

ГЛАВА 1. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА

(Макс. 13 баллов)

1.1. Вывод уравнений. (5 баллов) Постройте математическую модель перевернутого маятника на тележке, представленного на рисунке 1. В качестве переменных состояния выберите линейную координату тележки a , скорость тележки \dot{a} , угол отклонения маятника от вертикали φ , угловую скорость маятника $\dot{\varphi}$. В качестве управляющей переменной u примите горизонтальную силу, приложенную к тележке. В качестве внешнего возмущения f примите вращающий момент, действующий на маятник. В качестве выходных (измеряемых) примите величины $y_1 = a$ и $y_2 = \varphi$.

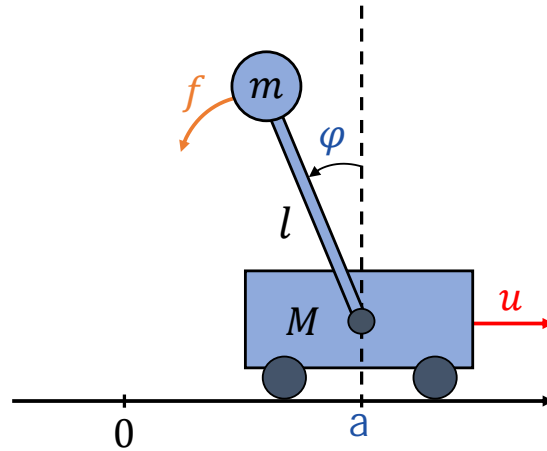


Рис. 1: Перевернутый маятник на тележке

При построении математической модели считайте, что трение отсутствует, а масса маятника полностью сосредоточена на его свободном конце. Самостоятельно выберите численные значения массы тележки M , массы маятника m , длины маятника l . Ускорение свободного падения g примите равным $9,8 \text{ м/с}^2$. Математическая модель должна быть представлена как система уравнений, включающая в себя четыре (нелинейных) дифференциальных уравнений первого порядка и два алгебраических уравнения для выходных переменных, и иметь вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, \dots, x_4, f, u), \\ \vdots \\ \dot{x}_4 = F_4(x_1, \dots, x_4, f, u), \\ y_1 = G_1(x_1, \dots, x_4), \\ y_2 = G_2(x_1, \dots, x_4), \end{cases} \quad (1)$$

где x_i — координаты вектора состояния, F_i, G_i — функции, найденные при построении математической модели.

1.2. Точки равновесия. (3 балла) Найдите все точки равновесия объекта при $u, f \equiv 0$.

1.3. Линеаризация. (5 баллов) Линеаризуйте уравнения объекта около точки равновесия $(x, u, f) = 0$ и получите математическую модель в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Df, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (2)$$

где A, B, C, D – постоянные матрицы, зависящие от значений постоянных M, m, g, l . Здесь $x = (x_1, \dots, x_4)$ – совокупный вектор состояния, $y = (y_1, y_2)$ – вектор измеряемых величин.¹

ГЛАВА 2. АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

(Макс. 14 баллов)

2.1. Анализ матриц. (4 балла) Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы A модели (2), укажите их физический смысл. Сделайте вывод об устойчивости системы (1). Проанализируйте управляемость, наблюдаемость, стабилизируемость и обнаруживаемость системы (2).

2.2. Передаточные функции. (4 балла) Найдите передаточные матрицы

$$W_{u \rightarrow y}(s), \quad W_{f \rightarrow y}(s).$$

Для каждой из передаточных функций определите динамический порядок, относительный динамический порядок, значения нулей и полюсов. Дайте физическую интерпретацию найденных величин.

2.3. Линейное моделирование. (3 балла) Выполните компьютерное моделирование свободного движения линеаризованного объекта согласно уравнениям (2) при различных начальных условиях, несильно отличающихся от нуля. Постройте графики координат вектора состояния $x_i(t)$.

2.4. Нелинейное моделирование. (3 балла) Выполните компьютерное моделирование свободного движения объекта согласно уравнениям (1) при тех же начальных условиях, что и в предыдущем задании. Постройте графики координат вектора состояния $x_i(t)$ и сравните их с графиками, полученными в результате выполнения предыдущего задания (при малом и при большом времени моделирования).

¹При линеаризации можно воспользоваться следующими приемами:

- $\sin x \approx x$ для малых x ;
- $\cos x \approx 1$ для малых x ;
- $x^{n+1} \approx 0$ для малых x и $n \in \mathbb{N}$.

ГЛАВА 3. СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА: МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

(Макс. 21 балл)

3.1. Синтез регулятора по состоянию. (5 баллов) С помощью решения уравнения Сильвестра произведите расчет регулятора

$$u = Kx, \quad (3)$$

основываясь на линейной модели (2) и выбранном вами наборе желаемых собственных чисел замкнутой системы. Исследуйте работоспособность синтезированного регулятора при управлении нелинейной системой (1) с различными начальными условиями в отсутствие внешних возмущений f . Покажите, при каких начальных условиях регулятор работает, при каких – уже нет.

3.2. Исследование регулятора по состоянию. (3 балла) Исследуйте влияние выбранных собственных чисел на максимальное отклонение маятника от вертикали, максимальное горизонтальное смещение тележки и максимальное значение управляющего сигнала при управлении нелинейной системой (1).

3.3. Синтез наблюдателя. (5 баллов) С помощью решения уравнения Сильвестра произведите расчет наблюдателя

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y), \\ \hat{y} = C\hat{x}, \end{cases} \quad (4)$$

основываясь на линейной модели (2) и выбранном вами наборе желаемых собственных чисел для ошибки наблюдателя. Исследуйте работоспособность синтезированного наблюдателя при получении выходных значений $y = (y_1, y_2)$ от нелинейной системы (1), замкнутой регулятором (3).

3.4. Исследование наблюдателя. (3 балла) Исследуйте влияние выбранных собственных чисел на работу наблюдателя.

3.5. Синтез регулятора по выходу. (5 баллов) Постройте регулятор, стабилизирующий маятник и тележку в условиях, когда измерению доступны только сигналы y_1 и y_2 . Для этого используйте наблюдатель (4) и основанный на нем закон управления

$$u = K\hat{x}. \quad (5)$$

Проведите небольшое исследование и постарайтесь подобрать такие наборы желаемых собственных чисел, при которых переходные процессы в замкнутой нелинейной системе (1), (4), (5) будут наилучшими (на ваш субъективный взгляд). Помните, что хороший переходный процесс предполагает малое время переходного процесса, малое перерегулирование (максимальное горизонтальное смещение тележки и отклонение маятника от вертикали), а также малую величину управляющего воздействия.

ГЛАВА 4. СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА: РЕГУЛЯТОРЫ С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ УСТОЙЧИВОСТИ

(Макс. 23 балла)

4.1. Синтез регулятора по состоянию. (5 баллов) С помощью решения линейного матричного неравенства Ляпунова для экспоненциальной устойчивости произведите расчет регулятора (3), основываясь на линейной модели (2) и выбранной вами желаемой степени устойчивости α замкнутой системы. Исследуйте работоспособность синтезированного регулятора при управлении нелинейной системой (1) в зависимости от начальных условий.

4.2. Исследование регулятора по состоянию. (3 балла) Исследуйте влияние параметра α на максимальное отклонение маятника от вертикали, максимальное горизонтальное смещение тележки и максимальное значение управляющего сигнала при управлении нелинейной системой (1).

4.3. Синтез регулятора по состоянию с ограничением на управление. (5 баллов) Для нескольких значений параметра α выполните расчет регулятора (3) такого, чтобы наибольшее значение модуля управляющего сигнала u было наименьшим из возможных на некотором множестве начальных условий, включающем в себя те начальные условия, при которых вы выполняете моделирование. Исследуйте работоспособность полученного регулятора на линейной модели (2) и нелинейной модели (1).

4.4. Синтез наблюдателя. (5 баллов) С помощью решения линейного матричного неравенства Ляпунова для экспоненциальной устойчивости произведите расчет наблюдателя (4), основываясь на линейной модели (2) и выбранной вами желаемой степени устойчивости α динамики ошибки наблюдателя.

4.5. Синтез регулятора по выходу. (5 баллов) На основе линейных матричных неравенств постройте регулятор, стабилизирующий маятник и тележку в условиях, когда измерению доступны только сигналы y_1 и y_2 . Проведите исследование работоспособности построенного регулятора при управлении нелинейной системой (1) в зависимости от выбранных степеней устойчивости.

ГЛАВА 5. СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА: LQR И ФИЛЬТР КАЛМАНА

(Необязательная. Макс. 19 баллов)

5.1. Синтез линейно-квадратичного регулятора. (5 балла) Синтезируйте LQR-регулятор на основе модели (2) и примените его для управления системой (1).

5.2. Исследование линейно-квадратичного регулятора. (3 балла) Исследуйте влияние весовых матриц LQR-регулятора на характер переходных процессов $x_i(t)$ и $u(t)$.

5.3. Синтез фильтра Калмана. (5 балла) Синтезируйте фильтр Калмана в непрерывном времени на основе линейной модели (2) и примените его для оценки вектора состояния нелинейной системы (1).

5.4. LQG для линейной модели. (3 балла) Примените LQR-регулятор совместно с фильтром Калмана для управления линейной моделью

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Df, \\ y = Cx + \xi, \end{cases}$$

в которой задайте сигналы f и ξ как белый шум соответствующей интенсивности.

5.5. LQG для нелинейной модели. (3 балла) Примените LQR-регулятор совместно с фильтром Калмана для управления нелинейной моделью (1), в которую также добавьте сигнал помехи ξ . Задайте сигналы f и ξ как белый шум соответствующей интенсивности и исследуйте работоспособность получившегося регулятора.

ГЛАВА 6. СЛЕЖЕНИЕ И КОМПЕНСАЦИЯ

(Необязательная. Макс. 10 баллов)

6.1. Решение задачи компенсации. (5 баллов) Задайте сигнал f в модели (2) как сумму не менее трех гармоник с разными частотами, амплитудами и фазами. Постройте компенсирующий регулятор, гарантирующий выполнение условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t)\| = 0.$$

Проведите моделирование, демонстрирующее работоспособность вашего регулятора для линейной модели (2). Исследуйте также поведение вашего регулятора для нелинейного случая (1). При синтезе регулятора можно считать, что весь вектор состояния доступен для измерений.

6.2. Решение задачи слежения. (5 баллов) Положите $f \equiv 0$. Задайтесь целевым сигналом $g(t)$, который описывает желаемое поведение $\varphi(t)$, как суммой не менее трех гармоник с разными частотами, амплитудами и фазами. Постройте следящий регулятор, гарантирующий выполнение условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t) - g(t)\| = 0.$$

Проведите моделирование, демонстрирующее работоспособность вашего регулятора для линейной модели (2). Исследуйте также поведение вашего регулятора для нелинейного случая (1). При синтезе регулятора можно считать, что весь вектор состояния доступен для измерений.