ЛР №12 «Слежение и компенсация»

Отчет

Студент
Кирилл Лалаянц
R33352
336700
Вариант - 11

Преподаватель
Пашенко А.В.

Факультет Систем Управления и Робототехники

ИТМО

14.05.2024

Содержание

1 Вводные данные

1.1 Цель работы

В этой работе пройдет изучение слежения и компенсации.

1.1.1 Программная реализация

С исходным кодом можно ознакомиться в репозитории на Github.

2 Основная часть

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ \dot{w} = \Gamma w \\ z = Cx + Dw \\ z \to 0 \\ \sigma A \in C_- \\ \sigma \Gamma \in \bar{C}_+ \end{cases} \to \begin{cases} P\Gamma - AP = B \\ CP + D = 0 \end{cases}$$

Доказательство через замену $v = x - Pw$

2.1 Компенсирующий регулятор по состоянию

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w \\ z = C_2 x + D_2 w \end{cases},$$

где w:

$$\dot{w} = A_2 w$$

Для данной системы можем синтезировать регулятор вида $u = K_1 x + K_2 w$, гарантирующий:

$$\lim_{t \to \infty} z(t) = 0$$

K_1 можем выбрать как матрицу регулятора, синтезированного любым способом. Матрицу K_2 найдем следующим образом:

$$\begin{cases} PA_2 - A_1 P = B_1 Y + B_2 \\ C_2 P + D_2 = 0 \\ K_2 = Y - K_1 P \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1(K_1 x + K_2 w) + B_2 w = (A_1 + B_1 K_1)x + (B_2 + B_1 K_2)w \\ z = C_2 x + D_2 w \end{cases},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 2.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 3.00 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.00 & 1.00 & 1.00 & 0.00 \\ -1.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = 0$$

Из LQR (Q = I, R = 1):

$$K_1 = \begin{bmatrix} -15.57 & 72.53 & -69.70 \end{bmatrix}$$

$$spec(A + B_1 K_1) = \begin{bmatrix} -1.28 + 0.00j & -3.22 + 0.00j & -2.24 + 0.00j \end{bmatrix}$$

Из матричных уравнений:

$$K_2 = \begin{bmatrix} -23.24 & 21.27 & -35.21 & -5.99 \end{bmatrix}$$

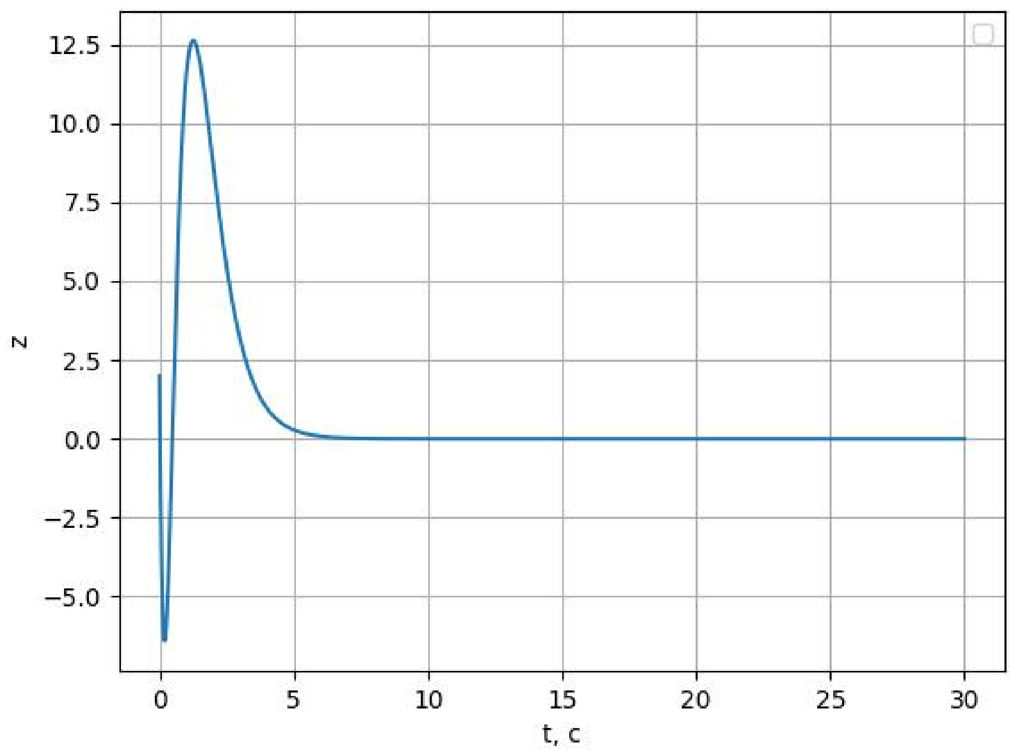

Рис. 1: Регулируемый выход системы.

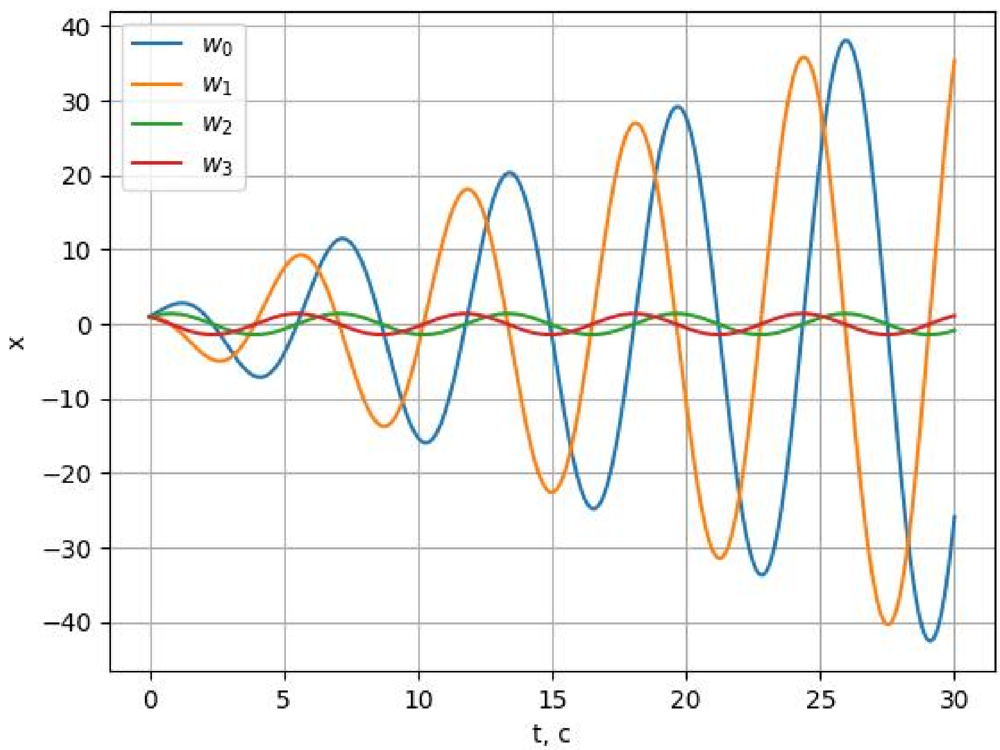

Рис. 2: Внешнее возмущение.

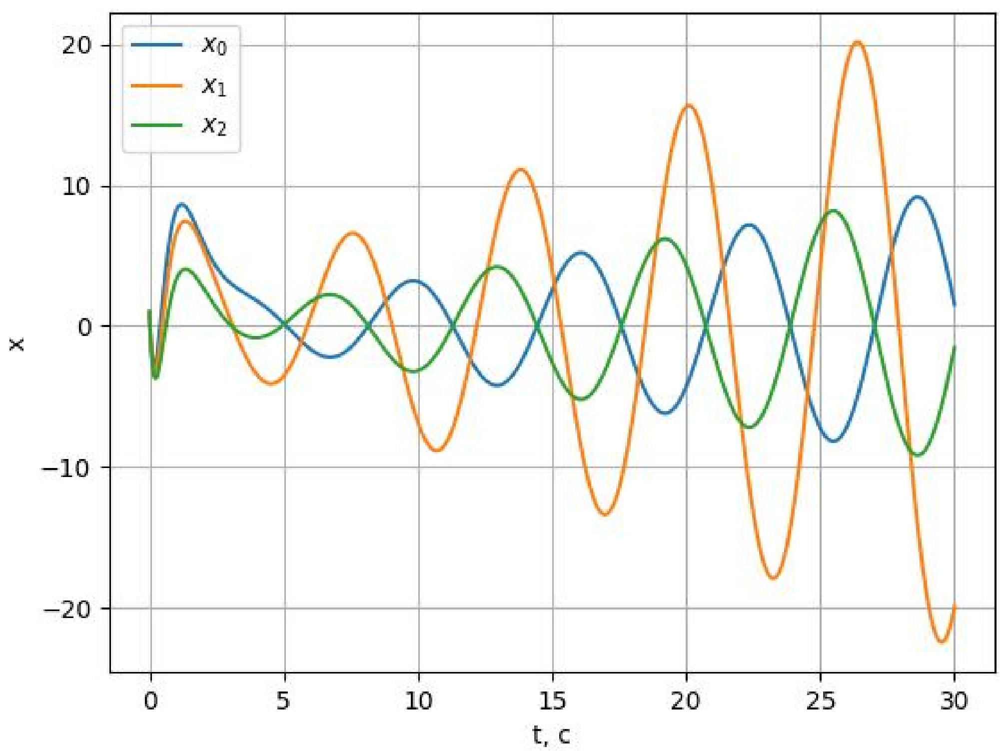

Рис. 3: Состояния системы.

2.2 Следящий регулятор по состоянию

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w \\ z = C_2 x + D_2 w \end{cases},$$

где w:

$$\dot{w} = A_2 w$$

Для данной системы можем синтезировать регулятор вида $u = K_1 x + K_2 w$, гарантирующий:

$$\lim_{t \to \infty} z(t) = 0$$

K_1 можем выбрать как матрицу регулятора, синтезированного любым способом. Матрицу K_2 найдем следующим образом:

$$\begin{cases} PA_2 - A_1 P = B_1 Y + B_2 \\ C_2 P + D_2 = 0 \\ K_2 = Y - K_1 P \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1(K_1 x + K_2 w) + B_2 w = (A_1 + B_1 K_1)x + (B_2 + B_1 K_2)w \\ z = C_2 x + D_2 w \end{cases},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 2.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 3.00 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.00 & 1.00 & 1.00 & 0.00 \\ -1.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} -1.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

Из LQR (Q = I, R = 1):

$$K_1 = \begin{bmatrix} -2.41 & -0.00 & -0.00 \\ -0.00 & -4.24 & -0.00 \\ -0.00 & -0.00 & -6.16 \\ -0.00 & -0.00 & -0.00 \end{bmatrix}$$

$$spec(A + B_1 K_1) = \begin{bmatrix} -1.41 + 0.00j & -3.16 + 0.00j & -2.24 + 0.00j \end{bmatrix}$$

Из матричных уравнений:

$$K_2 = \begin{bmatrix} -1.04 & -0.24 & 0.06 & 0.03 \\ 0.48 & -1.40 & 0.28 & -0.27 \\ 0.21 & 0.41 & -1.27 & -0.04 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

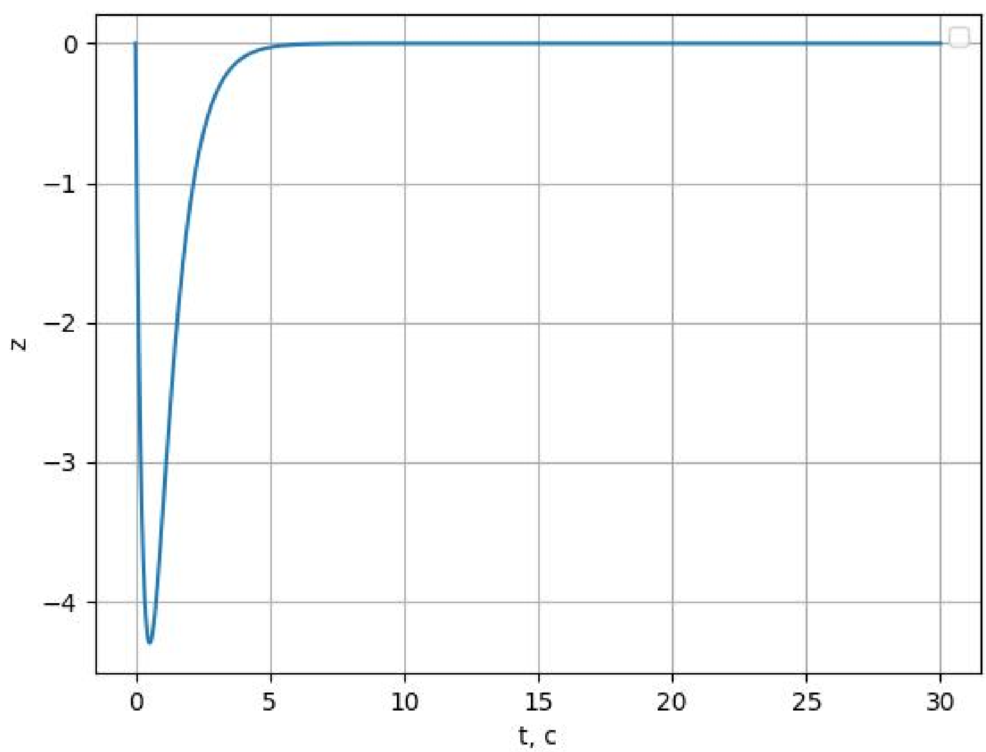

Рис. 4: Регулируемый выход системы.

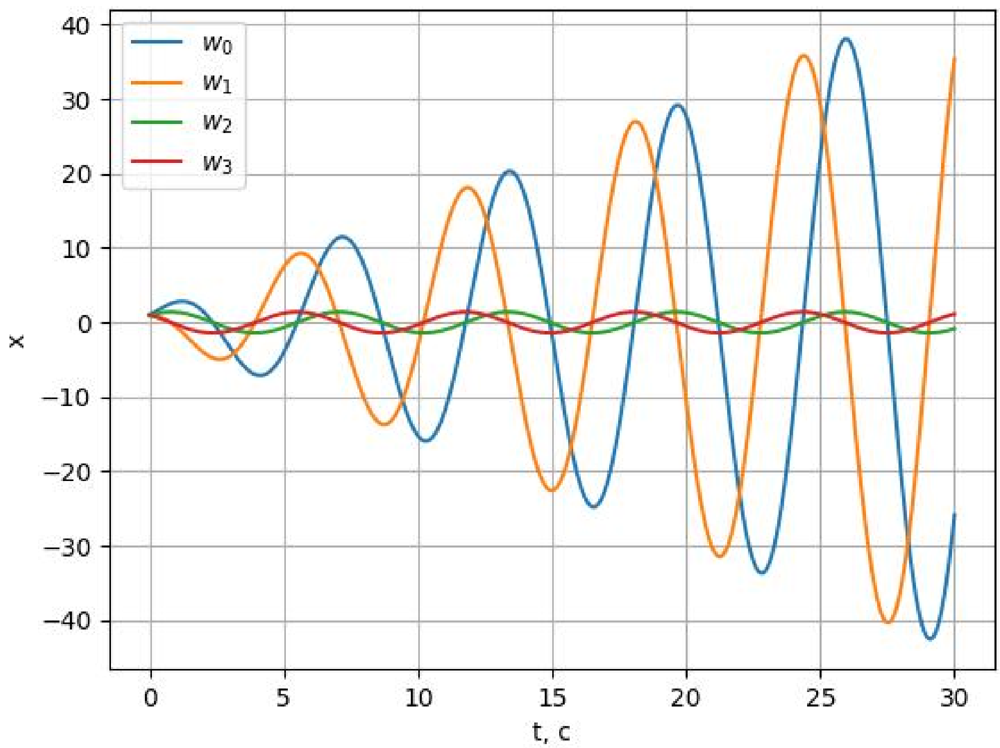

Рис. 5: Внешнее возмущение.

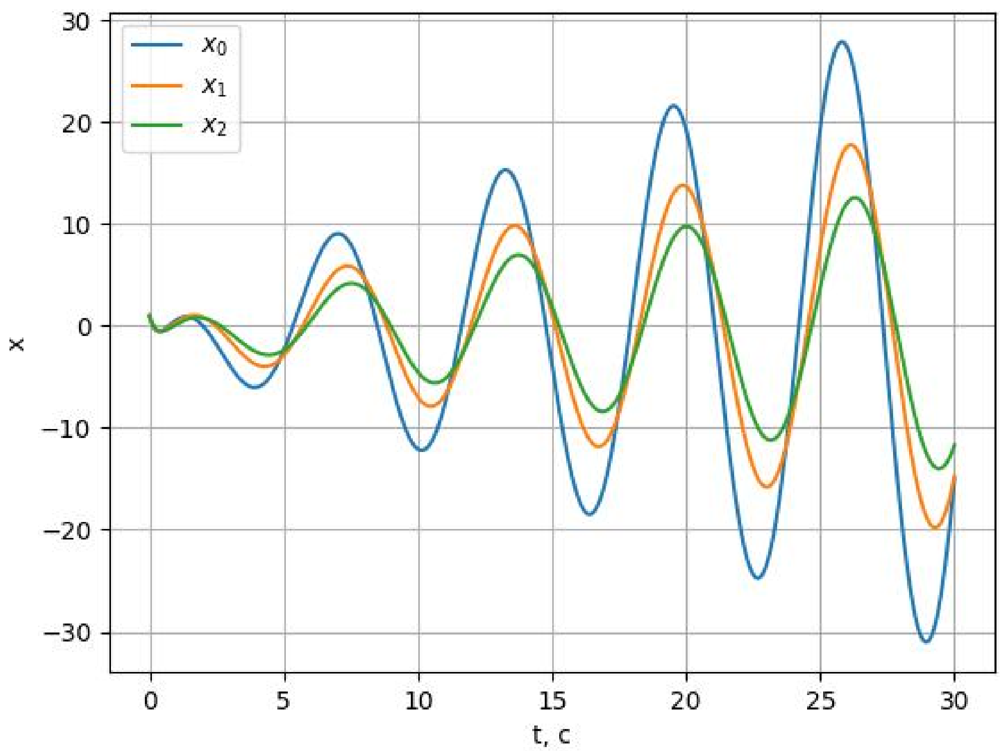

Рис. 6: Состояния системы.

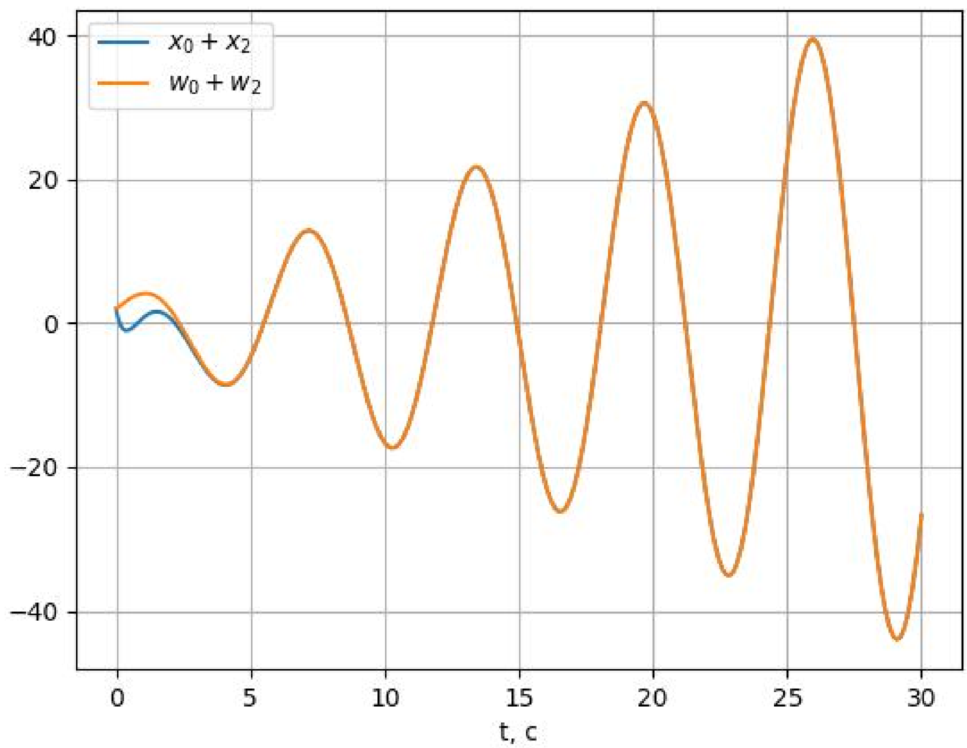

Рис. 7: Слежение компонент за входным воздействием.

2.3 Регулятор по выходу при различных y и z.

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w \\ y = C_1 x + D_1 w \\ z = C_2 x + D_2 w \\ \dot{\hat{x}} = A_1 \hat{x} + B_1 u + B_2 \hat{w} + L_1(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C_1 \hat{x} + D_1 \hat{w} \\ \dot{\hat{w}} = A_2 \hat{w} + L_2(\hat{y} - y) \end{cases},$$

где $u = K_1 \hat{x} + K_2 \hat{w}$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 2.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 3.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 4.00 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 2.00 \\ 0.00 & 0.00 & -2.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 21.00 \\ 22.00 \\ 23.00 \\ 24.00 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 11.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 12.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 13.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 14.00 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 11.00 & 12.00 & 13.00 & 14.00 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 3.00 & 1.00 & 1.00 & 2.00 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & 2.00 & 3.00 & 4.00 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 3.00 & 2.00 & 1.00 & 4.00 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e_x} \\ \dot{e_w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + L_1 C_1 & B_2 + L_1 D_1 \\ L_2 C_1 & A_2 + L_2 D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_w \end{bmatrix} = A_e \begin{bmatrix} e_x \\ e_w \end{bmatrix}$$

Убедившись, что матрица A_e – гурвицева, можем синтезировать регулятор (матрицы K_1 и K_2) аналогично предыдущим разделам.

Через LQE (Q = I, R = 1) найдем:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 390.07 \\ -1139.99 \\ 1225.92 \\ -453.69 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0.10 \\ -1.41 \\ -1.35 \\ -0.43 \end{bmatrix}$$

$$\sigma(A_e) = \begin{bmatrix} -5.8+3.1j & -5.8-3.1j & -5.06 & -2.46 & -0.5+1.4j & -0.5-1.42j & -1.74 & -0.69 \end{bmatrix}$$

Через LQR (Q = I, R = 1) найдем:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 14.90 & -95.40 & 172.40 & -93.42 \end{bmatrix}$$

$$spec(A + B_1K_1) = \begin{bmatrix} -45.15 & -1.47 & -3.64 & -2.55 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 314.84 & -372.26 & 645.75 & 84.98 \end{bmatrix}$$

Получаем систему:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e_x} \\ \dot{e_w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 & -B_1K_1 & -B_1K_2 \\ 0 & A_1 + L_1C_1 & B_2 + L_1D_1 \\ 0 & L_2C_1 & A_2 + L_2D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_x \\ e_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 + B_1K_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 + L_1C_1 & B_2 + B_1K_2 + L_1D_1 \\ L_2C_2 & A_2 + L_2D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_1 \\ -L_2 \end{bmatrix} y, u = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix}$$

$$\sigma(Reg) = \begin{bmatrix} 9125.98 & -9237.91 & 23.85 & 6.07 & -2.34 & -0.07+1.76j & -0.07-1.76j & 1.41 \end{bmatrix}$$

$$\sigma(A_2) = \begin{bmatrix} 0.00+1.00j & 0.00+-1.00j & 0.00+2.00j & 0.00+-2.00j \end{bmatrix}$$

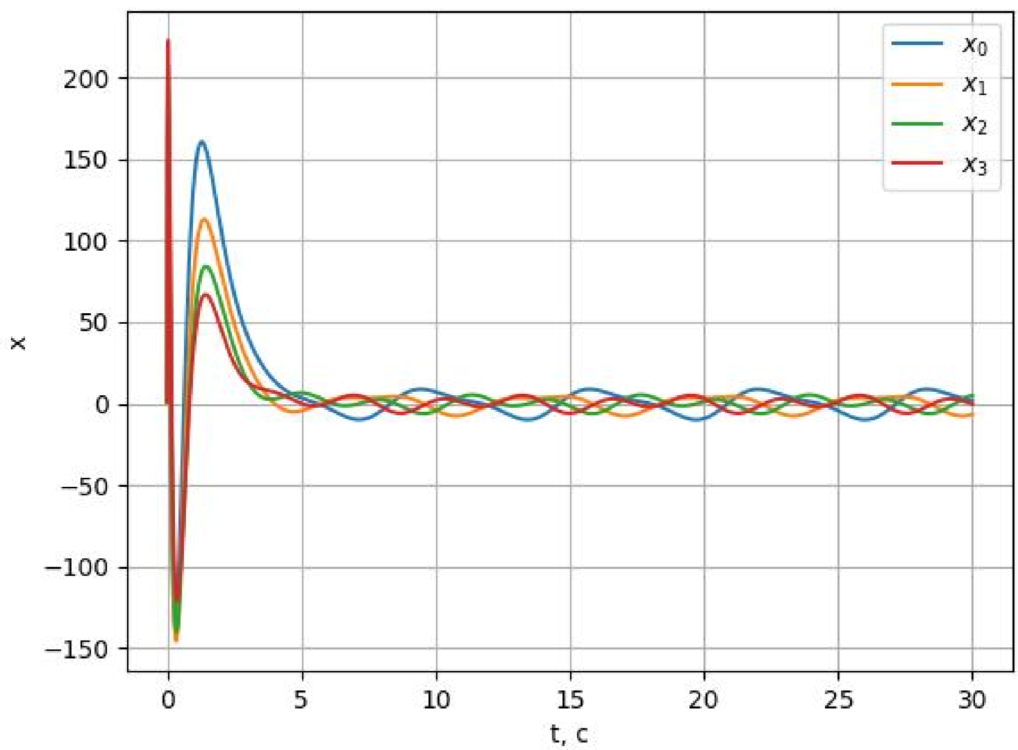

Рис. 8: Поведение компонент вектора состояния.

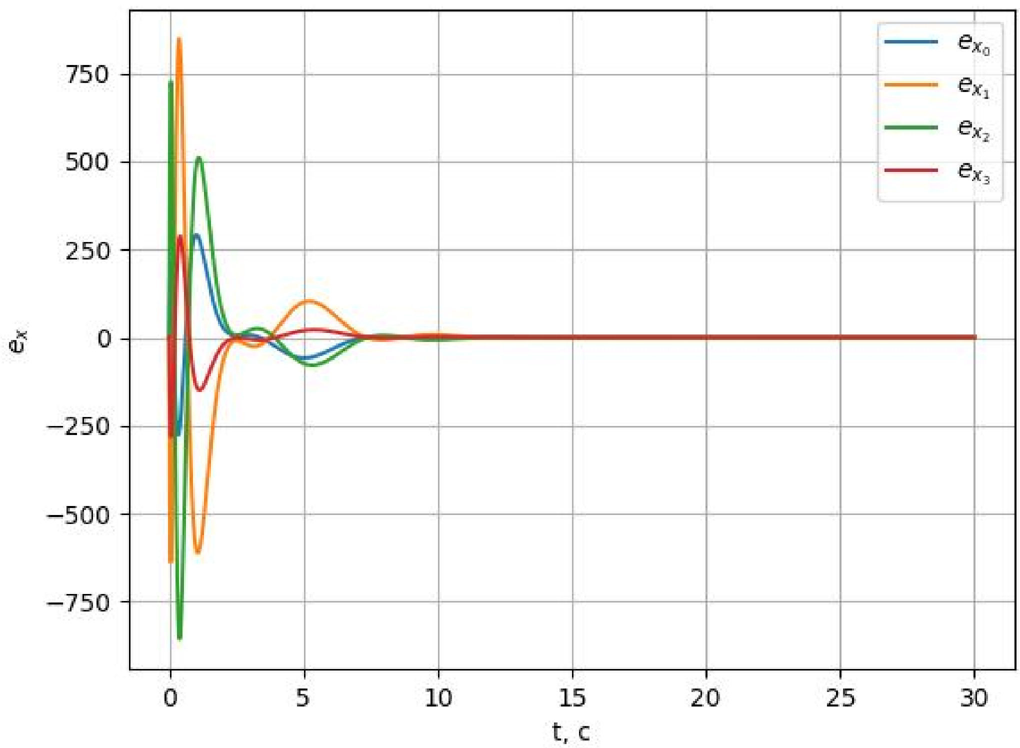

Рис. 9: Поведение компонент вектора ошибки наблюдателя состояния системы.

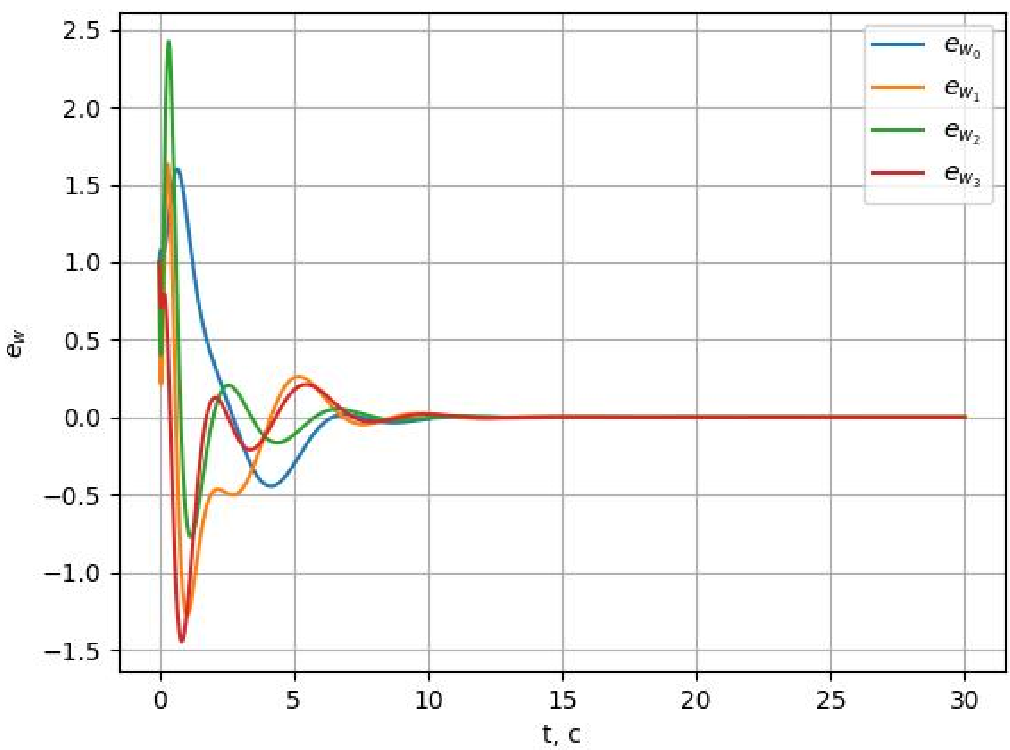

Рис. 10: Поведение компонент вектора ошибки наблюдателя входного воздействия.

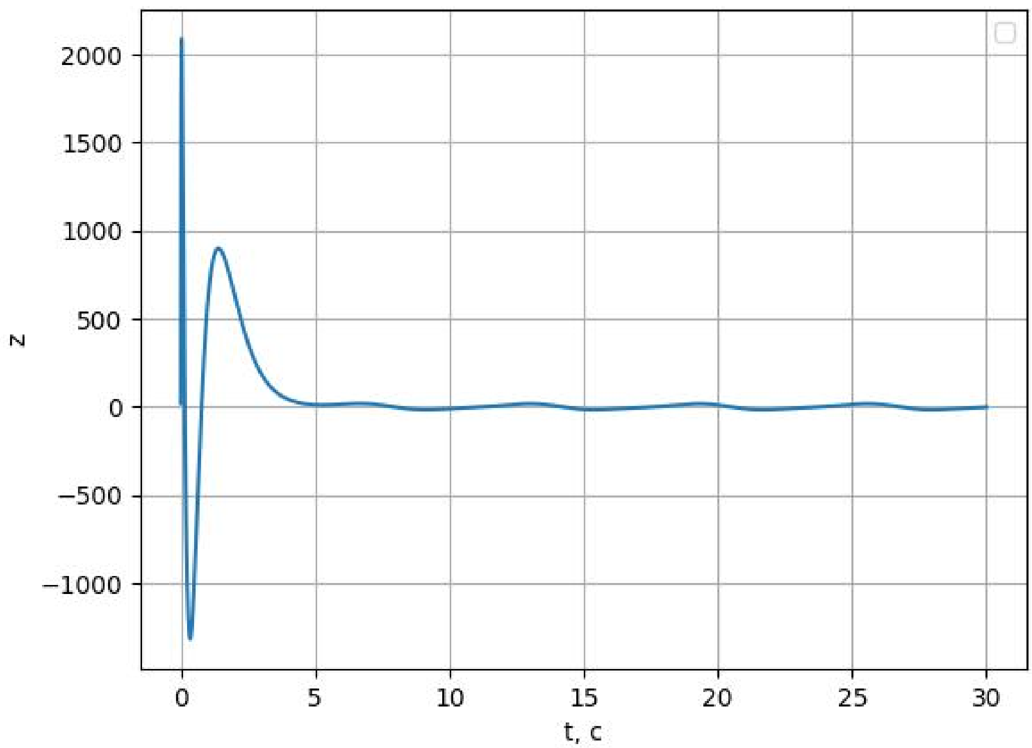

Рис. 11: Поведение регулируемого выхода.

2.4 Регулятор по выходу при одинаковых y и z.

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w \\ y = C_1 x + D_1 w \\ z = C_2 x + D_2 w \\ \dot{\hat{x}} = A_1 \hat{x} + B_1 u + B_2 \hat{w} + L_1(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C_1 \hat{x} + D_1 \hat{w} \\ \dot{\hat{w}} = A_2 \hat{w} + L_2(\hat{y} - y) \end{cases},$$

где $u = K_1\hat{x} + K_2\hat{w}$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 2.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 3.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 4.00 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 2.00 \\ 0.00 & 0.00 & -2.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 21.00 \\ 22.00 \\ 23.00 \\ 24.00 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 11.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 12.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 13.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 14.00 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 11.00 & 12.00 & 13.00 & 14.00 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 3.00 & 1.00 & 1.00 & 2.00 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 11.00 & 12.00 & 13.00 & 14.00 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 3.00 & 1.00 & 1.00 & 2.00 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e_x} \\ \dot{e_w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + L_1 C_1 & B_2 + L_1 D_1 \\ L_2 C_1 & A_2 + L_2 D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_w \end{bmatrix} = A_e \begin{bmatrix} e_x \\ e_w \end{bmatrix}$$

Убедившись, что матрица A_e – гурвицева, можем синтезировать регулятор (матрицы K_1 и K_2) аналогично предыдущим разделам.

Через LQE (Q = I, R = 1) найдем:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 242.43 \\ -1039.35 \\ 1339.23 \\ -546.87 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0.15 \\ -1.41 \\ -1.05 \\ -0.95 \end{bmatrix}$$

$$\sigma(A_e) = \begin{bmatrix} -20.90 & -14.31 & -4.21 & -0.44 + 1.65j & -0.44 - 1.65j & -2.3 + 0.1j & -2.3 - 0.1j & -0.7 \end{bmatrix}$$

Через LQR (Q = I, R = 1) найдем:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 14.90 & -95.40 & 172.40 & -93.42 \end{bmatrix}$$

$$spec(A + B_1K_1) = \begin{bmatrix} -45.15 & -1.47 & -3.64 & -2.55 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 314.84 & -372.26 & 645.75 & 84.98 \end{bmatrix}$$

Получаем систему:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e_x} \\ \dot{e_w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 & -B_1K_1 & -B_1K_2 \\ 0 & A_1 + L_1C_1 & B_2 + L_1D_1 \\ 0 & L_2C_1 & A_2 + L_2D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_x \\ e_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 + B_1K_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 + L_1C_1 & B_2 + B_1K_2 + L_1D_1 \\ L_2C_2 & A_2 + L_2D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_1 \\ -L_2 \end{bmatrix} y, u = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix}$$

Собственные числа регулятора включают в себя числа генератора!

$$\sigma(R) = \begin{bmatrix} 20789.02 & -20901.90 & 3.10 & 1.39 & 2.00j & -2.00j & 1.00j & -1.00j \end{bmatrix}$$

$$\sigma(A_2) = \begin{bmatrix} 1.00j & -1.00j & 2.00j & -2.00j \end{bmatrix}$$

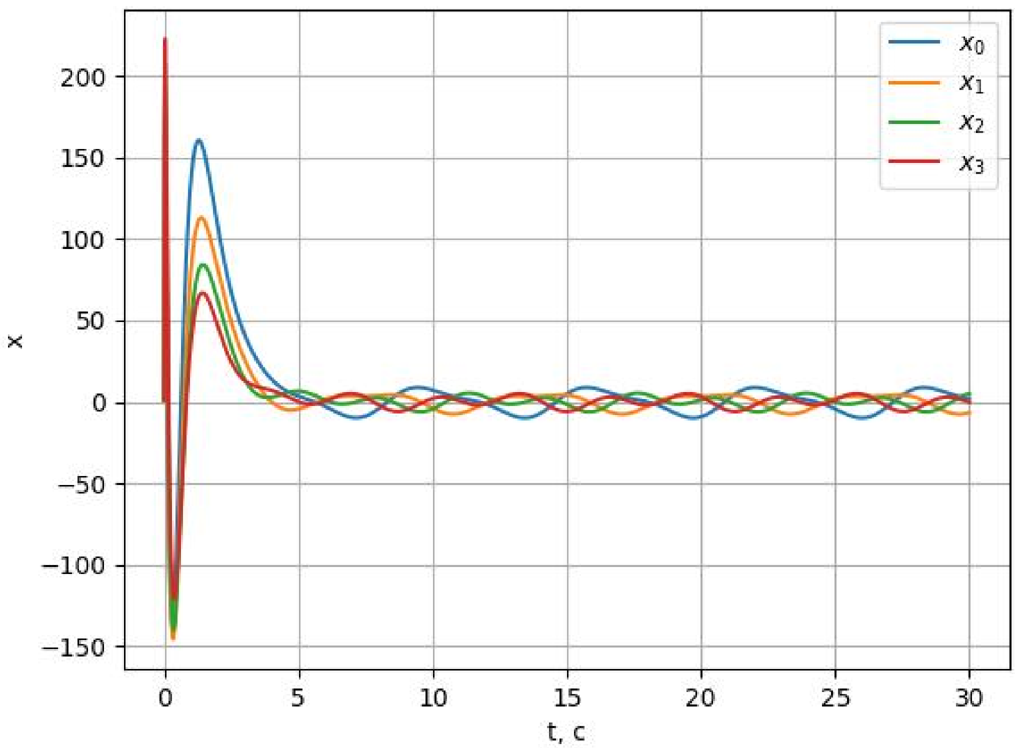

Рис. 12: Поведение компонент вектора состояния.

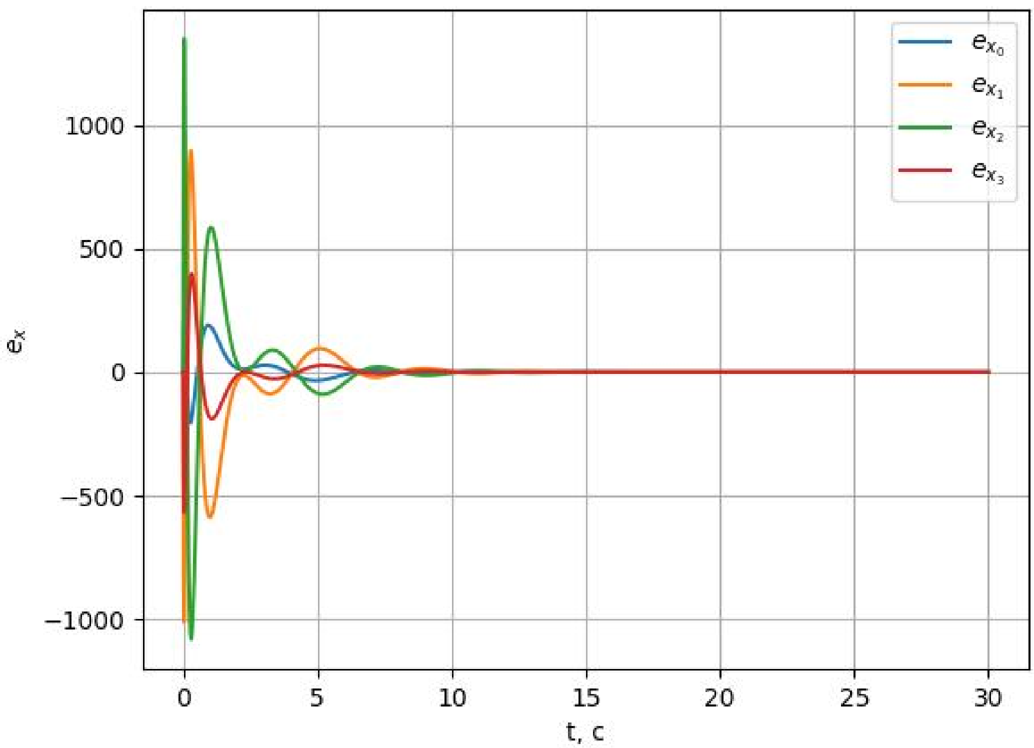

Рис. 13: Поведение компонент вектора ошибки наблюдателя состояния системы.

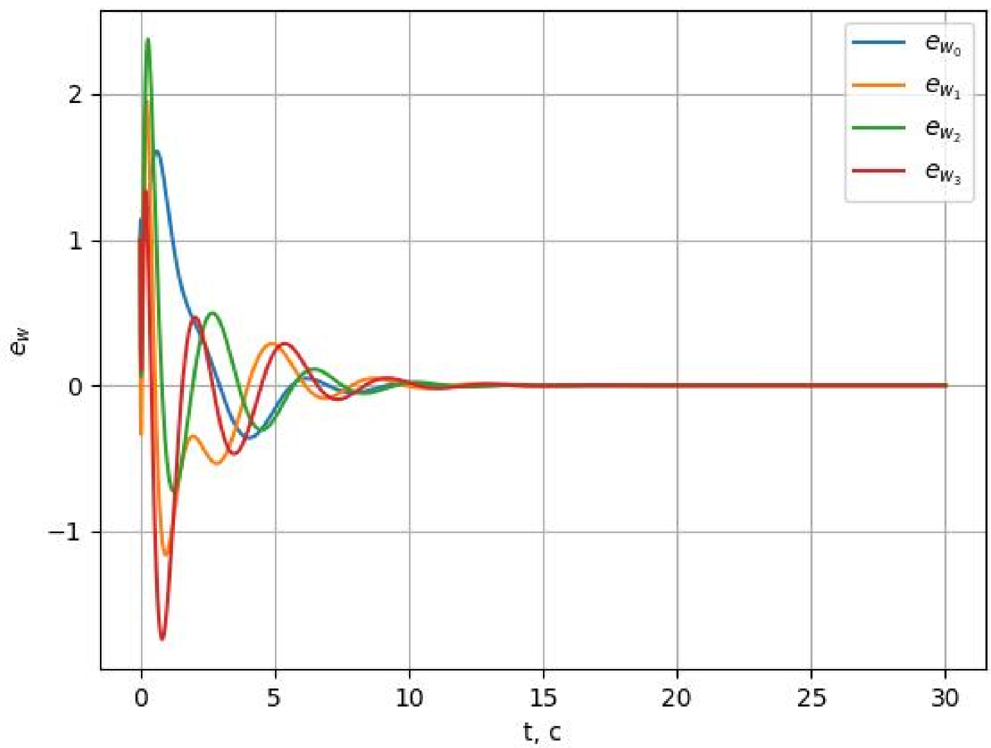

Рис. 14: Поведение компонент вектора ошибки наблюдателя входного воздействия.

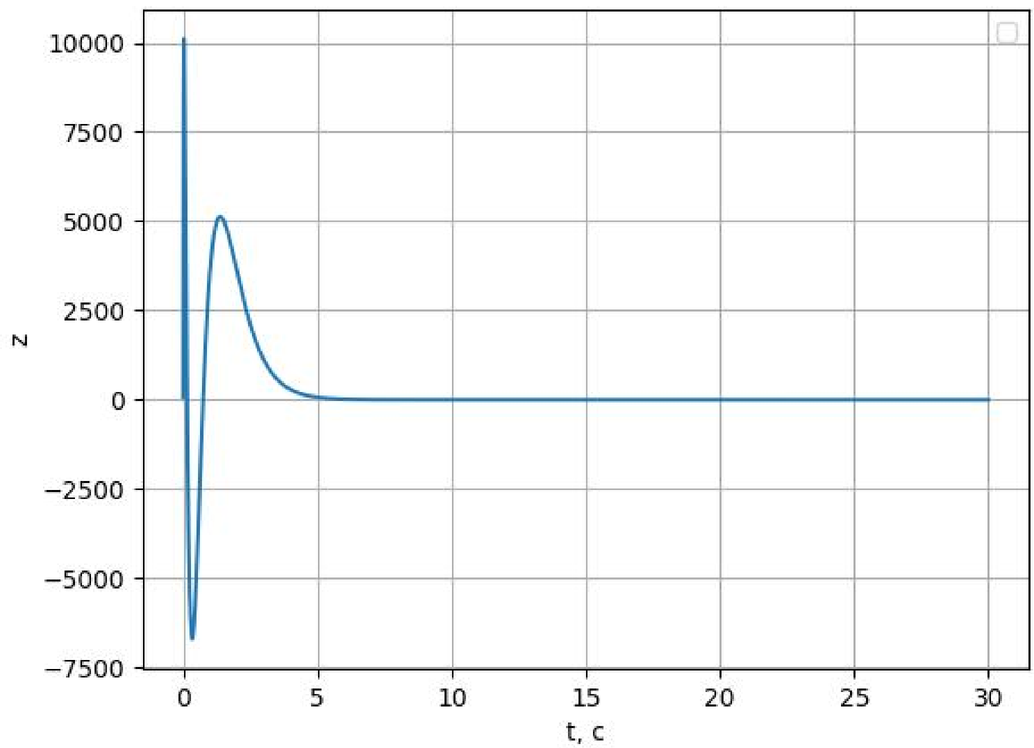

Рис. 15: Поведение регулируемого выхода.

3 Заключение

В этой работе прошло изучение слежения и компенсации.

3.1 Выводы

1. был синтезирован следящий регулятор по состоянию
2. был синтезирован компенсирующий регулятор по состоянию
3. регулятор по выходу при совпадении регулируемого и измеряемого выхода включает в себя собственные числа генератора