ЛР №9 «Регуляторы с заданной степенью устойчивости»

Отчет

Студент
Кирилл Лалаянц
R33352
336700
Вариант - 11

Преподаватель
Пашенко А.В.

Факультет Систем Управления и Робототехники

ИТМО

15.02.2024

Содержание

1 Вводные данные

1.1 Цель работы

В этой работе пройдет изучение регуляторов с заданной степенью устойчивости.

1.1.1 Программная реализация

С исходным кодом можно ознакомиться в репозитории на Github.

2 Основная часть

2.1 Задание 1

2.1.1 Теория

В этом задании выводится модальный регулято заданной степени устойчивости для системы:

$$\begin{cases} \text{Объект управления: } \dot{x} = Ax + Bu \\ \text{Регулятор: } u = Kx \end{cases} \to \dot{x} = Ax + BKx = (A + BK)x$$

По сути, целью данного регулятора является изменение управляемых собственных чисел так, чтобы $\forall \lambda \in \sigma(A) : Re\lambda \leq \alpha$, где α – степень устойчивости. Для этого используется LMI критерий экспоненциальной устойчивости:

$$\exists Q \succ 0, \alpha > 0 : A^T Q + QA + 2\alpha Q \preccurlyeq 0 \to \begin{cases} \forall x(0) \text{ A ассимптотически устойчива} \\ \exists c : ||x(t)|| \leq ce^{-\alpha t}||x(0)|| \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q \succ 0 \\ A^T Q + QA + 2\alpha Q \preccurlyeq 0 \end{cases} \xleftrightarrow{Q=P^{-1}} \begin{cases} P \succ 0 \\ PA^T + AP + 2\alpha P \preccurlyeq 0 \end{cases}$$

Подставим вместо матрицы A нашу систему:

$$P(A + BK)^T + (A + BK)P + 2\alpha P \preccurlyeq 0$$

$$PA^T + PK^T B^T + AP + BKP + 2\alpha P \preccurlyeq 0$$

$$\begin{cases} Y = KP \\ PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preccurlyeq 0 \end{cases}$$

Тогда для подбора матрицы K, чтобы задать система степень устойчивости α, достаточно решить через библиотеку CVX следующую систему с двумя неизвестнями:

$$\begin{cases} K = YP^{-1} \\ P \succ 0 \\ PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preccurlyeq 0 \end{cases}$$

На практике, довольно часто P – необратима. Приходится использовать псевдообратную.

2.1.2 Результаты

Дана система:

$$A = \begin{bmatrix} -4.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 5.00 \\ 0.00 & 0.00 & -5.00 & 1.00 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 2.00 \\ 0.00 \\ 9.00 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

У матрицы A одно неуправляемое собственное число – -4. Это наталкивает на мысль, что степень устойчивости больше 4 получить не получится, так как это собственное число подвинуть не получится. На деле так и есть, CVX решает систему для $\forall \alpha < 4$.

При рассмотрении собственных чисел получившихся систем видно, что передвигает собственные числа так, чтобы минимальное расстояние по вещественной оси от собственных чисел до 0 было с небольшим запасом больше степени устойчивости. На рисунках 1 - 2 приведены полученные графики.

Как можно заметить, действительно чем больше α, тем жестче управление и быстрее сходимость. Так же видно, что состояние 1 не меняется, так как собственное число неуправляемое.

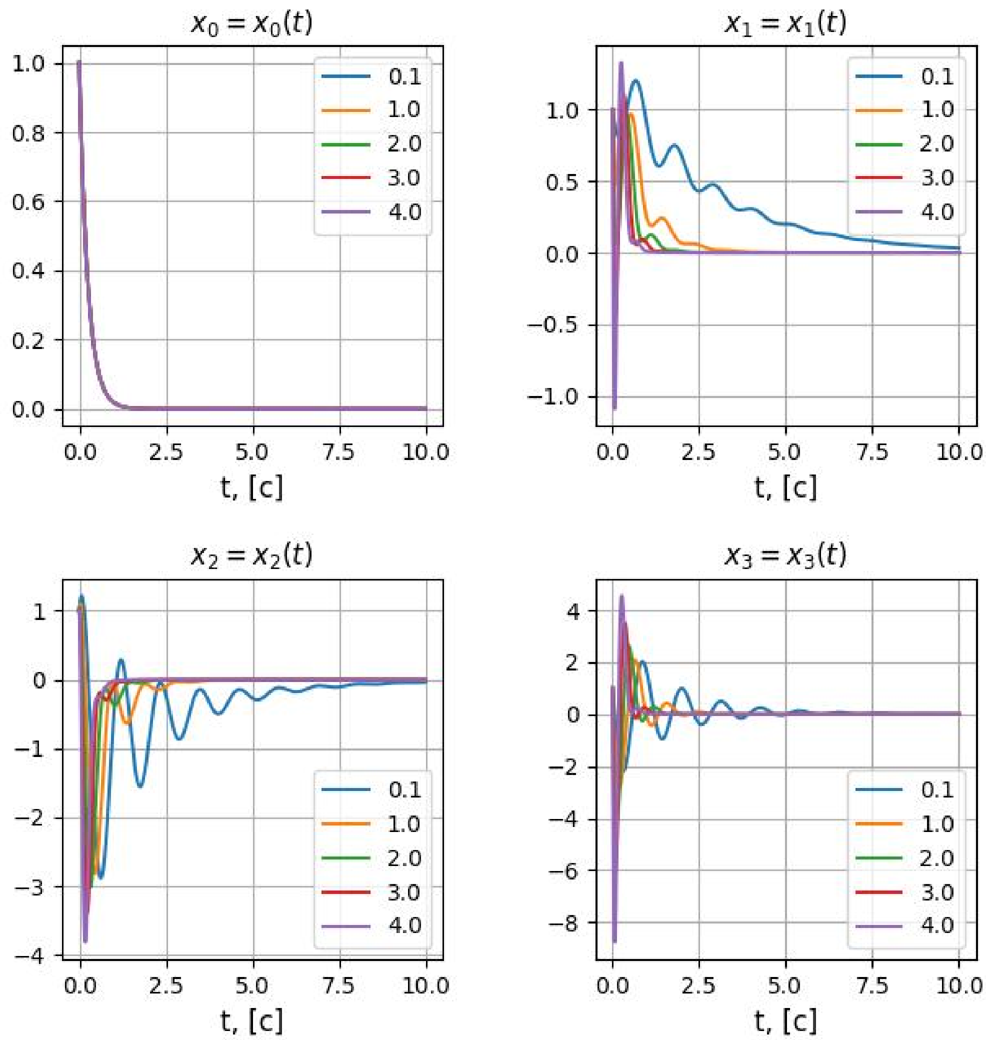

Рис. 1: Результаты моделирования состояний для разных значений α.

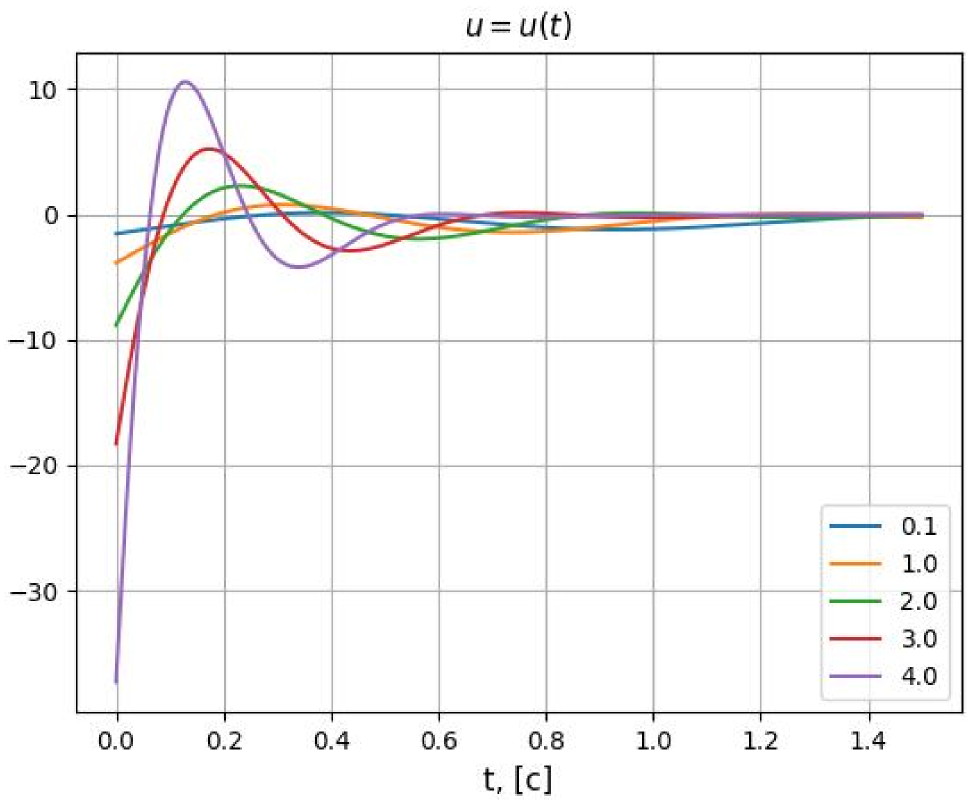

Рис. 2: Результаты моделирования управления для разных значений α.

2.2 Задание 2

2.2.1 Теория

В этом задании выводится ограничение на управление $||u(t)|| \leq \mu$. Тогда система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} P & x_0 \\ x_0^T & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \\ \\ \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{bmatrix} \succ 0 \\ P \succ 0 \\ PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preccurlyeq 0 \\ K = YP^{-1} \end{cases}$$

2.2.2 Результаты

Сначала проведено исследование влияния ограничения для $alpha = 1$. На рисунках 3 – 4.

При минимальном μ система имеет собственные числа $\begin{bmatrix} -1.00 + 5.50j & -1.00 + -5.50j & -1.00 + 0.00j & -4.00 + 0.00j \end{bmatrix}$, максимально прижавшись к необходимой степени устойчивости всеми управляемыми числами. По мере ослабления ограничения, числа начинают отдаляться от границы.

Для всех остальных степеней устойчивости результат аналогичен. Все управляемы собственные числа принимают значение степени устойчивости.

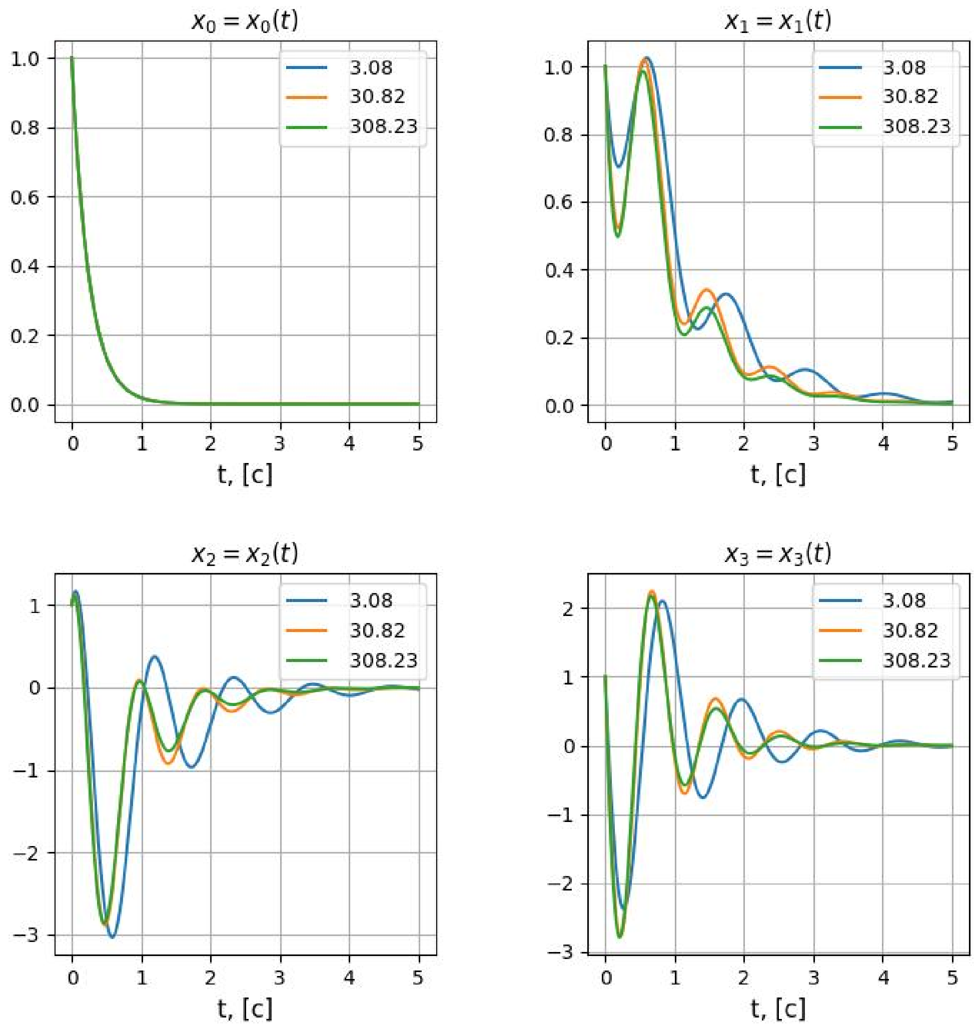

Рис. 3: Результаты моделирования состояний системы для $\alpha = 1$ при различных ограничениях.

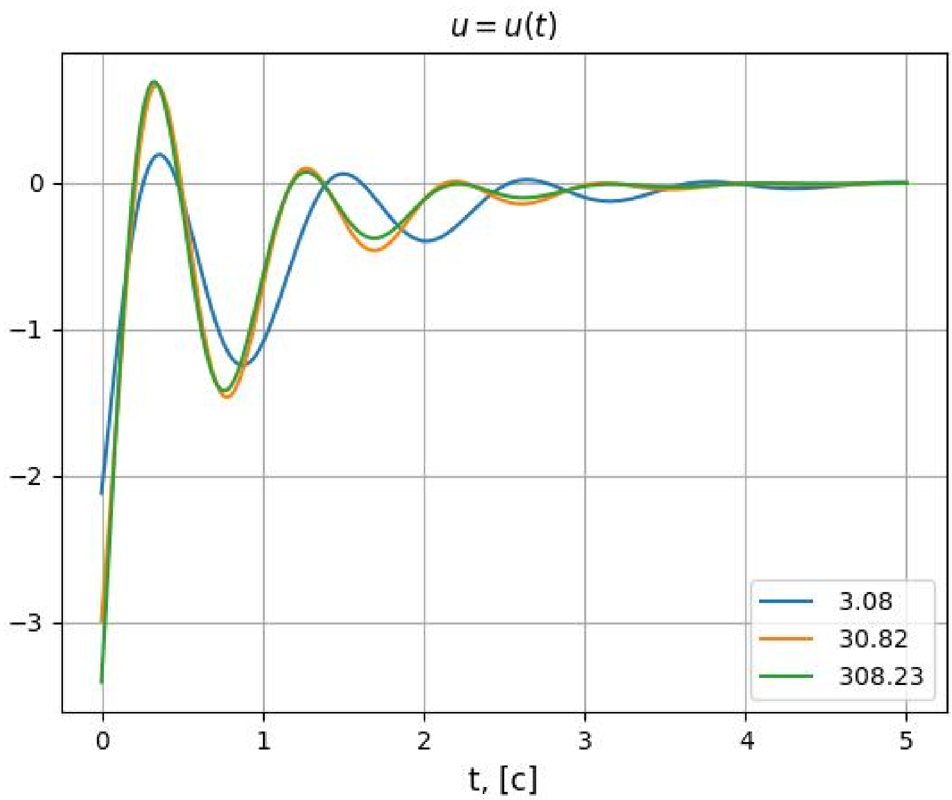

Рис. 4: Результаты моделирования управления системой для $\alpha = 1$ при различных ограничениях.

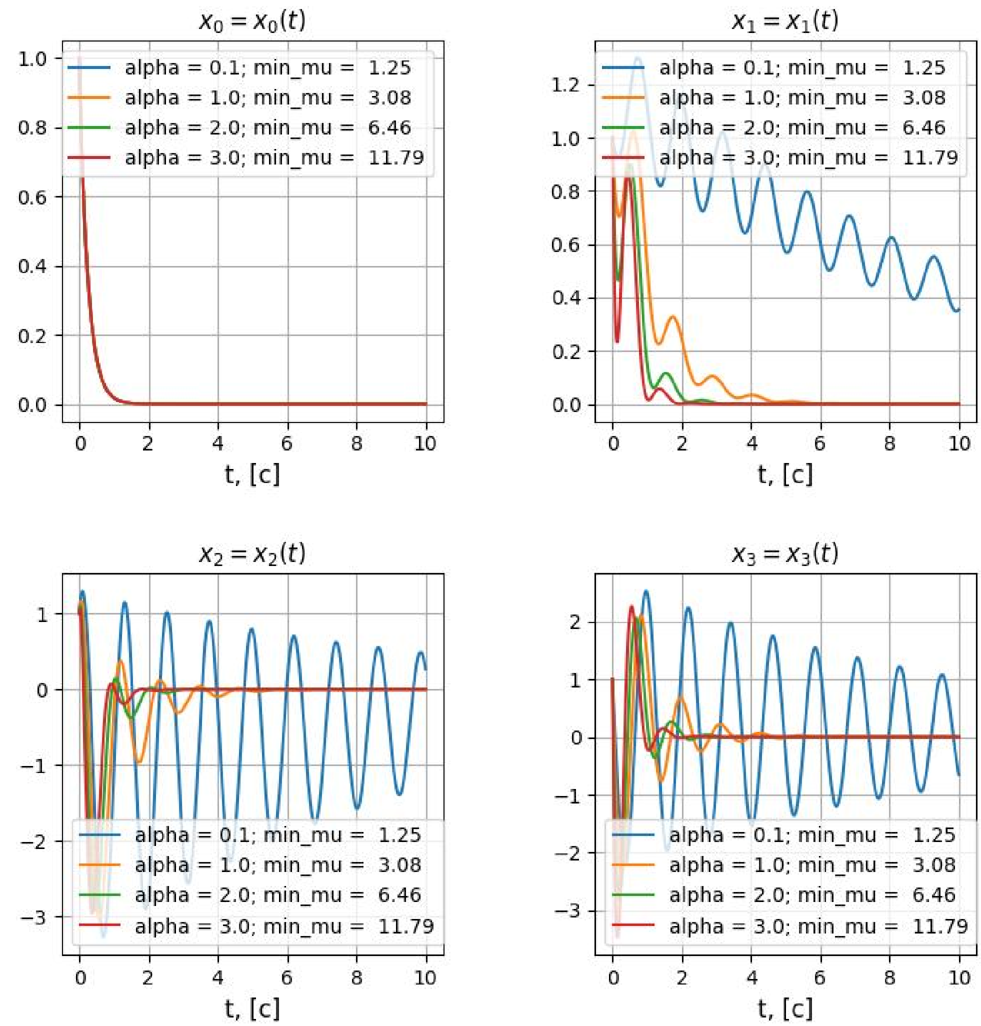

Рис. 5: Результаты моделирования состояний системы для различных α с минимизированным управлением.

3 Заключение

В этой работе были изучены регуляторы с заданной степенью устойчивости.

3.1 Выводы

1.