ЛР №9 «Регуляторы с заданной степенью устойчивости»

Отчет

Студент

Кирилл Лалаянц

R33352

336700

Вариант - 11

Преподаватель

Пашенко А.В.

Факультет Систем Управления и Робототехники

ИТМО

15.02.2024

Содержание

1 Вводные данные

1.1 Цель работы

В этой работе пройдет изучение регуляторов с заданной степенью устойчивости.

1.1.1 Программная реализация

С исходным кодом можно ознакомиться в репозитории на Github.

2 Основная часть

2.1 Задание 1

2.1.1 Теория

В этом задании выводится регулятор заданной степени устойчивости для системы:

$$\begin{cases} \text{Объект управления: } \dot{x} = Ax + Bu \\ \text{Регулятор: } u = Kx \end{cases} \quad \rightarrow \dot{x} = Ax + BKx = (A + BK)x$$

По сути, целью данного регулятора является изменение управляемых собственных чисел так, чтобы $\forall \lambda \in \sigma(A) : Re\lambda \leq \alpha$, где α – степень устойчивости. Для этого используется LMI критерий экспоненциальной устойчивости:

$$\exists Q \succ 0, \alpha > 0 : A^T Q + QA + 2\alpha Q \preccurlyeq 0 \rightarrow \begin{cases} \forall x(0) \text{ A ассимптотически устойчива} \\ \exists c : ||x(t)|| \leq ce^{-\alpha t}||x(0)|| \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q \succ 0 \\ A^T Q + QA + 2\alpha Q \preccurlyeq 0 \end{cases} \xleftrightarrow{Q=P^{-1}} \begin{cases} P \succ 0 \\ PA^T + AP + 2\alpha P \preccurlyeq 0 \end{cases}$$

Подставим вместо матрицы A нашу систему:

$$P(A + BK)^T + (A + BK)P + 2\alpha P \preccurlyeq 0$$

$$PA^T + PK^T B^T + AP + BKP + 2\alpha P \preccurlyeq 0$$

$$\begin{cases} Y = KP \\ PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preccurlyeq 0 \end{cases}$$

Тогда для подбора матрицы K, чтобы задать система степень устойчивости α, достаточно решить через библиотеку CVX следующую систему с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} K = YP^{-1} \\ P \succ 0 \\ PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preccurlyeq 0 \end{cases}$$

На практике, довольно часто P – необратима. Приходится использовать псевдообратную.

2.1.2 Результаты

Дана система:

$$A = \begin{bmatrix} -4.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 5.00 \\ 0.00 & 0.00 & -5.00 & 1.00 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 2.00 \\ 0.00 \\ 9.00 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

У матрицы A одно неуправляемое собственное число – -4. Это наталкивает на мысль, что степень устойчивости больше 4 получить не получится, так как это собственное число подвинуть не получится. На деле так и есть, CVX решает систему для $\forall \alpha < 4$.

При рассмотрении собственных чисел получившихся систем видно, что передвигает собственные числа так, чтобы минимальное расстояние по вещественной оси от собственных чисел до 0 было с небольшим запасом больше степени устойчивости. На рисунках 1 - 2 приведены полученные графики.

Как можно заметить, действительно чем больше α, тем жестче управление и быстрее сходимость. Так же видно, что состояние 1 не меняется, так как собственное число неуправляемое.

$$\alpha = 0.1; K = \begin{bmatrix} -0.00 \\ -0.91 \\ -0.29 \\ -0.32 \end{bmatrix}; \sigma(A+BK) = [-0.68+5.53j-0.68-5.53j-0.36+0.j-4.+0.j];$$

$$\alpha = 1.0; K = \begin{bmatrix} 0.00 \\ -2.58 \\ -0.95 \\ -0.32 \end{bmatrix}; \sigma(A+BK) = [-1.84+6.77j-1.84-6.77j-1.39+0.j-4.+0.j];$$

$$\alpha = 2.0; K = \begin{bmatrix} -0.00 \\ -6.76 \\ -2.21 \\ 0.15 \end{bmatrix}; \sigma(A+BK) = [-3.3+8.66j-3.3-8.66j-2.62+0.j-4.+0.j];$$

$$\alpha = 3.0; K = \begin{bmatrix} -0.00 \\ -15.57 \\ -4.29 \\ 1.56 \end{bmatrix}; \sigma(A+BK) = [-5.08+11.01j-5.08-11.01j-3.92+0.j-4.+0.j];$$

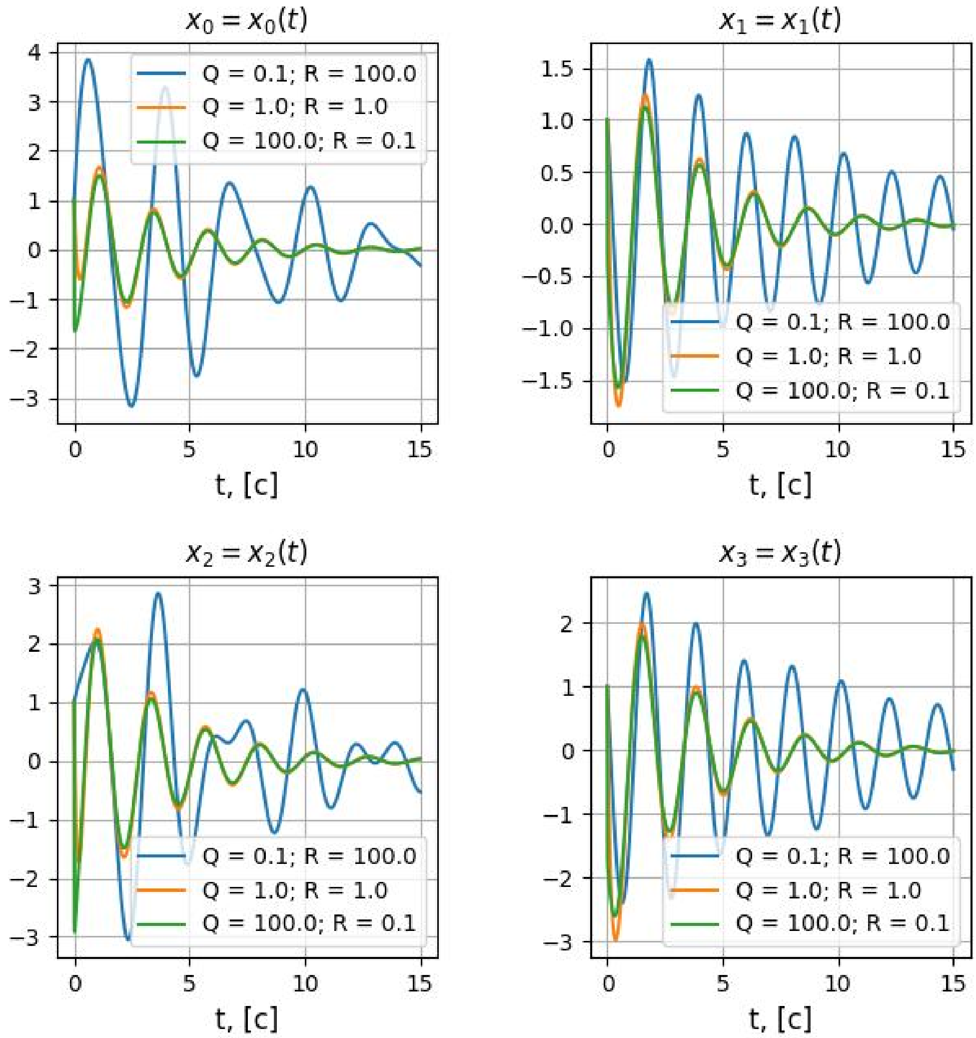

Рис. 1: Результаты моделирования состояний для разных значений α.

$$\alpha = 4.0; K = \begin{bmatrix} 0.00 \\ -34.45 \\ -7.83 \\ 4.97 \end{bmatrix}; \sigma(A+BK) = [-7.81+13.56j -7.81-13.56j -5.59+0.j -4.+0.j];$$

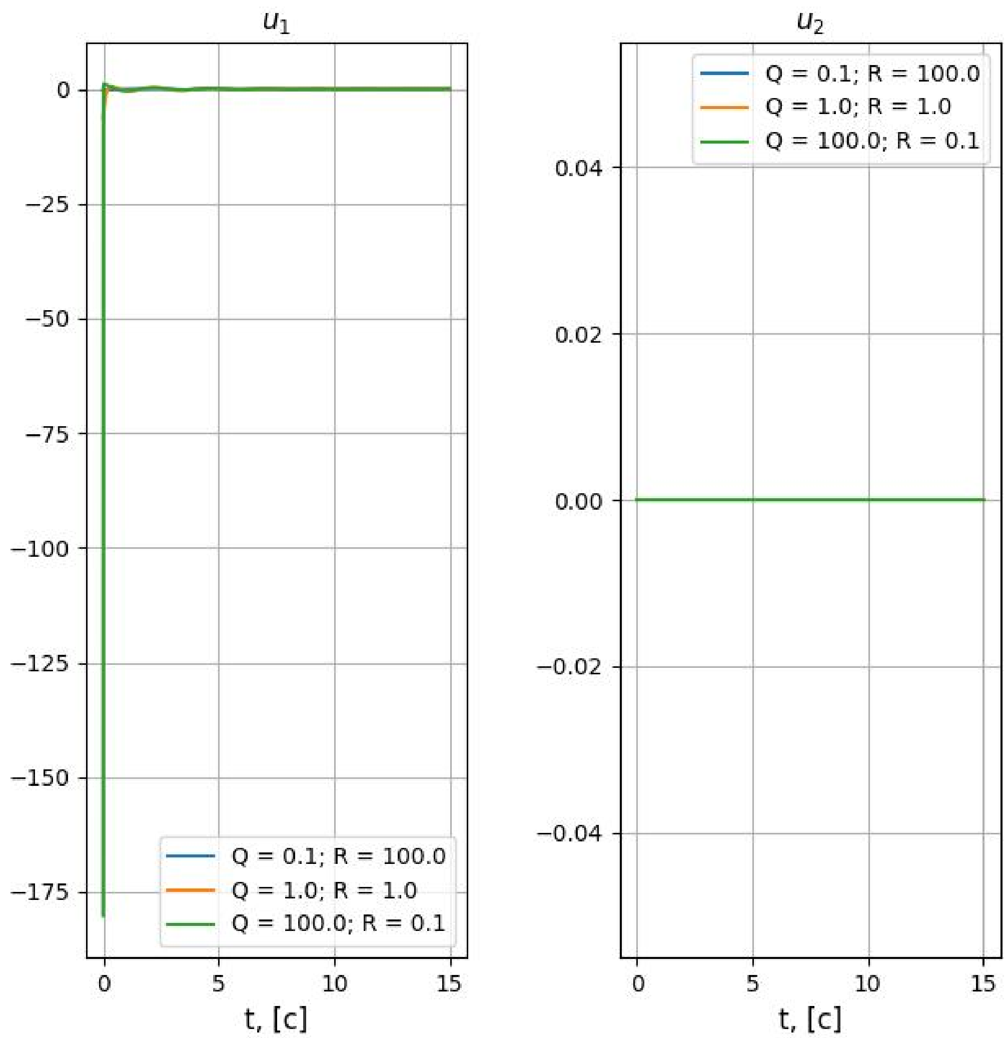

Рис. 2: Результаты моделирования управления для разных значений α.

2.2 Задание 2

2.2.1 Теория

В этом задании выводится ограничение на управление $||u(t)|| \leq \mu$. Тогда система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} P & x_0 \\ x_0^T & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \\ \\ \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{bmatrix} \succ 0 \\ P \succ 0 \\ PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preccurlyeq 0 \\ K = YP^{-1} \end{cases}$$

2.2.2 Результаты

Сначала проведено исследование влияния ограничения для $alpha = 1$. На рисунках 3 – 4.

При минимальном μ система имеет собственные числа $\begin{bmatrix} -1.00 + 5.50j & -1.00 + -5.50j & -1.00 + 0.00j & -4.00 + 0.00j \end{bmatrix}$, максимально прижавшись к необходимой степени устойчивости всеми управляемыми числами. По мере ослабления ограничения, числа начинают отдаляться от границы.

Для всех остальных степеней устойчивости результат аналогичен. Все управляемы собственные числа принимают значение степени устойчивости.

$$\alpha = 0.1; K = \begin{bmatrix} 0.00 \\ -0.61 \\ -0.11 \\ -0.23 \end{bmatrix}; \sigma(A + BK) = \begin{bmatrix} -0.10 + 5.15j \\ -0.10 + -5.15j \\ -0.10 + 0.00j \\ -4.00 + 0.00j \end{bmatrix};$$

$$\alpha = 1.0; K = \begin{bmatrix} 0.00 \\ -1.37 \\ -0.38 \\ -0.36 \end{bmatrix}; \sigma(A + BK) = \begin{bmatrix} -1.00 + 5.50j \\ -1.00 + -5.50j \\ -1.00 + 0.00j \\ -4.00 + 0.00j \end{bmatrix};$$

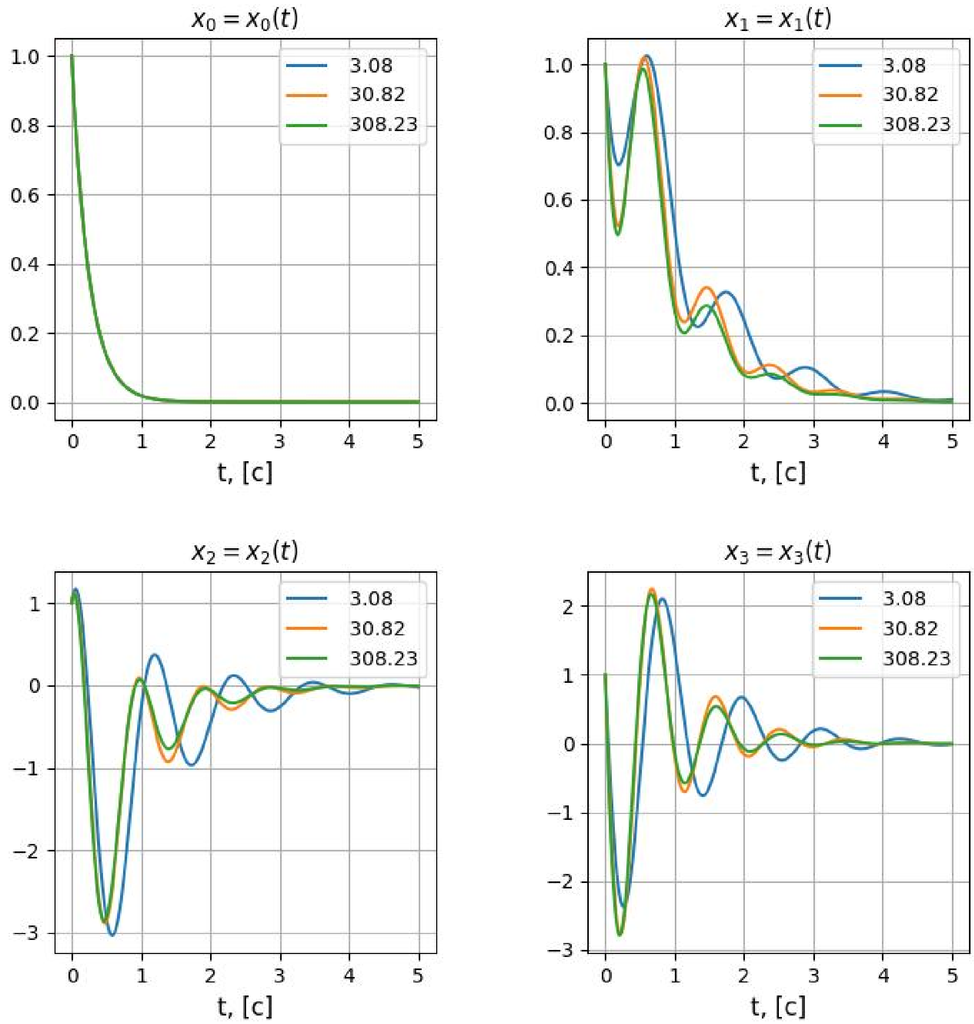

Рис. 3: Результаты моделирования состояний системы для $\alpha = 1$ при различных ограничениях.

$$\alpha = 2.0; K = \begin{bmatrix} 0.00 \\ -2.80 \\ -0.88 \\ -0.38 \end{bmatrix}; \sigma(A + BK) = \begin{bmatrix} -2.00 + 6.13j \\ -2.00 + -6.13j \\ -2.00 + 0.00j \\ -4.00 + 0.00j \end{bmatrix};$$

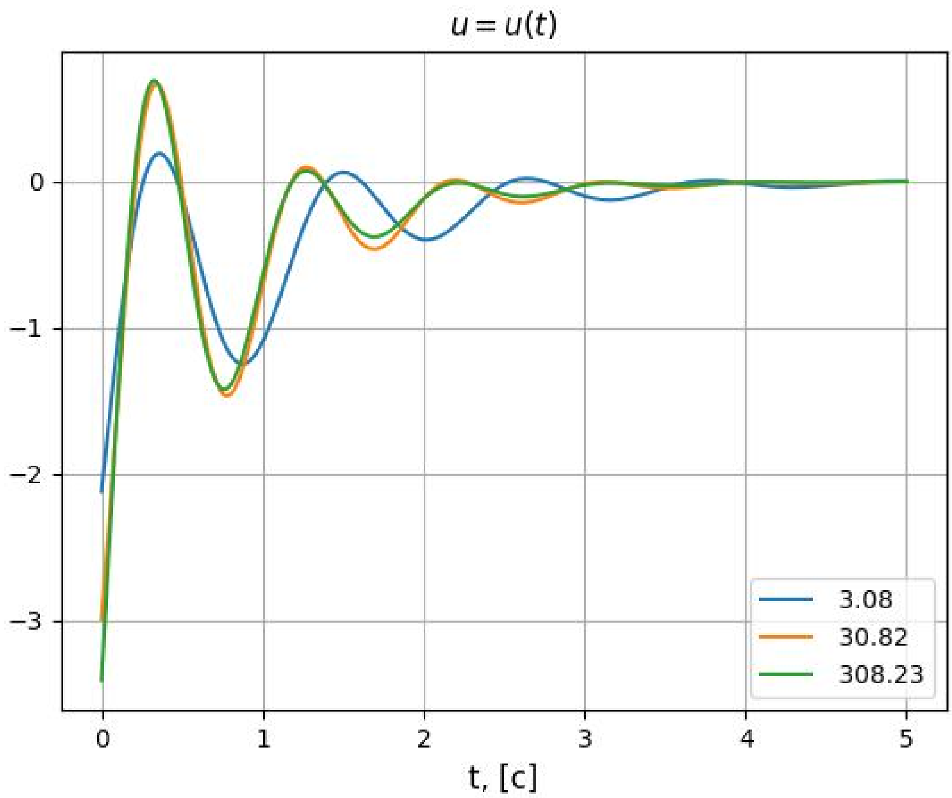

Рис. 4: Результаты моделирования управления системой для $\alpha = 1$ при различных ограничениях.

$$\alpha = 3.0; K = \begin{bmatrix} 0.00 \\ -5.13 \\ -1.58 \\ -0.19 \end{bmatrix}; \sigma(A + BK) = \begin{bmatrix} -3.00 + 6.94j \\ -3.00 + -6.94j \\ -3.00 + 0.00j \\ -4.00 + 0.00j \end{bmatrix};$$

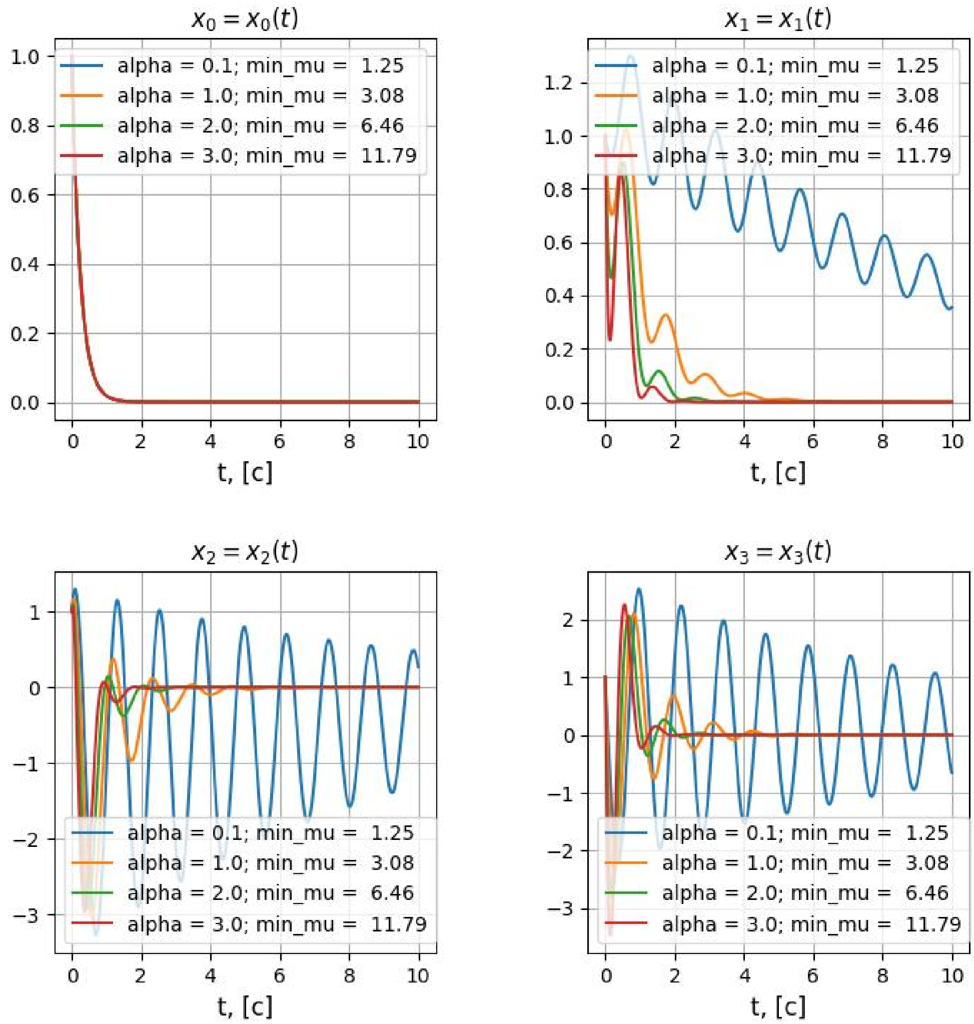

Рис. 5: Результаты моделирования состояний системы для различных α с минимизированным управлением.

2.3 Задание 3

2.3.1 Теория

В этом задании выводится наблюдатель заданной степени устойчивости для системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y) = (A + LC)\hat{x} - Ly \\ \dot{e} = (A + LC)e \end{cases}$$

Для этого достаточно решить систему:

$$\begin{cases} L = Q^{-1}Y \\ Q \succ 0 \\ A^T Q + QA + 2\alpha Q + C^T Y^T + YC \preccurlyeq 0 \end{cases}$$

2.3.2 Результаты

У полученных наблюдателей, собственные числа всегда находятся с небольшим запасом левее α. На рис. 6 видна динамика систем покомпонентно, а на рис. 7 покомпонентная динамика ошибок.

$$\alpha = 0.1; L = \begin{bmatrix} -0.05 \\ -0.03 \\ 0.01 \\ -0.03 \end{bmatrix}; \sigma(A + LC) = \begin{bmatrix} -0.14 + 4.05j \\ -0.14 + -4.05j \\ -0.12 + 3.07j \\ -0.12 + -3.07j \end{bmatrix};$$

$$\alpha = 1.0; L = \begin{bmatrix} 2.40 \\ -3.04 \\ -0.38 \\ -2.35 \end{bmatrix}; \sigma(A + LC) = \begin{bmatrix} -2.64 + 6.01j \\ -2.64 + -6.01j \\ -1.92 + 2.93j \\ -1.92 + -2.93j \end{bmatrix};$$

$$\alpha = 4.0; L = \begin{bmatrix} 53.19 \\ 7.93 \\ 17.02 \\ -31.83 \end{bmatrix}; \sigma(A + LC) = \begin{bmatrix} -5.37 + 12.68j \\ -5.37 + -12.68j \\ -4.87 + 2.89j \\ -4.87 + -2.89j \end{bmatrix};$$

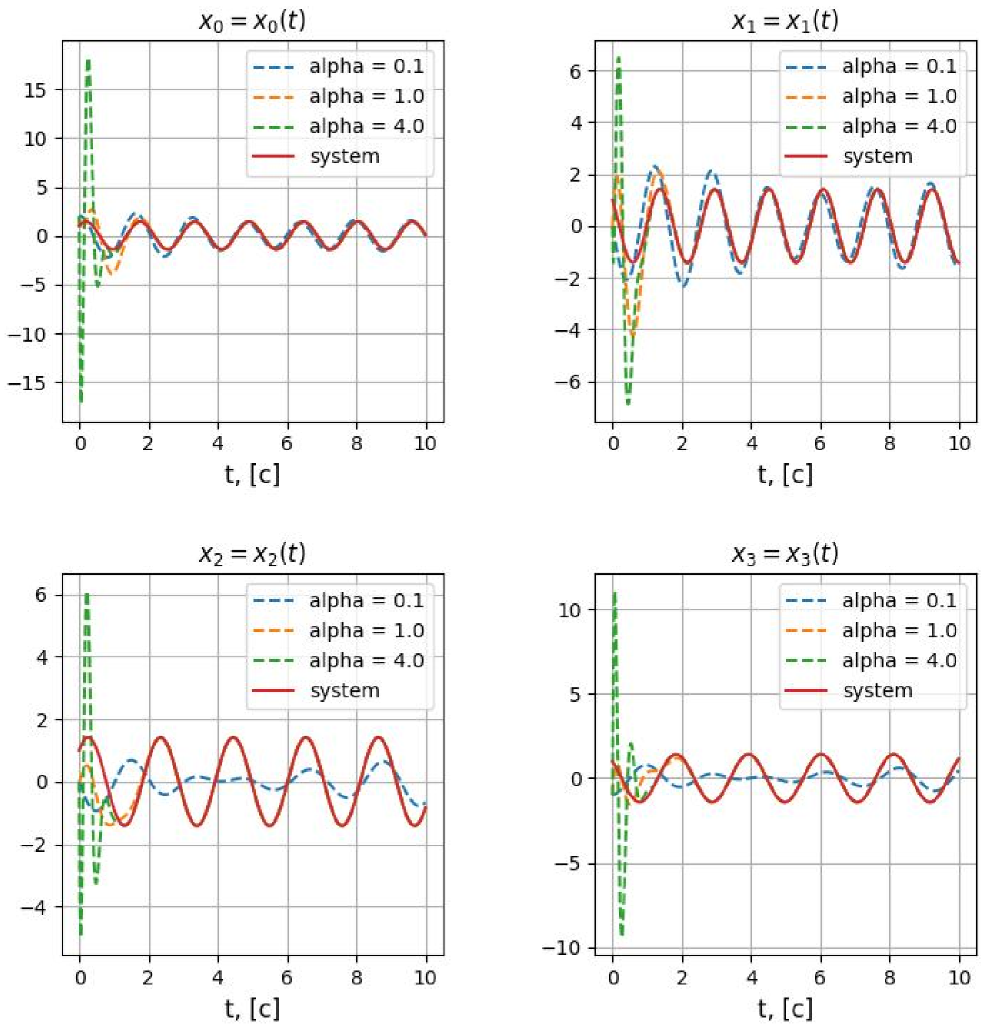

Рис. 6: Динамика наблюдателя и системы.

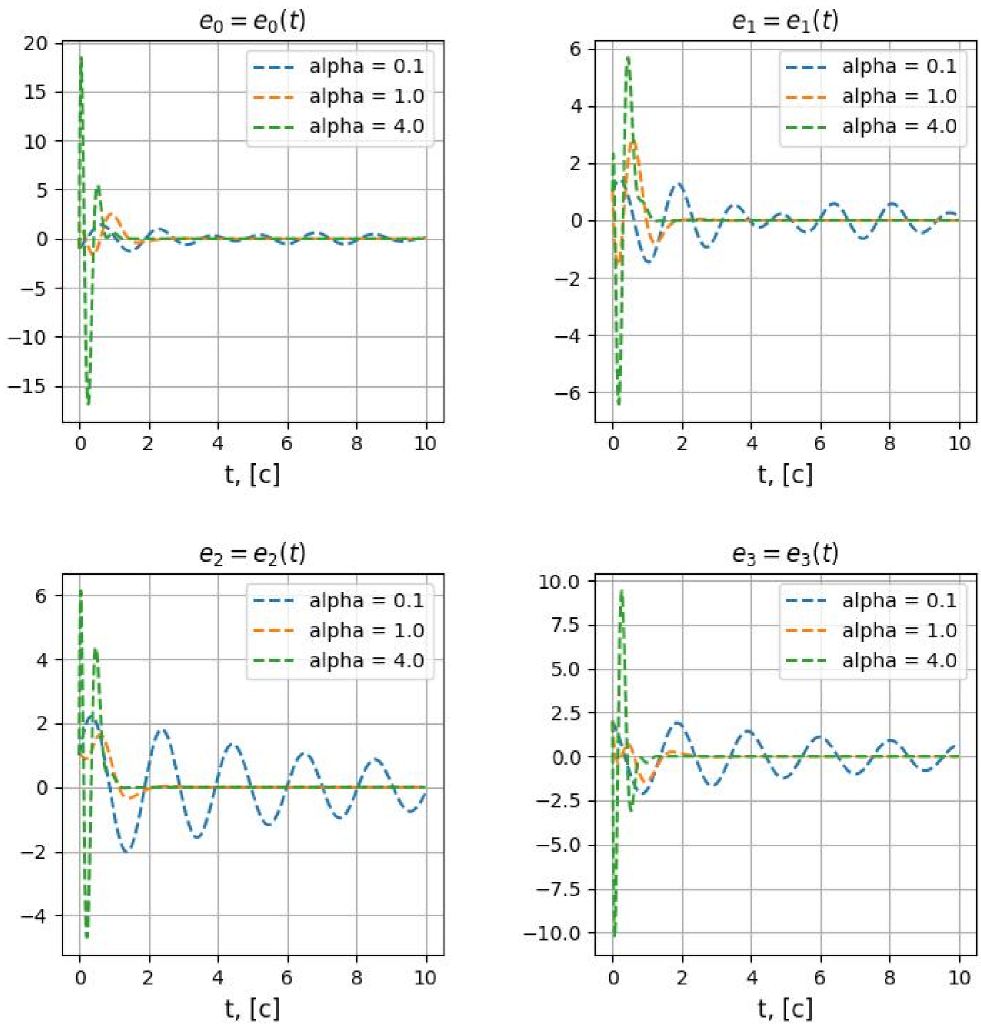

Рис. 7: Динамика ошибки.

Как видно, наблюдатели с большой степень устойчивости сходятся быстрее, но при этом имеют большую начальную ошибку.

2.4 Задание 4

2.4.1 Теория

В этом задании выводится наблюдатель регулятор для системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \\ u = K\hat{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \\ \hat{x} = x - e \\ y = Cx \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Это объединяет задания 1 и 3, описанные выше.

2.4.2 Результаты

По результат (рис. 8) явно видно, что чем больше α, тем быстрее сходится система. При этом, максимальное значение ошибки – растет.

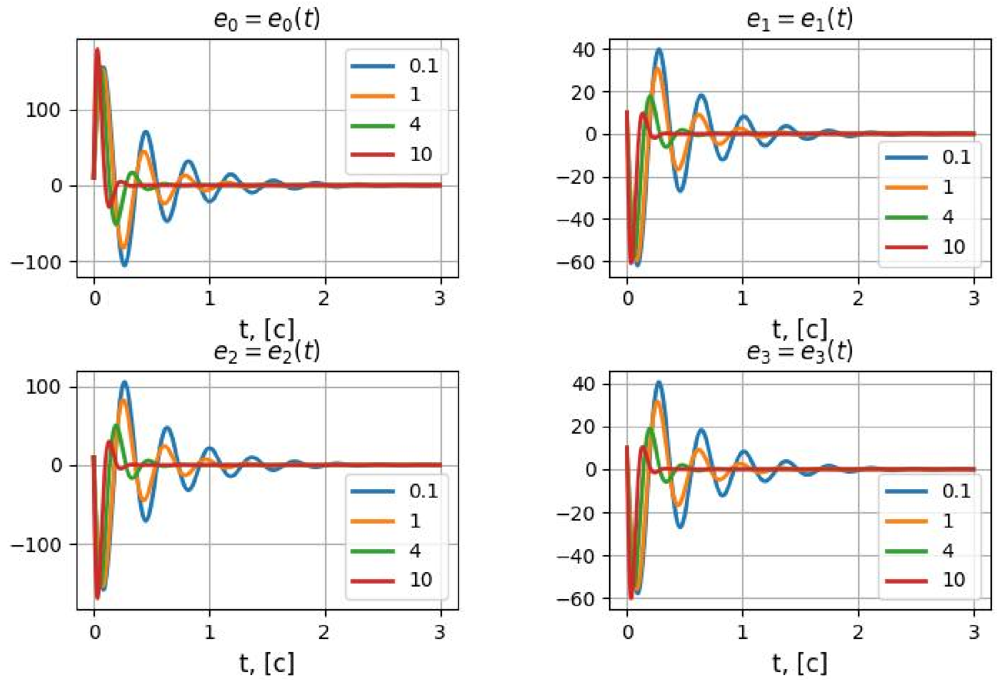

Рис. 8: Результаты моделирования.

3 Заключение

В этой работе были изучены регуляторы с заданной степенью устойчивости.

3.1 Выводы

1. $\max \alpha$ зависит от ближайшего к 0 неуправляемого собственного числа
2. не всегда хорошо иметь большой α у наблюдателя, так как это ведет к большим ошибкам в начале его работы, что плохо для регулятора