2026年全国硕士研究生招生考试数学一真题及参考答案

一、选择题:1～10小题,每小题5分,共50分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1.设函数$z = z(x,y)$由方程$x - az = e^{y+az}$（a为非零常数）确定，则

（A）$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{a}$

（B）$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{a}$

（C）$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{a}$

（D）$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{a}$

【答案】A

【解析】令$F(x,y,z) = x - az - e^{y+az}$，则$F_x' = 1, F_y' = -e^{y+az}, F_z' = -a - ae^{y+az}$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{a + ae^{y+az}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-e^{y+az}}{a + ae^{y+az}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 + e^{y+az}}{a + ae^{y+az}} = \frac{1}{a}$$

2.求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)^n x^{2n}$的收敛域

（A）$[-2,2]$

（B）$[-1,1]$

（C）$(-2,2)$

（D）$(-1,1)$

【答案】D

【解析】$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+(-1)^{2n-1}}{4}\right)^{2n-1} x^{4n-2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+(-1)^{2n}}{4}\right)^{2n} x^{4n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} x^{4n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n}$；

易求得$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} x^{4n-2}$的收敛半径为$\sqrt{2}$，$\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n}$的收敛半径为1，故原级数的收敛半径为1；

当$x = \pm 1$时，原级数化为$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)^n$，而$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)^n = \begin{cases} 0, n为奇数 \\ 1, n为偶数 \end{cases}$，为不存在，即级数通项不趋于0，级数发散。因此幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)^n x^{2n}$的收敛域为$(-1,1)$.

3.设$f(x)$在区间$[-1,1]$上有定义，则有

（A）当$f(x)$在$(-1,0)$单调递减，在$(0,1)$单调递增时，$f(0)$是极小值

（B）当$f(0)$是极小值时，$f(x)$在$(-1,0)$单调递减，在$(0,1)$单调递增

（C）当$f(x)$在$[-1,1]$是凹函数时，$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$在$[-1,1)$上单调递增

（D）当$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$在$[-1,1)$上单调递增时，$f(x)$在$[-1,1]$是凹函数

【答案】C

【解析】由于题干中并无$f(x)$连续的相关条件，故单调性和$f(0)$是否为极小值无必然联系（$x=0$ 处可能并不连续），A,B 均错误；

对于 D，考虑函数$f(x)=x^3+x^2-2x$，那么$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=x^2+2x$在$[-1,1)$上单调递增，但是$f''(x)=6x+2$ 在$x=-\frac{1}{3}$两边异号，凹凸性改变，D 错误；

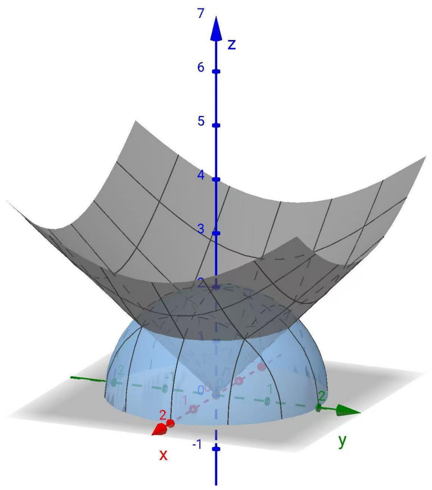
对于 C，当$f(x)$在$[-1,1]$是凹函数时，由凹函数的定义可知对于对$[-1,1]$上任意不同的两点$x_1,x_2,\lambda\in(0,1)$，恒有 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$

现取任意两点$-1<x_1<x_2<1,\lambda=\frac{x_2-x_1}{1-x_1}\in(0,1)$，即$x_2=\lambda+(1-\lambda)x_1$，则

$$f(x_2)=f(\lambda+(1-\lambda)x_1)<\lambda f(1)+(1-\lambda)f(x_1)$$

从而$\frac{f(x_2)-f(1)}{x_2-1}>\frac{\lambda f(1)+(1-\lambda)f(x_1)-f(1)}{\lambda+(1-\lambda)x_1-1}=\frac{f(x_1)-f(1)}{x_1-1}$（$x_2-1<0$，故不等号换向），得证$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$在$[-1,1]$上单调递增.

4.设$z=\sqrt{4-x^2-y^2},z=\sqrt{x^2+y^2}$两个曲面相交的有界闭区域为$\Omega$，$f(u)$为连续函数，求$\iiint_\Omega f(x^2+y^2+z^2)dv$可以表示为



（A）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 dr\int_r^{\sqrt{4-r^2}}f(r^2+z^2)rdz$

（B）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}dr\int_0^{\sqrt{4-r^2}}f(r^2+z^2)rdz$

（C）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^2 f(r^2)r^2\sin\varphi dr$

（D）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^2 f(r^2)r^2\sin\varphi dr$

【答案】C

【解析】画出图像如右图所示，

若用柱坐标定限，则解出两曲面的交点为$z=\sqrt{2}$，投影域$D_{xy}:x^2+y^2\le 2$，采用投影穿线法应为$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}dr\int_r^{\sqrt{4-r^2}}f(r^2+z^2)rdz$，A,B 均错误；

若用球坐标定限，显然Ω与z轴正半轴的夹角范围为$(0,\frac{\pi}{4})$，C 正确.

5.单位矩阵经过若干次行互换得到的矩阵为置换矩阵，$\boldsymbol{A}$为n阶置换矩阵，$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，则下列正确的是

（A）$\boldsymbol{A}^*$为置换矩阵

（B）$\boldsymbol{A}^{-1}$为置换矩阵

（C）$\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{-1}$

（D）$\boldsymbol{A}^{*}=-\boldsymbol{A}^{-1}$

【答案】B

【解析】由题意可知$\boldsymbol{A}=P_1P_2\cdots P_sE$，其中$P_1,P_2,\cdots,P_s$均为初等互换矩阵，则

$\boldsymbol{A}^{-1}=(P_1P_2\cdots P_sE)^{-1}=P_s^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}=P_s\cdots P_2P_1$仍为置换矩阵，故选 B；由于$|\boldsymbol{A}|=\pm 1$，故 C、D 无法确定.

6. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶矩阵，$\beta$为$n$维列向量，若$\boldsymbol{A}$的列向量均可由$\boldsymbol{B}$的列向量线性表示，则

（A）当$\boldsymbol{A}x=\beta$有解时，$\boldsymbol{B}x=\beta$有解

（B）当$\boldsymbol{A}^Tx=\beta$有解时，$\boldsymbol{B}^Tx=\beta$有解

（C）当$\boldsymbol{B}x=\beta$有解时，$\boldsymbol{A}x=\beta$有解

（D）当$\boldsymbol{B}^Tx=\beta$有解时，$\boldsymbol{A}^Tx=\beta$有解

【答案】A

【解析】由$\boldsymbol{A}$的列向量均可由$\boldsymbol{B}$的列向量线性表示，可知存在矩阵$\boldsymbol{C}$，使得$\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{A}$，则$\boldsymbol{A}x=\beta$转化为$\boldsymbol{BC}x=\beta$；若$\boldsymbol{A}x=\beta$有解，则$\boldsymbol{BC}x=\beta$有解，令$y=Cx$，即$\boldsymbol{B}y=\beta$有解，可知 A 正确.

7.设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=a({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，若方程$f(x_1,x_2,x_3)=-1$表示的曲面为圆柱面，则

（A）$a=-4$，且$f(x_1,x_2,x_3)$对应的规范形为$-{y_1}^2-{y_2}^2-{y_3}^2$

（B）$a=-4$，且$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换下的标准形为$-6{y_1}^2-6{y_2}^2$

（C）$a=2$，且$f(x_1,x_2,x_3)$对应的规范形为$-{y_1}^2-{y_2}^2-{y_3}^2$

（D）$a=2$，且$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换下的标准形为$-6{y_1}^2-6{y_2}^2$

【答案】B

【解析】由$f(x_1,x_2,x_3)=-1$表示的曲面为圆柱面，可知二次型矩阵$\boldsymbol{A}$对应的特征值$\lambda_1<0,\lambda_2<0,\lambda_3=0$；

知$|0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，又$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{pmatrix}$，则$\begin{vmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{vmatrix}=0$，解得$a=2$或$-4$；且$tr(\boldsymbol{A})=3a<0$，可知$a=-4$；

由$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+4&-2&-2\\-2&\lambda+4&-2\\-2&-2&\lambda+4\end{vmatrix}=0$解得$\lambda_1=\lambda_2=-6,\lambda_3=0$，故$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换下的标准形为$-6{y_1}^2-6{y_2}^2$.

8.设随机变量$X\sim N(1,2),f(t)=E[(X+t)^2]$，则$f(t)$的最小值点与最小值为

（A）1,2

（B）1,4

（C）$-1,2$

（D）$-1,4$

【答案】C

【解析】$f(t)=E[(X+t)^2]=E(X^2+2tX+t^2)=E(X^2)+2tE(X)+t^2=D(X)+[E(X)]^2+2tE(X)+t^2=2+1+2t+t^2=t^2+2t+3$；易知当$t=-1$时取得最小值 2.

9.设连续型随机变量X的分布函数为$F(x)$，随机变量Y的分布函数为$F(aY+b)$，X的数学期望为μ，方差为$\sigma^2(\sigma>0)$，若Y的数学期望与方差分别为 0 和 1，则

（A）$a=\sigma,b=\mu$

（B）$a=\sigma,b=-\mu$

（C）$a=\frac{1}{\sigma},b=\mu$

（D）$a=\frac{1}{\sigma},b=-\mu$

【答案】A

【解析】由题意可知$a>0$，$Y=\frac{1}{a}X-\frac{b}{a}$，所以$E(Y)=E(\frac{1}{a}X-\frac{b}{a})=\frac{1}{a}\mu-\frac{b}{a}=0$，$D(Y)=D(\frac{1}{a}X-\frac{b}{a})=\frac{1}{a^2}\sigma^2=1$，解得$a=\sigma,b=\mu$.

10.设随机变量X的概率分布为$P\{X=k\}=\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^k}(k=1,2,\cdots)$，则对于任意的正整数$m,n$有

（A）$P\{X>m+n|X>m\}=P\{X>m\}$

（B）$P\{X>m+n|X>m\}=P\{X>n\}$

（C）$P\{X>m+n|X>m\}>P\{X>m\}$

（D）$P\{X>m+n|X>m\}>P\{X>n\}$

【答案】D

【解析】$P\{X>m+n|X>m\}=\frac{P(X>m+n,X>m)}{P\{X>m\}}=\frac{P(X>m+n)}{P\{X>m\}}$

$$P(X>m+n)=\sum_{k=m+n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^k}\right)=\frac{1}{2^{m+n+1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^{m+n}}$$

$$P(X>m)=\sum_{k=m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^k}\right)=\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^m}$$

$$P(X>n)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^k}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}$$

故$P\{X>m+n\}-P(X>m)P(X>n)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2^{m+n}}+\frac{1}{3^{m+n}}-\frac{1}{2^n\cdot 3^m}-\frac{1}{3^n\cdot 2^m}\right]=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{2^n}\right)\left(\frac{1}{3^m}-\frac{1}{2^m}\right)\right]>0$，

所以$P\{X>m+n|X>m\}=\frac{P(X>m+n)}{P\{X>m\}}>P\{X>n\}$，选 D.

二、填空题：11 ~ 16 小题,每小题 5 分,共 30 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

11. 设向量$\boldsymbol{v}_1=(0,x,z),\boldsymbol{v}_2=(y,0,1)$，记$\boldsymbol{F}(x,y,z)=v_1\times v_2$，则$div\boldsymbol{F}=$____________.

【答案】$1+z$

【解析】$\boldsymbol{F}(x,y,z)=v_1\times v_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & x & z\\ y & 0 & 1\end{vmatrix}=(x,yz,-xy)$，则$div\boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1+z.$

12. 计算$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x\sin x}\right)=$____________.

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))}{x^2}=\frac{1}{2}.$

13. 设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=2\sin^2 t\\ y=t+\cos t\end{cases}(t\in(0,\frac{\pi}{2}))$确定，则$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$____________.

【答案】$-\frac{\sqrt{2}}{8}$

【解析】$x'(t)=4\sin t\cos t=2\sin 2t=2,x''(t)=4\cos 2t=0;y'(t)=1-\sin t=1-\frac{\sqrt{2}}{2},y''(t)=-\cos t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

则$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2-(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot 0}{2^3}=-\frac{\sqrt{2}}{8}.$

14. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^2}dx=$____________.

【答案】$2\ln 2$

【解析】$\int\frac{\ln(x+1)}{x^2}dx=\int\ln(x+1)d(-\frac{1}{x})=-\frac{1}{x}\ln(x+1)+\int\frac{1}{x(x+1)}dx=-\frac{1}{x}\ln(x+1)+\ln\frac{x}{x+1}+C$

则$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\ln(x+1)+\ln\frac{x}{x+1}+C\right]\Big|_1^{+\infty}=0-(-\ln 2+\ln\frac{1}{2})=2\ln 2.$

15. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & a & 2\\ 0 & 2 & a\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & -1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & a\end{pmatrix}$，$m(\boldsymbol{X})$是矩阵$\boldsymbol{X}$的实特征值的最大值，且$m(\boldsymbol{A})<m(\boldsymbol{B})$，则$a$的取值范围是____________.

【答案】$a<0$

【解析】由$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ -2 & \lambda-a & -2\\ 0 & -2 & \lambda-a\end{vmatrix}=0$，解得$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=a+2,\lambda_3=a-2$；则$m(\boldsymbol{A})$为 1 或$a+2$；

同理$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 1 & 1\\ 1 & \lambda-2 & -1\\ 1 & 1 & \lambda-a\end{vmatrix}=0$，解得$\boldsymbol{B}$的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-1$；则$m(\boldsymbol{B})$为 2 或$a+1$；

又$m(\boldsymbol{A})<m(\boldsymbol{B})$，则有一下四种情况：

① $1<2,a+2\le 1$ 且$a+1\le 2$，可得$a\le -1$，满足条件；

② $1<a+1,a>0$，则$a+2>1$,1 不可能为最大值，排除；

③ $a+2<2,a<0$，且此时 $1<a+2,a>-1;a+1<2,a<1$，满足条件；

④ $a+2<a+1$，不成立.

综上，$a<0$ 可满足条件.

16. 设随机变量X服从参数为 1 的泊松分布，Y服从参数为 3 的泊松分布，且X与$Y-X$相互独立，则$E(XY)=$____________.

【答案】4

【解析】$E(X)=1,E(Y)=3,D(X)=1,XY=X(Y-X)+X^2$，

$E(XY)=E[X(Y-X)+X^2]=E(X)E(Y-X)+E(X^2)=E(X)[E(Y)-E(X)]+D(X)+[E(X)]^2=4$.

三、解答题：17～22 小题,共 70 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 求函数$f(x,y)=(2x^2-y^2)e^x$的极值.

【解析】先求驻点：

$$\begin{cases} f_x{}'=(2x^2-y^2+4x)e^x\\ f_y{}'=-2ye^x\end{cases}$$

解得驻点$(0,0),(-2,0)$

$$\begin{cases} A=f_{xx}{}''=(2x^2-y^2+8x+4)e^x\\ B=f_{xy}{}''=-2ye^x\\ C=f_{yy}{}''=-2e^x\end{cases}$$

将$(0,0)$代入，$A=4,B=0,C=-2$，$AC-B^2<0$，$f(0,0)$不是极值；

将$(-2,0)$代入，$A=-4e^{-2},B=0,C=-2e^{-2}$，$AC-B^2>0$ 且$A<0$，$f(-2,0)=8e^{-2}$是极大值.

18. 设函数$f(u)$在区间$(0,+\infty)$内有 3 阶连续导数，且存在可微函数$F(x,y)$，使$dF(x,y)=\frac{f(xy)}{x^2y}dx+\frac{f''(xy)}{xy^2}dy(xy>0)$；

（1）证明：$\frac{f''(u)}{u}-\frac{f(u)}{u}=C$，$C$为常数；

（2）若$f(1)=1, f'(1)=-1, f''(1)=0$，求$f(u)$的表达式.

【解析】（1）由条件可得$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{f(xy)}{x^2y},\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{f''(xy)}{xy^2}$，又由$f'''(u)$连续，得$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}$均连续，从而二阶偏导数相等，即

$$\frac{1}{x^2}\cdot\frac{f'(xy)xy-f(xy)}{y^2}=\frac{1}{y^2}\cdot\frac{f'''(xy)xy-f''(xy)}{x^2}$$

令$u=xy$，得$\frac{f'(u)u-f(u)}{u^2}=\frac{f'''(u)u-f(u)}{u^2}$，移项得$\left(\frac{f''(u)-f(u)}{u}\right)'=0$，即$\frac{f''(u)}{u}-\frac{f(u)}{u}=C$，$C$为常数；

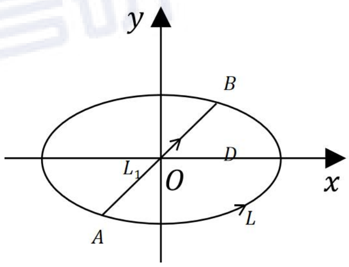
（2）在（1）的结论下，代入$f(1)=1, f''(1)=0$ 得$C=-1$，从而$f''(u)-f(u)=-u$，

解该常系数非齐次线性微分方程可得$f(u)=C_1e^u+C_2e^{-u}+u$，代入$f(1)=1, f'(1)=-1$ 可得$C_1=-e^{-1}, C_2=e$，

故$f(u)=-e^{u-1}+e^{1-u}+u$.

19. 设有向曲线L为椭圆$x^2+3y^2=1$ 沿逆时针从$A(-\frac12,-\frac12)$到$B(\frac12,\frac12)$的部分，计算$\int_L(e^{x^2}\sin x-2xy)dx+(6x-x^2-y\cos^4 y)dy$.

【解析】补线$L_1: y=x(-\frac12\le x\le-\frac12)$，方向从$A$到$B$；



则 原 积 分 $I=\int_L Pdx+Qdy=\int_{L+L_1^-}Pdx+Qdy+\int_{L_1}Pdx+Qdy=\iint_D(6-2x+2x)d\sigma+\int_{-\frac12}^{\frac12}(e^{x^2}\sin x-2x^2+6x-x^2-x\cos^4 x)dx=6S_D-6\int_0^{\frac12}x^2dx=6\times\frac12\pi\cdot1\cdot\frac{1}{\sqrt3}-6\cdot\frac13x^3\Big|_0^{\frac12}=\sqrt3\pi-\frac14$.

20. 设可导函数$f(x)$严格单调递增，且$\int_{-1}^1 f(x)dx=0$，设$a=\int_0^1 f(x)dx$.

（1）证明：$a>0$；

（2）设$F(x)=a(1-x^2)+\int_1^x f(t)dt$，证明$\exists\xi\in(-1,1)$，有$F''(\xi)=0$.

【解析】（1）$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_{-1}^0 f(x)dx=a+\int_{-1}^0 f(x)dx=0$，即$\int_{-1}^0 f(x)dx=-a$；

令$x=-t$，则$\int_{-1}^0 f(x)dx=\int_0^1 f(-t)dt$，则$a=-\int_0^1 f(-t)dt$，$2a=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 f(-t)dt=\int_0^1[f(x)-f(-x)]dx$，由于$f(x)$严格单调递增，当$x\in[0,1]$时，$-x\le x$，则$f(x)\le f(-x)$且不恒等，则$2a>0$，也即$a>0$；

（2）$F(x)=a(1-x^2)+\int_1^x f(t)dt$，显然有$F(1)=0, F(-1)=0, F(0)=a+\int_1^0 f(t)dt=a-a=0$，根据罗尔定理，$\exists\xi_1\in(-1,0),\xi_2\in(0,1)$，使得$F'(\xi_1)=0, F'(\xi_2)=0$；再次使用罗尔定理可知$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(-1,1)$，有$F''(\xi)=0$.

21. 已知向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，设$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4),\boldsymbol{G}=(\alpha_1,\alpha_2)$.

（1）证明α_1,α_2是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的极大无关组；

（2）求矩阵$\boldsymbol{H}$有$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{GH}$，并求$\boldsymbol{A}^{10}$.

【解析】（1）对$\boldsymbol{A}$进行初等行变换：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&-1&1\\-1&0&1&-1\\-1&-2&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

可得秩为 2，且α_1,α_2线性无关，故α_1,α_2是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的极大无关组；

（2）将α_3,α_4用α_1,α_2线性表示：

$$\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2,\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2$$

则$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2,-\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{GH}$

即$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}$；

$$\boldsymbol{A}^{10}=\boldsymbol{GHGH}\cdots\boldsymbol{GH}=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{HG})^9\boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{HG}=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\-1&0\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

通过找规律可知$(\boldsymbol{HG})^9=\begin{pmatrix}1&-9\\0&1\end{pmatrix}$，故

$$\boldsymbol{A}^{10}=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{HG})^9\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\-1&0\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&-8&-9&9\\0&-1&-1&1\\-1&9&10&-10\\-1&7&8&-8\end{bmatrix}$$

22. 假设某种元件的寿命服从指数分布，其均值θ是未知参数，为估计θ，取n个这种元件同时做寿命试验，试验到出现k个元件失效时停止.

（1）若$k=1$，失效元件的寿命记为T，(i) 求T的概率密度；(ii) 记$\hat{\theta}=aT$，确定a，使得$E(\hat{\theta})=\theta$，并求$D(\hat{\theta})$；

（2）已知k个失效元件寿命值分别为$t_1,t_2,\cdots,t_k$，且$t_1\le t_2\le\cdots\le t_k$，似然函数为$L(\theta)=\frac{1}{\theta^k}e^{-\frac{1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]}$，求$\theta$的最大似然估计值.

【解析】（1）(i) 设随机变量X为元件的寿命，则分布函数为$F(x)=\begin{cases}0,x<0\\1-e^{-\frac{x}{\theta}},x\ge 0\end{cases}$，概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}0,x\le 0\\\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}},x>0\end{cases}$；

令　$T=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$　，　$F_T(t)=P\{T\le t\}=1-P\{T>t\}=1-P\{\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}>t\}=1-P\{X_1>t\}P\{X_2>t\}\cdots P\{X_n>t\}=1-\prod_{i=1}^{n}[1-P\{X_i\le t\}]=1-[1-F(t)]^n=\begin{cases}0,t<0\\1-e^{-\frac{nt}{\theta}},t\ge 0\end{cases}$；

故T的概率密度为$f_T(t)=\begin{cases}0,t\le 0\\\frac{n}{\theta}e^{-\frac{nt}{\theta}},t>0\end{cases}$；

(ii) 由(i)可知$T\sim E(\frac{n}{\theta})$，$E(\hat{\theta})=E(aT)=aE(T)=a\frac{\theta}{n}$，得$a=n$；

$D(\hat{\theta})=D(aT)=a^2D(T)=n^2\frac{\theta^2}{n^2}=\theta^2$；

（2）对似然函数取对数：$\ln L(\theta)=-k\ln\theta-\frac{1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]$，求导：$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{k}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]=0$，

得θ的最大似然估计值$\hat{\theta}_2=\frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]$.