98年国赛B题---灾情巡视

例 4.11 （关于灾情巡视问题的分析与解答，节选）图 4.15 为某县的乡（镇）、村公路网示意图，公路边的数字为该路段的公里数. 夏天该县遭受水灾. 为考察灾情，组织自救，县领导决定，带领有关部门负责人到全县各乡（镇）、村巡视. 巡视路线为从县政府所在地出发，走遍各乡（镇）、村，又回到县政府所在地.

(1) 若分三组（路）巡视，试设计总路程最短且各组尽可能均衡的巡视路线.

(2) 在上述关于 T,t 和 V 的假定下，如果巡视人员足够多，完成巡视的最短时间是多少？给出在这种最短时间完成巡视的要求下，你认为最佳的巡视路线.

分析 本题是一类图上点的遍历性问题，即要用若干条回路覆盖图上所有的顶点，并使某些指标达到最优.

一种通常的思路即将题目中的求最佳巡视路线的问题转化为图论中的旅行商（哈密顿回路）的问题. 将题目所给的地图视为一个赋权无向连通图. 关于灾情巡视时的分组实际上就是将原图进行顶点集合的划分而得到一些子图，然后从总体上得到一些回路使得这些回路可以经过顶点集合中的每一个元素. 可是在解题的过程中我们可以发现，如果要求所有的推销员回路的路程最短时会出现某一条回路和另一条回路相差较大，因而会使一组巡视完后等待另一组较长的时间，因此这种较短路程并没有起到节约时间的作用. 而从节约时间的角度考虑，我们应该使分组中的每一条回路的路程相差不大，于是有我们定义的一个均衡度来描述. 综合考虑总路程最短和各组巡视路线尽可能均衡的要求，我们可以近似找到一个较好的分组方案.

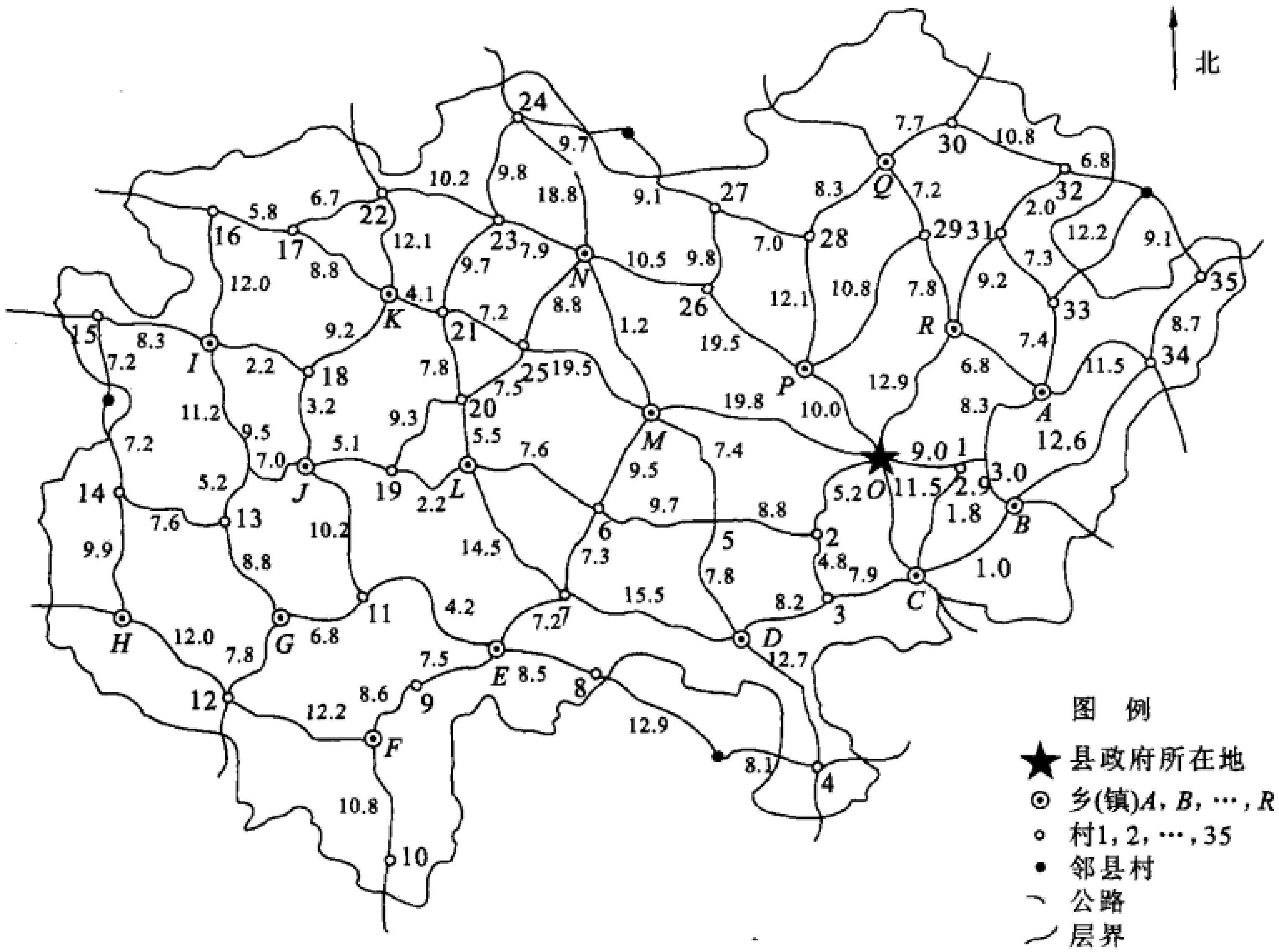

图 4.15　灾情巡视问题

分组巡视的最短路是多旅行商问题，旅行商问题有两种形式：过每点一次仅且一次；过每点至少一次．理论上，两点间距离满足三角不等式时，两种形式等价；否则应作修改将后者化为前者，才能用旅行商问题的典型算法，实际上本题只需注意个别处即可．

简单介绍模型的建立与求解：本题要求在某个给定的县的乡、村公路网中，寻找从县政府所在地（图中的 O 点）出发，走遍各乡、村，又回到县政府所在地，使得总路程以及巡视时间尽量少．我们可以对公路网图进行处理，每个乡或村视为图中的一个结点，各乡或村之间的公路视为图中对应结点间的边，各条公路的长度视为对应边上的权，于是公路网就转化为图论中的加权网络图，问题就变为一个图论的问题了，即在给定的加权网络图中寻找从 O 出发，行遍所有顶点至少一次再回到 O 点，使得总权最小．

(1) 若分三组巡视，设计总路程最短且各组尽可能均衡的巡视路线．这个问题是一个多个推销员的最佳推销员回路的问题．即要对加权图 G 中的顶点集 V 进行划分，将其分为 3 份，于是得到 $G_i=G(V_i,E_i)$ $(i=1,2,3)$．用避圈法给出了 G 的最小生成树如图 4.16 所示．

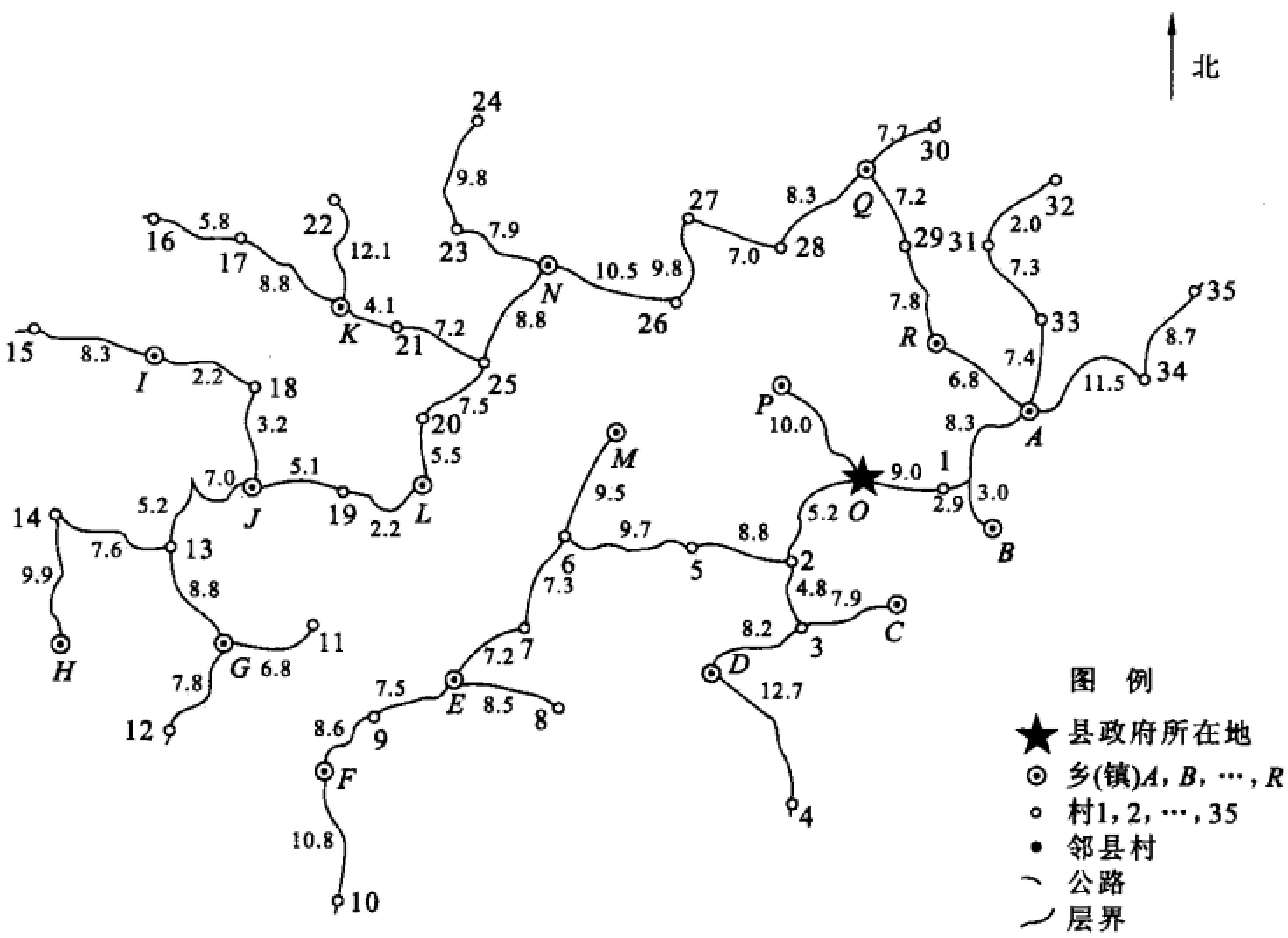

图 4.16　灾情巡视路线的最小生成树

其中最小生成树的边权总和为 424.8 km. 我们需要对上面的顶点进行划分，可以发现图 4.16 可以按照各个顶点的聚集方式及方位分成三组. 我们按照单一行遍某一地区的原则进行原图上的寻路工作，先划出顶点，就是运用中国邮递员问题的算法添加路线边，得到一个邮递员回路，然后寻找局部最优解，然后考虑总体，进行局部调整和优化，现给出下面的划分方案：

第一组为 *O*-1-*B*-*A*-34-35-33-31-32-30-*Q*-28-27-24-23-*N*-26-*P*-29-*R*-*O*，总长度为 205.1 km；

第二组为 *O*-*M*-25-21-*K*-22-17-16-*I*-15-*I*-18-*J*-19-20-*L*-6-5-2-*O*，总长度为 160.7 km；

第三组为 *O*-2-3-*D*-7-*E*-11-*G*-13-14-*H*-12-*F*-10-*F*-9-*E*-8-4-*D*-3-*C*-*O*，总长度为 209.9 km；

巡视总路程为 575.7 km.

$$\alpha=\frac{209.9-160.7}{209.9}=23\%$$

α 比较大，我们需要进行一些调整，发现改变个别点后可以使均衡程度得到较好的水平，但是需要增加巡视总路程.

第一组为 *O*-1-*B*-*A*-34-35-33-31-32-30-*Q*-28-27-24-23-*N*-26-*P*-29-*R*-*O*，总

长度为 205.4 km;

第二组为 O-M-25-21-K-22-17-16-I-15-14-13-J-18-J-19-20-L-6-5-2-O，总长度为 187.3 km;

第三组为 O-2-3-D-7-E-11-G-12-H-12-F-10-F-9-E-8-4-D-3-C-O，总长度为 203.4 km.

$$\alpha=\frac{205.4-187.3}{205.4}=8.9\%$$

$\alpha\leqslant 10\%$，均衡程度比较好. 可以采用这种分组方法.

(2) 如果巡视组数已定，要求尽快完成巡视，试讨论 T,t,V 的变化对于最佳巡视路线的影响.

如果分组为 3 时我们有如下的巡视时间的表达式：

$$T_i=N_i\times T+n_i\times t+l_i\div V,\quad i=1,2,3$$

由上面的式子我们可以发现：

① 当 N_i,n_i,l_i 的数目完全相同时，T,t,V 的改变对于最佳巡视路线没有影响.

② 我们将 T 和 t 做一些处理，将它们统一为时间参数，令 $T=\theta t$；于是可以将上面的公式写为

$$T_i=(N_i\times\theta+n_i)\times t+l_i\div V,\quad i=1,2,3$$

如果 V 不变，t 变化，这时有：若 t 变化幅度比较小，那么对于最佳巡视路线的影响不大；若 t 变化幅度很大，则这时各个小组巡视时在各乡村的停留的数目应该尽可能的均衡，才能保证它的改变对于巡视路线的影响不大，否则，对于巡视路线的影响就十分明显了，所以必须对巡视路线进行调整.

如果 t 不变，V 变化，这时同样有：若 V 变化幅度比较小，那么对于最佳巡视路线的影响不大；若 V 变化幅度很大，则这时各个小组巡视时 l_i 应该保证比较均衡，这样才能保证它的改变对于巡视路线的影响不大，否则，对于巡视路线的影响就十分明显了，所以必须对巡视路线进行调整.

模型的推广 类似这类关于图论的哈密顿圈和最佳推销员回路的问题至今还没有一个能够通用的解决算法，但是现在已经出现了较多的近似最优解的求解算法，它们都有一些局限性，但是我们可以应用这些算法解决实际生活中的很多问题，如旅游景点的最佳方案、车辆运输时的路线选择、一般的巡视等问题，具有十分广泛的实际应用和经济价值.

模型的分析

(1) 本例应用了逐次改进算法，它是一个近似算法，计算的复杂程度属于多项式，但是求出的解不一定是最优的.

(2) 对于 T,t 和 V 的变化对最优巡视路线的影响只是给出粗略的分析，没有给出最终的表达式.

(3) 关于第一问和第二问我们只是经过有限次的分析和比较得到我们自己认为较好的分组方案.

(4) 按照我们取分组的方法,可能由于各人对于边界处理方法的不同,可以得到有较大不同的分组情况,但是经过处理后只要它们可以达到一定的评定指标时,都可以接受.