ЛР №12 «Слежение и компенсация»

Отчет

Студент
Кирилл Лалаянц
R33352
336700
Вариант - 11

Преподаватель
Пашенко А.В.

Факультет Систем Управления и Робототехники

ИТМО

14.05.2024

Содержание

С исходным кодом можно ознакомиться в репозитории на Github.

1 ГЛАВА 1. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА

1.1 Вывод уравнений

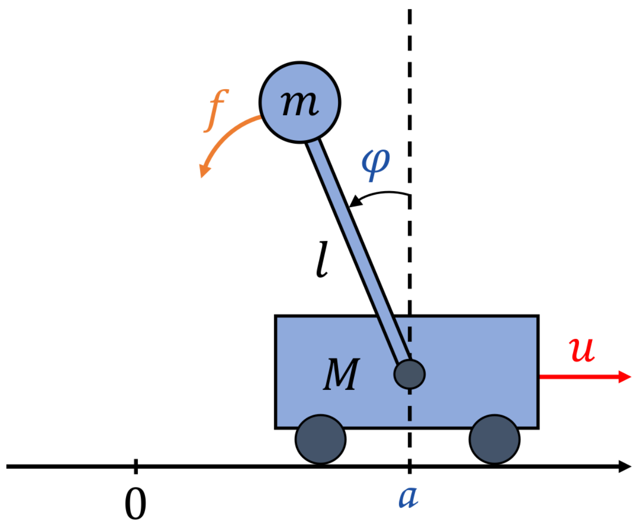

Рис. 1: Перевернутый маятник на тележке.

Рассмотрим систему перевернутого маятника на тележке (рис. 1). Введем следующие обозначения физических величин:

- x – линейная координата тележки;
- $\dot{x}$ – линейная скорость тележки;
- φ – угол отклонения маятника от вертикали;
- $\dot{\varphi}$ – угловая скорость маятника;
- f – вращающий внешний момент, действующий на маятник;
- u – сила действующая на тележку;
- M, m – массы тележки и маятника соответственно;
- l – длина маятника.

В качестве вектора состояния $s = \begin{bmatrix} x & \dot{x} & \varphi & \dot{\varphi} \end{bmatrix}^T$. В роли управляющего воздействия примем u, в роли внешнего возмущения – f.

Измеряемыми сигналами $y = \begin{bmatrix} x & \varphi \end{bmatrix}^T$.

Для вывода математической модели данной физической системы воспользуемся уравнениями Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = u \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = f + mgl\sin(\varphi) \end{cases}, \tag{1}$$

где T – кинетическая энергия системы.

$$T(t) = M\frac{\dot{x}^2}{2} + m\frac{(\frac{d}{dt}(l\cos(\varphi)))^2 + (-\frac{d}{dt}(l\sin(\varphi)) + \dot{x})^2}{2} = (M+m)\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - ml\cos(\varphi)\dot{x}\dot{\varphi} \tag{2}$$

Подставив выражение для T в уравнения 1, получим уравнения математической модели системы:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml(\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 - \cos(\varphi)\ddot{\varphi}) = u \\ ml^2\ddot{\varphi} - ml\ddot{x}\cos\varphi = f + mgl\sin(\varphi) \end{cases} \tag{3}$$

Тогда, выразив $\ddot{a}$ и $\ddot{\varphi}$:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{ml}{M+m}\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{ml}{M+m}\cos(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{M+m}u \\ \ddot{\varphi} = \frac{1}{l}\ddot{x}\cos(\varphi) + \frac{g}{l}\sin(\varphi) + \frac{1}{ml^2}f \end{cases} \tag{4}$$

Решив данную систему уравнений 4 относительно $\ddot{a}$ и $\ddot{\varphi}$:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{M+m\sin(\varphi)^2}(-ml\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 + mg\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \frac{\cos(\varphi)}{l}f + u) \\ \ddot{\varphi} = \frac{1}{M+m\sin(\varphi)^2}(-m\sin(\varphi)\cos(\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{(M+m)g}{l}\sin(\varphi) + \frac{M+m}{ml^2}f + \frac{\cos(\varphi)}{l}u) \end{cases} \tag{5}$$

Представим математическую модель в терминах вектора состояния:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = \frac{1}{M+m\sin(\varphi)^2}(-ml\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 + mg\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \frac{\cos(\varphi)}{l}f + u) \\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} = \frac{1}{M+m\sin(\varphi)^2}(-m\sin(\varphi)\cos(\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{(M+m)g}{l}\sin(\varphi) + \frac{M+m}{ml^2}f + \frac{\cos(\varphi)}{l}u) \\ y_1 = x \\ y_2 = \varphi \end{cases} \tag{6}$$

1.2 Точки равновесия

В точках равновесия все компоненты производной вектора s по времени равны 0 при отсутсвии внешних возмущений и управления.

$$\begin{cases} f = 0 \\ u = 0 \\ \dot{x} = 0 \\ \frac{1}{M+m\sin(\varphi)^2}(-ml\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 + mg\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \frac{\cos(\varphi)}{l}f + u) = 0 \\ \dot{\varphi} = 0 \\ \frac{1}{M+m\sin(\varphi)^2}(-m\sin(\varphi)\cos(\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{(M+m)g}{l}\sin(\varphi) + \frac{M+m}{ml^2}f + \frac{\cos(\varphi)}{l}u) = 0 \end{cases}$$

Упростим выражения, подставив известное

$$\begin{cases} f = 0 \\ u = 0 \\ \dot{x} = 0 \\ \dot{\varphi} = 0 \\ \frac{1}{M+m\sin(\varphi)^2}(mg\cos(\varphi)\sin(\varphi)) = 0 \\ \frac{1}{M+m\sin(\varphi)^2}(\frac{(M+m)g}{l}\sin(\varphi)) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \dot{x} = 0 \\ \varphi = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

Соответственно, система стабильна, когда маятник замер в верхнем или нижнем положении, а тележка стоит на месте в любой точке.

1.3 Линеаризация

Рассматривается тележка с маятником сверху ($\varphi \approx 0; \dot{\varphi} \approx 0$), тогда можно считать: $\sin(\varphi) = \varphi; \cos(\varphi) = 1; \varphi^2 \ll \varphi; \dot{\varphi}^2 \ll \dot{\varphi}$.

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = \frac{1}{M}(mg\varphi + \frac{1}{l}f + u) \\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} = \frac{1}{M}(\frac{(M+m)g}{l}\varphi + \frac{M+m}{ml^2}f + \frac{1}{l}u) \\ y_1 = x \\ y_2 = \varphi \end{cases} \tag{7}$$

Можем представить линеаризованную систему в матричном виде:

$$\begin{cases} \dot{s} = As + Bu + Df \\ y = Cs \end{cases} \tag{8}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{Ml} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{M+m}{Mml^2} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.4 Параметры системы

Далее принимается, что:

$$M = 1, m = 0.1, l = 1, g = 10$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2 ГЛАВА 2. АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

2.1 Анализ матриц

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 3.3 & -3.3 \end{bmatrix}; v(A) = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & 0.0 & -0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & -0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Первые два числа 0, следовательно первая компонента (координата x) не влияет на динамику системы. Есть кратные 0 и положительные числа, следовательно система неустойчивая.

$$rankU = rank[B|AB|\dots|A^{n-1}B] = 4 \rightarrow \text{полностью управляема}$$
$$rankV = rank[C|CA|\dots|CA^{n-1}]^T = 4 \rightarrow \text{полностью наблюдаема}$$

2.2 Передаточные функции

$$\underset{u\rightarrow y}{W} = \begin{bmatrix} \frac{1.0s^2-10.0}{1.0s^4-11.0s^2} \\ \frac{1.0s^2}{1.0s^4-11.0s^2} \end{bmatrix}$$

Динамический порядок – 4; относительный – 2; полюса – [0, 0, $\sqrt{1}1, -\sqrt{1}1$];

$$\underset{f\rightarrow y}{W} = \begin{bmatrix} \frac{1.0}{1.0s^2-11.0} \\ \frac{11.0}{1.0s^2-11.0} \end{bmatrix}$$

Динамический порядок – 2; относительный – 2; полюса – [$\sqrt{1}1, -\sqrt{1}1$];

Все функции описывают расходящиеся процессы.

2.3 Линейное моделирование

Ниже (рис. 2– 4) приведены графики при различных начальных условиях. Видно, что линейное ускорение тележки влияет только на координату. Если же задавать начальный угол или начальную угловую скорость маятника отличную от 0, то система улетает в бесконечность.

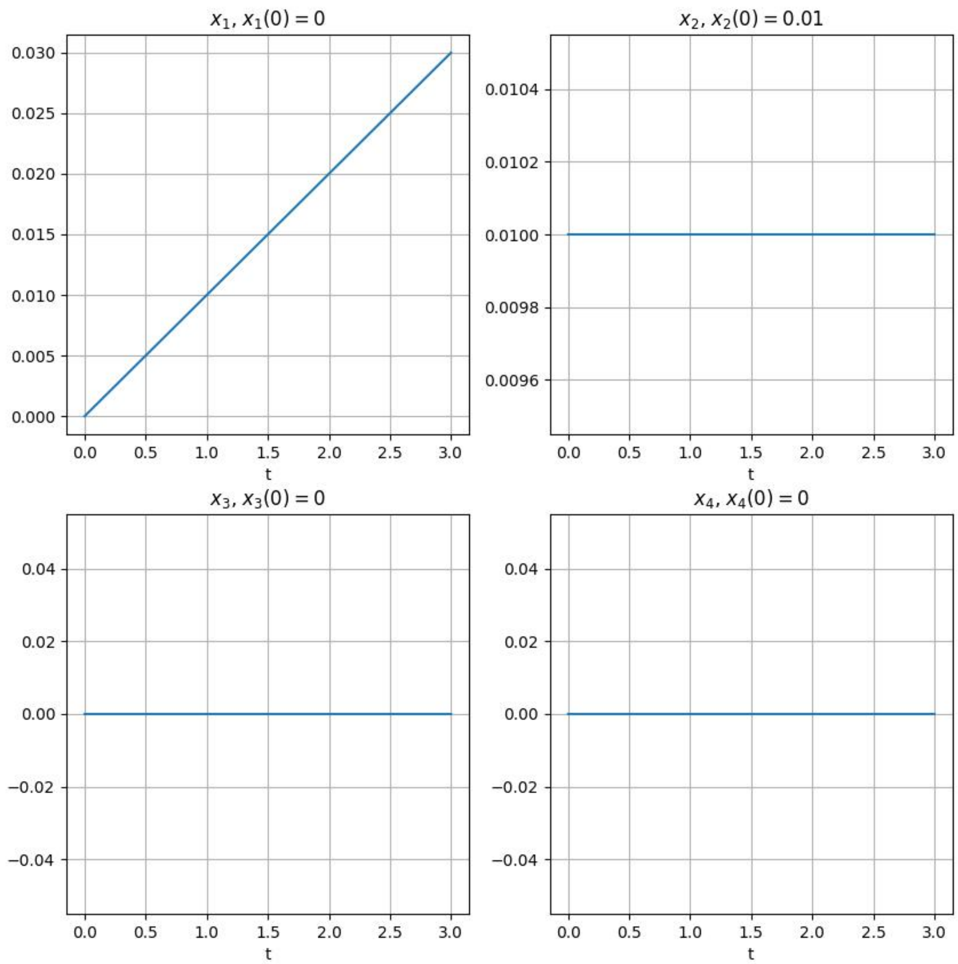

Рис. 2: Динамика системы.

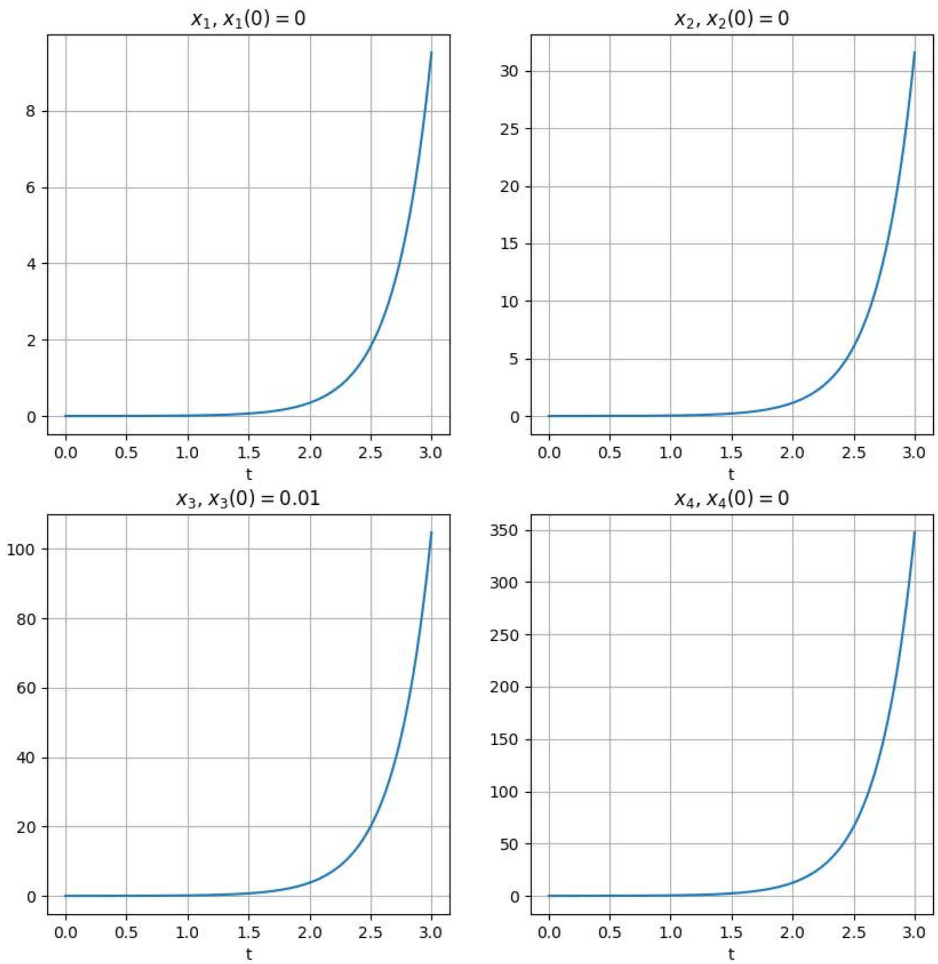

Рис. 3: Динамика системы.

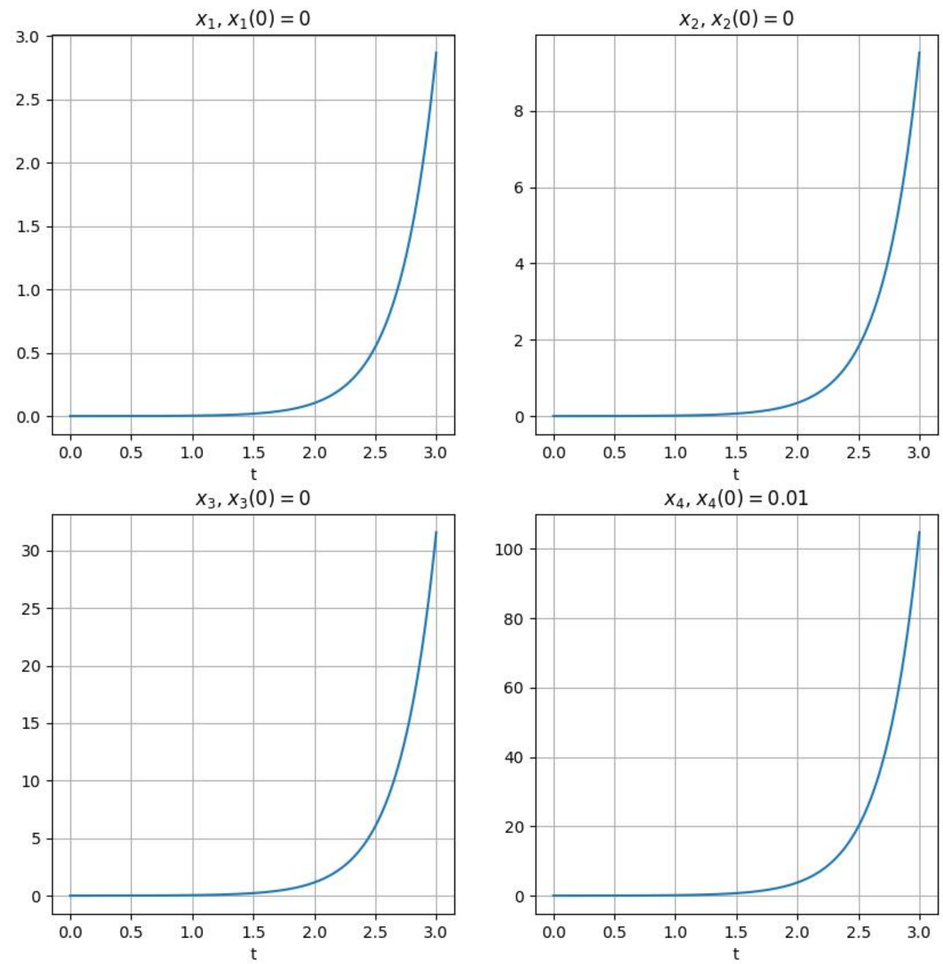

Рис. 4: Динамика системы.

2.4 Нелинейное моделирование

Ниже (рис. 5– 7) приведены графики при различных начальных условиях. Заметно, что сначала поведение систем схоже, но при удалении от точки равновесия по углу начинают быть заметны отличия.

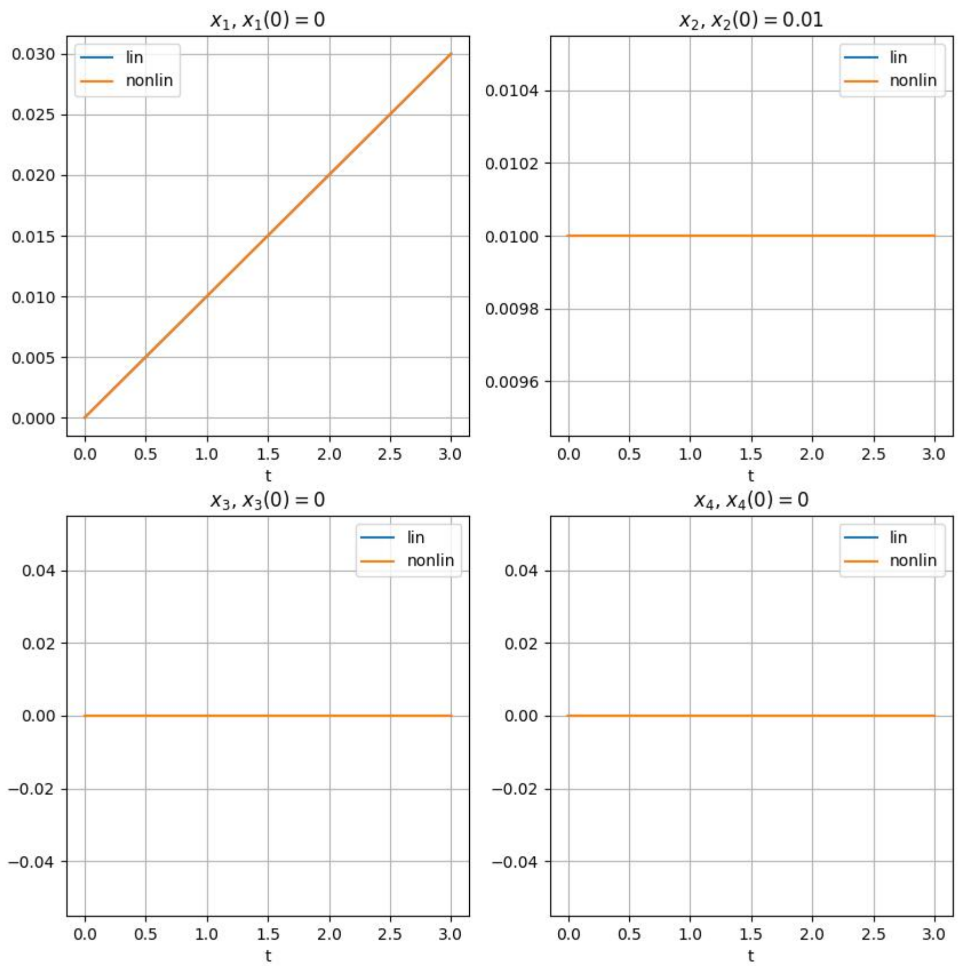

Рис. 5: Динамика системы.

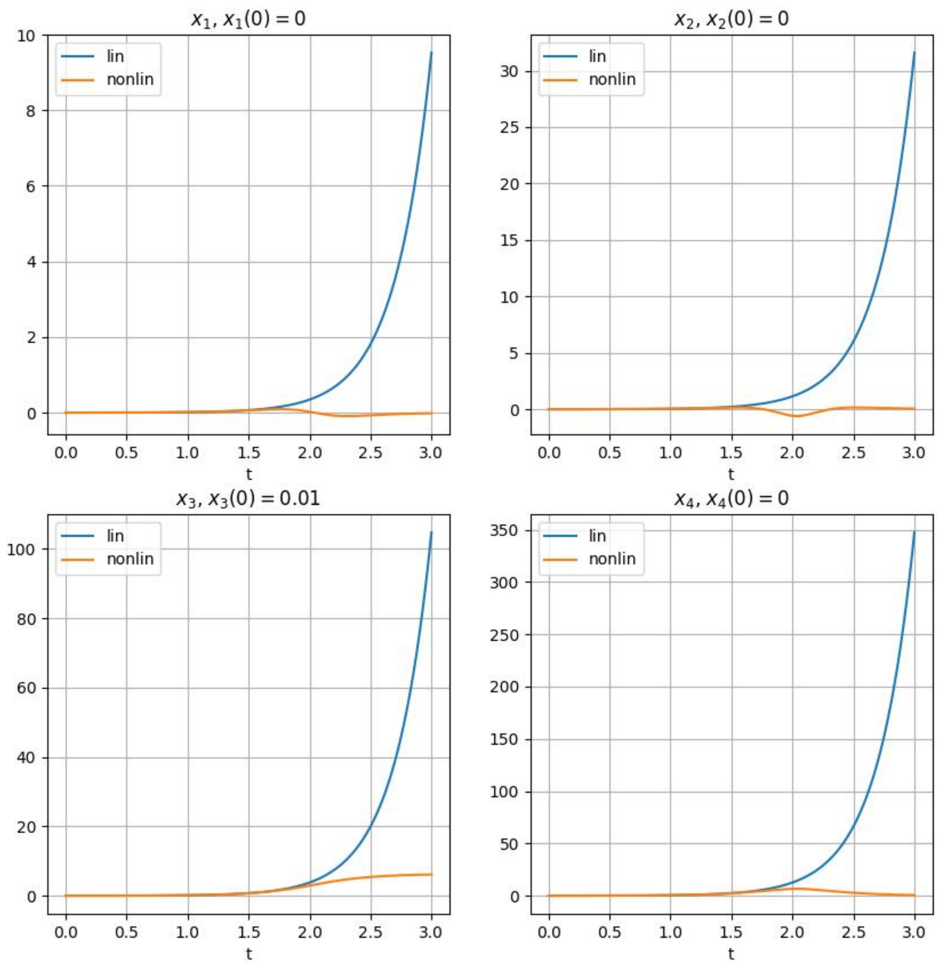

Рис. 6: Динамика системы.

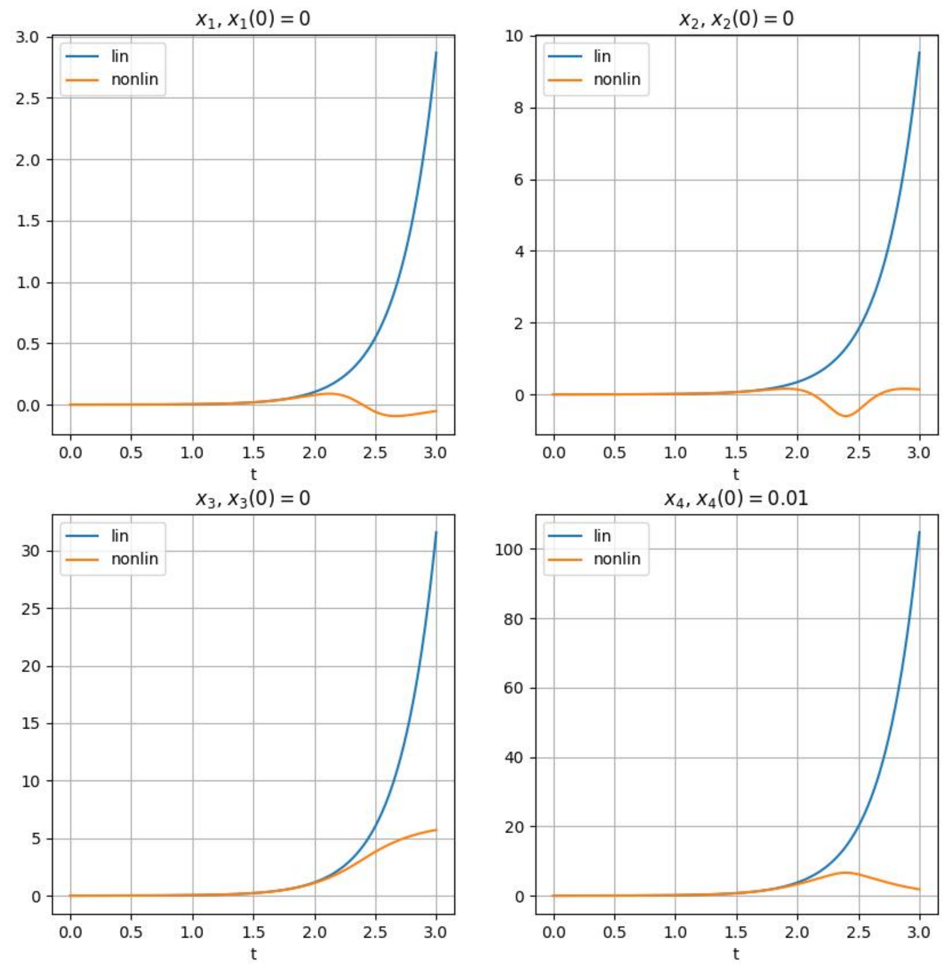

Рис. 7: Динамика системы.

3 ГЛАВА 3. СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА: МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

3.1 Синтез регулятора по состоянию

В этом задании выводится модальный регулятор для системы:

$$\begin{cases} \text{Объект управления: } \dot{x} = Ax + Bu \\ \text{Регулятор: } u = Kx \end{cases} \rightarrow \dot{x} = Ax + BKx = (A + BK)x$$

Для этого подбирается матрица $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ с желаемыми собственными числами и матрица $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, такая что пара $(\mathbb{Y}, \Gamma)$ наблюдаема. После чего по подобию:

$$A + BK = P\Gamma P^{-1} \rightarrow \begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases}$$

Получен регулятор:

$$K = \begin{bmatrix} 2.40 & 5.00 & -48.40 & -15.00 \end{bmatrix}$$

$$spec(A + BK) = \begin{bmatrix} -4.00 & -3.00 & -2.00 & -1.00 \end{bmatrix}$$

Он подходит для нелинейной системой, если φ близко к 0. Чем дальше от 0 – тем хуже справляется. Угловое ускорение такое сильное влияние не оказывает.

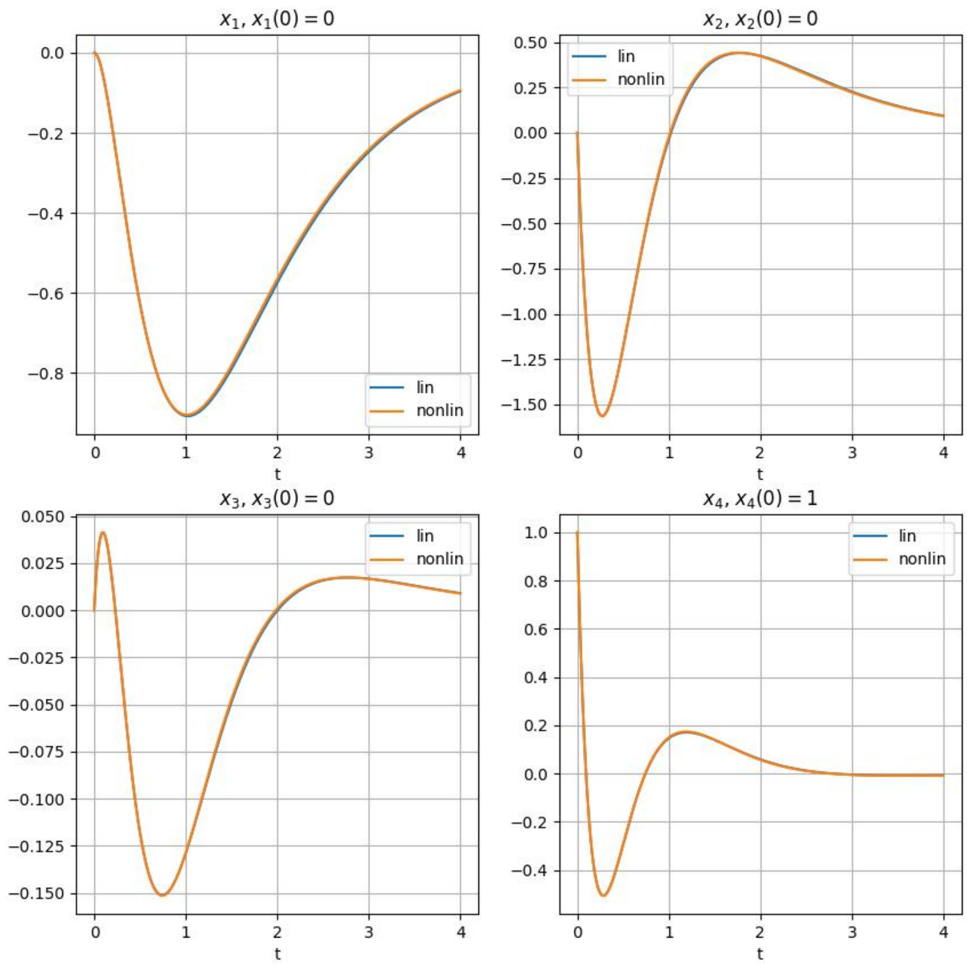

Рис. 8: Динамика системы.

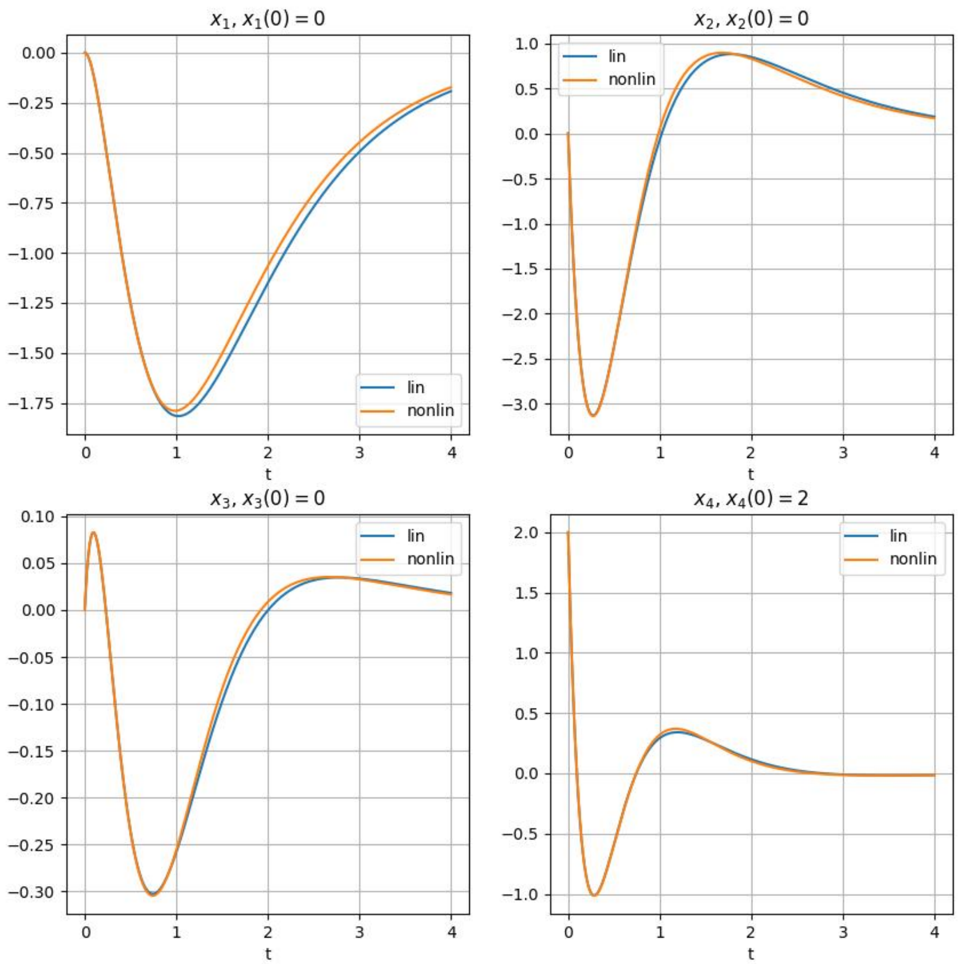

Рис. 9: Динамика системы.

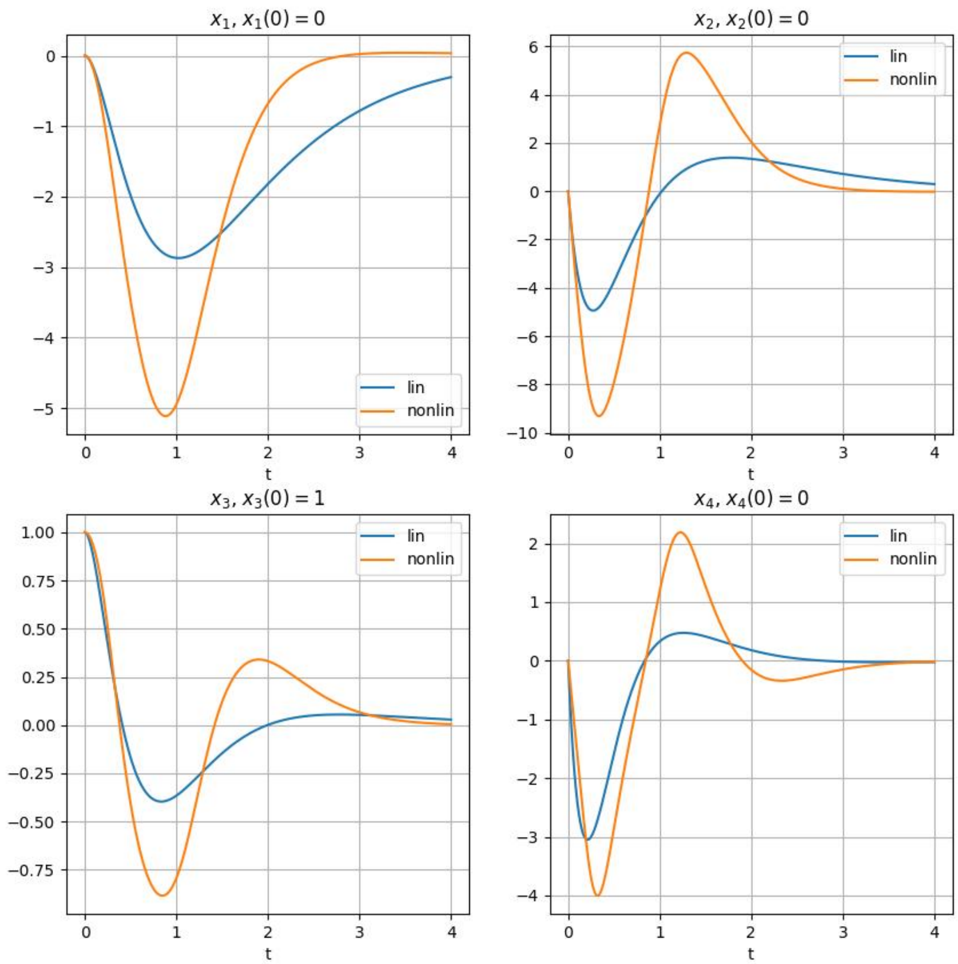

Рис. 10: Динамика системы.

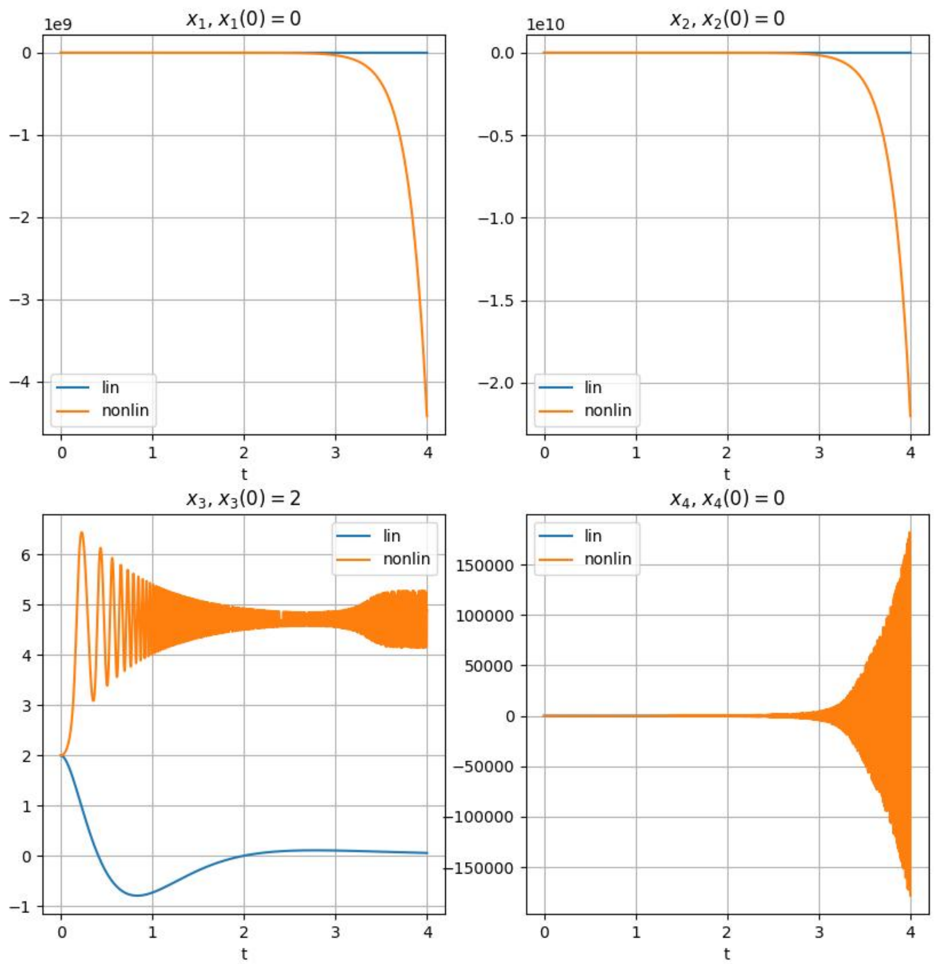

Рис. 11: Динамика системы.