

---

ЛР №12 «Слежение и компенсация»

---

Отчет

Студент

Кирилл Лалаянц

R33352

336700

Вариант - 11

Преподаватель

Пашенко А.В.

Факультет Систем Управления и Робототехники

ИТМО

14.05.2024

## Содержание

1	ГЛАВА 1. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА	2
1.1	Вывод уравнений . . . . .	2
1.2	Точки равновесия . . . . .	4
1.3	Линеаризация . . . . .	4
1.4	Параметры системы . . . . .	5
2	ГЛАВА 2. АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ	6
2.1	Анализ матриц . . . . .	6
2.2	Передаточные функции . . . . .	6
2.3	Линейное моделирование . . . . .	6
2.4	Нелинейное моделирование . . . . .	10
3	ГЛАВА 3. СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА: МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ	13
3.1	Синтез регулятора по состоянию . . . . .	13
3.2	Исследование регулятора по состоянию . . . . .	18
3.3	Синтез наблюдателя . . . . .	18
3.4	Исследование наблюдателя . . . . .	22
3.5	Синтез регулятора по выходу . . . . .	24
4	ГЛАВА 4. СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА: РЕГУЛЯТОРЫ С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ УСТОЙЧИВОСТИ	25
4.1	Синтез регулятора по состоянию . . . . .	25
4.2	Исследование регулятора по состоянию . . . . .	33
4.3	Синтез регулятора по состоянию с ограничением на управление .	34
4.4	Синтез наблюдателя . . . . .	41
4.5	Синтез регулятора по выходу . . . . .	45
5	ГЛАВА 5. СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА: LQR И ФИЛЬТР КАЛМАНА	46

5.1	Синтез линейно-квадратичного регулятора . . . . .	46
5.2	Исследование линейно-квадратичного регулятора . . . . .	46
5.3	Синтез фильтра Калмана . . . . .	49
5.4	LQG для линейной модели . . . . .	50
5.5	LQG для нелинейной модели . . . . .	51
6	ГЛАВА 6. СЛЕЖЕНИЕ И КОМПЕНСАЦИЯ	53
6.1	Решение задачи компенсации . . . . .	53
6.2	Решение задачи слежения . . . . .	56
7	Заключение	60
7.1	Выводы . . . . .	60

С исходным кодом можно ознакомиться в [репозитории на Github](#).

# 1 ГЛАВА 1. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА

## 1.1 Вывод уравнений

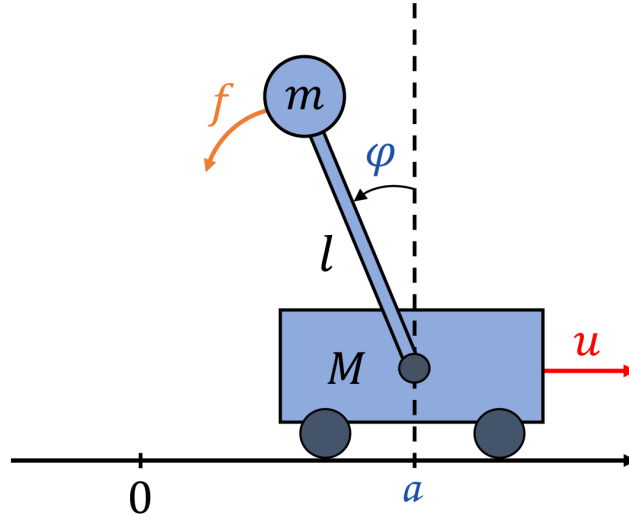


Рис. 1: Перевернутый маятник на тележке.

Рассмотрим систему перевернутого маятника на тележке (рис. 1). Введем следующие обозначения физических величин:

- $x$  – линейная координата тележки;
- $\dot{x}$  – линейная скорость тележки;
- $\varphi$  – угол отклонения маятника от вертикали;
- $\dot{\varphi}$  – угловая скорость маятника;
- $f$  – вращающий внешний момент, действующий на маятник;
- $u$  – сила действующая на тележку;
- $M, m$  – массы тележки и маятника соответственно;
- $l$  – длина маятника.

В качестве вектора состояния  $s = \begin{bmatrix} x & \dot{x} & \varphi & \dot{\varphi} \end{bmatrix}^T$ . В роли управляющего воздействия примем  $u$ , в роли внешнего возмущения –  $f$ .

Измеряемыми сигналами  $y = \begin{bmatrix} x & \varphi \end{bmatrix}^T$ .

Для вывода математической модели данной физической системы воспользуемся уравнениями Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = u \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = f + mgl \sin(\varphi) \end{cases}, \quad (1)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы.

$$T(t) = M \frac{\dot{x}^2}{2} + m \frac{\left( \frac{d}{dt}(l \cos(\varphi)) \right)^2 + \left( -\frac{d}{dt}(l \sin(\varphi)) + \dot{x} \right)^2}{2} = (M+m) \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} - ml \cos(\varphi) \dot{x} \dot{\varphi} \quad (2)$$

Подставив выражение для  $T$  в уравнения 1, получим уравнения математической модели системы:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml(\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 - \cos(\varphi)\ddot{\varphi}) = u \\ ml^2\ddot{\varphi} - ml\ddot{x} \cos \varphi = f + mgl \sin(\varphi) \end{cases} \quad (3)$$

Тогда, выразив  $\ddot{a}$  и  $\ddot{\varphi}$ :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{ml}{M+m} \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \frac{ml}{M+m} \cos(\varphi) \ddot{\varphi} + \frac{1}{M+m} u \\ \ddot{\varphi} = \frac{1}{l} \ddot{x} \cos(\varphi) + \frac{g}{l} \sin(\varphi) + \frac{1}{ml^2} f \end{cases} \quad (4)$$

Решив данную систему уравнений 4 относительно  $\ddot{a}$  и  $\ddot{\varphi}$ :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{M+m \sin(\varphi)^2} (-ml \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + mg \cos(\varphi) \sin(\varphi) + \frac{\cos(\varphi)}{l} f + u) \\ \ddot{\varphi} = \frac{1}{M+m \sin(\varphi)^2} (-m \sin(\varphi) \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \frac{(M+m)g}{l} \sin(\varphi) + \frac{M+m}{ml^2} f + \frac{\cos(\varphi)}{l} u) \end{cases} \quad (5)$$

Представим математическую модель в терминах вектора состояния:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = \frac{1}{M+m \sin(\varphi)^2} (-ml \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + mg \cos(\varphi) \sin(\varphi) + \frac{\cos(\varphi)}{l} f + u) \\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} = \frac{1}{M+m \sin(\varphi)^2} (-m \sin(\varphi) \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \frac{(M+m)g}{l} \sin(\varphi) + \frac{M+m}{ml^2} f + \frac{\cos(\varphi)}{l} u) \\ y_1 = x \\ y_2 = \varphi \end{cases} \quad (6)$$

## 1.2 Точки равновесия

В точках равновесия все компоненты производной вектора  $s$  по времени равны 0 при отсутствии внешних возмущений и управления.

$$\begin{cases} f = 0 \\ u = 0 \\ \dot{x} = 0 \\ \frac{1}{M+m \sin(\varphi)^2} (-ml \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + mg \cos(\varphi) \sin(\varphi) + \frac{\cos(\varphi)}{l} f + u) = 0 \\ \dot{\varphi} = 0 \\ \frac{1}{M+m \sin(\varphi)^2} (-m \sin(\varphi) \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \frac{(M+m)g}{l} \sin(\varphi) + \frac{M+m}{ml^2} f + \frac{\cos(\varphi)}{l} u) = 0 \end{cases}$$

Упростим выражения, подставив известное

$$\begin{cases} f = 0 \\ u = 0 \\ \dot{x} = 0 \\ \dot{\varphi} = 0 \\ \frac{1}{M+m \sin(\varphi)^2} (mg \cos(\varphi) \sin(\varphi)) = 0 \\ \frac{1}{M+m \sin(\varphi)^2} (\frac{(M+m)g}{l} \sin(\varphi)) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \dot{x} = 0 \\ \varphi = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

Соответственно, система стабильна, когда маятник замер в верхнем или нижнем положении, а тележка стоит на месте в любой точке.

## 1.3 Линеаризация

Рассматривается тележка с маятником сверху ( $\varphi \approx 0; \dot{\varphi} \approx 0$ ), тогда можно считать:  $\sin(\varphi) = \varphi; \cos(\varphi) = 1; \varphi^2 \ll \varphi; \dot{\varphi}^2 \ll \dot{\varphi}$ .

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = \frac{1}{M} (mg\varphi + \frac{1}{l} f + u) \\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} = \frac{1}{M} (\frac{(M+m)g}{l} \varphi + \frac{M+m}{ml^2} f + \frac{1}{l} u) \\ y_1 = x \\ y_2 = \varphi \end{cases} \quad (7)$$

Можем представить линеаризованную систему в матричном виде:

$$\begin{cases} \dot{s} = As + Bu + Df \\ y = Cs \end{cases} \quad (8)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{Ml} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{M+m}{Mml^2} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

#### 1.4 Параметры системы

Далее принимается, что:

$$M = 1, m = 0.1, l = 1, g = 10$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



## 2 ГЛАВА 2. АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

### 2.1 Анализ матриц

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 3.3 & -3.3 \end{bmatrix}; v(A) = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & 0.0 & -0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & -0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Первые два числа 0, следовательно первая компонента (координата  $x$ ) не влияет на динамику системы. Есть кратные 0 и положительные числа, следовательно система неустойчивая.

$$\text{rank}U = \text{rank}[B|AB|\dots|A^{n-1}B] = 4 \rightarrow \text{полностью управляема}$$

$$\text{rank}V = \text{rank}[C|CA|\dots|CA^{n-1}]^T = 4 \rightarrow \text{полностью наблюдаема}$$

### 2.2 Передаточные функции

$$W_{u \rightarrow y} = \begin{bmatrix} \frac{1.0s^2 - 10.0}{1.0s^4 - 11.0s^2} \\ \frac{1.0s^2}{1.0s^4 - 11.0s^2} \end{bmatrix}$$

Динамический порядок – 4; относительный – 2; полюса –  $[0, 0, \sqrt{11}, -\sqrt{11}]$ ;

$$W_{f \rightarrow y} = \begin{bmatrix} \frac{1.0}{1.0s^2 - 11.0} \\ \frac{11.0}{1.0s^2 - 11.0} \end{bmatrix}$$

Динамический порядок – 2; относительный – 2; полюса –  $[\sqrt{11}, -\sqrt{11}]$ ;

Все функции описывают расходящиеся процессы.

### 2.3 Линейное моделирование

Ниже (рис. 2– 4) приведены графики при различных начальных условиях. Видно, что линейное ускорение тележки влияет только на координату. Если же задавать начальный угол или начальную угловую скорость маятника отличную от 0, то система улетает в бесконечность.

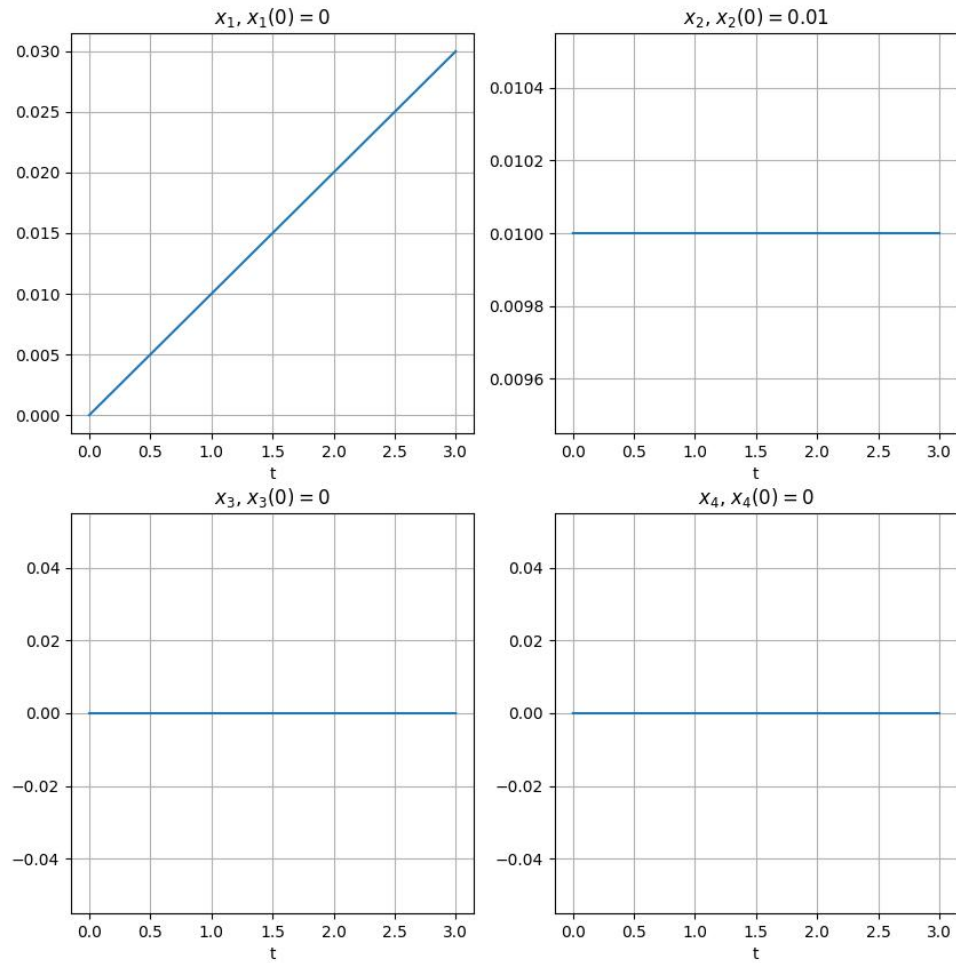


Рис. 2: Динамика системы.

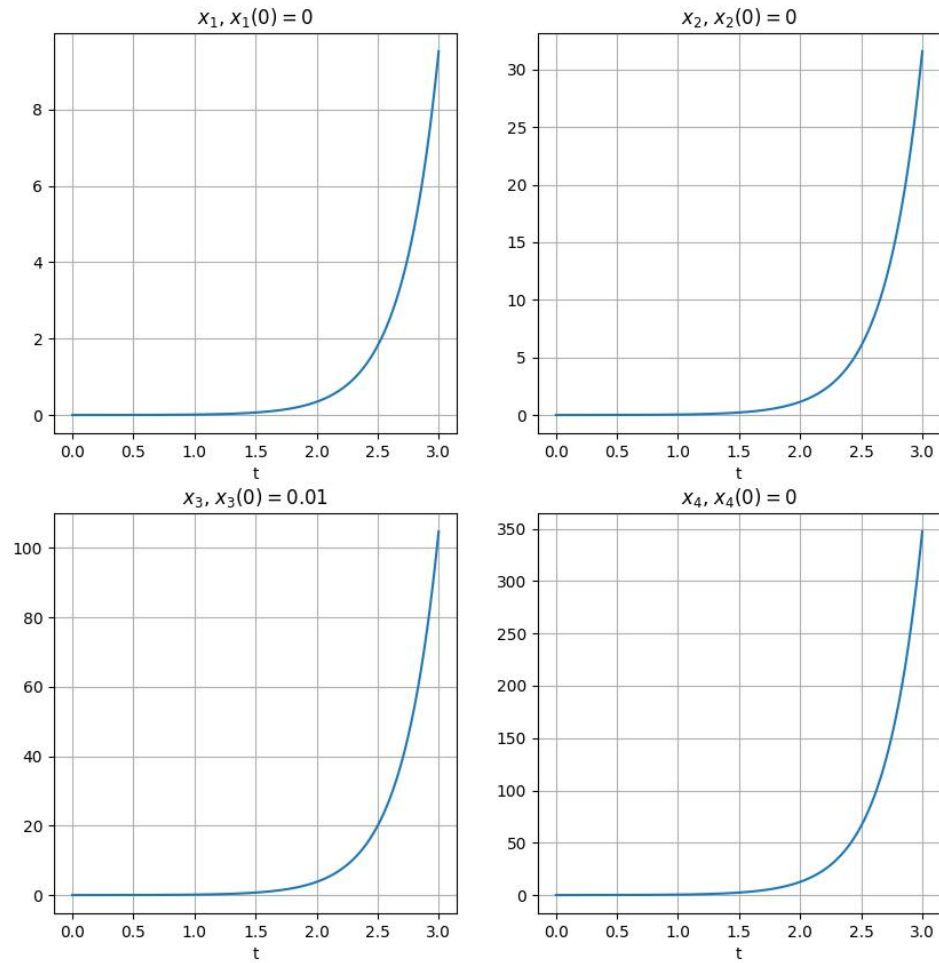


Рис. 3: Динамика системы.

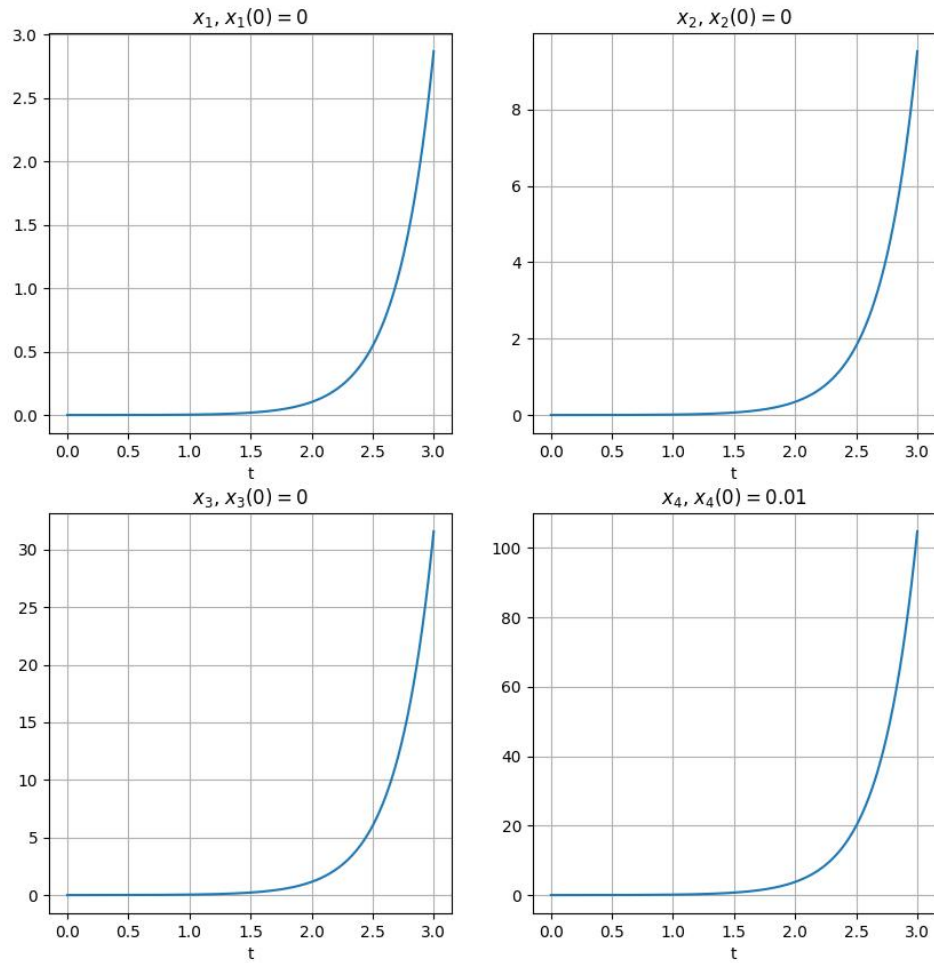


Рис. 4: Динамика системы.

## 2.4 Нелинейное моделирование

Ниже (рис. 5– 7) приведены графики при различных начальных условиях. Заметно, что сначала поведение систем схоже, но при удалении от точки равновесия по углу начинают быть заметны отличия.

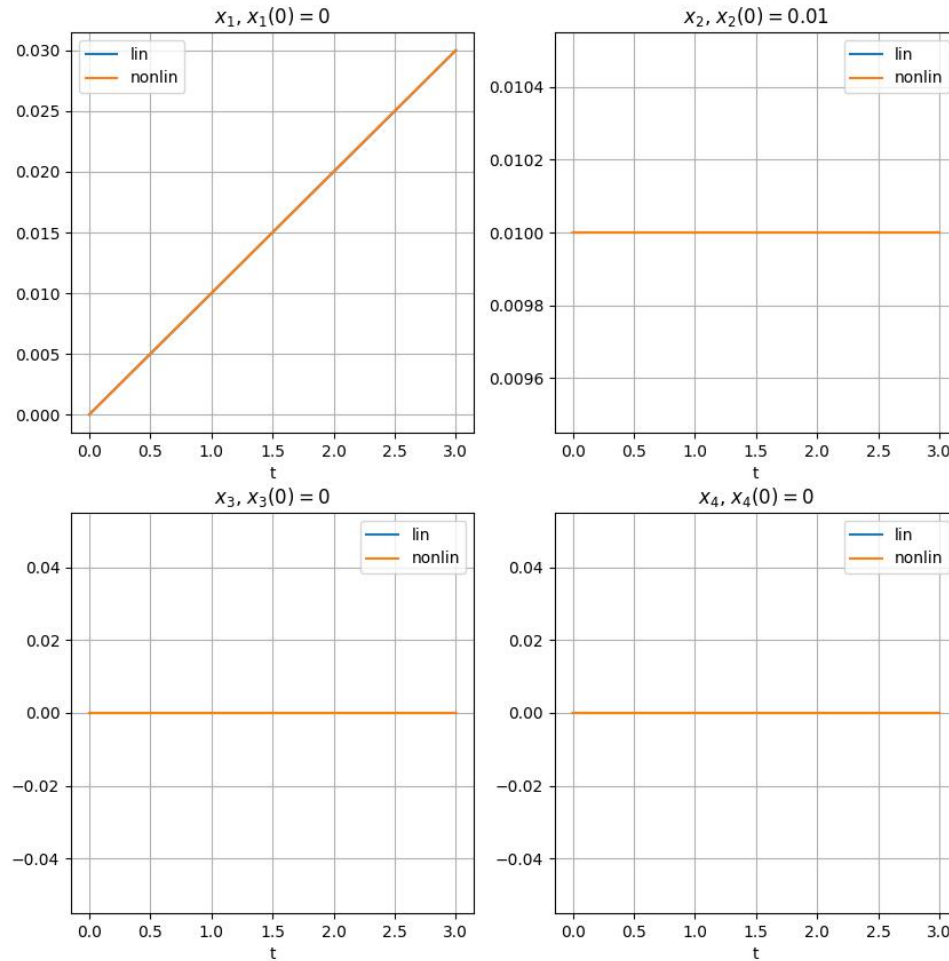


Рис. 5: Динамика системы.

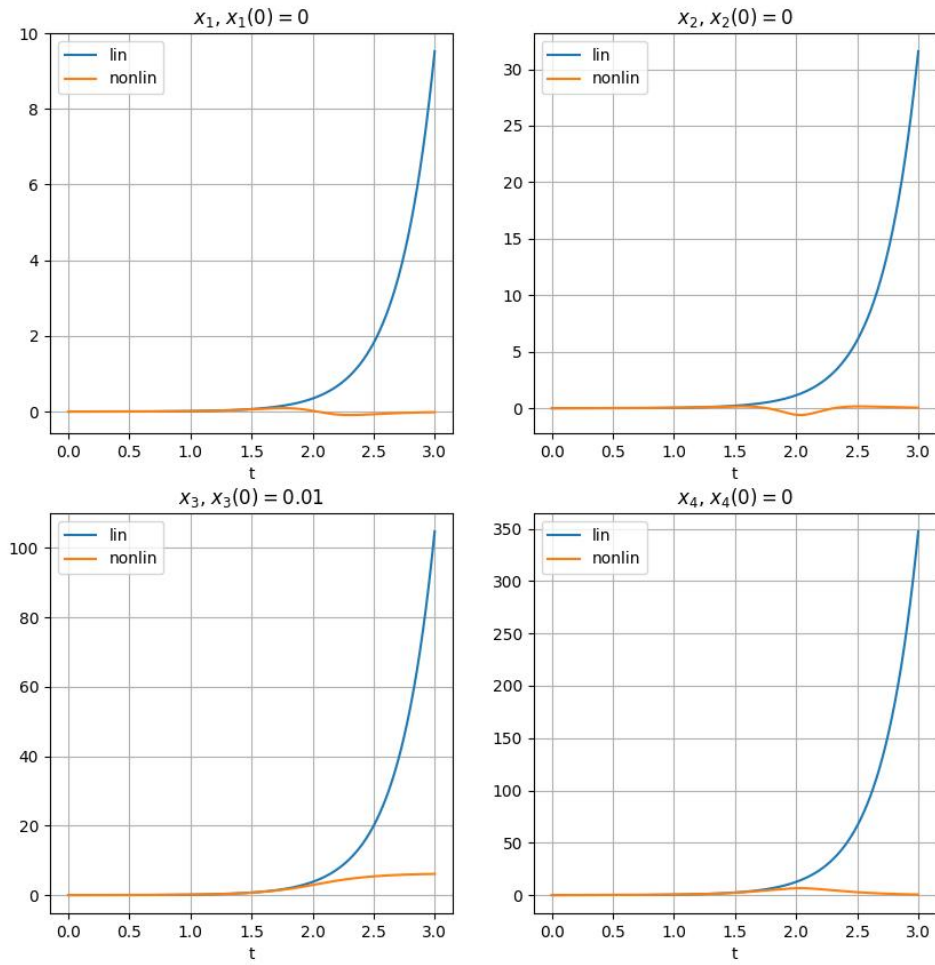


Рис. 6: Динамика системы.

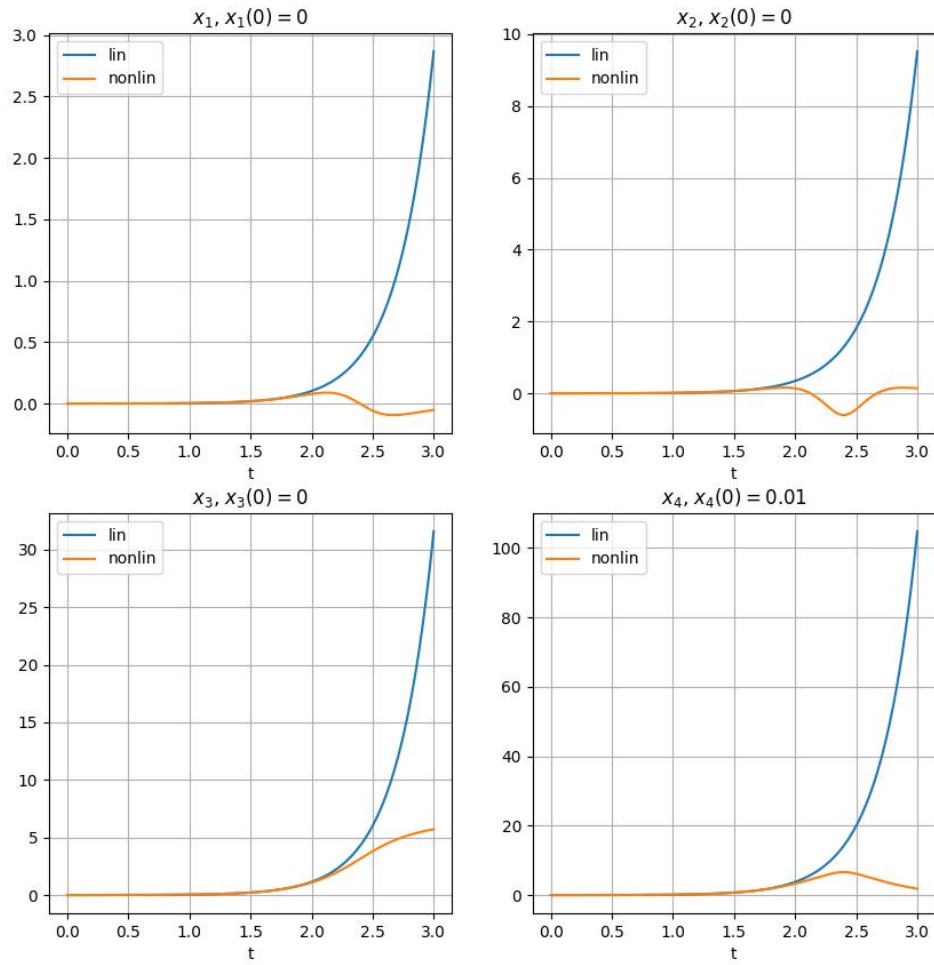


Рис. 7: Динамика системы.

### 3 ГЛАВА 3. СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА: МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

#### 3.1 Синтез регулятора по состоянию

В этом задании выводится модальный регулятор для системы:

$$\begin{cases} \text{Объект управления: } \dot{x} = Ax + Bu \\ \text{Регулятор: } u = Kx \end{cases} \rightarrow \dot{x} = Ax + BKx = (A + BK)x$$

Для этого подбирается матрица  $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  с желаемыми собственными числами и матрица  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , такая что пара  $(Y, \Gamma)$  наблюдаема. После чего по подобию:

$$A + BK = P\Gamma P^{-1} \rightarrow \begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases}$$

Получен регулятор:

$$K = \begin{bmatrix} 2.40 & 5.00 & -48.40 & -15.00 \end{bmatrix}$$

$$\text{spec}(A + BK) = \begin{bmatrix} -4.00 & -3.00 & -2.00 & -1.00 \end{bmatrix}$$

Он подходит для нелинейной системой, если  $\varphi$  близко к 0. Чем дальше от 0 – тем хуже справляется. Угловое ускорение такое сильное влияние не оказывает.



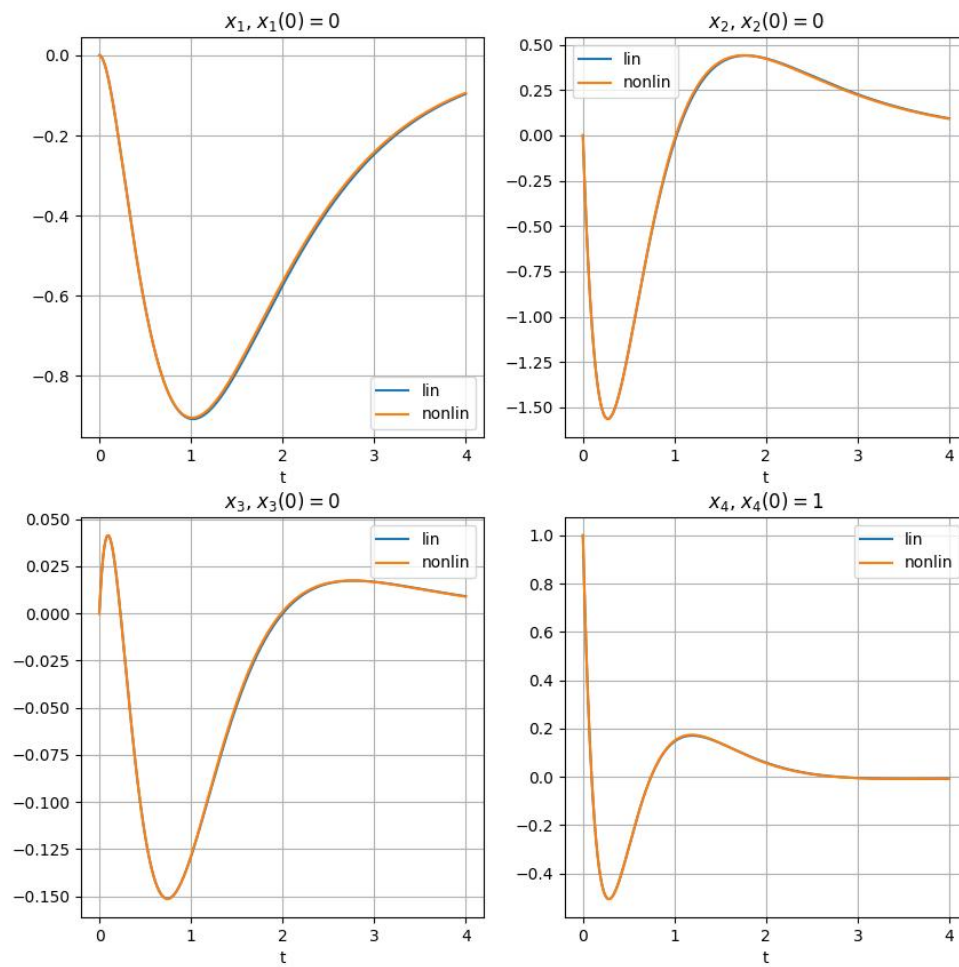


Рис. 8: Динамика системы.

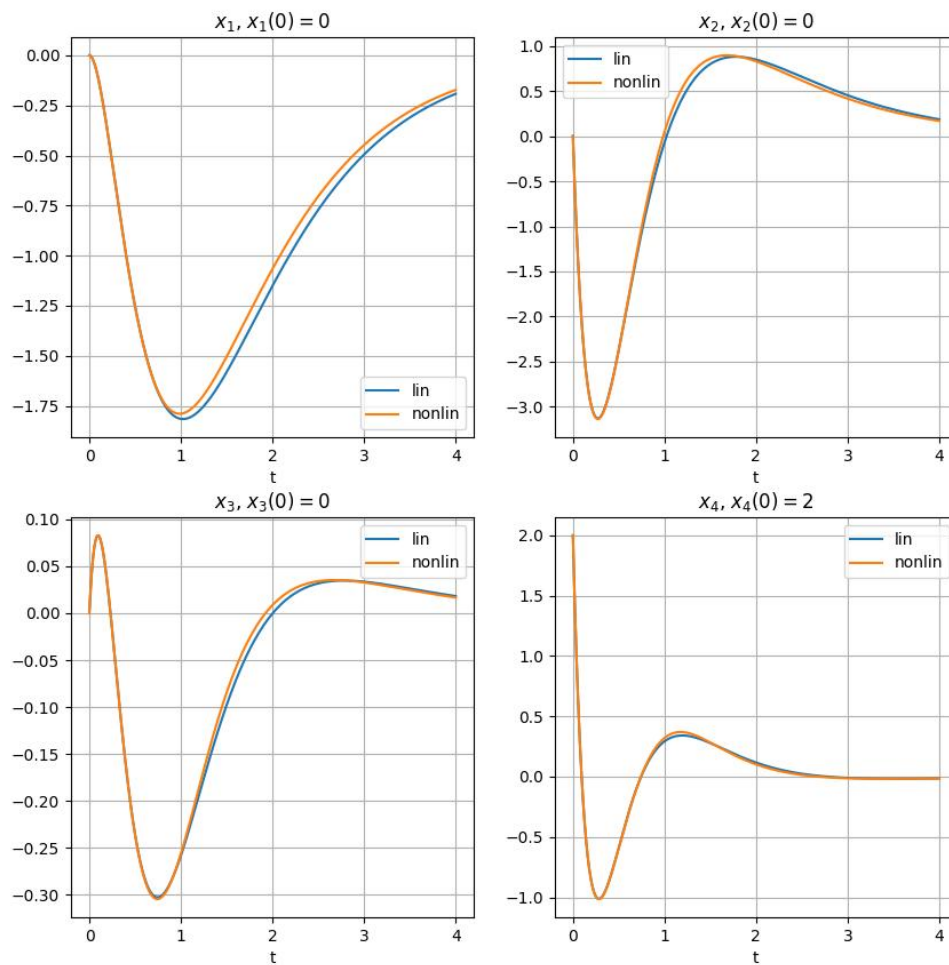


Рис. 9: Динамика системы.

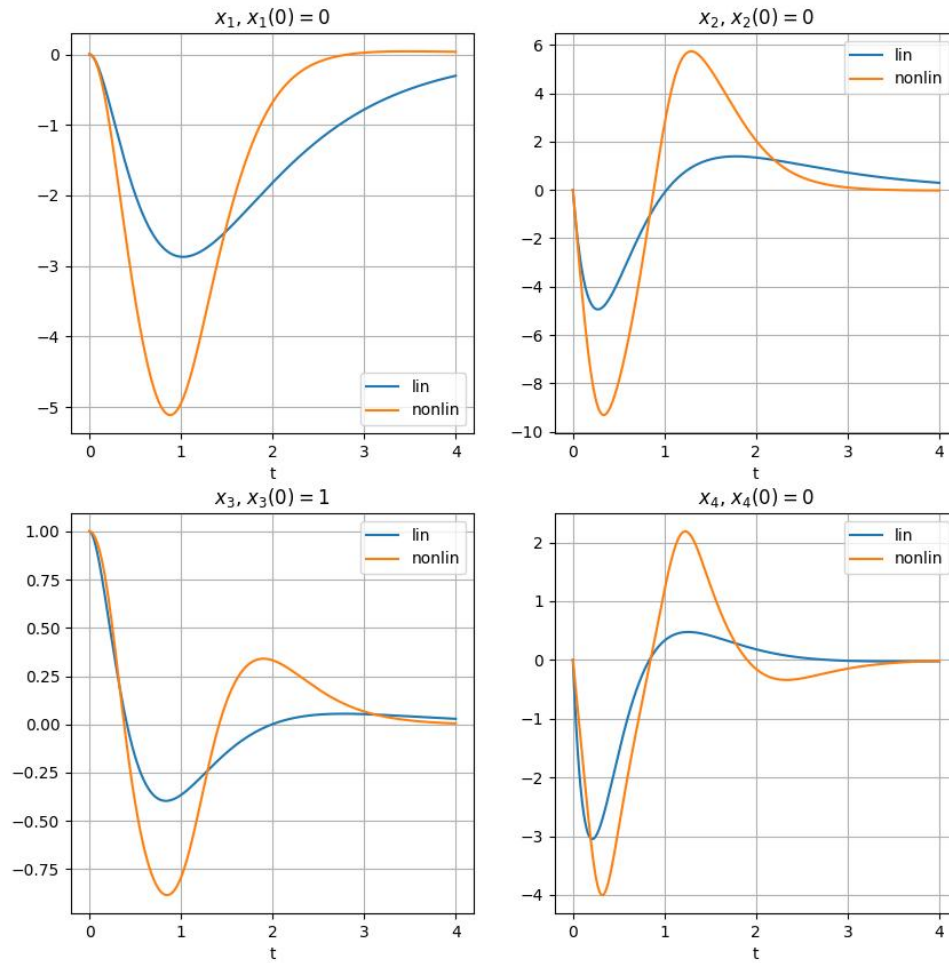


Рис. 10: Динамика системы.

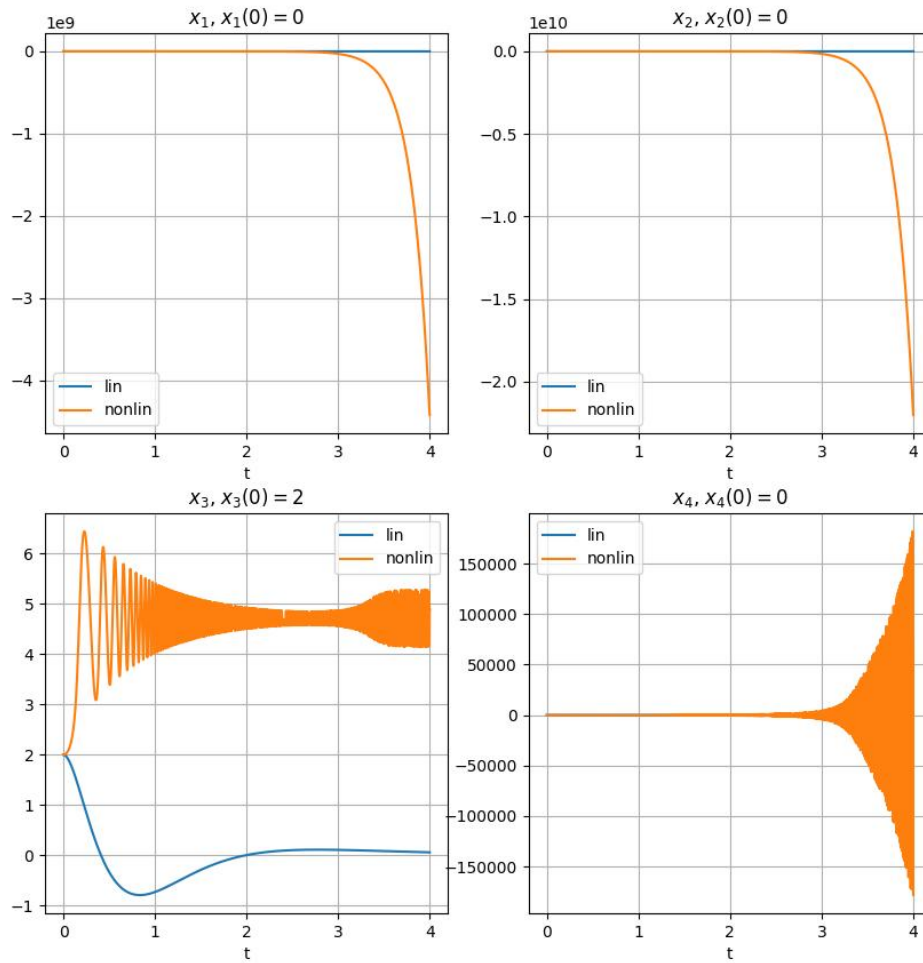


Рис. 11: Динамика системы.

### 3.2 Исследование регулятора по состоянию

$$\sigma G \left| \begin{array}{ccc} \max x & \max \varphi & \max u \\ \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} & 5.1 & 4.0 & 48.4 \\ \begin{bmatrix} -0.10 & -0.20 & -0.30 & -0.40 \end{bmatrix} & 110.4 & 13.6 & 76.7 \\ \begin{bmatrix} -1+1j & -1+-1j & -2+2j & -2+-2j \end{bmatrix} & 31482.2 & 194.8 & 256515.5 \end{array} \right.$$

Как видно, система довольно требовательна к спектру, набор из затихающих гармоник приводит к неустойчивому поведению.

### 3.3 Синтез наблюдателя

В этом задании выводится наблюдатель состояния для системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y) = (A + LC)\hat{x} - Ly \\ \dot{e} = (A + LC)e \end{cases}$$

Для синтеза наблюдателя подбирается матрица  $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  с желаемыми собственными числами и матрица  $Y \in \mathbb{R}^{n \times k}$ , такая что пара  $(\Gamma, Y)$  управляема. После чего:

$$\begin{cases} \Gamma Q - QA = YC \\ L = Q^{-1}Y \end{cases}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2.40 & 5.00 & -48.40 & -15.00 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -2.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -3.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & -4.00 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

На графиках видно, что не при любых начальных условиях наблюдатель сходится.

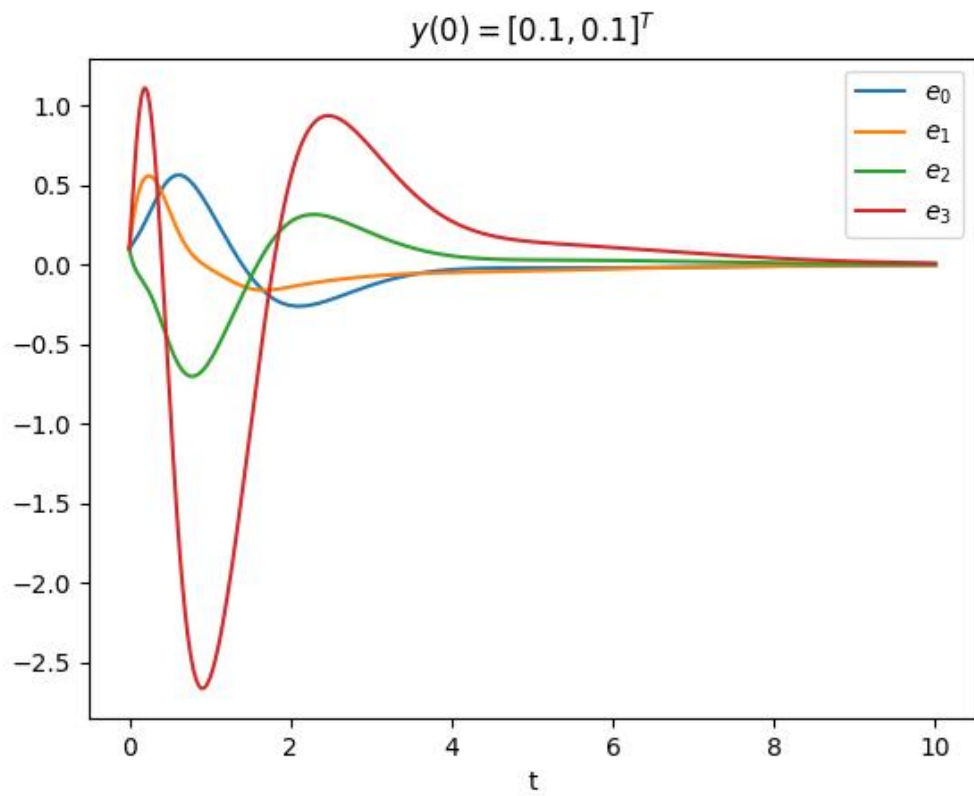


Рис. 12: Динамика ошибки.

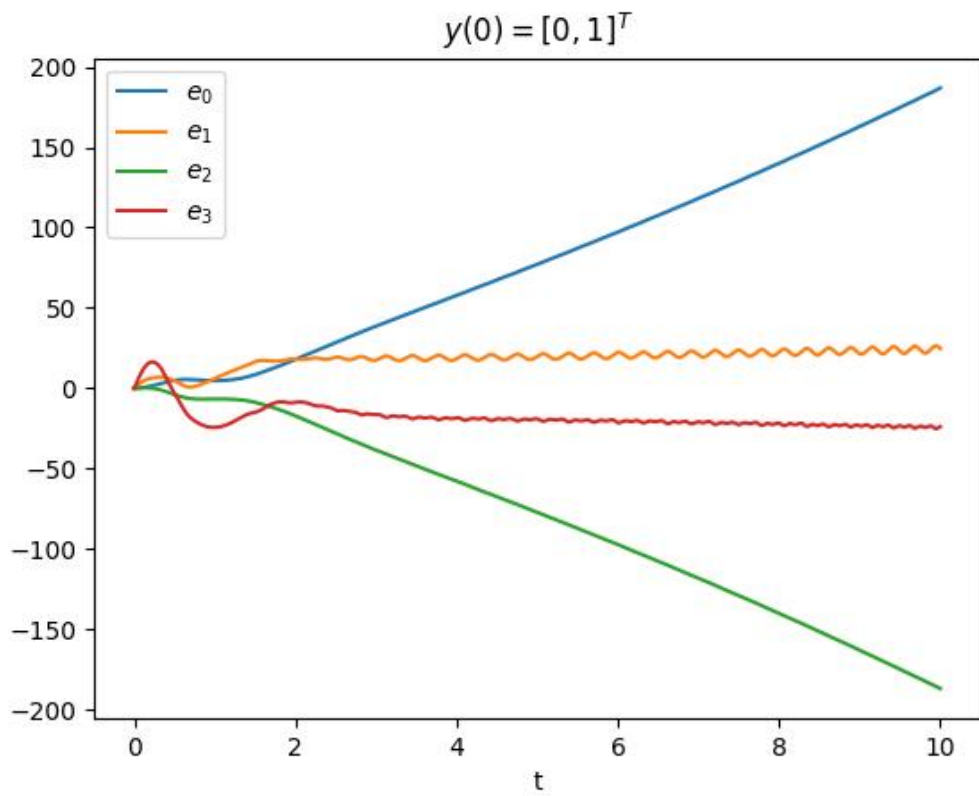


Рис. 13: Динамика ошибки.

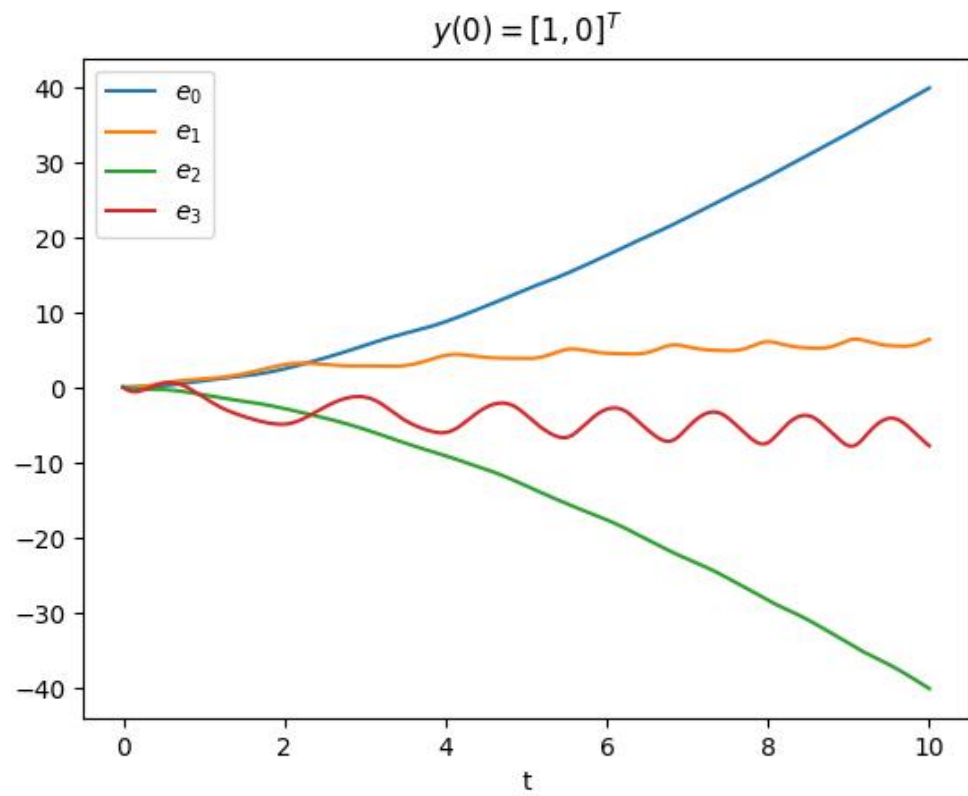


Рис. 14: Динамика ошибки.



### 3.4 Исследование наблюдателя

Не при любом устойчивом спектре наблюдатель устойчив.

$$L = \begin{bmatrix} 2.40 & 5.00 & -48.40 & -15.00 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -2.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -3.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & -4.00 \end{bmatrix}$$

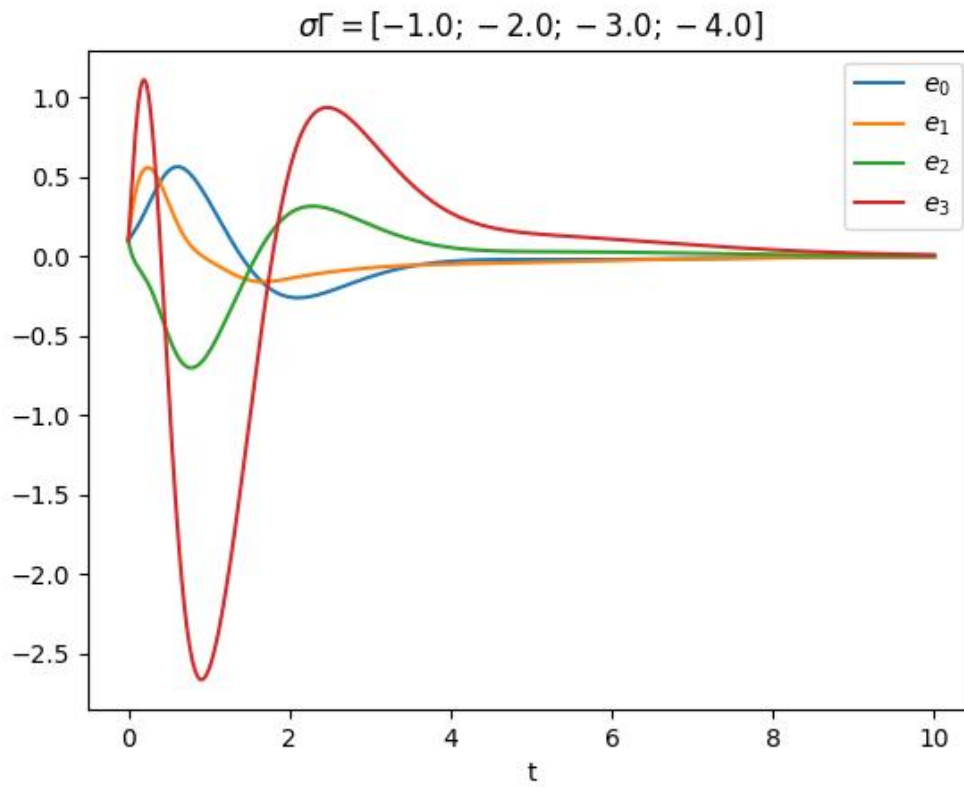


Рис. 15: Динамика ошибки.

$$L = \begin{bmatrix} 2.40 & 5.00 & -48.40 & -15.00 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -0.10 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -0.20 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -0.30 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.40 \end{bmatrix}$$

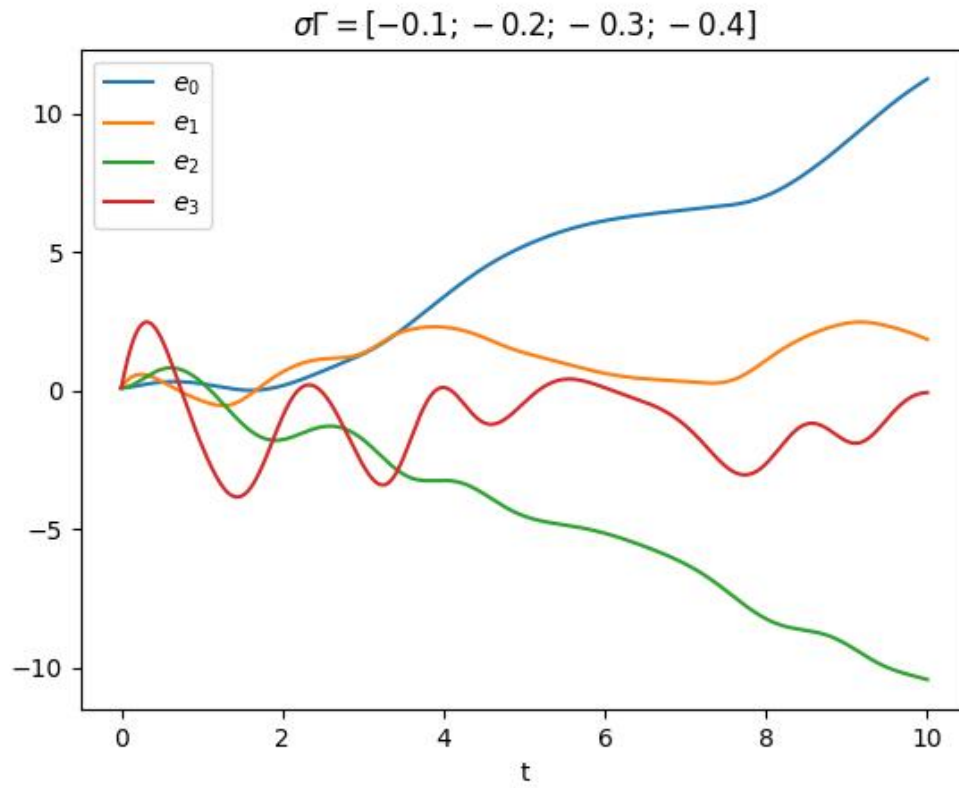


Рис. 16: Динамика ошибки.

$$L = \begin{bmatrix} 2.40 & 5.00 & -48.40 & -15.00 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 1.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -2.00 & -2.00 \\ 0.00 & 0.00 & 2.00 & -2.00 \end{bmatrix}$$

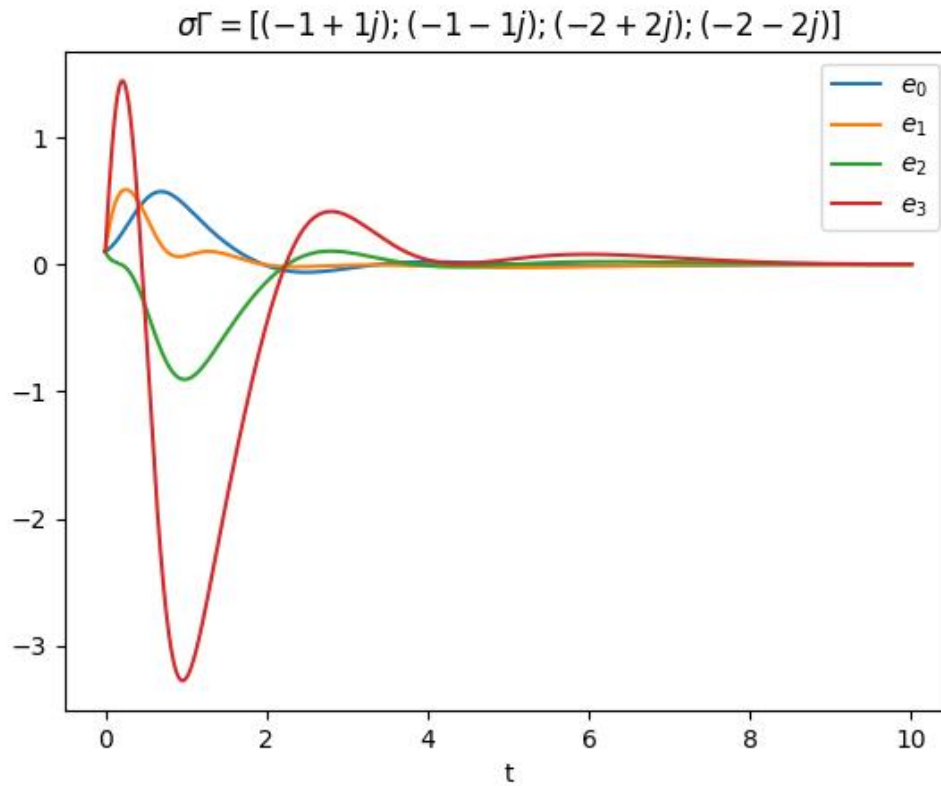


Рис. 17: Динамика ошибки.

### 3.5 Синтез регулятора по выходу

На основе двух предыдущих пунктов получен регулятор по выходу.

$$L = \begin{bmatrix} 3.33 & 3.33 \\ -1.83 & -1.83 \\ -13.33 & -13.33 \\ -44.17 & -44.17 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 2.40 & 5.00 & -48.40 & -15.00 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 1.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -2.00 & -2.00 \\ 0.00 & 0.00 & 2.00 & -2.00 \end{bmatrix}$$

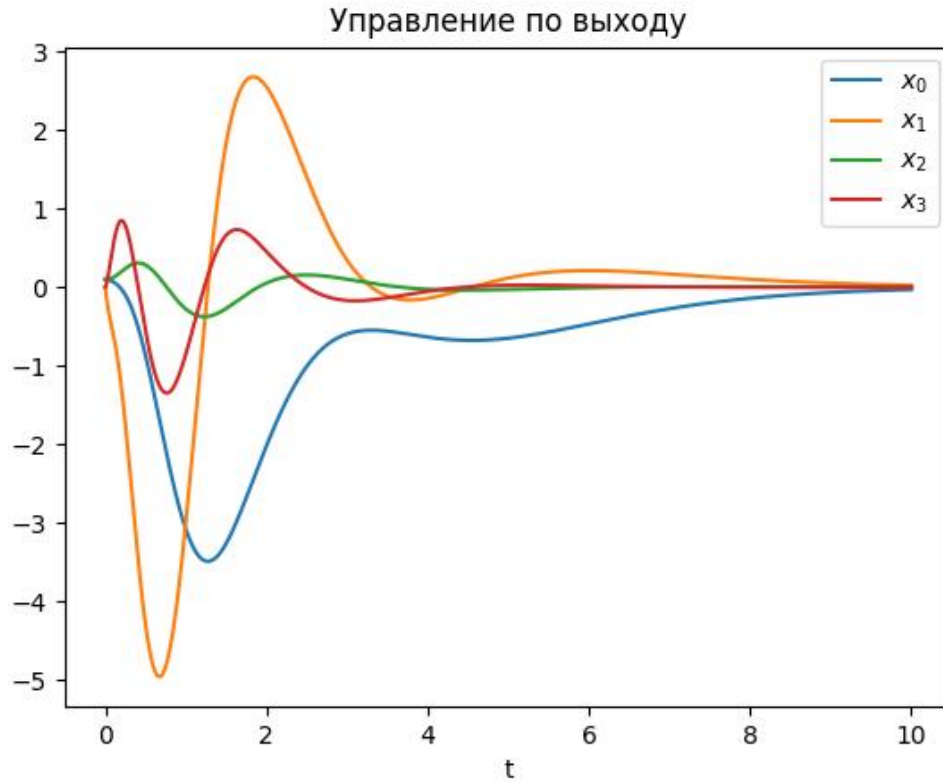


Рис. 18: Динамика компонент системы.

#### 4 ГЛАВА 4. СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА: РЕГУЛЯТОРЫ С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ УСТОЙЧИВОСТИ

##### 4.1 Синтез регулятора по состоянию

В этом задании выводится регулятор заданной степени устойчивости для системы:

$$\begin{cases} \text{Объект управления: } \dot{x} = Ax + Bu \\ \text{Регулятор: } u = Kx \end{cases} \rightarrow \dot{x} = Ax + BKx = (A + BK)x$$

По сути, целью данного регулятора является изменение управляемых собственных чисел так, чтобы  $\forall \lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda \leq \alpha$ , где  $\alpha$  – степень устойчивости. Для этого используется LMI критерий экспоненциальной устойчивости:

$$\exists Q \succ 0, \alpha > 0 : A^T Q + Q A + 2\alpha Q \preccurlyeq 0 \rightarrow \begin{cases} \forall x(0) \text{ А асимптотически устойчива} \\ \exists c : \|x(t)\| \leq c e^{-\alpha t} \|x(0)\| \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q \succ 0 \\ A^T Q + Q A + 2\alpha Q \preccurlyeq 0 \end{cases} \xleftrightarrow{Q=P^{-1}} \begin{cases} P \succ 0 \\ P A^T + A P + 2\alpha P \preccurlyeq 0 \end{cases}$$

Подставим вместо матрицы  $A$  нашу систему:

$$\begin{aligned} P(A+BK)^T + (A+BK)P + 2\alpha P &\preccurlyeq 0 \\ P A^T + P K^T B^T + A P + B K P + 2\alpha P &\preccurlyeq 0 \\ \begin{cases} Y = K P \\ P A^T + A P + 2\alpha P + Y^T B^T + B Y &\preccurlyeq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда для подбора матрицы  $K$ , чтобы задать система степень устойчивости  $\alpha$ , достаточно решить через библиотеку CVX следующую систему с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} K = Y P^{-1} \\ P \succ 0 \\ P A^T + A P + 2\alpha P + Y^T B^T + B Y \preccurlyeq 0 \end{cases}$$

На практике, довольно часто  $P$  – необратима. Приходится использовать псевдо-обратную.

$$\alpha = 1$$

$$K = \begin{bmatrix} 8.51 & 10.41 & -70.15 & -15.94 \end{bmatrix}$$

$$\text{spec}(A+BK) = \begin{bmatrix} -1.58 + 6.21j & -1.58 - 6.21j & -1.19 + 0.81j & -1.19 - 0.81j \end{bmatrix}$$

Как видно на графиках ниже, не всегда нелинейная система устойчива.

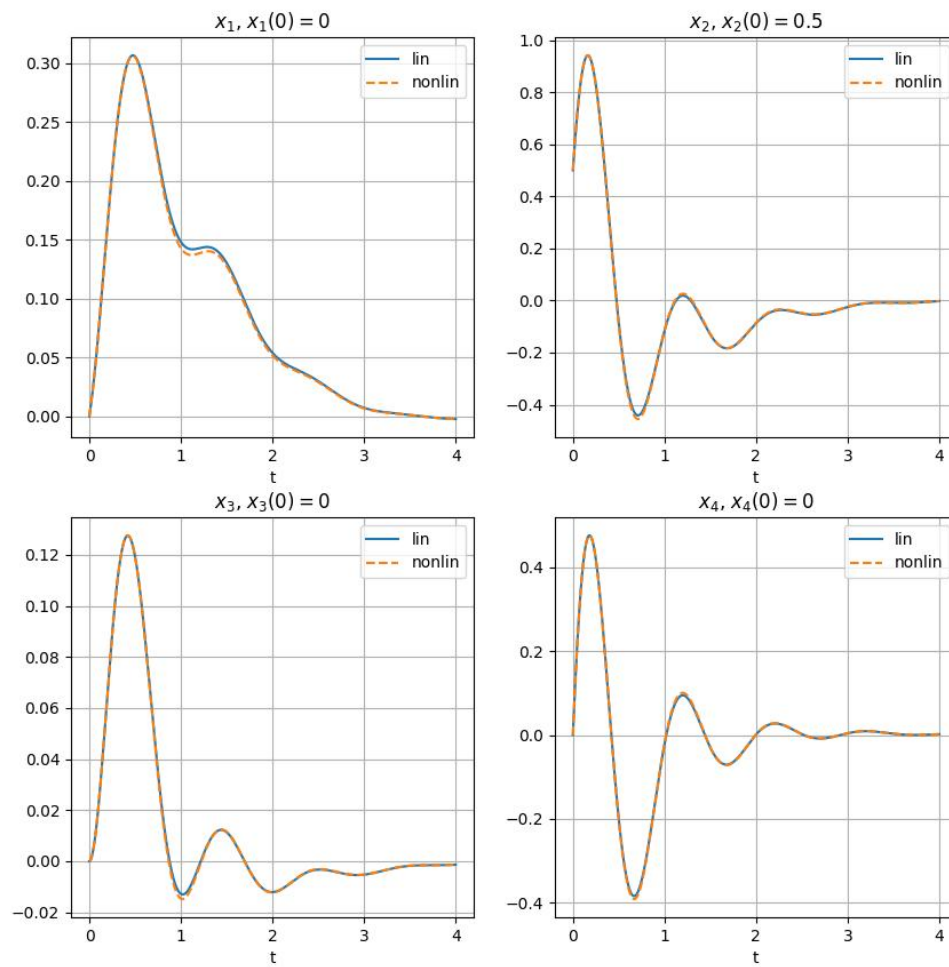


Рис. 19: Динамика системы.

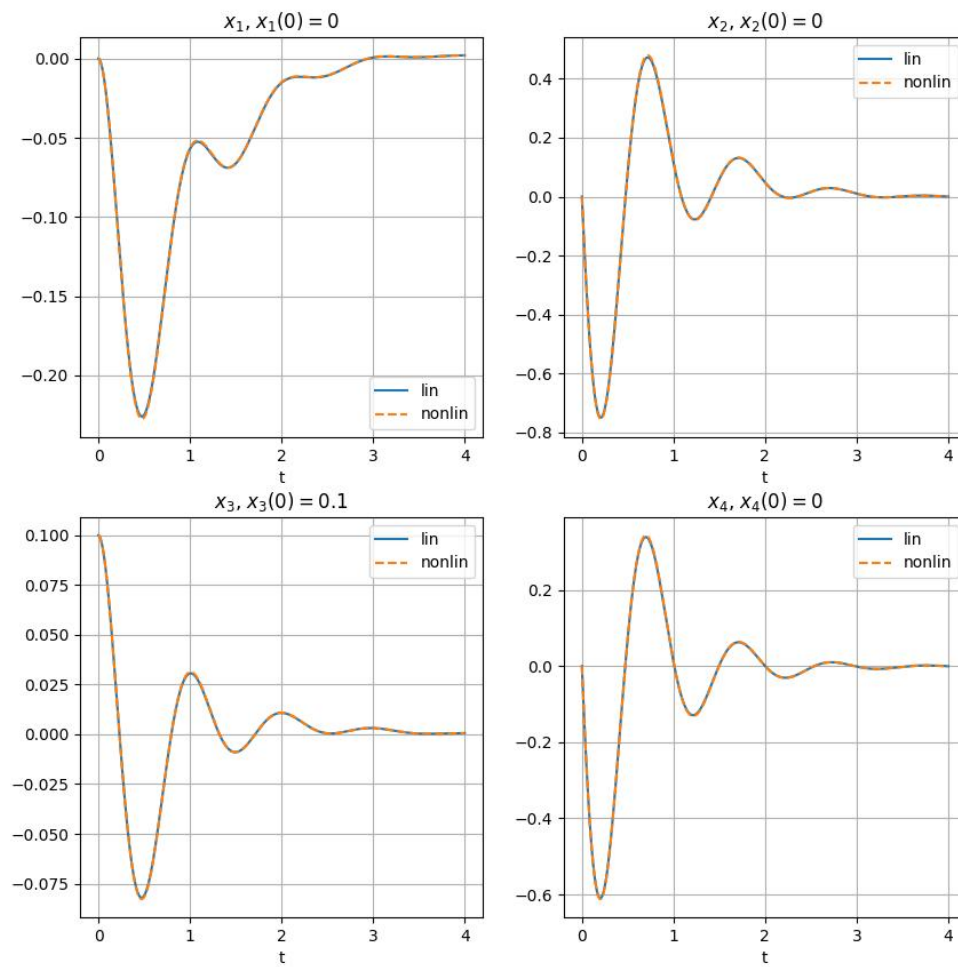


Рис. 20: Динамика системы.

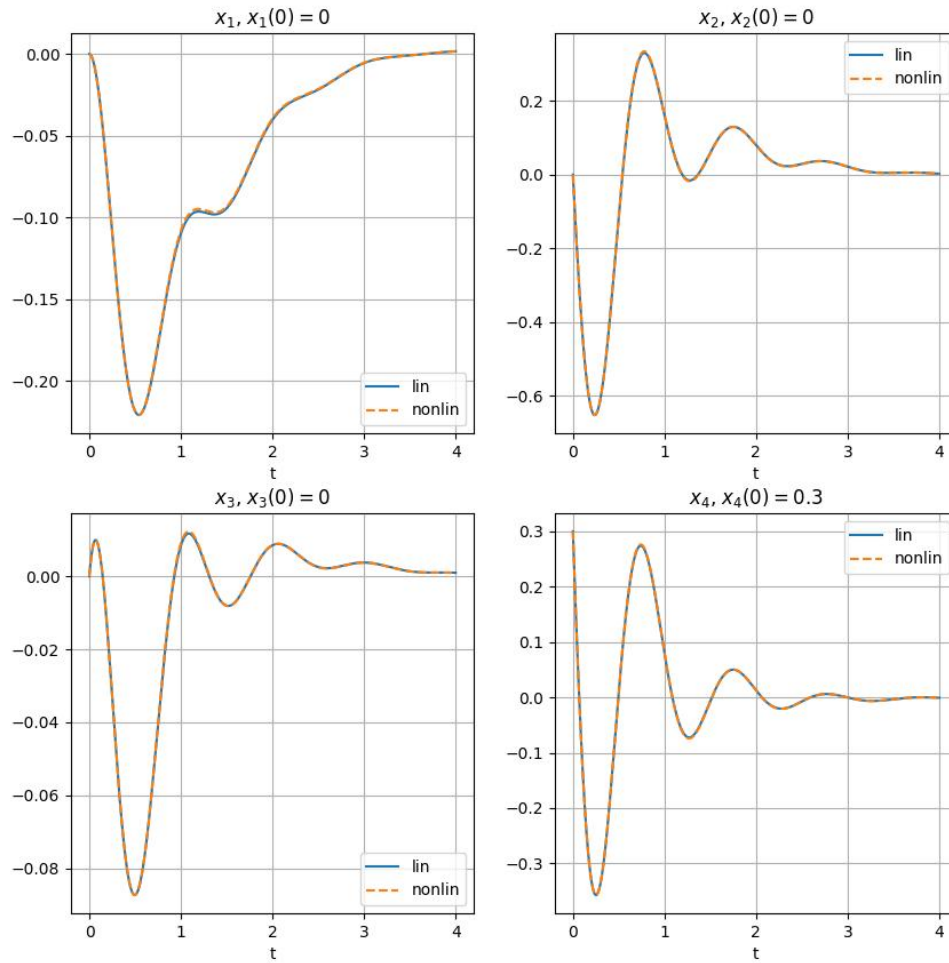


Рис. 21: Динамика системы.



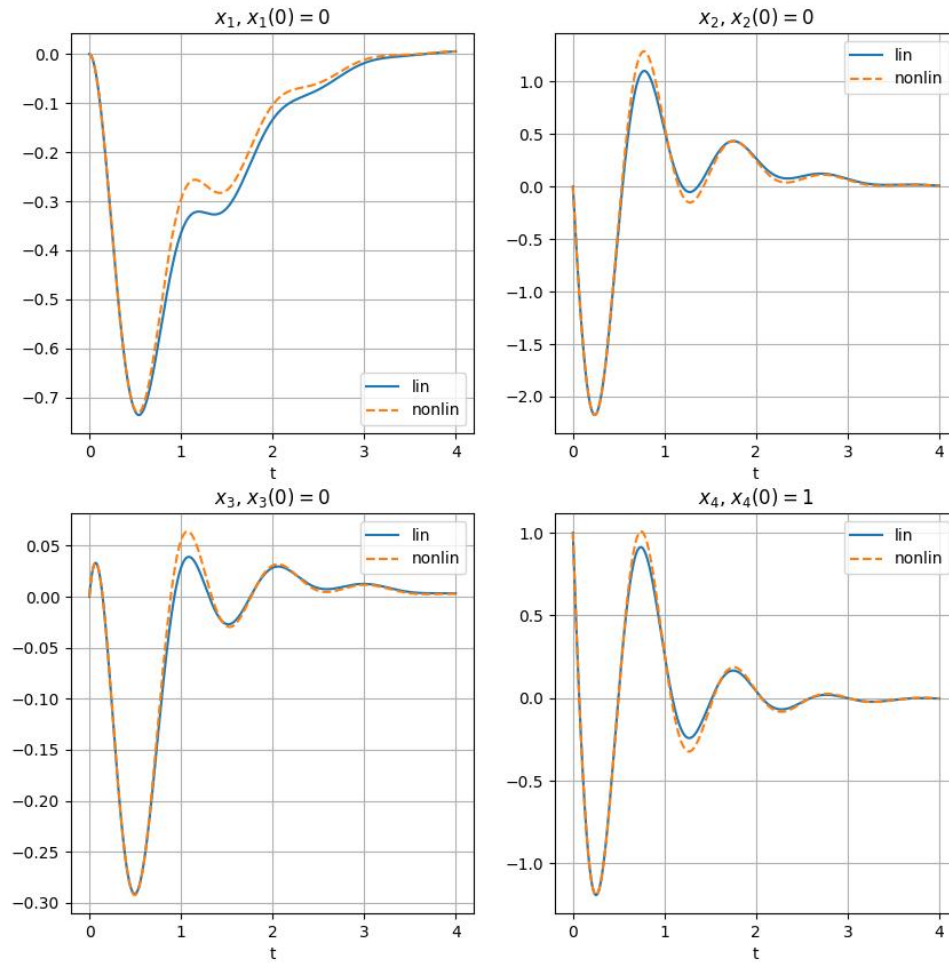


Рис. 22: Динамика системы.

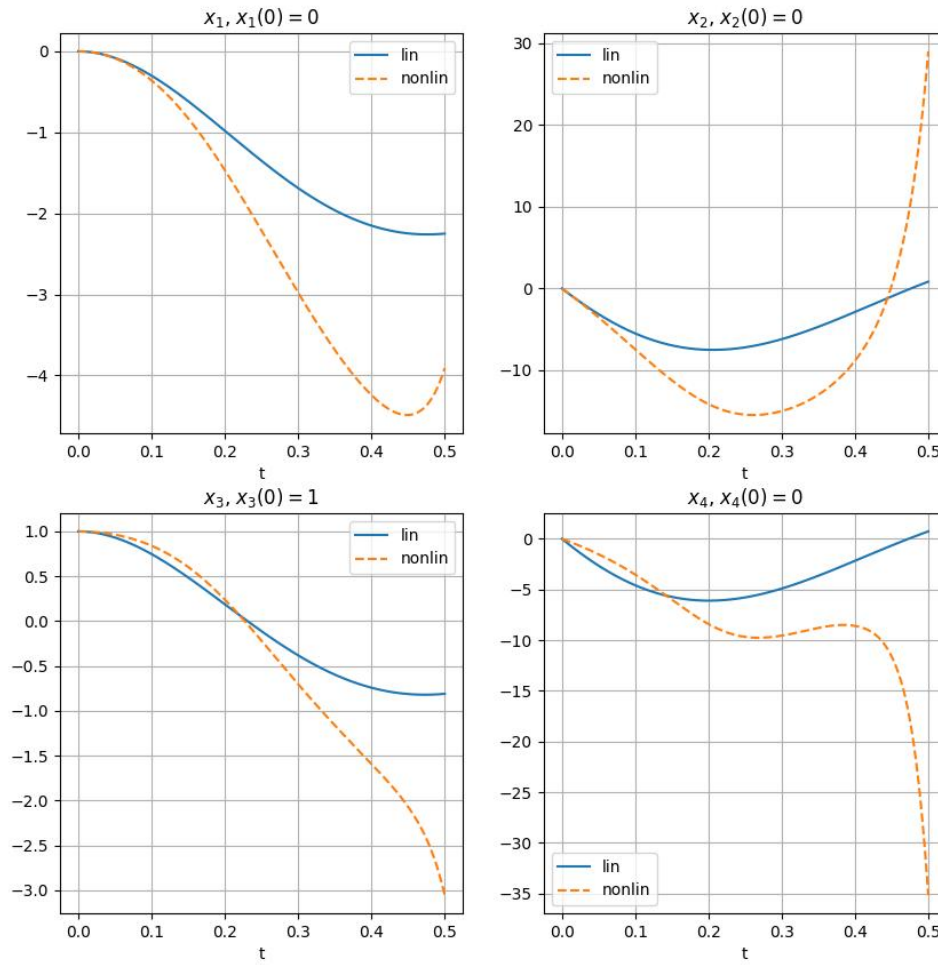


Рис. 23: Динамика системы.

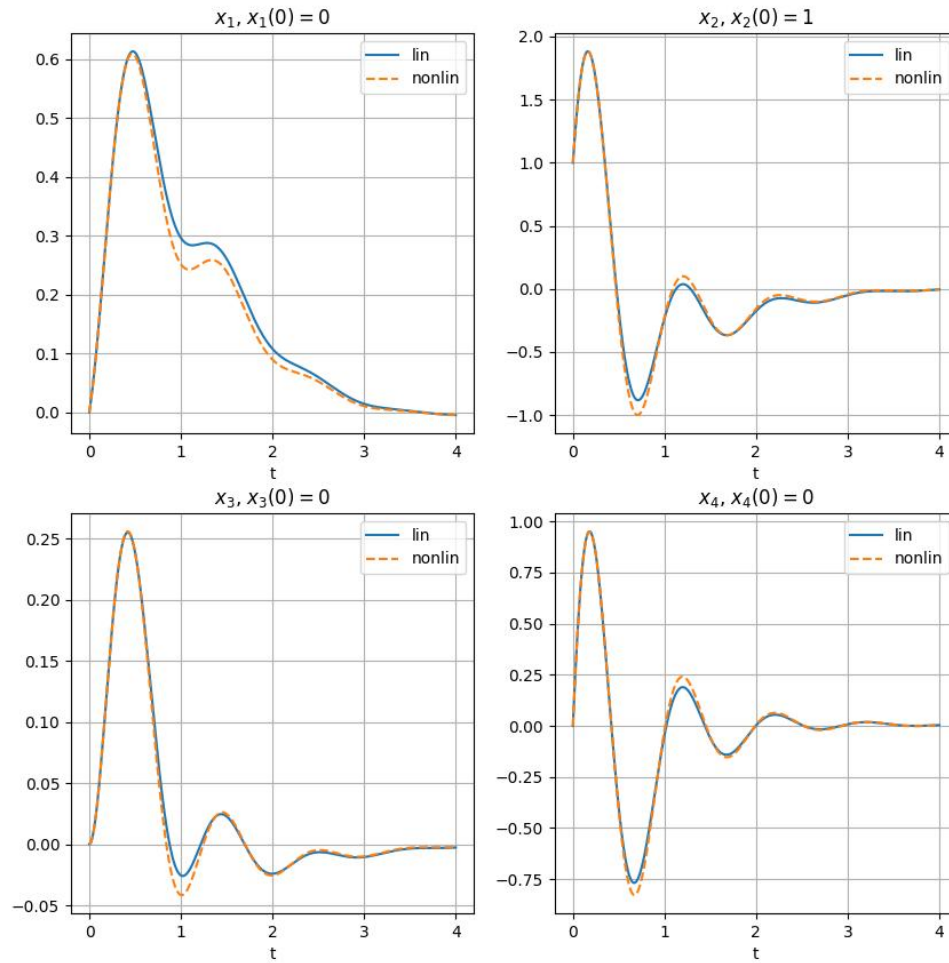


Рис. 24: Динамика системы.

## 4.2 Исследование регулятора по состоянию

Ниже приведена таблица сравнений при  $x(0) = [0, 0, 0.1, 0]^T$  для графиков ниже

$\alpha$	$\max x$	$\max \varphi$	$\max u$
0.1	0.27	0.1	3.7
0.8	0.24	0.1	5.7
1.5	0.21	0.1	11.6

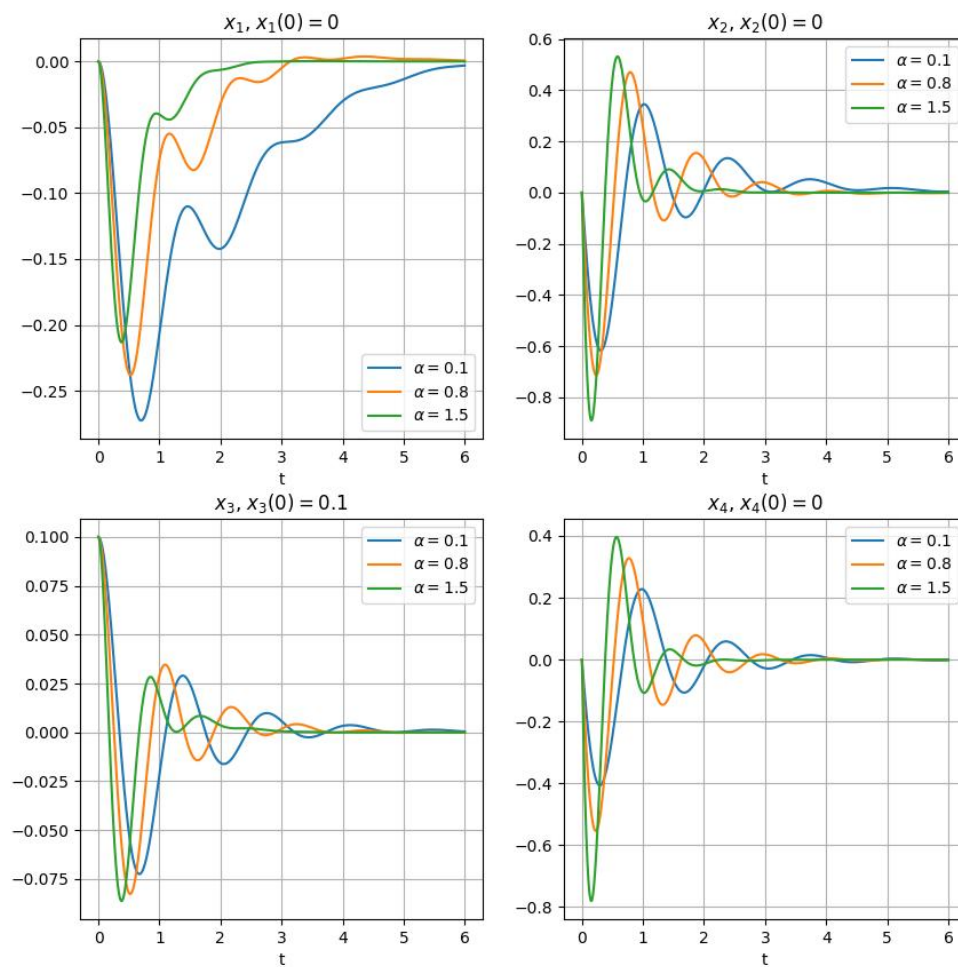


Рис. 25: Динамика системы.

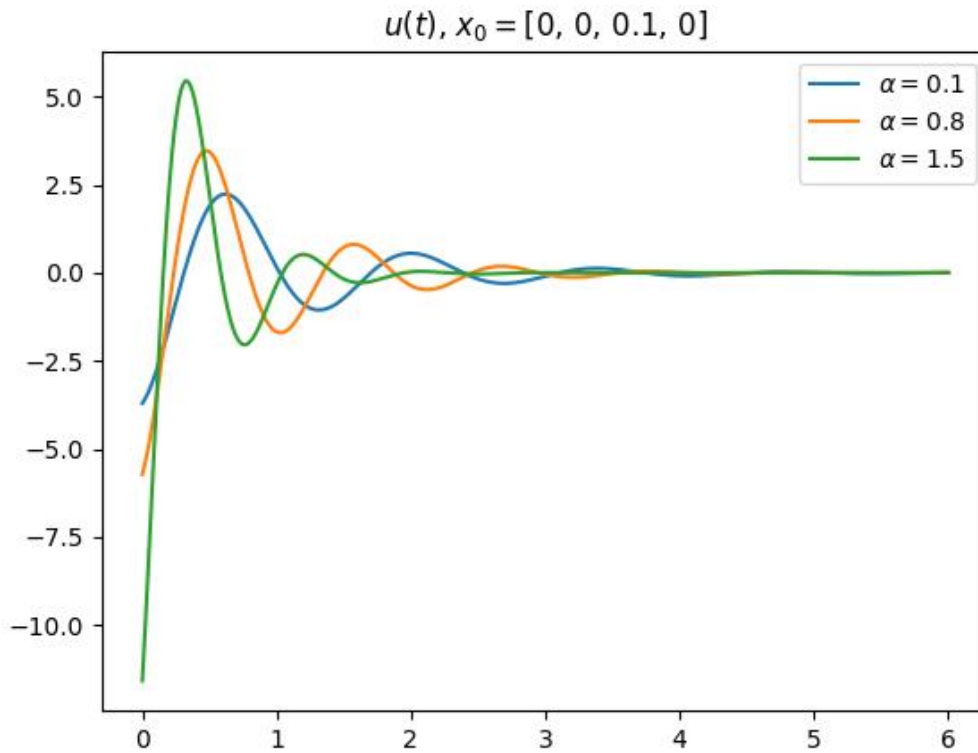


Рис. 26: Динамика воздействия.

#### 4.3 Синтез регулятора по состоянию с ограничением на управление

В этом задании выводится ограничение на управление  $\|u(t)\| \leq \mu$ . Тогда система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} P & x_0 \\ x_0^T & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \\ \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{bmatrix} \succ 0 \\ P \succ 0 \\ PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preccurlyeq 0 \\ K = YP^{-1} \end{cases}$$

$$\alpha = 0.1$$

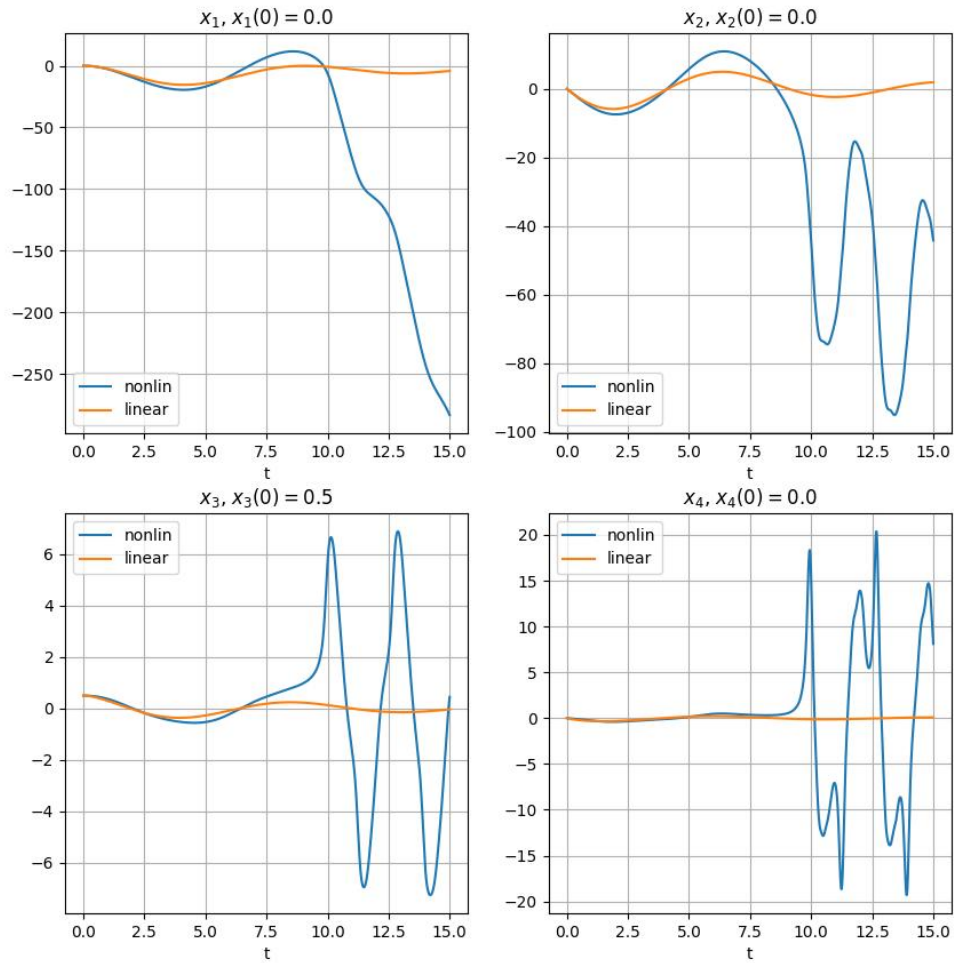


Рис. 27: Динамика системы

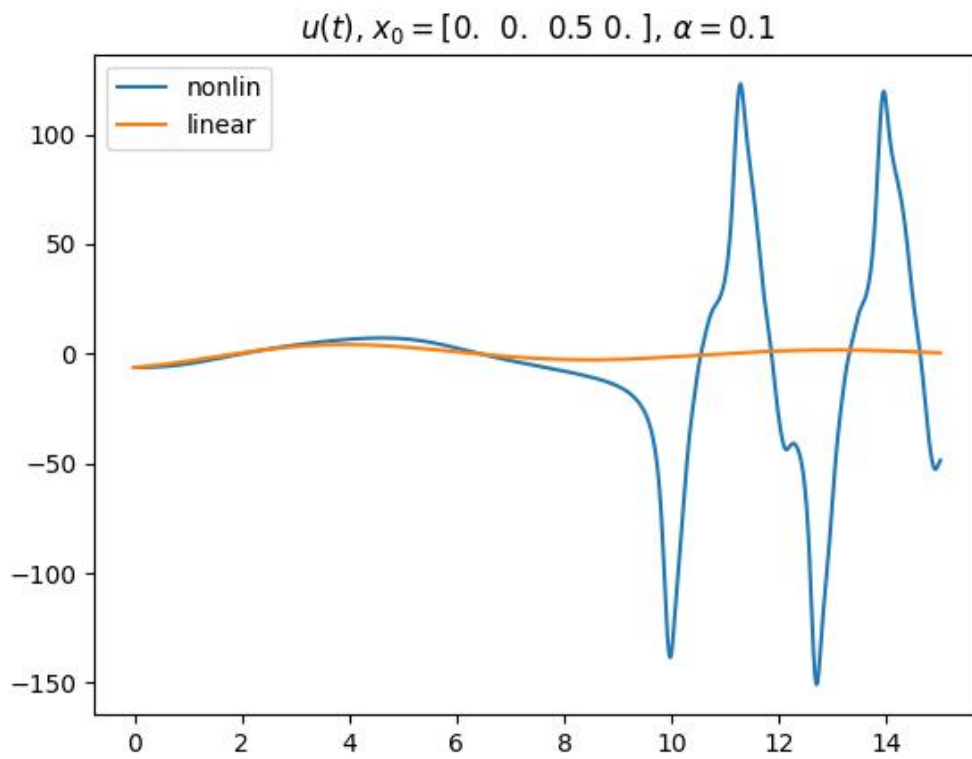


Рис. 28: Динамика воздействия

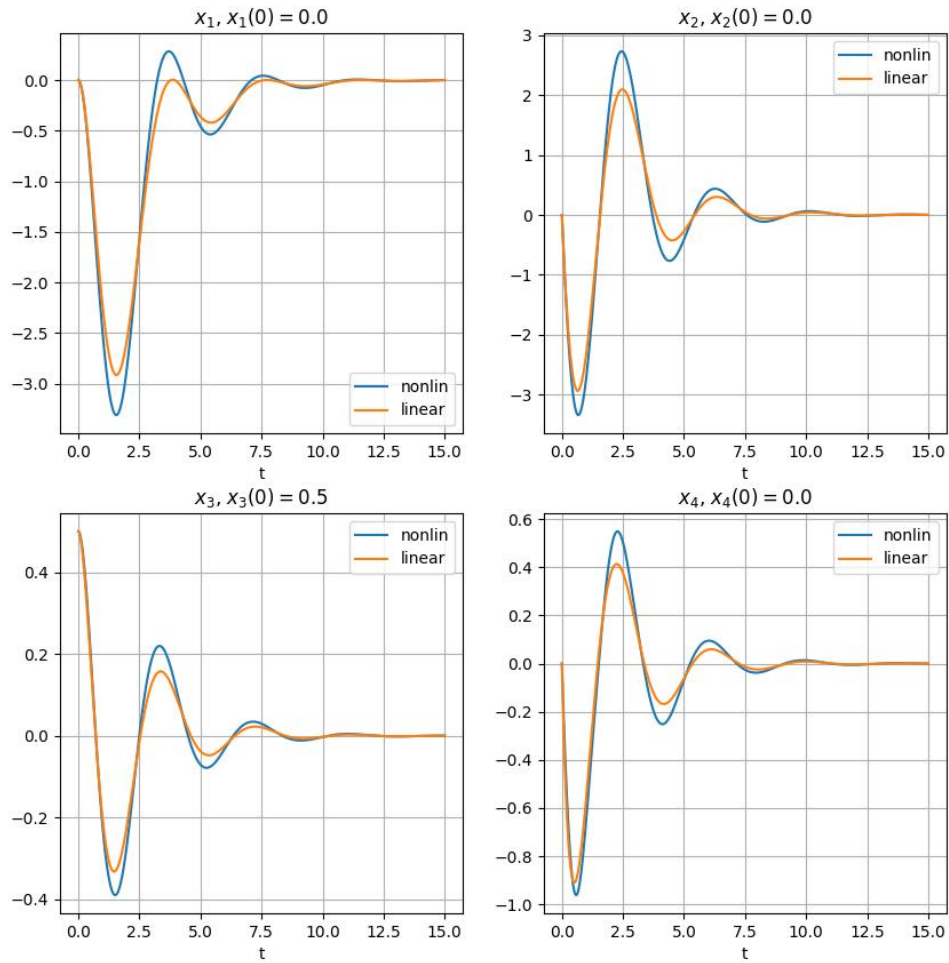
$\alpha = 0.5$ 

Рис. 29: Динамика системы



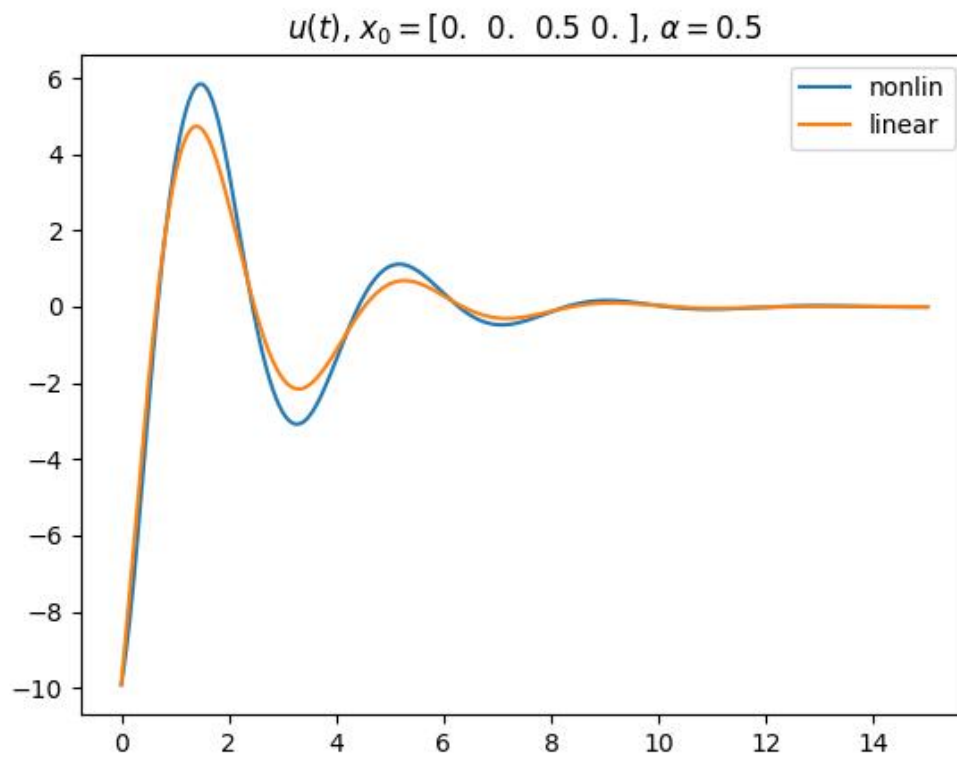


Рис. 30: Динамика воздействия

$$\alpha = 1$$

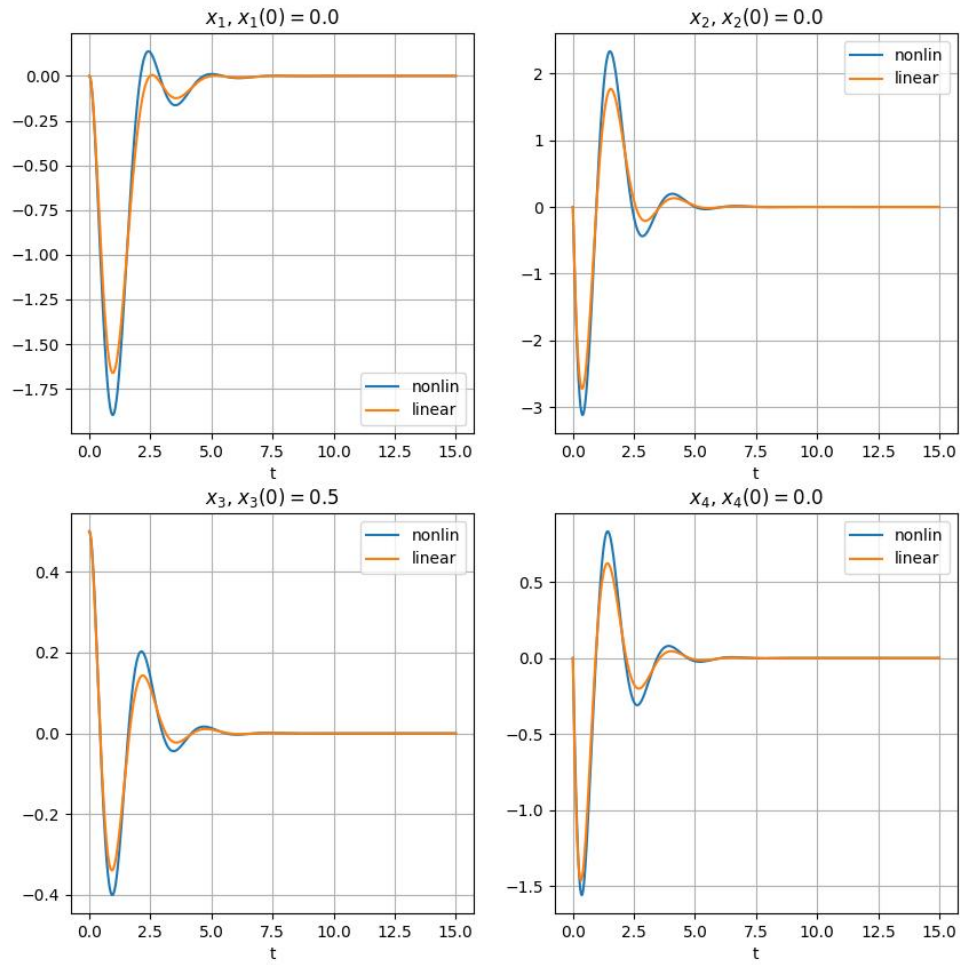


Рис. 31: Динамика системы

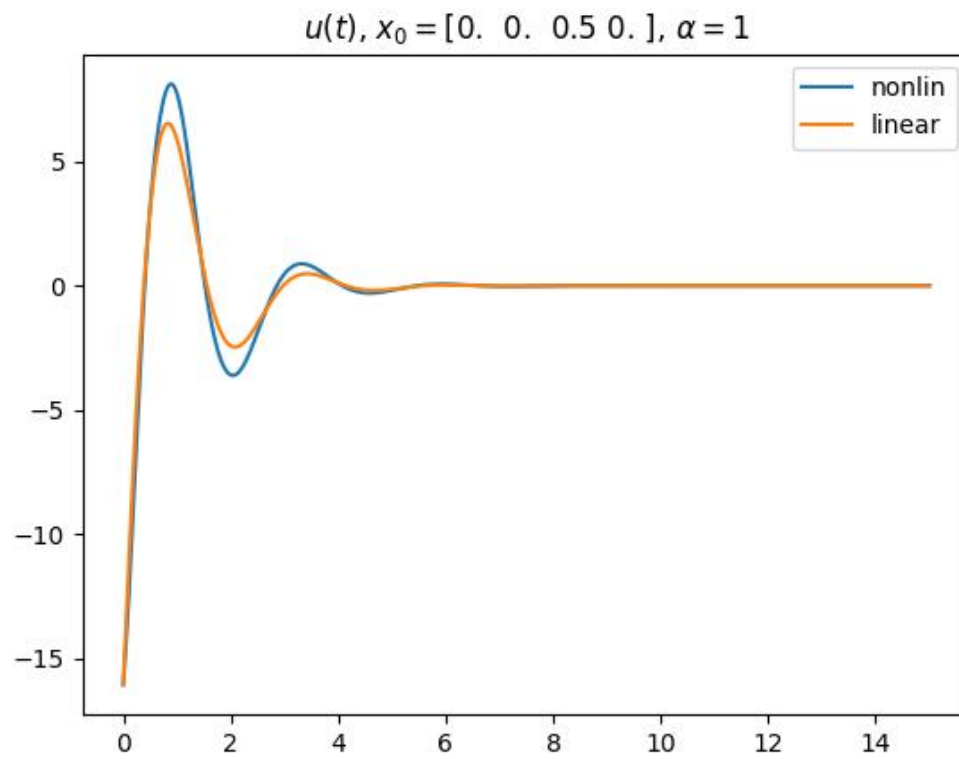


Рис. 32: Динамика воздействия

#### 4.4 Синтез наблюдателя

В этом задании выводится наблюдатель заданной степени устойчивости для системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y) = (A + LC)\hat{x} - Ly \\ \dot{e} = (A + LC)e \end{cases}$$

Для этого достаточно решить систему:

$$\begin{cases} L = Q^{-1}Y \\ Q \succ 0 \\ A^T Q + QA + 2\alpha Q + C^T Y^T + YC \preccurlyeq 0 \end{cases}$$

$$L = \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \begin{bmatrix} -4.48 & -0.63 \\ -8.92 & -2.11 \\ 0.63 & -4.48 \\ 1.11 & -19.92 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\text{spec}(A + LC) = \begin{bmatrix} -2.31 + 2.32j & -2.31 - 2.32j & -2.17 + 1.69j & -2.17 - 1.69j \end{bmatrix}$$

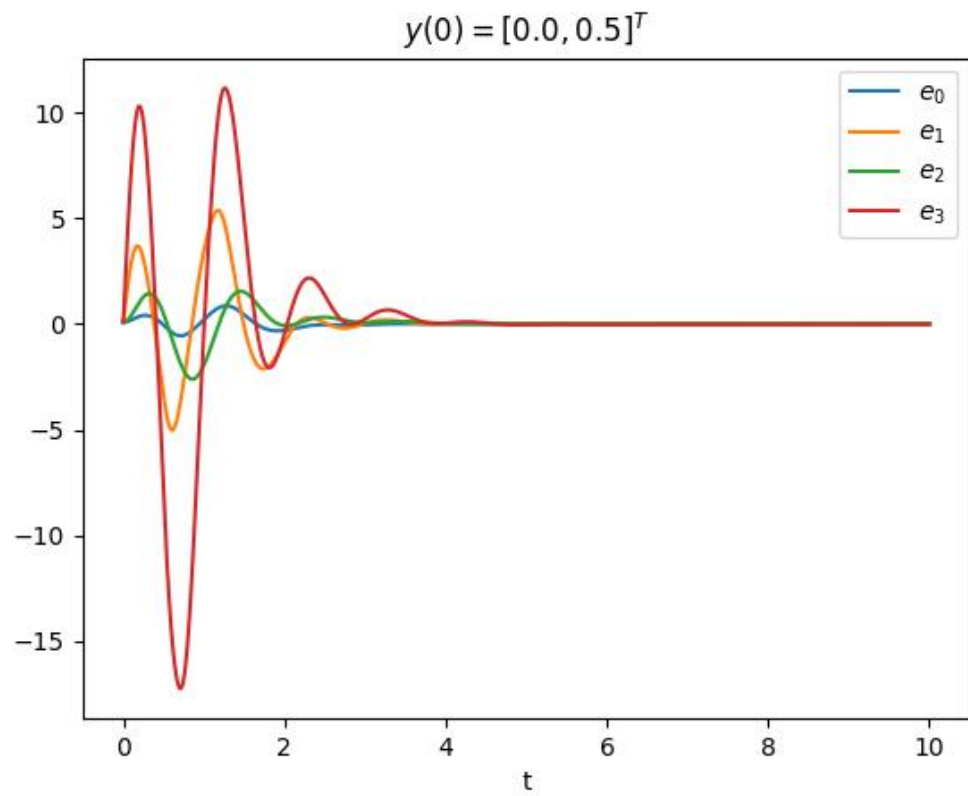


Рис. 33: Динамика ошибки наблюдателя

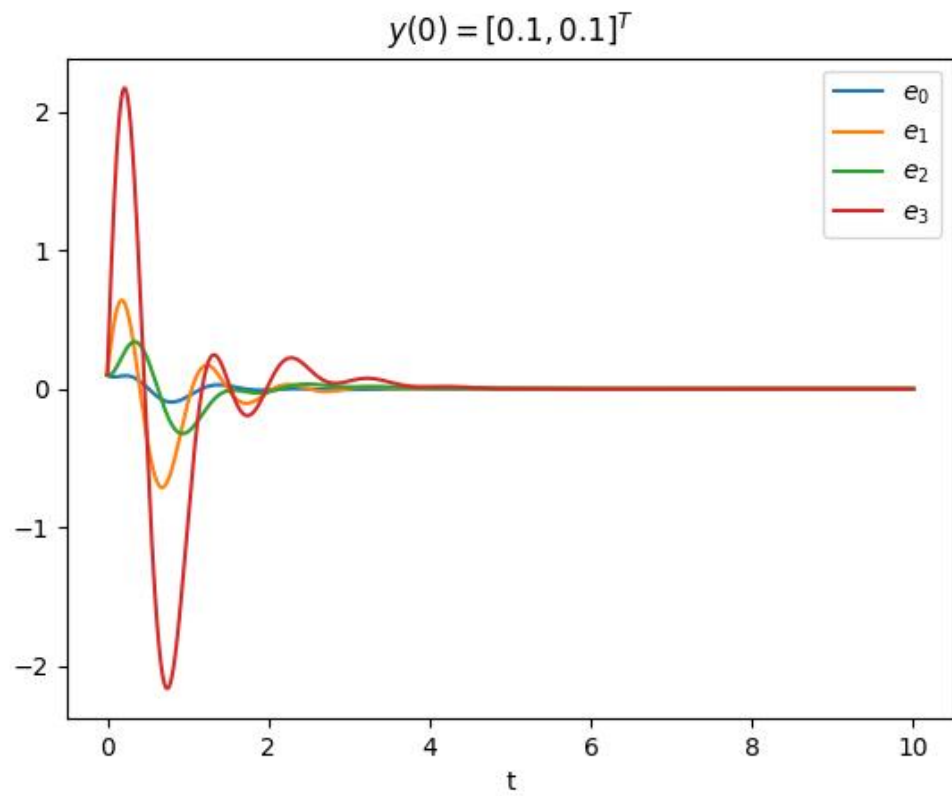


Рис. 34: Динамика ошибки наблюдателя

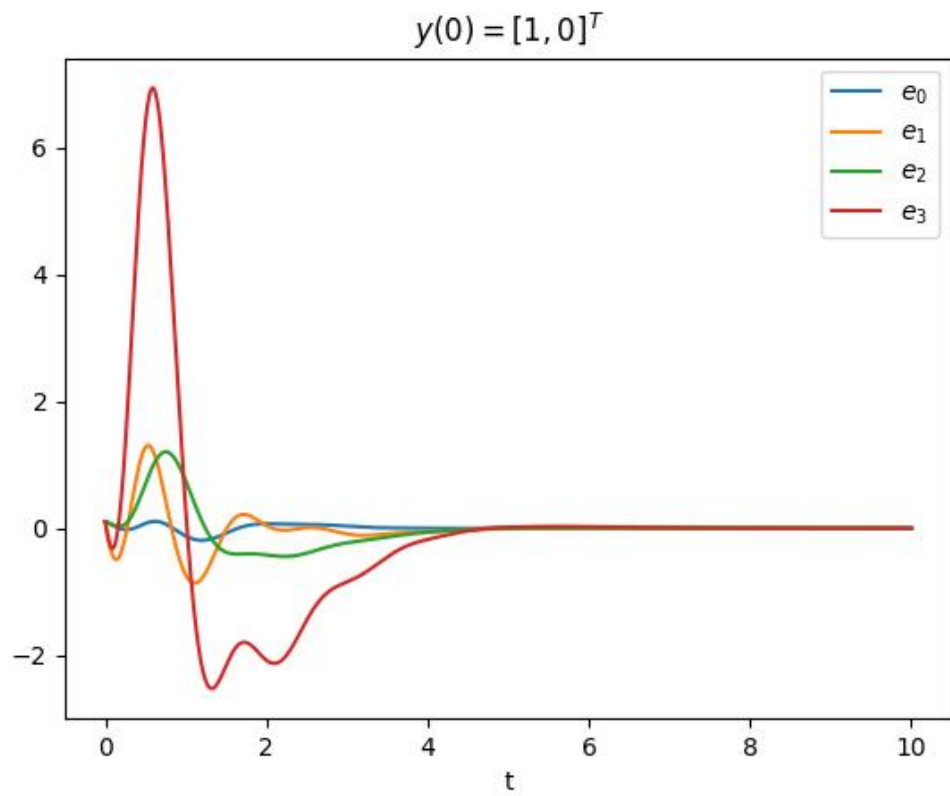


Рис. 35: Динамика ошибки наблюдателя

#### 4.5 Синтез регулятора по выходу

В этом задании выводится наблюдатель регулятор для системы. Так бы это выглядело для линейной системы.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \\ u = K\hat{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \\ \hat{x} = x - e \\ y = Cx \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

На графике видно, что регулятор справился и с нелинейной системой.

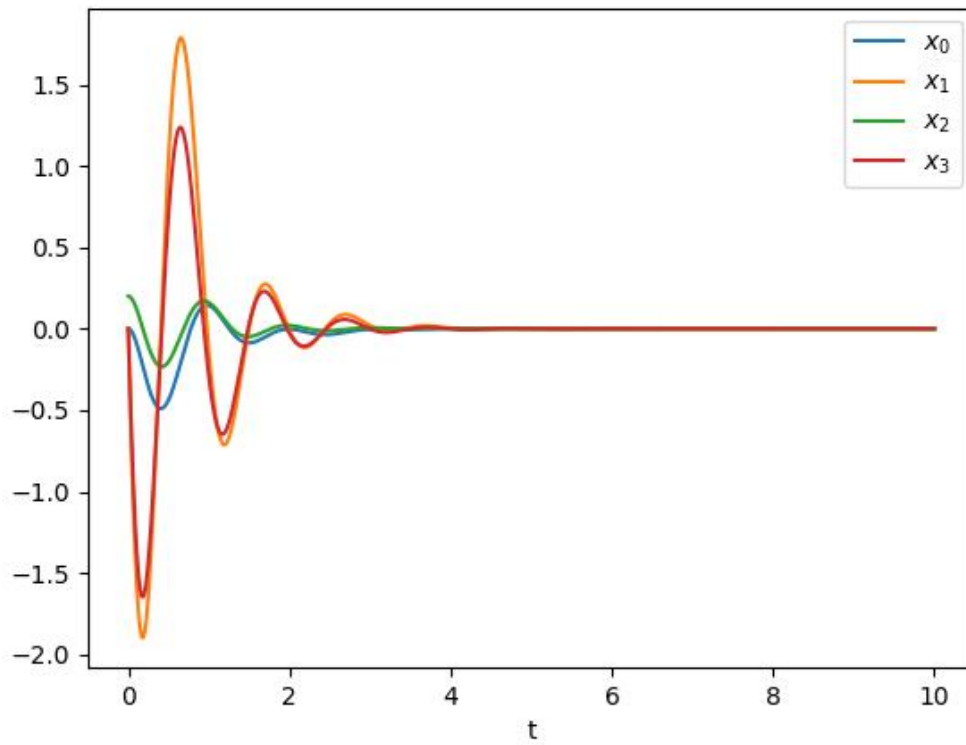


Рис. 36: Динамика системы



## 5 ГЛАВА 5. СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА: LQR И ФИЛЬТР КАЛМАНА

### 5.1 Синтез линейно-квадратичного регулятора

В этом задании выводится регулятор заданной степени устойчивости для системы:

$$\begin{cases} \text{Объект управления: } \dot{x} = Ax + Bu \\ \text{Регулятор: } u = -Kx \end{cases} \rightarrow \dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x$$

LQR позволяет оптимизировать критерий качества:

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$$

Выбор соотношения матриц  $Q$  и  $R$  позволяет управлять временем сходимости и величиной подаваемого управления: чем больше  $\frac{Q}{R}$ , тем больше управление и быстрее сходимость.

$K$  получается решением следующих уравнений:

$$\begin{cases} A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \\ K = -R^{-1}B^T P \end{cases}$$

Теоретический минимум критерия качества:

$$J_{min} = x_0^T P x_0$$

### 5.2 Исследование линейно-квадратичного регулятора

Все работает отлично, при небольшом отклонении от горизонтали в начальный момент.

$$Q = 0.1; R = 10.0; K_0 = \begin{bmatrix} -0.10 & -0.54 & 25.09 & 7.61 \end{bmatrix}$$

$$\text{eig}(A + BK_0) = \begin{bmatrix} -0.22 + 0.21j & -0.22 + -0.21j & -3.37 + 0.00j & -3.27 + 0.00j \end{bmatrix}$$

$$Q = 1.0; R = 1.0; K_1 = \begin{bmatrix} -1.00 & -2.40 & 34.91 & 10.76 \end{bmatrix}$$

$$\text{eig}(A + BK_1) = \begin{bmatrix} -3.86 + 0.00j & -2.87 + 0.00j & -0.81 + 0.50j & -0.81 + -0.50j \end{bmatrix}$$

$$Q = 10.0; R = 0.1; K_2 = \begin{bmatrix} -10.00 & -17.70 & 117.61 & 38.08 \end{bmatrix}$$

$$\text{eig}(A + BK_2) = \begin{bmatrix} -14.54 + 0.00j & -2.42 + 1.00j & -2.42 + -1.00j & -1.01 + 0.00j \end{bmatrix}$$

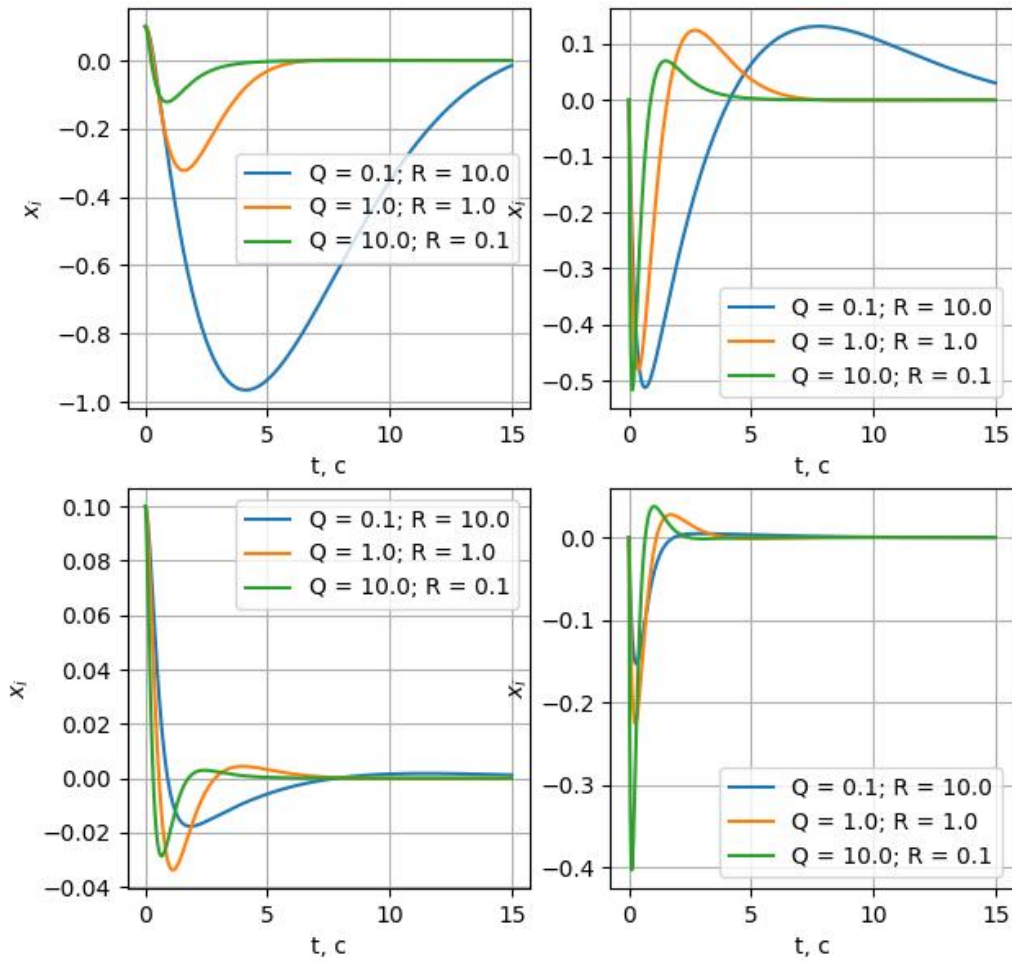


Рис. 37: Динамика компонент системы.

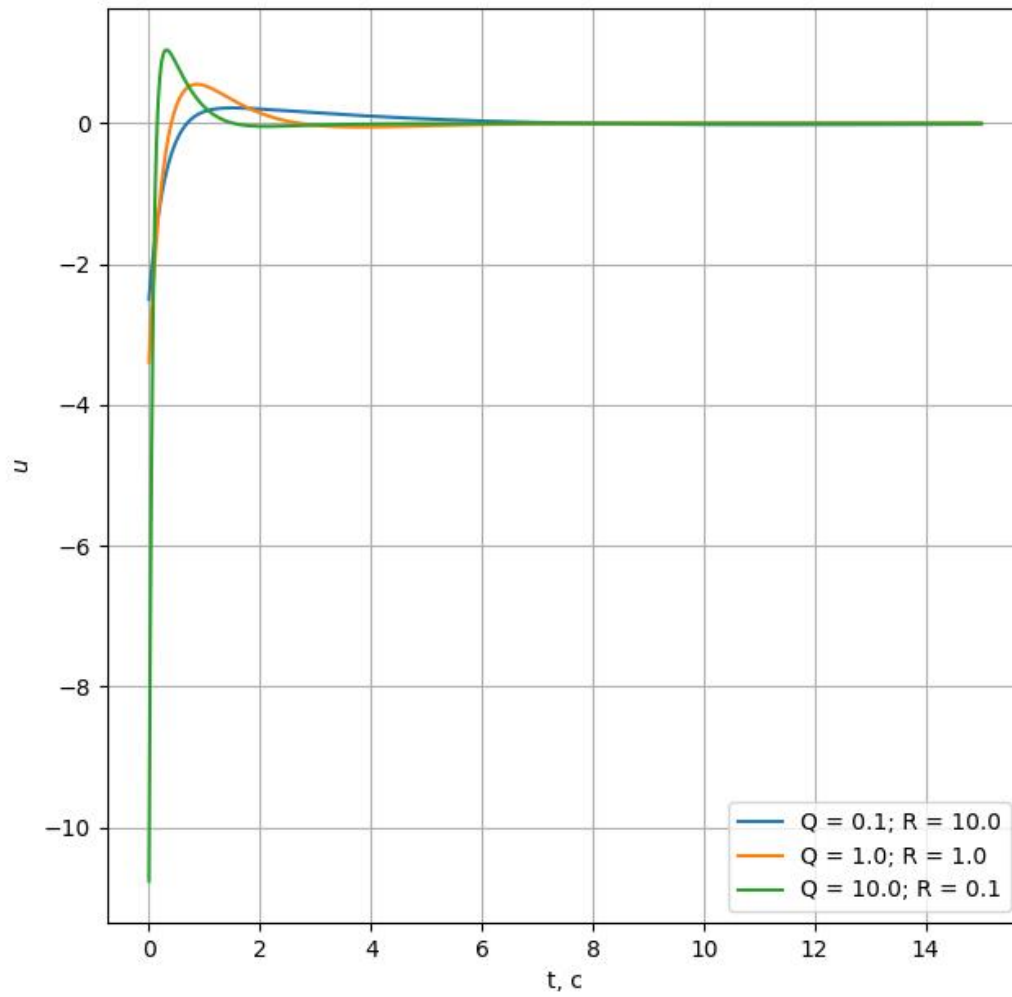


Рис. 38: Управление.

### 5.3 Синтез фильтра Калмана

Объект управления: 
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f, & f - \text{внешнее возмущение} \\ y = Cx + \xi, & \xi - \text{помеха измерений} \end{cases}$$

Матрицы  $Q$  и  $R$  обозначают, насколько сильно мы оцениваем влиянию  $f$  и  $\xi$ .

$L$  получается решением следующих уравнений:

$$\begin{cases} AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP = 0 \\ L = -PC^T R^{-1} \end{cases}$$

Ниже приведена ошибка слежения за системой из прошлог пункта.

$$Q = 0.01; R = 0.01; L = \begin{bmatrix} 1.76 & 0.37 \\ 1.11 & 1.88 \\ 0.37 & 6.69 \\ 1.26 & 21.97 \end{bmatrix}$$

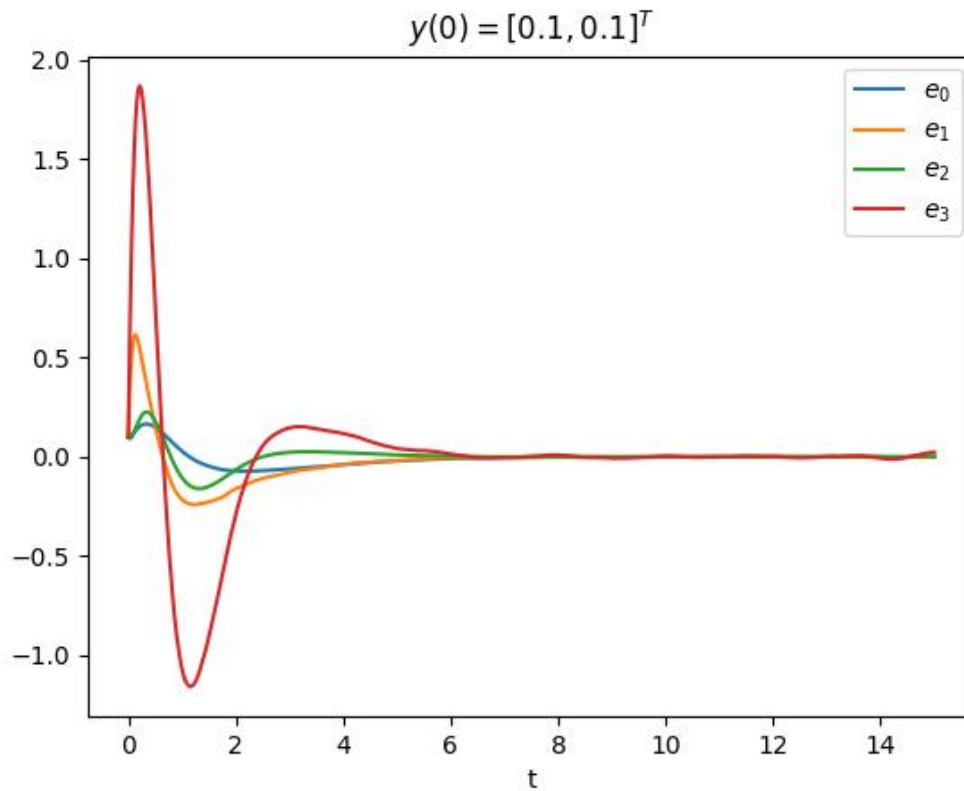


Рис. 39: Ошибка.

## 5.4 LQG для линейной модели

В этом задании выводится наблюдатель регулятор для системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\hat{x} + f \\ y = Cx + DK\hat{x} + \xi \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BK\hat{x} + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} + DK\hat{x} \\ \hat{x} = x - e \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = A_{new} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + B_{new} \begin{bmatrix} f \\ \xi \end{bmatrix} \\ A_{new} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \\ B_{new} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & L \end{bmatrix} \in R^{2n \times (n+m)} \end{cases}$$

$$Q = 0.01; R = 0.01; L = \begin{bmatrix} -1.76 & -0.37 \\ -1.11 & -1.88 \\ -0.37 & -6.69 \\ -1.26 & -21.97 \end{bmatrix}$$

$$\text{spec}(A + LC) = \begin{bmatrix} -0.87 + 0.50j & -0.87 + -0.50j & -2.88 + 0.00j & -3.84 + 0.00j \end{bmatrix}$$

$$Q = 1; R = 1; K = \begin{bmatrix} 1.00 & 2.40 & -34.91 & -10.76 \end{bmatrix}$$

$$\text{spec}(A + BK) = \begin{bmatrix} -3.86 + 0.00j & -2.87 + 0.00j & -0.81 + 0.50j & -0.81 + -0.50j \end{bmatrix}$$

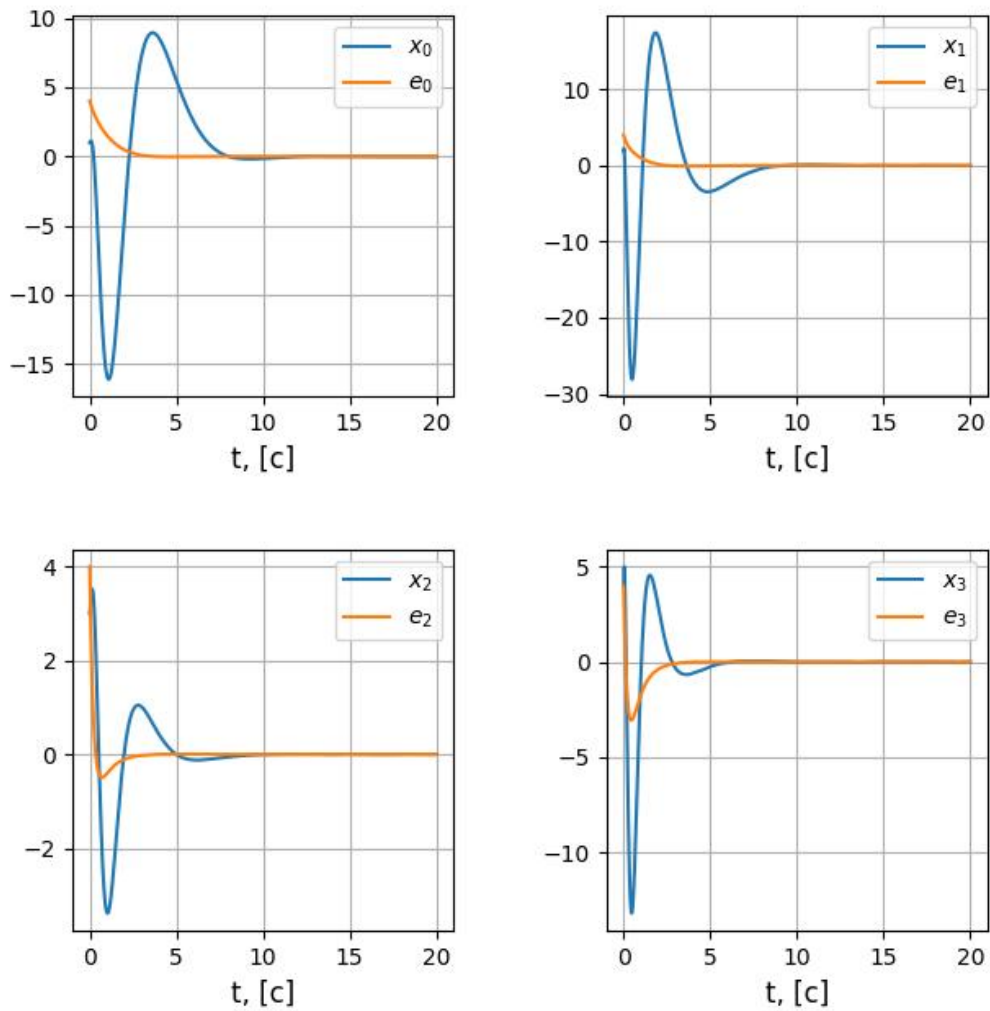


Рис. 40: Динамика системы и ошибки.

### 5.5 LQG для нелинейной модели

$$Q = 0.01; R = 0.01; L = \begin{bmatrix} 1.76 & 0.37 \\ 1.11 & 1.88 \\ 0.37 & 6.69 \\ 1.26 & 21.97 \end{bmatrix}$$

$$Q = 0.01; R = 0.01; L = \begin{bmatrix} -1.76 & -0.37 \\ -1.11 & -1.88 \\ -0.37 & -6.69 \\ -1.26 & -21.97 \end{bmatrix}$$

$$\text{spec}(A + LC) = \begin{bmatrix} -0.87 + 0.50j & -0.87 + -0.50j & -2.88 + 0.00j & -3.84 + 0.00j \end{bmatrix}$$

$$Q = 1; R = 1; K = \begin{bmatrix} 1.00 & 2.40 & -34.91 & -10.76 \end{bmatrix}$$

$$\text{spec}(A + BK) = \begin{bmatrix} -3.86 + 0.00j & -2.87 + 0.00j & -0.81 + 0.50j & -0.81 + -0.50j \end{bmatrix}$$

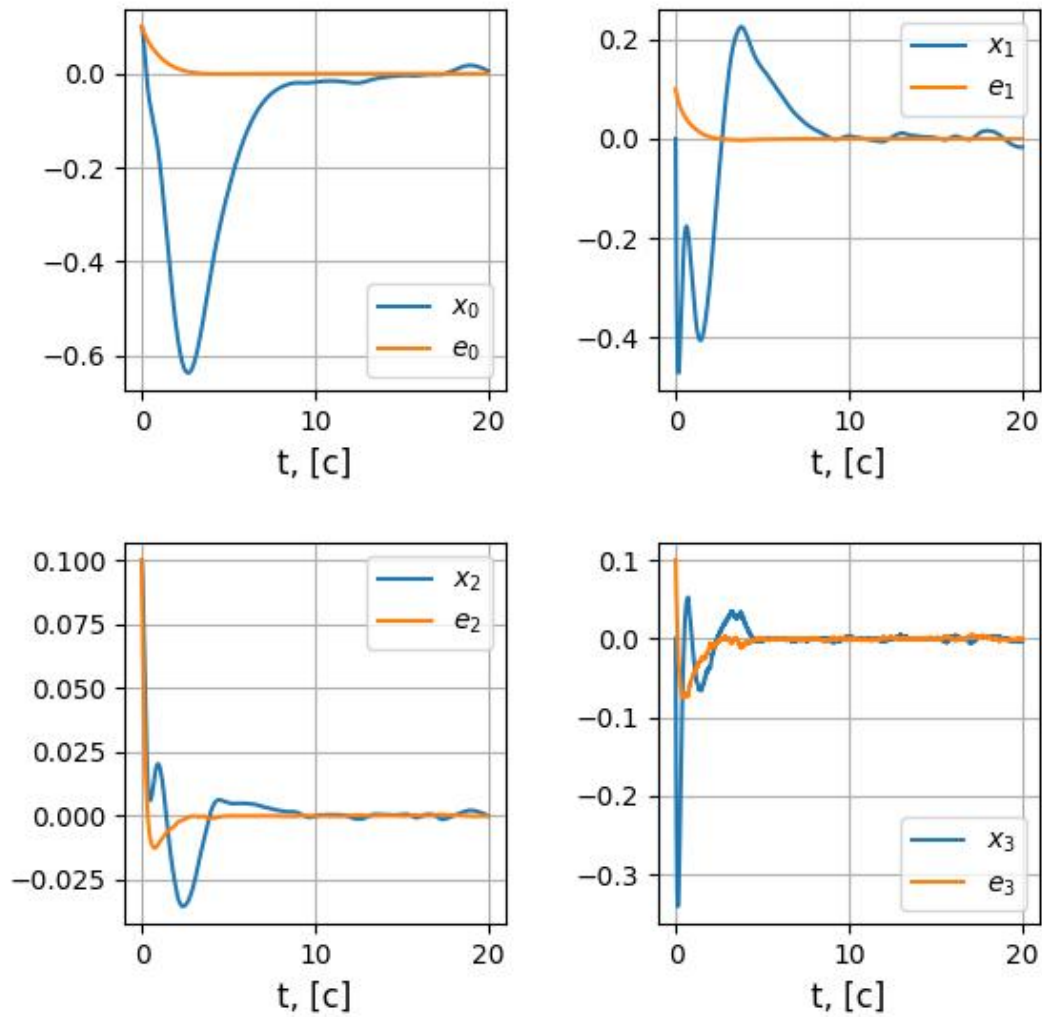


Рис. 41: Динамика системы и ошибки.

## 6 ГЛАВА 6. СЛЕЖЕНИЕ И КОМПЕНСАЦИЯ

### 6.1 Решение задачи компенсации

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w \\ z = C_2 x + D_2 w \end{cases},$$

где  $w$ :

$$\dot{w} = A_2 w$$



Для данной системы можем синтезировать регулятор вида  $u = K_1x + K_2w$ , гарантирующий:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

$K_1$  можем выбрать как матрицу регулятора, синтезированного любым способом. Матрицу  $K_2$  найдем следующим образом:

$$\begin{cases} PA_2 - A_1P = B_1Y + B_2 \\ C_2P + D_2 = 0 \\ K_2 = Y - K_1P \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1x + B_1(K_1x + K_2w) + B_2w = (A_1 + B_1K_1)x + (B_2 + B_1K_2)w \\ z = C_2x + D_2w \end{cases},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 0.00 & 0.00 & 11.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.10 & 0.00 & 0.00 \\ -0.10 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 1.00 \\ 0.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.33 & 0.67 & 1.00 & 1.33 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 3.67 & 7.33 & 11.00 & 14.67 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.32 & 1.08 & -28.01 & -8.54 \end{bmatrix}$$

$$\text{spec}(A + B_1 K_1) = \begin{bmatrix} -3.47 & -3.17 & -0.41 + 0.35j & -0.41 - 0.35j \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -36.79 & -254.29 & 0.29 & -29.73 \end{bmatrix}$$

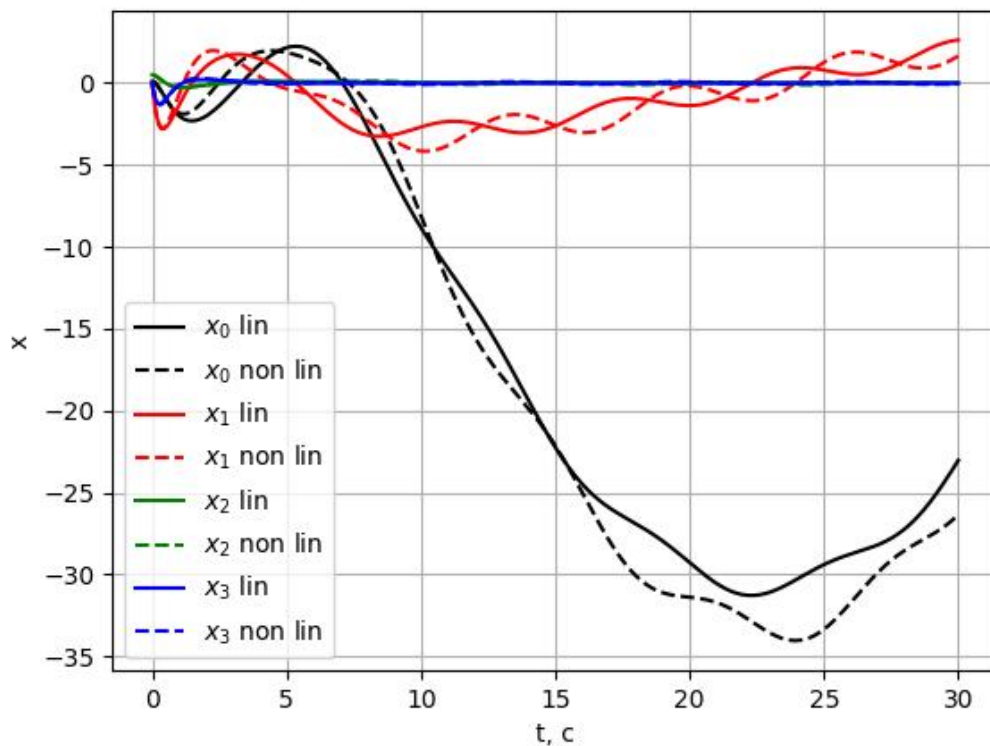


Рис. 42: Динамика системы.

Как видно, для нелинейной системы регулятор не справляется с задачей. Ошибка угла колеблется около 0. Тем не менее, полученный результат можно использовать для хоть какой-то компенсации, так как поведение такой системы почти соответствует желаемому.

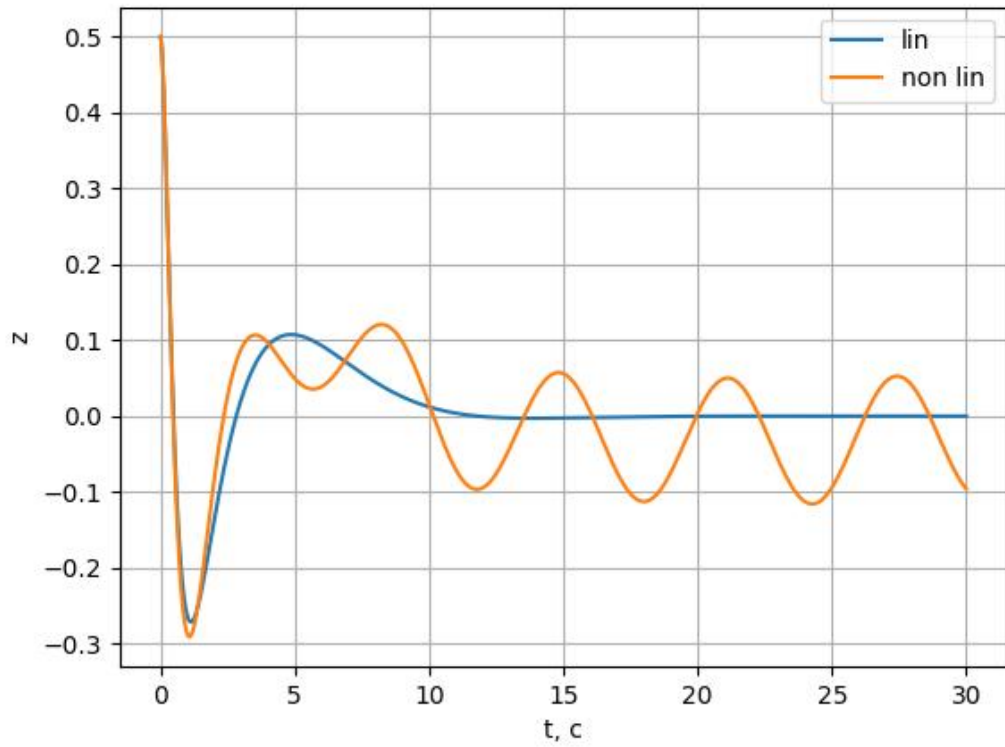


Рис. 43: Регулируемый выход системы.

## 6.2 Решение задачи слежения

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1x + B_1u + B_2w \\ z = C_2x + D_2w \end{cases},$$

где  $w$ :

$$\dot{w} = A_2w$$

Для данной системы можем синтезировать регулятор вида  $u = K_1x + K_2w$ , гарантирующий:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

$K_1$  можем выбрать как матрицу регулятора, синтезированного любым способом. Матрицу  $K_2$  найдем следующим образом:

$$\begin{cases} PA_2 - A_1P = B_1Y + B_2 \\ C_2P + D_2 = 0 \\ K_2 = Y - K_1P \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1x + B_1(K_1x + K_2w) + B_2w = (A_1 + B_1K_1)x + (B_2 + B_1K_2)w \\ z = C_2x + D_2w \end{cases},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 0.00 & 0.00 & 11.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.10 & 0.00 & 0.00 \\ -0.10 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 1.00 \\ 0.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.10 & 0.10 & 0.10 \end{bmatrix}$$

Как видно, задача слежения выполнена. Нелинейная система имела чуть большую ошибку вначале, но в итоге тоже свела ее к 0.

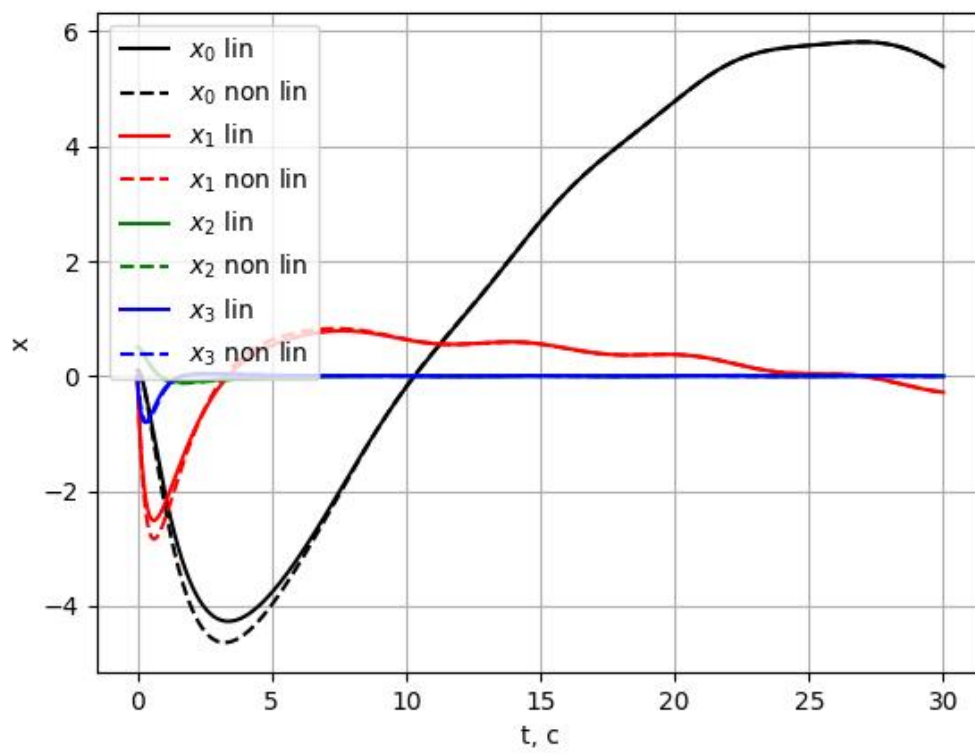


Рис. 44: Динамика системы.

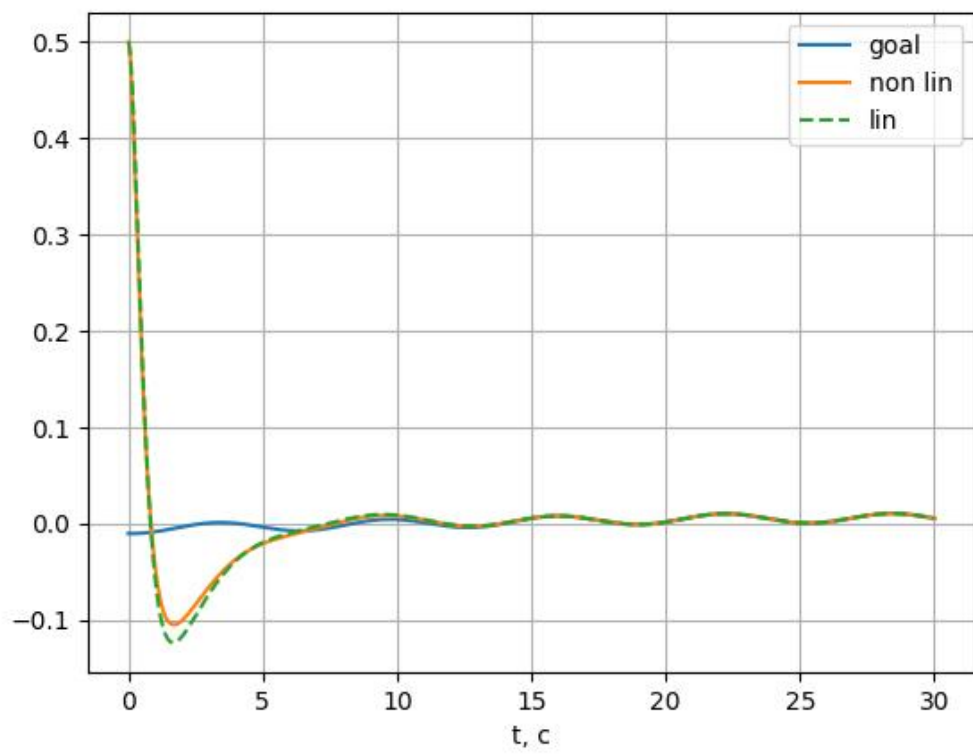


Рис. 45: Регулируемый выход системы.

## 7 Заключение

В этой работе прошло применение всего, что было изученно за полугодие, на нелинейной системе.

### 7.1 Выводы

1. LQR показал себя стабильнее всех
2. методы управления линейными системами можно применять для нелинейных, если они близки к точке равновесия в пространстве состояний, иначе линеаризация ломается и система становится неустойчивой.