ЛР №7 «Управляемость и наблюдаемость»

Отчет

Студент
Кирилл Лалаянц
R33352
336700
Вариант - 11

Преподаватель
Пашенко А.В.

Факультет Систем Управления и Робототехники

ИТМО

09.02.2024

Содержание

1 Вводные данные

1.1 Цель работы

В этой работе пройдет изучение управляемости и наблюдаемости систем.

1.1.1 Программная реализация

С исходным кодом можно ознакомиться в репозитории на Github.

2 Основная часть

2.1 Задание 1

Имеем систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$x(t_1) = \int_0^{t_1} Bu(t)dt$$

2.1.1 Управляемость через матрицу управляемости

$U = [B|AB|\dots|A^{n-1}B]$ для $A \in R^{n\times n}$ и $B \in R^{n\times m}$ – матрица управляемости системы. Если ее ранг равен n – система управляема.

2.1.2 Управляемость и Грамиан управляемости

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At}BB^Te^{A^Tt}dt$$

У управляемой системы Грамиан управляемости положительно определен в любой момент t.

2.1.3 Управляемость через собственные числа матрицы системы

$$\forall\lambda \in spec(A) : rank(A - \lambda I|B) = n \Longleftrightarrow \text{Матрица управляема}$$

2.1.4 Управляемость через Жорданову форму

Жорданова форма матрицы $A = PJP^{-1}$:

$$\dot{x} = PJP^{-1}x + Bu$$

Пусть $\hat{x} = P^{-1}x$, тогда получим Жорданову форму системы:

$$\dot{\hat{x}} = J\hat{x} + P^{-1}Bu = J\hat{x} + \hat{B}u$$

Система в Жордановой форме полностью управляема, если:

- каждому собственному числу соответсвует только одна Жорданова клетка.
- элементы матрицы входного воздействия, соответсвующие последним строкам клеток – не нулевые.

2.1.5 Програмное управление системой

Для вычисления управления, необходимого для достижения состояния x_1 к моменту времени t_1 достаточно рассчитать:

$$u(t) = B^Te^{A^T(t_1-t)}(P(t_1))^{-1}x_1$$

2.1.6 Результаты

Вариант задания:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -10 & -11 & -4 \\ 10 & 10 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}; x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; t_1 = 3$$

Матрица управляемости U:

$$U = \begin{bmatrix} -2 & 17 & -62 \\ 5 & -23 & -1 \\ -3 & 21 & 3 \end{bmatrix};$$

$$rankU = 3 = n \rightarrow \text{система управляема.}$$

Получены собственные числа $spec(A) = [-2 + 5j, -2 - 5j, -1 + 0j]$. Каждое из них удовлетворяет выражению$rank(A - \lambda I|B) = n$ – то есть управлямо.

Так же рассмотрим управляемость собственных чисел через форму Жордана:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 - 5j & 0 \\ 0 & 0 & -2 + 5j \end{bmatrix}; \hat{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.5 + 1.5j \\ -1.5 - 1.5j \end{bmatrix};$$

Как видно, условия выполнены – еще одно подтверждение, что пара (A, B) управляема.

Так как матрица полностью управляема, любая точка принадлежит управвляемому подпространству системы, в том числе и x_1.

Получен Грамиан управляемости:

$$P(t_1) = \begin{bmatrix} 1.20 & -1.34 & 0.23 \\ -1.34 & 2.76 & -1.12 \\ 0.23 & -1.12 & 1.47 \end{bmatrix};$$

$$spec(P(t_1)) = [4, 0.27, 1.15]$$

Грамиан положительно определен, система полностью управляема.

На рисунке 1 приведены результаты моделирования системы. Как видно, она приняла желаемо состояние за нужное время.

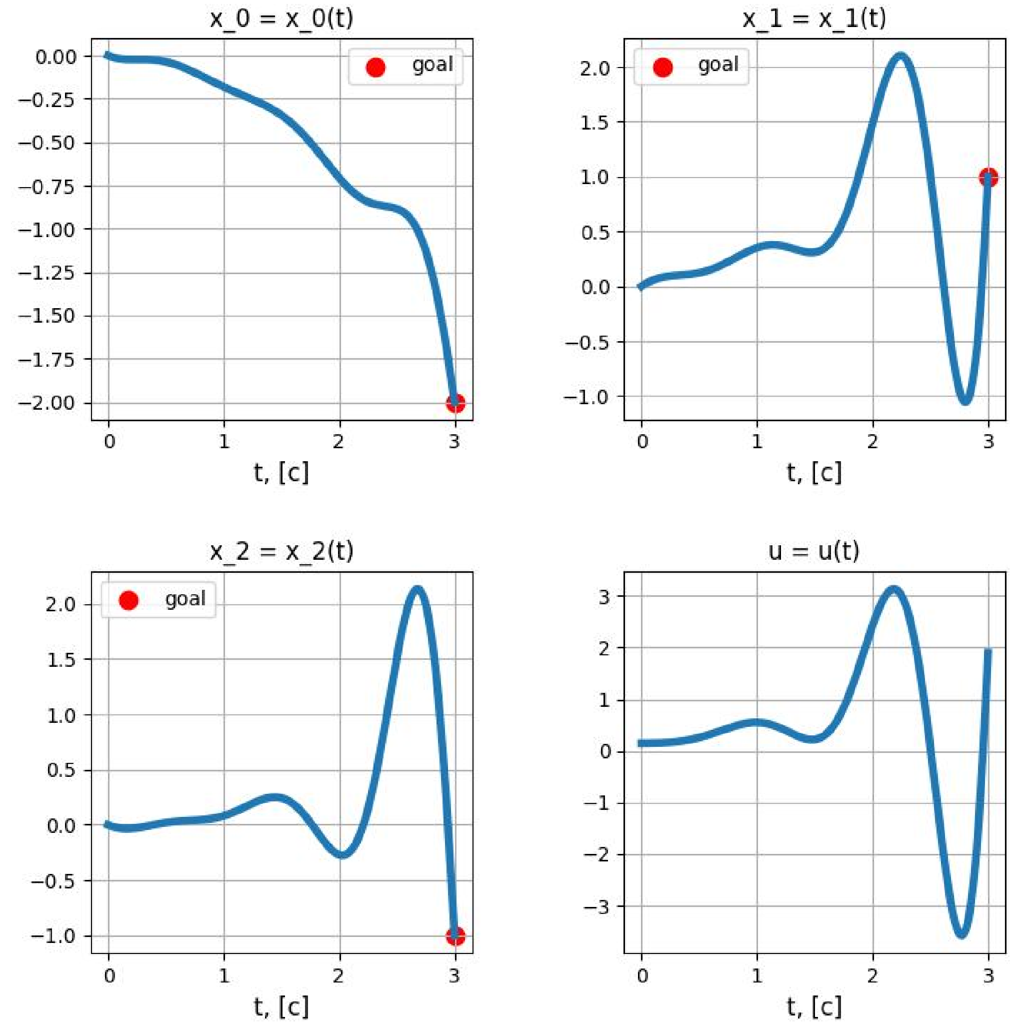

Рис. 1: Результаты моделирования задания 1.

2.2 Задание 2

2.2.1 Принадлежность состояния управвляемому подпространству

В этом задании дополнительно лишь нужно знать, как проверить состояние на принадлежность управляемому подпространству.

Для этого необходимо сравнить $rank(U)$ и $rank(U|x_1)$. Если они совпали – состояние принадлежит.

2.2.2 Результаты

Вариант задания:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -10 & -11 & -4 \\ 10 & 10 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; x_1' = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; x_1'' = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}; t_1 = 3$$

Матрица управляемости U:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 11 & -102 \\ 1 & -27 & 79 \\ -1 & 27 & -79 \end{bmatrix};$$

$$rankU = 2 = n \rightarrow \text{система неполностью управляема.}$$

Получены собственные числа $spec(A) = [-2+5j, -2-5j, -1+0j]$. Третье из них неуправляемо.

Так же рассмотрим управляемость собственных чисел через форму Жордана:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2-5j & 0 \\ 0 & 0 & -2+5j \end{bmatrix}; \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.5+1.5j \\ -1.5-1.5j \end{bmatrix};$$

Как видно, у первого числа соотвествующий элемент в векторе управления 0. Это еще раз подтверждает его неуправляемость.

Из x_1' и x_1'' только первое состояние принадлежит управляемому подпространству.

Получен Грамиан управляемости:

$$P(t_1) = \begin{bmatrix} 2.05 & -1.63 & 1.63 \\ -1.63 & 2.40 & -2.40 \\ 1.63 & -2.40 & 2.40 \end{bmatrix};$$

$$spec(P(t_1)) = [0.74, 6.12, 0]$$

Одно из собственных чисел Грамиана – 0. Для нахождения програмного управления необходимо использовать псевдообратную матрицу.

На рисунке 2 приведены результаты моделирования системы. Как видно, она приняла желаемо состояние за нужное время.

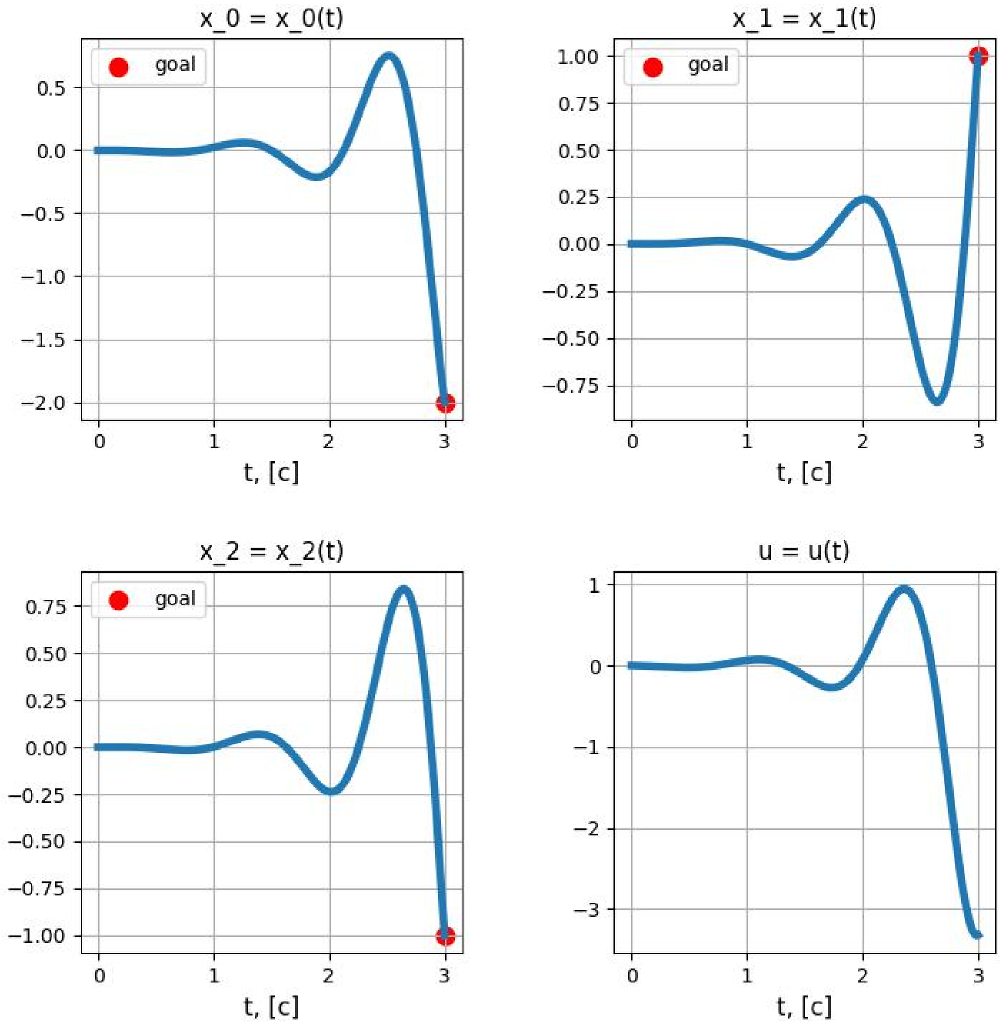

Рис. 2: Результаты моделирования задания 2.

2.3 Задание 3

Имеем систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

$$y(t) = Ce^{At}x(0)$$

2.3.1 Наблюдаемость через матрицу наблюдаемости

$V = [C|CA|\dots|CA^{n-1}]^T$ для $A \in R^{n\times n}$ и $C \in R^{k\times n}$ – матрица наблюдаемости системы. Если ее ранг равен n – система наблюдаема.

2.3.2 Наблюдаемость и Грамиан наблюдаемости

$$Q(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

У наблюдаемой системы Грамиан наблюдаемости положительно определен в любой момент t.

2.3.3 Управляемость через собственные числа матрицы системы

$$\forall\lambda \in spec(A) : rank(\begin{bmatrix} A-\lambda I \\ C \end{bmatrix}) = n \Longleftrightarrow \text{Матрица наблюдаема}$$

2.3.4 Управляемость через Жорданову форму

Жорданова форма матрицы $A = PJP^{-1}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = PJP^{-1}x \\ y = Cx \end{cases}$$

Пусть $\hat{x} = P^{-1}x$, тогда получим Жорданову форму системы:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = J\hat{x} \\ y = CP\hat{x} = \hat{C}\hat{x} \end{cases}$$

Система в Жордановой форме полностью наблюдаема, если:

- каждому собственному числу соответсвует только одна Жорданова клетка.
- элементы матрицы выходов, соответсвующие первым столбцам клеток – не нулевые.

2.3.5 Начальные условия системы

Для вычисления начальных условий системы, достаточно рассчитать:

$$x(0) = (P(t_1))^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt$$

2.3.6 Результаты

Вариант задания:

$$A = \begin{bmatrix} -21 & -38 & 6 \\ 8 & 13 & -4 \\ -6 & -14 & -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 9 & 8 & -2 \end{bmatrix}; y = 3e^{-5x}\cos 2x - e^{-5x}\sin 2x; t_1 = 3$$

Матрица наблюдаемости V:

$$V = \begin{bmatrix} 9 & 8 & -2 \\ -113 & -210 & 24 \\ 549 & 1228 & 138 \end{bmatrix};$$

$$rankU = V = n \rightarrow \text{система наблюдаема.}$$

Получены собственные числа $spec(A) = [-5+2j, -5-2j, 1+0j]$. Каждое из них наблюдаемо, что еще раз показывает наблюдаемость системы.

Так же рассмотрим наблюдаемость собственных чисел через форму Жордана:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5-2j & 0 \\ 0 & 0 & -5+2j \end{bmatrix}; \hat{C} = \begin{bmatrix} 8 & 17+10j & 17-10j \end{bmatrix};$$

Как видно, условия выполнены – еще одно подтверждение, что пара (A, C) наблюдаема.

Получен Грамиан наблюдаемости:

$$Q(t_1) = \begin{bmatrix} 12861 & 25733 & -12846 \\ 25733 & 51508 & -25706 \\ -12846 & -25706 & 12835 \end{bmatrix};$$

$$spec(P(t_1)) = [77197, 1.34, 6.40]$$

Грамиан положительно определен, система полностью наблюдаема.

На рисунке 3 приведены результаты моделирования системы. Как видно, при моделировании она действительно пришла в нужный вектор наблюдения за отведенное время. Так как система полностью наблюдаема, иных начальных состояние быть не может. Размерность $Nullspace(V) = dimV - rankV = 0$.

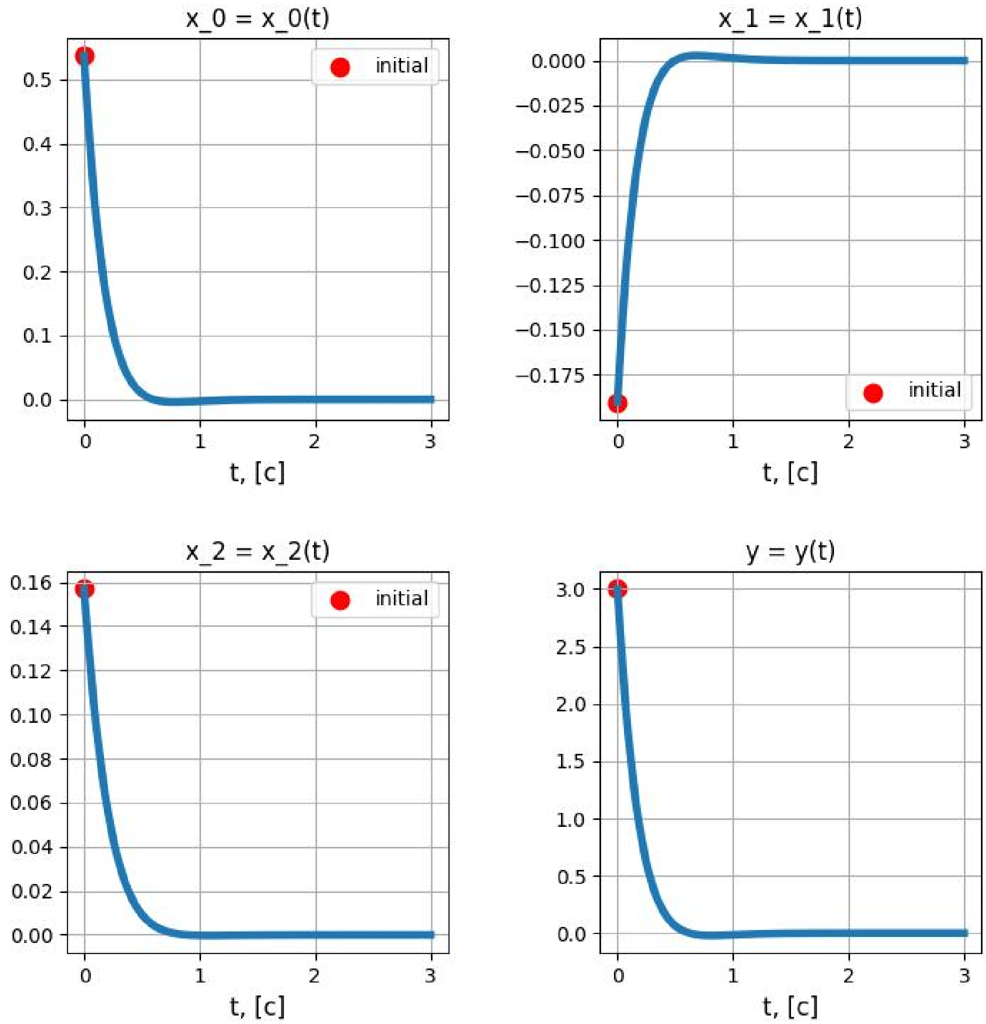

Рис. 3: Результаты моделирования задания 3.

2.4 Задание 4

2.4.1 Принадлежность состояния ненаблюдаемому подпространству

В этом задании дополнительно лишь нужно знать, как проверить состояние на принадлежность ненаблюдаемому подпространству.

Для этого необходимо проверить равенство $Vx = 0$. Если это так – состояние ненаблюдаемое.

Соответсвенно, базис ненаблюдаемого подпространства равен $Nullspace(V)$.

2.4.2 Результаты

Вариант задания:

$$A = \begin{bmatrix} -13 & 2 & -12 \\ -6 & -1 & -8 \\ 8 & -4 & 5 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}; y = 21e^{-5x}\cos 2x - 7e^{-5x}\sin 2x; t_1 = 3$$

Матрица управляемости U:

$$U = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 7 \\ -35 & -14 & -49 \\ 147 & 140 & 287 \end{bmatrix};$$

$$rankU = 2 = n \rightarrow \text{система неполностью наблюдаема.}$$

Получены собственные числа $spec(A) = [-5+2j, -5-2j, 1+0j]$. Третье из них ненаблюдаемо, что еще раз подчеркивает ненаблюдаемость системы.

Так же рассмотрим наблюдаемость собственных чисел через форму Жордана:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5-2j & 0 \\ 0 & 0 & -5+2j \end{bmatrix}; \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & -3.5+3.5j & -3.5-3.5j \end{bmatrix};$$

Как видно, у первого числа соотвествующий элемент в векторе наблюдения 0. Это еще раз подтверждает его ненаблюдаемость.

Получен Грамиан управляемости:

$$P(t_1) = \begin{bmatrix} 4.56 & -0.84 & 3.7 \\ -0.84 & 0.33 & -0.50 \\ 3.7 & -0.5 & 3.2 \end{bmatrix};$$

$$spec(P(t_1)) = [7.8, 0.3, 0]$$

Одно из собственных чисел Грамиана – 0, поэтому он не положительно определен, а значит пара ненаблюдаема.

На рисунке 4 приведены результаты моделирования системы. Как видно, при моделировании она действительно пришла в нужный вектор наблюдения за отведенное время.

Так как система не полностью наблюдаема, могут быть иные начальные состояний, приводящие к такому же наблюдению. Для их нахождения найдем базис $Nullspace(V)$. Так как, ранг матрицы наблюдения 2, а размерность матрицы системы 3, базис нулевого подпространства будет представлять из себя прямую, задаваемую одним вектором $[-0.57, -0.57, 0.57]$. На рисунке 5 видно, что

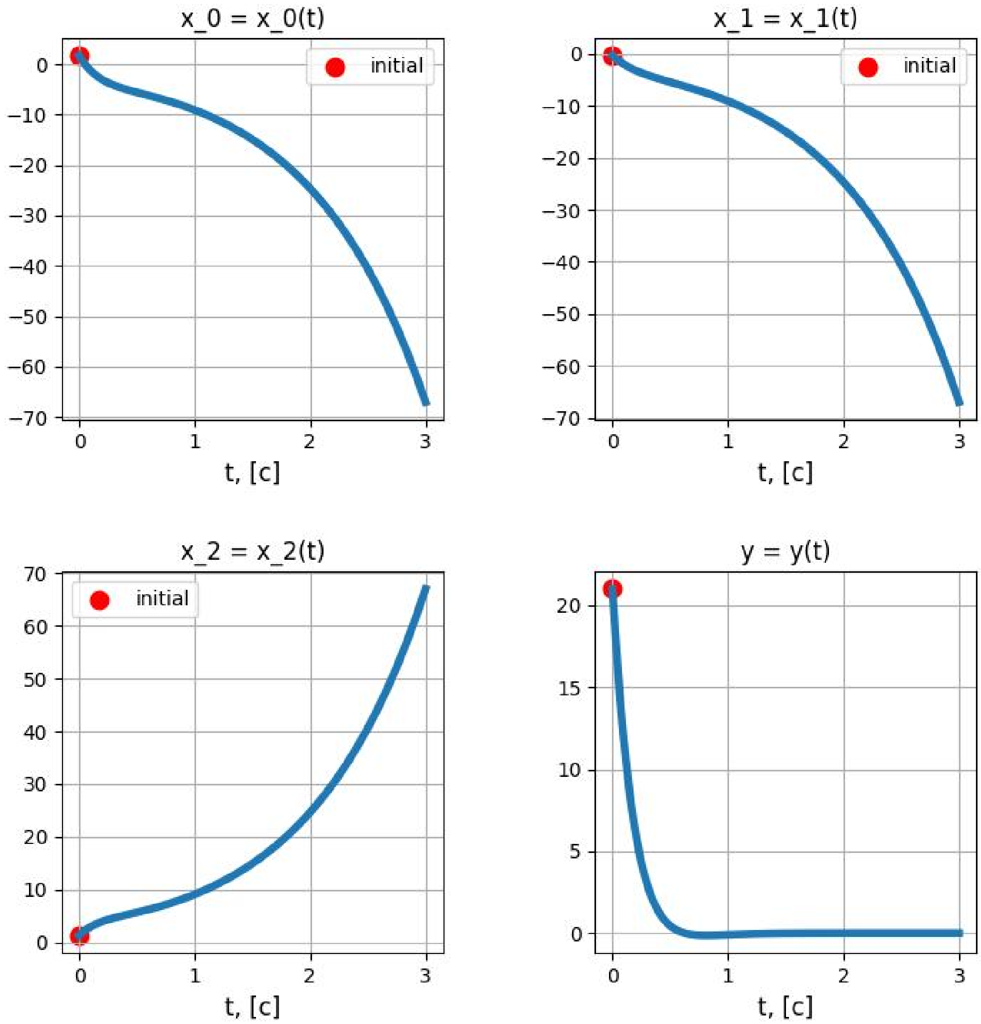

Рис. 4: Результаты моделирования задания 4.

несмотря на различные начальные условия и поведение состояний, наблюдения полностью совпадают.

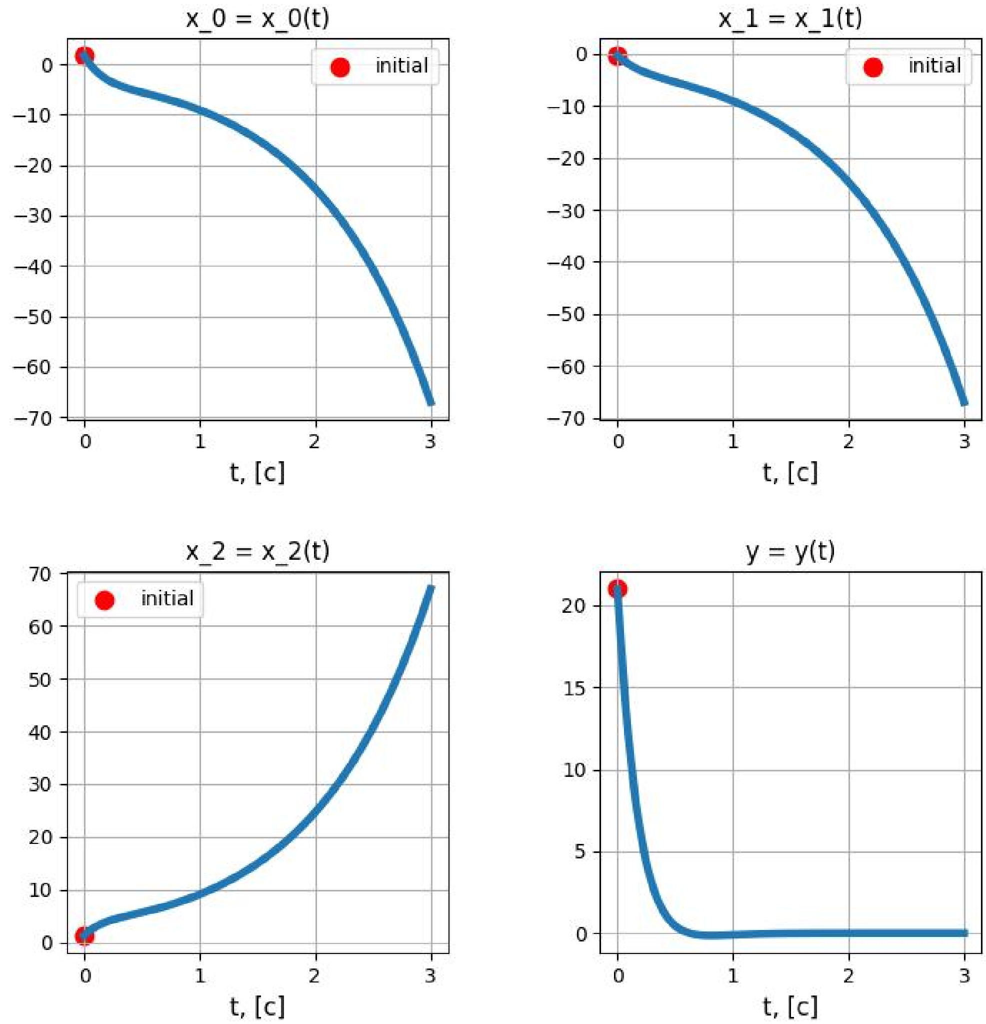

Рис. 5: Результаты моделирования ненаблюдаемого подпространства задания 4.

3 Заключение

В этой работе были изучены управляемости и наблюдаемости систем.

3.1 Выводы

1. исследованы полностью управляемые системы.

2. проверены различные критерии управляемости.

3. исследованы не полностью управляемые системы, проверены способы проверки состояний на принадлежность управляемому подпространству.
4. исследованы полностью наблюдаемые системы.
5. проверены различные критерии наблюдаемости.
6. исследованы не полностью наблюдаемые системы, проверены способы проверки единственности полученных начальных условий.