|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | | |
| Федеральное государственное бюджетное  образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» | | |
|  | | |
| Кафедра прикладной математики | | |
| Домашнее задание № 1 | | |
| по дисциплине «Методы оптимизации» | | |
| **Функционал. Вариация функционала.** **Простейшая задача вариационного исчисления** | | |
|  | | |
|  | Бригада 4 | мусаткин илья |
| Группа ПМ-13 | Вострецова екатерина |
|  | окулевич алексей |
|  | шарапова екатерина |
|  | магнитов денис |
|  | един даниил |
| Преподаватель | тракимус юрий викторович |
|  |  |
| Новосибирск, 2024 | | |

**ФУНКЦИОНАЛ. БЛИЗОСТЬ КРИВЫХ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИОНАЛА**

**Установить порядок близости кривых:**

1. , где  достаточно велико, и  на .

**Решение**

Так как модуль разности , то на всем отрезке  эта разность по модулю мала при достаточно большом .

Рассмотрим близость первого порядка: . То есть на всем отрезке  эта разность по модулю мала при достаточно большом , а значит кривые обладают близостью первого порядка.

Рассмотрим близость второго порядка: . То есть на всем отрезке  эта разность по модулю стремится к 1 при достаточно большом , а значит кривые **не** обладают близостью второго порядка.

Ответ: кривые обладают близостью первого порядка.

1. , где  достаточно велико, и  на .

**Решение**

Так как модуль разности , то на всем отрезке  эта разность по модулю мала при достаточно большом .

Рассмотрим близость первого порядка: . То есть на всем отрезке  эта разность по модулю мала при достаточно большом , а значит кривые обладают близостью первого порядка.

Рассмотрим близость второго порядка: . То есть на всем отрезке  эта разность по модулю мала при достаточно большом , а значит кривые обладают близостью второго порядка.

Рассмотрим близость k-ого порядка:  для . То есть на всем отрезке  эта разность по модулю мала при достаточно большом , а значит кривые обладают близостью любого порядка.

Ответ**:** кривые обладают близостью любого порядка.

1. , где  достаточно велико, и  на .

**Решение**

Так как модуль разности . На всем отрезке  , а значит . То есть эта разность по модулю мала при достаточно мала при достаточно большом .

Рассмотрим близость первого порядка: . То есть на всем отрезке  эта разность по модулю мала при достаточно большом , а значит кривые обладают близостью первого порядка.

Рассмотрим близость второго порядка: . То есть на всем отрезке  эта разность по модулю мала при достаточно большом , а значит кривые обладают близостью второго порядка.

Рассмотрим близость k-ого порядка:  для . То есть на всем отрезке  эта разность по модулю мала при достаточно большом , а значит кривые обладают близостью любого порядка.

Ответ**:** кривые обладают близостью любого порядка.

**Найти расстояние  между кривыми на указанных интервалах:**

1. ,  на .

**Решение**

По определению расстояние . Найдем .

Проверим на наличие максимума внутри отрезка. Найдем производную функции.

.

 при .

.

На конце  функция  обращается в нуль, а на конце  .

Во внутренней точке функция достигает своего максимума, а значит расстояние между кривыми равно .

Ответ: .

1. ,  на .

**Решение**

По определению расстояние . Найдем .

На конце  функция  обращается в нуль, а на конце  .

То есть функция достигает своего максимума при , а значит расстояние между кривыми равно .

Ответ: .

1. ,  на .

**Решение**

По определению расстояние . Найдем .

Найдем значение функции  на концах отрезка.

, .

Проверим на наличие максимума внутри отрезка. Найдем производную функции.



 при . 

То есть функция достигает своего максимума при , а значит расстояние между кривыми равно .

Ответ: .

1. Найти расстояниемежду кривыми   на .

**Решение**

Для нахождения расстояния первого порядка воспользуемся формулой:

где 

Найдем производные 



Подставив данные, получаем:

, где =>

Пусть 



Найдем 

  
Ответ: .

1. Найти расстояниемежду кривыми   на .

**Решение**

Для нахождения расстояния второго порядка воспользуемся формулой:

где 

Найдем производные первого и второго порядка



Пусть 



, т.к. функция возрастающая, максимальное значение будет в точке 





Ответ: 

1. Найти расстояниемежду кривыми   на .

**Решение**

Для нахождения расстояния первого порядка воспользуемся формулой:

где 

Подставив данные, получаем:







Ответ: 

**Исследовать на непрерывность следующие функционалы в окрестности прямой  а) в ее сильной окрестности; б) в ее слабой окрестности.**

1. 

**Решение**

а) Зададим и выберем кривые сравнения  

не стремиться к 0 при => данный функционал разрывный на прямой y = 0 в сильной окрестности.

б) Рассмотрим последовательность функций стремящуюся к при в ее слабой окрестности.

 данный функционал непрерывный на прямой y = 0 в слабой окрестности.

Ответ: а) разрывный б) непрерывный

1. 

**Решение**

а) Зададим и выберем кривые сравнения 



Кривые в смысле близости нулевого порядка стремится к y = 0



Функционал разрывный на прямой y = 0 в ее сильной окрестности.

б) Рассмотрим любую последовательность функциистремящуюся к y = 0, при  в ее слабой окрестности

 функционал непрерывен на y = 0 в ее слабой окрестности.

Ответ: а) разрывный б) непрерывный

1. 

**Решение**

а) Зададим и выберем кривые сравнения 



Функционал разрывный на прямой y = 0 в ее сильной окрестности.

б) Рассмотрим любую последовательность функциистремящуюся к y = 0,

при в ее слабой окрестности



функционал непрерывен в слабой окрестности

Ответ: а) разрывный б) непрерывный

1. 

**Решение**

а) Зададим и выберем кривые сравнения 



Функционал разрывный на прямой y = 0 в ее сильной окрестности.

б) Рассмотрим последовательность функций стремящуюся к при в ее слабой окрестности.

 данный функционал непрерывный на прямой y = 0 в слабой окрестности.

Ответ: а) разрывный б) непрерывный

**ВАРИАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИОНАЛА. НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА**

1. Найти , если 

**Решение**



Ответ: 

**Найти вариацию функционалов.**

1. 

**Решение**

По второму определению вариации функционала:



Вычислим производную  по параметру :



При 



По условию 



Тогда вариация функционала:



Ответ: 

1. 

**Решение**

По второму определению вариации функционала:



Вычислим производную  по параметру :



При 





Тогда вариация функционала:



Ответ: 

1. 

**Решение**

По второму определению вариации функционала:



Вычислим производную  по параметру :



При 





Тогда вариация функционала:



Ответ: 

1. 

**Решение**

По второму определению вариации функционала:



Вычислим производную  по параметру :



При 





Тогда вариация функционала:



Ответ: 

1. 

**Решение**

По второму определению вариации функционала:



Вычислим производную  по параметру :



При 





Тогда вариация функционала:



Ответ: 

**ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА**

**Найти экстремали функционала**

1. 

**Решение**

Здесь , тогда уравнение Эйлера имеет вид, откуда  где 

Получаем уравнение:



Ответ: 

1. 

**Решение**

Здесь , тогда уравнение Эйлера имеет вид , откуда





Ответ: 

1. 

**Решение**

Здесь  и, по аналогии с предыдущим, уравнение Эйлера имеет вид , откуда 



Ответ: 

1. 

**Решение**

Здесь , уравнение Эйлера имеет вид , откуда 



Ответ: 

**Найти экстремали в вариационных задачах.**

1. 

**Решение**

Здесь , выпишем компоненты уравнения Эйлера:

   

Уравнение Эйлера имеет вид 

Получаем уравнение:



Подставим краевые условия:



Ответ: 

1. 

**Решение**

Здесь 

Уравнение Эйлера для такого случая имеет вид  где

  



Подставим краевые условия:





Ответ: 

1. 

**Решение**

Здесь 

Уравнение Эйлера для такого случая имеет вид 

  

Получаем уравнение:  или же 

Сделаем замену: пусть  , тогда уравнение принимает вид



Подставим краевые условия:





Тогда при 



Если же 



Ответ:  

1. 

**Решение**

Уравнение Эйлера: 

Уравнение в развернутом виде:

Здесь .

Найдем нужные производные



Тогда уравнение Эйлера имеет вид:



Сократим на 2 и получим уравнение Эйлера: 

Решим дифференциальное уравнение, перенесем слагаемое: 

1) Решим однородное уравнение: 

Замена переменных: , сократим на  и получим характеристическое уравнение:



Находим корни характеристического уравнения



Тогда решением однородного уравнения будет:



2) Методом неопределенных коэффициентов найдем частное решение, и искать будем в виде:



Вычисляем производные



Подставляем в исходное уравнение



Находим коэффициенты



Подставив в общий вид частного решения, получим: 

Тогда общее решение уравнения Эйлера: 

Подставим граничные условия в общее решение:



Следовательно, экстремалями являются кривые , где С – произвольная постоянная.

Ответ: 

1. 

**Решение**

Уравнение Эйлера:



Уравнение в развернутом виде: 

Здесь .

Найдем нужные производные



Тогда уравнение Эйлера имеет вид: 

Вытащим общий множитель за скобки и получим уравнение Эйлера: 

Решим дифференциальное уравнение.

Замена 



Делим обе части уравнения на и перенесем слагаемое:



1) Решим однородное уравнение: 

Замена переменных: , сократим на  и получим характеристическое уравнение:



Находим корни характеристического уравнения



Тогда решением однородного уравнения будет:



2) Методом неопределенных коэффициентов найдем частное решение, и искать будем в виде:



Вычисляем производные



Подставляем в исходное уравнение



Находим коэффициенты



Подставив в общий вид частного решения, получим: 



Обратная замена: 

Тогда общее решение уравнения Эйлера: 

Подставим граничные условия в общее решение:

 

Следовательно, экстремалью является кривая .

Ответ: 

1. 

**Решение**

Уравнение Эйлера: 

Уравнение в развернутом виде:

Здесь .

Найдем нужные производные



Тогда уравнение Эйлера имеет вид:



Сократим на 2 и получим уравнение Эйлера: 

Решим дифференциальное уравнение.



Тогда общее решение уравнения Эйлера: 

Подставим граничные условия в общее решение:

  

Следовательно, экстремалью является кривая .

Ответ: 

1. 

**Решение**

Уравнение Эйлера:

Уравнение в развернутом виде:

Здесь .

Найдем нужные производные



Тогда уравнение Эйлера имеет вид:



Сократим на 2 и получим уравнение Эйлера: 

Решим дифференциальное уравнение.



Тогда общее решение уравнения Эйлера: 

Подставим граничные условия в общее решение:

 

Следовательно, экстремалью является кривая .

Ответ: 

1. 

**Решение**

Уравнение Эйлера:

Уравнение в развернутом виде:



Здесь .

Найдем нужные производные



Тогда уравнение Эйлера имеет вид:



Сократим на 2 и получим уравнение Эйлера: 

Решим дифференциальное уравнение.



Тогда общее решение уравнения Эйлера: 

Подставим граничные условия в общее решение:



Следовательно, экстремалями являются кривые .

Ответ: 

**Найти экстремали в вариационных задачах, используя частные случаи интегрируемости уравнения** **Эйлера:**

1. 

**Решение**

Уравнение Эйлера: 

Здесь F линейно зависит от y’, т.е. .

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид



Здесь имеем,  и 

значит, подынтегральное выражение  есть полный дифференциал. Следовательно, интеграл не зависит от пути интегрирования:

по какой бы кривой y(x), проходящей через точки (a,A) и (b,B), мы не интегрировали. Вариационная задача не имеет смысла.

Ответ: Интеграл не зависит от пути интегрирования; вариационная задача не имеет смысла.

1. 

**Решение**

Уравнение Эйлера: 

Здесь F линейно зависит от y’, т.е. .

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид

 или



Первое граничное условие y(0)=0 удовлетворяется, но второе граничное условие удовлетворяется лишь при . Если же , то экстремали, удовлетворяющиеся граничным условиям, не существует.

Ответ: y = 0 , если  ; при гладкой экстремали не существует.

1. 

**Решение**

Уравнение Эйлера: 

Здесь F не зависит от x, т.е. .

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид









 - общий вид решения.

Подставим граничные условия в общее решение:

 ⬄ ⬄⬄

Итак, 

Ответ: .

1. 

**Решение**

Уравнение Эйлера: 

Здесь F не зависит от x, т.е. .

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид









 - общий вид решения.

Подставим граничные условия в общее решение:

 ⬄ ⬄



, причем  не является решением.

Итак, 

Ответ: .

1. 

**Решение**

Уравнение Эйлера: 

Здесь F не зависит от y, т.е. .

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид





Подставим граничные условия в общее решение:

 ⬄ ⬄

Итак, .

Ответ: .

1. 

**Решение**

Уравнение Эйлера: 

Здесь F не зависит от x, т.е. .

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид







Общее решение имеет вид: 

Подставим граничные условия в общее решение:

 ⬄ ⬄

Итак, .

Ответ: .

1. 

**Решение**

Уравнение Эйлера: 

Здесь F не зависит от x, т.е. .

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид







Общее решение имеет вид: 

Подставим граничные условия в общее решение:

 ⬄ ⬄⬄

Итак, .

Ответ: .

1. 

**Решение**

Уравнение Эйлера: 

Здесь F не зависит от y’, т.е. .

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид

.

Проверим, существует ли такая кривая, подставив граничные условия:

 ⬄ 

Граничные условия не выполняются, значит экстремалей нет.

Ответ: нет экстремалей.

1. 

**Решение**

Уравнение Эйлера: 

Здесь F не зависит от y’, т.е. .

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид

.

Заметим, что на действительно прямой выражение  всегда больше нуля, а значит на данной кривой нет экстремалей.

Ответ: нет экстремалей.