skulle a være både -1 og 1 og det er umuligt! Derfor er ovenstående antagelse om, at der skulle findes en sådan konstant a altså forkert; $f(x)$ er derfor ikke differentiabel.

Definition 14.16

Det approksimerende første-grads-polynomium for $f(x)$ med udviklingspunkt x_0 defineres ved:

$$P_{1,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad . \tag{14-22}$$

Bemærk, at $P_{1,x_0}(x)$ virkelig *er* et første-gradspolynomium i x. Grafen for funktionen $P_{1,x_0}(x)$ er ***tangenten til grafen*** for $f(x)$ igennem punktet $(x_0, f(x_0))$, se figur 14.3. Ligningen for tangenten er $y = P_{1,x_0}(x)$, altså $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Hældningskoefficienten for tangenten er klart $\alpha = f'(x_0)$ og tangenten skærer y-aksen i punktet $(0, f(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0))$. Vi skal senere finde ud af, hvordan vi kan approksimere med polynomier af højere grad n, altså polynomier der så betegnes $P_{n,x_0}(x)$.



Figur 14.3: Konstruktion af tangenten $y = P_{1,x_0}(x) = f(x_0) + \alpha \cdot (x - x_0)$ med hældningskoefficienten $\alpha = f'(x_0)$ for funktionen $f(x)$. Til højre ses forskellen mellem funktionsværdien $f(x)$ og 'tangentværdien' $P_{1,x_0}(x)$.

14.4.1 Differentiation af et produkt

|||| Sætning 14.17 Differentiation af $f(x) \cdot g(x)$

Et produkt $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ af to differentiable funktioner $f(x)$ og $g(x)$ er differentiabel og differentieres på følgende velkendte måde:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad . \tag{14-23}$$

Selv om denne formel formentlig er ganske velkendt fra gymnasiet, vil vi kort skitsere et bevis for den igen – for at illustrere brugen af epsilon-funktioner.

|||| Bevis

Vi har altså, da $f(x)$ og $g(x)$ er differentiable i x_0:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_f(x - x_0) \\ g(x) &= g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_g(x - x_0) \quad , \end{aligned} \tag{14-24}$$

sådan at produktet af de to højresider bliver:

$$\begin{aligned} &h(x) = f(x) \cdot g(x) \\ &= f(x_0) \cdot g(x_0) + (f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)) \cdot (x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_h(x - x_0) \, , \end{aligned} \tag{14-25}$$

hvor vi har benyttet $(x - x_0)\varepsilon_h(x - x_0)$ som kort skrivemåde for den resterende del af produktsummen. Enhver af addenderne i denne resterende del indholder faktoren $(x - x_0)^2$ eller et produkt af $(x - x_0)$ med en epsilon-funktion og *kan* derfor netop skrives på den angivne form. Men så følger produktformlen ved direkte at aflæse faktoren foran $(x - x_0)$ i ligning (14-25):

$$h'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \quad . \tag{14-26}$$

■

14.4.2 Differentiation af en brøk

Følgende differentiationsregel er ligeledes velkendt fra gymnasiet:

|||| Sætning 14.18 Differentiation af $f(x)/g(x)$

En brøk $h(x) = f(x)/g(x)$ mellem to differentiable funktioner $f(x)$ og $g(x)$, er differentiabel overalt hvor $g(x) \neq 0$, og differentieres på følgende velkendte måde:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad . \tag{14-27}$$

|||| Opgave 14.19

Benyt et epsilon-funktion-argument på samme måde som i differentiationsreglen for et produkt til at vise sætning 14.18.

14.4.3 Differentiation af sammensatte funktioner

|||| Sætning 14.20 Kædereglen for sammensatte funktioner

En funktion $h(x) = f(g(x))$ der er sammensat af de to differentiable funktioner $f(x)$ og $g(x)$ er selv differentiabel i ethvert x_0 med differererentialkvotienten

$$h'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \tag{14-28}$$

|||| Bevis

Vi benytter, at de to funktioner $f(x)$ og $g(x)$ er differentiable. Specielt er $g(x)$ differentiabel i x_0:

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0) \cdot \varepsilon_g(x - x_0) \quad , \tag{14-29}$$

og funktionen $f(u)$ er differentiabel i $u_0 = g(x_0)$:

$$f(u) = f(u_0) + f'(u_0)(u - u_0) + (u - u_0) \cdot \varepsilon_f(u - u_0) \quad . \tag{14-30}$$

Heraf fås så, når vi sætter $u = g(x)$ og $u_0 = g(x_0)$:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(g(x)) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0) + (g(x) - g(x_0) \cdot \varepsilon_f(g(x) - g(x_0)) \\ &= h(x_0) + f'(g(x_0))(g'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0) \cdot \varepsilon_g(x - x_0)) \\ &\qquad + (g'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0) \cdot \varepsilon_g(x - x_0)) \cdot \varepsilon_f(g(x) - g(x_0) \\ &= h(x_0) + f'(g(x_0))g'(x_0) \cdot (x - x_0) + (x - x_0) \cdot \varepsilon_h(x - x_0) \quad , \end{aligned} \tag{14-31}$$

hvoraf det direkte aflæses, at $h'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$ – fordi dette netop er den entydige koefficient på $(x - x_0)$ i ovenstående udtryk.

∎

Opgave 14.21

Vi har i ovenstående – til sidst i ligning (14-31) – benyttet, at

$$f'(g(x_0)) \cdot \varepsilon_g(x - x_0) + (g'(x_0) + \cdot \varepsilon_g(x - x_0)) \cdot \varepsilon_f(g(x) - g(x_0)) \tag{14-32}$$

er en epsilon-funktion, som vi derfor kan kalde (og har kaldt) $\varepsilon_h(x - x_0)$. Overvej, hvorfor dette er helt OK.

Opgave 14.22

Find differentialkvotienterne af følgende funktioner for enhver x-værdi i de respektive definitionsmængder:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x^2 + 1) \cdot \sin(x) \\ f_2(x) &= \sin(x)/(x^2 + 1) \\ f_3(x) &= \sin(x^2 + 1) \quad . \end{aligned} \tag{14-33}$$

14.5 Omvendte funktioner

Exponentialfunktionen $\exp(x)$ og logaritmefunktionen $\ln(x)$ er hinandens ***omvendte funktioner*** – der gælder som bekendt:

$$\begin{aligned} \exp(\ln(x)) &= x \quad \text{for} \quad x \in \mathcal{D}m(\ln) =]0, \infty[= \mathcal{V}m(\exp) \\ \ln(\exp(x)) &= x \quad \text{for} \quad x \in \mathcal{D}m(\exp) =]-\infty, \infty[= \mathcal{V}m(\ln) \quad . \end{aligned} \tag{14-34}$$

Læg mærke til, at selv om $\exp(x)$ er defineret for alle x, så er den omvendte funktion $\ln(x)$ kun defineret for $x > 0$ – og omvendt (!)

Funktionen $f(x) = x^2$ har kun en omvendt funktion i sine respektive monotoni-intervaller, dvs. der hvor $f(x)$ er voksende henholdsvis aftagende: Den omvendte funktion i det interval hvor $f(x)$ er voksende er den velkendte funktion $g(x) = \sqrt{x}$:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= (\sqrt{x})^2 = x \quad \text{for} \quad x \in [0, \infty[\\ g(f(x)) &= \sqrt{x^2} = x \quad \text{for} \quad x \in [0, \infty[\quad . \end{aligned} \tag{14-35}$$

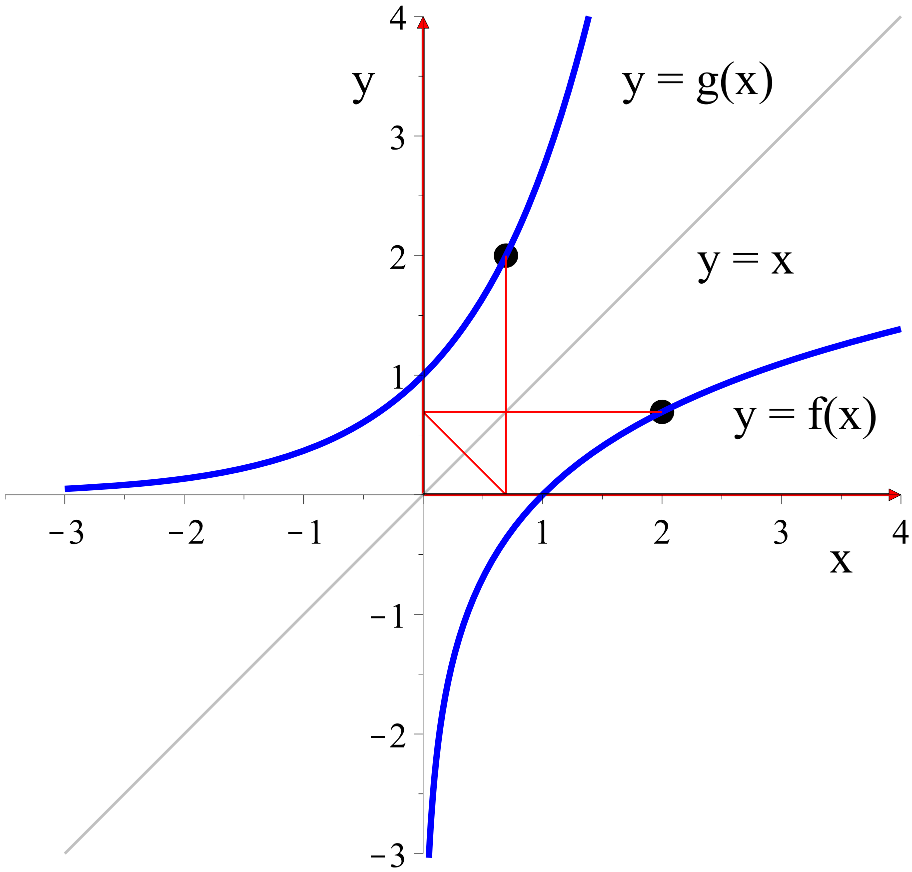
Hvis $f(x)$ ikke er monoton på et interval, så betyder det essentielt, at vi kan opnå *samme funktions-værdi* $f(x)$ for flere forskellige x-værdier – på samme måde som $x^2 = 1$ både for $x = 1$ og for $x = -1$. Funktionerne $\cos(x)$ og $\sin(x)$ er kun monotone på bestemte intervaller på x-aksen, se figur 14.7. Hvis vi ønsker at definere en omvendt funktion til de funktioner må vi altså vælge et sådant monotoniinterval med omhu, se afsnit 14.8 og figur 14.8.

|||| Definition 14.23 Notation for omvendte funktioner

Den omvendte funktion til en given funktion $f(x)$ vil vi betegne med $f^{\circ -1}(x)$. Den omvendte funktion er generelt defineret ved følgende egenskaber på passende valgte monotoni-intervaller A og B som er indeholdt i henholdsvis $\mathcal{D}m(f)$ og $\mathcal{D}m(f^{\circ -1})$

$$\begin{aligned} f^{\circ -1}(f(x)) &= x \quad \text{for} \quad x \in A \subset \mathcal{D}m(f) \\ f(f^{\circ -1}(x)) &= x \quad \text{for} \quad x \in B \subset \mathcal{D}m(f^{\circ -1}) \quad . \end{aligned} \tag{14-36}$$

Vi bruger betegnelsen $f^{\circ -1}(x)$ for ikke at forveksle med $(f(x))^{-1} = 1/f(x)$. Grafen for den omvendte funktion $g(x) = f^{\circ -1}(x)$ til en funktion $f(x)$ kan fås ved at ***spejle grafen*** for $f(x)$ i diagonal-linjen i (x, y)-koordinatsystemet – dvs. linjen med ligningen $y = x$ – se figur 14.4.



Figur 14.4: Grafen for en funktion $f(x)$ og grafen for dens omvendte funktion $g(x)$. Der gælder $g(x) = f^{\circ -1}(x)$ og $f(x) = g^{\circ -1}(x)$, men de har hver deres egne definitionsintervaller.

14.5.1 Differentiation af omvendte funktioner

|||| Sætning 14.24 Differentiation af omvendt funktion

Hvis en differentiabel funktion $f(x)$ har den omvendte funktion $f^{\circ -1}(x)$ og hvis $f'(f^{\circ -1}(x_0)) \neq 0$, så er den omvendte funktion $f^{\circ -1}(x)$ selv differentiabel i x_0:

$$(f^{\circ -1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{\circ -1}(x_0))} \tag{14-37}$$

|||| Bevis

Pr. definition af omvendt funktion gælder, at

$$h(x) = f(f^{\circ -1}(x)) = x \quad , \tag{14-38}$$

så $h'(x_0) = 1$, men vi har så også fra kædereglen i (14-28):

$$h'(x_0) = f'(f^{\circ -1}(x_0)) \cdot (f^{\circ -1})'(x_0) = 1 \quad , \tag{14-39}$$

hvoraf vi får resultatet ved at dividere med $f'(f^{\circ -1}(x_0))$.

■

14.6 Hyperbolske funktioner

|||| Definition 14.25 Hyperbolsk cosinus og hyperbolsk sinus

Vi vil definere to nye funktioner $\cosh(x)$ og $\sinh(x)$ som de entydigt bestemte løsninger til følgende differentialligningssystem med begyndelsesbetingelser. De to funktioner benævnes henholdsvis ***hyperbolsk cosinus*** og ***hyperbolsk sinus***:

$$\begin{aligned} \cosh'(x) &= \sinh(x) \quad , \quad \cosh(0) = 1 \\ \sinh'(x) &= \cosh(x) \quad , \quad \sinh(0) = 0 \quad . \end{aligned} \tag{14-40}$$

Betegnelserne $\cosh(x)$ og $\sinh(x)$ ligner $\cos(x)$ og $\sin(x)$, men funktionerne er meget forskellige, som vi skal se nedenfor.

Der er dog også fundamentale strukturelle ligheder mellem de to par af funktioner og det er dem der motiverer betegnelserne. I differentialligningssystemet for $\cos(x)$ og

$\sin(x)$ optræder kun et enkelt minus-tegn som eneste forskel i forhold til (14-40):

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= -\sin(x) \quad , \quad \cos(0) = 1 \\ \sin'(x) &= \cos(x) \quad , \quad \sin(0) = 0 \quad . \end{aligned} \tag{14-41}$$

Desuden gælder (igen med et helt afgørende minustegn som eneste forskel) følgende simple analogi til den velkendte og ofte brugte relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$:

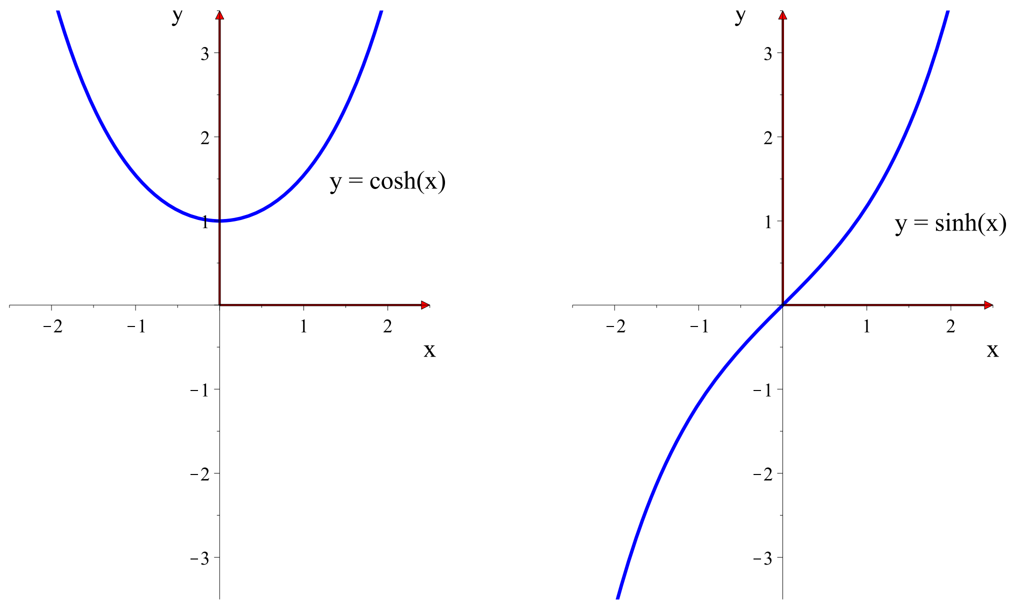
|||| Sætning 14.26 Fundamentale relation for $\cosh(x)$ og $\sinh(x)$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad . \tag{14-42}$$

|||| Bevis

Differentier med hensyn til x på begge sider af ligningen (14-42) og konkludér, at $\cosh^2(x) - \sinh^2(x)$ er en konstant. Brug til sidst begyndelsesbetingelserne.

■



Figur 14.5: Hyperbolsk cosinus, $\cosh(x)$, og hyperbolsk sinus, $\sinh(x)$.

|||| Opgave 14.27

Vis direkte ud fra differentialligningssystemet (14-40) at de to "nye" funktioner faktisk ikke er så nye endda:

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad \mathcal{D}m(\cosh) = \mathbb{R} \quad , \quad \mathcal{V}m(\cosh) = [1, \infty[\\ \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \mathcal{D}m(\sinh) = \mathbb{R} \quad , \quad \mathcal{V}m(\sinh) =]-\infty, \infty[\end{aligned} \tag{14-43}$$

|||| Opgave 14.28

Vis *direkte* ud fra de fundne udtryk i opgave 14.27, at

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad . \tag{14-44}$$

|||| Opgave 14.29

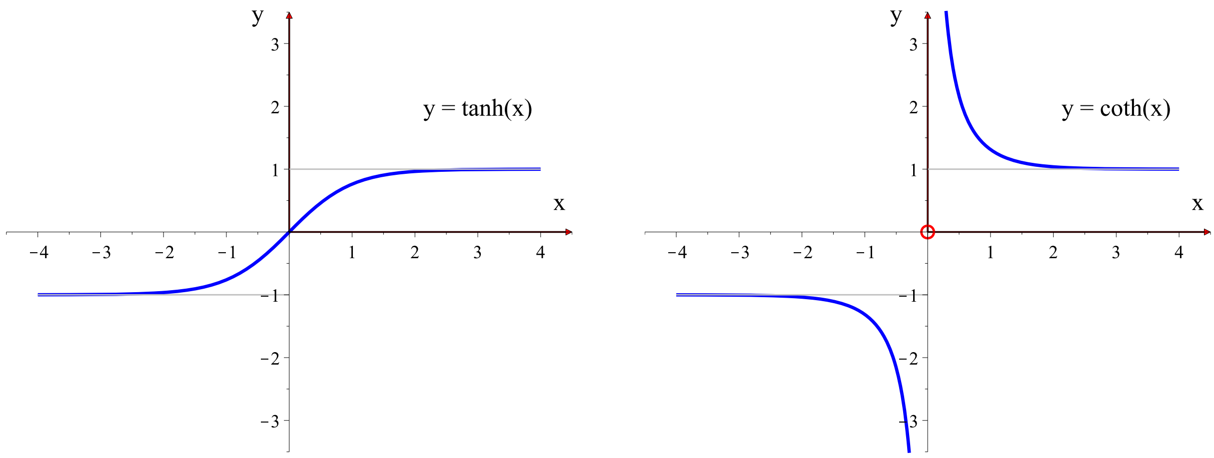
Grafen for funktionen $f(x) = \cosh(x)$ ligner meget en parabel, nemlig grafen for funktionen $g(x) = 1 + (x^2/2)$ når vi plotter begge funktionerne i et passende lille interval omkring $x_0 = 0$. Prøv det! Hvis vi derimod plotter begge graferne over et meget stort x-interval, vil vi opdage, at de to funktioner har meget forskellige grafiske opførsler. Prøv det, dvs. prøv at plotte begge funktioner over intervallet $[-50, 50]$. Kommentér og forklar de kvalitative forskelle. Prøv tilsvarende at sammenligne de to funktioner $\sinh(x)$ og $x + (x^3/6)$ på samme måde.

Det er naturligt og nyttigt at definere de hyperbolske analogier til $\tan(x)$ og $\cot(x)$. Det gør vi således:

|||| Definition 14.30 Hyperbolsk tangens og hyperbolsk cotangens

$$\begin{aligned} \tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \ , \ \mathcal{D}m(\tanh) = \mathbb{R} \ , \ \mathcal{V}m(\tanh) =]-1, 1[\\ \coth(x) &= \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \ , \ \mathcal{D}m(\coth) = \mathbb{R} - \{0\} \ , \\ & \qquad \mathcal{V}m(\coth) =]-\infty, -1[\cup]1, \infty[\quad . \end{aligned} \tag{14-45}$$

Differentialkvotienterne af $\cosh(x)$ og $\sinh(x)$ er allerede givet ved det definerende



Figur 14.6: Hyperbolsk tangens, $\tanh(x)$, og hyperbolsk cotangens, $\coth(x)$.

system i (14-40).

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cosh(x) &= \sinh(x) \\
\frac{d}{dx}\sinh(x) &= \cosh(x) \\
\frac{d}{dx}\tanh(x) &= \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x) \\
\frac{d}{dx}\cosh(x) &= \frac{-1}{\sinh^2(x)} = 1 - \coth^2(x) \quad .
\end{aligned}
\tag{14-46}
$$

|||| Opgave 14.31

Vis de to sidste udtryk for differentialkvotienterne for $\tanh(x)$ og $\coth(x)$ i (14-46) ved at benytte differentiationsreglen i sætning 14.18.

14.7 Areafunktionerne

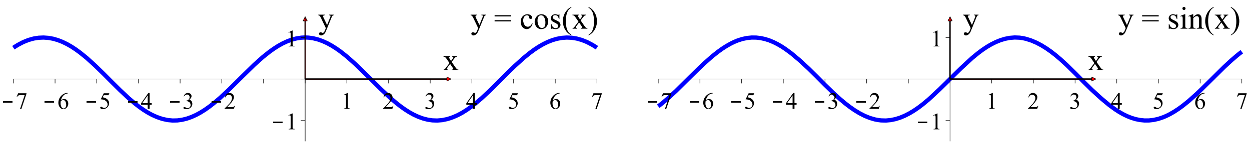
De omvendte funktioner til de hyperbolske funktioner kaldes ***areafunktioner*** og betegnes med henholdsvis $\cosh^{\circ -1}(x) = \operatorname{arcosh}(x)$, $\sinh^{\circ -1}(x) = \operatorname{arsinh}(x)$, $\tanh^{\circ -1}(x) = \operatorname{artanh}(x)$, og $\coth^{\circ -1}(x) = \operatorname{arcoth}(x)$.

Da funktionerne $\cosh(x)$, $\sinh(x)$, $\tanh(x)$, og $\coth(x)$ alle kan udtrykkes ved eksponentialfunktioner er det ikke overraskende, at de omvendte funktioner og deres differentialkvotienter kan udtrykkes ved logaritmefunktioner. Vi samler informationerne her:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcosh}(x) &= \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \text{ for } \quad x\in[1,\infty[\\
\operatorname{arsinh}(x) &= \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \text{ for } \quad x\in\mathbb{R} \\
\operatorname{artanh}(x) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{for} \quad x\in]-1,1[\\
\operatorname{arcoth}(x) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad \text{for} \quad x\in]-\infty,1[\cup]1,\infty[\quad .
\end{aligned} \tag{14-47}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\operatorname{arcosh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{for} \quad x\in]1,\infty[\\
\frac{d}{dx}\operatorname{arsinh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{for} \quad x\in\mathbb{R} \\
\frac{d}{dx}\operatorname{artanh}(x) &= \frac{1}{1-x^2} \quad \text{for} \quad x\in]-1,1[\\
\frac{d}{dx}\operatorname{arcoth}(x) &= \frac{1}{1-x^2} \quad \text{for} \quad x\in]-\infty 1[\cup]1,\infty[\quad .
\end{aligned} \tag{14-48}$$

14.8 Arcusfunktionerne

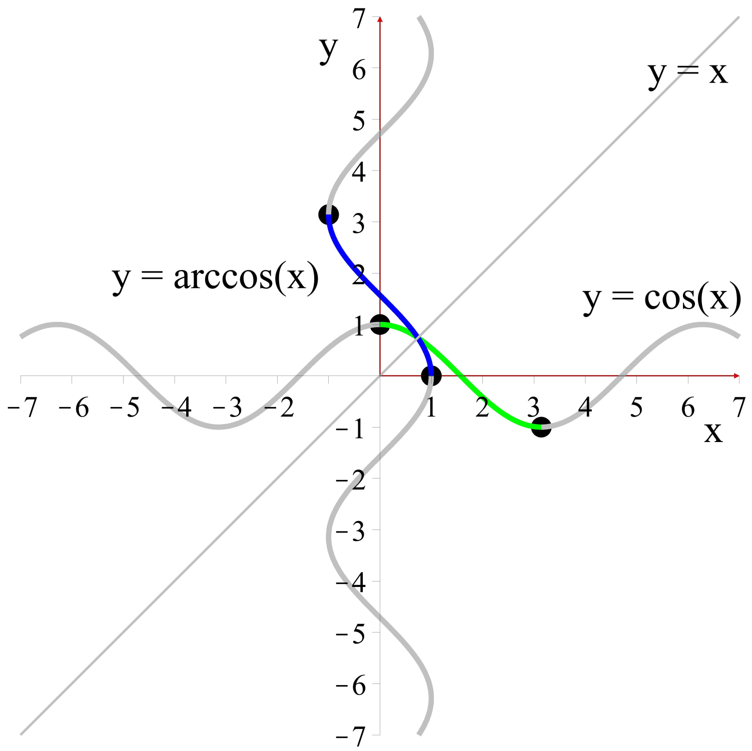


Figur 14.7: Cosinus og sinus funktionerne.

De omvendte funktioner som hører til de trigonometriske funktioner er lidt mere komplicerede. Som nævnt bliver vi her nødt til for hver trigonometrisk funktion at vælge et interval, hvor den pågældende funktion er monoton. Til gengæld, når vi *har* valgt et sådant interval, så er det klart, hvordan den omvendte funktion skal defineres og derefter hvordan den skal differentieres. De omvendte funktioner til $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$ betegnes henholdsvis $\arccos(x)$, $\arcsin(x)$, $\arctan(x)$, og $\operatorname{arccot}(x)$; de benævnes arcus-cosinus, arcus-sinus, arcus-tangens, og arcuscotangens. Ligesom ovenfor samler vi resultaterne her:

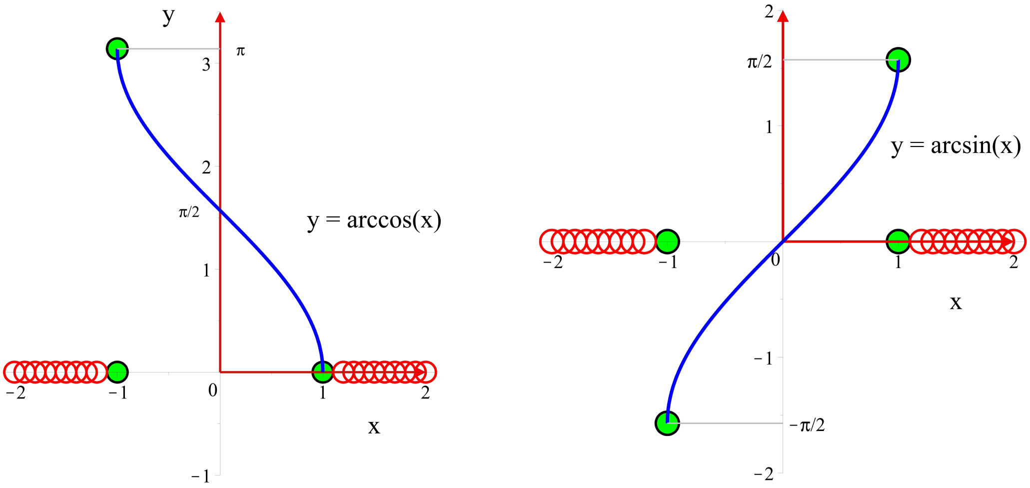
$$\begin{aligned}
\cos^{\circ-1}(x) &= \arccos(x)\in[0,\pi] \text{ for } \quad x\in[-1,1] \\
\sin^{\circ-1}(x) &= \arcsin(x)\in[-\pi/2,\pi/2] \text{ for } \quad x\in[-1,1] \\
\tan^{\circ-1}(x) &= \arctan(x)\in[-\pi/2,\pi/2] \text{ for } \quad x\in\mathbb{R} \\
\cot^{\circ-1}(x) &= \operatorname{arccot}(x)\in]0,\pi[\text{ for } \quad x\in\mathbb{R} \quad .
\end{aligned} \tag{14-49}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\arccos(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{for} \quad x \in]-1,1[\\
\frac{d}{dx}\arcsin(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{for} \quad x \in]-1,1[\\
\frac{d}{dx}\arctan(x) &= \frac{1}{1+x^2} \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R} \\
\frac{d}{dx}\operatorname{arccot}(x) &= \frac{-1}{1+x^2} \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R} \quad .
\end{aligned}
\tag{14-50}
$$



Figur 14.8: Arcus-cosinus funktionen defineres her.

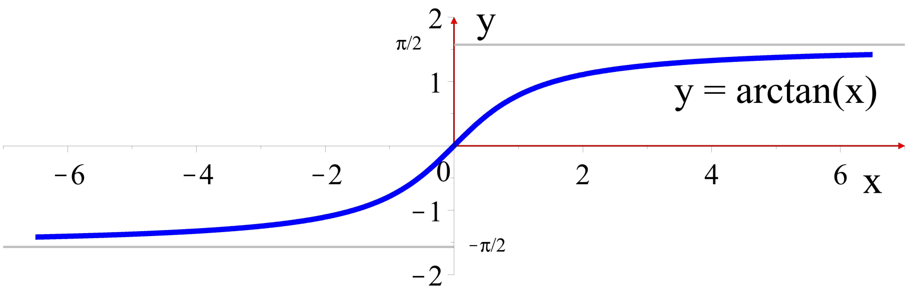
Læg mærke til, at differerentialkvotienterne for $\arccos(x)$ og $\arcsin(x)$ ikke er defineret i $x_0 = 1$ og i $x_0 = -1$. Det skyldes dels, at hvis den funktion vi betragter kun er defineret i et begrænset interval, så kan vi ikke sige at funktionen er differentiabel i endepunkterne af intervallet. Desuden viser formlerne for $\arccos'(x)$ og $\arcsin'(x)$ at de ikke er definerede i $x_0 = 1$ eller $x_0 = -1$; de værdier giver jo 0 i nævnerne.



Figur 14.9: Arcus-cosinus og arcus-sinus. De røde cirkler indikerer igen, at arcusfunktionerne ikke er defineret udenfor intervallet $[-1, 1]$. De grønne cirkelskiver indikerer tilsvarende, at arcus-funktionerne *er* defineret i endepunkterne $x = 1$ og $x = -1$.

|||| Opgave 14.32

Benyt en passende modifikation af $\arctan(x)$ til at konstruere en ny differentiabel (og derfor kontinuert) funktion $f(x)$, som ligner 0-udvidelsen af $|x|/x$ (der hverken er kontinuert eller differentiabel), dvs. vi ønsker en funktion $f(x)$ med følgende egenskaber: $1 > f(x) > 0.999$ for $x > 0.001$ og $-0.999 > f(x) > -1$ for $x < -0.001$. Se figur 14.10. Vink: Prøv at plotte $\arctan(1000x)$.



Figur 14.10: Arcus-tangens funktionen.

14.9 Opsummering

Vi har behandlet nogle af de fundamentale egenskaber ved nogle kendte og knap så kendte funktioner. Hvordan er de defineret, hvad er deres definitions-intervaller, er de kontinuerte, er de differentiable, hvad er i så fald deres differentialkvotienter?

- En funktion $f(x)$ er kontinuert i x_0 hvis $f(x) - f(x_0)$ er en epsilon-funktion af $(x - x_0)$, dvs.
$$f(x) = f(x_0) + \varepsilon_f(x - x_0) \quad . \tag{14-51}$$

- En funktion $f(x)$ er differentiabel i x_0 med differentialkvotienten $f'(x_0)$ hvis
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_f(x - x_0) \quad .$$

- Hvis en funktion er differentiabel i x_0, så er den også kontinuert i x_0. Det omvendte gælder *ikke*.

- Differentialkvotienten af et produkt af to funktioner er
$$\frac{d}{dx}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad . \tag{14-52}$$

- Differentialkvotienten af en brøk mellem to funktioner er
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad . \tag{14-53}$$

- Differentialkvotienten af en sammensat funktion er
$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad . \tag{14-54}$$

- Differentialkvotienten af den omvendte funktion $f^{\circ -1}(x)$ er
$$\left(f^{\circ -1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{\circ -1}(x))} \quad . \tag{14-55}$$

eNote 15

Funktioner af to variable

I denne og i de efterfølgende eNoter vil vi udvide funktionsbegrebet til at omfatte reelle funktioner af flere variable; vi starter udvidelsen med 2 variable, så vi vil i denne eNote definere værdimængder, kontinuitet, og differentiabilitet af funktioner $f(x,y)$ af to variable, her x og y. Ligesom for funktioner af én variabel vil vi bruge epsilon-funktions-begrebet (nu ligeledes af to variable) til formålet.

15.1 Definitionsmængder

Ved beskrivelsen af en reel funktion $f(x,y)$ af to variable anføres dels de punkter (x,y), i (x,y)-planen hvor funktionen er defineret, og dels de værdier, som kan fås ved at benytte funktionen på defintionsmængden. ***Definitionsmængden*** kalder vi $\mathcal{D}m(f)$ og ***værdimængden*** kalder vi $\mathcal{V}m(f)$. Det er især definitionsmængderne vi vil fokusere på her.

Som noget nyt i forhold til funktioner af én variabel er definitionsmængderne i planen generelt ikke så simple som intervallerne på den reelle talakse.

Eksempel 15.1 Definitionsmængde for en funktion af to variable

Lad os se på en funktion $f(x,y)$ af to variable:

$$f(x,y) = \ln(\sqrt{5 - x^2 - y^2}) \quad . \tag{15-1}$$

For hvilke punkter (x,y) i $\mathbb{R}^2$ er denne funktion defineret? Vi har f.eks. at $f(0,0) = \ln(\sqrt{5})$, $f(2,0) = f(0,2) = 0$, $f(1,0) = f(0,1) = \ln(2)$, og faktisk er $f(\cos(t), \sin(t)) = \ln(2)$ for alle t, men $f(3,7)$ er ikke defineret for denne funktion. Ved inspektion af funktionen ses det, at definitionsmængden for $f(x,y)$ består præcis af de punkter, der ligger helt inde i den cirkelskive, der har centrum i $(0,0)$ og radius $\sqrt{5}$:

$$\mathcal{D}m(f) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 < 5 \right\} \quad . \tag{15-2}$$

Læg mærke til, at cirkel-randen af cirkelskiven ikke er med i definitionsmængden.

Vi vil nu indføre nogle vigtige begreber til beskrivelse af definitionsmængder og iøvrigt generelt til beskrivelse af vilkårlige delmængder af (x, y)-planen som kan være gode at benytte sig af, når man f.eks. skal tegne eller skitsere mængderne:

15.1.1 Åbne og afsluttede mængder i planen

|||| Definition 15.2 Åbne mængder i planen

En delmængde eller et område M i planen kaldes ***en åben mængde*** hvis ethvert punkt (x_0, y_0) i mængden er centrum for en eller anden (gerne meget lille) cirkelskive, som selv er helt indeholdt i M.

|||| Eksempel 15.3 En cirkelskive

Mængden $\mathcal{D}m = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 5 \}$ er en åben mængde. Men mængden $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 5 \}$ er *ikke* en åben mængde.

|||| Definition 15.4 Randen af en mængde i planen, indre og ydre

Randen af et område M i planen består af de punkter (x_0, y_0) *i planen* som har følgende egenskab: Enhver cirkelskive med centrum i (x_0, y_0) indeholder både punkter som tilhører M og punkter som ikke tilhører M. Bemærk, randpunkterne for M ikke selv behøver at være med i mængden M. Mængden af randpunkter for M betegnes med ∂M.

Det indre af et område M er alle de punkter i M, som ikke ligger på randen af M. Det indre af M betegnes med $\mathring{M}$.

Det ydre af et område M i planen er alle de punkter i planen som ikke tilhører hverken M eller ∂M.

|||| Eksempel 15.5 Randen af en åben cirkelskive

Mængden $\mathcal{D}m = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 5 \}$ har randen:

$$\partial\mathcal{D}m = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 5 \} \quad . \tag{15-3}$$

|||| Definition 15.6 Afslutningen af en mængde i planen

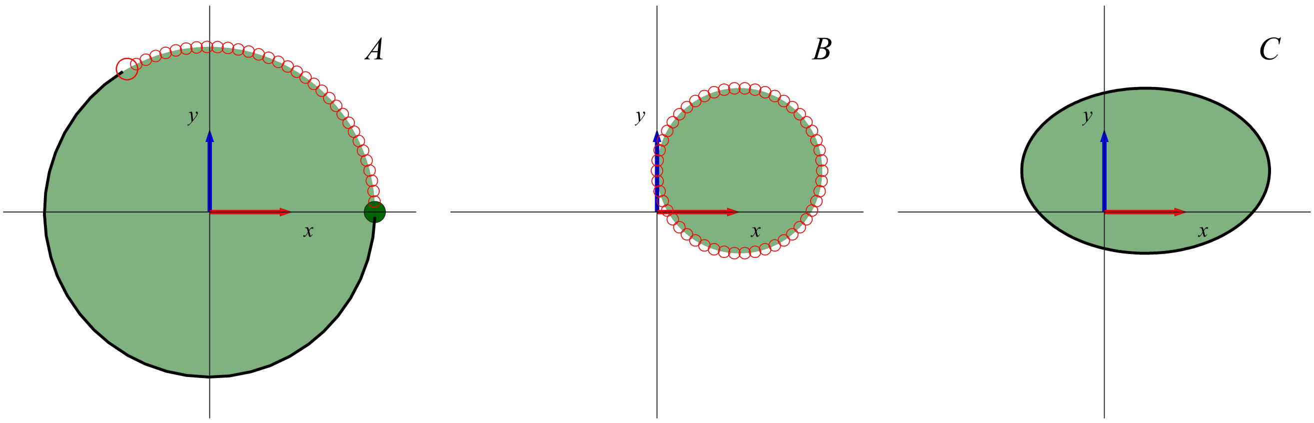
Hvis en mængde M tilføjes sine randpunkter ∂M fås ***afslutningen*** af mængden som betegnes med:

$$\bar{M} = M \cup \partial M \quad . \tag{15-4}$$

Hvis randpunkterne allerede er med i mængden M fås ikke derved nogen udvidelse af M. Mængden M kaldes ***afsluttet*** hvis $\bar{M} = M$.

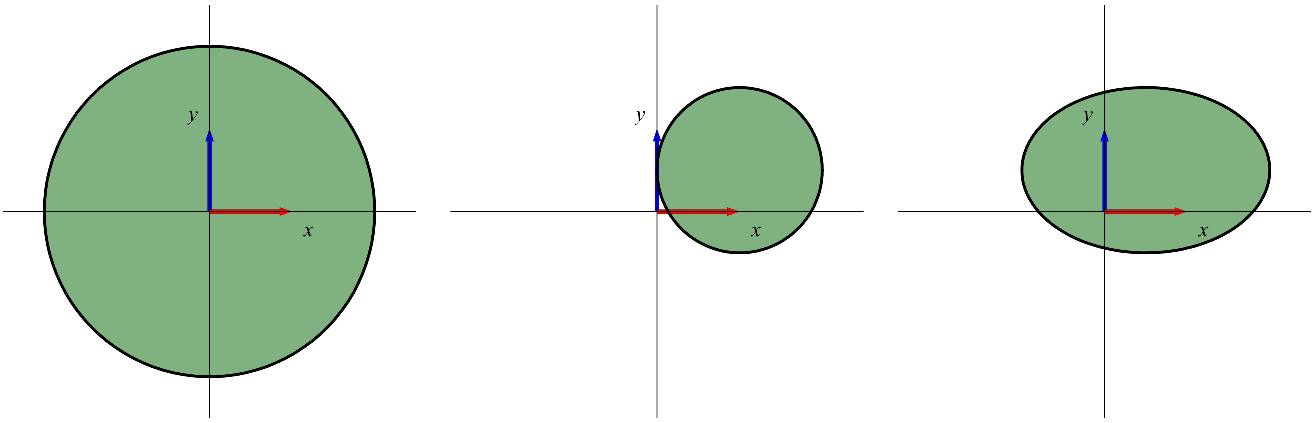
|||| Eksempel 15.7 Figurativt om åbne og afsluttede mængder

Mængden A i figur 15.1 er hverken åben eller afsluttet (der er nogle punkter på randen, som selv er med i mængden og der er andre punkter på randen som ikke er med i mængden. Tegne-forskriften er følgende: Punkter, der er med i mængden er grønne eller ligger på en fuldt optrukket stykke af randen; punkter, der ikke er med i mængden er ikke farvede eller (hvis de er en del af randen) markerede med røde cirkler. Mængden B i figur 15.1 er en åben mængde. Mængden C i figur 15.1 er en afsluttet mængde.



Figur 15.1: Områder i planen. Mængden A er hverken åben eller afsluttet, B er en åben mængde, og C er en afsluttet mængde.

15.1.2 Stjerneformede mængder i planen



Figur 15.2: Afslutningerne $\bar{A}$, $\bar{B}$, og $\bar{C}$ af områderne A, B, og C fra figur 15.1.

|||| Definition 15.8 Stjerneformede områder

Hvis ethvert punkt (x, y) i en mængde M i planen kan 'ses' fra et punkt (x_0, y_0) i mængden sådan at hele syns-linjestykket fra og med (x_0, y_0) til og med (x, y) er indeholdt i mængden, så siges M at være ***stjerneformet*** ud fra ***stjernepunktet*** (x_0, y_0). Med andre ord: Ethvert punkt (x, y) i mængden kan forbindes med stjernepunktet med et linjestykke, der helt er indeholdt i mængden. Se figur 15.3.

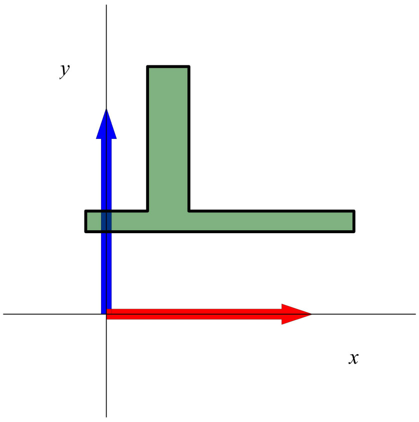
|||| Opgave 15.9 Stjerneform og dobbelt-stjerneform

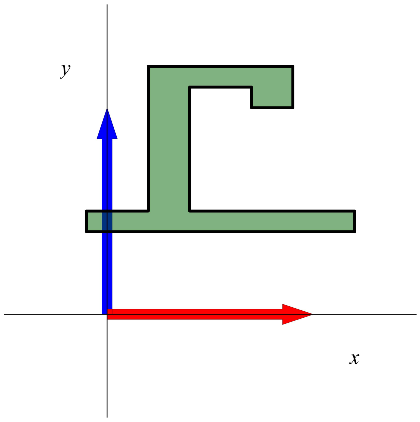
Hvilke punkter i den mængde der er vist til venstre figur 15.3 kan bruges som stjernepunkter for mængden? Er mængden af samtlige mulige stjernepunkter afsluttet eller åben? I hvilken forstand ville man kunne sige, at figuren til højre i 15.3 er *dobbelt*-stjerneformet?

15.1.3 Begrænsede mængder i planen

|||| Definition 15.10 Begrænsede mængder

En mængde M i planen siges at være ***begrænset*** hvis den er helt indeholdt i en (gerne meget stor) cirkelskive med centrum i $(0, 0)$.





Figur 15.3: Mængden til venstre er stjerneformet. Mængden til højre er *ikke* stjerneformet.

|||| Eksempel 15.11

De tre mængder A, B, og C i figur 15.1 er tydeligvis begrænsede – de er helt indeholdt i den cirkelskive som har centrum i $(0,0)$ og radius 100. Den mængde af punkter, der udgøres af punkterne på x-aksen er ikke begrænset.

15.1.4 Udvidelser af definitionsmængden til hele $\mathbb{R}^2$

Ligesom vi kan udvide definitionsmængder for funktioner af én variabel, kan vi gøre præcis det samme for funktioner $f(x,y)$ af to variable:

|||| Definition 15.12 Udvidelse af definitionsmængden

Givet funktionen $f(x,y)$ med definitionsmængde $\mathcal{D}m(f)$, så definerer vi 0-udvidelsen $\widehat{f}(x,y)$ af $f(x,y)$ på følgende måde:

$$\widehat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y)\,, & \text{for} \quad (x,y) \in \mathcal{D}m(f) \\ 0\,, & \text{for} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}m(f) \end{cases} \quad . \tag{15-5}$$

15.2 Grafer for funktioner af to variable

Med henblik på at illustrere funktioner af to variable tegner vi dem i rummet – vi plotter den punktmængde, der fremkommer ved at konstruere graferne i $\{\,\mathcal{O}, x, y, z\,\}$-koordinatsystemet:

|||| Definition 15.13 Grafer for funktioner af to variable

Lad $f(x,y)$ være en funktion af to variable med definitionsmængden $\mathcal{D}m(f)$. Så er ***grafen for en funktion af to variable*** givet ved:

$$z = f(x,y) \quad , \quad \text{hvor} \quad (x,y) \in \mathcal{D}m(f) \quad . \tag{15-6}$$

Grafen består altså af den punktmængde i rummet som vi også kan beskrive på følgende måde:

$$\mathcal{G}(f) = \{\, (x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in \mathcal{D}m(f) \,\} \quad . \tag{15-7}$$

Hvert enkelt punkt på grafen fremkommer på følgende måde: Fra punktet $(x,y,0)$ i (x,y)-planen går vi højden (med fortegn) $f(x,y)$ lodret op (eller ned) fra den (vandrette) (x,y)-plan og markere graf-punktet $(x,y,f(x,y))$ i den højde som funktionsværdien $f(x,y)$ foreskriver – lige over (eller under) punktet $(x,y,0)$.

15.3 Niveau-mængder og højdesnit

I (x,y)-planen hvor funktionen $f(x,y)$ er defineret kan vi gøre noget helt andet for at vise, hvordan funktionsværdierne varierer fra punkt til punkt.

|||| Definition 15.14 Niveau-mængder

For en funktion $f(x,y)$ af to variable definerer vi for ethvert reelt tal c den tilhørende ***niveau-mængde*** på følgende måde:

$$\mathcal{K}_c(f) = \{\, (x,y) \in \mathcal{D}m(f) \mid f(x,y) = c \,\} \quad . \tag{15-8}$$

Mængden $\mathcal{K}_c$ kan være tom, hele planen, en kurve, eller hvilken som helst punktmængde i planen.

|||| Eksempel 15.15 Niveaumængder

Vi lader A betegne en vilkårlig mængde i planen og konstruerer en funktion $f(x,y)$ i hele planen på følgende måde:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{for } (x,y) \in A \\ 0 & \text{for } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A \quad , \end{cases} \tag{15-9}$$

dvs. f er 0-udvidelsen af den funktion, som er konstant 1 på A. Så er

$$\mathcal{K}_c(f) = \begin{cases} A & \text{for } c = 1 \\ \mathbb{R}^2 \setminus A & \text{for } c = 0 \\ \emptyset & \text{for } c \neq 1 \text{ og } c \neq 0 \quad . \end{cases} \tag{15-10}$$

Ofte er niveau-mængden $\mathcal{K}_c$ dog meget mere velstruktureret og består typisk af en eller flere kurver. De kurver kan med fuld ret kaldes niveau-kurver eller højdekurver, for de angiver jo præcis de punkter (x, y) i definitionsmængden hvor funktionen antager værdien c og hvor grafen for f derfor lige præcis har højden (med fortegn) c over (x, y)-planen. Med andre ord, hvis vi skærer grafen for f med den vandrette plan $z = c$ i højden c over (x, y)-planen, så fås en snitkurve, hvis projektion ned i (eller op i) (x, y)-planen netop er $\mathcal{K}_c$, se figurerne 15.4 15.6, 15.5.

Nedenfor i afsnit 15.8.1 vil vi i ethvert punkt i definitionsmængden for $f(x, y)$ definere en vektor, gradientvektoren for $f(x, y)$, som har den særlige egenskab, at hvis den ikke er $\mathbf{0}$ i et åbent område omkring et givet punkt (x_0, y_0), så er den niveau-mængde der indeholder (x_0, y_0), en kurve igennem punktet. Gradientvektorer er dog kun veldefinerede for differentiable funktioner, så den egenskab må vi derfor først have indført forfunktioner af to variable.

|||| Eksempel 15.16 Grafer og niveau-kurver

Følgende funktioner er alle definerede i hele (x, y)-planen.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -x + y + 2 \\ f(x,y) &= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) \\ f(x,y) &= \cos(3x) \cdot \sin(3y) \quad . \end{aligned} \tag{15-11}$$

Funktionernes grafer er vist i figurerne 15.4, 15.5, og 15.6 dels sammen med deres respektive niveau-kurver i (x, y)-planen og dels sammen med en figur, der antyder, hvordan niveaukurverne i (x, y)-planen kan opfattes som projektionerne af de højde-snit-kurver der fremkommer ved at skære graffladerne for funktionerne i forskellige højder, altså med planerne $z = c$, hvor c er den konstante værdi som den aktuelle funktion $f(x, y)$ antager på niveau-kurven $\mathcal{K}_c$. Bemærk, at niveaumængderne $\mathcal{K}_c$ virkelig *er* kurver (eller punkter) i disse tilfælde.

15.4 Epsilon-funktioner af to variable

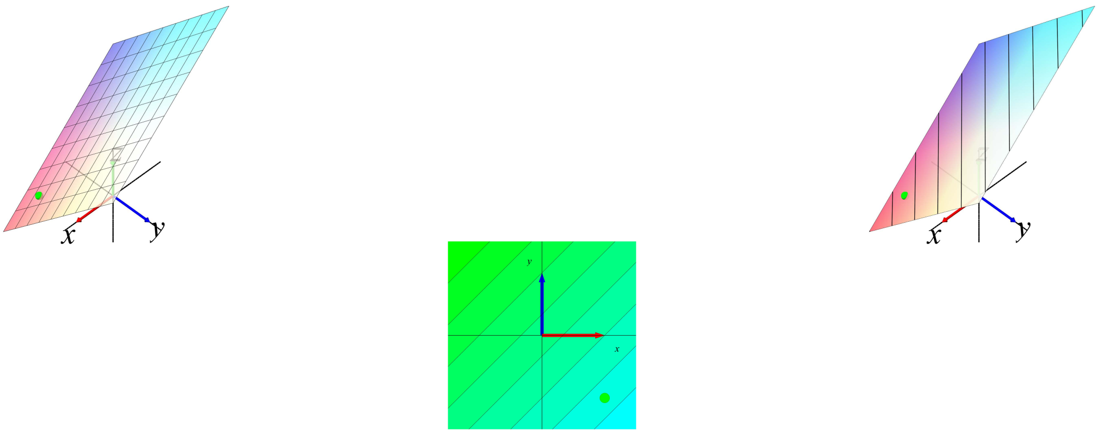
En meget vigtig klasse af funktioner af to variable er afstandsfunktionerne. For ethvert punkt (x_0, y_0) i planen definerer vi afstanden til (x_0, y_0) på velkendt måde:

|||| Definition 15.17 Afstandsfunktioner

Afstanden fra et punkt (x, y) til et punkt (x_0, y_0) i (x, y)-planen betegnes med

$$\rho_{(x_0,y_0)}(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad . \tag{15-12}$$

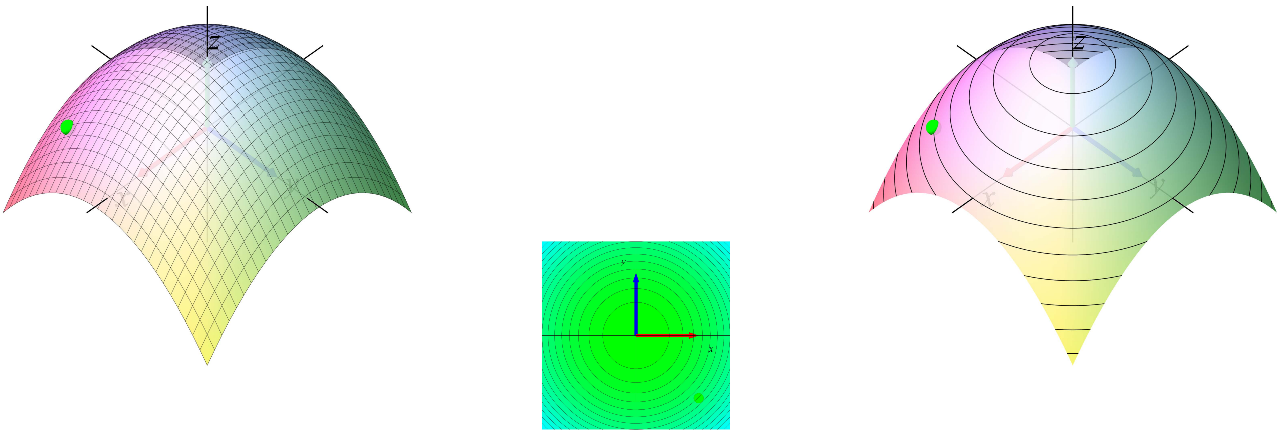
Dette er den sædvanlige afstand mellem de to punkter (x, y) og (x_0, y_0) i planen – bestemt med Pythagoras' sætning.



Figur 15.4: Grafen i (x, y, z)-rummet, niveaukurverne i (x, y)-planen, og højdesnitkurverne for funktionen $f(x, y) = -x + y + 2$. Læg mærke til, at det naturligvis ikke er *hele* grafen for funktionen vi kan plotte. Her er kun vist det udsnit der hører til $-1 \leq x \leq 1$ og $-1 \leq y \leq 1$.

Det er denne funktion vi vil bruge på samme måde som vi benyttede funktionen $(x - x_0)$ til definitionerne af epsilon-funktioner af én variabel og til definition af kontinuitet og differerentiabilitet af funktioner af én variabel. Læg mærke til, at $\rho_{(x_0,y_0)}(x, y)$ altid er positiv eller 0; og læg mærke til at værdien 0 dog kun optræder for $(x, y) = (x_0, y_0)$. Funktionen $\rho_{(0,0)}(x, y)$, altså afstanden fra (x, y) til $(x_0, y_0) = (0, 0)$, er vist i figur 15.7. Læg mærke til, at niveaukurverne er ækvidistante, og at grafen er 'konisk spids' i kontaktpunktet til (x, y)-planen!

Vi er nu klar til at definere klassen af epsilonfunktioner af to variable:



Figur 15.5: Grafen i (x, y, z)-rummet, niveaukurverne i (x, y)-planen, og højdesnitkurverne for funktionen $f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$.

|||| Definition 15.18 Epsilonfunktioner af to variable

Enhver funktion $\varepsilon(x, y)$ som er defineret i et åbent område i $\mathbb{R}^2$ indeholdende $(0, 0)$, og som antager værdien 0 i $(x, y) = (0, 0)$, og som derudover går imod 0 når (x, y) går imod (x_0, y_0) kaldes en ***epsilon-funktion af*** (x, y). Epsilon-funktioner af to variable er altså karakteriserede ved egenskaberne:

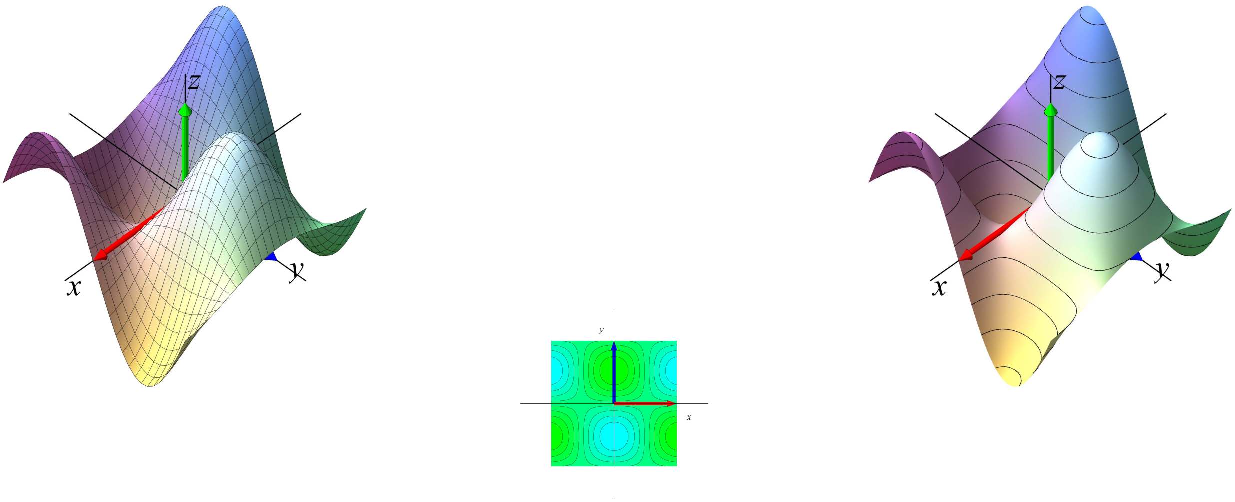
$$\varepsilon(0,0) = 0 \quad \text{og} \quad \varepsilon(x,y) \to 0 \quad \text{for} \quad (x,y) \to (0,0) \quad . \tag{15-13}$$

Den sidste betingelse betyder, at den numeriske værdi af funktionsværdierne $\varepsilon(x, y)$ kan gøres så lille som ønsket ved blot at vælge (x, y) *tilstrækkelig tæt på* $(0, 0)$. Helt præcis betyder betingelsen: For ethvert helt positivt tal k findes der et helt positivt tal K sådan at $|\varepsilon(x, y)| < 1/k$ for alle (x, y) med $\rho_{(x_0,y_0)}(x, y) < 1/K$.

Det følger direkte af definitionen, at afstandsfunktionen $\rho_{(x_0,y_0)}(x, y)$ til et punkt (x_0, y_0) selv er en epsilonfunktion af $x - x_0$ og $y - y_0$.

15.5 Kontinuerte funktioner af to variable

Som for funktioner af én variabel definerer vi kontinuitet for funktioner af to variable ved hjælp af klassen af epsilonfunktioner:



Figur 15.6: Grafen i (x, y, z)-rummet, niveaukurverne i (x, y)-planen, og højdesnitkurverne for funktionen $f(x, y) = \cos(3x) \cdot \sin(3y)$.

|||| Definition 15.19 Kontinuerte funktioner af to variable

En funktion $f(x, y)$ er kontinuert i (x_0, y_0) hvis der eksisterer en epsilon-funktion $\varepsilon_f(x - x_0, y - y_0)$ sådan at følgende gælder i et åbent område der indeholder (x_0, y_0):

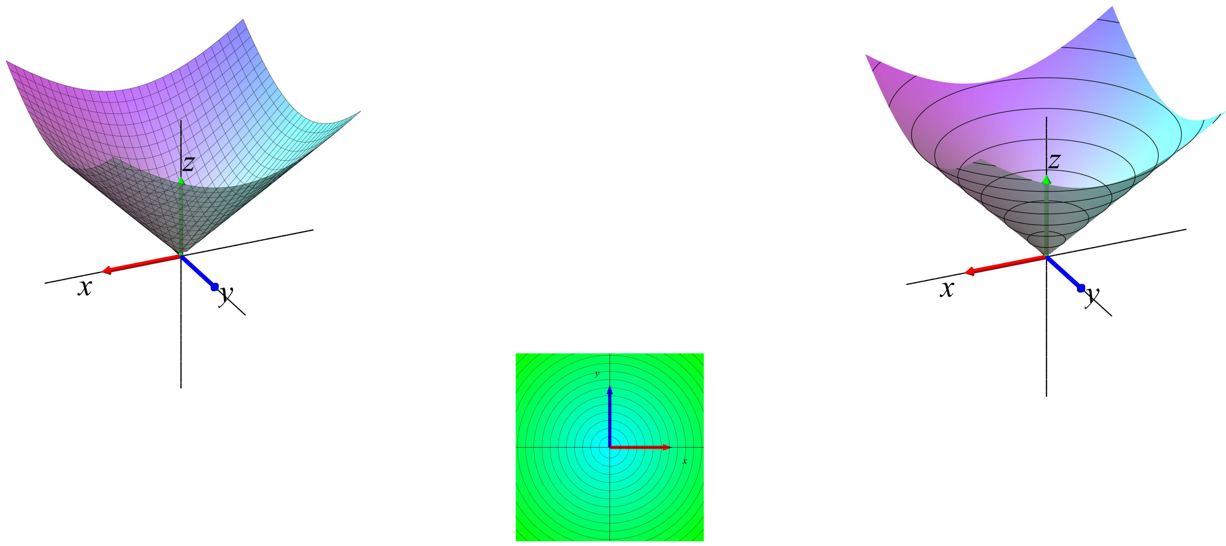
$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \varepsilon_f(x - x_0, y - y_0) \quad . \tag{15-14}$$

Hvis $f(x, y)$ er kontinuert i alle (x_0, y_0) i et givet åbent område i $\mathcal{D}m(f)$, så siger vi, at $f(x, y)$ er kontinuert i hele området.

Enhver epsilonfunktion af $x - x_0$ og $y - y_0$ som f.eks. $\rho_{(x_0, y_0)}(x, y)$ er derfor kontinuert i (x_0, y_0). Grafer og niveaukurver kan ofte afsløre, om en funktion er kontinuert i et punkt.

|||| Sætning 15.20 Inspektion af niveau-mængder

Hvis en funktion $f(x, y)$ har to niveau-mængder $\mathcal{K}_{c_1}$ og $\mathcal{K}_{c_2}$ (hvor $c_1 \neq c_2$) som begge indeholder punkter (x, y) vilkårligt tæt på (x_0, y_0), så er $f(x, y)$ ikke kontinuert i (x_0, y_0).



Figur 15.7: Grafen for afstandsfunktionen $\rho_{(0,0)}(x,y)$ til punktet $(x_0,y_0)=(0,0)$, funktionens niveaukurver, og højdesnit-kurverne på grafen.

|||| Bevis

Antag, at $f(x,y)$ er kontinuert i (x_0,y_0). Hvis vi går i mængden $\mathcal{K}_{c_1}$ hen mod (x_0,y_0) så skal (pr. kontinuitet) $f(x_0,y_0)$ være c_1. Hvis vi derimod går i mængden $\mathcal{K}_{c_2}$ hen mod (x_0,y_0) får vi $f(x_0,y_0)=c_2$, hvilket er en modstrid, da $c_1 \neq c_2$.

■

To niveaukurver hørende til forskellige funktionsværdier for en funktion $f(x,y)$ kan ligge meget tæt på hinanden i (x,y)-planen – men altså ikke vilkårligt tæt – hvis funktionen er kontinuert.

|||| Eksempel 15.21 En funktion som ikke er kontinuert

Vi ser på 0-udvidelsen $\widehat{f}(x,y)$ af funktionen

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2} \quad , \quad \text{hvor} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{\,(0,0)\,\} \quad . \tag{15-15}$$

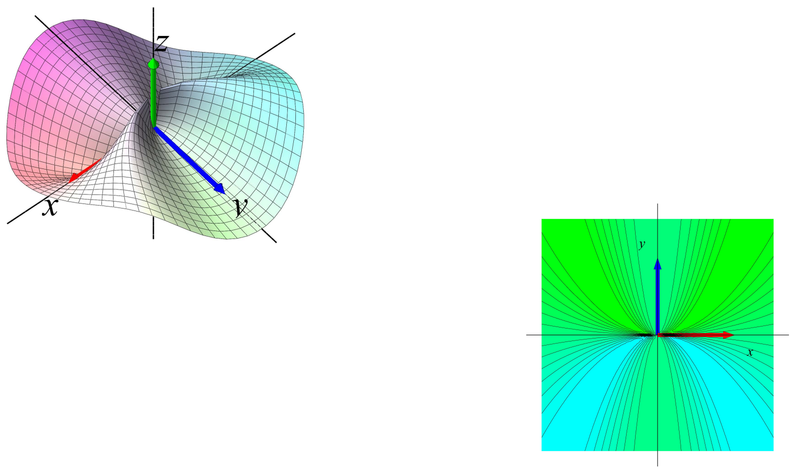
Det vil sige:

$$\widehat{f}(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{for } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{for } (x,y)=(0,0)\end{cases} \quad . \tag{15-16}$$

Funktionen kan inspiceres i figur 15.8. Ved den inspektion bemærkes, at niveaukurverne 'ligner parabler' igennem $(0,0)$. Vi vil teste den hypotese, at det faktisk er parabler: Hvis vi sætter $y = c\,x^2$ (parabelligning) får vi følgende udregninger:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x, c\,x^2) \\ &= \frac{x^2\,c\,x^2}{x^4 + (c\,x^2)^2} \\ &= \frac{c\,x^4}{(1+c^2)\,x^4} \\ &= \frac{c}{1+c^2} \quad , \end{aligned} \tag{15-17}$$

hvilket netop betyder, at parablerne $y = c\,x^2$ er (indeholdt i) niveau-mængden $\mathcal{K}_{c/(1+c^2)}$. Da alle parablerne går igennem $(0,0)$ følger det af sætning 15.20 at funktionen $f(x,y)$ ikke er kontinuert i $(0,0)$.



Figur 15.8: Grafen i rummet og niveaukurve-forløbet i planen for funktionen i eksempel 15.21.

|||| Opgave 15.22

Vis, at 0-udvidelsen $\widehat{f}(x,y)$ af følgende funktion ikke er kontinuert i $(0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad . \tag{15-18}$$

|||| Eksempel 15.23 Første-grads-polynomier er kontinuerte

Vi vil vise, at $f(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ er kontinuert i (x_0, y_0). Det følger direkte af, at

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) \to 0 \quad \text{for} \quad (x,y) \to (x_0,y_0)) \quad , \tag{15-19}$$

sådan at

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \varepsilon_f(x - x_0, y - y_0) \tag{15-20}$$

med epsilonfunktionen $\varepsilon_f(x - x_0, y - y_0) = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)$. Overvej hvorfor dette er en epsilonfunktion.

|||| Opgave 15.24

Vis, at følgende anden-grads polynomium er kontinuert i $(0,0)$:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad . \tag{15-21}$$

|||| Opgave 15.25

Vis, at 0-udvidelsen af følgende funktion er kontinuert i $(0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{x\,y^2}{x^2 + y^2} \quad . \tag{15-22}$$

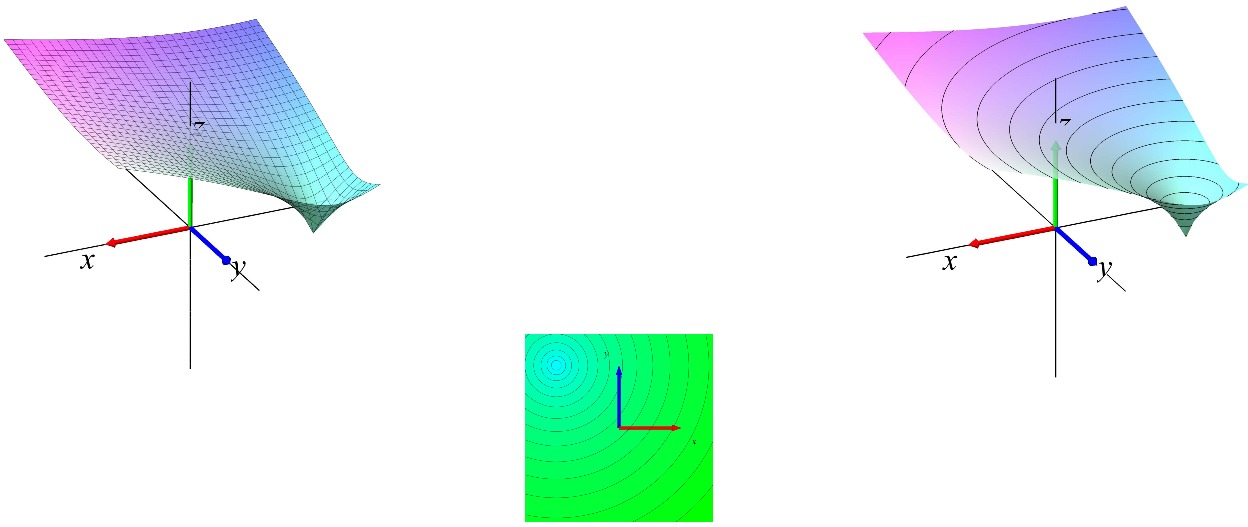
|||| Eksempel 15.26 Kvadratroden af afstandsfunktionen

Funktionen $f(x,y) = \sqrt{\rho_{(x_0,y_0)}(x,y)}$ er – ligesom $\rho_{(x_0,y_0)}(x,y)$ selv – en epsilonfunktion og er derfor kontinuert i (x_0, y_0). Se figur 15.9.

15.6 Differentiable funktioner af to variable

Langt de fleste af de funktioner vi betragter i Matematik 1 er differentiable i deres definitionsområder og af den grund også kontinuerte, som vi skal se nedenfor – jævnfør tilsvarende for funktioner af én variabel.

Differentiabilitet defineres som for funktioner af én variabel, men her igen ved brug af de indførte epsilonfunktioner af to variable:



Figur 15.9: Grafen, niveau-kurverne, og højdesnitkurverne for kvadratroden af afstandsfunktionen til punktet $(x_0, y_0) = (-1, 1)$: $f(x,y) = \sqrt{\rho_{(x_0,y_0)}(x,y)}$.

|||| Definition 15.27 Differentiabilitet og partielle afledede

En funktion $f(x,y)$ er differentiabel i $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}m(f)$ hvis der findes *to* konstanter a og b og en epsilon-funktion $\varepsilon_f(x - x_0, y - y_0)$ sådan at

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(x_0,y_0) + a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) \\ &+ \rho_{(x_0,y_0)}(x,y) \cdot \varepsilon_f(x - x_0, y - y_0) \quad . \end{aligned} \tag{15-23}$$

Det er de to konstanter a og b vi herefter (når de findes, altså når $f(x,y)$ er differentiabel) kalder de ***partielle afledede*** af f i (x_0, y_0). De betegnes henholdsvis:

$$a = f'_x(x_0, y_0) \quad \text{og} \quad b = f'_y(x_0, y_0) \tag{15-24}$$

Med denne notation gælder altså – når $f(x,y)$ er differentiabel i (x_0, y_0):

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0,y_0) \cdot (y - y_0) \\ &+ \rho_{(x_0,y_0)}(x,y) \cdot \varepsilon_f(x - x_0, y - y_0) \quad . \end{aligned} \tag{15-25}$$

|||| Definition 15.28 Partielle afledede af partielle afledede

Hvis $f(x,y)$ er differentiabel i alle punkter (x_0,y_0) i et givet åbent område i $\mathcal{D}m(f) \subset \mathbb{R}^2$ siger vi, at $f(x,y)$ er differentiabel i hele området. Vi skriver så ofte de partielle afledede af $f(x,y)$ på følgende måde, idet de jo dermed selv er funktioner af de to *variable* (x_0,y_0):

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \text{og} \quad f'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad . \tag{15-26}$$

Hvis disse partielle afledede af $f(x,y)$ selv er differentiable, kan vi fortsætte og finde de tilhørende ***partielle afledede af de partielle afledede***, etc. De benævnes på følgende måde:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} f'_x(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) \\ f''_{xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} f'_x(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} f'_y(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ f''_{yy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} f'_y(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) \quad . \end{aligned} \tag{15-27}$$

Hvordan finder vi så konkret de partielle afledede af en given funktion $f(x,y)$, f.eks. $f(x,y) = x \cdot \sin(y)$? Det er ikke svært:

|||| Sætning 15.29 Hjælpefunktioner giver partielle afledede

De partielle afledede af en funktion $f(x,y)$, der er differentiabel i (x_0,y_0) kan findes ved sædvanlig differentiation af to funktioner af én variabel. Sæt

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x,y_0) \\ f_2(y) &= f(x_0,y) \quad . \end{aligned} \tag{15-28}$$

Så er funktionerne $f_1(x)$ og $f_2(y)$ to funktioner af hver én variabel, henholdsvis x og y, og de er begge differentiable i henholdsvis x_0 og y_0, og differentialkvotienterne er netop de partielle afledede:

$$f'_x(x_0,y_0) = f'_1(x_0) \quad \text{og} \quad f'_y(x_0,y_0) = f'_2(y_0) \tag{15-29}$$

Med andre ord: Ved at indføre de to hjælpefunktioner af én variabel, $f_1(x)$ og $f_2(y)$, fås de partielle afledede af $f(x,y)$ ved at finde de sædvanlige differentialkvotienter af $f_1(x)$ og $f_2(y)$ i henholdsvis x_0 og y_0.

Bevis

Hvis vi sætter $y = y_0$ overalt i ligning (15-25) får vi:

$$\begin{aligned} f_1(x) = f(x, y_0) =& f_1(x_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) \\ & + \rho_{(x_0,y_0)}(x, y_0) \cdot \varepsilon_f(x - x_0, 0) \quad , \end{aligned} \tag{15-30}$$

sådan at koefficienten til faktoren $(x - x_0)$ lige præcis er $f'_x(x_0, y_0)$. Vi aflæser altså for det første, at $f_1(x)$ er differentiabel i x_0 og for det andet, at $f'_1(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$. Og det var den ene halvdel af det vi skulle vise; den anden halvdel – vedrørende $f'_2(y_0) = f'_y(x_0, y_0)$ – fås på helt tilsvarende måde.

■

Eksempel 15.30 Bestemmelse af partielle afledede

Vi vil bestemme de partielle afledede af funktionen $f(x, y) = 3\,x^2 + 7\,y^3 + 10\,x\,y^7$ i ethvert punkt (x_0, y_0) i $\mathbb{R}^2$. Vi opstiller først de to hjælpefunktioner $f_1(x) = f(x, y_0)$ og $f_2(y) = f(x_0, y)$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3\,x^2 + 7\,y_0^3 + 10\,x\,y_0^7 \\ f_2(y) &= 3\,x_0^2 + 7\,y^3 + 10\,x_0\,y^7 \quad . \end{aligned} \tag{15-31}$$

De to hjælpefunktioner har differentialkvotienterne henholdsvis:

$$\begin{aligned} f'_1(x) &= 6\,x + 0 + 10\,y_0^7 \quad \text{da } y_0 \text{ jo er en konstant her,} \\ f'_2(y) &= 0 + 21\,y^2 + 70\,x_0\,y^6 \quad \text{da } x_0 \text{ er en konstant} \quad . \end{aligned} \tag{15-32}$$

Heraf får vi dernæst hjælpefunktionernes differentialkvotienter i x_0 henholdsvis y_0:

$$\begin{aligned} f'_1(x_0) &= 6\,x_0 + 10\,y_0^7 = f'_x(x_0, y_0) \\ f'_2(y_0) &= 21\,y_0^2 + 70\,x_0\,y_0^6 = f'_y(x_0, y_0) \quad . \end{aligned} \tag{15-33}$$

Heraf fås generelt, det vil sige for alle (x, y) i $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 6\,x + 10\,y^7 \\ f'_y(x, y) &= 21\,y^2 + 70\,x\,y^6 \quad . \end{aligned} \tag{15-34}$$

Opgave 15.31

Vis (på samme måde som for differentiable funktioner af én variabel), at hvis $f(x, y)$ er differentiabel i (x_0, y_0), så er de to konstanter a og b, altså konstanterne $f'_x(x_0, y_0)$ og $f'_y(x_0, y_0)$, veldefinerede i følgende forstand: Der findes *ikke* to forskellige par af konstanter a_1, b_1 og a_2, b_2 og to epsilonfunktioner ε_1 og ε_2 sådan at der samtidig gælder:

$$\begin{aligned} f(x, y) =& f(x_0, y_0) + a_1 \cdot (x - x_0) + b_1 \cdot (y - y_0) \\ & + \rho_{(x_0,y_0)}(x, y) \cdot \varepsilon_1(x - x_0, y - y_0) \\ f(x, y) =& f(x_0, y_0) + a_2 \cdot (x - x_0) + b_2 \cdot (y - y_0) \\ & + \rho_{(x_0,y_0)}(x, y) \cdot \varepsilon_2(x - x_0, y - y_0) \quad . \end{aligned} \tag{15-35}$$

|||| Opgave 15.32

Bestem samtlige partielle afledede af de partielle afledede i ethvert punkt (x, y) for funktionen $f(x, y) = 3x^2 + 7y^3 + 10xy^7$.

|||| Opgave 15.33

Bestem samtlige partielle afledede af de partielle afledede i ethvert punkt (x, y) for funktionen $f(x, y) = \cos(3x) \cdot \sin(3y)$.

Den opmærksomme opgaveløser vil have observeret (f.eks. i opgaverne ovenfor) at $f''_{xy}(x, y)$ og $f''_{yx}(x, y)$ typisk er ens! Det er ikke nogen tilfældighed, det gælder sædvanligvis at man kan nøjes med at beregne den ene af de to dobbeltafledede:

|||| Sætning 15.34 De blandede dobbeltafledede er ens

Hvis alle de 4 dobbelt afledede af en given funktion $f(x, y)$ er kontinuerte i et åbent område, så gælder i hele området:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) \quad . \tag{15-36}$$

|||| Opgave 15.35

Vis (på samme måde som for funktioner af én variabel) at: Hvis en funktion $f(x, y)$ af to variable er differentiabel i et punkt (x_0, y_0), så er funktionen også kontinuert i dette punkt. Vis også med et eksempel, at hvis en funktion er kontinuert i (x_0, y_0), så behøver den ikke at være differentiabel i (x_0, y_0). Se f.eks. på $\rho_{(x_0,y_0)}(x, y)$.

Den opmærksomme vil også have noteret, at vi mangler en overvejelse: Hvis $f(x, y)$ er differentiabel i et punkt (x_0, y_0), så findes de partielle afledede i konsekvens af differentiabiliteten og de kan bestemmes ved hjælp af de differentiable hjælpefunktioner $f_1(x)$ og $f_2(y)$. Man kan nu med god grund spørge: Hvis de to hjælpefunktioner findes for en given funktion $f(x, y)$, og det viser sig, at de er differentiable i henholdsvis x_0 og y_0, betyder det så, at $f(x, y)$ er differentiabel i (x_0, y_0)?

Følgende sætning kaster lys over dette spørgsmål:

|||| Sætning 15.36 Fra partielle afledede til differentiabilitet

Hvis $f(x, y)$ har partielle afledede (fundet via hjælpefunktionerne $f_1(x)$ og $f_2(y)$) i et åbent område A indeholdende (x_0, y_0), og hvis de partielle afledede af $f(x, y)$ begge er kontinuerte i A, så er $f(x, y)$ differerentiabel.

At der nødvendigvis må være en ekstra betingelse i sætning 15.36 følger af eksemplet her:

|||| Eksempel 15.37 Differentiable hjælpefunktioner er ikke nok

Vi ser på 0-udvidelsen af følgende funktion:

$$f(x,y) = \frac{x\,y^2}{x^2+y^4} \quad . \tag{15-37}$$

Den funktion er ikke differentiabel i $(0,0)$ – den er nemlig ikke engang kontinuert i $(0,0)$ (!) (Hvorfor ikke?) Ikke desto mindre findes de to hjælpefunktioner

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x,0) = 0 \\ f_2(y) &= f(0,y) = 0 \quad , \end{aligned} \tag{15-38}$$

og som det ses, er de begge to særdeles differentiable i $(0,0)$. Selv om hjælpefunktionerne er differentiable behøver den aktuelle funktion selv ikke at være differentiabel.

15.7 Det approksimerende første-grads-polynomium

Som for funktioner af én variabel kan vi trunkere udtrykket i ligning (15-25) ved simpelthen at fjerne 'epsilon-funktions-delen' hvorved vi står tilbage med et førstegrads-polynomium i de to variable x og y:

$$P_{1,(x_0,y_0)}(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \quad . \tag{15-39}$$

Funktionen $P_{1,(x_0,y_0)}(x,y)$ kaldes det approksimerende første-gradspolynomium for $f(x,y)$ med udviklingspunkt (x_0,y_0).

Læg mærke til, at $P_{1,(x_0,y_0)}(x,y)$ virkelig *er* et første-grads-polynomium i de to variable x og y fordi de højst optræder med potensen 1 og alle andre faktorer og addender er konstanter.

|||| Eksempel 15.38 Paraboloide med tangentplan

Vi ser på funktionen

$$f(x,y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 \quad . \tag{15-40}$$

Så er

$$\begin{aligned} f'_x(x_0,y_0) &= -x_0 \\ f'_y(x_0,y_0) &= -y_0 \quad , \end{aligned} \tag{15-41}$$

sådan at

$$\begin{aligned} P_{1,(x_0,y_0)}(x,y) &= f(x_0,y_0) - x_0\cdot(x-x_0) - y_0\cdot(y-y_0) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x_0^2 - \frac{1}{2}y_0^2 - x\cdot x_0 + x_0^2 - y\cdot y_0 + y_0^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{2}y_0^2 - x\cdot x_0 - y\cdot y_0 \quad . \end{aligned} \tag{15-42}$$

Specielt får vi med udviklingspunktet $(x_0, y_0) = (1, -1)$:

$$P_{1,(1,-1)}(x,y) = y - x + 2 \quad . \tag{15-43}$$

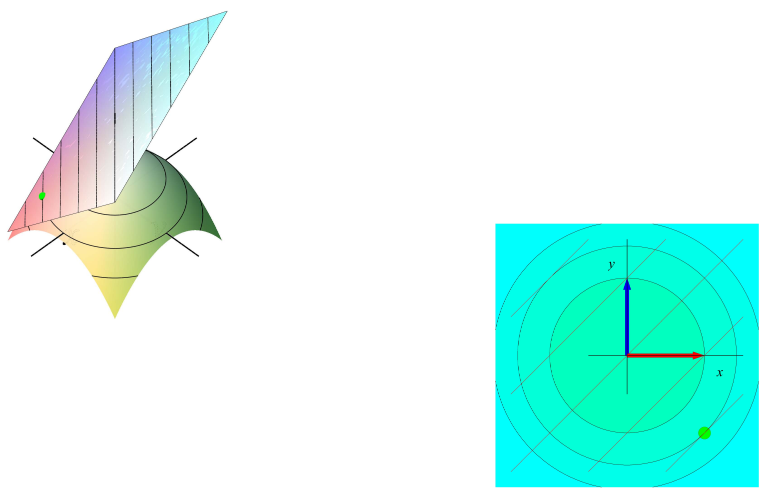
Se figur 15.10, hvor grafen for dette approksimerende første-gradspolynomium for $f(x,y)$ er plottet sammen med grafen for funktionen selv. Højde-snit-kurverne og niveau-kurverne er ligeledes gengivet for begge funktionerne. I og omkring det markerede udviklingspunkt er funktionerne meget ens - grafen for det approksimerende førstegrads-polynomium med udviklingspunkt (x_0, y_0) fortjener helt klart at blive kaldt ***tangentplanen*** til grafen for $f(x,y)$ i punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

|||| Definition 15.39 Tangentplan til grafen for en funktion af to variable

Givet en differentiabel funktion $f(x,y)$. Tangentplanen til grafen for $f(x,y)$ i punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ er givet ved ligningen:

$$z = P_{1,(x_0,y_0)}(x,y) \quad , \tag{15-44}$$

hvor højresiden er det approksimerende polynomium af første grad for $f(x,y)$ med udviklingspunkt (x_0, y_0).



Figur 15.10: Tangentplanen approksimerer grafen over udviklingspunktet og niveaulinjerne for det approksimerende førstegradspolynomium approksimerer niveaulinjerne for funktionen omkring udviklingspunktet i (x,y)-planen

|||| Opgave 15.40

Bestem det approksimerende første-grads-polynomium for følgende funktion i ethvert punkt (x_0, y_0):

$$f(x,y) = \cos(3x) \cdot \sin(3y) \quad . \tag{15-45}$$

15.8 Partielle afledede af sammensatte funktioner

Sammensatte funktioner af to variable optræder i rigtig mange anvendelser, lige fra GPS teknologi til geologi og termodynamik.

En sammensat funktion af to variable fås typisk således: Lad $f(x,y)$ være en funktion af to variable, hvor $(x,y) \in \mathcal{D}m(f) \subset \mathbb{R}^2$ og lad $p(u,v)$ og $q(u,v)$ være *to* andre funktioner af to variable, hvor vi så antager, at $(u,v) \in \mathcal{D}m(p) \cap \mathcal{D}m(q) \subset \mathbb{R}^2$. Antager vi nu yderligere, at (u,v) tilhører et område A i $\mathbb{R}^2$ sådan at der gælder, at *værdierne* af $p(u,v)$ og $q(u,v)$ ligger i definitionsmængden for $f(x,y)$ i den forstand, at $(p(u,v), q(u,v)) \in \mathcal{D}m(f)$ for $(u,v) \in A$, så er den sammensatte funktion

$$h(u,v) = f(p(u,v), q(u,v)) \quad \text{veldefineret for alle} \quad (x,y) \in A \quad . \tag{15-46}$$

Vi vil sædvanligvis kun se på sammensatte funktioner som er definerede i hele planen, sådan at $A = \mathbb{R}^2$.

|||| Eksempel 15.41 Sammensatte funktioner af to variable

Lad $f(x,y)$, $p(u,v)$, og $q(u,v)$ være bestemt ved de angivne funktioner nedenfor. Så fås de tilsvarende sammensatte funktioner $h(u,v)$ ved at sætte $x = p(u,v)$, $y = q(u,v)$, og $h(u,v) = f(x,y) = f(p(u,v), q(u,v))$ i de respektive definitions-områder (de anføres ikke her):

$$\begin{array}{llllllll} f(x,y) = x + y & , & p(u,v) = 2u \cdot v & , & q(u,v) = u^2 + v^2 & , & h(u,v) = (u+v)^2 \\ f(x,y) = y \cdot e^x & , & p(u,v) = \ln(uv) & , & q(u,v) = 1/uv & , & h(u,v) = 1 \\ f(x,y) = \sqrt{x+y} & , & p(u,v) = u^4 & , & q(u,v) = 8\,u^4 & , & h(u,v) = 3 \cdot u^2 \end{array} \tag{15-47}$$

|||| Sætning 15.42 Kædereglen i planen

Lad $f(x,y)$, $p(u,v)$, og $q(u,v)$ være tre differentiable funktioner - hver af to variable. Lad $h(u,v)$ betegne den sammensatte funktion

$$h(u,v) = f(p(u,v), q(u,v)) \quad . \tag{15-48}$$

Så kan de partielle afledede af $h(u,v)$ udtrykkes ved hjælp af dels de partielle afledede af $f(x,y)$, dels de partielle afledede af $p(u,v)$, og dels de partielle afledede af $q(u,v)$. Vi vil udtrykke de partielle afledede af $h(u,v)$ i (u_0, v_0) så vi sætter $x_0 = p(u_0, v_0)$ og $y_0 = q(u_0, v_0)$.
Så har vi:

$$\begin{aligned} h'_u(u_0,v_0) &= f'_x(x_0,y_0) \cdot p'_u(u_0,v_0) + f'_y(x_0,y_0) \cdot q'_u(u_0,v_0) \\ h'_v(u_0,v_0) &= f'_x(x_0,y_0) \cdot p'_v(u_0,v_0) + f'_y(x_0,y_0) \cdot q'_v(u_0,v_0) \quad . \end{aligned} \tag{15-49}$$

|||| Bevis

Resultatet følger efter præcis samme opskrift som beviset for differentiation af den sammensatte funktion $f(g(x))$ af én variabel – der er bare lidt flere konstanter og funktioner at holde styr på.

■

|||| Opgave 15.43

Bestem de partielle afledede i ethvert punkt (u,v) for hver af de sammensatte funktioner nedenfor – dels ved at beregne dem direkte ud fra det givne eksplicitte udtryk for $h(u,v)$ og dels ved at benytte kædereglen og de parteille afledede af ingredienserne i $h(u,v)$, altså de partielle afledede af $f(x,y)$, $p(u,v)$ og $q(u,v)$.

$$\begin{array}{llllllll} f(x,y) = x+y & , & p(u,v) = 2u \cdot v & , & q(u,v) = u^2+v^2 & , & h(u,v) = (u+v)^2 \\ f(x,y) = y \cdot \mathrm{e}^x & , & p(u,v) = \ln(uv) & , & q(u,v) = 1/uv & , & h(u,v) = 1 \\ f(x,y) = \sqrt{x+y} & , & p(u,v) = u^4 & , & q(u,v) = 8\,u^4 & , & h(u,v) = 3 \cdot u^2 \end{array} \tag{15-50}$$

Læg mærke til, at hver af de partielle afledede af den sammensatte funktion $h(u,v) = f(p(u,v), q(u,v))$ i et punkt (u_0,v_0) effektivt kan udtrykkes ved prikprodukter hvori indgår en fælles faktor, nemlig vektoren $\left(f'_x(x_0,y_0)\,,\ f'_y(x_0,y_0)\right)$ hvor $x_0 = p(u_0,v_0)$ og $y_0 = q(u_0,v_0)$:

$$\begin{aligned} h'_u(u_0,v_0) &= \left(f'_x(x_0,y_0)\,,\ f'_y(x_0,y_0)\right) \cdot \left(p'_u(u_0,v_0)\,,\ q'_u(u_0,v_0)\right) \\ h'_v(u_0,v_0) &= \left(f'_x(x_0,y_0)\,,\ f'_y(x_0,y_0)\right) \cdot \left(p'_v(u_0,v_0)\,,\ q'_v(u_0,v_0)\right) \quad . \end{aligned}$$

15.8.1 Gradientvektorer

|||| Definition 15.44 Gradientvektor

Lad $f(x,y)$ betegne en differentiabel funktion af to variable. De partielle afledede af $f(x,y)$ i et punkt (x_0,y_0) definerer ***gradientvektoren for*** $f(x,y)$ i (x_0,y_0) på følgende måde:

$$\nabla f(x_0,y_0) = \Big(f'_x(x_0,y_0)\,,\; f'_y(x_0,y_0)\Big) \quad . \tag{15-51}$$

På denne måde får vi altså defineret en ganske bestemt vektor i ethvert punkt, hvor $f(x,y)$ er differentiabel:

$$\nabla f(x,y) = \Big(f'_x(x,y)\,,\; f'_y(x,y)\Big) \quad . \tag{15-52}$$

Hvis vi for ethvert fodpunkt (x_0,y_0) afsætter gradientvektoren $\nabla f(x_0,y_0)$ for $f(x,y)$ ud fra det fodpunkt i planen $\mathbb{R}^2$ får vi konstrueret ***gradientvektorfeltet*** for $f(x,y)$.

|||| Opgave 15.45

Bestem gradientvektorfeltet i ethvert punkt (x,y) for hver af følgende funktioner i deres respektive definitionsmængder: $f(x,y) = x+y$, $f(x,y) = y\cdot e^x$, og $f(x,y) = \rho^2_{x_0,y_0}(x,y)$.

Ved hjælp af gradientvektorfeltet $\nabla f(x,y)$ for $f(x,y)$ kan vi nu formulere de partielle afledede af den sammensatte funktion $h(u,v) = f(p(u,v),q(u,v))$ lidt smartere:

|||| Sætning 15.46 Kædereglen udtrykt med gradienten af $f(x,y)$

Lad $f(x,y)$, $p(u,v)$, og $q(u,v)$ være tre differentiable funktioner - hver af to variable. Lad $h(u,v)$ betegne den sammensatte funktion

$$h(u,v) = f(p(u,v),q(u,v)) \quad . \tag{15-53}$$

Så kan de partielle afledede af $h(u_0,v_0)$ med hensyn til henholdsvis u og v i (u_0,v_0) udtrykkes ved gradienten af $f(x,y)$ i $(x_0,y_0) = (\,p(u_0,v_0),q(u_0,v_0)\,)$:

$$\begin{aligned} h'_u(u_0,v_0) &= \nabla f(x_0,y_0)\cdot(p'_u(u_0,v_0),q'_u(u_0,v_0)) \\ h'_v(u_0,v_0) &= \nabla f(x_0,y_0)\cdot(p'_v(u_0,v_0),q'_v(u_0,v_0)) \quad . \end{aligned} \tag{15-54}$$

15.8.2 Kædereglen 'langs' kurver i planen

Hvis funktionerne $p(u,v)$ og $q(u,v)$ kun afhænger af den ene variable u kan vi selvfølgelig betegne funktionerne med henholdsvis $p(u)$ og $q(u)$. Den sammensattte funktion $h(u) = f(p(u), q(u))$ – hvor $f(x,y)$ er en givet differerentiabel funktion i planen – angiver så de funktionsværdier, som $f(x,y)$ antager *langs den kurve* i planen, som er givet ved de to funktioner $p(u)$ og $q(u)$:

|||| Definition 15.47 Parametriserede kurver i planen

En ***kurve i planen*** består af en punktmængde $\mathcal{C}$ i planen, som vi vil antage er givet ved to funktioner $p(u)$ og $q(u)$ på følgende måde:

$$\mathcal{C}_{\mathbf{r}} \quad : \quad \mathbf{r}(u) = (p(u), q(u)) \quad \text{hvor} \quad u \in \left]\alpha, \beta\right[\subset \mathbb{R} \quad . \tag{15-55}$$

Det vil sige, at kurven er en parametriseret punktmængde med stedvektorerne $\mathbf{r}(u)$ og parameteren u i et givet interval. Kurven er ***differentiabel*** hvis de to funktioner $p(u)$ og $q(u)$ begge er differentiable i hele intervallet $]\alpha, \beta[$.

Den parametriserede kurve siges at være ***regulær***, hvis $\mathbf{r}'(u) \neq \mathbf{0}$ for alle $u \in]\alpha, \beta[$.

|||| Sætning 15.48 Tangent til kurve

Lad $\mathcal{C}_{\mathbf{r}}$ betegne en differentiabel kurve med parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u)$ og antag at $\mathbf{r}'(u_0) \neq (0,0)$. Tangenten L_{u_0} (igennem punktet $\mathbf{r}(u_0)$) til $\mathcal{C}_{\mathbf{r}}$ er så givet ved følgende parameterfremstilling:

$$L_{u_0} \quad : \quad \mathbf{T}(t) = \mathbf{r}(u_0) + t \cdot \mathbf{r}'(u_0) \quad \text{hvor} \quad t \in \mathbb{R} \quad . \tag{15-56}$$

|||| Bevis

Vi nøjes med at se på det tilfælde hvor $p(u)$ er meget elementær: $p(u) = u$. Så er $\mathcal{C}_{\mathbf{r}}$ simpelthen grafen for funktionen $q(x)$ i (x,y)-planen. Grafen for den funktion har en tangent i punktet $(x_0, q(x_0)$, som er givet ved ved det velkendte udtryk: $y = q(x_0) + q'(x_0)(x - x_0)$. En parameterfremstilling for den tangent er derfor:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= (x_0, q(x_0)) + t \cdot (1, q'(x_0)) \\ &= (p(u_0), q(u_0)) + t \cdot (p'(u_0), q'(u_0)) \quad (\text{fordi } x = p(u) = u \\ &= \mathbf{r}(u_0) + t \cdot \mathbf{r}'(u_0) \quad , \end{aligned} \tag{15-57}$$

og det var det, vi skulle indse.

■

Vi kan nu undersøge hvordan kædereglen ser ud og simplificeres langs parametriserede kurver – vi skal blot 'bruge' den generelle kæderegel på de to v-uafhængige funktioner $p(u)$ og $q(u)$:

|||| Sætning 15.49 Kædereglen langs kurver

Lad $\mathbf{r}(u) = (p(u), q(u))$ være en differentiabel parametriseret kurve i (x, y)-planen. En differentiabel funktion $f(x, y)$ antager så værdierne $h(u) = f(p(u), q(u)) = f(\mathbf{r}(u))$ langs kurven. Den sammensatte funktion $h(u)$ af den ene variabel u er differentiabel, og

$$h'(u) = \nabla f(p(u), q(u)) \cdot (p'(u), q'(u)) = \nabla f(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) \quad . \tag{15-58}$$

|||| Bevis

Resultatet følger direkte af den øverste ligning i (15-54). Bemærk, at funktionerne $h(u)$, $p(u)$, og $q(u)$ jo ikke afhænger af v, sådan at den nederste ligning i (15-54) reducerer til $0 = 0$.

■

Motiveret af dette simple udtryk for den afledede af funktionen $f(x, y)$ langs en parametriseret kurve $\mathbf{r}(u)$ indfører vi den ***retningsafledede af funktionen*** i den retning fra et givet punkt (x_0, y_0) som er givet ved en enhedsvektor $\mathbf{e}$:

|||| Definition 15.50 Retningsafledede

Den ***retningsafledede*** af $f(x, y)$ i punktet (x_0, y_0) i retningen med enhedsretningsvektor $\mathbf{e}$ betegnes med $f'((x_0, y_0); \mathbf{e})$ og er givet ved prikproduktet:

$$f'((x_0, y_0); \mathbf{e}) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{e} \quad . \tag{15-59}$$

Kædereglen langs kurver kan nu formuleres ved hjælp af den retningsafledede:

|||| Sætning 15.51 Kæderegel langs kurver udtrykt ved retningsafledede

Funktionen $f(x, y)$ antager værdierne $h(u) = f(p(u), q(u)) = f(\mathbf{r}(u))$ langs $\mathbf{r}(u)$. Hvis $\mathbf{r}(u)$ er en regulær parameterfremstilling for kurven får vi differentialkvotienten af $h(u)$:

$$h'(u) = \nabla f(p(u), q(u)) \cdot (p'(u), q'(u)) = f'((x_0, y_0); \mathbf{e}) \cdot |\mathbf{r}'(u)| \quad . \tag{15-60}$$

Læg mærke til, at den afledede af den sammensatte funktion $h(u) = f(\mathbf{r}(u))$ i et punkt på kurven $\mathbf{r}(u)$ kun afhænger af tangentvektoren til kurven i punktet – $h'(u)$ er uafhængig af 'resten' af kurven.

|||| Eksempel 15.52 Retningsafledede

Funktionen $f(x,y) = 2\,x^2 + 3\,y^2$ har de partielle afledede

$$f'_x(x,y) = 4\,x \quad , \quad f'_y(x,y) = 6\,y \quad , \tag{15-61}$$

og derfor gradientvektorfeltet

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = (4\,x\,,\ 6\,y) \tag{15-62}$$

Den retningsafledede af $f(x,y)$ i punktet $(x_0, y_0) = (1,1)$ i retningen bestemt ved $\mathbf{e}(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, hvor $\theta \in [0, 2\pi]$ er derfor:

$$f'((1,1); (\cos(\theta), \sin(\theta))) = 4\cos(\theta) + 6\sin(\theta) \quad . \tag{15-63}$$

15.8.3 Kædereglen 'langs' *niveau*-kurver for en funktion

En kurve $(p(u), q(u))$ som er niveaukurve for en funktion $f(x,y)$ giver anledning til en særlig simpel – og meget vigtig – version af kædereglen:

|||| Sætning 15.53 Kædereglen langs niveaukurver

Lad $\mathbf{r}(u) = (p(u), q(u))$ være en parametriseret kurve i (x,y)-planen. Antag, at kurven er en niveau-kurve for $f(x,y)$, dvs. $f(x,y)$ er en konstant c langs hele kurven,

$$f(p(u), q(u)) = c \quad \text{for alle } u \quad . \tag{15-64}$$

Så er

$$\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) = 0 \quad . \tag{15-65}$$

Med andre ord: Gradienten for en funktion $f(x,y)$ er i ethvert punkt hvor den ikke er $\mathbf{0}$ vinkelret på den niveau-kurve for $f(x,y)$ som går igennem punktet:

$$\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}(u)) \perp \mathbf{r}'(u) \quad . \tag{15-66}$$

|||| Bevis

Funktionen $h(u) = f(p(u), q(u)) = c$ har tydeligvis $h'(u) = 0$ og da sætning 15.49 giver $h'(u) = \boldsymbol{\nabla} f(p(u), q(u)) \cdot (p'(u), q'(u))$ fås resultatet.

■

Læg mærke til, at sætning 15.53 mere end antyder en anden sætning, som vi dog ikke vil vise her: Hvis en differentiabel funktion $f(x, y)$ har et egentligt gradientvektorfelt – dvs. hvis $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$ for alle (x, y) i et givet åbent område A i definitionsmængden – så består alle niveau-mængderne for $f(x, y)$ i A af pæne kurver, dvs. de kan parametriseres med differentiable vektorfunktioner $\mathbf{r}(u)$ som ovenfor.

15.9 Opsummering

Funktioner af to variable er behandlet i denne eNote efter samme 'skema' som funktioner af én variabel: Definitionsmængderne er her delmængder af planen og giver derfor anledning til nye begreber og deskriptorer, som kan bruges til beskrivelse af generelle mængder i planen. Vi har indført og illustreret begreberne: Åbne, afsluttede, begrænsede, og stjerneformede mængder samt defineret det indre af en mængde og det ydre af en mængde. Grafer og niveau-mængder for en funktion er vigtige hjælpemidler til at forstå hvordan funktionsværdierne $f(x,y)$ 'opfører sig' i afhængighed af hvor punktet (x,y) befinder sig i definitionsmængden. Kontinuitet og differentiabilitet (eller mangel på samme) for en funktion kan ofte inspiceres ved at konstruere eller tegne grafen for funktionen eller ved at tegne niveau-mængderne for funktionen.

- Niveaumængden hørende til værdien c for funktionen $f(x,y)$ er givet ved

$$\mathcal{K}_c(f) = \{\, (x,y) \in \mathcal{D}m(f) \,\big|\, f(x,y) = c \,\} \quad . \tag{15-67}$$

- En funktion $f(x,y)$ er kontinuert i (x_0,y_0) hvis $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ er en epsilon-funktion af $x - x_0, y - y_0)$, dvs.

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \varepsilon_f(x - x_0, y - y_0) \quad . \tag{15-68}$$

- En funktion $f(x,y)$ er differentiabel med de partielle afledede $f'_x(x_0,y_0)$ og $f'_x(x_0,y_0)$ i (x_0,y_0) hvis

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \\ &+ \rho_{(x_0,y_0)}(x,y)\cdot\varepsilon_f(x-x_0,y-y_0) \quad . \end{aligned} \tag{15-69}$$

- De partielle afledede af $f(x,y)$ i et punkt (x_0,y_0) kan findes ved at beregne de sædvanlige differentialkvotienter af de to hjælpefunktioner $f_1(x) = f(x,y_0)$ og $f_2(y) = f(x_0,y)$ i henholdsvis x_0 og y_0:

$$f'_x(x_0,y_0) = f'_1(x_0) \quad \text{og} \quad f'_y(x_0,y_0) = f'_2(y_0) \tag{15-70}$$

- Det approksimerende førstegradspolynomium for $f(x,y)$ med udviklingspunkt (x_0,y_0) er givet ved:

$$P_{1,(x_0,y_0)}(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \quad . \tag{15-71}$$

- Tangentplanen til grafen for $f(x,y)$ i punktet $(x_0,y_0,f(x_0,y_0)$ er givet ved:

$$z = P_{1,(x_0,y_0)}(x,y) \quad . \tag{15-72}$$

- Gradientvektorfeltet for en funktion $f(x,y)$ er givet ved:

$$\boldsymbol{\nabla} f(x_0,y_0) = \Big(f'_x(x_0,y_0)\,,\; f'_y(x_0,y_0)\Big) \quad . \tag{15-73}$$

- Den retningsafledede af $f(x,y)$ i punktet (x_0,y_0) i retningen givet ved en enhedsvektor $\mathbf{e}$ er givet ved:

$$f'((x_0,y_0);\mathbf{e}) = \boldsymbol{\nabla} f(x_0,y_0)\cdot\mathbf{e} \quad . \tag{15-74}$$

eNote 16

Gradienter og tangentplaner

I denne eNote vil vi fokusere lidt nærmere på den geometriske analyse og inspektion af funktioner af to variable. Vi vil især studere sammenhængen mellem gradientvektorerne i (x, y)-planen og tangentplanerne i (x, y, z)-rummet. Vi vil se på parameterfremstillinger for – og normalvektorer til – tangentplanerne for grafen for en funktion $f(x, y)$ af to variable via det approksimerende førstegradspolynomium for $f(x, y)$. De partielle afledede er i hele eNoten de grundlæggende ingredienser. Et globalt resultat om de partielle afledede er at gradienten kan benyttes til at bestemme funktionen overalt i et sammenhængende område hvis vi blot kender funktionsværdien i et enkelt punkt. Kurver i (x, y)-planen kan løftes til graf-fladen for $f(x, y)$, og vi vil vise, at alle tangenterne for enhver kurve igennem et givet punkt på graf-fladen er indeholdt i tangentplanen for fladen i det punkt.

16.1 Gradienterne bestemmer funktionen

For funktioner af én variabel ved vi, at vi kan finde og rekonstruere funktionen $f(x)$ ud fra den afledede $f'(x) = q(x)$ og ud fra værdien af $f(x)$ i blot ét punkt x_0. Vi skal 'bare' integrere og finde en stamfunktion til $q(x)$. Stamfunktionen er så den ønskede funktion $f(x)$ pånær en konstant, der til sidst kan bestemmes ud fra kendskabet til $f(x_0)$. Det samme er tilfældet for funktioner af to variable.

Selv om vi kun kender de partielle afledede, dvs. de sædvanlige afledede af hjælpefunktionerne $f_1(x, y_0)$ og $f_2(x_0, y)$, i de to *koordinatakseretninger*, så er de faktisk tilstrækkelige til at rekonstruere funktionen. Men for at kunne integrere og rekonstruere funktionen ud fra gradientvektorfeltet har vi brug for, at det område vi betragter i (x, y)-planen er sammenhængende:

Definition 16.1 Sammenhængende mængde

En mængde M i planen siges at være ***kurve-sammenhængende*** eller blot ***sammenhængende*** hvis ethvert punkt i M kan forbindes med ethvert andet punkt i M via en differentiabel parametriseret kurve $\mathbf{r}(u) = (p(u), q(u))$, hvor $u \in \,]\alpha, \beta[$.

|||| Eksempel 16.2 Stjerneformede mængder er sammenhængende

Enhver stjerneformet mængde i (x, y)-planen er kurvesammenhængende. Vi kan forbinde to givne punkter via rette linjestykker til stjernepunktet, hvor der så imidlertid typisk vil optræde et 'knæk'. Overvej, hvorfor det ikke er et problem.

Vi har så følgende sætning, som vi vil give et konstruktivt bevis for:

|||| Sætning 16.3 Gradientvektorfeltet giver funktionen pånær en konstant

Antag, at vi kender gradientvektorfeltet $\nabla f(x, y)$ for en funktion $f(x, y)$ overalt i et åbent kurvesammenhængende område i definitionsmængden. Og antag, at vi kender funktionsværdien i et enkelt punkt (x_0, y_0). Så kan vi rekonstruere alle funktionsværdierne for $f(x, y)$ i hele området.

|||| Bevis

Vi bruger kædereglen fra eNote 15 på den sammensatte funktion $h(u) = f(\mathbf{r}(u))$ hvor $\mathbf{r}(u)$, $u \in]u_0, u_1[$, er en vilkårlig differentiabel kurve fra $(x_0, y_0) = \mathbf{r}(u_0)$ til $(x_1, y_1) = \mathbf{r}(u_1)$ og får derved:

$$h'(u) = \mathbf{r}'(u) \cdot \nabla f(\mathbf{r}(u)) \quad . \tag{16-1}$$

Heraf følger, at $h(u)$ er en stamfunktion til funktionen på højresiden af ovenstående ligning:

$$h(u_1) - h(u_0) = \int_{u_0}^{u_1} \mathbf{r}'(u) \cdot \nabla f(\mathbf{r}(u))\, du \quad . \tag{16-2}$$

Men da

$$\begin{aligned} h(u_0) &= f(\mathbf{r}(u_0)) = f(x_0, y_0) \quad , \\ h(u_1) &= f(\mathbf{r}(u_1)) = f(x_1, y_1) \quad , \end{aligned} \tag{16-3}$$

får vi dermed

$$f(x_1, y_1) = f(x_0, y_0) + \int_{u_0}^{u_1} \mathbf{r}'(u) \cdot \nabla f(\mathbf{r}(u))\, du \quad , \tag{16-4}$$

og det var præcis det vi skulle – rekonstruere værdien af $f(x, y)$ i punktet (x_1, y_1) ud fra værdien af $f(x, y)$ i punktet (x_0, y_0) og gradientvektorfeltet.

■

Som en direkte konsekvens af sætning 16.3 og beviset for den, især ligning (16-4), har vi

|||| Sætning 16.4 Nul gradient giver konstant funktion

Hvis en funktion $f(x, y)$ har gradienten $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ overalt i et åbent kurvesammenhængende område, så er funktionen konstant i hele området.

Bemærk, at det er ligegyldigt hvilken kurve man vælger at integrere langs for at finde funktionsværdien i endepunktet. Hvis man har mulighed for det vil man naturligvis vælge den simpleste kurve til formålet. Det gør vi i følgende eksempel:

|||| Eksempel 16.5 Bestemmelse af funktionen ud fra de partielle afledede

Vi vil bestemme funktionen $f(x,y)$ udelukkende ud fra kendskab til en given funktionsværdi $f(0,0) = 0$ samt kendskab til gradientvektorfeltet i (x,y)-planen:

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = (6\,x + 10\,y^7\,,\; 21\,y^2 + 70\,x\,y^6) \quad . \tag{16-5}$$

Lad $\mathbf{r}(u)$ være en parameterfremstilling for det *rette linjestykke* i (x,y)-planen fra $(x_0,y_0) = (0,0)$ til et vilkårligt andet punkt $(x_1,y_1$ i (x,y)-planen:

$$\mathbf{r}(u) = (0,0) + u \cdot (x_1,y_1) = (u\,x_1, u\,y_1) \quad , \quad \text{hvor } u \in \,]0,1[\quad , \tag{16-6}$$

sådan at

$$\mathbf{r}'(u) = (x_1,y_1) \quad ,$$

$$\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}(u)) = (6ux_1 + 10u^7y_1^7,\; 21u^2y_1^2 + 70u^7x_1y_1^6) \quad , \tag{16-7}$$

$$\mathbf{r}'(u)\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}(u)) = 6ux_1^2 + 10u^7x_1y_1^7 + 21u^2y_1^3 + 70u^7x_1y_1^7 \quad .$$

Heraf får vi så ved at benytte (16-4), at

$$\begin{aligned} f(x_1,y_1) &= 0 + \int_0^1 \left(6ux_1^2 + 10u^7x_1y_1^7 + 21u^2y_1^3 + 70u^7x_1y_1^7\right) du \\ &= x_1^2 \int_0^1 6u\,du \;+\; 80x_1y_1^7 \int_0^1 u^7\,du \;+\; 21y_1^3 \int_0^1 u^2\,du \\ &= 3x_1^2 + 10x_1y_1^7 + 7y_1^3 \quad . \end{aligned} \tag{16-8}$$

Vi får derfor den rekonstruerede funktion:

$$f(x,y) = 3\,x^2 + 7\,y^3 + 10\,x\,y^7 \quad . \tag{16-9}$$

Vi kan for en ordens skyld gøre prøve og undersøge, om denne funktion faktisk er 0 i $(0,0)$ (det er den) og desuden har det korrekte gradientvektorfelt, som er givet ved ligning (16-5) (det har den).

|||| Opgave 16.6

En funktion $f(x,y)$ vides at være differentiabel i hele $\mathbb{R}^2$ med $f(1,0) = 1$ og

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = (\cos(y), -x\,\sin(y)) \quad . \tag{16-10}$$

Bestem $f(x,y)$ i ethvert (x,y).

16.1.1 Gradientvektorfelter

Gradientvektoren for en funktion af to variable $f(x,y)$ indeholder information om den lokale tilvækst af funktionen omkring ethvert punkt (x_0,y_0):

|||| Sætning 16.7 Gradienten udpeger retningen med størst tilvækst

Lad $f(x, y)$ betegne en funktion af to variable, der har en egentlig gradientvektor i et punkt (x_0, y_0), dvs. $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$. Der gælder så:

- Den retningsafledede $f'((x_0, y_0); \mathbf{e})$ af $f(x, y)$ i punktet (x_0, y_0) er *størst* i den retning $\mathbf{e}$ som er bestemt ved gradientvektoren $\nabla f(x_0, y_0)$, dvs. for

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_{max} = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x_0, y_0)|} \tag{16-11}$$

- Den retningsafledede $f'((x_0, y_0); \mathbf{e})$ af $f(x, y)$ er *mindst* i den retning som er bestemt ved minus gradientvektoren i punktet:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_{min} = -\frac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x_0, y_0)|} \tag{16-12}$$

- Den retningsafledede er 0 i hver af de to (niveaukurve-)retninger der er vinkelrette på gradientvektoren.

|||| Bevis

Vi lader $\mathbf{g}$ betegne den enhedsvektor, der angiver gradientens *retning*:

$$\mathbf{g} = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x_0, y_0)|} \quad . \tag{16-13}$$

Enhver (anden) enheds-retningsvektor $\mathbf{e}$ i planen kan derefter 'opløses' efter $\mathbf{g}$ på følgende måde

$$\mathbf{e} = \cos(\varphi) \cdot \mathbf{g} + \sin(\varphi) \cdot \mathbf{g}^{\perp} \quad , \tag{16-14}$$

hvor φ er vinklen mellem de to enhedsvektorer $\mathbf{e}$ og $\mathbf{g}$, og hvor $\mathbf{g}^{\perp}$ betegner den ortogonale (tvær-)vektor til $\mathbf{g}$. Så er den retningsafledede af $f(x, y)$ i punktet (x_0, y_0):

$$\begin{aligned}
f'((x_0, y_0); \mathbf{e}) &= \nabla f(x_0, y_0) \bullet \mathbf{e} \\
&= (|\nabla f(x_0, y_0)| \cdot \mathbf{g}) \bullet \mathbf{e} \\
&= (|\nabla f(x_0, y_0)| \cdot \mathbf{g}) \bullet \left(\cos(\varphi) \cdot \mathbf{g} + \sin(\varphi) \cdot \mathbf{g}^{\perp}\right) \\
&= |\nabla f(x_0, y_0)| \cdot \cos(\varphi) \cdot \left(\mathbf{g} \bullet \mathbf{g} + \mathbf{g} \bullet \mathbf{g}^{\perp}\right) \\
&= |\nabla f(x_0, y_0)| \cdot \cos(\varphi) \cdot (1 + 0) \\
&= |\nabla f(x_0, y_0)| \cdot \cos(\varphi) \quad .
\end{aligned} \tag{16-15}$$

Da $\cos(\varphi)$ er størst (med værdien 1) når $\varphi = 0$ (dvs. når $\mathbf{e}$ og $\mathbf{g}$ peger i *samme* retning) og da $\cos(\varphi)$ er mindst (med værdien -1) når $\varphi = \pi$ (dvs. når $\mathbf{e}$ og $\mathbf{g}$ peger i *modsatte* retninger), og da $\cos(\varphi)$ er 0 når $\varphi = \pi/2$ (dvs. når $\mathbf{e}$ og $\mathbf{g}$ er ortogonale retninger), så følger de tre påstande i sætningen. Den sidste påstand i sætningen kender vi allerede fra eNote 15 hvor vi så, at den retningsafledede er 0 i de retninger som står vinkelret på gradientvektoren.

∎

Hvis vi står i punktet (x_0, y_0) i (x, y)-planen og ønsker at flytte til nabo-punkter med *højere funktionsværdier* $f(x, y)$, så er det mest effektivt at gå i den retning, som gradienten af $f(x, y)$ udpeger i punktet, altså i retningen med enheds-retningsvektor $\nabla f(x_0, y_0)/|\nabla f(x_0, y_0)|$.

Hvis vi ønsker at flytte til nabo-punkter med *lavere funktionsværdier*, så er det mest effektivt at gå i den modsatte retning af gradienten i (x_0, y_0).

Hvis vi ønsker at bevæge os til nabopunkter med *samme funktionsværdi* $f(x_0, y_0)$ så skal vi blot gå langs den niveaukurve $\mathcal{K}_{f(x_0,y_0)}$ for $f(x, y)$ som går igennem (x_0, y_0) (!) – det svarer (lokalt) til at gå i en af de to (niveaukurve-) retninger, der er bestemt ved en vektor, som er *vinkelret* på gradientvektoren i punktet.

|||| Eksempel 16.8 Geometrisk analyse af en funktion af to variable

En funktion er givet ved

$$f(x, y) = 3 + 2\,\mathrm{e}^{-x^2-2y^2} \quad . \tag{16-16}$$

De partielle afledede af $f(x, y)$ i (x, y) er så

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= -4x\mathrm{e}^{-x^2-2y^2} \\ f'_y(x, y) &= -8y\mathrm{e}^{-x^2-2y^2} \quad . \end{aligned} \tag{16-17}$$

Gradientvektorfeltet er derfor

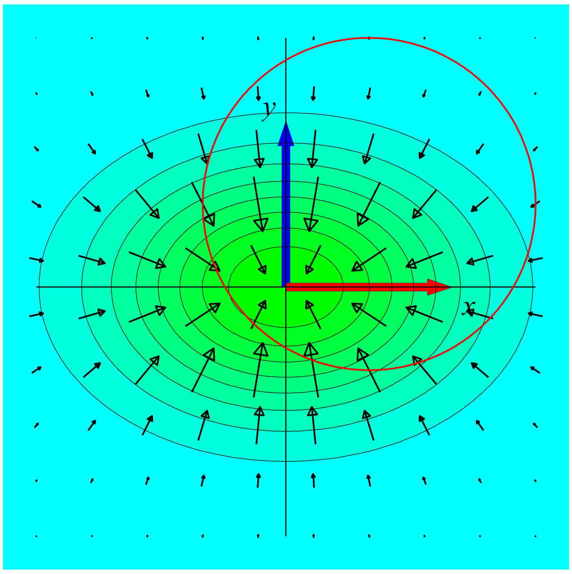
$$\nabla f(x, y) = \left(-4x\mathrm{e}^{-x^2-2y^2} \,,\; -8y\mathrm{e}^{-x^2-2y^2}\right) \quad . \tag{16-18}$$

Dette vektorfelt er skitseret i figur 16.1 sammen med niveaukurverne for $f(x, y)$ og sammen med en kurve (en cirkel) med parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u) = \left(\frac{1}{2} + \cos(u) \,,\; \frac{1}{2} + \sin(u)\right) \quad , \quad \text{hvor} \quad u \in]-\pi, \pi[\quad . \tag{16-19}$$

Bemærk, at gradientvektorfeltet overalt er vinkelret på niveaukurverne, og at de alle peger ind mod midten, hvor funktionsværdierne er størst – se grafen for funktionen i figur 16.2.

Bemærk også, at der på cirklen er præcis to punkter, hvor gradienten står vinkelret på cirklen. I de punkter har den sammensatte højde-funktion $h(u) = f(\mathbf{r}(u))$ derfor den afledede $h'(u) = 0$. Cirklen har i de punkter samme tangent som de respektive niveaukurver igennem de to punkter. Vi kan bestemme de to punkter på cirklen ved at bestemme de to værdier af u som løser ligningen $h'(u) = \nabla f(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) = 0$.



Figur 16.1: Niveaukurver og gradientvektorfelt for funktionen $f(x,y) = 3 + 2\,\mathrm{e}^{-x^2-2y^2}$.

|||| Opgave 16.9

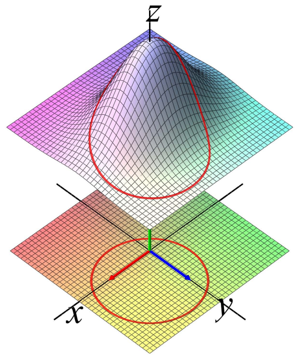
Bestem gradientvektorfelterne for følgende funktioner og skitser vektorfelterne ved at tegne et passende antal af gradientvektorerne $\nabla f(x_0, y_0)$ med forskellige fodpunkter (x_0, y_0) i (x,y)-planen:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= 3x + y \quad , \\
f(x,y) &= x^2 + y^2 \quad , \\
f(x,y) &= y \cdot \mathrm{e}^x \quad .
\end{aligned}
\tag{16-20}
$$

Hvis vi bevæger os på cirklen i (x,y)-planen i figur 16.1 (for eksempel i positiv omløbsretning) og samtidig holder øje med hvilke niveau-kurver der krydses undervejs vil vi kunne afgøre, om vi bevæger os mod stigende eller faldende funktionsværdier – dels ved at holde øje med farveskiftet og dels ved at se, om projektionen af gradientvektoren ind på bevægelsesretningen (den retningsafledede) er positiv eller negativ; hvis projektionen er positiv er vi på vej mod større funktionsværdier, hvis projektionen er negativ er vi på vej mod mindre funktionsværdier. Det samme kan naturligvis ses på grafen for funktionen, hvor det på ethvert sted på den løftede kurve er klart om vi er på vej opad eller nedad på graf-fladen.

16.2 Løftede kurver på graf-flader

Motiveret af graf-fladen med den løftede cirkel i figur 16.2 og motiveret af analysen i eksempel 16.8 vil vi nu helt generelt definere og undersøge løftede kurver:



Figur 16.2: Grafen i (x, y, z)-rummet for $f(x, y) = 3 + 2\,\mathrm{e}^{-x^2-2y^2}$.

|||| Definition 16.10 Løftede kurver

Vi lader $f(x, y)$ betegne en funktion af to variable og lader $\mathbf{r}(u)$ betegne en differentiabel parametriseret kurve i (x, y)-planen:

$$\mathbf{r}(u) = (p(u), q(u)) \quad , \quad \text{hvor } u \in \,]\alpha, \beta[\quad , \tag{16-21}$$

og hvor $p(u)$ og $q(u)$ betegner to differentiable funktioner af én variabel u.

Den ***løftede kurve*** som hører til den plane kurve $\mathbf{r}(u)$ defineres til at være følgende kurve i (x, y, z)-rummet:

$$\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{r}}(f) \quad : \quad \widetilde{\mathbf{r}}(u) = (p(u), q(u), f(p(u), q(u))) \quad , \quad \text{hvor } u \in \,]\alpha, \beta[\quad . \tag{16-22}$$

Den løftede kurve $\widetilde{\mathbf{r}}(u)$ er en rumlig kurve, som ligger på graf-fladen $\mathcal{G}(f)$ for funktionen $f(x, y)$.

Projektionen (lodret, langs z-aksen) af $\widetilde{\mathbf{r}}(u)$ på (x, y)-planen er naturligvis den plane kurve $\mathbf{r}(u)$.

De løftede kurver $\widetilde{\mathbf{r}}(u)$ har tangentvektorer og tangentlinjer i rummet – og de må jo afhænge dels af kurven $\mathbf{r}(u)$ i (x, y)-planen og dels af funktionen $f(x, y)$. Følgende udtryk fås direkte ud fra kædereglen for funktionen $f(x,y)$ langs kurven $\mathbf{r}(u)$ – dvs. kædereglen for den sammensatte funktion $h(u) = f(\mathbf{r}(u)) = f(p(u), q(u))$:

|||| Sætning 16.11 Tangenter for løftede kurver

Den u-afledede af den løftede kurve $\widetilde{\mathbf{r}}(u)$ er givet ved de u-afledede af de tre koordinatfunktioner:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{r}}'(u) &= \left(p'(u), q'(u), \frac{d}{du} f(p(u), q(u))\right) \\ &= (p'(u), q'(u), h'(u)) \\ &= (p'(u), q'(u), \nabla f(p(u), q(u)) \cdot (p'(u), q'(u))) \quad . \end{aligned} \tag{16-23}$$

Tangenten til den løftede kurve på graf-fladen for $f(x,y)$ er derfor bestemt ved følgende udtryk i et givet kurvepunkt $\widetilde{\mathbf{r}}(u_0) = (p(u_0), q(u_0), f(p(u_0), q(u_0)) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_{u_0} \; : \; \widetilde{\mathbf{T}}(t) &= \widetilde{\mathbf{r}}(u_0) + t \cdot \widetilde{\mathbf{r}}'(u_0) \\ &= (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \\ &\quad t \cdot (p'(u_0), q'(u_0), \nabla f(x_0, y_0) \cdot (p'(u_0), q'(u_0))) \quad , \end{aligned} \tag{16-24}$$

hvor parameteren t gennemløber hele $\mathbb{R}$.

16.2.1 Løftede koordinat-kurver

Koordinatkurverne i (x,y)-planen er de særligt simple kurver (rette linjer), som er parallelle med koordinatakserne. Igennem punktet (x_0, y_0) har vi følgende to:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(u) &= (u, y_0) \quad \text{hvor } u \in \mathbb{R} \quad , \\ \mathbf{r}_2(u) &= (x_0, u) \quad \text{hvor } u \in \mathbb{R} \quad . \end{aligned} \tag{16-25}$$

De har derfor også særligt simple løft til graf-fladen for en given funktion $f(x,y)$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{r}}_1(u) &= (u, y_0, f(u, y_0)) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad , \\ \widetilde{\mathbf{r}}_2(u) &= (x_0, u, f(x_0, u)) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad , \end{aligned} \tag{16-26}$$

med særligt simple u-afledede for ethvert u:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{r}}_1'(u) &= (1, 0, f_x'(u, y_0)) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad , \\ \widetilde{\mathbf{r}}_2'(u) &= (0, 1, f_y'(x_0, u)) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad . \end{aligned} \tag{16-27}$$

Tangenterne i punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ til de løftede koordinatkurver er derfor også rimeligt simple:

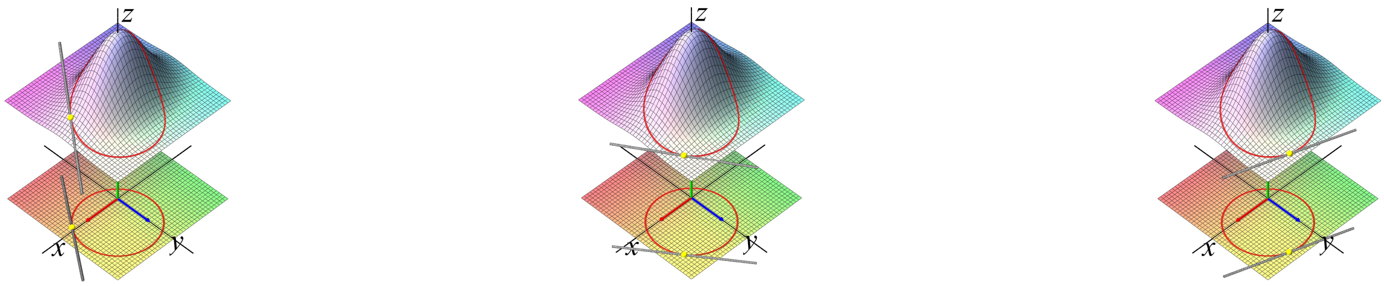
$$\begin{aligned} \widetilde{L}_1 \quad &: \quad (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t \cdot (1, 0, f_x'(x_0, y_0)) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ \widetilde{L}_2 \quad &: \quad (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t \cdot (0, 1, f_y'(x_0, y_0)) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{16-28}$$

|||| Opgave 16.12

Bestem (for ethvert punkt (x_0, y_0) i (x, y)-planen) tangenterne til de løftede koordinatkurver igennem graf-fladepunktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ for funktionerne:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3x + y \quad , \\ f(x,y) &= x^2 + y^2 \quad , \\ f(x,y) &= y \cdot e^x \quad . \end{aligned} \tag{16-29}$$

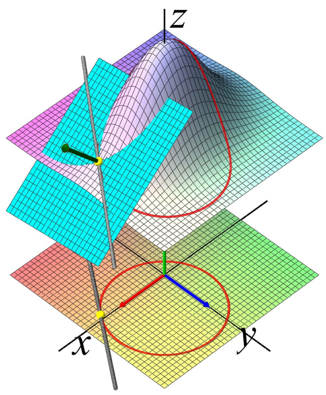
I figurerne 16.3 ses den løftede cirkel og graf-fladen for funktionen $f(x, y)$ fra eksempel 16.8. Den løftede kurves tangenter er indtegnet i et par udvalgte punkter. Bemærk, at de rumlige tangenter til den løftede kurve projicerer ned på de tilsvarende tangenter til cirklen i (x, y)-planen – som det også følger af ligning (16-24).



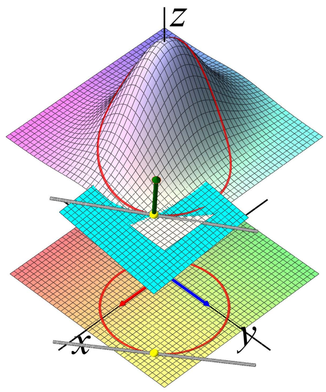
Figur 16.3: Grafen for $f(x, y) = 3 + 2\,e^{-x^2-2y^2}$ med udvalgte tangenter til en løftet cirkel.

Graf-fladens tangentplan i et givet punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ er jo selv graf-fladen for det approksimerende første-gradspolynomium for $f(x, y)$ med udviklingspunktet (x_0, y_0) og er derfor uafhængig af hvilken kurve vi måtte finde på at løfte op på graf-fladen igennem punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$! Ikke desto mindre ser det i figurerne ud til, at *kurvens tangenter* ligger helt indeholdt i de respektive tangentplaner.

Den inspektion giver derfor anledning til følgende formodning, som vi vil vise rigtigheden af i sætning 16.13 nedenfor: Enhver tangent til enhver løftet kurve igennem et givet punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ligger i tangentfladen for $f(x, y)$ i punktet. Og omvendt: Enhver ret linje i tangentplanen som går igennem punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ er tangent til en eller anden løftet kurve som går igennem punktet.



Figur 16.4: Grafen for $f(x, y) = 3 + 2\,\mathrm{e}^{-x^2-2y^2}$ og tangentplanen igennem et udvalgt punkt på den løftede cirkel, se figur 16.2.



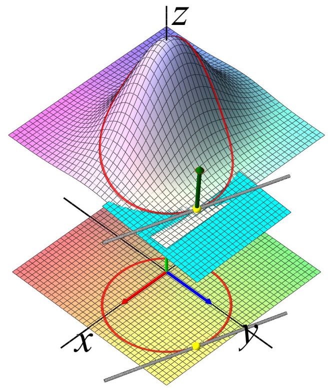
Figur 16.5: Grafen for $f(x,y) = 3 + 2\,\mathrm{e}^{-x^2-2y^2}$ og tangentplanen igennem et andet udvalgt punkt på den løftede cirkel, se figur 16.2.

|||| Sætning 16.13 Tangenterne ligger i tangentplanen

Lad $f(x,y)$ være en differentiabel funktion af to variable og lad $\widetilde{\mathbf{r}}(u)$ betegne en løftet kurve igennem punktet $\widetilde{\mathbf{r}}(u_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ på graf-fladen $\mathcal{G}(f)$. Så er tangenten til den løftede kurve indeholdt i tangentplanen til $\mathcal{G}(f)$ for $f(x,y)$.

Med andre ord: Ethvert punkt (x,y,z) som ligger på tangenten $\widetilde{L}_{u_0}$ tilfredsstiller også tangentplanens ligning:

$$z = P_{1,(x_0,y_0)}(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \quad . \tag{16-30}$$



Figur 16.6: Grafen for $f(x,y) = 3 + 2\,\mathrm{e}^{-x^2-2y^2}$ og tangentplanen igennem et tredje udvalgt punkt på den løftede cirkel, se figur 16.2.

|||| Bevis

Vi skal blot indse, at tangentvektoren $\widetilde{\mathbf{r}}'(u_0)$ er vinkelret på en normalvektor til tangentplanen. En sådan normalvektor konstrueres i næste afsnit (se nedenfor):

$$\mathbf{N}_{(x_0,y_0)}(f) = (-f'_x(x_0,y_0), -f'_y(x_0,y_0), 1) \quad , \tag{16-31}$$

og da

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{r}}'(u_0) &= \big(p'(u_0), q'(u_0), \boldsymbol{\nabla} f(p(u_0), q(u_0)) \cdot (p'(u_0), q'(u_0))\big) \\ &= \Big(p'(u_0), q'(u_0), \Big(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)\Big) \cdot (p'(u_0), q'(u_0))\Big) \quad , \end{aligned} \tag{16-32}$$

får vi ortogonaliteten ved at beregne skalarproduktet:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{r}}'(u_0) \cdot \mathbf{N}_{(x_0,y_0)}(f) &= -f'_x(x_0,y_0) \cdot p'(u_0) - f'_y(x_0,y_0) \cdot q'(u_0) \\ &\qquad + 1 \cdot \Big(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)\Big) \cdot (p'(u_0), q'(u_0)) \\ &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{16-33}$$

■

16.3 Gradienten bestemmer normalvektoren

En plan i rummet med ligningen

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0 \tag{16-34}$$

har en normalvektor $\mathbf{N} = (a, b, c)$ som altså fås direkte fra koefficienterne til x, y, og z i ligningen. Vi kan nu skrive ligningen for tangentplanen for graf-fladen for $f(x, y)$ i punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)$ på netop den form således:

$$\begin{aligned}
&z = P_{1,(x_0,y_0)}(x, y) \quad , \\
&z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \quad , \\
&\text{som er ækvivalent med:} \\
&- f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) - f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + z - f(x_0, y_0) = 0 \quad , \\
&\text{og dermed:} \\
&- f'_x(x_0, y_0) \cdot x - f'_y(x_0, y_0) \cdot y + z + d = 0 \quad ,
\end{aligned} \tag{16-35}$$

hvor $d = x_0 \cdot f'_x(x_0, y_0) + y_0 \cdot f'_y(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)$.

Normalvektoren til tangentplanen aflæses direkte af den sidste ligning i (16-35):

$$\mathbf{N}_{(x_0,y_0)}(f) = (-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1) \quad . \tag{16-36}$$

En normalvektor til tangentplanen for graf-fladen for $f(x, y)$ kan altså 'bygges' af de samme ingredienser som gradienten til $f(x, y)$ – de partielle afledede. Læg dog mærke til minusserne og 1-tallet. Og bemærk, at gradienten er en vektor i planen, normalvektoren er en vektor i rummet.

En alternativ udledning af normalvektorens koordinater fås på følgende måde: Hvis vi kan finde to lineært uafhængige vektorer i tangentplanen, så er deres krydsprodukt en normalvektor til planen.

Vi kender altid to *lineært uafhængige vektorer i tangentplanen* igennem $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, nemlig tangentvektorerne til de løftede koordinatkurver igennem punktet, dvs.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{r}}'_1(x_0) &= (1, 0, f'_x(x_0, y_0)) \quad , \\
\widetilde{\mathbf{r}}'_2(y_0) &= (0, 1, f'_y(x_0, y_0)) \quad .
\end{aligned} \tag{16-37}$$

En normalvektor til tangentplanen er derfor

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{(x_0,y_0)}(f) &= \widetilde{\mathbf{r}}'_1(x_0) \times \widetilde{\mathbf{r}}'_2(y_0) \\
&= (-f'_x(x_0, y_0) \, , \, -f'_y(x_0, y_0), 1)
\end{aligned} \tag{16-38}$$

- altså præcis den samme normalvektor som fundet ovenfor.

De to tangentvektorer $\widetilde{\mathbf{r}}'_1(x_0)$ og $\widetilde{\mathbf{r}}'_2(y_0)$ giver os ligeledes en ***parameterfremstilling for tangentplanen***:

|||| Sætning 16.14 Parameterfremstilling for tangentplaner

Tangentplanen igennem punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ på graf-fladen $\mathcal{G}(f)$ for funktionen $f(x, y)$ har parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(x_0,y_0)}(f) \ : \ \mathbf{T}(t_1, t_2) &= (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t_1 \cdot \widetilde{\mathbf{r}}'_1(x_0) + t_2 \cdot \widetilde{\mathbf{r}}'_2(y_0) \\ &= (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t_1 \cdot (1, 0, f'_x(x_0, y_0)) + t_2 \cdot (0, 1, f'_y(x_0, y_0)) \ , \end{aligned} \tag{16-39}$$

hvor $t_1 \in \mathbb{R}$ og $t_2 \in \mathbb{R}$.

|||| Eksempel 16.15 Løftede koordinatkurver

Enhedsnormalvektoren i retningen $\mathbf{N}$ til de tangentplaner, der er vist i figurerne 16.4, 16.5, 16.6 er også indtegnet på de figurer. Desuden ses koordinatkurverne i (x, y)-planen samt de løftede koordinatkurver på graf-fladerne, dels for funktionen $f(x, y)$ og dels for de respektive approksimerende førstegradspolynomier (tangentplanerne).

|||| Eksempel 16.16 Funktioner af én variabel

Enhver funktion af én variabel kan betragtes som en funktion af to variable. Vi må forvente, at niveau-kurverne, gradientvektorfelterne, tangentplanerne, etc. er forholdsvis simple for sådanne funktioner. Vi ser på nogle eksempler, der viser det:

1. Funktionen $f(x, y) = x^2$ har følgende gradientfelt, tangentplaner, og normalvektorer:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} f(x, y) &= (2x, 0) \quad , \\ \mathcal{T}_{(x_0,y_0)}(f) \quad : \quad \mathbf{T}(t_1, t_2) &= (x_0 + t_1 \ , \ y_0 + t_1 \cdot 2x_0 + t_2 \ , \ x_0^2) \quad , \\ \mathbf{N}_{(x_0,y_0)}(f) &= (-2x_0, 0, 1) \quad . \end{aligned} \tag{16-40}$$

   Se figur 16.7 hvor niveu-kurverne, gradientvektorfeltet, og graf-fladen er vist for funktionen.

2. Funktionen $f(x, y) = x^3$ har

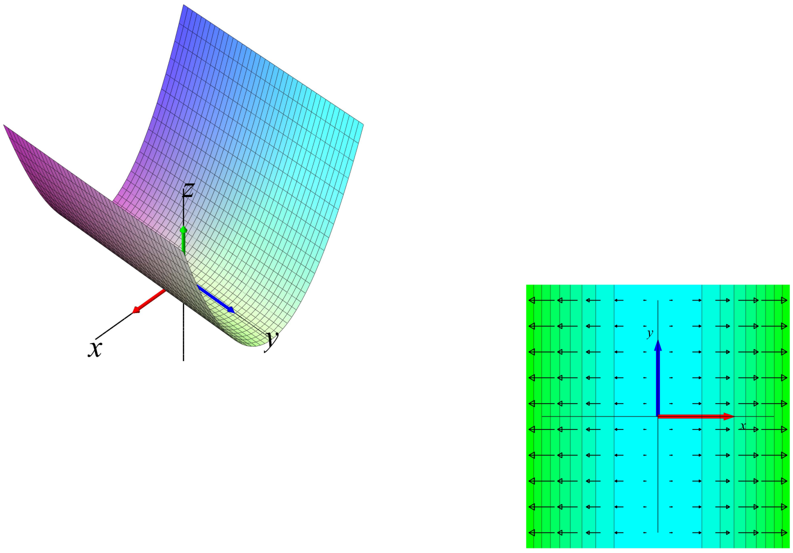
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} f(x, y) &= (3x^2, 0) \quad , \\ \mathcal{T}_{(x_0,y_0)}(f) \quad : \quad \mathbf{T}(t_1, t_2) &= (x_0 + t_1 \ \ y_0 + t_1 \cdot 3x_0^2 + t_2 \, . \ x_0^3) \quad , \\ \mathbf{N}_{(x_0,y_0)}(f) &= (-3x_0^2, 0, 1) \quad . \end{aligned} \tag{16-41}$$

   Se figur 16.8 hvor kun niveu-kurverne og gradientvektorfeltet er vist. Sammenlign med niveaukurver og gradientvektorfeltet for $f(x, y) = x^2$ i figur 16.7.

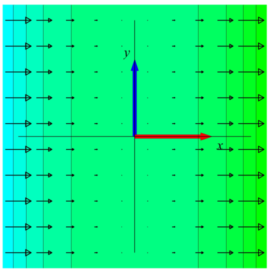
3. Funktionen $f(x, y) = \cos(3x)$ har

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} f(x, y) &= (-3\sin(3x), 0) \quad , \\ \mathcal{T}_{(x_0,y_0)}(f) \quad : \quad \mathbf{T}(t_1, t_2) &= (x_0 + t_1 \ , \ y_0 - t_1 \cdot 3\sin(x_0) + t_2 \ , \ \cos(3x_0)) \quad , \\ \mathbf{N}_{(x_0,y_0)}(f) &= (3\sin(3x_0), 0, 1) \quad . \end{aligned} \tag{16-42}$$

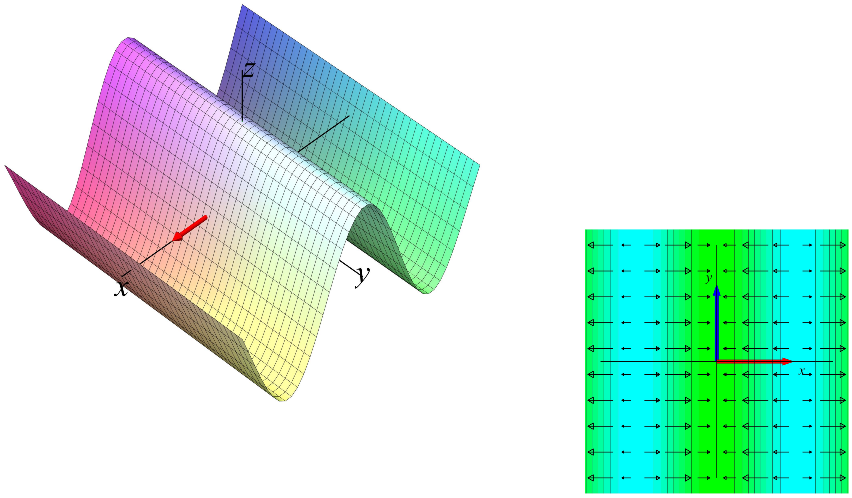
Se figur 16.9. Sammenlign med figur 16.10. Inspektion af grafen og af niveaukurverne for funktionen i 16.10 leder til den ide, at man måske ved at dreje koordinatsystemet – og dermed skifte koordinater i planen – også kan beskrive den funktion som en funktion af én variabel. Det er da også tilfældet, idet den viste funktion er $f(x, y) = \cos(3x + 3y)$.



Figur 16.7: Grafen for $f(x, y) = x^2$ samt tilhørende niveaukurver og gradientvektorfelt i (x, y)-planen.



Figur 16.8: Niveaukurver og gradientvektorfelt for $f(x, y) = x^3$.

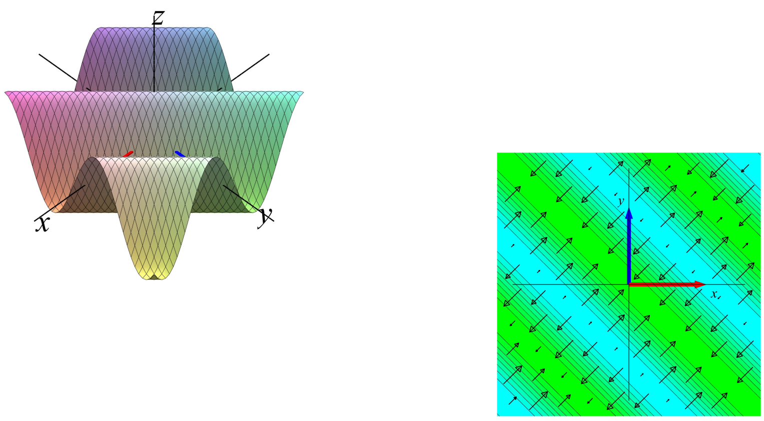


Figur 16.9: Grafen, niveaukurver, og gradientvektorfelt for $f(x, y) = \cos(3x)$.

|||| Opgave 16.17

Bestem enheds-normalvektoren til tangentplanerne igennnem punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)$ på graf-fladerne for enhver af følgende funktioner for ethvert punkt (x_0, y_0) i (x, y)-planen.

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= 3x + y \\
f(x, y) &= x^2 + y^2 \\
f(x, y) &= y \cdot e^x \quad .
\end{aligned}
\tag{16-43}
$$



Figur 16.10: Grafen, niveaukurver, og gradientvektorfelt for $f(x, y) = \cos(3x + 3y)$.

16.4 Opsummering

De partielle afledede af en funktion af to variable har forskellige geometriske iklædninger, som er særdeles nyttige at bruge ved beskrivelse og analyse af funktionerne. Gradientvektorfeltet – der jo har de partielle afledede som koordinatfunktioner – indeholder (næsten) al information om funktionen. I denne eNote har vi arbejdet med følgende:

- Gradienten udpeger i ethvert punkt den retning hvori funktionen lokalt vokser mest og den (modsatte) retning hvori funktionen aftager mest.
- Længden af gradienten for $f(x,y)$ i punktet $(x_0,y_0))$ er værdien af den største retningsafledede af $f(x,y)$ i punktet, og den tilsvarende negative værdi er værdien af den mindste retningsafledede i punktet.
- Gradientvektorfeltet for $f(x,y)$ er overalt ortogonal på niveaukurverne for $f(x,y)$.
- De løftede kurver på graf-fladen for en funktion har tangenter, der er helt indeholdt i tangentplanen til graf-fladen.
- Tangentplanen til graf-fladen for funktionen $f(x,y)$ i et givet punkt $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ har en normalvektor, der er 'bygget' op af de partielle afledede:

$$\mathbf{N}_{(x_0,y_0)}(f) = (-f'_x(x_0,y_0)\,,\ -f'_y(x_0,y_0),1) \quad .$$

- Tangentplanen til graf-fladen for funktionen $f(x,y)$ i et givet punkt $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ er repræsenteret dels ved ligningen

$$z = P_{1,(x_0,y_0)}(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

  og dels ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{(x_0,y_0)}(f)\ :\ \mathbf{T}(t_1,t_2) &= (x_0,y_0,f(x_0,y_0)) + t_1\cdot\widetilde{\mathbf{r}}'_1(x_0) + t_2\cdot\widetilde{\mathbf{r}}'_2(y_0)\\ &= (x_0,y_0,f(x_0,y_0)) + t_1\cdot(1,0,f'_x(x_0,y_0)) + t_2\cdot(0,1,f'_y(x_0,y_0))\ ,\end{aligned}$$

  hvor $t_1 \in \mathbb{R}$ og $t_2 \in \mathbb{R}$.

eNote 29

Komplekse tal

I denne eNote introduceres og undersøges talmængden $\mathbb{C}$, de komplekse tal. Da $\mathbb{C}$ betragtes som en udvidelse af $\mathbb{R}$ forudsætter eNoten almindeligt kendskab til de reelle tal, herunder de elementære reelle funktioner som de trigonometriske funktioner og den naturlige eksponentialfunktion. Kendskab til vektorer i planen vil også være en fordel.

29.1 Indledning

En binom andengradsligning som
$$x^2 = 25$$
har to reelle løsninger, nemlig
$$x = 5 \;\text{ og }\; x = -5$$
idet
$$5^2 = 25 \;\text{ og }\; (-5)^2 = 25\,.$$
På tilsvarende vis har ligningen
$$x^2 = 2$$
to løsninger, nemlig
$$x = \sqrt{2} \;\text{ og }\; x = -\sqrt{2}$$
idet
$$\sqrt{2}^{\,2} = 2 \;\text{ og }\; (-\sqrt{2})^{\,2} = 2\,.$$
Med ligningen
$$x^2 = k\,,\;\; k \in \mathbb{R}$$
skal vi passe mere på, her afhænger alt nemlig af fortegnet på k . Hvis $k \geq 0$ har ligningen løsningerne
$$x = \sqrt{k} \;\text{ og }\; x = -\sqrt{k}$$
idet
$$\sqrt{k}^{\,2} = k \;\text{ og }\; (-\sqrt{k})^{\,2} = k\,.$$

Men hvis $k < 0$, har ligningen ingen løsninger, da der ikke findes reelle tal hvis kvadrat er negativt.

Men nu stiller vi os det spørgsmål, om man kunne forestille sig en større mængde af tal end de reelle, en mængde der indeholder alle de reelle reelle tal og derudover også løsninger på en ligning som

$$x^2 = -1\,.$$

Ligningen måtte da i analogi med de ovenstående ligninger have to løsninger

$$x = \sqrt{-1} \;\text{ og }\; x = -\sqrt{-1}\,.$$

Lad os være dristige og antage at dette faktisk er muligt, og kalde tallet $\sqrt{-1}$ for i. Ligningen

$$x^2 = -1$$

har da to løsninger, nemlig

$$x = i \;\text{ og }\; x = -i$$

idet

$$i^2 = \sqrt{-1}^{\,2} = -1 \;\text{ og }\; (-i)^2 = (-\sqrt{-1}\,)^2 = -1\,.$$

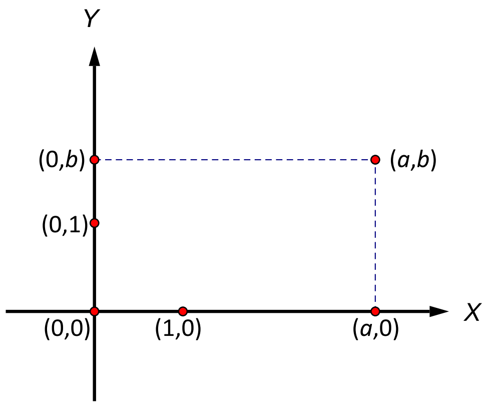
Vi stiller nu det ekstra krav til det hypotetiske tal i at man skal kunne regne med det efter de samme regneregler som gælder de reelle tal. Man skal for eksempel kunne gange i med et reelt tal b og lægge denne størrelse til et andet reelt tal a til. Herved opstår en ny slags tal z af typen

$$z = a + ib\;,\;\;(a,b) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Nedenfor beskriver vi hvordan de nævnte ambitioner kan imødekommes. Vi ser på hvordan strukturen af en sådan større talmængde må være, og hvilke lovmæssigheder den indeholder. Talmængden kalder vi *de komplekse tal* og giver den symbolet $\mathbb{C}$. Der skal altså gælde at $\mathbb{R}$ er en ægte delmængde af $\mathbb{C}$. Som allerede antydet må $\mathbb{C}$ være *to-dimensional*!

29.2 Indføring af komplekse tal

I det følgende vil vi betragte ethvert talpar $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ som et tal, et *komplekst* tal. Geometrisk vil det sige at der til ethvert punkt i (x,y)-planen svarer et unikt komplekst tal. På figur 29.1 er vist seks punkter, det vil sige seks komplekse tal.



Figur 29.1: Seks komplekse tal i (x, y)-planen.

Vi vil nu ændre skrivemåden for de komplekse tal, idet vi indsætter dem i den komplekse talplan hvis førsteakse vi kalder *realaksen* og andenakse for *imaginæraksen*. Ændringen gennemføres således:

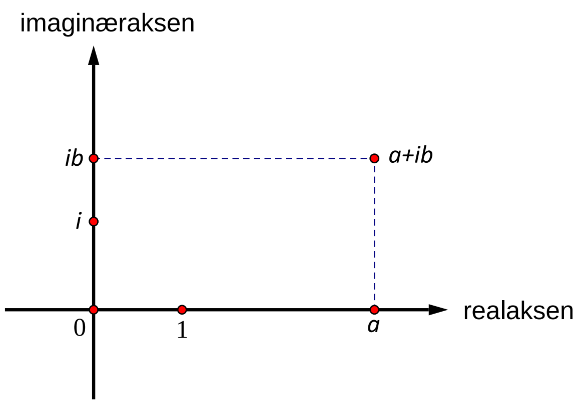
1. Alle komplekse tal af typen $(a, 0)$, det vil sige de tal der ligger på realaksen, skrives som a .

2. Det komplekse tal $(0, 1)$ skrives som i . Bogstavet i kaldes den *imaginære* enhed.

3. Alle komplekse tal af typen $(0, b)$, det vil sige de tal der ligger på imaginæraksen, skrives som $i \cdot b$ eller alternativt $b \cdot i$. Ofte udelades gangetegnet, så der blot skrives ib eller bi. Hvis $b = 0$, er $ib = 0$.

4. Alle komplekse tal af typen (a, b) skrives som $a + i \cdot b$ eller alternativt $a + b \cdot i$. Også her kan gangetegnet udelades.

På figur 29.2 ses en opdatering af situationen fra figur 29.1 med de nævnte ændringer.



Figur 29.2: Seks komplekse tal i den komplekse talplan.

|||| Definition 29.1 Komplekse tals rektangulære form

Ved et komplekst tal z forstås et talpar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Mængden af komplekse tal betegnes $\mathbb{C}$.

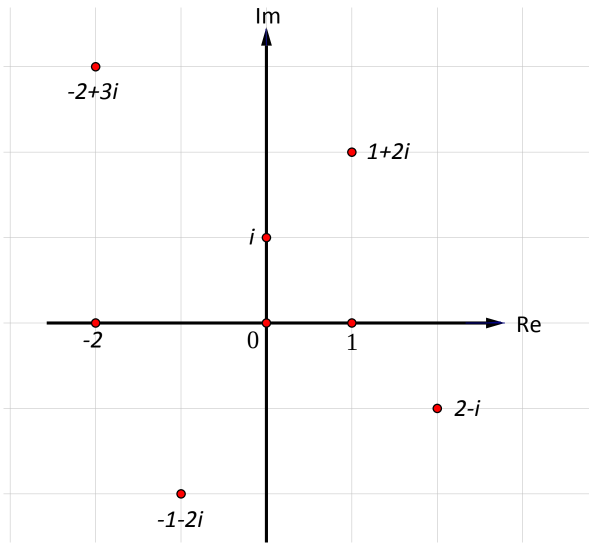
Det komplekse tal $(0, 1)$ tildeles symbolet i.

Standardskrivemåden for det komplekse tal $z = (a, b)$ er $z = a + ib$ eller alternativt $z = a + bi$. Den kaldes det komplekse tals *rektangulære* form.

Bemærk følgende forkortede skrivemåder: $(a, 0)$ skrives blot som a og $(0, b)$ som $ib = bi$. Endvidere: $0i = i0 = 0$, $1i = i1 = i$, $(-1)i = i(-1) = -i$ og for $k > 0$: $(-k)i = i(-k) = -ik = -ki$.

|||| Eksempel 29.2 Den komplekse talplan

Vi indsætter de komplekse tal -2, 0, 1, i, $2 - i$, $1 + 2i$, $-2 + 3i$ og $-1 - 2i$ i den komplekse talplan:



Figur 29.3: Eksempler på komplekse tal

|||| Definition 29.3 Realdel og Imaginærdel

Ved *realdelen* af det komplekse tal $z = (a, b)$ forstås det reelle tal

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(a + ib) = a\,, \tag{29-1}$$

og ved *imaginærdelen* forstås det reelle tal

$$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(a + ib) = b\,. \tag{29-2}$$

Ethvert komplekst tal z kan opskrives på rektangulær form således

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)\,.$$

|||| Eksempel 29.4 Realværdi og Imaginærværdi

Tre komplekse tal er givet ved:

$$z_1 = 3 - 2i\,,\; z_2 = i5\,, z_3 = 25 + i\,.$$

Vi finder realdelen og imaginærdelen af tallene:

$$\mathrm{Re}(z_1) = 3\,, \mathrm{Im}(z_1) = -2\,, \mathrm{Re}(z_2) = 0\,, \mathrm{Im}(z_2) = 5\,, \mathrm{Re}(z_3) = 25\,, \mathrm{Im}(z_3) = 1\,. \tag{29-3}$$

29.3 Regning med komplekse tal

Det karakteristiske ved de størrelser vi kalder tal, er at vi kan regne med dem i overensstemmelse med de fire klassiske regningsarter (addition, subtraktion, multiplikation og division). Vi må derfor definere disse regningsarter for de komplekse tal og starter med at indføre sum og differens.

|||| Definition 29.5 Sum og differens af komplekse tal

Lad $z_1 = a + ib$ og $z_2 = c + id$, hvor a, b, c og d er reelle tal.

Summen $z_1 + z_2$ defineres ved

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)\,. \tag{29-4}$$

Differensen $z_1 - z_2$ defineres ved

$$z_1 - z_2 = (a - c) + i(b - d)\,. \tag{29-5}$$

En stor fordel ved $a + ib$ formen af komplekse tal er at man ikke behøver huske formlerne i definition 29.5! Men kan nemlig addere og subtrahere komplekse tal på samme måde som reelle tal, når blot i behandles efter de samme regler som ville gælde en reel konstant. Den indførte sum kan nemlig udregnes ved "sædvanlige" regneregler således:

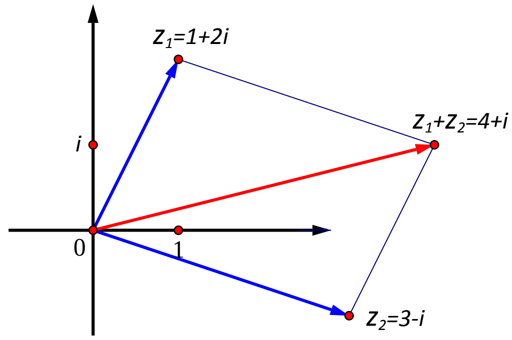
$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + (ib + id) = (a + c) + i(b + d),$$

og den indførte differens tilsvarende:

$$z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + (ib - id) = (a - c) + i(b - d)\,.$$

|||| Eksempel 29.6

Det bemærkes at addition og subtraktion i den komplekse talplan svarer til addition og subtraktion af vektorer i planen. I figur 29.4 er et eksempel på addition ved parallelogram-metoden:



Figur 29.4: Addition ved parallelogram-metoden

|||| Definition 29.7 Multiplikation af komplekse tal

Vi definerer først kvadratet på den imaginære enhed i:

$$i^2 = i \cdot i = -1 \,.$$

Lad $z_1 = a + ib$ og $z_2 = c + id$.

Produktet $z_1\, z_2$ defineres ved

$$z_1\, z_2 = z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)\,. \tag{29-6}$$

Bemærk at man strengt taget ikke behøver huske formel (29-6). Vi kan multiplicere komplekse tal på samme måde som reelle tal, når blot i behandles efter de samme regler som ville gælde en reel konstant, og det huskes at $i^2 = -1$. Det indførte produkt kan nemlig udregnes ved "sædvanlige" regneregler således:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2 bd \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc)\,. \end{aligned}$$

|||| Definition 29.8 Division af komplekse tal

Lad $z_1 = a + ib$ og $z_2 = c + id$, hvor ikke både c og d er lig med 0.

Brøken $\dfrac{z_1}{z_2}$ defineres ved

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,. \tag{29-7}$$

Heller ikke ved division behøver man huske formlen. Division af komplekse tal kan udføres ved hjælp af "sædvanlige" regneregler for reelle tal, når blot i behandles efter de samme regler som ville gælde en reel konstant, og det huskes at $i^2 = -1$. Den indførte division (29-7) kan nemlig udregnes således:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} &= \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} \\ = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,.\end{aligned}$$

Efter indføringen af de fire sædvanlige regnearter for komplekse tal, kan vi nu præcisere sammenhængen mellem de reelle tal og de komplekse. Da vi har valgt at skrive tal på formen $a + i0$ som a , ligner alle de komplekse tal der ligger på realaksen, almindelige reelle tal. Realaksen er simpelthen en almindelig reel talakse. De regnearter vi har indført for komplekse tal, stemmer for alle tal på realaksen overens med de sædvanlige regnearter for reelle tal. Lad os eksemplificere dette med multiplikation.

To komplekse tal er på rektangulær form givet ved a og c . Vi udregner deres produkt ved hjælp af (29-6):

$$a \cdot c = (a + i \cdot 0)(c + i \cdot 0) = (a \cdot c - 0 \cdot 0) + i(a \cdot 0 + 0 \cdot c) = a \cdot c + i \cdot 0 = a \cdot c\,.$$

På tilsvarende vis vises at de indførte definitioner på kompleks addition, subtraktion og division på realaksen stemmer overens med de reelle.

Derfor kan de komplekse tal betragtes som en *udvidelse* eller *generalisering* af de reelle tal.

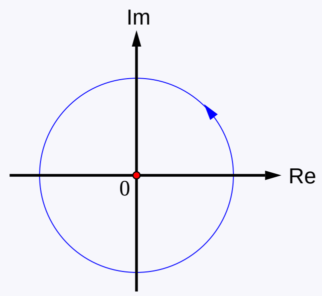
29.4 Polære koordinater

Den oplagte måde at angive et punkt i et sædvanligt (x, y)-koordinatsystem på, er naturligvis punktets rektangulære koordinater. I mange situationer er det imidlertid nyttigt at kunne bestemme et punkt ved dets *polære koordinater*, som består af punktets afstand til Origo samt punktets *retningsvinkel* fra x-aksen til forbindelseslinjen mellem Origo og punktet, idet den regnes positiv hvis den udmåles mod uret, og negativ hvis den udmåles med uret.

I det følgende indfører vi på tilsvarende vis polære koordinater for komplekse tal. Lad os først præcisere en orientering af den komplekse talplan:

|||| Definition 29.9 Orientering af den komplekse talplan

Orientering af den komplekse talplan fastlægges ved at en cirkel med centrum i tallet 0 gennemløbes *mod uret*.



Figur 29.5: Den komplekse talplans orientering

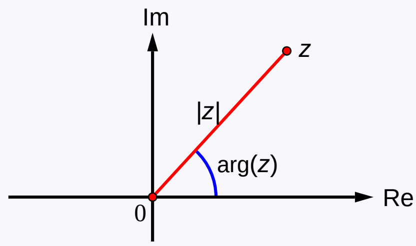
Ingredienserne i polære koordinater for et komplekst tal er tallets absolutværdi og tallets argument. Dem indfører vi nu.

|||| Definition 29.10 Absolutværdi og argument

Givet et komplekst tal z .

Ved *absolutværdien* af z forstås afstanden fra Origo til z . Absolutværdien skrives $|\,z\,|$ og kaldes også for z's *modulus* eller *numeriske værdi*.

Antag $z \neq 0$. Enhver vinkel fra realaksens positive del til forbindelseslinjen mellem Origo og z kaldes et *argument* for z og betegnes $\arg(z)$. Vinklen regnes med fortegn i overensstemmelse med orienteringen af den komplekse talplan.



Figur 29.6: Absolutværdi og argument

Et sammenhørende par

$$(\,|\,z\,|\,,\arg(z)\,)$$

af absolutværdien af z og et argument for z kaldes for *polære koordinater* for z .

Bemærk at argumentet for et tal z ikke er entydigt. Hvis man for eksempel til et valgt argument for z lægger vinklen 2π , opnår man igen en gyldig retningsvinkel for halvlinjen fra 0 til z og dermed et nyt argument for tallet. Således ses at z har uendeligt mange argumenter.

Man kan imidlertid altid vælge et argument for z som ligger i intervallet fra $-\pi$ til π. Der er tradition for at give dette argument en fortrinsstilling, det kaldes for tallets hovedargument.

|||| Definition 29.11 Hovedargument

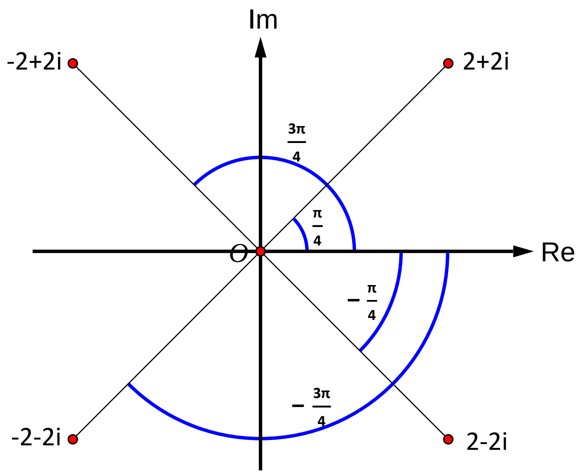
Ved *hovedargumentet* for $z \in \mathbb{C}$ forstås det entydigt bestemte argument for z som opfylder

$$\arg(z) \in \,]-\pi,\pi\,]\,.$$

Hvis v_o er hovedargumentet for z , så er samtlige argumenter for z fastlagt ved

$$\arg(z) = v_o + p\cdot 2\pi\ ,\ p\in\mathbb{Z}\,. \tag{29-8}$$

|||| Eksempel 29.12 Hovedargument



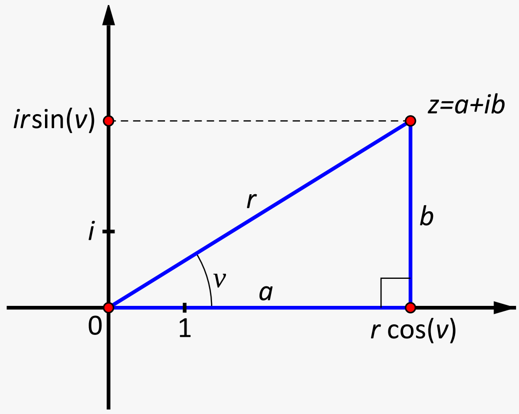
Figur 29.7: Hovedargumenter

På figuren er angivet fire komplekse tal som ligger på vinkelhalveringslinjer mellem akserne. Deres hovedargumenter aflæses umiddelbart: $2+2i$ har hovedargumentet $\frac{\pi}{4}$, $2-2i$ har hovedargumentet $-\frac{\pi}{4}$, $-2+2i$ har hovedargumentet $\frac{3\pi}{4}$, og endelig har $-2-2i$ hovedargumentet $-\frac{3\pi}{4}$.

Vi har nu to forskellige fremgangsmåder til rådighed til beskrivelse af komplekse tal. Et komplekst tal kan angives på rektangulær form eller ved hjælp af dets polære koordinater. I metode 29.13 demonstreres det hvordan man kan veksle mellem de to fremgangsmåder.

|||| Metode 29.13 Rektangulære og polær koordinater

Vi betragter et komplekst tal $z \neq 0$ med rektangulær form $z = a + ib$. Antag videre at z har absolutværdien $|z| = r$ og et argument $\arg(z) = v$:



Figur 29.8: Omformning af koordinater

1. Rektangulær form fås ud fra de polære koordinater således:

$$a = r\cos(v) \;\text{ og }\; b = r\sin(v)\,. \tag{29-9}$$

2. Absolutværdien fås ud fra den rektangulære form således:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\,. \tag{29-10}$$

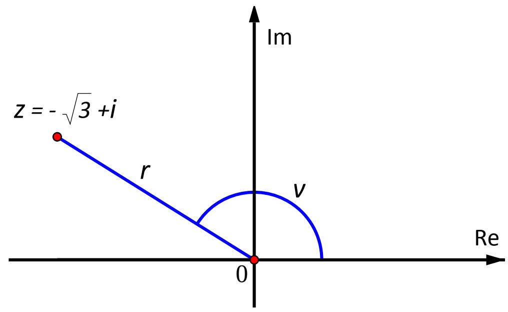
3. Et argument fås ud fra den rektangulære form således:

$$\cos(v) = \frac{a}{r} \;\text{ og }\; \sin(v) = \frac{b}{r}\,. \tag{29-11}$$

NB: Når z som på figuren i metode 29.13 er tegnet i 1. kvadrant, er det oplagt at regel (29-9) og (29-11) kommer fra velkendte sætninger om cosinus og sinus til spidse vinkler i retvinklede trekanter og (29-10) fra Pythagoras' sætning. Med de samme sætninger kan det vises at de indførte metoder gælder uanset hvilken kvadrant z ligger i.

|||| Eksempel 29.14 Fra rektangulær til polær form

Vi vil finde de polære koordinater for tallet $z = -\sqrt{3} + i$ ved hjælp af metode 29.13.



Figur 29.9: Bestemme polære koordinater

Vi bestemmer først absolutværdien:

$$r = |\,z\,| = \sqrt{(-\sqrt{3})^{\,2} + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2\,.$$

Ud fra ligningen

$$\cos(v) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

får vi to bud på et hovedargument for z, nemlig

$$v = \frac{5\pi}{6} \;\text{ og }\; v = -\frac{5\pi}{6}\,.$$

På figuren kan vi aflæse at figuren ligger i 2. kvadrant, og at det korrekte hovedargument må være det førstnævnte. Men dette kan også fastlægges uden inspektion af figuren, idet også ligningen

$$\sin(v) = \frac{1}{2}$$

skal være opfyldt. Fra denne får vi også to bud på et hovedargument for z, nemlig

$$v = \frac{\pi}{6} \;\text{ og }\; v = \frac{5\pi}{6}\,.$$

Da kun $v = \frac{5\pi}{6}$ opfylder begge ligninger, ser vi at $\arg(z) = \frac{5\pi}{6}$.

Hermed har vi fundet det polære koordinatsæt for z:

$$(r, v) = \big(|\,z\,|, \arg(z)\,\big) = \big(2, \frac{5\pi}{6}\big)\,.$$

Multiplikation og division af to komplekse tal på rektangulær form er lidt omstændelig som det fremgår af definition 29.7. Og endnu værre bliver det når man skal opløfte komplekse tal til høje potenser. Men hvis man benytter sig af tallenes polære form, viser det sig at disse regnearter bliver overraskende enkle. Til dette får vi brug for regneregler for absolutværdi og argument, regneregler som også er interessante i sig selv.

|||| Sætning 29.15 Regneregler for absolutværdi

Absolutværdien for produktet af to komplekse tal z_1 og z_2 fås ved

$$|\,z_1 \cdot z_2\,| = |\,z_1\,| \cdot |\,z_2\,|\,. \tag{29-12}$$

Absolutværdien for kvotienten af to komplekse tal z_1 og z_2, hvor $z_2 \neq 0$, fås ved

$$\left|\,\frac{z_1}{z_2}\,\right| = \frac{|\,z_1\,|}{|\,z_2\,|} \tag{29-13}$$

Absolutværdien af den n'te potens af et komplekst tal z fås ved:

$$|\,{z_1}^n\,| = |\,z_1\,|^n \tag{29-14}$$

|||| Bevis

Med i næste opdatering af eNoten.

■

|||| Sætning 29.16 Regneregler for argumenter

Et argument for produktet af to komplekse tal z_1 og z_2 fås ved

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \tag{29-15}$$

Et argument for kvotienten af to komplekse tal z_1 og z_2 hvor $z_2 \neq 0$, fås ved

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \tag{29-16}$$

Et argument for den n'te potens af et komplekst tal z fås ved:

$$\arg(z^n) = n\arg(z) \tag{29-17}$$

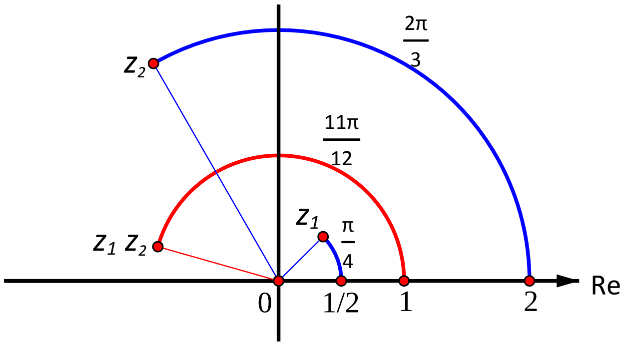
|||| Bevis

Med i næste opdatering af eNoten.

■

|||| Eksempel 29.17 Multiplikation vha. polær koordinater

To komplekse tal z_1 og z_2 er givet ved de polære koordinater $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ henholdsvis $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$.



Figur 29.10: Multiplikation

Vi udregner produktet af z_1 og z_2 ved hjælp af deres absolutværdier og argumenter:

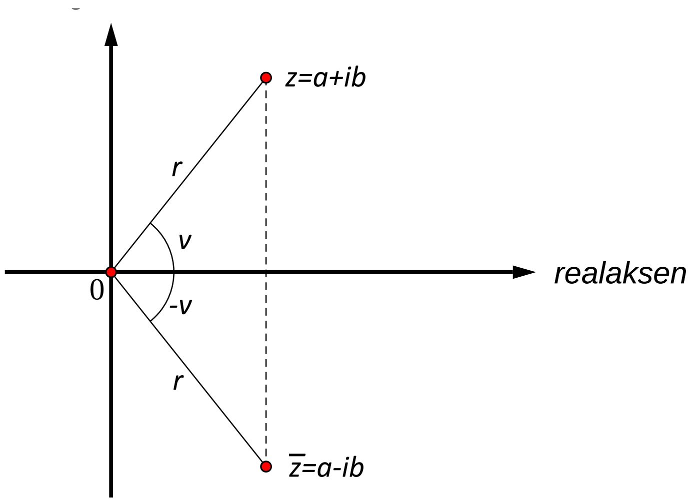
$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$$

$z_1 z_2$ er altså det entydigt bestemte tal som har absolutværdien 1 og argumentet $\frac{11\pi}{12}$.

29.5 Konjugering af komplekse tal

At konjugere et komplekst tal svarer til at det spejles i realaksen som vist på figur 29.11.



Figur 29.11: Spejling i realaksen

|||| Definition 29.18

Ved det konjugerede tal til et komplekst tal på rektangulær form $z = a + ib$ forstås tallet $\bar{z}$ givet ved

$$\bar{z} = a - ib \tag{29-18}$$

Det er indlysende at det konjugerede tal til et konjugeret tal er det oprindelige tal selv:

$$\bar{\bar{z}} = z\,. \tag{29-19}$$

Det fremgår også klart af definitionen at konjugerede tal har samme absolutværdi og modsatte argumenter:

$$|\,\bar{z}\,| = |\,z\,| \;\text{ og }\; \arg(\bar{z}) = -\arg(z)\,. \tag{29-20}$$

Endelig bemærker vi at alle komplekse tal på realaksen er identiske med deres konjugerede tal, og at de er de eneste komplekse tal der opfylder denne egenskab. Vi kan i forlængelse heraf opstille et kriterium for om et givet tal i en en mængde af komplekse tal er reelt:

|||| Sætning 29.19 Realkriteriet

Lad A være en delmængde af $\mathbb{C}$, og lad $A_{\mathbb{R}}$ betegne den delmængde af A som består af reelle tal. Der gælder

$$A_{\mathbb{R}} = \{z \in A \,|\, \bar{z} = z\}\;.$$

|||| Bevis

Lad z være et vilkårligt tal i $A \subseteq \mathbb{C}$ med rektangulær form $z = a + ib$. Der gælder da

$$\bar{z} = z \Leftrightarrow a - ib = a + ib \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in A_{\mathbb{R}}\,.$$

■

For konjugering i forbindelse med de fire sædvanlige regnearter gælder der følgende meget simple regneregler

|||| Sætning 29.20 Regneregler for konjugering

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
4. $\overline{(z_2/z_1)} = \overline{z_2}/\overline{z_1}$.

|||| Bevis

Beviset gennemføres ved simpel udregning af formlernes venstreside og højreside

■

|||| Sætning 29.21 Konjugering og absolutværdi

For et komplekst tal z gælder

$$z \cdot \overline{z} = |\, z\,|^2 \tag{29-21}$$

|||| Bevis

Vi antager at $z = a + ib$ hvor a og b er reelle. Sætningen følger da af

$$z \cdot \overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |\, z\,|^2$$

■

29.6 Eksponentialfunktion med imaginær variabel

Den sædvanlige eksponentialfunktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ med reel variabel x har som bekendt de karakteristiske egenskaber

$$\mathrm{e}^0 = 1 \quad \text{og} \quad \mathrm{e}^{x_1 + x_2} = \mathrm{e}^{x_1} \cdot \mathrm{e}^{x_2} \,. \tag{29-22}$$

Ved gentagen brug af den sidste får vi desuden egenskaben

$$(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx} \quad , n \in \mathbb{N} \,. \tag{29-23}$$

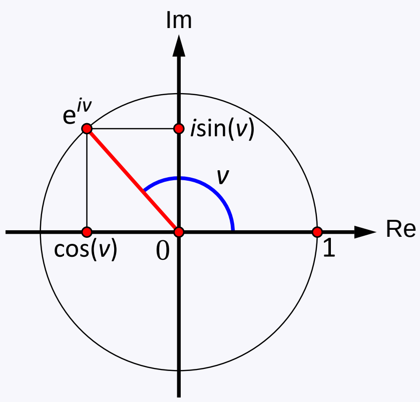
I dette afsnit vil vi indføre en eksponentialfunktion med *imaginær variabel*, som senere i denne eNote udvides til en kompleks eksponentialfunktion $f(z) = \mathrm{e}^z$ for ethvert

$z \in \mathbb{C}$. Vi vil kræve at $f(z)$ stemmer overens med den reelle eksponentialfunktion når $z \in \mathbb{R}$, og at $f(z)$ besidder de samme karakteristiske egenskaber som den reelle. Men her starter vi med specialtilfældet at variablen er rent imaginær.

|||| Definition 29.22

For ethvert $v \in \mathbb{R}$ defineres funktionen e^{iv} ved

$$\mathrm{e}^{iv} = \cos(v) + i\sin(v)\,. \tag{29-24}$$



Figur 29.12: Enhedscirklen i komplekse talplan

Bemærk at tallet e^{iv} for ethvert v ligger på enhedscirklen i den komplekse talplan med centrum i 0 . Heraf følger:

$$|\,\mathrm{e}^{iv}\,| = 1\,. \tag{29-25}$$

Bemærk endvidere at argumentet for e^{iv} straks aflæses i eksponenten således:

$$\arg(\mathrm{e}^{iv}) = v\,. \tag{29-26}$$

Vi viser nu at den i definition 29.22 indførte funktion e^{iv} har egenskaber der svarer til den reelle eksponentialfunktion.

|||| Sætning 29.23 Regneregler for e^{iv}

For funktionen e^{iv} , $v \in \mathbb{R}$ gælder

1. $\mathrm{e}^{0i} = 1$
2. $\mathrm{e}^{iv_1+iv_2} = \mathrm{e}^{i(v_1+v_2)} = \mathrm{e}^{iv_1}\mathrm{e}^{iv_2}$
3. $(\mathrm{e}^{iv})^n = \mathrm{e}^{inv}$, $n \in \mathbb{N}$

|||| Bevis

1. Der gælder oplagt $e^{i0} = \cos(0) = 1$.
2. Lad v_1 og v_2 være to reelle tal. Fra (29-12) fås
$$|\, e^{iv_1} e^{iv_2} \,| = |\, e^{iv_1} \,|\,|\, e^{iv_2} \,| = 1\,.$$
Fra (29-15) fås
$$\arg(e^{iv_1} e^{iv_2}) = \arg(e^{iv_1}) + \arg(e^{iv_2}) = v_1 + v_2\,.$$
Nu indsætter vi den fundne absolutværdi og argument for $e^{iv_1} e^{iv_2}$ i dette tals eksponentielle form:
$$e^{iv_1} e^{iv_2} = e^{i(v_1+v_2)} = e^{iv_1+iv_2}\,.$$
3. På tilsvarende vis fås fra (29-14) og (29-17) at
$$(e^{iv})^n = e^{inv}\,. \qquad (29\text{-}27)$$

■

Vi kan herefter indføre en i mange sammenhænge bekvem og meget benyttet skrivemåde for komplekse tal.

|||| Sætning 29.24 Eksponentiel form

Ethvert komplekst tal z kan skrives på formen
$$z = re^{iv}\,, \qquad (29\text{-}28)$$
hvor $r = |\, z \,|$ og $v = \arg(z)$. Skrivemåden kaldes tallets *eksponentielle form*.

|||| Bevis

Vi finder først absolutværdi af re^{iv}:
$$|\, re^{iv} \,| = |\, r \,|\,|\, e^{iv} \,| = r\,.$$
Dernæst et argument for re^{iv}:
$$\arg(re^{iv}) = \arg(r) + \arg(e^{iv}) = 0 + v = v\,.$$
Hermed er det vist at z og re^{iv} har samme absolutværdi og samme argument, og derfor er identiske.

■

Når komplekse tal angives på eksponentiel form, foregår multiplikation, division og potensopløftning uden videre efter sædvanlige elementære regneregler og potensregler kendt fra reelle tal. Vi giver nu et eksempel på dette i forbindelse med multiplikation, sammenlign med eksempel 29.17.

|||| Eksempel 29.25 Multiplikation på eksponentiel form

To komplekse tal er givet på eksponentiel form:

$$z_1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i} \;\text{ og }\; z_2 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}i}\,.$$

Produktet af tallene fås på eksponentiel form ved

$$z_1 z_2 = \big(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}\big)\big(2\,\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}i}\big) = \big(\frac{1}{2}\cdot 2\big)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i+\frac{3\pi}{2}i} = 1\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2})} = \mathrm{e}^{\frac{7\pi}{4}\,i}\,.$$

I det følgende vil vi vise hvordan såkaldte *binome ligninger* kan løses ved hjælp af eksponentiel form. En binom ligning er en *toleddet* polynomiumsligning med formen

$$z^n = w \tag{29-29}$$

hvor $w \in \mathbb{C}$ og $n \in \mathbb{N}$.

Vi viser først et eksempel på løsning af en binom ligning ved hjælp af eksponentiel form og opstiller derefter den generelle metode.

|||| Eksempel 29.26 Binom ligning på eksponentiel form

Find samtlige løsninger på den binome ligning

$$z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i\,. \tag{29-30}$$

Løsning:
Ideen er at vi skriver såvel z som højresiden på eksponentiel form.

Hvis z har den eksponentielle form $z = s\mathrm{e}^{iu}$, kan ligningens venstreside udregnes ved

$$z^4 = (s\mathrm{e}^{iu})^4 = s^4\,(e^{iu})^4 = s^4\,e^{i4u} \tag{29-31}$$

Højresidens absolutværdi r findes ved

$$r = |-8 + 8\sqrt{3}\,| = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16\,.$$

Højresidens argument v opfylder:

$$\cos(v) = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} \;\text{ og }\; \sin(v) = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Ved hjælp af de to ligninger kan højresidens hovedargument fastlægges til

$$v = \arg(-8 + 8\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}\,,$$

og dermed den eksponentielle form

$$re^{iv} = 16e^{\frac{2\pi}{3}i}. \tag{29-32}$$

Vi indsætter nu (29-31) og (29-32) i (29-30)

$$s^4\,e^{i4u} = 16e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

Da ventresidens absolutværdi skal være lig højresidens får vi

$$s^4 = 16 \;\Leftrightarrow\; s = \sqrt[4]{16} = 2.$$

Venstresidens argument $4u$ og højresidens argument $\frac{2\pi}{3}$ skal være ens på nær et multiplum af 2π . Heraf fås

$$4u = \frac{2\pi}{3} + p2\pi \;\Leftrightarrow\; u = \frac{\pi}{6} + p\frac{\pi}{2}\,,\; p \in \mathbb{Z}\,.$$

Disse uendeligt mange argumenter svarer vel at mærke kun til *fire* halvlinjer ud fra 0, bestemt ved de argumenter der fås ved $p = 0, p = 1, p = 2$ og $p = 3$. For alle andre værdier af p vil den tilsvarende halvlinje være identisk med en af de fire nævnte. For eksempel vil halvlinjen for $p = 4$ være givet ved argumentet

$$u = \frac{\pi}{6} + 4\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi\,,$$

det vil sige samme halvlinje som svarer til $p = 0$, da forskellen på argumenterne er 2π .

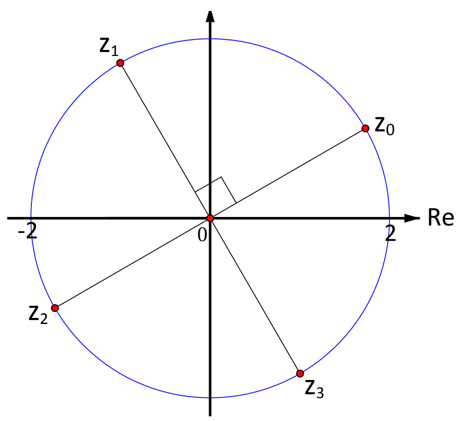
Den givne ligning (29-30) har derfor netop fire løsninger, som ligger på de nævnte fire halvlinjer i afstanden $s = 2$ fra 0. Angivet på eksponentiel form:

$$z = 2\,e^{i(\frac{\pi}{6}+p\frac{\pi}{2})}\,,\; p = 0\,,1\,,2\,,3\,.$$

Eller omregnet hver for sig til rektangulær form ved brug af definition 29.22

$$z_0 = \sqrt{3}+i\,,\, z_1 = -1+i\sqrt{3}\,,\, z_2 = -\sqrt{3}-i\,,\, z_3 = 1-i\sqrt{3}\,.$$

Alle løsningerne for en binom ligning ligger på en cirkel med centrum i 0 og radius lig med højresidens absolutværdi. Forbindelseslinjerne mellem Origo og løsningerne deler cirklen i lige store vinkler som det eksemplificeres på figur 29.13.



Figur 29.13: Løsningerne fra eksempel 29.26

Fremgangsmåden i eksempel 29.26 generaliserer vi i den følgende sætning. Sætningen bevises i eNote 30 om polynomier.

|||| Sætning 29.27 Binom ligning løst vha. eksponentiel form

Givet et komplekst tal w , som ikke er 0 , og som har den eksponentielle form

$$w = r\mathrm{e}^{iv} \,.$$

Den binome ligning

$$z^n = w = r\mathrm{e}^{iv} \;,\; n \in \mathbb{N} \tag{29-33}$$

har n løsninger som kan findes ved formlen

$$z = \sqrt[n]{r}\; \mathrm{e}^{i(\frac{v}{n}+p\frac{2\pi}{n})} \;\text{ hvor }\; p = 0\,,\,1\,,\ldots\,,\,n-1\,. \tag{29-34}$$

29.7 Den komplekse eksponentialfunktion

Som tidligere nævnt i denne eNote er det muligt at udvide definitionsmængden for den velkendte reelle eksponentialfunktion e^x fra de reelle tal til de komplekse tal, således at den udvidede komplekse eksponentialfunktion på realaksen svarer overens med den reelle. Og således at de karakteristiske egenskaber for den reelle eksponentialfunktion overføres til den komplekse.

|||| Definition 29.28 Kompleks eksponentialfunktion

For et hvert komplekst tal z med rektangulær form $z = x + iy$ defineres den komplekse eksponentialfunktion e^z ved

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x\left(\cos(y) + i\sin(y)\right). \tag{29-35}$$

Bemærk at hvis z i (29-35) er reel, det vil sige hvis $y = 0$, så er (29-35) den sædvanlige reelle eksponentialfunktion e^x .

Bemærk at hvis $x = 0$ i (29-35), så er (29-35) den i definition 29.22 indførte eksponentialfunktion for ren imaginær variabel.

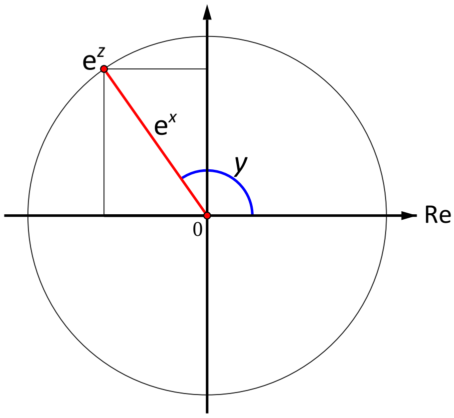
Vi betragter nu det komplekse tal e^z hvor z er et vilkårligt komplekst tal med rektangulær form $z = x + iy$ hvor ikke både x og y er lig med 0. Vi har umiddelbart fra definition 29.28 den *eksponentielle form* af e^z

$$e^z = e^x e^{iy}\,,$$

der viser at

$$|\,e^z\,| = e^x \text{ og } \arg e^z = y\,.$$

Dette giver e^z en bemærkelsesværdig placering i den komplekse talplan som vist på figur 29.14.



Figur 29.14: Geometrisk fortolkning af e^z

|||| Eksempel 29.29 Eksponentiel ligning

Bestem samtlige løsninger for ligningen

$$e^z = -\sqrt{3} + i\,. \tag{29-36}$$

Løsning:
Vi skriver først z på rektangulær form: $z = x + iy$.
I eksempel 29.14 har vi fundet at højresiden i 29-36 har absolutværdien $r = 2$ og hovedargumentet $v = \frac{5\pi}{6}$. Da venstresiden og højresiden skal have samme absolutværdi og samme argument på nær et vilkårligt multiplum af 2π fås

$$|\,e^z\,| = e^x = r = 2 \;\Leftrightarrow\; x = \ln(2)\,,$$

$$\arg(z) = y = v + p2\pi = \frac{5\pi}{6} + p2\pi\;,\; p \in \mathbb{Z}\,.$$

Samtlige løsninger for 29-36 er dermed

$$z = x + iy = \ln(2) + i(\frac{5\pi}{6} + p2\pi)\;,\; p \in \mathbb{Z}\,.$$

For de reelle trigonometriske funktioner $\cos(x)$ og $\sin(x)$ vides at der for ethvert helt tal p gælder $\cos(x + p2\pi) = \cos(x)$ og $\sin(x + p2\pi) = \sin(x)$. Hvis man forskyder grafen for $\cos(x)$ eller $\sin(x)$ med et vilkårligt multiplum af 2π, vil den derfor gå over i sig selv. Funktionerne kaldes derfor *periodiske* med *perioden* 2π.

Et lignende fænomen kan ses i eksempel 29.29 hvor den givne eksponentielle ligning har uendeligt mange løsninger der kun adskiller sig fra hinanden ved forskellige multipla af $2\pi i$. Det skyldes at den komplekse eksponentialfunktion har den imaginære periode $2\pi i$! Og dette hænger i høj grad sammen med periodiciteten af de trigonometriske funktioner.

|||| Sætning 29.30 Periodicitet af e^z

For ethvert komplekst tal z og ethvert helt tal p gælder

$$e^{z+p2\pi i} = e^z \,. \tag{29-37}$$

|||| Bevis

Antag at z har rektangulær form $z = x + iy$ og $p \in \mathbb{Z}$.

Der gælder

$$\begin{aligned} e^{z+p2\pi i} = e^{x+i(y+p2\pi)} &= e^x \left(\cos(y + p2\pi) + i \sin(y + p2\pi) \right) \\ &= e^x \left(\cos(y) + i \sin(y\pi) \right) = e^z \,. \end{aligned}$$

Hermed er sætningen vist.

■

Vi viser nu at e^z faktisk har den karakteristiske "eksponentielle" egenskab kendt fra den reelle eksponentialfunktion og som i 29.23 blev udvidet til eksponentialfunktionen med imaginær variabel.

|||| Sætning 29.31 Regneregel for e^z

For vilkårlige komplekse tal z_1 og z_2 opfylder den komplekse eksponentialfunktion

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \,. \tag{29-38}$$

|||| Bevis

Med i næste opdatering af eNoten.

■

29.8 Komplekse funktioner af en reel variabel

Lad c være et vilkårligt komplekst tal. Vi vil til ethvert reelt tal t knytte det komplekse tal

$$f(t) = \mathrm{e}^{ct} \,. \tag{29-39}$$

Denne funktion er et eksempel på de såkaldte *komplekse funktioner af en reel variabel*, som vi indfører generelt i det følgende. Derefter fokuseres specielt på typen (29-39) der har vid udbredelse i såvel teoretisk som anvendt matematik.

|||| Definition 29.32 Kompleks funktion af reel variabel

Ved en *kompleks funktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ af en reel variabel t forstås en funktion af typen

$$f(t) = g(t) + i \cdot h(t) \tag{29-40}$$

hvor $g(t)$ og $h(t)$ er reelle funktioner af den reelle variable t.

$f(t)$ kaldes *differentiabel* hvis $g(t)$ og $h(t)$ begge er differentiable.
Differentialkvotienten af $f(t)$ defineres ved

$$f'(t) = g'(t) + i \cdot h'(t) \,. \tag{29-41}$$

|||| Eksempel 29.33 Kompleks funktion af reel variabel

Ved udtrykket

$$f(t) = t + it^2 \;,\; t \in \mathbb{R}$$

er der defineret en kompleks funktion af en reel variabel. Den har differentialkvotienten

$$f'(t) = 1 + i(2t) \,.$$

|||| Eksempel 29.34 Kompleks funktion af reel variabel

Den i definition 29.22 indførte funktion

$$g(t) = \mathrm{e}^{it} = \cos(t) + i\sin(t) \;,\; t \in \mathbb{R}$$

er en kompleks funktion af en reel variabel. Den har differentialkvotienten

$$g'(t) = -\sin(t) + i\cos(t) \,.$$

De sædvanlige regneregler for differentiable funktioner udvides nemt til regneregler for differentialble komplekse funktioner af reel variabel. I den følgende sætning betragter vi de såkaldte *lineære* egenskaber ved differentiation.

|||| Sætning 29.35 Regneregler for differentialkvotient

Lad $f_1(t)$ og $f_2(t)$ være komplekse funktioner af den reelle variable t, og lad c være et vilkårligt komplekst tal. Der gælder da

1. Den komplekse funktion $f_1(t) + f_2(t)$ er differentiabel med differentialkvotienten

$$(\,f_1(t) + f_2(t)\,)' = f_1'(t) + f_2'(t)\,. \tag{29-42}$$

2. Den komplekse funktion $c \cdot f_1(t)$ er differentiabel med differentialkvotienten

$$\left(\,c \cdot f_1(t)\,\right)' = c \cdot f_1'(t) \tag{29-43}$$

|||| Bevis

Lad $f_1(t) = g_1(t) + i\,h_1(t)$ og $f_2(t) = g_2(t) + i\,h_2(t)$ hvor $g_1(t)$, $h_1(t)$, $g_1(t)$ og $g_2(t)$ er differentiable reelle funktioner. Lad endvidere $c = a + ib$ være et vilkårligt komplekst tal på rektangulær form.

Sætningens første del:

$$\begin{aligned} f_1(t) + f_2(t) &= (g_1(t) + i\,h_1(t)) + (g_2(t) + i\,h_2(t)) \\ &= (g_1(t) + g_2(t)) + i\,(h_1(t) + h_2(t))\ . \end{aligned}$$

Vi får da fra definition (29-41) og brug af regneregler for differentialkvotienter af reelle funktioner:

$$\begin{aligned} (f_1(t) + f_2(t))' &= (g_1(t) + g_2(t))' + i\,(h_1(t) + h_2(t))' \\ &= \left(g_1'(t) + g_2'(t)\right) + i\,\left(h_1'(t) + h_2'(t)\right) \\ &= \left(g_1'(t) + i\,h_1'(t)\right) + i\,\left(g_2'(t) + i\,h_2'(t)\right) \\ &= f_1'(t) + f_2'(t)\,. \end{aligned}$$

Sætningens anden del:

$$\begin{aligned} c \cdot f_1(t) &= (a + ib) \cdot (g_1(t) + i\,h_1(t)) \\ &= (a\,g_1(t) - b\,h_1(t)) + i\,(a\,h_1(t) + b\,g_1(t)) \end{aligned}$$

Vi får fra definition (29-41) og brug af regneregler for differentialkvotienter af reelle funktioner:

$$\begin{aligned} (c \cdot f_1(t))' &= (a\,g_1(t) - b\,h_1(t))' + i\,(a\,h_1(t) + b\,g_1(t))' \\ &= \left(a\,g_1'(t) - b\,h_1'(t)\right) + i\,\left(a\,h_1'(t) + b\,g_1'(t)\right) \\ &= (a + ib)\,\left(g_1'(t) + h_1'(t)\right) \\ &= c \cdot f_1'(t)\,. \end{aligned}$$

Hermed er sætningen bevist.

■

Vi vender nu tilbage til funktioner af typen (29-39). Først giver vi et nyttigt resultat om deres konjugering:

|||| Sætning 29.36

For et vilkårligt komplekst tal c og ethvert reelt tal t gælder

$$\overline{\mathrm{e}^{ct}} = \mathrm{e}^{\bar{c}\,t}\,. \tag{29-44}$$

|||| Bevis

Lad $c = a + ib$ være den rektangulære form af c. Vi får da ved brug af definition 29.28 og regneregler 29.20 for konjugering:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{e}^{ct}} &= \overline{\mathrm{e}^{at+ibt}} \\
&= \overline{e^{at}\left(\cos(bt) + i\sin(bt)\right)} \\
&= \overline{e^{at}}\ \overline{\left(\cos(bt) + i\sin(bt)\right)} \\
&= e^{at}\left(\cos(bt) - i\sin(bt)\right) \\
&= e^{at}\left(\cos(-bt) + i\sin(-bt)\right) \\
&= e^{at-ibt} \\
&= e^{\bar{c}t}\,.
\end{aligned}$$

Hermed er sætningen bevist.

■

For sædvanlige reelle eksponentialfunktioner af typen

$$f(x) = \mathrm{e}^{kx}\ ,\ k \in \mathbb{R}$$

gælder der som bekendt

$$f'(x) = kf(x) = k\mathrm{e}^{kx}\,. \tag{29-45}$$

Vi slutter eNoten af med at vise at den komplekse eksponentialfunktion opfylder en differentiationsregel der helt svarer til 29-45.

|||| Sætning 29.37 Differentiation af e^{ct}

Betragt for et vilkårligt $c \in \mathbb{C}$ og for $t \in \mathbb{R}$ den komplekse funktion funktion

$$f(t) = e^{ct}\,. \tag{29-46}$$

Differentialkvotienten for $f(t)$ er bestemt ved

$$f'(t) = cf(t) = ce^{ct}\,. \tag{29-47}$$

|||| Bevis

Lad c's rektangulære form være $c = a + ib$. Vi får da ved brug af definition 29.28:

$$\begin{aligned} e^{ct} &= e^{at+ibt} \\ &= e^{at}\left(\cos(bt) + i\sin(bt)\right) \\ &= e^{at}\cos(bt) + i\left(e^{at}\sin(bt)\right) \end{aligned}$$

Endvidere får vi fra definition (29-41) og brug af regneregler for differentialkvotienter af reelle funktioner:

$$\begin{aligned} \left(e^{ct}\right)' &= ae^{at}\cos(bt) - e^{at}b\sin(bt) + i\left(ae^{at}\sin(bt) + e^{at}b\cos(bt)\right) \\ &= (a+ib)e^{at}\left(\cos(bt) + i\sin(bt)\right) \\ &= (a+ib)e^{at+ibt} \\ &= c\,e^{ct}\,. \end{aligned}$$

Hermed er sætningen bevist.

■

Hvis c i sætning 29.37 er reel, udtrykker (29-47) naturligvis blot sædvanlig differentiation af den reelle eksponentialfunktion som i (29-45). Også hvad differentiation angår er den komplekse eksponentialfunktion dermed en udvidelse af den reelle.

Hermed afsluttes indføringen af den komplekse eksponentialfunktion.

Indeks