ЛР №9 «Регуляторы с заданной степенью устойчивости»

Отчет

Студент
Кирилл Лалаянц
R33352
336700
Вариант - 11

Преподаватель
Пашенко А.В.

Факультет Систем Управления и Робототехники

ИТМО

15.02.2024

Содержание

1 Вводные данные

1.1 Цель работы

В этой работе пройдет изучение регуляторов с заданной степенью устойчивости.

1.1.1 Программная реализация

С исходным кодом можно ознакомиться в репозитории на Github.

2 Основная часть

2.1 Задание 1

2.1.1 Теория

В этом задании выводится модальный регулятор для системы:

$$\begin{cases} \text{Объект управления: } \dot{x} = Ax + Bu \\ \text{Регулятор: } u = Kx \end{cases} \rightarrow \dot{x} = Ax + BKx = (A + BK)x$$

По сути, целью данного регулятора является изменение управляемых собственных чисел так[1], чтобы $\forall \lambda \in \sigma(A) : Re\lambda \leq 0$. Для этого подбирается матрица $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ с желаемыми собственными числами и матрица $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, такая что пара $(\mathbb{Y}, \Gamma)$ наблюдаема. После чего по подобию:

$$A + BK = P\Gamma P^{-1} \rightarrow \begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases}$$

На практике, довольно часто P – необратима. Приходится использовать псевдообратную.

2.1.2 Результаты

Дана система:

$$A = \begin{bmatrix} -4.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 5.00 \\ 0.00 & 0.00 & -5.00 & 1.00 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 2.00 \\ 0.00 \\ 9.00 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

У матрицы A только одно неуправляемое собственное число – -4. Оно меньше 0, поэтому проблем возникнуть не должно[2], система стабилизируема.

Для каждой строки желаемых собственных чисел:

$$\begin{bmatrix} -4.00 + 0.00j & -4.00 + 0.00j & -4.00 + 0.00j & -4.00 + 0.00j \\ -4.00 + 0.00j & -40.00 + 0.00j & -400.00 + 0.00j & -400.00 + 0.00j \\ -4.00 + 0.00j & -8.00 + 0.00j & 0.00 + 5.00j & -0.00 + -5.00j \\ -4.00 + 0.00j & -8.00 + 0.00j & -1.00 + 5.00j & -1.00 + -5.00j \end{bmatrix},$$

необходимо синтезировать регулятор.

На рисунках ?? - ?? видны результаты работы получившихся регуляторов.

[1] Что делать с неуправляемыми – пока непонятно. Видимо надо смириться.

[2] Нет, должно, надо подбирать матрицы так, чтобы в паре $(\mathbb{Y}, \Gamma)$ оно было ненаблюдаемо. Иначе полученный спектр будет немного отличаться от желаемого.

src/figs/task1_0.jpg

Рис. 1: Результаты моделирования задания 1 для первого набора собственных чисел. $K = \begin{bmatrix} -0.00 & -2.50 & -1.11 & -1.11 \end{bmatrix}$

src/figs/task1_1.jpg

Рис. 2: Результаты моделирования задания 1 для второго набора собственных чисел. $K = \begin{bmatrix} 0.00 & -131856.82 & -4303.51 & 29207.85 \end{bmatrix}$

src/figs/task1_2.jpg

Рис. 3: Результаты моделирования задания 1 для третьего набора собственных чисел. $K = \begin{bmatrix} 0.00 & -4.68 & -0.42 & -0.18 \end{bmatrix}$

src/figs/task1_3.jpg

Рис. 4: Результаты моделирования задания 1 для четвертого набора собственных чисел. $K = \begin{bmatrix} 0.00 & -5.22 & -0.89 & -0.28 \end{bmatrix}$

2.2 Задание 2

2.2.1 Теория

В этом задании выводится наблюдатель состояния для системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \to \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y) = (A + LC)\hat{x} - Ly \\ \dot{e} = (A + LC)e \end{cases}$$

Для синтеза наблюдателя подбирается матрица $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ с желаемыми собственными числами и матрица $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^{n \times k}$, такая что пара $(\Gamma, \mathbb{Y})$ управляема. После чего:

$$\begin{cases} \Gamma Q - QA = YC \\ L = Q^{-1}Y \end{cases}$$

2.2.2 Результаты

Результаты представленны на рисунках ?? - ??. У системы все собственные числа наблюдаемы, поэтому любое можно изменить и система наблюдаема. Стоит отметить, что из-за мод набора 3, ошибка в этом случае не может сойтись к 0 и бесконечно колеблется.

src/figs/task2_states_0.jpg

Рис. 5: Результаты моделирования состояний системы и наблюдателя для первого набора собственных чисел. $L^T = \begin{bmatrix} 0.00 & -7.31 & -2.79 & -1.78 \end{bmatrix}$

src/figs/task2_states_1.jpg

Рис. 6: Результаты моделирования состояний системы и наблюдателя для второго набора собственных чисел. $L^T = \begin{bmatrix} 204414.17 & 160532.11 & 126147.31 & -113657.21 \end{bmatrix}$

src/figs/task2_states_2.jpg

Рис. 7: Результаты моделирования состояний системы и наблюдателя для третьего набора собственных чисел. $L^T = \begin{bmatrix} 3.09 & 1.03 & 1.95 & -3.05 \end{bmatrix}$

src/figs/task2_states_3.jpg

Рис. 8: Результаты моделирования состояний системы и наблюдателя для четвертого набора собственных чисел. $L^T = \begin{bmatrix} 4.34 & -1.60 & 0.93 & -3.97 \end{bmatrix}$

src/figs/task2_y_0.jpg

Рис. 9: Результаты моделирования выхода системы и наблюдателя для первого набора собственных чисел. $L^T = \begin{bmatrix} 0.00 & -7.31 & -2.79 & -1.78 \end{bmatrix}$

src/figs/task2_y_1.jpg

Рис. 10: Результаты моделирования выхода системы и наблюдателя для второго набора собственных чисел. $L^T = \begin{bmatrix} 204414.17 & 160532.11 & 126147.31 & -113657.21 \end{bmatrix}$

src/figs/task2_y_2.jpg

Рис. 11: Результаты моделирования выхода системы и наблюдателя для третьего набора собственных чисел. $L^T = \begin{bmatrix} 3.09 & 1.03 & 1.95 & -3.05 \end{bmatrix}$

src/figs/task2_y_3.jpg

Рис. 12: Результаты моделирования выхода системы и наблюдателя для четвертого набора собственных чисел. $L^T = \begin{bmatrix} 4.34 & -1.60 & 0.93 & -3.97 \end{bmatrix}$

2.3 Задание 3

2.3.1 Теория

В этом задании выводится наблюдатель регулятор для системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \\ u = K\hat{x} \end{cases} \xrightarrow{\text{очевидно...}} \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \\ \hat{x} = x - e \\ y = Cx \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Самое важное тут удачно угадать желаемые собственные числа и на забыть сделать их неуправляемыми/ненаблюдаемыми где надо.

2.3.2 Результаты

Для системы (полностью управляема и стабилизируема):

$$A = \begin{bmatrix} 5.00 & -5.00 & -9.00 & 3.00 \\ -5.00 & 5.00 & -3.00 & 9.00 \\ -9.00 & -3.00 & 5.00 & 5.00 \\ 3.00 & 9.00 & 5.00 & 5.00 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 16.00 \\ 12.00 \\ 12.00 \\ 12.00 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 3.00 & -1.00 & 1.00 & 3.00 \\ -2.00 & 2.00 & 2.00 & 2.00 \end{bmatrix}$$

$$n = 4; m = 1; k = 2$$

$\sigma A = [12, 4, 16, 12]$. Все собственные числа управляемы, но -12 – ненаблюдаемо, следовательно система полностью управляема и обнаруживаема. Это необходимо учесть при выборе пары матриц $(\Gamma, \mathbb{Y}_{\mathbb{L}})$ так, чтобы -12 было неуправляемо.

Пусть, $\sigma\Gamma = [-12, -3, -2, -1]$, тогда Γ – просто диагональная матрица. Для подбора матриц K, чтобы сделать все числа наблюдаемыми у пары матриц $(\Gamma, \mathbb{Y}_K)$ по Жорданову критерию, возьмем $\mathbb{Y}_K \in \mathbb{R}^{n\times m}$:

$$\mathbb{Y}_K = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

а для выбора L, чтобы сделать 12 – неуправляемым в паре $(\Gamma, \mathbb{Y}_L)$, возьмем $\mathbb{Y}_L \in \mathbb{R}^{n \times k}$:

$$\mathbb{Y}_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Далее, выполняя по отдельности действия задания 1 и 2, получены следующие матрицы:

$$K = \begin{bmatrix} 11.09 & -3.47 & -11.35 & -3.65 \end{bmatrix}; L = \begin{bmatrix} 36.20 & 36.20 \\ 6.46 & 6.46 \\ -36.74 & -36.74 \\ 5.91 & 5.91 \end{bmatrix}$$

K и L были подставлены в формулы из теоретической части. Это позволило стабилизировать систему, результаты приведены ниже на рисунках ?? - ??.

src/figs/task3_y.jpg

Рис. 13: Результаты моделирования выхода системы и наблюдателя.

src/figs/task3_u.jpg

Рис. 14: Результаты моделирования регулятора.

src/figs/task3_states.jpg

Рис. 15: Результаты моделирования состояний системы.

3 Заключение

В этой работе были изучены регуляторы с заданной степенью устойчивости.

3.1 Выводы

1.