Taller Laura Daniela Rodriguez 2221236

* Sección 2.1.5

10. Sea P_n el conjunto de todos los polinomios de grado n, en x, con coeficientes reales.

$$|P_n\rangle \rightleftarrows p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

a. Demostrar que P_n es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un número (número real).

b. Si los coeficientes a_i son enteros ¿P_n será un espacio vectorial? ¿Por qué?

c. ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de P_n es un ~~(espacio)~~ subespacio vectorial?

I. El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n-1$.

II. El polinomio cero y todos los polinomios de grado par.

III. Todos los polinomios que tienen a x como un factor (grado $n > 1$)

IV. Todos los polinomios que tienen a $x-1$ como un factor.

→ Subespacios. Supongamos que tenemos un conjunto S de elementos de un espacio vectorial lineal V que satisface las siguientes propiedades

1. El vector neutro de V está en S
2. Si $|s_1\rangle, |s_2\rangle \in S$, entonces $|s_1\rangle \boxplus |s_2\rangle \in S$
3. Si $|s\rangle \in S$ y α es un elemento del campo K, entonces $\alpha|s\rangle \in S$

a.

1. Cerrado bajo la suma

Sea $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ y $q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \in P_n$

la suma $p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i$ tmb es un polinomio de grado max $n-1$ $\therefore$ $p(x) + q(x) \in P_n$

2. Conmutativa la suma. la suma de los polinomios es conmutativa igual q los reales.

3. Asociatividad de la suma. La suma de los polinomios es asociativa ya que la de los reales lo es.

4. Existe un único elemento neutro
$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ con $a_i = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} 0(x^i) = 0(x)$

$p(x) + 0(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + 0) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = p(x)$

5. Existe un elemento simétrico

Para cada $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$, existe $-p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (-a_i) x^i$

tal que $p(x) + (-p(x)) = 0(x)$

6. Cerrado bajo prod. por escalar
Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \in P_n$.

$\alpha p(x) = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha a_i) x^i$ tmb es un polinomio de grado max $n-1$ $\therefore$ $\alpha p(x) \in P_n$

7. $\alpha(\beta \cdot p(x)) = (\alpha\beta)(p(x)) \quad \forall\ p(x) \in P_n \ y\ \alpha, \beta \in K$

$$\alpha(\beta\, p(x)) = \alpha\left(\sum_{i=0}^{n-1}(\beta a_i)x^i\right) = \alpha\left(\beta \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right)$$

$$= \alpha\beta\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right) = \alpha\beta\,(p(x))$$

8. $(\alpha+\beta)\, p(x) = \alpha\, p(x) + \beta\, p(x) \quad \forall\ p(x) \in P_n$
$\alpha, \beta \in K$

$$\alpha\, p(x) + \beta\, p(x) = \sum_{i=0}^{n-1}(\alpha a_i)x^i + \sum_{i=0}^{n-1}(\beta a_i)x^i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1}(\alpha a_i + \beta a_i)x^i = \sum_{i=0}^{n-1}(\alpha+\beta)a_i x^i$$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta)\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = (\alpha+\beta)\, p(x) \quad \blacksquare$$

9. $\alpha(p(x) + q(x)) = \alpha\, p(x) + \alpha\, q(x)$

$$\alpha\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i\right) = \alpha\left(\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+b_i)x^i\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1}\alpha(a_i+b_i)x^i = \sum_{i=0}^{n-1}(\alpha a_i + \alpha b_i)x^i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1}\alpha a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1}\alpha b_i x^i = \alpha\, p(x) + \alpha\, q(x) \quad \blacksquare$$

10. $1\, p(x) = p(x) \quad \forall\ p(x) \in P_n \ y\ 1 \in K$

b. Si los coeficientes a_i son enteros P_n no es un espacio vectorial pq no cumple con ser cerrado bajo el prod. por escalar.

c. 1. todos los polinomios de grado $n-1$, lo hicimos en el punto a.

2. No es subespacio porque la suma de dos polinomios de grado par puede tener un grado impar

$p(x) = x^2$ y $q(x) = -x^2 + x$

$p(x) + q(x) = x$

3. todos tienen a x como factor (grado $n \geq 1$)

1. $0(x)$ está

$q(x) = 0(x) = 0 = 0(x)$

2. la suma de dos polinomios con x como factor tmb tiene x como factor

3. la multiplicación por escalar tmb tiene a x como factor

Si, es un subespacio.

4. todos los polinomios tienen a $x-1$ como factor.

1. $0(x)$ está $p(x) = 0(x-1) = 0 = 0(x)$

2. la suma de dos polinomios con $x-1$ como factor tmb tiene $(x-1)$ como factor.

3. la mult. por esc. tmb tiene a $x-1$ como factor.

Sección 2.2.4

6. vec. en $\mathbb{R}^3$ $\quad a = a^i|e_i\rangle = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$

"tabla de multiplicación" $\langle e^i|e_j\rangle = \delta^i_j$ con $i,j = 1,2,3$

$\langle e^i\|e_j\rangle$	$\hat{\imath}$	$\hat{\jmath}$	$\hat{k}$
$\hat{\imath}$	1	0	0
$\hat{\jmath}$	0	1	0
$\hat{k}$	0	0	1

Un cuaternión cartesiano

$$|a\rangle = a^\alpha|q_\alpha\rangle = a^0 + a^i|q_i\rangle = a_0 + a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

con $\alpha = 0,1,2,3$ y donde las a^i $(i = 1,2,3)$

"Tabla de multiplicación"

$\|q_i\rangle \odot \|q_j\rangle$	1	$\|q_1\rangle$	$\|q_2\rangle$	$\|q_3\rangle$
1	1	$\|q_1\rangle$	$\|q_2\rangle$	$\|q_3\rangle$
$\|q_1\rangle$	$\|q_1\rangle$	-1	$\|q_3\rangle$	$-\|q_2\rangle$
$\|q_2\rangle$	$\|q_2\rangle$	$-\|q_3\rangle$	-1	$\|q_1\rangle$
$\|q_3\rangle$	$\|q_3\rangle$	$\|q_2\rangle$	$-\|q_1\rangle$	-1

a.

1. Cerrada bajo la suma

$|a\rangle = a^0 + a^1\hat{i} + a^2\hat{j} + a^3\hat{k} \quad |b\rangle = b^0 + b^1\hat{i} + b^2\hat{j} + b^3\hat{k}$

$|a\rangle + |b\rangle = (a^0 + b^0) + (a^1 + b^1)\hat{i} + (a^2 + b^2)\hat{j} + (a^3 + b^3)\hat{k}$

es otro cuaternion.

2. Conmutativa de la suma:

$|a\rangle + |b\rangle = |b\rangle + |a\rangle$ como $a^0, a^1, a^2, a^3 \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

b^0, b^1, b^2, b^3 se cumple

3. Asociatividad de la suma

la suma de los reales o complejos es asociativa por lo q se cumple con los cuaterniones.

4 Elemento Neutro

$|0\rangle = 0 + 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$ y $|0\rangle + |a\rangle = |a\rangle$

5. Elemento simetrico.

$|a\rangle = a^0 + a^1\hat{i} + a^2\hat{j} + a^3\hat{k} \quad -|a\rangle = -a^0 - a^1\hat{i} - a^2\hat{j} - a^3\hat{k}$

$|a\rangle + (-|a\rangle) = |0\rangle$ se cumple.

6. Cerrado bajo prod. por escalar

$\alpha \in K$

$\alpha|a\rangle = \alpha a^0 + \alpha a^1\hat{i} + \alpha a^2\hat{j} + \alpha a^3\hat{k}$

q es un cuaternion se cumple

7. $\alpha(\beta|a\rangle) = (\alpha\beta)|a\rangle$

$\alpha(\beta a^0 + \beta a^1\hat{i} + \beta a^2\hat{j} + \beta a^3\hat{k})$

$\Rightarrow \alpha\beta a^0 + \alpha\beta a^1\hat{i} + \alpha\beta a^2\hat{j} + \alpha\beta a^3\hat{k}$

$\Rightarrow \alpha\beta(a^0 + a^1\hat{i} + a^2\hat{j} + a^3\hat{k}) = (\alpha\beta)|a\rangle$ ∎

DD | MM | AA

8. $(\alpha+\beta)|a\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle$

$\alpha a^0 + \alpha a^1\hat{i} + \alpha a^2\hat{j} + \alpha a^3\hat{k} + \beta a^0 + \beta a^1\hat{i} + \beta a^2\hat{j} + \beta a^3\hat{k}$

$a^0(\alpha+\beta) + (\alpha+\beta)a^1\hat{i} + (\alpha+\beta)a^2\hat{j} + (\alpha+\beta)a^3\hat{k}$

$\Rightarrow (\alpha+\beta)|a\rangle \quad \boxed{}$

9. $\alpha(|a\rangle + |b\rangle) = \alpha|a\rangle + \alpha|b\rangle$

$\alpha[a^0+b^0 + (a^1+b^1)\hat{i} + (a^2+b^2)\hat{j} + (a^3+b^3)\hat{k}]$

$\alpha(a^0+b^0) + \alpha(a^1+b^1)\hat{i} + \alpha(a^2+b^2)\hat{j} + \alpha(a^3+b^3)\hat{k}$

$\alpha a^0 + \alpha b^0 + \alpha a^1\hat{i} + \alpha b^1\hat{i} + \alpha a^2\hat{j} + \alpha b^2\hat{j} + \alpha a^3\hat{k} + \alpha b^3\hat{k}$

$\alpha(a^0 + a^1\hat{i} + a^2\hat{j} + a^3\hat{k}) + \alpha(b^0 + b^1\hat{i} + b^2\hat{j} + b^3\hat{k})$

$\alpha|a\rangle + \alpha|b\rangle$

10. $1 \cdot |a\rangle = |a\rangle$ se cumple

b. $|\mathbb{b}\rangle = b^0 + \mathbb{b}$

$|r\rangle = r^0 + \mathbb{r}$

$|b\rangle \odot |r\rangle = (b^0 + \mathbb{b}) \odot (r^0 + \mathbb{r})$

$= b^0 \odot r^0 + b^0 \odot \mathbb{r} + \mathbb{b} \odot r^0 + \mathbb{b} \odot \mathbb{r}$

$= b^0 r^0 + b^0 \mathbb{r} + r^0 \mathbb{b} + \mathbb{b} \odot \mathbb{r}$

$\mathbb{b} \odot \mathbb{r} = (b^1, b^2, b^3) \odot (r^1, r^2, r^3)$

$\mathbb{b}\odot\mathbb{r}$	1	r^1	r^2	r^3
1	1	r^1	r^2	r^3
b^1	b^1	$-b^1r^1$	b^1r^2	b^1r^3
b^2	b^2	b^2r^1	$-b^2r^2$	b^2r^3
b^3	b^3	b^3r^1	b^3r^2	$-b^3r^3$

$-b^1r^1 + b^1r^2|q_3\rangle - b^1r^3|q_2\rangle - b^2r^1|q_3\rangle$
$-b^2r^2 + b^2r^3|q_1\rangle + b^3r^1|q_2\rangle$
$-b^3r^2|q_1\rangle - b^3r^3$

$= -(b^1r^1 + b^2r^2 + b^3r^3) + (b^2r^3 - b^3r^2)|q_1\rangle$
$+ (b^3r^1 - b^1r^3)|q_2\rangle + (b^1r^2 - b^2r^1)|q_3\rangle$

$= -\mathbb{b} \cdot \mathbb{r} + \mathbb{b} \times \mathbb{r}$

$$|b\rangle \odot |r\rangle = \overbrace{b^0 r^0}^{E} + \overbrace{b^0 \mathbb{r} + r^0 \mathbb{b}}^{V} \overbrace{- \mathbb{b} \cdot \mathbb{r}}^{E} + \overbrace{\mathbb{b} \times \mathbb{r}}^{V}$$

$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = b^0 r^0 - \mathbb{b} \cdot \mathbb{r} + b^0 \mathbb{r} + r^0 \mathbb{b} + \mathbb{b} \times \mathbb{r}$

$|d\rangle = (b^0 r^0 - \mathbb{b} \cdot \mathbb{r}) + (b^0 \mathbb{r} + r^0 \mathbb{b} + \mathbb{b} \times \mathbb{r})$

$|d\rangle = (b^0 r^0 - \mathbb{b} \cdot \mathbb{r},\ b^0 \mathbb{r} + r^0 \mathbb{b} + \mathbb{b} \times \mathbb{r})$

C. $|d\rangle = |b\rangle \otimes |r\rangle = a|q_0\rangle + S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha |q_j\rangle + A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle$

- $S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha$ $\quad j, k, l = 1,2,3 \quad \alpha = 0,1,2,3$

$S^{(ij)} \Rightarrow S^{ji} = S^{ij}$ que la cantidad S^{ij} es simétrica $\therefore (S^{\alpha j}\delta^0_\alpha + S^{j\alpha}\delta^0_\alpha)|q_j\rangle$

- $A^{[jk]i}$ obj. antisimétricos en j y k

$A^{[jk]i} \to A^{jki} = -A^{kji} \to (A^{jki} b_j r_k - A^{kji} b_j r_k)|q_i\rangle$

$|d\rangle = a|q_0\rangle + S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha |q_j\rangle + A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle$

$a = b^0 r^0 - \mathbb{b} \cdot \mathbb{r}$

$S^{\alpha j} = b^\alpha r^j \qquad S^{j\alpha} = b^j r^\alpha$

$S^{(\alpha j)} = S^{\alpha j} + S^{j\alpha} = b^\alpha r^j + b^j r^\alpha$

$S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha = S^{\alpha j} + S^{j\alpha}\delta^0_\alpha = b^0 r^j + b^j r^0$

$\mathbb{b} \times \mathbb{r} = b^j r^k \varepsilon_{jk}{}^i |q_i\rangle$

$A^{[jk]i} = A^{jki} - A^{kji}$

$1 b^1 r^2 - 1 r^1 b^2$

$A^{[jk]i} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \neq k \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

d. $|d\rangle = a|q_0\rangle + S^{(ij)} b_j r_k |q_j\rangle + A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle$

$$|d\rangle = \underbrace{(b^0 r^0 - \mathbb{b}\cdot\mathbb{r})}_{\text{Pt esc}}|q_0\rangle + \underbrace{(r^0 b^i + b^0 r^i}_{\text{Pt. simétrica}} + \underbrace{(\mathbb{b}\times\mathbb{r})^i)}_{\text{Pt. antisimétrica}} |q_i\rangle$$

$b^0 r^0 - \mathbb{b}\cdot\mathbb{r} \rightarrow$ un escalar

$r^0 b^i + b^0 r^i \rightarrow$ un vector

$\mathbb{b}\times\mathbb{r} \rightarrow$ un pseudovector (cambia el signo bajo reflexiones pero no bajo rotaciones propias)

No es vector ni pseudo vector puro

e.

1. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$-i\sigma_1 = q_1$

$-i\sigma_2 = q_2$

$-i\sigma_3 = q_3$

$\sigma_4 = q_0$

$q_\alpha \cdot q_\alpha = +i^2 \sigma_\alpha \sigma_\alpha = -I$

$q_0 \cdot q_\alpha = \sigma_4 \cdot -i\sigma_\alpha = -i\sigma_\alpha = q_\alpha$

$q_1 q_2 = +i^2 \sigma_1 \sigma_2 = -i\sigma_3 = q_3$

$q_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$; $q_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $q_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$ $\quad z = x+iy \quad w = a+ib$

$= \begin{pmatrix} x+iy & a+ib \\ -a+ib & x-iy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & a \\ -a & x \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} y & b \\ b & -y \end{pmatrix}$

$= a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

$= x|q_0\rangle - b|q_1\rangle - a|q_2\rangle - y|q_3\rangle$

$= a_0|q_0\rangle + a_1|q_1\rangle + a_2|q_2\rangle + a_3|q_3\rangle$

f. $q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$q_1 \cdot q_1 = -I \quad q_2 \cdot q_2 = -I$

$q_3 \cdot q_3 = -I \quad q_0 \cdot q_\alpha = 0$

$q_1 \cdot q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = q_3$

g. $\widetilde{\langle a|b\rangle} = |a\rangle^{t} \odot |b\rangle$

1. Simetría $\langle a|b\rangle = \widetilde{\langle b|a\rangle}$

$\langle a|b\rangle = |a\rangle^{t} \odot |b\rangle$

$\langle a|b\rangle = (a^0 - a^1 i - a^2 j - a^3 k) \odot (b^0 + b^1 i + b^2 j + b^3 k)$

$\langle a|b\rangle = a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$

$\langle b|a\rangle = (b^0 - b^1 i - b^2 j - b^3 k) \odot (a^0 + a^1 i + a^2 j + a^3 k)$

$\langle b|a\rangle = b^0 a^0 + b^1 a^1 + b^2 a^2 + b^3 a^3$

$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle$

2. Linealidad $\langle \alpha a + \beta b|c\rangle = \alpha\langle a|c\rangle + \beta\langle b|c\rangle$

3. Positividad $\langle a|a\rangle \geq 0$ y $\langle a|a\rangle = 0 \Leftrightarrow |a\rangle = 0$.

$\langle a|a\rangle = (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)$

$\Rightarrow a_0^2 + a_1^2 i + a_2^2 j + a_3^2 k$

h. $\widetilde{\langle a|b\rangle} = \frac{1}{2}[\langle a|b\rangle - |a\rangle \odot \langle a|b\rangle \odot |a\rangle]$.

$|a\rangle \odot |a\rangle = (a^0 + a) \odot (a^0 + a) = (a^0)^2 - \|a\|^2 + 2a^0 a$

$\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}[\langle a|b\rangle - \langle a|b\rangle((a^0)^2 - \|a^2\| + 2a^0 a]$

i $n(|a\rangle) = \|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^{\dagger} \odot |a\rangle}$

$\Rightarrow$ Se cancelan los terminos cruzados por la antisimetria

$\Rightarrow |a\rangle^{\dagger} \odot |a\rangle = (a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2$

$n(|a\rangle) = \sqrt{(a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$

j. $|\bar{a}\rangle = \dfrac{|a\rangle^{\dagger}}{\||a\rangle\|^2}$

$|a\rangle \odot |\bar{a}\rangle = |\bar{a}\rangle \odot |a\rangle = 1$

$|a\rangle \odot |\bar{a}\rangle = |a\rangle \odot \left(\dfrac{|a\rangle^{\dagger}}{\||a\rangle\|^2}\right) = \dfrac{1}{\||a\rangle\|^2}(|a\rangle \odot |a\rangle^{\dagger})$

$|a\rangle \odot |a\rangle^{\dagger} = (a^0 + a_{\parallel}) \odot (a^0 - a_{\parallel}) = (a^0)^2 + \|a_{\parallel}\|^2$

$= \||a\rangle\|^2$

$\therefore \quad |a\rangle \odot |\bar{a}\rangle = \dfrac{\||a\rangle\|^2}{\||a\rangle\|^2} = 1$

K. Los cuaterniones como grupo bajo el producto $\odot$

1 Cerradura $\| |a\rangle \| \odot \| |b\rangle \| = \| |a\rangle \| \odot \| |b\rangle \| \neq 0$.
$|a\rangle, |b\rangle$ no nulos.

2. Asociatividad. el producto $\odot$ es asociativo por definición

3. Elemento neutro $|e\rangle = 1$ (parte escalar, parte vectorial 0)
cumple: $|a\rangle \odot 1 = 1 \odot |a\rangle = |a\rangle$.

4. Inverso multiplicativo
para todo $|a\rangle$ existe $|a\rangle^{-1} = \dfrac{|a\rangle^{+}}{\| |a\rangle \|^2}$

que satisface $|a\rangle \odot |a\rangle^{-1} = 1$

Tabla de multi.

$\odot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

DD | MM | AA

1. $|v'\rangle = \overline{|a\rangle} \odot |v\rangle \odot |a\rangle$

- $|v\rangle = v^1 i + v^2 j + v^3 K$

$\| |v\rangle \|^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$

$\| |a\rangle \odot |v\rangle \| = \| |a\rangle \| \cdot \| |v\rangle \|$

$\| |a\rangle \| \rightarrow$ unitario

$\Rightarrow \| |a\rangle \odot |v\rangle \| = \| |v\rangle \|$

inverso $\overline{|a\rangle} = |a\rangle^{+}$ $\quad |a\rangle \odot \overline{|a\rangle} = \overline{|a\rangle} \odot |a\rangle = 1$

$|v'\rangle = \overline{|a\rangle} \odot |v\rangle \odot |a\rangle$

$\| |v'\rangle \| = \| \overline{|a\rangle} \| \cdot \| |v\rangle \| \cdot \| |a\rangle \|$ $\quad \| \overline{a} \| \cdot \| a \| = 1$

$\| |v'\rangle \| = \| v \|$

$\| |v'\rangle \|^2 = \| v \|^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$