# ЛР №7 «Управляемость и наблюдаемость»

Отчет

Студент
Кирилл Лалаянц
R33352
336700
Вариант - 11

Преподаватель
Пашенко А.В.

Факультет Систем Управления и Робототехники

ИТМО

09.02.2024

Содержание

# 1 Вводные данные

## 1.1 Цель работы

В этой работе пройдет изучение управляемости и наблюдаемости систем.

### 1.1.1 Программная реализация

С исходным кодом можно ознакомиться в репозитории на Github.

# 2 Основная часть

## 2.1 Задание 1

Имеем систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$x(t_1) = \int_0^{t_1} Bu(t)dt$$

### 2.1.1 Управляемость через матрицу управляемости

$U = [B|AB|\dots|A^{n-1}B]$ для $A \in R^{n\times n}$ и $B \in R^{n\times m}$ – матрица управляемости системы. Если ее ранг равен $n$ – система управляема.

### 2.1.2 Управляемость и Грамиан управляемости

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At}BB^Te^{A^Tt}dt$$

У управляемой системы Грамиан управляемости положительно определен в любой момент t.

### 2.1.3 Управляемость через собственные числа матрицы системы

$$\forall\lambda \in spec(A) : rank(A - \lambda I|B) = n \Longleftrightarrow \text{Матрица управляема}$$

### 2.1.4 Управляемость через Жорданову форму

Жорданова форма матрицы $A = PJP^{-1}$:

$$\dot{x} = PJP^{-1}x + Bu$$

Пусть $\hat{x} = P^{-1}x$, тогда получим Жорданову форму системы:

$$\dot{\hat{x}} = J\hat{x} + P^{-1}Bu = J\hat{x} + \hat{B}u$$

Система в Жордановой форме полностью управляема, если:

- каждому собственному числу соответсвует только одна Жорданова клетка.
- элементы матрицы входного воздействия, соответсвующие последним строкам клеток – не нулевые.

### 2.1.5 Програмное управление системой

Для вычисления управления, необходимого для достижения состояния $x_1$ к моменту времени $t_1$ достаточно рассчитать:

$$u(t) = B^Te^{A^T(t_1-t)}(P(t_1))^{-1}x_1$$

### 2.1.6 Результаты

Вариант задания:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -10 & -11 & -4 \\ 10 & 10 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}; x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; t_1 = 3$$

Матрица управляемости U:

$$U = \begin{bmatrix} -2 & 17 & -62 \\ 5 & -23 & -1 \\ -3 & 21 & 3 \end{bmatrix};$$

$$rankU = 3 = n \rightarrow \text{система управляема.}$$

Получены собственные числа $spec(A) = [-2+5j, -2-5j, -1+0j]$. Каждое из них удовлетворяет выражению$rank(A - \lambda I|B) = n$ – то есть управлямо по ранговому критерию.

Так же рассмотрим управляемость собственных чисел через форму Жордана:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2-5j & 0 \\ 0 & 0 & -2+5j \end{bmatrix}; \hat{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.5+1.5j \\ -1.5-1.5j \end{bmatrix};$$

Как видно, условия выполнены – еще одно подтверждение, что матрица A управляема.

Так как матрица полностью управляема, любая точка принадлежит управвляемому подпространству системы, в том числе и $x_1$.

Получен Грамиван управляемости:

$$P(t_1) = \begin{bmatrix} 1.20 & -1.34 & 0.23 \\ -1.34 & 2.76 & -1.12 \\ 0.23 & -1.12 & 1.47 \end{bmatrix};$$

$$spec(P(t_1)) = [4, 0.27, 1.15]$$

Грамиан положительно определен, система полностью управляема.

На рисунке 3 приведены результаты моделирования системы. Как видно, она приняла желаемо состояние за нужное время.

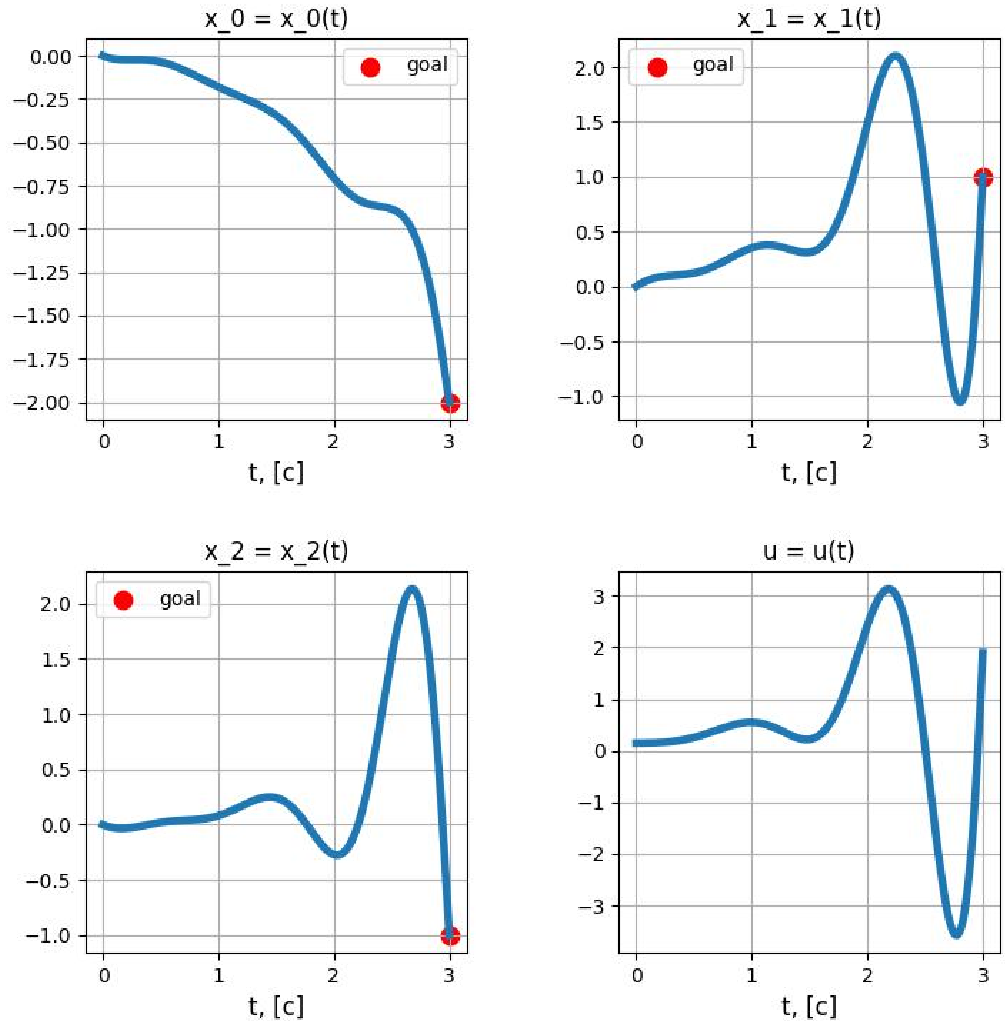


Рис. 1: Результаты моделирования задания 1.

## 2.2 Задание 2

### 2.2.1 Принадлежность состояния управвляемому подпространству

В этом задании дополнительно лишь нужно знать, как проверить состояние на принадлежность управляемому подпространству.

Для этого необходимо сравнить $rank(U)$ и $rank(U|x_1)$. Если они совпали – состояние принадлежит.

### 2.2.2 Результаты

Вариант задания:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -10 & -11 & -4 \\ 10 & 10 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; x_1' = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; x_1'' = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}; t_1 = 3$$

Матрица управляемости U:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 11 & -102 \\ 1 & -27 & 79 \\ -1 & 27 & -79 \end{bmatrix};$$

$$rankU = 2 = n \rightarrow \text{система неполностью управляема.}$$

Получены собственные числа $spec(A) = [-2+5j, -2-5j, -1+0j]$. Третье из них неуправляемо.

Так же рассмотрим управляемость собственных чисел через форму Жордана:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2-5j & 0 \\ 0 & 0 & -2+5j \end{bmatrix}; \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.5+1.5j \\ -1.5-1.5j \end{bmatrix};$$

Как видно, у первого числа соотвествующий элемент в векторе управления 0. Это еще раз подтверждает его неуправляемость.

Из $x_1'$ и $x_1''$ только первое состояние принадлежит управляемому подпространству.

Получен Грамиан управляемости:

$$P(t_1) = \begin{bmatrix} 2.05 & -1.63 & 1.63 \\ -1.63 & 2.40 & -2.40 \\ 1.63 & -2.40 & 2.40 \end{bmatrix};$$

$$spec(P(t_1)) = [0.74, 6.12, 0]$$

Одно из собственных чисел Грамиана – 0. Для нахождения програмного управления необходимо использовать псевдообратную матрицу.

На рисунке 2 приведены результаты моделирования системы. Как видно, она приняла желаемо состояние за нужное время.

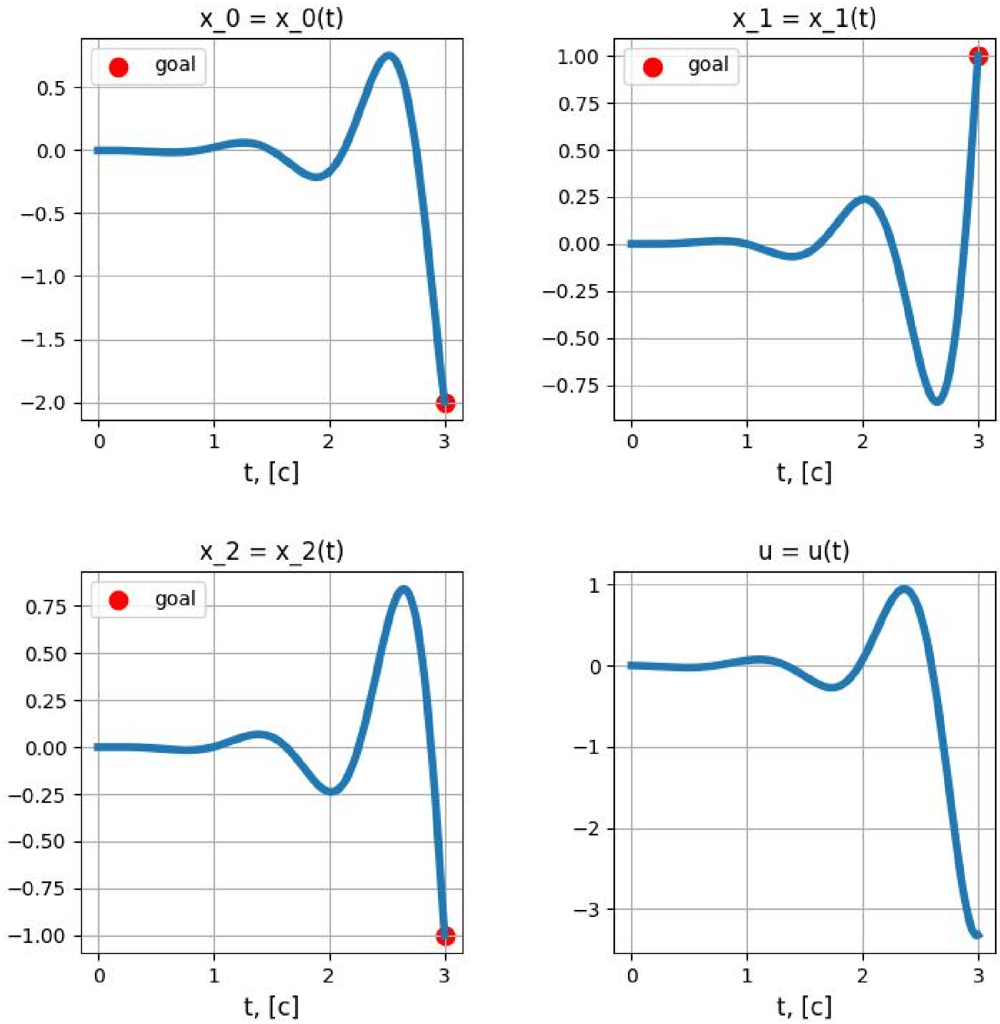


Рис. 2: Результаты моделирования задания 2.

### 2.3 Задание 3

Имеем систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

$$y(t) = Ce^{At}x(0)$$

### 2.3.1 Наблюдаемость через матрицу наблюдаемости

$V = [C|CA|\dots|CA^{n-1}]^T$ для $A \in R^{n\times n}$ и $C \in R^{k\times n}$ – матрица наблюдаемости системы. Если ее ранг равен $n$ – система наблюдаема.

### 2.3.2 Наблюдаемость и Грамиан наблюдаемости

$$Q(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

У наблюдаемой системы Грамиан наблюдаемости положительно определен в любой момент t.

### 2.3.3 Управляемость через собственные числа матрицы системы

$$\forall \lambda \in spec(A) : rank(\begin{bmatrix} A-\lambda I \\ C \end{bmatrix}) = n \Longleftrightarrow \text{Матрица наблюдаема}$$

### 2.3.4 Управляемость через Жорданову форму

Жорданова форма матрицы $A = PJP^{-1}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = PJP^{-1}x \\ y = Cx \end{cases}$$

Пусть $\hat{x} = P^{-1}x$, тогда получим Жорданову форму системы:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = J\hat{x} \\ y = CP\hat{x} = \hat{C}\hat{x} \end{cases}$$

Система в Жордановой форме полностью наблюдаема, если:

- каждому собственному числу соответсвует только одна Жорданова клетка.
- элементы матрицы выходов, соответсвующие первым столбцам клеток – не нулевые.

### 2.3.5 Начальные условия системы

Для вычисления начальных условий системы, достаточно рассчитать:

$$x(0) = (P(t_1))^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt$$

### 2.3.6 Результаты

Вариант задания:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -10 & -11 & -4 \\ 10 & 10 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}; x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; t_1 = 3$$

Матрица управляемости U:

$$U = \begin{bmatrix} -2 & 17 & -62 \\ 5 & -23 & -1 \\ -3 & 21 & 3 \end{bmatrix};$$

$$rankU = 3 = n \rightarrow \text{система управляема.}$$

Получены собственные числа $spec(A) = [-2+5j, -2-5j, -1+0j]$. Каждое из них удовлетворяет выражению$rank(A - \lambda I|B) = n$ – то есть управлямо по ранговому критерию.

Так же рассмотрим управляемость собственных чисел через форму Жордана:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2-5j & 0 \\ 0 & 0 & -2+5j \end{bmatrix}; \hat{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.5+1.5j \\ -1.5-1.5j \end{bmatrix};$$

Как видно, условия выполнены – еще одно подтверждение, что матрица А управляема.

Так как матрица полностью управляема, любая точка принадлежит управвляемому подпространству системы, в том числе и $x_1$.

Получен Грамиван управляемости:

$$P(t_1) = \begin{bmatrix} 1.20 & -1.34 & 0.23 \\ -1.34 & 2.76 & -1.12 \\ 0.23 & -1.12 & 1.47 \end{bmatrix};$$

$$spec(P(t_1)) = [4, 0.27, 1.15]$$

Грамиан положительно определен, система полностью управляема.

На рисунке 3 приведены результаты моделирования системы. Как видно, она приняла желаемо состояние за нужное время.

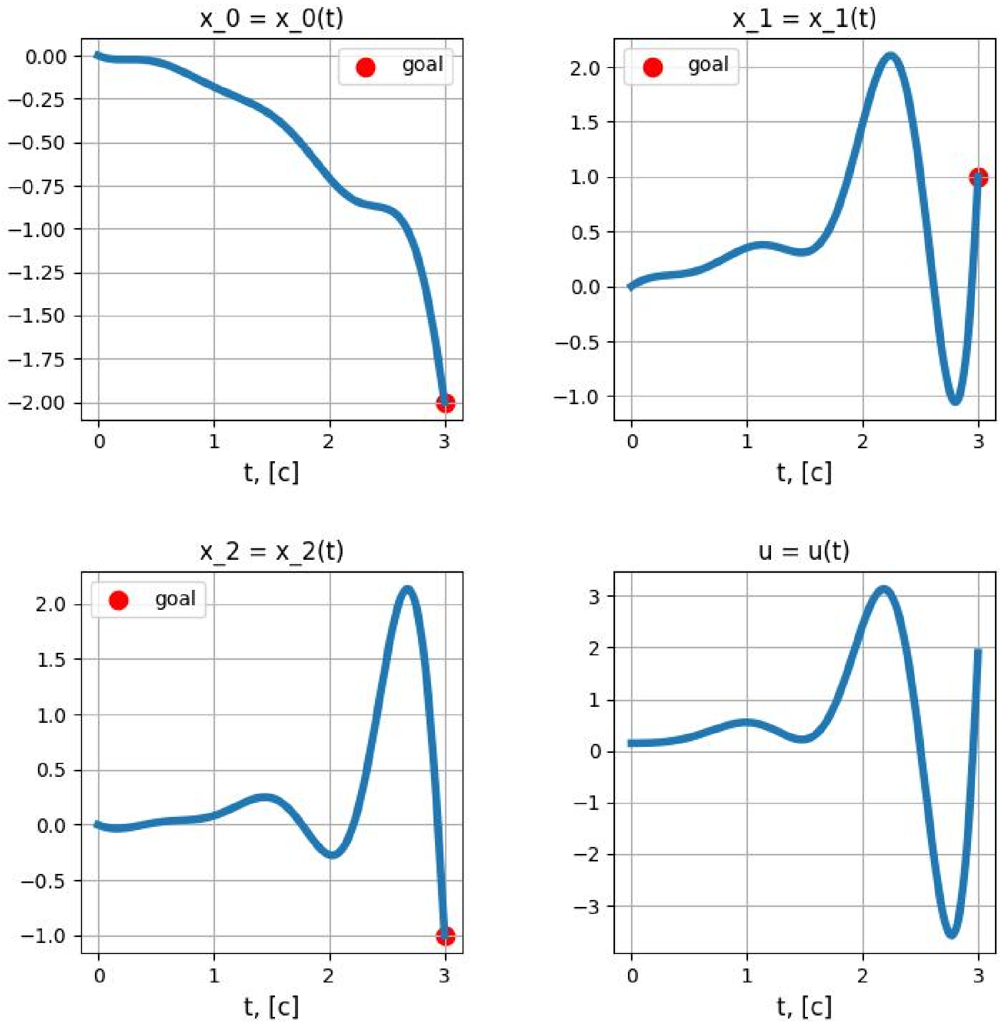


Рис. 3: Результаты моделирования задания 1.

## 3 Заключение

В этой работе были изучены управляемости и наблюдаемости систем.

### 3.1 Выводы

1.