2024年全国硕士研究生招生考试
试题及参考答案
（数学一）

（科目代码：301）

一、选择题：第 1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分.下列每小题给出的四个选项中，只有一个选项是最符合题目要求的.

1. 已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{\cos t}dt$， $g(x)=\int_0^{\sin x} e^{t^2}dt$，则(　　)

A. $f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数

B. $f(x)$是偶函数，$g(x)$是奇函数

C. $f(x)$与$g(x)$均为奇函数

D. $f(x)$与$g(x)$均为周期函数

【答案】C

【解析】由于e^{cost}是偶函数，所以$f(x)=\int_0^x e^{cost}dt$是奇函数，

又$g^{'}(x)=e^{(sinx)^2}cosx$是偶函数，所以$g(x)$是奇函数.

故选 C.

2. 设 $P=P(x,y,z)$， $Q=Q(x,y,z)$ 均为连续函数，Σ 为曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ $(x\le 0,y\ge 0)$的上侧，则$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx=(\quad)$

A. $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x}{z}P+\frac{y}{z}Q\right)dxdy$　　B. $\iint\limits_{\Sigma}\left(-\frac{x}{z}P+\frac{y}{z}Q\right)dxdy$

C. $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x}{z}P-\frac{y}{z}Q\right)dxdy$　　D. $\iint\limits_{\Sigma}\left(-\frac{x}{z}P-\frac{y}{z}Q\right)dxdy$

【答案】A

【解析】转换投影法，$z=\sqrt{1-x^2-y^2},\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx=\iint_{\Sigma}(\frac{x}{z}P+\frac{y}{z}Q)dxdy$$

故选 A.

3. 已知幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数为$\ln(2+x)$，则$\sum_{n=0}^{\infty} n a_{2n} = (\quad)$

A. $-\frac{1}{6}$

B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{3}$

【答案】A

【解析】方法 1：$\ln(2+x) = \ln 2\left(1+\frac{1}{2}x\right) = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{n}$$

所以，$a_n = \begin{cases} \ln 2, & n = 0 \\ (-1)^{n-1} \frac{1}{n2^n}, & n > 0 \end{cases}$

当$n > 0$，$a_{2n} = -\frac{1}{2n \cdot 2^{2n}}$，

所以，$\sum_{n=0}^{\infty} n a_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(-\frac{1}{2n \cdot 2^{2n}}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{6}$

故选 A.

方法 2：

$[\ln(2+x)]' = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n$，

$$\ln(2+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+1}}{n+1}+C=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n}}{n}+C$$

$$S(0)=C=\ln(2+0)=\ln 2$$

所以，$a_n=\begin{cases}\ln 2, & n=0\\ (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n2^n}, & n>0\end{cases}$

所以，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(-\dfrac{1}{2n\cdot 2^{2n}}\right)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{2n+1}}=-\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{4}}=-\dfrac{1}{6}$

故选 A.

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，则(　　)

A. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=m$ 时，$f'(0)=m$

B. 当 $f'(0)=m$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=m$

C. 当 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=m$ 时，$f'(0)=m$

D. 当 $f'(0)=m$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=m$

【答案】B

【解析】因为 $f'(0)=m$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，

从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=m$，

故选 B.

对于 A 选项，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=m$，推不出来 $f'(0)=m$；

对于 C 选项，$f'(x)$在$x=0$处不一定连续；

对于 D 选项，$f'(x)$在$x=0$处极限未必存在.

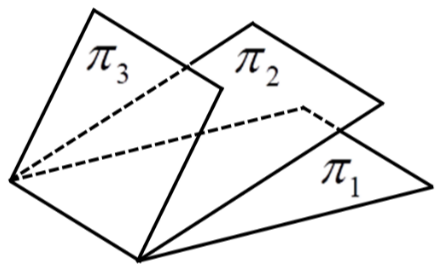
5. 在空间直角坐标系$O-xyz$中，三张平面

$\pi_i:a_ix+b_iy+c_iz=d_i(i=1,2,3)$的位置关系如图所示，

记$\alpha_i=(a_i,b_i,c_i),\beta_i=(a_i,b_i,c_i,d_i)$,若$r\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=m$，$r\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix}=n$，则(　　)

A. $m=1,n=2$　　B. $m=n=2$

C. $m=2,n=3$　　D. $m=n=3$



【答案】B

【解析】由题意知$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}$有无穷多解，故$r\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix}<3$

又由存在两平面的法向量不共线即线性无关，故$r\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}\geq 2$，则

$r\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix}=2$，故$m=n=2$，故选 B.

6. 设向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\b\\a\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\\1\end{pmatrix}$，若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，且其中任意两个向量均线性无关，则(　　)

A. $a=1,b\neq -1$　　　　B. $a=1,b=-1$

C. $a\neq -2,b=2$　　　　D. $a=-2,b=2$

【答案】D

【解析】由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，故$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)<3$，故$\begin{vmatrix}a&1&1\\1&1&a\\1&a&1\end{vmatrix}=0$，

得$a=1$或-2, 当$a=1$时，α_1,α_3线性相关，与题意矛盾，故$a=-2$，

又由$\begin{vmatrix}a&1&1\\1&1&a\\-1&b&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&1&1\\1&1&-2\\-1&b&-1\end{vmatrix}=0$，得$b=2$，故选 D.

7. 设A是秩为 2 的 3 阶矩阵，α是满足$A\alpha=0$的非零向量，若对满足$\beta^T\alpha=0$的 3 维列向量β,均有$A\beta=\beta$，则(　　)

A. A^3的迹为 2　　　　B. A^3的迹为 5

C. A^2的迹为 8　　　　D. A^2的迹为 9

【答案】A

【解析】由$A\alpha=0$且$\alpha\neq 0$，故$\lambda_1=0$，设非零向量β_1,β_2线性无关（因为与α垂直的平面中一定存在两个线性无关的向量）且满足

$\beta_1^T\alpha=\beta_2^T\alpha=0$, 则$A\beta_1=\beta_1,A\beta_2=\beta_2$，又由$\beta_1,\beta_2$线性无关，故$\lambda=1$

至少为二重根，故$\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=1$，故$A^3$的特征值为$0,1,1$，

故$tr(A^3)=0+1+1=2$，故选 A.

8. 设随机变量X,Y相互独立，且X服从正态分布$N(0,2)$，Y服从正态分布$N(-2,2)$，若$P\{2X+Y<a\}=P\{X>Y\}$，则$a=($　　$)$

A. $-2-\sqrt{10}$　　B. $-2+\sqrt{10}$

C. $-2-\sqrt{6}$　　D. $-2+\sqrt{6}$

【答案】B

【解析】$2X+Y:\ N(-2,10)$，$Y-X:\ N(-2,2^2)$,

所以$P\{2X+Y<a\}=\Phi(\dfrac{a+2}{\sqrt{10}})=P\{Y-X<0\}=\Phi(\dfrac{0+2}{2})$,

于是$\dfrac{a+2}{\sqrt{10}}=\dfrac{0+2}{2}$，$a=-2+\sqrt{10}$.

故选 B.

9. 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，在$X=x(0<x<1)$的条件下，随机变量$Y$服从区间$(x,1)$上的均匀分布，则$Cov(X,Y)=($　　$)$

A. $-\dfrac{1}{36}$　　B. $-\dfrac{1}{72}$

C. $\dfrac{1}{72}$　　D. $\dfrac{1}{36}$

【答案】D

【解析】当$0<x<1$时，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, x<y<1\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$

$$f(x,y)=\begin{cases}2, x<y<1, 0<x<1\\0, \quad 其他\end{cases}$$

$$EXY=\iint\limits_{\substack{-\infty<x<+\infty\\-\infty<y<+\infty}} xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y 2xydx=\frac{1}{4}$$

$$EX=\int_0^1 x2(1-x)dx=\frac{1}{3}$$

$$EY=\iint\limits_{\substack{-\infty<x<+\infty\\-\infty<y<+\infty}} yf(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y 2ydx=\frac{2}{3}$$

$Cov(X,Y)=EXY-EXEY=\dfrac{1}{36}$.故选 D.

10. 设随机变量 X,Y 相互独立，且均服从参数为 λ 的指数分布，令 $Z=|X-Y|$，则下列随机变量与 Z 同分布的是(　　)

A. $X+Y$　　　　B. $\dfrac{X+Y}{2}$

C. $2X$　　　　D. X

【答案】D

【解析】令 $Z=|X-Y|$，则 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{|X-Y|\le z\}$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $z\ge 0$ 时，

$$F_Z(z)=\iint\limits_{|x-y|\le z} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{|x-y|\le z} \lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}dxdy$$

$$=2\int_0^{+\infty}dy\int_y^{y+z}\lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}dx=1-e^{-\lambda z}.$$

所以 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\1-e^{-\lambda z}, & z\ge 0\end{cases}$.显然 $Z=|X-Y|$ 与 X 同分布.

故选 D.

二、填空题：第 **11** ~ **16** 小题，每小题 **5** 分，共 **30** 分.

11. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+ax^2)^{\sin x}-1}{x^3}=6$，则 $a=$______

【答案】6

【解析】

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+ax^2)^{\sin x}-1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x\cdot\ln(1+ax^2)}-1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\ln(1+ax^2)}{x^3}$$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax^3}{x^3}=6$，故 $a=6$.

12. 设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，且 $df\,|_{(1,1)}=3du+4dv$，令 $y=f(\cos x,1+x^2)$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=$______

【答案】5.

【解析】由 $\mathrm{d}f|_{(1,1)}=3\mathrm{d}u+4\mathrm{d}v$ 知，$f_u'(1,1)=3$，$f_v'(1,1)=4$.

又 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_u'\cdot(-\sin x)+f_v'\cdot 2x$，则

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left[f_{uu}''\cdot(-\sin x)+f_{uv}''\cdot 2x\right](-\sin x)+f_u'\cdot(-\cos x)$$

$$+\left[f_{vu}''\cdot(-\sin x)+f_{vv}''\cdot 2x\right](2x)+2f_v',$$

则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}=f_u'(1,1)\cdot(-1)+2f_v'(1,1)=-3+8=5$.

13. 已知函数 $f(x)=x+1$，若 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx, x\in[0,\pi]$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\sin a_{2n-1}=$______

【答案】$-\frac{1}{\pi}$

【解析】由题意可得将$f(x)$在$\left[0,\pi\right]$展为余弦级数，由公式可得

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[(x+1)\frac{1}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=-\frac{4}{n^2\pi},n=2k-1$$

$$\lim_{n\to\infty}n^2\sin a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{4}{(2n-1)^2\pi}n^2\right]=-\frac{1}{\pi}$$

14. 微分方程$y'=\frac{1}{(x+y)^2}$满足条件$y(1)=0$的解为______________

【答案】$x=\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)-y$

【解析】令$x+y=u$，等式两边同时对x求导，得到$u'=1+y'$，代入原式可得$u'-1=\frac{1}{u^2}$，整理得$\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{u^2}$，即$\int\frac{u^2}{u^2+1}du=\int dx$，

求得$u-\arctan u=x+c$，即$y-\arctan(x+y)=c$，

把初始条件代入可得$c=-\frac{\pi}{4}$,解得$x=\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)-y$.

15. 设实矩阵$A=\begin{pmatrix}a+1&a\\a&a\end{pmatrix}$，若对任意实向量$\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$，

$\left(\alpha^TA\beta\right)^2\le\alpha^TA\alpha\cdot\beta^TA\beta$都成立，则$a$的取值范围是______________

【答案】$[0,+\infty)$

【解析】由题意知：$\alpha^T A(\beta\alpha^T-\alpha\beta^T)A\beta\le 0$恒成立，

设函数$f\left(x_1,x_2,y_1,y_2\right)=\alpha^T A(\beta\alpha^T-\alpha\beta^T)A\beta$.

由$\beta\alpha^T-\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1 & y_2\end{pmatrix}=(x_1y_2-x_2y_1)\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$

则$A(\beta\alpha^T-\alpha\beta^T)A=(x_1y_2-x_2y_1)\begin{pmatrix}a+1 & a\\a & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a+1 & a\\a & a\end{pmatrix}$

$=(x_1y_2-x_2y_1)\begin{pmatrix}0 & -a\\a & 0\end{pmatrix}$,

故$f\left(x_1,x_2,y_1,y_2\right)=(x_1y_2-x_2y_1)\alpha^T\begin{pmatrix}0 & -a\\a & 0\end{pmatrix}\beta=-a(x_1y_2-x_2y_1)^2\le 0$，

可得$a\ge 0$.

16. 设随机试验每次成功的概率为P，现进行 3 次独立重复试验，在至少成功 1 次的条件下，3 次试验全部成功的概率为$\frac{4}{13}$，则

$P=$______________

【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】设随机变量X表示三次试验中成功的次数，则X： $B(3,p)$，所以

$$P\{X=3\,|\,X\ge 1\}=\frac{P\{X=3,X\ge 1\}}{P\{X\ge 1\}}=\frac{P\{X=3\}}{P\{X\ge 1\}}=\frac{C_3^3p^3}{1-C_3^0(1-p)^3}=\frac{4}{13}$$

故$p=\frac{2}{3}$.

三、解答题：第 **17**～**22** 小题,共 **70** 分.解答应写出文字说明、证明过程

或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

已知平面区域$D=\left\{(x,y)\mid\sqrt{1-y^2}\le x\le 1,-1\le y\le 1\right\}$，计算

$$\iint\limits_{D}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

【解析】由于积分区域关于x轴对称，被积函数关于y为偶函数，故

$$\iint\limits_{D}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=2\iint\limits_{D_1}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=2\int_0^1dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^1\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx$$

$$=\int_0^1dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^1\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d(x^2+y^2)$$

$$=2\int_0^1\sqrt{1+y^2}dy-2=[y\sqrt{1+y^2}+\ln(y+\sqrt{1+y^2})]\Big|_0^1-2$$

$$=\sqrt{2}-2+\ln(1+\sqrt{2})$$

18. (本题满分 12 分)

已知函数$f(x,y)=x^3+y^3-(x+y)^2+3$，设T是曲面$z=f(x,y)$在点$(1,1,1)$处的切平面，D为T与坐标平面所围成的有界区域在xOy平面上的投影.

(1) 求T的方程

(2) 求$f(x,y)$在D上的最大值和最小值

【解析】(1) 对于$z=f(x,y)=x^3+y^3-(x+y)^2+3$，

有$z'_x(1,1)=-1,\ z'_y(1,1)=-1,$

从而曲面在点$(1,1,1)$处的一个法向量为$n=(-z'_x,-z'_y,1)=(1,1,1)$，

得该点处曲面的切平面方程为$x+y+z=3$.

(2)在xoy平面中，区域$D: x+y\le 3, x\ge 0, y\ge 0$，

在D内部求驻点，解方程组$\begin{cases} f_x' = 3x^2 - 2(x+y) = 0 \\ f_y' = 3y^2 - 2(x+y) = 0 \end{cases}$，得$\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right)$，有

$f\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{17}{27}$；

在边界$y=0, 0<x<3$上，对于$f(x,0)=x^3-x^2+3$，解得其驻点$\left(\dfrac{2}{3},0\right)$，

有$f\left(\dfrac{2}{3},0\right)=\dfrac{77}{27}$；

在边界$x=0, 0<y<3$上，对于$f(0,y)=y^3-y^2+3$，解得其驻点$\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$，

有$f\left(0,\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{77}{27}$；

在边界$x+y=3, 0<x<3$上，对于$f(x,3-x)=x^3+(3-x)^3-6$，解得其驻点$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，有$f\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$；

在边界顶点，有$f(0,0)=3, f(3,0)=f(0,3)=21$；

综上，得$f(x,y)$在D上的最大值为$f(3,0)=f(0,3)=21$，最小值为$f\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{17}{27}$.

19. (本题满分 12 分)

设函数$f(x)$具有 2 阶导数，且$f'(0)=f'(1), |f''(x)|\le 1$，证明:

(1) 当$x\in(0,1)$时，$|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x|\le\dfrac{x(1-x)}{2}$

(2) $\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\le\frac{1}{12}$

【解析】(1) 证明：令 $g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$

令 $F(x)=f(x)-g(x)-\frac{x(1-x)}{2}$，$x\in(0,1)$

$\because F(0)=0,F(1)=0$

$\because F''(x)=f''(x)+1\ge 0,\left(\left|f''(x)\right|\le 1\right)$

$\therefore F(x)$为凹函数. $\therefore F(x)\ge 0$.

$\therefore f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\le\frac{x(1-x)}{2}$

令 $F(x)=f(x)-g(x)+\frac{x(1-x)}{2}$，$x\in(0,1)$

$\because F(0)=0,F(1)=0$

$\because F''(x)=f''(x)-1\le 0,\left(\left|f''(x)\right|\le 1\right)$

$\therefore F(x)$为凸函数. $\therefore F(x)\ge 0$.

$\therefore f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\ge-\frac{x(1-x)}{2}$

综上：$\left|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\right|\le\frac{x(1-x)}{2}$

(2) 由(1) 中 $f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\le\frac{x(1-x)}{2}$

$\Rightarrow\int_0^1\left[f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\right]dx\le\int_0^1\frac{x(1-x)}{2}dx$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \le \frac{1}{12}$$

由第(1) 中 $f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x \ge -\frac{x(1-x)}{2}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left[f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\right]dx \ge \int_0^1 -\frac{x(1-x)}{2}dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \ge -\frac{1}{12}$$

综上：$\left|\int_0^1 f(x)dx - \frac{f(0)+f(1)}{2}\right| \le \frac{1}{12}$

20. (本题满分 12 分)

已知有向曲线L的球面$x^2+y^2+z^2=2x$与平面$2x-z-1=0$的交线，从z轴正向往z轴负向看去为逆时针方向，计算曲线积分

$$\int_L (6xyz-yz^2)dx+2x^2zdy+xyzdz$$

【解析】$I=\oint_L (6xyz-yz^2)dx+2x^2zdy+xyzdz$

$$=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6xyz-yz^2 & 2x^2z & xyz \end{vmatrix}$$ 其中$\Sigma: z=2x-1$，取上侧

$$=\iint_\Sigma (xz-2x^2)dydz+(6xy-3yz)dzdx+(z^2-2xz)dxdy$$

$$=\iint_\Sigma [(xz-2x^2)(-2)+(6xy-3yz)\cdot 0+(z^2-2xz)]dxdy$$

$$=\iint_\Sigma (4x^2-4xz+z^2)dxdy$$

$$=\iint_D\left[4x^2-4x(2x-1)+(2x-1)^2\right]dxdy \text{其中} D:\frac{(x-\frac{3}{5})^2}{(\frac{2}{5})^2}+\frac{y^2}{(\frac{2}{\sqrt{5}})^2}\le 1$$

$$=\iint_D 1dxdy$$

$$=\frac{4\sqrt{5}\pi}{25}$$

21. (本题满分 12 分)

已知数列$\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$满足$x_0=-1,y_0=0,z_0=2$，且

$$\begin{cases} x_n=-2x_{n-1}+2z_{n-1} \\ y_n=-2y_{n-1}-2z_{n-1} \\ z_n=-6x_{n-1}-3y_{n-1}+3z_{n-1} \end{cases}$$，记$\alpha_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$，写出满足$\alpha_n=A\alpha_{n-1}$的矩阵$A$，并求$A^n$及$x_n,y_n,z_n$.

【解析】由题设得$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$，即$a_n=Aa_{n-1}$，

故$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

由$|\lambda E-A|=0$，即$\begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda+2 & 2 \\ 6 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix}=0$，得$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=-2$，

当$\lambda_1=0$时，$Ax=0$，得基础解系为$\eta_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}^T$，

当$\lambda_2=1$时，$(E-A)x=0$，得基础解系为$\eta_2=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\end{pmatrix}^T$，

当$\lambda_3=-2$时，$(-2E-A)x=0$，得基础解系为$\eta_3=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\end{pmatrix}^T$，

故存在可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 2\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$,

使$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & -2\end{pmatrix}$, 即$A=P\Lambda P^{-1}$,

则$A^n=P\Lambda^n P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 2\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & -2\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 2\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}-4+(-1)^{n+1}\cdot 2^n & -2+(-1)^{n+1}\cdot 2^n & 2\\ 4+(-1)^n\cdot 2^{n+1} & 2+(-1)^n\cdot 2^{n+1} & -2\\ -6 & -3 & 3\end{pmatrix}.$$

由$\alpha_n=A\alpha_{n-1}$，得

$$\alpha_n=A^n\alpha_0=\begin{pmatrix}-4+(-1)^{n+1}\cdot 2^n & -2+(-1)^{n+1}\cdot 2^n & 2\\ 4+(-1)^n\cdot 2^{n+1} & 2+(-1)^n\cdot 2^{n+1} & -2\\ -6 & -3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8+(-2)^n\\ -8+(-2)^{n+1}\\ 12\end{pmatrix},$$

则$x_n=8+(-2)^n$，$y_n=-8+(-2)^{n+1}$，$z_n=12$.

22. (本题满分 12 分)

设总体X服从$[0,\theta]$上的均匀分布，其中$\theta\in(0,+\infty)$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的简单随机样本，记

$$X(n)=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}，T_c=cX(n).$$

（1）求c，使得T_c是θ的无偏估计;

（2）记$h(c)=E(T_c-\theta)^2$，求c使得$h(c)$最小.

【解析】(1) X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta},0<x<\theta\\0,其它\end{cases}$，

X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0,x<0\\\dfrac{1}{\theta}x,0\le x<\theta\\1,x\ge\theta\end{cases}$.

$X_{(n)}$的分布函数为：

$F_{X_{(n)}}(x)=P\{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\le x\}$

$=P\{X_1\le x,X_2\le x,\cdots,X_n\le x\}$

$=P\{X_1\le x\}\cdot P\{X_2\le x\}\cdot\cdots\cdot P\{X_n\le x\}=F^n(x)$，

$X_{(n)}$概率密度为$f_{X_{(n)}}(x)=nF^{n-1}(x)\cdot f(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta^n}x^{n-1},0<x<\theta\\0,其它\end{cases}$.

$E(T_c)=cE(X_{(n)})=c\int_0^\theta x\cdot\dfrac{n}{\theta^n}x^{n-1}dx=\dfrac{cn}{n+1}\theta$，令$E(T_c)=\dfrac{cn}{n+1}\theta=\theta$，

得$c=\dfrac{n+1}{n}$.

(2) $E(T_c^2)=c^2E(X_{(n)}^2)=c^2\int_0^\theta x^2\cdot\dfrac{n}{\theta^n}x^{n-1}dx=\dfrac{c^2n}{n+2}\theta^2$

$h(c)=E(T_c-\theta)^2$

$=E(T_c^2-2\theta T_c+\theta^2)$

$=E(T_c^2)-2\theta E(T_c)+\theta^2$

$=\dfrac{c^2n}{n+2}\theta^2-\dfrac{2cn}{n+1}\theta^2+\theta^2$.

$h'(c)=\frac{2cn}{n+2}\theta^2-\frac{2n}{n+1}\theta^2$，令$h'(c)=0$得$c=\frac{n+2}{n+1}$. $h''(c)=\frac{2n}{n+2}\theta^2>0$，

所以当$c=\frac{n+2}{n+1}$时，$h(c)$最小.