

---

ЛР №2 «Переходные процессы, свободное движение,  
устойчивость»

---

Отчет

Студент  
Кирилл Лалаянц  
R33352  
336700  
Вариант - 6

Преподаватель  
Пашенко А.В.

Факультет Систем Управления и Робототехники

ИТМО

13.09.2023

## Содержание

1	Вводные данные	1
1.1	Цель работы . . . . .	1
1.2	Инициализация необходимых переменных в Python . . . . .	1
2	Выполнение работы	2
2.1	Задание 1. Свободное движение. . . . .	2
2.1.1	Теория . . . . .	2
2.1.2	Программная реализация . . . . .	2
2.1.3	Результаты . . . . .	3
2.2	Задание 2. Область устойчивости. . . . .	6
2.2.1	Теория . . . . .	6
2.2.2	Результаты . . . . .	8
2.3	Задание 3. Автономный генератор. . . . .	10
2.3.1	Теория . . . . .	10
2.3.2	Программная реализация . . . . .	11
2.3.3	Результаты . . . . .	12
2.4	Задание 4. (Необязательное) Изучение канонической управляемой формы: фазовые портреты. . . . .	13
2.4.1	Теория . . . . .	13
2.4.2	Программная реализация . . . . .	13
2.4.3	Результаты . . . . .	14
3	Заключение	15
3.1	Выводы . . . . .	15

## 1 Вводные данные

### 1.1 Цель работы

В этой работе будет проведено исследование следующих вопросов:

- Характер свободного поведения системы в зависимости от корней ее характеристического уравнения.
- Исследования границ зоны устойчивости конкретной системы.
- Создание автономного генератора для воссоздания поведения системы.
- Изучение фазовых портретов канонической управляемой формы.

### 1.2 Инициализация необходимых переменных в Python

Импорт необходимых библиотек (для реализации здесь и далее используется [Python Control Systems Library](#)); инициализация массива временных отметок:

---

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 import control
4 import sympy
5 import os
6 import math
```

---

## 2 Выполнение работы

### 2.1 Задание 1. Свободное движение.

#### 2.1.1 Теория

Хотим получить ДУ системы вида:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u$$

Сначала получим характеристическое уравнение для частного решения вида:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = 0$$

Имеем два корня  $-\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Тогда:

$$(p - \lambda_1)(p - \lambda_2) = p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)p + \lambda_1\lambda_2 = 0,$$

умножив которое на  $y$  получаем:

$$\ddot{y} - (\lambda_1 + \lambda_2)\dot{y} + \lambda_1\lambda_2y = 0.$$

Для данного ДУ известно частичное решение:

$$y_0(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t},$$

параметры  $c_1$  и  $c_2$  которого вычисляются из начальных условий.

Также подставим характеристическое уравнение в знаменатель ТФ  $W(p)$ :

$$W(p) = \frac{1}{p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)p + \lambda_1\lambda_2}$$

Полученная ТФ соответствует системе с желаемыми корнями характеристического уравнения.

#### 2.1.2 Программная реализация

---

```
1 def task1_output(m1, m2, initial_value, ts, plot_name, save_name):
2     poly = sympy.simplify((p - m1) * (p - m2))
3     coeffs = sympy.Poly(poly, p).all_coeffs()
4
5     ss = control.tf2ss(control.tf(1, np.array(coeffs, dtype=np.float64)))
6     ss_reachable = control.canonical_form(ss, form="reachable")[0]
7
8     tf2_y_0_0 = control.forced_response(ss_reachable, U=0, X0=[0, 0], T=ts)
9     tf2_y_1_1 = control.forced_response(ss_reachable, U=0, X0=initial_value, T=ts)
10    plot_task1(tf2_y_0_0, tf2_y_1_1, initial_value, ts, plot_name, save_name)
```

---

### 2.1.3 Результаты

- Устойчивая и неустойчивая апериодические моды

Выбраны  $\lambda_1 = -1$  и  $\lambda_2 = 1$ . Получено уравнение свободного движения вида:

$$y_0(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$$

Из аналитического решения видно, что система, при отличных от 0 начальных условиях, со временем стремится к бесконечности, следовательно – неустойчива.

Проверим моделированием:

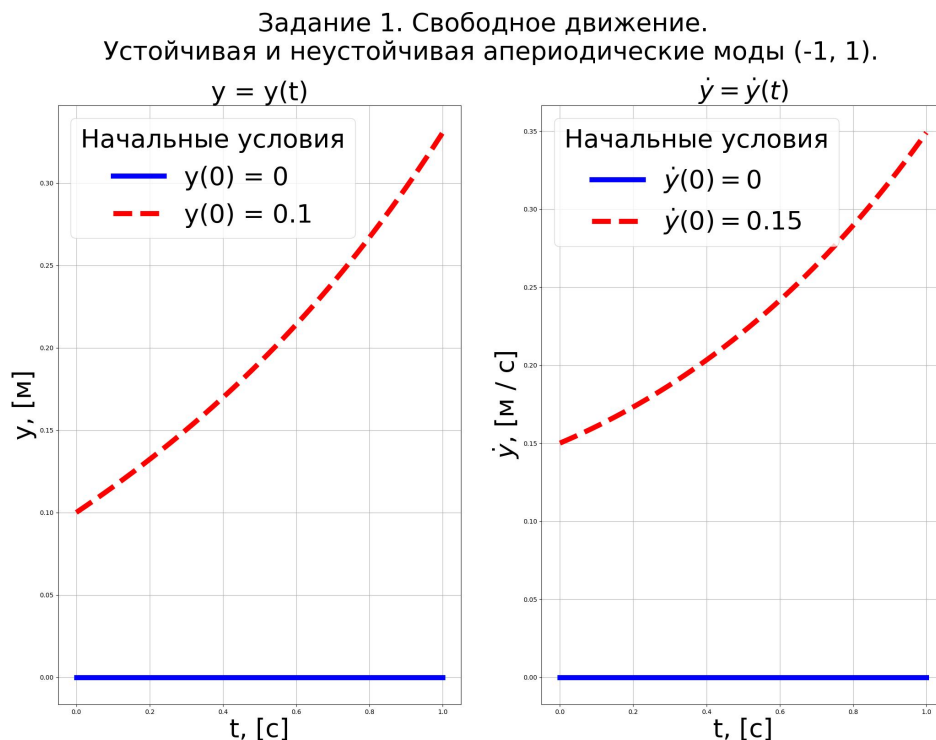


Рис. 1: Результаты устойчивой и неустойчивой апериодических мод.

Действительно, все так.

- Нейтральная и неустойчивая апериодические моды

Выбраны  $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_2 = 1$ . Получено уравнение свободного движения вида:

$$y_0(t) = c_1 e^{-t} + c_2$$

Из аналитического решения видно, что система, при отличных от 0 начальных условиях, со временем стремится к бесконечности, следовательно – неустойчива.

Проверим моделированием:

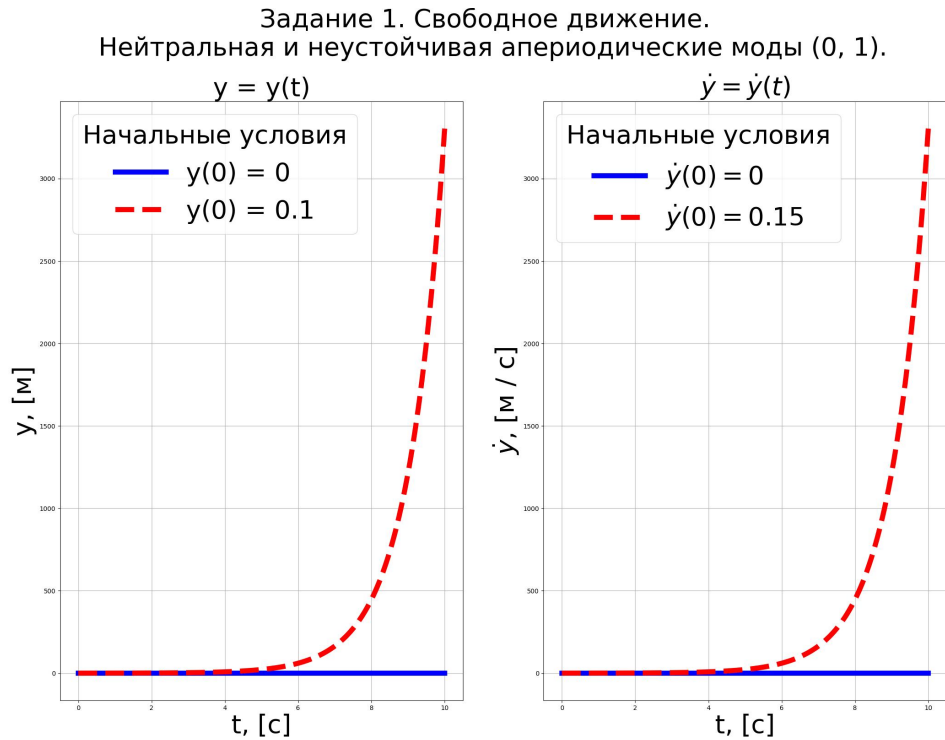


Рис. 2: Результаты нейтральной и неустойчивой апериодических мод.

Действительно, все так.

- Пара консервативных мод

Выбраны  $\lambda_1 = i$  и  $\lambda_2 = -i$ . Получено уравнение свободного движения вида:

$$y_0(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$$

Из аналитического решения видно, что система, при отличных от 0 начальных условиях, устойчива по Ляпунову.

Проверим моделированием:

Задание 1. Свободное движение.  
Пара консервативных мод (-I, I).

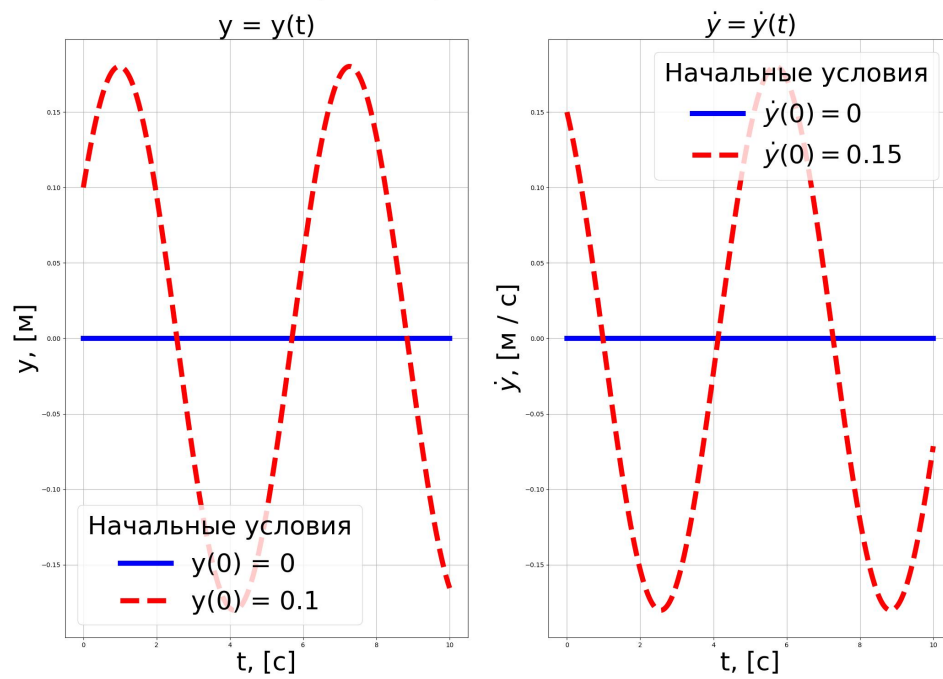


Рис. 3: Результаты пары консервативных мод.

Действительно, все так.

## 2.2 Задание 2. Область устойчивости.

### 2.2.1 Теория

Возьмем первый набор корней из первого задания  $\lambda_1 = -1$  и  $\lambda_2 = 1$ . Представим соответствующие им ТФ вида:

$$W(p) = \frac{1}{Tp + 1}$$

Получаем:

$$W_1(p) = \frac{1}{T_1p + 1} = \frac{1}{-1T_1 + 1} \rightarrow T_1 = 1$$

$$W_2(p) = \frac{1}{T_2p + 1} = \frac{1}{1T_2 + 1} \rightarrow T_2 = -1$$

Так же по заданию имеем:

$$W_3(p) = \frac{1}{p}$$

$$W_4(p) = K$$

$$W_{feedback}(p) = -1$$

Тогда получаем общую ТФ системы:

$$W(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_4(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_4(p)} = \frac{K}{T_1T_2p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p + K}$$

Для анализа устойчивости воспользуемся следствием из критерия Гурвица для однородного ДУ третьего порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{K}{T_1T_2} > 0 \\ \frac{T_1+T_2}{T_1T_2} > 0 \\ \frac{K}{T_1T_2} > 0 \\ \frac{T_1+T_2}{(T_1T_2)^2} > \frac{K}{T_1T_2} \end{array} \right.,$$

- Зафиксируем значение  $T_2 = -1$

Тогда система принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{K}{T_1(-1)} > 0 \\ \frac{T_1+(-1)}{T_1(-1)} > 0 \\ \frac{K}{T_1(-1)} > 0 \\ \frac{T_1+(-1)}{(T_1(-1))^2} > \frac{K}{T_1(-1)} \end{array} \right.,$$

решений у неё нет. Следовательно, система не может быть устойчивой с таким параметром  $T_2$ .



- Зафиксируем значение  $T_1 = 1$

Тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{K}{T_2} > 0 \\ \frac{T_2+1}{T_2} > 0 \\ \frac{K}{T_2} > 0 \\ \frac{T_2+1}{T_2^2} > \frac{K}{T_2} \end{cases},$$

у нее есть решения, представленные на графике ниже.

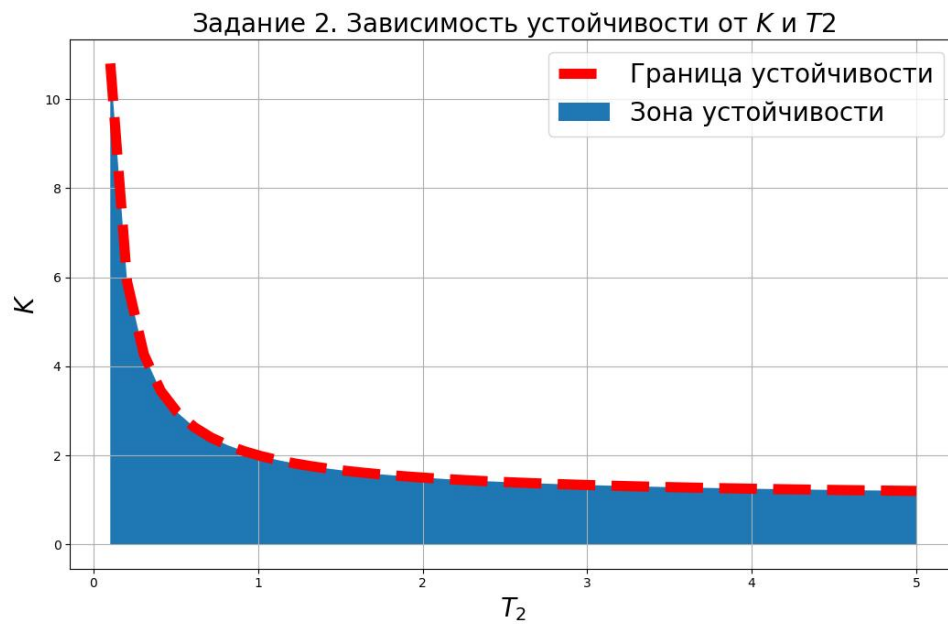


Рис. 4: Зависимость устойчивости от  $K$  и  $T_2$ .

## 2.2.2 Результаты

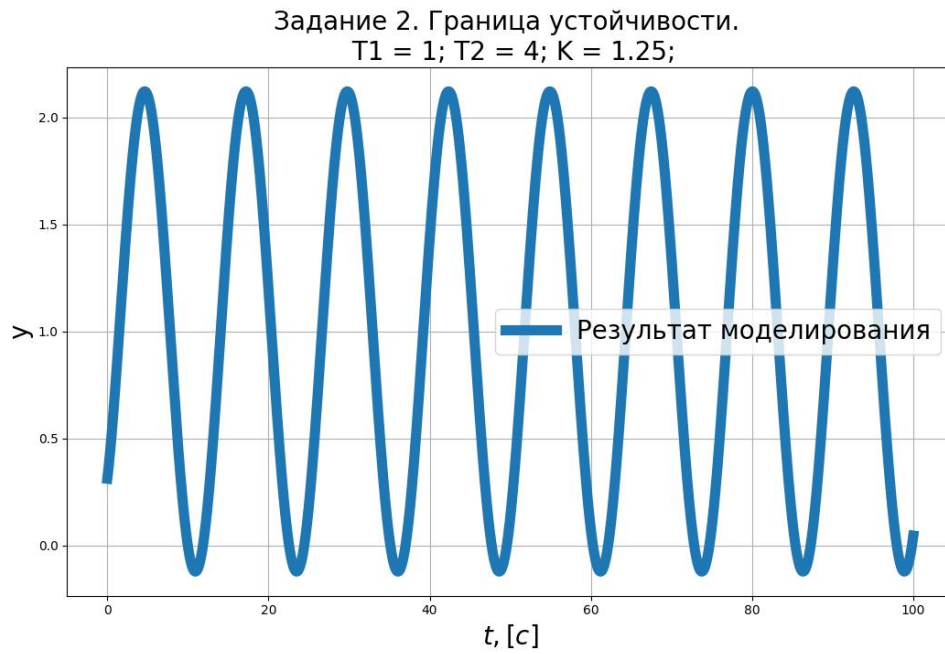


Рис. 5: Устойчивые по Ляпунову параметры.

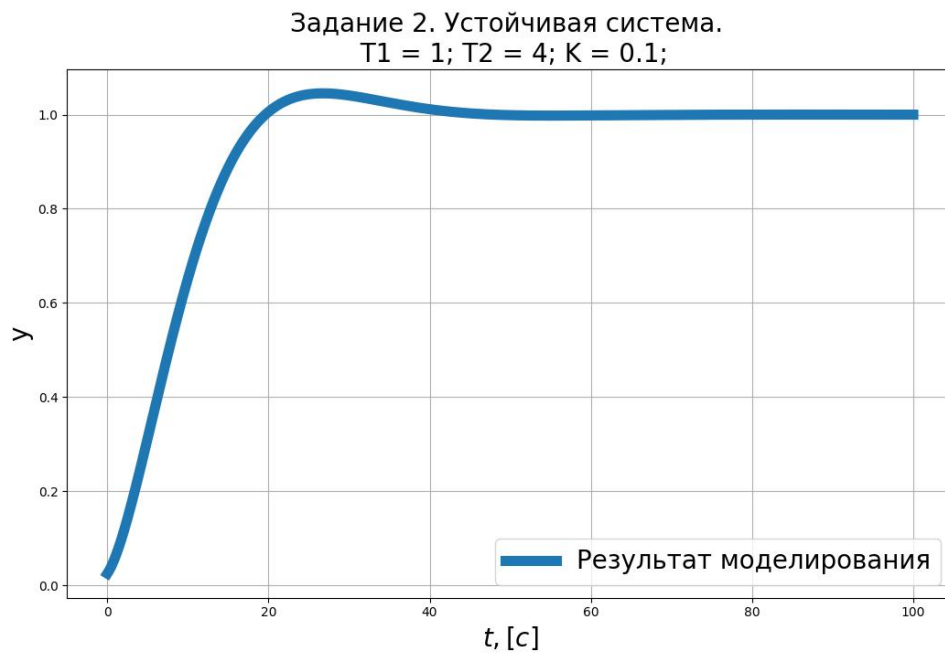


Рис. 6: Устойчивые асимптотически параметры.

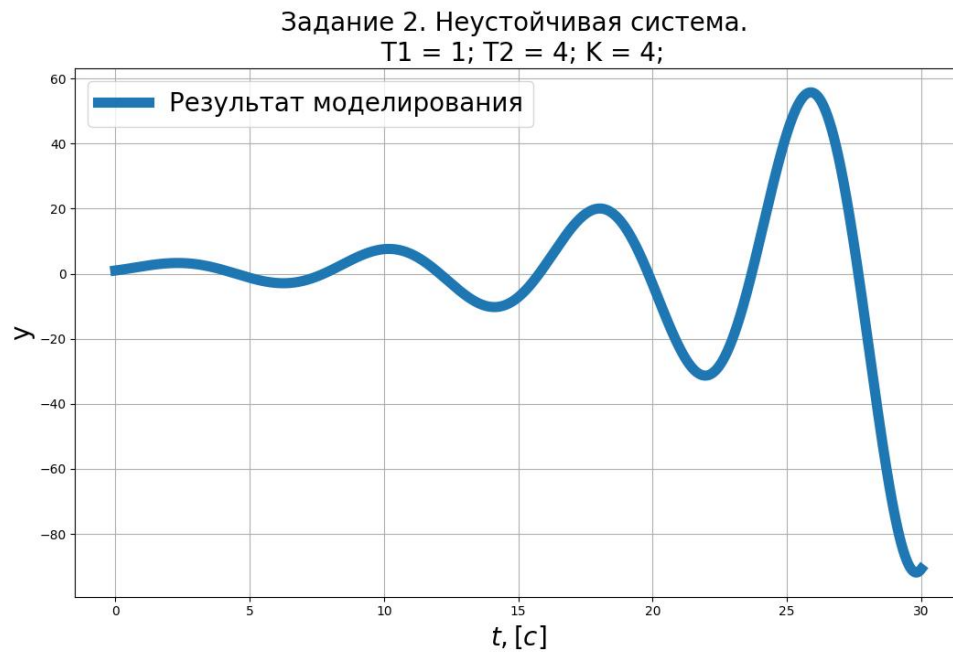


Рис. 7: Неустойчивые параметры.

По приведенным выше графикам видно, что полученная зона устойчивости соответствует действительности.

### 2.3 Задание 3. Автономный генератор.

#### 2.3.1 Теория

Необходимо найти матрицы  $A$  и  $C$  такие, чтобы выход системы совпадал с функцией:

$$y(t) = \cos(5t) + e^t + e^{-5t}$$

Из функции ясно видно, что модами будут:  $\lambda_1 = 1$ ;  $\lambda_2 = -5$ ;  $\lambda_3 = 5i$ ;  $\lambda_4 = -5i$ .

Запишем в вещественной жордановой форме:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix},$$

Известно, что:

$$x_0(t) = e^{At}x(0)$$

$$y_0(t) = Ce^{At}x(0)$$

Вычислим матричную экспоненту:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5t \\ 0 & 0 & -5t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^2/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25t^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -25t^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -25t^2/2 \end{bmatrix} + \dots;$$

После чего заметно, что результатами сложения отдельных ячеек являются ряды Тейлора, откуда получаем:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-5t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(5t) & \sin(5t) \\ 0 & 0 & -\sin(5t) & \cos(5t) \end{bmatrix}$$

Зададим вектор начальных условий и матрицу  $C$ :

$$x(0) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix};$$

тогда:

$$y_0(t) = Ce^{At}x(0) = a_1c_1e^t + a_2c_2e^{-5t} + (a_3c_3 + a_4c_4)\cos(5t) + (-a_3c_4 + a_4c_3)\sin(5t)$$

Отсюда, сопоставив с исходной функцией, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 c_1 = 1 \\ a_2 c_2 = 1 \\ a_3 c_3 + a_4 c_4 = 1 \\ -a_3 c_4 + a_4 c_3 = 0 \end{cases},$$

Мы можем самостоятельно выбрать любой вектор начальных условий, что сводит систему уравнений к системе из 4 уравнений с 4 неизвестными, после чего получаем:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix};$$

### 2.3.2 Программная реализация

---

```
1 task3_ss = control.ss(task3_A, np.zeros((4, 1)), task3_C, 0)
2 ss_response = control.forced_response(task3_ss, ts, X0=task3_initial)
```

---

## 2.3.3 Результаты

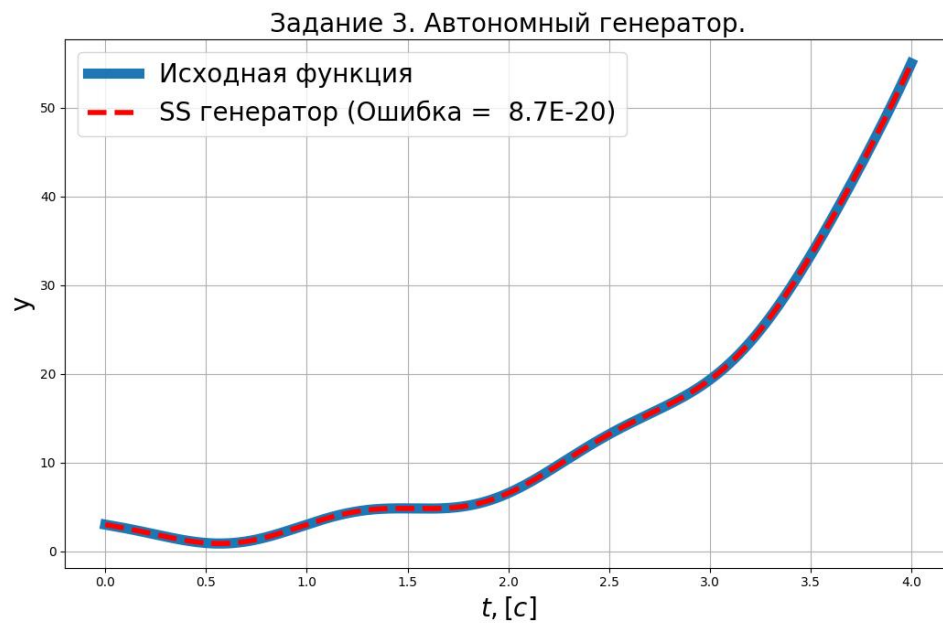


Рис. 8: Результаты третьего задания.

По графику видно, что генератор совпал с исходной функцией. В легенде указана получившаяся квадратичная ошибка, которая очень мала и просто является погрешностью вычислений Python3.

## 2.4 Задание 4. (Необязательное) Изучение канонической управляемой формы: фазовые портреты.

### 2.4.1 Теория

Рассмотрим фазовый портрет системы 3 из первого задания.

$$\ddot{y} + y = 0$$

Её TF имеет вид:

$$W(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

В форме SS имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, B = D = 0;$$

### 2.4.2 Программная реализация

---

```

1 def task4_output(m1, m2, initial_values, ts):
2     plot_name = f'Моды: {m1}, {m2}'
3     save_name = f'task4_{m1}_{m2}.jpg'
4     poly = sympy.simplify((p - m1) * (p - m2))
5     coeffs = sympy.Poly(poly, p).all_coeffs()
6     tf_y = control.tf(1, np.array(coeffs, dtype=np.float64))
7     tf_dy = tf_y * control.tf([1, 0], [1])
8     ss = control.tf2ss(tf_dy)
9     ss_reachable = control.canonical_form(ss, form="reachable")[0]
10
11     ss = control.tf2ss(tf_y)
12     ss_reachable = control.canonical_form(ss, form="reachable")[0]
13
14     responses = []
15     for initial_value in initial_values:
16         tf_y_response = control.forced_response(tf_y, U=0, X0=initial_value, T=ts)
17         tf_dy_response = control.forced_response(tf_dy, U=0, X0=initial_value, T=ts)
18         ss_response = control.forced_response(ss_reachable, U=0, X0=initial_value, T=ts)
19         responses.append([initial_value, tf_y_response, tf_dy_response, ss_response])
20
21     task4_plot(responses, plot_name, save_name)

```

---

### 2.4.3 Результаты

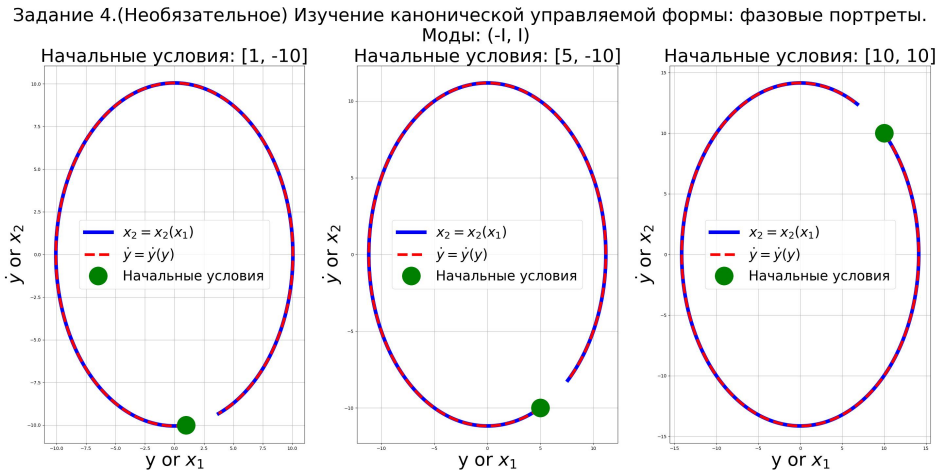


Рис. 9: Результаты четвертого задания.

Полученные графики совпали, что в целом максимально ожидаемо, потому что вектор состояния для системы второго порядка из себя и представляет  $\dot{y}$  и  $y$ .



### 3 Заключение

В этой работе было проведено исследование следующих вопросов:

- Характер свободного поведения системы в зависимости от корней ее характеристического уравнения.
- Исследования границ зоны устойчивости конкретной системы.
- Создание автономного генератора для воссоздания поведения системы.
- Изучение фазовых портретов канонической управляемой формы.

#### 3.1 Выводы

1. Проведено моделирование свободное движение систем с различным ненулевым входным воздействием.
2. На практике проверенно влияние мод на характер поведения системы.
3. На практике проверенна верность работы критерия Гурвица.
4. Создан генератор для воссоздания поведения функции.
5. Рассмотренно фазовые диаграммы системы. Проверенно, что вектор состояния соответствует  $y$  и его производным.