2025 考研数学（一） 真题

试卷及解析

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1．已知函数 $f\left(x\right)=\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\sin t\mathrm{d}t$， $g\left(x\right)=\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\bullet\sin^2 x$，则

A． $x=0$ 是 $f\left(x\right)$ 的极值点，也是 $g\left(x\right)$ 的极值点．

B． $x=0$ 是 $f\left(x\right)$ 的极值点，$\left(0,0\right)$ 是曲线 $y=g\left(x\right)$ 的拐点．

C． $x=0$ 是 $f\left(x\right)$ 的极值点，$\left(0,0\right)$ 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的拐点．

D． $\left(0,0\right)$ 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的拐点，$\left(0,0\right)$ 也是曲线 $y=g\left(x\right)$ 的拐点．

【答案】B

【解析】

$f'(x)=e^{x^2}\sin x, f''(x)=2xe^{x^2}\sin x+e^{x^2}\cos x$

$f'(0)=0, f''(0)=1>0$.

$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点.

$g'(x)=e^{x^2}\sin^2 x+\sin 2x\int_0^x e^{t^2}dt$,

$g''(x)=e^{x^2}\sin 2x+2xe^{x^2}\sin^2 x+\sin 2xe^{x^2}+2\cos 2x\int_0^x e^{t^2}dt$

$g'(0)=0,\quad g''(0)=0,\quad g'''(0)>0$.

$(0,0)$ 是 $y=g(x)$ 的拐点.

2．已知级数：① $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}$；② $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$，则

A．①与②均条件收敛．

B．①条件收敛，②绝对收敛．

C．①绝对收敛，②条件收敛．

D．①与②均绝对收敛．

【答案】B

【解析】

$$\left|\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}\right|=\left|\sin\left(\frac{n^3\pi}{n^2+1}-n\pi\right)\right|=\left|\sin\frac{n}{n^2+1}\pi\right|\sim\frac{n}{n^2+1}\pi\sim\frac{1}{n}\pi .$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 $\therefore$ 不是绝对收敛.

$\sin\frac{\left(n^3\pi\right)}{n^2+1}=(-1)^n\sin\left(\frac{n^3\pi}{n^2+1}-n\pi\right)=(-1)^n\sin\frac{n}{n^2+1}\pi$，为交错级数.

$sin\frac{n}{n^2+1}\pi$ 递减，$\therefore$ 条件收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right).$$

$$\left|(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)\right|=\left|-\frac{1}{3}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$ 绝对收敛

3．设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上可导，则

A．当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在.

B．当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

C．当 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

D．当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 存在.

【答案】D

【解析】A 错误，反例：

$$f(x)=\frac{\sin x^2}{x}, \lim_{x\to+\infty} f(x)=0,\text{但} \lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2\cos x^2-\sin x^2}{x^2},\text{极限不存在.}$$

B 错误，反例：$f(x)=\sqrt{x}, f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0,$ 极限存在，但 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 极限不存在.

C 错误，反例:

$$f(x)=\cos x,\text{则} \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}\text{存在，但} \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\cos x\text{不存在.}$$

D 正确，用 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{1}=\mathrm{A}$，故选 D .

4．设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_{4-x^2}^{4} f(x,y)\mathrm{d}y=$

A．$\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{4-y}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$.

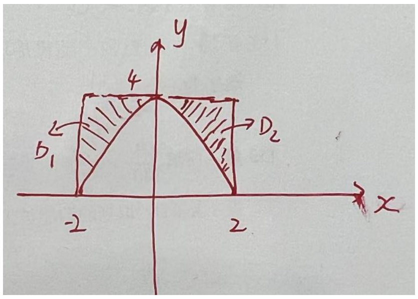
B．$\int_0^4\left[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{4-y}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$.

C．$\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{2}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$.

D． $2\int_0^4 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x,y)\mathrm{d}x$.

【答案】A

【解析】由题易知，此二重积分积分区域为



$\mathrm{D}=\left\{(x,y)\middle|4-x^2\le y\le 4,-2\le x\le 2\right\}$，对应图像为上图所示。

记 $\mathrm{D}_1=\left\{(x,y)\middle|4-x^2\le y\le 4,-2\le x\le 0\right\}$， $\mathrm{D}_2=\left\{(x,y)\middle|4-x^2\le y\le 4,0\le x\le 2\right\}$，且

$\mathrm{I}=\int_{-2}^2 \mathrm{d}x\int_{4-x^2}^4 f(x,y)\mathrm{d}y$，则 $\mathrm{I}=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，交换积分次序得

$$\mathrm{I}=\int_0^4 \mathrm{d}y\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^4 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x,y)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

故 A 正确。

5．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 的正惯性指数

A．0．　　　　B．1．

C．2．　　　　D．3．

【答案】B

【解析】

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\left(\lambda E-A\right)=\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda&0\\-1&0&\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&-1\\0&\lambda&-\lambda\\-1&0&\lambda\end{pmatrix}\to\lambda\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&-1\\0&1&-1\\-1&0&\lambda\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=\lambda\left[\lambda(\lambda-1)-1-1\right]\\&=\lambda(\lambda^2-\lambda-2)\\&=\lambda(\lambda-2)(\lambda+1)\end{aligned}$$

解得

$$\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=-1$$

故正惯性指数为 1，选 B.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 n 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，且 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，关于 x,y,z 的方程组 $x\boldsymbol{\alpha}_1+y\boldsymbol{\alpha}_2+z\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4$ 的几何图形是

A．过原点的一个平面.

B．过原点的一条直线.

C．不过原点的一个平面.

D．不过原点的一条直线.

【答案】D

【解析】记 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$，由 α_1,α_2 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，可得 $r\left(A\right)=2$。记 $\overline{A}=\left(A\middle|\alpha_4\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)$，再由 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4=0$，则 $r\left(\overline{A}\right)=2$。于是 $Ax=\alpha_4$ 有无穷多解。则 $x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3=\alpha_4$ 等价于 $\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\cdot\left(x,y,z\right)^{\mathrm{T}}=\alpha_4$，即 $A\cdot\left(x,y,z\right)^{\mathrm{T}}=\alpha_4$。

若过原点，则 $\alpha_4=0$ 与 α_1,α_2 线性无关矛盾，故不过原点。

$x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3=\alpha_4\Leftrightarrow\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=a_{14}\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=a_{24}\\\qquad\cdots\\a_{n1}x+a_{n2}y+a_{n3}z=a_{n4}\end{cases}$，由上述分析可知 $r\left(A\right)=r\left(\overline{A}\right)=2$，故两平面交于一条直线，且不过原点。故选 D。

7．设n阶矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$满足$r\left(\boldsymbol{A}\right)+r\left(\boldsymbol{B}\right)+r\left(\boldsymbol{C}\right)=r\left(\boldsymbol{ABC}\right)+2n$，给出下列四个结论：

①$r\left(\boldsymbol{ABC}\right)+n=r\left(\boldsymbol{AB}\right)+r\left(\boldsymbol{C}\right)$;

②$r\left(\boldsymbol{AB}\right)+n=r\left(\boldsymbol{A}\right)+r\left(\boldsymbol{B}\right)$;

③$r\left(\boldsymbol{A}\right)=r\left(\boldsymbol{B}\right)=r\left(\boldsymbol{C}\right)=n$;

④$r\left(\boldsymbol{AB}\right)=r\left(\boldsymbol{BC}\right)=n$.

其中正确结论的序号是

A．①②.　　　　B．①③.

C．②④.　　　　D．③④.

【答案】A

【解析】$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$，满足$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})+r(\boldsymbol{C})=r(\boldsymbol{ABC})+2n$，则

$r(\boldsymbol{A})=1,r(\boldsymbol{B})=1,r(\boldsymbol{C})=2$，排除结论③④，故选 A.

8．设二维随机变量$\left(X,Y\right)$服从正态分布$N\left(0,0;1,1;\rho\right)$，其中$\rho\in\left(-1,1\right)$.若$a,b$为满足$a^2+b^2=1$的任意实数，则$D\left(aX+bY\right)$的最大值为

A．1.　　　　B．2.

C．$1+\left|\rho\right|$.　　　　D．$1+\rho^2$.

【答案】C

【解析】

$$D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY+2ab\rho\cdot1\cdot1$$

$$=a^2+b^2+2ab\rho=1+2ab\rho=1+2a\sqrt{1-a^2}\rho=f(a)$$

$$f'(a)=\rho\left(2\sqrt{1-a^2}+2a\cdot\frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}\right)=2\rho\left(\sqrt{1-a^2}-\frac{a^2}{\sqrt{1-a^2}}\right)=0$$

即 $2\rho\cdot\dfrac{1-a^2-a^2}{\sqrt{1-a^2}}=0$，$2a^2=1\Rightarrow a^2=\dfrac{1}{2},b^2=\dfrac{1}{2}$，于是 $a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。所以最大值为 $1+|\rho|$，故选 C。

9．设 $X_1,X_2,\cdots,X_{20}$ 是来自总体 $B(1,0.1)$ 的简单随机样本.令 $T=\sum_{i=1}^{20}X_i$，利用泊松分布近似表示二项分布的方法可得 $P\{T\le 1\}\approx$

A．$\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.　　B．$\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$.

C．$\dfrac{3}{\mathrm{e}^2}$.　　D．$\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$.

【答案】C

【解析】由题意可知 $T\sim B(20,0.1).np=20\times 0.1=2$

$$P\{T\leqslant 1\}=P\{T=0\}+P\{T=1\}=\frac{2^0}{0!}e^{-2}+\frac{2^1}{1!}e^{-2}=e^{-2}+2e^{-2}=\frac{3}{e^2}$$

10．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,2)$ 的简单随机样本.记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$Z_\alpha$ 表示标准正态分布的上侧 α 分位数.假设检验问题：H_0：$\mu\leqslant 1$，H_1：$\mu>1$ 的显著性水平为 α 的检验的拒绝域为

A．$\left\{(X_1, X_2,\cdots, X_n)\middle|\overline{X}>1+\dfrac{2}{n}Z_\alpha\right\}$.

B．$\left\{(X_1, X_2,\cdots, X_n)\middle|\overline{X}>1+\dfrac{\sqrt{2}}{n}Z_\alpha\right\}$.

C．$\left\{(X_1, X_2,\cdots, X_n)\middle|\overline{X}>1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}Z_\alpha\right\}$.

D．$\left\{(X_1, X_2,\cdots, X_n)\middle|\overline{X}>1+\sqrt{\dfrac{2}{n}}Z_\alpha\right\}$.

【答案】D

【解析】$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>z_\alpha \Rightarrow \overline{X}>\sqrt{\dfrac{2}{n}}z_\alpha+1$，故选 D

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11． $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-1}{\ln x\cdot\ln(1-x)}=$______.

【答案】-1

【解析】

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln x}-1}{-x\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln x}{-x\ln x}=-1$$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<\dfrac{1}{2},\\ x^2, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$ 的傅里叶级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$, $S(x)$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$ 的和函数，则 $S\left(-\dfrac{7}{2}\right)=$______.

【答案】$\dfrac{1}{8}$

【解析】

$$s\left(-\frac{7}{2}\right)=s\left(-\frac{7}{2}+4\right)=s\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}.$$

13. 已知函数 $u(x,y,z)=xy^2z^3$, 向量 $\boldsymbol{n}=(2,2,-1)$, 则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,1,1)}=$______.

【答案】 1

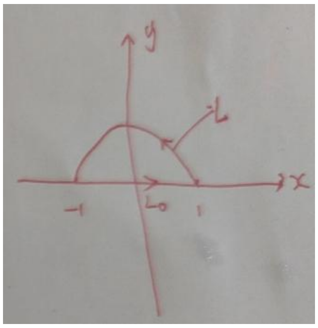
【解析】由题易知，$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2z^3,\frac{\partial u}{\partial y}=2xyz^3,\frac{\partial u}{\partial z}=3xy^2z^2$

则在 $x=1,y=1,z=1$ 处有 $\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=(1,2,3)$

对于向量 $\vec{n}=(2,2,-1)$，归一化可得 $\vec{n}_0=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

故 $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{(1,1,1)}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\vec{n}_0=(1,2,3)\cdot\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)=1\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=1$

14. 已知有向曲线 L 是沿抛物线 $y=1-x^2$ 从点 $(1,0)$ 到点 $(-1,0)$ 的一段，则曲线积分 $\int_L(y+\cos x)\mathrm{d}x+(2x+\cos y)\mathrm{d}y=$______.



【答案】 $\frac{4}{3}-2\sin 1$

【解析】由题易知可作曲线如右图所示.

记 L_0 是从 $x=-1$ 到 $x=1$ 的直线,

并记曲线积 $I=\int_L(y+\cos x)dx+(2x+\cos y)dy$

则在 L_0 与 L 所围的封闭区域可用格林公式

即 $I_1=\oint\limits_{L_0+L}(y+\cos x)dx+(2x+\cos y)dy$

$$=\iint\limits_D 2-1d\sigma=\int_{-1}^1dx\int_0^{1-x^2}dy=\int_{-1}^1(1-x^2)dx=\frac{4}{3}$$

又 $I_2=\int\limits_{L_0}(y+\cos x)dx+(2x+\cos y)dy=\int_{-1}^1\cos xdx=2\sin 1$,故 $I=\frac{4}{3}-2\sin 1$

15. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&-3\\a&3&-4\\b&5&-7\end{pmatrix}$,若方程组 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 不同解，则 $a-b=$______.

【答案】-4

【解析】由题知，$A=\begin{pmatrix}4&2&-3\\a&3&-4\\b&5&-7\end{pmatrix}$，若 $A^2x=0$ 与 $Ax=0$ 同解，则三秩相同，即

$r\left(A\right)=r\left(A^2\right)=r\begin{pmatrix}A\\A^2\end{pmatrix}$。如果 A 可逆，三秩显然相同，则 $A^2x=0$ 与 $Ax=0$ 同解，于是要想 $A^2x=0$ 与 $Ax=0$ 不同解，即 A 不可逆，于是 $\left|A\right|=0$。根据行列式的倍加性质易得

$$\left|A\right|=\left|\begin{pmatrix}4&2&-3\\a&3&-4\\b&5&-7\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}4&2&-1\\a&3&-1\\b&5&-2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}4&0&-1\\a&1&-1\\b&1&-2\end{pmatrix}\right|=4\left(-2+1\right)-\left(a-b\right)$$，令 $\left|A\right|=0$，

有 $a-b=-4$。

16. 设 A,B 为两个随机事件，且 A 与 B 相互独立，已知 $P(A)=2P(B),P(A\bigcup B)=\frac{5}{8},$ 则在事件 A,B 至少有一个发生的条件下，A,B 中恰有一个发生的概率为______.

【答案】 $\frac{4}{5}$

【解析】$P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)$

$=P(A)+P(B)-2P(A)P(B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{5}{8}$，$\Rightarrow 3P(B)-2P^2(B)=\frac{5}{8}$

$24P(B)-16P^2(B)=5,16P^2(B)-24P(B)+5=0$

$\Rightarrow (4P(B)-1)(4P(B)-5)=0$

$P(B)=\frac{1}{4},P(A)=\frac{1}{2}$

$P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-2P(A)P(B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$P=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}}=\frac{1}{2}\times\frac{8}{5}=\frac{4}{5}$

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本题满分 10 分）

计算 $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)} \mathrm{d}x.$

17．解：

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)} dx = \int_0^1 \left(\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\frac{1}{5}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{3}{5}}{x^2-2x+2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{5} \ln|1+x| \Big|_0^1 - \frac{1}{10} \ln\left|x^2-2x+2\right| \Big|_0^1 + \frac{2}{5} \arctan(x-1) \Big|_0^1 = \frac{3}{0} \ln 2 + \frac{1}{10} \pi .$$

18．（本题满分 10 分）

已知函数 $f(u)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内具有 2 阶导数，记 $g(x,y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$, 若 $g(x,y)$ 满足

$$x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1, \text{ 且 } g(x,y)=1, \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(x,x)} = \frac{2}{x}, \text{求 } f(u).$$

解：

令 $u=\frac{x}{y}$, 则 $\frac{\partial g}{\partial x} = f'(u)\frac{1}{y}, \frac{\partial g}{\partial y} = f'(u)\left(-\frac{x}{y^2}\right)$

又 $g(x,x)=f\left(\frac{x}{x}\right)=f(1)=1$， $\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(x,x)} = f'(1)\frac{1}{x} = \frac{2}{x}$, 故 $f'(1)=2$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\left(f''(u)\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y}=f''(u)\frac{1}{y^2} \text{......(1)}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=f''(u)\left(-\frac{x}{y^2}\right)\frac{1}{y}+f'(u)\left(-\frac{1}{y^2}\right)=-\frac{x}{y^3}f''(u)-\frac{1}{y^2}f'(u) \text{..(2)}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=f''(u)\left(-\frac{x}{y^2}\right)\frac{x}{y}+f'(u)\left(\frac{2x}{y^2}\right)=\frac{x^2}{y^4}f''(u)+\frac{2x}{y^3}f'(u) \text{...(3)}$$

将（1）（2）（3）代入$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1$化简得：

$u^2 f''(u)+uf'(u)=1$，即 $f''(u)+\frac{1}{u^2}f'(u)=\frac{1}{u^2}$。

令$p'=f'(u)$则$p''+\frac{1}{u}p'=\frac{1}{u^2}$

$$p=e^{-\int\frac{1}{u}du}\left[\int\frac{1}{u^2}e^{\int\frac{1}{u}du}du+C\right]=\frac{1}{u}\left[\int\frac{1}{u}du+C\right]=\frac{\ln u}{u}+\frac{C}{u}$$

又 $p'\big|_{u=1}=C=2$，故 $p=\frac{\ln u}{u}+\frac{2}{u}$

因此，$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\ln u}{u}+\frac{2}{u}$，积分得 $f(u)=\int\left(\frac{\ln u}{u}+\frac{2}{u}\right)du=\frac{1}{2}\ln^2 u+2\ln u+C$，

又 $f(1)=C=1$，故 $f(u)=\frac{1}{2}\ln^2 u+2\ln u+1$。

19.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导.证明导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单调增加的充分必要条件是:对 (a,b) 内任意的 x_1,x_2,x_3,当 $x_1<x_2<x_3$ 时 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

解：充分性：若对 (a,b) 内任意的 x_1,x_2,x_3，当 $x_1<x_2<x_3$ 时，都有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

则在 (a,b) 内取任意的 $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$ ，有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}<\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}<\frac{f(x_5)-f(x_4)}{x_5-x_4}$$

在 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ 两边同时令 $x_2\to x_1^+$，得

$f_+'(x_1)\le\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$，两边同时令 $x_2\to x_3^-$，得 $\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\le f_-'(x_3)$，即

$f_+'(x_1)\le\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\le f_-'(x_3)$，同理可得 $f_+'(x_3)\le\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\le f_-'(x_5)$.因为

$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}<\frac{f(x_5)-f(x_3)}{x_5-x_3}$,所以 $f_+'(x_1)\le f_-'(x_5)$.由 x_1,x_5 的任意性,可得 $f'(x)$ 在

(a,b) 内严格单调递增，充分性得证。

再证必要性,即已知 $f'(x)$ 单调递增,在 $[x_1,x_2],[x_2,x_3]$ 上分别使用拉格朗日中值定理,

知存在 $\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3)$，使

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},\quad f'(\xi_2)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2},$$

又由 $f'(x)$ 单调递增，且 $\xi_1<\xi_2$ 知，$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$，即

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$，必要性得证。

综上所述，充要条件得证。

20.（本题满分 10 分）

设 Σ 是由直线 $\begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases}$ 绕直线 $\begin{cases} x=t, \\ y=t, (t\text{为参数}) \\ z=t \end{cases}$ 旋转一周得到的曲面，Σ_1 是 Σ 介于平面 $x+y+z=0$ 与平面 $x+y+z=1$ 之间部分的外侧，计算曲面侧积分

$$I=\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解：由题意可知直线 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$，记为 l_1；$\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$，记为 l_2，则直线 l_1 绕直线 l_2 旋转所得曲面 Σ 为 $(x-t)^2+(y-t)^2+(z-t)^2=3t^2$ 。已知 Σ_1 是 Σ 介于平面 $x+y+z=0$ 和平面 $x+y+z=1$ 之间的外侧，则补面 $\Sigma_0: x+y+z=1$，方向指向外侧。则 Σ_0 与 Σ_1 所围为封闭区域，则由高斯公式可知

$$I_1=\oiint_{\Sigma_0+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_\Omega (1+1+1)\mathrm{d}v=3\iiint_\Omega \mathrm{d}v=3\cdot\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$ (注：Ω 为圆锥体）。

记 D_{xy} 为 Σ_0 在 xoy 面上的投影，$D_{xy}=\{(x,y)|0\leqslant x+y\leqslant 1, x\geq 0, y\geq 0\}$

又 $I_2=\iint_{\Sigma_0} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint_{D_{xy}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(3-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=1$$

故 $I=I_1-I_2=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi-1.$

21.（本题满分 10 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&2\\-1&0&2\\-1&-1&a\end{pmatrix}$,已知 1 是 A 的特征多项式的重根.

(1)求 a 的值；

（2）求所有满足 $A\alpha=\alpha+\beta,A^2\alpha=\alpha+2\beta$ 的非零列向量 α，β.

解：（1） $f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\ |=(1-\lambda)[(\lambda-a)(\lambda+1)+4]$

可得 $(1-a)(1+1)+4=0,\ \ a=3$

（2）由（1）可知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&2\\-1&0&2\\-1&-1&3\end{pmatrix}$,$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$,得 $\boldsymbol{A}$ 中 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，

$\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta},\left(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\beta}=2(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}$

$\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,其中（$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$）^{2}=$\boldsymbol{0}$,故 $\boldsymbol{\alpha}$ 为任意的非零向量， $\boldsymbol{\alpha}=\left(a_1,a_2,a_3\right)^{\mathrm{T}},a_1a_2a_3\neq0$

$$\Rightarrow\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&-1&2\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a_3-a_1-a_2\\2a_3-a_1-a_2\\2a_3-a_1-a_2\end{pmatrix}$$

其中 $a_1+a_2\neq2a_3$

则综上 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2a_3-a_1-a_2\\2a_3-a_1-a_2\\2a_3-a_1-a_2\end{pmatrix},\left(a_1a_2a_3\neq0,a_1+a_2\neq2a_3\right)$

22.（本题满分 12 分）

投保人的损失事件发生时，保险公司的赔付额 Y 与投保人的损失额 X 的关系为 $Y=\begin{cases}0, X\le 100,\\ x-100, X>100.\end{cases}$ 设定损事件发生时，投保人的损失额 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\times 100^2}{(100+x)^3}, x>0,\\ 0, x\le 0.\end{cases}$$

（1）求 $P\{Y>0\}$ 及 EY.

（2）这种损失事件在一年内发生的次数记为 N，保险公司在一年内就这种损失事件产生的理赔次数记为 M，假设 N 服从参数为 8 的泊松分布，在 $N=n\ (n\ge 1)$ 的条件下，M 服从二项分布 $B(n,p)$，其中 $p=P\{Y>0\}$，求 M 的概率分布.

解：

$$(1)\ P\{Y>0\}=P\{X-100>0\}=P\{X>100\}=\int_{100}^{+\infty}\frac{2\times 100^2}{(100+x)^3}dx=\frac{1}{4}$$

$$EY=\int_{100}^{+\infty}(x-100)\frac{2\times 100^2}{(100+x)^3}dx=50$$

(2)

$$N\sim P(8)=\{M|\ N=n\}\sim B\left(n,\frac{1}{4}\right)$$

$$P\{M=m\}=\sum_{n=m}^{\infty}P\{N=n\}\cdot P\{M=m|\ N=n)$$

$$=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{8^n}{n!}e^{-8}\cdot C_n^m\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^m\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-m}$$

$$=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{8^n}{n!}e^{-8}\cdot\frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\frac{1}{4}\right)^m\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-m}$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^m e^{-8}\frac{8^m}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{8^{n-m}}{(n-m)!}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-m}$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^m e^{-8}\frac{8^m}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{6^{n-m}}{(n-m)!}=\frac{2^m}{m!}e^{-2}$$