

---

ЛР №9 «Регуляторы с заданной степенью устойчивости»

---

Отчет

Студент

Кирилл Лалаянц

R33352

336700

Вариант - 11

Преподаватель

Пашенко А.В.

Факультет Систем Управления и Робототехники

ИТМО

15.02.2024

## Содержание

1	Вводные данные	1
1.1	Цель работы . . . . .	1
1.1.1	Программная реализация . . . . .	1
2	Основная часть	2
2.1	Задание 1 . . . . .	2
2.1.1	Теория . . . . .	2
2.1.2	Результаты . . . . .	3
2.2	Задание 2 . . . . .	6
2.2.1	Теория . . . . .	6
2.2.2	Результаты . . . . .	6
2.3	Задание 3 . . . . .	10
2.3.1	Теория . . . . .	10
2.3.2	Результаты . . . . .	10
2.4	Задание 4 . . . . .	13
2.4.1	Теория . . . . .	13
2.4.2	Результаты . . . . .	13
3	Заключение	14
3.1	Выводы . . . . .	14

## 1 Вводные данные

### 1.1 Цель работы

В этой работе пройдет изучение регуляторов с заданной степенью устойчивости.

#### 1.1.1 Программная реализация

С исходным кодом можно ознакомиться [в репозитории на Github](#).

## 2 Основная часть

### 2.1 Задание 1

#### 2.1.1 Теория

В этом задании выводится регулятор заданной степени устойчивости для системы:

$$\begin{cases} \text{Объект управления: } \dot{x} = Ax + Bu \\ \text{Регулятор: } u = Kx \end{cases} \rightarrow \dot{x} = Ax + BKx = (A + BK)x$$

По сути, целью данного регулятора является изменение управляемых собственных чисел так, чтобы  $\forall \lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda \leq \alpha$ , где  $\alpha$  – степень устойчивости. Для этого используется LMI критерий экспоненциальной устойчивости:

$$\exists Q \succ 0, \alpha > 0 : A^T Q + QA + 2\alpha Q \preccurlyeq 0 \rightarrow \begin{cases} \forall x(0) \text{ А асимптотически устойчива} \\ \exists c : \|x(t)\| \leq ce^{-\alpha t} \|x(0)\| \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q \succ 0 \\ A^T Q + QA + 2\alpha Q \preccurlyeq 0 \end{cases} \xleftrightarrow{Q=P^{-1}} \begin{cases} P \succ 0 \\ PA^T + AP + 2\alpha P \preccurlyeq 0 \end{cases}$$

Подставим вместо матрицы  $A$  нашу систему:

$$P(A + BK)^T + (A + BK)P + 2\alpha P \preccurlyeq 0$$

$$PA^T + PK^T B^T + AP + BKP + 2\alpha P \preccurlyeq 0$$

$$\begin{cases} Y = KP \\ PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preccurlyeq 0 \end{cases}$$

Тогда для подбора матрицы  $K$ , чтобы задать система степень устойчивости  $\alpha$ , достаточно решить через библиотеку CVX следующую систему с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} K = Y P^{-1} \\ P \succ 0 \\ PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preccurlyeq 0 \end{cases}$$

На практике, довольно часто  $P$  – необратима. Приходится использовать псевдо-обратную.

### 2.1.2 Результаты

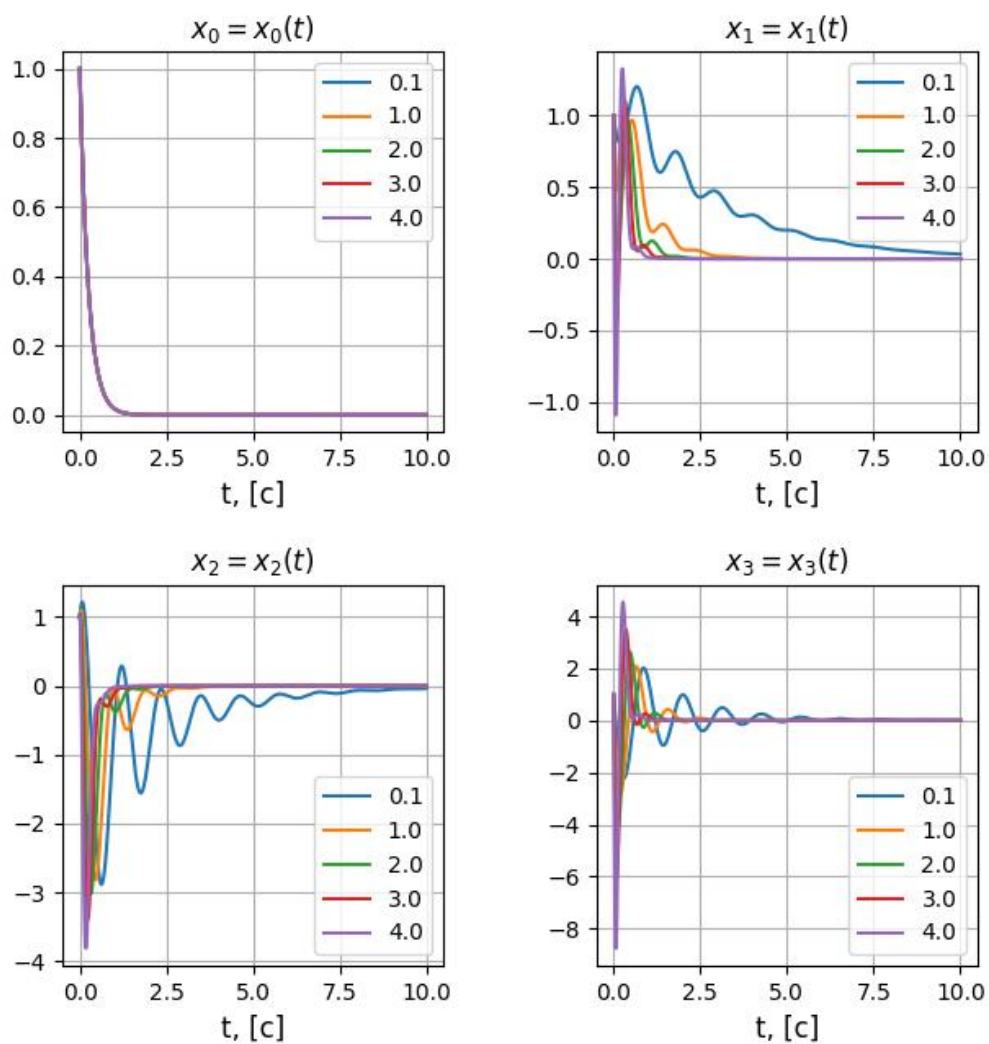
Дана система:

$$A = \begin{bmatrix} -4.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 5.00 \\ 0.00 & 0.00 & -5.00 & 1.00 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 2.00 \\ 0.00 \\ 9.00 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

У матрицы  $A$  одно неуправляемое собственное число  $-4$ . Это наталкивает на мысль, что степень устойчивости больше 4 получить не получится, так как это собственное число подвинуть не получится. На деле так и есть, CVX решает систему для  $\forall \alpha < 4$ .

При рассмотрении собственных чисел получившихся систем видно, что передвигает собственные числа так, чтобы минимальное расстояние по вещественной оси от собственных чисел до 0 было с небольшим запасом больше степени устойчивости. На рисунках 1 - 2 приведены полученные графики.

Как можно заметить, действительно чем больше  $\alpha$ , тем жестче управление и быстрее сходимость. Так же видно, что состояние 1 не меняется, так как собственное число неуправляемое.

Рис. 1: Результаты моделирования состояний для разных значений  $\alpha$ .

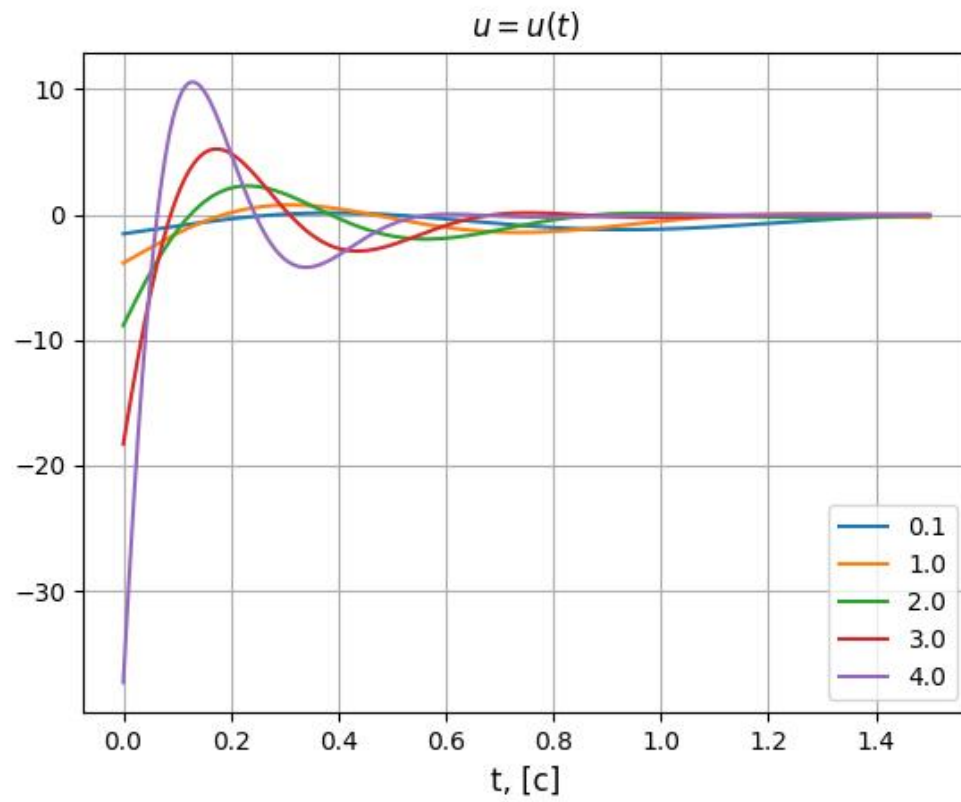


Рис. 2: Результаты моделирования управления для разных значений  $\alpha$ .

## 2.2 Задание 2

### 2.2.1 Теория

В этом задании выводится ограничение на управление  $\|u(t)\| \leq \mu$ . Тогда система уравнений принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} P & x_0 \\ x_0^T & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \\ \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{bmatrix} \succ 0 \\ P \succ 0 \\ PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preccurlyeq 0 \\ K = Y P^{-1} \end{array} \right.$$

### 2.2.2 Результаты

Сначала проведено исследование влияния ограничения для  $\alpha = 1$ . На рисунках 3 – 4.

При минимальном  $\mu$  система имеет собственные числа  $\begin{bmatrix} -1.00 + 5.50j & -1.00 + -5.50j & -1.00 + 0.00j & -4.00 + 0.00j \end{bmatrix}$ , максимально прижавшись к необходимой степени устойчивости всеми управляемыми числами. По мере ослабления ограничения, числа начинают отдаляться от границы.

Для всех остальных степеней устойчивости результат аналогичен. Все управляемые собственные числа принимают значение степени устойчивости.



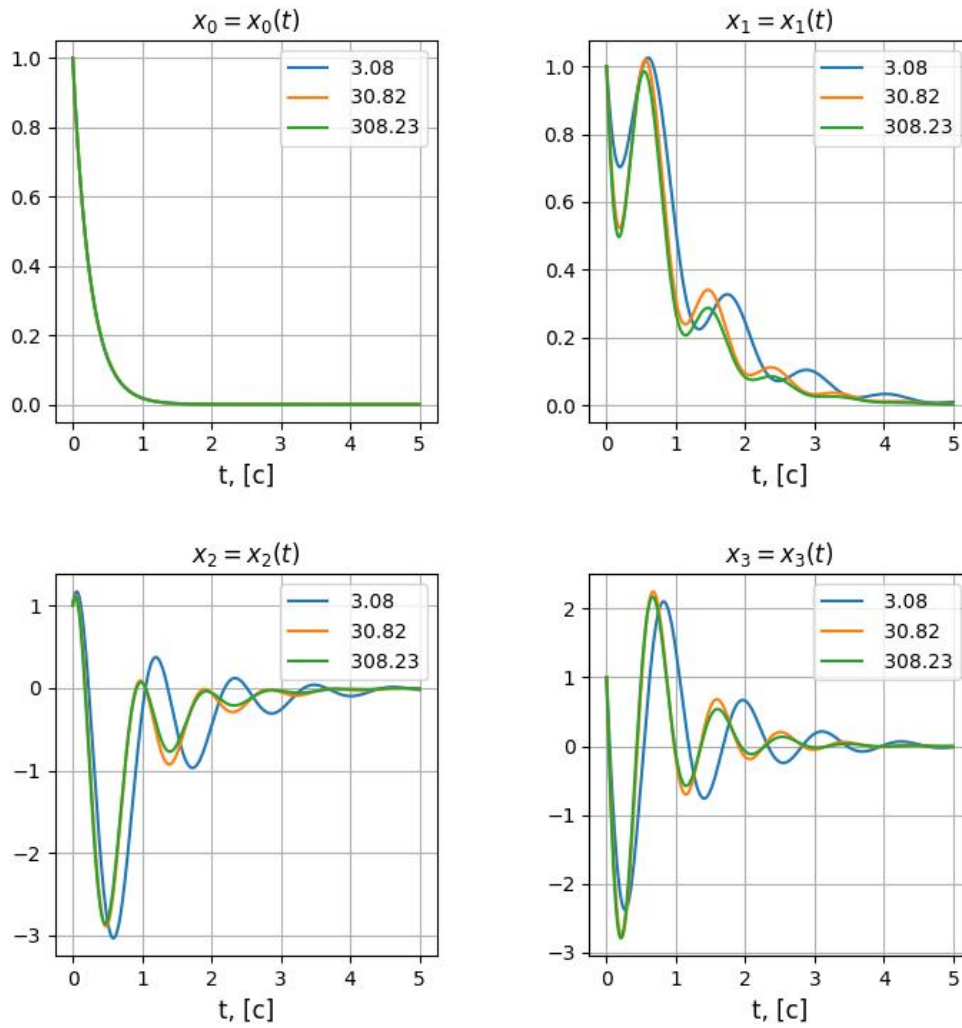


Рис. 3: Результаты моделирования состояний системы для  $\alpha = 1$  при различных ограничениях.

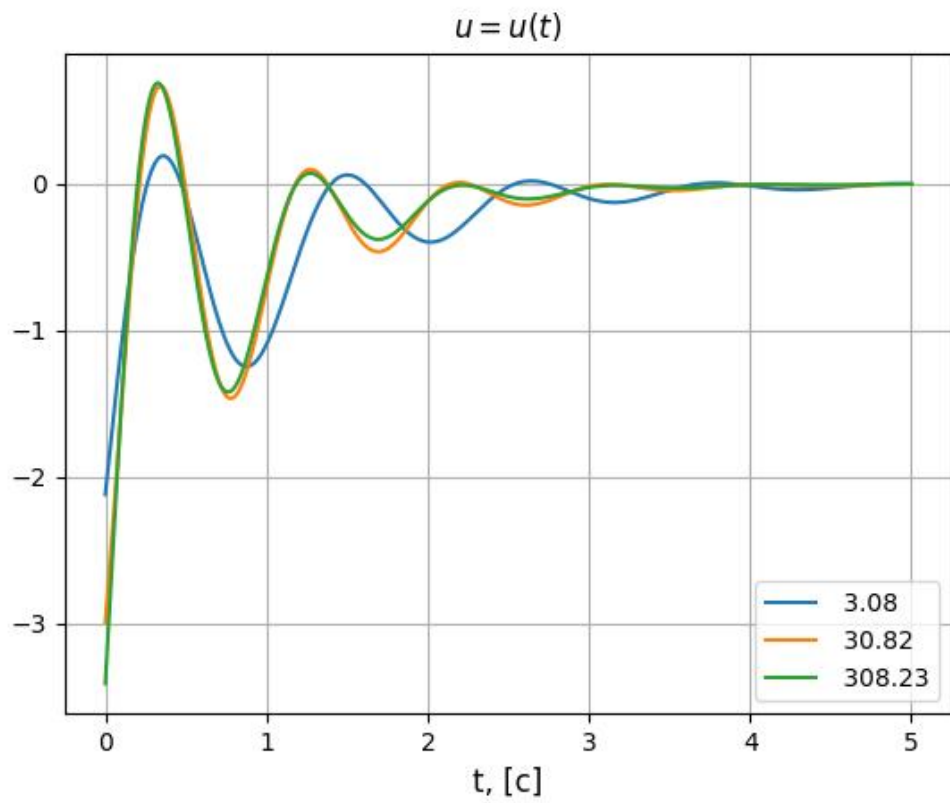


Рис. 4: Результаты моделирования управления системой для  $\alpha = 1$  при различных ограничениях.

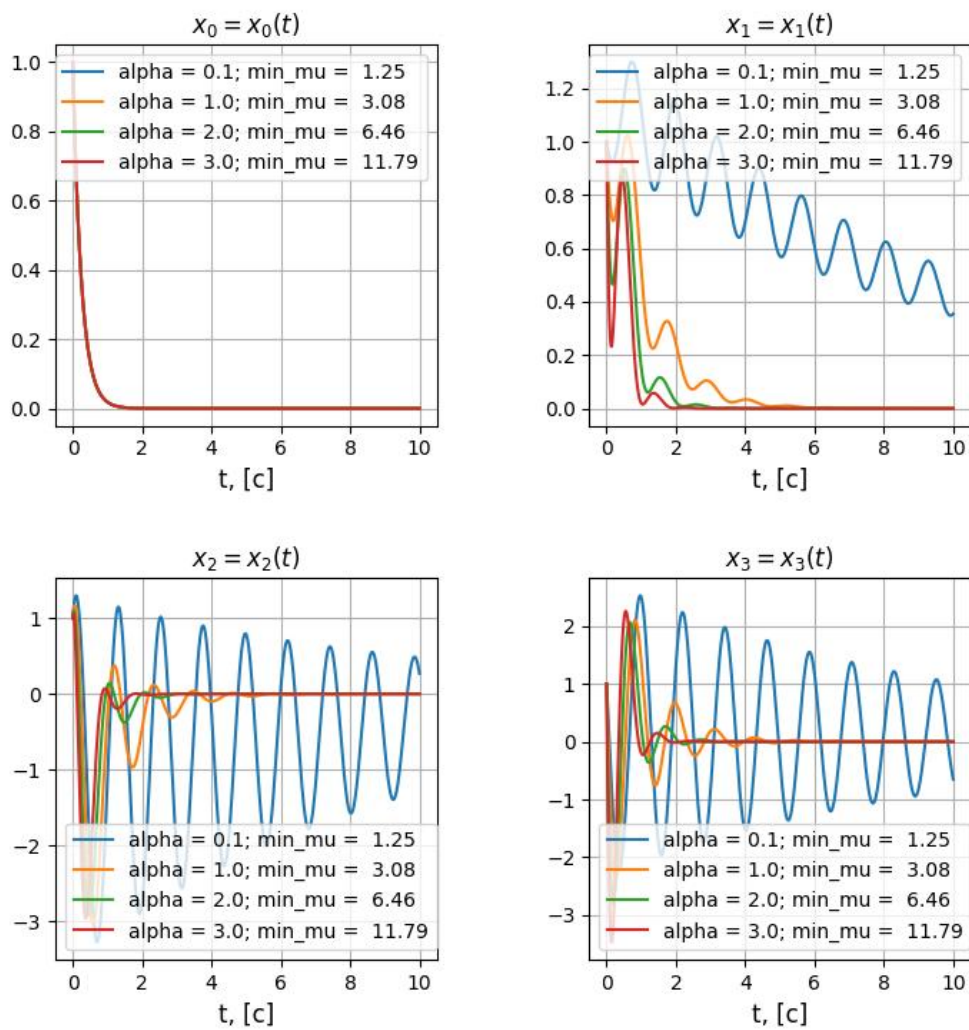


Рис. 5: Результаты моделирования состояний системы для различных  $\alpha$  с минимизированным управлением.

## 2.3 Задание 3

### 2.3.1 Теория

В этом задании выводится наблюдатель заданной степени устойчивости для системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y) = (A + LC)\hat{x} - Ly \\ \dot{e} = (A + LC)e \end{cases}$$

Для этого достаточно решить систему:

$$\begin{cases} L = Q^{-1}Y \\ Q \succ 0 \\ A^T Q + QA + 2\alpha Q + C^T Y^T + YC \preccurlyeq 0 \end{cases}$$

### 2.3.2 Результаты

У полученных наблюдателей, собственные числа всегда находятся с небольшим запасом левее  $\alpha$ . На рис. 6 видна динамика систем покомпонентно, а на рис. 7 покомпонентная динамика ошибок.

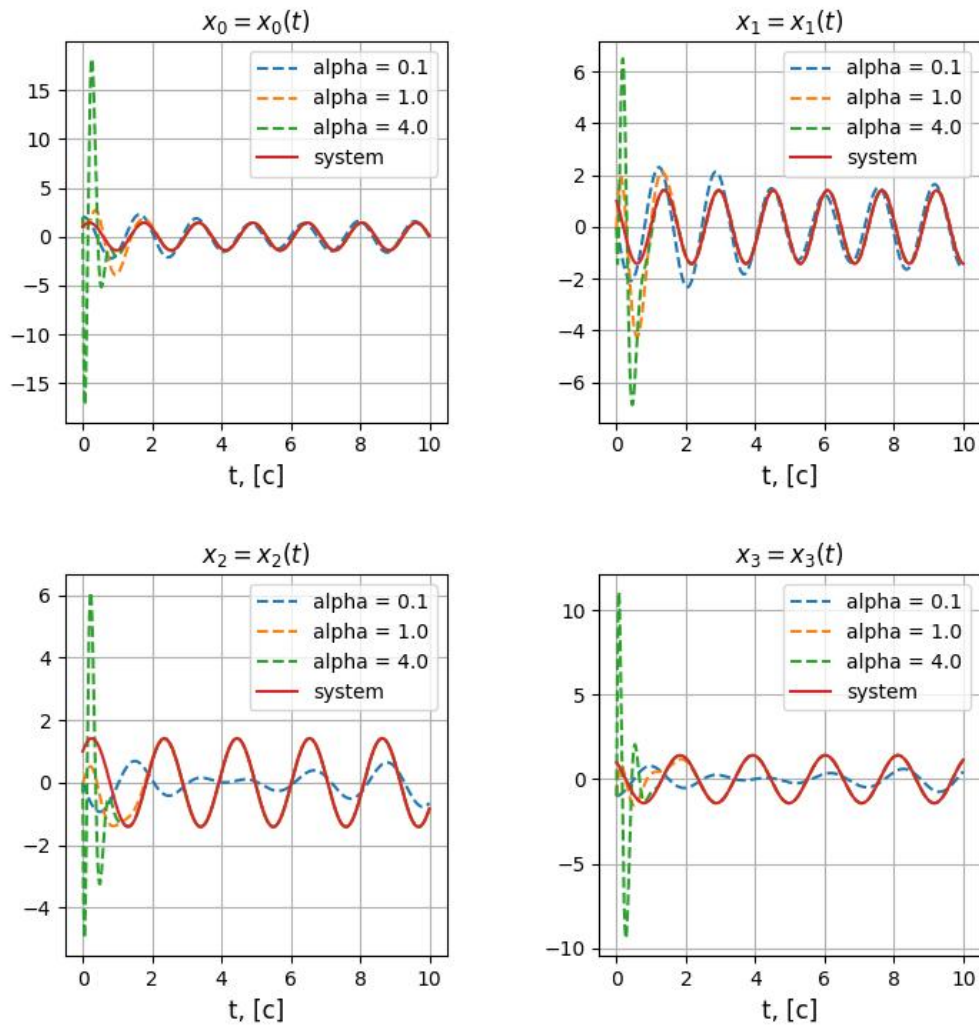


Рис. 6: Динамика наблюдателя и системы.

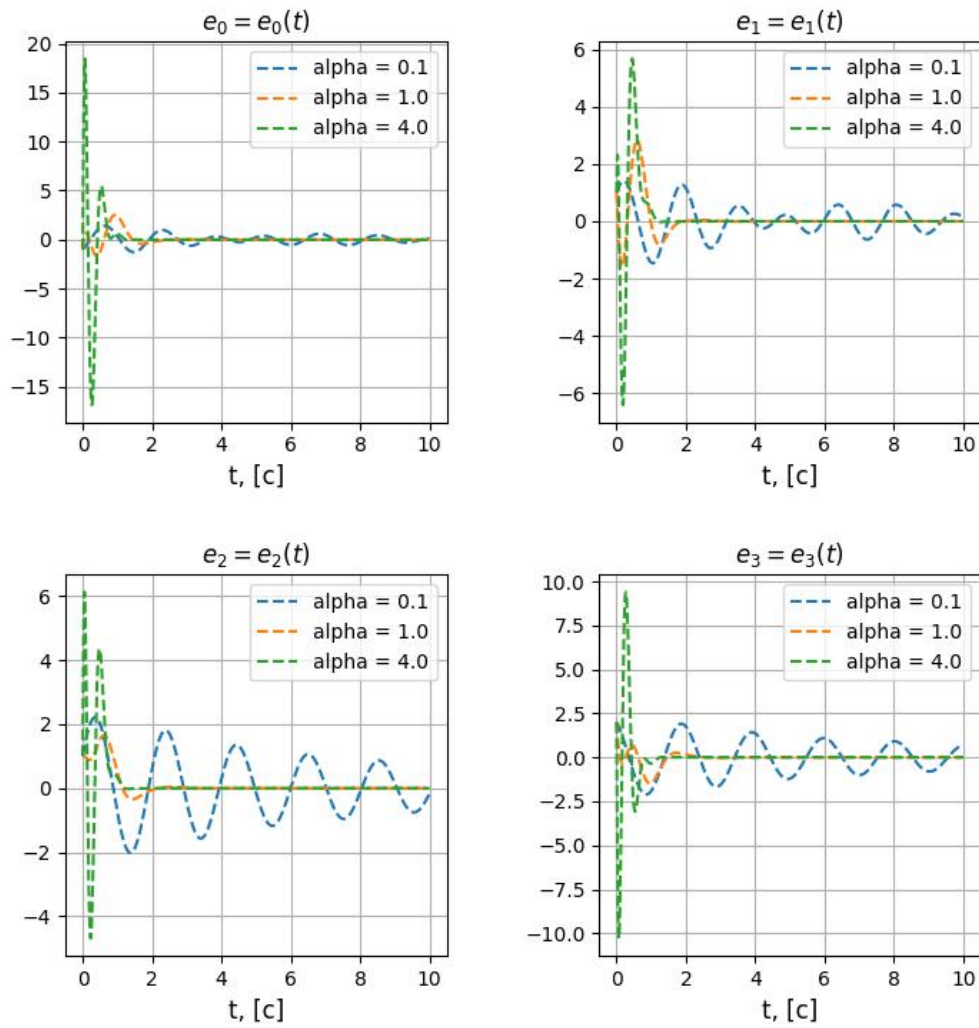


Рис. 7: Динамика ошибки.

Как видно, наблюдатели с большой степенью устойчивости сходятся быстрее, но при этом имеют большую начальную ошибку.

## 2.4 Задание 4

### 2.4.1 Теория

В этом задании выводится наблюдатель регулятор для системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \\ u = K\hat{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \\ \hat{x} = x - e \\ y = Cx \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Это объединяет задания 1 и 3, описанные выше.

### 2.4.2 Результаты

По результат (рис. 8) явно видно, что чем больше  $\alpha$ , тем быстрее сходится система. При этом, максимальное значение ошибки – растет.

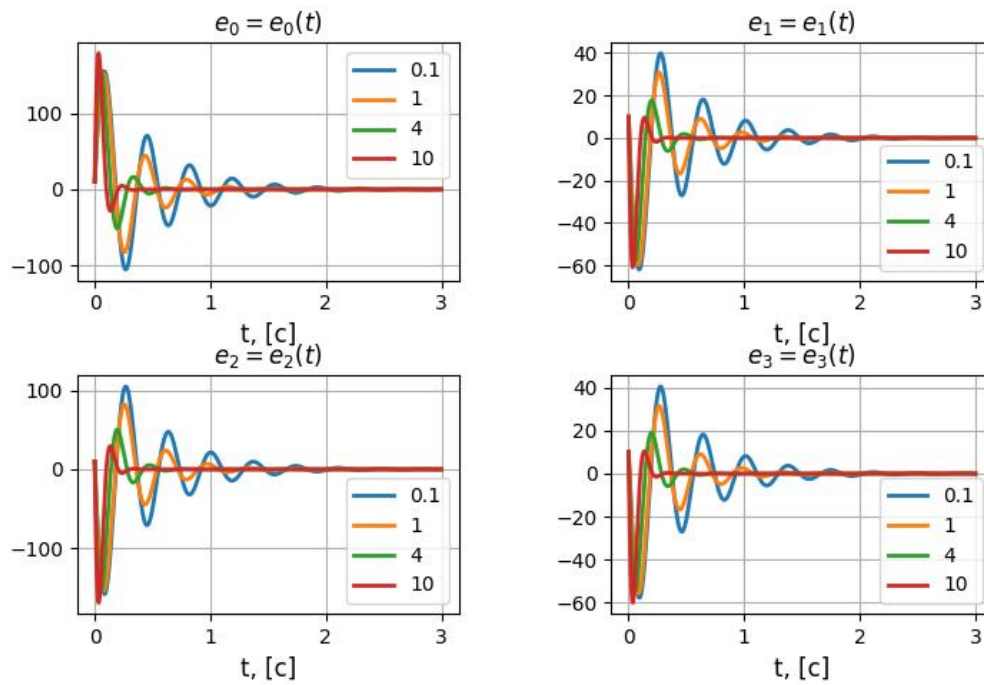


Рис. 8: Результаты моделирования.

### 3 Заключение

В этой работе были изучены регуляторы с заданной степенью устойчивости.

#### 3.1 Выводы

1.  $\max \alpha$  зависит от ближайшего к 0 неуправляемого собственного числа
2. не всегда хорошо иметь большой  $\alpha$  у наблюдателя, так как это ведет к большим ошибкам в начале его работы, что плохо для регулятора