



微信公众号【顶尖考研】

2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班习题课

2021年2月



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第二部分 一元函数的微分学

微信公众号【顶公考研】

26、设 $f(x) = \begin{cases} \arctan x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(e^{x^2-1} - x) + \frac{\pi}{4}, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(2xe^{x^2-1} - 1), & x > 1 \end{cases}$

27、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+bx)}{x}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$, b 为常数, $f(x)$ 在定义域内可导, 则 $f'(x) =$

$$\begin{cases} \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)}, & x < 1, x \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】

28、设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 可导, 则 α 应满足 ----,

若 $f'(x)$ 连续, 则 α 应满足 ----

29、设 $f(x)$ 是以3为周期的可导函数且是偶函数, $f'(-2) = -1$, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5-2\sinh) - f(5)}{h} = -\frac{1}{2}$$

30、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导且 $f(0)=1, f'(0)=3$, 则数列极限

(ID: djky66)

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{\frac{1}{1 - \cos \frac{1}{n}}} = e^6$$

31、设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处二阶导数存在，则
$$I = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)}{h} = \frac{1}{2} f''(a)$$

32、设 $f(x) = x^{\sin x} (x > 0)$, 则 $f'(x) = x^{\sin x} (\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$

(ID: djky66)

33、 $f(x) = x^2(x+1)^2(x+2)^2(x+n)^2$, 则 $f''(0) = 2(n!)^2$

(ID: djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

35、设 $y = y(x)$ 由方程 $y = \sin(x + y)$ 确定, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \text{---}$. $-\frac{y}{(1 - \cos(x + y))^3}$

36、设 $y = x + e^x$ ，则其反函数的二阶导数 $\frac{d^2x}{dy^2} = \text{---}$.
(ID: djky66)

$$-\frac{e^x}{(1+e^x)^3}$$

37、设 $f(x) = \int_0^x \ln(1 + \sin t) dt$ 则 $f''(x) = \text{---}$.

$$-\frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

38、设函数 $y = y(x)$ 为由方程 $x^2 + \int_0^y (2 + \sin t^2) dt = 1$ 确定的隐函数，则 $dy = -$.

(ID: djky66)

$$-\frac{2x}{2 + \sin y^2}$$

39、设 $y = y(x)$ 在 $(-1, 1)$ 二阶可导，满足方程 $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + a^2y = 0$ ，
作变量替换 $x = \sin t$ 后， y 作为 t 的函数满足的方程是 $\frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0$ 。

40、设 $f(x) = \ln \frac{1-2x}{1+3x}, n \geq 2$, 则 $f^{(n)}(0) = \text{---} \cdot (-1)^{n-1}(n-1)! [(-2)^n - 3^n]$

41、设 $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, 则 $f^{(n)}(0) = \dots$.

$$\begin{cases} 2^{n-1} \left[\left(\frac{n-1}{2} \right)! \right]^2, n \text{ 为奇数} \\ 0, n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

42、设 $y = y(x)$ 是由方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 确定,则 $y = y(x)$ 的极值点是 --.

(ID: djky66)

$x = 1$

43、函数 $y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)^2}$ 的单调增区间是 ---, 单调减区间是 ---, 极值是 ---, 凹区间是 ----, 凸区间是 ----.

44、设 $(1,3)$ 是曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 14$ 的拐点, 则 $a = \text{---}, b = \text{---}$. $-3, -9$

(ID: djky66)

45、设 $f(x) = 3x^2 + Ax^{-3} (x > 0)$, A 为正常数, 则 A 至少为 $-$ 时, 有 $f(x) \geq 20$.

(ID: djky66)

46、函数 $f(x) = |4x^3 - 18x^2 + 27|$ 在 $[0, 2]$ 上的最小值等于 $-$, 最大值等于 $-$.

(ID: djky66)

0,27

47、设有界函数 $f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b$, 则 $b = \dots$ 0

(ID: djky66)

48、曲线 $y = \sqrt{4x^2 + x \ln(2 + \frac{1}{x})}$ 的全部渐近线是 ----.

$$x = -\frac{1}{2}, y = \pm 2 \ln 2x \pm (\frac{1}{4} \ln 2 + 1)$$

49、设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x - 1} = 2$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $x=0$ 处的法线方程为 --.

$$y = -\frac{1}{2}x$$

50、设 $y = y(x)$ 二阶可导, 且 $\frac{dy}{dx} = (4 - y)y^\beta$ ($\beta > 0$), 若 $y = y(x)$

的一个拐点是 $(x_0, 3)$, 则 $\beta = \dots$.

146、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x^2}{x^3}, & x > 0 \\ g(x) \arcsin^2 x, & x \leq 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 是有界函数,

答案: C

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

- (A) 极限不存在. (B) 极限存在, 但不连续.
(C) 连续, 但不可导. (D) 可导.

147、设 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x| < 1 \\ x^4 - bx^2 + c, & |x| \geq 1 \end{cases}$ 可导, 则 $(b, c) = \text{---}$

答案: A

- (A) $(2, 1)$. (B) $(1, 0)$. (C) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. (D) $(3, 2)$.

148、下列函数 $f(x)$ 中，导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续的是

(ID: djky66)

$$(A) \quad f(x) = \begin{cases} x^{\frac{4}{3}} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (B) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

答案: A

$$(C) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad (D) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

149、 设 $f(0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2}$ 存在是 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的

答案: B

(A) 充分非必要条件.

(B) 必要非充分条件.

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分也非必要条件

150、 设 $f(x)$ 是以 3 为周期的可导函数, 且 $f'(4) = 1$, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-3\tanh h)}{h} \text{ 等于}$$

答案: C

- (A) 5. (B) 3. (C) 4. (D) 7.

151、设函数 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续, $f(x) = |x-a|g(x)$ 在 $x=a$ 处可导,

则 $g(a)$ 满足

答案: C

(A) $g(a) = a$. (B) $g(a) \neq a$. (C) $g(a) = 0$. (D) $g(a) \neq 0$.

152、设 $f(x) = |x| \sin^2 x$ ，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $n =$

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. 答案：C

153、设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分必要条件是

答案：B

(A) $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$.

(B) $f(a)=0$ 且 $f'(a) \neq 0$.

(C) $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$.

(D) $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$.

154、设 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = a$ ，则

- (A) $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处必可导且 $f'(x_0) = a$.
- (B) $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处必连续，但未必可导.
- (C) $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处必有极限，但未必连续.
- (D) 以上结论都不对.

答案：D

155、设 $f(x)$ 为连续函数, $g(x) = \int_{-x}^0 tf(x+t)dt$, 则 $g'(x) =$

(A) $-\int_0^x f(u)du$. (B) $\int_0^x f(u)du$.

(C) $-\int_0^{-x} f(u)du$. (D) $\int_0^{-x} f(u)du$.

答案: A

156、设常数 $a > 1$, $y = x$ 为曲线 $y = a^x$ 的切线, 则

答案: B

(A) $a = e$, 切点为 (e, e) . (B) $a = e^{\frac{1}{e}}$, 切点为 (e, e) .

(C) $a = e$, 切点为 $(e^{\frac{1}{e}}, e^{\frac{1}{e}})$. (D) $a = e^{\frac{1}{e}}$, 切点为 $(e^{\frac{1}{e}}, e^{\frac{1}{e}})$.

157、设 $f(0) = 0$, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为严格单调增函数, 则函数

$$g(x) = \frac{1-f(x)}{x} \text{ 在 } (0, +\infty)$$

答案: D

(A)有界函数. (B)无界函数. (C) 单调增函数. (D)单调减函数.

158、设 $f(x)$ 在 x_0 可导, 且 $f'(x_0) > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 使得

(A) $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 单调上升.

(B) $f(x) > f(x_0), x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$.

(C) $f(x) > f(x_0), x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

(D) $f(x) < f(x_0), x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

答案: C

159、 $f(x)$ 对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$ 满足方程 $(x-1)f''(x) + 2(x-1)[f'(x)]^3 = 1 - e^{1-x}$, 且 $f(x)$ 在 $x = a (a \neq 1)$ 处 $f'(a) = 0$, 则 $x = a$

(A)是 $f(x)$ 的极小值点. (B) 是 $f(x)$ 的极大值点.

(C)不是 $f(x)$ 的极值点. (D) 是 $f(x)$ 的拐点.

答案: A

设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f'(1) = 0, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x)}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}$, 则

答案: B

(A) $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $(1, f(1))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $f(1)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(1, f(1))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

161、设 $f(x) = \begin{cases} 2 - \cos x, & x \leq 0 \\ \sqrt{x+1}, & x > 0 \end{cases}$, 则

答案: C

- (A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0,1)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.
- (B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.
- (C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.
- (D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0,1)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

162、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义,则下述命题中正确的是

(A) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导且单调增加,则对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $f'(x) > 0$.

答案: D

(B) 若 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值,则 $f'(x_0) = 0$.

(C) 若 $f''(x_0) = 0$,则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) 若 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, 则 x_0 一定不是 $f(x)$ 的极值点.

163、设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, $f(a) = \max_{[a, b]} f(x)$, 则

- (A) $f'_+(a) = 0$. (B) $f'_+(a) \geq 0$. 答案: D
(C) $f'_+(a) < 0$. (D) $f'_+(a) \leq 0$.

164、数列 $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$ 的最大项为

答案: B

- (A) $\sqrt{2}$. (B) $\sqrt[3]{3}$. (C) $\sqrt[4]{4}$. (D) $\sqrt[5]{5}$.

165、设 $f(x) = ax^3 - 6ax^2 + b$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值为 3，最小值是 -29，且 $a > 0$ ，则

答案：C

(A) $a = 2, b = -29$.

(B) $a = 3, b = 2$.

(C) $a = 2, b = 3$.

(D) 以上都不对.

167. 以下四个命题中, 正确的是

- (A) 若 $f'(x)$ 在 (a, b) 内连续, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界.
- (B) 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界.
- (C) 若 $f'(x)$ 在 (a, b) 内有界, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界.
- (D) 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界, 则 $f'(x)$ 在 (a, b) 内有界.

答案: C

168 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 可导, 则 $f'(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 有界是 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 有界的

(A) 必要非充分条件.

(B) 充分非必要条件.

(C) 充分且必要条件

(D) 既非充分也非必要条件

答案: D

169、函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续，其二阶导函数的图形如图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数是

答案：C

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

170、设 $[0, +\infty]$ 区间上 $y = f(x)$ 导函数的图形如图所示，
则曲线 $y = f(x)$ 的拐点个数是

答案：C

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

171、设曲线 $y = \sqrt[3]{x-4}$, 则

答案: B

- (A) 曲线的凸区间为 $(-\infty, 4)$, 凹区间为 $(4, +\infty)$, 拐点为 $(4, 0)$.
- (B) 曲线的凹区间为 $(-\infty, 4)$, 凸区间为 $(4, +\infty)$, 拐点为 $(4, 0)$.
- (C) 曲线的凸区间为 $(-\infty, 4)$, 凹区间为 $(4, +\infty)$, 无拐点.
- (D) 曲线的凹区间为 $(-\infty, 4)$, 凸区间为 $(4, +\infty)$, 无拐点.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

172、函数 $f(x) = 3 \arccos x - \arccos(3x - 4x^3)$ 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

(A) 单调上升.

(B) 单调下降.

答案: C

(C) 为常数.

(D) 有两个单调性区间.

设 $f(x)$ 在 $(1-\delta, 1+\delta)$ 内存在导数, $f'(x)$ 单调减少, 且 $f(1) = f'(1) = 1$, 则

- (A) 在 $(1-\delta, 1)$ 和 $(1, 1+\delta)$ 内均有 $f(x) < x$.
- (B) 在 $(1-\delta, 1)$ 和 $(1, 1+\delta)$ 内均有 $f(x) > x$.
- (C) 在 $(1-\delta, 1)$ 内有 $f(x) < x$, 在 $(1, 1+\delta)$ 内有 $f(x) > x$.
- (D) 在 $(1-\delta, 1)$ 内有 $f(x) > x$, 在 $(1, 1+\delta)$ 内有 $f(x) < x$.

174、曲线 $y = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

答案：D

- (A)既有垂直又有水平与斜渐近线. (B)仅有垂直渐近线.
(C)只有垂直与水平渐近线. (D) 只有垂直与斜渐近线.

175、函数 $f(x) = \cos x + x \sin x$ 在 $(-2\pi, 2\pi)$ 内的零点个数为
 (A) 1 个. (B) 2 个. (C) 3 个. (D) 4 个. 答案: D