# ЛР №9 «Регуляторы с заданной степенью устойчивости»

# Отчет

Студент Кирилл Лалаянц R33352 336700 Вариант - 11

Преподаватель Пашенко А.В.

Факультет Систем Управления и Робототехники

ИТМО

# Содержание

### 1 Вводные данные

### 1.1 Цель работы

В этой работе пройдет изучение регуляторов с заданной степенью устойчивости.

### 1.1.1 Программная реализация

С исходным кодом можно ознакомиться в репозитории на Github.

- 2 Основная часть
- 2.1 Задание 1

#### 2.1.1 Теория

В этом задании выводится модальный регулятор для системы:

$$\begin{cases} \text{Объект управления: } \dot{x} = Ax + Bu \\ \text{Регулятор: } u = Kx \end{cases} \rightarrow \dot{x} = Ax + BKx = (A + BK)x$$

По сути, целью данного регулятора является изменение управляемых собственных чисел так<sup>1</sup>, чтобы  $\forall \lambda \in \sigma(A): Re\lambda \leq 0$ . Для этого подбирается матрица  $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  с желаемыми собственными числами и матрица  $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , такая что пара  $(\mathbb{Y}, \Gamma)$  наблюдаема. После чего по подобию:

$$A + BK = P\Gamma P^{-1} \to \begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases}$$

На практике, довольно часто P — необратима. Приходится использовать псевдообратную.

#### 2.1.2 Результаты

Лана система

$$A = \begin{bmatrix} -4.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 5.00 \\ 0.00 & 0.00 & -5.00 & 1.00 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 2.00 \\ 0.00 \\ 9.00 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

У матрицы A только одно неуправляемое собственное число – -4. Оно меньше 0, поэтому проблем возникнуть не должно<sup>2</sup>, система стабилизируема.

Для каждой строки желаемых собственных чисел:

$$\begin{bmatrix} -4.00 + 0.00j & -4.00 + 0.00j & -4.00 + 0.00j & -4.00 + 0.00j \\ -4.00 + 0.00j & -40.00 + 0.00j & -400.00 + 0.00j & -400.00 + 0.00j \\ -4.00 + 0.00j & -8.00 + 0.00j & 0.00 + 5.00j & -0.00 + -5.00j \\ -4.00 + 0.00j & -8.00 + 0.00j & -1.00 + 5.00j & -1.00 + -5.00j \end{bmatrix},$$

необходимо синтезировать регулятор.

На рисунках ?? - ?? видны результаты работы получившихся регуляторов.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Что делать с неуправляемыми – пока непонятно. Видимо надо смириться.

 $<sup>^2</sup>$ Нет, должно, надо подбирать матрицы так, чтобы в паре ( $\mathbb{Y}, \Gamma$ ) оно было ненаблюдаемо. Иначе полученный спектр будет немного отличаться от желаемого.

src/figs/task1\_0.jpg

Рис. 1: Результаты моделирования задания 1 для первого набора собственных чисел.  $K = \begin{bmatrix} -0.00 & -2.50 & -1.11 & -1.11 \end{bmatrix}$ 

src/figs/task1\_1.jpg

Рис. 2: Результаты моделирования задания 1 для второго набора собственных чисел.  $K = \begin{bmatrix} 0.00 & -131856.82 & -4303.51 & 29207.85 \end{bmatrix}$ 

src/figs/task1\_2.jpg

Рис. 3: Результаты моделирования задания 1 для третьего набора собственных чисел.  $K = \begin{bmatrix} 0.00 & -4.68 & -0.42 & -0.18 \end{bmatrix}$ 

src/figs/task1\_3.jpg

#### 2.2 Задание 2

#### 2.2.1 Теория

В этом задании выводится наблюдатель состояния для системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y) = (A + LC)\hat{x} - Ly \\ \dot{e} = (A + LC)e \end{cases}$$

Для синтеза наблюдателя подбирается матрица  $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  с желаемыми собственными числами и матрица  $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^{n \times k}$ , такая что пара  $(\Gamma, \mathbb{Y})$  управляема. После чего:

$$\begin{cases} \Gamma Q - QA = YC \\ L = Q^{-1}Y \end{cases}$$

#### 2.2.2 Результаты

Результаты представленны на рисунках ?? - ??. У системы все собственные числа наблюдаемы, поэтому любое можно изменить и система наблюдаема. Стоит отметить, что из-за мод набора 3, ошибка в этом случае не может сойтись к 0 и бесконечно колеблется.

src/figs/task2\_states\_0.jpg

Рис. 5: Результаты моделирования состояний системы и наблюдателя для первого набора собственных чисел.  $L^T = \begin{bmatrix} 0.00 & -7.31 & -2.79 & -1.78 \end{bmatrix}$ 

src/figs/task2\_states\_1.jpg

Рис. 6: Результаты моделирования состояний системы и наблюдателя для второго набора собственных чисел.  $L^T = \begin{bmatrix} 204414.17 & 160532.11 & 126147.31 & -113657.21 \end{bmatrix}$ 

src/figs/task2\_states\_2.jpg

Рис. 7: Результаты моделирования состояний системы и наблюдателя для третьего набора собственных чисел.  $L^T = \begin{bmatrix} 3.09 & 1.03 & 1.95 & -3.05 \end{bmatrix}$ 

src/figs/task2\_states\_3.jpg

Рис. 8: Результаты моделирования состояний системы и наблюдателя для четвертого набора собственных чисел.  $L^T = \begin{bmatrix} 4.34 & -1.60 & 0.93 & -3.97 \end{bmatrix}$ 

src/figs/task2\_y\_0.jpg

Рис. 9: Результаты моделирования выхода системы и наблюдателя для первого набора собственных чисел.  $L^T = \begin{bmatrix} 0.00 & -7.31 & -2.79 & -1.78 \end{bmatrix}$ 

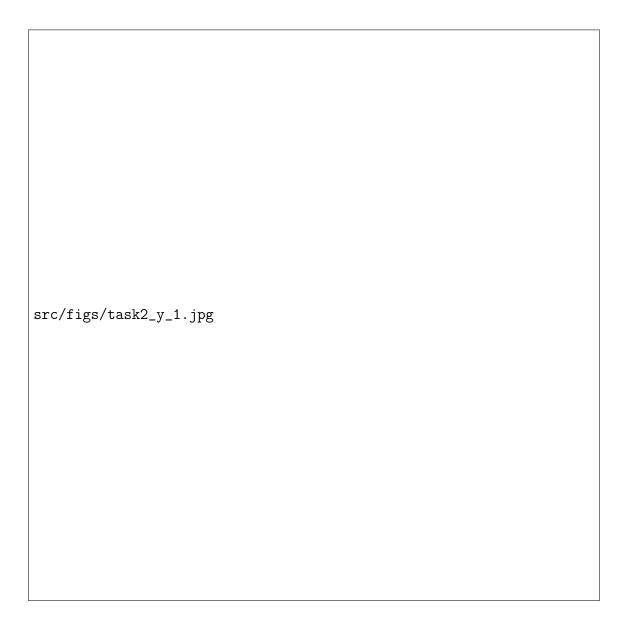


Рис. 10: Результаты моделирования выхода системы и наблюдателя для второго набора собственных чисел.  $L^T=\begin{bmatrix}204414.17&160532.11&126147.31&-113657.21\end{bmatrix}$ 

src/figs/task2\_y\_2.jpg

Рис. 11: Результаты моделирования выхода системы и наблюдателя для третьего набора собственных чисел.  $L^T = \begin{bmatrix} 3.09 & 1.03 & 1.95 & -3.05 \end{bmatrix}$ 

src/figs/task2\_y\_3.jpg

Рис. 12: Результаты моделирования выхода системы и наблюдателя для четвертого набора собственных чисел.  $L^T = \begin{bmatrix} 4.34 & -1.60 & 0.93 & -3.97 \end{bmatrix}$ 

#### 2.3 Задание 3

#### 2.3.1 Теория

В этом задании выводится наблюдатель регулятор для системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \dot{\hat{y}} = C\hat{x} \\ u = K\hat{x} \end{cases} \xrightarrow{\text{очевидно...}} \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \\ \dot{\hat{x}} = x - e \\ y = Cx \\ \dot{\hat{y}} = C\hat{x} \end{cases}$$

Самое важное тут удачно угадать желаемые собственные числа и на забыть сделать их неуправляемыми/ненаблюдаемыми где надо.

#### 2.3.2 Результаты

Для системы (полностью управляема и стабилизируема):

$$A = \begin{bmatrix} 5.00 & -5.00 & -9.00 & 3.00 \\ -5.00 & 5.00 & -3.00 & 9.00 \\ -9.00 & -3.00 & 5.00 & 5.00 \\ 3.00 & 9.00 & 5.00 & 5.00 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 16.00 \\ 12.00 \\ 12.00 \\ 12.00 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 3.00 & -1.00 & 1.00 & 3.00 \\ -2.00 & 2.00 & 2.00 & 2.00 \end{bmatrix}$$

$$n = 4$$
:  $m = 1$ :  $k = 2$ 

 $\sigma A = [12, 4, 16, 12]$ . Все собственные числа управляемы, но -12 — ненаблюдаемо, следовательно система полностью управляема и обнаруживаема. Это необходимо учесть при выборе пары матриц  $(\Gamma, Y_L)$  так, чтобы -12 было неуправляемо.

Пусть,  $\sigma\Gamma=[-12,-3,-2,-1]$ , тогда  $\Gamma$  – просто диагональная матрица. Для подбора матриц K, чтобы сделать все числа наблюдаемыми у пары матриц  $(\Gamma, \mathbb{Y}_K)$  по Жорданову критерию, возьмем  $\mathbb{Y}_K \in \mathbb{R}^{n \times m}$ :

$$Y_K = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

а для выбора L, чтобы сделать 12 — неуправляемым в паре  $(\Gamma, \mathbb{Y}_L)$ , возьмем  $\mathbb{Y}_L \in \mathbb{R}^{n \times k}$ :

$$\mathbb{Y}_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Далее, выполняя по отдельности действия задания 1 и 2, получены следующие матрицы:

$$K = \begin{bmatrix} 11.09 & -3.47 & -11.35 & -3.65 \end{bmatrix}; L = \begin{bmatrix} 36.20 & 36.20 \\ 6.46 & 6.46 \\ -36.74 & -36.74 \\ 5.91 & 5.91 \end{bmatrix}$$

К и L были подставлены в формулы из теоретической части. Это позволило стабилизировать систему, результаты приведены ниже на рисунках ?? - ??.

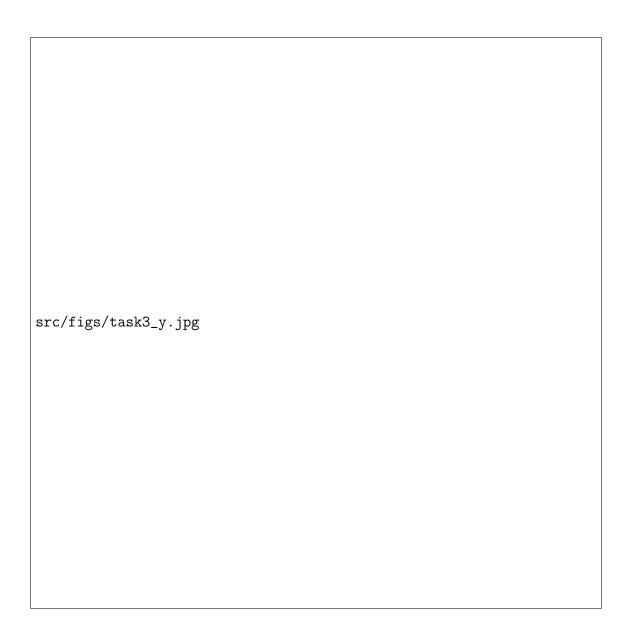


Рис. 13: Результаты моделирования выхода системы и наблюдателя.

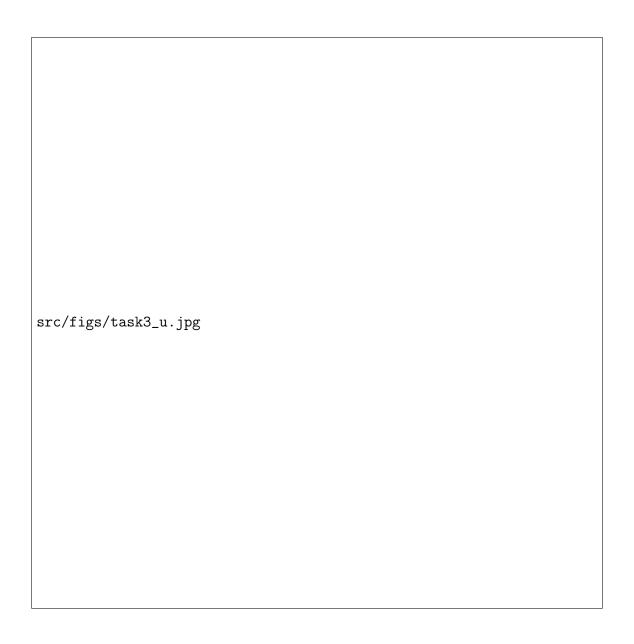


Рис. 14: Результаты моделирования регулятора.

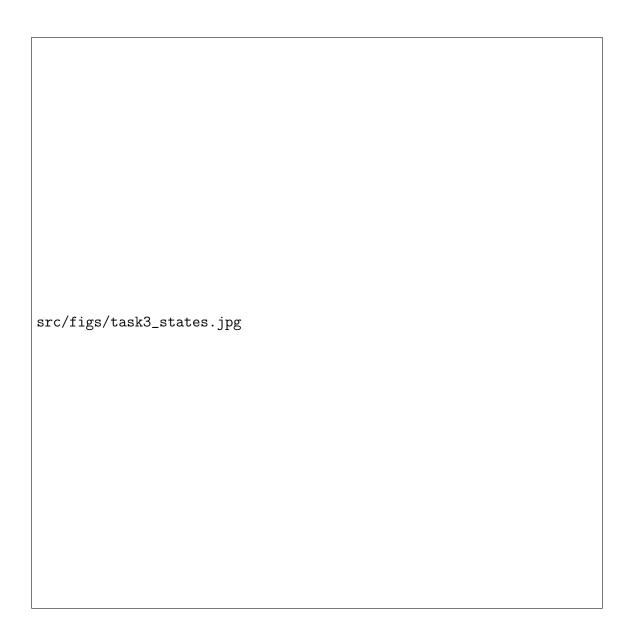


Рис. 15: Результаты моделирования состояний системы.

## 3 Заключение

В этой работе были изучены регуляторы с заданной степенью устойчивости.

# 3.1 Выводы

1.