ЛР №7 «Управляемость и наблюдаемость»

Отчет

Студент
Кирилл Лалаянц
R33352
336700
Вариант - 11

Преподаватель
Пашенко А.В.

Факультет Систем Управления и Робототехники

ИТМО

09.02.2024

Содержание

1 Вводные данные

1.1 Цель работы

В этой работе пройдет изучение управляемости и наблюдаемости систем.

1.1.1 Программная реализация

С исходным кодом можно ознакомиться в репозитории на Github.

2 Основная часть

2.1 Задание 1

Имеем систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$x(t_1) = \int_0^{t_1} Bu(t)dt$$

2.1.1 Управляемость через матрицу управляемости

$U = [B|AB|\dots|A^{n-1}B]$ для $A \in R^{n\times n}$ и $B \in R^{n\times m}$ – матрица управляемости системы. Если ее ранг равен n – система управляема.

2.1.2 Управляемость и Грамиан управляемости

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At}BB^Te^{A^Tt}dt$$

У управляемой системы Грамиан управляемости положительно определен в любой момент t.

2.1.3 Управляемость через собственные числа матрицы системы

$$\forall\lambda \in spec(A) : rank(A - \lambda I|B) = n \Longleftrightarrow \text{Матрица управляема}$$

2.1.4 Управляемость через Жорданову форму

Жорданова форма матрицы $A = PJP^{-1}$:

$$\dot{x} = PJP^{-1}x + Bu$$

Пусть $\hat{x} = P^{-1}x$, тогда получим Жорданову форму системы:

$$\dot{\hat{x}} = J\hat{x} + P^{-1}Bu = J\hat{x} + \hat{B}u$$

Система в Жордановой форме полностью управляема, если:

- каждому собственному числу соответсвует только одна Жорданова клетка.
- элементы матрицы входного воздействия, соответсвующие последним строкам клеток – не нулевые.

2.1.5 Програмное управление системой

Для вычисления управления, необходимого для достижения состояния x_1 к моменту времени t_1 достаточно рассчитать:

$$u(t) = B^Te^{A^T(t_1-t)}(P(t_1))^{-1}x_1$$

2.1.6 Результаты

Вариант задания:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -10 & -11 & -4 \\ 10 & 10 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}; x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; t_1 = 3$$

Матрица управляемости U:

$$U = \begin{bmatrix} -2 & 17 & -62 \\ 5 & -23 & -1 \\ -3 & 21 & 3 \end{bmatrix};$$

$$rankU = 3 = n \rightarrow \text{система управляема.}$$

Получены собственные числа $spec(A) = [-2 + 5j, -2 - 5j, -1 + 0j]$. Каждое из них удовлетворяет выражению$rank(A - \lambda I|B) = n$ – то есть управлямо.

Так же рассмотрим управляемость собственных чисел через форму Жордана:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2-5j & 0 \\ 0 & 0 & -2+5j \end{bmatrix}; \hat{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.5 + 1.5j \\ -1.5 - 1.5j \end{bmatrix};$$

Как видно, условия выполнены – еще одно подтверждение, что пара (A, B) управляема.

Так как матрица полностью управляема, любая точка принадлежит управвляемому подпространству системы, в том числе и x_1.

Получен Грамиван управляемости:

$$P(t_1) = \begin{bmatrix} 1.20 & -1.34 & 0.23 \\ -1.34 & 2.76 & -1.12 \\ 0.23 & -1.12 & 1.47 \end{bmatrix};$$

$$spec(P(t_1)) = [4, 0.27, 1.15]$$

Грамиан положительно определен, система полностью управляема.

На рисунке 1 приведены результаты моделирования системы. Как видно, она приняла желаемо состояние за нужное время.

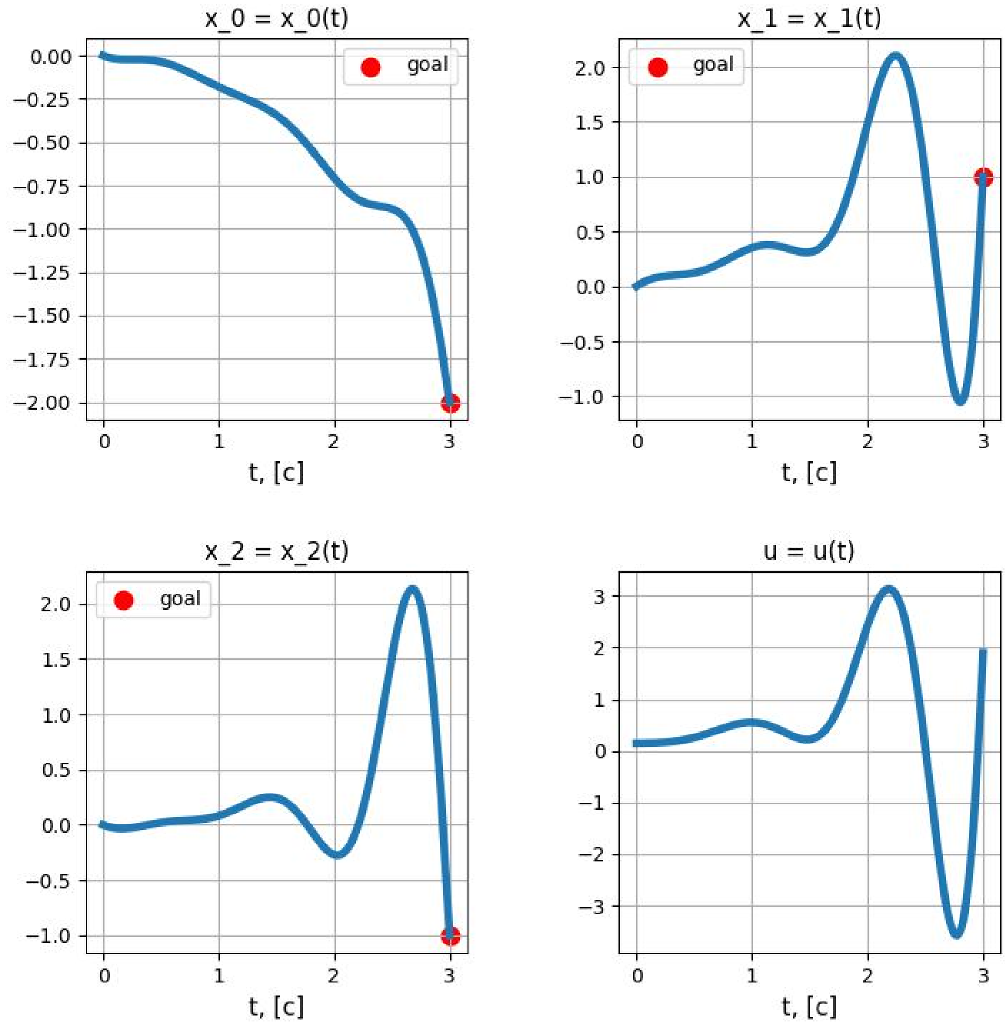

Рис. 1: Результаты моделирования задания 1.

2.2 Задание 2

2.2.1 Принадлежность состояния управвляемому подпространству

В этом задании дополнительно лишь нужно знать, как проверить состояние на принадлежность управляемому подпространству.

Для этого необходимо сравнить $rank(U)$ и $rank(U|x_1)$. Если они совпали – состояние принадлежит.

2.2.2 Результаты

Вариант задания:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -10 & -11 & -4 \\ 10 & 10 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; x_1' = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; x_1'' = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}; t_1 = 3$$

Матрица управляемости U:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 11 & -102 \\ 1 & -27 & 79 \\ -1 & 27 & -79 \end{bmatrix};$$

$$rankU = 2 = n \rightarrow \text{система неполностью управляема.}$$

Получены собственные числа $spec(A) = [-2+5j, -2-5j, -1+0j]$. Третье из них неуправляемо.

Так же рассмотрим управляемость собственных чисел через форму Жордана:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2-5j & 0 \\ 0 & 0 & -2+5j \end{bmatrix}; \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.5+1.5j \\ -1.5-1.5j \end{bmatrix};$$

Как видно, у первого числа соотвествующий элемент в векторе управления 0. Это еще раз подтверждает его неуправляемость.

Из x_1' и x_1'' только первое состояние принадлежит управляемому подпространству.

Получен Грамиан управляемости:

$$P(t_1) = \begin{bmatrix} 2.05 & -1.63 & 1.63 \\ -1.63 & 2.40 & -2.40 \\ 1.63 & -2.40 & 2.40 \end{bmatrix};$$

$$spec(P(t_1)) = [0.74, 6.12, 0]$$

Одно из собственных чисел Грамиана – 0. Для нахождения програмного управления необходимо использовать псевдообратную матрицу.

На рисунке 2 приведены результаты моделирования системы. Как видно, она приняла желаемо состояние за нужное время.

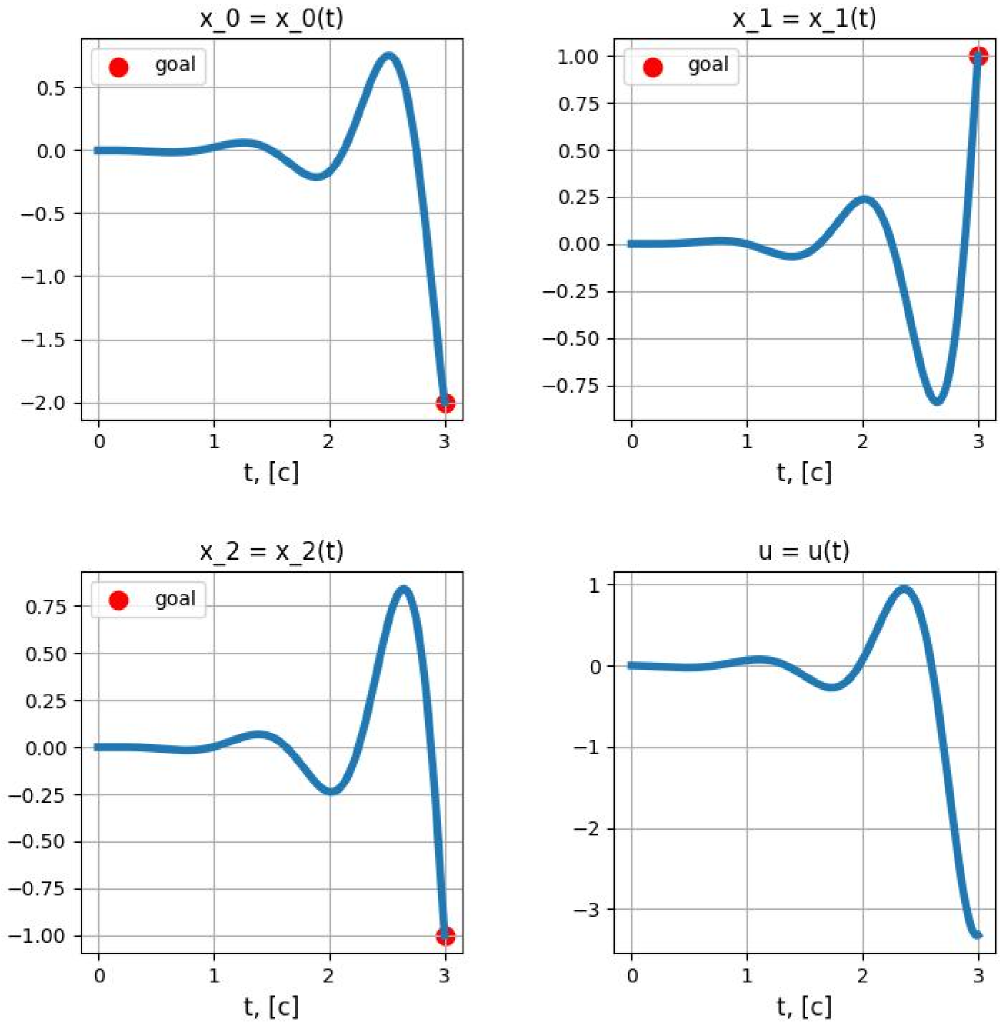

Рис. 2: Результаты моделирования задания 2.

2.3 Задание 3

Имеем систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

$$y(t) = Ce^{At}x(0)$$

2.3.1 Наблюдаемость через матрицу наблюдаемости

$V = [C|CA|\dots|CA^{n-1}]^T$ для $A \in R^{n\times n}$ и $C \in R^{k\times n}$ – матрица наблюдаемости системы. Если ее ранг равен n – система наблюдаема.

2.3.2 Наблюдаемость и Грамиан наблюдаемости

$$Q(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

У наблюдаемой системы Грамиан наблюдаемости положительно определен в любой момент t.

2.3.3 Управляемость через собственные числа матрицы системы

$$\forall\lambda \in spec(A) : rank(\begin{bmatrix} A-\lambda I \\ C \end{bmatrix}) = n \Longleftrightarrow \text{Матрица наблюдаема}$$

2.3.4 Управляемость через Жорданову форму

Жорданова форма матрицы $A = PJP^{-1}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = PJP^{-1}x \\ y = Cx \end{cases}$$

Пусть $\hat{x} = P^{-1}x$, тогда получим Жорданову форму системы:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = J\hat{x} \\ y = CP\hat{x} = \hat{C}\hat{x} \end{cases}$$

Система в Жордановой форме полностью наблюдаема, если:

- каждому собственному числу соответсвует только одна Жорданова клетка.
- элементы матрицы выходов, соответсвующие первым столбцам клеток – не нулевые.

2.3.5 Начальные условия системы

Для вычисления начальных условий системы, достаточно рассчитать:

$$x(0) = (P(t_1))^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt$$

2.3.6 Результаты

Вариант задания:

$$A = \begin{bmatrix} -21 & -38 & 6 \\ 8 & 13 & -4 \\ -6 & -14 & -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 9 & 8 & -2 \end{bmatrix}; y = 3e^{-5x}\cos 2x - e^{-5x}\sin 2x; t_1 = 3$$

Матрица наблюдаемости V:

$$V = \begin{bmatrix} 9 & 8 & -2 \\ -113 & -210 & 24 \\ 549 & 1228 & 138 \end{bmatrix};$$

$$rankU = V = n \rightarrow \text{система наблюдаема.}$$

Получены собственные числа $spec(A) = [-5+2j, -5-2j, 1+0j]$. Каждое из них наблюдаемо, что еще раз показывает наблюдаемость системы.

Так же рассмотрим наблюдаемость собственных чисел через форму Жордана:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5-2j & 0 \\ 0 & 0 & -5+2j \end{bmatrix}; \hat{} = \begin{bmatrix} 8 \\ 17+10j \\ 17-10j \end{bmatrix};$$

Как видно, условия выполнены – еще одно подтверждение, что пара (A, C) наблюдаемы.

Получен Грамиван наблюдаемости:

$$Q(t_1) = \begin{bmatrix} 12861 & 25733 & -12846 \\ 25733 & 51508 & -25706 \\ -12846 & -25706 & 12835 \end{bmatrix};$$

$$spec(P(t_1)) = [77197, 1.34, 6.40]$$

Грамиан положительно определен, система полностью наблюдаема.

На рисунке 3 приведены результаты моделирования системы. Как видно, при моделировании она действительно пришла в нужный вектор наблюдения за отведенное время. Так как система полностью наблюдаема, иных начальных состояние быть не может.

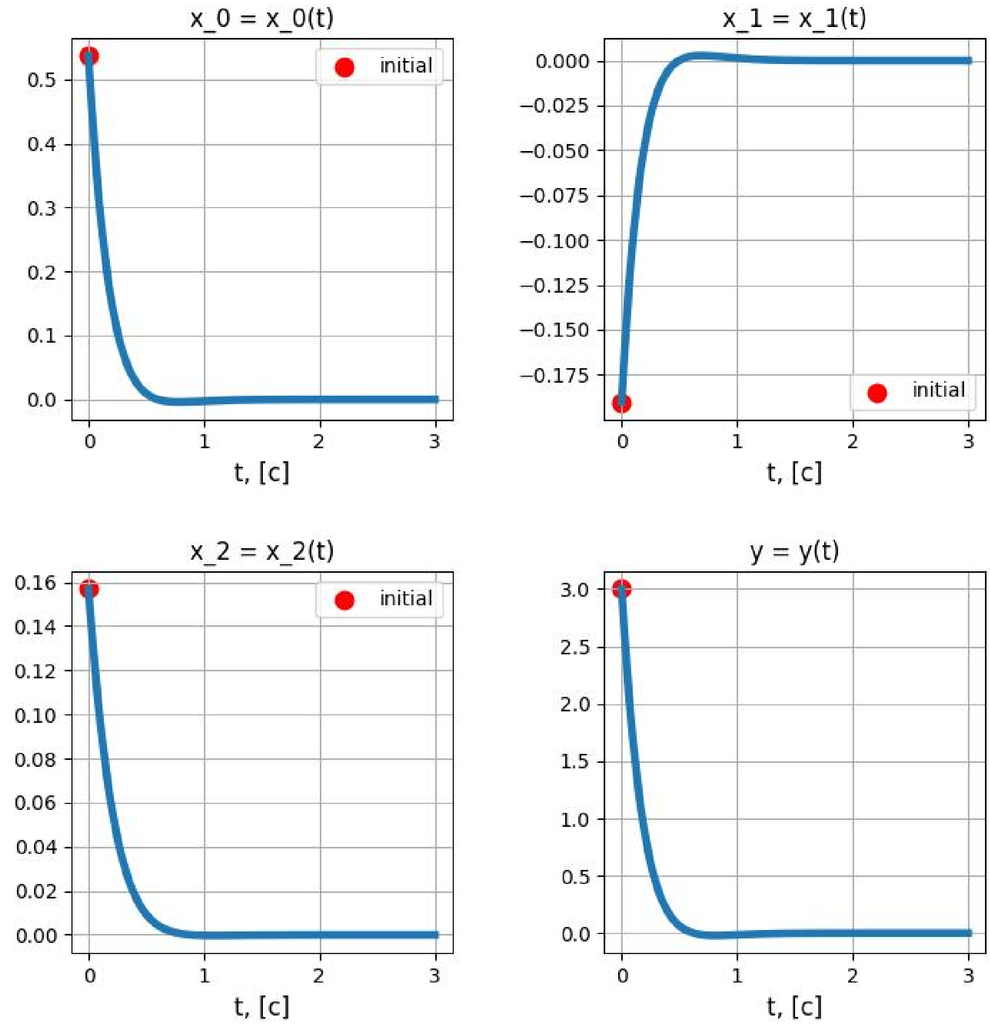

Рис. 3: Результаты моделирования задания 3.

2.4 Задание 2

2.4.1 Принадлежность состояния ненаблюдаемому подпространству

В этом задании дополнительно лишь нужно знать, как проверить состояние на принадлежность ненаблюдаемому подпространству.

Для этого необходимо проверить равенство $Vx = 0$. Если это так – состояние ненаблюдаемое.

Соответсвенно, базис ненаблюдаемого подпространства равен $Nullspace(V)$.

2.4.2 Результаты

Вариант задания:

$$A = \begin{bmatrix} -13 & 2 & -12 \\ -6 & -1 & -8 \\ 8 & -4 & 5 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}; y = 21e^{-5x}\cos 2x - 7e^{-5x}\sin 2x; t_1 = 3$$

Матрица управляемости U:

$$U = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 7 \\ -35 & -14 & -49 \\ 147 & 140 & 287 \end{bmatrix};$$

$$rankU = 2 = n \rightarrow \text{система неполностью наблюдаема.}$$

Получены собственные числа $spec(A) = [-5+2j, -5-2j, 1+0j]$. Третье из них ненаблюдаемо, что еще раз подчеркивает ненаблюдаемость системы.

Так же рассмотрим наблюдаемость собственных чисел через форму Жордана:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5-2j & 0 \\ 0 & 0 & -5+2j \end{bmatrix}; \hat{} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.5+3.5j \\ -3.5-3.5j \end{bmatrix};$$

Как видно, у первого числа соотвествующий элемент в векторе наблюдения 0. Это еще раз подтверждает его ненаблюдаемость.

Получен Грамиан управляемости:

$$P(t_1) = \begin{bmatrix} 4.56 & -0.84 & 3.7 \\ -0.84 & 0.33 & -0.50 \\ 3.7 & -0.5 & 3.2 \end{bmatrix};$$

$$spec(P(t_1)) = [7.8, 0.3, 0]$$

Одно из собственных чисел Грамиана – 0, поэтому он не положительно определен, а значит пара ненаблюдаема.

На рисунке 4 приведены результаты моделирования системы. Как видно, при моделировании она действительно пришла в нужный вектор наблюдения за отведенное время.

Так как система не полностью наблюдаема, могут быть иные начальные состояний, приводящие к такому же наблюдению. Для их нахождения найдем базис $Nullspace(V)$. Так как, ранг матрицы наблюдения 2, а размерность матрицы системы 3, базис нулевого подпространства будет представлять из себя прямую, задаваемую одним вектором $[-0.57, -0.57, 0.57]$. На рисунке 5 видно, что

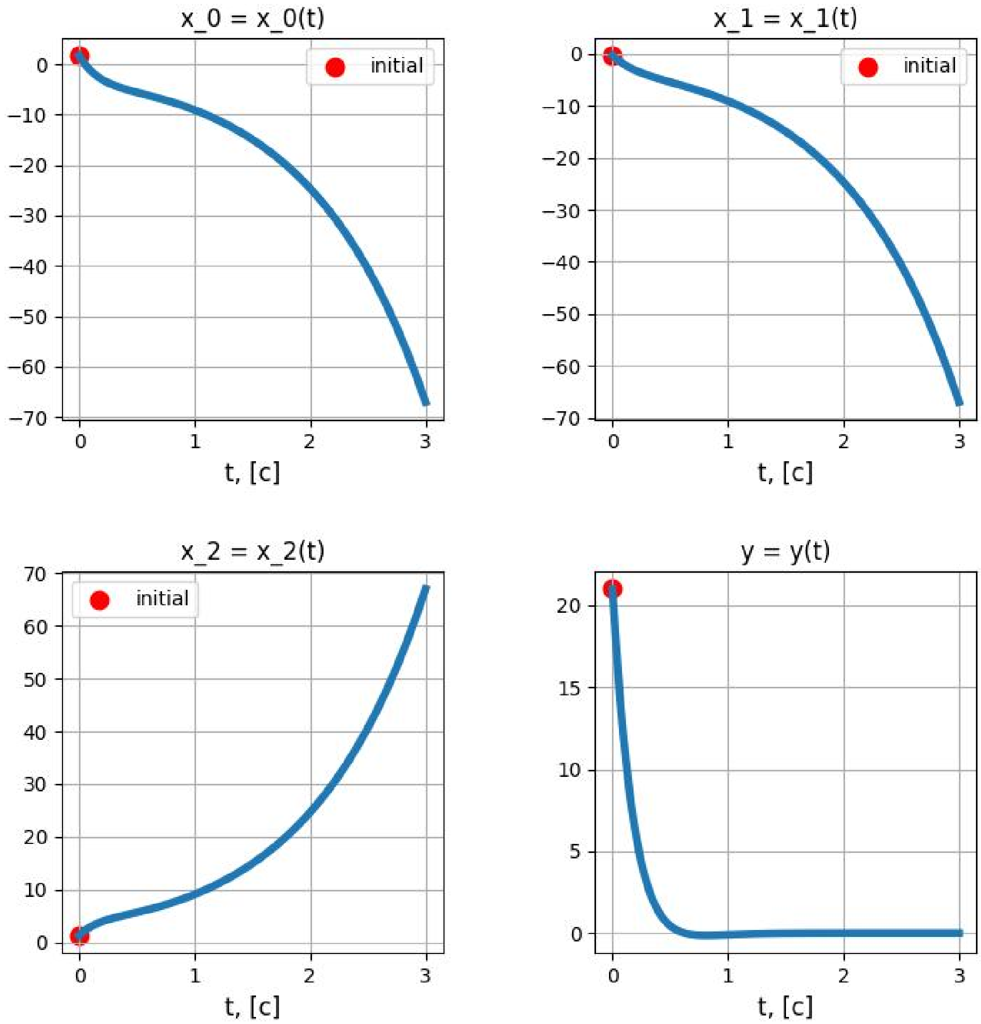

Рис. 4: Результаты моделирования задания 4.

несмотря на различные начальные условия и поведение состояний, наблюдения полностью совпадают.

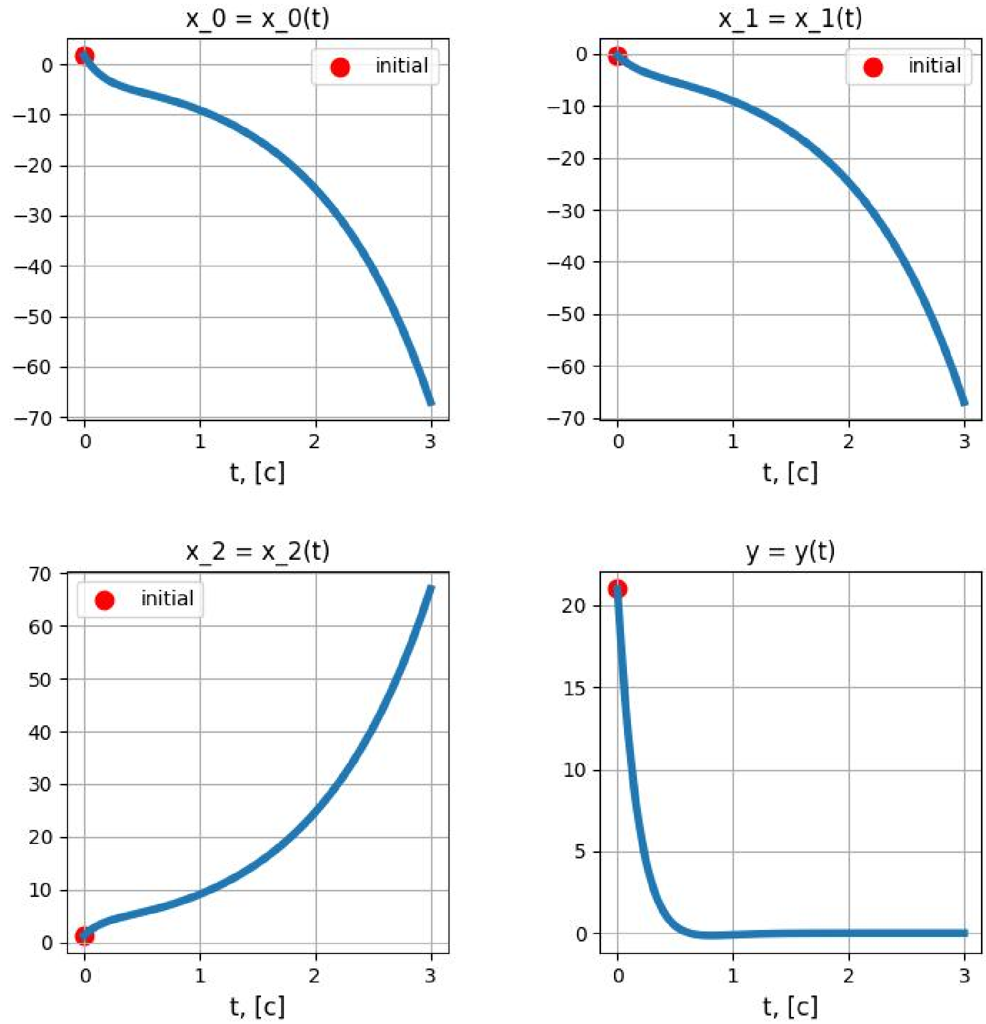

Рис. 5: Результаты моделирования ненаблюдаемого подпространства задания 4.

3 Заключение

В этой работе были изучены управляемости и наблюдаемости систем.

3.1 Выводы

1.