
ЛР №5 «Типовые динамические звенья»

Отчет

Студент

Кирилл Лалаянц

R33352

336700

Вариант - 6

Преподаватель

Пашенко А.В.

Факультет Систем Управления и Робототехники

ИТМО

13.11.2023

Содержание

1	Вводные данные	1
1.1	Цель работы	1
1.2	Воспроизведение результатов	1
1.3	Обозначения	1
2	Выполнение работы	2
2.1	Brushed DC motor 2.0.	2
2.1.1	Теория	2
2.1.2	Результаты	3
2.2	Конденсируй. Интегрируй. Умножай.	3
2.2.1	Теория	3
2.2.2	Результаты	4
2.3	Доп. Brushed DC motor.	5
2.3.1	Теория	5
2.3.2	Результаты	5
2.4	Доп. Tachogenerator.	6
2.4.1	Теория	6
2.4.2	Результаты	7
2.5	Доп. Spring-mass system.	8
2.5.1	Теория	8
2.5.2	Результаты	9
3	Заключение	10
3.1	Выводы	10

1 Вводные данные

1.1 Цель работы

В этой работе будет проведено исследование следующих вопросов:

- Типовые динамические звенья.
- АЧХ, ЛЧХ, ФЛЧХ.

1.2 Воспроизведение результатов

Все результаты можно воспроизвести с помощью [репозитория](#).

1.3 Обозначения

Здесь и далее $\theta(t)$ – функция Хэвисайда.

2 Выполнение работы

2.1 Brushed DC motor 2.0.

2.1.1 Теория

Даны уравнения двигателя постоянного тока независимого возбуждения:

$$J\dot{w} = M, M = k_m I, I = \frac{U + \varepsilon}{R}, \varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s, \varepsilon_i = -k_e w, \varepsilon_s = -L\dot{I}.$$

Путем несложных преобразований получаем:

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ -\frac{k_m k_e}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_m}{L} \end{bmatrix} U \quad (1)$$

$$w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} U \quad (2)$$

Откуда получаем TF:

$$W(s) = \frac{k_m}{JLs^2 + JRs + k_e k_m}$$

Тогда ДУ:

$$\begin{aligned} J L \ddot{w} + J R \dot{w} + k_e k_m w &= k_m U \\ \ddot{w} + \frac{R}{L} \dot{w} + \frac{k_e k_m}{J L} w &= \frac{k_m}{J L} U \\ \ddot{w} + 3.908 \dot{w} + 48.81 w &= 134.2 U \end{aligned}$$

$$3.908^2 - 4 * 48.81 < 0 \Rightarrow \text{колебательное звено второго порядка.}$$

Для частотных характеристик подставим в TF $s = iw$:

$$W(w) = \frac{k_m}{-JLw^2 + JRiw + k_e k_m}$$

Применив обратное преобразование Лапласа для W получаем:

$$\begin{aligned} w_{i.r.} &= \frac{2k_m e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin\left(\frac{t\sqrt{\frac{-R^2}{L} + \frac{4k_e k_m}{J}}}{2}\right) \theta(t)}{JL\sqrt{\frac{-R^2}{L} + \frac{4k_e k_m}{J}}} \\ w_{i.r.} &= 20e^{-1.95t} \sin(6.7t) \theta(t) \end{aligned}$$

Применив обратное преобразование Лапласа для W/s получаем:

$$\begin{aligned} w_{s.r.} &= k_m \left(\left(-\frac{e^{-\frac{Rt}{2L}} \cos\left(\frac{t\sqrt{\frac{-JR^2 - 4Lk_e k_m}{J}}}{2L}\right)}{k_e k_m} - \frac{Re^{-\frac{Rt}{2L}} \sin\left(\frac{t\sqrt{\frac{-R^2}{L} + \frac{4k_e k_m}{J}}}{2}\right)}{Lk_e k_m \sqrt{\frac{-R^2}{L} + \frac{4k_e k_m}{J}}} \right) \theta(t) + \frac{\theta(t)}{k_e k_m} \right) \\ w_{s.r.} &= 0.36 \left(-2.2e^{-1.95t} \sin(6.7t) - 7.56e^{-1.95t} \cos(6.7t) \right) \theta(t) + 2.75\theta(t) \end{aligned}$$

2.1.2 Результаты

На графике (Рис. 1) представлен результат выполнения задания. Как видно, практический результат совпал с теоретическим.

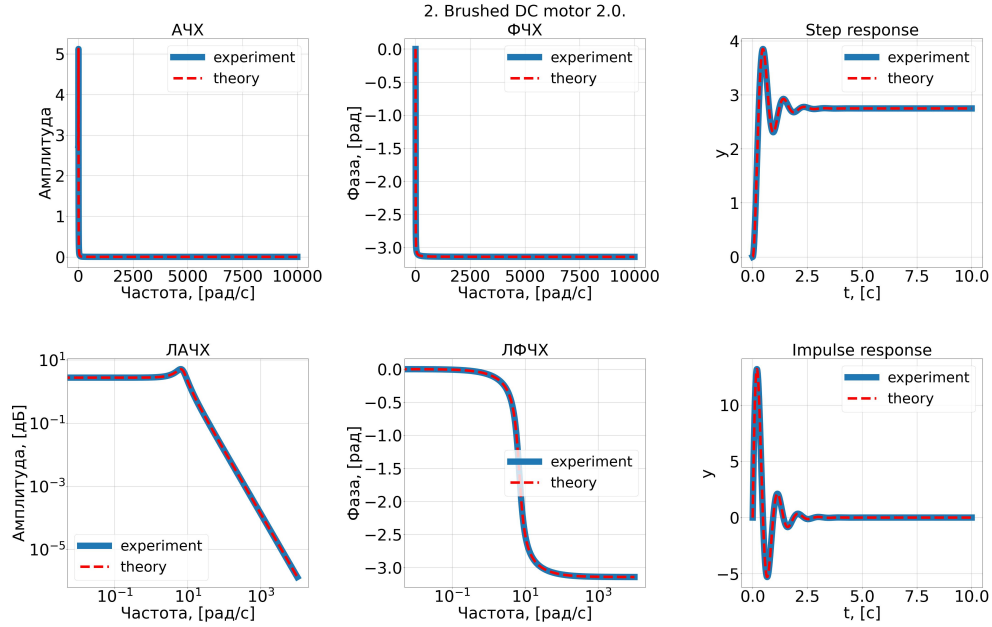


Рис. 1: Результат выполнения задания.

2.2 Конденсируй. Интегрируй. Умножай.

2.2.1 Теория

Дано уравнение конденсатора:

$$I = C \frac{dU}{dt}.$$

Путем несложных преобразований получаем:

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \end{bmatrix} I \quad (3)$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} I \quad (4)$$

Откуда получаем TF:

$$W(s) = \frac{1}{Cs}$$

Тогда ДУ:

$$C\dot{U} = I$$

$$\dot{U} = \frac{I}{C}$$

$$\dot{U} = 3484I \Rightarrow \text{идеальное интегрирующее звено.}$$

Для частотных характеристик подставим в ТФ $s = iw$:

$$W(w) = \frac{1}{Ciw}$$

Применив обратное преобразование Лапласа для W получаем:

$$U_{i.r.} = \frac{\theta(t)}{C}$$

$$U_{i.r.} = 3484.3\theta(t)$$

Применив обратное преобразование Лапласа для W/s получаем:

$$U_{s.r.} = \frac{t\theta(t)}{C}$$

$$U_{s.r.} = 3484.3t\theta(t)$$

2.2.2 Результаты

На графике (Рис. 2) представлен результат выполнения задания. Как видно, практический результат совпал с теоретическим.

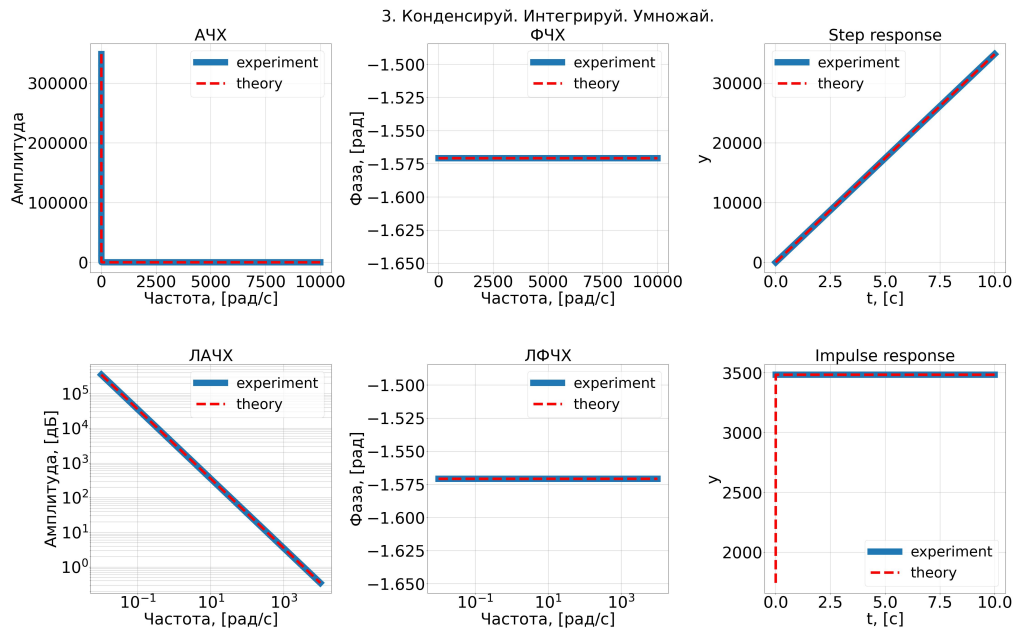


Рис. 2: Результат выполнения задания.

2.3 Доп. Brushed DC motor.

2.3.1 Теория

Даны уравнения двигателя постоянного тока независимого возбуждения:

$$J\dot{w} = M, M = k_m I, I = \frac{U + \varepsilon}{R}, \varepsilon = \varepsilon_i, \varepsilon_i = -k_e w.$$

Путем несложных преобразований получаем:

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_m k_e}{JR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_m}{JR} \end{bmatrix} U \quad (5)$$

$$w = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} U \quad (6)$$

Откуда получаем TF:

$$W(s) = \frac{k_m}{JR \left(s + \frac{k_e k_m}{JR} \right)}$$

Тогда ДУ:

$$\begin{aligned} JR\dot{w} + k_e k_m w &= k_m U \\ \dot{w} + \frac{k_e k_m}{JR} w &= \frac{k_m}{JR} U \end{aligned}$$

$$\dot{w} + 8.909w = 24.67U \Rightarrow \text{апериодическое звено первого порядка.}$$

Для частотных характеристик подставим в TF $s = iw$:

$$W(w) = \frac{k_m}{JR \left(iw + \frac{k_e k_m}{JR} \right)}$$

Применив обратное преобразование Лапласа для W получаем:

$$w_{i.r.} = \frac{k_m e^{-\frac{k_e k_m t}{JR}} \theta(t)}{JR}$$

$$w_{i.r.} = 24.6 e^{-8.9t} \theta(t)$$

Применив обратное преобразование Лапласа для W/s получаем:

$$\begin{aligned} w_{s.r.} &= \frac{k_m \left(\frac{JR\theta(t)}{k_e k_m} - \frac{JR e^{-\frac{k_e k_m t}{JR}} \theta(t)}{k_e k_m} \right)}{JR} \\ w_{s.r.} &= 2.7\theta(t) - 2.7e^{-8.9t}\theta(t) \end{aligned}$$

2.3.2 Результаты

На графике (Рис. 3) представлен результат выполнения задания. Как видно, практический результат совпал с теоретическим.

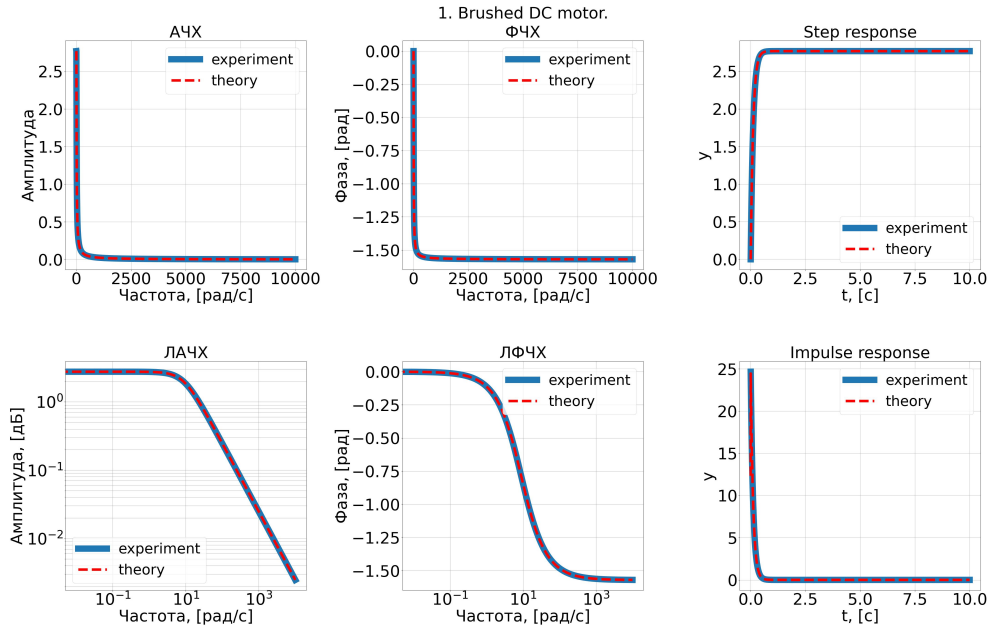


Рис. 3: Результат выполнения задания.

2.4 Доп. Tachogenerator.

2.4.1 Теория

Даны уравнения тахогенератора постоянного тока:

$$I = \frac{\varepsilon - U_{out}}{R}, \varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s, \varepsilon_i = -k_e \dot{\theta}, e_s = -L \dot{I}, I = \frac{U_{out}}{r}.$$

Путем несложных преобразований получаем:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_L + R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{out} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_e \end{bmatrix} w \quad (7)$$

$$U_{out} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{out} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} w \quad (8)$$

Откуда получаем TF:

$$W(s) = \frac{k_e}{s + \frac{R}{L} + \frac{R_L}{L}}$$

Тогда ДУ:

$$\dot{U}_{out} + \frac{R_L + R}{L} U_{out} = k_m w$$

$$\dot{U}_{out} + 586 U_{out} = 0.3427 w \Rightarrow \text{апериодическое звено первого порядка.}$$

Для частотных характеристик подставим в TF $s = iw$:

$$W(w) = \frac{k_e}{iw + \frac{R}{L} + \frac{R_L}{L}}$$

Применив обратное преобразование Лапласа для W получаем:

$$w_{i.r.} = k_e e^{-\frac{t(R+R_l)}{L}} \theta(t)$$

$$w_{i.r.} = 0.3427 e^{-586t} \theta(t)$$

Применив обратное преобразование Лапласа для W/s получаем:

$$w_{s.r.} = k_e \left(-\frac{L^2 e^{-\frac{t(R^2+2RR_l+R_l^2)}{LR+LR_l}} \theta(t)}{LR+LR_l} + \frac{L\theta(t)}{R+R_l} \right)$$

$$w_{s.r.} = 0.00058\theta(t) - 0.00058e^{-586t}\theta(t)$$

2.4.2 Результаты

На графике (Рис. 4) представлен результат выполнения задания. Как видно, практический результат совпал с теоретическим.

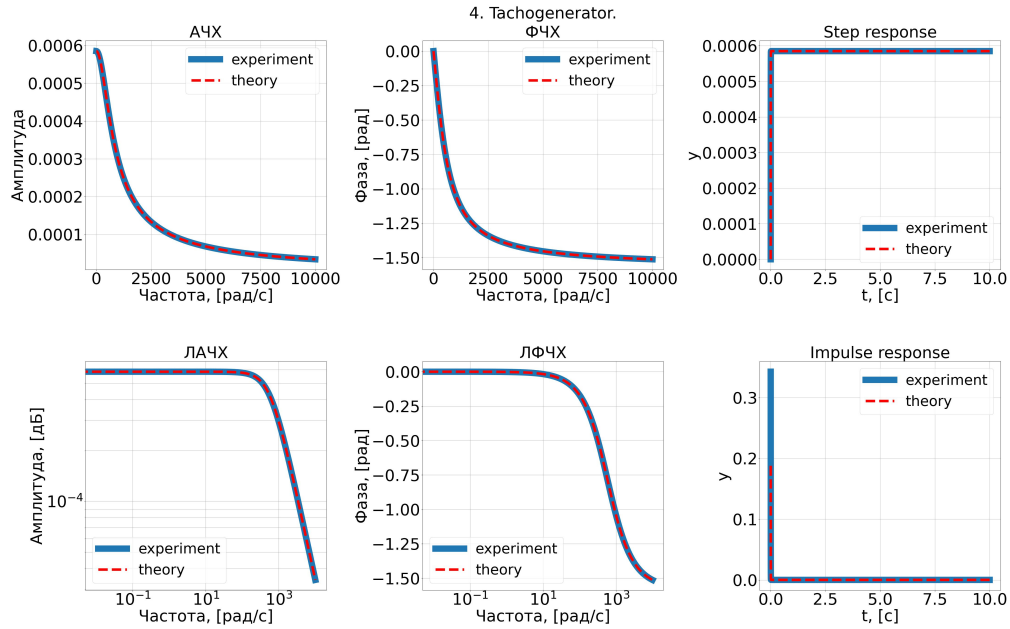


Рис. 4: Результат выполнения задания.

2.5 Доп. Spring-mass system.

2.5.1 Теория

Даны уравнения пружинного маятника:

$$F_{\text{упр}} = -kx, F = F_{\text{ext}} + F_{\text{упр}}, F = ma.$$

Путем несложных преобразований получаем:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F_{\text{ext}} \quad (9)$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} F_{\text{ext}} \quad (10)$$

Откуда получаем TF:

$$W(s) = \frac{1}{m \left(\frac{k}{m} + s^2 \right)}$$

Тогда ДУ:

$$m\ddot{x} + kx = F_{\text{ext}}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}F_{\text{ext}}$$

$$\ddot{x} + 9.257x = 0.02857U \Rightarrow \text{консервативное звено второго порядка.}$$

Для частотных характеристик подставим в TF $s = iw$:

$$W(w) = \frac{1}{m \left(\frac{k}{m} - w^2 \right)}$$

Применив обратное преобразование Лапласа для W получаем:

$$w_{i.r.} = \frac{\sin \left(t \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \theta(t)}{m \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$w_{i.r.} = \frac{\sqrt{35} \sin \left(\frac{18\sqrt{35}t}{35} \right) \theta(t)}{630}$$

Применив обратное преобразование Лапласа для W/s получаем:

$$w_{s.r.} = \frac{-\frac{m \cos \left(t \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \theta(t)}{k} + \frac{m \theta(t)}{k}}{m}$$

$$w_{s.r.} = -\frac{\cos \left(\frac{18\sqrt{35}t}{35} \right) \theta(t)}{324} + \frac{\theta(t)}{324}$$

2.5.2 Результаты

На графике (Рис. 5) представлен результат выполнения задания. Как видно, практический результат совпал с теоретическим. Разница в ФЧХ обусловлена работой функции `atan2`: ее результат принадлежит полуинтервалу $(-\pi, \pi]$, из-за чего отставание по фазе на π интерпретируется как опережение на π .

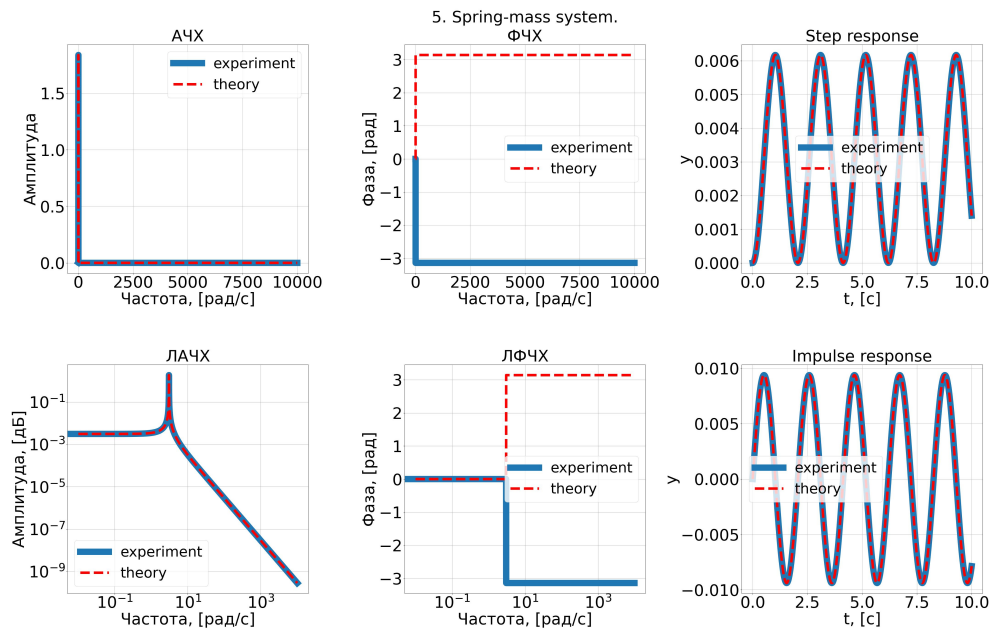


Рис. 5: Результат выполнения задания.

3 Заключение

В этой работе было проведено исследование следующих вопросов:

- Типовые динамические звенья.
- АЧХ, ЛЧХ, ФЛЧХ.

3.1 Выводы

1. На примерах разных систем изучены типовые динамические звенья. Теоретические результаты сошлись с практическими.